

N° d'ordre : 42 / 2012-M / MT

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENNE  
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES**



**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER  
en Mathématiques**

Filière : Mathématiques

Spécialité : Systèmes Dynamiques et Géométrie

Par

**KAFI Abdelghani**

**THÈME**

**DÉFORMATION AXISYMÉTRIQUE D'UNE PLAQUE FISSURÉE  
DÉLIMITÉE PAR DEUX SUPPORTS CIRCULAIRES RIGIDES**

Soutenu publiquement, le 24 Juin 2012 devant le jury composé de:

M. R. BEBBOUCHI	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Président.
M. B. KEBLI	Professeur	à l'E. N. P. El-Harrach	Directeur de Mémoire.
M. A. KESSI	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Examineur.
M. N. HANNOUN	Maître de Conférences /A	à l'U.S.T.H.B.	Examineur.

# Remerciements

Premièrement je remercie DIEU, pour m'avoir aider à réussir dans mes études, particulièrement à la réalisation de ce mémoire de magister.

Je tiens à remercier mon directeur de thèse : Monsieur **KEBLI Belkacem**, le directeur de ce mémoire, pour la disponibilité et la patience dont il fait preuve durant tout le temps qu'a duré ce travail, et je lui souhaité plus des succès dans la recherche. Qui m'a dirigé durant ce travail, et je lui suis reconnaissant pour ses encouragements, son enthousiasme et sa confiance.

Je veux également remercier Monsieur R. BEBBOUCHI, Professeur à l'université des sciences et de la technologie houari boumedienne. Je lui suis aussi reconnaissant d'avoir accepté de présider le jury de thèse et d'évaluer mon travail en qualité d'examineur.

Je remercie cordialement Monsieur A. KESSI, Professeur à l'université des sciences et de la technologie houari boumedienne d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

Je remercie Monsieur N. HANNOUN, Maître de Conférences "A" à l'université des sciences et de la technologie houari boumedienne d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

Je remercie aussi Monsieur ADJABI Yassine, Maître de Conférences "B" à l'université de Boumerdès pour ses conseils et ses aides sur le plan expérimental pendant la période de ma thèse.

---

*Je voudrais également remercier Mr. Barkane Soleimane pour son aide dans la réalisation des résultats de la partie numérique.*

*Ma reconnaissance s'adresse également à Monsieur A. TRADKHOUDJA, pour ses conseils et ses aides sur le plan expérimental pendant la première période de ma thèse.*

*Un sincère remerciement à Monsieur L. BENAYSSA qui m'a consacré un peu de son temps à ma rédaction. Merci à Melles TIFA HADJA Yamina, GUERFI Ibtesseme, et OIRTI Mohamed et M. KHOUALDIA Amar, qui m'ont aidé à relire la thèse.*

*J'adresse mes remerciements à toute l'équipe du systèmes dynamiques : les étudiants-chercheurs, les enseignants - chercheurs, les techniciens et mes collègues enseignants pour tous les échanges techniques, scientifiques et pour leur sympathie, leur accueil chaleureux pendant ces trois ans de thèse.*

*Merci à tous mes amis pour leur amitié et notamment à mes colocataires: HEMAISIA –Ridha, HAMROUNI – Ahmed avec qui, j'ai partagé des bons et mauvais moments. Merci à vous tous pour les agréables occasions passées à CVD .*

*Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier **mes parents, mes frères et ma sœur, mon marie et mes enfants** : **AYOUB –El akrami** et **HIBAT-Rahman** pour leurs soutient tout au long de mes études.*

# Déformation axisymétrique d'une plaque fissurée délimitée par deux supports circulaires rigides

## Résumé

---

Nous proposons une solution analytique pour un problème axisymétrique d'une couche élastique ayant une fissure circulaire. La couche est bornée partiellement par deux supports circulaires rigides. Une pression uniforme est exercée le long de la fissure circulaire. Ainsi, le contact entre les deux supports et le milieu élastique est supposé être lisse. Pour cela, les contraintes de cisaillement sont alors négligées. Ce problème de doublement mixte aux limites est transformé en un système d'équations intégrales duales en étulisant la méthode de la transformation intégrale de Hankel. À l'aide de la formule de Gegenbauer et grâce à certaines formules intégrales, ce dernier système est réduit à un système algébrique infini d'équations. Le déplacement et la contrainte normale ont été exprimés par des séries appropriées, et les courbes sont calculées numériquement. L'épaisseur et les effets du rayon de la fissure sur les contraintes et le déplacement sont discutés.

**Mots clés:** couche élastique, fissure en forme de Penny, problème doublement mixte aux limites, système d'équations intégrales duales, facteur d'intensité de la contrainte.

---

# A Penny-Shaped Crack in an Elastic Layer Bounded By Two Circular and Rigid Supports

## Abstract

---

An analytical solution is proposed for an axisymmetric problem of an elastic layer with a penny-shaped crack situated in its middle plane. The layer is partially bounded by two rigid circular plates.

A uniform pressure is exerted along the circular crack. The contact between the two plates and the elastic medium is assumed to be smooth, while the shear stresses are then neglected.

This doubly mixed boundary-value problem is transformed to a system of dual integral equations by the Hankel integral transform method. Using some integral formulas with the help of the Gegenbauer's formula, the latter system is reduced to infinite systems of algebraic equations. The displacement and normal stress were expressed as appropriate series, the curves are calculated numerically. The thickness and the crack radius effects on the stress and displacements are discussed.

**Keywords** : elastic layer, Penny-shaped crack, doubly mixed boundary problem, system of dual integral equations, stress intensity factor.

---

# Liste des figures

<b>Figure</b>	<b>Signification</b>	<b>Page</b>
Figure 1.1	Graphes de quelques fonctions de Bessel	12
Figure 1.2	Géométrie du problème	24
Figure 2.1	Etablissement du système d'équilibre	33
Figure 2.2	Orientation des contraintes	34
Figure 2.3	Moments de forces	36
Figure 2.4	Système d'équilibre en coordonnées cylindriques	37
Figure 2.5	Etablissement du système d'équilibre	38
Figure 2.6	Etablissement du système d'équilibre(condition au limite)	39
Figure 2.7	Conditions d'équilibre sur les moments	40
Figure 2.8	Déformation d'élément de volume élémentaire (parallepipede)	41
Figure 2.9	Module de cisaillement $G$	44
Figure 2.10	Problème de conduction thermique	51
Figure 2.11	Problème de d'une plaque élastique affaibli par une fissure	54
Figure 2.12	Problème de d'une plaque élastique affaibli par deux fissures	56
Figure 3.1	Géométrie du problème pour une conduction thermique	67
Figure 3.2	Géométrie du problème pour une conduction thermique	70
Figure 4.1	Géométrie du problème	79
Figure 4.2	La géométrie du problème d'une plaque d'épaisseur $h$	80
Figure 4.3	La distribution du $(\frac{w_z}{\eta\rho_0})_z$ pour $b = 1.5$ et $h = 1.5$	93
Figure 4.4	La distribution du $(\frac{\sigma_z}{\rho_0})_z$ pour $b = 1.5$ et $h = 1.5$	94
Figure 4.5	La variation du $(w^*)_{z=0}$ pour $h$ , ( $b = 1.5$ )	94
Figure 4.6	La variation du $(w^*)_{z=0}$ pour $b$ , ( $h = 1.5$ )	95

## Liste des figures

<b>Figure</b>	<b>Signification</b>	<b>Page</b>
Figure 4.7	La variation du $(w^*)_{z=h}$ pour $h$ , ( $b = 1.5$ )	95
Figure 4.8	La variation du $(w^*)_{z=h}$ pour $b$ , ( $h = 1.5$ )	95
Figure 4.9	La variation du $(\sigma_z^*)_{z=0}$ pour $h$ , ( $b = 1.5$ )	96
Figure 4.10	La variation du $(\sigma_z^*)_{z=0}$ pour $b$ , ( $h = 1.5$ )	96
Figure 4.11	La variation du $(\sigma_z^*)_{z=h}$ pour $h$ , ( $b = 1.5$ )	96
Figure 4.12	La variation du $(\sigma_z^*)_{z=h}$ pour $b$ , ( $h = 1.5$ )	97
Figure 4.13	La variation du $S_0$ pour $b = 1.5$	97
Figure 4.14	La variation du $S_0$ pour $h = 1.5$	97
Figure 4.15	La variation du $S_h$ pour $b = 1.5$	98
Figure 4.16	La variation du $S_h$ pour $h = 1.5$	98
Figure A.1	Modes de propagation des fissures	102
Figure B.1	Fisure dans les coordonnées $(r, \theta)$	104
Figure B.2	Fissure sous le mode I	106
Figure B.3	Edge crack in a finite plate under uni axial stre	107
Figure B.4	A slanted crack in a thin plate under biaxial load	108
Figure B.5	Penny-shaped crack in an infinite domain under uniaxial tension	108

## Liste des tableaux

<b>Tableau</b>	<b>Signification</b>	<b>Page</b>
Tableau 2.1	Constantes élastique	46
Tableau 4.1	Valeurs de coefficients $\alpha_n^*$ et $\beta_n^*$ pour $h=0.5, 1$ respectivement	92
Tableau 4.2	Valeurs de coefficients $\alpha_n^*$ et $\beta_n^*$ pour $h=1.5, 2$ respectivement	93

## Liste des principales notations

Notation	Signification	1 <sup>ère</sup> formule
$(x, .y)$	Coordonnées Cartésiennes	(1.17)
$\rho, \theta$	Coordonnées Polaires	(1.17)
$F_\nu$	La transformation de Hankel d'ordre $\nu$	(1.25)
$f_\nu$	La transformation inverse de Hankel d'ordre $\nu$	(1.26)
$K$	Noyaux de l'équation intégrale	(1.29)
$U_k$	Fonction auxiliaire	(1.31)
$P_K, Q_K$	Fonctions continues	(1.32)
$\lambda$	Paramètre	(1.38)
$\Delta u$	Opérateur de Laplace	(1.41)
EDP	Equation au dérivée partielle	
M.M.C	Mécanique des milieux continus	
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales [MPa]	(2.8)
$dx, dy, dz$	Volumes d'arrêtes	(2.2)
$F_x, F_y, F_z$	Forces volumiques [N]	(2.4)
$\tau_{xz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}$	Contraintes tangentiels [MPa]	(2.8)
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations en Coordonnées Cartésiennes	(2.20)
$\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{yz}$	Déformations en Coordonnées Cylindriques	(2.21)
$l$	Longueur de la tige	(2.22)
$\Delta l$	Allongement absolu[m]	(2.22)
$\nu$	Coefficient de Poisson	(2.22)
$\tau$	Contrainte de cisaillement	(2.23)
$F$	La force [N]	
$S$	L'aire [m <sup>3</sup> ]	
$d$	Déplacement latéral	(2.23)

## Liste des principales notations

Notation	Signification	1 <sup>ère</sup> formule
$\gamma$	L'écart	(2.23)
$h$	L'épaisseur [mm]	(2.23)
$G$	Module de cisaillement [MPa]	(2.23)
$E$	Module de Young [MPa]	(2.24)
$\lambda$	Coefficient de Lamé	(2.28)
$\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta$	Dilatation volumique	(2.28)
$u_r, u_\theta, u_z$	Composantes de déplacements[m]	(2.31)
$\mathfrak{K}$	Kappa (Constante de Mash)	(2.34)
$\phi_0, \phi_3$	Fonctions de Boissinesq's	(3.8)
$T_n, U_n$	Polynomes de Tchebychev	(3.10)
$\delta_{nm}$	Symbole de Kronecker	(3.24)
$h$	Epaisseur de la couche[m]	(4.3)
$b, a$	Rayon de la fissure[m] et rayon du support	(4.3)
$A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda), D(\lambda)$	Constants dépend de $\lambda$	(4.4)
$\eta$	Constante élastique	(4.7)
$\alpha_n, \beta_n$ et $\alpha_n^*, \beta_n^*$	Coefficients	(4.15, 4.17, 4.18)
$S_h$	Facteur d'intensité de contrainte	(4.27)
$si$	Fonction sinus intégrale	(4.36)
$ci$	Fonction cosinus intégrale	(4.37)
EI	Equation intégrale	A.
ED	Equation différentielle	A.
EDO	Equation différentielle ordinaire	A.1

# Table des matières

Liste des figures	v
Liste des tableaux	vi
Liste des principales notations	vii
Introduction générale	1
<b>1 Rappels mathématiques</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Équation et fonctions de Bessel . . . . .	6
1.2.1 Relations générales . . . . .	8
1.2.2 Relations de dérivations . . . . .	8
1.2.3 Comportement à l'origine . . . . .	9
1.2.4 Comportement à l'infini . . . . .	10
1.2.5 Limites des fonctions de Bessel . . . . .	11
1.2.6 Relations entre quelques fonctions trigonométriques . . . . .	11
1.2.7 Représentation intégrale de quelques fonctions de Bessel . . . . .	11
1.2.8 Représentation graphique de quelques fonctions de Bessel . . . . .	12
1.3 Transformation de Hankel . . . . .	12
1.3.1 Domaine de définition . . . . .	15
1.3.2 Orthogonalité . . . . .	15
1.3.3 Relation avec la transformée de Fourier . . . . .	16
1.4 Équations intégrales . . . . .	17

1.4.1	Équation intégrale de Volterra . . . . .	17
1.4.2	Méthodes de résolution . . . . .	18
1.4.3	Équation intégrale de Fredholm . . . . .	21
1.4.4	Équation intégrale de Schlomilch . . . . .	24
1.4.5	Transformation des équations intégrales duales en une équation de Fredholm . . . . .	24
1.5	Relation entre les EI et les ED . . . . .	27
1.5.1	Quelques applications aux EDO . . . . .	27
1.5.2	Réduction du problème à valeurs initiales à une équation de Volterra	28
1.6	Conclusion . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Élasticité linéaire</b>	<b>31</b>
2.1	Introduction . . . . .	32
2.2	Établissement du système d'équilibre . . . . .	32
2.2.1	Système d'équilibre en coordonnées Cartésiennes . . . . .	33
2.2.2	Système d'équilibre en coordonnées cylindriques . . . . .	37
2.3	Théorie de la déformation . . . . .	41
2.3.1	En coordonnées Cartésiennes . . . . .	41
2.3.2	En coordonnées cylindriques . . . . .	43
2.4	Constantes élastiques . . . . .	43
2.4.1	Coefficient de Poisson “ $\nu$ ” . . . . .	43
2.4.2	Module de cisaillement “ $G$ ” . . . . .	44
2.4.3	Module de Young “ $E$ ” . . . . .	45
2.4.4	Tableau de quelques constantes élastiques . . . . .	46
2.5	Loi de Hooke . . . . .	46
2.5.1	En coordonnées cartésiennes . . . . .	47
2.5.2	En coordonnées cylindriques . . . . .	47
2.6	Application analytique de la méthode de transformation intégrale en élasticité	50
2.6.1	Problème de conduction thermique . . . . .	50
2.6.2	Problème d'une plaque élastique affaibli par une fissure . . . . .	53
2.6.3	Problème d'une plaque élastique affaiblie par deux fissures . . . . .	55

2.7 Conclusion . . . . .	58
<b>3 Applications et méthodes de résolutions</b>	<b>59</b>
3.1 Introduction . . . . .	60
3.2 Méthodes de résolution d'un système d'équilibre . . . . .	61
3.3 Résolution des équations intégrales duales . . . . .	64
3.3.1 Polynômes de Tchebychev . . . . .	64
3.3.2 Formules intégrales (produit des fonctions de Bessel) . . . . .	65
3.4 Méthodes de résolution . . . . .	66
3.4.1 Méthode de Hara . . . . .	66
3.4.2 Méthode de Sakamoto . . . . .	71
3.5 Résolution numérique du système algébrique infini . . . . .	72
3.6 Conclusion . . . . .	76
<b>4 Formulation et résolution du problème</b>	<b>77</b>
4.1 Introduction . . . . .	78
4.2 Formulation mathématique du problème . . . . .	78
4.2.1 Hypothèses et établissement du système d'équilibre . . . . .	78
4.2.2 Géométrie et description du problème . . . . .	79
4.2.3 Conditions aux limites du problème . . . . .	80
4.3 Résolution numérique . . . . .	80
4.3.1 Exprimons $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ en fonction de $C(\lambda)$ et $D(\lambda)$ . . . . .	81
4.3.2 Détermination des composantes des déplacements et des contraintes . . . . .	82
4.3.3 Détermination des équations intégrales duales . . . . .	83
4.3.4 Détermination de $C(\lambda)$ et $D(\lambda)$ . . . . .	86
4.4 Résultats numériques et discussion . . . . .	91
4.5 Conclusion . . . . .	99
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>100</b>
Conclusion générale . . . . .	100
Perspectives . . . . .	100

<b>Annexe</b>		<b>101</b>
A.	Les fissures . . . . .	101
A.1	Introduction . . . . .	101
A.2	Définitions et modélisation de la fissure . . . . .	101
A.3	Les modes de propagation des fissures . . . . .	102
A.4	Champ de contraintes en pointe de fissure . . . . .	103
B.	Facteur d'intensité de contrainte . . . . .	104
B.1	Introduction . . . . .	104
B.2	Facteurs d'intensité de contrainte pour divers modes . . . . .	105
B.3	Propriétés . . . . .	106
C.	Programmes numériques . . . . .	109
C.1	Programme de calculs les coefficients $\alpha_n^*$ et $\beta_n^*$ . . . . .	109
C.2	Programme de la distribution du $(\frac{w_z}{\eta\rho_0})_z$ pour $b$ , ( $h = 1.5$ ). . . . .	111
C.3	Programme de la variation du $(\frac{w_z}{\eta\rho_0})_z$ pour $b$ , ( $h = 1.5$ ). . . . .	113
C.4	Programme de la variation du $(\sigma_z^*)_{z=h}$ pour $b$ , ( $h = 1.5$ ). . . . .	115
C.5	Programme de la distribution du $(\frac{\sigma_z}{\rho_0})_z$ pour $b = 1.5$ et $h = 1.5$ . . . . .	116
<b>Bibliographie</b>		<b>117</b>

# Introduction générale

Ces dernières années, des efforts considérables ont été consacrés à l'étude des fissures dans des solides, qui sont produites pour de nombreuses raisons comme : des défauts dans les matériaux, des insuffisances dans la conception et des déficiences dans la construction ou l'entretien, et à cause à des opérations de chargement ou de l'environnement.

## Synthèse bibliographique

Plusieurs problèmes dans l'ingénierie des sciences mathématiques appliquées sont formulées en termes de problèmes doublement mixtes. Ces problèmes sont traités en utilisant l'approche de l'équation intégrale de Fredholm.

Les problèmes de poinçonnement et de fissuration sont des domaines d'étude essentiels en mécanique des solides.

Ils sont formulés comme des problèmes doublement mixtes aux limites, et ils sont réduits à d'équations intégrales duales.

Harding et Sneddon [20] ont considéré le problème d'un poinçonnement rigide pour un demi espace élastique .

Alors que Lebedev et Ufliand [26] ont considéré le cas d'une plaque épaisse.

Ce type de problème aux conditions mixtes se ramène généralement à des systèmes d'équations intégrales duales, qui sont traités en utilisant l'approche de l'équation intégrale de Fredholm.

Une solution analytique est présentée par Sakamoto et Koboyashi [40, 41] d'un problème de contact axisymétrique d'une couche élastique. La couche est considérée soumise à une contrainte de traction uniforme s'exerçant une région circulaire. Les équations intégrales duales correspondantes sont obtenues à l'aide des conditions aux limites mixtes du problème, et la résolution se déduisent à partir d'un système algébrique infini.

Plusieurs travaux ont traité le cas de problèmes doublement mixte aux limites. Dhaliwal [10] a étudié le problème thermique d'une couche épaisse. Ainsi, Kuzmin et Ufliand [24] ont résolu le problème d'une couche élastique poinçonnante par deux cylindriques rigides.

Low [29] a considéré le problème d'un poinçonnement circulaire sur une couche élastique reposante sur une fondation qui a un trou circulaire. Tous ces problèmes sont réduits à un système d'équations intégrales duales qui sont transformées en un système d'équations intégrales duales de Fredholm.

Concernant le travail présenté par Hara et Akiyama [18], il se rapporte au travail de Low mais en utilisant une approche différente. Ils ont trouvé les deux fonctions inconnues en transformant l'équations intégrales duales à un système algébrique infini.

Notre étude est inspirée par le travail de Sakamoto [42] : problème axisymétrique d'une couche isotrope et élastique, contenant une fissure circulaire de rayon  $2b$  et subissant une pression interne et uniforme. Son étude considère le cas de surfaces libres de charges et le cas où les frontières du milieu élastique sont délimitées par deux plaques rigides et lisses. Ces problèmes aux conditions mixtes sont ramenés à un système d'équations intégrales duales. Contrairement à la méthode classique, ces dernières équations intégrales sont réduites à un système infini d'équations algébriques, ce qui a permis d'obtenir des expressions analytiques pour les déplacements et les contraintes en fonction des coefficients du système algébrique. Les équations sont données sous forme d'intégrales. Ces dernières sont décomposées, et calculées comme suites: la première partie est évaluée numériquement par la règle de Simpson avec  $\lambda_0 = 1500$  alors que, la seconde intégrale a été remplacée par son expression asymptotique en tenant compte de l'équivalent à l'infini de la fonction de Bessel. Les effets de l'épaisseur de la couche élastique et des conditions aux limites sur le déplacement, la contrainte normale et le facteur d'intensité de contrainte ont été examinés. Les calculs numériques ont été effectués dans les trois cas :  $h/a = 0.7$ ,  $h/a = 1$ ,  $h/a = 1.5$  et  $a = 1$ .

### **Description du problème**

Dans cette étude, nous proposons une solution analytique pour un problème axisymétrique d'une plaque élastique fissurée au milieu. La plaque est partiellement bornée par deux supports circulaires rigides. Une pression uniforme est appliquée sur le long de la fissure. Nous admettons que le contact entre les deux supports et le milieu élastique est lisse. Les con-

traînes de cisaillement sont alors négligables. Ce problème aux limites est transformé en un système d'équations intégrales duales par la méthode de la transformation intégrale de Hankel. A l'aide de la formule de développement de Gegenbauer de la fonction de Bessel et grâce à certaines formules intégrales, ce dernier système est réduit à un système algébrique infini. Le déplacement et la contrainte normale ont été exprimés par des séries appropriées. Dans l'application numérique, nous donnons quelques conclusions sur l'effet de l'épaisseur de la couche  $h$  et le rayon  $b$  de la fissure sur la distribution de : le déplacement, la contrainte normale et le facteur d'intensité de contrainte.

### **Organisation du mémoire**

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres. Le premier rappellera l'importance des fonctions de Bessel, la transformation intégrale de Hankel, et les équations intégrales qui seront présentées tout au long de cette thèse. Ainsi, nous allons présenter la liaison entre les EI linéaires et les ED linéaires.

Le deuxième chapitre présentera les notions élémentaires de l'élasticité linéaire (mécanique des milieux continus déformables) qui vont être utilisées dans le suivant chapitre. Il est constitué de quatre paragraphes. Le premier paragraphe s'attache à décrire la relation entre contraintes et déformations. Dans le deuxième paragraphe, nous décrivons les essais élastiques couramment utilisés pour ce chapitre, en explicitant en détail l'établissement du système d'équilibre. Le paragraphe trois parlera de la loi de Hooke en décrivant le comportement des solides soumis à une déformation élastique, puis nous donnerons quelques constantes élastiques. Qui sont utilisées dans la caractérisation des déformations. le dernier paragraphe correspond à une procédure analytique de transformation intégrale en élasticité.

Le chapitre trois est consacré dans sa première partie à la méthode de résolution d'un système d'équilibre en fonction de contraintes de Boussinesq (cas axisymétrique et en l'absence des forces volumiques) en utilisant la loi de Hooke. Dans la deuxième partie de ce chapitre, on donnera les méthodes numériques utilisées par Hara et Sakamoto. On insistera sur la méthode de Sakamoto sur laquelle s'appuie notre étude. Après un petit rappel sur les définitions de Polynômes de Tchebychev, et de formules intégrales (produit des fonctions de Bessel), nous allons décrire en détail l'idée développée sur la résolution numérique du système algébrique infini.

Enfin, le dernier chapitre de ce mémoire établira les techniques utilisées dans le chapitre précédent. Ceci permet d'étudier le problème de fissuration considéré par Sakamoto [9] dans lequel les surfaces limites sont sans contraintes en appliquant la même méthode que Hara.

Le travail est complété par une annexe de trois parties. Dans la première partie, nous allons donner quelques définitions et propriétés de la fissure. Dans la deuxième partie, on parlera sur le facteur d'intensité de contrainte pour divers modes de fissure. La partie trois de cette annexe consiste à décrire les calculs analytiques et les différents programmes numériques qu'on a appliqué pendant l'étude de ce problème.

# Chapitre 1

## Rappels mathématiques

Ce chapitre présente des outils et des notions nécessaires qui seront présentés tout au long de cette thèse. Dans un premier temps, on donne un aperçu et un rappel sur les *fonctions de Bessel* et leurs propriétés. Ensuite, nous allons présenter comment transformer les conditions aux limites d'un problème à des équations intégrales duales en se basant à la *transformation intégrale de Hankel*. Enfin, il est utile de donner des notions et certaines méthodes concernant les *équations intégrales*, en se basant sur la transformation des équations intégrales en une équation de Fredholm.

## 1.1 Introduction

Le laplacien de  $u$  noté par  $(\nabla^2 u)$  apparaît souvent dans de nombreuses équations aux dérivées partielles dans les domaines de la physique et de la technique. Le choix d'un système de coordonnées qui dépend de la nature du problème envisagé peut être important dans la recherche de la solution. Les problèmes des valeurs aux limites d'écrits en termes d'équations aux dérivées partielles peuvent être résolus par *la méthode de la fonction de Bessel*.

## 1.2 Équation et fonctions de Bessel

En analyse mathématiques, les fonctions de Bessel ont été découvertes par le mathématicien Suisse Daniel Bernoulli, et portent le nom du mathématicien allemand Friedrich Bessel. Bessel développa l'analyse de ces fonctions en 1817 dans le cadre de ses études du mouvement des planètes induit par l'interaction gravitationnelle, généralisant les découvertes antérieures de Bernoulli. Les fonctions de Bessel jouent un rôle important en physique mathématique. Elles possèdent certaines analogies avec les fonctions trigonométriques, tel que leur caractère oscillant. Les fonctions de Bessel sont aussi connues sous le nom de fonctions cylindriques ou d'harmoniques cylindriques, parce qu'elles font partie des solutions de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques (intervenant par exemple, dans la propagation de la chaleur dans un cylindre). Ces fonctions sont présentées dans toutes les bibliothèques mathématiques de programmation, dans les logiciels de calcul symbolique comme Maple et dans un logiciel graphique comme xmgrace.

Dans cette partie, nous retrouvons les définitions des fonctions de Bessel et de Hankel, ainsi que leurs principales propriétés. Nous désignerons par  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , un nombre complexe quelconque. La lettre  $v \in \mathbb{C}$  représentera aussi un nombre complexe, alors que  $n \in \mathbb{N}$  est réservée pour une variable entière. Nous utiliserons la constante d'Euler valant  $r = 0,5772156649\dots$ , qu'on ne confondra pas avec la fonction Gamma, d'une variable complexe, définie par:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0.$$

Nous notons que pour un argument entier, nous avons la relation :

$$\Gamma(n+1) = 1.2.3\dots(n-1).n = n!.$$

Nous posons aussi  $z = kr$ , où  $z \in \mathbb{C}$  et  $r \in \mathbb{R}$  sont des variables et  $k \in \mathbb{C}$  est un paramètre.

**Définition 1.2.1** *L'équation différentielle de Bessel*

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0, \quad (1.1)$$

admet pour solutions la fonction de Bessel d'ordre  $\nu$  de première espèce, notée  $J_\nu(z)$ , et la fonction de Bessel d'ordre  $\nu$  de seconde espèce,  $Y_\nu(z)$ .

En posant  $z = kr$ , nous obtenons encore que les fonctions de Bessel  $J_\nu(z)$  et  $Y_\nu(z)$  sont les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dy}{dr} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) y = 0, \quad (1.2)$$

**Définition 1.2.2** *L'équation différentielle modifiée de Bessel*

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0, \quad (1.3)$$

admet pour solutions la fonction de Bessel modifiée d'ordre  $\nu$  de première espèce; notée  $I_\nu(z)$ , et la fonction de Bessel modifiée d'ordre  $\nu$  de seconde espèce; notée  $K_\nu(z)$ .

En posant  $z = kr$ , nous obtenons encore que les fonctions de Bessel modifiées  $I_\nu(z)$  et  $K_\nu(z)$  sont les solutions de l'équation différentielle modifiée de Bessel

$$\frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dy}{dr} - \left(k^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\right) y = 0, \quad (1.4)$$

**Définition 1.2.3** Les fonctions de Bessel de troisième espèce (ou fonctions de Hankel) sont définies à partir des fonctions de première et seconde espèce  $J_\nu(z)$  et  $Y_\nu(z)$  par les relations :

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + iY_\nu(z), \\ H_\nu^{(2)}(z) &= J_\nu(z) - iY_\nu(z). \end{aligned} \tag{1.5}$$

### 1.2.1 Relations générales

Dans cette section, nous donnons plusieurs relations entre les fonctions de Bessel et les fonctions de Hankel. Le classement des relations vont du général au particulier, et portent sur le signe de l'argument, de l'indice, et sur la continuité analytique.

$$\begin{aligned} J_\nu(ze^{n\pi i}) &= e^{n\nu\pi i} J_\nu(z), & J_{-n}(z) &= (-1)^n J_n(z) \\ Y_{-n}(z) &= (-1)^n Y_n(z), & Y_\nu(ze^{n\pi i}) &= e^{-n\nu\pi i} Y_\nu(z) + 2i \sin(n\pi\nu) \cot(\nu\pi) J_\nu(z), \\ K_0(iz) &= e^{\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(z), & I_\nu(-z) &= (-1)^{-n} I_n(z), H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(z), \\ I_\nu(-iz) &= e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} J_\nu(z), & I_{-\nu}(z) &= I_\nu(z), \\ I_n(z) &= (i)^{-n} J_\nu(iz), & I_0(iz) &= J_0(z), I_1(iz) = iJ_1(z), \\ K_\nu(z) &= \frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi i(\nu+1)}{2}} H_\nu^{(1)}(iz), & K_{-\nu}(z) &= K_\nu(z), \\ K_0(iz) &= \frac{-i\pi}{2} H_0^{(2)}(z), & K_1(iz) &= \frac{-\pi}{2} H_1^{(2)}(z). \end{aligned} \tag{1.6}$$

### 1.2.2 Relations de dérivations

Les relations de récurrence et de dérivation suivantes sont valides, pour une fonction spéciale  $F$  représentant l'une des fonctions  $J, Y, H^{(1)}$  ou  $H^{(2)}$ .

$$\begin{aligned} F_{\nu-1}(z) + F_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} F_\nu(z), \\ F_{\nu-1}(z) - F_{\nu+1}(z) &= 2F'_\nu(z), \\ F_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} F_\nu(z) &= F'_\nu(z), \\ -F_{\nu+1}(z) - \frac{\nu}{z} F_\nu(z) &= F'_\nu(z), \end{aligned} \tag{1.7}$$

en particulier, ces relations entraînent que

$$\begin{aligned}
 F_0'(z) &= -F_1(z), \\
 F_1'(z) &= F_0(z) - \frac{1}{z}F_1(z), \\
 F_0'(kr) &= -kF_1(kr), \\
 F_1'(kr) &= kF_0(kr).
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Les relations de récurrence et de dérivation suivantes sont valides, pour une fonction spéciale  $G_\nu$  représentant l'une des fonctions  $I_\nu$  ou  $e^{\nu\pi i}K_\nu$

$$\begin{aligned}
 G_{\nu-1}(z) - G_{\nu+1}(z) &= \frac{2}{\nu z}G_\nu(z), \\
 G_{\nu-1}(z) + G_{\nu+1}(z) &= 2G_\nu'(z), \\
 G_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z}G_\nu(z) &= G_\nu'(z), \\
 G_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z}G_\nu(z) &= G_\nu'(z).
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

En particulier, ces relations entraînent que

$$\begin{aligned}
 I_0'(z) &= I_1(z), \\
 K_0'(z) &= -K_1(z), \\
 I_1'(z) &= I_0(z) - \frac{\nu}{z}I_1(z), \\
 K_1'(z) &= -K_0(z) - \frac{1}{z}K_1(z).
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

### 1.2.3 Comportement à l'origine

Les relations qui suivent donnent les premiers termes du comportement des fonctions de Bessel et de Hankel lorsque l'argument  $z$  tend vers 0. Ici, les indices  $\nu$  et  $n$  sont supposés grands par rapport à l'argument  $z$ . C'est pourquoi, nous trouvons aussi dans cette section les premiers termes du comportement des fonctions de Bessel et de Hankel d'ordre 0 lorsque l'argument  $z$  tend vers 0.

$$\begin{aligned}
 J_\nu(z) &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(1+\nu)} + \dots, \quad \nu \neq -1, -2, -3, \dots, \\
 J_\nu(z) &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{n!} \left( 1 + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{1!(1+n)} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{2!(1+n)(2+n)} + \dots \right), \\
 J_0(z) &= 1 - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \dots,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_1(z) &= \frac{z}{2} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^3}{1!2!} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^5}{2!3!} - \dots, \\
 Y_\nu(z) &= -\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\Gamma(\nu)}{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu} + \dots, \quad \operatorname{Re}(\nu) > 0, \\
 Y_\nu(z) &= -\left(\frac{2}{z}\right) \frac{(n-1)!}{\pi} \left(1 + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(n-1)} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{2!(n-1)(n-2)}\right) + \dots, \\
 Y_0(z) &= \frac{2}{\pi} \ln(z) - \left(\frac{z}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \ln(z)\right) + \dots, \\
 H_n^{(1),(2)}(z) &= \pm \left(\frac{2}{z}\right)^n \frac{(n-1)!}{\pi} \left(1 + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{1!(n-1)} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{2!(n-1)(n-2)} + \dots\right), \\
 H_0^{(1),(2)}(z) &= \pm \left(\frac{2i}{\pi}\right) \ln(z) - i \left(\frac{z}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \ln(z)\right) + \dots, \\
 I_\nu(z) &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(1+\nu)} + \dots, \quad \nu \neq -1, -2, -3, \dots, \\
 I_0(z) &= 1 + \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{64} + \dots, \quad I_1(z) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^3}{16} + \frac{z^5}{384} + \dots, \\
 K_\nu(z) &= \frac{\Gamma(z)}{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu} + \dots, \quad \operatorname{Re} \nu \geq 0, \\
 K_0(z) &= -\ln(z) + \dots, \quad K_1(z) = \frac{1}{z} + \dots, \quad \operatorname{Re} \nu > 0.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Nous remarquons que, quand  $z$  tend vers 0, les fonctions  $J_0(z)$  et  $I_0(z)$  tendent vers 1, les fonctions  $J_n(z)$ ;  $n > 0$  et  $I_n(z)$ ;  $n > 0$  tendent vers 0, les fonctions  $Y_n(z)$  tendent vers  $-\infty$ , et les fonctions  $K_n(z)$  tendent vers  $+\infty$ . Ainsi, les fonctions  $H_0^{(1)}$  et  $H_1^{(1)}$  tendent toutes vers  $-\infty$ .

### 1.2.4 Comportement à l'infini

Les relations qui suivent donnent les premiers termes du comportement des fonctions de Bessel et de Hankel lorsque l'argument  $z$  tend vers l'infini. Ici, les indices  $\nu$  et  $n$  sont supposés petits par rapport à l'argument  $z$ .

$$\begin{aligned}
 J_\nu(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \dots, & |\arg(z)| < \pi, \\
 Y_\nu(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \dots, & |\arg(z)| < \pi, \\
 H_\nu^{(1)}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(z-\pi)} \left(1 + \frac{(1+2\nu)}{4}\right) + \dots, & -\pi < |\arg(z)| < 2\pi, \\
 H_\nu^{(2)}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i(z-\pi)} \left(1 + \frac{(1+2\nu)}{4}\right) + \dots, & -2\pi < |\arg(z)| < \pi, \\
 I_\nu(z) &= \frac{e^z}{(2\pi z)^{\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{4\nu^2-1}{8z} - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!(8z)^2} + \dots\right), & |\arg(z)| < \frac{\pi}{2}, \\
 K_\nu(z) &= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z} \left(1 + \frac{4\nu^2-1}{8z} - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!(8z)^2} + \dots\right), & |\arg(z)| < \frac{3\pi}{2}.
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Nous remarquons que, lorsque  $z$  tend vers l'infini ; les fonctions  $J_n, Y_n, K_n, H_n^{(1)}$  et  $H_n^{(2)}$  tendent vers 0, et les fonctions  $I_n$  tendent vers l'infini. Par ailleurs, avec une transformée de Fourier en temps  $e^{i\omega t}$ ;  $H_n^{(1)}$  représente une fonction rayonnant à partir de l'origine, et  $H_n^{(2)}$  une fonction convergeant vers l'origine.

### 1.2.5 Limites des fonctions de Bessel

Si  $z \rightarrow 0$  nous aurons :

$$J_0(z) \rightarrow 1 \text{ et } J_1(z) \rightarrow 0. \quad (1.13)$$

Si  $z \rightarrow \infty$  nous aurons :

$$J_0(z) \rightarrow 0 \text{ et } J_1(z) \rightarrow 0. \quad (1.14)$$

### 1.2.6 Relations entre quelques fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned} J_{-\frac{1}{2}}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(z), \\ J_{\frac{1}{2}}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(z), \\ J_{\frac{3}{2}}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin(z)}{z} - \cos(z)\right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

### 1.2.7 Représentation intégrale de quelques fonctions de Bessel

Pour les valeurs entières de  $\nu = n$ , les fonctions de Bessel [14, Hadamard. J.] peuvent être représentées par des intégrales comme suite :

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(z \sin \theta - \nu \theta)] d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \theta - \nu \theta) d\theta, \\ J_0(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(z \sin \theta)] d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \\ J_1(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(z \sin \theta - \theta)] d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

### 1.2.8 Représentation graphique de quelques fonctions de Bessel

Les représentations graphiques des fonctions de Bessel ressemblent à celles des fonctions sinus ou cosinus [28, Magnus W. and Soni. R. P.], mais s'amortissent comme s'ils s'agissait de fonctions sinus ou cosinus divisées par un terme de la forme  $\sqrt{x}$ . Traçons les quelques premiers graphes de fonctions de Bessel de première espèce  $J_\nu$  où,  $\nu = 0, 1, 2$ .

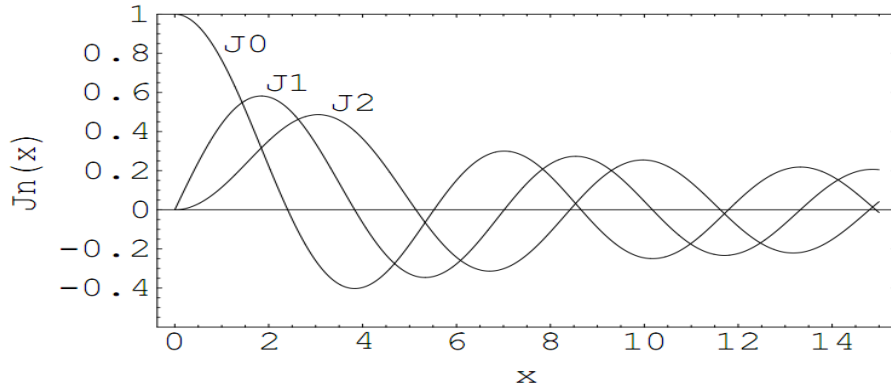


Figure 1.1: graphes de quelques fonctions de Bessel.

Les graphes de  $J_n$  semblent montrer que ces zéros sont distincts pour différentes valeurs de  $n$ , en dehors de  $J_n(0) = 0$ . Ce phénomène est appelé la conjecture de Bourget ; elle fut démontrée par Carl Siegel en 1929.

## 1.3 Transformation de Hankel

En mathématiques, la transformation de Hankel exprime une fonction donnée  $f(r)$  comme la somme pondérée d'un nombre infini de fonctions de Bessel  $J_\nu(\rho r)$  du 1<sup>er</sup> espèce d'ordre  $\nu$ . Ainsi,  $F_\nu$  constitue la fonction transformée. La transformée de Hankel est une transformation intégrale, qui a été développée par le mathématicien Hermann Hankel. [31]. Elle est également connue sous le nom de transformée de Fourier-Bessel. Il est défini comme

$$F(\gamma, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i(\gamma x + \tau y)} dx,$$

alors que

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma, \tau) e^{i(\gamma x + \tau y)} d\tau, \quad (1.17)$$

et par passage aux coordonnées polaires:  $(x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$  et  $(\gamma = \rho \cos \theta, \tau = \sin \theta)$ ,  
en tenant compte de

$$F(\gamma, \tau) = F(\rho \cos \theta, \sin \theta) = \phi(\rho, \theta),$$

et

$$f(x, y) = \psi(r, \theta),$$

nous trouvons

$$\phi(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} r d\tau \int_0^{2\pi} \psi(r, \varphi) e^{-ir\rho \cos(\varphi-\theta)} d\varphi, \quad (1.18)$$

alors

$$\psi(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} \phi(\rho, \theta) e^{ir\rho \cos(\varphi-\theta)} d\theta. \quad (1.19)$$

Supposons en suite que

$$\psi(r, \varphi) = e^{-in\varphi} f(r),$$

et posons dans (2.1),  $\varphi - \theta = \frac{\pi}{2} + t$ . Nous aurons

$$\phi(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} r d\tau \int_{-\theta-\frac{\pi}{2}}^{-\theta+\frac{3\pi}{2}} f(r) e^{-in\varphi} e^{-ir\rho \cos(\frac{\pi}{2}+t)} dt, \quad (1.20)$$

remarquons que

$$\int_{-\theta-\frac{\pi}{2}}^{-\theta+\frac{3\pi}{2}} e^{-i[r\rho \cos(\frac{\pi}{2}+t)+n\varphi]} dt = e^{-in(\theta+\frac{\pi}{2})} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(r\rho \sin t - nt)} dt = e^{-n(\theta+\frac{\pi}{2})} J_n(\rho r).$$

Posons

$$F_n(\rho) = \int_0^{+\infty} r f(r) J_n(\rho r) dr. \quad (1.21)$$

La formule (2.2) s'écrit à l'aide de  $f(r)$  et  $F_n(\rho)$  comme suite :

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} F_n(\rho) \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{i[n(\varphi-\theta-\frac{\pi}{2})+r\rho \sin(\varphi-\theta)]} d\theta. \quad (1.22)$$

En effectuant le changement de variable  $\theta - \varphi = t - \frac{\pi}{2}$ , nous pouvons réécrire le 2<sup>ème</sup> intégrale de(1.22) comme suit :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[-nt+r\rho \sin t]} dt = J_n(\rho r), \quad (1.23)$$

ce qui entraîne

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \rho F_n(\rho) J_n(\rho r) d\rho. \quad (1.24)$$

**Définition 1.3.1** la transformation de Hankel d'ordre  $\nu$  d'une fonction  $f(r)$  est définie par

$$F_\nu(\rho) = \int_0^{+\infty} r f(r) J_\nu(\rho r) dr, \quad (1.25)$$

où  $J_\nu$  est la fonction de Bessel du première espèce d'ordre  $\nu$  avec  $\nu \geq -1/2$ . Ainsi sa transformée inverse est donnée par :

$$f(r) = \int_0^{+\infty} F_\nu(\rho) J_\nu(\rho r) \rho d\rho, \quad (1.26)$$

**Exemple 1.3.1** à titre d'exemple, considérons l'opérateur de Bessel d'ordre  $n$  suivant:

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{n^2}{r^2}f(r).$$

Déterminons d'abord la transformée de  $f''(r)$ :

$$F(f'') = \int_0^{+\infty} r f''(r) J_n(\rho r) dr.$$

Intégrons par parties, nous obtenons

$$F(f'') = - \int_0^{+\infty} f'(r) \frac{d}{dr} [r J_n(\rho r)] dr.$$

Où; les conditions sur  $f$  sont : ( $f$  bornée) et ( $r f, r f' \rightarrow 0$ ) lorsque  $r \rightarrow \infty$ . Nous intégrons encore par parties en tenant compte de

$$\frac{d}{d(r\rho)} [r\rho J_n'(\rho r)] dr = \frac{n^2 - (\rho r)^2}{\rho r} J_n(\rho r) dr,$$

nous avons

$$\begin{aligned} F\left(f'' + \frac{f'}{r}\right) &= \int_0^{+\infty} f(r) \frac{d}{dr} [\rho r J_n'(\rho r)] dr \\ &= \rho \int_0^{+\infty} f(r) \frac{d}{d(r\rho)} [r\rho J_n'(\rho r)] dr, \end{aligned}$$

et en tenant compte de la relation :

$$z \frac{d}{dz} [z J_n'(z)] = (n^2 - z^2) J_n(z),$$

nous trouvons :

$$F\left(f'' + \frac{f'}{r}\right) = \int_0^{+\infty} f(r) \left[ \frac{n^2}{r} - r\rho^2 \right] J_n(\rho r) dr,$$

d'où;

$$\begin{aligned} F\left(f + \frac{f'}{r} - \frac{n^2}{r^2}f\right) &= \int_0^{+\infty} f(r) \left[ \frac{n^2}{r} - r\rho^2 \right] J_n(\rho r) dr - n^2 \int_0^{+\infty} \frac{f(r)}{r} J_n(\rho r) dr \\ &= -\rho^2 \int_0^{+\infty} r f(r) J_n(\rho r) dr \\ &= -\rho^2 F_n(\rho). \end{aligned}$$

### 1.3.1 Domaine de définition

La transformation de Hankel d'une fonction  $f(r)$  est valable en tout point au cours de laquelle  $f(r)$  est continue à condition que la fonction est définie dans  $(0, \infty)$ , et continue par morceaux et à variation bornée dans chaque sous-intervalle finie dans  $(0, \infty)$  ainsi que, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} |f(r)| r^{\frac{1}{2}} dr, \quad (1.27)$$

est fini, et le domaine peut être prolongé par un argument de densité en incluant certaines fonctions pour lesquelles l'intégrale ci-dessus n'est pas finie : par exemple  $f(r) = (1+r) - 3/2$ ; cette extension ne sera pas abordée dans ce paragraphe.

### 1.3.2 Orthogonalité

**Définition 1.3.2** *les fonctions de Bessel forment une base orthogonale par rapport au r facteur de pondération :*

$$\int_0^{+\infty} J_n(\rho r) J_n(\rho' r) r dr = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho}; \quad (\rho, \rho') \neq (0, 0). \quad (1.28)$$

**Exemple 1.3.2** *dans le cas axisymétrique, déterminons la solution du problème aux limites suivant :*

$$\Delta u(r, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (0 \leq r < \infty) \text{ et } (0 \leq z < \infty), \quad (a)$$

$$[u(r, z)]_{z=0} = f(r), \quad r \geq 0, \quad (b)$$

où;  $\Delta u$  désigne l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques.

**Solution 1.3.1** *multiplions (a) et (b) par  $r J_0(\rho r)$  et en intégrant ensuite le résultat suivant  $r$  de 0 à  $\infty$ , nous trouvons*

$$-\rho^2 U_\rho(z) + U_\rho''(z) = 0,$$

Posons

$$U_\rho(z) = \int_0^{+\infty} r u(r, z) J_0(\rho r) dr \quad U_\rho(0) = F_\rho,$$

où  $U_\rho$  est la fonction transformée de  $u$  tel que

$$U_\rho(0) = F_\rho,$$

et comme

$$F_\rho(z) = \int_0^{+\infty} r f(r) J_0(\rho r) dr \implies U_\rho(z) = c_1 e^{-\rho z} + c_2 e^{\rho z} = c_1 e^{-\rho z}.$$

Alors la condition  $U_\rho(0) = F_\rho$  donne  $c_1 = F_\rho$ . Finalement, nous aurons :

$$U_\rho(z) = F_\rho(z) e^{-\rho z},$$

or

$$u(r, z) = \int_0^{+\infty} \rho U_\rho(z) J_0(\rho r) d\rho = \int_0^{+\infty} \rho F_\rho(z) e^{-\rho z} J_0(\rho r) d\rho,$$

d'où; la solution générale est :

$$U_\rho(z) = F_\rho(z) e^{-\rho z} + G(z) e^{\rho z}.$$

### 1.3.3 Relation avec la transformée de Fourier

La transformation de Hankel d'ordre zéro est donnée par :

$$F(\rho) = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r, \theta) e^{i\rho r \cos(\theta)} r dr d\theta,$$

où  $(r, \theta)$  désignent les coordonnées polaire. Ainsi,  $\theta$  est l'angle entre les deux vecteurs  $\rho$  et  $r$ , et l'intégration sur  $\theta$  peut être effectuée et on a :

$$F(\rho) = F(r) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) J_0(\rho r) r dr,$$

qui est juste  $2\pi$  fois la transformation de Hankel d'ordre zéro de  $f(r)$ . Pour la transformée inverse, nous avons :

$$F(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint F(\rho) e^{-i\rho r} d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\rho) J_0(\rho r) \rho d\rho,$$

ce qui signifie que  $f(r)$  est égale à  $(\frac{1}{2\pi})$  fois) la transformation de Hankel d'ordre zéro de  $F(k)$ .

$$f(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(r) e^{im\theta},$$

et si  $\theta_\rho$  est l'angle entre la direction de  $\rho$  et le  $\theta = 0$  (axe), nous obtenons :

$$F(\rho) = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta f(r, \theta) e^{i\rho r \cos(\theta - \theta_\rho)}.$$

Substituons  $\varphi$  par  $(\theta - \theta_\rho)$ , nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 F(\rho) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta f_m(r) e^{im\theta} e^{i\rho r \cos(\theta-\theta_\rho)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\theta} \int_0^\infty r dr f_m(r) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{im\varphi} e^{i\rho r \cos\varphi} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\theta} \int_0^\infty r dr f_m(r) 2\pi i^m J_m(\rho r) \\
 &= \sqrt{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{im\theta} \int_0^\infty f_m(r) J_m(\rho r) r dr.
 \end{aligned}$$

Si  $f_m$  est suffisamment lisse près de l'origine et nulle en dehors d'un rayon  $R$ , nous pouvons la développer en série de Chebyshev :

$$f_m(r) = r^m \sum_{t \geq 0}^{+\infty} f_{mt} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]^t, \quad (0 \leq r \leq \mathbb{R}).$$

## 1.4 Équations intégrales

Une équation intégrale est une équation dont l'une des indéterminées est une intégrale. Elle est importante dans plusieurs domaines physiques. Elle apparaît dans les problèmes de transferts d'énergie radiative et des problèmes d'oscillations d'une corde, d'une membrane ou d'un axe. Les problèmes d'oscillations peuvent être aussi résolus à l'aide des équations différentielles. Les équations intégrales sont a priori moins simples à résoudre que les équations algébriques. Nous allons voir dans cette partie que pour des équations intégrales linéaires, une fois réalisée la discrétisation de ces équations, on se ramène au problème de la recherche de solutions d'un système linéaire [4, 46, Chakrabarti A. and Mandal N., Stankovic B.], et les quatre types pour les équations intégrales sont dans l'ordre :

### 1.4.1 Équation intégrale de Volterra

**Définition 1.4.1** nous appelons une équation intégrale de Volterra de seconde espèce l'équation suivante :

$$y(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t) y(t) dt, \quad (1.29)$$

telle que,  $f$  et  $k$  (noyaux de l'équation intégrale) sont données alors que,  $y$  est une fonction inconnue, et le domaine de résolution est :  $a \leq x \leq b$  ce qui implique :  $a \leq t \leq x$ .

**Remarque 1.4.1** si  $f \equiv 0$ , l'équation intégrale (1.29) est dite de première espèce.

**Remarque 1.4.2** pour l'existence et l'unicité de la solution (1.29), il suffit que l'on ait la continuité de  $f$  et  $k$  sur leurs domaines de définition respectivement.

**Remarque 1.4.3** si l'une des limites d'intégration est variable, il s'agit d'une équation intégrale de Volterra.

## 1.4.2 Méthodes de résolution

### 1.4.2.i Méthode des approximations successives:

**Définition 1.4.2** nous cherchons la solution approchée comme suit :

$$y_n(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t) y_{n-1}(t) dt, \quad (1.30)$$

où; ( $n = 1, 2, \dots$ ) et telle que;  $y_0(x) = f(x)$  est une approximation-initiale.

**Exemple 1.4.1** à titre d'exemple, Considérons l'équation :

$$y(x) = 1 - \int_0^x (x-t) y(t) dt,$$

Posons d'abord :

$$y_0(x) = 1,$$

Ce qui entraîne

$$y_1(x) = 1 - \int_0^x (x-t) dt = 1 - \frac{x^2}{2},$$

Par suite,

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

Enfin, et quand  $n \rightarrow \infty$ , nous aurons :

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x).$$

**1.4.2.ii Méthode opérationnelle (dans le cas du noyau  $k(x-t)$ ):**

Nous réduisons l'équation(1.29) à l'aide de transformation à une équation algébrique dont l'inconnue est  $y(p)$  (la transformée de  $y(x)$ ).

**Définition 1.4.3** nous appelons transformation de Laplace d'une fonction  $f$ , la fonction  $F$  de la variable complexe  $p$  donnée par:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

où;  $\text{Re}(p) > \alpha_0 = \inf(\alpha)$ , et on note :  $f(t) \sqsupset F(p)$ .

**Exemple 1.4.2** considérons l'équation de première espèce suivante:

$$\int_0^x \sin(x-t) y(t) dt = x \sin(x).$$

**Solution 1.4.1** par l'application de la transformation de Laplace, nous trouvons:

$$y(x) = 2 \cos(x).$$

**Exemple 1.4.3** il s'agit d'appliquer directement la transformation de Laplace pour l'équation:

$$y(x) - \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt = e^x,$$

nous obtenons :

$$y(x) = 2e^x - x - 1.$$

Pour le cas d'un noyau dégénéré, supposons que

$$k(x, t) = \sum_{k=1}^n P_k(x) Q_k(t),$$

la solution se réduit à la détermination de fonctions auxiliaires à l'aide d'un système différentiel aux conditions initiales. Dans ce cas, l'équation intégral (3.1.1) s'écrit sous la forme

$$y(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n P_k(x) \int_a^x Q_k(t) y(t) dt.$$

Soit :

$$U_k(x) = \int_a^x Q_k(t) y(t) dt ; k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.31)$$

nous aurons alors;

$$y(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n P_k(x) U_k(x) dt. \quad (1.32)$$

Déterminons la fonction auxiliaire  $U_k(x)$  en dérivant la relation (1.31), et en tenant compte de (1.32) nous trouvons :

$$\begin{aligned} U'_m(x) &= q_m(x) y(x) = q_m(x) \left[ f(x) + \sum_{k=1}^n P_k(x) U_k(x) \right] \\ &= q_m(x) f(x) + \sum_{k=1}^n P_k(x) q_m(x) U_k(x), \end{aligned}$$

ceci est un système d'équations différentielles avec les conditions initiales

$$U_m(x) = 0; \quad m = 1, 2, \dots$$

La solution  $U_m$  de l'équation intégrale se calcule alors à partir de (1.32).

**Exemple 1.4.4** à titre d'exemple, nous considérons l'équation intégrale suivante :

$$y(x) = 1 + \int_0^x \frac{\cosh(t)}{\cosh(x)} y(t) dt.$$

Le noyau de cette équation intégrale est dégénéré :

$$k(x, t) = P(x) q(t) \quad \text{où; } P(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \quad \text{et } q(t) = \cosh(t).$$

Soit la fonction auxiliaire

$$u(x) = \int_0^x \cosh(t) y(t) dt, \quad (1.33)$$

nous aurons alors;

$$y(x) = 1 + \frac{u(x)}{\cosh(x)}. \quad (1.34)$$

Déterminons l'équation différentielle satisfaite par  $u$ . Pour cela, nous dérivons (1.33) en tenant compte de (1.34), nous trouvons :

$$u'(x) = \cosh(x) y(x) = \cosh(x) \left[ 1 + \frac{u(x)}{\cosh(x)} \right].$$

Ce qui entraîne

$$u'(x) = u(x) + \cosh(x), \quad (1.35)$$

alors que la condition initiale est :

$$u(0) = 0, \quad (1.36)$$

La résolution du problème (1.35) et (1.36) donne :

$$u(x) = \frac{e^x}{4} (1 + 2x - e^{-2x}).$$

Finalement, la solution de l'équation intégrale s'obtient à l'aide de (3.1.1.c) par

$$y(x) = 1 + \frac{e^x}{4 \cosh(x)} (1 + 2x - e^{-2x}) = 1 + \frac{\sinh(x) + xe^x}{2 \cosh(x)}.$$

### 1.4.2.iii Système d'équations intégrales:

**Exemple 1.4.5** cherchons la solution du système suivant :

$$\begin{cases} y_1(x) - 1 + \int_0^x y_2(t) dt, \\ y_2(x) = x - \int_0^x y_1(t) dt, \end{cases},$$

ainsi que :

$$1 \square \frac{1}{p}, x \square \frac{1}{p^2} \text{ et } \int_0^x f(t) dt \square \frac{F(p)}{p},$$

donc

$$\begin{cases} y_1(p) = \frac{-1}{p} + \frac{y_2(p)}{p}, \\ y_2(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{y_1(p)}{p}, \end{cases} \implies \begin{cases} y_1(p) = 1 - 2 \cos(x), \\ y_2(p) = 2 \sin(x). \end{cases}.$$

En fin, nous obtenons

$$\begin{cases} y_1(x) = 1 - 2 \cos(x), \\ y_2(x) = 2 \sin(x). \end{cases}$$

### 1.4.3 Équation intégrale de Fredholm

**Définition 1.4.4** Nous appelons une équation intégrale de Fredholm du premier type l'équation suivante :

$$f(x) = \int_a^b k(x, t) y(t) dt, \quad (1.37)$$

où;  $y$  est la fonction inconnue ;  $f$  est une fonction connue; et  $k$  une autre fonction connue à deux variables.

Souvent la fonction  $k$  est appelée la fonction opérateur intégral du noyau. Ainsi, les limites d'intégration sont constantes, c'est la caractéristique principale d'une équation de Fredholm.

**Remarque 1.4.4** *l'équation intégrale de Fredholm du premier type est une équation plus simple pour les calculs.*

**Définition 1.4.5** *nous appelons une équation intégrale de Fredholm du second type l'équation:*

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) y(t) dt, \quad (1.38)$$

où ;  $y$  est la fonction inconnue,  $f$  est une fonction connue, et  $k$  une autre fonction connue à deux variables et le paramètre  $\lambda$  est un facteur inconnu, qui joue le même rôle que la valeur propre en algèbre linéaire. Si la fonction inconnue  $y$  apparaît à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de l'intégrale, alors il s'agit de l'équation intégrale de Fredholm du second type. Si la fonction connue  $f$  est identiquement zéro, l'équation intégrale est alors appelée « équation intégrale homogène ». Si elle est différente de zéro, elle est appelée « équation intégrale non-homogène ».

**Remarque 1.4.5** *ces équations sont classées selon trois dichotomies :*

i. Limites d'intégration :

- a. Les deux fixées on obtient l'équation de Fredholm.
- b. L'une variable: on obtient l'équation de Volterra.

ii. Placement de la fonction inconnue :

- a. Seulement à l'intérieur de l'intégrale: équation de Volterra du premier type.
- b. À l'intérieur et à l'extérieur de l'intégrale: équation de Volterra du second type.

iii. Nature de la fonction connue  $f$  :

- a. Identiquement zéro: homogène.
- b. Différente de zéro: non-homogène.

**Exemple 1.4.6** *déterminons la solution de l'équation intégrale :*

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 y(t) dt = \sin(\pi x).$$

**Solution 1.4.2** d'abord, remarquons que  $\lambda = \frac{1}{2}$ . La méthode des approximations successives entraîne

$$\begin{aligned}y_0(x) &= \sin(\pi x), \\y_1(x) &= \sin(\pi x) + \int_0^1 \sin(\pi t) dt,\end{aligned}$$

d'où;

$$\begin{aligned}y_1(x) &= \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi}, \\y_2(x) &= \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi},\end{aligned}$$

par suite;

$$y_n(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sin(\pi x) + \frac{2}{\pi}.$$

**Remarque 1.4.6** nous pouvons vérifier la condition de convergence de  $k$  comme suite :

$$k(x, t) = 1 \implies |k| = \int_0^1 dx \int_0^1 1^2 dt = 1 \times \frac{1}{2} < 1,$$

**Remarque 1.4.7** toute équation de Volterra peut être considérée comme un cas particulier d'une équation de Fredholm. Pour une meilleure compréhension, nous donnons comme exemple l'équation de Volterra suivante :

$$y(x) = f(x) - \int_0^x k(x, t) y(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

qui peut être écrite comme une équation de Fredholm

$$y(x) = f(x) - \int_0^1 k(x, t) y(t) dt,$$

et si nous posons  $k(x, t) = 0$  pour  $t > x$ , la Théorie classique de Fredholm peut être appliquée aux équations de Volterra, mais perd toute sa puissance car, le noyau ne peut pas être symétrique. C'est une étude directe des équations de Volterra qui donne milleure résultats qui ne peuvent pas être obtenus par la théorie de Fredholm.

### 1.4.4 Équation intégrale de Schlomilch

**Définition 1.4.6** nous appelons une équation de Schlomilch l'équation suivante :

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x \sin(\theta)) d\theta = \sin(\pi x); |x| \leq \pi, \quad (1.39)$$

où;  $f$  est donnée et  $\varphi$  inconnue dans  $C^1$  ainsi que;

$$\varphi(x) = f(0) + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin(\theta)) d\theta, \quad (1.40)$$

### 1.4.5 Transformation des équations intégrales duales en une équation de Fréholm

On considère le problème de conduction thermique d'une plaque épaisse occupant le domaine  $D$  où ;

$$D = \{(r, \varphi, z) : 0 \leq r < \infty \text{ et } 0 \leq \varphi < \infty \text{ et } 0 \leq z < \infty\},$$

et pour plus d'information, la figure (1.2) montre la géométrie du problème.

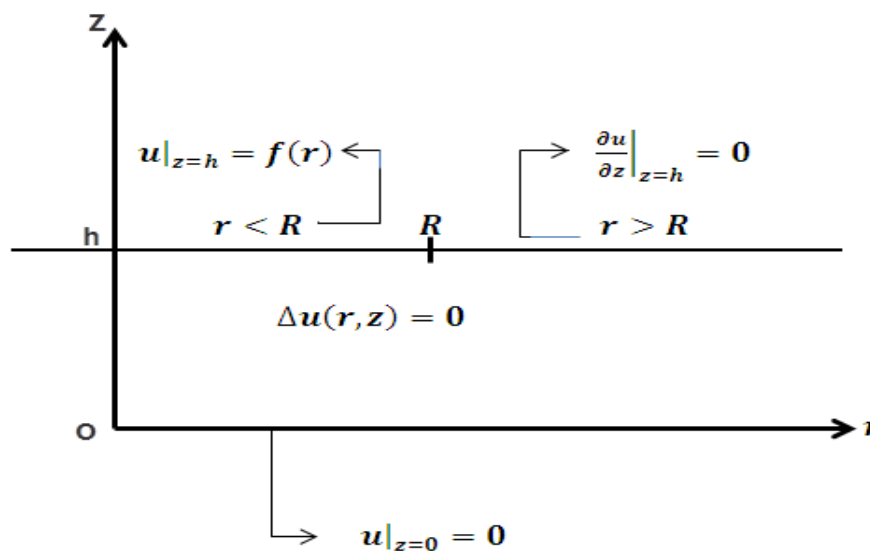


Figure 1.2: Géométrie du problème.

Les conditions aux limites du problème sont :

$$\begin{aligned}
 \Delta u(r, z) &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & (r \geq 0), (0 < z < h), & (a) \\
 (u)_{z=h} &= f(r), & (r < R), & (b) \\
 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=h} &= 0, & (r > R), & (c) \\
 (u)_{z=0} &= 0, & (r \geq 0). & (d)
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

Nous multiplions l'équation (1.41.a) par  $rJ_0(\lambda r)$ , et nous intégrons ensuite le résultat de 0 à  $\infty$  suivant  $r$ , on trouve :

$$-\lambda^2 U + U'' = 0,$$

dont la solution est:

$$U_\lambda(z) = A_0 e^{-\lambda z} + B_0 e^{\lambda z} = A_1 \cosh(\lambda z) + B_1 \sinh(\lambda z). \tag{1.42}$$

Nous utilisons la transformée inverse de Hankel en posant :

$$u(r, z) = \int_0^\infty \lambda U_\lambda(z) J_0(\lambda r) d\lambda = \int_0^\infty \lambda B_1 \sinh(\lambda z) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

où;  $A_1 = 0$  car, si nous multiplions l'équation (1.41.d) par  $rJ_0(\lambda r)$ , nous trouvons :

$$(U_\lambda)_{z=0} = 0.$$

et par suite, nous posons

$$\lambda B_1(\lambda) = B_2(\lambda),$$

nous avons

$$u(r, z) = \int_0^\infty B_2(\lambda) \sinh(\lambda z) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

Nous déterminons  $B_2$  à l'aide des conditions mixtes (1.41.b) et (1.41.c), nous avons :

$$\begin{aligned}
 u(r, z) &= f(r), \\
 \frac{\partial u(r, z)}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \int_0^\infty B_2(\lambda) \sinh(\lambda z) J_0(\lambda r) d\lambda = f(r), & r < R, \\ \int_0^\infty \lambda B_2(\lambda) \cosh(\lambda z) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, & r > R. \end{cases} \tag{1.43}$$

Nous transformons les deux équations (1.43) en posant :

$$C(\lambda) = B_2(\lambda) \cosh(\lambda z),$$

et comme

$$B_2(\lambda) \sinh(\lambda z) = B_2(\lambda) \cosh(\lambda z) \left( \frac{e^{\lambda h} + e^{-\lambda h} - 2e^{-\lambda h}}{e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}} \right) = C(\lambda) [1 - g(\lambda)],$$

où;

$$g(\lambda) = \frac{e^{-\lambda h}}{\cosh(\lambda z)},$$

ainsi,  $C(\lambda)$  s'obtient de :

$$\begin{cases} \int_0^\infty C(\lambda) [1 - g(\lambda)] J_0(\lambda r) d\lambda = f(r), & r < R, \\ \int_0^\infty \lambda C(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, & r > R. \end{cases}, \quad (1.44)$$

Rappelons quelques formules :

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) d\lambda \cos(\lambda t) dt = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}}; & t < r, \\ 0; & t > r, \end{cases}, \quad (i)$$

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) d\lambda \sin(\lambda t) dt = \begin{cases} 0; & t < r, \\ \frac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}}; & t > r. \end{cases}, \quad (ii)$$

Posons :

$$C(\lambda) = \int_0^\infty \varphi(t) \cos(\lambda t) dt, \quad (1.45)$$

où;  $\varphi$  est à déterminer, et de classe  $C^1$ . Ainsi, la 2<sup>ème</sup> équation de (1.44) est satisfaite, et pour déterminer  $\int_0^r \frac{\varphi(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt$ , il suffit d'injecter l'équation (1.45) dans l'équation (1.44).

Finalement, nous effectuons le changement de variable  $t = r \sin(\theta)$  pour (i) et (ii) en remplaçant  $J_0(\lambda r)$  par  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\lambda r \sin(\theta)) d\theta$ , ainsi que,

$$\int_0^r \frac{\varphi(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(r \sin(\theta))}{\sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \theta}} r \cos(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(r \sin(\theta)) d\theta, \quad (1.46)$$

d'où;

$$f(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \varphi(r \sin(\theta)) - \frac{1}{\pi} \int_0^r \varphi(t) [G(t + r \sin(\theta)) + G(t - r \sin(\theta))] dt \right\} d\theta, \quad (1.47)$$

où;

$$G(x) = \int_0^{\infty} g(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda. \quad (1.48)$$

Remarquons que, (1.45) est une équation de Schlomilch et par suite  $\varphi$  vérifie l'équation intégrale de Fredholm :

$$F(x) = \varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^r K(x,t) \varphi(t) dt; \quad 0 < x < r, \quad (1.49)$$

avec

$$K(x,t) = G(t+x) + G(t-x) = 2 \int_0^{\infty} g(\lambda) \cos(\lambda x) \cos(\lambda t) d\lambda, \quad (1.50)$$

alors que

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \left[ f(0) + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x \sin(\theta)) d\theta \right]. \quad (1.51)$$

## 1.5 Relation entre les EI et les ED

Dans cette partie, nous allons étudier la liaison qui existe entre les EI linéaires et les ED linéaires. D'abord, nous étudions la réduction d'une EDO à une EI, en notant qu'un problème aux valeurs initiales se réduit à une EI de Volterra, tandis que le problème aux limites se réduit à une EI de Fredholm. Ensuite, nous examinons la réduction d'une EI à une EDO. Enfin, nous étudions la réduction des EDP linéaires du deuxième ordre à coefficients constants à une EI, en constatant que les EDP elliptiques se réduisent à des EI de Fredholm, et les EDP hyperboliques et paraboliques se réduisent à des EI de Volterra.

### 1.5.1 Quelques applications aux EDO

Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)), & x \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1.52)$$

qui peut être converti à l'équation de Volterra

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(s, y(s)) ds, \quad (1.53)$$

**Remarque** les propriétés de l'équation (1.52), comme l'existence et l'unicité de la solution sont équivalentes aux propriétés de l'équation (1.53).

## 1.5.2 Réduction du problème à valeurs initiales à une équation de Volterra

**Proposition** soit l'équation différentielle ordinaire d'ordre  $n$ ;

$$\frac{d^n y}{ds^n} + A_1(s) \frac{d^{n-1} y}{ds^{n-1}} + \dots + A_{n-1}(s) \frac{dy}{ds} + A_n(s) y = F(s), \quad (1.54)$$

avec comme conditions initiales ( $n$  valeurs initiales)

$$y(a) = q_0, y'(a) = q_1, \dots, y^{n-1}(a) = q_{n-1}, \quad (1.55)$$

telles que les fonctions  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , et  $F$  sont définies et continues sur  $[a, b]$ . Alors les équations (1.54) et (1.55) sont équivalentes à l'équation de Volterra de deuxième espèce

$$g(s) = f(s) + \int_a^s K(x, t) g(t) dt, \quad (1.56)$$

où

$$\begin{aligned} K(x, t) &= - \sum_{k=1}^n A_k(s) \frac{(s-t)^{k-1}}{(k-1)!}, \\ f(s) &= F(s) - q_{n-1} A_1(s) - [(s-a) q_{n-1} + q_{n-2}] A_2(s) - \dots \\ &\quad - \left\{ \left[ \frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!} \right] q_{n-1} + \dots + (s-a) q_1 + q_0 \right\} \times A_n(s) \end{aligned} \quad (1.57)$$

**Preuve.** on pose

$$\frac{d^n y}{ds^n} = g(s), \quad (1.58)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1} y}{ds^{n-1}} &= \int_a^s g(t) dt + q_{n-1}, \\ \frac{d^{n-2} y}{ds^{n-2}} &= \int_a^s (s-t) g(t) dt + (s-t) q_{n-1} + q_{n-2}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

et donc par l'identité

$$\int_a^s \int_a^{s_1} \dots \int_a^{s_{n-1}} F(s_1) ds_1 ds_2 \dots ds_{n-1} ds_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^s (s-t)^{n-1} F(t) dt, \quad (1.60)$$

on aura

$$\frac{dy}{ds} = \int_a^s \frac{(s-t)^{n-2}}{(n-2)!} g(t) dt + \frac{(s-a)^{n-2}}{(n-2)!} q_{n-1} + \frac{(s-a)^{n-3}}{(n-3)!} q_{n-2} + \dots + (s-a) q_2 + q_1, \quad (1.61)$$

$$y = \int_a^s \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} g(t) d(t) + \frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!} q_{n-1} + \frac{(s-a)^{n-2}}{(n-2)!} q_{n-1} + \frac{(s-a)^{n-2}}{(n-2)!} q_{n-2} + \dots + (s-a) q_1 + q_0. \quad (1.62)$$

Nous multiplions les relations (1.58) et (1.59) par 1,  $A_1(s)$ ,  $A_2(s)$ , et en additionnant nous retrouvons le problème aux valeurs initiales défini par (1.54), (1.55), et en posant

$$K(x, t) = - \sum_{k=1}^n A_k(s) \frac{(s-t)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad (1.63)$$

$$f(s) = F(s) - q_{n-1} A_1(s) - [(s-a) q_{n-1} + q_{n-2}] A_2(s) - \dots - \left\{ \left[ \frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!} \right] q_{n-1} + \dots + (s-a) q_1 + q_0 \right\} \times A_2(s), \quad (1.64)$$

nous trouvons l'équation de Volterra désirée.

**Exemple** pour  $n = 2$ , nous obtenons un problème d'équation différentielle ordinaire

$$y'' + A(s) y' + B(s) y = F(s), \quad (1.65)$$

avec les conditions initiales

$$y(a) = q_0, y'(a) = q_1, \quad (1.66)$$

telles que  $A$ ,  $B$ , et  $F$  sont des fonctions définies et continues sur l'intervalle fermé  $a \leq s \leq b$ .

En intégrant de  $a$  jusqu'à  $s$  par parties nous obtenons

$$y'(s) - q_1 = -A(s) y(s) - \int_a^s \left[ B(s_1) - A'(s_1) y(s_1) ds_1 + \int_a^{s_1} F(s_1) ds_1 + A(a) q_0 \right] \quad (1.67)$$

En faisant une deuxième intégration nous obtenons

$$y(s) - q_0 = - \int_a^s A(s_1) y(s_1) ds_1 - \int_a^s \int_a^{s_2} [B(s_1) - A'(s_1)] y(s_1) ds_1 ds_2 + \int_a^s \int_a^{s_2} F(s_1) ds_1 ds_2 + [A(a) q_0 + q_1] (s-a), \quad (1.68)$$

et utilisant l'identité (A.6), nous avons :

$$\int_a^s \int_a^{s_2} F(s_1) ds_1 ds_2 = \int_a^s (s-t) F(t) dt, \quad (1.69)$$

nous déduisons que

$$y(s) = q_0 + [A(a) q_0 + q_1] (s-a) + \int_a^s (s-t) F(t) dt - \int_a^s \{A(t) + (s-t) [B(t) - A'(t)]\} y(t) dt. \quad (1.70)$$

Si on pose

$$K(x, t) = -\{A(t) + (s-t)[B(t) - A'(t)]\}, \quad (1.71)$$

$$f(s) = \int_a^s (s-t)F(t)dt + [A(a)q_0 + q_1](s-a) + q_0, \quad (1.72)$$

nous obtenons une équation de Volterra de seconde espèce.

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une présentation détaillée de la technique de *transformation de Hankel* à d'abord été proposée en montrant l'importance de *fonctions de Bessel*. Ceci permet de résoudre divers problèmes pratiques : calcul des intégrales, *équations intégrales* et des EDP.

# Chapitre 2

## Élasticité linéaire

La plupart des résultats que nous aurons besoin par la suite sont introduits succinctement dans ce chapitre. Pour commencer, nous établissons le *système d'équilibre*. Ensuite, nous introduisons la *théorie de la déformation*; cette dernière nous a amené à envisager les *constantes élastiques*. Ainsi, la loi de comportement de *Hooke* permet d'explicitier les contraintes en fonction des déplacements, et dans ces relations interviennent le coefficient de Poisson  $\nu$  et le module de Yong  $G$  (ou  $E$ ). Pour finir, nous donnons des exemples illustratifs.

## 2.1 Introduction

L'élasticité linéaire est une discipline scientifique étudiant les solides déformables par des méthodes analytiques. Elle décrit la déformation de l'objet ainsi que les contraintes internes qu'il subit. Les notions fondamentales de cette étude sont les contraintes et les déplacements dont la correspondance est biunivoque. La déformation élastique est une déformation réversible c'est-à-dire que le milieu retourne à son état initial une fois la charge supprimée. La formulation mathématique de ce problème (système d'EDP et des conditions limites) est basée sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Seulement l'échelle macroscopique est prise en compte (continuité du milieu, négligence de l'effet interatomique entre les molécules;...). Aux plus grandes déformations, l'élasticité devient non linéaire pour certains matériaux [2, 3, Barber J. R. ].

## 2.2 Établissement du système d'équilibre

La déformation élastique est une déformation réversible d'un objet : le milieu retourne à son état initial lorsque l'on supprime les sollicitations.

La déformation élastique est un domaine important de la mécanique des milieux continus (MMC) et de la thermodynamique (compression des gaz).

Supposons qu'un élément de volume d'arêtes  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  soit soumis à une force volumique dont les composantes sont  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  comme indiqué sur la figure (2.1).

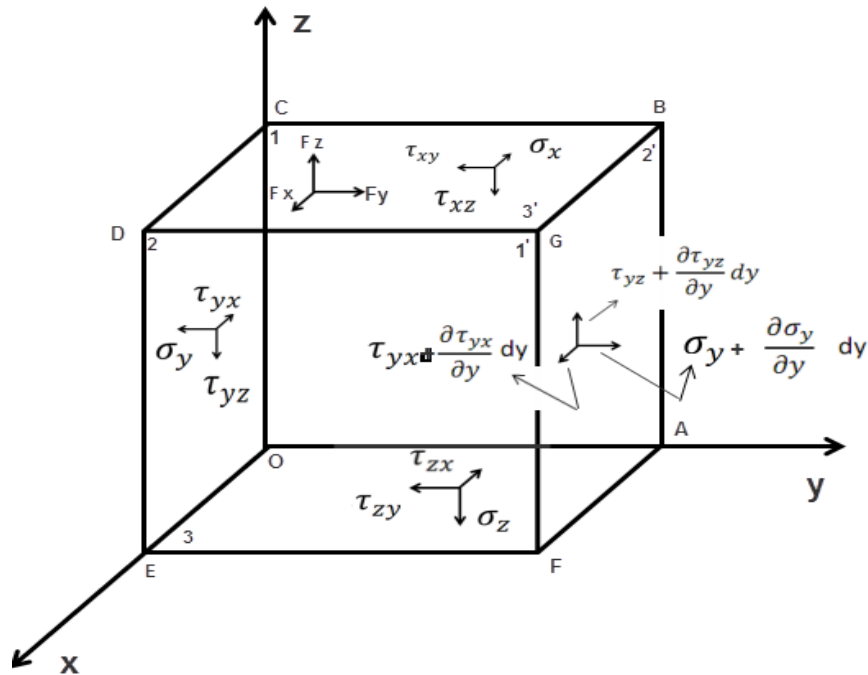


Figure 2.1 : Etablissement du système d'équilibre.

Les composants de la force sollicitant le volume sont :  $(F_x dx dy dz)$ ,  $(F_y dx dy dz)$  et  $(F_z dx dy dz)$  ainsi, les inconnues sont :  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  et  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ .

**Remarque 2.2.1** Les surfaces principales 1, 2 et 3 ont pour l'origine O.

**Remarque 2.2.2** L'interaction de ce volume avec le milieu extérieur conduit à l'apparition des forces surfaciques.

### 2.2.1 Système d'équilibre en coordonnées Cartésiennes

Comme indiqué sur la figure précédente, nous établissons le système d'équilibre de cet élément élémentaire en contraintes telle que :

$$\sigma = \frac{dF}{dS}.$$

-Face 1(OABC) :  $dy dz$  est sollicité par la force dont les composantes s'expriment à l'aide de :  $(\sigma_x$ -contrainte normale) et  $(\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ -contraintes tangentielles), ainsi les composantes de

la force sollicitant la face  $(OABC)$  sont :

$$\sigma_x dydz, \tau_{xy} dydz, \tau_{xz} dydz.$$

Le même raisonnement est appliqué aux faces 2 et 3.

### 2.2.1.i Orientation des contraintes

Soit une surface dont la normale extérieure est dirigée suivant l'un des axes  $O\vec{x}$ ,  $O\vec{y}$  et  $O\vec{z}$  comme indiqué sur la figure (2.2) suivante :

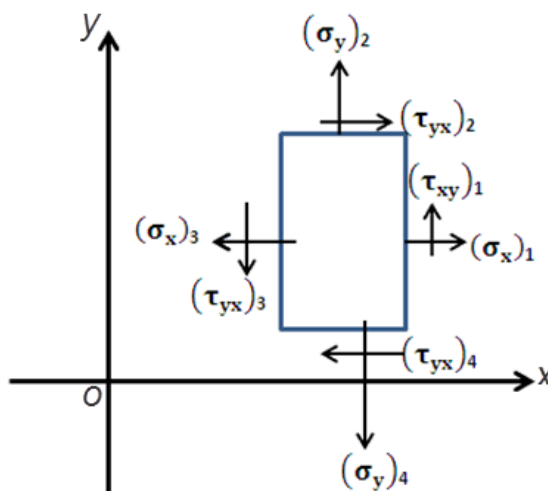


Figure 2.2 : Orientation des contraintes.

Nous voyons que les contraintes agissant sur cette surface sont positives si leurs orientations coïncident avec le sens positif des trois axes. Si la normale est orientée dans le sens inverse, les contraintes sont alors positives si leurs orientations sont dans le sens négatif des trois axes.

**Remarque 2.2.3** *Les sens positif et négatif correspondent aux contraintes sollicitant une traction ou une compression.*

### 2.2.1.ii Établissement du système d'équilibre

L'orsqu'on se limite à des oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre, on rappelle qu'on peut utiliser pour l'élasticité linéaire un développement de Taylor d'ordre un :

$$f(x + dx, y, z) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + (\text{termes négligés}). \quad (2.1)$$

Nous obtenons les contraintes agissant sur la face (1)' :

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right), \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right), \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right), \quad (2.2)$$

Ecrivons que la projection sur  $x$  de la somme des forces appliquées au parallélépipède, de centre  $O$  et de côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ , est nulle. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} -\sigma_x dydz + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \tau_{yx} dx dz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{zx} dx dy \\ + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy + F_x dx dy dz = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Il vient après simplification :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0, \quad (2.4)$$

De même, les projections sur  $y$  et sur  $z$  donnent :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + F_y = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_z = 0, \quad (2.6)$$

Soit maintenant,  $\acute{O} \left( \frac{dx}{2}, \frac{dy}{2}, \frac{dz}{2} \right)$  comme illustré sur la figure(2.3) où;  $(\acute{O}\xi) \setminus \setminus (Ox)$ ,  $(\acute{O}\mu) \setminus \setminus (Oy)$  et  $(\acute{O}\varphi) \setminus \setminus (Oz)$

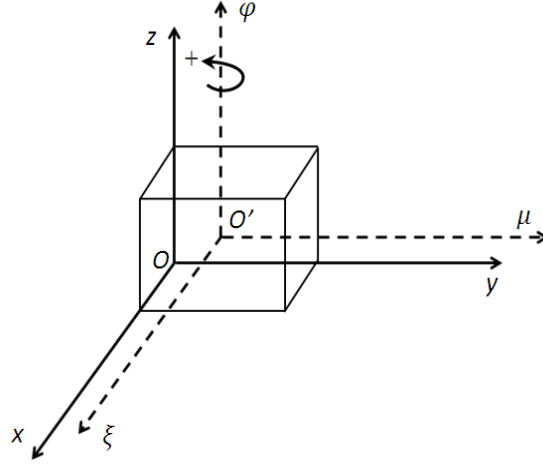


Figure 2.3 : Moments de forces.

Les trois moments de forces (le moment à la force multipliée par le bras), provoquant la rotation de l'élément de volume des axes  $ó\xi$ ,  $ó\mu$  et  $ó\varphi$  respectivement sont nuls, et nous avons :

$$-\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\right) dy dz \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} = 0. \quad (2.7)$$

Nous simplifions l'équation (2.7) en négligeant les éléments d'ordre 4, et nous trouvons :

$$-\tau_{yx} dx dy dz + \tau_{xy} dx dy dz = 0 \implies \tau_{yx} = \tau_{xy}.$$

Ainsi, les deux autres moments donnent :

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Finalement, les inconnues du modèle sont :

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}. \quad (2.8)$$

## 2.2.2 Système d'équilibre en coordonnées cylindriques

Pour établir le système d'équilibre en coordonnées cylindriques [29, Martin. H. Sadd.], considérons un élément de volume élémentaire délimité par les six faces curvilignes comme indiqué sur la figure (2.4) :

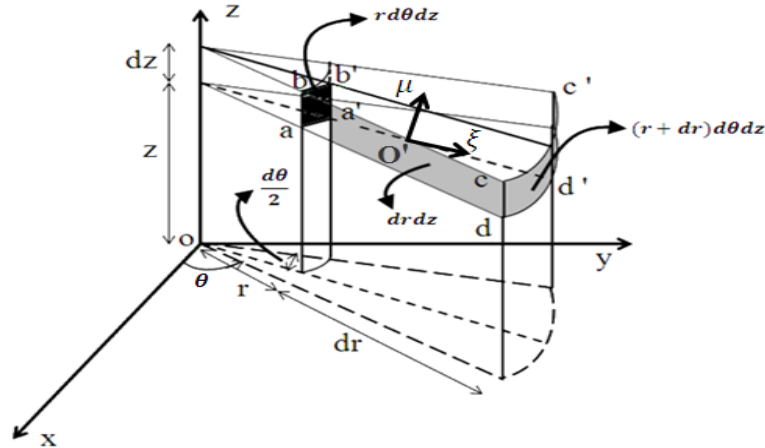


Figure 2.4: Système d'équilibre en coordonnées cylindriques.

Pour cela, soit  $\hat{O}\xi\mu\varphi$  un système de coordonnées cylindriques tel que :  $\hat{O} \left( r + \frac{dr}{2}, \theta + \frac{d\theta}{2}, z + \frac{dz}{2} \right)$ ,  $\hat{O}\xi$  et  $\hat{O}\mu$  sont les vecteurs radiaux et angulaires, respectivement.

### 2.2.2.i Contraintes et leurs orientations

- Les contraintes normales agissant sur les faces (principales)  $abb'a'$  et  $aádd'$  sont :

$$\sigma_r, \sigma_\theta \text{ et } \sigma_z.$$

- Les contraintes tangentielles agissant sur les faces précédentes sont :

$$\tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta r} \text{ et } \tau_{\theta z}, \tau_{zr}, \tau_{z\theta}.$$

- Les contraintes normales : positives dans le cas d'une traction et négative pour une compression.

## 2.2.2.ii Établissement du système d'équilibre

Appliquons sur  $\Omega$  une force volumique  $F (F_r, F_\theta, F_z)$ . Cet élément est en équilibre si la somme des projections des forces sur chacun des axes  $\hat{O}\xi, \hat{O}r, \hat{O}\varphi$  est nulle ainsi que les trois moments, À l'aide de la figure (2.5)

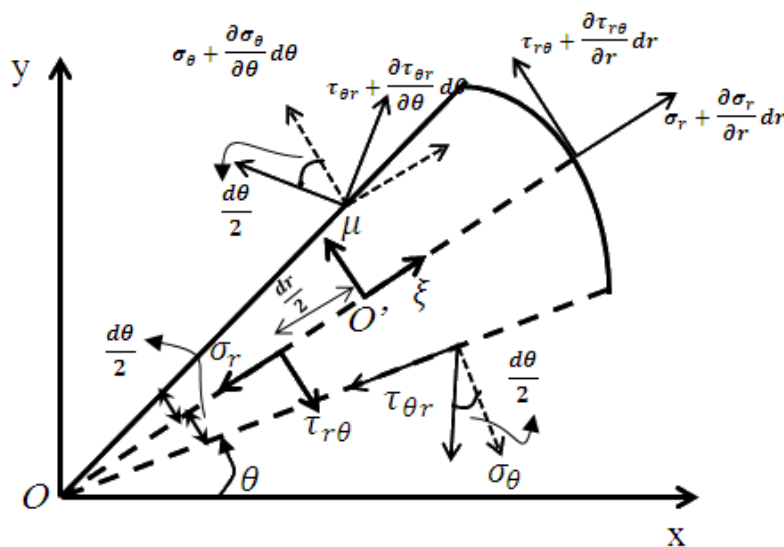


Figure 2.5: Etablissement du système d'équilibre

On obtient les conditions d'équilibre suivantes :

$$\begin{aligned}
 \sum F_{\hat{O}\xi} = & \left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - r \sigma_r d\theta dz + \left( \tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} dz \right) r d\theta dr - r \tau_{zr} d\theta dr \\
 & - \left( \sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) \sin \left( \frac{d\theta}{2} \right) dr dz - \sigma_\theta \sin \left( \frac{d\theta}{2} \right) dr dz + \left( \tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) \cos \left( \frac{d\theta}{2} \right) dr dz \\
 & - \tau_{\theta r} \cos \left( \frac{d\theta}{2} \right) dr dz + r F_r dr d\theta dz = 0.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Or, l'angle  $d\theta$  est infiniment petit ainsi  $\sin \left( \frac{d\theta}{2} \right) = \frac{d\theta}{2}$  et  $\cos \left( \frac{d\theta}{2} \right) = 1$ . En négligeant les termes d'ordre quatre, nous aurons :

$$\sigma_r - \sigma_\theta + r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + r \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + r F_r = 0 \implies \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0. \quad (2.10)$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \sum F_{\dot{\theta}\mu} &= \left( \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \right) - (r + dr) d\theta dz - \tau_{r\theta} d\theta dz + \left( \tau_{z\theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} dz \right) r d\theta dz - \tau_{z\theta} r d\theta dr \\ &+ \left( \sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr dz - \sigma_\theta \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr dz + \left( \tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr dz \\ &+ \tau_{\theta r} \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr dz + F_\theta r dr d\theta dz = 0, \end{aligned}$$

et les contraintes tangentielles qui interviennent sont représentées sur la figure (2.6).

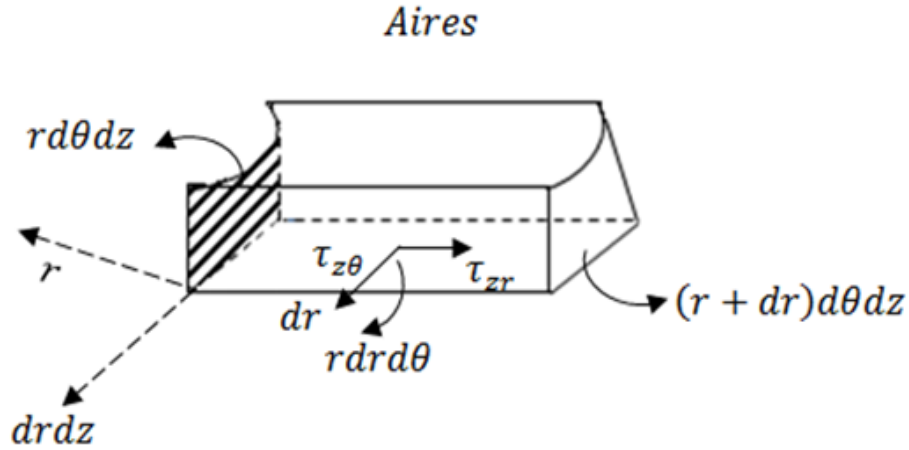


Figure 2.6: Conditions d'équilibre sur les contraintes.

Il vient, en négligeant les termes d'ordre quatre, nous obtenons :

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}}{r} + F_\theta = 0 \implies \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + F_\theta = 0. \quad (2.11)$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \sum F_{\dot{\varphi}} = & \left( \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) r d\theta dz - \sigma_z r d\theta dr + \left( \tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz \\ & - \tau_{rz} r d\theta dz + \left( \tau_{\theta z} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz - \tau_{\theta z} dr dz + F_z r dr d\theta dz = 0, \end{aligned}$$

alors

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} + F_z = 0. \quad (2.12)$$

**Remarque 2.2.4** Ce dernier système est appelé système d'équilibre en contrainte.

Conditions d'équilibre sur les moments

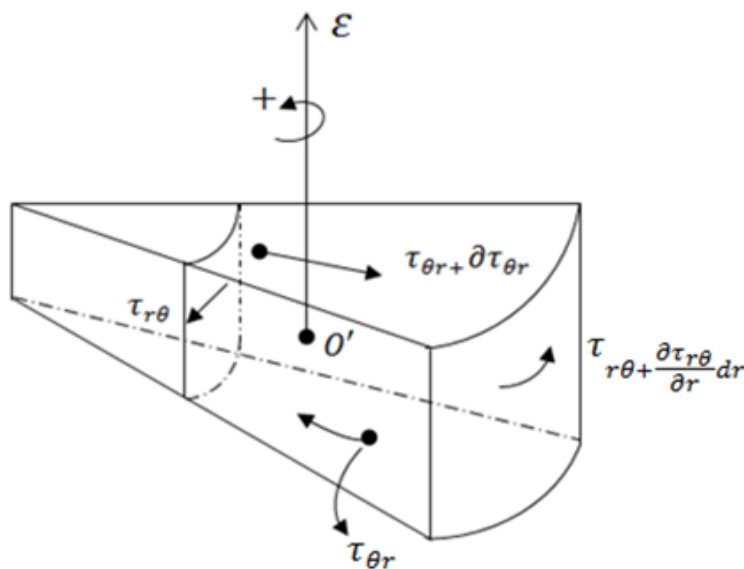


Figure 2.7: Conditions d'équilibre sur les moments.

Comme indiquée sur la figure (2.7), le moment par rapport à l'axe  $o\varepsilon$  entraîne aisément

$$\begin{aligned} & \left( \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz \frac{dr}{2} - \tau_{\theta r} dr dz \left( r + \frac{dr}{2} \right) \frac{d\theta}{2} + \tau_{r\theta} r d\theta dz \frac{dr}{2} \\ & + \left( \tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \left( r + \frac{dr}{2} \right) \frac{d\theta}{2} = 0 \implies \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

## 2.3 Théorie de la déformation

### 2.3.1 En coordonnées Cartésiennes

Étudions la déformation caractérisant les allongements et les notations de la face plane  $abcd$  d'un élément de volume élémentaire (parallépipède) [45]. Après déformation sous l'effet d'un champ de contrainte, Les points  $a(x, y)$  et  $b(x + dx, y)$  et  $c(x, y + dy)$  se ramènent à  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$ . Voir la figure(2.8) suivante :

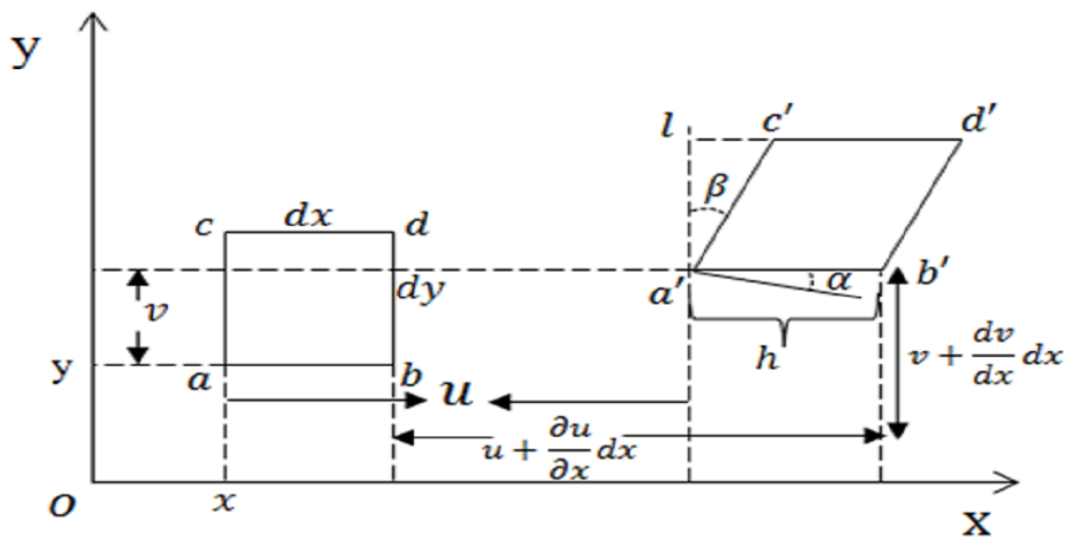


Figure 2.8: Déformation d'élément de volume élémentaire (par allelipipede).

où  $u, v$  sont les composantes de vecteur de déplacement suivant les deux axes :  $o\vec{x}$  et  $o\vec{y}$ . Posons ( $u = u_a, v = u_b$ ) et en tenant compte de l'hypothèse de continuité et de la formule de Taylor à l'ordre 1, on trouve :

$$\begin{aligned}
 u_b &= u(x + dx, y) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \\
 u_c &= u(x, dy + y) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \\
 v_b &= v(x + dx, y) = v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} dx, \\
 v_c &= v(x, dy + y) = v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y} dy.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ainsi l'allongement relatif en  $a$  suivant l'axe  $o\vec{x}$  est donné par:

$$\varepsilon_x = \frac{a'b' - ab}{ab} \implies a'b' = (1 + \varepsilon_x) ab = (1 + \varepsilon_x) dx. \quad (2.15)$$

Remarquons aussi que :

$$(a'b')^2 = (a'h)^2 + (h'b')^2,$$

d'où

$$\begin{aligned} a'h &= u + \frac{\partial v}{\partial x} dx + dx - u \\ &= 1 + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ \implies h'b' &= \frac{\partial v}{\partial x} dx. \end{aligned} \quad (2.16)$$

En tenant compte des relations (2.15) et (2.15) on aura :

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_x)^2 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \implies (1 + \varepsilon_x) = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \\ &\implies \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.17)$$

par contre, dans le cas de la déformation angulaire, posons :

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta,$$

et en tenant compte des relations (2.15) et (2.15) et de l'approximation

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha) = \alpha \\ \operatorname{tg}(\beta) = \beta \end{cases},$$

nous aurons :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{b'h}{a'h} + \frac{c'l}{a'l} \\ &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial u}{\partial y}} \\ &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \left(1 - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}{1 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

En négligeant les termes d'ordre deux, nous obtenons :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.19)$$

**Remarque 2.3.1** *En trois dimensions, les expressions des déformations sont*

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.
\end{aligned}
\tag{2.20}$$

### 2.3.2 En coordonnées cylindriques

Soient  $(u_r, u_\theta, u_z)$  les composantes radiale, angulaire et axiale respectivement du vecteur de déplacement. Les déformations sont données par :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \\
\gamma_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \\
\gamma_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)
\end{aligned}
\tag{2.21}$$

## 2.4 Constantes élastiques

Supposons que le milieu homogène et isotrope. Les propriétés mécaniques de ces milieux sont complètement définies par les deux constantes:  $\nu$ -coefficient de poisson et  $G$ -module de cisaillement ou bien (module de Young  $E$ ) [22].

### 2.4.1 Coefficient de poisson “ $\nu$ ”

Le coefficient de Poisson fait partie des constantes élastiques. Il est compris entre  $-1$  et  $0,5$ . Les valeurs expérimentales obtenues dans le cas d'un matériau parfaitement isotrope sont très proches de la valeur théorique ( $1/4$ ). Pour un matériau quelconque, on obtient en moyenne  $0,3$ . Il existe également des matériaux à coefficient de Poisson négatif : on parle alors parfois de matériaux auxétiques.

Supposons maintenant qu'une tige élastique dont l'une des extrémités est fixé, de longueur  $l$  et de largeur  $m$  est soumise à une traction (ou bien une compression) d'intensité uniforme  $F$ .

Alors que le coefficient de poisson est donné par :

$$\nu = \frac{l}{\Delta l} \times \frac{\Delta m}{m}, \quad (2.22)$$

où  $\frac{\Delta l}{l}$  représente déformations longitudinale, et  $\frac{\Delta m}{m}$  représente transversale. Pour la plus part des métaux, le coefficient de poisson  $\nu$  varie de 0.25 à 0.33.

### 2.4.2 Module de cisaillement “ $G$ ”

Le module de cisaillement, aussi appelé module de glissement, est une grandeur physique propre à chaque matériau et qui intervient dans la caractérisation des déformations causées par des efforts de cisaillement. Si l'on considère un parallélépipède rectangle, le cisaillement est une variation de l'angle, qui n'est plus droit. Cela correspond à des forces s'exerçant parallèlement à la face (voir la figure (2.9)).

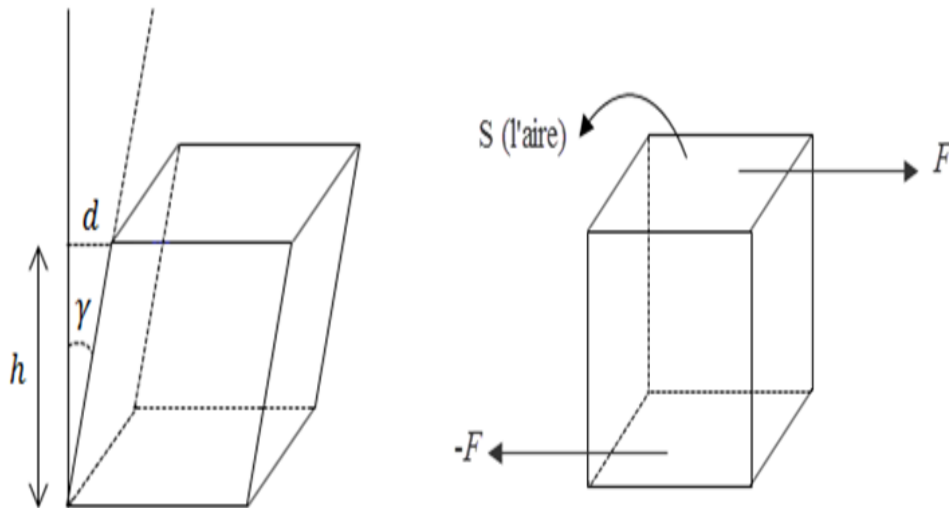


Figure 2.9: Module de cisaillement  $G$ .

Nous définissons d'abord la contrainte de cisaillement :

$$\tau = \frac{F}{S},$$

où ;  $F$  est la force,  $S$  est l'aire sur laquelle la force agit. La définition du module de cisaillement  $G$  est le rapport entre la contrainte de cisaillement et la déformation :

$$G = \frac{\tau}{\frac{d}{h}} = \frac{\tau}{\tan \gamma} = \frac{\tau}{\gamma} \left( \frac{N}{mm^2} \right), \quad (2.23)$$

où ;  $d$  est le déplacement latéral et  $\gamma$  est l'écart à l'angle droit, ainsi  $h$  est l'épaisseur. Le module de cisaillement a la dimension d'une contrainte et est généralement exprimé en Newtons par millimètre carré ou en GPa (gigapascals). A titre d'exemple, le module de cisaillement de l'acier vaut 81000 N/mm<sup>2</sup> soit 81 GPa. Dans le cas d'un milieu isotrope, le module de cisaillement est lié au module d'Young et au coefficient de Poisson.

### 2.4.3 Module de young “ $E$ ”

Le module de Young (ou module de traction) est la constante qui relie la contrainte de traction (ou de compression) et la déformation pour un matériau élastique isotrope [11]. Le physicien britannique Thomas Young (1773 – 1829) avait remarqué que le rapport entre la contrainte de traction appliquée à un matériau et la déformation qui en résulte (un allongement relatif) est constant, tant que cette déformation reste petite et que la limite d'élasticité du matériau n'est pas atteinte. La loi d'élasticité est la loi de Hooke. Soit maintenant  $S$  l'aire de la section transversale de la tige, alors le module de Young est défini par :

$$E = \frac{F}{S} \times \frac{l}{\Delta l} \quad (N/mm^2), \quad (2.24)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

En élasticité interviennent aussi les deux constantes de Lamé :  $\lambda$ ,  $\mu (= G)$  où ;

$$\lambda = \frac{2\nu}{1 - \nu^2} G,$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - \nu^2)}.$$

**Remarque 2.4.1** De manière générale, toute loi peut localement (c'est-à-dire pour de petites variations) être remplacée par un développement limité du premier ordre, ou « approximation linéaire », à condition que la tangente de la loi ne soit pas horizontale autour du point considéré. Les lois élastiques sont donc des approximations linéaires du comportement réel, plus complexe.

#### 2.4.4 Tableau de quelques constantes élastiques

	E(Gpa)	G(Gpa)	$\nu$
Acier	207	80.2	0.30
Cuivre	89.6	33.4	0.34
Aluminium	68.9	25.7	0.34
Béton	27.6	11.5	0.20

Tableau 2.1 : Constantes élastiques.

où;

$$1 \text{ (Gpa)} = 10^3 \text{ (Mpa)}, 1 \text{ (Mpa)} = 10^6 \text{ (pa)} \text{ et } 1 \text{ (N/mm}^2\text{)} = 1 \text{ (Mpa)}.$$

## 2.5 Loi de Hooke

La loi de Hooke a été énoncée par Robert Hooke, par la phrase en latin : "ut tensio sic vis" (ou son anagramme ceiinossstuv) (en 1678 ; expériences datant de 1675). Elle est employée dans plusieurs domaines et principalement en physique. Hooke n'a considéré que la phase élastique et linéaire, donc proportionnelle et réversible. [36]. La loi de Hooke est une loi de comportement des solides soumis à une déformation élastique de faible amplitude. Cette loi permet d'explicitier les contraintes en fonction des déplacements, et dans ces relations interviennent les deux constantes élastiques  $\nu$  et  $G$ .

## 2.5.1 En coordonnées cartésiennes

### 2.5.1.i Contraintes normales

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z,\end{aligned}\tag{2.25}$$

où;

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - \text{dilatation volumique.}$$

### 2.5.1.ii Contraintes tangentielles

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}, \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}.\end{aligned}\tag{2.26}$$

En tenant compte de la loi de Hooke, le système d'équilibre en déplacement est :

$$\begin{aligned}\Delta u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{F_x}{G} &= 0, \\ \Delta u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{F_y}{G} &= 0, \\ \Delta u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{F_z}{G} &= 0.\end{aligned}\tag{2.27}$$

## 2.5.2 En coordonnées cylindriques

### 2.5.2.i Contraintes normales

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_r, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z, \\ \sigma_\theta &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_\theta.\end{aligned}\tag{2.28}$$

où;

$$\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta - \text{dilatation volumique.}$$

## 2.5.2.ii Contraintes tangentielles

$$\begin{aligned}
\tau_{rz} &= G\gamma_{rz}, \\
\tau_{r\theta} &= G\gamma_{r\theta}, \\
\tau_{\theta z} &= G\gamma_{\theta z}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

En trois dimensions les déformations sont données :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Soient ( $u_r$ ,  $u_\theta$  et  $u_z$  les trois composantes du vecteur de déplacement en coordonnées), les expressions des déformations sont alors :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left[ u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right], \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z},
\end{aligned} \tag{2.31}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}
\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right], \\
\gamma_{rz} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right], \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right].
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Le système d'équilibre est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_r - \frac{1}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{F_r}{G} = 0, \\ \Delta u_\theta - \frac{1}{r^2} u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \frac{F_\theta}{G} = 0, \\ \Delta u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{F_z}{G} = 0. \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Dans le cas axisymétrique et en l'absence de forces volumiques, le déplacement est indépendant de la coordonnée  $\theta$  c'est-à-dire  $u_\theta = 0$ . Alors que  $u_r$  et  $u_z$  dépendants uniquement de  $r$  et  $z$ . Ainsi que  $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$ , et le système d'équilibre correspondant est:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{S}\ell + 1) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right] + (\mathfrak{S}\ell - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0, \\ (\mathfrak{S}\ell - 1) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] + (\mathfrak{S}\ell + 1) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right] = 0. \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Telle que  $\mathfrak{S}\ell \equiv \text{Kappa} = 3 - 4\nu$  (constante de Mash). Posons : ( $u_r = u$ ,  $u_z = w$ ) alors les contraintes s'obtiennent par :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{G}{\mathfrak{S}\ell - 1} \left[ (\mathfrak{S}\ell + 1) \frac{\partial u}{\partial r} + (3 - \mathfrak{S}\ell) \left( \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right], \\ \sigma_z &= \frac{G}{\mathfrak{S}\ell - 1} \left[ (3 - \mathfrak{S}\ell) \left( \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + (\mathfrak{S}\ell + 1) \frac{\partial w}{\partial z} \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{G}{\mathfrak{S}\ell - 1} \left[ (\mathfrak{S}\ell + 1) \frac{u}{r} + (3 - \mathfrak{S}\ell) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right], \\ \tau_{rz} &= G \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

## 2.6 Application analytique de la méthode de transformation intégrale en élasticité

Pour valider l'extension de la méthode de transformation de Hankel, nous allons traiter différents problèmes d'élasticité linéaire. Nous en dénombrons trois en fonction de la configuration géométrique. Plus précisément, ces problèmes sont :

- Problème de conduction thermique dans une plaque métallique bicouches dont les coefficients de conductivité thermique sont  $\lambda_1$  ( $0 < z < h$ ) et  $\lambda_2$  ( $z > h$ ).
- Problème d'une plaque élastique affaibli par une fissure circulaire.
- Problème d'un espace élastique affaibli par deux fissures dans le plan  $z = 0$  : l'une circulaire subissant une contrainte normale de traction d'intensité  $p_0$  alors que, la seconde est externe non chargée.

### 2.6.1 Problème de conduction thermique

Pour une plaque métallique bicouches dont les coefficients de conductivité thermique sont  $\lambda_1$  ( $0 < z < h$ ) et  $\lambda_2$  ( $z > h$ ). Ainsi, les conditions limites sur la frontière  $\{z : z = 0\}$  sont :

$$\begin{aligned} u_1(r, z) \Big|_{z=0} &= 1, & (r < 1), & \quad (a) \\ \frac{\partial u_1(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0, & (r > 1), & \quad (b) \end{aligned} \tag{2.36}$$

alors que sur la zone de séparation  $\{z : z = h\}$  le contact est supposé idéal; c'est à dire :

$$\begin{aligned} u_1(r, z) \Big|_{z=h} &= u_2(r, z) \Big|_{z=h}, & \quad (a) \\ \lambda_1 \frac{\partial u_1(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=h} &= \lambda_2 \frac{\partial u_2(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=h}, & \quad (b) \end{aligned} \tag{2.37}$$

la continuité des températures et des flux correspondants entraîne  $u_2 \rightarrow 0$  ( lorsque  $z \rightarrow \infty$ ), et la figure (2.10) montre la géométrie du problème.

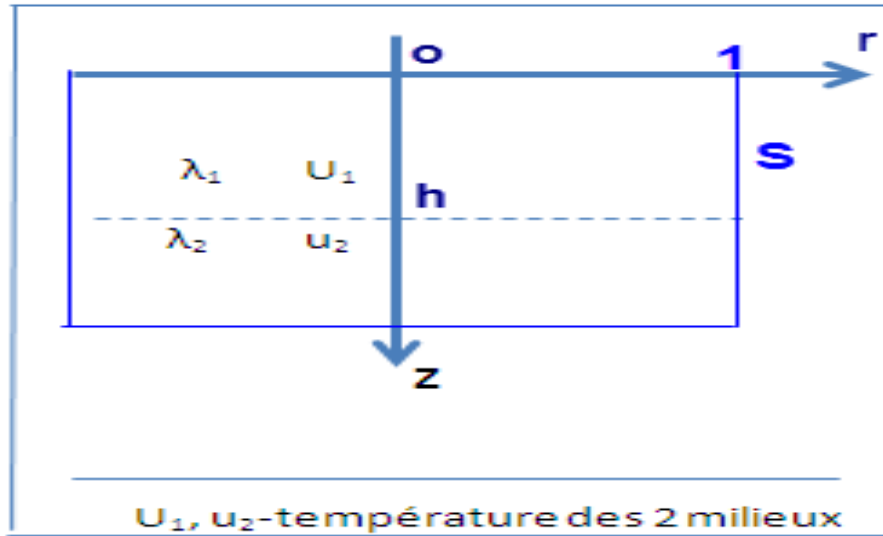


Figure: 2.10: Problème de conduction thermique.

**Proposition 2.6.1** Soient les équations de conduction thermique suivantes :

$$\begin{cases} \Delta u_1(r, z) = 0, & (0 \leq z \leq h), (r \geq 0), \\ \Delta u_2(r, z) = 0, & (z \geq h), (r \geq 0), \end{cases} \quad (2.38)$$

où;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Alors que, les conditions aux limites sont :

$$u_1(r, z) \Big|_{z=0} = 1, \quad \text{si } r < 1, \quad (a)$$

$$\frac{\partial u_1(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \text{si } r > 1, \quad (b)$$

$$u_1(r, z) \Big|_{z=h} = u_2(r, z) \Big|_{z=h}, \quad (c)$$

$$\lambda \frac{\partial u_1(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=h} = \lambda \frac{\partial u_2(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=h}. \quad (d)$$

(2.39)

## 2.6. Application analytique de la méthode de transformation intégrale en élasticité

Nous multiplions les équations de conduction (2.38) par  $rJ_0(\zeta r)$ , et on intègre en suite le résultat de 0 à  $\infty$  suivant  $r$ . En tenant compte de ( $u_2 \rightarrow 0$  lorsque  $z \rightarrow \infty$ ), et à l'aide de la transformation inverse de Hankel, on trouve :

$$u_1(r, z) = \int_0^\infty [A_1(\zeta) e^{-\zeta z} + B_1(\zeta) e^{\zeta z}] J_0(\zeta r) d\zeta, \quad (2.40)$$

$$u_2(r, z) = \int_0^\infty A_2(\zeta) e^{-\zeta z} J_0(\zeta r) d\zeta. \quad (2.41)$$

Vérifions les transformées de (2.39.c) et (2.39.d) ; nous avons les équations algébriques :

$$A_1(\zeta) e^{-\zeta z} + B_1(\zeta) e^{\zeta z} = A_2(\zeta) e^{-\zeta z}, \quad (2.42)$$

$$A_1(\zeta) e^{-\zeta z} - B_1(\zeta) e^{\zeta z} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} A_2(\zeta) e^{-\zeta z}. \quad (2.43)$$

En additionnant (2.42) et (2.43) nous obtenons :

$$2A_1(\zeta) e^{-\zeta z} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} A_2(\zeta) e^{-\zeta z} \text{ i.e., } A_1(\zeta) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_2} A_2(\zeta),$$

Par suite, en soustrayant (2.42) et (2.43) nous aurons :

$$2B_1(\zeta) e^{\zeta z} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} A_2(\zeta) e^{-\zeta z} \text{ i.e., } B_1(\zeta) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} A_2(\zeta) e^{-2\zeta h},$$

ce qui donne

$$u_1(r, z) = \frac{1}{2\lambda_2} \int_0^\infty A_2(\zeta) [(\lambda_1 + \lambda_2) e^{-\zeta z} + (\lambda_2 - \lambda_1) e^{\zeta(z-2h)}] J_0(\zeta r) d\zeta,$$

$$u_2(r, z) = \int_0^\infty A_2(\zeta) e^{-\zeta z} J_0(\zeta r) d\zeta.$$

Vérifions les conditions mixtes (2.39.a) et (2.39.b), on en déduit : les équations duales suivantes:

$$\frac{1}{2\lambda_2} \int_0^\infty A_2(\zeta) [(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_1) e^{-2\zeta h}] J_0(\zeta r) d\zeta = 1; \quad (r < 1), \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{2\lambda_2} \int_0^\infty A_2(\zeta) [(\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_2 - \lambda_1) e^{-2\zeta h}] J_0(\zeta r) d\zeta = 0; \quad (r > 1). \quad (2.45)$$

Si on suppose

$$A_1(\zeta) = \frac{1}{2\lambda_2} \zeta A_2(\zeta) [(\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_2 - \lambda_1) e^{-2\zeta h}],$$

on déduit les équations dérivées :

$$a + be^{-2\zeta h} = (a - be^{-2\zeta h}) \gamma, \quad (2.46)$$

où;

$$\gamma = \frac{a + be^{-2\zeta h}}{a - be^{-2\zeta h}} = \left( \frac{1 + \frac{b}{a}e^{-2\zeta h}}{1 - \frac{b}{a}e^{-2\zeta h}} \right) H(\zeta).$$

- Si  $0 < \left( \frac{b}{a} = k \right) < 1$ , on aura :

$$\begin{aligned} H(\zeta) &= (1 + ke^{-2\zeta h}) \sum_{n=0}^{+\infty} k^n e^{-2n\zeta h} + \sum_{n=1}^{+\infty} k^n e^{-2n\zeta h} \\ &\simeq 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} k^n e^{-2n\zeta h} \\ &\implies \alpha_n = 2k^n, \beta_n = 2nh. \end{aligned} \quad (2.47)$$

- Si  $A(\zeta) = \zeta \int_0^1 \varphi(t) \cos(\zeta t) dt$ , l'équation (2.45) est satisfaite. Ce qui correspond à poser  $A(\zeta)$  comme suit :

$$A(\zeta) = \zeta \int_0^1 \varphi(t) \cos(\zeta t) dt. \quad (2.48)$$

Dans ce cas, l'équation (2.44) permet de donner l'équation de Fredholm suivante :

$$\varphi(x) + \int_0^1 \varphi(t) k(x, t) dt = 1, \quad (r < 1), \quad (2.49)$$

où ;

$$\begin{aligned} k(x, t) &= -2\pi \int_0^\infty g(\zeta) \cos(\zeta t) d\zeta, \\ g(\zeta) &= -2 \sum_{n=1}^{+\infty} k^n e^{-n\zeta h} \\ \text{i.e., } H(\zeta) &= 1 - g(\zeta). \end{aligned} \quad (2.50)$$

### 2.6.2 Problème d'une plaque élastique affaibli par une fissure

Nous nous intéressons ici au problème d'une fissure circulaire contenue dans une plaque élastique sous une pression interne d'intensité uniforme  $p_0$ . Dans le plan  $z = 0$ , les bords de la plaque sont libres de charges comme indiquer dans la figure (2.11).

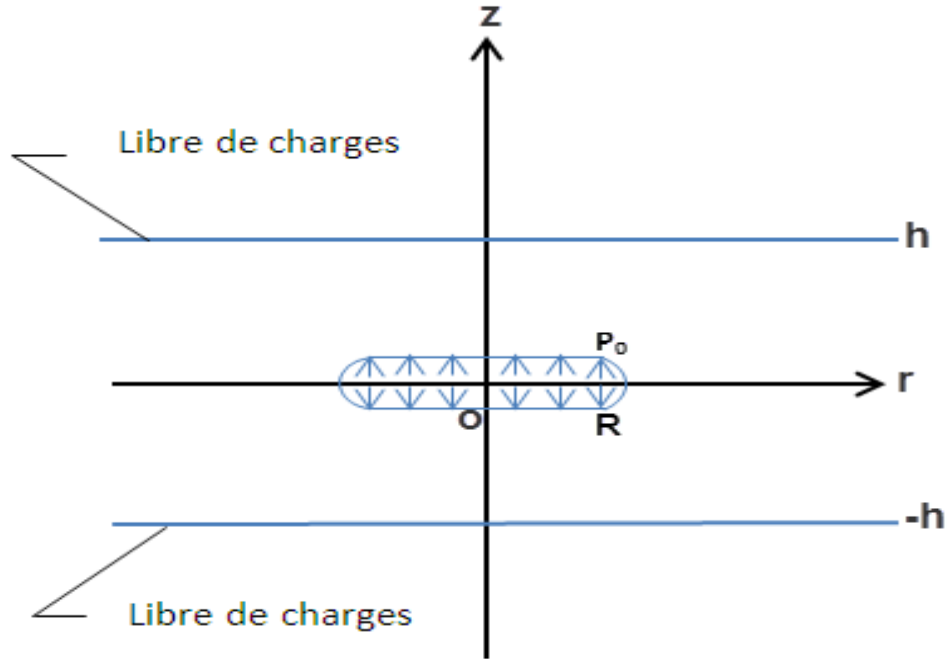


Figure 2.11 : Problème d'une plaque élastique affaibli par une fissure.

En raison de la symétrie du problème, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_z \Big|_{z=0} &= -p_0, \quad \tau_{zr} \Big|_{z=0} = 0, & (r < R), \\ w_z = \tau_{zr} \Big|_{z=0} &= 0, & (r > R), \\ \sigma_z \Big|_{z=h} &= \tau_{zr} \Big|_{z=h} = 0, \end{aligned} \quad (2.51)$$

**Proposition 2.6.2** Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions s'écrivent sous les formes :

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty \{A(\lambda) \cosh(\lambda z) + B(\lambda) \sinh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (2.53)$$

$$\psi(r, z) = \int_0^\infty \{C(\lambda) \cosh(\lambda z) + D(\lambda) \sinh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda.$$

où

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(r, z) &= \Delta \psi(r, z) = 0, \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Alors que le système d'équilibre s'écrira comme suit :

$$\begin{aligned}
 2Gu_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + z \frac{\partial \psi}{\partial r}, & (a) \\
 2Gw_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + z \frac{\partial \psi}{\partial z} - (3 - 4\nu) \psi, & (b) \\
 \sigma_z &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \psi}{\partial z}, & (c) \\
 \tau_{rz} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \psi}{\partial r}. & (d)
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned}
 \tau_{rz} \Big|_{z=0} &= 0 \implies B(\lambda) = \frac{1 - 2\nu}{\lambda} C(\lambda), \\
 \tau_{zr} \Big|_{z=h} &= 0 \implies A(\lambda) = - \frac{[\lambda^2 h^2 + (1 - 2\nu) \sinh^2(\lambda z)]}{k(\lambda)} C(\lambda), \\
 \sigma_z \Big|_{z=h} &= 0 \implies D(\lambda) = - \frac{\sinh^2(\lambda z)}{k(\lambda)} C(\lambda).
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

s'expriment les trois paramètres  $A$ ,  $B$  et  $D$  de (2.53) en fonction de  $C$ . Puis, en tenant compte de la loi de Hooke, on aura les équations intégrales duales :

$$\begin{aligned}
 \sigma_z \Big|_{z=0} &= \int_0^\infty \lambda \alpha(\lambda) C(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = -p_0, & (r < R), \\
 w_z \Big|_{z=0} &= - \frac{1 - \nu}{G} \int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, & (r > R),
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

où,

$$\alpha(\lambda) = \frac{\sinh^2(\lambda z) - \cosh^2(\lambda z)}{k(\lambda)}. \tag{2.58}$$

### 2.6.3 Problème d'une plaque élastique affaiblie par deux fissures

On traite ici le problème d'une plaque élastique affaiblie par deux fissures dans le plan  $z = 0$  : l'une circulaire subissant une contrainte normale de traction d'intensité  $p_0$  alors que, la seconde est externe non chargée, ce qui est un peu loin de la réalité si nous observons le problème décrit sur la figure (2.12).

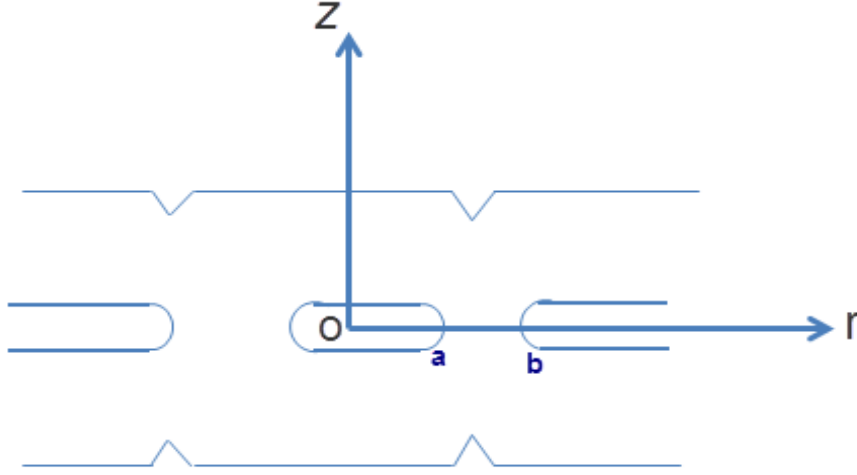


Figure 2.12: Plaque élastique affaibli par deux fissures.

**Proposition 2.6.3** Soit le système d'équilibre en déplacement suivant :

$$\begin{cases} 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right] + (1-2\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0, \\ (1-2\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right] + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right] = 0. \end{cases} \quad (2.59)$$

où ;  $u$  et  $w$  sont les composantes radiale et axiale du vecteur de déplacement respectivement.

A ces équations aux dérivées partielles on adjoint les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_z \Big|_{z=0} &= -p_0, \quad \tau_{zr} \Big|_{z=0} = 0, & (r < a), \\ w \Big|_{z=0} &= \tau_{zr} \Big|_{z=0} = 0, & (a < r < b), \\ \sigma_z \Big|_{z=0} &= \tau_{zr} \Big|_{z=0} = 0, & (r > b), \end{aligned} \quad (2.60)$$

Alors que les contraintes  $\sigma_z$  et  $\tau_{zr}$  sont données par :

$$\sigma_z = \frac{2G}{1-2\nu} \left[ \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + (1-\nu) \frac{\partial w}{\partial z} \right], \quad (2.61)$$

$$\tau_{zr} = G \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right]. \quad (2.62)$$

La méthode des fonctions de contraintes de Boussinesq permet de déduire les relations :

$$2Gu = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + z \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (2.63)$$

$$2Gw = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + z \frac{\partial \psi}{\partial z} - (3 - 4\nu) \psi. \quad (2.64)$$

Ainsi

$$\Delta \varphi = \Delta \psi = 0 \text{ où ; } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.65)$$

La loi de Hooke donne les deux contraintes normale  $\sigma_z$  et tangentielle  $\tau_{zr}$  suivantes

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2(1 - \nu) \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (2.66)$$

$$\tau_{zr} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (2.67)$$

On pose

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda, \quad \psi(r, z) = \int_0^\infty B(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda, \quad (2.68)$$

où

$$\frac{\partial}{\partial r} J_0(\lambda r) = -\lambda J_1(\lambda r). \quad (2.69)$$

La condition  $\tau_{zr} \Big|_{z=0} = 0$  donne

$$\lambda^2 A - (1 - 2\nu)(-\lambda) B = 0 \implies A(\lambda) = -(1 - 2\nu) \frac{B(\lambda)}{\lambda}, \quad (2.70)$$

$$\varphi(r, z) = -(1 - 2\nu) \int_0^\infty \lambda^{-1} B(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda. \quad (2.71)$$

On en déduit

$$2Gu = \int_0^\infty [(1 - 2\nu) - \lambda z] J_1(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda, \quad (2.72)$$

$$2Gw = - \int_0^\infty [2(1 - \nu) + \lambda z] B(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda. \quad (2.73)$$

Alors que

$$\sigma_z = \int_0^\infty [(1 + \lambda z) B(\lambda) -] J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda, \quad (2.74)$$

$$\tau_{zr} = z \int_0^\infty \lambda^2 B(\lambda) J_1(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda. \quad (2.75)$$

Finalement, les équations intégrales

$$\begin{aligned}\sigma_z \Big|_{z=0} &= \int_0^\infty \lambda B(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = -p_0, & (r < a), \\ -\frac{G}{1-\nu} w \Big|_{z=0} &= \int_0^\infty B(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, & (a < r < b), \\ \sigma_z \Big|_{z=0} &= \int_0^\infty \lambda B(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0. & (r > b).\end{aligned}\tag{2.76}$$

s'obtiennent à l'aide des conditions mixtes lorsque  $z = 0$ .

## 2.7 Conclusion

Un premier objectif a été atteint dans ce chapitre à savoir la méthode de la transformation d'équations intégrales duales en une équation intégrale de Fredholm. Néanmoins, cette dernière méthode de transformation est souvent réalisée difficilement pour trouver une solution exacte. Ce chapitre a présenté la modélisation des déformations en présentant les notions élémentaires d'élasticité linéaire qui vont être utilisées dans les deux chapitres suivants. Les formules utilisées par la suite ne reprendront que les résultats finaux de cette modélisation, qui ramène les problèmes à un système d'équations intégrales duales.

# Chapitre 3

## Applications et méthodes de résolutions

Ce chapitre comporte quatre sections. Premièrement, nous donnons la méthode de résolution d'un système d'équilibre en se basant sur les fonctions de contraintes de Boussinesq (cas axisymétrique et en l'absence des forces volumiques) et la loi de Hooke. Ensuite, nous présentons les techniques de résolution "analytique" et "numérique". Ainsi, nous illustrons la procédure de Hara et de Sakamoto en explicitant les définitions des polynômes de Tchebychev et les formules intégrales (produit de fonctions de Bessel). Puis, nous donnons une méthode sur la résolution numérique du système algébrique infini développé dans [39, Sakamoto M. (2003)]. Nous terminons par une conclusion.

## 3.1 Introduction

Nous pouvons résoudre les problèmes d'élasticité dans n'importe quel système de coordonnées. Mais les conditions aux limites peuvent avoir une forme plus ou moins compliquée suivant ce choix. On est généralement guidé par la forme du corps élastique étudié. Nous choisissons de préférence un système de coordonnées qui facilite l'écriture des conditions aux limites. Pour les *problèmes axisymétriques*, nous choisissons toujours un système de coordonnées dont l'une des coordonnées est l'angle  $\theta$  autour de l'axe d'axisymétrie. Dans certains problèmes, nous pouvons faire des hypothèses a priori sur la solution recherchée. Selon que ces hypothèses portent sur les contraintes ou sur les déformations, on choisit la formulation correspondante.

### Méthode en déplacement

- postuler la forme du champ de déplacement,
- vérifier les conditions limites en déplacements,
- calculer les déformations, puis les contraintes,

Cette approche en déplacement est utilisée pour résoudre le problème du cylindre sous pression.

### Méthode en contrainte

- postuler un champ de contrainte,

- vérifier les conditions d'équilibre en volume,
- vérifier les conditions aux limites en contrainte,
- calculer les déformations, puis les déplacements à partir des contraintes,
- vérifier les conditions aux limites en déplacement.

Les techniques analytiques sont vite dépassées lorsque le problème devient un peu complexe, il faut alors recourir à des approches numériques. On distingue trois grandes familles d'approches numériques pour la mécanique des milieux continus :

- Les éléments finis;
- Les différences finies;
- Les éléments de frontière;

La première approche a le mérite d'être applicable quelle que soit la géométrie du milieu. Elle est donc utilisée pour tous les problèmes de mécanique faisant intervenir des géométries complexes (crash de voitures, écoulement sanguin, étude vibratoire de fusée, design de puce électronique contre l'échauffement excessif, ...). Les codes industriels les plus connus sont Samcef (le seul européen), Abaqus, Nastran et Ansys. La méthode des différences finies nécessite des domaines de formes simples. Elle est particulièrement utilisée en météorologie (l'atmosphère a une forme simple) et pour l'étude d'écoulement. Enfin, la méthode des éléments frontières permet la prise en compte simple d'un milieu infini ou semi-infini (mais ce milieu doit être linéaire).

## 3.2 Méthodes de résolution d'un système d'équilibre

**Choix de Boussinesq:** Dans le cas axisymétrique et en l'absence des forces volumiques, nous considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right] + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + 2 \frac{(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ce système est équivalent à la recherche de deux fonctions auxiliaires harmoniques  $F$  et  $G$  tel que :

$$\begin{aligned} 2Gu_r &= -(1-2\nu) \frac{\partial F}{\partial r} - 2(1-\nu) \frac{\partial G}{\partial z}, \\ 2Gu_z &= -(1-2\nu) \frac{\partial F}{\partial z} + 2(1-\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rG), \end{aligned} \quad (3.2)$$

où  $F$  et  $G$  sont des fonctions auxiliaires dépendantes de  $r$  et  $z$ . En portant (3.2) dans le système d'équilibre (3.1), nous obtenons :

$$\left( \Delta - \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.3)$$

$$\Delta \left[ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rG) \right] = 0, \quad (3.4)$$

où,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

désigne l'opérateur de Laplace.

**a.** Nous choisissons  $F$  et  $G$  telles que :

$$\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad (3.5)$$

pour cela, nous posons

$$2\phi_3 = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rG), \quad (3.6)$$

ainsi,  $\phi_3$  est harmonique, puisque  $\Delta\phi_3 = 0$ .

**b.** En tenant compte de (3.5) et (3.6) nous trouvons;

$$2 \frac{\partial \phi_3}{\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial G}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial F}{\partial r} \right) = \Delta F. \quad (3.7)$$

**c.** La solution de cette équation de Poisson est :

$$F = z\phi_3 + \phi_0, \quad (3.8)$$

où  $\phi_0$  est harmonique, puisque

$$\Delta\phi_0 = 0,$$

ainsi

$$\Delta(z\phi_3) = \phi_3\Delta(z) + z\Delta(\phi_3) + 2\Delta(z) \times \Delta(\phi_3).$$

Comme

$$\Delta(z) = 0 \text{ et } \Delta(\phi_3) = 0 \implies \Delta(z\phi_3) = 2(0, 1) \times \left( \frac{\partial\phi_3}{\partial r}, \frac{\partial\phi_3}{\partial z} \right).$$

d'où,

$$\Delta(z\phi_3) = 2 \frac{\partial\phi_3}{\partial z}.$$

d. En tenant compte de (3.2), nous pourrions exprimer les composantes du vecteur de déplacement en fonction de  $\phi_0$  et  $\phi_3$  par :

$$2Gu_r = -(1 - 2\nu) \frac{\partial F}{\partial r} + 2(1 - \nu) \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial r}.$$

Alors que

$$2Gu_r = \frac{\partial\phi_0}{\partial r} + z \frac{\partial\phi_3}{\partial r}.$$

D'après (3.6), nous aurons

$$2Gu_z = -(1 - 2\nu) \frac{\partial F}{\partial z} + 2(1 - \nu) \left[ \frac{\partial F}{\partial z} - 2\phi_3 \right] = \frac{\partial F}{\partial z} - 4(1 - \nu) \phi_3.$$

Par suite, et d'après (3.8) nous trouvons :

$$2Gu_z = z \frac{\partial\phi_3}{\partial z} + \phi_3 + \frac{\partial\phi_0}{\partial z} - 4(1 - \nu) \phi_3.$$

Enfin, nous obtenons

$$2Gu_z = \frac{\partial\phi_0}{\partial z} + z \frac{\partial\phi_3}{\partial z} - (3 - 4\nu) \phi_3.$$

e. En tenant compte ensuite de la loi de Hook, nous aurons :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial^2\phi_0}{\partial r^2} + z \frac{\partial^2\phi_3}{\partial r^2} - 2\nu \frac{\partial\phi_3}{\partial z}, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial\phi_0}{(r\partial r)} + z \frac{\partial\phi_3}{r\partial r} - 2\nu \frac{\partial\phi_3}{\partial z}, \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2\phi_0}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2\phi_3}{\partial z^2} - 2(1 - \nu) \frac{\partial\phi_3}{\partial z}, \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial^2\phi_0}{\partial r\partial z} + z \frac{\partial^2\phi_3}{\partial r\partial z} - (1 - 2\nu) \frac{\partial\phi_3}{\partial r}. \end{aligned}$$

### 3.3 Résolution des équations intégrales duales

#### 3.3.1 Polynômes de Tchebychev

Soit  $x \in [-1, +1]$ . Posons  $\alpha = \arccos(x)$ . Nous choisissons  $\alpha \in [0, \pi]$ . Alors, pour  $n \in \mathbb{N}$ , nous aurons :

$$[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)]^n = [\cos(\arccos(x)) + i(\sin \arccos(x))]^n = \left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n.$$

En comparant les parties réelles des deux extrémités de cette chaîne d'égalités, on en déduit

$$\cos(n\alpha) = \cos(n \arccos(x)),$$

est une fonction polynomiale de degré  $n$ .

$$\cos(n \arccos(x)) = x^n + C_n^2 \cdot x^{n-2} \cdot (x^2 - 1) + C_n^4 \cdot x^4 \cdot (x^2 - 1)^2 + \dots$$

**Proposition 3.3.1** *Soit  $n$  un entier naturel. Il existe un et un seul polynôme de 1<sup>er</sup> espèce noté  $T_n$  tel que*

$$\forall \varphi \in \mathbb{R}, T_n[\cos(\varphi)] = \cos(n\varphi), \quad (3.9)$$

ce qui fournit encore

$$T_n(x) = \cos[n \arccos(x)] = \cos(n\varphi). \quad (3.10)$$

où

$$x = \cos(\varphi).$$

**Proposition 3.3.2** *Soit  $n$  un entier naturel non nul. Il existe un et un seul polynôme de 2<sup>ème</sup> espèce noté  $U_n$  tel que*

$$\forall \varphi \in \mathbb{R}, \sin(\varphi) \times U_n[\cos(\varphi)] = \sin(n\varphi), \quad (3.11)$$

ce qui fournit encore

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos(x)]}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin[(n+1)\varphi]}{\sin(\varphi)}. \quad (3.12)$$

où

$$x = \cos(\varphi).$$

**Remarque 3.3.1** Pour tout réel  $\theta$  et tout entier naturel  $n$ , nous aurons :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{1}{n}T_n'$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_{n+2} - 2xT_{n+1} + T_n = 0$ .

**Proposition 3.3.3** Soit  $n$  un entier naturel non nul. Pour tout réel  $\theta$ , on a

$$T_n [\cos (\theta)] = \cos (n\theta),$$

En dérivant cette relation, pour tout réel  $\theta$ , on obtient

$$-\sin [(\theta)] T_n' (\cos (\theta)) = -n \sin (n\theta).$$

A partir de la relation de récurrence ou à partir de l'expression de  $T_n$  en calculant directement  $\cos (2\varphi)$ ,  $\cos (3\varphi)$ , , nous obtenons

$$T_0 = 1, T_1 = x, T_2 = 2x^2 - 1,$$

et de même, à partir de l'égalité

$$U_n = \frac{1}{n}T_n',$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} U_1 &= 1, \\ U_2 &= 2x, \\ U_3 &= 4x^2 - 1. \end{aligned}$$

### 3.3.2 Formules intégrales (produit des fonctions de Bessel)

**Proposition 3.3.4** Pour tout entier  $n$  où  $(n = 0, 1, 2, \dots)$ , nous avons :

$$\int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\lambda \frac{a}{2}\right) J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\lambda \frac{a}{2}\right) d\lambda = \begin{cases} \frac{2}{\pi r} \frac{T_{n+2}(r/a)}{\sqrt{a^2-r^2}} & \text{où } 0 \leq r < a, \\ 0 & \text{où } r \geq a. \end{cases} \quad (3.13)$$

**Proposition 3.3.5** *Pour tout entier  $n$  où  $(n = 0, 1, 2, \dots)$ , nous avons :*

$$\int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) \left[ J_{n+\frac{1}{2}}\left(\lambda \frac{a}{2}\right) J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\lambda \frac{a}{2}\right) - J_{n+\frac{3}{2}}\left(\lambda \frac{a}{2}\right) J_{-(n+\frac{3}{2})}\left(\lambda \frac{a}{2}\right) \right] d\lambda$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi a r} U_{2n+2}(r/a) & \text{où } 0 \leq r < a, \\ 0 & \text{où } r \geq a, \end{cases} \quad (3.14)$$

or, pour  $r/a = \cos(\varphi)$ , nous obtenons :

$$T_{2n+1}(r/a) - T_{2n+3}(r/a) = \cos(2n+1)\varphi - \cos(2n+3)\varphi = 2 \sin(2n+2)\varphi \sin \varphi.$$

Nous posons :

$$\sin(\varphi) = \sqrt{1 - (r/a)^2} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Ce qui entraîne

$$\int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) \left[ J_{n+\frac{1}{2}}\left(\lambda \frac{a}{2}\right) J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\lambda \frac{a}{2}\right) - J_{n+\frac{3}{2}}\left(\lambda \frac{a}{2}\right) J_{-(n+\frac{3}{2})}\left(\lambda \frac{a}{2}\right) \right] d\lambda$$

$$= \frac{2}{\pi r} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} \frac{2}{a} \sqrt{a^2 - r^2} \sin(2n+2)\varphi \quad (3.15)$$

$$= \frac{4}{\pi r} \sin(2n+2)\varphi = \frac{4}{\pi r} U_{2n+1}(r/a) \sin(\varphi).$$

**Remarque 3.3.2** *Pour :*

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

on déduit :

$$\int_0^\infty \lambda J_{\frac{1}{2}(n+\nu)}(\lambda a) J_{-(n+\frac{1}{2})}(\lambda a) J_\nu(\lambda b) d\lambda$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi b} \frac{T_n\left(\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{4a^2 - b^2}} \text{ où } [a > 0, \operatorname{Re}(\nu) > -1, 0 < b < 2a], \\ 0 \text{ où } [a > 0, \operatorname{Re}(\nu) > -1, 2a < b]. \end{cases} \quad (3.16)$$

## 3.4 Méthodes de résolution

### 3.4.1 Méthode de Hara

Hara a donné une méthode ou bien une approche au lieu d'utiliser la représentation de l'équation intégrale de Fredholm, qui permet d'obtenir un système algébrique infini, pour

déterminer les deux fonctions inconnues du système d'équations intégrales duales. Les deux exemples suivants montrent la technique de cette méthode en tenant compte des formules intégrales, et n'ont pas pour vocation d'étudier les détails, mais seulement d'exposer la méthode de résolution qui sera alors prise comme base, ou bien technique ultérieurement.

Considérons les conditions aux limites d'un problème de conduction thermique suivant

$$\begin{aligned} \Delta T(r, z) &= 0, \\ T(r, z)|_{z=0} &= T_0, \quad r < a, \\ \frac{\partial T(r, z)}{\partial z}|_{z=0} &= 0. \quad r > a, \end{aligned} \quad (3.17)$$

où;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

et la géométrie du problème est illustrée sur la figure (3.1) suivante :

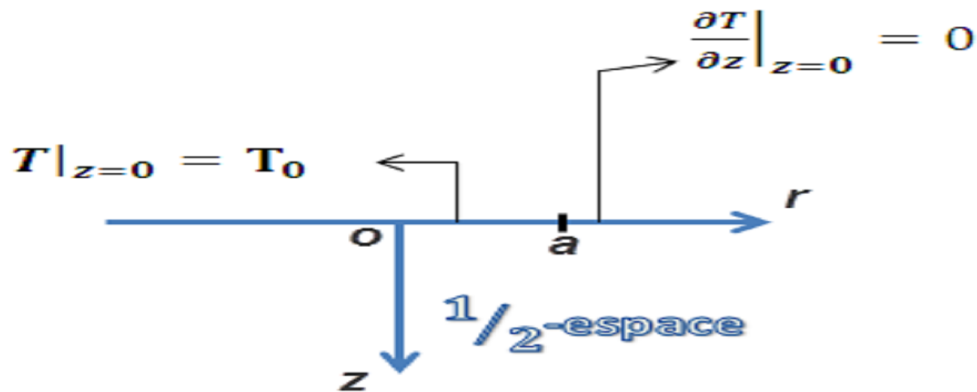


Figure 3.1 :. Géométrie du problème pour une conduction thermique.

D'abord, nous multiplions les équations de conduction (3.17) par  $rJ_0(\lambda r)$ , et nous intégrons ensuite le résultat de 0 à  $\infty$  suivant  $r$ , nous avons

$$T(r, z) = \int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} dz, \quad (3.18)$$

en procédant avec le même raisonnement que l'exemple (1.4.7).

Ensuite, nous vérifions les conditions aux limites de (3.17), nous trouvons les équations duales suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda &= T_0, & r < a, & \quad (i) \\ \int_0^\infty \lambda A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda &= 0. & r > a. & \quad (ii) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Puis, nous utilisons la formule intégrale :

$$\int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda r) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda a}{2}\right) J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{\lambda a}{2}\right) d\lambda = \begin{cases} \frac{2}{\pi r} \frac{T_{n+2}(r/a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} & \text{où } r < a, \\ 0 & \text{où } r > a. \end{cases} ; (n = 0, 1, \dots), \quad (3.20)$$

on cherche la solution des équations intégrales (3.19) sous la forme :

$$A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n M_n(\lambda), \quad (3.21)$$

où

$$M_n(\lambda) = J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda a}{2}\right) J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{\lambda a}{2}\right), \quad (3.22)$$

ainsi, l'équation (3.19.ii) est satisfaite  $\forall \alpha_n$ . En portant (3.21) dans (3.19.i) telle que ( $r < a$ ), nous avons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^\infty J_0(\lambda r) M_n(\lambda) d\lambda = T_0, \quad (3.23)$$

posons

$$r^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\varphi),$$

alors que

$$J_0(\lambda r) = J_0(\lambda c) J_0(\lambda d) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) \cos(m\varphi),$$

et si  $(c = d = \frac{a}{2})$ , nous aurons  $r^2 = \frac{a^2}{2} [1 - \cos(\varphi)]$  c'est-à-dire :  $r = a \sin(\frac{\varphi}{2})$ , et par suite

$$J_0(\lambda r) = \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) x_m(\lambda) \cos(m\varphi),$$

où;

$$\begin{aligned} x_m(\lambda) &= J_m^2\left(\frac{\lambda a}{2}\right), \\ \delta_{0m} &= \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

ce qui signifie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos(m\varphi) \int_0^{\infty} x_m(\lambda) M_n(\lambda) d\lambda = 1,$$

où;

$$a_n = \frac{\alpha_n}{T_0},$$

alors que

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos(m\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} x_m(\lambda) M_n(\lambda) d\lambda = 1,$$

or  $\{\cos(m\varphi)\}$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , est un système linéaire indépendant. Ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} x_m(\lambda) M_n(\lambda) d\lambda = \delta_{0m}, \text{ où; } m = 0, 1, \dots \quad (3.24)$$

L'équation (3.24) permet d'obtenir le système algébrique infini suivant

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} a_n = \delta_{0m}, \quad (3.25)$$

où;

$$A_{mn} = \int_0^{\infty} x_m(\lambda) M_n(\lambda) d\lambda. \quad (3.26)$$

Supposons maintenant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= T_0, & r < a, \\ T(r, z) \Big|_{z=0} &= 0. & r > a, \end{aligned} \quad (3.27)$$

où;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

et

$$\Delta T(r, z) = 0,$$

Ainsi, la géométrie du problème, est illustrée sur la figure (3.2) suivante :

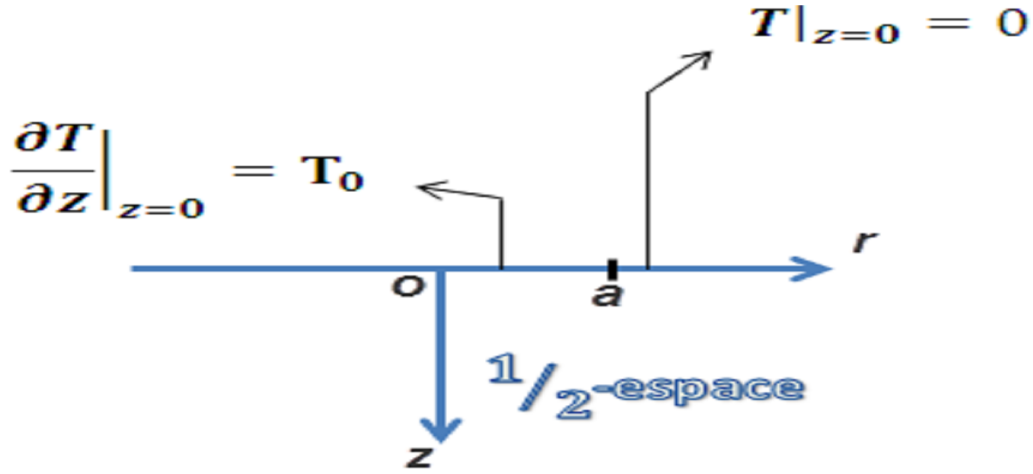


Figure 3.2: Géométrie du problème pour une conduction thermique.

Nous multiplions les équations de conduction par  $rJ_0(\lambda r)$ , et nous intégrons en suite le résultat de 0 à  $\infty$  suivant  $r$ , nous aurons

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} A(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} dz. \quad (3.28)$$

Vérifions les conditions mixtes; nous trouvons les équations duales suivantes :

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \lambda A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = -T_0, & r < a, \quad (i) \\ \int_0^{\infty} A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0. & r > a. \quad (ii) \end{cases} \quad (3.29)$$

Remarquons aussi que,

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda r) N_n(\lambda) d\lambda = \begin{cases} \frac{4}{\pi a r} U_{2n+2}(r/a) & \text{où } 0 \leq r < a, \\ 0 & \text{où } r \geq a, \end{cases}, \quad (3.30)$$

telle que

$$N_n(\lambda) = \lambda [M_n(\lambda) - M_{n+1}(\lambda)],$$

avec

$$M_n(\lambda) = J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda a}{2}\right) J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{\lambda a}{2}\right),$$

où; ( $n = 0, 1, \dots$ ). Posons

$$A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n M_n(\lambda). \quad (3.31)$$

L'équation (3.29.ii) est satisfaite  $\forall \alpha_n$ . Ainsi, l'équation (3.29.i) entraîne :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda N_n(\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos(m\varphi) x_m(\lambda) d\lambda \\ = \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos(m\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda N_n(\lambda) x_m(\lambda) d\lambda = 1, \end{aligned}$$

où;

$$a_n = \frac{\alpha_n}{T_0}.$$

Ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda N_n(\lambda) x_m(\lambda) d\lambda = \delta_{0m}; m = 0, 1, \dots \quad (3.32)$$

Ensuite, effectuons la soustraction des équations d'ordre  $m$  et  $(m+2)$ , nous trouvons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda N_n(\lambda) y_m(\lambda) d\lambda = \delta_{0m} - \delta_{0, m+1}; m = 0, 1, \dots \quad (3.33)$$

où;

$$y_m(\lambda) = \lambda [x_m(\lambda) - x_{m+2}(\lambda)]. \quad (3.34)$$

Le système d'équations intégrales duales est alors transformé en un système algébrique infini, et nous déterminons donc  $a_n$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} a_n = \delta_{0m}, \quad (3.35)$$

où;

$$A_{mn} = \int_0^{\infty} y_m(\lambda) N_n(\lambda) d\lambda. \text{ pour tout entier } m = 0, 1, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \quad (3.36)$$

### 3.4.2 Méthode de Sakamoto

Sakamoto a présenté une approche différente pour la résolution des équations intégrales duales. Ces dernières équations intégrales sont ramenées à un système algébrique infini [39].

Considérons le système d'équations intégrales duales suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_z \Big|_{z=0} &= \int_0^{\infty} \lambda p(\lambda) D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = -P_0, & r < a, & \quad (i) \\ u_z \Big|_{z=0} &= \gamma \int_0^{\infty} D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0. & r \geq a. & \quad (ii) \end{aligned} \quad (3.37)$$

D'abord, posons :

$$p(\lambda) = \frac{\sinh(\lambda h) - (\lambda h)^2}{\lambda h + \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda h)}, \quad (3.38)$$

et

$$\gamma = \frac{1 - \nu}{G}. \quad (3.39)$$

En tenant compte de la formule intégrale (3.14), nous cherchons la solution sous la forme:

$$\gamma D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n N_n(\lambda), \quad (3.40)$$

ainsi, l'équation (3.37.ii) est satisfaite  $\forall \alpha_n$ . L'équation intégrale

$$\sigma_z \Big|_{z=0} = \int_0^{\infty} \lambda p(\lambda) D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = -P_0, \quad r < a, \quad (3.41)$$

entraîne que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda p(\lambda) N_n(\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos(m\varphi) x_m(\lambda) d\lambda = 1, \quad (3.42)$$

où;

$$a_n = \frac{-\alpha_n}{\gamma p_0}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda p(\lambda) N_n(\lambda) x_m(\lambda) d\lambda = \delta_{0m}, \quad (3.43)$$

le système d'équations intégrales duales (3.43) est alors transformé en un système algébrique infini :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} a_n = \delta_{0m}, \quad (3.44)$$

où;

$$A_{mn} = \int_0^{\infty} p(\lambda) y_m(\lambda) N_n(\lambda) d\lambda. \text{ pour tout entier } m = 0, 1, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \quad (3.45)$$

## 3.5 Résolution numérique du système algébrique infini

La résolution numérique d'un système algébrique infini sous la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} a_n = \delta_{0m}. \text{ Où; } m = 0, 1, \dots \quad (3.46)$$

Correspond à déterminer  $A_{mn}$  où;

$$A_{mn} = \int_0^{\infty} p(\lambda) y_m(\lambda) N_n(\lambda) d\lambda. \quad (3.47)$$

On commence par décomposer  $A_{mn}$  comme suit :

$$A_{mn} = \int_0^\infty [p(\lambda) - 1] y_m(\lambda) N_n(\lambda) d\lambda + \int_0^{\lambda_0} y_m(\lambda) N_n(\lambda) d\lambda + \int_{\lambda_0}^\infty y_m(\lambda) N_n(\lambda) d\lambda, \quad (3.48)$$

ceci afin de calculer l'expression asymptotique de l'intégrale

$$\int_{\lambda_0}^\infty y_m(\lambda) N_n(\lambda) d\lambda. \quad (3.49)$$

tell que

$$\begin{aligned} y_m(\lambda b) &= \lambda [x_m(\lambda b) - x_{m+2}(\lambda b)] \text{ où; } x_m(\lambda a) = J_m^2\left(\frac{\lambda a}{2}\right), \\ y_m(\lambda b) &= \lambda \left[ J_m^2\left(\frac{\lambda b}{2}\right) - J_{m+2}^2\left(\frac{\lambda b}{2}\right) \right], \\ N_n(\lambda b) &= \lambda [M_n(\lambda b) - M_{n+1}(\lambda b)] \text{ où; } M_n(\lambda a) = J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda a}{2}\right) J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{\lambda a}{2}\right), \\ N_n(\lambda b) &= \lambda \left[ J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda b}{2}\right) J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{\lambda b}{2}\right) - J_{n+\frac{3}{2}}\left(\frac{\lambda b}{2}\right) J_{-(n+\frac{3}{2})}\left(\frac{\lambda b}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Pour tout réel  $x$  et tout entier naturel  $\nu$ , nous prenons le développement limité d'ordre 2 de la fonction  $J_\nu$  tell que :

$$J_\nu(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)} \left[ \cos\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4\nu^2-1}{8x} \sin\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right], \quad (3.51)$$

et à partir de ce développement, nous avons

$$\begin{aligned} J_{n+\frac{1}{2}}(x) J_{-(n+\frac{1}{2})}(x) - J_{n+\frac{3}{2}}(x) J_{-(n+\frac{3}{2})}(x) &= \frac{2}{\pi x} \left\{ \cos\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\ &- \cos\left(x - \left(n + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \left(n + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-1}{8x} \left[ \cos\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\ &\times \sin\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left. \right] \\ &+ \frac{4\left(n+\frac{3}{2}\right)^2-1}{8x} \left[ \cos\left(x - \left(n + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x + \left(n + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\ &\left. + \cos\left(x + \left(n + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \left(n + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] + \dots \left. \right\}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

où;

$$\begin{aligned} &\cos\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \right] = \frac{1}{2} \sin(2x), \\ &\cos\left(x - \left(n + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \left(n + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(n + \frac{3}{2}\right)\pi \right] = \frac{1}{2} \sin(2x). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ainsi que  $\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi = 0$  et  $\cos\left(n + \frac{3}{2}\right)\pi = 0$ . En suite

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi x} \left\{ -\frac{4\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-1}{8x} \sin\left(x + \left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4\left(n+\frac{3}{2}\right)^2-1}{8x} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \dots \right\} \\ = \frac{2}{\pi x} \frac{-1}{8x} \cos(2x) \left[ 4\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \dots \right] \\ = \frac{\cos(2x)}{\pi x^2} \left[ \left(n^2 + 3n + \frac{9}{4}\right) - \left(n^2 + n + \frac{1}{4}\right) + \dots \right] \\ = -\frac{\cos(2x)}{\pi x^2} [2n + 2 + \dots]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

En fin, en tenant compte de la limite et pour  $(x = \lambda \frac{a}{2})$ , nous obtenons :

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} y_m(\lambda) N_n(\lambda) d\lambda \simeq \frac{128(-1)^m(m+1)(n+1)}{\pi^2 a^4} \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\cos^2(\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda. \quad (3.55)$$

Maintenant, calculons l'intégrale

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\cos^2(\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda. \quad (3.56)$$

Remarquons que

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\cos^2(\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{1+\cos(2\lambda a)}{2} d\lambda \quad (3.57)$$

Utilisons l'intégration par partie comme suit

$$\begin{cases} \frac{1+\cos(2\lambda a)}{2} \longrightarrow -a \sin(2\lambda a) \\ \frac{1}{\lambda^2} \longrightarrow -\frac{1}{\lambda} \end{cases}, \quad (3.58)$$

alors

$$\int_0^{\lambda_0} \frac{1+\cos(2\lambda a)}{2\lambda^2} d\lambda = -\left[\frac{1+\cos(2\lambda a)}{2\lambda}\right]_{\lambda_0}^{\infty} - a \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda} d\lambda, \quad (3.59)$$

et en tenant compte du changement de variable  $t = 2\lambda a$ , nous obtenons

$$-\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda} d\lambda = -\int_{2\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \text{si}(2\lambda_0 a), \quad (3.60)$$

ainsi,

$$\text{si}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt. \quad (3.61)$$

Finalement, on aura

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} y_m(\lambda) N_n(\lambda) d\lambda \simeq \frac{128(-1)^m(m+1)(n+1)}{\pi^2 a^3} \left\{ \frac{\cos^2(\lambda_0 a)}{\lambda_0 a} + \text{si}(2\lambda_0 a) \right\}, \quad (3.62)$$

où  $\lambda_0$  est suffisamment grand, et les deux premières intégrales de  $A_{mn}$  se calculent numériquement.

**Lemme 3.5.1** Pour tout réel  $\lambda$  et tout entier naturel  $n$ , et  $m$ , nous aurons :

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda) X_m(\lambda) d\lambda \simeq \frac{4}{\pi^2 a^2} \left\{ \frac{\sin(\lambda_0 a)}{\lambda_0} - a \operatorname{ci}(\lambda_0 a) + \frac{(-1)^m}{2} \left[ \frac{1 - \cos(2\lambda_0 a)}{\lambda_0} - 2a \operatorname{si}(2\lambda_0 a) \right] \right\}, \quad (3.63)$$

où

$$\begin{aligned} x_m(\lambda a) &= J_m^2\left(\frac{\lambda a}{2}\right), \\ M_n(\lambda a) &= J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda a}{2}\right) J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{\lambda a}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

**Preuve.** Pour tout réel  $x$  et tout entier naturel  $\nu$ , le développement limité d'ordre 2 de la fonction  $J_\nu$  tel que

$$J_\nu(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)} \left[ \cos\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \right], \text{ l'orsque } \lambda \longrightarrow \infty.$$

à parti de ce développement, et pour  $x = \frac{\lambda a}{2}$  nous obtenons d'une part

$$\begin{aligned} J_m^2\left(\frac{\lambda a}{2}\right) &\simeq \frac{2}{\pi \frac{\lambda a}{2}} \cos\left(\frac{\lambda a}{2} - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi \lambda a} \left[ 1 + \cos\left(\lambda a - m\pi - \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi \lambda a} \left[ 1 + \sin(\lambda a - m\pi) \right] = \frac{2}{\pi \lambda a} \left[ 1 + (-1)^m \sin(\lambda a) \right]. \end{aligned}$$

Et d'autre part

$$J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda a}{2}\right) J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{\lambda a}{2}\right) \simeq \frac{2}{\pi \lambda \frac{a}{2}} \frac{\sin(\lambda a)}{2} = \frac{2}{\pi \lambda a} \sin(\lambda a).$$

Alors que

$$J_m^2\left(\frac{\lambda a}{2}\right) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda a}{2}\right) J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{\lambda a}{2}\right) \simeq \frac{4}{\pi^2 \lambda^2 a^2} \left[ \sin(\lambda a) + \frac{(-1)^m}{2} (1 - \cos(2\lambda a)) \right].$$

Ainsi

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)] \text{ et } \sin^2(x) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)],$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda) X_m(\lambda) d\lambda &= \int_{\lambda_0}^{\infty} J_m^2\left(\frac{\lambda a}{2}\right) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda a}{2}\right) J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{\lambda a}{2}\right) d\lambda \\ &\simeq \frac{4}{\pi^2 a^2} \left\{ \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda + \frac{(-1)^m}{2} \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda \right\}, \end{aligned}$$

où;

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda = \frac{\sin(\lambda_0 a)}{\lambda_0} - a \operatorname{ci}(\lambda_0 a),$$

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda = \frac{1 - \cos(\lambda_0 a)}{\lambda_0} - 2a \operatorname{si}(2\lambda_0 a).$$

Finalement, nous aurons

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda) X_m(\lambda a) d\lambda \simeq \frac{4}{\pi^2 a^2} \left\{ \frac{\sin(\lambda_0 a)}{\lambda_0} - a \operatorname{ci}(\lambda_0 a) + \frac{(-1)^m}{2} \left[ \frac{1 - \cos(2\lambda_0 a)}{\lambda_0} - 2a \operatorname{si}(2\lambda_0 a) \right] \right\},$$

où

$$\operatorname{si}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt,$$

$$\operatorname{ci}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

■

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposés une méthode de résolution d'un système d'équilibre. Dans le but d'exploiter cette méthode pour les problèmes de structures fissurées. Deux méthodes ont proposé par Hara et Sakamoto à la compréhension des transformées des équations intégrales duales en un système d'équations algébriques infini, et le chapitre suivant a ainsi pour objet à ces techniques.

# Chapitre 4

## Formulation et résolution du problème

Le présent chapitre propose une solution analytique pour un *problème axisymétrique* d'une couche élastique ayant une fissure circulaire en utilisant les techniques considérées par **Sakamoto** [42] et **Hara** [18]. Pour commencer, nous donnons la *formulation mathématique ainsi que la géométrie de ce problème*. Ensuite, nous effectuons la *résolution numérique* en déterminant les équations intégrales duales. Il s'agit de déterminer les fonctions inconnues  $C(\lambda)$  et  $D(\lambda)$  en donnant des représentations pour la contrainte normale et le déplacement normal sous formes des développements en séries. Ceci permet d'obtenir le *système algébrique infini*. Pour finir, nous donnons les *résultats numériques* en procédant comme dans le chapitre précédent.

## 4.1 Introduction

Un problème est dit axisymétrique si le domaine étudié possède une symétrie de révolution. Ainsi, les tenseurs des contraintes et le tenseur des déformations sont aussi à symétrie de révolution.

Dans ce cas, la solution est axisymétrique. Si l'on utilise un système de *coordonnées cylindriques* ou *sphériques* autour de l'axe de symétrie axiale, les dérivées des fonctions suivant l'angle polaire  $\theta$  sont nulles. On est donc ramené à un problème à deux variables  $(r, z)$ . Pour résoudre ce type de problèmes, on peut utiliser la formulation en contraintes ou la formulation en déplacements.

## 4.2 Formulation mathématique du problème

### 4.2.1 Hypothèses et établissement du système d'équilibre

Dans cette étude, considérons les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Les composantes du déplacement suivant  $r$ ,  $\theta$  et  $z$  sont alors désignées par le vecteur  $(u_r, u_\theta, u_z)$  ainsi que,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  et  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{\theta z}$ ,  $\tau_{r\theta}$  représentent les contraintes normales et tangentielles respectivement. Dans tout ce qui suit on posera  $u_z = w_z$ . Le système d'équilibre de Boussinesq (voir pp. 60-61) s'écrit donc sous la forme suivante :

$$2Gu_r = \frac{\partial \phi_0}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial r}, \quad u_\theta = 0, \quad (a)$$

$$\begin{aligned}
 2Gw_z &= \frac{\partial \phi_0}{\partial z} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - (3 - 4\nu) \phi_3, & (b) \\
 \sigma_r &= \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r^2} + z \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial r^2} - 2\nu \frac{\partial \phi_3}{\partial z}, & (c) \\
 \sigma_\theta &= \frac{\partial \phi_0}{(r \partial r)} + z \frac{\partial \phi_3}{r \partial r} - 2\nu \frac{\partial \phi_3}{\partial z}, & (d) \\
 \sigma_z &= \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z^2} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \phi_3}{\partial z}, & (e) \\
 \tau_{rz} &= \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r \partial z} + z \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial r \partial z} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \phi_3}{\partial r}, & (f) \\
 \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta z} = 0. & (g)
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

où,  $\nu$  et  $G$  représentent les coefficients de poisson et le module de cisaillement respectivement, tandis que  $\phi_0$  et  $\phi_3$  satisfont l'équation suivante:

$$\nabla^2 \phi_0 = \nabla^2 \phi_3 = 0, \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.
 \tag{4.2}$$

### 4.2.2 Géométrie et description du problème

Supposons qu'une plaque élastique isotrope d'épaisseur  $2h$  soit délimitée par deux supports circulaires rigides de rayon  $a$ , la plaque est soumise à une contrainte uniforme d'intensité  $p_0$  s'exerçant le long de la fissure circulaire de rayon  $b$ . Dans le plan,  $z = \pm h$  le contact entre les deux supports et le milieu élastique est supposé être *lisse*. De plus les contraintes de frottement sont négligées. C'est ce que l'on peut voir sur la figure (4.1).

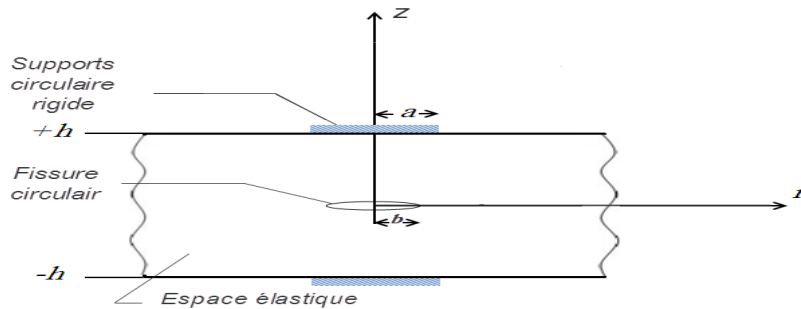


Figure 4.1: Géométrie du problème.

### 4.2.3 Conditions aux limites du problème

Compte tenu de la symétrie du problème (4.1) étudié, on considère seulement la moitié de la plaque, ce qui permet de réduire le nombre d'équations.

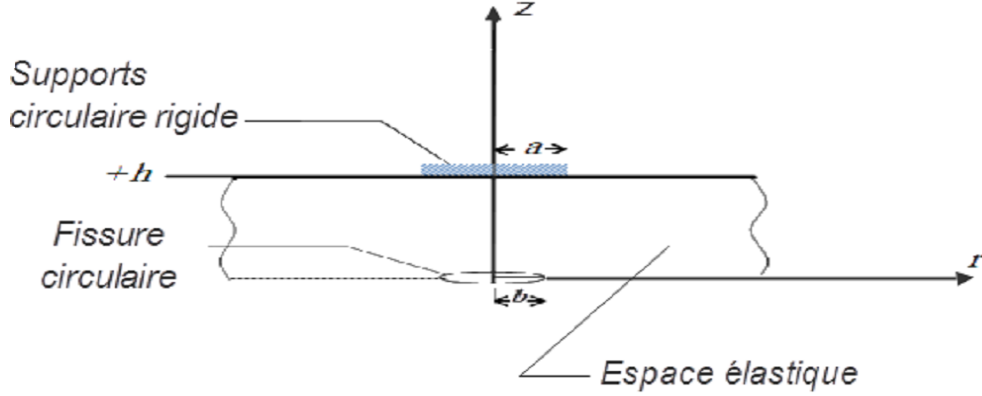


Figure 4.2: La géométrie du problème d'une plaque d'épaisseur  $h$ .

A ces équations aux dérivées partielles précédentes, on adjoint les conditions aux limites suivantes du problème

considéré :

$$\begin{aligned}
 (w_z)_{z=h} &= 0, & (0 \leq r \leq a), & \quad (a) \\
 (w_z)_{z=0} &= 0, & (r \geq b), & \quad (b) \\
 (\sigma_z)_{z=h} &= 0, & (r \geq a), & \quad (c) \\
 (\sigma_z)_{z=0} &= -p_0, & (0 \leq r \leq b), & \quad (d) \\
 (\tau_{rz})_{z=0} &= 0, & (r \geq 0), & \quad (e) \\
 (\tau_{rz})_{z=h} &= 0, & (r \geq 0). & \quad (f)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

## 4.3 Résolution numérique

Cette partie constitue la plus importante de ce chapitre. Elle est consacrée à déterminer les équations intégrales duales, ainsi la réduction du problème en déterminant les fonctions inconnues  $C(\lambda)$  et  $D(\lambda)$ . La condition aux limites (4.3.c) permet de formuler et mettre les

fonctions de contrainte  $\phi_0$  et  $\phi_3$  sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned}\phi_0(r, z) &= \int_0^\infty \{A(\lambda) \sinh(\lambda z) + B(\lambda) \cosh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda, \\ \phi_3(r, z) &= \int_0^\infty \{C(\lambda) \sinh(\lambda z) + D(\lambda) \cosh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda,\end{aligned}\quad (4.4)$$

où,  $J_n(\lambda r)$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $n$  et  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$ ,  $D(\lambda)$  sont des fonctions inconnues dépendantes de  $\lambda$  ainsi que tous les variables sont exprimées en fonction de  $\lambda x$ .

### 4.3.1 Exprimons $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ en fonction de $C(\lambda)$ et $D(\lambda)$

D'abord, substituons les formules d'équations (4.4) dans (4.1.f), telle que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_0}{\partial r} &= -\int_0^\infty \lambda \{A(\lambda) \sinh(\lambda z) + B(\lambda) \cosh(\lambda z)\} J_1(\lambda r) d\lambda, \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial r} &= -\int_0^\infty \lambda \{C(\lambda) \sinh(\lambda z) + D(\lambda) \cosh(\lambda z)\} J_1(\lambda r) d\lambda, \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial z} &= \int_0^\infty \lambda \{A(\lambda) \cosh(\lambda z) + B(\lambda) \sinh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda, \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial z} &= \int_0^\infty \lambda \{C(\lambda) \cosh(\lambda z) + D(\lambda) \sinh(\lambda z)\} J_0(\lambda r) d\lambda, \\ \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r \partial z} &= -\int_0^\infty \lambda^2 \{A(\lambda) \cosh(\lambda z) + B(\lambda) \sinh(\lambda z)\} J_1(\lambda r) d\lambda, \\ \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial r \partial z} &= -\int_0^\infty \lambda^2 \{C(\lambda) \cosh(\lambda z) + D(\lambda) \sinh(\lambda z)\} J_1(\lambda r) d\lambda, \\ \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r^2} &= \int_0^\infty \lambda^2 \{A(\lambda) \sinh(\lambda z) + B(\lambda) \cosh(\lambda z)\} J_2(\lambda r) d\lambda, \\ \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial r^2} &= \int_0^\infty \lambda^2 \{C(\lambda) \sinh(\lambda z) + D(\lambda) \cosh(\lambda z)\} J_2(\lambda r) d\lambda,\end{aligned}\quad (4.5)$$

on aura

$$\begin{aligned}\tau_{rz} &= -\int_0^\infty \{[\lambda^2 A(\lambda) - z\lambda^2 C(\lambda) + (1 - 2\nu)\lambda D(\lambda)] \cosh(\lambda z) \\ &\quad + [\lambda^2 B(\lambda) - z\lambda^2 D(\lambda) + \lambda(1 - 2\nu)C(\lambda)] \sinh(\lambda z)\} J_1(\lambda r) d\lambda.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Vérifions  $(\tau_{rz})_{z=0} = 0$  en utilisant la condition aux limites (4.3.e) nous trouvons :

$$(\tau_{rz})_{z=0} = -\int_0^\infty [\lambda^2 A(\lambda) - (1 - 2\nu)\lambda D(\lambda)] J_1(\lambda r) d\lambda = 0,$$

ce qui entraîne

$$\lambda A(\lambda) = (1 - 2\nu) D(\lambda).\quad (4.7)$$

Ensuite, vérifions  $(\tau_{rz})_{z=h} = 0$ , en injectant (4.7) dans (4.6) nous aurons

$$\begin{aligned} \tau_{rz} = & -\int_0^\infty \{ [\lambda(1-2\nu)D(\lambda) - z\lambda^2C(\lambda) + (1-2\nu)\lambda D(\lambda)] \cosh(\lambda z) \\ & + [\lambda^2B(\lambda) - z\lambda^2D(\lambda) + \lambda(1-2\nu)C(\lambda)] \sinh(\lambda z) \} J_1(\lambda r) d\lambda, \end{aligned}$$

et utilisons la condition aux limites (4.3.f) nous trouvons :

$$\begin{aligned} (\tau_{rz})_{z=h} = & -\int_0^\infty \{ [\lambda(1-2\nu)D(\lambda) - h\lambda^2C(\lambda) + (1-2\nu)\lambda D(\lambda)] \cosh(\lambda h) \\ & + [\lambda^2B(\lambda) - h\lambda^2D(\lambda) + \lambda(1-2\nu)C(\lambda)] \sinh(\lambda h) \} J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\lambda B(\lambda) = \left( 1 - 2\nu - \lambda h \frac{\cos(\lambda h)}{\sin(\lambda h)} \right) C(\lambda) - \lambda h D(\lambda).$$

En fin, nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda A(\lambda) &= (1 - 2\nu)D(\lambda), \\ \lambda B(\lambda) &= (1 - 2\nu - \lambda h \coth(\lambda h))C(\lambda) - \lambda h D(\lambda). \end{aligned} \tag{4.8}$$

### 4.3.2 Détermination des composantes des déplacements et des contraintes

Dans cette étape, substituons (4.8) dans (4.1.a) en utilisant (4.5), nous obtenons

$$\begin{aligned} 2Gu_r = & -\int_0^\infty \lambda [A(\lambda) \sinh(\lambda z) + B(\lambda) \cos(\lambda z)] J_1(\lambda r) d\lambda \\ & -z \int_0^\infty \lambda [C(\lambda) \sinh(\lambda z) + D(\lambda) \cos(\lambda z)] J_1(\lambda r) d\lambda \\ = & -\int_0^\infty (1 - 2\nu)D(\lambda) \sinh(\lambda z) + [((1 - 2\nu) - \lambda h \coth(\lambda h)) C(\lambda) \\ & \lambda h D(\lambda)] \cos(\lambda z) J_1(\lambda r) d\lambda \\ 2Gu_z = & -\int_0^\infty \{ [(1 - 2\nu - \lambda h \coth(\lambda h)) \cosh(\lambda z) + \lambda z \sinh(\lambda z)] C(\lambda) \\ & + [(1 - 2\nu) \sinh(\lambda z) + (\lambda z - \lambda h) \cosh(\lambda z) D(\lambda)] \} J_1(\lambda r) d\lambda, \end{aligned}$$

où,

$$J_0'(\lambda r) = -\lambda J_1(\lambda r).$$

En procédant avec le même raisonnement que précédemment, nous aurons les composantes des déplacements et des contraintes suivantes :

$$\begin{aligned}
 2Gu_r = & -\int_0^\infty \{[(1 - 2\nu - \lambda h \coth(\lambda h)) \cosh(\lambda z) + \lambda z \sinh(\lambda z)] C(\lambda) \\
 & + [(1 - 2\nu) \sinh(\lambda z) + (\lambda z - \lambda h) \cosh(\lambda z) D(\lambda)]\} J_1(\lambda r) d\lambda,
 \end{aligned} \tag{a}$$

$$\begin{aligned}
 2Gw_z = & -\int_0^\infty \{[(2 - 2\nu + \lambda h \coth(\lambda h)) \sinh(\lambda z) - \lambda z \cosh(\lambda z)] C(\lambda) \\
 & + [2(1 - \nu) \cosh(\lambda z) - (\lambda z - \lambda h) \sinh(\lambda z)] D(\lambda)\} J_0(\lambda r) d\lambda,
 \end{aligned} \tag{b}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_r + \sigma_\theta = & -\int_0^\infty \{[(1 + 2\nu - \lambda h \coth(\lambda h)) \cosh(\lambda z) + \lambda z \sinh(\lambda z)] C(\lambda) \\
 & + [(1 + 2\nu) \sinh(\lambda z) + (\lambda z - \lambda h) \cosh(\lambda z)] D(\lambda)\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda,
 \end{aligned} \tag{c}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_r - \sigma_\theta = & -\int_0^\infty \{[(1 - 2\nu - \lambda h \coth(\lambda h)) \cosh(\lambda z) + \lambda z \sinh(\lambda z)] C(\lambda) \\
 & + [(1 - 2\nu) \sinh(\lambda z) + (\lambda z - \lambda h) \cosh(\lambda z)] D(\lambda)\} \lambda J_2(\lambda r) d\lambda,
 \end{aligned} \tag{d}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_z = & -\int_0^\infty \{[(1 + \lambda h \coth(\lambda h)) \cosh(\lambda z) - \lambda z \sinh(\lambda z)] C(\lambda) \\
 & + [\sinh(\lambda z) - (\lambda z - \lambda h) \cosh(\lambda z)] D(\lambda)\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda,
 \end{aligned} \tag{e}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{rz} = & -\int_0^\infty \{[\lambda z \cosh(\lambda z) - \lambda h \coth(\lambda h) \sinh(\lambda z)] C(\lambda) \\
 & + [(\lambda z - \lambda h) \sinh(\lambda z)] D(\lambda)\} \lambda J_1(\lambda r) d\lambda.
 \end{aligned} \tag{f}$$

(4.9)

### 4.3.3 Détermination des équations intégrales duales

Cette étape consiste à déterminer les équations intégrales duales en fonction de  $C(\lambda)$  et  $D(\lambda)$ . En tenant compte de la loi de Hooke, et pour cela en portant d'abord l'équation (4.9.b) puis vérifions les conditions aux limites (4.3.a) et (4.3.b) nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 (w_z)_{z=h} = & -\frac{1}{2G} \int_0^\infty \left\{ \left[ (2 - 2\nu + \lambda h \frac{\cosh(\lambda h)}{\sinh(\lambda h)}) \sinh(\lambda h) - \lambda h \cosh(\lambda h) \right] C(\lambda) \right. \\
 & \left. + [2(1 - \nu) \cosh(\lambda h) - (\lambda h - \lambda h) \sinh(\lambda h)] D(\lambda) \right\} J_0(\lambda r) d\lambda \\
 = & -\frac{1}{2G} \int_0^\infty \{ (2 - 2\nu) \sinh(\lambda h) C(\lambda) + [2(1 - \nu) \cosh(\lambda h) - (0) \sinh(\lambda h)] D(\lambda) \} J_0(\lambda r) d\lambda \\
 = & -\frac{1-\nu}{G} \int_0^\infty \{ \sinh(\lambda h) C(\lambda) + \cosh(\lambda h) D(\lambda) \} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (0 \leq r \leq a),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (w_z)_{z=0} &= -\frac{1}{2G} \int_0^\infty \{[(2 - 2\nu + \lambda h \coth(\lambda h)) \sinh(0) - \lambda \times 0 \cosh(0)] C(\lambda) \\
 &\quad + [2(1 - \nu) \cosh(0) - (\lambda \times 0 - \lambda h) \sinh(0)] D(\lambda)\} J_0(\lambda r) d\lambda \\
 &= -\frac{2(1-\nu)}{2G} \int_0^\infty \{[(1 + \lambda h \coth(\lambda h))(0) - \lambda \times 0 \cosh(0)] C(\lambda) + [1] D(\lambda)\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad , \\
 &= -\frac{2(1-\nu)}{2G} \int_0^\infty D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = -\frac{1-\nu}{G} \int_0^\infty D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda, (r \geq b),
 \end{aligned}$$

En suite, en portant l'équation (4.9.e) et vérifions les conditions aux limites (4.3.a) et (4.3.b) nous trouvons

$$\begin{aligned}
 (\sigma_z)_{z=h} &= -\int_0^\infty \{[(1 + \lambda h \coth(\lambda h)) \cosh(\lambda h) - \lambda h \sinh(\lambda h)] C(\lambda) \\
 &\quad + [\sinh(\lambda h) - (\lambda h - \lambda h) \cosh(\lambda h)] D(\lambda)\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \\
 &= -\int_0^\infty \left\{ \left[ \left( 1 + \lambda h \frac{\cosh(\lambda h)}{\sinh(\lambda h)} \right) \cosh(\lambda h) - \lambda h \sinh(\lambda h) \right] C(\lambda) \right. \\
 &\quad \left. + [\sinh(\lambda h) - (0) \cosh(\lambda h)] D(\lambda) \right\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \\
 &= -\int_0^\infty \left\{ \left[ \cosh(\lambda h) + \lambda h \frac{\cosh^2(\lambda h)}{\sinh(\lambda h)} - \lambda h \sinh(\lambda h) \right] C(\lambda) + \sinh(\lambda h) D(\lambda) \right\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \\
 &= -\int_0^\infty \left\{ \left[ \cosh(\lambda h) + \lambda h \frac{\cosh^2(\lambda h) - \sinh^2(\lambda h)}{\sinh(\lambda h)} \right] C(\lambda) + \sinh(\lambda h) D(\lambda) \right\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \\
 &= -\int_0^\infty \left\{ \left[ \cosh(\lambda h) + \frac{\lambda h}{\sinh(\lambda h)} \right] C(\lambda) + \sinh(\lambda h) D(\lambda) \right\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_z)_{z=0} &= -\int_0^\infty \{[(1 + \lambda h \coth(\lambda h)) \cosh(0) - 0 \times \sinh(0)] C(\lambda) \\
 &\quad + [\sinh(0) - (\lambda \times 0 - \lambda h) \cosh(0)] D(\lambda)\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \\
 &= -\int_0^\infty \{(1 + \lambda h \coth(\lambda h)) C(\lambda) + \lambda h D(\lambda)\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda,
 \end{aligned}$$

En fin, on obtient les équations intégrales duales suivantes :

$$(w_z)_{z=h} = -\eta \int_0^\infty \{ \sinh(\lambda h) C(\lambda) + \cosh(\lambda h) D(\lambda) \} J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad (0 \leq r \leq a), \quad (a)$$

$$(\sigma_z)_{z=h} = -\int_0^\infty \left\{ \left[ \cosh(\lambda h) + \frac{\lambda h}{\sinh(\lambda h)} \right] C(\lambda) + \sinh(\lambda h) D(\lambda) \right\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad (r \geq a), \quad (b)$$

$$(\sigma_z)_{z=0} = -\int_0^\infty \{ [1 + \lambda h \coth(\lambda h)] C(\lambda) + \lambda h D(\lambda) \} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = -p_0, \quad (0 \leq r \leq b), \quad (c)$$

$$(w_z)_{z=0} = -\eta \int_0^\infty D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad (r \geq b), \quad (d)$$

(4.10)

où,

$$\eta = \frac{1 - \nu}{G}.$$

Les équations intégrales duales (4.10) sont réduites généralement à des équations intégrales de Fredholm, voir par exemple [17, 23], qui est résolue numériquement. Dans cette étude, nous nous proposons une technique importante et différente, qui est utilisée par Hara et Sakamoto. La raison essentielle est de déterminer les fonctions inconnues  $C(\lambda)$  et  $D(\lambda)$  en utilisant des représentations pour la contrainte normale  $(\sigma_z)_{z=h}$  et le déplacement normal  $(w_z)_{z=0}$  sous formes de développements en series. Pour plus détails, nous pouvons consulter l'article de [15, 37, 39].

**Proposition 4.3.1** *Pour tout entier  $n$ , on a les relations :*

$$\eta(\sigma_z)_{z=h} = \frac{-2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \frac{T_{2n+1}(r/a)}{r\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad (0 \leq r \leq a), \quad (4.11)$$

$$(w_z)_{z=0} = \frac{-4}{\pi br} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n U_{2n+2}(r/b), \quad (0 \leq r \leq b), \quad (4.12)$$

où;  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont des coefficients inconnus. Ainsi,  $U_n$  et  $T_n$  représentent les fonctions de Tchebychev du première et deuxième espèce d'ordre  $n$  respectivement.

**Proposition 4.3.2** *Pour tout entier  $n$  [13], nous admettons les relations suivantes :*

$$\int_0^\infty M_n(\lambda a) \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} \frac{2T_{2n+1}(r/a)}{\pi r\sqrt{a^2 - r^2}}, & (0 \leq r \leq a), \\ 0, & (a \leq r \leq \infty), \end{cases}$$

$$\int_0^\infty N_n(\lambda b) J_0(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} \frac{4U_{2n+2}(r/b)}{\pi br}, & (0 \leq r \leq b), \\ 0, & (b \leq r \leq \infty), \end{cases} \quad (4.13)$$

où;

$$M_n(\lambda a) = J_{n+1/2}(\lambda a/2) J_{-n-1/2}(\lambda a/2), \quad (4.14)$$

$$N_n(\lambda b) = \lambda \{M_n(\lambda b) - M_{n+1}(\lambda b)\}. \quad (4.15)$$

### 4.3.4 Détermination de $C(\lambda)$ et $D(\lambda)$

Notre première démarche consiste à remarquer que l'équation (4.13) entraîne que

$$U_{2n+2}(r/b) = \frac{\pi br}{4} \int_0^\infty N_n(\lambda b) J_0(\lambda r) d\lambda.$$

En suite, la dernière équation de (4.10.d) et l'équation (4.12) permettent de fournir que:

$$-\eta \int_0^\infty D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{-4}{\pi br} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n U_{2n+2}(r/b),$$

alors que

$$\begin{aligned} -\eta \int_0^\infty D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda &= \frac{-4}{\pi br} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n U_{2n+2}(r/b) = \frac{-4}{\pi br} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \frac{\pi br}{4} \int_0^\infty N_n(\lambda b) J_0(\lambda r) d\lambda \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_0^\infty N_n(\lambda b) J_0(\lambda r) d\lambda = - \int_0^\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n N_n(\lambda b) J_0(\lambda r) d\lambda. \end{aligned}$$

En fin, on en déduit par identification :

$$D(\lambda) = \frac{1}{\eta} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n N_n(\lambda b). \quad (4.16)$$

De même, on injecte (4.16) dans la deuxième équation de (4.10.b), on obtient

$$\begin{aligned} (\sigma_z)_{z=h} &= - \int_0^\infty \left\{ \left[ \cosh(\lambda h) + \frac{\lambda h}{\sinh(\lambda h)} \right] C(\lambda) + \sinh(\lambda h) \frac{1}{\eta} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n N_n(\lambda b) \right\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \\ &= - \int_0^\infty \left[ \cosh(\lambda h) + \frac{\lambda h}{\sinh(\lambda h)} \right] C(\lambda) \lambda J_0(\lambda r) d\lambda - \int_0^\infty \sinh(\lambda h) \frac{1}{\eta} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n N_n(\lambda b) \lambda J_0(\lambda r) d\lambda, \end{aligned}$$

il s'agit de remarquer que :

$$\begin{aligned} \eta (\sigma_z)_{z=h} &= \frac{-2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \frac{T_{2n+1}(r/a)}{r\sqrt{a^2-r^2}} = \frac{-2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \frac{\pi}{2} \int_0^\infty M_n(\lambda a) \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^\infty M_n(\lambda a) \lambda J_0(\lambda r) d\lambda, \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} \eta (\sigma_z)_{z=h} &= -\eta \int_0^\infty \left[ \cosh(\lambda h) + \frac{\lambda h}{\sinh(\lambda h)} \right] C(\lambda) \lambda J_0(\lambda r) d\lambda - \int_0^\infty \sinh(\lambda h) \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n N_n(\lambda b) \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \\ &= -\eta \int_0^\infty \left[ \frac{\sinh(2\lambda h) + 2\lambda h}{2\sinh(\lambda h)} \right] C(\lambda) \lambda J_0(\lambda r) d\lambda - \int_0^\infty \sinh(\lambda h) \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n N_n(\lambda b) \lambda J_0(\lambda r) d\lambda, \end{aligned}$$

alors que

$$- \int_0^\infty \left\{ \left[ \frac{\sinh(2\lambda h) + 2\lambda h}{2\sinh(\lambda h)} \right] \eta C(\lambda) + \sinh(\lambda h) \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n N_n(\lambda b) \right\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = - \int_0^\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n M_n(\lambda a) \lambda J_0(\lambda r) d\lambda.$$

On en déduit par identification :

$$\left[ \frac{\sinh(2\lambda h) + 2\lambda h}{2 \sinh(\lambda h)} \right] \eta C(\lambda) + \sinh(\lambda h) \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n N_n(\lambda b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n M_n(\lambda a),$$

d'où

$$C(\lambda) = \frac{2 \sinh(\lambda h)}{\eta(\sinh(2\lambda h) + 2\lambda h)} \sum_{n=0}^{+\infty} \{ \alpha_n M_n(\lambda a) - \sinh(\lambda h) \beta_n N_n(\lambda b) \}. \quad (4.17)$$

Finalement, nous réécrivons les équations (4.16) et (4.17) comme suites

$$D(\lambda) = \frac{1}{\eta} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n N_n(\lambda b), \quad (4.18)$$

$$C(\lambda) = \frac{f_0(\lambda)}{\eta} \sum_{n=0}^{+\infty} \{ \alpha_n M_n(\lambda a) - \beta_n N_n(\lambda b) \sinh(\lambda h) \}, \quad (4.19)$$

où;

$$f_0(\lambda) = \frac{2 \sinh(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)}. \quad (4.20)$$

### Système algébrique infini

On remplace (4.18) et (4.19) dans (4.10.a), on obtient :

$$\begin{aligned} (w_z)_{z=h} &= -\eta \int_0^\infty \{ \sinh(\lambda h) \frac{f_0(\lambda)}{\eta} \sum_{n=0}^{+\infty} [ \alpha_n M_n(\lambda a) - \beta_n N_n(\lambda b) \sinh(\lambda h) ] \\ &\quad + \cosh(\lambda h) \frac{1}{\eta} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n N_n(\lambda b) \} J_0(\lambda r) d\lambda \\ &= -\int_0^\infty \{ \sinh(\lambda h) f_0(\lambda) \sum_{n=0}^{+\infty} [ \alpha_n M_n(\lambda a) - \beta_n N_n(\lambda b) \sinh(\lambda h) ] \\ &\quad + \cosh(\lambda h) \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n N_n(\lambda b) J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (0 \leq r \leq a), \\ &= -\int_0^\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \{ \sinh(\lambda h) \frac{2 \sinh(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)} \alpha_n M_n(\lambda a) - \sinh(\lambda h) \frac{2 \sinh(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)} \beta_n N_n(\lambda b) \sinh(\lambda h) \\ &\quad + \cosh(\lambda h) \frac{1}{\eta} \beta_n N_n(\lambda b) \} J_0(\lambda r) d\lambda \\ &= -\int_0^\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \{ \sinh(\lambda h) \frac{2 \sinh(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)} \alpha_n M_n(\lambda a), \quad (0 \leq r \leq a), \\ &\quad + \left[ \cosh(\lambda h) - \sinh(\lambda h) \frac{2 \sinh^2(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)} \right] \beta_n N_n(\lambda b) \} J_0(\lambda r) d\lambda \\ &= -\int_0^\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{2 \sinh^2(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)} \alpha_n M_n(\lambda a) + \left[ \cosh(\lambda h) - \frac{2 \sinh^3(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)} \right] \beta_n N_n(\lambda b) \right\} J_0(\lambda r) d\lambda, \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\frac{2 \sinh^2(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)} = \frac{\cos(2\lambda h) - 1}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)},$$

et

$$\begin{aligned} \cosh(\lambda h) - \frac{2 \sinh^3(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)} &= \frac{2\lambda h \cosh(\lambda h) + \cosh(\lambda h) \sinh(2\lambda h) - 2 \sinh^3(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)} \\ &= \frac{2\lambda h \cosh(\lambda h) + 2 \cosh^2(\lambda h) \sinh(\lambda h) - 2 \sinh^3(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)} \\ &= \frac{2\lambda h \cosh(\lambda h) + 2 [1 + \sinh^2(\lambda h)] \sinh(\lambda h) - 2 \sinh^3(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)} \\ \cosh(\lambda h) - \frac{2 \sinh^3(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)} &= \frac{2\lambda h \cosh(\lambda h) + 2 \sinh(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)}. \end{aligned}$$

Alors

$$(w_z)_{z=h} = -\int_0^\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \left[ \frac{\cos(2\lambda h) - 1}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)} \right] \alpha_n M_n(\lambda a) + \left[ \frac{2\lambda h \cosh(\lambda h) + 2 \sinh(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)} \right] \beta_n N_n(\lambda b) \right\} J_0(\lambda r) d\lambda = 0. \quad (4.21)$$

En suite, on injecte (4.18) et (4.19) dans (4.10.c), nous avons

$$\begin{aligned} (\sigma_z)_{z=0} &= -\int_0^\infty \left\{ [1 + \lambda h \coth(\lambda h)] \frac{2 \sinh(\lambda h)}{\eta(\sinh(2\lambda h) + 2\lambda h)} \sum_{n=0}^{+\infty} [\alpha_n M_n(\lambda a) - \sinh(\lambda h) \beta_n N_n(\lambda b)] \right. \\ &\quad \left. + \lambda h \frac{1}{\eta} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n N_n(\lambda b) \right\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = -p_0, \quad (0 \leq r \leq a) \\ &= -\frac{1}{\eta} \int_0^\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ [1 + \lambda h \coth(\lambda h)] \frac{2 \sinh(\lambda h)}{(\sinh(2\lambda h) + 2\lambda h)} [\alpha_n M_n(\lambda a) - \sinh(\lambda h) \beta_n N_n(\lambda b)] \right. \\ &\quad \left. + \lambda h \beta_n N_n(\lambda b) \right\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (0 \leq r \leq b) \\ &= -\frac{1}{\eta} \int_0^\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ [1 + \lambda h \coth(\lambda h)] \frac{2 \sinh(\lambda h)}{(\sinh(2\lambda h) + 2\lambda h)} \alpha_n M_n(\lambda a) \right. \\ &\quad \left. + \left[ \lambda h - \sinh(\lambda h) (1 + \lambda h \coth(\lambda h)) \frac{2 \sinh(\lambda h)}{(\sinh(2\lambda h) + 2\lambda h)} \right] \beta_n N_n(\lambda b) \right\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = -p_0, \end{aligned}$$

Remarquons que

$$[1 + \lambda h \coth(\lambda h)] \frac{2 \sinh(\lambda h)}{(\sinh(2\lambda h) + 2\lambda h)} = \frac{2 \sinh(\lambda h) + 2\lambda h \sinh(\lambda h) \frac{\cosh(\lambda h)}{\sinh(\lambda h)}}{(\sinh(2\lambda h) + 2\lambda h)} = \frac{2\lambda h \cosh(\lambda h) + 2 \sinh(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)},$$

et

$$\lambda h - \sinh(\lambda h) (1 + \lambda h \coth(\lambda h)) \frac{2 \sinh(\lambda h)}{(\sinh(2\lambda h) + 2\lambda h)} = \lambda h - \frac{2 \sinh^2(\lambda h) + 2\lambda h \sinh(\lambda h) \cosh(\lambda h)}{(\sinh(2\lambda h) + 2\lambda h)} = \frac{2(\lambda h)^2 - 2 \sinh^2(\lambda h)}{(\sinh(2\lambda h) + 2\lambda h)}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
 (\sigma_z)_{z=0} = & -\frac{1}{\eta} \int_0^\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \left[ \frac{2\lambda h \cosh(\lambda h) + 2 \sinh(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)} \right] \alpha_n M_n(\lambda a) \right. \\
 & \left. + \left[ \frac{2(\lambda h)^2 - 2 \sinh^2(\lambda h)}{(\sinh(2\lambda h) + 2\lambda h)} \right] \beta_n N_n(\lambda b) \right\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = -p_0.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

On pose

$$f_1(\lambda) = \frac{\cosh(2\lambda h) - 1}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)}, \quad f_2(\lambda) = 2 \frac{\sinh(\lambda h) + \lambda h \cosh(\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)}, \quad f_3(\lambda) = \frac{2(\lambda h)^2 + 1 - \cosh(2\lambda h)}{2\lambda h + \sinh(2\lambda h)}.$$

nous avons

$$\begin{aligned}
 (w_z)_{z=h} = & - \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\infty \{ \alpha_n f_1(\lambda) M_n(\lambda a) + \beta_n f_2(\lambda) N_n(\lambda a) \} J_0(\lambda r) d\lambda \\
 = & \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\infty \left\{ \left( \frac{-\alpha_n}{\eta p_0} \right) f_1(\lambda) M_n(\lambda a) + \left( \frac{-\beta_n}{\eta p_0} \right) f_2(\lambda) N_n(\lambda a) \right\} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (0 \leq r \leq a),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_z)_{z=0} = & -\frac{1}{\eta} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\infty \{ \alpha_n f_2(\lambda) M_n(\lambda a) + \beta_n f_3(\lambda) N_n(\lambda b) \} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (0 \leq r \leq b), \\
 = & \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\infty \left\{ \left( \frac{-\alpha_n}{\eta p_0} \right) f_2(\lambda) M_n(\lambda a) + \left( \frac{-\beta_n}{\eta p_0} \right) f_3(\lambda) N_n(\lambda b) \right\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = 1,
 \end{aligned}$$

Finalement, nous réécrivons les équations (4.21) et (4.22) comme suites

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\infty \{ \alpha_n^* f_1(\lambda) M_n(\lambda a) + \beta_n^* f_2(\lambda) N_n(\lambda a) \} J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad (0 \leq r \leq a), \tag{4.23}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\infty \{ \alpha_n^* f_2(\lambda) M_n(\lambda a) + \beta_n^* f_3(\lambda) N_n(\lambda b) \} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = 1, \quad (0 \leq r \leq b). \tag{4.24}$$

où; les conditions aux limites  $(w_z)_{z=0}$  et  $(\sigma_z)_{z=h}$  sont automatiquement satisfaites.

On pose

$$\alpha_n^* = \frac{-\alpha_n}{\eta p_0}, \quad \beta_n^* = \frac{-\beta_n}{\eta p_0}.$$

Les équations (4.23) et (4.24) sont indépendantes de  $r$  dans leurs intervalles respectivement.

**Proposition 4.3.3** Pour tout entier  $m$ , [13] on a la formule

$$J_0(\lambda r) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda) \cos(2m\psi_x), \quad (0 \leq r \leq x : x = a, b), \quad (4.25)$$

où;

$$\begin{cases} X_m(\lambda x) = J_m^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right), & (m = 0, 1, \dots), \\ \psi_x = \sin^{-1}\left(\frac{r}{x}\right), & (0 \leq r \leq x). \end{cases} \quad (4.26)$$

En procédant comme dans le chapitre précédent, nous avons les deux équations suivantes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{\alpha_n^* f_1(\lambda) M_n(\lambda a) + \beta_n^* f_2(\lambda) N_n(\lambda b)\} \times \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda a) \cos(2m\psi_a) d\lambda = 0, \quad (4.27)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{\alpha_n^* f_2(\lambda) M_n(\lambda a) + \beta_n^* f_3(\lambda) N_n(\lambda b)\} \lambda \times \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda b) \cos(2m\psi_b) d\lambda = 1, \quad (4.28)$$

où;

$$\delta_{0m} = \begin{cases} 1; & m = 0, \\ 0; & m \neq 0, \end{cases} \quad \text{désigne la fonction de Kronecker's delta.}$$

Ensuite, nous adoptons de chaque côté les coefficients de  $\cos(2m\psi_a)$  et  $\cos(2m\psi_b)$  pour (4.27) et (4.28) respectivement, on trouve

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\infty} \{\alpha_n^* f_1(\lambda) M_n(\lambda a) + \beta_n^* f_2(\lambda) N_n(\lambda b)\} X_m(\lambda a) d\lambda = 0, \quad (4.29)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\infty} \{\alpha_n^* f_2(\lambda) M_n(\lambda a) + \beta_n^* f_3(\lambda) N_n(\lambda b)\} \lambda X_m(\lambda b) d\lambda = \delta_{0m}, \quad (4.30)$$

où; ( $m = 0, 1, \dots$ ).

En fait la soustraction des équations de la  $(m+2)$  à  $m$  pour (4.29) et (4.30), nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\infty} \{\alpha_n^* f_1(\lambda) M_n(\lambda a) + \beta_n^* f_2(\lambda) N_n(\lambda b)\} X_m(\lambda a) d\lambda = 0, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\infty} \{\alpha_n^* f_2(\lambda) M_n(\lambda a) + \beta_n^* f_3(\lambda) N_n(\lambda b)\} Y_m(\lambda b) d\lambda = \delta_{0m}. \end{cases} \quad (4.31)$$

où;

$$Y_m(\lambda) = \lambda \{X_m(\lambda b) - X_{m+2}(\lambda b)\}, \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (4.32)$$

Enfin, et pour estimer le facteur d'intensité de la singularité de la contrainte normale, nous pouvons définir les coefficients  $S_y$  ( $y = 0, h$ ) comme suit :

$$S_y = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2\pi a(r-x)\eta} |(\sigma_z)_{z=y}| \text{ où; } (x = b, a \text{ et } y = 0, h), \quad (4.33)$$

où;

$$S_h = \frac{2}{a\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n^*,$$

$$S_0 = 8\sqrt{\frac{a}{\pi b^5}} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \beta_n^*.$$

## 4.4 Résultats numériques et discussion

Pour déterminer les deux coefficients  $\alpha_n^*$  et  $\beta_n^*$ , nous devons chercher la solution du système algébrique (4.31), qui se réduit à calculer les quatre intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_1(\lambda) M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda, & \quad (a) \\ \int_0^\infty f_2(\lambda) N_n(\lambda b) X_m(\lambda a) d\lambda, & \quad (b) \\ \int_0^\infty f_2(\lambda) M_n(\lambda a) Y_m(\lambda b) d\lambda, & \quad (c) \\ \int_0^\infty f_3(\lambda) N_n(\lambda b) Y_m(\lambda b) d\lambda. & \quad (d) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Si la valeur de  $\lambda$  est plus grande, les fonctions  $f_1(\lambda)$ ,  $f_2(\lambda)$  et  $f_3(\lambda)$  sont exprimées asymptotiquement comme suit :  $f_1(\lambda) \mapsto 1$ ,  $f_2(\lambda) \mapsto 0$ ,  $f_3(\lambda) \mapsto -1$ .

Comme les deux intégrales (4.34.b) et (4.34.c) convergent rapidement, ils sont alors remplacés par

$$\int_0^\infty f_2(\lambda) N_n(\lambda b) X_m(\lambda a) d\lambda \simeq \int_0^{\lambda_0} f_2(\lambda) N_n(\lambda b) X_m(\lambda a) d\lambda, \quad (4.35)$$

$$\int_0^\infty f_2(\lambda) M_n(\lambda a) Y_m(\lambda b) d\lambda \simeq \int_0^{\lambda_0} f_2(\lambda) M_n(\lambda a) Y_m(\lambda b) d\lambda, \quad (4.36)$$

et les autres intégrales sont calculés en adoptant la démarche basée sur les expressions asymptotiques comme dans le chapitre précédent, et on aura

$$\int_0^\infty f_1(\lambda) M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda \simeq \int_0^{\lambda_0} f_1(\lambda) M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda + \int_{\lambda_0}^\infty M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda, \quad (4.37)$$

$$\int_0^\infty f_3(\lambda) N_n(\lambda b) Y_m(\lambda b) d\lambda \simeq \int_0^{\lambda_0} f_3(\lambda) N_n(\lambda b) Y_m(\lambda b) d\lambda - \int_{\lambda_0}^\infty N_n(\lambda b) Y_m(\lambda b) d\lambda, \quad (4.38)$$

**Proposition 4.4.1** *Pour tous entiers  $n$  et  $m$ , on a les expressions asymptotiques suivantes*

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} N_n(\lambda) Y_m(\lambda b) d\lambda \simeq \frac{128(-1)^m(m+1)(n+1)}{\pi^2 a^3} \left\{ \frac{\cos^2(\lambda_0 a)}{\lambda_0 a} + \text{si}(2\lambda_0 a) \right\}, \quad (4.39)$$

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda) X_m(\lambda a) d\lambda \simeq \frac{4}{\pi^2 a^2} \left\{ \frac{\sin(\lambda_0 a)}{\lambda_0} - a \text{ci}(\lambda_0 a) + \frac{(-1)^m}{2} \left[ \frac{1 - \cos(2\lambda_0 a)}{\lambda_0} - 2a \text{si}(2\lambda_0 a) \right] \right\}, \quad (4.50)$$

où;  $\text{si}(x)$  et  $\text{ci}(x)$  représentent les fonctions sinus integral et cosinus integral respectivement, et  $\lambda_0$  est supposée grande.

**Définition 4.4.1** *Pour tout réel  $x$  et pour tout réel  $t$ , les fonctions sinus integral et cosinus integral respectivement sont données par*

$$\text{Si}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt, \quad \text{ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

Alors ces intégrales :

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_0} f_1(\lambda) M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda, & \quad \int_0^{\lambda_0} f_2(\lambda) N_n(\lambda b) X_m(\lambda a) d\lambda, \\ \int_0^{\lambda_0} f_2(\lambda) M_n(\lambda a) Y_m(\lambda b) d\lambda, & \quad \int_0^{\lambda_0} f_3(\lambda) N_n(\lambda b) Y_m(\lambda b) d\lambda, \end{aligned} \quad (4.51)$$

ont été calculés en appliquant la formule de Simpson pour une grande valeur  $\lambda_0$ . Ainsi, le programme (C.1) (voir l'annexe) synthétise les différents résultats qui sont relatifs à un cas d'étude pour la convergence. Tableau 4.1. et 4.2. rassemblent les valeurs de  $\alpha_n^*$  et  $\beta_n^*$  respectivement comme suit:

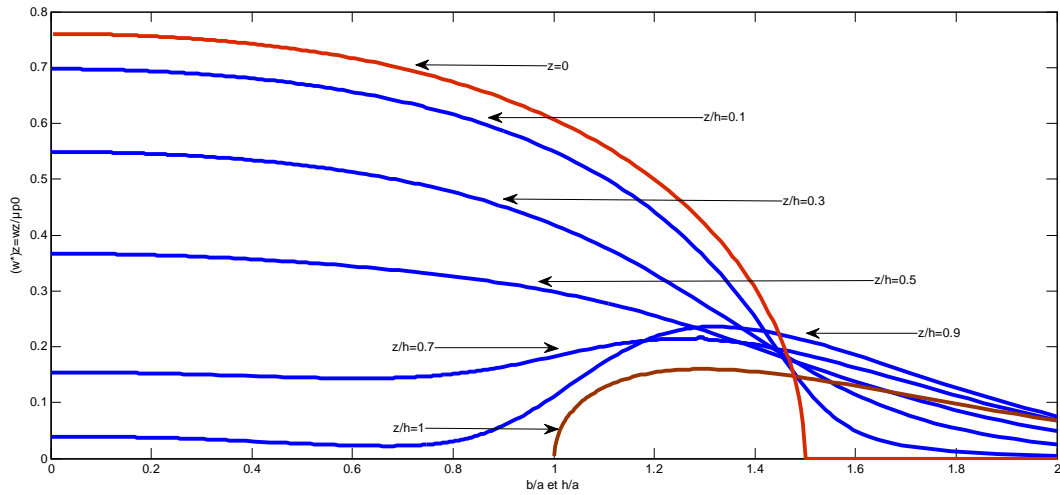
Tableau 4.1: Valeurs de coefficients  $\alpha_n^*$  et  $\beta_n^*$  pour  $h = 0.5$ , 1 respectivement

$n$	$\alpha_n^*$	$\beta_n^*$	$n$	$\alpha_n^*$	$\beta_n^*$
0	1.130094419245507	-0.471538602485724	0	0.928113882097652	-0.605300814473870
1	-0.145780439192096	-0.153405892072816	1	-0.294021011589831	-0.055865667909401
2	-0.041150483596885	0.008472001416906	2	-0.003387425075263	0.006750861888071
3	-0.012823569978996	0.018625084054209	3	0.002726386221647	0.000783455750898
4	0.001274669639838	-0.003018272240739	4	0.000053134062851	-0.000356235047203
5	0.000363264317674	-0.002330242621946	5	-0.000018187731779	0.000017754771471
6	-0.000024874169699	0.000775286839158	6	-0.000002711734031	0.000013551326023
7	-0.000014029538692	0.000237294506170	7	-0.000003970991552	-0.000002947956563
8	-0.000008850389321	-0.000165141817247	8	-0.000007422157624	0.000000245296062
9	-0.000004013250419	-0.000006866875110	9	-0.000004934960828	0.000000697668389

Tableau 4.2: Valeurs de coefficients  $\alpha_n^*$  et  $\beta_n^*$  pour  $h = 1.5, 2$  respectivement

$n$	$\alpha_n^*$	$\beta_n^*$	$n$	$\alpha_n^*$	$\beta_n^*$
0	0.739105798524184	-0.722281763161126	0	0.570662962982279	-0.788747510995462
1	-0.234716352036342	-0.021434133535949	1	-0.154480368359463	-0.008346888658317
2	0.012093066405713	0.002505109358769	2	0.009346512457349	0.000868469079572
3	0.000467646790954	-0.000054997546303	3	-0.000125623136096	-0.000041985435658
4	-0.000053966116770	-0.000029246482346	4	-0.000011864914449	-0.000001386163316
5	-0.000001221030820	0.000004837373984	5	-0.000000010673503	0.000000566036305
6	-0.000001448150360	-0.000000057486948	6	-0.000001328917955	0.000000071764009
7	-0.000003279734450	0.000000189833051	7	-0.000002685145075	0.000000267752525
8	-0.000006040478345	0.000000360373086	8	-0.000004949772131	0.000000369111158
9	-0.000004013250419	0.000000576357887	9	-0.000003290588619	0.000000612213520

Nous observons que pour avoir la convergence de  $\alpha_n^*$  et  $\beta_n^*$ , il suffit de considérer les dix termes de la série. Ainsi, la répartition des contraintes et de facteur d'intensité dans la couche élastique sont représentées graphiquement.


 Figure 4.3: La distribution du  $(\frac{w_z}{\eta\rho_0})_z$  pour  $b = 1.5$  et  $h = 1.5$ .

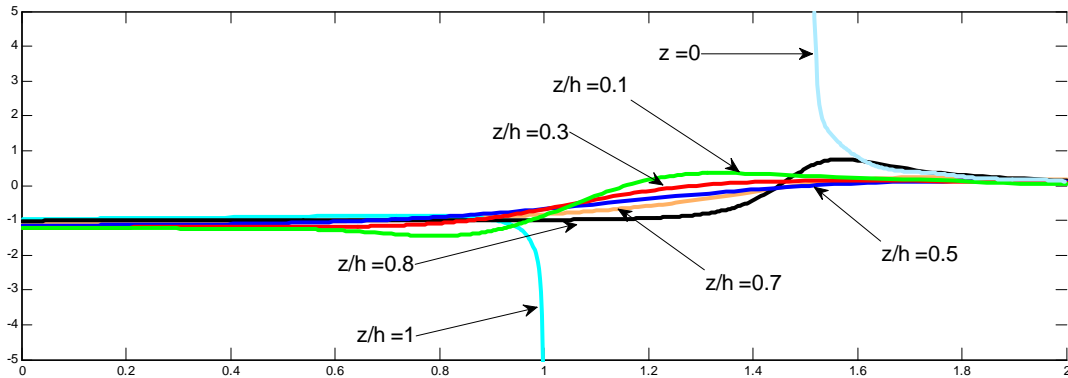


Figure 4. 4: La distribution du  $(\frac{\sigma_z^*}{\rho_0})_z$  pour  $b = 1.5$  et  $h = 1.5$ .

Les figures 3 et 4 montrent les distributions de  $w_z^*$  et  $\sigma_z^*$  pour  $\nu = 0,3$ ,  $h = 1,5$  et  $b = 1,5$  respectivement. Pour des valeurs infiniment petite  $z/h$ , le déplacement normal  $w_z^*$  tend vers  $w_z^* = 0$  lorsque  $r$  tend vers l'infini. Ainsi, La distribution de  $\sigma_z^*$  est toujours à la compression en prenant la valeur  $\sigma_z^* = -1$  dans la région  $z = 0$ . Les figures de 4 à 7 illustrent le comportement des déplacements et les contraintes pour certaines valeurs de paramètres  $h$  et  $b$  sur la surface de la fissure. Nous remarquons que pour des variantes couches élastiques, les déplacements et les contraintes augmentent avec une couche de plus en plus épaisseur.

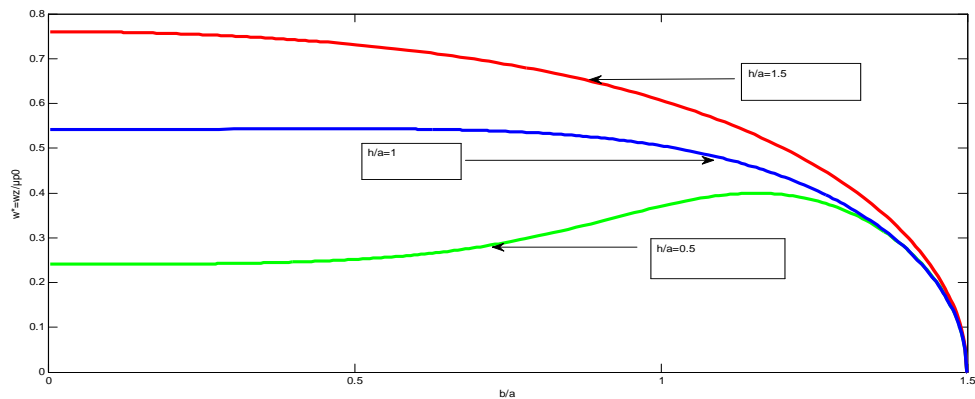


Figure 4.5: La variation du  $(w^*)_{z=0}$  pour  $h$ , ( $b = 1.5$ )

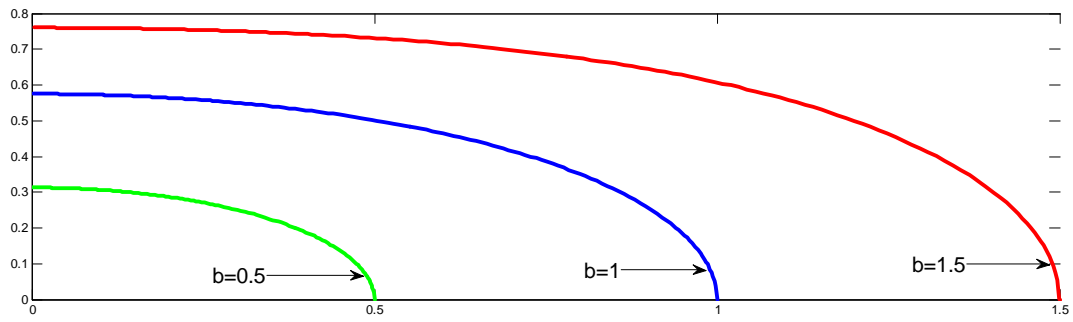


Figure 4. 6: La variation du  $(w^*)_{z=0}$  pour  $b$  , ( $h = 1.5$ ).

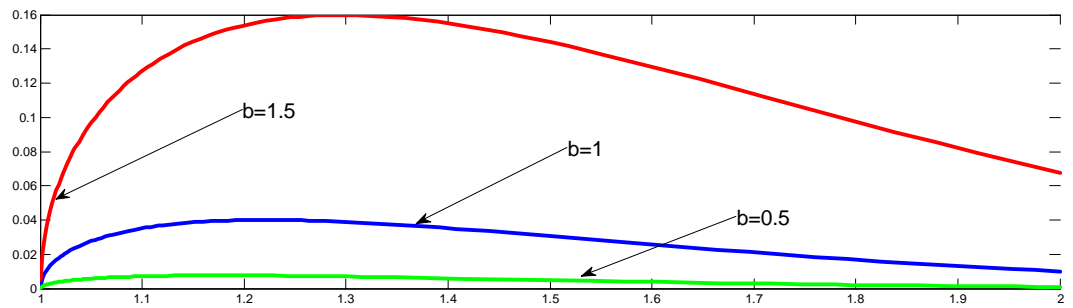


Figure 4.7: La variation du  $(w^*)_{z=h}$  pour  $h$  , ( $b = 1.5$ ).

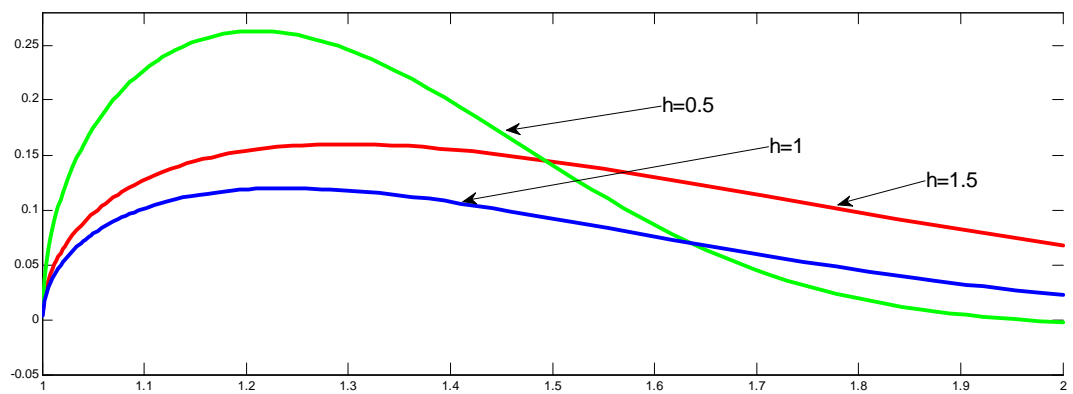


Figure 4.8: La variation du  $(w^*)_{z=h}$  pour  $b$  , ( $h = 1.5$ ).

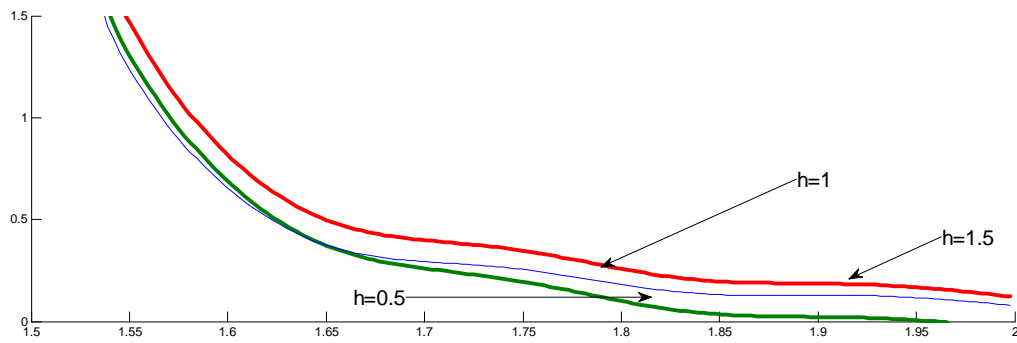


Figure 4. 9: La variation du  $(\sigma_z^*)_{z=0}$  pour  $h$ , ( $b = 1.5$ ).

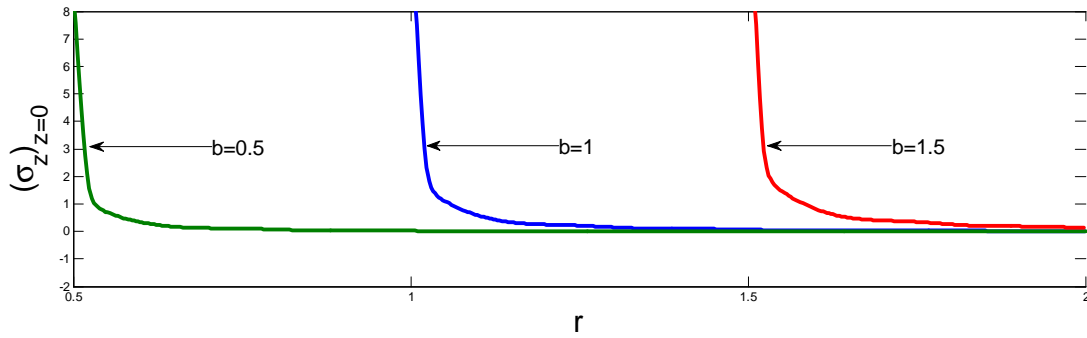


Figure 4. 10: La variation du  $(\sigma_z^*)_{z=0}$  pour  $b$ , ( $h = 1.5$ ).

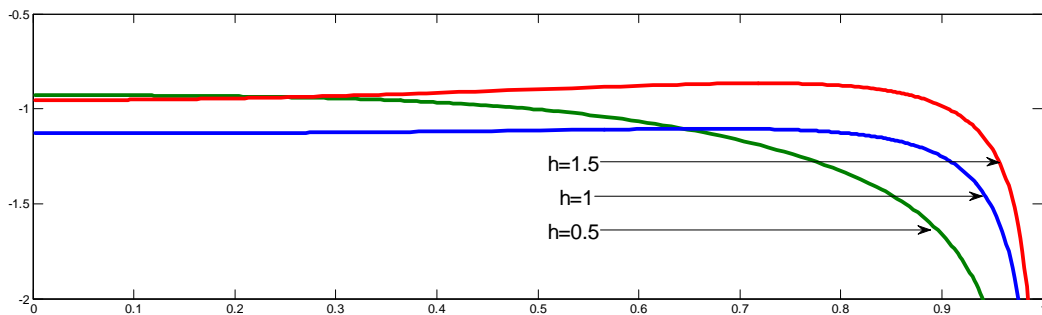


Figure 4 11: La variation du  $(\sigma_z^*)_{z=h}$  pour  $h$ , ( $b = 1.5$ ).

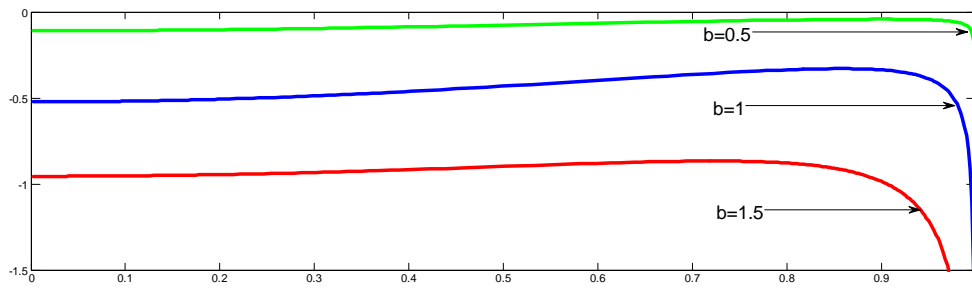


Figure 4.12: La variation du  $(\sigma_z^*)_{z=h}$  pour  $b$ , ( $h = 1.5$ ).

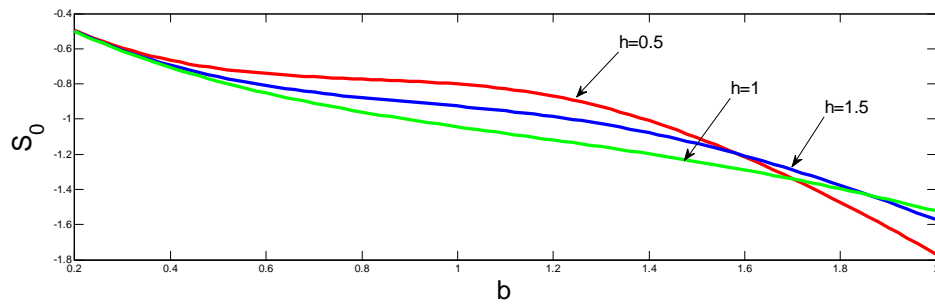


Figure 4.13: La variation du  $S_0$  pour  $b = 1.5$ .

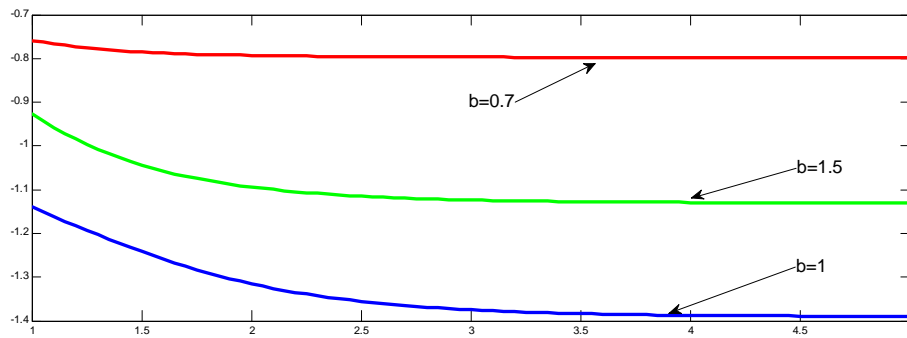


Figure 4.14: La variation du  $S_0$  pour  $h = 1.5$ .

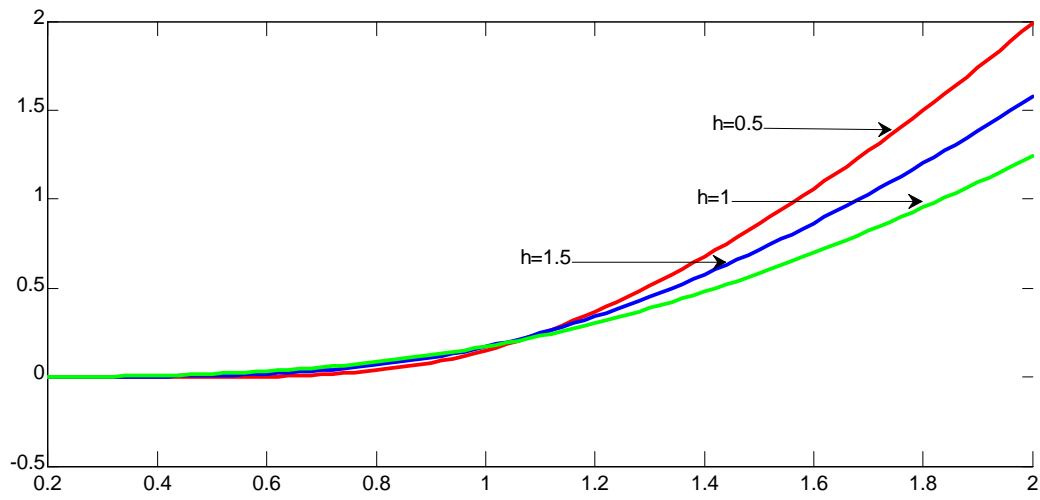


Figure 4.15: La variation du  $S_h$  pour  $b = 1.5$ .

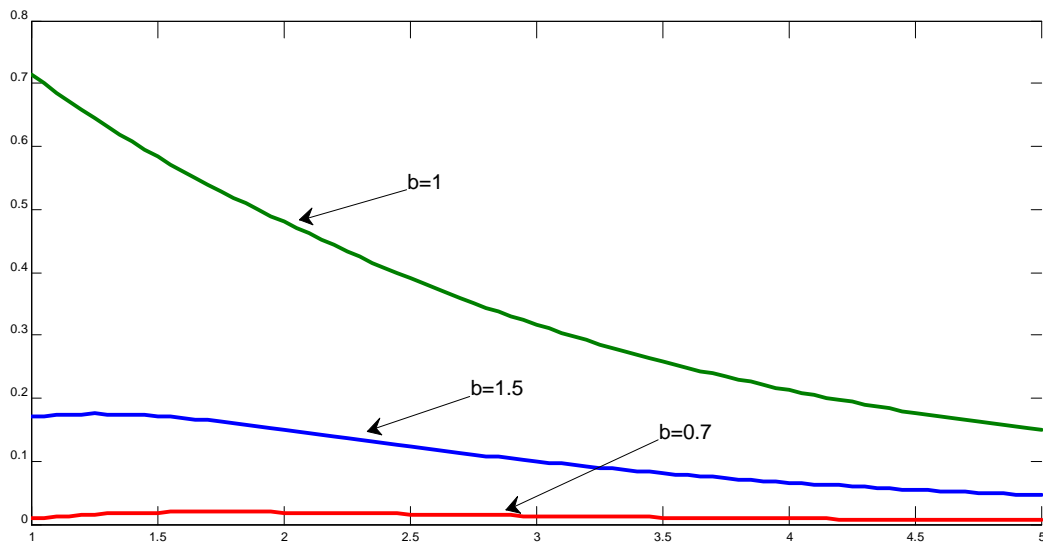


Figure 4.16: La variation du  $S_h$  pour  $h = 1.5$ .

## 4.5 Conclusion

Plusieurs applications d'aspects pratiques de l'élasticité linéaire ont été traitées dans ce chapitre. Nous avons proposé une technique importante et différente. La raison essentielle est de déterminer les fonctions inconnues  $C(\lambda)$  et  $D(\lambda)$  en constatant des représentations pour la contrainte normale  $(\sigma_z)_{z=h}$  et le déplacement normal  $(w_z)_{z=0}$  sous formes de développements en séries. La validation de cette dernière repose sur des comparaisons avec des solutions analytiques lorsqu'elles sont disponibles ainsi qu'avec des résultats obtenus en utilisant différentes modélisations pour les mêmes applications, et pour plus détails, nous pouvons consulter l'article de (*voir* [15, 39, Hara et Akiyama, Sakamoto]). Les résultats du mémoire se résument comme suit :

1. Les premiers coefficients du système algébrique  $\alpha_n^*$  convergent plus rapidement pour des valeurs croissantes de l'épaisseur de la couche  $h$ .
2. Une situation inverse est observée pour les coefficients  $\beta_n^*$ .
3. Le déplacement normal décroissant avec des valeurs croissantes de  $z/h$ . Ainsi la surface de la fissure prend une forme parabolique.
4. Sur la région  $0 < z < h$ , la contrainte normale est en compression.
5. Le déplacement normal  $(w_z^*)_{z=0}$  sur la surface de la fissure est croissant ainsi l'épaisseur de la couche élastique est croissante.
6. Dans le voisinage du bord de la fissure, la contrainte normale  $(\sigma_z^*)_{z=0}$  est normalisée et tend vers l'infini.

# **Conclusion générale et perspectives**

## **Conclusion générale**

Dans une théorie tridimensionnelle de l'élasticité, nous avons proposé un cadre analytique pour un problème axisymétrique d'une couche élastique infinie fissurée au milieu et délimitée partiellement par deux supports circulaires et rigides. Le problème est équivalent à un problème doublement mixte aux limites. La solution analytique a été obtenue à l'aide des coefficients d'un système algébrique infini. La convergence du système infini est réalisée à partir des dix premiers termes de la série. L'expression du déplacement et la contrainte normale sont données sous forme d'une série appropriée.

## **Perspectives**

La méthode analytique développée dans ce mémoire peut être appliquée pour la résolution d'une classe intéressante des problèmes de recherche. Nous envisageons d'étudier des problèmes de déformation axisymétrique ayant une fissure au milieu dans le cas où les deux supports ne sont pas rigides. A titre d'indication, l'un des problèmes à résoudre par la méthode utilisée et le suivant : « déformation axisymétrique d'une plaque élastique fissurée au milieu, et délimitée par deux supports circulaires pas forcément rigides ».

## A. Les fissures

### A.1 Introduction

Toutes les plaques élastiques contiennent des fissures, même si cela ne se voit pas à l'œil nu. Ces fissures peuvent croître lentement ou brutalement, la prévision de ces phénomènes est donc un enjeu essentiel pour le dimensionnement. La branche de l'élasticité qui permet de modéliser la fissuration s'appelle " l'élasticité de la Bifurcation ". Nous en présentons ici quelques concepts, et notamment la notion de ténacité qui caractérise la résistance d'un matériau à la bifurcation par fissuration, et peut être identifiée expérimentalement par des techniques de mesures de champs. Les fissures font partie intégrante de notre quotidien. Toutes les pièces mécaniques en contiennent à diverses échelles. Les fissures les plus grandes sont visibles. Par exemple, chaque conducteur est conscient du danger de rouler avec un impact sur son pare-brise. Malgré les précautions prises dans la réalisation des pare-brises (multicouches), un simple impact de quelques millimètres (une fissure de petite taille en fait) peut se propager très rapidement sous charge, jusqu'à couvrir toute l'étendue du pare-brise. Cependant, la plupart des fissures sont invisibles à l'œil nu.

Les structures soumises à des chargements cycliques sont inévitablement fissurées. La présence de fissures constitue un risque potentiel, car les fissures grandissent de manière irréversible (on dit qu'elles se propagent) et cela peut entraîner la bifurcation de la pièce. Dans le cas de la fatigue, cette propagation s'effectue selon deux régimes différents :

- En-dessous d'une certaine taille critique (dépendant de la structure et de son chargement), la fissure se propage "lentement", de manière progressive et stable au cours des cycles de chargement.
- Une fois la taille critique atteinte, la fissure se propage brutalement de manière instable, ce qui conduit généralement à la bifurcation. Tout l'enjeu est donc de prévoir à quel moment la taille critique risque d'être atteinte. Dans l'aéronautique, dans le ferroviaire (roues des trains), les fissures sont régulièrement inspectées lors des phases de maintenance, et leurs tailles et positions sont suivies attentivement. Des simulations permettent donc de prévoir les risques de propagation jusqu'à l'inspection suivante ; ces simulations font généralement appel à la Mécanique de la "Rupture", dont quelques concepts essentiels sont présentés dans les paragraphes suivants.

## A.2 Définitions et modélisation de la fissure

Une fissure est une petite fente dans une plaque élastique. Cette fente peut apparaître à la surface de la plaque (fissure superficielle), se trouver complètement à l'intérieur et être donc invisible depuis l'extérieur (fissure interne), ou traverser complètement la plaque (fissure traversante). Pour décrire les fissures, on suppose souvent que leur géométrie est simple :

- Leur forme est elliptique, semi-elliptique ou en forme de coin .
- Les deux faces de la fissure sont planes, parallèles et écartées d'une distance très petite devant les deux autres dimensions de la fissure. On assimile donc la fissure à son plan moyen.
- Les deux faces se rejoignent selon un bord anguleux ; en conformité avec l'hypothèse précédente (faces parallèles), l'angle formé par les deux faces est supposé quasiment nul. La fissure est donc modélisée par une discontinuité de la matière, plane, "pointue" et d'épaisseur nulle. Lorsque les deux faces ne se touchent pas, nous affirons que la fissure est ouverte. Dans le cadre de la Mécanique des Milieux Continus (c'est-à-dire en termes de déplacements et de contraintes), la fissure est alors modélisée en écrivant les conditions aux limites suivantes sur le plan moyen :

- Le vecteur contrainte est nul (car chacune des deux faces est un bord libre).
- Le déplacement peut être discontinu de part et d'autre du plan (et sa discontinuité correspond alors à l'ouverture de la fissure).

## A.3 Les modes de propagation des fissures

Nous supposons ici que les fissures sont planes et se propagent dans leur plan. Il est ainsi possible de montrer que l'état général de propagation se limite à la superposition de trois modes :

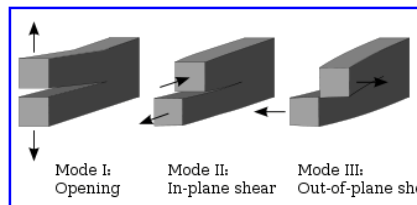


Figure A.1: Modes de propagation des fissures.

- mode I (mode par ouverture) : les surfaces de la fissure se déplacent perpendiculairement au plan de fissure.
- mode II (glissement de translation) : les surfaces de la fissure se déplacent dans le plan de fissure et dans une direction perpendiculaire au front de fissure.
- mode III (glissement de rotation) : les surfaces de la fissure se déplacent dans le plan de fissure et dans une direction parallèle au front de la fissure.

**Remarque A** Le mode  $I$  est souvent le plus critique et les études théoriques sont donc souvent limitées à ce mode de propagation.

#### A.4 Champ de contraintes en pointe de fissure

Pour réaliser des simulations, il est nécessaire de calculer les champs de déplacements et de contraintes dans la structure fissurée et chargée. Analytiquement dans certains cas simples, ou par éléments finis pour des géométries complexes, la fissure est modélisée par une discontinuité plane. Nous constatons que le champ de contraintes présente une singularité: “lorsque l’on se rapproche de la pointe de la fissure”, la contrainte maximale tend vers l’infini. Autrement dit, si l’on suppose que la rupture survient lorsque la contrainte excède un certain seuil (ce qui est globalement vrai dans un certain domaine), alors le modèle prédit que la structure peut rompre pour un chargement “très petit” ! Cela ne correspond heureusement à aucune observation physique. Cet écart avec la réalité s’explique par le simplisme du modèle choisi : dans les faits, la fissure n’est pas “pointue” (elle a un rayon de courbure non nul), et une zone plastique se développe autour de la pointe de fissure (le comportement du matériau ne reste donc pas élastique, et ce même pour les matériaux dits “fragiles”). La valeur infinie de la contrainte à la pointe de la fissure est donc hors du domaine de validité du modèle, et n’a pas de sens mathématique physique. Le problème est qu’il serait délicat d’utiliser une modélisation plus réaliste : cela demanderait de décrire finement la géométrie de la pointe de la fissure et d’utiliser un modèle de comportement non-linéaire rendant compte de la plasticité locale. Plutôt que de compliquer la modélisation, la mécanique linéaire de la rupture propose de conserver la modélisation ci-dessus, mais en modifiant les quantités d’intérêt au lieu de s’intéresser à la valeur maximale (infinie donc non pertinente !) de la contrainte, la quantité dimensionnante sera une mesure de l’ensemble du

champ de contraintes aux abords de la fissure. C'est la solution analytique en contraintes et en déplacements.

## B. Facteur d'intensité de contrainte

### B.1 Introduction

On les appelle facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  respectivement en mode I, mode II et mode III. L'intensité de la singularité du champ des contraintes à la pointe de la fissure est proportionnelle à la discontinuité du déplacement des lèvres de la fissure. On les appelle aussi les facteurs de discontinuité des déplacements, caractérisent à la fois la géométrie du détail et de la fissure, et la nature des sollicitations, évaluation du facteur d'intensité de contrainte  $K$  en fonction du rayon du noyau  $r$ .  $K$  est le produit d'une contrainte par la racine carrée d'une longueur

$$[K] = [\sigma][L]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.1})$$

et se mesure en  $\text{MPa}\cdot\text{m}^{\frac{1}{2}}$  ou  $\text{Nm}^{-3/2}$ . Si l'on connaît leurs valeurs, ils permettent de déterminer complétement les champs de contrainte ou déplacement dans la structure fissurée, considérée comme élastique inversement, si l'on connaît les expressions des composantes non nul des contraintes et des déplacements. En mode I, L'expression générale de  $K_I$  est de la forme :

$$K_I = \gamma\sigma\sqrt{\pi a}. \quad (\text{B.2})$$

Le résultat du calcul analytique montre qu'en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  que le premier terme du développement limité du champ des contraintes s'écrit en  $r^{-1/2}$  quelles que soient les conditions de chargement, et la géométrie indiquée dans la figure (B.1).

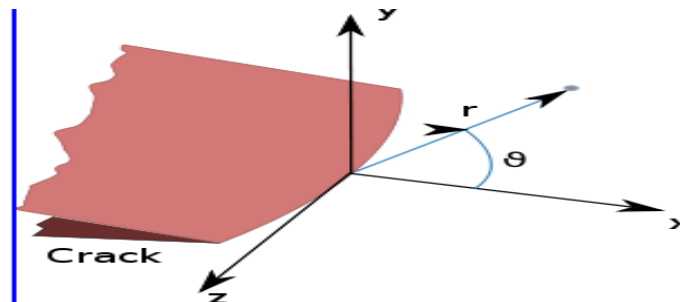


Figure B.1: Fissure dans les coordonnées  $(r, \theta)$ .

Plus précisément, on peut toujours l'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta). \quad (\text{B.3})$$

La constante  $K$  est une fonction du chargement, et qu'on appelle facteur d'intensité des contraintes. C'est cette quantité utilisant pour décrire le niveau du chargement au voisinage de la fissure et dimensionner la structure, plutôt que la "contrainte maximale". Ainsi, au lieu de considérer que le point où se trouve le "maximum", l'ensemble de la singularité spatiale du champ des contraintes est pris en compte. Les critères en contrainte stipulent alors que la fissuration devient instable lorsque le facteur d'intensité des contraintes excède une certaine valeur limite. Cette dernière est appelée "ténacité", et généralement considérée comme une propriété intrinsèque du matériau dans un état donné (température, traitements thermiques...). (Signalons qu'il existe une autre famille de critères de propagation, basés sur l'énergie potentielle libérée lors de l'avancement de la fissure ; nous ne les développons pas dans cette ressource.).

Le facteur d'intensité des contraintes peut évoquer par son rôle; les coefficients de concentration de contraintes utilisés pour dimensionner les structures comportant des accidents géométriques. *Il* est vrai que ces deux grandeurs décrivent la solution au voisinage du défaut, et peuvent être trouvées dans des abaques ou des formulaires pour un grand nombre de problèmes-type. Cependant, l'analogie s'arrête là : les coefficients de concentration de contraintes sont des nombres sans dimension donnant directement la valeur maximale de la contrainte, tandis que le facteur d'intensité des contraintes s'exprime en  $MPa.(m^{1/2})$  (c'est-à-dire le produit d'une contrainte par la racine carrée d'une longueur) et caractérise l'ensemble du champ des contraintes autour de la pointe de fissure.

## B.2 Facteurs d'intensité de contrainte pour divers modes

Trois modes de craquage linéairement indépendants sont utilisés dans la mécanique de la rupture. Ces charges types sont classées comme illustré sur la figure (A.1). Les indices différents sont utilisés pour désigner le coefficient d'intensité de contrainte pour les trois modes différents comme illustrés dans la section (A.1). Le coefficient d'intensité de contrainte pour le mode I est désigné par  $K_I$ , et appliqué le mode d'ouverture de fissure. Le mode II est révélé par  $K_{II}$ , s'applique à la fissure mode de glissement, et la mode III est désigné par  $K_{III}$ , s'applique à la mode de le déchirement. Ces facteurs sont définies officiellement

comme suit :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}(r, 0), \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yx}(r, 0), \quad K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yz}(r, 0). \quad (\text{B.4})$$

### B.3 Propriétés

Pour une fissure sous (mode I), le chargement est liée au coefficient d'intensité de contrainte par

$$G = K_I^2 \left( \frac{1-\nu^2}{E} \right), \quad (\text{B.5})$$

où  $E$  est le module du Young et  $\nu$  coefficient de Poisson de la matière. Le matériel est supposé pour être un élastique isotrope, homogène et linéaire.

Pour une déformation plane, la fissure s'étendent le long de la direction. Pour les conditions de contraintes, nous obtenons la relation :

$$G = K_I^2 \left( \frac{1}{E} \right), \quad (\text{B.6})$$

Pour une fissure sous (mode II), nous avons les relations :

$$G = K_{II}^2 \left( \frac{1-\nu^2}{E} \right) \text{ ou } G = K_{II}^2 \left( \frac{1}{E} \right), \quad (\text{B.7})$$

**Exemple B.1** (Facteur d'intensité de contrainte uniaxiale et uniforme). Le coefficient d'intensité de contrainte pour une fissure par le biais de longueur  $2a$  à angle droit, et dans un plan infini à un champ de contrainte uniforme  $\sigma$  comme indiquée sur la figure (B.2) :

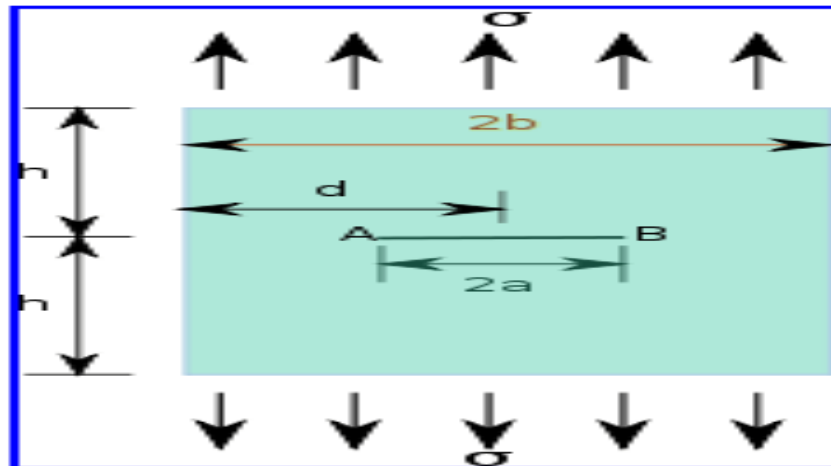


Figure B.2: Fissure sous le mode I.

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}, \quad (\text{B.8})$$

Si la fissure est située dans une plaque finie de  $2b$  largeur et hauteur  $2h$ , une relation approximative pour le coefficient d'intensité de contrainte est

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \left[ \frac{1 - \frac{a}{2b} + 0.326 \left(\frac{a}{b}\right)^2}{\sqrt{1 - \frac{a}{b}}} \right], \quad (\text{B.9})$$

Si la fissure n'est pas située centralement, telle que  $d \neq b$ , nous avons le coefficient d'intensité de contrainte

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{19} C_n \left(\frac{a}{b}\right)^n \right], \quad (\text{B.10})$$

où  $C_n$  facteur se trouve sous forme de tableau pour diverses valeurs de  $d$

**Exemple B.2** (Edge crack dans une plaque sous contrainte uni axiale). Pour un support de dimension  $h \times b$  contenant un edge crack de rayon  $a$  comme indiquée sur la figure (B.3):

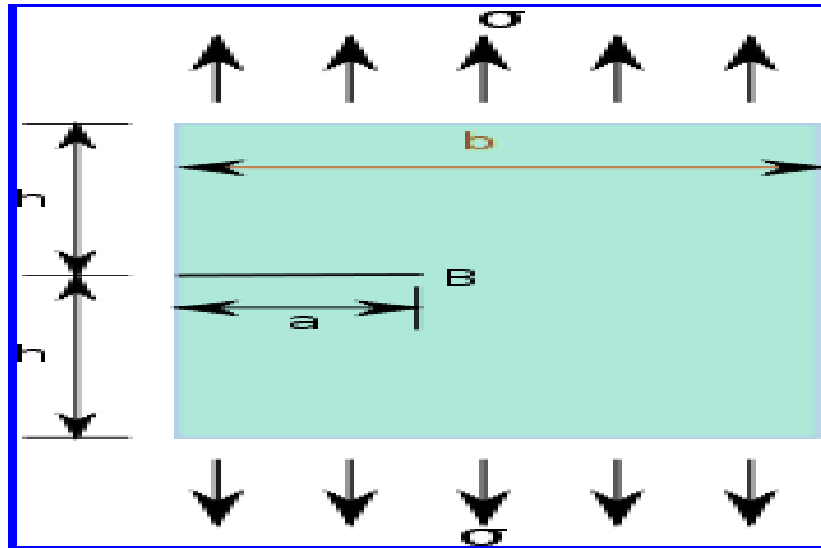


Figure B.3: Edge crack in a finite plate under uni axial stress.

Le coefficient d'intensité de contrainte est

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \left[ 1.12 - 0.23 \left(\frac{a}{b}\right) + 10.6 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21.7 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30.4 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \right]. \quad (\text{B.11})$$

Pour  $h/b \geq 1$  et  $a/b \geq 0.3$ , une relation approximative pour le coefficient d'intensité de contrainte est

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \left[ \frac{1 + 3\frac{a}{b}}{2\sqrt{\pi\frac{a}{b}} \left(1 - \frac{a}{b}\right)^{3/2}} \right]. \quad (\text{B.12})$$

**Exemple B.3** (Fissure dans un champ de contrainte bi axiale).

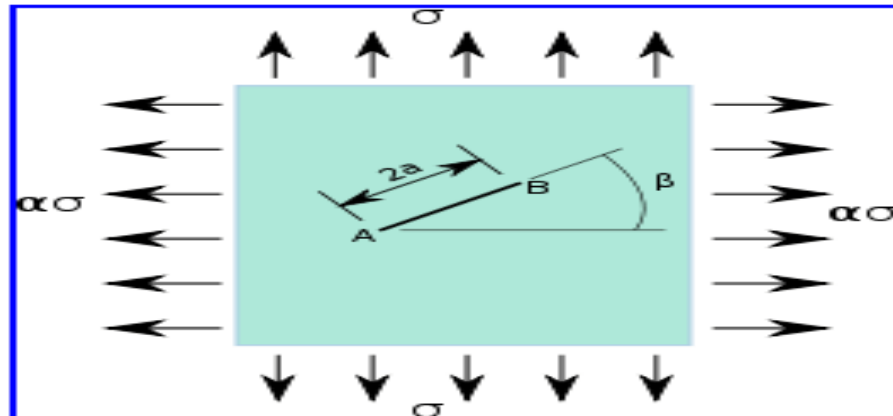


Figure B.4: A slanted crack in a thin plate under biaxial load.

Le facteur d'intensité de contrainte pour le mode I et le mode II est

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} (\cos^2 \beta + \alpha \sin^2 \beta), \quad (\text{B.13})$$

$$K_{II} = \sigma\sqrt{\pi a} (1 - \alpha) \sin \beta \cos \beta, \quad (\text{B.14})$$

où  $\beta$  est l'angle de la fissure pour l'axe des x.

**Exemple B.4** (Fissure dans une plaque élastique infinie).

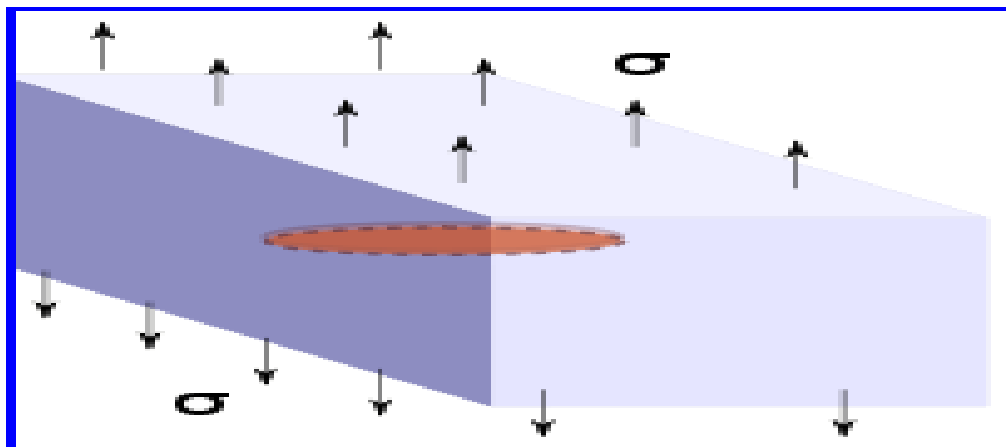


Figure B.5: Penny-shaped crack in an infinite domain under uniaxial tension.

Le facteur d'intensité de contrainte est donné par la relation

$$2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}}. \quad (\text{B.15})$$

## C. Programmes numériques

### C.1 Programme de calculs les coefficients $\alpha_n^*$ et $\beta_n^*$

```

Editor - D:\Documents and Settings\douaa\Bureau\kafi-abdelghani\work\resol1.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
[Icons] Stack: Base fx
- 1.0 + ÷ 1.1 x % %
1 - n=input('n=');
2 - m=n;
3 - a=1;
4 - h=input('h/a=');
5 - b=input('b/a=');
6 - lb0=input('donnez lamda0=');
7 - pa=input('pas=');
8
9 - for j=1:(2*m)
10 -     if j<=m
11 -         for i=1:(2*n)
12 -             if i<=n
13
14 -                 A(j,i)=INS1(j-1,i-1,lb0,a,b,h,pa)
15 -             else
16 -                 A(j,i)=INS2(j-1,i-1-n,lb0,a,b,h,pa)
17 -             end
18 -         end
19 -     else
20 -         for i=1:(2*n)
21 -             if i<=n
22 -                 A(j,i)=INS3(j-1-m,i-1,lb0,a,b,h,pa)
23 -             else
24 -                 A(j,i)=INS4(j-1-m,i-1-n,lb0,a,b,h,pa)
25 -             end
26 -         end
27 -     end
28 - end
29
30 - for k=1:(2*n)
31 -     if k==(n+1)
32 -         d(k)=1;
33 -     else
34 -         d(k)=0;

```

```

h=input('n=');
m=n;
a=1;
h=input('h/a=');
b=input('b/a');
lb0=input('donnez lamda0=');
pa=input('pas=');

for j=1:(2*m)
    if j<=m
        for i=1:(2*n)
            if i<=n
                A(j,i)=INS1(j-1,i-1,lb0,a,b,h,pa)
            else
                A(j,i)=INS2(j-1,i-1-n,lb0,a,b,h,pa)
            end
        end
    else
        for i=1:(2*n)
            if i<=n
                A(j,i)=INS3(j-1-m,i-1,lb0,a,b,h,pa)
            else
                A(j,i)=INS4(j-1-m,i-1-n,lb0,a,b,h,pa)
            end
        end
    end
end

for k=1:(2*n)
    if k==(n+1)
        d(k)=1;
    else
        d(k)=0;
    end
end
end

```



```

function W=Wz_0_9(r)
h=1.5;
b=1.5;
a=1;
ra=0.9;
z=ra.*h;
nu=0.3;
f1=@(x)((cosh(2.*x.*h)-1)/(2.*x.*h+sinh(2.*x.*h)));
f2=@(x)(2.*(sinh(x.*h)+x.*h.*cosh(x.*h))/(2.*x.*h+sinh(2.*x.*h)));
f0=@(x)(2.*sinh(x.*h)/(2.*x.*h+sinh(2.*x.*h)));
An=[
    0.49269554561266
   -0.15659450691122
    0.00809753283975
    0.00030720954340
   -0.00003537831611
   -0.00000082455659
   -0.00000085234184
   -0.00000212364722
   -0.00000391786536
   -0.00000690131117

    ];
Bn=[
    0.48114837567616
   -0.01367303328360
    0.00214285428126
    0.00053333678221
    0.00047668609599
    0.00055892737801
    0.00050609748072
    0.00054867907849
    0.00051196032514
    0.00054467719516
    ];
S=0;
for i=1:10

    Qn=@(x)(An(i).*Mn(a,i-1,x).*besselj(0,x.*r));
    Rn=@(x)(Bn(i).*Nn(b,i-1,x).*besselj(0,x.*r));

    I1=quadgk(@(x)(Qn(x).(f0(x).*x.*z.*cosh(x.*z)-(1-2.*nu).*f0(x).*sinh
(x.*z)-f2(x).*sinh(x.*z))+Rn(x).*((x.*z-x.*h).*sinh(x.*z)-2*(1-nu).*cosh
(x.*z)+(1-2.*nu).*f1(x).*sinh(x.*z)-f1(x).*x.*z.*cosh(x.*z)+f2(x).*sinh
(x.*h).*sinh(x.*z))),0,20);

    S=S+I1;
end

```

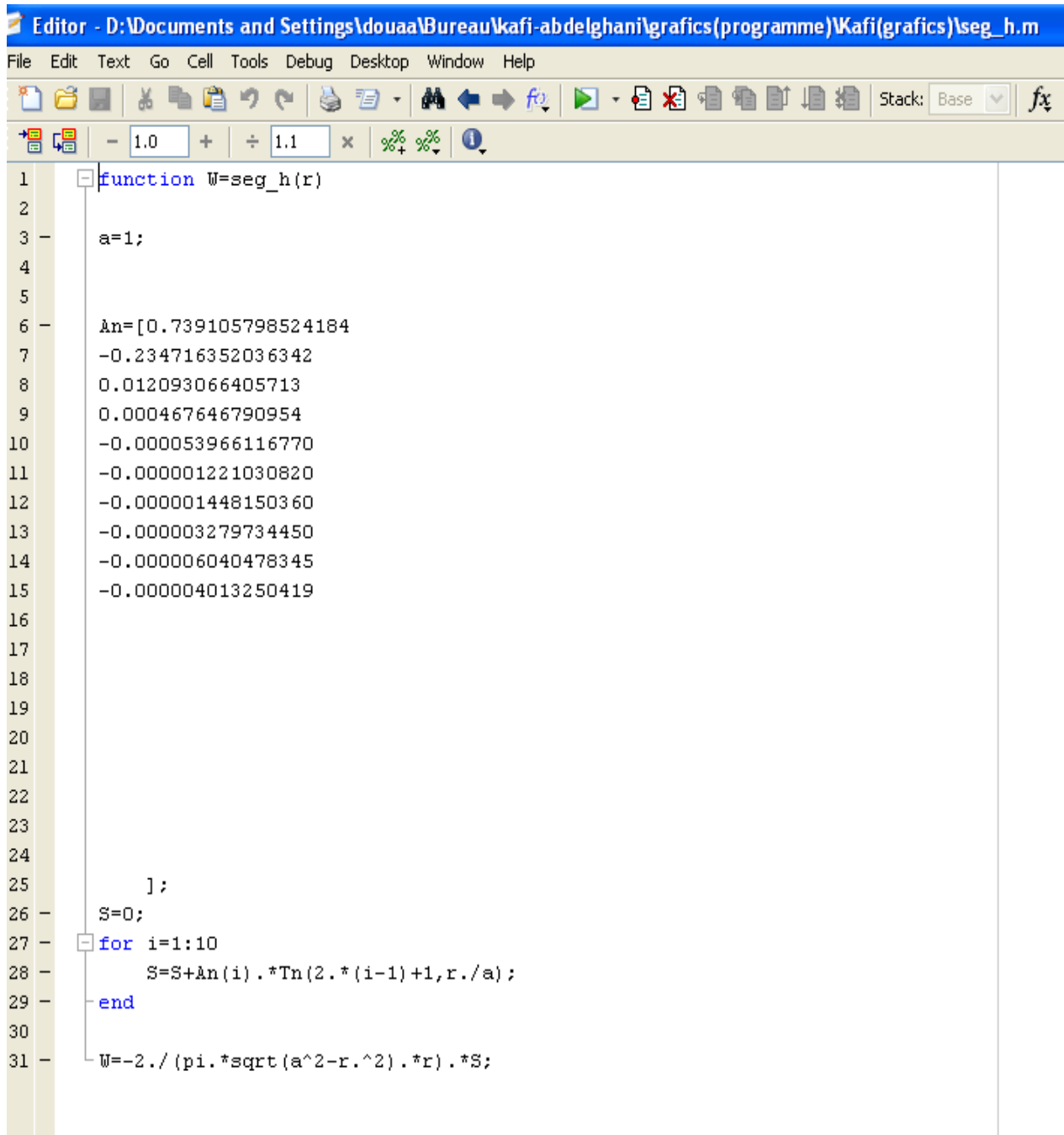


```
function W=seg_h(r)
a=1;

An=[0.739105798524184
-0.234716352036342
0.012093066405713
0.000467646790954
-0.000053966116770
-0.000001221030820
-0.000001448150360
-0.000003279734450
-0.000006040478345
-0.000004013250419

];
S=0;
for i=1:10
    S=S+An(i) .*Tn(2.*(i-1)+1,r./a);
end
W=-2./(pi.*sqrt(a^2-r.^2).*r).*S;
```

**C.4 Programme de la variation du  $(\sigma_z^*)_{z=h}$  pour  $b$ , ( $h = 1.5$ ).**



```
1 function W=seg_h(r)
2
3     a=1;
4
5
6     An=[0.739105798524184
7         -0.234716352036342
8         0.012093066405713
9         0.000467646790954
10        -0.000053966116770
11        -0.000001221030820
12        -0.000001448150360
13        -0.000003279734450
14        -0.000006040478345
15        -0.000004013250419
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25     ];
26     S=0;
27     for i=1:10
28         S=S+An(i).*Tn(2.*(i-1)+1,r./a);
29     end
30
31     W=-2./(pi.*sqrt(a^2-r.^2).*r).*S;
```

C.5 Programme de la distribution du  $(\frac{\sigma_z}{\rho_0})_z$  pour  $b = 1.5$  et  $h = 1.5$ .

**C.5 Programme de la distribution du  $(\frac{\sigma_z}{\rho_0})_z$  pour  $b = 1.5$  et  $h = 1.5$ .**

```
1 function W=seg_0_9(r)
2     h=1.5;
3     b=1.5;
4     a=1;
5     ra=0.9;
6     z=ra.*h;
7     f1=@(x) ((cosh(2.*x.*h)-1)/(2.*x.*h+sinh(2.*x.*h)));
8     f2=@(x) (2.*(sinh(x.*h)+x.*h.*cosh(x.*h))./(2.*x.*h+sinh(2.*x.*h)));
9     f0=@(x) (2.*sinh(x.*h)/(2.*x.*h+sinh(2.*x.*h)));
10    An=[
11        0.49269554561266
12        -0.15659450691122
13        0.00809753283975
14        0.00030720954340
15        -0.00003537831611
16        -0.00000082455659
17        -0.00000085234184
18        -0.00000212364722
19        -0.00000391786536
20        -0.00000690131117
21
22    ];
23    Bn=[
24        0.48114837567616
25        -0.01367303328360
26        0.00214285428126
27        0.00053333678221
28        0.00047668609599
29        0.00055892737801
30        0.00050609748072
31        0.00054867907849
32        0.00051196032514
33        0.00054467719516
```

# Bibliographie

- [1] Abramowitz. M. and Stegun I.A., “*Handbook of Mathematical Functions*”, Applied Mathematics Series, Vol. 55. Washington: National Bureau of Standards, reprinted by Dover Publications, New York), (1968), Chapter 17. [12].
- [2] Barber. J.R., “*Elasticity*”, Kluwer Academic Publishers, (1992), pp. 03 – 497.
- [3] Bowman. F., “*Introduction to Bessel Functions*”, Rp Agnew. Source: Bull. Amer. Math. Soc. (1939), Vol. 45, No. 5, pp. 57 – 347.
- [4] Chakrabarti. A. and Mandal N., “*Solutions of some dual integral equations*”, Z. Angew math. Mech., (1998), Vol. 78, pp. 141 – 144.
- [5] Davies. B., “*Integral transforms and their application*”, Springer, (2002), pp. 01 – 301.
- [6] Dean. G. Duffy., “*Mixed boundary value problem*”, Chapman Hall /CRC. (2007), pp. 688.
- [7] Dhaliwal. R. S., “*Mixed boundary value problem of heat conduction for infinite slab*”, Appl. Sci. Res., (1966), Vol. 16, No. 1, pp. 226-240.
- [8] Dhaliwal. R. S., “*An Axisymmetric mixed boundary value problem for a Thick Slab SIAM*”, J Appl. Math., (1967), Vol. 15, No. 1.
- [9] Debnath. L., “*Integral transforms and their applications*”, Chapman Hall /CRC, (2007), pp. 2110.
- [10] Erdely. A. and all., “*Tables of integral transforms*”, vol. I, Mc GRAW-Hill Book Company, INC., (1954), pp. 23 – 34.

- 
- [11] Fortunier. R., “*Mécanique des milieux continus*”, cours ENSM-SE. (1998) , pp. 01 – 133.
- [12] Fung. Y. C., “*Foundations of Solid Mechanics*”, Prentice Hall. (1965) .
- [13] Gradshteyn. I. S. and Ryzhik I. M., “*Tables of integrals series and products, seventh edition*”, Academic Press, New York., (2007), pp. 1200.
- [14] Hadamard. J., “*Expression asymptotique de la fonction de Bessel*”, Bulletin de la S. M. F, (1908) , Tome 36, pp. 77 – 85.
- [15] Hara. T., Akiyama T., Shibuya T and Koizumi T., “*An axisymmetric contact problem of an elastic layer on a rigid base with a cylindrical hole*”, JSME Int. J. Series I, (1990), Vol. 33, No. 4, pp. 461-467.
- [16] Hayek. S.I. “*Advanced Mathematical Methods in Science and Engineering*”, Marcel Dekker Inc., New York, (2001), ISBN: 0 – 8247 – 0466 – 5.
- [17] Harding. J. W. and Sneddon I. N., “*The elastic stresses produced by the indentation of the plane surface of a semi-infinite elastic solid by a rigid punch*”, Proc.Camb. Phil. 4. Soc., (1945), Vol. 41, No. 1, p.16.
- [18] Hirschman. I. I., “*Variation diminishing Hankel transforms*”, J. Analyse Math. Soc. 8, (1960) , pp. 307 – 336.
- [19] Johansen. H. K. and Sorensen K., “*Fast Hankel Transforms*”, Geophysical Prospecting, (1979) , 27, pp. 876 – 901.
- [20] Kebli. B. and Kafi. A., “*A Penny-Shaped Crack in an Elastic Layer Bounded by Two Circular and Rigid Plates*”, Canadian Journal on Mechanical Sciences & Engineering, (2011), Vol. 2, No. 6, pp. 116 – 126.
- [21] Kuzmin. In. N. and Ufliand. Ia.S., “*The contact problem of an elastic layer compressed by two punches*”, J. Appl. Math. Mech., (1967), Vol. 31, No. 4, pp. 711-715.
- [22] Landau. L.D. and Lifshitz. E.M., “*Theory of Elasticity*”, 3<sup>rd</sup> ed, Pergamon Press, (1986) , Vol. 7. PP. 01 – 32.

- 
- [23] Lebedev. N. N. and Uflyand. Ia.S., “*Axisymmetric contact problem for an elastic layer*”, J. Appl. Math. Mech., (1958), Vol. 22, No. 3, pp. 320-326.
- [24] Lebedev. N.N., “*Special Functions and their applications*”, Dover publications, Inc. New-York, (1972), pp. 98 – 112.
- [25] Lemaitre. J. and Chaboche. J.L., “*Mécanique des matériaux solides*”, Du-nod., (1998), 544 p.
- [26] Low. R.D., “*On a doubly mixed boundary value problem for an elastic layer*”, Q. Appl. Math.,(1973), Vol. 22, No. 3, pp. 153.
- [27] Linz. P. Kropp T., “*Une note sur le calcul d’intégrales portant sur des produits de Bessel et de fonctions trigonométriques*”, Mathematics of Computation, (1964), 27 (124), pp. 871 – 872.
- [28] Magnus. W. and Soni. R.P., “*Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*”, Springer, Berlin., (1966), pp. 221 – 262.
- [29] Martin. H. Sadd., “*Theory of Elasticity, Applications and Numerics*”, Elsevier, 2<sup>nd</sup> ed, Academic Press, (2005), 536.
- [30] Montheillet. F. and F. Moussy., “*Physique et mécanique de l’endommagement*”, Editions de physique, travaux du GRECO grandes déformations, (1986), pp. 39 – 43.
- [31] Msehli. N, Rachdi. L.T. and Rouz. A., “*Fourier Hankel Transform and the Riemannian Spaces in the Half Space*”, Int. Journal of Math. Analysis, (2008), Vol. 2. No. 16, pp. 747 – 789.
- [32] Offord. AC., “*On Hankel transforms*”, Proc. Lond Math. Soc. (1935), 39 (2), pp. 49 – 67.
- [33] Petiau. G., “*La théorie des fonctions de Bessel*”, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, (1955).
- [34] Radovan. R., “*Sur les fonctions de Bessel modifiées de première espèce d’ordre entier de plusieurs variables*”, (1908), No. 128, pp. 30 – 33.

- 
- [35] Reiner. K., “*Linear integral equations*”, Springer-verlag, Berlin, (1998) , pp. 1200–1266.
- [36] Richard. B. Hetnarski., “*The Mathematical Theory of Elasticity*”, 2<sup>nd</sup> ed [Hardcover], (1983) , pp. 03 – 08.
- [37] Sakamoto. M. and Kobayashi. K., “*The axisymmetric contact problem of an elastic layer subjected to a tensile stress applied over a circular region*”, Theo. Appl. Mech., Jpn., (2004), Vol. 53, pp. 27 – 36.
- [38] Sakamoto. M. and Kobayashi. K., “*The axisymmetric contact problem of an elastic layer indented by an infinite rigid punch with a circular hole*”, Theor. Appl. Mech. Jpn., (2006), Vol. 55, pp. 61 – 71.
- [39] Sakamoto M., “*An elastic layer with a penny-shaped crack subjected to internal pressure*”, JSME Int. J. Series A, (2003), Vol. 46, No. 1, pp. 1 – 14.
- [40] Sechler E. E., “*Elasticity in Engineering*”, Dover Productions, (1952) , Vol. 1. 419 P.
- [41] Sneddon I. N., “*The distribution of stress in the neighbour hood of a crack in an elastic solid*”, proceedings of the Royal society of London, (1946) , Vol. A187, pp. 226 – 260.
- [42] Sneddon I.N., “*Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*”, 2<sup>nd</sup> ed, Oliver and Boyd, Edinburgh, (1961) , pp. 225 – 282.
- [43] Sneddon I. N, “*The Use of Integral Transforms*”, McGraw-Hill Book Co., New York, (1972) , pp. 257 – 282.
- [44] Sih G. C. and Erdogan F., “*Crack-tip stress intensity factors for the plane extension and plate bending problem*”, Journal of Applied Mechanics, (1962) 29, pp. 306 – 312.
- [45] Sokolnikoff I. S., “*Mathematical theory elasticity*”, Krrieger publishing company. [6] Ward J.P. Solid Mechanics, an Introduction, Kluwer Academic Publishers, (1983).
- [46] Stankovic B., “*Sur une classe d’équations intégrales singulières*”, Zbornikradova Mat. Inst., (1955) 4, pp. 81 – 130.

- [47] Sylvie P, Mécanique des Matériaux, IMTEC/ Ingénierie Mécanique et Technologie, (2010), pp. 141 – 147.
- [48] Timoshenko S. and Goodier J. N., *Theory of Elasticity*”, McGraw-Hill., (1951) .
- [49] Watson G.N., “*Treatise on the Theory of Bessel Functions*”, seconde édition, Cambridge University Press, (1995) , pp. 484 – 500.
- [50] Wheelon A. D., “*Tables of Summable Series and Integrals Involving Bessel Functions*”, Holden-Day, San Francisco, (1968) , pp. 153 – 193.