

No d'ordre :26/2004-M/MT

République Algérienne Démocratique Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene



Faculté des Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de

Magister

En Mathématiques

Spécialité : Recherche opérationnelle

(Méthodes Stochastiques)

par : Melle Benayache Salima

sujet

*ANALYSE BAYESIENNE DE
MODELES A RUPTURES MULTIPLES EN DES INSTANTS INCONNUS*

Soutenu le 21/10/2004 devant le jury :

Mr.M.BENTARZI , Professeur, USTHB Président

Mme.H.GUERBYENNE , Chargée de Recherche, USTHB , Directrice de thèse

Mr.A. AISSANI, Professeur, USTHB , Examineur

Mr.O. ANES, Maître de Conférence, INPS Examineur

Mr.K. BOUKHETALA . Professeur, USTHB , Examineur

INTRODUCTION GENERALE

0.0.1 Introduction

Les problèmes de ruptures se sont originellement posés dans le contexte du contrôle de qualité (Page (1954)) où on observe une ligne de production de pièces sur laquelle on souhaiterait signaler toute déviation relativement à une norme prédéfinie et, ceci, sur la base d'un échantillon de pièces. L'instant où l'on note une déviation est appelé point de changement ou point de rupture.

Le cas d'une rupture simple a fait l'objet de travaux multiples et la littérature dans ce domaine est intensive tant du point de vue non paramétrique, Page (1954, 1955), Bhattacharyya (1968), Wolfe et Schechtman (1984) Csörgö et Horváth (1988) Giraitis et Leipus (1990), que du point de vue bayésien où les travaux de Broemeling (1972) ont été le point de départ d'une profusion d'autres travaux, tant pour estimer le changement de structure dans un modèle que pour développer des tests pour la détection de rupture dans un modèle, Holbert et Broemeling (1977) Lee et Heghinian (1977), Menzefricke (1981) Smith (1975, 1980), Booth et Smith (1982), Smith et Markov (1980), Guerbyenne (1992), Guerbyenne et Kezim (1992, 1993a), b) 1994 a) b) c), 1997), Abdelli (1993) Slama (1997), Doumaz (1999), Doumaz et Guerbyenne (2002). L'analyse bayésienne se base sur une connaissance a priori éventuellement disponible avant toute collecte de données. Cette connaissance a priori se concrétise sous la forme d'une loi de probabilité dite a priori. L'expérience vient améliorer cette connaissance première, grâce au théorème de Bayes qui permet la détermination de la loi a posteriori. La littérature, dans ce domaine est abondante. Lorsque la connaissance a priori est inexistante, nous pouvons avoir recours aux lois dites non informatives (Box et Tiao (1973), par exemple); dans le cas de paramètres dits de position, elles seront supposées uniformes sur l'espace de ces paramètres, lorsque cet espace est borné ou proportionnelle à une constante dans le cas contraire et seront donc des mesures positives sur cet espace. Elles sont également appelées lois impropres. Et dans le cas de paramètres dits d'échelle, et donc positifs, elles seront inversement proportionnelles à ces paramètres. Il faut noter que dans le choix de la loi a priori et dans le cas de non disponibilité d'une base de données sur le phénomène d'intérêt, le recours au subjectif devient incontournable ! Ce qui, d'ailleurs, pour l'école classique, constitue le talon d'Achille de l'approche bayésienne !

Le problème de ruptures multiples peut se poser dans divers contextes, économique, médical (Johnson et Al 2003), financier etc....

On dira qu'une suite de variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ a subi k ruptures, s'il existe des entiers $m_1, m_2, \dots, m_k$ où $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k \leq n - 1$ tels que les variables aléatoires $Y_{m_{j-1}+1}, Y_{m_{j-1}+2}, \dots, Y_{m_j}; j = 1, \dots, k+1$ suivent une loi de probabilité de fonctions de répartition

distinctes ou non $F_j(y, \underline{\theta}_j); j = 1, \dots, k + 1$ où $m_0 = 0$ et $m_{k+1} = n$.

$\underline{\theta}_j; j = 1, \dots, k + 1$ sont des paramètres inconnus et les points $m_j, j = 1, \dots, k$ sont appelés points de changement ou points de rupture.

Le problème de points de rupture multiples a généré de nombreux travaux. Chernoff et Zachs (1964) ont étudié des suites de variables aléatoires indépendantes et proposent un test bayésien pour détecter des changements dans la moyenne. Yao (1984) s'est intéressé à un modèle de position à rupture multiples sous l'hypothèse que la loi conjointe des paramètres de position inconnus est échangeable et ne dépend pas des points de rupture.

Inclan (1993) s'est intéressée à la détection de changements multiples dans la variance, d'une part, pour une suite de variables aléatoires indépendantes et d'autre part pour un modèle autorégressif. Son approche est bayésienne et est fondée sur des rapports de lois de probabilité a posteriori. Stephens (1994), a adopté la méthode du Gibbs sampling pour identifier des points de rupture multiples dans un contexte bayésien. Chib (1998) adoptant également l'approche bayésienne, formule le modèle de position à ruptures multiples en termes d'une variable d'état discrète cachée. Cette variable d'état est spécifiée pour évoluer selon un processus de Markov à espace d'état discret et à temps discret avec des probabilités de transition telles que la variable d'état peut, soit rester en la valeur courante, soit sauter à la valeur supérieure suivante. Sa paramétrisation reproduit exactement le modèle de rupture. Gey (2002) propose un algorithme basé sur des méthodes de sélection de modèles pour la détection de ruptures multiples dans la moyenne d'un signal gaussien de grande taille.

0.0.2 Apport et présentation de la thèse

Dans ce travail, nous avons adopté l'analyse bayésienne qui apparaît comme une approche attrayante devant les difficultés théoriques des approches paramétrique et non paramétrique classiques. De plus, l'approche bayésienne permet la prise en charge des contraintes imposées sur l'espace des paramètres par les conditions de stationnarité et / ou d'inversibilité pour des processus aléatoires ainsi que le caractère discret des paramètres d'intérêt. Nous avons considéré trois types de modèles. L'étude du premier modèle qui est le modèle classique de position dans lequel nous avons causé des ruptures multiples en des instants inconnus à la fois dans le paramètre de position et dans la variance a fait l'objet **du premier chapitre**. Il s'agit d'une extension des travaux de Menzefricke (1981) au cas de rupture multiples. Inclan (1993), s'est intéressée, entre autre, à la détection de changements multiples dans la variance pour une suite de variables aléatoires indépendantes. Sous l'hypothèse que k ruptures se sont produites, nous nous proposons de déterminer les lois de probabilité a posteriori des différents paramètres d'intérêt, c'est-à-dire les points de rupture, les rapports des variances et sous l'hypothèses que le paramètre de position ne subit pas de changement, la loi de probabilité a posteriori de celui-ci.

Le deuxième modèle est le modèle de position à erreurs autocorrélées qui subit des ruptures

multiples dans la tendance en des instants inconnus. Il fait l'objet du **chapitre deux**. Ce modèle a été étudié par Guerbyenne (1992) et Guerbyenne et Kezim (1992, 1993 a), b), 1994 a), b) c) 1997) dans le cas d'une seule rupture. Nous avons effectué une extension de leurs travaux aux cas de ruptures multiples en des instants inconnus. A notre sens, ce travail n'a pas été entrepris auparavant, car seule la détection des ruptures et du nombre de ruptures supposé inconnu semble avoir attiré l'attention des chercheurs (Inclan, (1993), Stephens (1994)). Nous avons déterminé les lois de probabilité a posteriori des différents paramètres d'intérêt, c'est-à-dire les points de rupture et les rapports des variances.

Le troisième modèle que nous avons étudié et qui a fait l'objet du **chapitre trois** est un modèle de régression dont les erreurs suivent un modèle autorégressif. et qui subit des ruptures multiples dans la tendance en des instants inconnus. Il s'agit d'une extension des travaux de Abraham et Wei (1984), Doumaz (1999), Doumaz et Guerbyenne (2002) au cas de ruptures multiples inconnues. Nous avons déterminé les lois de probabilité a posteriori des instants de rupture.

Nous avons préféré définir la loi a priori d'un point de rupture donné sachant les points de rupture futurs. Ceci a été motivé par le fait que nous avons fait l'hypothèse de k ruptures dans le modèle. Bien entendu, nous pouvons, aussi, adopter l'attitude duale qui consiste à définir la loi a priori d'un point de rupture donné sachant les points de rupture passés. Les résultats théoriques obtenus, dans ce contexte, sont similaires à ceux que nous présentons ci-dessous.

Une étude de simulation intensive, très coûteuse, pour différentes valeurs des paramètres et tailles d'échantillon a été menée en langage Matlab et ce, pour les trois modèles considérés.

Chapitre 1

Analyse bayésienne d'une suite de variables aléatoires indépendantes gaussiennes à ruptures multiples

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un modèle de position à erreurs gaussiennes qui subit k changements dans la moyenne et dans la variance. Ce chapitre est une extension des travaux de Menzefricke (1981) qui a étudié un modèle gaussien avec une seule rupture. Le modèle de position sans rupture a fait l'objet de nombreux travaux, du point de vue paramétrique, non paramétrique, (Huber (1972)) et bayésien (cf., Zellner (1972)). Inclan (1993), s'est intéressée, entre autre, à la détection de changements multiples dans la variance, pour une suite de variables aléatoires indépendantes

1.2 Le modèle de base

Soit, $y_1, \dots, y_n$ répondant au modèle

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_i = \mu_1 + e_i & ; i = \overline{1, m_1} \\ y_i = \mu_2 + e_i & ; i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ \dots & \\ y_i = \mu_{k+1} + e_i & ; i = \overline{m_{k+1}, n} \end{array} \right. \quad (1.1.1)$$

où

$$e_i \sim \begin{cases} N(0, \sigma_1^2); & i = \overline{1, m_1} \\ N(0, \sigma_2^2); & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ \dots \\ N(0, \sigma_{k+1}^2); & i = \overline{m_k + 1, n} \end{cases}$$

Nous résumons l'écriture précédente comme suit :

$$y_i = \mu_l + e_i \quad (1.1.2)$$

$e_i \sim N(0, \sigma_l^2), \sigma_k \neq \sigma_l$ si $k \neq l$ avec $l = 1, \dots, k$, $m_0 = 0$ et $m_{k+1} = n$
 · les $m_l, l = \overline{1, k}$ représentent k points de ruptures et l'on a :

$$1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k \leq n - 1$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} 1 &\leq m_1 \leq m_2 - 1 \\ 2 &\leq m_2 \leq m_3 - 1 \\ &\dots \\ k &\leq m_k \leq n - 1 \end{aligned}$$

· $e_i, i = 1, \dots, n$ sont des variables aléatoires indépendantes gaussiennes représentant les erreurs.

Nous considérons les trois cas suivants :

- 1- les moyennes sont distinctes et connues.
- 2- les moyennes sont égales et inconnues.
- 3- les moyennes sont distinctes et inconnues.

Dans cette section nous déterminons des lois de probabilité a posteriori des points de rupture et des rapports de variances dans les trois cas ci-dessus; nous déterminons, de plus, la loi de probabilité a posteriori du paramètre de position dans le deuxième cas.

1.3 Cas où les moyennes sont distinctes et connues

On pose :

$$\underline{\theta} = (\underline{\sigma}', \underline{m}')', \underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k+1})' \text{ et } \underline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k)'$$

1.3.1 L'analyse a posteriori

La densité conjointe a posteriori du vecteur $\underline{\theta}$, $p(\underline{\theta}/\underline{y})$ est définie par :

$$p(\underline{\theta}/\underline{y}) = \frac{L(\underline{\theta}/\underline{y}) p(\underline{\theta})}{\int L(\underline{\theta}/\underline{y}) p(\underline{\theta}) d\underline{\theta}} \propto L(\underline{\theta}/\underline{y}) p(\underline{\theta}) \quad (1.1.3)$$

le signe $\propto$ désigne la proportionalité.

La loi a priori

Pour la loi a priori du vecteur $\underline{\theta}$, nous choisissons

$$p(\underline{\theta}) = p(\underline{\sigma}) p(\underline{m}) = p(\underline{m}) \prod_{i=1}^{k+1} p(\sigma_i) \quad (1.1.4)$$

les vecteurs $\underline{\sigma}$ et $\underline{m}$ étant supposés indépendants.

La fonction de masse a priori conjointe du vecteur $\underline{m}$ est définie comme suit :

$$p(\underline{m}) = p(m_1/m_2, \dots, m_k) p(m_2/m_3, \dots, m_k) \times \dots \times p(m_{k-1}/m_k) p(m_k) \quad (1.1.5)$$

car les points m_l , $l = \overline{1, k}$ ne sont pas indépendants.

Nous supposons que le vecteur $\underline{m}$ suit une loi a priori uniforme sur l'ensemble

$$\prod_{l=1}^k \{l, \dots, m_{l+1} - 1\} \text{ c'est-à-dire } p(m_l/m_{l+1}, \dots, m_k) = \frac{1}{m_{l+1} - (l+1) + 1} \quad ; l = 1, \dots, k-1$$

$$\text{et } p(m_k) = \frac{1}{n - m_k}.$$

Ainsi

$$p(\underline{m}) = \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{m_{l+1} - (l+1) + 1} \right) \quad (1.1.6)$$

avec $m_{k+1} = n$ et pour le vecteur $\underline{\sigma}$ nous choisissons une mesure a priori non informative, (cf : Box and Tiao(1973)) , c'est-à-dire que

$$p(\underline{\sigma}) \propto \prod_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sigma_i} \quad (1.1.7)$$

Donc

$$p(\underline{\theta}) \propto \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{m_{l+1} - (l+1) + 1} \right) \prod_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sigma_i} \quad (1.1.8)$$

La fonction de vraisemblance

$L(\underline{\theta}/\underline{y})$ est la fonction de vraisemblance de $\underline{\theta}$ définie par :

$$L(\underline{\theta}/\underline{y}) = \prod_{j=1}^{k+1} (2\pi\sigma_j^2)^{-\frac{m_j-m_{j-1}}{2}} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \right\} \quad (1.1.9)$$

La loi a posteriori du vecteur θ

D'après(1.1.3)La loi de probabilité a posteriori de $\underline{\theta}$ est

$$p(\underline{\theta}/\underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - (l+1) + 1} \right) \times \prod_{j=1}^{k+1} \sigma_j^{-(m_j-m_{j-1}+1)} \times \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \right\}, \underline{\theta} \in \Theta \quad (1.1.10)$$

1.3.2 Détermination de la fonction de masse de probabilité a posteriori marginale conjointesdu vecteur $\underline{m}$ des points de rupture

Théorème 1

La masse de probabilité a posteriori marginale conjointe du vecteur des points de rupture $\underline{m}$ est égale à

$$p(\underline{m}/\underline{y}) \propto \begin{cases} \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - (l+1) + 1} \right) \times \prod_{j=1}^{k+1} \frac{\Gamma\left(\frac{m_j-m_{j-1}}{2}\right)}{\left(\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \mu_j)^2 \right)^{\frac{m_j-m_{j-1}}{2}}} & \text{si } 1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1.11)$$

Démonstration

Nous intégrons (1.1.10) par rapport à σ_j ; $j = \overline{1, k+1}$, comme suit :

on pose

$$z_j = \frac{1}{\sigma_j^2} \implies d\sigma_j = -\frac{1}{2} z_j^{-\frac{3}{2}} dz_j$$

alors

$$p(\underline{m}/\underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - (l+1) + 1} \right) \times \prod_{j=1}^{k+1} \int_0^{+\infty} z_j^{\frac{m_j-m_{j-1}}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \mu_j)^2 \right\} dz_j$$

ou encore

$$p(\underline{m}/\underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - (l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \frac{\Gamma\left(\frac{m_j - m_{j-1}}{2}\right)}{\left(\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \mu_j)^2 \right)^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2}}}$$

Lorsque $k = 1$ c'est à dire que le modèle (1.1.1) subit un point de rupture, nous obtenons

$$p(m/\underline{y}) \propto \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}{\left(\sum_{i=1}^m (y_i - \mu_1)^2 \right)^{\frac{m}{2}} \left(\sum_{i=m+1}^n (y_i - \mu_2)^2 \right)^{\frac{n-m}{2}}} \quad (1.1.12)$$

c'est le résultat obtenu par Menzefricke (1981).

Lorsque $k = 2$, la loi a posteriori conjointe de m_1, m_2 est

$$p(m_1, m_2/\underline{y}) \propto \begin{cases} \frac{1}{m_2-1} \times \frac{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \mu_1)^2 \right)^{\frac{m_1}{2}}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{m_2 - m_1}{2}\right)}{\left(\sum_{i=m_1+1}^{m_2} (y_i - \mu_2)^2 \right)^{\frac{m_2 - m_1}{2}}} \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{n - m_2}{2}\right)}{\left(\sum_{i=m_2+1}^n (y_i - \mu_2)^2 \right)^{\frac{n - m_2}{2}}} & \text{si } 1 \leq m_1 \leq m_2 - 1 \text{ et } 2 \leq m_2 \leq n - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1.13)$$

Nous déduisons les lois marginales de m_1 et m_2

$$p(m_1/\underline{y}) = \sum_{m_2=m_1+1}^{n-1} p(m_1, m_2/\underline{y}) ; \quad m_1 \in \{1, \dots, n-2\} \quad (1.1.14)$$

$$p(m_2/\underline{y}) = \sum_{m_1=1}^{m_2-1} p(m_1, m_2/\underline{y}) ; \quad m_2 \in \{2, \dots, n-1\} \quad (1.1.15)$$

1.3.3 Détermination des densités de probabilité a posteriori marginales conjointes et conditionnelles des rapports de variances

Nous allons déterminer la densité de probabilité a posteriori du vecteur $\underline{\tau}$ défini par :

$$\underline{\tau} = \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2}, \dots, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{k+1}^2} \right)$$

Théorème 2

La densité de probabilité a posteriori conjointe de $\underline{\tau}$ est

$$p(\underline{\tau}/\underline{y}) = \sum_{m_k=k}^{n-1} \dots \sum_{m_2=2}^{m_3-1} \sum_{m_1=1}^{m_2-1} p(m_1, m_2, \dots, m_k, \underline{\tau}/\underline{y}) \quad (1.1.16)$$

où:

$$p(m_1, m_2, \dots, m_k, \underline{\tau}/\underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - (l+1) + 1} \right) \times \frac{\prod_{l'=1}^{k+1} \tau_{l'-1}^{\frac{m_{l'} - m_{l'-1}}{2} - 1}}{\left(\sum_{j=1}^{k+1} B_j \tau_{j-1} \right)^{\frac{n}{2}}} \quad (1.1.17)$$

$$\begin{aligned} B_j &= (m_j - m_{j-1}) S_j^2; \tau_0 = 1 \\ S_j^2 &= \frac{1}{m_j - m_{j-1}} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \mu_j)^2 \quad ; \quad j = \overline{1, k+1} \end{aligned}$$

Démonstration

D'après le théorème de changement de variable et (1.1.10), nous déduisons que

$$p(\underline{m}, \underline{\tau}, \sigma_1/\underline{y}, \underline{\mu}) = p(\underline{m}, \underline{\sigma}/\underline{y}, \underline{\mu}) \times |J\varphi^{-1}|$$

où

$$\begin{aligned} \varphi : \quad (\mathbb{R}_+^*)^{k+1} &\longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{k+1} \\ \underline{\sigma} &\longrightarrow (\sigma_1, \underline{\tau}) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme :

Après un calcul simple, on obtient

$$|J\varphi^{-1}| \propto \sigma_1^k \prod_{j=1}^k \tau_j^{-\frac{3}{2}}$$

où $J\varphi^{-1}$ est le jacobien de la transformation φ^{-1} , donc

$$\begin{aligned} p(\underline{m}, \underline{\tau}, \sigma_1/\underline{y}, \underline{\mu}) &\propto \sigma_1^{-(n+1)} \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - (l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2} - 1} \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} (m_j - m_{j-1}) S_j^2 \tau_{j-1} \right\} \end{aligned}$$

et en éliminant σ_1 par intégration, on obtient $p(\underline{m}, \underline{\tau}/\underline{y}, \underline{\mu})$, comme suit :

posons

$$z = \frac{1}{\sigma_1^2} \implies d\sigma_1 = -\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}dz$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} p(\underline{m}, \underline{\tau}/\underline{y}, \underline{\mu}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - (l+1) + 1} \right) \prod_{l'=1}^{k+1} \tau_{l'-1}^{\frac{m_l - m_{l-1}}{2} - 1} \times \int_0^{+\infty} z^{\frac{n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2}z \sum_{j=1}^{k+1} B_j \tau_{j-1} \right\} dz \\ &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - (l+1) + 1} \right) \frac{\prod_{l'=1}^{k+1} \tau_{l'-1}^{\frac{m_l - m_{l-1}}{2} - 1}}{\left(\sum_{j=1}^{k+1} B_j \tau_{j-1} \right)^{\frac{n}{2}}} \\ &\quad \text{où } B_j, j = 1, \dots, k+1 \text{ sont donnés dans (1.1.17)} \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

En éliminant $m_1, m_2, \dots, m_k$ par sommation, on obtient $p(\underline{\tau}/\underline{y})$ définie par (1.1.16).

Nous déduisons la densité de probabilité a posteriori conditionnelle de $\underline{\tau}$ sachant le vecteur $\underline{m}$ des points de rupture

$$\begin{aligned} p(\underline{\tau}/\underline{m}, \underline{y}) &= \frac{p(\underline{\tau}, \underline{m}/\underline{y})}{p(\underline{m}/\underline{y})} \\ &\propto \frac{\prod_{j=1}^{k+1} \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2} - 1} \left(\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \mu_j)^2 \right)^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2}} \times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m_j - m_{j-1}}{2}\right)}}{\left(\sum_{l=1}^{k+1} B_l \tau_{l-1} \right)^{\frac{n}{2}}} \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

lorsque $k = 1$, nous obtenons

$$p(\tau/\underline{y}) \propto \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\tau^{\frac{n-m}{2}-1}}{\{B_1 + B_2\tau\}^{\frac{n}{2}}} \quad (1.1.19)$$

et

$$p(\underline{\tau}/\underline{m}, \underline{y}) \propto \frac{\tau^{\frac{n-m}{2}-1} \left(\sum_{i=1}^m (y_i - \mu_1)^2 \right)^{\frac{m}{2}} \left(\sum_{i=m+1}^n (y_i - \mu_2)^2 \right)^{\frac{n-m}{2}}}{\{B_1 + B_2\tau\}^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)} \quad (1.1.20)$$

qui sont exactement les résultats obtenus par Menzefricke(1981).

Lorsque $k = 2$, nous obtenons

$$p(\tau_1, \tau_2/\underline{y}) \propto \sum_{m_2=2}^{n-1} \sum_{m_1=1}^{m_2-1} p(m_1, m_2, \tau_1, \tau_2/\underline{y}) \quad (1.1.21)$$

tel que

$$p(m_1, m_2, \tau_1, \tau_2 / \underline{y}) \propto \frac{1}{m_2 - 1} \frac{\tau_1^{\frac{m_2 - m_1}{2} - 1} \tau_2^{\frac{n - m_2}{2} - 1}}{\{B_1 + B_2 \tau_1 + B_3 \tau_2\}^{\frac{n}{2}}} \quad (1.1.22)$$

Remarque

$$p(\tau_1 / m_1, m_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \underline{y}) = \int_0^{+\infty} p(\tau_1, \tau_2 / m_1, m_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \underline{y}) d\tau_2$$

relativement à τ_2 la loi conditionnelle de τ_1 sachant tous les autres paramètre est une loi beta $(\frac{m_2}{2}, \frac{n - m_2}{2})$

d'où

$$\begin{aligned} p(\tau_1 / m_1, m_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \underline{y}) &\propto \frac{1}{(m_2 - 1)} \frac{\Gamma(\frac{m_2}{2}) \tau_1^{\frac{m_2 - m_1}{2} - 1}}{\left[\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \mu_1)^2 + \tau_1 \sum_{i=m_1+1}^{m_2} (y_i - \mu_2)^2 \right]^{\frac{m_2}{2}}} \times \\ &\times \frac{\Gamma(\frac{n - m_2}{2})}{\left[\sum_{i=m_2+1}^n (y_i - \mu_3)^2 \right]^{\frac{n - m_2}{2}}} \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

$$p(\tau_2 / m_1, m_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \underline{y}) = \int_0^{+\infty} p(\tau_1, \tau_2 / m_1, m_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \underline{y}) d\tau_1$$

relativement à τ_1 ; la loi conditionnelle de τ_2 sachant tous les autres paramètres est une loi Beta $(\frac{n - m_2 + m_1}{2}, \frac{m_2 - m_1}{2})$

d'où

$$\begin{aligned} p(\tau_2 / m_1, m_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \underline{y}) &\propto \frac{1}{(m_2 - 1)} \frac{\Gamma(\frac{n - m_2 + m_1}{2})}{\left[\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \mu_1)^2 + \tau_2 \sum_{i=m_2+1}^n (y_i - \mu_3)^2 \right]^{\frac{n - m_2 + m_1}{2}}} \times \\ &\times \frac{\Gamma(\frac{m_2 - m_1}{2})}{\left[\sum_{i=m_1+1}^{m_2} (y_i - \mu_2)^2 \right]^{\frac{m_2 - m_1}{2}}} \tau_2^{\frac{n - m_2}{2} - 1} \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

1.4 Cas où les moyennes sont égales et inconnues

Le modèle (1.1.2) s'écrit dans ce cas

$$\begin{aligned}
y_i &= \mu + e_i \\
e_i &\sim N(0, \sigma_i^2) \\
i &= \overline{m_{l-1} + 1, m_l}, \quad l = \overline{1, k+1}, \quad \text{avec } m_0 = 0, \quad m_{k+1} = n
\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

on pose :

$$\begin{aligned}
\underline{\theta} &= (\mu, \underline{\sigma}', \underline{m}') \text{ où } \underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k+1})' \text{ et } \underline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k)' \\
\underline{\theta} &\in \Theta, \text{ avec } \Theta = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+^*)^{k+1} \times \prod_{l=1}^k \{2l, \dots, m_{l+1} - 2\} \text{ et } m_{k+1} = n
\end{aligned}$$

1.4.1 L'analyse a posteriori

La loi a priori du vecteur θ

Nous choisissons pour les paramètres $\mu, \underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k+1})'$ des lois a priori non informatives, c'est-à-dire que

$$p(\mu, \underline{\sigma}) \propto \prod_{i=1}^{k+1} \left(\frac{1}{\sigma_i} \right) \tag{1.2.2}$$

Nous supposons que le vecteur $\underline{m}$ suit une loi a priori uniforme sur l'ensemble $\prod_{l=1}^k \{2l, \dots, m_{l+1} - 2\}$.

$$\begin{aligned}
p(\underline{m}) &= p(m_1/m_2, \dots, m_k) p(m_2/m_3, \dots, m_k) \times \dots \times p(m_{k-1}/m_k) p(m_k) \\
&= \prod_{l=1}^{k+1} \left(\frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right)
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Remarque

Nous justifierons le choix de cet ensemble dans la démonstration du théorème.

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
p(\underline{\theta}) &= p(\mu) p(\underline{\sigma}) p(\underline{m}) \\
&\propto \prod_{i=1}^{k+1} \left(\frac{1}{\sigma_i} \right) \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right)
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

la fonction de vraisemblance $L(\underline{\theta}/\underline{y})$ s'écrit dans ce cas :

$$L(\underline{\theta}/\underline{y}) \propto \prod_{j=1}^{k+1} \sigma_j^{-(m_j-m_{j-1})} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \bar{y}_j)^2 + (m_j - m_{j-1})(\bar{y}_j - \mu)^2}{\sigma_j^2} \right\}$$

$$\text{où } \bar{y}_j = \frac{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} y_i}{m_j - m_{j-1}}, \quad j = \overline{1, k+1}, m_0 = 0 \text{ et } m_{k+1} = n \quad (1.2.5)$$

Alors la densité de probabilité a posteriori de $\underline{\theta}$ est

$$p(\underline{\theta}/\underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \sigma_j^{-(m_j-m_{j-1}+1)} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \bar{y}_j)^2 + (m_j - m_{j-1})(\bar{y}_j - \mu)^2}{\sigma_j^2} \right\} \quad (1.2.6)$$

1.4.2 Détermination de la masse de probabilité a posteriori marginale conjointe du vecteur $\underline{m}$ des points de rupture

Théorème 1

La masse de probabilité a posteriori marginale conjointe $\underline{m}$ est donnée par

$$p(\underline{m}/\underline{y}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\mu, \underline{m}/\underline{y}) d\mu & \text{si } 1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k \leq n-1 \text{ et } m_j - m_{j-1} > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.2.7)$$

où

$$p(\mu, \underline{m}/\underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \left(\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \bar{y}_j)^2 \right)^{-\frac{m_j-m_{j-1}}{2}}$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{m_j-m_{j-1}}{2}\right)}{\left(1 + \frac{m_j - m_{j-1}}{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \bar{y}_j)^2} (\mu - \bar{y}_j)^2 \right)^{\frac{m_j-m_{j-1}}{2}}} \quad (1.2.8)$$

Démonstration

Nous allons éliminer par intégration σ_j , $j = \overline{1, k+1}$ de (1.2.6), nous obtenons $p(\mu, \underline{m}/\underline{y})$ comme suit:

posons

$$z_j = \frac{1}{\sigma_j^2} \implies d\sigma_j = -\frac{1}{2} z_j^{-\frac{3}{2}} dz_j$$

nous aurons

$$p(\mu, \underline{m}/\underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - (l+1) + 1} \right) \\ \times \prod_{j=1}^{k+1} \int_0^{+\infty} z_j^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2} - 1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \bar{y}_j)^2 + (m_j - m_{j-1})(\bar{y}_j - \mu)^2 \right) z_j \right\}$$

donc

$$p(\mu, \underline{m}/\underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \left(\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \bar{y}_j)^2 \right)^{-\frac{m_j - m_{j-1}}{2}} \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{m_j - m_{j-1}}{2}\right)}{\left(1 + \frac{m_j - m_{j-1}}{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \bar{y}_j)^2} (\mu - \bar{y}_j)^2 \right)^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2}}}$$

D'où le théorème

Remarque 1

Nous remarquons que (1.2.8), relativement à μ , est une poly- t produit à $(m_j - m_{j-1} - 1)$ degrés de liberté. ayant $\bar{y}_j$ comme paramètres de position et $\frac{m_j - m_{j-1}}{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \bar{y}_j)^2}$

comme paramètres de précision $j = \overline{1, k+1}$.

Remarque 2

Le degré de liberté devant, au moins, être égal à 1, nous imposons

$$m_j - m_{j-1} > 1, j = \overline{1, k+1}, m_0 = 0, m_{k+1} = n.$$

1.4.3 Détermination des densités de probabilité a posteriori marginale et conditionnelles du paramètre de position μ

La densité de probabilité a posteriori marginale de μ s'obtient à partir de (1.2.8), en éliminant par sommation $\underline{m}$, c'est à dire:

$$p(\mu/\underline{y}) = \sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_2=4}^{m_3-2} \sum_{m_1=2}^{m_2-2} p(\mu, \underline{m}/\underline{y}) \quad (1.2.9)$$

Nous déduisons la loi de probabilité a posteriori conditionnelle de μ sachant $\underline{m}$ en faisant le rapport suivant

$$\begin{aligned} p(\mu/\underline{m}, \underline{y}) &= \frac{p(\mu, \underline{m}/\underline{y})}{p(\underline{m}/\underline{y})} \\ &= \frac{p(\mu, \underline{m}/\underline{y})}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\mu, \underline{m}/\underline{y}) d\mu} \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

où $p(\mu, \underline{m}/\underline{y})$ est donnée par (1.2.8).

Cas particulier

Lorsque nous avons deux ruptures, alors

$$p(m_1, m_2/\underline{y}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\mu, m_1, m_2/\underline{y}) d\mu & \text{si } 2 \leq m_1 \leq m_2 - 2 \text{ et } 4 \leq m_2 \leq n - 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.2.11)$$

où

$$\begin{aligned} p(\mu, m_1, m_2/\underline{y}) &\propto \frac{1}{m_2 - 3} \times \frac{\Gamma(\frac{m_1}{2})}{\left(\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \bar{y}_1)^2 + m_1(\mu - \bar{y}_1)^2 \right)^{\frac{m_1}{2}}} \times \\ &\times \frac{\Gamma(\frac{m_2 - m_1}{2})}{\left(\sum_{i=m_1+1}^{m_2} (y_i - \bar{y}_2)^2 + (m_2 - m_1)(\mu - \bar{y}_2)^2 \right)^{\frac{m_2 - m_1}{2}}} \times \\ &\times \frac{\Gamma(\frac{n - m_2}{2})}{\left(\sum_{i=m_2+1}^n (y_i - \bar{y}_3)^2 + (n - m_2)(\mu - \bar{y}_3)^2 \right)^{\frac{n - m_2}{2}}} \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

et par suite; les densités de probabilité marginales de m_1 et m_2 sont respectivement:

$$p(m_1/\underline{y}) = \sum_{m_2=m_1+2}^{n-2} p(m_1, m_2/\underline{y}) ; \quad m_1 \in \{2, \dots, n - 4\} \quad (1.2.13)$$

$$p(m_2/\underline{y}) = \sum_{m_1=2}^{m_2-2} p(m_1, m_2/\underline{y}) ; \quad m_2 \in \{4, \dots, n - 2\} \quad (1.2.14)$$

1.4.4 Détermination des densités de probabilité a posteriori marginales conjointes et conditionnelles des rapports de variances

Nous allons déterminer la densité de probabilité a posteriori du vecteur $\underline{\tau}$ défini par:

$$\underline{\tau} = \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2}, \dots, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{k+1}^2} \right)$$

Théorème 2

La densité de probabilité a posteriori conjointe de $\underline{\tau}$ est

$$p(\underline{\tau}/\underline{y}) = \sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_2=4}^{m_3-2} \sum_{m_1=2}^{m_2-2} p(m_1, m_2, \dots, m_k, \underline{\tau}/\underline{y}), \quad \underline{\tau} \in (\mathbb{R}_+^*)^{k+1} \quad (1.2.15)$$

où

$$p(m_1, m_2, \dots, m_k, \underline{\tau}/\underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \times \frac{\prod_{l'=1}^{k+1} \tau_{l'-1}^{\frac{m_{l'} - m_{l'-1}}{2} - 1} \left[\sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1} \right]^{-\frac{1}{2}}}{[S^2(\underline{\tau})]^{\frac{n-1}{2}}} \quad (1.2.16)$$

$$(n-1)S^2(\underline{\tau}) = \sum_{j=1}^{k+1} \left(\tau_{j-1} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} y_i^2 \right) - \frac{\left[\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} y_i \tau_{j-1} \right]^2}{\sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1}} \quad (1.2.17)$$

avec $m_0 = 0, m_{k+1} = n$ et $\tau_0 = 1$

Démonstration

D'après le théorème de changement de variable et (1.2.6) nous déduisons

$$p(\underline{m}, \underline{\tau}, \sigma_1, \mu/\underline{y}) = p(\underline{m}, \underline{\sigma}, \mu/\underline{y}) |J\varphi^{-1}|$$

tel que :

$$p(\underline{m}, \underline{\sigma}, \mu/\underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \sigma_j^{-(m_j - m_{j-1} + 1)} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} \frac{(y_i - \mu)^2}{\sigma_j^2} \right\}$$

$$|J\varphi^{-1}| = \sigma_1^k \left(\prod_{j=1}^k \tau_j \right)^{-\frac{3}{2}}$$

donc

$$\begin{aligned} p(\underline{m}, \underline{\tau}, \sigma_1, \mu/\underline{y}) &\propto \sigma_1^{-(n+1)} \times \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2} - 1} \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \mu)^2 \tau_{j-1} \right\} \end{aligned}$$

L'élimination de σ_1 par intégration nous permet d'obtenir $p(\underline{m}, \underline{\tau}, \mu/\underline{y})$, comme suit

Posons

$$z = \frac{1}{\sigma_1^2} \implies d\sigma_1^2 = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} p(\underline{m}, \underline{\tau}, \mu/\underline{y}) &\propto \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{l'=1}^k \tau_{l'-1}^{\frac{m_{l'} - m_{l'-1}}{2} - 1} \times \\ &\int_0^{+\infty} z^{\frac{n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} z \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \mu)^2 \tau_{j-1} \right\} dz \\ \text{où } \tau_0 &= 0. \end{aligned}$$

nous avons donc

$$\begin{aligned} p(\underline{m}, \underline{\tau}, \mu/\underline{y}) &\propto \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{l'=1}^k \tau_{l'-1}^{\frac{m_{l'} - m_{l'-1}}{2} - 1} \\ &\times \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\left[\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \mu)^2 \tau_{j-1} \right]^{\frac{n}{2}}} \tau_0 = 1, \quad m_{k+1} = n \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \mu)^2 \tau_{j-1} &= \left(\sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1} \right) (\mu - \hat{\mu}(\underline{\tau}))^2 + \\ &+ (n-1) S^2(\underline{\tau}) \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

avec

$$\hat{\mu}(\underline{\tau}) = \frac{\sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \bar{y}_j \tau_{j-1}}{\sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1}} \tag{1.2.19}$$

c'est la moyenne pondérée des estimateurs $\bar{y}_j$ de μ fondés sur $(m_j - m_{j-1})$ observations

$j = 1, \dots, k+1$ et $(n-1)S^2(\underline{\tau})$ est définie par (1.2.17); donc $p(\underline{m}, \underline{\tau}, \mu/\underline{y})$ s'écrit

$$\begin{aligned} p(\underline{m}, \underline{\tau}, \mu/\underline{y}) &\propto \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{m_{l+1}-2(l+1)+1} \right) \frac{\prod_{l'=1}^{k+1} \tau_{l'-1}^{\frac{m_{l'}-m_{l'-1}-1}{2}-1}}{\left\{ \left(\sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1} \right) (\mu - \hat{\mu}(\underline{\tau}))^2 + (n-1)S^2(\underline{\tau}) \right\}^{\frac{n}{2}}} \\ &\propto \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{m_{l+1}-2(l+1)+1} \right) \prod_{l'=1}^{k+1} \tau_{l'-1}^{\frac{m_{l'}-m_{l'-1}-1}{2}-1} [(n-1)S^2(\underline{\tau})]^{-\frac{n}{2}} \times \\ &\times \left[1 + \frac{\sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1}}{(n-1)S^2(\underline{\tau})} (\mu - \hat{\mu}(\underline{\tau}))^2 \right]^{-\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

qui est relativement à μ une loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté avec $\hat{\mu}(\underline{\tau})$ comme

paramètre de position et $\frac{\sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1}}{(n-1)S^2(\underline{\tau})}$ comme paramètre de précision.

En intégrant par rapport à μ , nous obtenons $p(\underline{\tau}, \underline{m}/\underline{y})$ comme suit

$$\begin{aligned} p(\underline{\tau}, \underline{m}/\underline{y}) &\propto \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{m_{l+1}-2(l+1)+1} \right) \prod_{l'=1}^{k+1} \tau_{l'-1}^{\frac{m_{l'}-m_{l'-1}-1}{2}-1} \times \\ &\times [(n-1)S^2(\underline{\tau})]^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + \frac{\sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1}}{(n-1)S^2(\underline{\tau})} (\mu - \hat{\mu}(\underline{\tau}))^2 \right]^{-\frac{n}{2}} d\mu \\ &\propto \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{m_{l+1}-2(l+1)+1} \right) \prod_{l'=1}^{k+1} \tau_{l'-1}^{\frac{m_{l'}-m_{l'-1}-1}{2}-1} \frac{\left(\sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1} \right)^{-1/2}}{(S^2(\underline{\tau}))^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}} \end{aligned}$$

car, nous avons utilisé l'égalité de Student

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + \frac{h}{v} (x - \theta) \right]^{-\frac{v+1}{2}} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)} \left(\frac{\theta}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.20)$$

où h est le paramètre de précision, θ paramètre de position et v le degré de liberté.

$$p(\underline{\tau}/\underline{y}) = \sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_2=4}^{m_3-2} \sum_{m_1=2}^{m_2-2} p(\underline{\tau}, m_1, m_2, \dots, m_k/\underline{y})$$

le théorème s'ensuit.

Nous déduisons la loi de probabilité a posteriori de $\underline{\tau}$ sachant $\underline{m}$, en faisant le rapport suivant

$$p(\underline{\tau}/m_1, m_2, \dots, m_k, \underline{y}) = \frac{p(\underline{\tau}, m_1, m_2, \dots, m_k/\underline{y})}{p(m_1, m_2, \dots, m_k/\underline{y})} = \frac{p(\underline{\tau}, m_1, m_2, \dots, m_k/\underline{y})}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\mu, m_1, m_2, \dots, m_k/\underline{y}) d\mu} \quad (1.2.21)$$

où $p(\underline{\tau}, m_1, m_2, \dots, m_k/\underline{y})$ et $p(\mu, m_1, m_2, \dots, m_k/\underline{y})$ sont données par (1.2.16) et (1.2.8)

Cas particulier de deux points de rupture

Lorsque $k = 2$, nous avons

$$p(\tau_1, \tau_2 / \underline{y}) = \sum_{m_2=4}^{n-2} \sum_{m_1=2}^{m_2-2} p(m_1, m_2, \tau_1, \tau_2 / \underline{y}) \quad (1.2.22)$$

où

$$p(m_1, m_2, \tau_1, \tau_2 / \underline{y}) \propto \frac{1}{m_2 - 3} \times \frac{\tau_1^{\frac{m_2-m_1}{2}-1} \tau_2^{\frac{n-m_2}{2}-1} [m_1 + (m_2 - m_1)\tau_1 + (n - m_2)\tau_2]^{-\frac{1}{2}}}{[S^2(\underline{\tau})]^{\frac{n-1}{2}}} \quad (1.2.23)$$

où

$$(n-1)S^2(\underline{\tau}) = \sum_{i=1}^{m_1} y_i^2 + \tau_1 \sum_{i=m_1+1}^{m_2} y_i^2 + \tau_2 \sum_{i=m_2+1}^n y_i^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^{m_1} y_i + \tau_1 \sum_{i=m_1+1}^{m_2} y_i + \tau_2 \sum_{i=m_2+1}^n y_i \right]^2}{m_1 + (m_2 - m_1)\tau_1 + (n - m_2)\tau_2} \quad (1.2.24)$$

avec $\tau_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, $\tau_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2}$

Nous déduisons que

$$p(\tau_1 / m_1, m_2, \mu, \underline{y}) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} p(\tau_1, \tau_2 / m_1, m_2, \mu, \underline{y}) d\tau_2 & \text{si } \tau_1 \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.2.25)$$

$$p(\tau_2 / m_1, m_2, \mu, \underline{y}) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} p(\tau_1, \tau_2 / m_1, m_2, \mu, \underline{y}) d\tau_1 & \text{si } \tau_2 \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.2.26)$$

où

$p(\tau_1, \tau_2 / m_1, m_2, \mu, \underline{y}) \propto p(\tau_1, \tau_2, m_1, m_2, \mu / \underline{y})$ et $p(\tau_1, \tau_2, m_1, m_2, \mu / \underline{y})$ est donnée par (1.2.23)

1.5 Cas où les moyennes sont distinctes et inconnues

Le modèle est celui considéré dans (1.1.1)

soit

$$\begin{aligned} \underline{\theta} &= (\underline{\mu}, \underline{\sigma}, \underline{m}) \in \Theta \\ \Theta &= \mathbb{R}^{k+1} \times (\mathbb{R}_+^*)^{k+1} \times \prod_{l=1}^k \{2l, \dots, m_{l+1} - 2\} \end{aligned}$$

1.5.1 L'analyse a posteriori

La loi a priori du vecteur θ Nous définissons des lois a priori non informatives pour les vecteurs $\underline{\sigma}, \underline{\mu}$ et une loi discrète uniforme sur l'ensemble $\prod_{l=1}^k \{2l, \dots, m_{l+1} - 2\}$ pour le vecteur $\underline{m}$ où $m_{k+1} = n$.

En supposant tous les paramètres indépendants, nous avons

$$\begin{aligned}
 p(\underline{\theta}) &= p(\underline{\mu})p(\underline{\sigma})p(\underline{m}) \\
 &= \left(\prod_{i=1}^{k+1} p(\mu_i)p(\sigma_i) \right) p(m_1/m_2, \dots, m_k) \times \dots \times p(m_{k-1}/m_k)p(m_k) \\
 &\propto \prod_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sigma_i} \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right)
 \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

les paramètres m_l , $l = \overline{1, k}$ ne sont pas indépendants.

La fonction de vraisemblance de $\underline{\theta}$ est définie par

$$\begin{aligned}
 L(\underline{\theta}/\underline{y}) &\propto \prod_{j=1}^{k+1} \sigma_j^{-(m_j - m_{j-1})} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \mu_j)^2 \right\} \\
 &\propto \prod_{j=1}^{k+1} \sigma_j^{-(m_j - m_{j-1})} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \bar{y}_j)^2 + (m_j - m_{j-1})(\bar{y}_j - \mu_j)^2}{\sigma_j^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

$$\propto \prod_{j=1}^{k+1} \sigma_j^{-(m_j - m_{j-1})} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{m_j - m_{j-1}}{\sigma_j^2} (S_j^2 + (\bar{y}_j - \mu_j)^2) \right\}$$

$$S_j^2 = \frac{1}{m_j - m_{j-1}} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \bar{y}_j)^2 \tag{1.3.3}$$

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} y_i}{m_j - m_{j-1}}, \quad j = \overline{1, k+1}, \quad m_0 = 0, \quad m_{k+1} = n \tag{1.3.4}$$

sont respectivement la moyenne empirique et la variance empirique fondées sur les $m_j - m_{j-1}$ observations, $j = 1, \dots, k+1$, $m_0 = 0$, $m_{k+1} = n$.

La densité de probabilité a posteriori de $\underline{\theta}$ est

$$p(\underline{\theta}/\underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right)$$

$$\times \prod_{j=1}^{k+1} \sigma_j^{-(m_j - m_{j-1} + 1)} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{m_j - m_{j-1}}{\sigma_j^2} (S_j^2 + (\bar{y}_j - \mu_j)^2) \right\} \quad (1.3.5)$$

où S_j^2 et $\bar{y}_j$ $j = \overline{1, k+1}$, $m_0 = 0$, $m_{k+1} = n$ sont données respectivement par (1.3.3) et (1.3.4).

1.5.2 Détermination de la masse de probabilité a posteriori marginale conjointe du vecteur des points de rupture

Théorème1

La masse de probabilité a posteriori conjointe du vecteur $\underline{m}$ est

$$p(\underline{m}/\underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \frac{\Gamma\left(\frac{m_j - m_{j-1} - 1}{2}\right)}{(m_j - m_{j-1})^{\frac{1}{2}} B_j^{\frac{m_j - m_{j-1} - 1}{2}}} \quad (1.3.6)$$

$$\text{où } B_j = (m_j - m_{j-1}) S_j^2 \quad j = \overline{1, k+1}, m_0 = 0 \text{ et } m_{k+1} = n. \quad (1.3.7)$$

Démonstration

Tout d'abord, en intégrant (1.3.5) par rapport à σ_j , $j = \overline{1, k+1}$, nous obtenons la loi a posteriori conjointe de $(\underline{\mu}, \underline{m})$ comme suit :

nous posons

$$z_j = \frac{1}{\sigma_j^2}, j = \overline{1, k+1}$$

nous aurons :

$$d\sigma_j = -\frac{1}{2} z_j^{-\frac{3}{2}} dz_j$$

$$\begin{aligned}
p(\underline{\mu}, \underline{m}/\underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \times \\
&\times \prod_{j=1}^{k+1} \int_0^{+\infty} z_j^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2} - 1} \exp \left\{ -\frac{m_j - m_{j-1}}{2} [S_j^2 + (\bar{y}_j - \mu_j)^2] z_j \right\} dz_j \\
&= \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} [(m_j - m_{j-1}) S_j^2]^{-\frac{m_j - m_{j-1}}{2}} \times \\
&\times \frac{\Gamma \left(\frac{m_j - m_{j-1}}{2} \right)}{\left[1 + \frac{(\bar{y}_j - \mu_j)^2}{S_j^2} \right]^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2}}}
\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

Remarque:

Nous remarquons que(1.3.8) relativement à μ_j , $j = \overline{1, k+1}$ est une loi de Student à $(m_j - m_{j-1} - 1)$ degrés de liberté avec $\bar{y}_j$ comme paramètre de position et $\frac{m_j - m_{j-1} - 1}{S_j^2}$ comme paramètre de précision, $j = \overline{1, k+1}$

D'autre part, nous allons éliminer par intégration μ_j , $j = \overline{1, k+1}$. Nous obtenons la masse de probabilité a posteriori conjointe de $\underline{m}$, comme suit :

$$\begin{aligned}
p(\underline{m}/\underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \Gamma \left(\frac{m_j - m_{j-1}}{2} \right) ((m_j - m_{j-1}) S_j^2)^{-\frac{m_j - m_{j-1}}{2}} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{S_j^2} (\mu_j - \bar{y}_j)^2 \right]^{-\frac{m_j - m_{j-1}}{2}} d\mu_j
\end{aligned}$$

nous utilisons, à nouveau, l'égalité (1.2.20); cela donne

$$\begin{aligned}
p(\underline{m}/\underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \Gamma \left(\frac{m_j - m_{j-1} - 1}{2} \right) \\
&\quad (m_j - m_{j-1})^{-\frac{1}{2}} [(m_j - m_{j-1}) S_j^2]^{-\frac{m_j - m_{j-1} - 1}{2}}
\end{aligned}$$

pour $k = 1$, nous obtenons

$$p(m/\underline{y}) \propto \frac{\Gamma(\frac{m-1}{2}) \Gamma(\frac{n-m-1}{2})}{m^{\frac{1}{2}} (n-m)^{\frac{1}{2}} (m S_1^2)^{\frac{m-1}{2}} ((n-m) S_2^2)^{\frac{n-m-1}{2}}}$$

qui est le résultat obtenu par Menzefricke.

pour $k = 2$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
p(m_1, m_2/\underline{y}) &\propto \frac{1}{m_2 - 3} \times \frac{1}{m_1^{\frac{1}{2}}(m_2 - m_1)^{\frac{1}{2}}(n - m_2)^{\frac{1}{2}}} \times \\
&\times \frac{\Gamma(\frac{m_1-1}{2})\Gamma(\frac{m_2-m_1-1}{2})\Gamma(\frac{n-m_2-1}{2})}{(m_1 S_1^2)^{\frac{m_1-1}{2}} ((m_2 - m_1) S_2^2)^{\frac{m_2-m_1-1}{2}} ((n - m_2) S_2^2)^{\frac{n-m_2-1}{2}}} \\
\text{si } 2 &\leq m_1 \leq m_2 - 2 \text{ et } 4 \leq m_2 \leq n - 2
\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Nous déduisons les lois a posteriori marginales de m_1 et m_2

$$\begin{aligned}
p(m_1/\underline{y}) &\propto \sum_{m_2=m_1+2}^{n-2} p(m_1, m_2/\underline{y}), \quad m_1 \in \{2, \dots, n-4\} \\
p(m_2/\underline{y}) &\propto \sum_{m_1=2}^{m_2-2} p(m_1, m_2/\underline{y}), \quad m_2 \in \{4, \dots, n-2\}
\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

1.5.3 Détermination des lois de probabilité a posteriori marginales conjointes et conditionnelles du vecteur des rapports de variance

Nous allons déterminer la densité de probabilité a posteriori du vecteur $\underline{\tau}$ défini par :

$$\underline{\tau} = \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2}, \dots, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{k+1}^2} \right)$$

Théorème2

La densité de probabilité a posteriori marginale de $\underline{\tau}$ est :

$$p(\underline{\tau}/\underline{y}) = \sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_2=4}^{m_3-2} \sum_{m_1=2}^{m_2-2} p(m_1, m_2, \dots, m_k, \underline{\tau}/\underline{y}) \tag{1.3.11}$$

où:

$$\begin{aligned}
p(m_1, m_2, \dots, m_k, \underline{\tau}/\underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \times \\
&\times \frac{\prod_{l'=1}^{k+1} \tau_{l'-1}^{\frac{m_{l'} - m_{l'-1} - 1}{2}}}{\left\{ \sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) S_j^2 \tau_{j-1} \right\}^{\frac{n-k-1}{2}}} \\
m_0 &= 0, \quad m_{k+1} = n, \quad \tau_0 = 1
\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Démonstration

De (1.3.5) ci-dessus, nous déduisons que

$$p(\underline{m}, \underline{\tau}, \sigma_1, \underline{\mu}/\underline{y}) = p(\underline{m}, \underline{\sigma}, \underline{\mu}/\underline{y}) \times |J\varphi^{-1}|$$

où

$$|J\varphi^{-1}| = \sigma_1^k \left(\prod_{j=1}^k \tau_j \right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned}
p(\underline{m}, \underline{\tau}, \sigma_1, \underline{\mu}/\underline{y}) &\propto \sigma_1^{-(n+1)} \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1} - 1}{2}} \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} (m_j - m_{j-1}) (S_j^2 + (\bar{y}_j - \mu_j)^2 \tau_{j-1}) \right\} \\
&\propto \sigma_1^{-(n+1)} \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1} - 1}{2}} \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} (m_j - m_{j-1}) S_j^2 \tau_{j-1} + (m_j - m_{j-1}) (\bar{y}_j - \mu_j)^2 \tau_{j-1} \right\}
\end{aligned}$$

Nous intégrons d'abord par rapport à μ_j , $j = \overline{1, k+1}$ pour obtenir $p(\underline{m}, \underline{\tau}, \sigma_1/\underline{y})$

$$\begin{aligned}
p(\underline{m}, \underline{\tau}, \sigma_1/\underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1} - 1}{2} - 1} \times \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} (m_j - m_{j-1}) S_j^2 \tau_{j-1} \right\} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{\tau_{j-1}}{2\sigma_1^2} (m_j - m_{j-1}) (\mu_j - \bar{y}_j)^2 \right\} d\mu_j
\end{aligned}$$

Nous utilisons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\frac{1}{2}(x-a)^2}{b}} dx = \sqrt{2\pi} \sqrt{b}, \quad \text{si } b > 0$$

Nous aurons

$$\begin{aligned}
p(\underline{m}, \underline{\tau}, \sigma_1/\underline{y}) &\propto \sigma_1^{-(n-k)} \times \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1} - 1}{2} - 1} \\
(m_j - m_{j-1})^{-\frac{1}{2}} &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} (m_j - m_{j-1}) S_j^2 \tau_{j-1} \right\}
\end{aligned}$$

En intégrons par rapport à σ_1 , nous obtenons $p(\underline{m}, \underline{\tau}/\underline{y})$ comme suit :

Nous posons

$$z = \frac{1}{\sigma_1^2} \implies d\sigma_1^2 = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
p(\underline{m}, \underline{\tau}/\underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{l'=1}^{k+1} \frac{\tau_{l'-1}^{\frac{m_{l'} - m_{l'-1} - 1}{2} - 1}}{(m_{l'} - m_{l'-1})^{\frac{1}{2}}} \times \\
&\int_0^{+\infty} z^{\frac{n-k-1}{2} - 1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} z \sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) S_j^2 \tau_{j-1} \right\} dz
\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{b^a}{\Gamma(a)} z^{a-1} \exp(-bz) dz = 1 \quad (1.3.13)$$

nous aurons (1.3.12) donnée dans le théorème.

Nous déduisons la loi de probabilité a posteriori conditionnelle de $\underline{\tau}$ sachant $\underline{m}$, en faisant le rapport suivant

$$p(\underline{\tau}/\underline{m}, \underline{y}) = \frac{p(\underline{\tau}, \underline{m}/\underline{y})}{p(\underline{m}/\underline{y})}$$

$p(\underline{m}/\underline{y})$ et $p(\underline{\tau}, \underline{m}/\underline{y})$ sont données respectivement par (1.3.6) et (1.3.12). Nous obtenons

$$p(\underline{\tau}/\underline{m}, \underline{y}) \propto \frac{\prod_{j=1}^{k+1} \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1} - 1}{2} - 1} \prod_{l=1}^{k+1} [(m_l - m_{l-1}) S_l^2]^{\frac{m_l - m_{l-1} - 1}{2}}}{\prod_{l'=1}^{k+1} \Gamma\left(\frac{m_{l'} - m_{l'-1} - 1}{2}\right) \left[\sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) S_j^2 \tau_{j-1} \right]^{\frac{n-k-1}{2}}}$$

pour $k = 1$

$$p(\tau/m, \underline{y}) \propto \frac{\frac{1}{\tau} [\tau(n-m) S_2^2]^{\frac{n-m-1}{2}} (m S_1^2)^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma(\frac{m-1}{2}) \Gamma(\frac{n-m-1}{2}) \{m S_1^2 + \tau(n-m) S_2^2\}^{\frac{n-2}{2}}}$$

$$\tau \in \mathbb{R}_+^*$$

qui est bien le résultat obtenu par Menzefricke(1981)

pour $k = 2$; (1.3.12) devient

$$p(\tau_1, \tau_2, m_1, m_2/\underline{y}) \propto \frac{\tau_1^{\frac{m_2 - m_1 - 1}{2} - 1} \tau_2^{\frac{n - m_2 - 1}{2} - 1} m_1^{-\frac{1}{2}} (m_2 - m_1)^{-\frac{1}{2}} (n - m_2)^{-\frac{1}{2}}}{(m_2 - 3) [m_1 S_1^2 + \tau_1 (m_2 - m_1) S_2^2 + \tau_2 (n - m_2) S_3^2]^{\frac{n-3}{2}}}$$
(1.3.14)

$$\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } 1 \leq m_1 \leq m_2 \leq n - 1$$

Nous déduisons les loi conditionnelles suivantes :

$$p(\tau_1/m_1, m_2, \underline{\mu}, \underline{y}) = \int_0^{+\infty} p(\tau_1, \tau_2/m_1, m_2, \underline{\mu}, \underline{y}) d\tau_2$$

relativement à τ_2 ; $p(\tau_1, \tau_2/m_1, m_2, \underline{\mu}, \underline{y})$ est une loi beta $(\frac{m_2}{2} - 1, \frac{n-m_2-1}{2})$

d'où

$$p(\tau_1/m_1, m_2, \underline{\mu}, \underline{y}) \propto \frac{m_1^{-\frac{1}{2}} (m_2 - m_1)^{-\frac{1}{2}} (n - m_2)^{-\frac{1}{2}}}{(m_2 - 3)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\frac{m_2}{2} - 1)}{\left[\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \bar{y}_1)^2 + \tau_1 \sum_{i=m_1+1}^{m_2} (y_i - \bar{y}_2)^2 \right]^{\frac{m_2}{2} - 1}}$$

$$\times \frac{\Gamma(\frac{n-m_2-1}{2})}{\left[\sum_{i=m_2+1}^n (y_i - \bar{y}_3)^2 \right]^{\frac{n-m_2-1}{2}}} \times \tau_1^{\frac{m_2 - m_1 - 1}{2} - 1}$$
(1.3.15)

$$p(\tau_2/m_1, m_2, \underline{\mu}, \underline{y}) = \int_0^{+\infty} p(\tau_1, \tau_2/m_1, m_2, \underline{\mu}, \underline{y}) d\tau_1$$

relativement à τ_1 ; $p(\tau_1, \tau_2/m_1, m_2, \underline{\mu}, \underline{y})$ est une loi beta $(\frac{n-m_2+m_1}{2} - 1, \frac{m_2-m_1-1}{2})$
d'où

$$\begin{aligned} p(\tau_2/m_1 m_2, \underline{\mu}, \underline{y}) &\propto \frac{m_1^{-\frac{1}{2}} (m_2 - m_1)^{-\frac{1}{2}} (n - m_2)^{-\frac{1}{2}}}{(m_2 - 3)} \times \\ &\times \frac{\Gamma(\frac{m_2-m_1-1}{2})}{\left[\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \bar{y}_1)^2 + \tau_2 \sum_{i=m_2+1}^n (y_i - \bar{y}_3)^2 \right]^{\frac{n-m_2+m_1}{2}-1}} \times \\ &\times \frac{\Gamma(\frac{n-m_2+m_1}{2} - 1)}{\left[\sum_{i=m_1+1}^{m_2} (y_i - \bar{y}_2)^2 \right]^{\frac{m_2-m_1-1}{2}}} \tau_2^{\frac{n-m_2-1}{2}-1} \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

où

$$p(\tau_1, \tau_2/m_1, m_2, \underline{\mu}, \underline{y}) \propto p(\tau_1, \tau_2, m_1, m_2/\underline{\mu}, \underline{y})$$

avec

$$p(\tau_1, \tau_2, m_1, m_2/\underline{\mu}, \underline{y}) \text{ est donnée par (1.3.14)}$$

1.6 Application numérique

Introduction

Dans cette section, nous allons présenter les résultats de simulations pour l'estimation des points de rupture m_1, m_2 , à l'aide respectivement du mode a posteriori et de la moyenne a posteriori, dans les cas suivants :

- Les moyennes sont distinctes et connues.
- Les moyennes sont égales et inconnues .
- Les moyennes sont distinctes et inconnues.

Le but recherché est de voir si les modes ou les moyennes a posteriori calculés par les formules données par (1.1.14), (1.1.15), (1.1.23) et (1.1.24) dans le cas où les moyennes sont distinctes et connues, (1.2.13), (1.2.14), (1.2.25) et (1.2.26) dans le cas où les moyennes sont

égales et inconnues et (1.3.10), (1.3.15) et (1.3.16) dans le cas où les moyennes sont distinctes et inconnues estiment bien les vraies valeurs des paramètres d'intérêt.

Pour les commodités de calcul, nous avons restreint τ_1, τ_2 à appartenir à l'intervalle $]0, 1[$ en choisissant $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$, tels que $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ et $\sigma_1^2 < \sigma_3^2$.

Tous les graphes relatifs à ce chapitre sont donnés par annexe 1

a) Les moyennes sont connues

Nous avons simulé 100 échantillons à partir du modèle :

$$\begin{cases} y_i = \mu_1 + e_i; & i = \overline{1, m_1} \\ y_i = \mu_2 + e_i; & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ y_i = \mu_3 + e_i; & i = \overline{m_2 + 1, n} \end{cases}$$

où $e_i \sim N(0, \sigma_j^2)$; $i = \overline{m_{j-1} + 1, m_j}$, $j = 1, 2, 3$, $m_0 = 0$, $m_3 = n$ pour différentes valeurs des points de rupture m_1, m_2 , des moyennes μ_1, μ_2, μ_3 des variances des erreurs et de la taille de l'échantillon n .

La figure 1 donne les graphes d'une série d'observations simulées à partir du modèle :

$$\begin{cases} y_i = 1 + e_i; & i = \overline{1, m_1} \\ y_i = 2 + e_i; & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ y_i = 3 + e_i; & i = \overline{m_2 + 1, n} \end{cases}$$

$$\text{où } e_i \sim \begin{cases} N(0, 0.25); & i = \overline{1, m_1} \\ N(0, 1); & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ N(0, 4); & i = \overline{m_2 + 1, n} \end{cases} \text{ dans les deux cas suivants :}$$

$n = 20, m_1 = 8, m_2 = 13$
 $n = 60, m_1 = 20, m_2 = 40$

Les figures (2.a), (2.b), (3.a), (3.b), (4.a), (4.b) et (5) donnent les diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés respectivement par le mode et la moyenne a posteriori pour les 100 échantillons simulés dans les deux cas suivants :

-a) $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \mu_3 = 3$

$$\sigma_1^2 = 0.25, \sigma_2^2 = 1, \sigma_3^2 = 4$$

-b) $\mu_1 = 0.25, \mu_2 = 0.5, \mu_3 = 0.75$

$$\sigma_1^2 = 0.64, \sigma_2^2 = 1, \sigma_3^2 = 1.48$$

traduisant respectivement un fort écart dans les moyennes et dans les variances puis un faible écart. Nous avons également simulé 500 échantillons de taille $n = 20$; les résultats obtenus sont donnés dans la figure 6.

Les graphes 7, 8, 9, 10 donnent les histogrammes des rapports de variances estimés respectivement par le mode et la moyenne a posteriori dans les cas suivants:

$$-n = 20, m_1 = 8, m_2 = 13$$

$$*\sigma_1^2 = 0.25, \sigma_2^2 = 1, \sigma_3^2 = 4$$

$$*\sigma_1^2 = 0.25, \sigma_2^2 = 2, \sigma_3^2 = 16$$

donnés respectivement par les figures 7 et 8

$$-n = 40, m_1 = 10, m_2 = 30$$

$$*\sigma_1^2 = 0.25, \sigma_2^2 = 1, \sigma_3^2 = 4$$

$$*\sigma_1^2 = 0.25, \sigma_2^2 = 2, \sigma_3^2 = 16$$

donnés respectivement par les figures 9 et 10

b) Les moyennes sont égales et inconnues

Nous avons simulé 100 échantillons a partir du modèle

$$y_i = \mu + e_i; \quad i = \overline{1, n}$$

$$e_i \sim \begin{cases} N(0, \sigma_1^2); & i = \overline{1, m_1} \\ N(0, \sigma_2^2); & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ N(0, \sigma_3^2); & i = \overline{m_2 + 1, n} \end{cases}$$

où $\mu = 0$, pour différentes tailles d'échantillon, différentes valeurs des variances et différents points de rupture m_1, m_2 .

La figure 11 donne les graphes des séries d'observations simulées à partir du modèle ci-dessus dans les deux cas suivants :

a) $n = 20, m_1 = 8, m_2 = 13$

b) $n = 60, m_1 = 20, m_2 = 40$

et avec $\sigma_1^2 = 0.25, \sigma_2^2 = 1, \sigma_3^2 = 4$

Nous avons également simulé 100 échantillons, à partir du modèle $y_i = \mu + e_i; i = \overline{1, n}$ pour

$$\mu = 0 \text{ et } e_i \sim \begin{cases} N(0, 0.25); & i = \overline{1, m_1} \\ N(0, 1); & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ N(0, 4); & i = \overline{m_2 + 1, n} \end{cases}$$

Dans les cas suivants :

· $n = 20, m_1 = 8, m_2 = 13$

· $n = 60, m_1 = 20, m_2 = 40$

· $n = 80, a) m_1 = 8, m_2 = 13$

b) $m_1 = 30, m_2 = 50$

c) $m_1 = 65, m_2 = 75$

· $n = 100 a) m_1 = 8, m_2 = 13$

b) $m_1 = 30, m_2 = 70$

c) $m_1 = 87, m_2 = 92$

pour étudier l'effet éventuel de la position des points de rupture sur leurs estimations. Les résultats de ces études de simulation sont donnés dans les figures (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18) et (19).

Nous avons augmenté les écarts entre les variances, en laissant les autres paramètres inchangés c'est-à-dire $\sigma_1^2 = 0.25, \sigma_2^2 = 2, \sigma_3^2 = 16$ dans les cas suivants:

$$n = 20, m_1 = 8, m_2 = 13$$

$$n = 60, a) m_1 = 8, m_2 = 13$$

$$b) m_1 = 20, m_2 = 40$$

$$n = 80, m_1 = 30, m_2 = 50$$

Les résultats obtenus sont respectivement donnés par les figures 20, 21, 22 et 23

Les graphes 25,26,27,28 donnent les histogrammes des rapports de variances estimés par le mode a posteriori dans les cas suivants:

$$-n = 20, m_1 = 8, m_2 = 13$$

$$*\sigma_1^2 = 0.25, \sigma_2^2 = 1, \sigma_3^2 = 4$$

$$*\sigma_1^2 = 0.25, \sigma_2^2 = 2, \sigma_3^2 = 16$$

donnés respectivement par les figures 25 et 26

$$-n = 40, m_1 = 10, m_2 = 30$$

$$*\sigma_1^2 = 0.25, \sigma_2^2 = 1, \sigma_3^2 = 4$$

$$*\sigma_1^2 = 0.25, \sigma_2^2 = 2, \sigma_3^2 = 16$$

donnés respectivement par les figures 27 et 28

c) Les moyennes sont distinctes et inconnues

Nous avons simulé 100 échantillons répondant au modèle

$$\begin{cases} y_i = 1 + e_i; & i = \overline{1, m_1} \\ y_i = 2 + e_i; & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ y_i = 3 + e_i; & i = \overline{m_2 + 1, n} \end{cases}$$

$$e_i \sim \begin{cases} N(0, 0.25); & i = \overline{1, m_1} \\ N(0, 1); & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ N(0, 4); & i = \overline{m_2 + 1, n} \end{cases}$$

n étant la taille de l'échantillon, et m_1, m_2 les points de rupture dans les cas suivants

$$\cdot n = 20, m_1 = 8, m_2 = 13$$

$$\cdot n = 40, m_1 = 10, m_2 = 30$$

$$\cdot n = 60, m_1 = 20, m_2 = 40$$

$$\cdot n = 80, m_1 = 30, m_2 = 50$$

$$n = 100, m_1 = 40, m_2 = 60$$

Les résultats de ces simulation sont donnés dans les figures (29), (30), (31), (32) et (33)

Les graphes 34, 35, 36, 37 donnent les histogrammes des rapports de variances estimés par le mode a posteriori dans les cas suivants:

$$-n = 20, m_1 = 8, m_2 = 13$$

$$*\sigma_1^2 = 0.25, \sigma_2^2 = 1, \sigma_3^2 = 4$$

$$*\sigma_1^2 = 0.25, \sigma_2^2 = 2, \sigma_3^2 = 16$$

donnés respectivement par les figures 34 et 35

$$-n = 40, m_1 = 10, m_2 = 30$$

$$*\sigma_1^2 = 0.25, \sigma_2^2 = 1, \sigma_3^2 = 4$$

$$*\sigma_1^2 = 0.25, \sigma_2^2 = 2, \sigma_3^2 = 16$$

donnés respectivement par les figures 36 et 37.

1.7 Interprétation des résultats

1.7.1 Les moyennes sont connues

Estimation des points de rupture m_1, m_2 Les figures (2.a), (2.b), (3.a), (3.b), (4.a), (4.b) et (5) montrent que les points de rupture sont bien estimés lorsque les écarts entre les différentes moyennes et les différentes variances sont sensibles dans les différents cas considérés.

Nous remarquons, également, que l'estimation des points de rupture m_1 et m_2 par le mode des modes a posteriori donnent de meilleurs résultats qu'avec les moyennes a posteriori et ceci dans les différents cas considérés.

la figure (6) montre la performance de la méthode même pour de petites tailles d'échantillons ($n=20$).

Estimation des rapports des variances

L'histogramme n'est pas un bon estimateur d'une densité de probabilité. Néanmoins, il permet d'avoir une idée, même si elle est biaisée, sur certaines caractéristiques de la loi de probabilité.

Nous remarquons, à travers les figures 7, 8, 9 et 10 que le mode tend à sous estimer le paramètre d'intérêt.

Exemples

Nous avons effectué 100 itérations pour différentes tailles d'échantillon et différents points de rupture. Nous avons remarqué que,

(a)-si la vraie valeur de $\tau_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ est 0.25, le mode est dans l'intervalle

*] $0, 0.1$] pour $n = 20, m_1 = 8, m_2 = 13$ (voir figure 7.a).

*] $0.06, 0.13$] pour $n = 40, m_1 = 10, m_2 = 30$ (voir figure 9.a).

(b)-si la vraie valeur $\tau_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2}$ est 0.06, le mode est dans l'intervalle

*] $0.02, 0.04$] pour $n = 20, m_1 = 8, m_2 = 13$ (voir figure 7.c).

*] $0.025, 0.05$] pour $n = 40, m_1 = 10, m_2 = 30$ (voir figure 9.c).

(c)-si la vraie valeur de $\tau_3 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_3^2}$ est 0.25, le mode est dans l'intervalle

*] $0.16, 0.32$] pour $n = 20, m_1 = 8, m_2 = 13$ (voir figure 7.e).

*] $0.1, 0.2$] pour $n = 40, m_1 = 10, m_2 = 30$ (voir figure 9.e).

Nous avons effectué d'autres simulations lorsque l'écart entre les variances est plus important. Il semble que, suite à notre étude de simulation intensive, ce qui a une influence sur l'estimation de τ_1, τ_2 et τ_3 , ce n'est pas l'importance de l'écart entre les variances mais plutôt la taille de l'échantillon et le nombre d'observations entre les ruptures. En effet, le mode a posteriori tend à sous estimer les différents paramètres. Mais le biais s'atténue au fur et à mesure qu'augmentent la taille de l'échantillon et le nombre de données entre les ruptures.

1.7.2 Les moyennes sont égales et inconnues

Estimation des points de rupture m_1, m_2

Les figures (12), (13), (14),(15),(16),(17),(18)et(19) confirment la bonne performance à la fois du mode a posteriori et de la moyenne a posteriori pour les différentes valeurs des paramètres.

Nous remarquons que la performance des estimateurs respectifs n'est influencée ni par la taille de l'échantillon, ni par l'emplacement des points de rupture.

Les figures (20), (21),(22)et(23) montrent que les résultats de simulation s'améliorent lorsque les écarts entre les variances augmentent.

Nous remarquons,également,que l'estimation des points de rupture m_1, m_2 par le mode des modes a posteriori donnent de meilleurs résultats qu'avec la moyenne des modes bien que, au sens du RMSE (Root Mean Square Error), les moyennes a posteriori soient meilleures comme nous l'illustrons dans la figure24.

Estimation des rapports de variances

Les figures 25, 26, 27 et 28 montrent un comportement du mode a posteriori semblable à celui du premier cas où les moyennes sont supposées connues. L'effet de la taille de l'échantillon et du nombre d'observations entre les ruptures est net sur l'estimation des rapports des variances.

1.7.3 Les moyennes sont distinctes et inconnues

Estimation des points de rupture m_1, m_2

Les figures (29), (30), (31),(32)et(33)) montrent que, là aussi, les points de rupture sont détectés avec des fréquences appréciables en utilisant soit les modes soit les moyennes a posteriori et, ceci, quel que soit l'emplacement des points de rupture.

Estimation des rapports de variances

Les figures 34, 35, 36 et 37 révèlent un comportement tout à fait semblable de la loi de probabilité des modes a posteriori des rapports des variances, que dans les deux cas précédents où les moyennes sont distinctes et connues ou égales et inconnues. Une étude de simulation intensive nous permet d'arriver aux mêmes conclusions et donc, à l'effet certain de la taille de l'échantillon et du nombre d'observations entre les ruptures sur l'estimation des rapports des variances. Nous concluons, là aussi, que le biais s'atténue lorsque la taille de l'échantillon augmente ainsi que le nombre d'observations entre les ruptures.

Chapitre 2

Analyse bayésienne d'un modèle autocorrélé à ruptures multiples

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions un modèle gaussien à k ruptures dans la moyenne et dans la variance dans le cas où les erreurs sont autocorrélées.

Il s'agit d'une extension des travaux de Guerbyenne (1992) et Guerbyenne Kezim ((1992, 1993a), b) 1994 a) b) c), 1997) au cas de ruptures multiples. Inclan (1993) s'est intéressée à la détection de changements multiples dans la variance, d'une part, pour une suite de variables aléatoires indépendantes et d'autre part pour un modèle autorégressif.

2.2 Le modèle de base

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i = \mu_j + u_i; \\ u_i = \rho u_{i-1} + e_i; \\ e_i \sim N(0, \sigma_j^2), \quad i = \overline{m_{j-1} + 1, m_j}, \quad j = \overline{1, k+1}; \quad m_0 = 0 \text{ et } m_{k+1} = n \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

où les $m_j, j = \overline{1, k}$ sont k points de rupture supposés inconnus tels que

•

$$\begin{aligned} 1 &\leq m_1 \leq m_2 - 1 \\ m_1 + 1 &\leq m_2 \leq m_3 - 1 \\ &\dots \\ m_{k-1} + 1 &\leq m_k \leq n - 1 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à $m_l \in \{l, \dots, m_{l+1} - 1\}; l = \overline{1, k}$ et $m_{k+1} = n$.

Nous faisons les hypothèses suivantes

- Les erreurs u_i , $i = \overline{1, n}$ suivent un processus autorégressif d'ordre un stationnaire, i.e. $|\rho| < 1$.
- Les erreurs e_i , $i = \overline{1, n}$ représentent le bruit blanc. Ce sont des variables aléatoires indépendantes gaussiennes. $\underline{\sigma}^2 = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_{k+1}^2)' \in (\mathbb{R}_+^*)^{k+1}$ est le vecteur des variances supposées distinctes et inconnues et $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k+1})' \in \mathbb{R}^{k+1}$ est le vecteur des moyennes.

Nous récrivons le modèle (2.1.1) sous la forme (2.1.2) équivalente

$$\begin{cases} y_i - \rho y_{i-1} = \mu_1(1 - \rho) + e_i; & i = \overline{1, m_1} \\ y_{m_j+1} - \rho y_{m_j} = \mu_{j+1} - \rho \mu_j + e_{m_j+1}; \\ y_i - \rho y_{i-1} = \mu_{j+1}(1 - \rho) + e_i; & i = \overline{m_j + 2, m_{j+1}} \text{ et } j = \overline{1, k} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Nous allons étudier les trois cas suivants :

1. les moyennes sont connues.
2. les moyennes sont égales et inconnues
3. les moyennes sont distinctes et inconnues.

2.3 Etude du cas où les moyennes sont supposées connues.

Le paramètre inconnu dans ce cas est $\underline{\theta} = (\underline{\sigma}', \underline{m}', \rho)'$ où $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k+1})'$, $\underline{m}' = (m_1, m_2, \dots, m_k)'$.

2.3.1 L'analyse a posteriori

La loi a priori du vecteur θ

En supposant que tous les paramètres sont indépendants, la loi a priori du vecteur $\underline{\theta}$ est donc :

$$P(\underline{\theta}) = P(\underline{m}) P(\rho) P(\underline{\sigma})$$

la densité a priori conjointe de $\underline{\sigma}$ est définie comme en (1.1.6) c'est-à-dire

$$P(\underline{\sigma}) \propto \prod_{j=1}^{k+1} \frac{1}{\sigma_j}$$

Nous choisissons pour le paramètre ρ la densité uniforme sur l'intervalle $] -1, 1[$ c'est-à-dire

$$P(\rho) = \frac{1}{2} I_{]-1, 1[}(\rho)$$

$$P(\underline{m}) = P(m_1/m_2, \dots, m_k)P(m_2/m_3, \dots, m_k) \dots P(m_{k-1}/m_k)P(m_k)$$

Nous supposons que le vecteur $\underline{m}$ suit une loi a priori uniforme sur l'ensemble $\prod_{l=1}^k \{2l, \dots, m_{l+1} - 2\}$ c'est-à-dire

$$P(\underline{m}) = \prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1}$$

ce qui donne

$$P(\underline{\theta}) \propto \prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{1}{\sigma_j} \quad (2.1.3)$$

Remarque : Nous justifierons plus loin le choix de cet ensemble.

La fonction de vraisemblance de $\underline{\theta}$ s'écrit

$$\begin{aligned} L(\underline{\theta} / \underline{\mu}, \underline{y}) &\propto \sigma_1^{-m} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_1 (1 - \rho))^2}{2\sigma_1^2} \right\} \times \prod_{j=2}^{k+1} \sigma_j^{-(m_j - m_{j-1})} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(y_{m_{j-1}+1} - \rho y_{m_{j-1}} - \mu_j + \rho \mu_{j-1})^2 + \sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_j (1 - \rho))^2}{2\sigma_j^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

La loi a posteriori du vecteur θ

D'après le théorème de Bayes, nous combinons la fonction de vraisemblance (2.1.4) et la loi a priori (2.1.3).

Nous obtenons la distribution a posteriori du vecteur $\underline{\theta}$

$$\begin{aligned} P(\underline{\theta} / \underline{\mu}, \underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \sigma_1^{-(m_1+1)} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_1 (1 - \rho))^2}{2\sigma_1^2} \right\} \\ &\times \prod_{j=2}^{k+1} \sigma_j^{-(m_j - m_{j-1} + 1)} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(y_{m_{j-1}+1} - \rho y_{m_{j-1}} - \mu_j + \rho \mu_{j-1})^2 + \sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_j (1 - \rho))^2}{2\sigma_j^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

où $m_0 = 0$, $m_{k+1} = n$.

2.3.2 Détermination de la masse de probabilité a posteriori marginale conjointe du vecteur des points de rupture et de la densité de probabilité a posteriori du coefficient d'autocorrélation

Soit

$$\begin{aligned}
 SS_1(m_1) &= \sum_{i=1}^{m_1} (y_{i-1} - \mu_1)^2 \\
 SS_1(m_j - m_{j-1}) &= (y_{m_{j-1}} - \mu_{j-1})^2 + \sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_{i-1} - \mu_j)^2, \quad j = \overline{2, k+1} \quad (2.1.6) \\
 \text{où } m_0 &= 0, m_{k+1} = n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2 &= SS_2(m_j - m_{j-1}) - \frac{[S_{12}(m_j - m_{j-1})]^2}{SS_1(m_j - m_{j-1})}, \quad j = \overline{1, k+1} \\
 \text{où } m_0 &= 0, m_{k+1} = n
 \end{aligned}$$

$$SS_2(m_1) = \sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \mu_1)^2 \quad (2.1.7)$$

$$SS_2(m_j - m_{j-1}) = \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \mu_j)^2, \quad j = \overline{2, k+1} \quad (2.1.8)$$

$$S_{12}(m_1) = \sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \mu_1)(y_{i-1} - \mu_1) \quad (2.1.9)$$

$$\begin{aligned}
 S_{12}(m_j - m_{j-1}) &= (y_{m_{j-1}} - \mu_{j-1})(y_{m_{j-1}+1} - \mu_j) + \\
 \sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_{i-1} - \mu_j)(y_i - \mu_j), \quad j &= \overline{2, k+1}, \quad (2.1.10)
 \end{aligned}$$

$$\rho(m_1) = \frac{S_{12}(m_1)}{SS_1(m_1)} \quad (2.1.11)$$

est l'estimateur du maximum de vraisemblance de ρ fondé sur les m_1 premières observations.

$$\rho(m_j - m_{j-1}) = \frac{S_{12}(m_j - m_{j-1})}{SS_1(m_j - m_{j-1})}, \quad j = \overline{2, k+1} \quad (2.1.12)$$

est l'estimateur du maximum de vraisemblance de ρ fondé sur les $m_j - m_{j-1}$ observations $j = \overline{2, k+1}$.

S_j^2 , $j = \overline{1, k+1}$ sont respectivement les estimateurs du maximum de vraisemblance de σ_j^2 , $j = \overline{1, k+1}$.

Théorème 1

La masse de probabilité a posteriori du vecteur $\underline{m}$ est

$$P(\underline{m}/\underline{\mu}, \underline{y}) = \begin{cases} \int_{-1}^{+1} P(\underline{m}, \rho/\underline{\mu}, \underline{y}) d\rho & \text{si } \underline{m} \in \prod_{l=1}^k \{2l, \dots, m_{l+1} - 2\}, m_{k+1} = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1.13)$$

La densité de probabilité a posteriori de ρ est

$$P(\rho/\underline{\mu}, \underline{y}) = \begin{cases} \sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_2=4}^{m_3-2} \sum_{m_1=2}^{m_2-2} P(m_1, m_2, \dots, m_k, \rho/\underline{\mu}, \underline{y}) & \text{si } |\rho| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1.14)$$

où

$$\begin{aligned} P(m_1, m_2, \dots, m_k, \rho/\underline{\mu}, \underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} [(m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2]^{-\frac{m_j - m_{j-1}}{2}} \\ &\times \frac{\Gamma\left(\frac{m_j - m_{j-1}}{2}\right)}{\left[1 + \frac{SS_1(m_j - m_{j-1})}{(m_j - m_{j-1} - 1)S_j^2} (\rho - \rho(m_j - m_{j-1}))\right]^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2}}} \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Remarque 1 :

Nous voyons que, $P(m_1, m_1, \dots, m_k, \rho/\underline{\mu}, \underline{y})$ est relativement à ρ , une poly-t-produit à $m_j - m_{j-1} - 1$ degré de liberté avec $\rho(m_j - m_{j-1})$ comme paramètre de position et $\frac{SS_1(m_j - m_{j-1})}{S_j^2}$ comme paramètre de précision $j = \overline{1, k+1}$.

Remarque 2 :

Le degré de liberté devant être au moins égal à un, nous imposons à $m_j - m_{j-1}$ pour $j = \overline{1, k+1}$ d'être strictement supérieur à 1.

Démonstration du théorème 1

Nous éliminons σ_j , $j = \overline{1, k+1}$ par intégration de (2.1.5) pour obtenir $P(\underline{m}, \rho/\underline{\mu}, \underline{y})$ comme suit

Posons $z_j = \frac{1}{\sigma_j^2}$, $j = \overline{1, k+1}$; alors $d\sigma_j = -\frac{1}{2}z_j^{-\frac{3}{2}}dz_j$

et par suite

$$\begin{aligned}
P(\underline{m}, \rho / \underline{\mu}, \underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \\
&\times \int_0^{+\infty} z_1^{\frac{m_1}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} z_1 \sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_1(1-\rho))^2 \right\} dz_1 \\
&\times \prod_{j=2}^{k+1} \int_0^{+\infty} z_j^{\frac{m_j-m_{j-1}}{2}-1} \exp \left[-\frac{1}{2} \left((y_{m_{j-1}+1} - \rho y_{m_{j-1}} - \mu_j + \rho \mu_{j-1})^2 \right. \right. \\
&\left. \left. + \sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_j(1-\rho))^2 \right) \right] dz_j
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
P(\underline{m}, \rho / \underline{\mu}, \underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)}{\left[\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_1(1-\rho))^2 \right]^{\frac{m_1}{2}}} \times \\
&\times \prod_{j=2}^{k+1} \frac{\Gamma\left(\frac{m_j-m_{j-1}}{2}\right)}{\left[(y_{m_{j-1}+1} - \rho y_{m_{j-1}} - \mu_j + \rho \mu_{j-1})^2 + \sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_j(1-\rho))^2 \right]^{\frac{m_j-m_{j-1}}{2}}}
\end{aligned}$$

Nous avons après un calcul simple

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_1(1-\rho))^2 &= \sum_{i=1}^{m_1} (y_{i-1} - \mu_1)^2 \left(\rho - \frac{\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \mu_1)(y_{i-1} - \mu_1)}{\sum_{i=1}^{m_1} (y_{i-1} - \mu_1)^2} \right)^2 \\
&\quad - \frac{\left[\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \mu_1)(y_{i-1} - \mu_1) \right]^2}{\sum_{i=1}^{m_1} (y_{i-1} - \mu_1)^2} + \sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \mu_1)^2 \\
&= SS_1(m_1) (\rho - \rho(m_1))^2 + SS_2(m_1) - \frac{[S_{12}(m_1)]^2}{SS_1(m_1)} \\
&= SS_1(m_1) (\rho - \rho(m_1))^2 + (m_1 - 1) S_1^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& (y_{m_{j-1}+1} - \rho y_{m_{j-1}} - \mu_j + \rho \mu_{j-1})^2 + \sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_j (1 - \rho))^2 \\
&= SS_1(m_j - m_{j-1}) (\rho - \rho(m_j - m_{j-1}))^2 + SS_2(m_j - m_{j-1}) - \frac{[S_{12}(m_j - m_{j-1})]^2}{SS_1(m_j - m_{j-1})} \\
&= SS_1(m_j - m_{j-1}) (\rho - \rho(m_j - m_{j-1}))^2 + (m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2; \quad j = \overline{2, k+1}
\end{aligned}$$

$P(\underline{m}, \rho/\underline{\mu}, \underline{y})$ s'écrit donc

$$\begin{aligned}
P(\underline{m}, \rho/\underline{\mu}, \underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)}{[SS_1(m_1) (\rho - \rho(m_1))^2 + (m_1 - 1)^2 S_1^2]^{\frac{m_1}{2}}} \\
&\prod_{j=2}^{k+1} \frac{\Gamma\left(\frac{m_j - m_{j-1}}{2}\right)}{[SS_1(m_j - m_{j-1}) (\rho - \rho(m_j - m_{j-1}))^2 + (m_j - m_{j-1} - 1)^2 S_j^2]^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2}}}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
P(\underline{m}/\underline{\mu}, \underline{y}) &= \int_{-1}^{+1} P(\underline{m}, \rho/\underline{\mu}, \underline{y}) d\rho \\
P(\rho/\underline{\mu}, \underline{y}) &= \sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_2=4}^{m_3-2} \sum_{m_1=2}^{m_2-2} P(m_1, m_2, \dots, m_k, \rho/\underline{\mu}, \underline{y})
\end{aligned}$$

Nous déduisons successivement que

- La loi de probabilité a posteriori conditionnelle de ρ sachant le vecteur des points de rupture $\underline{m}$ est

$$P(\rho/\underline{m}, \underline{\mu}, \underline{y}) = \frac{P(\rho, \underline{m}/\underline{\mu}, \underline{y})}{P(\underline{m}/\underline{\mu}, \underline{y})} \propto P(\rho, \underline{m}/\underline{\mu}, \underline{y}) \quad (2.1.16)$$

- La loi de probabilité a posteriori conditionnelle du vecteur $\underline{m}$ sachant ρ est

$$P(\underline{m}/\rho, \underline{\mu}, \underline{y}) = \frac{P(\rho, \underline{m}/\underline{\mu}, \underline{y})}{P(\rho/\underline{\mu}, \underline{y})} \propto P(\rho, \underline{m}/\underline{\mu}, \underline{y}) \quad (2.1.17)$$

Remarque :

- Lorsque $k = 1$ c'est-à-dire que le modèle (2.1.1) subit une seule rupture (2.1.8) devient :

$$\begin{aligned}
P(m, \rho/\mu_1, \mu_2, \underline{y}) &\propto \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{[(m-1) S_1^2 + SS_1(m) (\rho - \rho(m))^2]^{\frac{m}{2}}} \\
&\frac{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}{[(n-m-1) S_1^2 + SS_1(n-m) (\rho - \rho(n-m))^2]^{\frac{n-m}{2}}}
\end{aligned}$$

c'est le résultat obtenu par Guerbyenne (1992).

- Lorsque $k = 2$ c'est-à-dire le modèle (2.1.1) subit deux ruptures (2.1.8) devient :

$$\begin{aligned}
P(m_1, m_2, \rho / \mu_1, \mu_2, \mu_3, \underline{y}) &\propto \frac{1}{m_2 - 3} \\
&\times \frac{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)}{\left[(m_1 - 1) S_1^2 + S S_1(m_1) (\rho - \rho(m_1))^2\right]^{\frac{m_1}{2}}} \\
&\times \frac{\Gamma\left(\frac{m_2 - m_1}{2}\right)}{\left[(m_2 - m_1 - 1) S_2^2 + S S_1(m_2 - m_1) (\rho - \rho(m_2 - m_1))^2\right]^{\frac{m_2 - m_1}{2}}} \\
&\times \frac{\Gamma\left(\frac{n - m_2}{2}\right)}{\left[(n - m_2 - 1) S_3^2 + S S_1(n - m_2) (\rho - \rho(n - m_2))^2\right]^{\frac{n - m_2}{2}}}
\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

2.3.3 Détermination des densités de probabilité a posteriori marginales conjointes et conditionnelles des rapports de variances

Nous allons déterminer dans le théorème suivant la densité de probabilité a posteriori du vecteur $\underline{\tau}$ défini par :

$$\underline{\tau} = \left(\tau_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \dots, \tau_k = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{k+1}^2} \right)$$

Théorème 2 :

La densité de probabilité a posteriori de $\underline{\tau}$ est donnée par :

$$P(\underline{\tau} / \underline{\mu}, \underline{y}) = \begin{cases} \sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_2=4}^{m_3-2} \sum_{m_1=2-1}^{m_2-2+1} \int P(m_1, m_2, \dots, m_k, \rho, \underline{\tau} / \underline{\mu}, \rho, \underline{y}) d\rho & \text{si } \underline{\tau} \in (\mathbb{R}_+^*)^{k+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.1.19}$$

où

$$\begin{aligned}
P(m_1, m_2, \dots, m_k, \rho, \underline{\tau} / \underline{\mu}, \rho, \underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \\
&\frac{\prod_{l'=2}^{k+1} \tau_{l'-1}^{\frac{m_{l'} - m_{l'-1}}{2} - 1}}{\left[(n-1) S_1^2(\underline{\tau})\right]^{\frac{n}{2}} \left[1 + \frac{M(\underline{\tau})}{(n-1) S_1^2(\underline{\tau})} (\rho - \rho(\underline{\tau}))^2\right]^{\frac{n}{2}}}
\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

avec

$$M(\underline{\tau}) = \sum_{j=1}^{k+1} \tau_{j-1} S S_1(m_j - m_{j-1}) \quad ; \quad m_0 = 0, \quad m_{k+1} = n, \quad \tau_0 = 1 \quad (2.1.21)$$

$$\rho(\underline{\tau}) = \frac{\sum_{j=1}^{k+1} S_{12}(m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1}}{\sum_{j=1}^{k+1} S S_1(m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1}} \quad ; \quad m_0 = 0, \quad m_{k+1} = n, \quad \tau_0 = 1 \quad (2.1.22)$$

$$(n-1) S_1^2(\underline{\tau}) = \sum_{j=1}^{k+1} S S_2(m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1} - \frac{\left[\sum_{j=1}^{k+1} S_{12}(m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1} \right]^2}{\sum_{j=1}^{k+1} S S_1(m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1}} \quad (2.1.23)$$

Démonstration

D'après le théorème de changement de variable nous avons :

$$P(\underline{m}, \rho, \underline{\tau}, \sigma_1 / \underline{\mu}, \underline{y}) = P(\underline{m}, \rho, \underline{\sigma} / \underline{\mu}, \underline{y}) \times |J\varphi^{-1}|$$

où $P(\underline{m}, \rho, \underline{\sigma} / \underline{\mu}, \underline{y})$ est donnée par (2.1.5)

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}_+^*)^{k+1} &\longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{k+1} \\ \underline{\sigma} &\longrightarrow \left(\sigma_1, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \dots, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{k+1}^2} \right) \end{aligned}$$

φ est un difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^{k+1}$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^{k+1}$ donc $\det(J\varphi^{-1}) \propto \sigma_1^k \left(\prod_{j=1}^k \tau_j \right)^{-\frac{3}{2}}$, $J\varphi^{-1}$ est le jacobien de la transformation φ^{-1} donc :

$$\begin{aligned} P(\underline{m}, \rho, \underline{\tau}, \sigma_1 / \underline{\mu}, \underline{y}) &\propto \sigma_1^{-(n+1)} \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \exp \left\{ - \frac{\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_1(1-\rho))^2}{2\sigma_1^2} \right\} \times \\ &\quad \prod_{j=2}^{k+1} \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2} - 1} \exp \left\{ - \frac{1}{2\sigma_1^2} \left[(y_{m_{j-1}+1} - \rho y_{m_{j-1}} - \mu_j + \rho \mu_{j-1})^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_j(1-\rho))^2 \right] \right\} \tau_{j-1} \end{aligned}$$

posons

$$\bullet \quad A(\mu_1, \rho) = \sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_1(1-\rho))^2$$

- $A(\mu_{j-1}, \mu_j, \rho) = (y_{m_{j-1}+1} - \rho y_{m_{j-1}} - \mu_j + \rho \mu_{j-1})^2 + \sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_j (1 - \rho))^2$,
 $j = \overline{2, k+1}$.

Nous allons éliminer par intégration σ_1 comme suit

Posons $z = \frac{1}{\sigma_1^2} \Rightarrow d\sigma_1 = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$

nous aurons

$$P(\underline{m}, \rho, \underline{\tau}, \sigma_1 / \underline{\mu}, \underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=2}^{k+1} \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1} - 1}{2}} \int_0^{+\infty} z^{\frac{n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} z \left[A(\mu_1, \rho) + \sum_{j=2}^{k+1} A(\mu_j, \rho) \tau_{j-1} \right] \right\} dz$$

ce qui donne

$$P(\underline{m}, \rho, \underline{\tau} / \underline{\mu}, \underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \times \frac{\prod_{l'=2}^{k+1} \tau_{l'-1}^{\frac{m_{l'} - m_{l'-1} - 1}{2}}}{\left[A(\mu_1, \rho) + \sum_{j=2}^{k+1} \tau_{j-1} A(\mu_j, \rho) \right]^{\frac{n}{2}}} \quad (2.1.24)$$

un calcul simple donne :

$$A(\mu_1, \rho) + \sum_{j=2}^{k+1} A(\mu_j, \rho) \tau_{j-1} = M(\underline{\tau}) (\rho - \rho(\underline{\tau}))^2 + (n-1) S_1^2(\underline{\tau}) \quad (2.1.25)$$

où $M(\underline{\tau})$, $\rho(\underline{\tau})$ et $(n-1) S_1^2(\underline{\tau})$ sont données par (2.1.21), (2.1.22) et (2.1.23).

Donc (2.1.24) s'écrit

$$P(\underline{m}, \rho, \underline{\tau} / \underline{\mu}, \underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \times \frac{\prod_{l'=2}^{k+1} \tau_{l'-1}^{\frac{m_{l'} - m_{l'-1} - 1}{2}}}{[(n-1) S_1^2(\underline{\tau})]^{\frac{n}{2}} \left[1 + \frac{M(\underline{\tau})}{(n-1) S_1^2(\underline{\tau})} (\rho - \rho(\underline{\tau}))^2 \right]^{\frac{n}{2}}}$$

qui est relativement à ρ une loi de Student tronquée à $n-1$ degré de liberté avec $\rho(\underline{\tau})$ comme paramètre de position et $\frac{M(\underline{\tau})}{S_1^2(\underline{\tau})}$ comme paramètre de précision.

Nous déduisons que :

La loi de probabilité a posteriori marginale conjointe de $\underline{\tau}$ est

$$P(\underline{\tau} / \underline{\mu}, \underline{y}) = \sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_2=4}^{m_3-2} \sum_{m_1=2}^{m_2-2} \int_0^1 P(m_1, m_2, \dots, m_k, \rho, \underline{\tau} / \underline{\mu}, \underline{y}) d\rho$$

Nous déduisons les densités de probabilité a posteriori conditionnelles suivantes :

- La densité de probabilité a posteriori conditionnelle du vecteur $\underline{\tau}$ sachant le vecteur des points de rupture $\underline{m}$

$$\begin{aligned} P(\underline{\tau}/\underline{\mu}, \underline{m}, \underline{y}) &= \frac{P(\underline{\tau}, \underline{m}/\underline{\mu}, \underline{y})}{P(\underline{m}/\underline{\mu}, \underline{y})} \\ &= \frac{\int_{-1}^{+1} P(\underline{\tau}, \underline{m}, \rho/\underline{\mu}, \underline{y})}{P(\underline{m}/\underline{\mu}, \underline{y})} \end{aligned}$$

- La densité de probabilité a posteriori conditionnelle du vecteur $\underline{\tau}$ sachant ρ

$$\begin{aligned} P(\underline{\tau}/\rho, \underline{\mu}, \underline{y}) &= \frac{P(\underline{\tau}, \rho/\underline{\mu}, \underline{y})}{P(\rho/\underline{\mu}, \underline{y})} \\ &= \frac{\sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_2=4}^{m_3-2} \sum_{m_1=2}^{m_2-2} P(\underline{m}, \underline{\tau}, \rho/\underline{\mu}, \underline{y})}{P(\rho/\underline{\mu}, \underline{y})} \end{aligned}$$

- La densité de probabilité a posteriori conditionnelle du vecteur $\underline{\tau}$ sachant ρ et $\underline{m}$

$$P(\underline{\tau}/\rho, \underline{m}, \underline{y}) = \frac{P(\underline{\tau}, \underline{m}, \rho/\underline{\mu}, \underline{y})}{P(\rho, \underline{m}/\underline{\mu}, \underline{y})}$$

où $P(\underline{m}, \rho, \underline{\tau}/\underline{\mu}, \underline{y})$ est donnée par (2.1.20) et $P(\underline{m}/\underline{\mu}, \underline{y})$, $P(\rho/\underline{\mu}, \underline{y})$ et $P(\rho, \underline{m}/\underline{\mu}, \underline{y})$ sont respectivement données par (2.1.4), (2.1.5) et (2.1.6).

Remarque :

- Lorsque $k = 1$ (2.1.20) devient

$$P(m, \rho, \tau/\underline{\mu}, \underline{y}) \propto \frac{\tau^{\frac{n-m}{2}-1}}{[(n-1) S_1^2(\tau)]^{\frac{n}{2}} \left[1 + \frac{M(\tau)}{(n-1)S_1^2(\tau)} (\rho - \rho(\tau))^2\right]^{\frac{n}{2}}}$$

où

$$M(\tau) = SS_1(m) + \tau SS_1(n-m)$$

$$(n-1) S_1^2(\tau) = SS_2(m) + \tau SS_2(n-m) - \frac{[S_{12}(m) + \tau S_{12}(n-m)]^2}{SS_1(m) + \tau SS_1(n-m)}$$

$$\rho(\tau) = \frac{S_{12}(m) + \tau S_{12}(n-m)}{SS_1(m) + \tau SS_1(n-m)}$$

qui est bien le résultat obtenue par Guerbyenne (1992).

- Lorsque $k = 2$ (2.1.20) devient

$$P(\underline{m}, \rho, \underline{\tau} / \underline{\mu}, \underline{y}) \propto \frac{1}{m_2 - 3} \times \frac{\tau_1^{\frac{m_2 - m_1}{2} - 1} \tau^{\frac{n - m_2}{2} - 1}}{[(n - 1) S_1^2(\underline{\tau})]^{\frac{n}{2}} \left[1 + \frac{M(\underline{\tau})}{(n-1)S_1^2(\underline{\tau})} (\rho - \rho(\underline{\tau}))^2 \right]^{\frac{n}{2}}} \quad (2.1.26)$$

où

$$M(\underline{\tau}) = SS_1(m_1) + \tau_1 SS_1(m_2 - m_1) + \tau_2 SS_1(n - m_2)$$

$$(n - 1) S_1^2(\underline{\tau}) = SS_2(m_1) + \tau_1 SS_2(m_2 - m_1) + \tau_2 SS_2(n - m_2) - \frac{[S_{12}(m_1) + \tau_1 S_{12}(m_2 - m_1) + \tau_2 S_{12}(n - m_2)]^2}{SS_1(m_1) + \tau_1 SS_1(m_2 - m_1) + \tau_2 SS_1(n - m_2)}$$

$$\rho(\underline{\tau}) = \frac{S_{12}(m_1) + \tau_1 S_{12}(m_2 - m_1) + \tau_2 S_{12}(n - m_2)}{SS_1(m_1) + \tau_1 SS_1(m_2 - m_1) + \tau_2 SS_1(n - m_2)}$$

.

2.4 Etude du cas où les moyennes sont égales et inconnues.

Ce cas reflète la situation où il n'y a pas rupture dans la moyenne mais où la variance subit k changements.

Le modèle (2.1.2) s'écrit dans ce cas

$$y_i - \rho y_{i-1} = \mu(1 - \rho) + e_i$$

$$e_i \sim N(0, \sigma_j^2); \quad i = \overline{m_{j-1}, m_j}, \quad j = \overline{1, k+1} \quad m_0 = 0, \quad m_{k+1} = n$$

$\sigma_k^2 \neq \sigma_j^2$ si $k \neq j$ et les paramètres $\underline{m}$, ρ , μ , $\underline{\sigma}$ sont supposés inconnus.

Posons $\underline{\theta} = (\underline{m}, \rho, \mu, \underline{\sigma})' \in \Theta$ où

$$\Theta = \prod_{l=1}^k \{2l, \dots, m_{l+1} - 2\} \times]-1, 1[\times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_*^+)^{k+1}$$

2.4.1 L'analyse a posteriori

La loi a priori du vecteur θ

Les lois a priori non informatives pour les paramètres $\mu, \underline{\sigma}$ sont définies comme dans le chapitre (1.2.3); pour le paramètre ρ , nous choisissons la loi uniforme sur $] -1, 1[$ et pour le vecteur $\underline{m}$ nous supposons que la loi définie sur l'ensemble $\prod_{l=1}^k \{2l, \dots, m_{l+1} - 2\}$ est la loi uniforme discrète c'est-à-dire

$$\begin{aligned} P(\underline{m}) &= P(m_1/m_2, \dots, m_k) P(m_2/m_3, \dots, m_k) \dots P(m_{k-1}/m_k) P(m_k) \\ &= \prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$P(\theta) = \prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \prod_{l=1}^{k+1} \frac{1}{\sigma_j} \quad (2.2.1)$$

La fonction de vraisemblance de $\underline{\theta}$ s'écrit

$$L(\underline{\theta}/\underline{y}) \propto \prod_{j=1}^{k+1} \sigma_j^{-(m_j - m_{j-1})} \exp \left\{ - \frac{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu(1 - \rho))^2}{2\sigma_j^2} \right\} \quad (2.2.2)$$

La loi de probabilité a posteriori de $\underline{\theta}$ est donc

$$P(\underline{\theta}/\underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \sigma_j^{-(m_j - m_{j-1} + 1)} \exp \left\{ - \frac{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu(1 - \rho))^2}{2\sigma_j^2} \right\} \quad (2.2.3)$$

2.4.2 Détermination de la masse de probabilité a posteriori marginale conjointe du vecteur des points de rupture et la densité de probabilité a posteriori du coefficient d'autocorrelation

Théorème 1 :

- La masse de probabilité a posteriori du vecteur $\underline{m}$ est

$$P(\underline{m}/\underline{y}) = \begin{cases} \int_{-1}^{+1} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\underline{m}, \rho, \mu/\underline{y}) d\mu d\rho & \text{si } \underline{m} \in \prod_{l=1}^k \{2l, \dots, m_{l+1} - 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2.4)$$

- La densité de probabilité a posteriori marginale de ρ est

$$P(\rho/\underline{y}) = \begin{cases} \sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_2=4}^{m_3-2} \sum_{m_1=2-\infty}^{m_2-2} \int P(m_1, m_2, \dots, m_k, \rho, \mu/\underline{y}) d\mu & \text{si } |\rho| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2.5)$$

où

$$\begin{aligned} P(m_1, m_2, \dots, m_k, \rho, \mu/\underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \\ &\times \frac{\Gamma\left(\frac{m_j - m_{j-1}}{2}\right)}{\left[(m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2(\rho)\right]^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2}}} \\ &\times \frac{1}{\left[1 + \frac{(m_j - m_{j-1})(1-\rho)^2}{(m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2(\rho)} \left(\mu - \hat{\mu}_{m_j - m_{j-1}}(\rho)\right)^2\right]^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2}}} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

$$\hat{\mu}_{m_j - m_{j-1}}(\rho) = \frac{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1})}{(m_j - m_{j-1})(1 - \rho)}, \quad j = \overline{1, k+1} \quad (2.2.7)$$

$$(m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2(\rho) = \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1})^2 - \frac{\left[\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1})\right]^2}{m_j - m_{j-1}} \quad (2.2.8)$$

où $\hat{\mu}_{m_j - m_{j-1}}(\rho)$ et $S_j^2(\rho)$ sont respectivement les estimateurs du maximum de vraisemblance de μ et σ_j^2 fondés sur les $m_j - m_{j-1}$ observations $j = \overline{1, k+1}$ pour ρ fixé.

Démonstration :

Nous éliminons de (2.2.3), σ_j^2 $j = \overline{1, k+1}$ pour obtenir $P(\underline{m}, \rho, \mu/\underline{y})$ comme suit

Posons $z_j = \frac{1}{\sigma_j^2}$, $d\sigma_j = -\frac{1}{2} z_j^{-\frac{3}{2}} dz_j$, $j = \overline{1, k+1}$ nous avons

$$\begin{aligned} P(\underline{m}, \rho, \mu/\underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \int_0^{+\infty} z_j^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2} - 1} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} z_j \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu(1 - \rho))^2 \right\} dz_j \end{aligned}$$

Nous savons que

$$\int_0^{+\infty} \frac{b^a}{\Gamma(a)} z^{a-1} \exp(-bz) dz = 1 \quad (2.2.9)$$

Donc

$$P(\mu, \underline{m}, \rho / \underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} \frac{\Gamma\left(\frac{m_j - m_{j-1}}{2}\right)}{\left[\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu(1-\rho))^2 \right]^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2}}} \quad (2.2.10)$$

Nous avons

$$\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu(1-\rho))^2 = (1-\rho)^2 (m_j - m_{j-1}) \left(\mu - \hat{\mu}_{m_j - m_{j-1}}(\rho) \right)^2 + (m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2(\rho), \quad j = \overline{1, k+1}$$

où $\hat{\mu}_{m_j - m_{j-1}}(\rho)$ et $S_j^2(\rho)$ sont données par (2.2.7) et (2.2.8).

Donc (2.2.8) s'écrit :

$$P(\mu, \underline{m}, \rho / \underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k+1} [(m_j - m_{j-1} - 1)^2 S_j^2(\rho)]^{-\frac{m_j - m_{j-1}}{2}} \times \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{m_j - m_{j-1}}{2}\right)}{\left[1 + \frac{(m_j - m_{j-1})(1-\rho)^2}{(m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2(\rho)} \left(\mu - \hat{\mu}_{m_j - m_{j-1}}(\rho) \right)^2 \right]^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2}}}$$

Remarque 1

Nous remarquons que (2.2.6) relativement à μ est une poly-t produit à $(m_j - m_{j-1} - 1)$ degré de liberté ayant $\hat{\mu}_{m_j - m_{j-1}}(\rho)$ comme paramètre de position et $\frac{(m_j - m_{j-1})(1-\rho)^2}{S_j^2(\rho)}$ comme paramètre de précision.

Remarque 2

Le degré de liberté devant, au moins être égal à un, nous imposons à $m_j - m_{j-1}$ avec $j = \overline{1, k+1}$ d'être strictement supérieur à 1.

Nous éliminons μ et ρ par intégration pour obtenir $P(\underline{m} / \underline{y})$ et μ par intégration et $\underline{m}$ par sommation pour obtenir $P(\rho / \underline{y})$.

C'est-à-dire

$$P(\underline{m} / \underline{y}) = \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mu, \underline{m}, \rho / \underline{y}) d\mu d\rho \\ P(\rho / \underline{y}) = \sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_2=4}^{m_3-2} \sum_{m_1=2}^{m_2-2} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mu, m_1, m_2, \dots, m_k, \rho / \underline{y}) d\mu$$

Nous déduisons successivement

- La loi de probabilité a posteriori conjointe du vecteur des points de rupture $\underline{m}$ et du coefficient

d'autocorrélation ρ

$$P(\underline{m}, \rho / \underline{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mu, \underline{m}, \rho / \underline{y}) d\mu \quad (2.2.11)$$

- La loi de probabilité a posteriori conditionnelle de coefficient d'autocorrélation ρ sachant le vecteur des points de rupture $\underline{m}$ en faisant le rapport de (2.2.11) et (2.2.4) c'est-à-dire

$$P(\rho / \underline{m}, \underline{y}) = \frac{P(\underline{m}, \rho / \underline{y})}{P(\underline{m} / \underline{y})}$$

- La masse de probabilité a posteriori conditionnelle du vecteur $\underline{m}$ sachant ρ en faisant le rapport de (2.2.11) (2.2.5) c'est-à-dire

$$P(\underline{m} / \rho, \underline{y}) = \frac{P(\underline{m}, \rho / \underline{y})}{P(\rho / \underline{y})}$$

Remarque

- Lorsque $k = 1$, (2.2.6) devient

$$P(\mu, m, \rho / \underline{y}) \propto \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\left[(m-1)S_1^2(\rho) + m(1-\rho)^2(\mu - \hat{\mu}_m(\rho))^2\right]^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}{\left[(n-m-1)S_2^2(\rho) + (n-m)(1-\rho)^2(\mu - \hat{\mu}_{n-m}(\rho))^2\right]^{\frac{n-m}{2}}}$$

où

$$(m-1)S_1^2(\rho) = \sum_{i=1}^m (y_i - \rho y_{i-1})^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^m (y_i - \rho y_{i-1})\right]^2}{m}$$

$$(n-m-1)S_2^2(\rho) = \sum_{i=m+1}^n (y_i - \rho y_{i-1})^2 - \frac{\left[\sum_{i=m+1}^n (y_i - \rho y_{i-1})\right]^2}{n-m}$$

$$\hat{\mu}_m(\rho) = \frac{\sum_{i=1}^m y_i - \rho y_{i-1}}{m(1-\rho)}$$

$$\hat{\mu}_{n-m}(\rho) = \frac{\sum_{i=m+1}^n y_i - \rho y_{i-1}}{(n-m)(1-\rho)}$$

c'est le résultat obtenu par Guerbyenne (1992)..

- Lorsque $k = 2$, (2.2.6) devient :

$$\begin{aligned}
P(\mu, m_1, m_2, \rho/\underline{y}) &\propto \frac{1}{m_2 - 3} \times \frac{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)}{\left[(m_1 - 1) S_1^2(\rho) + m_1 (1 - \rho)^2 (\mu - \hat{\mu}_{m_1}(\rho))^2\right]^{\frac{m_1}{2}}} \\
&\times \frac{\Gamma\left(\frac{m_2 - m_1}{2}\right)}{\left[(m_2 - m_1 - 1) S_2^2(\rho) + (m_2 - m_1) (1 - \rho)^2 (\mu - \hat{\mu}_{m_2 - m_1}(\rho))^2\right]^{\frac{m_2 - m_1}{2}}} \\
&\times \frac{\Gamma\left(\frac{n - m_2}{2}\right)}{\left[(n - m_2 - 1) S_3^2(\rho) + (n - m_2) (1 - \rho)^2 (\mu - \hat{\mu}_{n - m_2}(\rho))^2\right]^{\frac{n - m_2}{2}}}; \\
(m_1, m_2) &\in \{2, \dots, m_2 - 2\} \times \{4, \dots, n - 2\}, \mu \in \mathbb{R}, \rho \in]-1, 1[
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Remarque

La densité de probabilité a posteriori marginale de μ s'obtient à partir de (2.2.6), en éliminant ρ et $\underline{m}$ c'est-à-dire

$$P(\mu/\underline{y}) = \sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_2=4}^{m_3-2} \sum_{m_1=2}^{m_2-2} \int_{-1}^{+1} P(\mu, m_1, m_2, \dots, m_k, \rho/\underline{y}) d\rho; \quad \mu \in \mathbb{R} \tag{2.2.13}$$

un calcul simple donne

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu (1 - \rho))^2 &= \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_{i-1} - \mu)^2 \left(\rho - \hat{\rho}_{m_j - m_{j-1}}(\mu)\right)^2 + \\
&+ (m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2(\mu)
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

où $j = \overline{1, k+1}$, $m_{k+1} = n$ avec

$$\hat{\rho}_{m_j - m_{j-1}}(\mu) = \frac{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \mu)(y_{i-1} - \mu)}{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_{i-1} - \mu)} \tag{2.2.15}$$

est l'estimateur du maximum de vraisemblance de ρ fondé sur les $m_j - m_{j-1}$ observations, $j = \overline{1, k+1}$ pour μ fixé

$$(m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2(\mu) = \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \mu)^2 - \frac{\left[\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \mu) (y_{i-1} - \mu) \right]^2}{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_{i-1} - \mu)^2} \quad (2.2.16)$$

où $S_j^2(\mu)$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ_j^2 pour μ fixé.
donc (2.3.10) s'écrit

$$\begin{aligned} P(\mu, m_1, m_2, \dots, m_k, \rho / \underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \\ &\times \prod_{j=1}^{k+1} \frac{\Gamma\left(\frac{m_j - m_{j-1}}{2}\right)}{[(m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2(\mu)]^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2}}} \\ &\times \frac{1}{\left[1 + \frac{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_{i-1} - \mu)^2}{(m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2(\mu)} \left(\rho - \hat{\rho}_{m_j - m_{j-1}}(\mu) \right)^2 \right]^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2}}} \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

qui est relativement à ρ une poly-t produit à $(m_j - m_{j-1} - 1)$ degré de liberté ayant $\hat{\rho}_{m_j - m_{j-1}}(\mu)$, $j = \overline{1, k+1}$ comme paramètres de position et $\frac{\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_{i-1} - \mu)^2}{S_j^2(\mu)}$, $j = \overline{1, k+1}$ comme paramètres de précision.

Nous déduisons successivement

- La loi de probabilité a posteriori conditionnelle de μ sachant ρ et $\underline{m}$ en faisant le rapport de (2.2.17) et de (2.2.11)

$$P(\mu / \rho, \underline{m}, \underline{y}) = \frac{P(\underline{m}, \rho, \mu / \underline{y})}{P(\underline{m}, \rho / \underline{y})}$$

- La loi de probabilité a posteriori conditionnelle de μ sachant ρ en faisant le rapport suivant

$$P(\mu / \rho, \underline{y}) = \frac{\sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_1=2}^{m_2-2} P(\mu, \underline{m}, \rho / \underline{y})}{P(\rho / \underline{y})}$$

- La loi de probabilité a posteriori conditionnelle de μ sachant le vecteur $\underline{m}$ en faisant le

rapport suivant

$$P(\mu/\underline{m}, \underline{y}) = \frac{\int_{-1}^1 P(\mu, \underline{m}, \rho/\underline{y})}{P(\underline{m}/\underline{y})}$$

où $P(\mu, \underline{m}, \rho/\underline{y})$, $P(\underline{m}/\underline{y})$ et $P(\rho/\underline{y})$ sont respectivement données par (2.2.17), (2.2.4) et (2.2.5).

2.4.3 Détermination des densités de probabilité a posteriori marginales conjointes et conditionnelles des rapports de variances

Nous allons déterminer dans le théorème suivant la densité de probabilité a posteriori du vecteur $\underline{\tau}$ défini par $\underline{\tau} = \left(\tau_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \dots, \tau_k = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{k+1}^2} \right)$

Théorème 2

La densité de probabilité a posteriori du vecteur $\underline{\tau}$ est donnée par

$$P(\underline{\tau}/\underline{y}) = \begin{cases} \sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_2=4}^{m_3-2} \sum_{m_1=2-1}^{m_2-2+1} \int P(m_1, m_2, \dots, m_k, \rho, \underline{\tau}/\underline{y}) d\rho & \text{si } \underline{\tau} \in (\mathbb{R}_+^*)^{k+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2.18)$$

où

$$P(m_1, m_2, \dots, m_k, \rho, \underline{\tau}/\underline{y}) \propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \times \frac{\prod_{l'=1}^{k+1} \tau_{l'-1}^{\frac{m_{l'} - m_{l'-1}}{2} - 1} \left[(1-\rho)^2 \sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1} \right]^{-\frac{1}{2}}}{[S^2(\rho, \underline{\tau})]^{\frac{n-1}{2}}} \quad (2.2.19)$$

avec

$$(n-1) S^2(\rho, \underline{\tau}) = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1})^2 \tau_{j-1} - \frac{\left[\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1}) \tau_{j-1} \right]^2}{\sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1}} \quad (2.2.20)$$

Démonstration du théorème

De (2.2.3) ci-dessus nous déduisons que

$$P(\underline{m}, \mu, \rho, \sigma_1, \underline{\tau}/\underline{y}) = |J\varphi^{-1}| P(\underline{m}, \mu, \rho, \underline{\sigma}/\underline{y})$$

où $|J\varphi^{-1}| \propto \sigma_1^k \left(\prod_{j=1}^k \tau_j \right)^{-\frac{3}{2}}$

La loi de probabilité a posteriori conjointe de $(\underline{m}, \mu, \rho, \sigma_1, \underline{\tau})$ s'écrit alors

$$P(\underline{m}, \mu, \rho, \sigma_1, \underline{\tau} / \underline{y}) \propto \sigma_1^{-(n+1)} \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \\ \times \prod_{j=2}^{k+1} \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2} - 1} \exp \left\{ - \frac{\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu(1-\rho))^2 \tau_{j-1}}{2\sigma_1^2} \right\}$$

Nous éliminons σ_1^2 par intégration pour obtenir $P(\underline{m}, \mu, \rho, \underline{\tau} / \underline{y})$ comme suit

Posons $z = \frac{1}{\sigma_1^2} \implies d\sigma_1 = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$

nous avons

$$P(\underline{m}, \mu, \rho, \underline{\tau} / \underline{y}) \propto \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \\ \prod_{j=2}^{k+1} \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2} - 1} \int_0^{+\infty} z^{\frac{n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} z \left[\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu(1-\rho))^2 \tau_{j-1} \right] \right\} dz$$

ce qui donne

$$P(\underline{m}, \mu, \rho, \underline{\tau} / \underline{y}) \propto \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \\ \frac{\prod_{l'=2}^k \tau_{l'-1}^{\frac{m_{l'} - m_{l'-1}}{2} - 1}}{\left[\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu(1-\rho))^2 \tau_{j-1} \right]^{\frac{n}{2}}}$$

un calcul simple donne

$$\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu(1-\rho))^2 \tau_{j-1} = (1-\rho)^2 \sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1} (\mu - \hat{\mu}(\rho, \underline{\tau}))^2 + \\ + (n-1) S^2(\rho, \underline{\tau}) \quad (2.2.21)$$

où

$$\hat{\mu}(\rho, \underline{\tau}) = \frac{\sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \hat{\mu}_{m_j - m_{j-1}}(\rho) \tau_{j-1}}{\sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1}} \quad (2.2.22)$$

c'est la moyenne pondérée des estimateurs $\hat{\mu}_{m_j - m_{j-1}}(\rho)$, $j = \overline{1, k+1}$ et $(n-1) S^2(\rho, \underline{\tau})$ est défini dans (2.2.20). Donc $P(\underline{m}, \mu, \rho, \underline{\tau} / \underline{y})$ s'écrit :

$$\begin{aligned} P(\underline{m}, \mu, \rho, \underline{\tau} / \underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \\ &\times \frac{\prod_{j=2}^k \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2} - 1}}{((n-1) S^2(\rho, \underline{\tau}))^{\frac{n}{2}} \left[1 + \frac{(1-\rho)^2 \sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1}}{(n-1) S^2(\rho, \underline{\tau})} (\mu - \hat{\mu}(\rho, \underline{\tau}))^2 \right]^{\frac{n}{2}}} \end{aligned}$$

qui est relativement à μ une loi de student à $(n-1)$ d.d.l avec $\hat{\mu}(\rho, \underline{\tau})$ comme paramètre de position et $\frac{(1-\rho)^2 \sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1}}{S^2(\rho, \underline{\tau})}$ comme paramètre de précision.

En éliminant μ par intégration, nous obtenons la loi de probabilité a posteriori conjointe de $(\underline{m}, \rho, \underline{\tau})$ comme suit :

$$\begin{aligned} P(\underline{m}, \rho, \underline{\tau} / \underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=2}^k \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2} - 1} [(n-1) S^2(\rho, \underline{\tau})]^{-\frac{n}{2}} \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + \frac{(1-\rho)^2 \sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1}}{(n-1) S^2(\rho, \underline{\tau})} (\mu - \hat{\mu}(\rho, \underline{\tau}))^2 \right]^{-\frac{n}{2}} d\mu \end{aligned}$$

nous aurons donc

$$\begin{aligned} P(\underline{m}, \rho, \underline{\tau} / \underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \\ &\times \frac{\prod_{l'=2}^k \tau_{l'}^{\frac{m_{l'} - m_{l'-1}}{2} - 1} \left[(1-\rho)^2 \sum_{j=1}^{k+1} (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1} \right]^{-\frac{1}{2}}}{[S^2(\rho, \underline{\tau})]^{\frac{n-1}{2}}} \end{aligned}$$

Nous déduisons que

$$P(\underline{\tau} / \underline{y}) = \sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_2=4}^{m_3-2} \sum_{m_1=2}^{m_2-2} \int_{-1}^{+1} P(m_1, m_2, \dots, m_k, \rho, \underline{\tau} / \underline{y}) d\rho$$

d'où le théorème.

Nous déduisons successivement

- La densité de probabilité a posteriori conditionnelle du vecteur $\underline{\tau}$ sachant ρ et $\underline{m}$ en faisant le rapport suivant :

$$P(\underline{\tau}/\rho, \underline{m}, \underline{y}) = \frac{P(\underline{\tau}, \rho, \underline{m}/\underline{y})}{P(\rho, \underline{m}/\underline{y})}$$

- La densité de probabilité a posteriori conditionnelle du vecteur $\underline{\tau}$ sachant ρ

$$P(\underline{\tau}/\rho, \underline{y}) = \frac{\sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_1=2}^{m_2-2} P(\underline{m}, \rho, \underline{\tau}/\underline{y})}{P(\rho/\underline{y})}$$

- La densité de probabilité a posteriori conditionnelle du vecteur $\underline{\tau}$ sachant $\underline{m}$

$$P(\underline{\tau}/\underline{m}, \underline{y}) = \frac{\int_{-1}^{+1} P(\underline{m}, \rho, \underline{\tau}/\underline{y}) d\rho}{P(\underline{m}/\underline{y})}$$

où $P(\underline{m}, \rho, \underline{\tau}/\underline{y})$, $P(\rho/\underline{y})$ et $P(\underline{m}/\underline{y})$ sont respectivement données par (2.2.19), (2.2.5) et (2.2.4).

Remarque

- Lorsque $k = 1$, (2.2.19) devient

$$P(m, \rho, \tau/\underline{y}) \propto \frac{[(m + \tau(n - m))(1 - \rho)]^{-\frac{1}{2}} \tau^{\frac{n-m}{2}-1}}{[S^2(\rho, \tau)]^{\frac{n-1}{2}}}$$

c'est le résultat obtenu par Guerbyenne (1992).

- Lorsque $k = 2$, (2.2.19) devient

$$\begin{aligned} P(m_1, m_2, \rho, \tau_1, \tau_2/\underline{y}) &\propto \frac{1}{m_2 - 3} \times \frac{\tau_1^{\frac{m_2-m_1}{2}-1} \tau_2^{\frac{n-m_2}{2}-1}}{[S^2(\rho, \tau_1, \tau_2)]^{\frac{n-1}{2}}} \\ &\times \left[(1 - \rho)^2 \sum_{j=1}^3 (m_j - m_{j-1}) \tau_{j-1} \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

où

$$(n-1) S^2(\rho, \tau_1, \tau_2) = \sum_{j=1}^{m_1} (y_i - \rho y_{i-1})^2 + \tau_1 \sum_{i=m_1+1}^{m_2} (y_i - \rho y_{i-1})^2 + \tau_2 \sum_{i=m_2+1}^n (y_i - \rho y_{i-1})^2$$

$$- \frac{\left[\sum_{j=1}^{m_1} (y_i - \rho y_{i-1}) + \tau_1 \sum_{i=m_1+1}^{m_2} (y_i - \rho y_{i-1}) + \tau_2 \sum_{i=m_2+1}^n (y_i - \rho y_{i-1}) \right]^2}{m_1 + (m_2 - m_1) \tau_1 + (n - m_2) \tau_2}$$

2.5 Etude du cas où les moyennes sont distinctes et inconnues.

Le modèle est celui considéré dans (2.1.1)

$$\begin{aligned} y_i &= \mu_j + u_i \\ u_i &= \rho u_{i-1} + e_i \end{aligned}$$

$e_i \sim N(0, \sigma_j^2)$, $i = \overline{m_{j-1} + 1, m_j}$, $j = \overline{1, k+1}$, $m_0 = 0$, $m_{k+1} = n$
et comme on l'a vu dans (2.1.2) le modèle s'écrit de façon équivalente :

$$\begin{cases} y_i - \rho y_{i-1} = \mu_1(1 - \rho) + e_i; & i = \overline{1, m_1} \\ y_{m_j+1} - \rho y_{m_j} = \mu_{j+1} - \rho \mu_j + e_{m_j+1}; \\ y_i - \rho y_{i-1} = \mu_{j+1}(1 - \rho) + e_i; & i = \overline{m_j + 2, m_{j+1}} \text{ et } j = \overline{1, k} \end{cases} \quad (2.3.1)$$

$\underline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k)'$ est le vecteur des points de rupture dans $\prod_{l=1}^k \{2l, \dots, m_{l+1} - 2\}$

$\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k+1})'$ est le vecteur des moyennes dans $\mathbb{R}^{k+1}$

$\underline{\sigma}^2 = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_{k+1}^2)'$ est le vecteur des variances dans $(\mathbb{R}_+^*)^{k+1}$

ρ est le coefficient d'autocorrélation défini dans $] -1, 1[$. Le paramètre inconnu dans ce cas est

$$\underline{\theta} = (\underline{m}, \rho, \underline{\mu}, \underline{\sigma}) \in \Theta, \quad \Theta = \prod_{l=1}^k \{2l, \dots, m_{l+1} - 2\} \times] -1, 1[\times \mathbb{R}^{k+1} \times (\mathbb{R}_+^*)^{k+1}$$

2.5.1 L'analyse a posteriori

La loi a priori du vecteur θ

En supposant que tous les paramètres sont indépendants, la loi a priori de $\underline{\theta}$ est :

$$P(\underline{\theta}) = P(\underline{m}, \rho, \underline{\mu}, \underline{\sigma}) = P(\underline{m}) P(\rho) P(\underline{\mu}) P(\underline{\sigma})$$

La densité a priori conjointe de $\underline{\mu}$ et de $\underline{\sigma}$ est définie comme en (1.3.3) et pour le paramètre ρ nous choisissons la densité uniforme sur $] -1, 1[$, c'est-à-dire que

$$P(\rho) = \frac{1}{2} I_{]-1,1[}(\rho)$$

nous définissons pour le vecteur $\underline{m}$ des points de rupture une loi discrète sur l'ensemble

$$\prod_{l=1}^k \{2l, \dots, m_{l+1} - 2\} \text{ c'est-à-dire}$$

$$P(\underline{m}) = \prod_{l=1}^{k-1} P(m_l / m_{l+1}, \dots, m_k) P(m_k) \prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1}, m_{k+1} = n$$

et par suite la loi a priori de $\underline{\theta}$ est

$$P(\underline{\theta}) = \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \prod_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{\sigma_j} \right) \quad (2.3.2)$$

La fonction de vraisemblance du vecteur $\underline{\theta}$ s'écrit

$$L(\underline{\theta} / \underline{y}) \propto \sigma_1^{-m_1} \exp \left\{ - \frac{\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_1 (1 - \rho))^2}{2\sigma_1^2} \right\} \times \prod_{j=2}^{k+1} \sigma_j^{-(m_j - m_{j-1})} \exp \left\{ - \frac{1}{2\sigma_j^2} \left[(y_{m_{j-1}+1} - \rho y_{m_{j-1}} - \mu_j + \rho \mu_{j-1})^2 + \sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_j (1 - \rho))^2 \right] \right\} \quad (2.3.3)$$

La loi a posteriori du vecteur θ

D'après le théorème de Bayes nous combinons la fonction de vraisemblance (2.3.3) et la loi

a priori (2.3.2) pour obtenir la densité a posteriori du vecteur $\underline{\theta}$ c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
P(\underline{\theta}/\underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \sigma_1^{-(m_1+1)} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_1(1-\rho))^2}{2\sigma_1^2} \right\} \\
&\quad \prod_{j=2}^{k+1} \sigma_j^{-(m_j-m_{j-1}+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[(y_{m_{j-1}+1} - \rho y_{m_{j-1}} - \mu_j + \rho \mu_{j-1})^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_j(1-\rho))^2 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Nous posons

$$\begin{aligned}
A(\mu_1, \rho) &= \sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_1(1-\rho))^2 \\
A(\mu_{j-1}, \mu_j, \rho) &= (y_{m_{j-1}+1} - \rho y_{m_{j-1}} - \mu_j + \rho \mu_{j-1})^2 + \\
&\quad + \sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_j(1-\rho))^2
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

2.5.2 Détermination de la masse de probabilité a posteriori marginale conjointe du vecteur des points de rupture et la densité de probabilité a posteriori du coefficient d'autocorrelation

Théorème1

- La masse de probabilité a posteriori du vecteur $\underline{m}$ est :

$$P(\underline{m}/\underline{y}) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} \int_{-1}^{+1} P(\underline{m}, \rho, \underline{\mu}/\underline{y}) d\rho d\underline{\mu} & \text{si } \underline{m} \in \prod_{l=1}^k \{2l, \dots, m_{l+1} - 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.3.6}$$

- La densité de probabilité a posteriori du coefficient d'autocorrélation ρ est :

$$P(\rho/\underline{y}) = \begin{cases} \sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_j=2j}^{m_{j+1}-2} \dots \sum_{m_1=2}^{m_2-2} \int_{\mathbb{R}^k} P(m_1, \dots, m_k, \rho, \underline{\mu}/\underline{y}) d\mu_k & \text{si } \rho \in]-1, +1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.3.7}$$

où $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$

$$P(m_1, \dots, m_k, \rho, \underline{\mu}/\underline{y}) = (1 + (n - m_k - 1)(1 - \rho)^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)}{\left[m_1(1-\rho)^2(\mu_1 - \hat{\mu}_1(\rho))^2 + (m_1 - 1)S_1^2(\rho)\right]^{\frac{m_1}{2}}} \\
& \times \frac{\Gamma\left(\frac{n-m_k-1}{2}\right)}{\left[\frac{(n-m_k-1)\rho^2(1-\rho)^2}{1+(n-m_k-1)(1-\rho)^2}(\mu_k - \overline{\mu_k(\rho)})^2 + (n-m_k-2)S_k^2(\rho)\right]^{\frac{(n-m_k-1)}{2}}} \\
& \times \prod_{j=2}^k \frac{\Gamma\left(\frac{m_j-m_{j-1}}{2}\right)}{\left[\left(1+(m_j-m_{j-1}-1)(1-\rho)^2\right)(\mu_j - \hat{\mu}_j(\mu_{j-1}, \rho))^2\right.} \\
& \quad \left.+ \frac{(m_j-m_{j-1}-1)\rho^2(1-\rho)^2}{1+(m_j-m_{j-1}-1)(1-\rho)^2}(\mu_{j-1} - \overline{\mu_{j-1}(\rho)})^2 + (m_j-m_{j-1}-2)S_j^2(\rho)\right]^{\frac{(m_j-m_{j-1})}{2}}}
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Avec

$$\hat{\mu}_1(\rho) = \frac{\sum_{i=1}^{m_1} y_i - \rho y_{i-1}}{m_1(1-\rho)} \tag{2.3.9}$$

est l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ_1 fondé sur les m_1 premières observations.

$$(m_1 - 1)S_1^2 = \sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \rho y_{i-1})^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^{m_1} y_i - \rho y_{i-1}\right]^2}{m_1} \tag{2.3.10}$$

$$\hat{\mu}_j(\mu_{j-1}, \rho) = \frac{y_{m_{j-1}+1} - \rho y_{m_{j-1}} + \rho \mu_{j-1} + (1-\rho) \sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1})}{1 + (m_j - m_{j-1} - 1)(1-\rho)^2}; \quad j = \overline{2, k+1} \tag{2.3.11}$$

serait l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ_j si μ_{j-1} et ρ étaient connus.

$$\begin{aligned}
\overline{\mu_{j-1}(\rho)} &= \frac{\sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1}) - (m_j - m_{j-1} - 1)(1-\rho)(y_{m_{j-1}+1} - \rho y_{m_{j-1}})}{\rho(1-\rho)(m_j - m_{j-1} - 1)} \\
\text{si } \rho &\in]-1, 1[^* =]-1, 1[\setminus \{0\}, \quad j = \overline{2, k+1}
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

$$\begin{aligned}
(m_j - m_{j-1} - 2)S_j^2(\rho) &= \sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1})^2 - \frac{\left[\sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1})\right]^2}{m_j - m_{j-1} - 1} \\
j &= \overline{2, k+1}
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Lorsque $\rho = 0$

$$P(m_1, \dots, m_k, \underline{\mu}/\underline{y}) = (n - m_k)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{n - m_k - 1}{2}\right)}{[(n - m_k) S_{k+1}^2]^{\frac{n - m_k - 1}{2}}} \\ \times \prod_{j=1}^k \frac{\Gamma\left(\frac{m_j - m_{j-1}}{2}\right)}{[(m_j - m_{j-1}) S_j^2]^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2}} + \left[1 + \frac{1}{S_j^2} (\mu_j - \bar{y}_j)^2\right]^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2}}} \quad (2.3.14)$$

ce résultat a déjà été trouvé en (1.3.8) où $\bar{y}_j$ et S_j^2 ; $j = \overline{1, k+1}$ sont donnés par (1.3.3) et (1.3.2)

Démonstration

Un calcul simple dans l'expression (2.3.5) donne

$$A(\mu_{j-1}, \mu_j, \rho) = (1 + (1 - \rho)^2 (m_j - m_{j-1} - 1)) (\mu_j - \hat{\mu}_j(\mu_{j-1}, \rho))^2 + \quad (2.3.15) \\ + (m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2 (\mu_{j-1}, \rho)$$

où

$$(m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2 (\mu_{j-1}, \rho) = (y_{m_{j-1}+1} - \rho y_{m_{j-1}} + \rho \mu_{j-1})^2 + \sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1})^2 - \\ - \frac{\left[y_{m_{j-1}+1} - \rho y_{m_{j-1}} + \rho \mu_{j-1} + (1 - \rho) \sum_{i=m_{j-1}+2}^{m_j} (y_i - \rho y_{i-1}) \right]^2}{1 + (1 - \rho)^2 (m_j - m_{j-1} - 1)} \quad (2.3.16)$$

$\hat{\mu}_j(\mu_{j-1}, \rho)$ est définie par (2.3.11); donc (2.3.4) s'écrit

$$P(\underline{\theta}/\underline{y}) = \begin{cases} \sigma_1^{-(m_1+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_1 (1 - \rho))^2 \right\} \\ \times \prod_{j=2}^{k+1} \sigma_j^{-(m_j - m_{j-1} + 1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[(m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} (1 + (1 - \rho)^2 (m_j - m_{j-1} - 1)) (\mu_j - \hat{\mu}_j(\mu_{j-1}, \rho))^2 \right] \right\} \\ \times \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \text{ si } \underline{\theta} \in \Theta \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (2.3.17)$$

Nous intégrons (2.3.17) par rapport à μ_{k+1} , nous trouvons $P(\mu_1, \dots, \mu_k, \underline{\sigma}, \underline{m}, \rho/\underline{y})$

$$\begin{aligned}
P(\mu_1, \dots, \mu_k, \underline{\sigma}, \underline{m}, \rho/\underline{y}) &\propto [1 + (n - m_k - 1)(1 - \rho)^2]^{-\frac{1}{2}} \times \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \\
&\times \sigma_1^{-(m_1+1)} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_1(1 - \rho))^2}{2\sigma_1^2} \right\} \times \prod_{j=2}^k \sigma_j^{-(m_j - m_{j-1} + 1)} \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[(1 + (1 - \rho)^2(m_j - m_{j-1} - 1)) (\mu_j - \hat{\mu}_j(\mu_{j-1}, \rho))^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2(\mu_{j-1}, \rho) \right] \right\} \\
&\times \sigma_{k+1}^{-(n-m_k)} \exp \left\{ -\frac{(n - m_k - 1) S_{k+1}^2(\mu_k, \rho)}{2\sigma_{k+1}^2} \right\}
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

d'autre part, en, integrant (2.3.18) par rapport à σ_j^2 $j = \overline{1, k+1}$ nous trouvons :

$$\begin{aligned}
P(\mu_1, \dots, \mu_k, \underline{\sigma}, \underline{m}, \rho/\underline{y}) &\propto [1 + (n - m_k - 1)(1 - \rho)^2]^{-\frac{1}{2}} \\
&\times \prod_{j=2}^k \frac{\Gamma\left(\frac{m_j - m_{j-1}}{2}\right)}{\left[(1 + (1 - \rho)^2(m_j - m_{j-1} - 1)) (\mu_j - \hat{\mu}_j(\mu_{j-1}, \rho))^2 + (m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2(\mu_{j-1}, \rho) \right]^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2}}} \\
&\times \frac{\Gamma\left(\frac{n - m_k - 1}{2}\right)}{\left[(n - m_k - 1) S_{k+1}^2(\mu_k, \rho) \right]^{\frac{n - m_k - 1}{2}}}
\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

un calcul simple montre que d'une part

$$\sum_{i=1}^{m_1} (y_i - \rho y_{i-1} - \mu_1(1 - \rho))^2 = (m_1 - 1) S_1^2(\rho) + m_1(1 - \rho)^2 (\mu_1 - \hat{\mu}_1(\rho))^2 \tag{2.3.20}$$

où $\widehat{\mu}_1(\rho)$ $S_1^2(\rho)$ étant définies respectivement dans (2.3.9) et (2.3.10).

D'autre part

$$(m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2(\mu_{j-1}, \rho) = \begin{cases} \left[\frac{(m_j - m_{j-1} - 1) \rho^2 (1 - \rho)}{1 + (m_j - m_{j-1} - 1)(1 - \rho)^2} \left(\mu_{j-1} - \overline{\mu_{j-1}(\rho)} \right)^2 \right. \\ \left. + (m_j - m_{j-1} - 2) S_j^2(\rho) \right] & \text{si } \rho \neq 0 \\ (m_j - m_{j-1}) S_j^2 & \text{si } \rho = 0 \end{cases} \quad (2.3.21)$$

où $\overline{\mu_{j-1}(\rho)}$, $(m_j - m_{j-1} - 2) S_j^2(\rho)$ et $(m_j - m_{j-1}) S_j^2$ sont respectivement définis par (2.3.12), (2.3.13) et (1.3.2).

Il est clair que la densité de probabilité a posteriori de μ_k sachant tous les autres paramètres est une loi double t-produit avec respectivement $\widehat{\mu}_k(\mu_{k-1}, \rho)$ et $\overline{\mu_k(\rho)}$ comme paramètres de

position, $\frac{(1 + (m_k - m_{k-1} - 1))(1 - \rho)^2 (m_k - m_{k-1} - 1)}{C(\mu_{k-1}, \rho)}$ et

$$\frac{(n - m_k - 1) \rho^2 (1 - \rho)^2}{(1 + (n - m_k - 1)(1 - \rho)^2) S_{k+1}^2(\rho)}$$

comme paramètre de précision.

où

$$C(\mu_{k-1}, \rho) = \frac{(m_k - m_{k-1} - 1) \rho^2 (1 - \rho)^2}{1 + (m_k - m_{k-1} - 1)(1 - \rho)^2} \left(\mu_{k-1} - \overline{\mu_{k-1}(\rho)} \right) + (m_k - m_{k-1} - 2) S_k^2(\rho)$$

l'élimination par intégration respectivement de ρ et μ_j , $j = \overline{1, k}$ puis de m_j et μ_j , $j = \overline{1, k}$ conduit au théorème

2.5.3 Détermination des densités de probabilité a posteriori marginales conjointes et conditionnelles des rapports de variances

Nous allons déterminer dans le théorème suivant la densité de probabilité a posteriori marginale du vecteur $\underline{\tau}$ défini par $\underline{\tau} = \left(\tau_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \dots, \tau_k = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_{k+1}^2} \right)$

Théorème 2

La densité de probabilité a posteriori du vecteur $\underline{\tau}$ est donnée par :

$$P(\underline{\tau}/\underline{y}) = \begin{cases} \sum_{m_k=2k}^{n-2} \dots \sum_{m_j=2j}^{m_{j+1}-2} \dots \sum_{m_1=2-1}^{m_2-2+1} \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \int P(\underline{\tau}, \rho, \underline{m}, \underline{\mu}/\underline{y}) d\underline{\mu} d\rho & \text{si } \underline{\tau} \in (\mathbb{R}_+^*)^{k+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3.22)$$

$\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k)'$ où

$$\begin{aligned}
P(\underline{\tau}, \rho, \underline{m}, \underline{\mu}/\underline{y}) &\propto [1 + (1 - \rho)^2 (n - m_k - 1)]^{-\frac{1}{2}} \tau_k^{\frac{(n - m_k - 1)}{2}} \times \prod_{l'=2}^k \tau_{l'-2}^{\frac{m_{l'} - m_{l'-1} - 1}{2}} \\
&\times \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \\
&\times \left[A(\mu_1, \rho) + \sum_{j=2}^k ((1 + (1 - \rho)^2 (m_j - m_{j-1} - 1)) (\mu_j - \hat{\mu}_j(\mu_{j-1}, \rho))^2 \right. \\
&\quad \left. + (m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2(\mu_{j-1}, \rho)) \tau_{j-1} \right. \\
&\quad \left. + \tau_k (n - m_k - 1) S_{k+1}^2(\mu_k, \rho) \right]^{-\frac{n-1}{2}} \quad (2.3.23)
\end{aligned}$$

où $A(\mu_1, \rho)$, $\hat{\mu}_j(\mu_{j-1}, \rho)$ et $S_j^2(\mu_{j-1}, \rho)$ sont respectivement données par (2.3.5), (2.3.11) et (2.3.16).

Démonstration

De (2.3.4) nous déduisons la loi de probabilité a posteriori conjointe de $(\underline{m}, \rho, \underline{\mu}, \underline{\tau}, \sigma_1)$

$$P(\underline{m}, \rho, \underline{\mu}, \underline{\tau}, \sigma_1/\underline{y}) = P(\underline{m}, \rho, \underline{\tau}, \underline{\sigma}, \underline{\mu}/\underline{y}) |J\varphi^{-1}| \quad (2.3.24)$$

où

$$\begin{aligned}
\varphi : (\mathbb{R}_+^*)^{k+1} &\rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{k+1} \\
\underline{\sigma} &\mapsto \left(\sigma_1, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \dots, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{k+1}^2} \right)
\end{aligned}$$

est un difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^{k+1}$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^{k+1}$, donc $\det(J\varphi^{-1}) \propto \sigma_1^k \left(\prod_{j=1}^k \tau_j \right)^{-\frac{3}{2}}$ où $J\varphi^{-1}$ est le jacobien de la transformation φ^{-1} donc

$$\begin{aligned}
P(\underline{m}, \rho, \underline{\mu}, \underline{\tau}, \sigma_1/\underline{y}) &\propto \prod_{l=1}^k \left(\frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \sigma_1^{-n-1} \exp \left[-\frac{A(\mu_1, \rho)}{2\sigma_1^2} \right] \\
&\times \prod_{j=2}^{k+1} \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1} - 1}{2}} \exp \left[-\frac{A(\mu_{j-1}, \mu_j, \rho)}{2\sigma_1^2} \tau_{j-1} \right] \quad (2.3.25)
\end{aligned}$$

$$m_{k+1} = n, m_0 = 0$$

où $A(\mu_1, \rho)$ et $A(\mu_{j-1}, \mu_j, \rho)$ sont données par (2.3.5).

Nous allons tout d'abord éliminer μ_{k+1} par intégration. D'après (2.3.15); (2.3.25) s'écrit

$$\begin{aligned}
P(\underline{m}, \rho, \underline{\mu}, \sigma_1, \tau/\underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \sigma_1^{-n-1} \exp \left(-\frac{A(\mu_1, \rho)}{2\sigma_1^2} \right) \\
&\times \prod_{j=2}^{k+1} \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1} - 1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} \left[(1 + (1 - \rho)^2 (m_j - m_{j-1} - 1)) (\mu_j - \hat{\mu}_j(\mu_{j-1}, \rho))^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2(\mu_{j-1}, \rho) \right] \tau_{j-1} \right\}
\end{aligned}$$

$$+ (m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2 (\mu_{j-1}, \rho) \tau_{j-1} \}$$

En intégrant par rapport à μ_{k+1} , nous trouvons

$$\begin{aligned} P(\underline{m}, \rho, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \sigma_1, \underline{z}/\underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \sigma_1^{-n} \tau_k^{\frac{n-m_k-1}{2}-1} (1 + (1-\rho)^2 (n - m_k - 1))^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} [A(\mu_1, \rho) + \tau_k (n - m_k - 1) S_{k+1}^2 (\mu_k, \rho)] \right\} \times \prod_{j=2}^k \tau_{j-1}^{\frac{m_j - m_{j-1}}{2} - 1} \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} [(1 + (1-\rho)^2 (m_j - m_{j-1} - 1)) (\mu_j - \hat{\mu}_j (\mu_{j-1}, \rho))^2 \right. \\ &\left. + (m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2 (\mu_{j-1}, \rho)] \tau_{j-1} \right\} \end{aligned}$$

Nous éliminons par intégration σ_1 nous trouvons (2.3.23) donnée dans le théorème.

Nous éliminons par intégration μ_j , $j = k, \dots, 1$ de (2.3.23) comme suit

après un calcul simple, nous trouvons :

$$\begin{aligned} a_k(\rho) (\mu_k - \hat{\mu}_k(\mu_{k-1}, \rho))^2 \tau_{k-1} + b_k(\rho) (\mu_k - \overline{\mu_k(\rho)})^2 \tau_k &= \\ = (\tau_{k-1} a_k(\rho) + \tau_k b_k(\rho)) (\mu_k - \overline{\mu_k(\rho)})^2 + \frac{\tau_{k-1} a_k(\rho) \tau_k b_k(\rho)}{\tau_{k-1} a_k(\rho) + \tau_k b_k(\rho)} (\hat{\mu}_k(\mu_{k-1}, \rho) - \overline{\mu_k(\rho)})^2 \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

où

$$\begin{aligned} a_k(\rho) &= 1 + (1 - \rho)^2 (m_k - m_{k-1} - 1) \\ b_k(\rho) &= \frac{(n - m_k - 1) \rho^2 (1 - \rho)^2}{1 + (n - m_k - 1) (1 - \rho)^2} \\ \overline{\mu_k(\rho)} &= \frac{a_k(\rho) \tau_{k-1} \hat{\mu}_k(\mu_{k-1}, \rho) + b_k(\rho) \tau_k \overline{\mu_k(\rho)}}{a_k(\rho) \tau_{k-1} + b_k(\rho) \tau_k} \end{aligned}$$

$\overline{\mu_k(\rho)}$ et $\hat{\mu}_k(\mu_{k-1}, \rho)$ sont respectivement données par (2.3.12) et (2.3.11).

- nous rappelons que

$$\begin{aligned} (n - m_k - 1) S_{k+1}^2 (\mu_k, \rho) &= \frac{(n - m_k - 1) \rho^2 (1 - \rho)^2}{1 + (n - m_k - 1) (1 - \rho)^2} (\mu_k - \overline{\mu_k(\rho)}) \\ &+ (n - m_k - 2) S_{k+1}^2 (\rho) \end{aligned}$$

où $(n - m_k - 2) S_{k+1}^2 (\rho)$ est donnée par (2.3.13), d'après (2.3.26); (2.3.23) s'écrit :

$$\begin{aligned}
P(\underline{m}, \rho, \underline{\tau}, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k / \underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \times \prod_{l'=2}^k \tau_{l'-2}^{\frac{m_{l'} - m_{l'-1}}{2} - 1} \\
&\times \frac{\tau_k^{\frac{n-m_k-1}{2} - 1} (1 + (1 - \rho)^2 (n - m_k - 1))^{-\frac{1}{2}}}{\left[(n - 2) S^2(\underline{\mu}^*, \underline{\tau}, \rho) + (\tau_{k-1} a_k(\rho) + \tau_k b_k(\rho)) \left(\mu_k - \overline{\mu_k(\rho)} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}}
\end{aligned} \tag{2.3.27}$$

où

$$\begin{aligned}
(n - 2) S^2(\underline{\mu}^*, \underline{\tau}, \rho) &= A(\mu_1, \rho) + (m_k - m_{k-1} - 1) S_k^2(\mu_{k-1}, \rho) \tau_{k-1} + (n - m_k - 2) S_{k+1}^2(\rho) \tau_k \\
&+ \frac{\tau_{k-1} a_k(\rho) \tau_k b_k(\rho)}{\tau_{k-1} a_k(\rho) + \tau_k b_k(\rho)} \left(\widehat{\mu}_k(\mu_{k-1}, \rho) - \overline{\mu_k(\rho)} \right)^2 \\
&+ \sum_{j=2}^{k-1} \left[(1 + (1 - \rho)^2 (m_j - m_{j-1} - 1)) (\mu_j - \widehat{\mu}_j(\mu_{j-1}, \rho))^2 + \right. \\
&\quad \left. (m_j - m_{j-1} - 1) S_j^2(\mu_{j-1}, \rho) \tau_{j-1} \right]
\end{aligned}$$

où $\underline{\mu}^* = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1})$.

Remarque

Dans l'expression (2.3.27), nous remarquons que la loi conditionnelle de μ_k sachant tous les autres paramètres, une loi de Student à $(n - 2)$ degrés de liberté avec $\overline{\mu_k(\rho)}$ comme paramètre de position et $\frac{\tau_{k-1} a_k(\rho) + \tau_k b_k(\rho)}{S^2(\underline{\mu}^*, \underline{\tau}, \rho)}$ comme paramètre de précision.

En éliminant μ_k par intégration, nous obtenons

$$\begin{aligned}
P(\underline{m}, \rho, \underline{\tau}, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1} / \underline{y}) &\propto \left(\prod_{l=1}^k \frac{1}{m_{l+1} - 2(l+1) + 1} \right) \tau_k^{\frac{n-m_k-1}{2} - 1} (1 + (1 - \rho)^2 (n - m_k - 1))^{-\frac{1}{2}} \times \\
&\times \frac{[\tau_{k-1} a_k(\rho) + \tau_k b_k(\rho)]^{-\frac{1}{2}}}{[S^2(\underline{\mu}^*, \underline{\tau}, \rho)]^{\frac{n-2}{2}}} \times \prod_{l'=2}^k \tau_{l'-2}^{\frac{m_{l'} - m_{l'-1}}{2} - 1}
\end{aligned}$$

Remarque

$$P(\underline{m}, \rho, \underline{\tau}, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1} / \underline{y}) = \prod_{j=1}^{k-1} P(\mu_j / \mu_{j-1}, \dots, \mu_1, \rho, \underline{m}, \underline{\tau}, \underline{y}) P(\underline{\tau}, \rho, \underline{m} / \underline{y})$$

Les lois de probabilité conditionnelles $P(\mu_j / \mu_{j-1}, \dots, \mu_1, \rho, \underline{m}, \underline{\tau}, \underline{y})$ sont des lois de student ; elles ne sont pas liées par une quelconque relation de récurrence mais leurs degrés de liberté sont respectivement égaux à $(n - k + j - 2)$, $j = 1, \dots, k$.

Nous proposons le calcul dans le détail lorsque k est égal à 2.

Théorème

La densité de probabilité a posteriori du vecteur $\underline{\tau} = \left(\tau_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \tau_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2} \right)$ est donnée par

$$P(\underline{\tau} \mid \underline{y}) = \begin{cases} \sum_{m_2=4}^{n-2} \sum_{m_1=2}^{m_2-2} \int P(m_1, m_2, \rho, \underline{\tau} \mid \underline{y}) d\rho & \text{si } \underline{\tau} \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3.29)$$

où

$$P(m_1, m_2, \rho, \underline{\tau} \mid \underline{y}) \propto \frac{1}{m_2-3} \left(1 + (1-\rho)^2 (n-m_2-1) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \times \frac{\tau_1^{\frac{m_2-m_1-1}{2}-1} \tau_2^{\frac{n-m_2-1}{2}-1}}{(\tau_1 a(\rho) + \tau_2 b(\rho))^{\frac{1}{2}}} \times \frac{[E_1 + E_2 + E_3]^{-\frac{1}{2}}}{[S^2(\underline{\tau}, \rho)]^{\frac{n-3}{2}}} \quad (2.3.30)$$

avec

$$E_1 = E_1(\underline{m}, \rho) = m_1 (1-\rho)^2 \quad (2.3.31)$$

$$E_2 = E_2(\underline{m}, \rho) = \frac{(m_2 - m_1 - 1) \rho^2 (1-\rho)^2}{1 + (m_2 - m_1 - 1) (1-\rho)^2} \quad (2.3.32)$$

$$E_3 = E_3(\underline{m}, \rho, \underline{\tau}) = \frac{\tau_1 a(\rho) \tau_2 b(\rho)}{\tau_1 a(\rho) + \tau_2 b(\rho)} \frac{\rho^2}{1 + (m_2 - m_1 - 1) (1-\rho)^2} \quad (2.3.33)$$

$$a(\rho) = 1 + (1-\rho)^2 (m_2 - m_1 - 1) \quad (2.3.34)$$

$$b(\rho) = \frac{(n - m_2 - 1) \rho^2 (1-\rho)^2}{1 + (n - m_2 - 1) (1-\rho)^2} \quad (2.3.35)$$

$$(n-3) S^2(\underline{\tau}, \rho) = (m_1 - 1) S_1^2(\rho) + (m_2 - m_1 - 2) S_2^2(\rho) \\ + \frac{ab}{a+b} \left(\widehat{\mu}_1(\rho) - \overline{\mu_1(\rho)} \right)^2 \\ + \frac{[E_1 + E_2] E_3}{E_1 + E_2 + E_3} \left(\mu_1^*(\rho) - \overline{\overline{\mu_1(\rho)}} \right)^2 \quad (2.3.36)$$

où

$$\mu_1^*(\rho) = \frac{E_1 \widehat{\mu}_1(\rho) + E_2 \overline{\mu_1(\rho)}}{E_1 + E_2} \quad (2.3.37)$$

$$\overline{\overline{\mu_1(\rho)}} = \frac{1 + (m_2 - m_1 - 1) (1-\rho)^2}{\rho} \overline{\mu_2(\rho)} \\ - \frac{y_{m_1+1} - \rho y_{m_1} + (1-\rho) \sum_{i=m_1+2}^{m_2} (y_i - \rho y_{i-1})}{\rho} \quad (2.3.38)$$

et $\widehat{\mu}_1(\rho)$, $(m_1 - 1) S_1^2(\rho)$, $\overline{\mu_j(\rho)}$ $j = \overline{1, 2}$, $(m_2 - m_1 - 2) S_2^2(\rho)$ sont données par (2.3.9), (2.3.10), (2.3.12) et (2.3.13).

Démonstration

Pour $k = 2$, (2.3.27) devient

$$P(m_1, m_2, \tau_1, \tau_2, \mu_1, \mu_2, \rho / \underline{y}) \propto \frac{1}{m_2 - 3} (1 + (1 - \rho)^2 (n - m_2 - 1))^{-\frac{1}{2}} \\ \times \frac{\tau_1^{\frac{n - m_2 - 1}{2} - 1} \tau_2^{\frac{m_2 - m_1 - 1}{2} - 1}}{\left[(n - 2) S^2(\mu_1, \tau_1, \tau_2, \rho) + (\tau_1 a(\rho) + \tau_2 b(\rho)) \left(\mu_2 - \overline{\mu_2(\rho)} \right)^2 \right]^{\frac{n - 1}{2}}}$$

la loi de probabilité conditionnelle de μ_2 sachant tous les autres paramètres est une loi de student à $(n - 2)$ d.d.l avec $\overline{\mu_2(\rho)}$ comme paramètre de position et $\frac{\tau_1 a(\rho) + \tau_2 b(\rho)}{S^2(\mu_1, \underline{\tau}, \rho)}$ comme paramètre de précision; après élimination de μ_2 par intégration, nous trouvons

$$P(m_1, m_2, \rho, \tau_1, \tau_2, \mu_1 / \underline{y}) \propto \frac{1}{m_2 - 3} \times (1 + (1 - \rho)^2 (n - m_2 - 1))^{-\frac{1}{2}} \\ \times \frac{\tau_1^{\frac{m_2 - m_1}{2} - 1} \tau_2^{\frac{n - m_2 - 1}{2} - 1}}{[\tau_1 a(\rho) + \tau_2 b(\rho)]^{\frac{1}{2}} [S^2(\mu_1, \underline{\tau}, \rho)]^{\frac{n - 2}{2}}}$$

Nous voulons intégrer par rapport à μ_1 .

Nous avons

$$(n - 2) S^2(\mu_1, \underline{\tau}, \rho) = A(\mu_1, \rho) + (m_2 - m_1 - 1) S_2^2(\mu_1, \rho) \tau_1 + \\ + (n - m_2 - 2) S_3^2(\rho) + \frac{\tau_1 a(\rho) \tau_2 b(\rho)}{\tau_1 a(\rho) + \tau_2 b(\rho)} \left(\widehat{\mu}_2(\mu_1, \rho) - \overline{\mu_2(\rho)} \right)^2$$

où

$$A(\mu_1, \rho) = m_1 (1 - \rho)^2 (\mu_1 - \widehat{\mu}_1(\rho))^2 + (m_1 - 1) S_1^2(\rho)$$

$$(m_2 - m_1 - 1) S_2^2(\mu_1, \rho) = \frac{(m_2 - m_1 - 1) \rho^2 (1 - \rho)^2}{1 + (m_2 - m_1 - 1) (1 - \rho)^2} \left(\mu_1 - \overline{\mu_1(\rho)} \right)^2 + \\ + (m_2 - m_1 - 2) S_3^2(\rho)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_1 a(\rho) \tau_2 b(\rho)}{\tau_1 a(\rho) + \tau_2 b(\rho)} \left(\widehat{\mu}_2(\mu_1, \rho) - \overline{\mu_2(\rho)} \right)^2 = \\ & = \frac{\tau_1 a(\rho) \tau_2 b(\rho)}{\tau_1 a(\rho) + \tau_2 b(\rho)} \frac{\rho^2}{(1 + (m_2 - m_1 - 1)(1 - \rho)^2)^2} \left(\mu_1 - \overline{\overline{\mu_1(\rho)}} \right)^2 \end{aligned}$$

où $\widehat{\mu}_2(\mu_1, \rho)$ et $\overline{\overline{\mu_1(\rho)}}$ sont respectivement données par : (2.3.11) et (2.3.38) .

Après un calcul simple, nous trouvons

$$(n - 2) S^2(\mu_1, \underline{\tau}, \rho) = (E_1 + E_2 + E_3) (\mu_1(\rho) - \mu_1^{**}(\rho))^2 + (n - 3) S^2(\underline{\tau}, \rho)$$

où

$$\mu_1^{**}(\rho) = \frac{(E_1 + E_2) \mu_1^*(\rho) + E_3 \overline{\overline{\mu_1(\rho)}}}{E_1 + E_2 + E_3}$$

avec $E_1, E_2, E_3, (n - 3) S^2(\underline{\tau}, \rho), \mu_1^*(\rho)$ et $\overline{\overline{\mu_1(\rho)}}$ sont données par (2.3.31) , (2.3.32) , (2.3.33) , (2.3.36) , (2.3.37) et (2.3.38) . Donc (2.3.39) s'écrit

$$\begin{aligned} & P(m_1, m_2, \rho, \tau_1, \tau_2, \mu_1 / \underline{y}) \propto \frac{1}{m_2 - 3} \\ & \times \left(1 + (1 - \rho)^2 (n - m_2 - 1) \right)^{-\frac{1}{2}} [\tau_1 a(\rho) + \tau_2 b(\rho)]^{-\frac{1}{2}} \\ & \times \frac{\tau_1^{\frac{m_2 - m_1}{2} - 1} \tau_2^{\frac{n - m_2 - 1}{2} - 1}}{\left[(n - 3) S^2(\underline{\tau}, \rho) + (E_1 + E_2 + E_3) (\mu_1 - \mu_1^{**}(\rho))^2 \right]^{\frac{n - 2}{2}}} \end{aligned}$$

Nous remarquons que la loi conditionnelle de μ_1 sachant tous les autres paramètres est une loi de student à $(n - 3)$ d.d.l avec $\mu_1^{**}(\rho)$ comme paramètre de position et $\frac{E_1 + E_2 + E_3}{S^2(\underline{\tau}, \rho)}$ comme paramètre de précision.

Nous intégrons par rapport à μ_1 , nous trouvons (2.3.30) donnée dans le théorème.

2.6 Application numérique

Dans cette section, nous allons présenter les résultats de simulation pour l'estimation des points de rupture m_1 et m_2 à l'aide du mode et de la moyenne a posteriori et étudier l'impact éventuel d'un changement dans la valeur du coefficient d'autocorrélation sur l'estimation des points de rupture à partir du modèle

$$\begin{aligned} y_i &= \mu_1 + u_i; & i &= \overline{1, m_1} \\ y_i &= \mu_2 + u_i; & i &= \overline{m_1 + 1, m_2} \\ y_i &= \mu_3 + u_i; & i &= \overline{m_2 + 1, n} \\ u_i &= \rho u_{i-1} + e_i; & i &= \overline{1, n} \end{aligned}$$

où

$$e_i \sim \begin{cases} N(0, \sigma_1^2); & i = \overline{1, m_1} \\ N(0, \sigma_2^2); & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ ..N(0, \sigma_3^2); & i = \overline{m_2 + 1, n} \end{cases}$$

dans les deux cas suivants

-Les moyennes sont distinctes et connues

-Les moyennes sont égales et inconnues

Nous nous sommes particulièrement intéressés aux lois de probabilité a posteriori conditionnelles suivantes

$p(m_1, m_2 / \rho, \underline{y})$ dans le cas où les moyennes sont distinctes et connues donnée par (2.1.18)
et $p(m_1, m_2 / \rho, \mu, \underline{y})$ dans le cas où les moyennes sont égales et inconnues donnée par (2.2.12)

Tous les graphes relatifs à ce chapitre sont donnés par Annexe 2

2.6.1 Les moyennes sont distinctes et connues

Nous avons simulé 200 échantillons de taille $n = 60$ à partir du modèle

$$\begin{aligned} y_i &= 1 + u_i; & i &= \overline{1, m_1} \\ y_i &= 2 + u_i; & i &= \overline{m_1 + 1, m_2} \\ y_i &= 3 + u_i; & i &= \overline{m_2 + 1, n} \\ u_i &= 0.1u_{i-1} + e_i; & i &= \overline{1, 60} \end{aligned}$$

$$e_i \sim \begin{cases} N(0, 0.25); & i = \overline{1, m_1} \\ N(0, 1); & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ ..N(0, 4); & i = \overline{m_2 + 1, 60} \end{cases}$$

en prenant pour valeur initiale $y_0 = 0.5$.

pour les valeurs suivantes des points de rupture

$$m_1 = 8, m_2 = 13.$$

$$m_1 = 20, m_2 = 40.$$

$$m_1 = 47, m_2 = 52.$$

Les résultats de ces simulations sont donnés respectivement par les figures 38, 39 et 40.

Nous avons également simulé 200 échantillons de taille $n = 60$ à partir du modèle

$$\begin{aligned}
 y_i &= 1 + u_i; & i &= \overline{1, m_1} \\
 y_i &= 2 + u_i; & i &= \overline{m_1 + 1, m_2} \\
 y_i &= 3 + u_i; & i &= \overline{m_2 + 1, n} \\
 u_i &= 0.5u_{i-1} + e_i; & i &= \overline{1, 60} \\
 e_i &\sim \begin{cases} N(0, 0.25); & i = \overline{1, m_1} \\ N(0, 1); & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ ..N(0, 4); & i = \overline{m_2 + 1, 60} \end{cases}
 \end{aligned}$$

en prenant pour valeur initiale $y_0 = 0.5$.

pour les valeurs suivantes des points de rupture

$$m_1 = 20, m_2 = 40.$$

$$m_1 = 47, m_2 = 52.$$

les résultats de ces simulations sont donnés respectivement par les figures 41 et 42

Nous avons, également, simulé 200 échantillons de taille $n=60$ à partir du modèle

$$\begin{aligned}
 y_i &= 1 + u_i; & i &= \overline{1, m_1} \\
 y_i &= 2 + u_i; & i &= \overline{m_1 + 1, m_2} \\
 y_i &= 3 + u_i; & i &= \overline{m_2 + 1, n} \\
 u_i &= 0.9u_{i-1} + e_i; & i &= \overline{1, 60} \\
 e_i &\sim \begin{cases} N(0, 0.25); & i = \overline{1, m_1} \\ N(0, 1); & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ ..N(0, 4); & i = \overline{m_2 + 1, 60} \end{cases}
 \end{aligned}$$

pour les valeurs suivantes des points de rupture

$$m_1 = 8, m_2 = 13.$$

$$m_1 = 20, m_2 = 40.$$

$$m_1 = 47, m_2 = 52$$

Les résultats de ces simulations sont donnés respectivement par les figures 43, 44 et 45.

Aussi, nous avons simulé 100 échantillons pour une petite taille d'échantillon ($n = 20$)

$$\begin{aligned} y_i &= 1 + u_i; & i &= \overline{1, 8} \\ y_i &= 2 + u_i; & i &= \overline{9, 13} \\ y_i &= 3 + u_i; & i &= \overline{14, 20} \\ u_i &= \rho u_{i-1} + e_i; & i &= \overline{1, 20} \end{aligned}$$

$$e_i \sim \begin{cases} N(0, 0.25); & i = \overline{1, m_1} \\ N(0, 1); & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ ..N(0, 4); & i = \overline{m_2 + 1, 20} \end{cases}$$

en prenant pour valeur initiale $y_0 = 0.5$.

pour les valeurs suivantes du coefficient d'autocorrélation $\rho = 0.4$, $\rho = 0.5$, $\rho = 0.9$

Les résultats de ces simulations sont donnés respectivement par les figures 46, 47 et 48

2.6.2 Les moyennes sont égales et inconnues:

Nous avons simulé 100 échantillons de taille $n = 20$ à partir du modèle

$$\begin{aligned}y_i &= \mu + u_i; \\u_i &= \rho u_{i-1} + e_i; \quad i = \overline{1, 20}\end{aligned}$$

Avec $\mu = 0$, et

$$e_i \sim \begin{cases} N(0, 0.25); & i = \overline{1, 8} \\ N(0, 1); & i = \overline{9, 13} \\ ..N(0, 4); & i = \overline{14, 20} \end{cases}$$

en prenant pour valeur initiale $y_0 = 0.5$.

pour les valeurs suivantes du coefficient d'autocorrélation $\rho = 0.1$, $\rho = 0.5$, $\rho = 0.9$

Les résultats de ces simulations sont donnés respectivement par les figures 50, 51 et 52

Nous avons également simulé 100 échantillons de taille $n = 60$ à partir du modèle

$$\begin{aligned} y_i &= \mu + u_i; \\ u_i &= \rho u_{i-1} + e_i; \quad i = \overline{1, 60} \end{aligned}$$

Avec $\mu = 0$, et

$$e_i \sim \begin{cases} N(0, 0.25); & i = \overline{1, 20} \\ N(0, 1); & i = \overline{21, 40} \\ ..N(0, 4); & i = \overline{41, 60} \end{cases}$$

en prenant pour valeur initiale $y_0 = 0.5$.

pour les valeurs suivantes du coefficient d'autocorrélation $\rho = 0.4$, $\rho = 0.5$, $\rho = 0.9$

Les résultats de ces simulations sont donnés respectivement par les figures 53, 54 et 55

Aussi, nous avons simulé 100 échantillons de taille $n = 100$ à partir du modèle

$$\begin{aligned} y_i &= \mu + u_i; \\ u_i &= \rho u_{i-1} + e_i; \quad i = \overline{1, 100} \end{aligned}$$

Avec $\mu = 0$, et

$$e_i \sim \begin{cases} N(0, 0.25); & i = \overline{1, 40} \\ N(0, 1); & i = \overline{41, 60} \\ ..N(0, 4); & i = \overline{61, 100} \end{cases}$$

en prenant pour valeur initiale $y_0 = 0.5$.

pour les valeurs suivantes du coefficient d'autocorrélation $\rho = 0.4$, $\rho = 0.5$, $\rho = 0.9$

Les résultats de ces simulations sont donnés respectivement par les figures 56, 57 et 58

2.7 Interprétation

Les figures 38, 39,...et 58 sont les représentations graphiques des valeurs estimées du premier et du deuxième point de rupture respectivement par le mode et la moyenne a posteriori.

Nous remarquons que la distribution du mode a posteriori (respectivement de la moyenne) a une allure symétrique autour de leurs modes respectifs lorsque les écarts dans la moyenne et dans la variance sont sensibles; ces distributions n'ont plus une forme aussi nette lorsque les écarts sont réduits. De plus nous remarquons que les modes de ces distributions se révèlent comme étant un très bon estimateur des différents points de rupture.

Notons, quand même, que le mode de la distribution de fréquence des modes a posteriori est un meilleur estimateur comme le confirment les graphes de 38 à 58.

Nous remarquons,également,que l'estimation des points de rupture m_1, m_2 par le mode des modes a posteriori donnent de meilleurs résultats qu'avec la moyenne des modes bien que, au sens du RMSE (Root Mean Square Error), les moyennes a posteriori soient meilleures comme nous l'illustrons dans la figure49.

Remarquons, tout de même,qu'un écart marqué entre les différentes variances contribue à une bonne détection des points de rupture,mieux que ne le ferait un écart plus faible.

Chapitre 3

Analyse bayésienne d'un processus autorégressif d'ordre p avec ruptures multiples dans la tendance

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le modèle de régression linéaire multiple où les erreurs suivent un processus autoregressif d'ordre p ($p \geq 1$). Il s'agit d'une extension des travaux de Doumaz (1999) au cas de ruptures multiples dans ce modèle.

Nous supposons que ce modèle subit deux ruptures dans la tendance.

3.2 Le modèle de base

Le modèle considéré est le suivant :

$$\begin{cases} y_i = \underline{x}_i' b_1 + U_i; & i = \overline{1, m_1} \\ y_i = \underline{x}_i' b_2 + U_i; & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ y_i = \underline{x}_i' b_3 + U_i; & i = \overline{m_2 + 1, n} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Nous supposons que $\{U_i, \quad i = 1, \dots, n\}$ est une réalisation d'un processus autorégressif d'ordre p ($AR(p)$), c'est-à-dire

$$U_i = \sum_{j=1}^p \rho_j U_{i-j} + e_i$$

où $e_1, e_2, \dots, e_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi $N(0, \sigma^2)$.

$U_0, U_{-1}, \dots, U_{1-p}$ sont des données initiales.

y_i est la $i^{\text{ème}}$ observation de la variable à expliquer ou endogène.

$\underline{x}_i, i = \overline{1, m_1}$ est un vecteur constitué de k variables dites explicatives ou exogènes.

$\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ sont les paramètres de régression de dimension $(k \times 1)$.

Nous supposons que $\underline{b}_1 \neq \underline{b}_2 \neq \underline{b}_3$ et $\underline{b}_1 \neq \underline{b}_3$.

m_1, m_2 sont deux points de rupture.

$\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, m_1, m_2, \sigma^2, \rho_1, \dots, \rho_p$ sont supposés inconnus.

Nous supposons que ce modèle reflète une situation où la variabilité du phénomène est constante.

Remarque

Dans ce chapitre, les changements portent uniquement sur les paramètres de régression.

Soit le modèle (3.2.1) ci-dessus

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- H_1 le couple $(m_1, m_2)'$ des points de rupture est uniformément distribué sur $\{p+1, \dots, m_2-p-1\} \times \{2p+2, \dots, n-p-1\}$
- H_2 l'ensemble $G = \left\{ \rho = (\rho_1, \dots, \rho_p)' ; \text{les racines de } \rho(\beta) = 1 - \rho_1\beta - \dots - \rho_p\beta^p \text{ sont à l'extérieur du cercle unit} \right\}$ est muni de la loi uniforme. Les conditions sur le vecteur $\underline{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_p)'$ garantissent la stationnarité du processus autorégressif.
- H_3 Nous supposons que la distribution conjointe a priori du vecteur $\underline{b} = (\underline{b}'_1, \underline{b}'_2, \underline{b}'_3)'$ et de $R = \frac{1}{\sigma^2}$ est définie comme suit : $p(\underline{b}, r) = p(\underline{b}/r)p(r)$ où
 - $p(\underline{b}/r)$ est la loi normale $3k$ -dimensionnelle de moyenne, le vecteur $\underline{b}_0 \in \mathbb{R}^{3k}$ et de matrice de covariance $(rP)^{-1}$ i.e $N_{3k}(\underline{b}_0, (rP)^{-1})$. P est une matrice $(3k \times 3k)$ symétrique définie positive, $\underline{b}_0$ et P sont supposés connus.
 - La loi de probabilité a priori de R est une loi gamma de paramètres α et β ($\alpha > 0, \beta > 0$) supposés connus.
 c'est-à-dire $p(r) \propto r^{\alpha-1} \exp(-\beta r)$, $r > 0$. Nous supposons de plus $(m_1, m_2)', \underline{\rho}, (\underline{b}, R)$ sont indépendants.

Cette partie est une extension des travaux de Doumaz (1999). Ce dernier a étudié le cas où le modèle ne subit qu'une seule rupture (i.e $\underline{b}_2 = \underline{b}_3$).

$$Z_2 = \begin{bmatrix} \underline{x}'_{m_1+p+1} - \sum_{j=1}^p \rho_j \underline{x}'_{m_1+p+1-j} \\ \dots \\ \underline{x}'_{m_2} - \sum_{j=1}^p \rho_j \underline{x}'_{m_2-j} \end{bmatrix}, \quad d'ordre \ (m_2 + m_1 - p, k)$$

$$Z_3 = \begin{bmatrix} \underline{x}'_{m_2+p+1} - \sum_{j=1}^p \rho_j \underline{x}'_{m_2+p+1-j} \\ \dots \\ \underline{x}'_n - \sum_{j=1}^p \rho_j \underline{x}'_{n-j} \end{bmatrix}, \quad d'ordre \ (n - m_2 - p, k)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^p \rho_j \underline{x}'_{m_1+1-j} \\ \dots \\ -\sum_{j=i-m_1}^p \rho_j \underline{x}'_{i-j} \\ \dots \\ -\rho_p \underline{x}'_{m_1} \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^p \rho_j \underline{x}'_{m_2+1-j} \\ \dots \\ -\sum_{j=i-m_2}^p \rho_j \underline{x}'_{i-j} \\ \dots \\ -\rho_p \underline{x}'_{m_2} \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \underline{x}'_{m_1+1} \\ \underline{x}'_{m_2+2} - \rho_1 \underline{x}'_{m_1+1} \\ \dots \\ \underline{x}'_i - \sum_{j=1}^{i-m_1-1} \rho_j \underline{x}'_{i-j} \\ \dots \\ \underline{x}'_{m_1+p} - \sum_{j=1}^{p-1} \rho_j \underline{x}'_{m_1+p-j} \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} \underline{x}'_{m_2+1} \\ \underline{x}'_{m_2+2} - \rho_1 \underline{x}'_{m_2+1} \\ \dots \\ \underline{x}'_i - \sum_{j=1}^{i-m_2-1} \rho_j \underline{x}'_{i-j} \\ \dots \\ \underline{x}'_{m_2+p} - \sum_{j=1}^{p-1} \rho_j \underline{x}'_{m_2+p-j} \end{bmatrix}$$

Démonstration

Nous écrivons le modèle (3.2.1) de façon équivalente comme suit :

1- pour $i = \overline{1, m_1}$ et $i - p = \overline{1, m_1}$ alors

$$\begin{aligned} y_i &= \underline{x}'_i b_1 + U_i \\ y_{i-1} &= \underline{x}'_{i-1} b_1 + U_{i-1} \\ &\dots \\ y_{i-p} &= \underline{x}'_{i-p} b_1 + U_{i-p} \end{aligned} \quad (1) \quad (p)$$

En multipliant par $\rho_1, \dots, \rho_p$ les équations (1), ..., (p) et en faisant la différence, nous obtenons

$$y_i - \sum_{j=1}^p \rho_j y_{i-j} = \begin{cases} \underline{x}'_i - \sum_{j=1}^p \rho_j \underline{x}'_{i-j} + e_i & \text{si} \\ \max(1, p+1) \leq i \leq \min(m_1, m_1+p) \\ \text{i.e si } p+1 \leq i \leq m_1 \end{cases}$$

2- pour $m_1 + 1 \leq i = m_1 + k \leq m_2$

2.a si $1 \leq m_1 + k - p \leq m_1$ i.e $1 \leq i - p \leq m_1$ alors dans ce cas

$$\begin{aligned}
y_{m_1+k} &= \underline{x}'_{m_1+k} \underline{b}_2 + U_{m_1+k} \\
y_{m_1+k-1} &= \underline{x}'_{m_1+k-1} \underline{b}_2 + U_{m_1+k-1} \\
&\dots \\
y_{m_1+1} &= \underline{x}'_{m_1+1} \underline{b}_2 + U_{m_1+1} \\
y_{m_1} &= \underline{x}'_{m_1} \underline{b}_1 + U_{m_1} \\
&\dots \\
y_{m_1+k-p} &= \underline{x}'_{m_1+k-p} \underline{b}_1 + U_{m_1+k-p} \quad (p)
\end{aligned} \tag{1}$$

En faisant la différence $y_{m_1+k} - \sum_{j=1}^p \rho_j y_{m_1+k-j}$ nous obtenons

$$y_{m_1+k} - \sum_{j=1}^p \rho_j y_{m_1+k-j} = \left(\underline{x}'_{m_1+k} - \sum_{j=1}^{k-1} \rho_j \underline{x}'_{m_1+k-j} \right) \underline{b}_2 - \left(\sum_{j=k}^p \rho_j \underline{x}'_{m_1+k-j} \right) \underline{b}_1 + e_{m_1+k}$$

c'est-à-dire

$$y_i - \sum_{j=1}^p \rho_j y_{i-j} = \begin{cases} \left(\underline{x}'_i - \sum_{j=1}^{i-m_1-1} \rho_j \underline{x}'_{i-j} \right) \underline{b}_2 - \left(\sum_{j=i-m_1}^p \rho_j \underline{x}'_{i-j} \right) \underline{b}_1 + e_i \\ \text{pour } \max(p+1, m_1+1) \leq i \leq \min(m_2, m_1+p) \\ \text{i.e } m_1+1 \leq i \leq m_1+p \end{cases}$$

2.b si $m_1 + 1 \leq m_1 + k - p \leq m_2$ i.e $m_1 + 1 \leq i - p \leq m_2$ alors

$$\begin{aligned}
y_{m_1+k} &= \underline{x}'_{m_1+k} \underline{b}_2 + U_{m_2+k} \\
y_{m_1+k-1} &= \underline{x}'_{m_1+k-1} \underline{b}_2 + U_{m_2+k-1} \\
&\dots \\
y_{m_1+k-p} &= \underline{x}'_{m_1+k-p} \underline{b}_2 + U_{m_1+k-p} \quad (p)
\end{aligned} \tag{1}$$

nous aurons dans ce cas

$$y_{m_1+k} - \sum_{j=1}^p \rho_j y_{m_1+k-j} = \left(\underline{x}'_{m_1+k} - \sum_{j=1}^p \rho_j \underline{x}'_{m_1+k-j} \right) \underline{b}_2 + e_{m_1+k}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
y_i - \sum_{j=1}^p \rho_j y_{i-j} &= \left(\underline{x}'_i - \sum_{j=1}^p \rho_j \underline{x}'_{i-j} \right) \underline{b}_2 + e_i \\
\text{pour } \max(m_1 + p + 1, m_1 + 1) &\leq i \leq \min(m_2, m_2 + p) \\
\text{i.e } m_1 + p + 1 &\leq i \leq m_2
\end{aligned}$$

3- pour $m_2 + 1 \leq i = m_2 + k \leq n$

3.a si $m_1 + 1 \leq m_2 + k - p \leq m_2$ i.e $m_1 + 1 \leq i - p \leq m_2$

$$\begin{aligned}
y_{m_2+k} &= \underline{x}'_{m_2+k} \underline{b}_3 + U_{m_2+k} \\
y_{m_2+k-1} &= \underline{x}'_{m_2+k-1} \underline{b}_3 + U_{m_2+k-1} \\
&\dots \\
y_{m_2+1} &= \underline{x}'_{m_2+1} \underline{b}_3 + U_{m_2+1} \\
y_{m_2} &= \underline{x}'_{m_2} \underline{b}_2 + U_{m_2} \\
&\dots \\
y_{m_2+k-p} &= \underline{x}'_{m_2+k-p} \underline{b}_2 + U_{m_2+k-p}
\end{aligned}$$

Nous aurons donc

$$y_{m_2+k} - \sum_{j=1}^p \rho_j y_{m_2+k-j} = \left(\underline{x}'_{m_2+k} - \sum_{j=1}^{k-1} \rho_j \underline{x}'_{m_2+k-j} \right) \underline{b}_3 - \left(\sum_{j=k}^p \rho_j \underline{x}'_{m_2+k-j} \right) \underline{b}_2 + e_{m_2+k}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
y_i - \sum_{j=1}^p \rho_j y_{i-j} &= \left(\underline{x}'_i - \sum_{j=1}^{i-m_2-1} \rho_j \underline{x}'_{i-j} \right) \underline{b}_3 - \left(\sum_{j=i-m_2}^p \rho_j \underline{x}'_{i-j} \right) \underline{b}_2 + e_i \\
\text{pour } \max(m_2, m_1 + p) + 1 &\leq i \leq \min(m_2 + p, m_2) \\
\text{i.e } m_2 + 1 &\leq i \leq m_2 + p
\end{aligned}$$

car nous avons supposé $m_2 + p \leq n$, et d'après l'hypothèse du théorème.

3.b si $m_2 + 1 \leq m_2 + k - p \leq n$ i.e $m_2 + 1 \leq i - p \leq n$ alors

$$\begin{aligned}
y_{m_2+k} &= \underline{x}'_{m_2+k} \underline{b}_3 + U_{m_2+k} \\
y_{m_2+k-1} &= \underline{x}'_{m_2+k-1} \underline{b}_3 + U_{m_2+k-1} \quad (1) \\
&\dots \\
y_{m_2+k-p} &= \underline{x}'_{m_2+k-p} \underline{b}_3 + U_{m_2+k-p} \quad (p)
\end{aligned}$$

En multipliant respectivement par $\rho_1, \dots, \rho_p$ les équations (1), ..., (p) puis en

faisant la différence, nous obtenons

$$y_{m_2+k} - \sum_{j=1}^p \rho_j y_{m_2+k-j} = \left(\underline{x}'_{m_2+k} - \sum_{j=1}^p \rho_j \underline{x}'_{m_2+k-j} \right) \underline{b}_3 + e_{m_2+k}$$

c'est-à-dire

$$y_i - \sum_{j=1}^p \rho_j y_{i-j} = \left(\underline{x}'_i - \sum_{j=1}^p \rho_j \underline{x}'_{i-j} \right) \underline{b}_3 + e_i$$

pour $m_2 + p + 1 \leq i \leq n$

Nous déduisons que le modèle (3.2.1) est équivalent à

$$y_i - \sum_{j=1}^p \rho_j y_{i-j} = \begin{cases} \left(\underline{x}'_i - \sum_{j=1}^p \rho_j \underline{x}'_{i-j} \right) \underline{b}_1 + e_i & \text{si } p+1 \leq i \leq m_1 \\ \left(\underline{x}'_i - \sum_{j=1}^{i-m_1-1} \rho_j \underline{x}'_{i-j} \right) \underline{b}_2 - \left(\sum_{j=i-m_1}^p \rho_j \underline{x}'_{i-j} \right) \underline{b}_1 + e_i & \text{si } m_1+1 \leq i \leq m_1+p \\ \left(\underline{x}'_i - \sum_{j=1}^p \rho_j \underline{x}'_{i-j} \right) \underline{b}_2 + e_i & \text{si } m_1+p+1 \leq i \leq m_2 \\ \left(\underline{x}'_i - \sum_{j=1}^{i-m_2-1} \rho_j \underline{x}'_{i-j} \right) \underline{b}_3 - \left(\sum_{j=i-m_2}^p \rho_j \underline{x}'_{i-j} \right) \underline{b}_2 + e_i & \text{si } m_2+1 \leq i \leq m_2+p \\ \left(\underline{x}'_i - \sum_{j=1}^p \rho_j \underline{x}'_{i-j} \right) \underline{b}_3 + e_i & \text{si } m_2+p+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (3.2.6)$$

$y_1, \dots, y_p$ sont considérées comme des données initiales.

Remarque

Le cas $m_2 \leq m_1+p$ n'est pas très intéressant dans la mesure où lorsque p est petit ($p = 1$ ou $p = 2$) $m_2 < m_1 + p$ donne $m_2 \leq m_1 < m_2$ ce qui est impossible ou bien $m_1 + 1 \leq m_2 < m_1 + p \iff m_2 = m_1 + 1$ et une seule donnée, pour $i = m_1 + 1$ ne permet pas d'apprécier la rupture si, éventuellement a eu lieu.

Le modèle (3.2.6) peut être réécrit sous forme matricielle

$$\underline{Y} = \underline{X}\underline{b} + \underline{E} \quad (3.2.7)$$

où $\underline{Y}$ et $\underline{X}$ sont données dans le théorème.

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} e_{p+1} \\ \dots \\ e_n \end{bmatrix}$$

Il est clair que la fonction de vraisemblance conditionnelle du paramètre $\underline{\theta} = (\underline{b}', \sigma^2, \underline{\rho}', \underline{m}')'$ est

$$\begin{aligned} L(\underline{\theta}/\underline{Y}) &\propto (\sigma^2)^{-\frac{n-p}{2}} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=p+1}^n e_i^2}{2\sigma^2} \right\} \\ &\propto r^{-\frac{n-p}{2}} \exp \left\{ -\frac{r}{2} (\underline{Y} - \underline{X}\underline{b})' (\underline{Y} - \underline{X}\underline{b}) \right\} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

où nous avons posé $\sigma^2 = \frac{1}{r}$

D'après l'hypothèse H_3 , la loi a priori de $(\underline{b}, r)$ est

$$\begin{aligned} P(\underline{b}, r) &= P(\underline{b}/r) P(r) \\ &= (\det(rP)^{-1})^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{b} - \underline{b}_0)' (rP) (\underline{b} - \underline{b}_0) \right\} r^{\alpha-1} \exp \{-\beta r\} \\ &\propto r^{\frac{3k}{2} + \alpha - 1} \exp \left\{ -r \left[\frac{1}{2} (\underline{b} - \underline{b}_0)' P (\underline{b} - \underline{b}_0) + \beta \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$P(\underline{m}) = P(m_1, m_2) = P(m_1/m_2) P(m_2)$$

Nous définissons $P(m_1/m_2)$ et $P(m_2)$ comme étant des lois uniformes discrètes sur les ensembles $\{p+1, \dots, m_2-p-1\}$ et $\{2p+2, \dots, n-p-1\}$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned} P(m_1, m_2) &= \frac{1}{m_2 - 2p - 1} \frac{1}{n - 3p - 2} \\ &\propto \frac{1}{m_2 - 2p - 1} \end{aligned}$$

et par suite la loi a priori du vecteur $\underline{\theta}$ est

$$P(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{m_2 - 2p - 1} r^{\frac{3k}{2} + \alpha - 1} \exp \left\{ -r \left[\frac{1}{2} (\underline{b} - \underline{b}_0)' P (\underline{b} - \underline{b}_0) + \beta \right] \right\} & \text{si } \theta \in \Theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.2.10)$$

où $\Theta = \mathbb{R}^{3k} \times \mathbb{R}_+^* \times G \times \{p+1, \dots, m_2-p-1\} \times \{2p+2, \dots, n-p-1\}$

D'après le théorème de Bayes, la loi a posteriori de $\underline{\theta}$ est :

$$\begin{aligned} P(\underline{\theta}/\underline{Y}) &\propto P(\underline{\theta}) L(\underline{\theta}/\underline{Y}) \\ &\propto \frac{1}{m_2 - 2p - 1} r^{\alpha^* - 1} \exp \{-r A_b\} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

où $\alpha^* = \frac{n-p-3k}{2} + \alpha$

$$A_b = \frac{1}{2} (\underline{b} - \underline{b}_0)' P (\underline{b} - \underline{b}_0) + \frac{1}{2} (\underline{Y} - \underline{X}\underline{b})' (\underline{Y} - \underline{X}\underline{b}) + B$$

Nous intégrons par rapport à r pour obtenir

$$\begin{aligned} P(\underline{b}, \underline{\rho}, m_1, m_2 / \underline{Y}) &\propto \int_0^{+\infty} \frac{1}{m_2 - 2p - 1} r^{\alpha^* - 1} \exp\{-r A_b\} dr \\ &\propto \frac{1}{m_2 - 2p - 1} [A_b]^{-\alpha^*} \end{aligned}$$

une intégration par rapport au vecteur $\underline{b}$, nous donne

$$\begin{aligned} P(\underline{m}, \underline{\rho} / \underline{Y}) &\propto \int_{\mathbb{R}^{3k}} P(\underline{m}, \underline{\rho}, \underline{b} / \underline{Y}) d\underline{b} \\ &\propto \int_{\mathbb{R}^{3k}} [A_b]^{-\alpha^*} d\underline{b} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{3k}} \left[\beta + \frac{1}{2} \left[(\underline{b} - \underline{b}_0)' P(\underline{b} - \underline{b}_0) + (\underline{Y} - \underline{Xb})' (\underline{Y} - \underline{Xb}) \right] \right]^{-\alpha^*} d\underline{b} \end{aligned}$$

pour calculer cette intégrale nous transformons l'expression A_b

$$A_b = \frac{1}{2} \left[(\underline{b} - \underline{b}_0)' P(\underline{b} - \underline{b}_0) + (\underline{Y} - \underline{Xb})' (\underline{Y} - \underline{Xb}) \right] + \beta$$

Nous avons

$$(\underline{Y} - \underline{Xb})' (\underline{Y} - \underline{Xb}) = (n - 3k) S^2 + (\underline{b} - \widehat{\underline{b}})' X' X (\underline{b} - \widehat{\underline{b}})$$

avec $(n - 3k) S^2$ donnée par (3.2.5)

Donc

$$\begin{aligned} A_b &= B + \frac{(n - 3k)}{2} S^2 + \frac{1}{2} (\underline{b} - \underline{b}^*)' (P + X' X) (\underline{b} - \underline{b}^*) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\underline{b}_0 - \widehat{\underline{b}})' P (P + X' X)^{-1} X' X (\underline{b}_0 - \widehat{\underline{b}}) \\ &= A(\rho) + \frac{1}{2} (\underline{b} - \underline{b}^*)' (P + X' X) (\underline{b} - \underline{b}^*) \end{aligned}$$

où

$$\underline{b}^* = (P + X' X)^{-1} (P \underline{b}_0 + X' X \widehat{\underline{b}})$$

et $A(\rho)$ donnée par (3.2.4).

Par conséquent

$$P(\underline{m}, \underline{\rho} / \underline{Y}) \propto \int_{\mathbb{R}^{3k}} \left[A + \frac{1}{2} (\underline{b} - \underline{b}^*)' (P + X' X) (\underline{b} - \underline{b}^*) \right]^{-\alpha^*} d\underline{b}$$

$$\alpha^* = \frac{n-p+3k+2\alpha}{2}$$

$$P(\underline{m}, \underline{\rho} / \underline{Y}) \propto A^{-\alpha^*} \int_{\mathbb{R}^{3k}} \left[1 + \frac{(\underline{b} - \underline{b}^*)' (n - p + 2\alpha) (P + X'X) (\underline{b} - \underline{b}^*)}{2A(n - p + 2\alpha)} \right]^{-\alpha^*} d\underline{b}$$

Nous reconnaissons, sous le signe intégrale, une densité $3k$ -dimensionnelle à $(n - p + 2\alpha)$ degrés de liberté, de paramètre de position $\underline{b}^*$ et de matrice de précision $V = \frac{(n-p+2\alpha)(P+X'X)}{2A}$ après l'intégration nous obtenons (3.2.3) donnée dans le théorème.

3.4 Application numérique

Dans cette section, nous allons présenter les résultats de simulation pour l'estimation des points de rupture m_1 et m_2 à l'aide du mode et de la moyenne a posteriori à partir du modèle (3.2.1) et dans les cas suivants

$\{U_i, \quad i = 1, \dots, n\}$ est une réalisation d'un processus autoregressif d'ordre 1 ($AR(1)$), c'est-à-dire

$$U_i = \rho U_{i-1} + e_i$$

-k=1

b_1, b_2, b_3 sont les paramètres de la régression

Le but recherché est de voir si les modes et/ou les moyennes a posteriori calculés par la formule donnée en (3.2.2) . estiment bien les vraies valeurs des points de rupture m_1, m_2 .

Nous avons simulé 100 échantillons répondant au modèle 3.2.1 avec $b_1 = 1, b_2 = 4, b_3 = 7$ et pour différentes valeurs des points de rupture m_1, m_2 et de la taille de l'échantillon n .

a/ $n = 20, m_1 = 8, m_2 = 13$.

b/ $n = 40, m_1 = 20, m_2 = 30$.

c/ $n = 60, m_1 = 20, m_2 = 40$

et pour les valeurs suivantes du coefficient d'autocorrélation

1) $\rho = 0.1$

2) $\rho = 0.5$

3) $\rho = 0.9$

traduisant respectivement une faible, une moyenne et forte autocorrélation.

les résultats de ces simulations sont résumés dans les figures de 59 à 67 qui sont données en Annexe3

3.5 interprétation

Les figures 59 à 67 représentent les distributions des fréquences des modes et des moyennes a posteriori des points de rupture m_1, m_2 qui montrent que les modes de ces distributions sont des estimateurs convergents des points de rupture.

Nous remarquons, également, que l'estimation des points de rupture m_1, m_2 par le mode des modes a posteriori donnent de meilleurs résultats qu'avec la moyenne des modes bien que, au sens du RMSE (Root Mean Square Error), les moyennes a posteriori soient meilleures comme nous l'illustrons dans la figure 68.

Aussi, nous remarquons que les résultats obtenus lorsque $\rho = 0.9$ sont moins bons que ceux obtenus lorsque $\rho = 0.1, \rho = 0.5$ dans tous les cas considérés, comme le montrent les figures 64, 67

Le choix de b_1, b_2, b_3 est déterminant en ce qui concerne la qualité des estimateurs des points de rupture. En effet, nous avons remarqué qu'un écart appréciable entre b_1, b_2 et b_3 a un impact direct sur l'estimation du point de rupture d'intérêt. Un faible écart se traduit par un estimateur non consistant du point de rupture.

CONCLUSION :

Dans ce travail, nous avons adopté l'analyse bayésienne qui apparait comme une approche attrayante devant les difficultés théoriques des approches paramétrique et non paramétrique. De plus l'approche bayésienne est une

méthodologie qui intègre une information a priori, objective ou subjective et qui permet de prendre en charge des contraintes imposées sur l'espace des paramètres par les conditions de stationnarité et / ou d'inversibilité pour des processus aléatoires ainsi que le caractère discret des paramètres d'intérêt. Nous avons considéré trois types de modèles. L'étude du premier modèle qui est le modèle classique de position dans lequel nous avons causé des ruptures multiples en des instants inconnus à la fois dans le paramètre de position que dans la variance a fait l'objet du premier chapitre. Il s'agit d'une extension des travaux de Menzefricke (1981) au cas de rupture multiples. Nous avons déterminé les lois de probabilité a posteriori des différents paramètres d'intérêt, c'est-à-dire les points de rupture, les rapports des variances et sous l'hypothèses que le paramètre de position ne subit pas de changement, la loi de probabilité a posteriori de celui-ci. Nous avons effectué une étude de simulation intensive en langage Matlab qui nous a montré que les paramètres sont bien estimés par le mode a posteriori plutôt que par la moyenne a posteriori et, ceci, quelle que soit la taille de l'échantillon ou la position des paramètres dans leurs intervalles de définition respectifs. Seulement, nous avons remarqué que, plus la rupture est importante, meilleure est l'estimation des points de rupture, en particulier, à l'aide du mode a posteriori. Le nombre d'itérations effectuées nous a permis d'avoir une idée précise sur la distribution de fréquence du mode a posteriori et de la moyenne a posteriori des différents paramètres d'intérêt. En ce qui concerne les rapports des variances, le mode a posteriori est un estimateur biaisé du paramètre d'intérêt. Les écarts entre les différentes variances n'ont pas d'influence sur la qualité de l'estimation. Néanmoins, la taille de l'échantillon et le nombre d'observations entre les différents points de rupture atténuent sensiblement le biais dans l'estimation du paramètre d'intérêt.

Le deuxième modèle est le modèle de position à erreurs autocorrélées qui subit des ruptures multiples dans la tendance en des instants inconnus. Ce modèle a été étudié par Guerbyenne (1992) et Guerbyenne et Kezim (1992, 1993 a), b), 1994 a), b) c) 1997) dans le cas d'une seule rupture. Nous avons effectué une extension de leurs travaux aux cas de ruptures multiples en des instants inconnus. A notre sens, ce travail n'a pas été entrepris auparavant, car seule la détection des ruptures et du nombre de ruptures supposé inconnu semble avoir attiré l'attention des chercheurs (Inclan, (1993), Stephens (1994)). Nous avons déterminé les lois de probabilité a posteriori des différents paramètres d'intérêt, c'est-à-dire les points de rupture et les rapports des variances. Nous avons effectué une étude de simulation intensive en langage Matlab qui nous a montré que les paramètres sont bien estimés par le mode a posteriori plutôt que par la moyenne a posteriori et, ceci, quelle que soit la taille de l'échantillon ou la position des

paramètres dans leurs intervalles de définition respectifs. Là aussi, nous avons remarqué que, plus la rupture est importante, meilleure est l'estimation des points de rupture, en particulier, à l'aide du mode a posteriori. Le nombre d'itérations effectuées nous a permis d'avoir une idée précise sur la distribution de fréquence du mode a posteriori et de la moyenne a posteriori des différents paramètres d'intérêt.

Le troisième modèle que nous avons étudié et qui a fait l'objet du chapitre trois est un modèle de régression dont les erreurs suivent un modèle autorégressif. et qui subit des ruptures multiples dans la tendance en des instants inconnus. Il s'agit d'une extension des travaux de Abraham et Wei (1984), Doumaz (1999), Doumaz et Guerbyenne (2002) au cas de ruptures multiples inconnues. Nous avons déterminé les lois de probabilité a posteriori des instants de rupture.

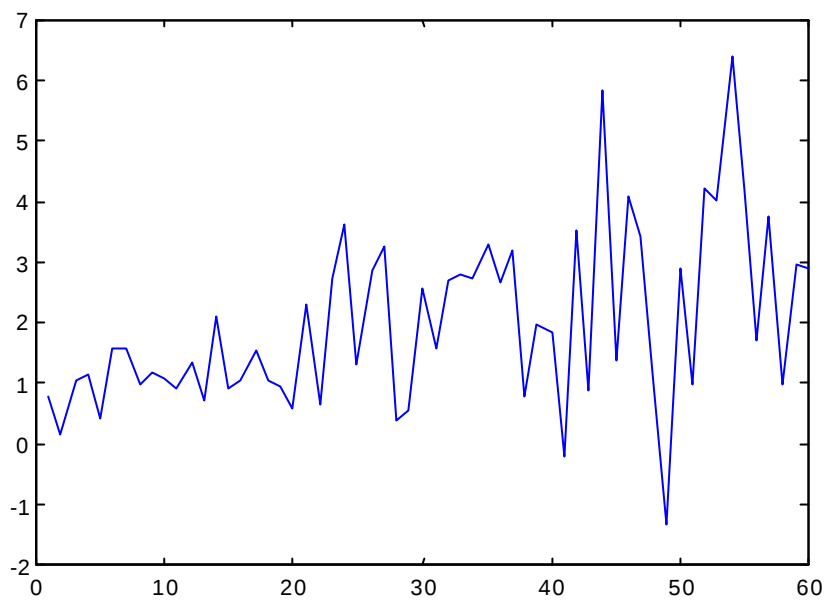
Une étude de simulation intensive, coûteuse, pour différentes valeurs des paramètres et tailles d'échantillon a été menée en langage Matlab. Elle a permis de déterminer les modes a posteriori ainsi que les moyennes a posteriori des instants de rupture. Nous avons remarqué que les estimateurs des instants de rupture, aussi bien le mode a posteriori que la moyenne a posteriori, sont meilleurs lorsque les changements dans la tendance sont importants.

Ce travail peut être étendu aux cas où les erreurs suivent un modèle $AR(p)$, $p > 1$, lorsque la variance subit des ruptures multiples. Un autre axe serait d'intégrer des erreurs autorégressives conditionnellement hétéroscédastiques (ARCH) dans un modèle de position avec ruptures, puis dans un modèle de régression avec ruptures et enfin dans un modèle autorégressif moyenne mobile avec ruptures.

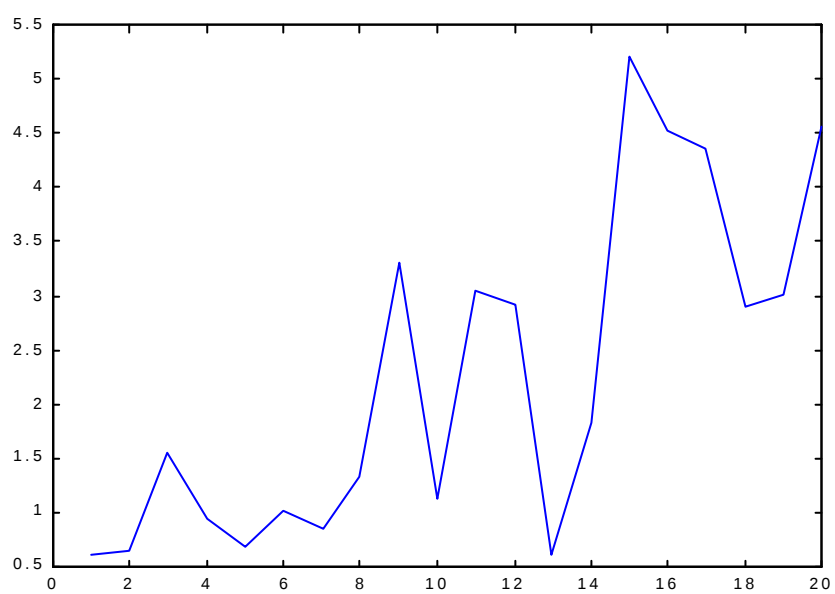
Bibliographie

- [1] Abraham, B, and Wei W. W. S, 1984, Inferences about the parameters of a time series model with change variance, 31, 183-194.
- [2] Abdelli,Z,1993, Problème de rupture dans les séries chnologiques, Thèse de Magister, USTHB
- [3] Bhattacharyya,G.K.and Johnson,R.A.1968.Non-parametric tests for shift at an unknown time point.Ann.Math.Statist.39,1731-1743
- [4] Box and Tiao, 1973, Bayesian inference in statistical analysis,Addison-Wesley publishing company.
- [5] Booth, N. B. and Smith, A. F. M, 1982, A Bayesian approach to retrospective identification of change-points. Journal of Econometrics 19, 7-22.
- [6] Broemeling,L.D,1972,Bayesian procedures for detecting a change in a sequence of random variables,Metron XXX,1-14
- [7] Chib, S.1998, Estimation and comparison of multiple change-point models, Journal of Econometrics 86, 221-241.
- [8] Csorgo et Horvath,1987,Non parametric tests for the change-point problem,J.Stast.plan.inf,17,pp.1-9
- [9] Doumaz,M,1999, Estimation dans des problemes de rupture,Thèse de Magister,USTHB.
- [10] Doumaz, M et H, Guerbyenne, 2002, Analyse bayesienne d'un modèle économétrique avec rupture, Prépublication, Faculté des Mathématiques, USTHB
- [11] Ferreira, P. E. 1975, A Bayesian analysis of a switching model : A known number of regimes, Journal of American Statistic Association 70, 370-374.
- [12] Gey servane(2002),A Cart based algorithm for detection of multiple change points in the mean for large sanples.Prépublication d'Orsay.

- [13] Giraitis et Leipus(1990),A functional C L T for non parametric estimates of spectrum and change-point problem for a spectral function ,Lithuanian Math.J.30,pp.674-697(in Russian).
- [14] Guerbyenne,H, Analyse Bayesienne d'un modèle gaussien à erreurs autocorrélées avec changements dans la variance à un instant inconnu, Thèse de Magister,USTHB,1992.
- [15] Guerbyenne,H, and Kezim,B, Analyse Bayesienne d'un modèle à erreurs autocorrélées avec rupture. Journal de Mathématiques du Maroc,N2 (1994) 94-99.
- [16] Guerbyenne,H, and .Kezim,B, Analyse Bayesienne d'un modèle de rupture JSA, Sidi-Fredj, 16-18 Avril 1994.
- [17] Guerbyenne,H, and .Kezim,B, Bayesian analysis with variance change, Prépublication, Institut de Mathématiques USTHB, N0218/I.M/1997.
- [18] Holbert. D, and L.D.Broemeling,(1977), Bayesian inferences related to shifting sequences and two-phase regression,commun.stat.Theo.Meth.A6(3),265-275.
- [19] Inclan, C, 1993, Detection of multiple changes of variance using posterior odds. Journal of Business and Economic Statistics 11, 289-300.
- [20] Lee, A. F. S and S. M. Heghinian, 1977, Bayesian inference related to shifting sequence of independent normal random variables- A Bayesian approach, Technologie 19, 503-506.
- [21] Menzefricke, U. 1981, A Bayesian analysis of a change in the precision of a sequence of independent normal random variavbles at an unknown time point, Applied Statistics 30, 141-146.
- [22] Smith, A. F. M, 1975, A Bayesian approach to inference about point in a sequence of random variables, Biometrika 62, 407-416.
- [23] Slama.A,1997.Test de signification Bayesien pour la stationnarité des paramètres dans un modèle de rupture à erreurs autocorrélées, Thèse de Magister.
- [24] Stephens,1994, Bayesian Retrospective multiple-change point identification 43, No.1,pp.159-178
- [25] Yao, Q, 1993, Tests for change-points with epidemic alternatives.Biometrika, 80,1, pp.179-191
- [26] Wolfe,D,and Schechtman, 1984.Non parametric statistical procedures for the change point problem.J.statist..Plann.Inference,9;389-396.



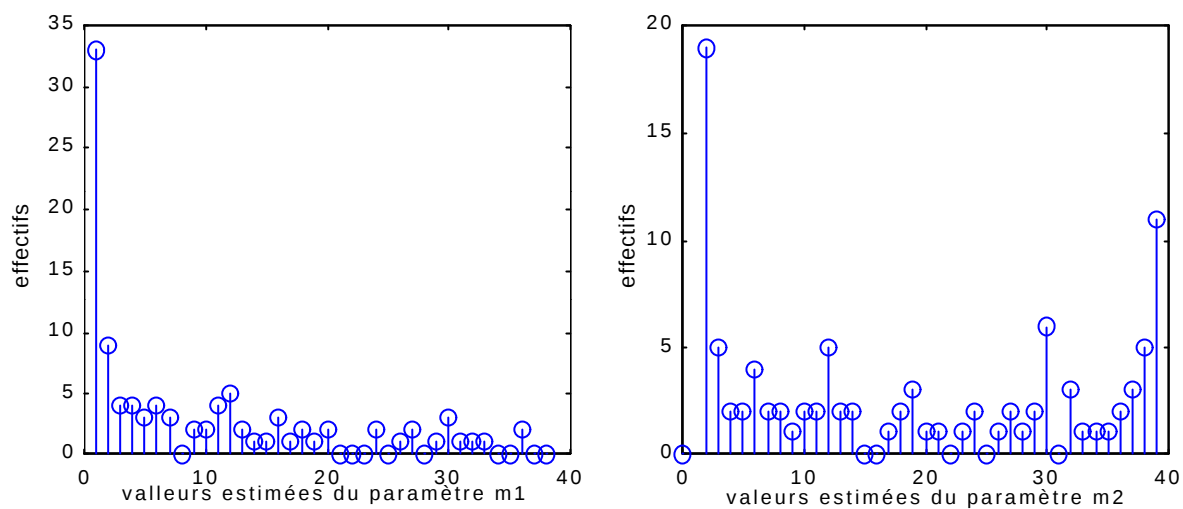
(a)



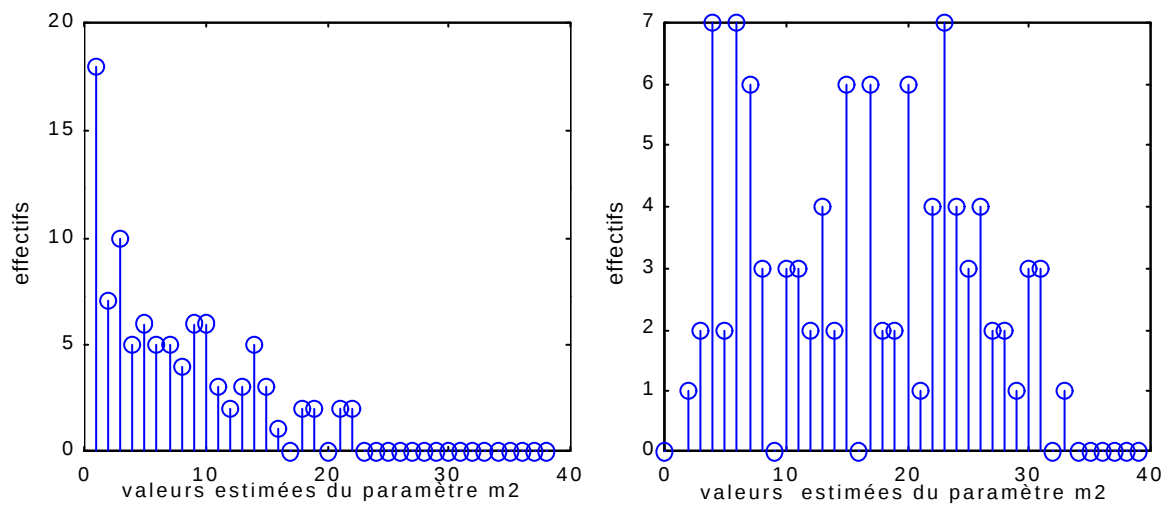
(b)

Graphes des séries d'observations simulés a partir du modèle (1.1)

Figure1

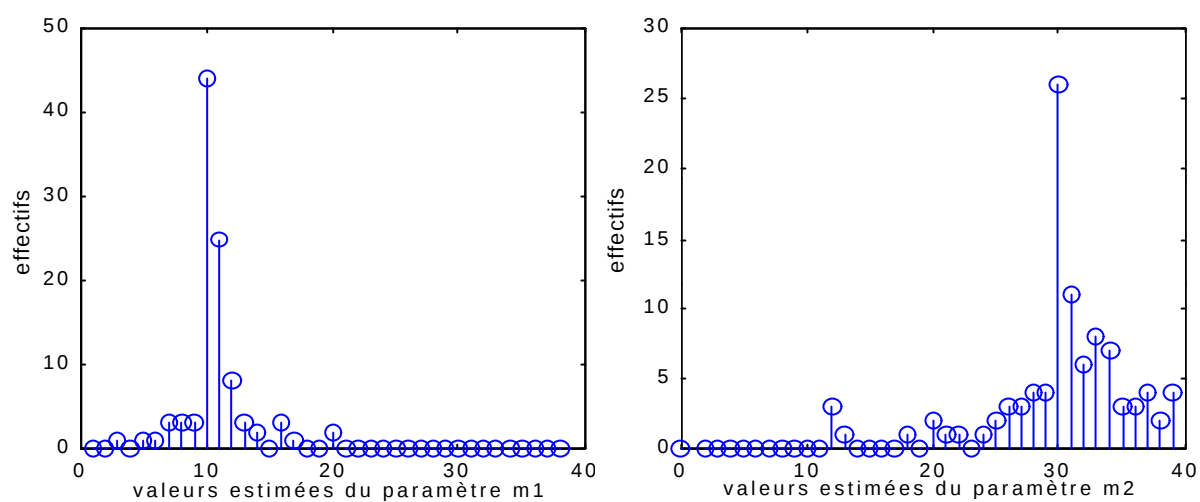


diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

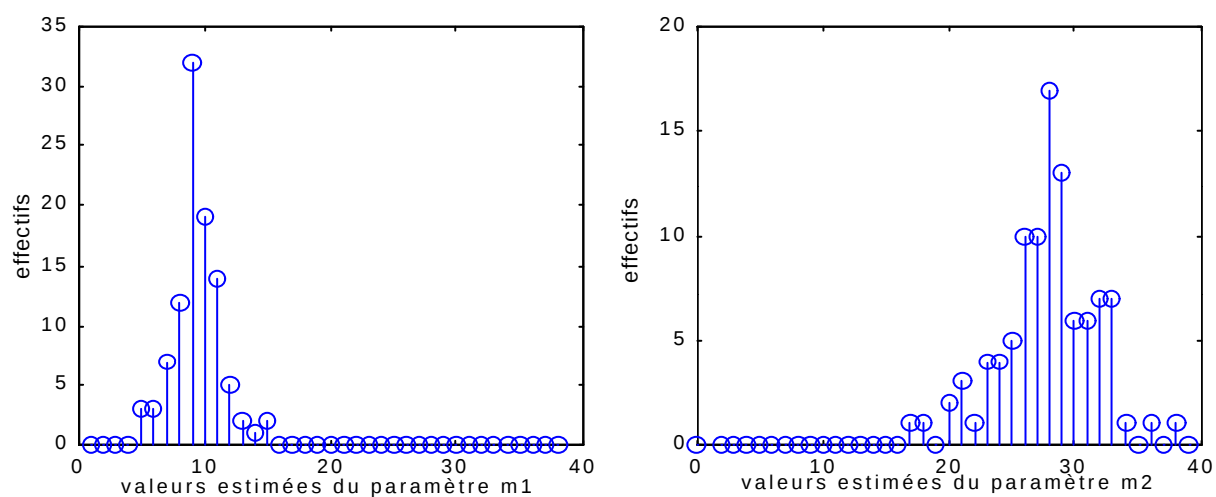


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

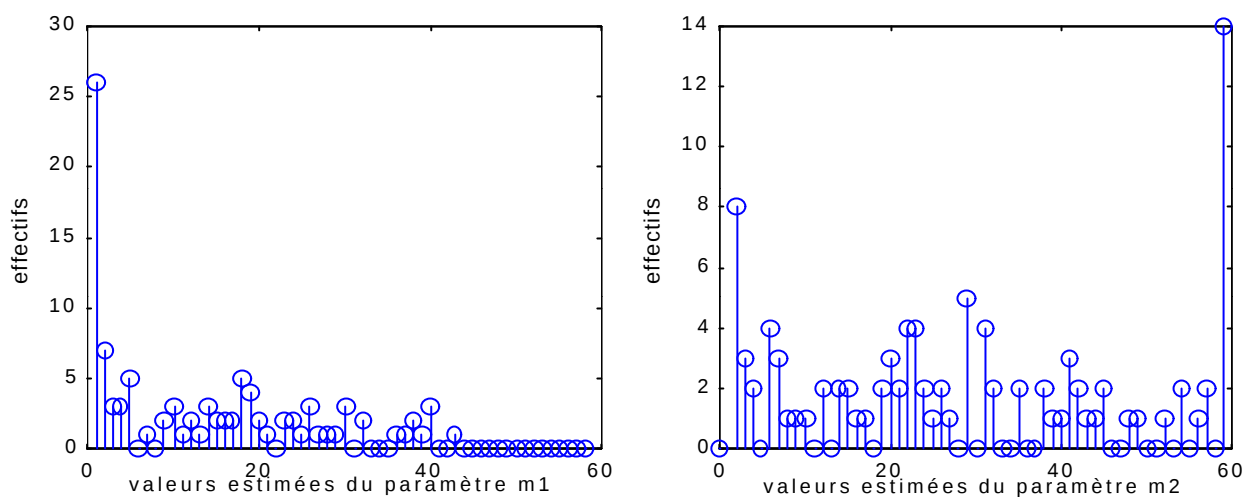
figure2.a



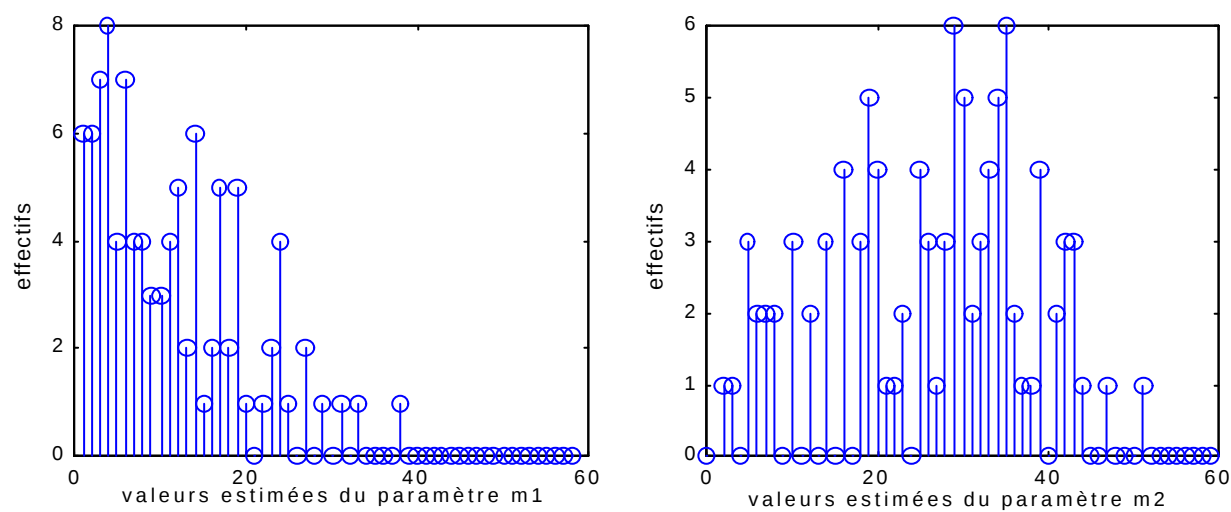
**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par le mode a posteriori**



**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture
estimés par la moyenne a posteriori**

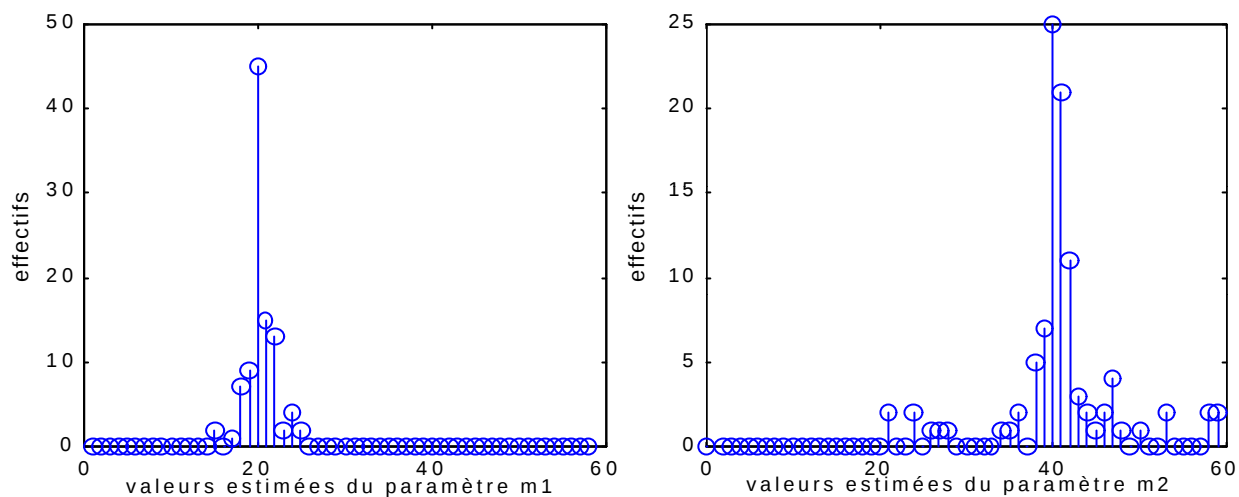


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par
Le mode a posteriori**



**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par
La moyenne a posteriori**

Figure3.a



Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

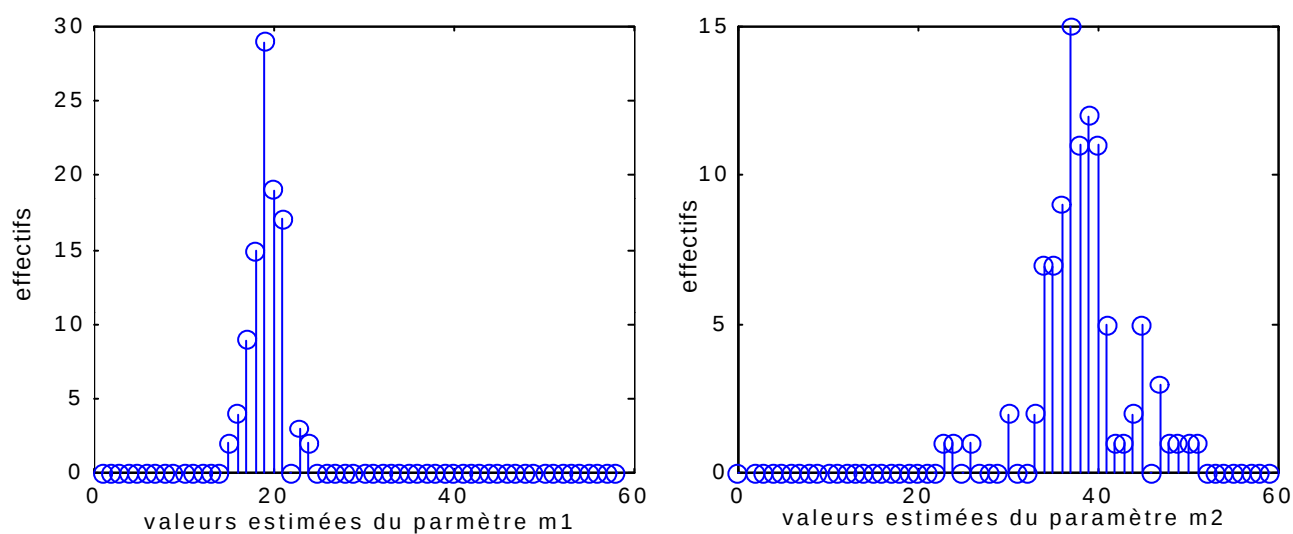
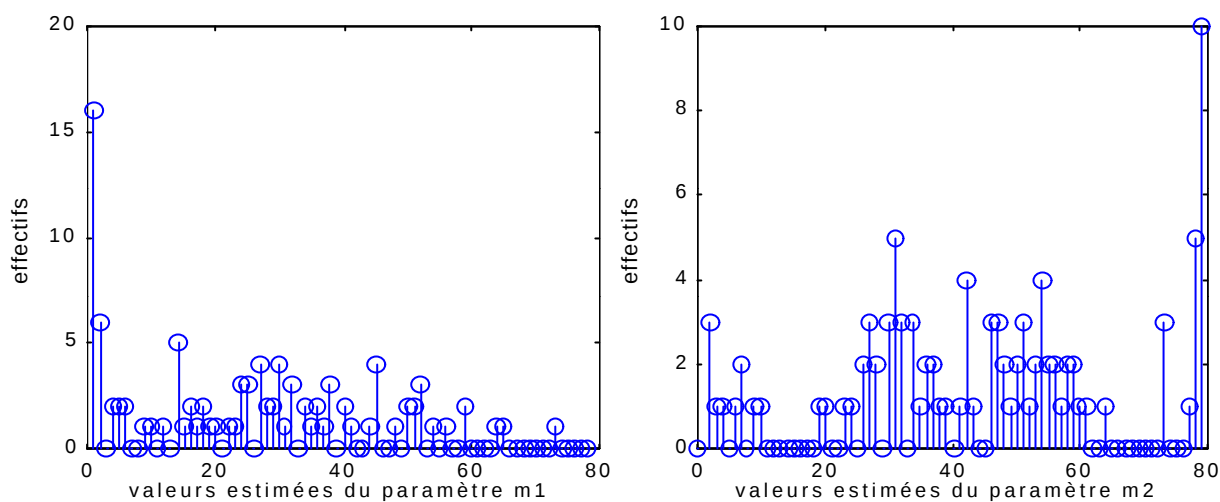
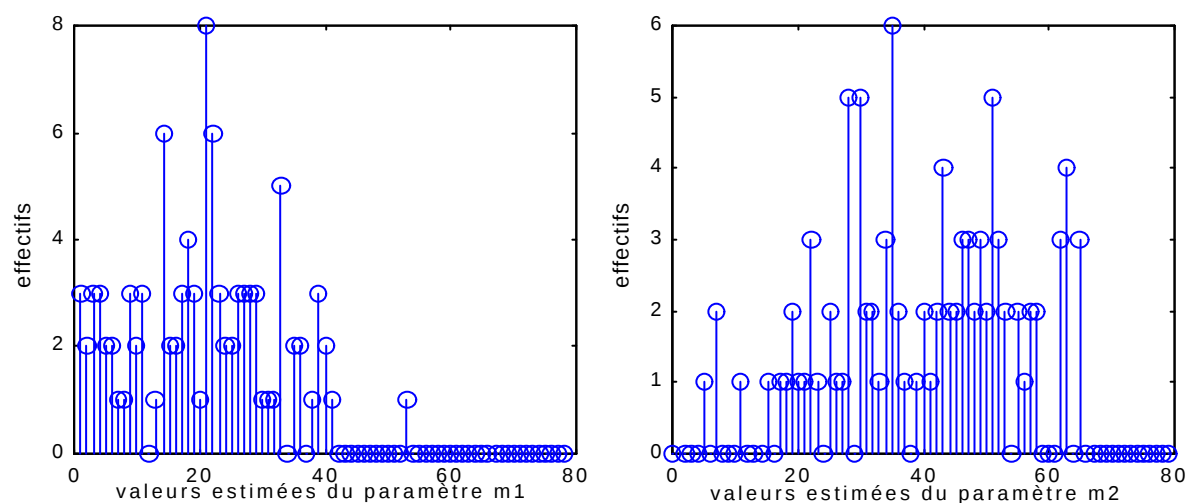


Diagramme de la distribution de fréquence des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

figure3.b

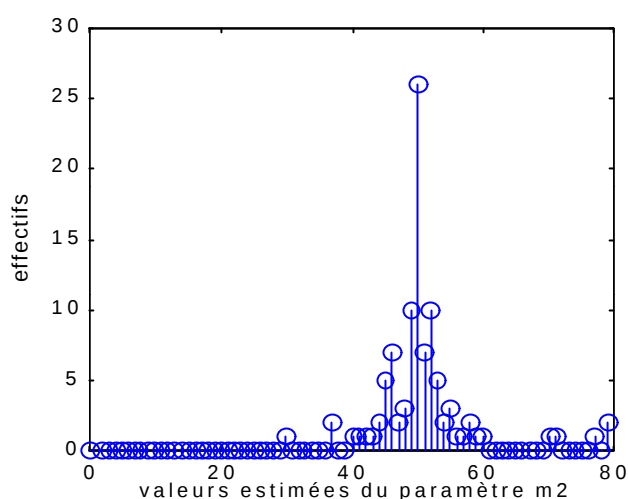
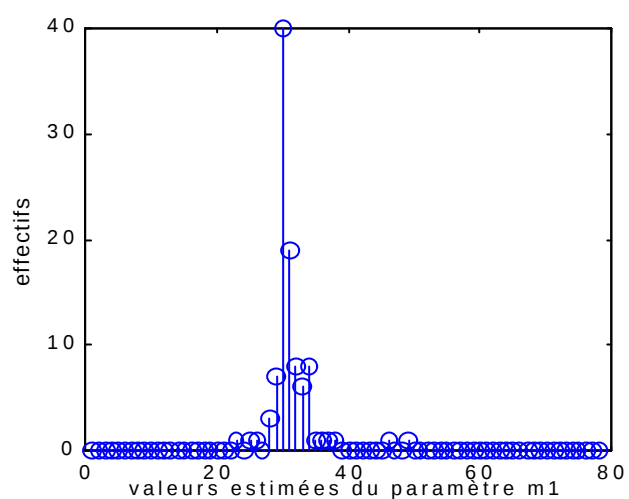


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

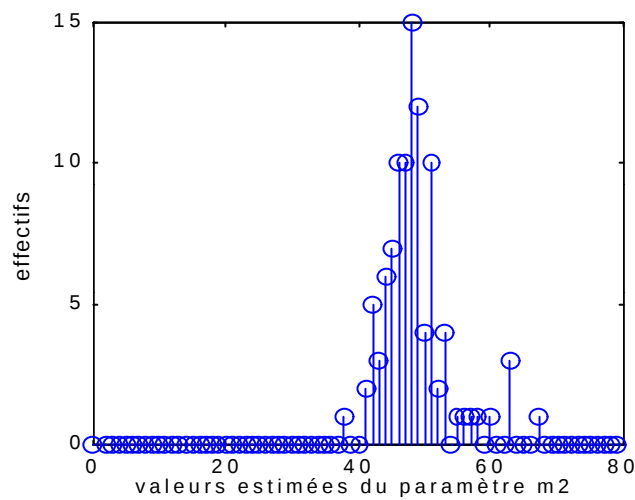
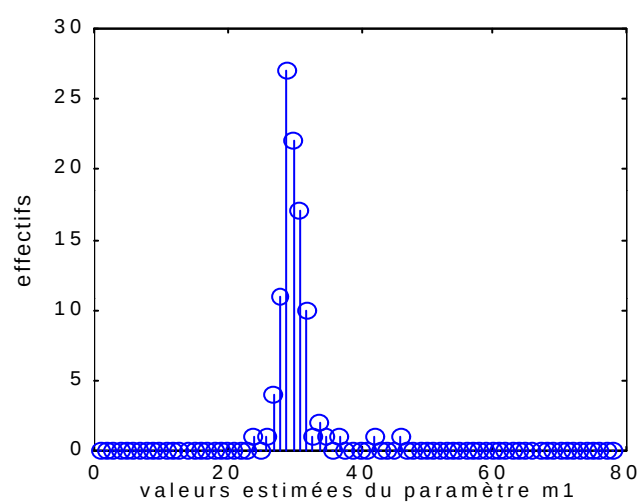


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

figure4.a

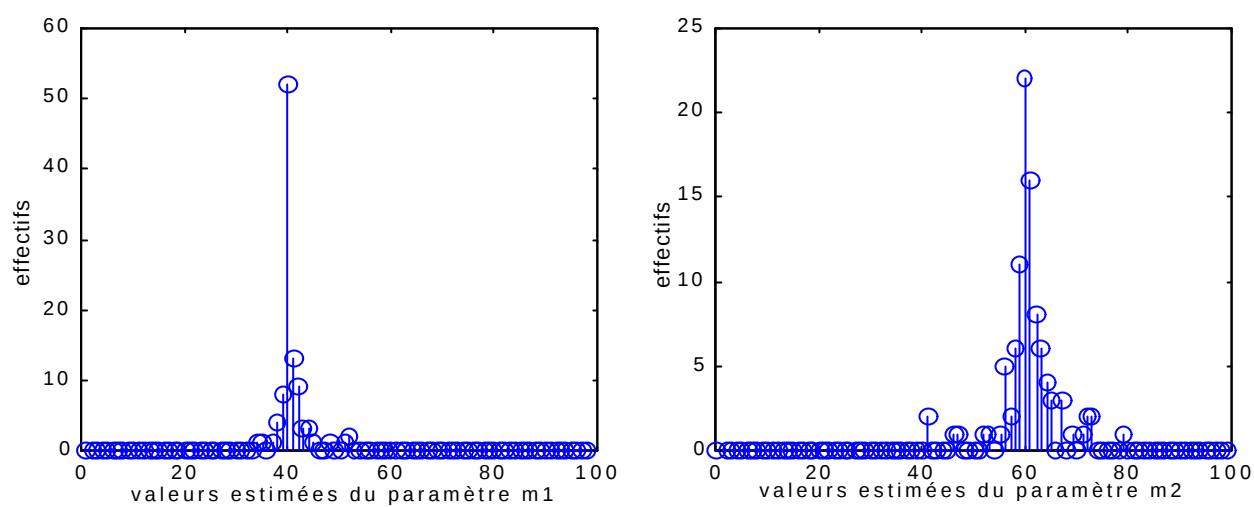


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori



Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

Figure4.b



Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

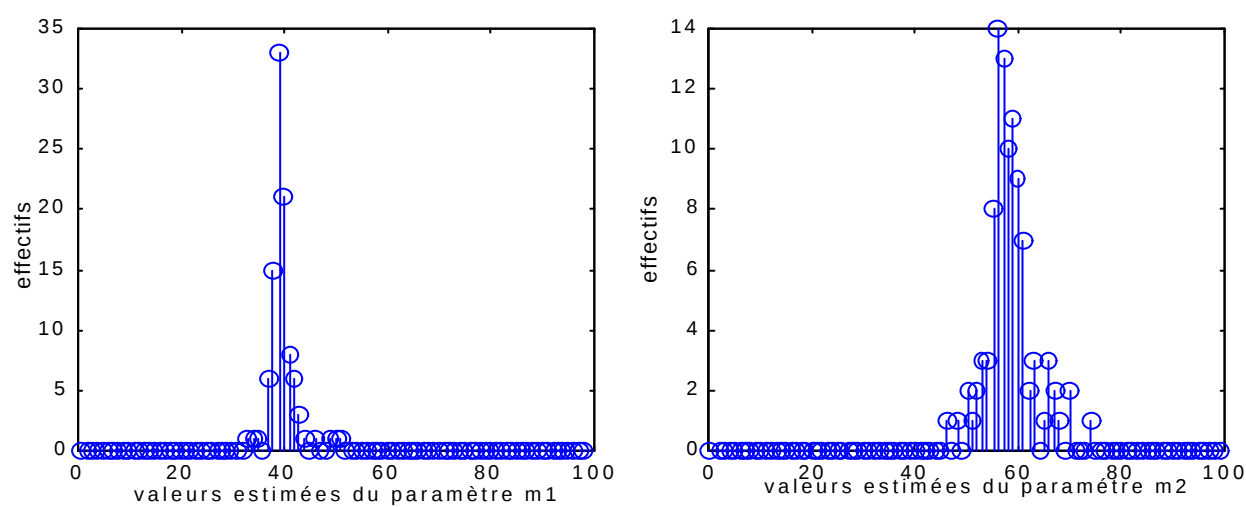
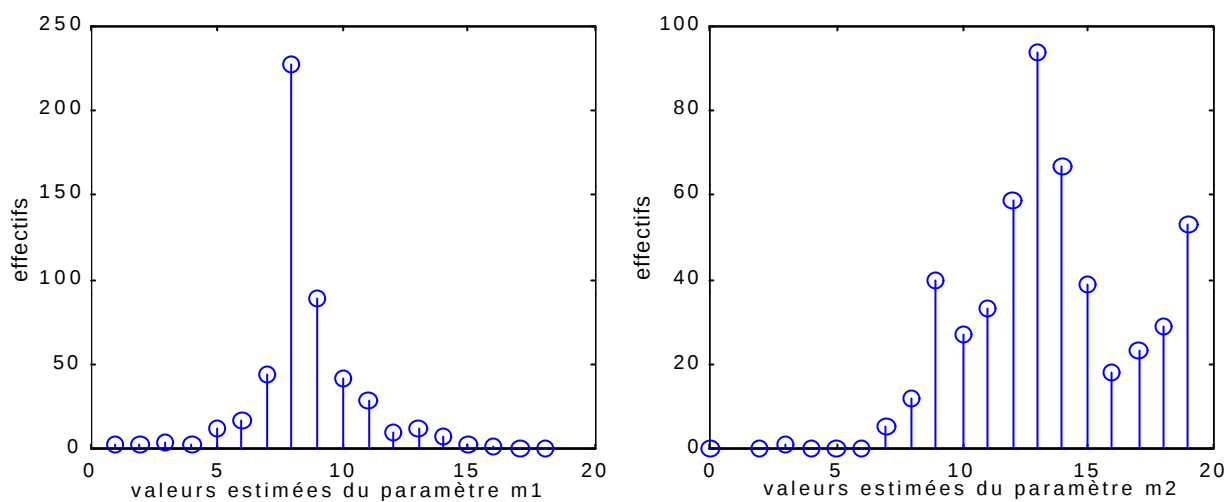
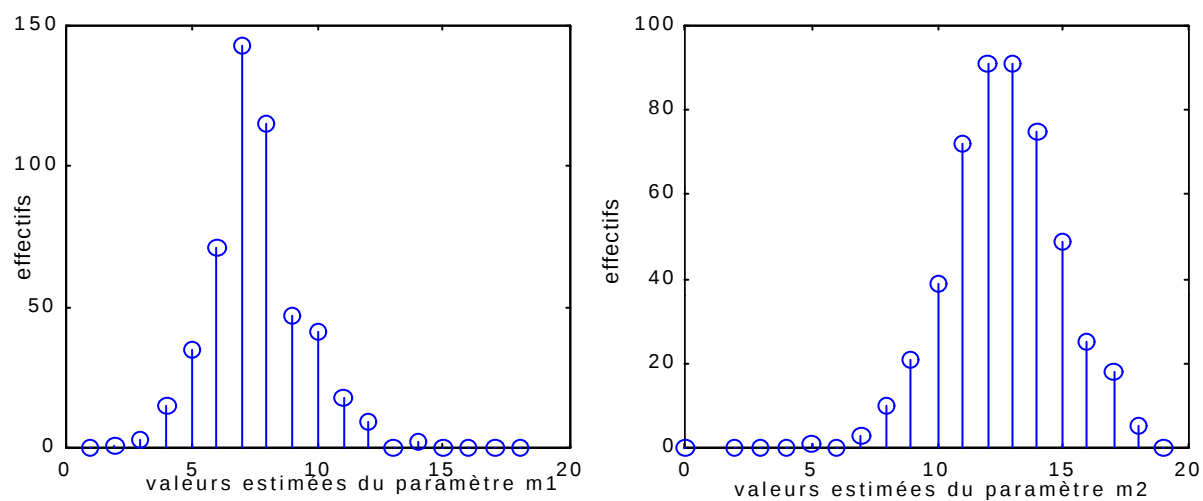


Diagramme de la distribution de fréquence des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

Figure 5

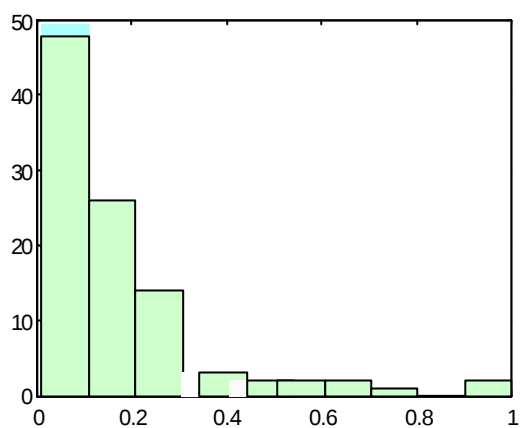


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

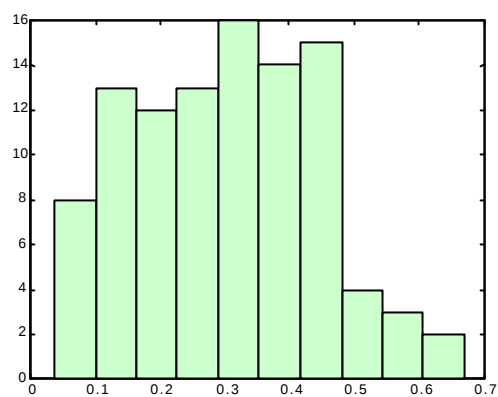


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

Figure6

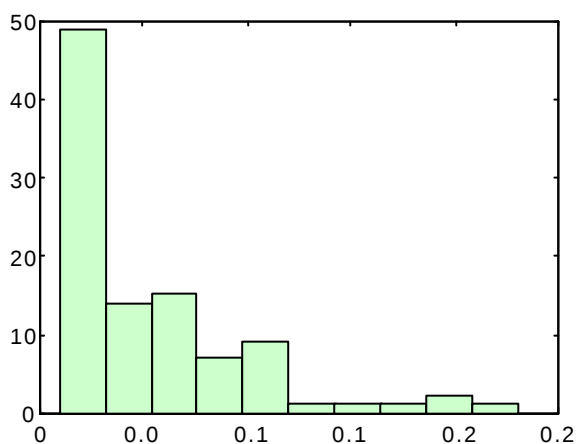


(a)

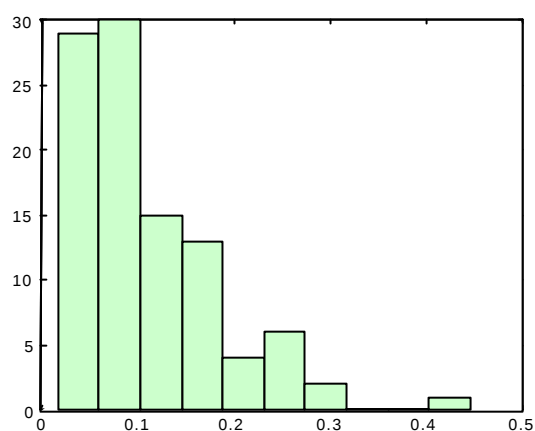


(b)

Histogramme des fréquences des estimateurs des rapports des variances s_1^2/s_2^2 par le mode(a) et la moyenne a posteriori(b).

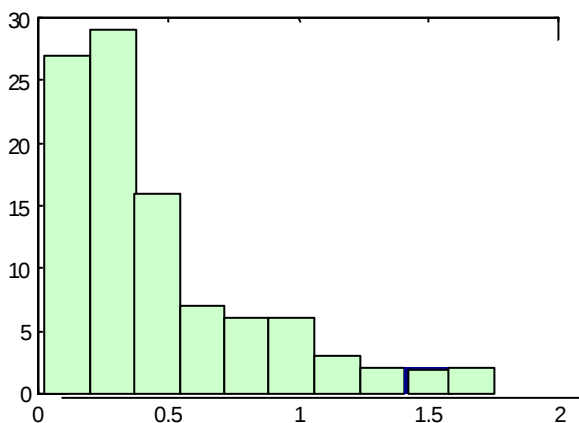


(c)



(d)

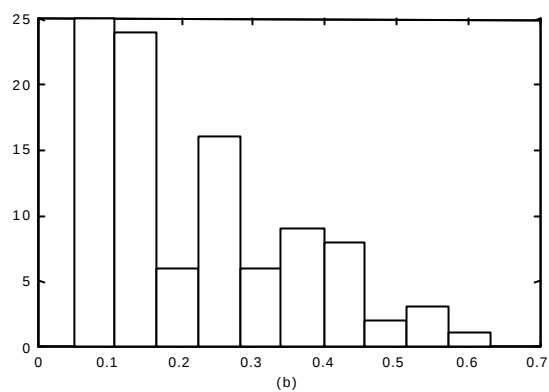
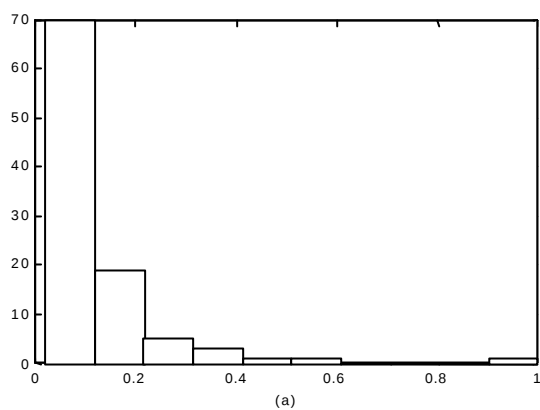
Histogramme des fréquences des estimateurs des rapports des variances s_1^2/s_3^2 par le mode ©et la moyenne a posteriori(d)



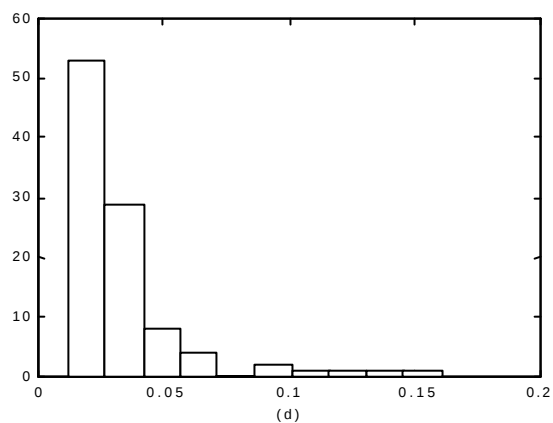
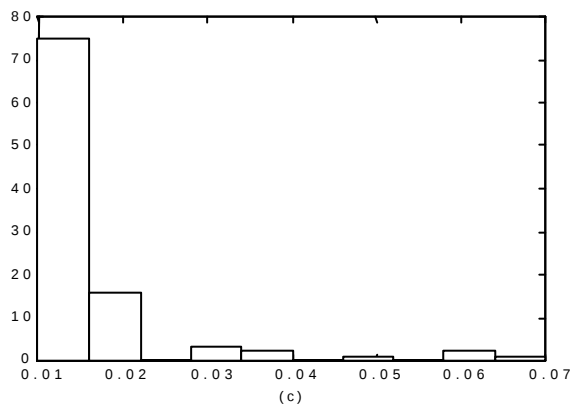
(e)

Histogramme de fréquence d'estimateur de rapport des variances s_2^2/s_3^2 par le mode a posteriori

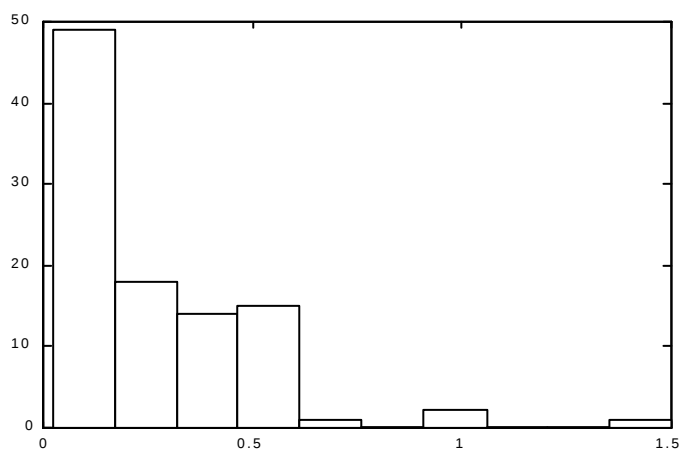
figure7



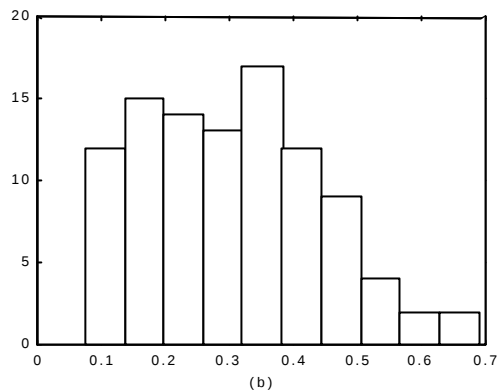
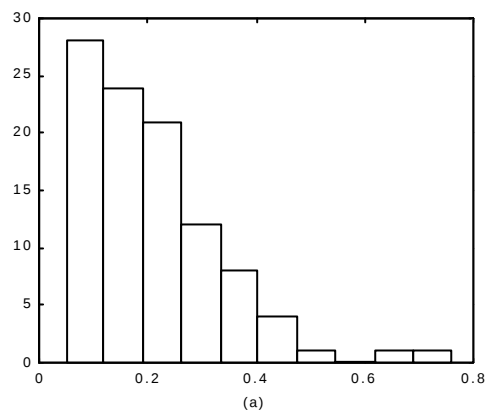
Histogrammes des fréquences des estimateurs des rapports des variances s_1^2/s_2^2 par le mode(a) et la moyenne a posteriori(b).



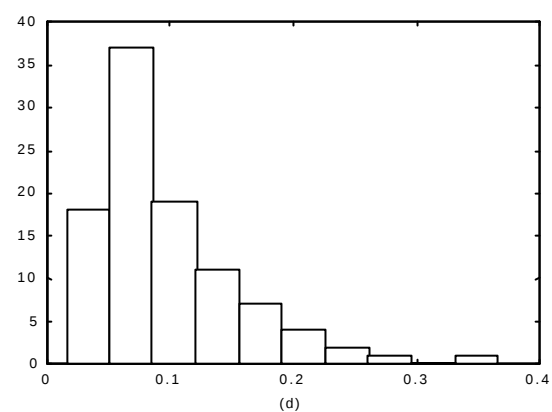
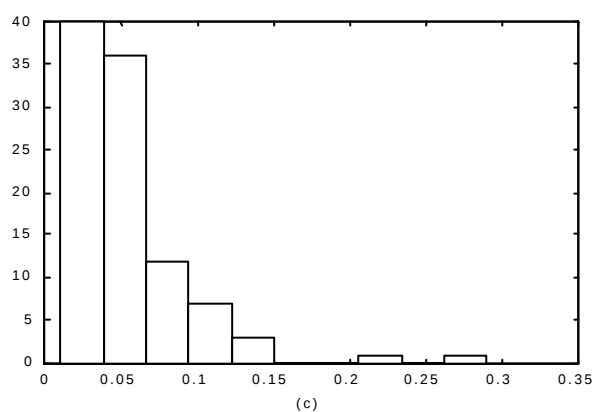
Histogrammes des fréquences des estimateurs des rapports des variances s_1^2/s_3^2 par le mode ©et la moyenne a posteriori(d).



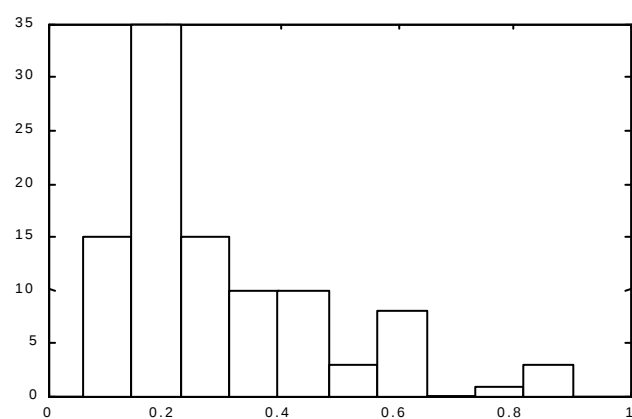
Histogramme de fréquence d'estimateur des rapports des variances s_2^2/s_3^2 par le mode a posteriori(d)



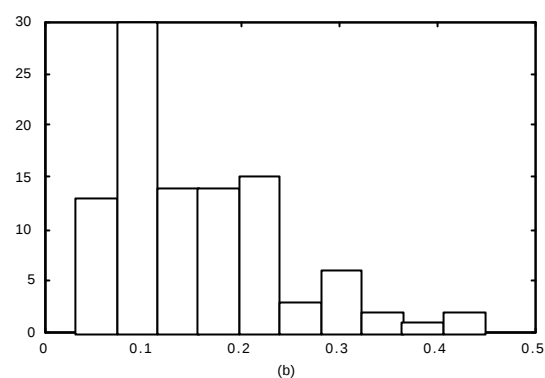
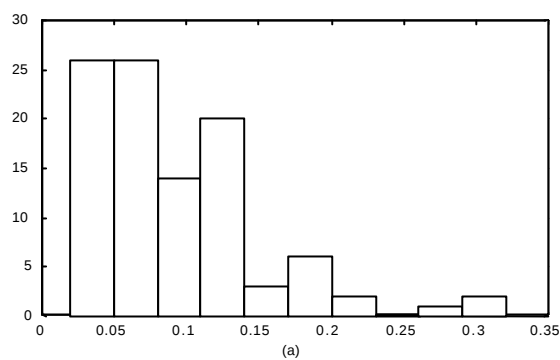
Histogrammes des fréquences des estimateurs des rapports des variances s_1^2/s_2^2 par le mode(a) et la moyenne a posteriori(b).



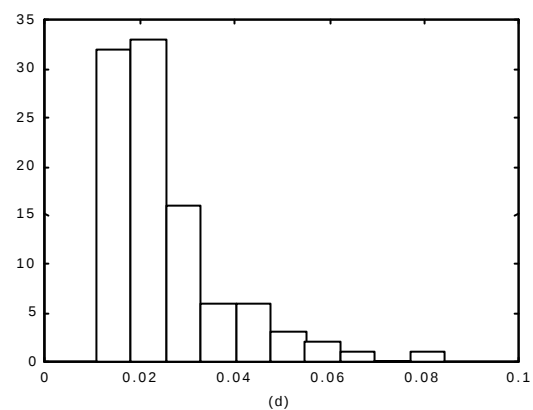
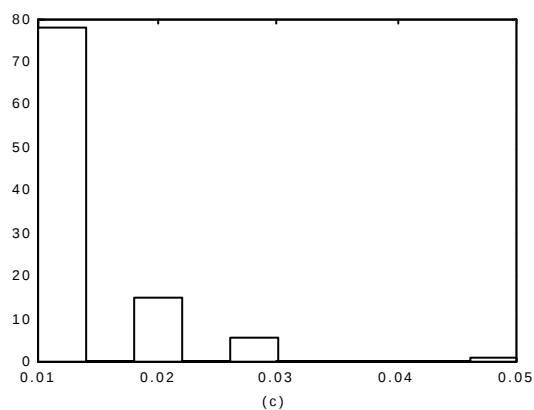
Histogrammes des fréquences des estimateurs des rapports des variances s_1^2/s_3^2 par le mode © et la moyenne a posteriori(d).



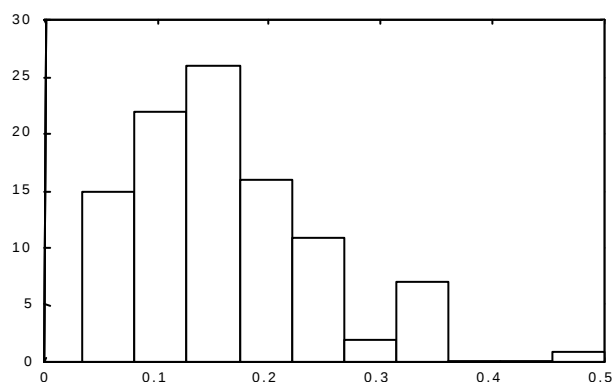
Histogramme des fréquences d'estimateur des rapports des variances s_2^2/s_3^2 par le mode © et la moyenne a posteriori(d).



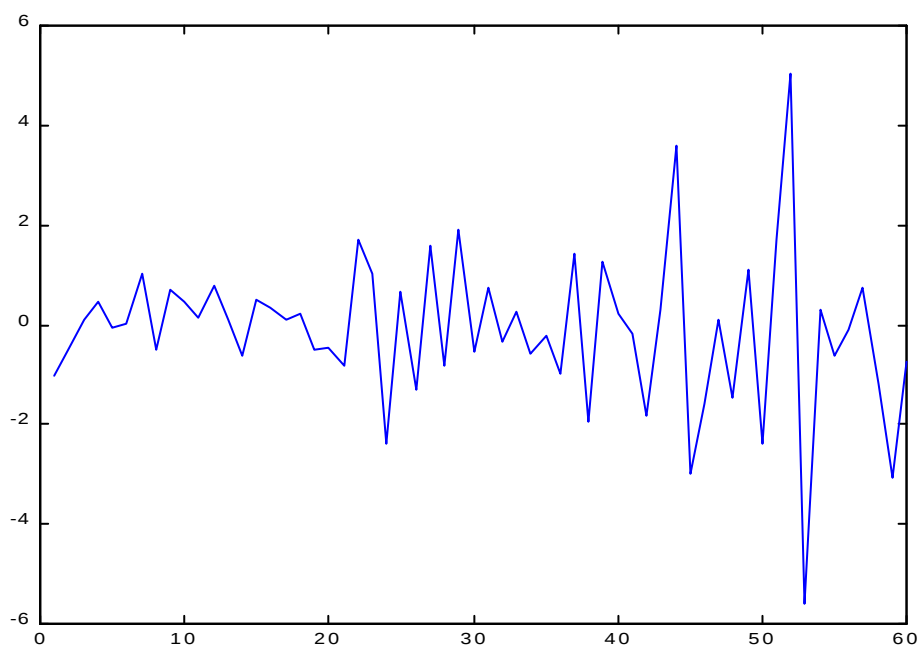
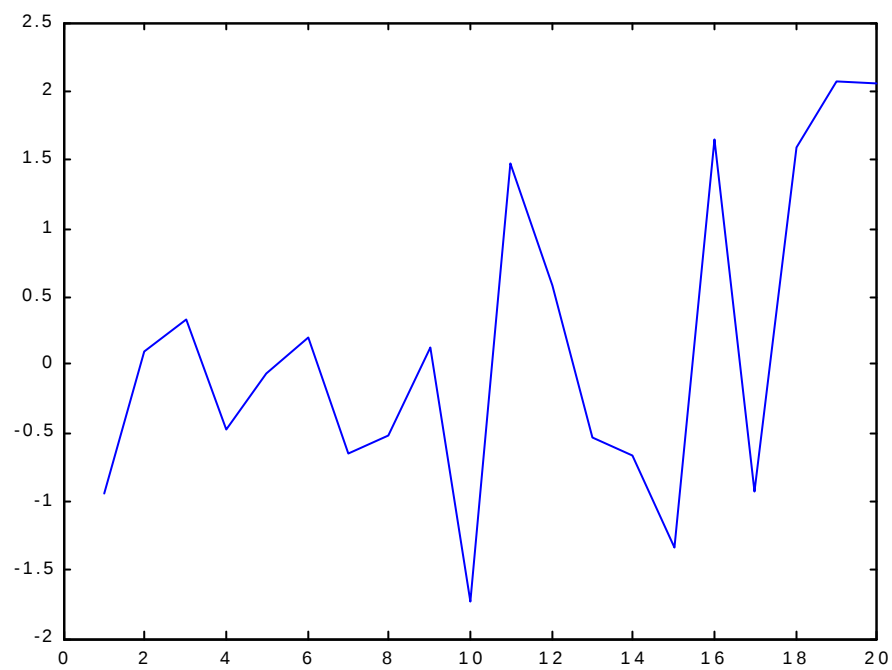
Histogrammes des fréquences des estimateurs des rapports des variances s_1^2/s_2^2 par le mode(a) et la moyenne a posteriori(b).



Histogrammes des fréquences des estimateurs des rapports des variances s_1^2/s_3^2 par le mode © et la moyenne a posteriori(d).

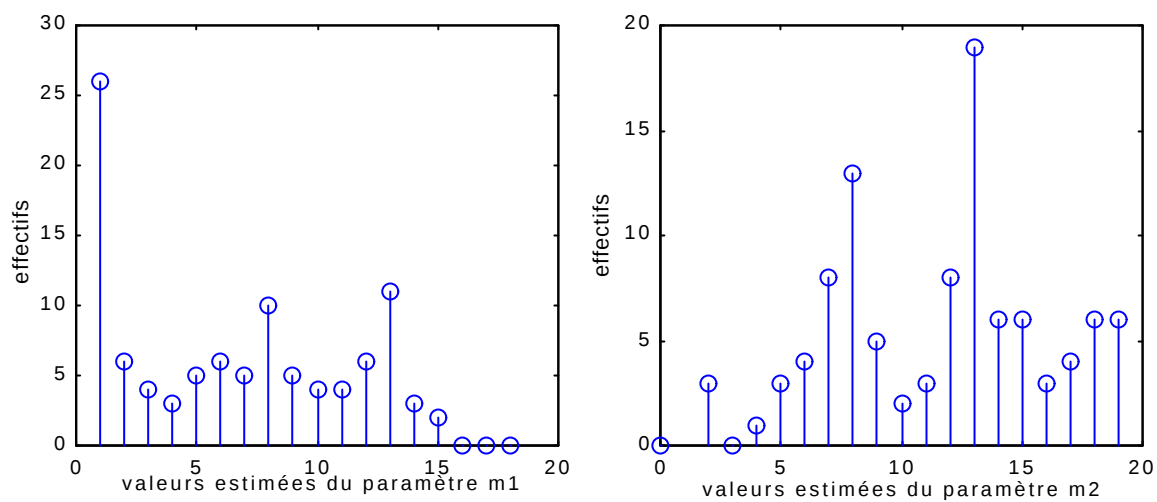


Histogramme des fréquences d'estimateur des rapports des variances s_2^2/s_3^2 par le mode a posteriori(b).

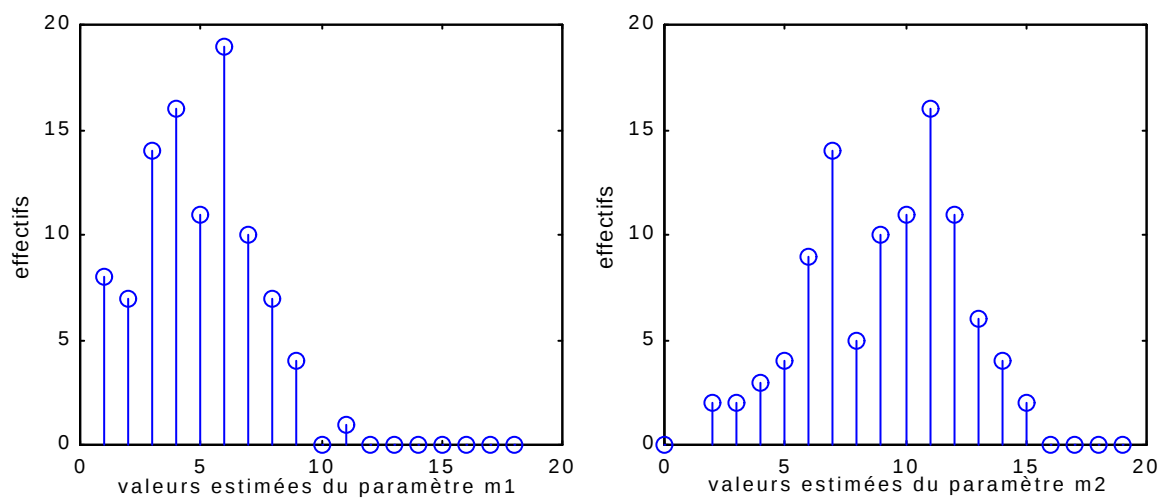


Graphes des séries d'observations simulés à partir du modèle (1.2)

Figure11

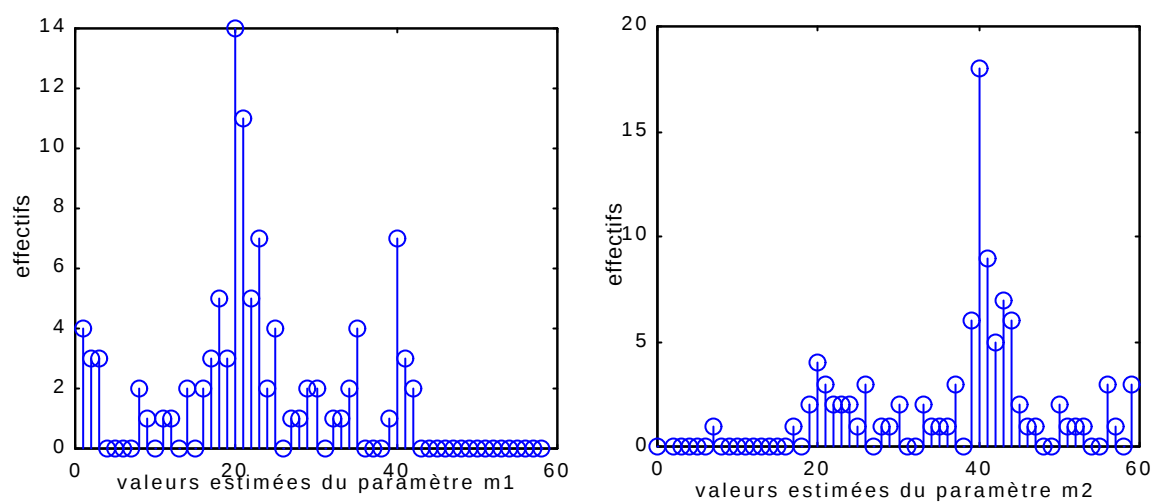


Diagrammes de la distribution des fréquences des estimateurs des points de rupture par le mode a posteriori

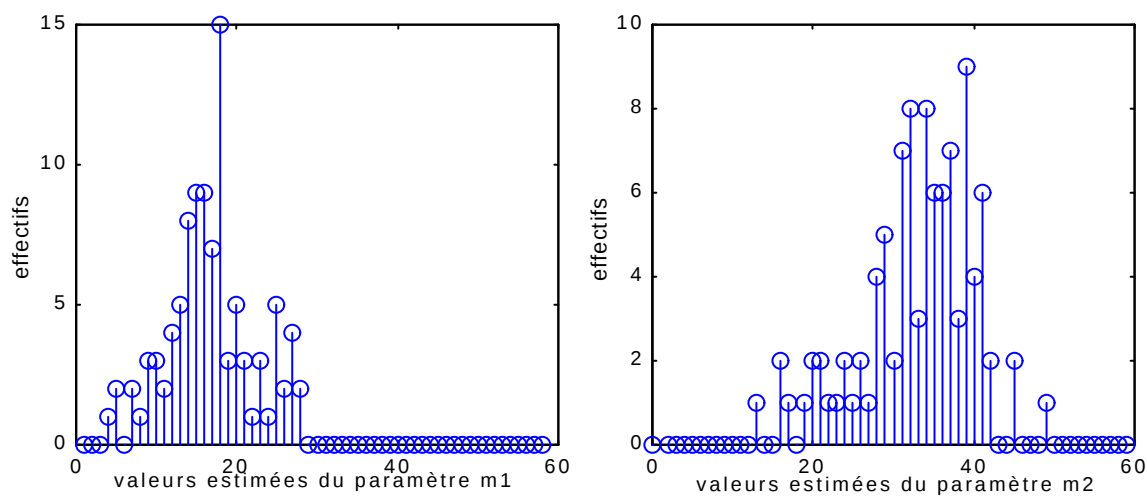


Diagrammes de la distribution des fréquences des estimateurs des points de rupture par la moyenne a posteriori

figure12

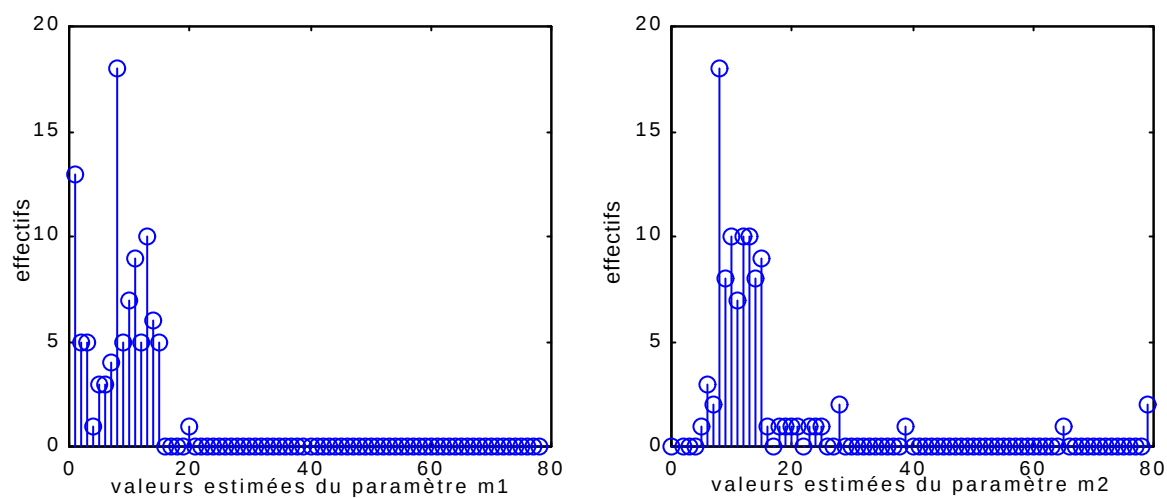


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

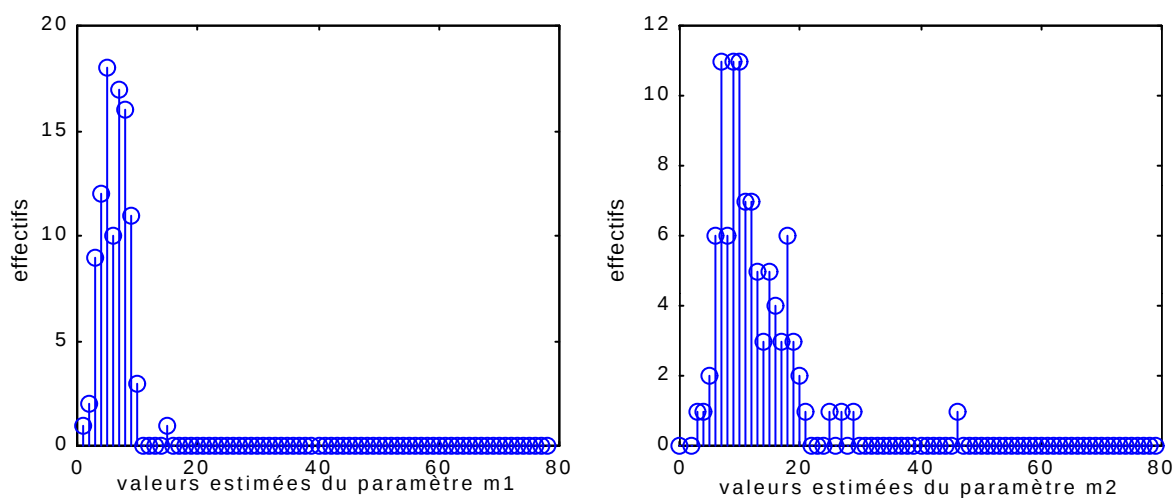


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

Figure13

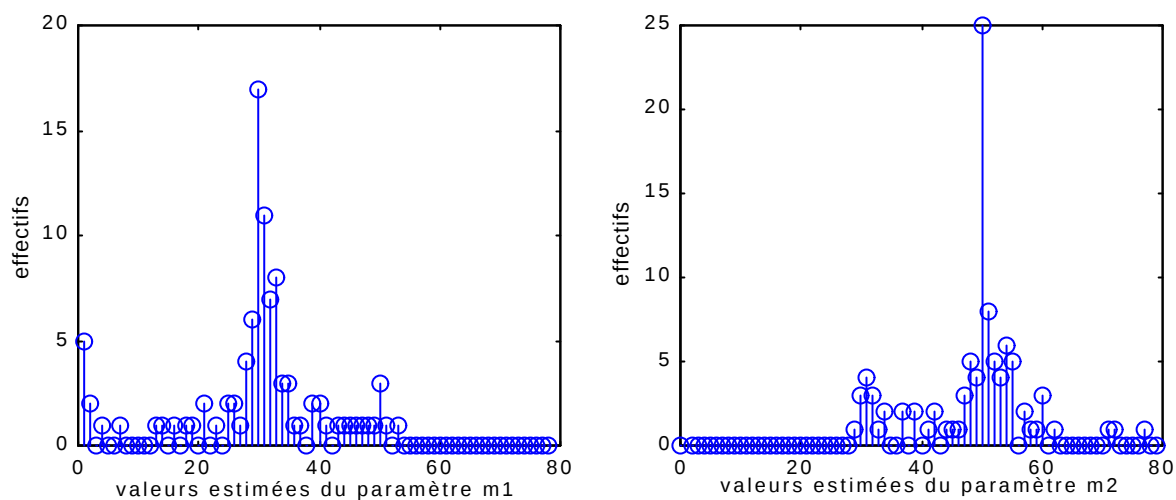


Diagrammes de la distribution des fréquences des estimateurs des points de rupture par le mode a posteriori

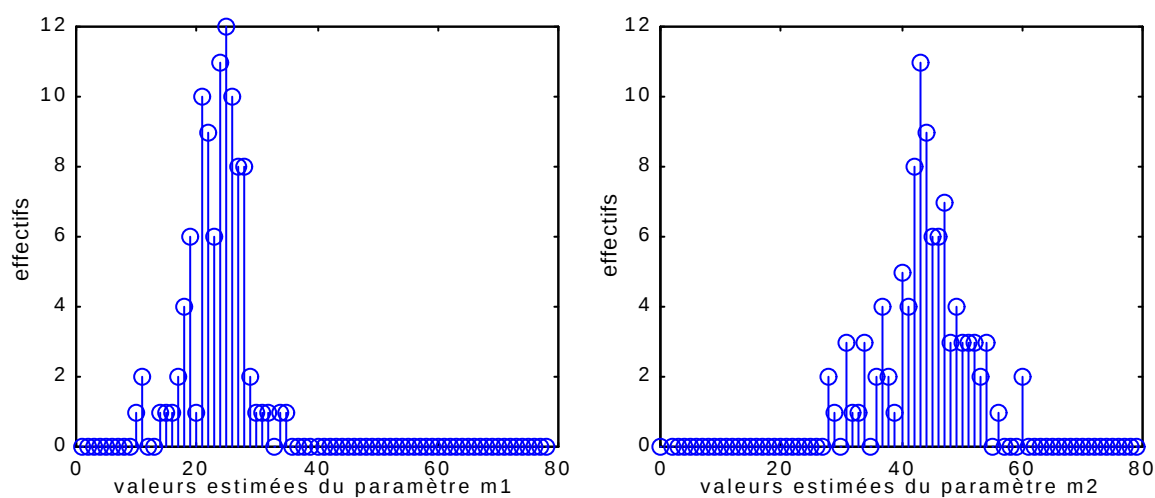


Diagrammes de la distribution des fréquences des estimateurs des points de rupture par la moyenne a posteriori

figure14

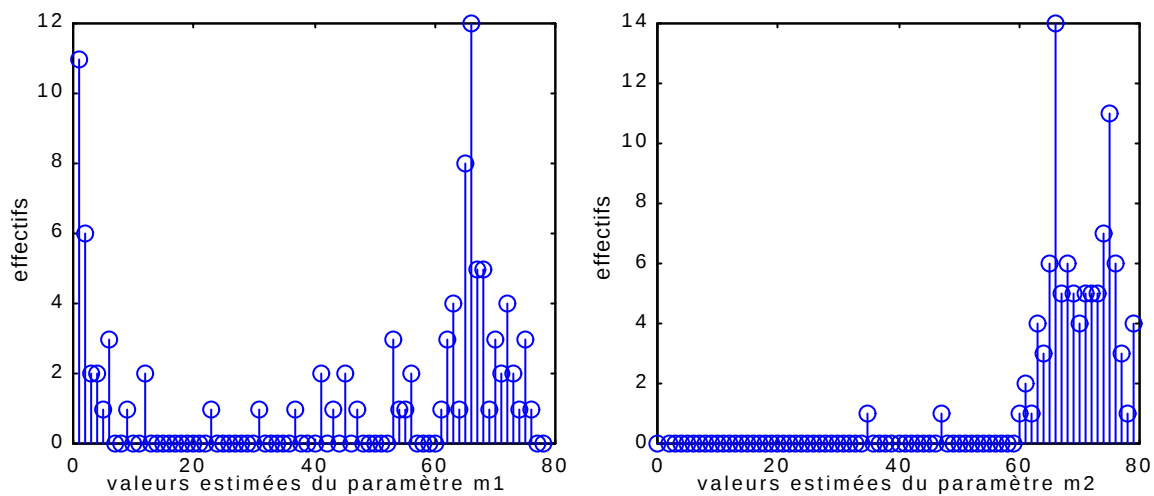


Diagrammes de la distribution des fréquences des estimateurs des points de rupture par le mode a posteriori

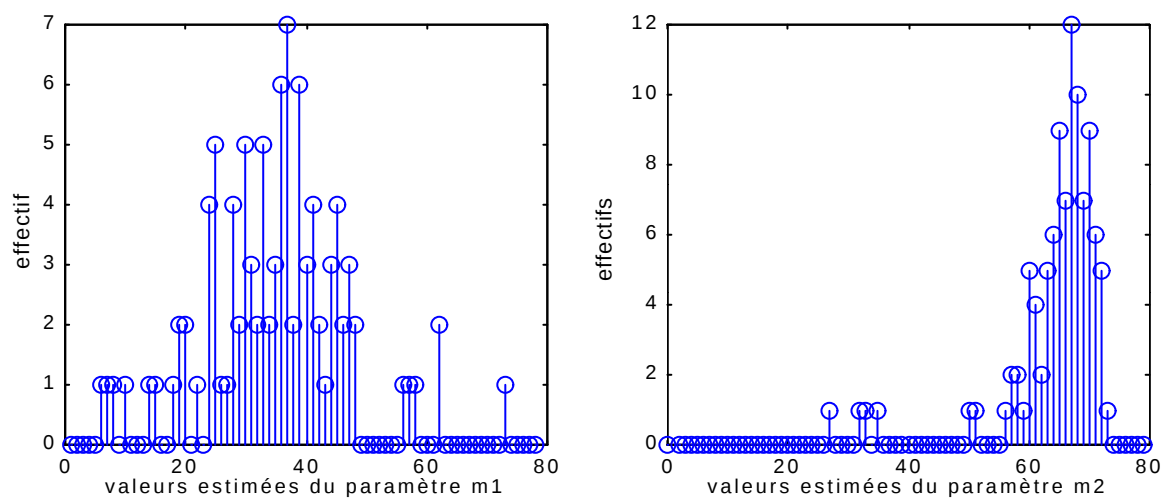


Diagrammes de la distribution des fréquences des estimateurs des points de rupture par la moyenne a posteriori

figure15

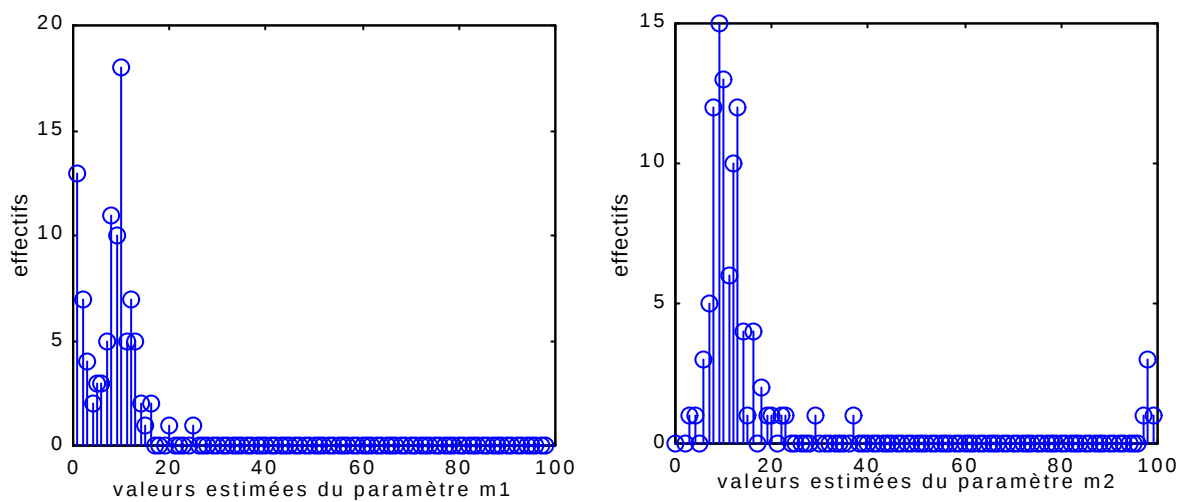


diagrammes de la distribution des fréquences des estimateurs des points de rupture par le mode a posteriori

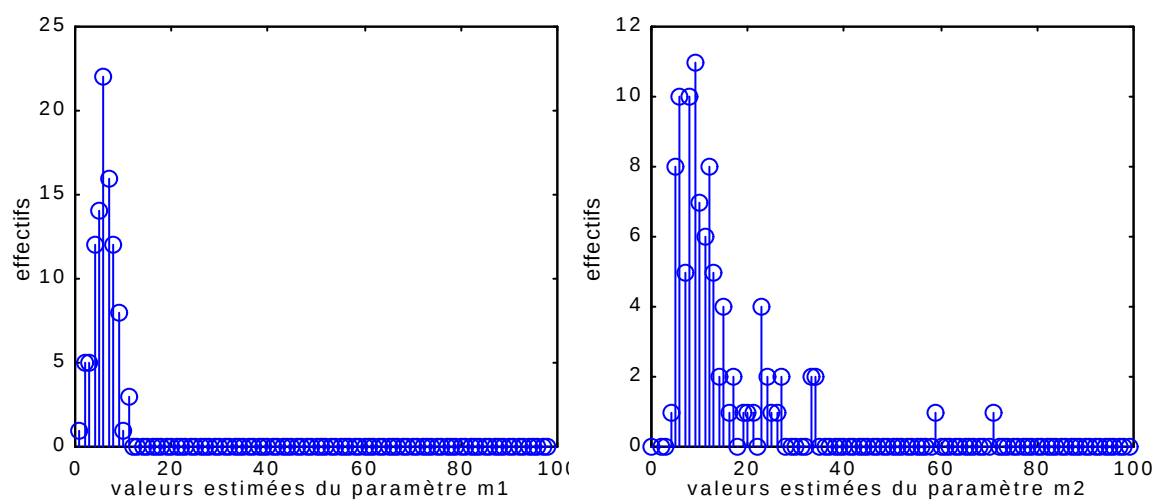


diagrammes de la distribution des fréquences des estimateurs des points de rupture par la moyenne a posteriori

figure16

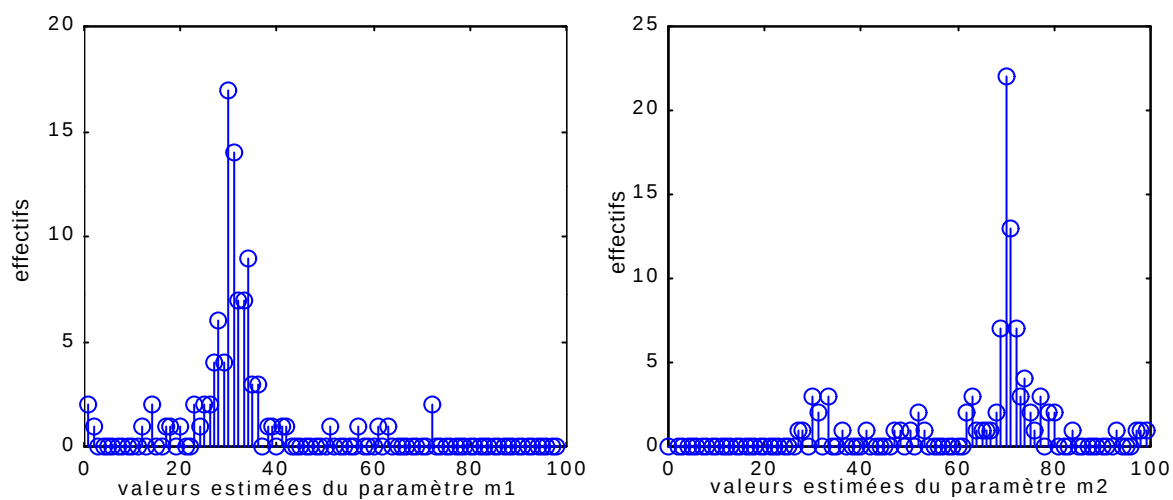


Diagrammes de la distribution des fréquences des estimateurs des points de rupture par le mode a posteriori

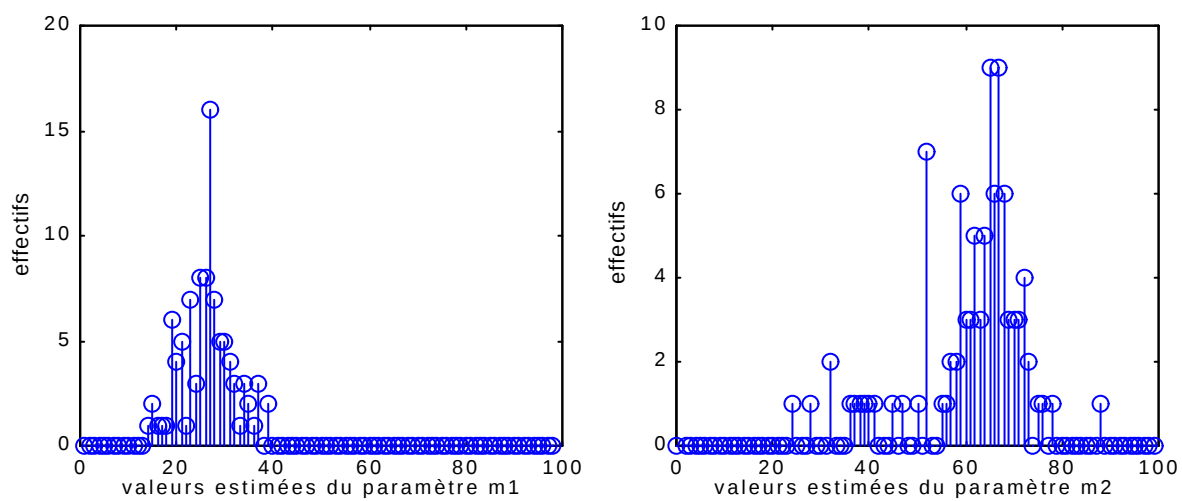


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

Figure17

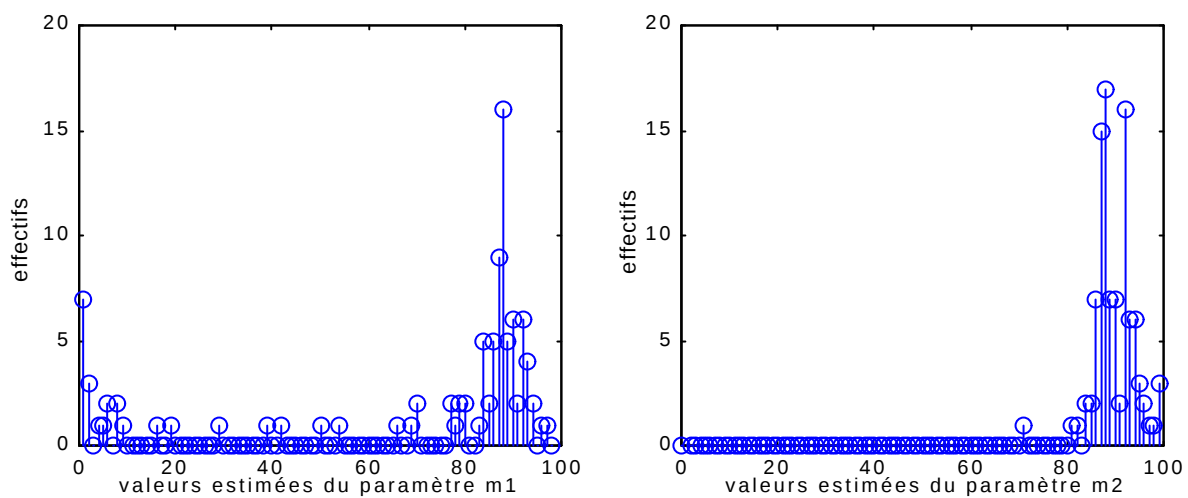


Diagrammes de la distribution des fréquences des estimateurs des points de rupture par le mode a posteriori

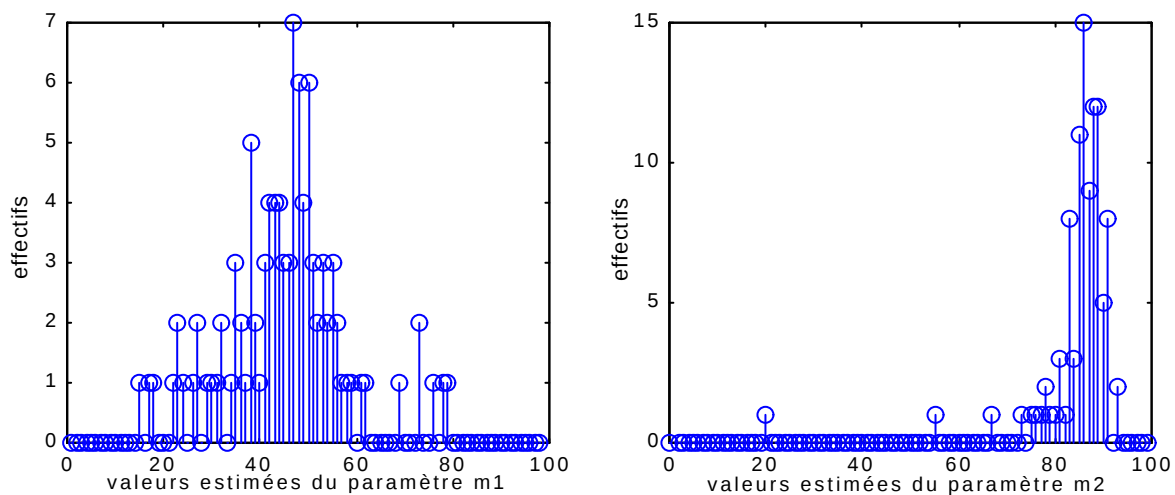


Diagrammes de la distribution des fréquences des estimateurs des points de rupture par la moyenne a posteriori

Figure18

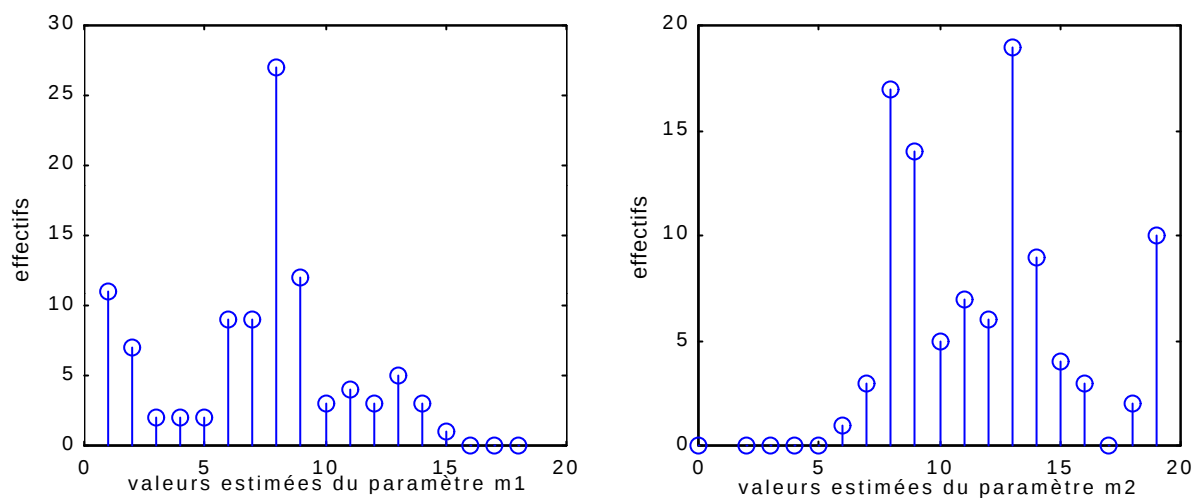


Diagrammes de la distribution des fréquences des estimateurs des points de rupture estimés par le mode a posteriori

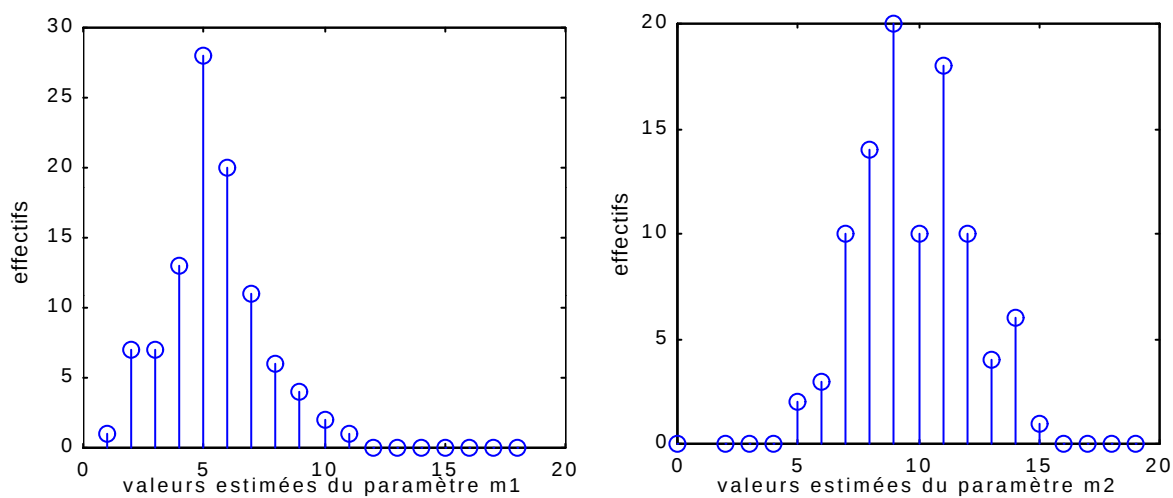


Diagrammes de la distribution des fréquences des estimateurs des points de rupture par la moyenne a posteriori

Figure19

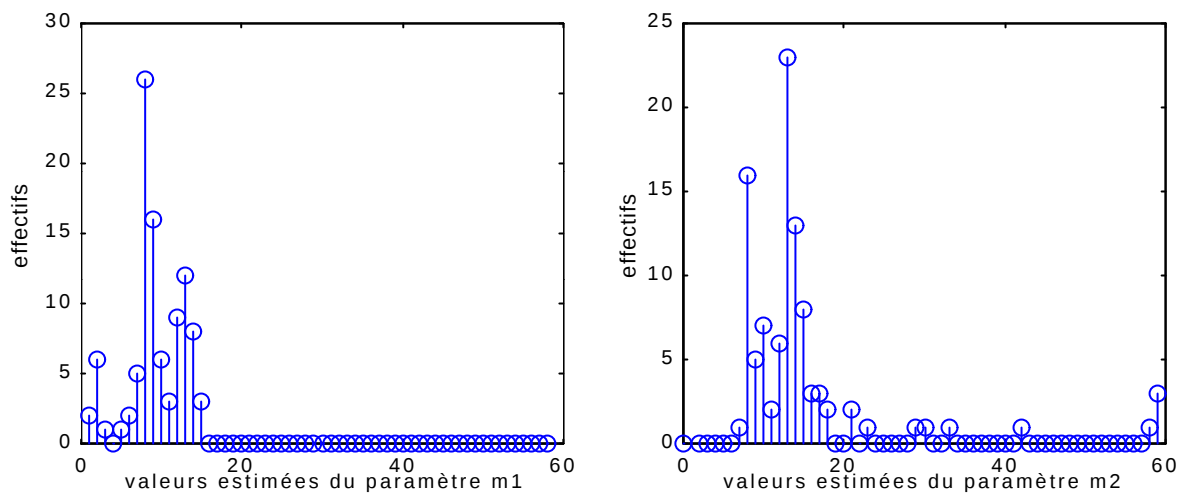


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

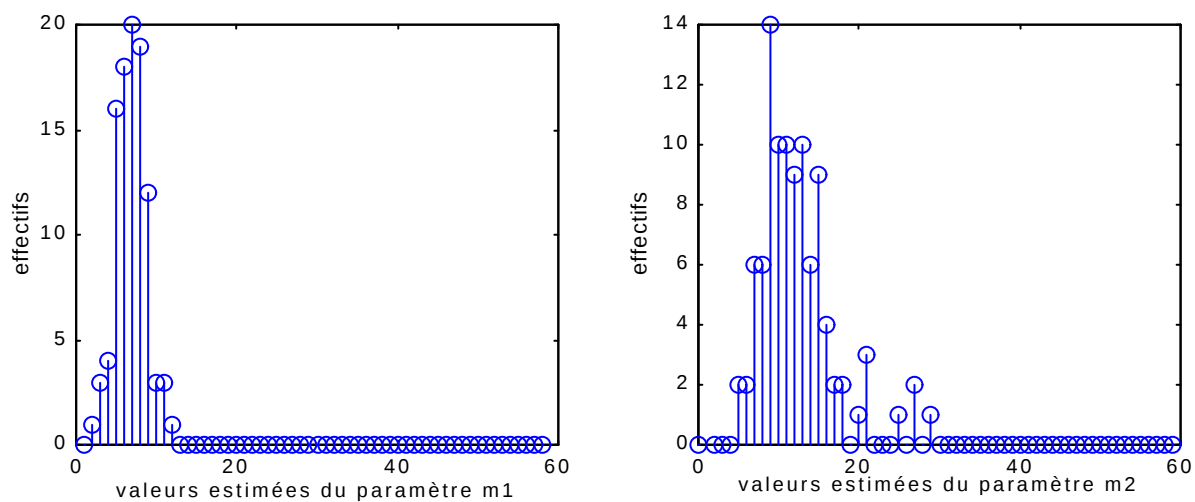


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

figure20

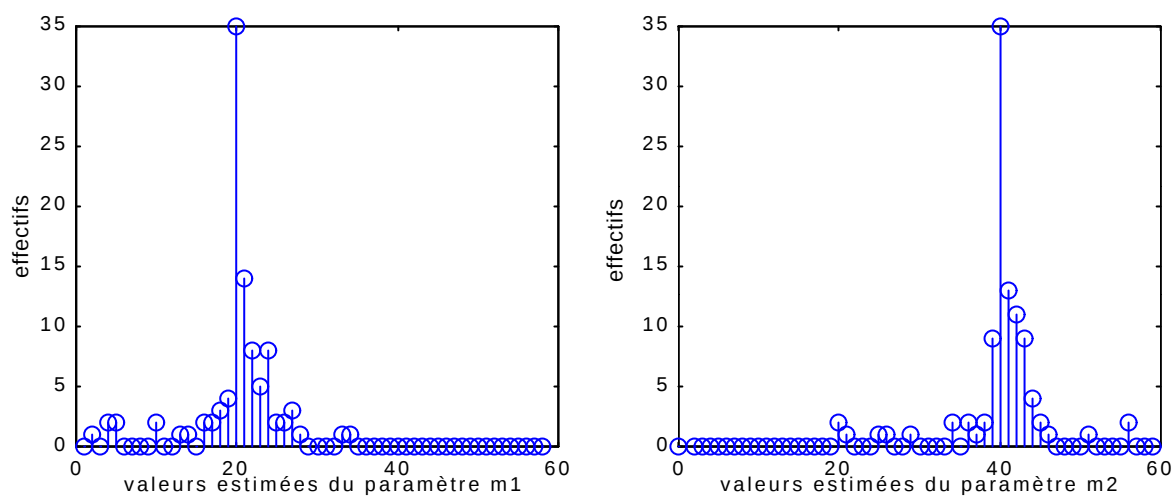


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

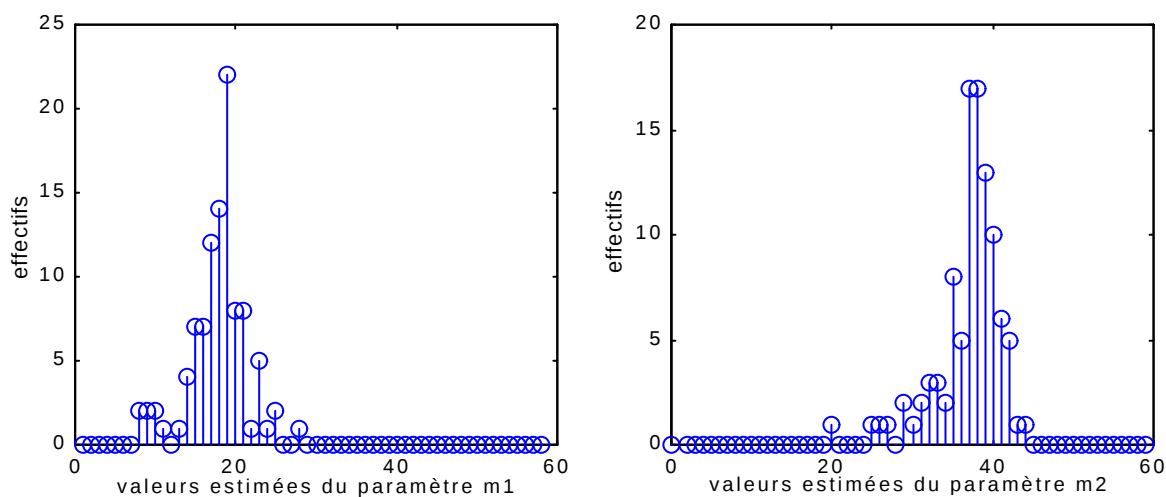


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

figure21

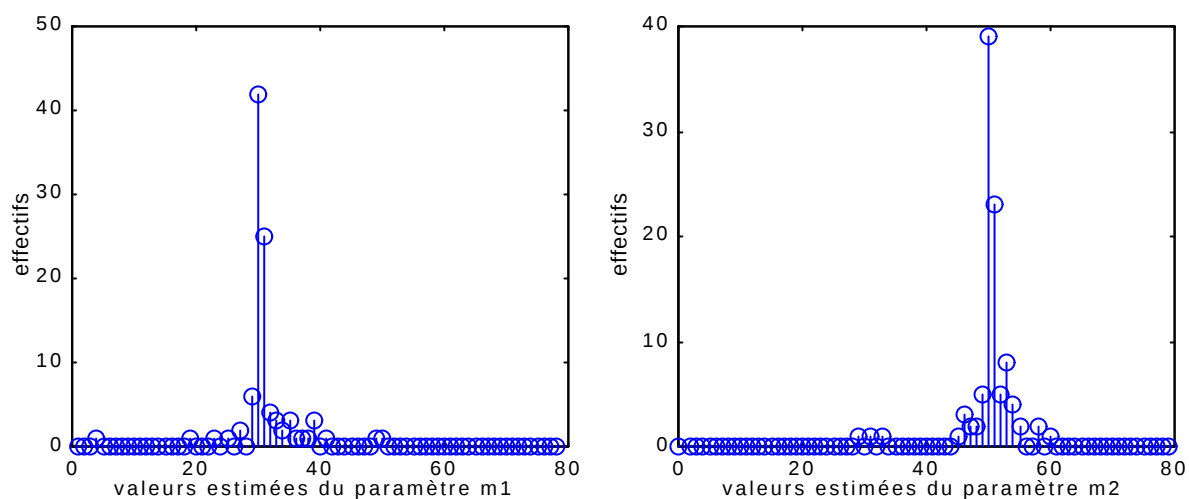


Diagrammes de la distribution des fréquences des point de rupture estimés par le mode a posteriori

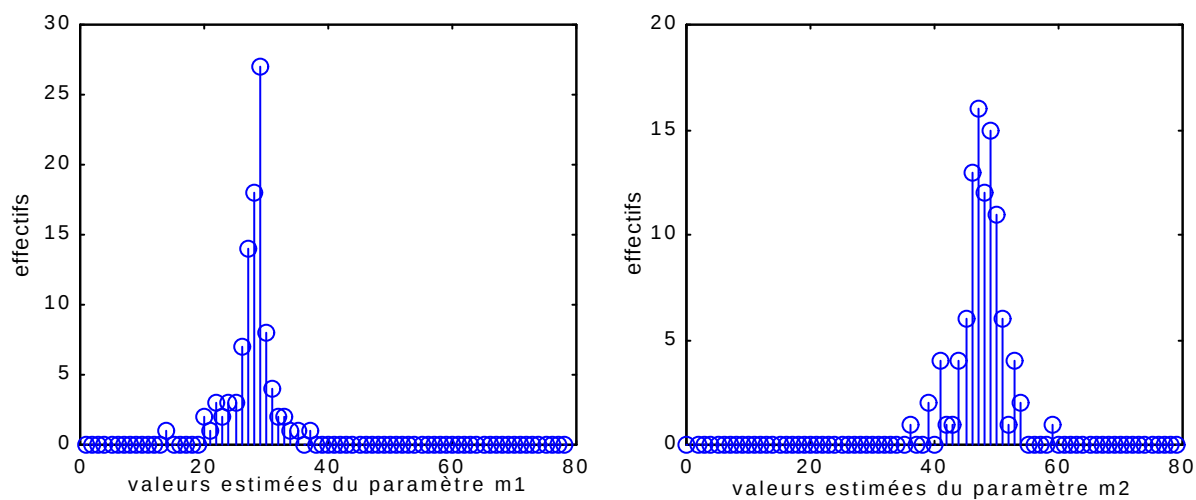


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

figure22



Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori



Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

figure23

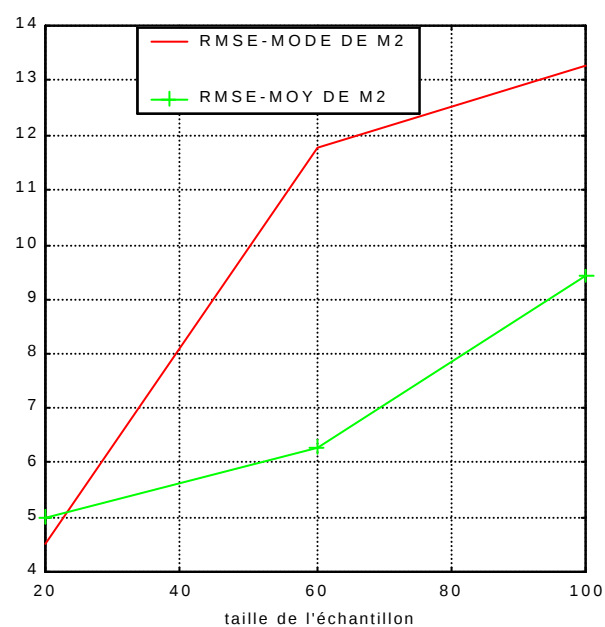
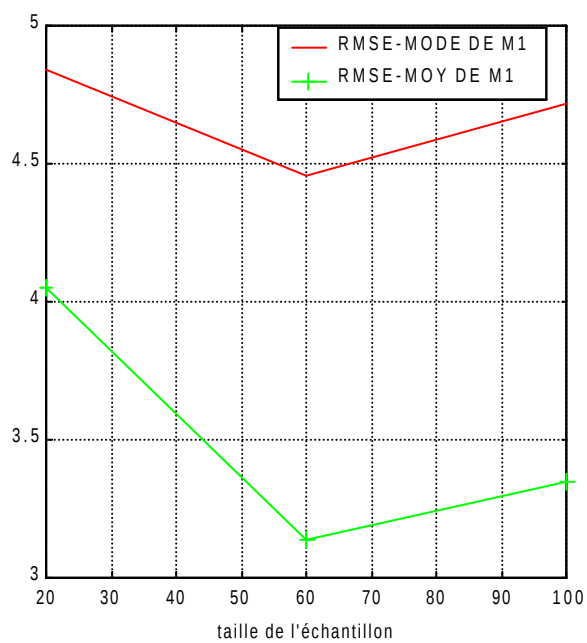
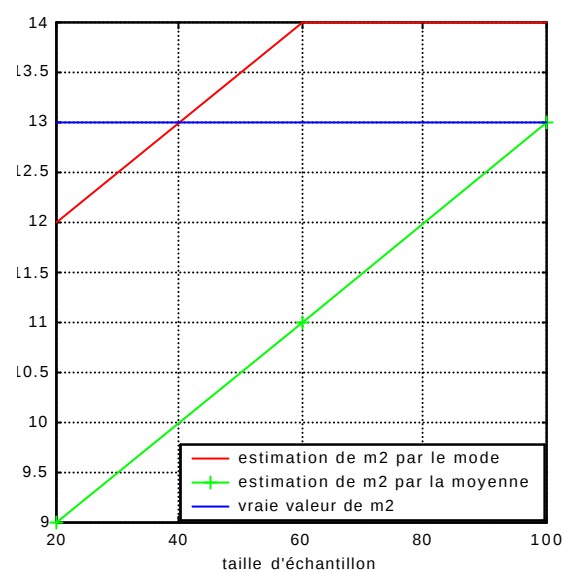
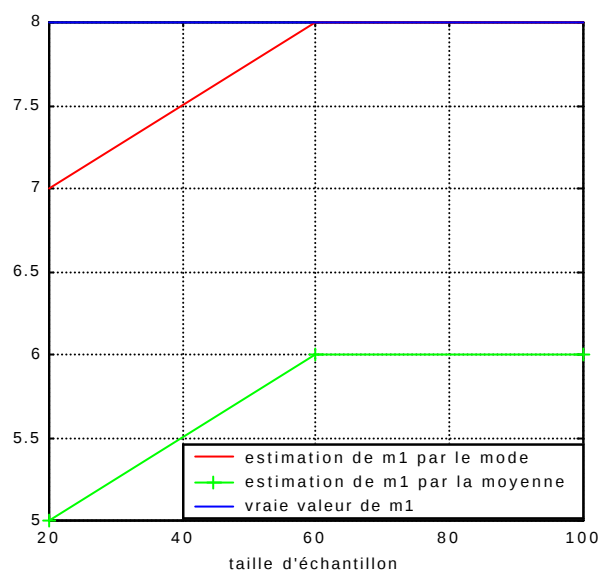
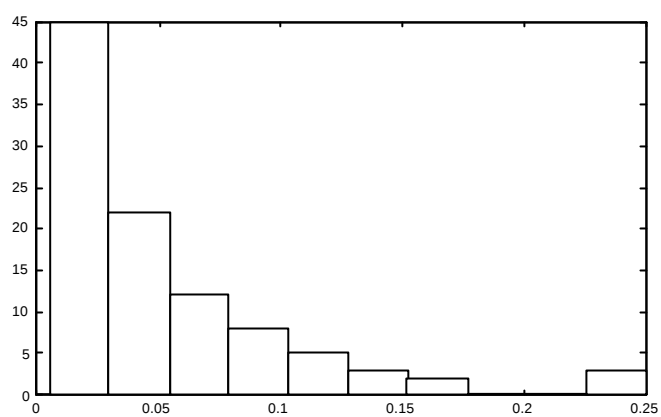
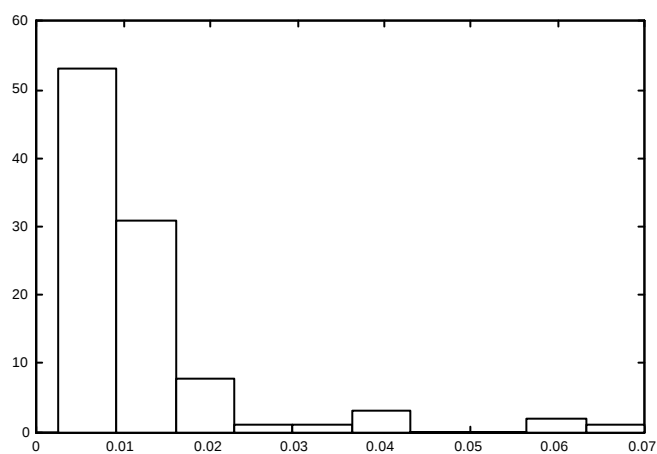


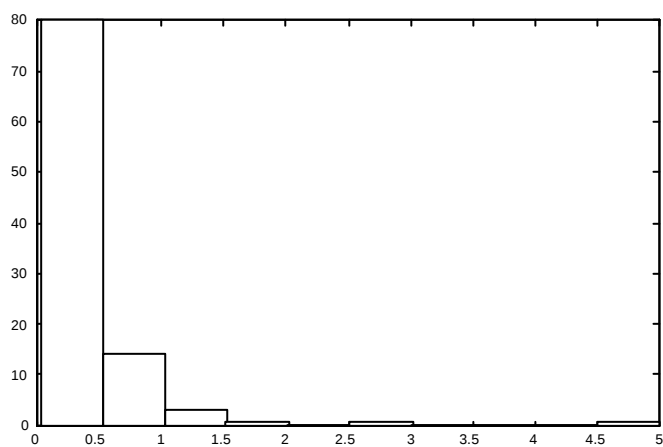
Figure24



(a)



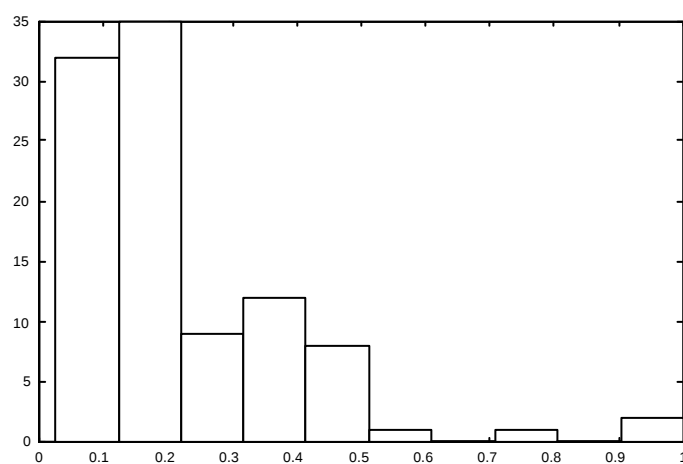
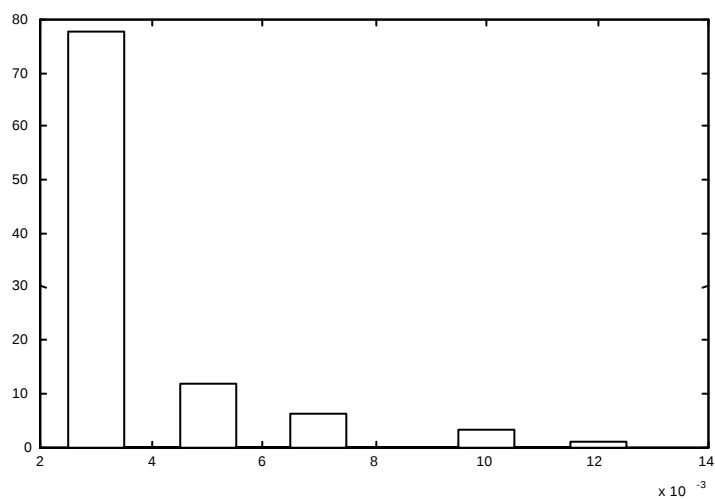
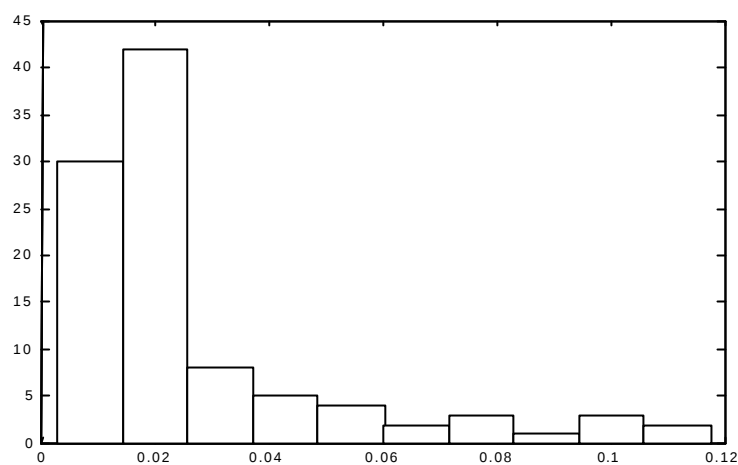
(b)



(c)

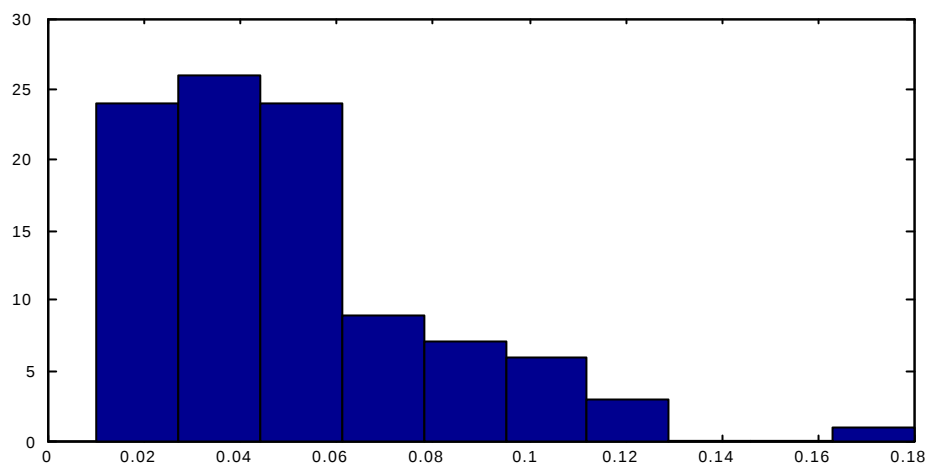
Histogrammes des fréquences des estimateurs des rapports des variances s_1^2/s_2^2 (a)
 s_1^2/s_3^2 (b) s_2^2/s_3^2 (c) par le mode a posteriori

figure25

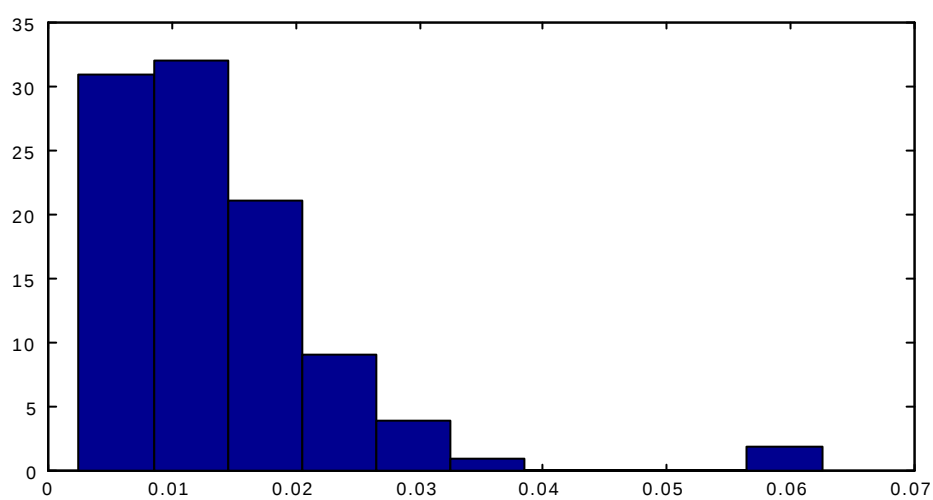


Histogrammes des fréquences des estimateurs des rapports des variances s_1^2/s_2^2 (a) s_1^2/s_3^2 (b) s_2^2/s_3^2 (c) par le mode a posteriori

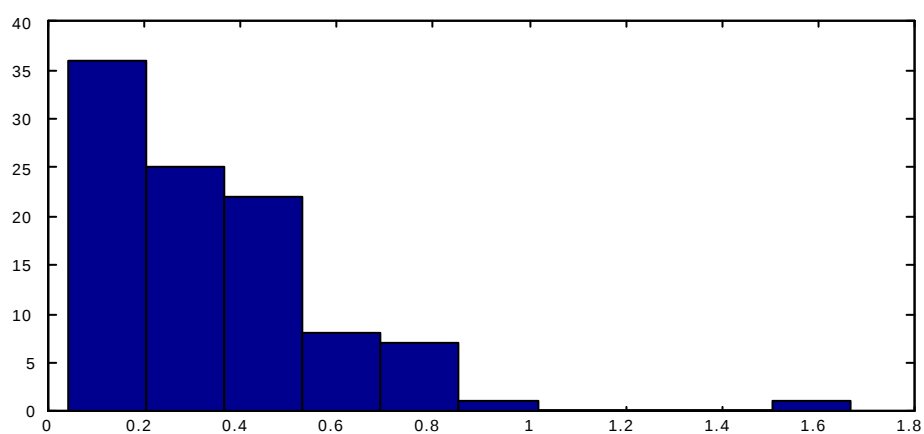
figure26



(a)



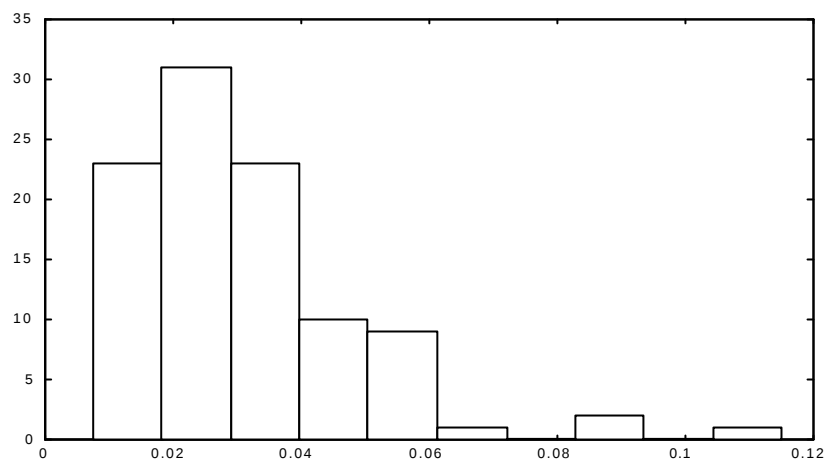
(b)



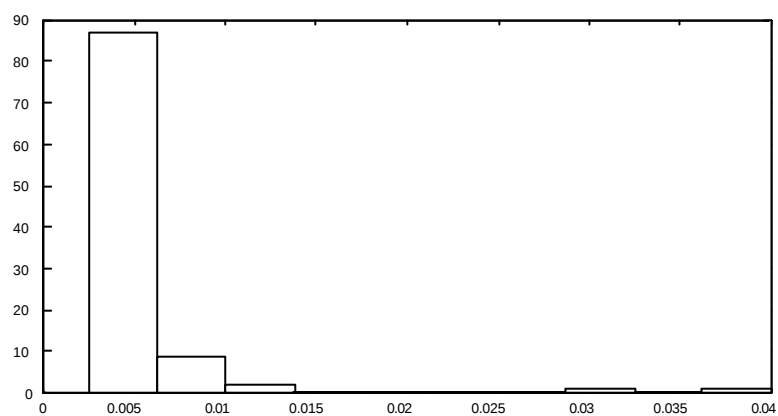
©

Histogrammes des fréquences des estimateurs des rapports des variances s_1^2/s_2^2 (a) s_1^2/s_3^2 (b) s_2^2/s_3^2 (c) par le mode a posteriori

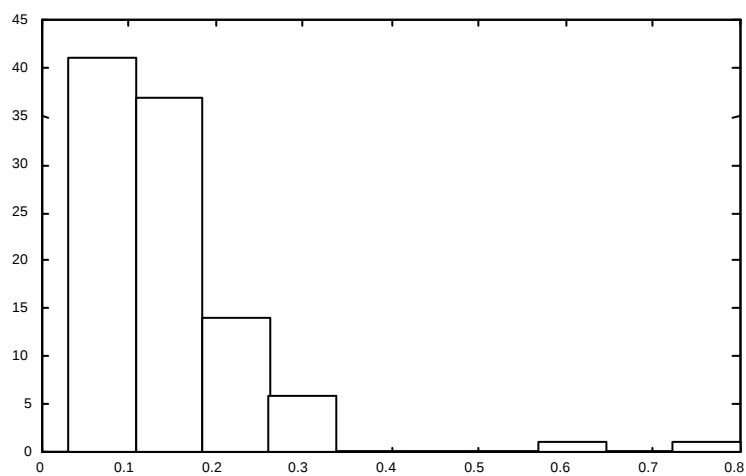
figure27



(a)



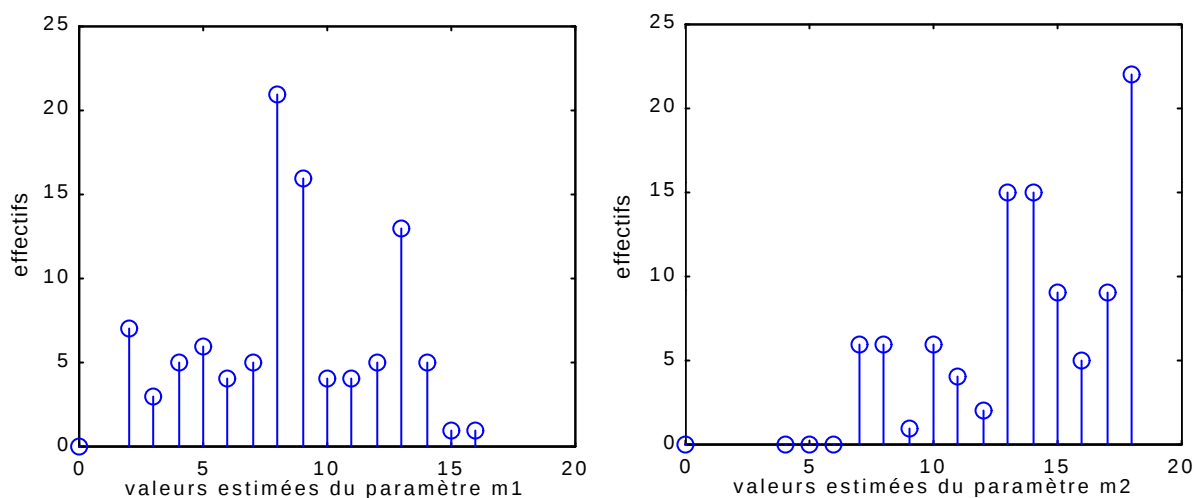
(b)



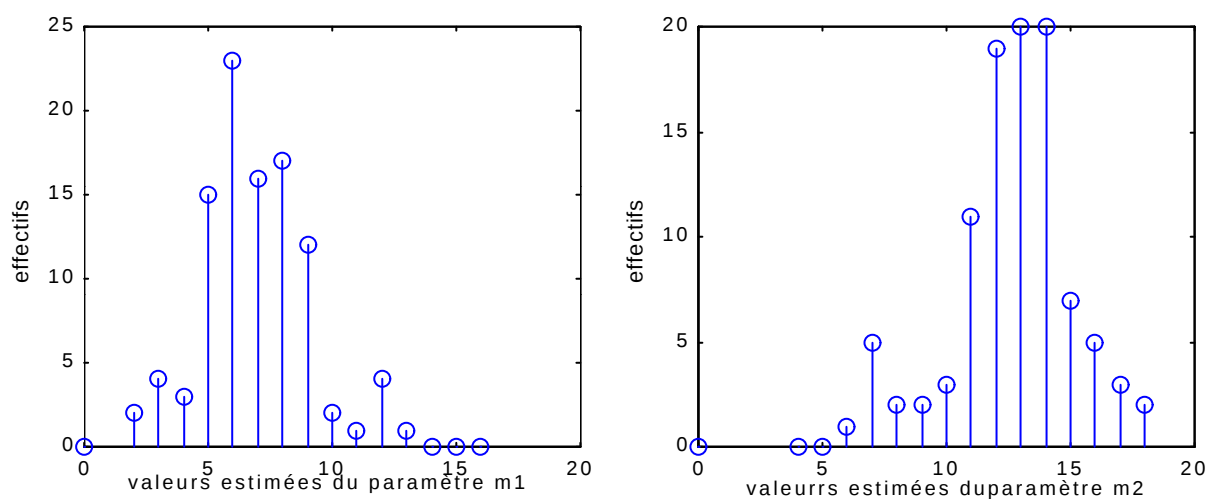
(c)

Histogrammes des fréquences des estimateurs des rapports des variances s_1^2/s_2^2 (a)
 s_1^2/s_3^2 (b) s_2^2/s_3^2 (c) par le mode a posteriori

figure28

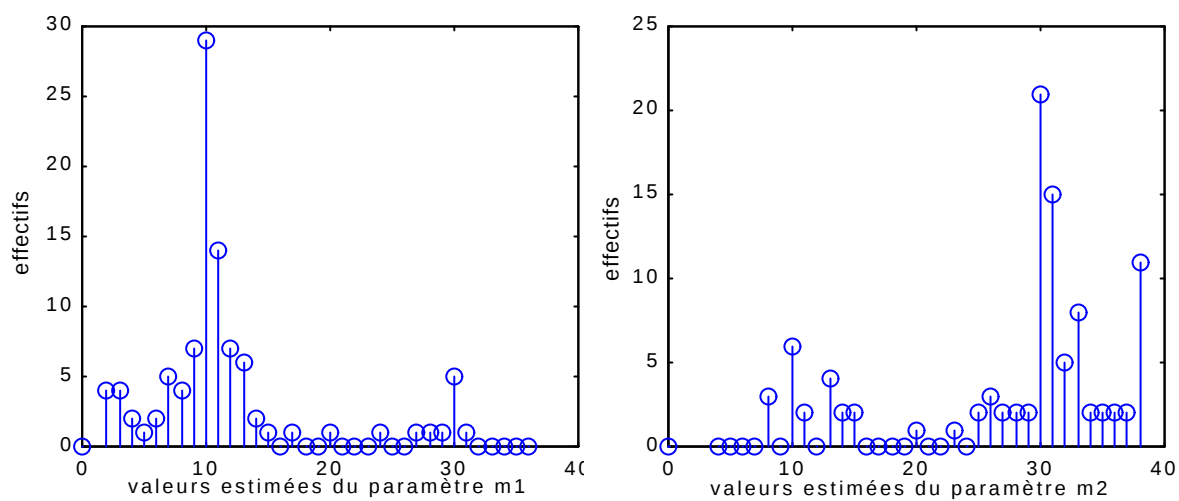


Diagrammes de la distribution des fréquences des estimateurs des points de rupture par le mode a posteriori

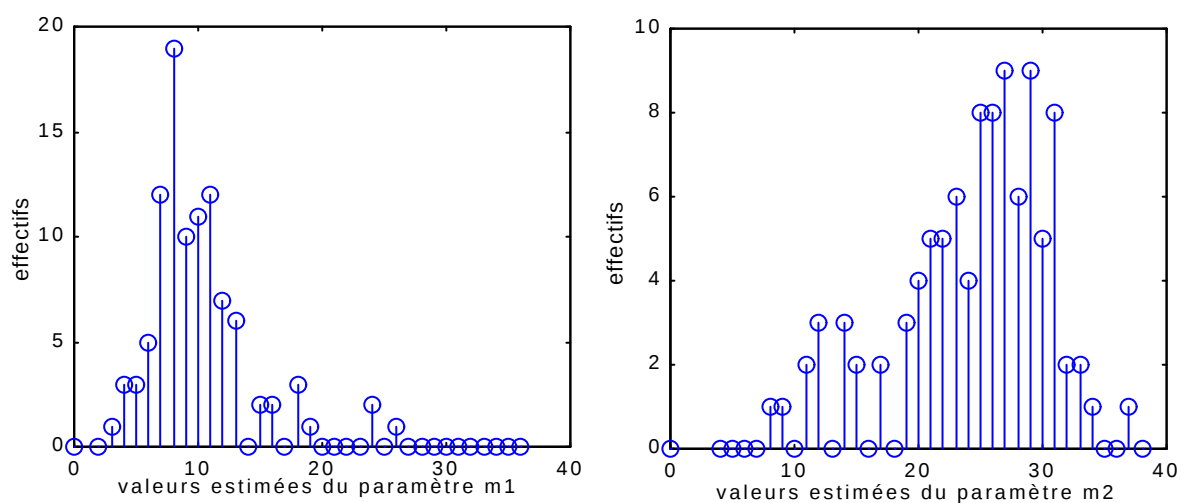


Diagrammes de la distribution des fréquences des estimateurs des points de rupture par la moyenne a posteriori

Figure29

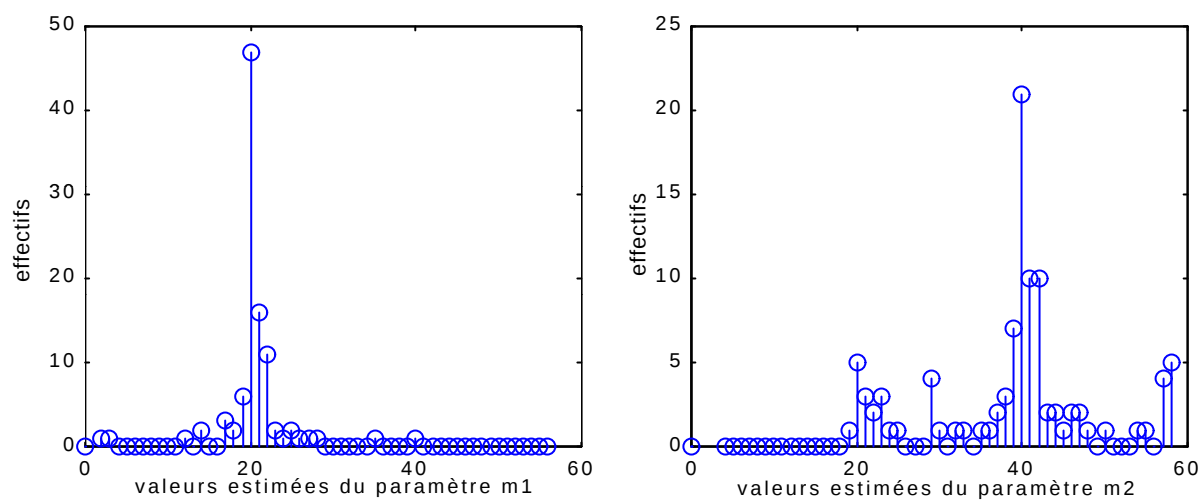


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

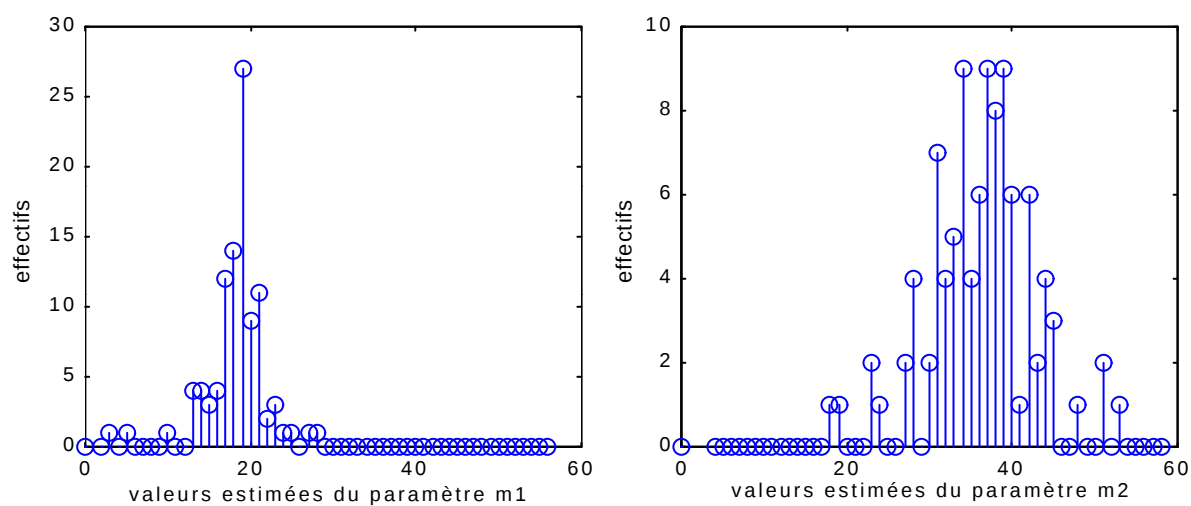


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

Figure30

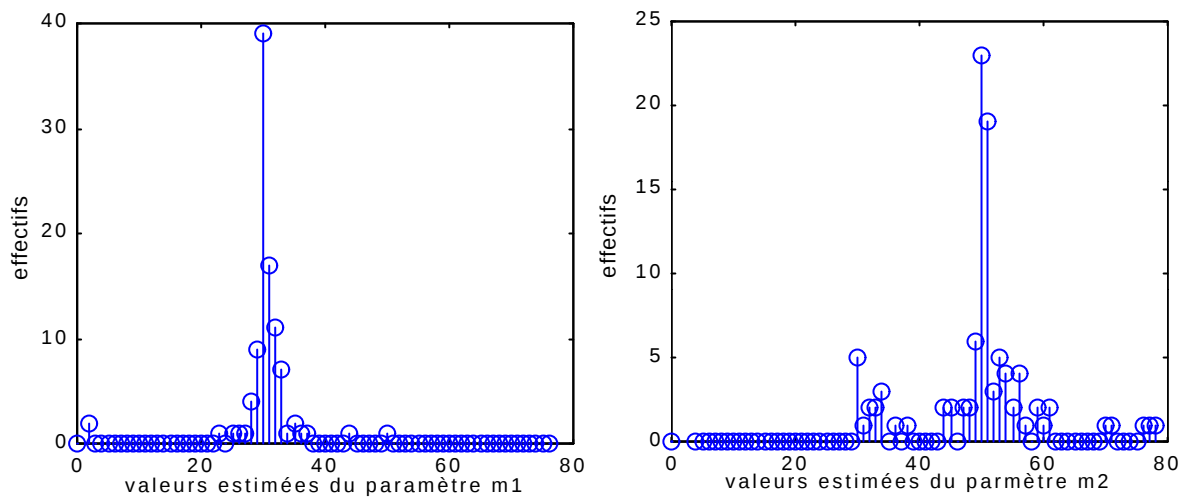


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

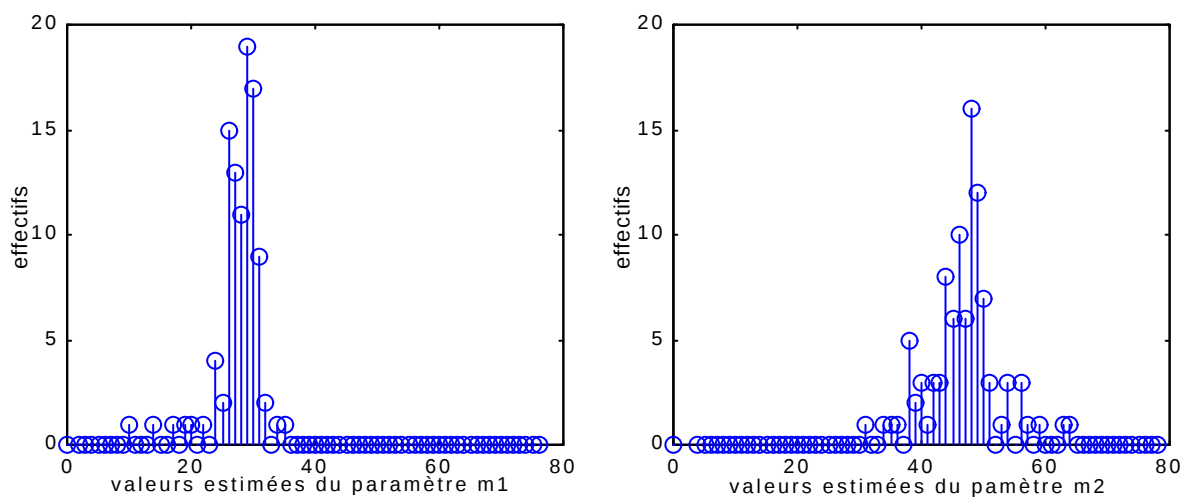


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

Figure31

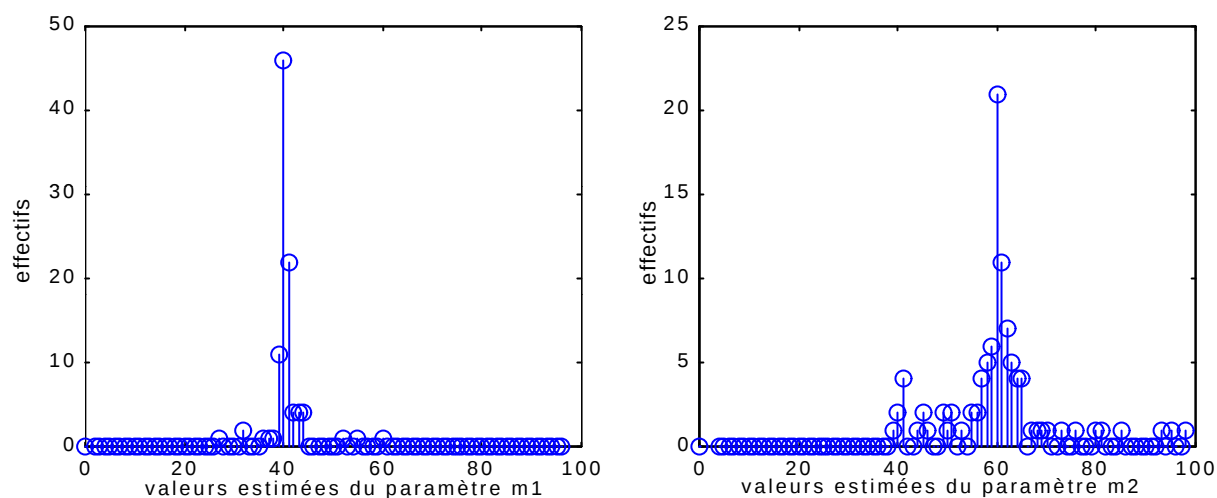


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

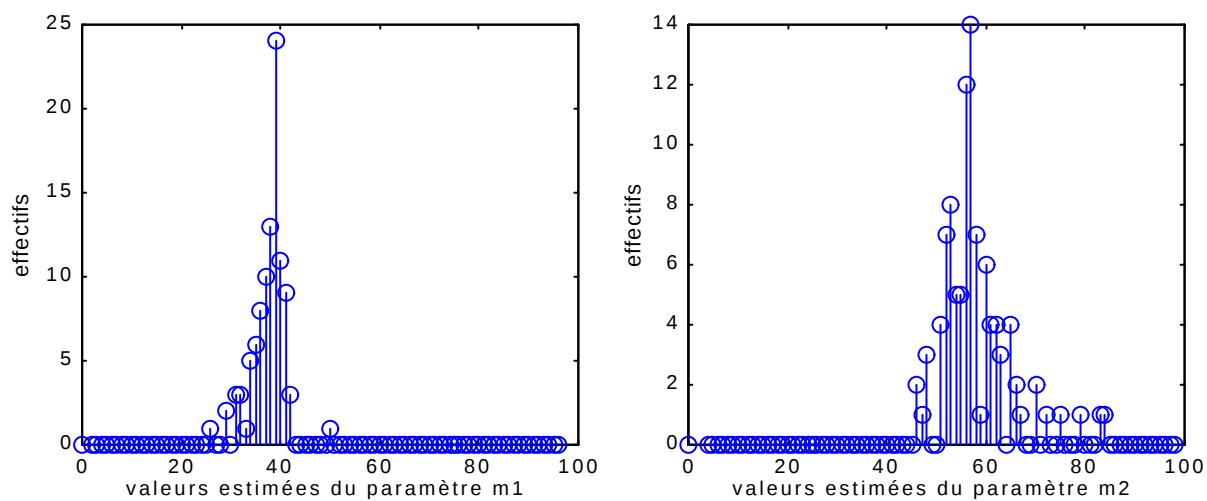


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

figure32

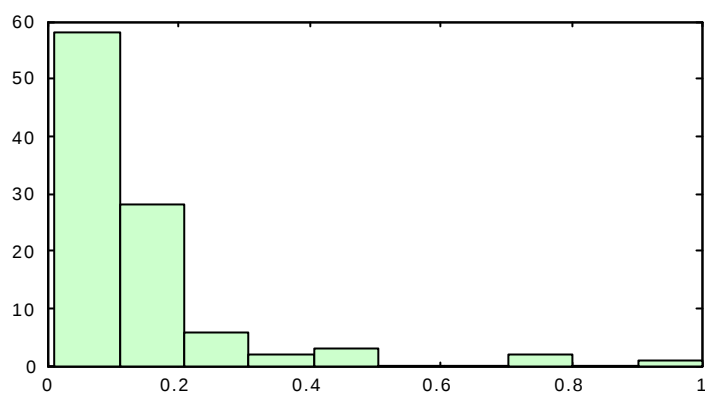


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

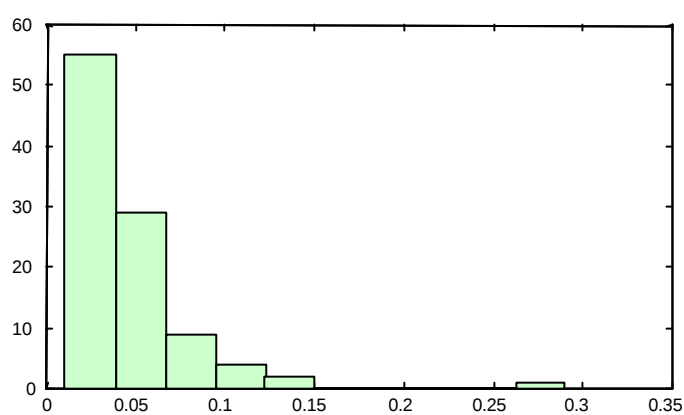


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

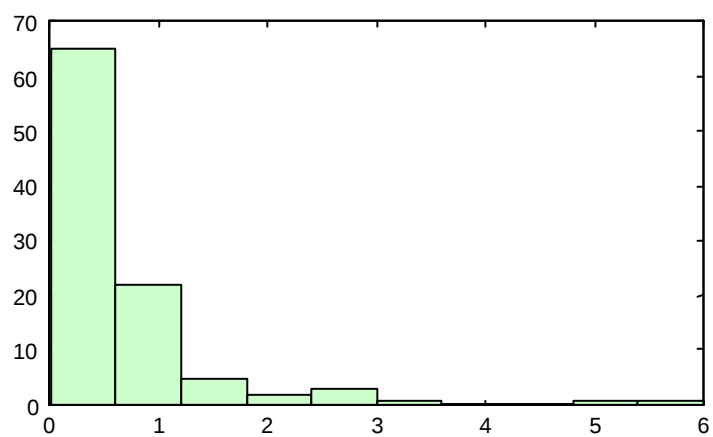
figure33



(a)



(b)

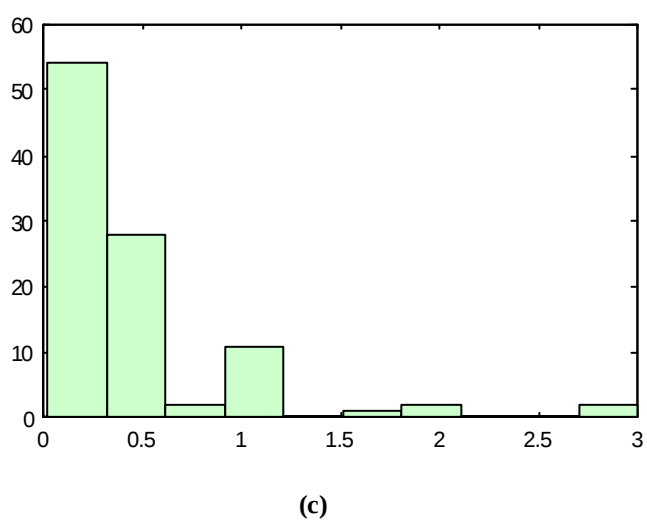
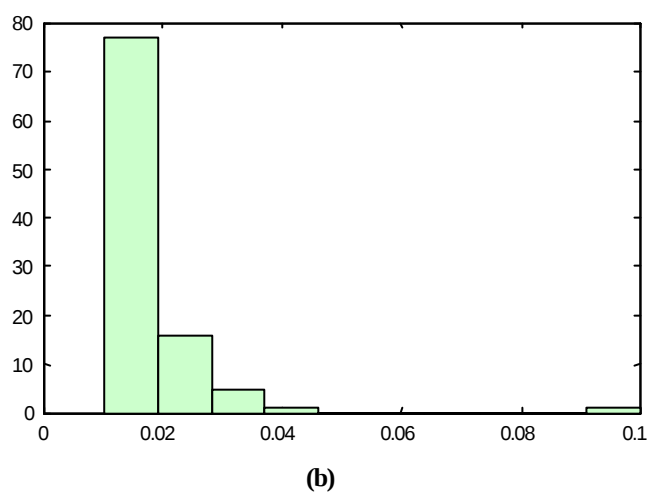
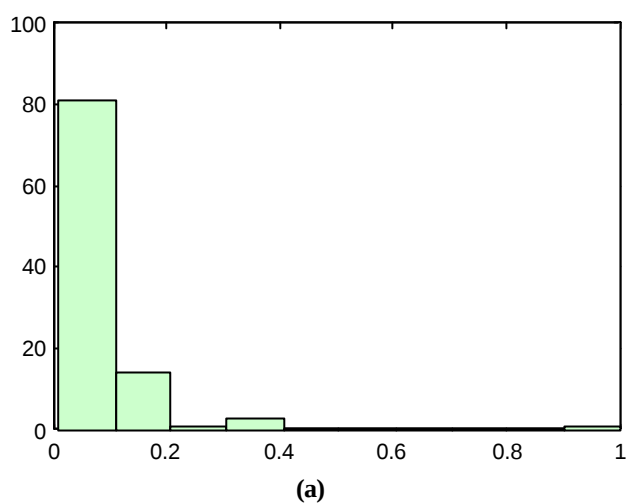


(c)

Histogrammes des fréquences des estimateurs des rapports des variances s_1^2/s_2^2
(a)

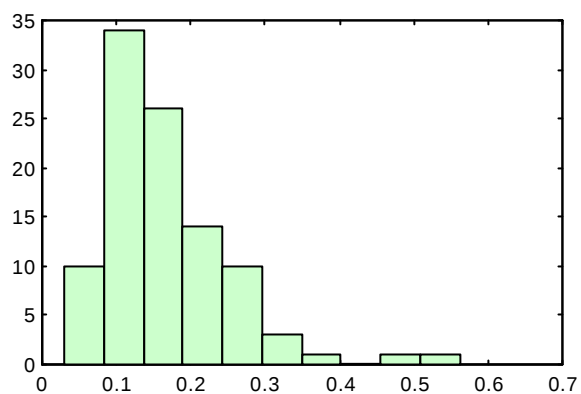
s_1^2/s_3^2 (b) s_2^2/s_3^2 (c) par le mode a posteriori

figure34

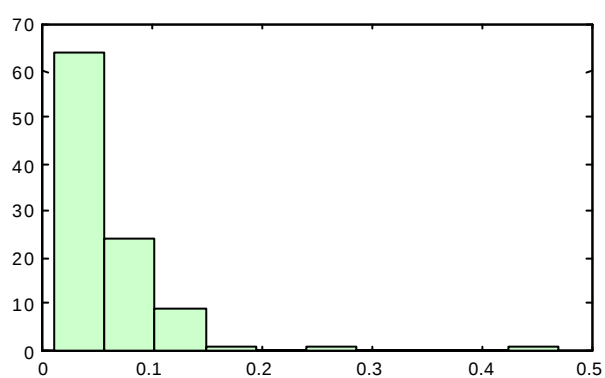


Histogrammes des fréquences des estimateurs des rapports des variances s_1^2/s_2^2 (a) s_1^2/s_3^2 (b) s_2^2/s_3^2 (c) par le mode a posteriori

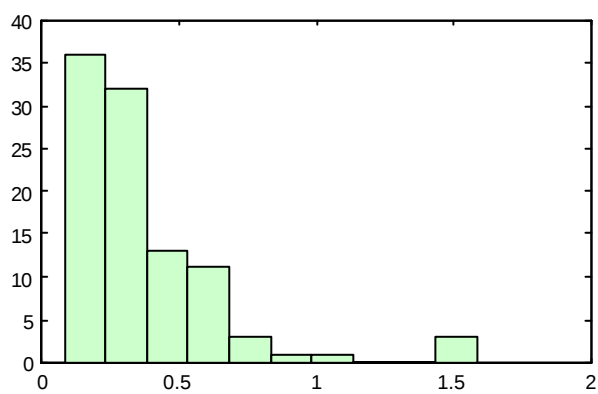
figure35



(a)



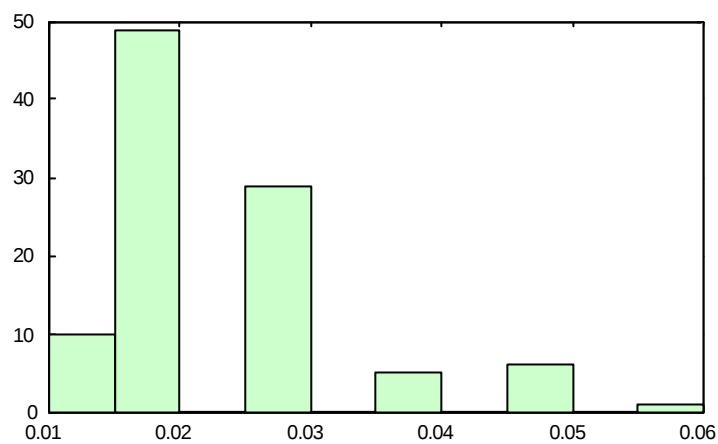
(b)



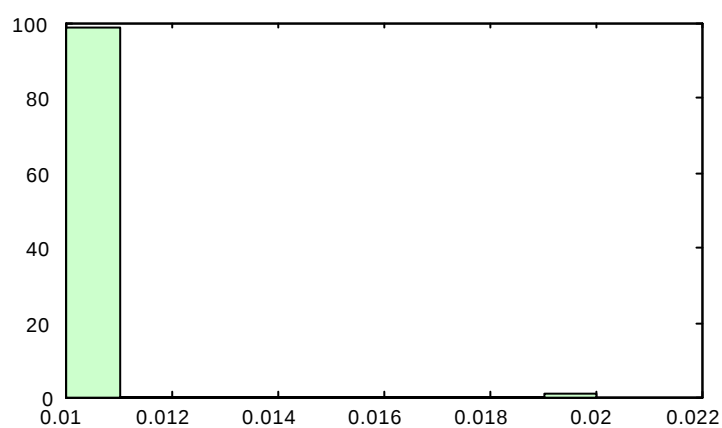
(c)

Histogrammes des fréquences des estimateurs des rapports des variances s_1^2/s_2^2 (a)
 s_1^2/s_3^2 (b) s_2^2/s_3^2 (c) par le mode a posteriori

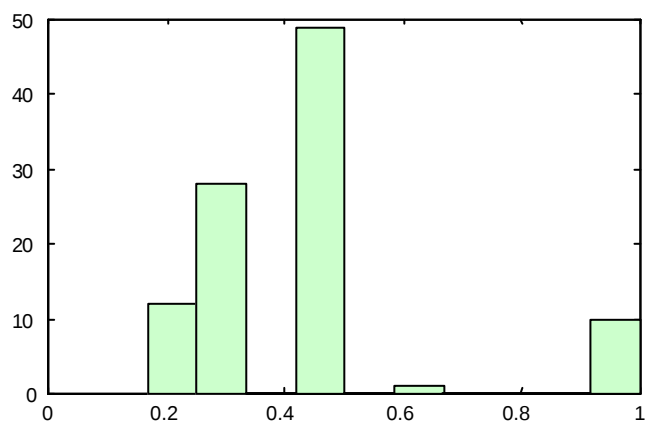
Figure36



(a)



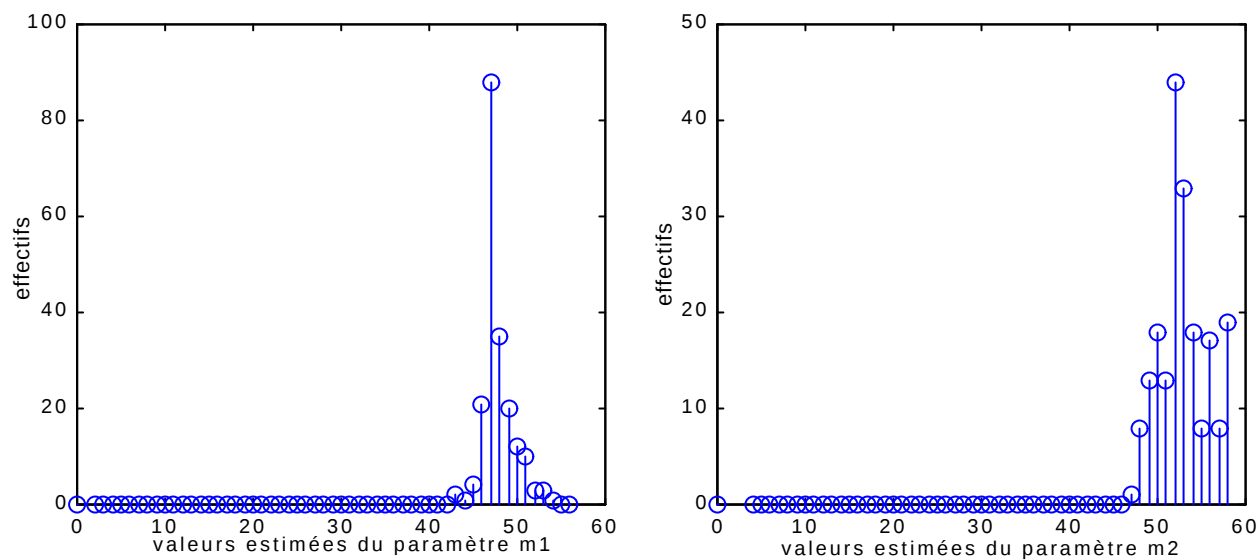
(b)



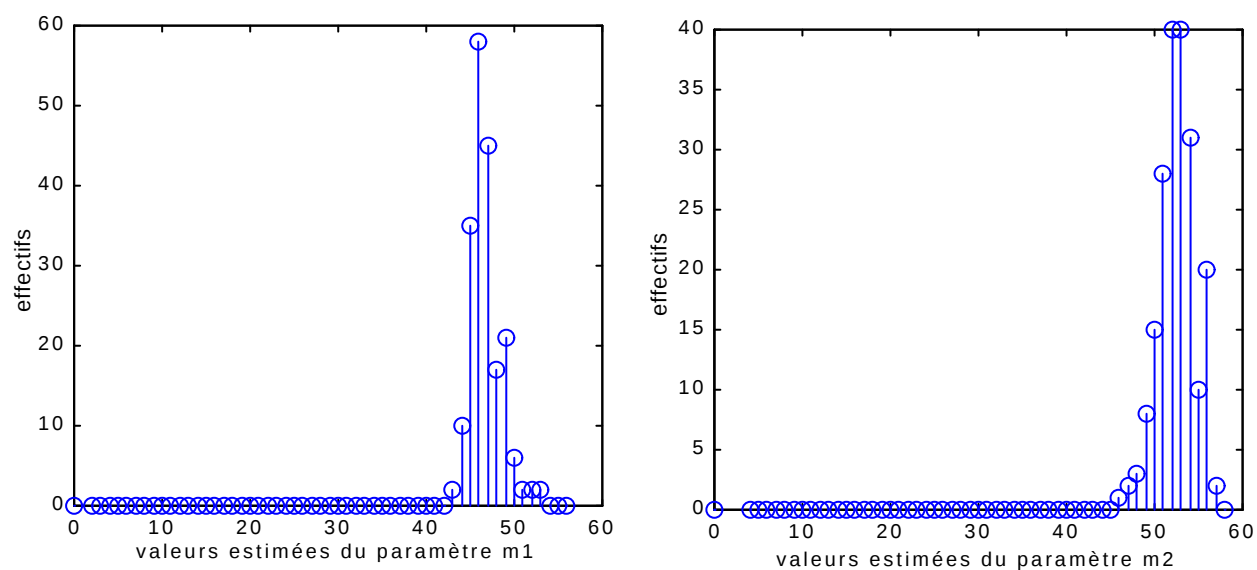
(c)

Histogrammes de fréquence des estimateurs des rapports des variances s_1^2/s_2^2 (a) s_1^2/s_3^2 (b) s_2^2/s_3^2 (c) par le mode a posteriori

figure37

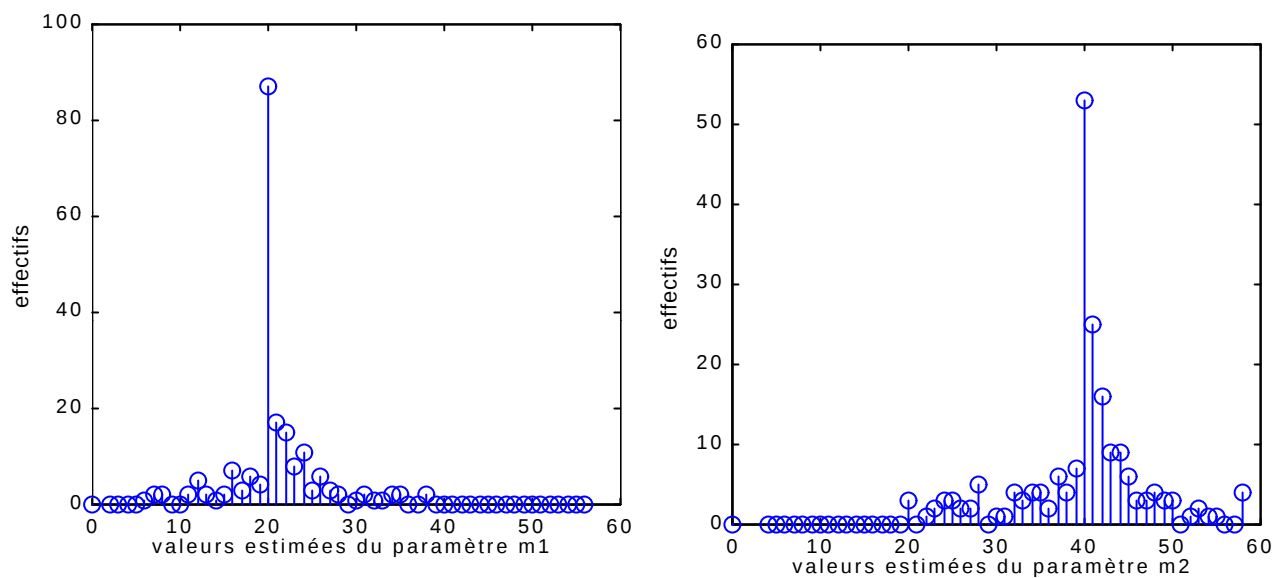


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
Par le mode a posteriori**

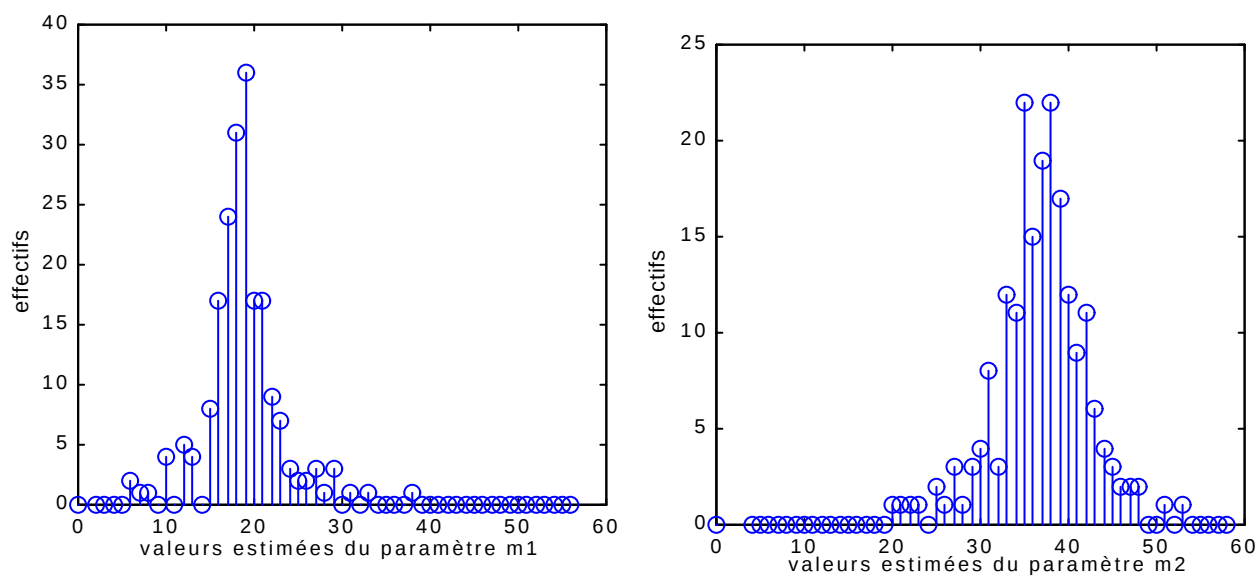


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
Par la moyenne a posteriori**

Figure40

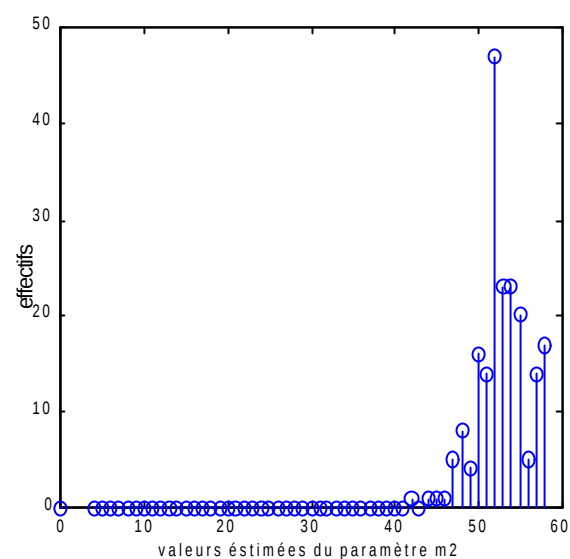
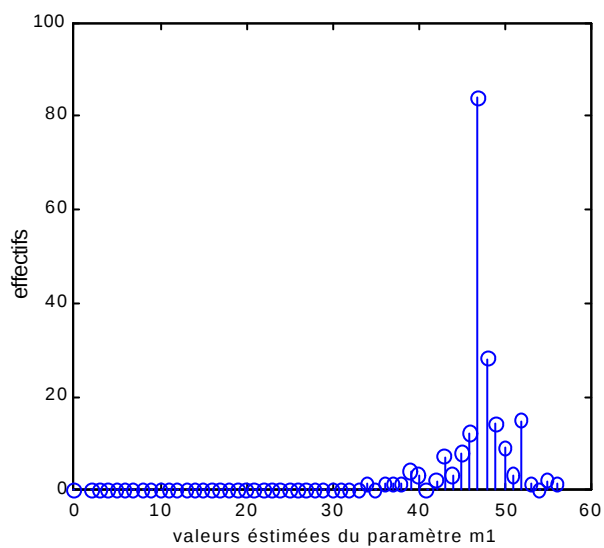


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par
Le mode a posteriori**

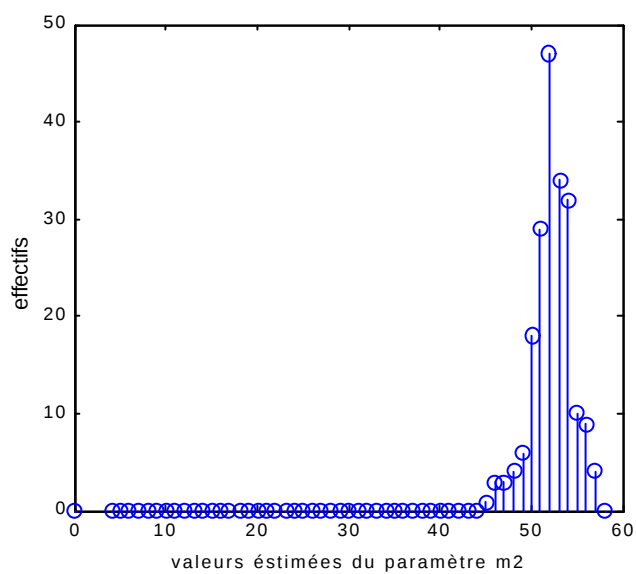
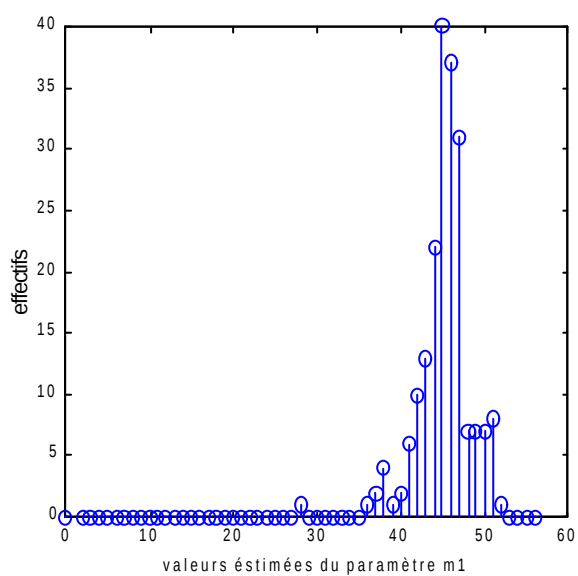


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par
La moyenne a posteriori**

Figure41

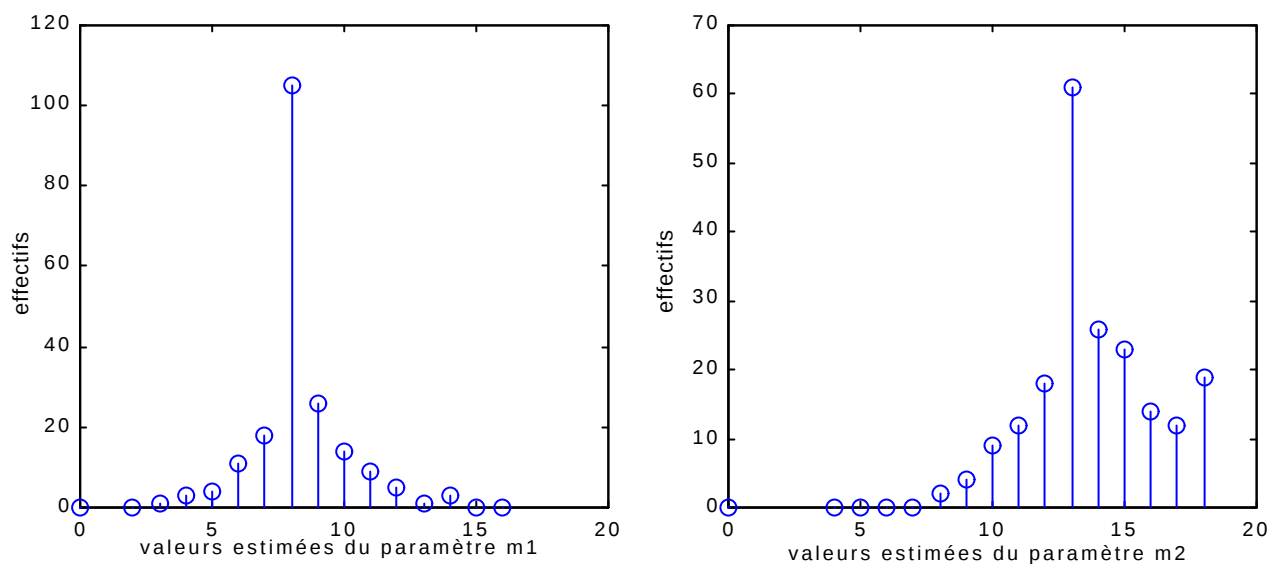


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

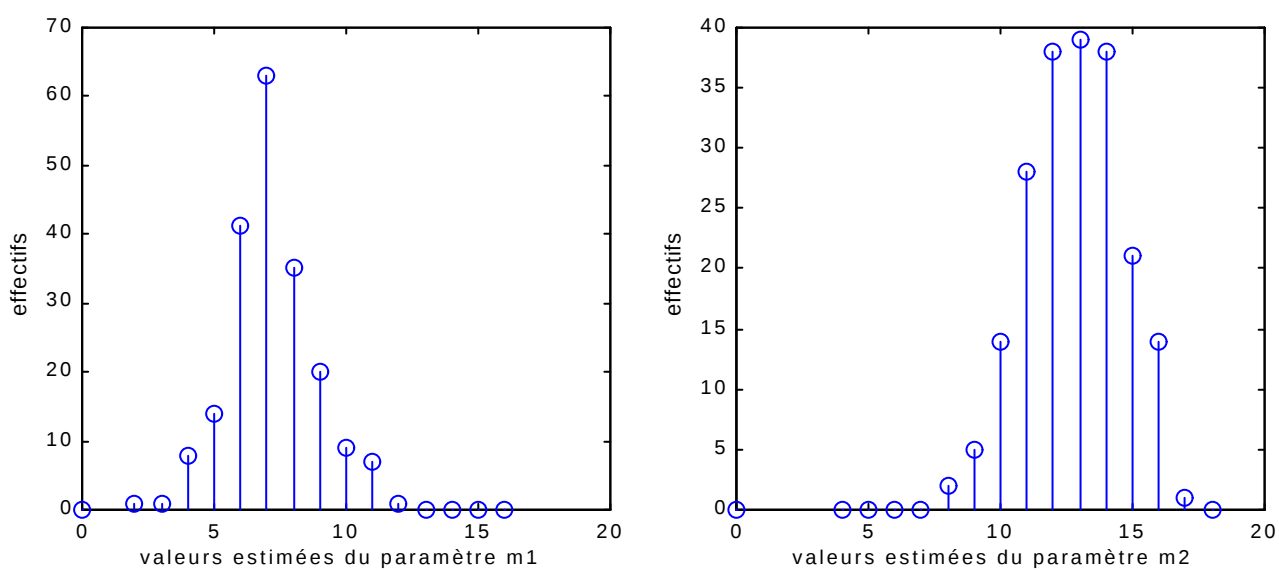


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

figure42

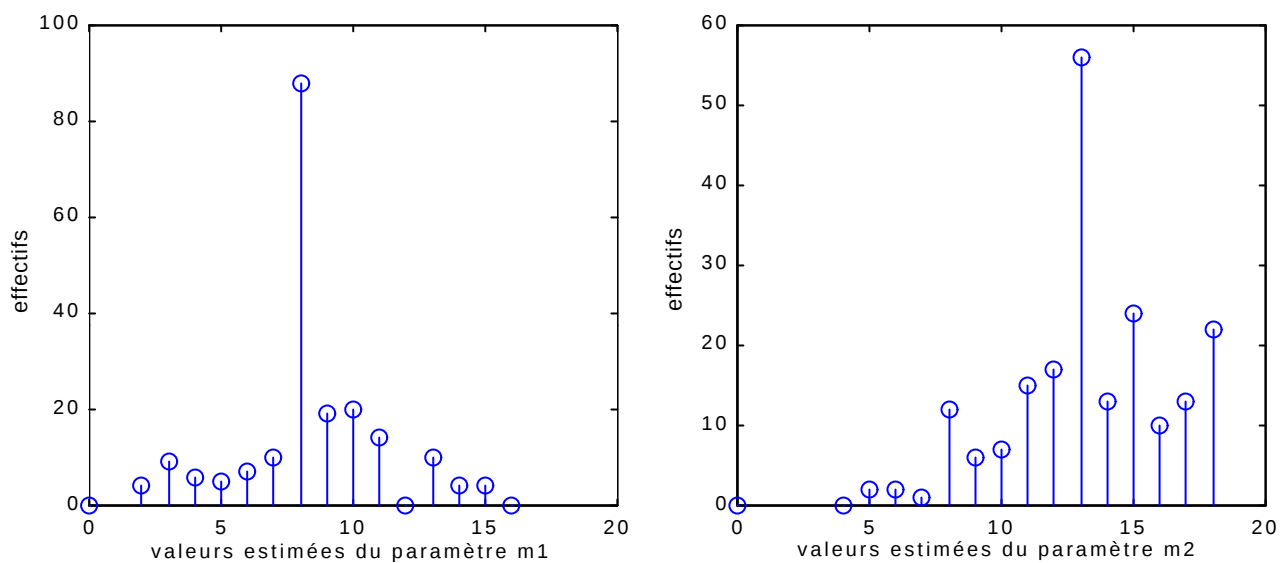


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par le mode a posteriori**

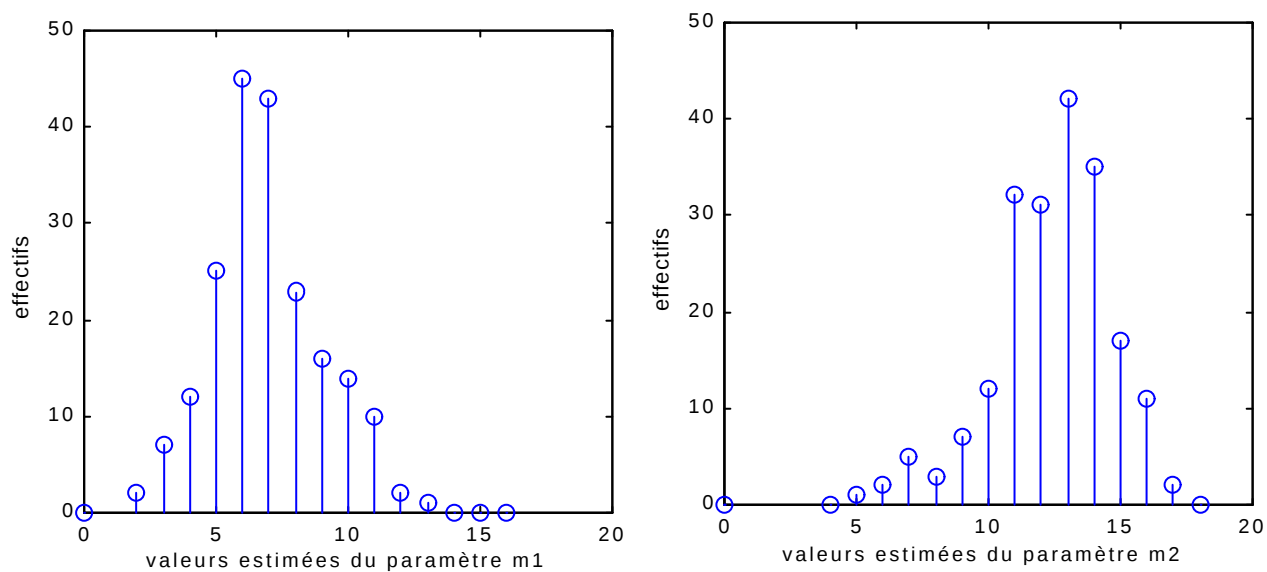


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par la moyenne a posteriori**

figure46

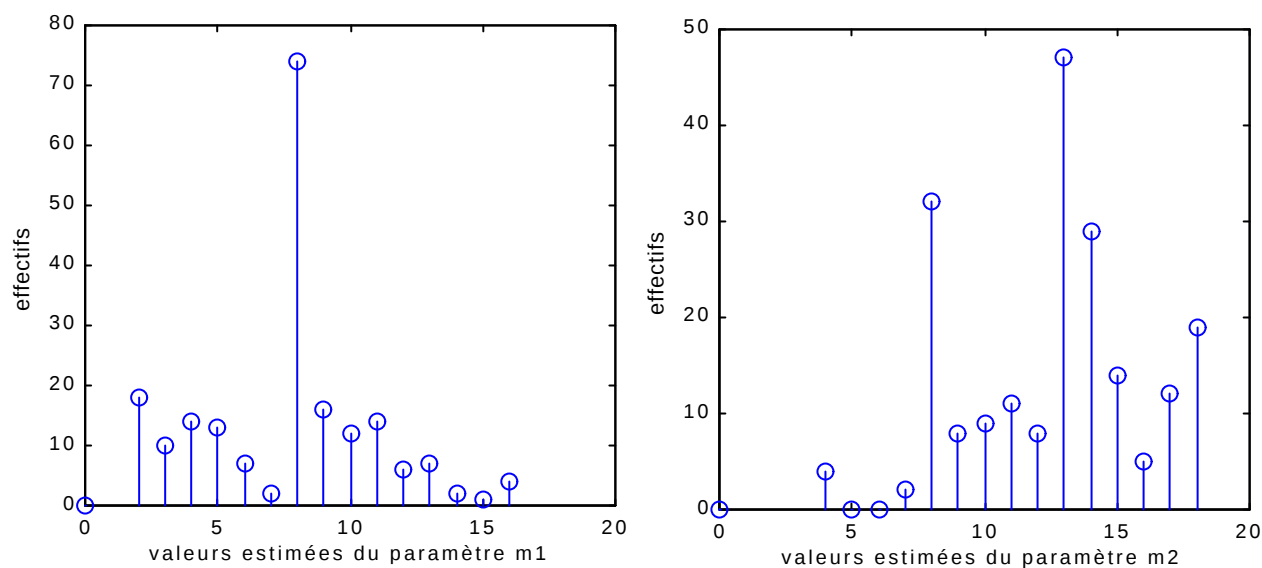


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

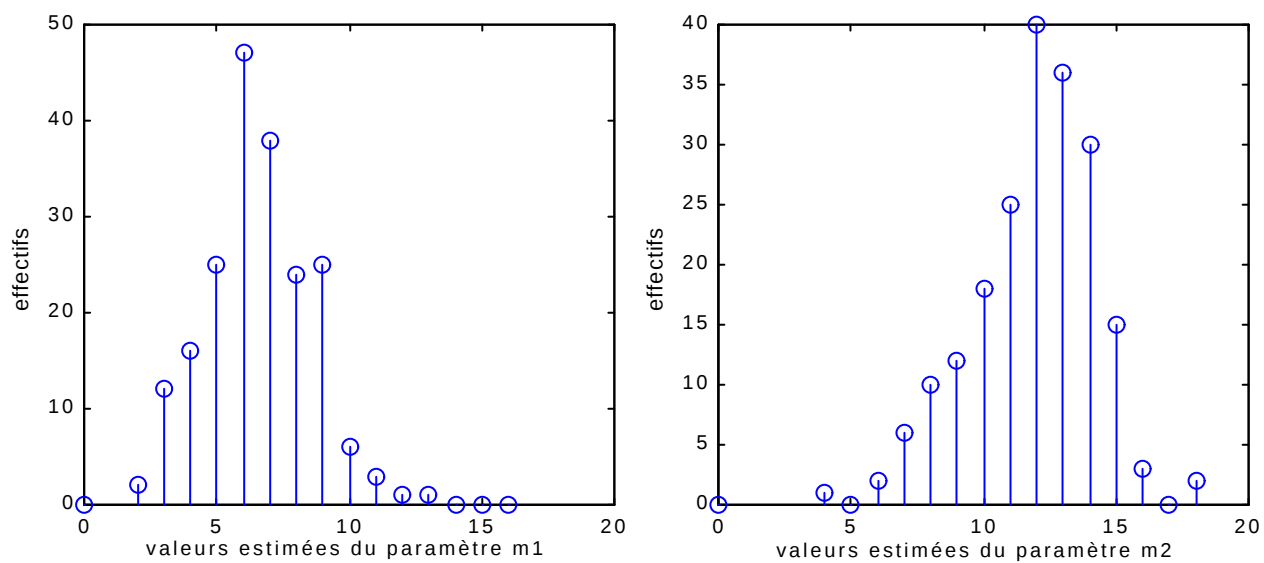


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

figure47

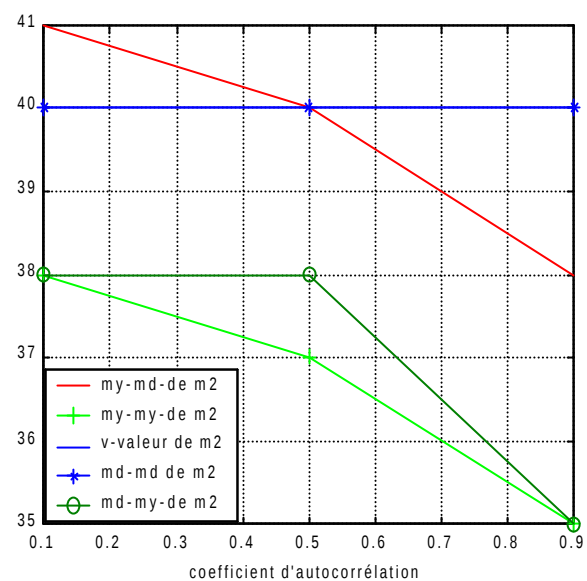
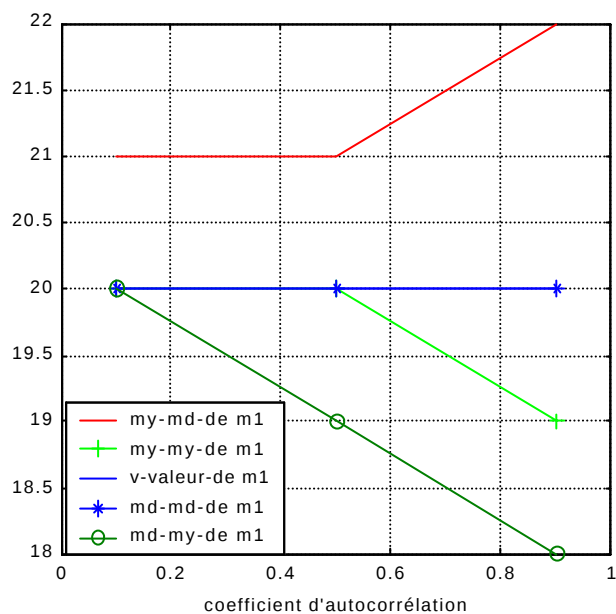


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par le mode a posteriori**

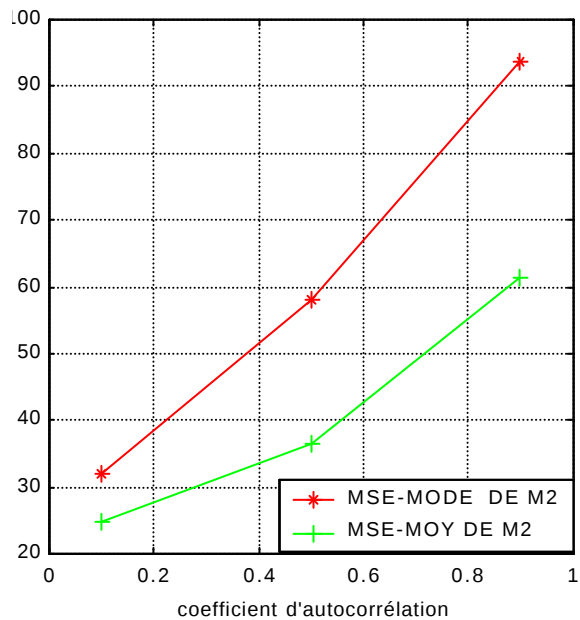
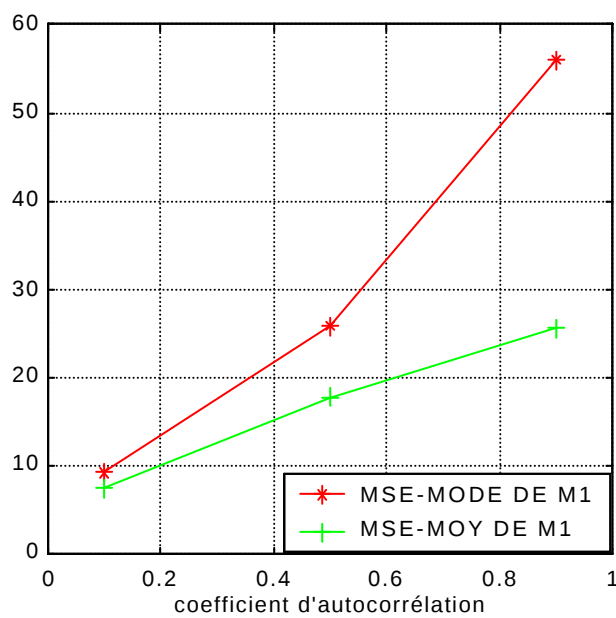


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par la moyenne a posteriori**

figure48

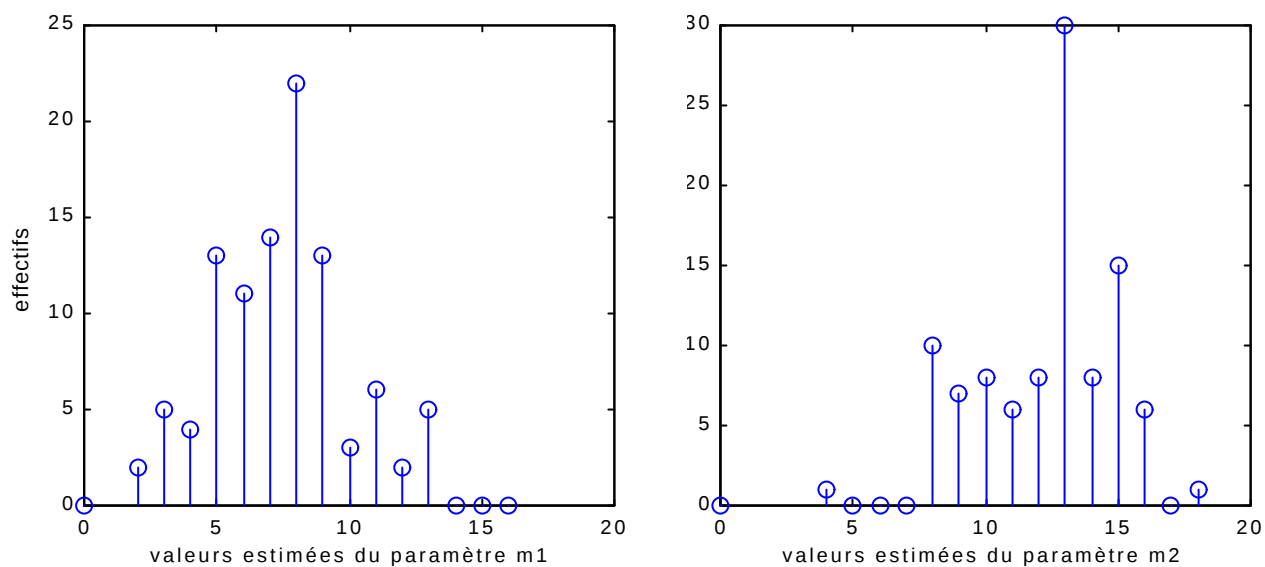


(a)

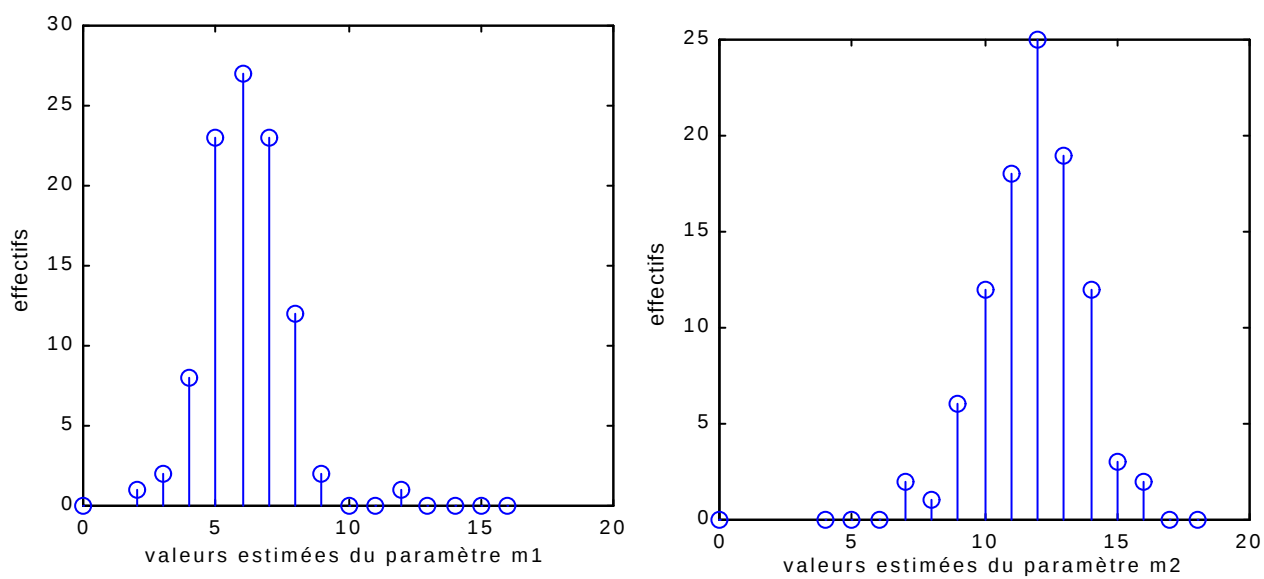


(b)

figure 49

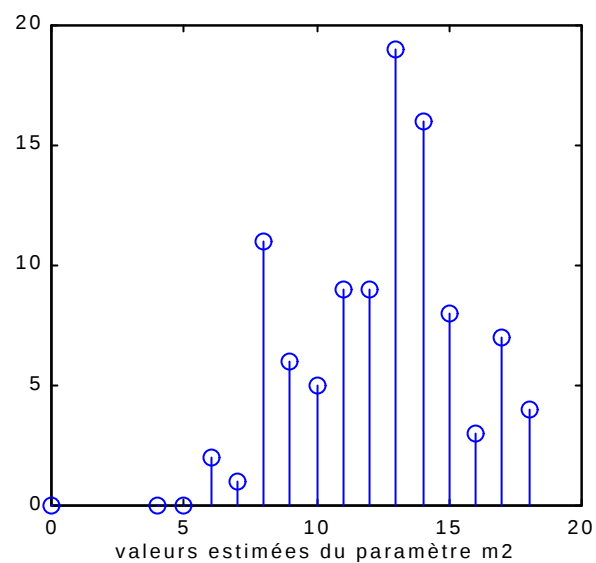
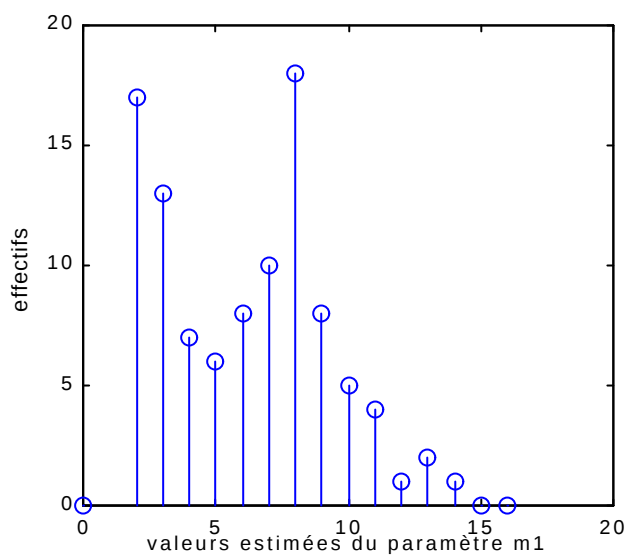


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par
Le mode a posteriori**

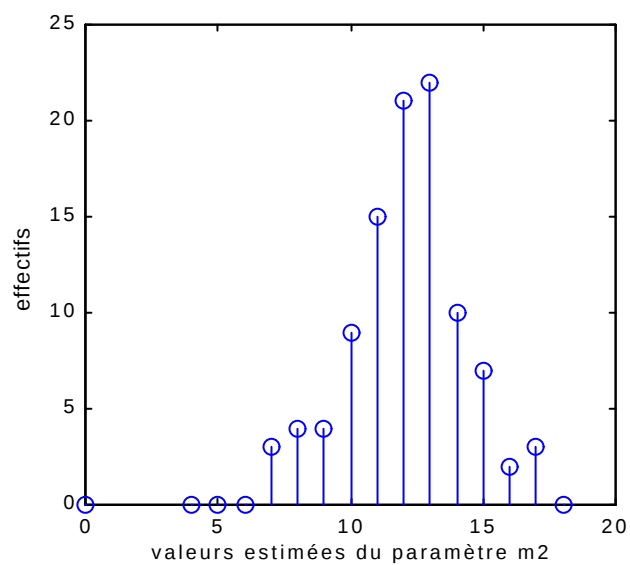
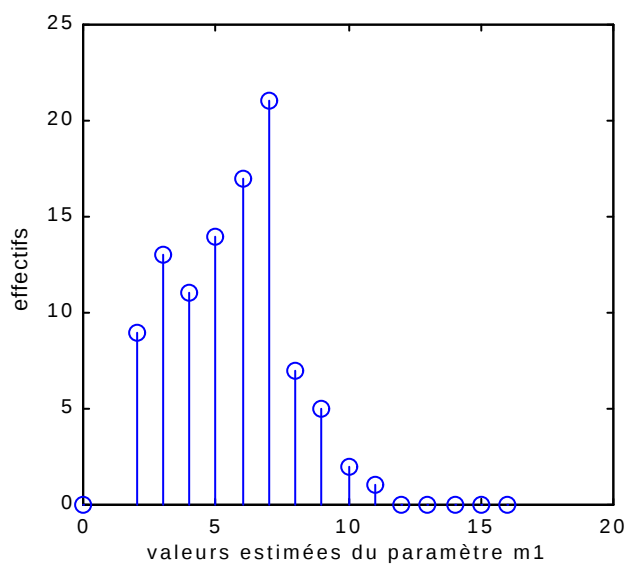


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par
la moyenne a posteriori**

figure50

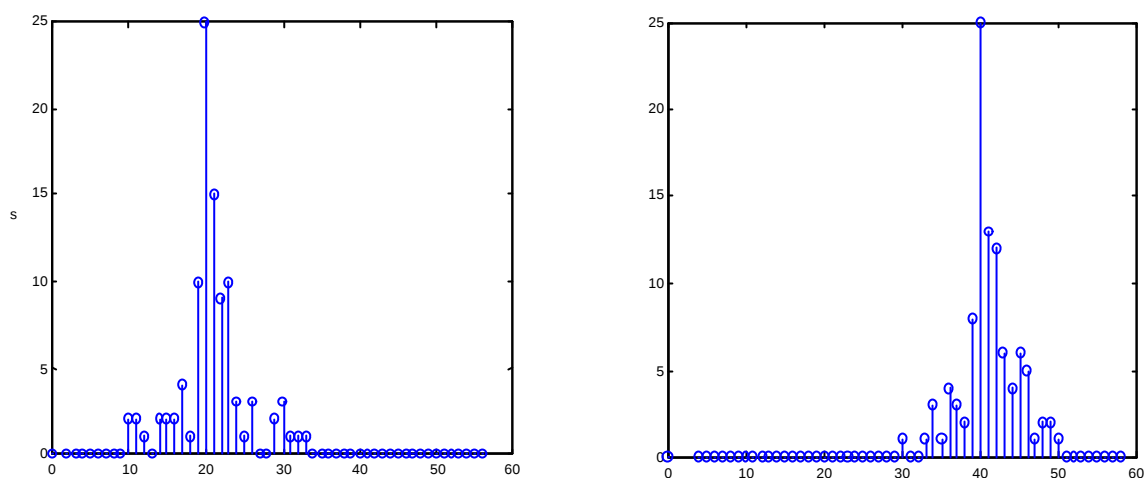


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par le mode a posteriori**

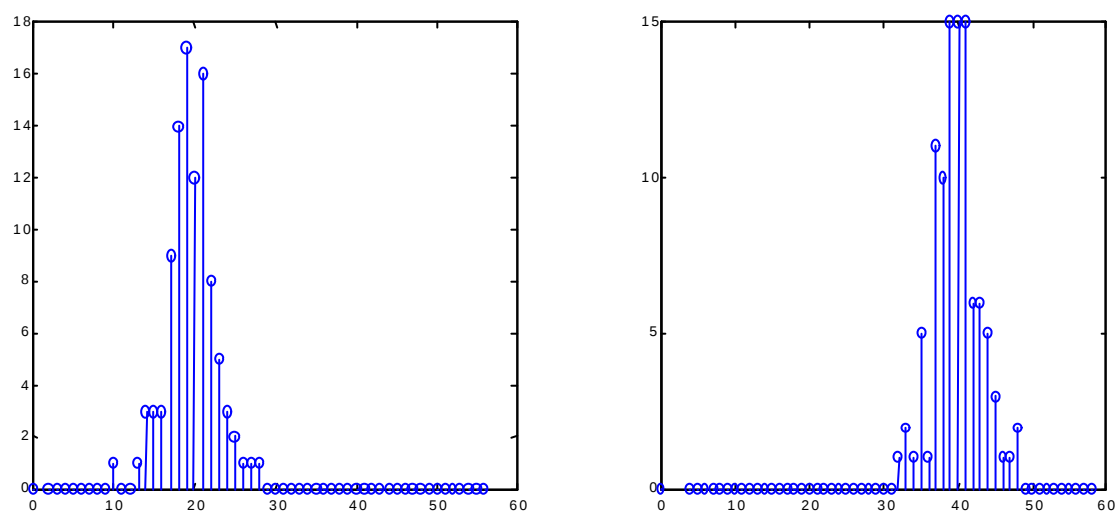


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
Par la moyenne a posteriori**

Figure51

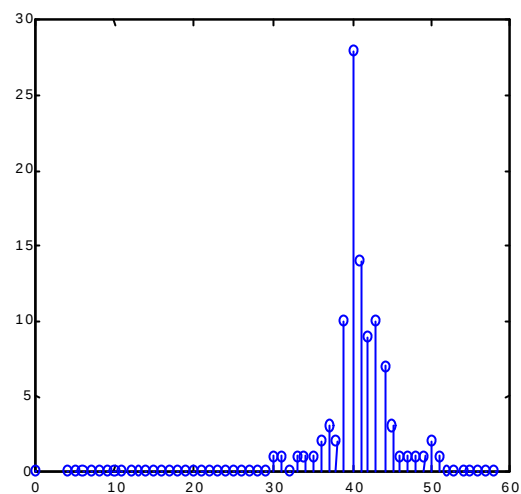
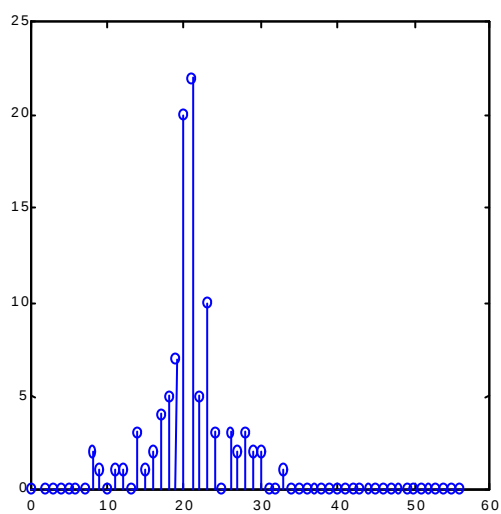


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

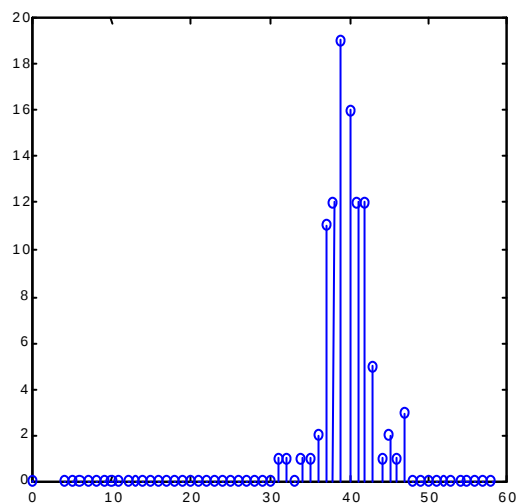
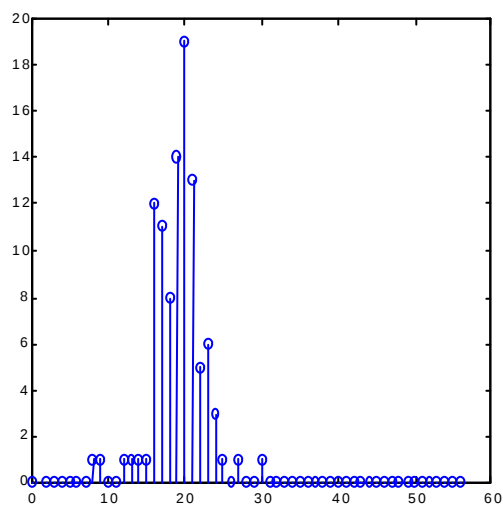


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

figure52

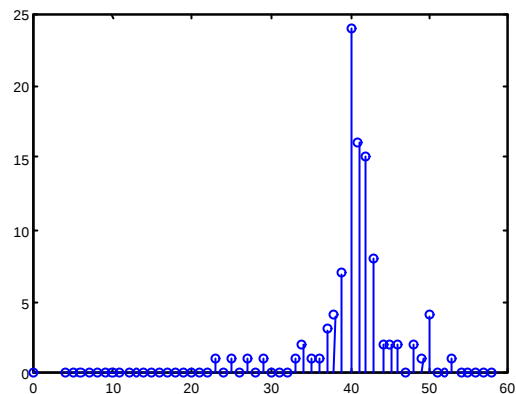
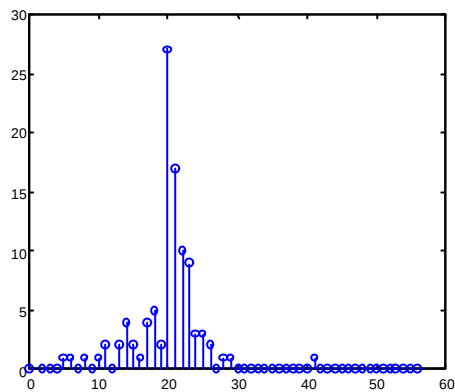


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par le mode a posteriori**

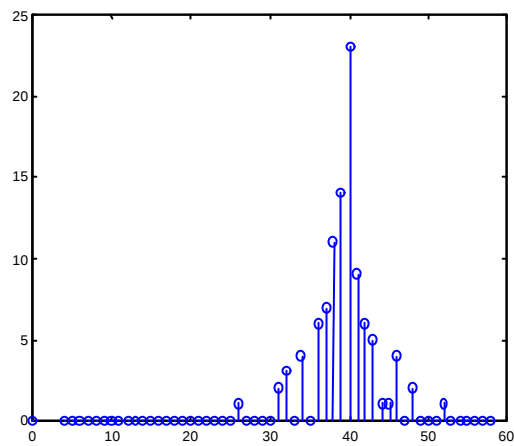
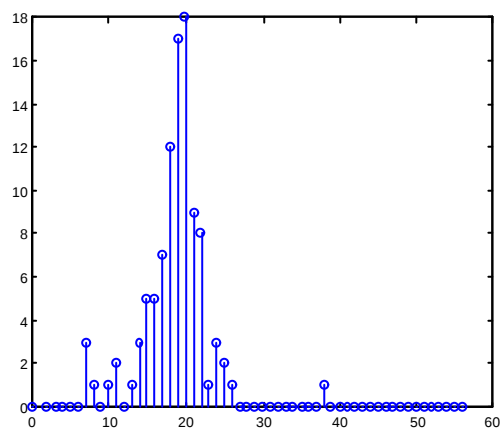


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par la moyenne a posteriori**

figure53

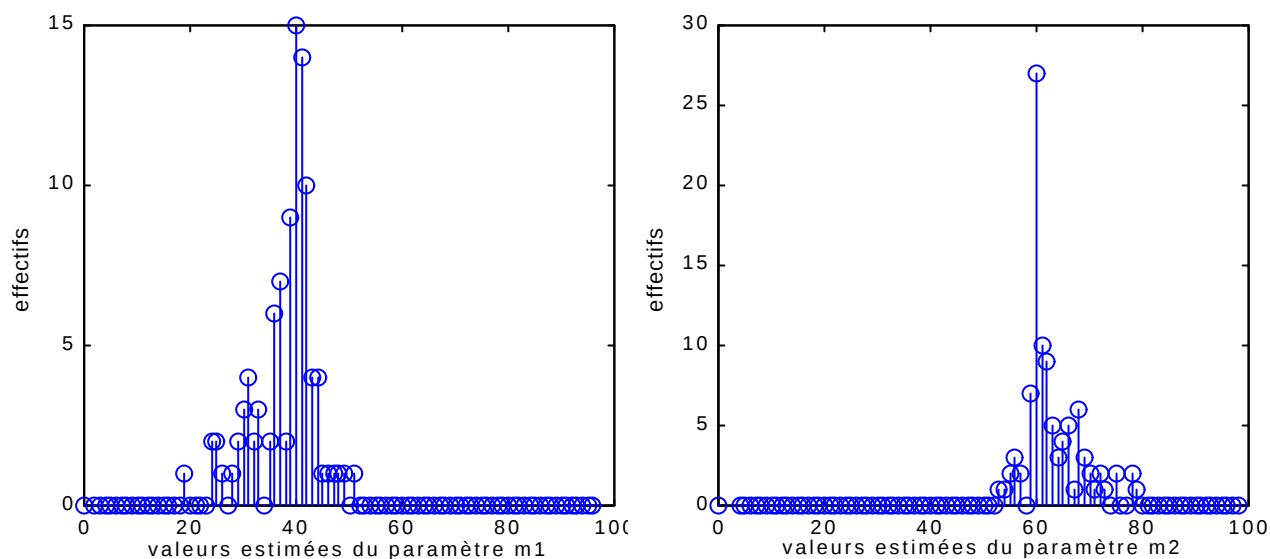


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par le mode a posteriori**

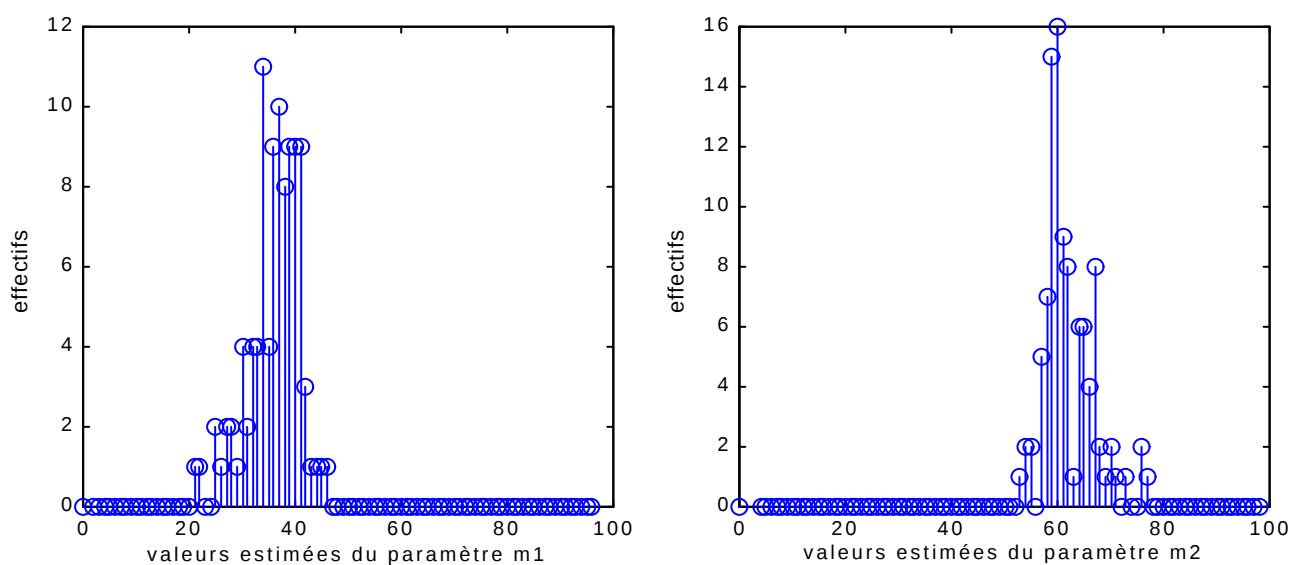


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par la moyenne a posteriori**

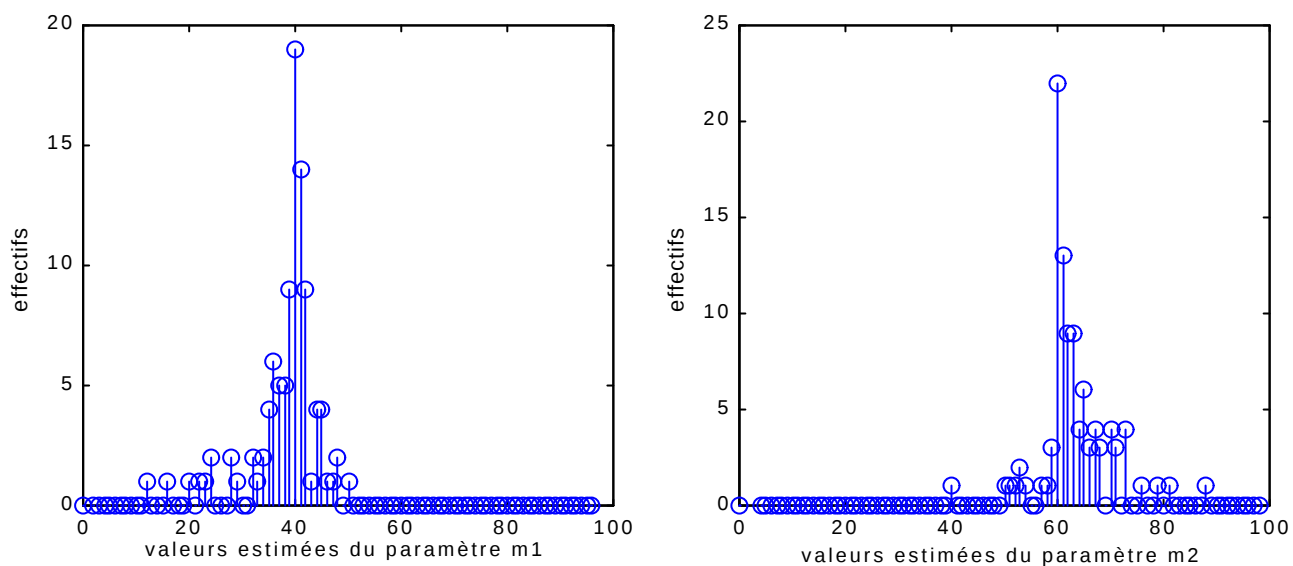
figure54



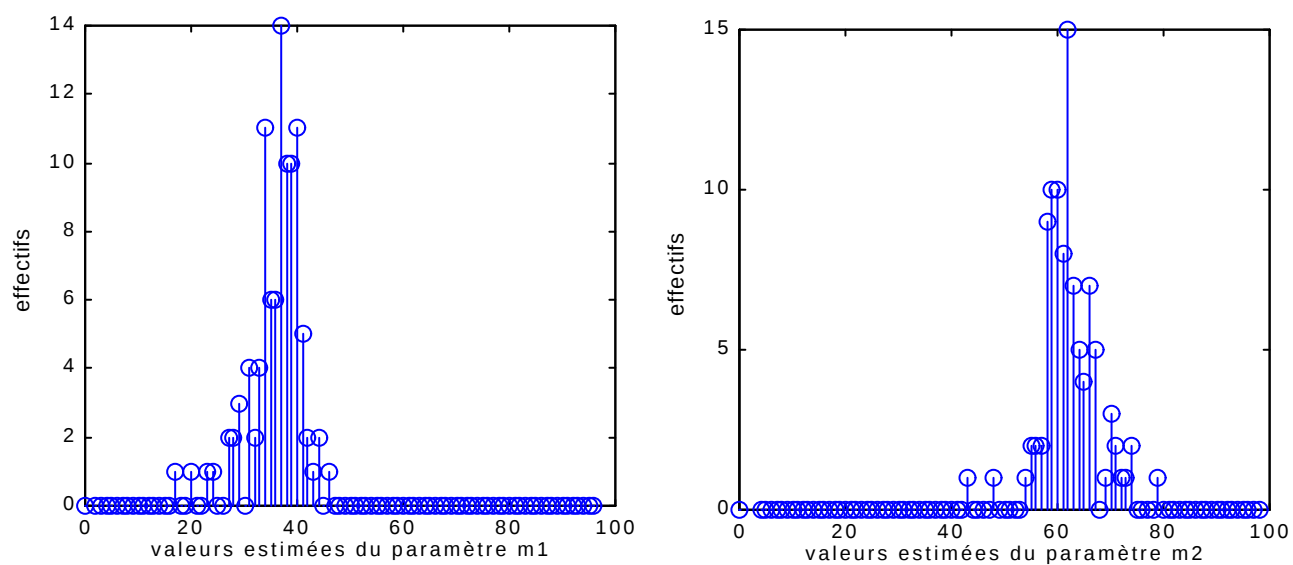
**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par le mode a posteriori**



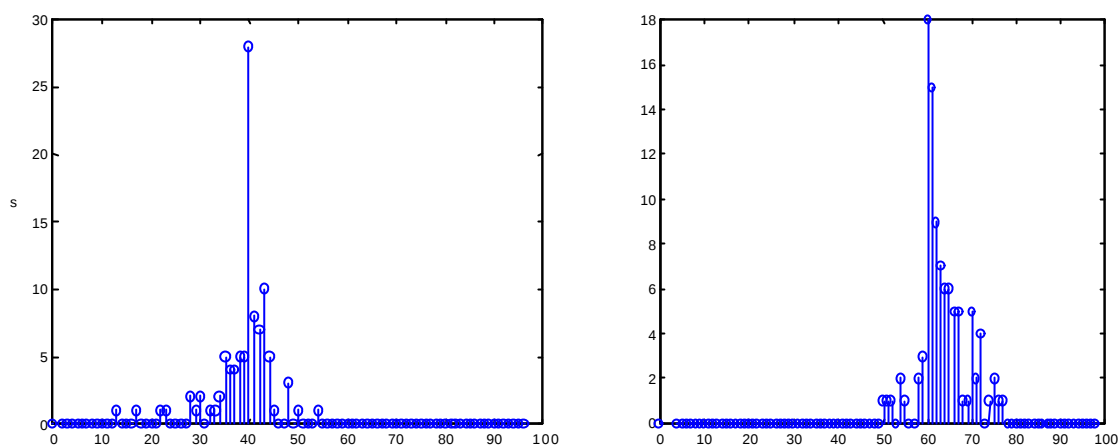
**Diagramme de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par la moyenne a posteriori**



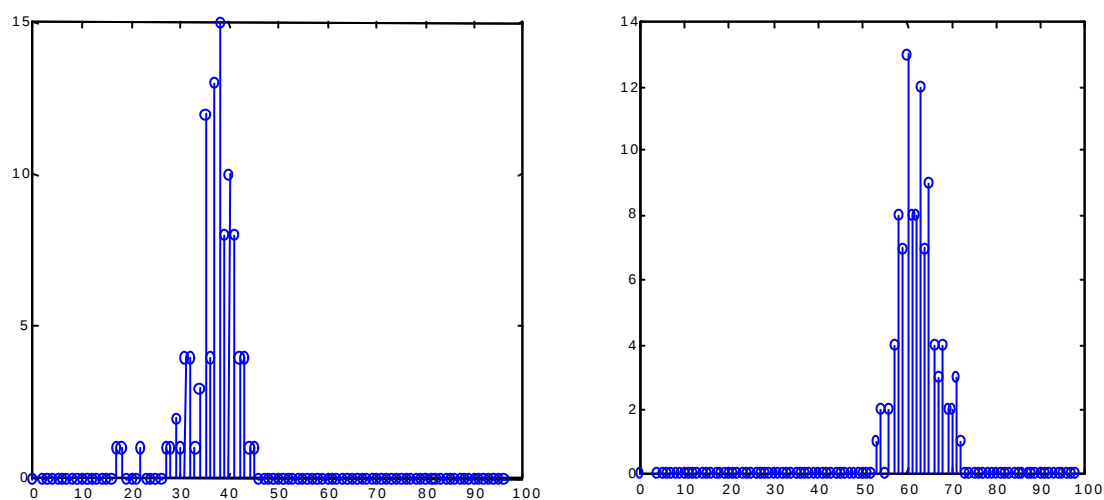
**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par le mode a posteriori**



**Diagramme de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par la moyenne a posteriori**

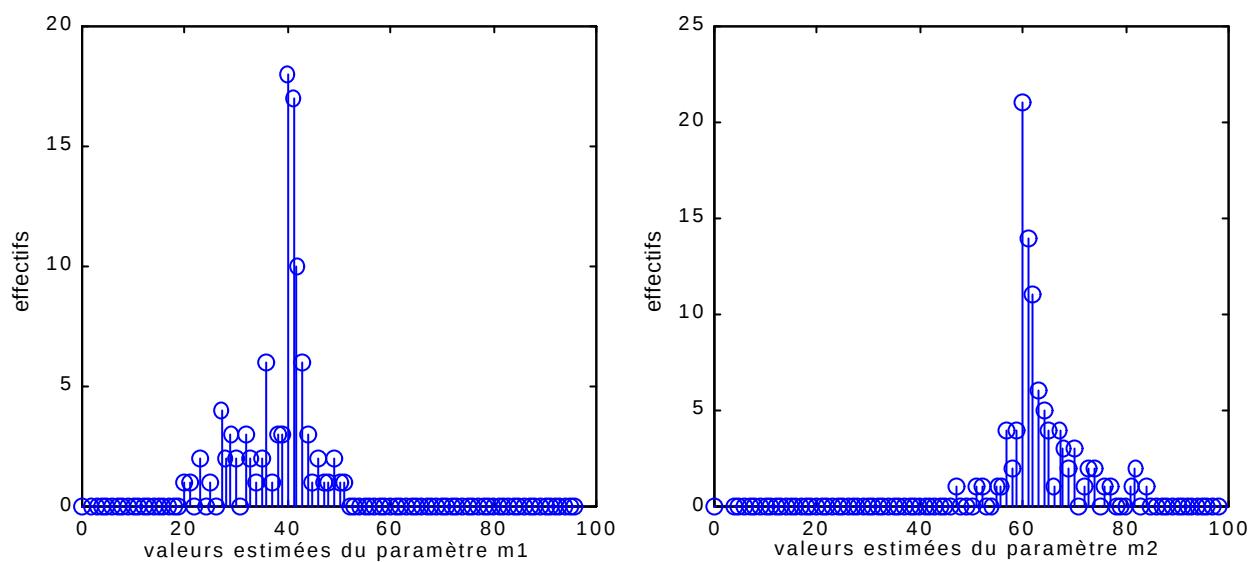


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par le mode a posteriori**

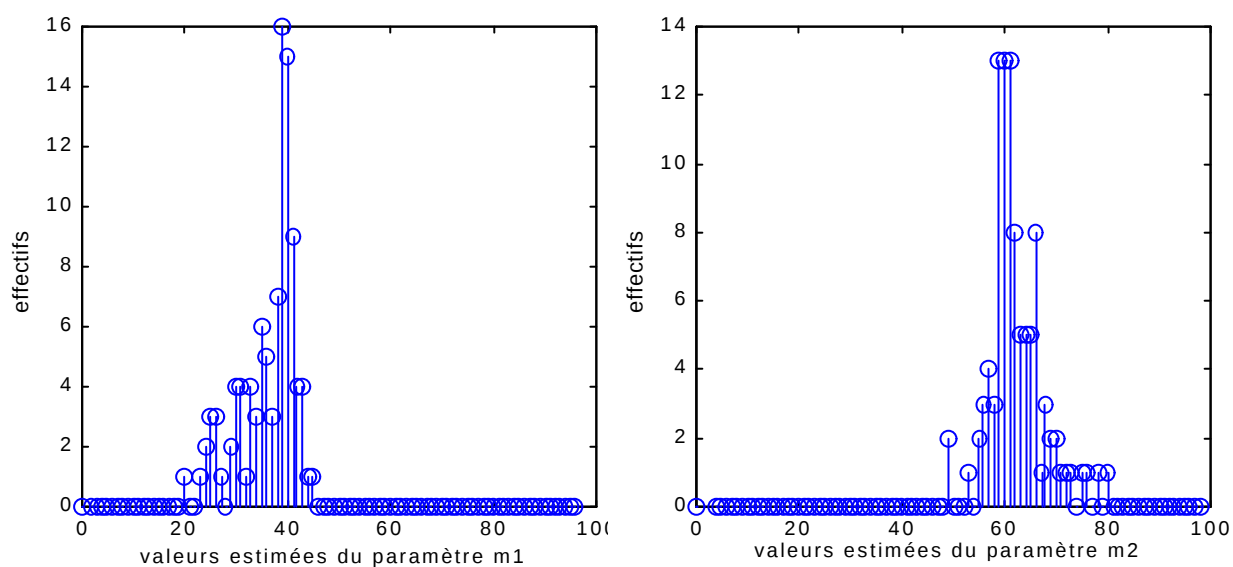


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par la moyenne a posteriori**

Figure57

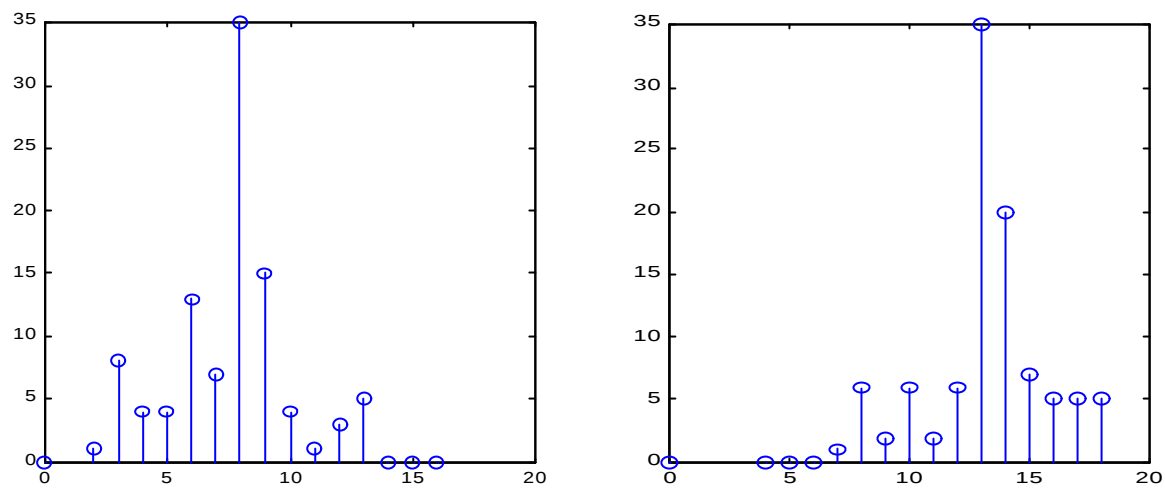


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par le mode a posteriori**

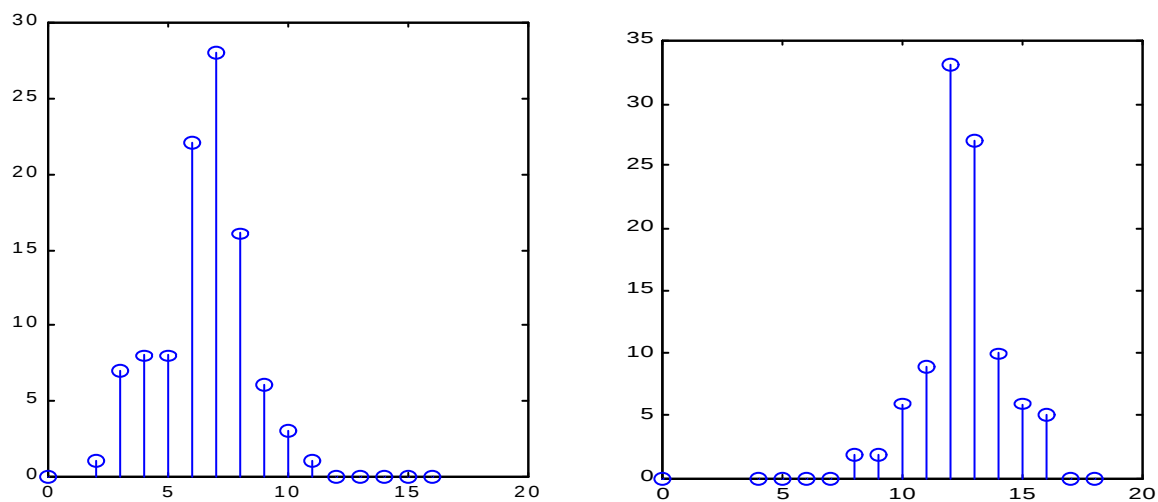


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par la moyenne a posteriori**

Figure58

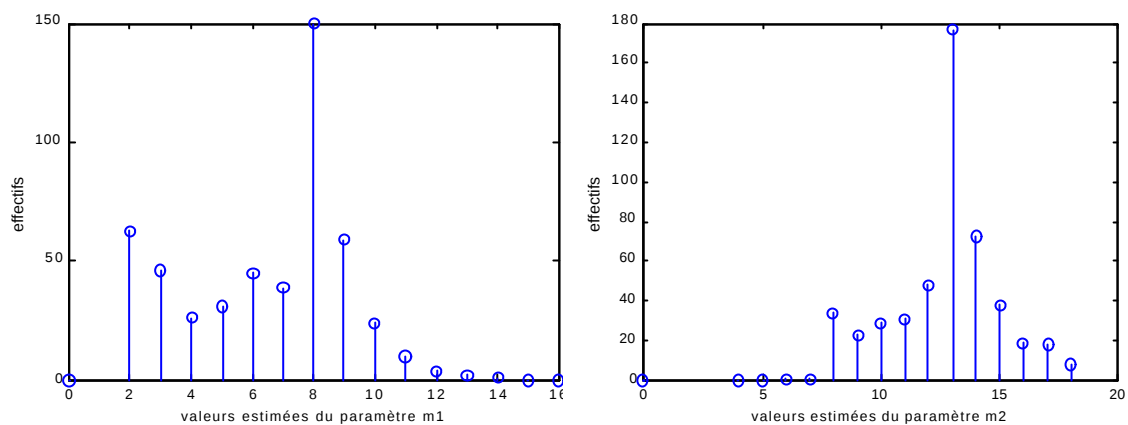


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par le mode a posteriori**

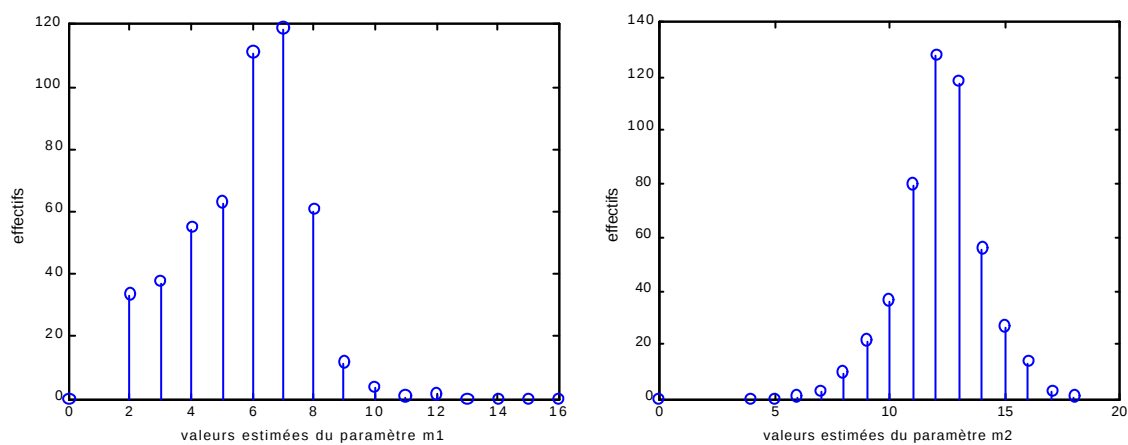


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par la moyenne a posteriori**

figure59

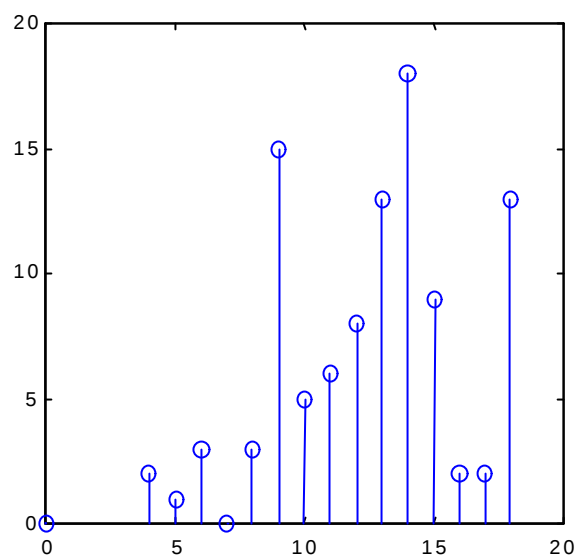
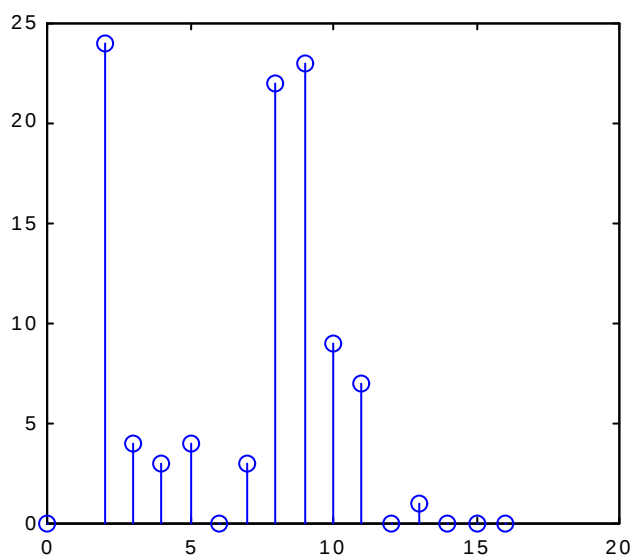


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

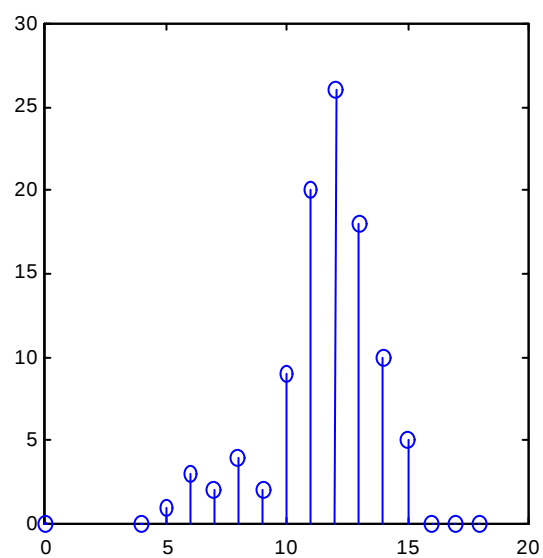
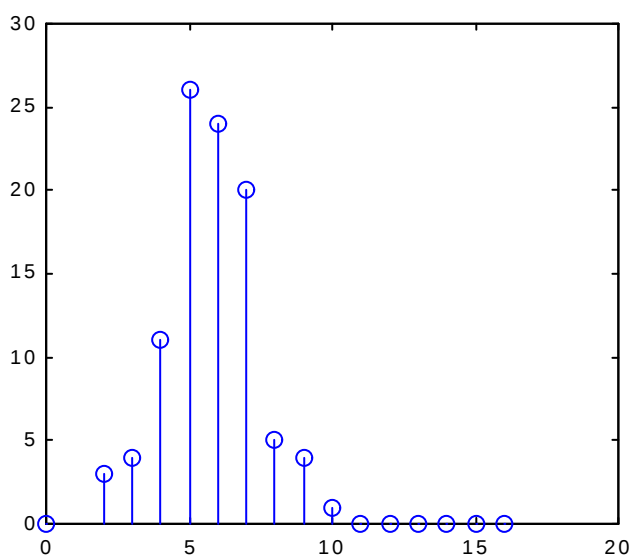


Diagrammes de la distribution des fréquence des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

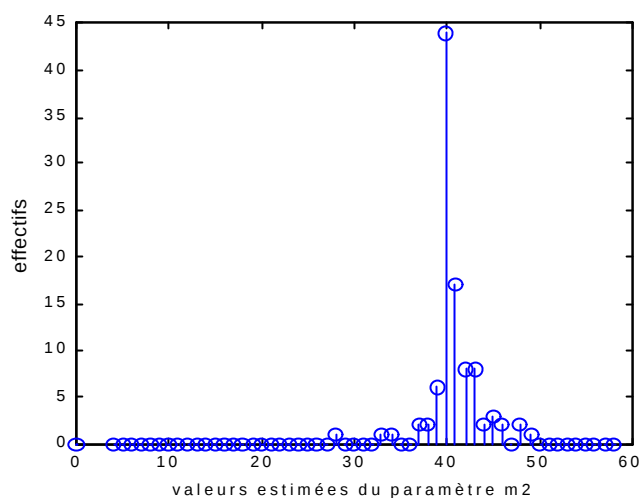
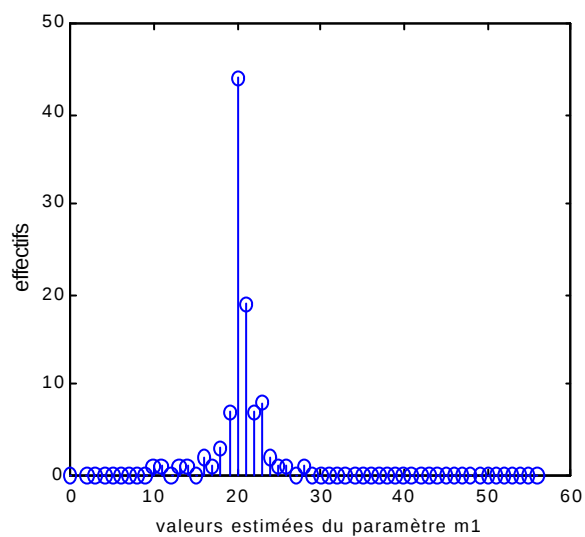
figure60



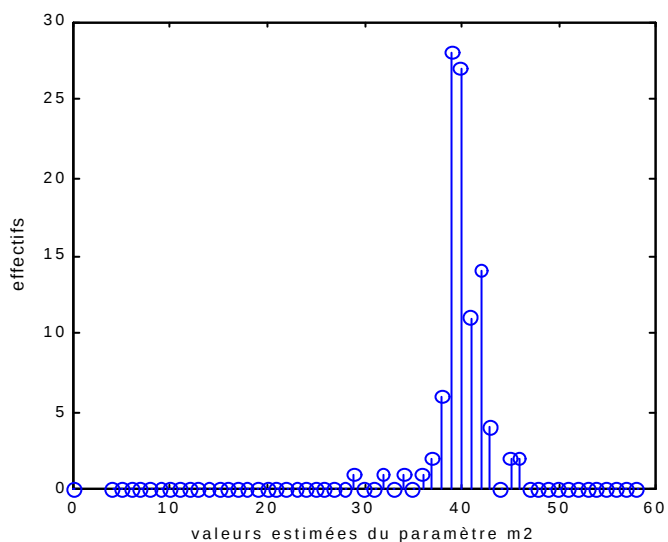
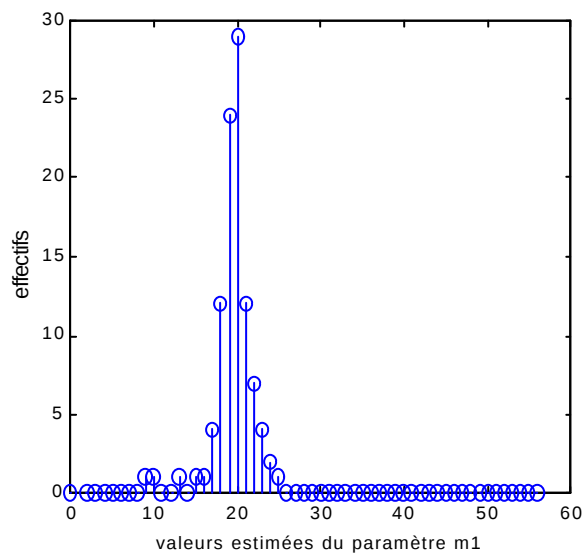
**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par le mode a posteriori**



**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par la moyenne a posteriori**

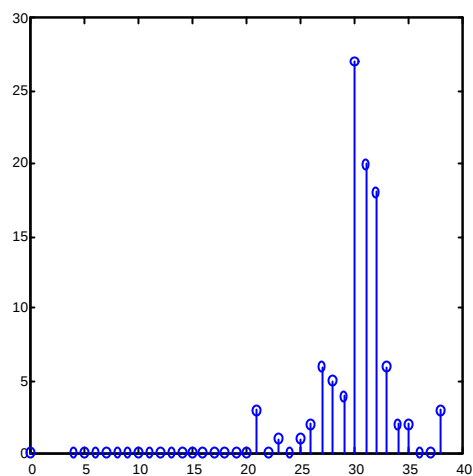
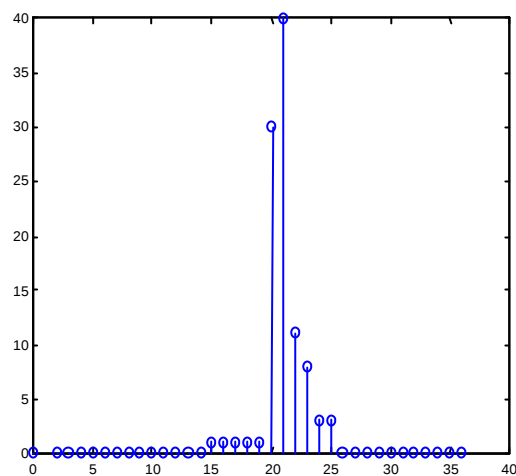


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

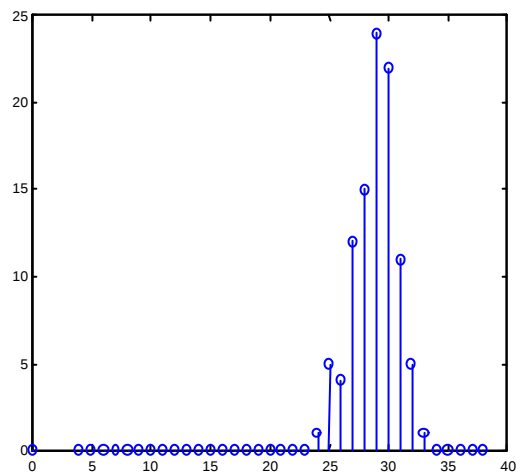
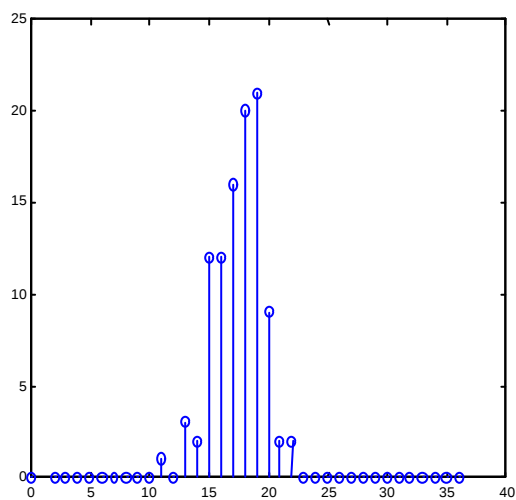


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

figure62

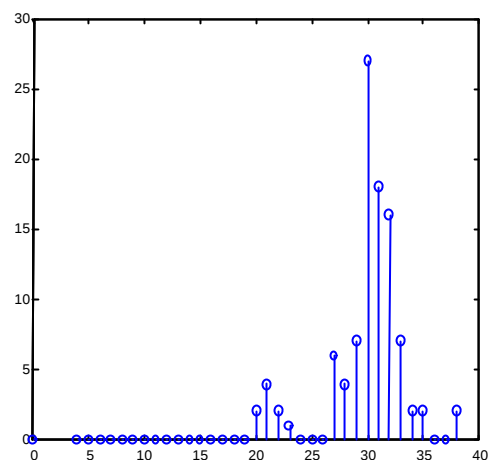
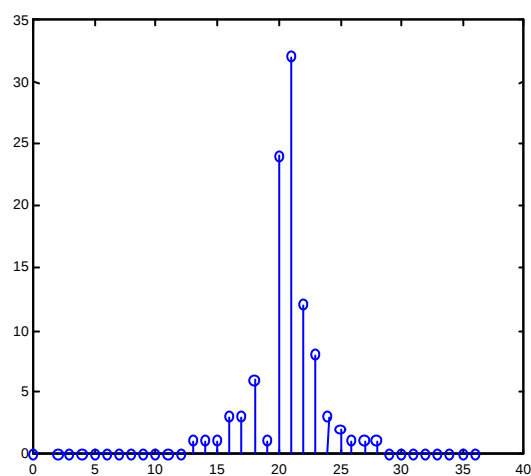


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

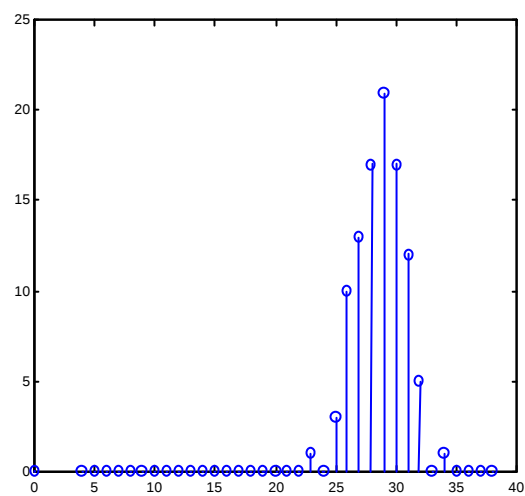
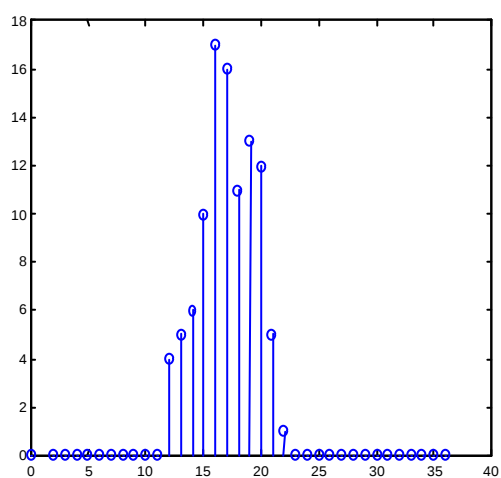


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

figure64

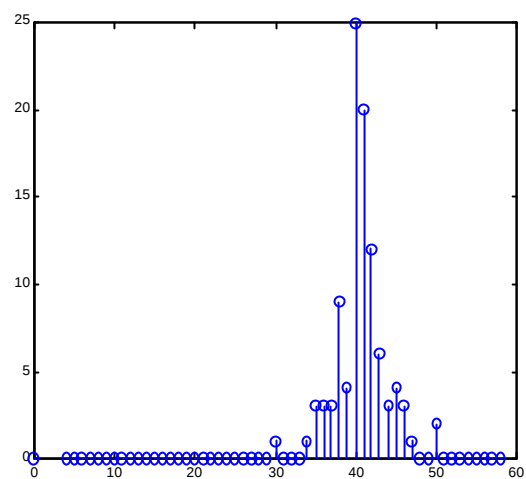
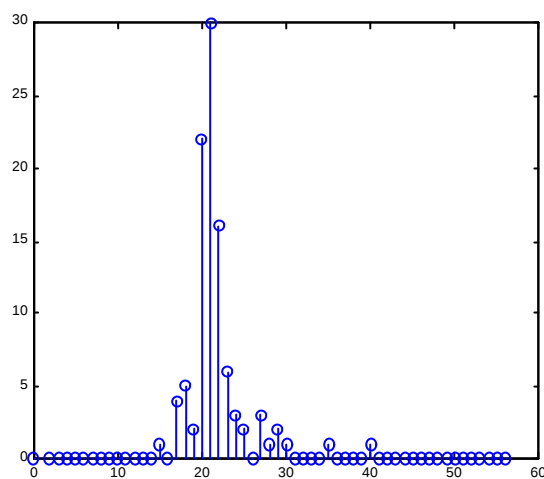


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

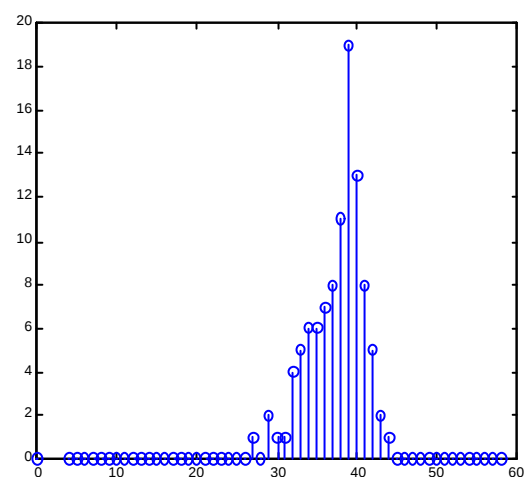
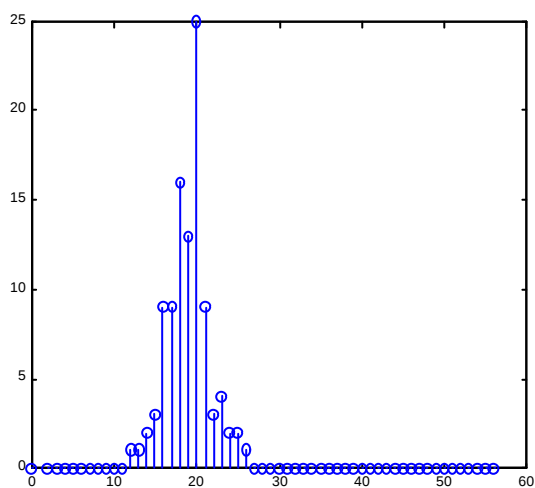


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

figure65

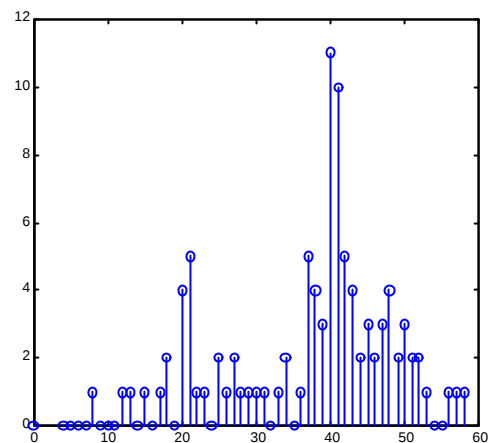
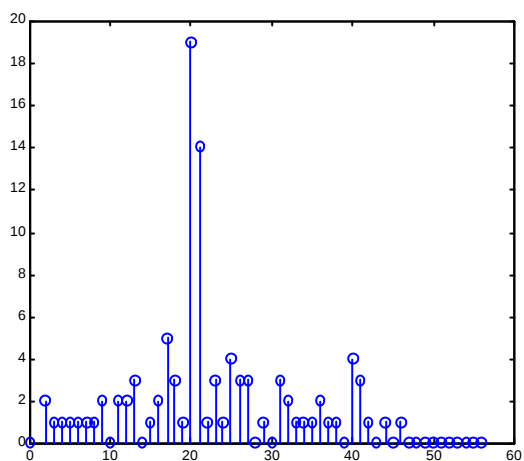


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par le mode a posteriori

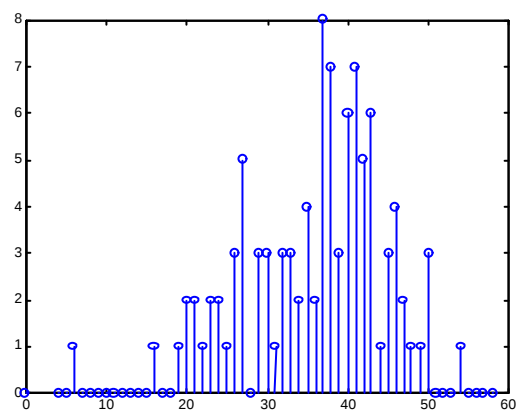
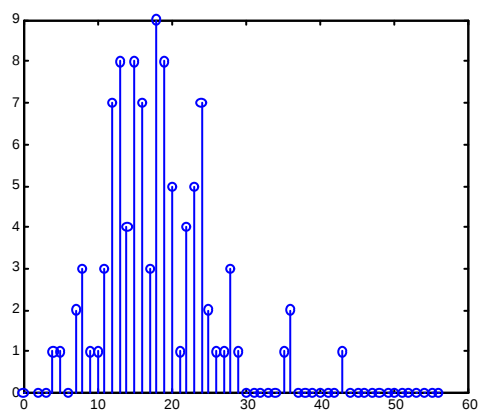


Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés par la moyenne a posteriori

figure66

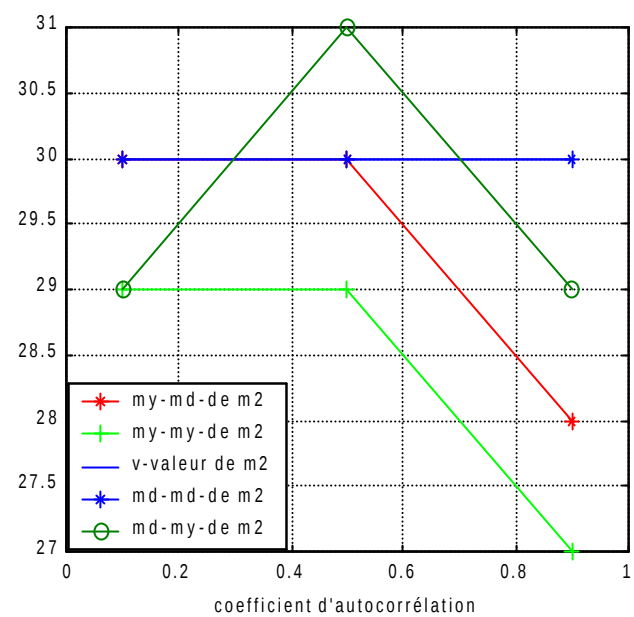
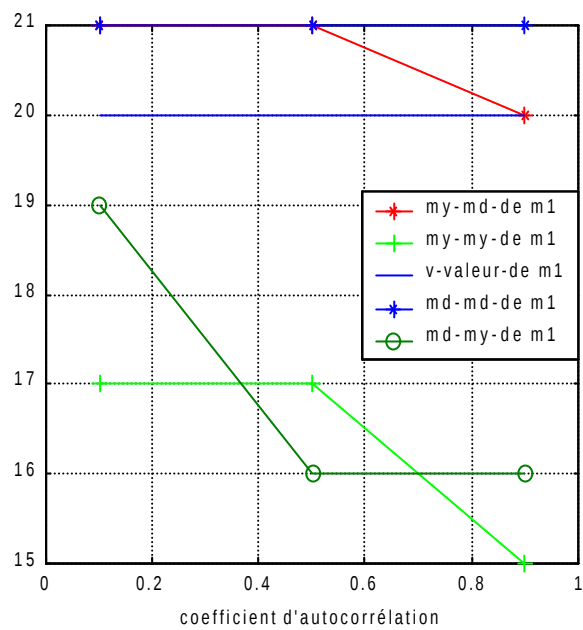


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par le mode a posteriori**

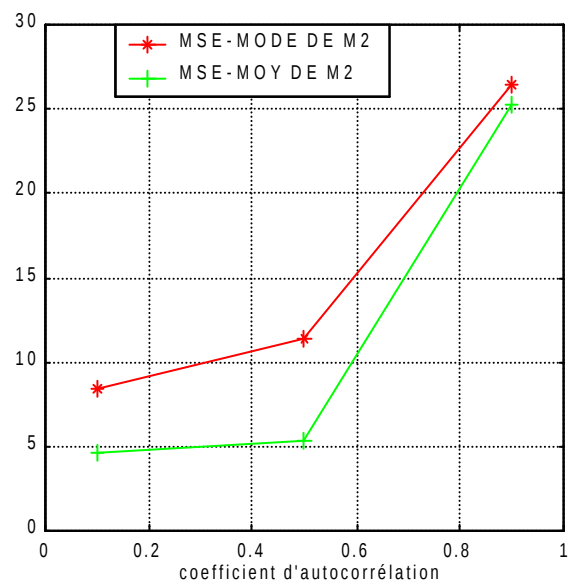
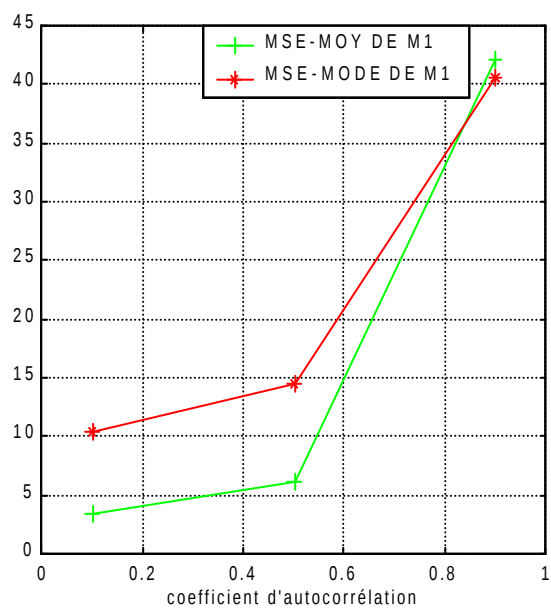


**Diagrammes de la distribution des fréquences des points de rupture estimés
par la moyenne a posteriori**

figure67



(a)



(b)

figure68

Table des matières

Introduction générale

0.1 Introduction	1
0.2 Apport et présentation de la thèse	2

1 Analyse bayésienne d'une suite de variables aléatoires indépendantes gaussiennes à ruptures multiples

1.1 Introduction	4
1.2 Le modèle de base	4
1.3 Cas où les moyennes sont distinctes et connues	5
1.3.1 L'analyse a posteriori	6
1.3.2 Détermination de la fonction de masse de probabilité a posteriori marginale conjointes du vecteur m des points de rupture	7
1.3.3 Détermination des densités de probabilité a posteriori marginales conjointes et conditionnelles des rapports de variances	8
1.4 Cas où les moyennes sont égales et inconnues	11
1.4.1 L'analyse a posteriori	12
1.4.2 Détermination de la masse de probabilité a posteriori marginale conjointe du vecteur m des points de rupture	13
1.4.3 Détermination des densités de probabilité a posteriori marginale et conditionnelle du paramètre de position μ	14
1.4.4 Détermination des densités de probabilité a posteriori marginales conjointes et conditionnelles des rapports de variances	16
1.5 Cas où les moyennes sont distinctes et inconnues	19
1.5.1 L'analyse a posteriori	20
1.5.2 Détermination de la masse de probabilité a posteriori marginale conjointe du vecteur m des points de rupture	21
1.5.3 Détermination des lois de probabilité a posteriori marginales conjointes et conditionnelles du vecteur des rapports de variances	26
1.6 Résultats numériques	30
1.7 Interprétation des résultats	74

2 Analyse bayésienne d'un modèle autocorrélé à ruptures multiples

2.1 Introduction	76
2.2 Le modèle de base	76
2.3 Cas où les moyennes sont distinctes et connues	77
2.3.1 L'analyse a posteriori	77
2.3.2 Détermination de la masse de probabilité a posteriori marginale conjointe du vecteur des points de rupture et la densité de probabilité a posteriori du coefficient d'autocorrélation	79
2.3.3 Détermination des densités de probabilités a posteriori marginales conjointes et conditionnelles des rapports de variances	83
2.4 Cas où les moyennes sont égales et inconnues	87
2.4.1 L'analyse a posteriori	87

2.4.2	Détermination de la masse de probabilité a posteriori marginale conjointe du vecteur des points de rupture et la densité de probabilité a posteriori du coefficient d' autocorrélation	88
2.3.4	Détermination des densités de probabilité a posteriori marginales conjointes et conditionnelles des rapports de variances	56
2.5.1	Cas où les moyennes sont distinctes et inconnues	57
3	Détermination de la masse de probabilité a posteriori marginale conjointe du vecteur m des points de rupture	60
4	Détermination des lois de probabilité a posteriori marginales conjointes et conditionnelles du vecteur des rapports de variances	64
4.5	Résultats numériques	
4.6	Interprétation des résultats	
5	Etude d' un processus autorégressif d' ordre p avec ruptures multiples dans la tendance	
3.1	Introduction	72
3.2	Le modèle	72
3.3	Détermination de la masse de probabilité a posteriori marginale conjointe du vecteur m des points de rupture	74
3.4	Résultats numériques	
3.5	Interprétation des résultats	
	Conclusion générale	84
	Bibliographie	87