

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE-ALGER
Faculté de Mathématiques



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En: MATHÉMATIQUES

Spécialité: Arithmétiques, codage et combinatoire :Théorie des nombres

Par : HANANI Aziza

Thème

**Graphes premiers
de certains groupes résolubles**

Soutenu publiquement le 15/07/2014, devant le Jury composé de :

Mr Farid BENCHERIF	Professeur à l'USTHB	Président
Mme Schehrazad SELMANE	Maître de Conférences /A à L'USTHB	Directrice de Mémoire
Mme Leila BENFERHAT	Maître de Conférences /A à L'USTHB	Examinatrice
Mr Boualem BENSEBAA	Maître de Conférences /A à L'USTHB	Examinateur

Remerciements

Je voudrais exprimer ma plus vive reconnaissance pour ma directrice de thèse madame Schehrazad SELMANE pour avoir dirigé ce travail et pour ses encouragements qui m'ont apporté une aide très précieuse depuis le début.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur BENCHRIF Farid pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de ce mémoire.

Je suis également très reconnaissante envers Madame BENFERHAT Leila et Monsieur BENSEBA Boualem qui ont accepté de lire ma thèse et de participer au jury.

Je remercie Monsieur FEGHOULI Mehdi pour l'aide qu'il m'a apportée en Latex.

Je remercie également ma camarade d'études RAFA Souad pour son soutien moral.

Un grand remerciement va à ma mère pour ses encouragements, et à Imene pour son aide.

Un remerciement particulier va à mon époux Salah Eddine, qui m'a tant soutenu et il n'a jamais cessé de m'encourager durant la préparation de ce travail.

Un immense merci à mes filles Fatima, Rokia, Khadidja.

Table des matières

1	Rappels sur la théorie des groupes	7
1.1	Notion de groupe	8
1.2	Notion de sous groupe	9
1.3	Morphismes de groupes	11
1.4	Sous groupes normaux et sous groupes maximaux	12
1.5	Les groupes quotients	13
1.6	Groupe dérivé d'un groupe	14
1.7	Groupes résolubles	15
1.8	Groupe de Frobenius	15
1.9	Les p-groupes	16
2	Théorie des caractères	17
2.1	Rappel sur la théorie des représentations	18
2.2	Caractères et degrés de caractères	21
2.2.1	Processus de levage	22
2.2.2	Propriétés des caractères	22
2.2.3	Représentations équivalentes	23
3	Les graphes premiers des groupes finis	27
3.1	Rappel sur la théorie des graphes	28
3.2	Les graphes premiers	31
3.3	Résultats importants	32
4	Les graphes premiers réguliers des groupes finis	36
4.1	Résultats importants	37
4.2	Les graphes 1-réguliers et 2-réguliers	38
4.3	Les graphes 3-réguliers	39

TABLE DES MATIÈRES	2
4.4 Les graphes premiers 4-réguliers des groupes résolubles finis	40
5 Conclusion	52
Bibliographie	53

Table des figures

3.1	Graphe premier de S_7	32
3.2	Graphe premier de A_8	33
3.3	Graphes à 5 sommets	34
4.1	Graphe 1-régulier	39
4.2	Graphes 2-réguliers	39
4.3	Graphes 2-réguliers	39
4.4	Graphe cubique d'ordre 6 avec 2 triangles	40
4.5	Graphe cubique d'ordre 8 avec 4 triangles	40
4.6	Graphe cubique d'ordre 8 avec 2 triangles	40
4.7	Graphe cubique d'ordre 8 avec un triangle	40
4.8	Graphe 4-régulier d'ordre 5 (K_5)	41
4.9	Graphe 4-régulier d'ordre 6	42
4.10	Graphe 4-régulier d'ordre 7 avec 7 triangles	44
4.11	Graphe 4-régulier d'ordre 8 avec 2 (K_4)	44
4.12	Graphe 4-régulier d'ordre 8 avec 8 triangles	49
4.13	Graphe 4-régulier d'ordre 7 avec 6 triangles	49
4.14	Graphe 4-régulier d'ordre 8 avec 6 triangles	50
4.15	Graphe 4-régulier d'ordre 8 avec 4 triangles	50
4.16	Graphe 4-régulier d'ordre 8 avec 7 triangles	50
4.17	Graphe isomorphe au graphe 4-régulier d'ordre 8 avec 2(K_4)	51

Résumé

Ce mémoire est basé sur l'étude de deux articles de Hung P. Tong-Viet intitulés

1. Groups whose prime graphs have no triangles (2013)
2. Finite groups whose prime graphs are regular (2014).

Dans le premier article l'auteur a démontré que si un graphe premier d'un groupe fini ne contient pas un triangle alors il a au plus 5 sommets, et dans le second papier il montre que le graphe premier d'un groupe fini est 3-régulier si et seulement si c'est un graphe complet avec 4 sommets. Dans notre travail, on construit une famille de graphes finis simples et on décide lesquels d'eux sont des graphes premiers de groupes finis, plus précisément nous focalisons notre travail autour des graphes 4-réguliers qui peuvent être des graphes premiers de certains groupes résolubles finis. On s'intéresse aux groupes résolubles finis pour leur importance dans la résolution des équations par radicaux.

Les graphes premiers sont apparus pour la première fois en 1970 dans un article de Gruenberg et Kegel pour répondre à certaines questions dans la théorie des représentations.

Mots clés : graphes premiers, graphes k -réguliers, groupes résolubles.

Introduction

L'étude de la théorie des caractères est un outil essentiel dans l'étude des groupes finis. On peut étudier la structure d'un groupe fini en étudiant ses degrés de caractères et en leur attachant un graphe. Les graphes constituent une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arêtes. De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe, en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques...

Soient G un groupe fini, ρ une représentation linéaire de G et χ son caractère. Le degré du caractère χ noté $\chi(1)$ est le degré de la représentation ρ . Soit $Irr(G)$ l'ensemble de tous les caractères complexes irréductibles de G et

$$c.d.(G) = \{\chi(1) \mid \chi \in Irr(G)\}$$

l'ensemble des degrés de caractères de G . L'ensemble des nombres premiers qui divisent certains degrés de caractères de G est noté par $\rho(G)$. Le graphe premier $\Delta(G)$ associé à G est le graphe dont l'ensemble des sommets est $\rho(G)$. Deux sommets p et q sont adjacents dans $\rho(G)$ si et seulement si le produit pq divise un degré de caractère de G .

Dans les 30 dernières années les graphes premiers ont été largement étudiés et de nombreux résultats ont été obtenus dans ce domaine.

Une des questions les plus posées :

Quels graphes peuvent être des graphes premiers d'un groupe fini ?

Huppert [5] a classifié les graphes qui peuvent survenir comme $\Delta(G)$ pour certains groupes résolubles G avec au plus 4 sommets. Lewis [7] a classifié les graphes premiers des groupes résolubles avec cinq sommets. Tong Viet [16], a étudié les graphes 3-réguliers qui peuvent être des graphes premiers d'un groupe fini, et il a conjecturé que les graphes 4-réguliers qui peuvent être des graphes premiers,

sont les graphes complets d'ordre 5 et le graphe 4-régulier d'ordre 6. On a étudié les résultats déjà obtenus sur les graphes n -réguliers qui peuvent être des graphes premiers d'un groupe résoluble pour $n \leq 3$ et on a détaillé le cas où $n = 4$.

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions fondamentales de la théorie des groupes ; des notions qu'on peut trouver dans la plupart des ouvrages de la théorie des groupes. Nous rappelons également les notions suivantes : la structure des groupes finis, les groupes résolubles, les p -groupes et leurs propriétés ainsi que le groupe de Frobenius.

Dans le second chapitre nous présentons la notion de caractère qui est considéré comme un outil important dans la théorie des représentations des groupes finis. Nous introduisons les représentations des groupes finis, et nous étudions les caractères et leurs degrés avec leurs propriétés. D'importants résultats qui relient les groupes résolubles et les degrés de caractères sont entrepris dans ce chapitre.

Dans le troisième chapitre nous introduisons des définitions et des notations concernant les graphes simples ainsi que la notion de graphe premier d'un groupe fini. Nous présentons des résultats importants sur les graphes premiers. Nous rappelons le théorème connu sous le nom " la condition de Pálphy" ; une condition qui affirme que si on prend trois sommets de $\Delta(G)$ où G est un groupe résoluble alors au moins deux de ses sommets sont adjacents. Nous rappelons également deux résultats importants. Le premier résultat montre que si G est un groupe résoluble son graphe premier $\Delta(G)$ contient au moins quatre sommets, alors soit G contient un triangle ou c'est un carré [9]. Le second résultat démontré par Hung Tong Viet [15], stipule que si G ne contient pas un triangle, alors il a au plus quatre sommets si G est résoluble, et au plus 5 sommets si G est fini.

Dans le quatrième chapitre nous étudions les graphes k -réguliers qui existent comme graphe premier d'un groupe résoluble, pour un $k \leq 4$. Nous introduisons les graphes 1-réguliers, 2-réguliers et 3-réguliers et détaillons les graphes 4-réguliers.

Chapitre 1

Rappels sur la théorie des groupes

Le but de ce chapitre est de revoir les notions base sur les groupes. On va revoir les définitions et les propriétés des structures de groupes, en particulier des groupes finis, des sous groupes normaux et sous groupes maximaux, des groupes résolubles, du groupe de Frobenius et des p -groupes. Notre majeure référence est [2].

1.1 Notion de groupe

Loi de composition interne

Définition 1 *Etant donné un ensemble non vide G , on appelle loi de composition interne sur G toute application de $G \times G$ dans G , où*

$$G \times G = \{(x, y) \mid x \in G \text{ et } y \in G\}.$$

Désignons par $(G, \cdot)$ l'ensemble G muni de la loi de composition interne définie par l'application :

$$(x, y) \mapsto x \cdot y$$

- (a) Dans G , la loi $\cdot$ est dite :
 - associative si, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, quels que soient x, y, z dans G
 - commutative si, $x \cdot y = y \cdot x$, quels que soient x, y dans G .
- (b) S'il existe $e \in E$ tel que, quel que soit $x \in G$

$$x \cdot e = e \cdot x = x$$

on dit que e est élément neutre dans $(G, \cdot)$.

- (c) Si $(G, \cdot)$ possède un élément neutre e , alors un élément $x \in G$ est dit symétrisable s'il existe $x' \in G$ tel que :

$$x' \cdot x = x \cdot x' = e$$

x' est alors appelé symétrique de x dans $(G, \cdot)$.

Groupe

Définition 2 *Soit G un ensemble non vide, muni d'une loi de composition interne $\cdot$ définie par : $(x, y) \mapsto x \cdot y$.*

On dit que la loi $\cdot$ définit sur G une structure de groupe, ou que G est un groupe relativement à cette loi, si les trois axiomes suivants sont vérifiés :

- La loi $\cdot$ est associative.
- Il existe dans $(G, \cdot)$ un élément neutre e .
- Tout élément de $(G, \cdot)$ est symétrisable.

Si le nombre d'éléments dans le groupe G est fini alors nous disons que G est un groupe fini, et son cardinal est appelé ordre de G et on le note $|G|$ (ou $o(G)$).

Définition 3 Un groupe est dit abélien ou commutatif si la loi de composition interne de G est commutative.

Exemple 1 Pour tout entier $n > 0$ et tout corps commutatif K , l'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles est un groupe par rapport à la multiplication des matrices ; ce groupe se note $GL(n, K)$ est appelé groupe linéaire général des matrices carrées inversibles d'ordre n sur K . $GL(n, K)$ il est non abélien pour $n \geq 2$.

Dans toute la suite, on notera le groupe $(G, \cdot)$ par G .

1.2 Notion de sous groupe

G étant un groupe, une partie non vide H de G est un sous groupe de G si

$$\begin{aligned} (x, y) \in H \times H &\implies xy \in H \\ x \in H &\implies x^{-1} \in H \end{aligned}$$

Dans toute la suite, nous allons omettre $\cdot$ et noter $g \cdot h$ par gh .

Exemple 2 $G, \{e\}$ sont des sous groupes de G appelés sous groupes triviaux de G .

Remarque 1

1. Tout sous groupe H d'un groupe G est un groupe relativement à la loi de composition induite dans H par celle de G .
2. Un groupe ayant plus d'un élément a au moins deux sous groupes, G et le sous groupe réduit à l'élément neutre noté $\{e\}$.

Définition 4 On appelle sous groupe propre d'un groupe G tout sous groupe de G distinct de G et $\{e\}$.

Notation 1 On écrit : $H \preceq G$ pour exprimer que H est un sous groupe de G et $H \prec G$ pour exprimer que H est un sous groupe propre de G .

Proposition 1 Soit H une partie non vide d'un groupe G , alors H est un sous groupe de G si et seulement si

$$\forall (x, y) : (x, y) \in H \times H \Rightarrow xy^{-1} \in H$$

Proposition 2 Soit G un groupe et $\{H_i\}_{i \in I}$ une famille de sous groupes de G ; alors, quel que soit l'ensemble non vide I , $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous groupe de G .

Remarque 2 L'union de sous groupes n'est pas en général un sous groupe.

Proposition 3 Si dans un groupe G , $\{H_i\}_{i \in I}$ est une famille de sous groupes totalement ordonnée par l'inclusion, alors $\bigcup_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G .

Définition 5 Soient G un groupe et S une partie non vide de G , désignons par H_s l'ensemble des sous groupes de G contenant S et posons

$$\langle S \rangle = \bigcap_{H \in H_s} H$$

$\langle S \rangle$ est un sous groupe de G appelé sous groupe de G engendré par S .

Définition 6 Soit G un groupe.

- Si S est une partie non vide de G telle que $\langle S \rangle = G$, on dit que S est une partie génératrice du groupe G , ou que S est un ensemble de générateurs de G , ou encore que S engendre G .
- S'il existe $x \in G$ tel que $\langle x \rangle = G$, le groupe G est dit monogène.

Définition 7 Soit $g \in G$. Si le sous groupe $\langle g \rangle$ est fini, on appelle ordre de g et on note $o(g)$ l'ordre de $\langle g \rangle$, si le cardinal de $\langle g \rangle$ est infini, on dit que g est d'ordre infini.

Théorème 1 (Théorème de Lagrange) Si G est un groupe fini alors l'ordre de tout sous groupe H de G divise l'ordre de G .

Corollaire 1 Si G est un groupe fini, quel que soit $x \in G$, l'ordre de x divise l'ordre de G .

Définition 8 L'exposant d'un groupe est le plus petit multiple commun (ppcm) des ordres de ses éléments.

1.3 Morphismes de groupes

Définition 9 soient $(G, .)$ et $(G', *)$ deux groupes. Un morphisme (ou homomorphisme) de groupes de G dans G' est une application

$$f : G \rightarrow G'$$

vérifiant

$$\forall (x, y) \in G \times G, f(x.y) = f(x) * f(y).$$

Notation 2 On note $\text{Hom}(G, G')$ l'ensemble des morphismes de groupes de G dans G' .

Définition 10 Un morphisme d'un groupe G dans lui-même est appelé endomorphisme. L'ensemble des endomorphismes est noté par $\text{End}(G)$.

Proposition 4 Tout élément f de $\text{Hom}(G, G')$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $f(e) = e'$.
2. $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ pour tout élément x de G .
3. $H \prec G \Rightarrow f(H) \prec G'$.
4. $H' \prec G \Rightarrow f^{-1}(H') \prec G$ avec $f^{-1}(H') = \{x \in G, f(x) \in H'\}$.

Définition 11 Soit $f \in \text{Hom}(G, G')$

- $f(G)$ est appelé image de f et est noté $\text{Im}(f)$.
- $f^{-1}(\{e'\})$ est appelé noyau de f et est noté $\text{Ker}(f)$.

Définition 12 Soient deux groupes G et G' .

Soit f est une application de G dans G' . Alors f est un isomorphisme de groupes si et seulement si f est un homomorphisme bijectif de G dans G' .

Proposition 5 Soient deux groupes G et G' .

Si f est un isomorphisme de G sur G' alors f^{-1} est un isomorphisme de G' sur G .

Définition 13 G étant un groupe, un isomorphisme de G sur lui même est appelé un automorphisme du groupe G . L'ensemble des automorphismes du groupe G est noté $\text{Aut}(G)$. $\text{Aut}(G)$ est un groupe pour la composition des applications.

1.4 Sous groupes normaux et sous groupes maximaux

Définition 14 Soit N un sous groupe de G . N est appelé un sous groupe normal si

$$gxg^{-1} \in N \text{ pour tout } x \in N \text{ et } g \in G.$$

Nous écrivons $N \triangleleft G$ pour désigner que N est un sous groupe normal de G .

Définition 15 Soit G un groupe quelconque, posons

$$Z(G) = \{x \in G; xa = ax, \forall a \in G\}$$

$Z(G)$ est l'ensemble des éléments $x \in G$ qui commutent avec tout élément de G .

$Z(G)$ est appelé le centre du groupe G .

Proposition 6 $Z(G)$ est un sous groupe de G . De plus $Z(G)$ est un sous groupe propre de G si et seulement si G est non abélien.

Définition 16 G désigne un groupe non réduit à un seul élément.

1. Un sous groupe M de G est dit maximal, s'il est maximal dans l'ensemble des sous groupes propres de G ordonnés par l'inclusion.

$$M \preceq L \preceq G \Rightarrow L = M \text{ ou } L = G$$

2. Un sous groupe N de G est dit normal maximal s'il est maximal dans l'ensemble des sous groupes propres normaux de G ordonnés par l'inclusion. Autrement dit

$$N \triangleleft G, N \neq G : (L \triangleleft G, N \preceq L \preceq G) \Rightarrow L = N \text{ ou } L = G$$

Proposition 7 Si G est un groupe fini tel que $o(G) > 1$, alors tout sous groupe propre de G est contenu dans un sous groupe maximal de G .

Preuve. Soit $H \triangleleft G$.

- Si H est maximal, il n'y a rien à démontrer.

- Supposons H est non maximal ; il existe alors $H_1 \triangleleft G$ tel que $H \triangleleft H_1 \triangleleft G$.

Si H_1 est maximal, la propriété est démontrée, sinon il existe $H_2 \triangleleft G$ tel que

$H \prec H_1 \prec H_2 \prec G$. Comme précédemment, ou bien H_2 est maximal, ou bien il ne l'est pas et on réitère le raisonnement à partir de H_2 . Le groupe G étant fini, nécessairement au bout d'un nombre fini, k , d'opérations, on aboutit à un sous groupe $H_k \prec G$ tel que

$$H \prec H_1 \prec H_2 \prec \dots \prec H_k \prec G$$

et H_k maximal. ■

De façon analogue on prouve que, dans un groupe fini G , tout sous groupe normal propre de G est contenu dans un sous groupe normal maximal de G .

Définition 17 Soit un groupe $G \neq (e)$; désignons par $\mathcal{M}$ l'ensemble (éventuellement vide) de ses sous groupes maximaux et posons :

$$\Phi(G) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M \quad \text{si } \mathcal{M} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \Phi(G) = G \quad \text{si } \mathcal{M} = \emptyset$$

$\Phi(G)$ est un sous groupe de G appelé sous groupe de Frattini de G .

Si $G = (e)$, on pose $\Phi(G) = (e)$.

1.5 Les groupes quotients

Soit H un sous groupe d'un groupe G . Les ensembles Hx et xH pour tout $x \in G$ sont des sous ensembles de G appelés, respectivement la classe à droite de H dans G , et la classe à gauche de H dans G .

l'indice $|G : H|$ est le nombre de classes à gauche (ou classes à droite) de H dans G .

Définition 18 Soit G un groupe et $N \triangleleft G$. Soit

$$G/N = \{Nx/x \in G\}$$

l'ensemble des classes à droite de N dans G . On définit l'opération $*$ comme suit :

$$Nx * Ny = Nxy, \quad \text{pour tout } x, y \in G.$$

La paire $(G/N, *)$ est appelé le groupe quotient de G par N .

Théorème 2 *L'ordre du groupe quotient G/N est donné par*

$$|G/N| = |G : N| = \frac{|G|}{|N|}$$

et s'appelle l'indice de N dans G .

Définition 19 *Soit G un groupe. La classe de conjugaison d'un élément $g \in G$ est l'ensemble des éléments conjugués à lui, c'est à dire ;*

$$K_g = \{xgx^{-1} / x \in G\}$$

Lemme 1 *Un groupe G est un groupe abélien si et seulement si chaque élément $g \in G$ est sa propre classe de conjugaison. En particulier, le nombre de classes de conjugaison est égal à la taille du groupe si et seulement si le groupe est commutatif.*

Preuve. Soit G un groupe abélien, il s'ensuit que $gh = hg$ pour tous $g, h \in G$. En multipliant à la fois les deux cotés par h^{-1} , nous obtenons : $ghh^{-1} = hgh^{-1}$, cela signifie simplement que $g = hgh^{-1}$. Pour prouver l'inverse il suffit d'inverser les étapes de la preuve. ■

1.6 Groupe dérivé d'un groupe

Définition 20 *Soit G un groupe, à tout couple (x, y) d'éléments de G , on associe l'élément $x^{-1}y^{-1}xy$ noté $[x, y]$. $[x, y]$ s'appelle commutateur de x et y dans G .*

Remarque 3 1. G abélien $\Leftrightarrow [x, y] = e, \forall (x, y) \in G \times G$.

2. $(H \triangleleft G \text{ et } x \text{ ou } y \text{ dans } H) \Rightarrow [x, y] \in H$.

Définition 21 *Soit G un groupe on appelle groupe dérivé de G , le sous groupe G' engendré par l'ensemble des commutateurs de G , on le note $D(G)$.*

Remarque 4 G est un groupe abélien $\Leftrightarrow D(G) = (e)$.

Théorème 3 *Soit G un groupe. On a :*

1. $D(G) \triangleleft G$.
2. Si $N \triangleleft G$, alors G/N est un groupe abélien si et seulement si $D(G) \subseteq N$; en particulier $G/D(G)$ est abélien.

Remarque 5

- $D(G)$ est le plus petit sous groupe distingué de G .
- $G/D(G)$ est le plus grand quotient abélien de G .

1.7 Groupes résolubles

Définition 22 Soit G un groupe. Nous définissons

$$G = G^{(0)}, G' = G^{(1)}, \text{ et } G^{i+1} = (G^{(i)})'.$$

Définition 23 Soit G un groupe. Si $G^{(d)} = \{e\}$ pour un certain entier $d \geq 0$, alors G est dit résoluble. L'entier d s'appelle la longueur dérivée de G et est notée $d.l.(G)$.

Exemple 3

- S_3 est résoluble.
- Un groupe abélien est résoluble.

Théorème 4 Si G est un groupe résoluble, alors tout sous groupe de G et tout quotient de G est résoluble.

Proposition 8 Soient deux groupes H et K . Si H et K sont résolubles alors $H \times K$ est résoluble.

1.8 Groupe de Frobenius

Définition 24 Soit H un sous groupe non trivial d'un groupe G . H est appelé un complément de Frobenius de G si la propriété suivante est satisfaite

$$H \cap H^g = \{e\}, \forall g \in G \setminus H$$

où H^g est le conjugué de H par g , c'est à dire

$$H^g = \{h^g = g^{-1}hg / h \in H\}.$$

Définition 25 Un groupe G est appelé un groupe de Frobenius s'il contient un complément de Frobenius H comme un sous groupe non trivial.

Définition 26 *Le noyau de Frobenius de G par rapport à H est le sous groupe $N \triangleleft G$ définie par*

$$N = \left(G - \bigcup_{g \in G} H^g \right) \cup \{e\}$$

1.9 Les p-groupes

Définition 27 *Soit p un nombre premier. Nous appellerons p -groupe tout groupe fini dont l'ordre est une puissance de p .*

Définition 28 *Soit G un groupe fini et H un sous groupe. Si H est un p -groupe, il sera dit p -sous groupe de G .*

Définition 29 *Un p -sous groupe H de G , d'ordre p^n sera dit un p -sous groupe de Sylow si n est la plus grande puissance de p divisant l'ordre de G .*

Définition 30 *Soit G un groupe, et soit $N \triangleleft G$ tel que $|N|$ est premier avec un nombre premier p . Si $|[G : N]|$ est une puissance de p , alors N est appelé p -complément normal de G .*

Définition 31 *Soit G un groupe abélien fini, alors G est appelé un groupe abélien élémentaire si tout élément différent de l'unité est d'ordre p .*

Définition 32 *Soit G un p -groupe. On dit que G est extraspecial si*

$$G' = Z(G) = \Phi(G)$$

est cyclique, où $\Phi(G)$ est le sous groupe de Frattini, $Z(G)$ est le centre du groupe G et G' est le groupe dérivé du groupe G .

Proposition 9 *Quel que soit le nombre premier p , tout p -groupe fini est résoluble.*

Proposition 10 *Tout p -groupe d'ordre p ou p^2 est abélien.*

Chapitre 2

Théorie des caractères

Dans ce chapitre nous allons introduire la notion de caractère qui est considérée comme un outil important dans la théorie des représentations des groupes finis. On commencera par des rappels sur les représentations des groupes finis. Ensuite, on étudiera les caractères et leurs degrés avec leurs propriétés pour en finir avec d'importants résultats qui relient les groupes résolubles et les degrés de caractères.

Dans ce qui suit nous considérons que tous les groupes sont d'ordres finis et les espaces vectoriels sont de dimensions finies.

2.1 Rappel sur la théorie des représentations

Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et soit $GL(V)$ le groupe des isomorphismes de V sur lui-même. Un élément f de $GL(V)$ est, par définition, une application linéaire de V dans V qui admet un inverse f^{-1} , cet inverse est linéaire. Dire que f est un isomorphisme équivaut à dire que le déterminant de f est non nul. Le groupe $GL(V)$ s'identifie ainsi au groupe des matrices carrées inversibles d'ordre n ; on rappelle que $GL(V) \cong GL(n, \mathbb{C})$.

Représentation linéaire

Définition 33 Soit G un groupe fini d'élément neutre 1 et de loi de composition $(s, t) \rightarrow st$. Une représentation linéaire de G dans V est un homomorphisme ρ du groupe G dans le groupe $GL(V)$. En d'autres termes, on associe à tout élément $s \in G$ un élément $\rho(s)$ de $GL(V)$ de telle sorte que l'on ait l'égalité $\rho(st) = \rho(s)\rho(t)$. On écrit fréquemment ρ_s au lieu de $\rho(s)$.

On a

$$\rho(1) = 1 \text{ et } \rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}.$$

Lorsque ρ est donné, on dit que V est un espace de représentation de G .

Définition 34 Le degré de la représentation est la dimension de l'espace vectoriel.

Définition 35 Soit la représentation

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

d'un groupe G définie par $\rho(s) = I, \forall s \in G$, où I est l'identité dans $GL(V)$. ρ est appelée la représentation triviale.

Une représentation ρ incite une action du groupe G sur V par des transformations linéaires. Soient : s_1, s_2 de G , $v \in V$, on a

$$\rho(s_1 s_2) v = (\rho(s_1) \rho(s_2)) v = \rho(s_1) (\rho(s_2) v)$$

Définition 36 Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation linéaire, et soit W un sous-espace vectoriel de V . Supposons que W soit stable pour les opérations de G c'est à dire ; si $x \in W$ entraîne que $\rho_s x \in W$ pour tout $s \in G$. La restriction ρ^W de ρ_s à W est alors un isomorphisme de W sur lui même et on a

$$\rho_{st}^W = \rho_s^W \cdot \rho_t^W$$

Ainsi

$$\rho^W : G \rightarrow GL(W)$$

est une représentation linéaire de G dans W , on dit que W est une sous-représentation de V .

Somme directe de deux représentations

Définition 37 Soit V un espace vectoriel, et soient W et W' deux sous espaces vectoriels de V . On dit que V est somme directe de W et W' si tout $x \in V$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $x = w + w'$, avec $w \in W$ et $w' \in W'$. De plus, on a

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W')$$

On dit que W' est un supplémentaire de W dans V .

Définition 38 L'application f qui fait correspondre à tout $x \in V$ sa composante w dans W est appelée le projecteur de V sur W associé à la décomposition $V = W \oplus W'$.

Théorème 5 Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation linéaire de G dans V , et soit W un sous-espace vectoriel de V stable par G . Il existe alors un supplémentaire W^0 de W dans V qui est stable par G .

Soit $x \in V$, et soient w et w^0 ses projections sur W et W^0 . On a $x = w + w^0$, d'où

$$\rho_s x = \rho_s w + \rho_s w^0.$$

et puisque W et W^0 sont stables par G ; on a : $\rho_s w \in W$ et $\rho_s w^0 \in W^0$.

La connaissance des représentations de W et W^0 entraîne celle de V .

On dit que la représentation V est somme directe des représentations W et W^0 et l'ont écrit :

$$V = W \oplus W^0.$$

Représentations irréductibles

Définition 39 Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation linéaire de G , on dit qu'elle est irréductible ou simple si V n'est pas réduit à 0, et si aucun sous-espace vectoriel de V n'est stable par G , à part 0 et V .

Cette seconde condition est équivalente à dire que V n'est pas somme directe de deux représentations.

Théorème 6 Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.

Produit tensoriel de deux représentations

Définition 40 soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels. On appelle produit tensoriel de V_1 et V_2 l'espace vectoriel W muni d'une application $(x_1, x_2) \rightarrow x_1.x_2$ de $V_1 \times V_2$ dans W , vérifiant les deux conditions suivantes :

1. $x_1.x_2$ dépend linéairement de chacune des variables x_1 et x_2 .
2. Si (e_{i_1}) est une base de V_1 et (e_{i_2}) est une base de V_2 , la famille des produits $e_{i_1}e_{i_2}$ est une base de W .

Définition 41 Soient :

$$\rho^1 : G \rightarrow GL(V_1) \quad \rho^2 : G \rightarrow GL(V_2)$$

deux représentations linéaires d'un groupe G . Si $s \in G$, on définit un élément ρ_s de $GL(V_1 \otimes V_2)$ par la condition :

$$\rho_s(x_1.x_2) = \rho_s^1(x_1).\rho_s^2(x_2) \quad \text{pour } x_1 \in V_1, x_2 \in V_2.$$

Définition 42 On écrit : $\rho_s = \rho_s^1 \otimes \rho_s^2$, les ρ_s définissent une représentation linéaire de G dans $V_1 \otimes V_2$ qui est appelée le produit tensoriel des représentations données.

2.2 Caractères et degrés de caractères

Définition 43 Soit V un espace vectoriel ayant une base (e_i) à n éléments et soit f une application linéaire de V dans lui-même de matrice (a_{ij}) . On appelle trace de f le scalaire

$$\text{Tr}(f) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}$$

C'est la somme des valeurs propres de f , elle ne dépend pas de la base (e_i) choisie.

Proposition 11 Si A et B sont deux matrices données on a :

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

$$\text{Tr}(ABA^{-1}) = \text{Tr}(B)$$

Définition 44 Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation linéaire d'un groupe fini G dans l'espace vectoriel V . Pour tout $s \in G$, posons $\chi_\rho(s) = \text{Tr}(\rho_s)$, on obtient une fonction χ_ρ sur G , à valeurs complexes, que l'on appelle le caractère de la représentation ρ .

Définition 45 Si χ est un caractère donné par la représentation ρ , alors $\deg(\rho)$ est appelé le degré du caractère χ , on le note $\chi(1)$.

Proposition 12 Si χ est le caractère d'une représentation ρ de degré n , on a :

1. $\chi(1) = n$
2. $\chi(s^{-1}) = \chi(s)^*$ pour $s \in G$ où $\chi(s)^*$ est le conjugué complexe de $\chi(s)$.
3. $\chi(sts^{-1}) = \chi(s)$ pour $s, t \in G$.

Définition 46 Les caractères de degré 1 sont appelés caractères linéaires. En particulier, la fonction 1_G avec la valeur constante 1 sur G est un caractère linéaire, il est appelé le caractère principal (ou trivial)

Proposition 13 Soient :

$$\rho^1 : G \rightarrow GL(V_1) \text{ et } \rho^2 : G \rightarrow GL(V_2)$$

deux représentations linéaires de G , et soient χ_1 et χ_2 leurs caractères respectifs, alors

1. Le caractère χ de la représentation somme directe $V_1 \oplus V_2$ est égal à $\chi_1 + \chi_2$.
2. Le caractère ψ de la représentation produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$ est égal à $\chi_1 \chi_2$.

Preuve. 1) Donnons nous ρ^1 et ρ^2 sous forme matricielle : R_s^1, R_s^2 . La représentation $V_1 \oplus V_2$ est alors donnée par

$$R_s = \begin{pmatrix} R_s^1 & 0 \\ 0 & R_s^2 \end{pmatrix}$$

d'où $Tr(R_s) = Tr(R_s^1) + Tr(R_s^2)$, c'est à dire $\chi(s) = \chi_1(s) + \chi_2(s)$.

On procède de même pour 2). ■

2.2.1 Processus de levage

Définition 47 Soit G un groupe et $N \triangleleft G$. Soit ρ_0 une représentation de G/N . On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_0(Ng)\rho_0(Nh) &= \rho_0(Ngh) && \text{pour } g, h \in G \\ \rho_0(N) &= I \end{aligned}$$

On peut utiliser ρ_0 pour définir une représentation ρ de G tel que

$$\rho(g) = \rho_0(Ng)$$

Le caractère χ de la représentation ρ est donné par : $\chi(g) = \chi_0(Ng)$, tel que χ_0 est le caractère de la représentation ρ_0 de G/N .

Ce procédé peut être utilisé pour définir les représentations ainsi que les caractères du groupe quotient G/N en donnant ceux de G , ce procédé est appelé le processus de levage.

2.2.2 Propriétés des caractères

Soit ρ une représentation du groupe G qui donne le caractère χ , en utilisant la propriété de la fonction trace on aura :

$$\begin{aligned} \chi(ghg^{-1}) &= Tr(\rho(ghg^{-1})) \\ &= Tr(\rho(g)\rho(h)\rho(g^{-1})) \\ &= Tr(\rho(g)\rho(h)\rho(g)^{-1}) \\ &= Tr(\rho(h)) = \chi(h) \quad \text{pour } g, h \in G. \end{aligned}$$

On remarque que χ est une fonction invariante sur la classe de conjugaison. Une fonction qui satisfait cette condition est appelée fonction de classe ou fonction centrale.

Un caractère d'un groupe G donné par une représentation ρ est irréductible si ρ l'est. Le groupe de tous les caractères irréductibles d'un groupe G est noté par $\text{Irr}(G)$.

Les deux résultats suivants sont considérés comme des propriétés importantes des caractères irréductibles.

Corollaire 2 *Soit G un groupe, alors le nombre des caractères irréductibles de G est égal au nombre de ses classes de conjugaisons et*

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1)^2 = |G|$$

Théorème 7 *Soit G un groupe et $\chi \in \text{Irr}(G)$, alors $\chi(1)$ divise l'ordre de G .*

2.2.3 Représentations équivalentes

Définition 48 *Soient $\pi : G \rightarrow GL(V)$ et $\rho : G \rightarrow GL(W)$ deux représentations d'un groupe G sur les espaces vectoriels V et W respectivement. Nous disons que les deux représentations sont équivalentes s'il existe un isomorphisme $f : V \rightarrow W$ tel que pour tout $g \in G$ on a*

$$\rho(g) = f \pi(g) f^{-1}$$

Corollaire 3 *Soient deux représentations π et ρ d'un groupe G , alors π et ρ sont équivalentes si et seulement si elles offrent le même caractère.*

Théorème 8 *Chaque fonction de classe φ de G peut être uniquement exprimée sous la forme*

$$\varphi = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} a_{\chi} \chi, \text{ ou } a_{\chi} \in \mathbb{C}$$

En plus, φ est un caractère si et seulement si tous les a_{χ} sont des entiers non négatifs et $\varphi \neq 0$.

Définition 49 *Soit $N \triangleleft G$ et soit ϑ une fonction de classe de N , la fonction ϑ^g définie par*

$$\vartheta^g(s) = \vartheta(gsg^{-1}), s \in N \text{ et } g \in G$$

est appelée conjuguée de ϑ dans G .

Définition 50 Soit G un groupe et $\text{Irr}(G)$ l'ensemble de tous les caractères irréductibles de G . L'ensemble des degrés de caractères des caractères irréductibles de G est noté $c.d.(G)$:

$$c.d.(G) = \{\chi(1) \mid \chi \in \text{Irr}(G)\}$$

Définition 51 Soient G et H deux groupes et $G \times H$ leur produit direct. Si $\varphi \in \text{Irr}(G)$ et $\vartheta \in \text{Irr}(H)$, alors $\varphi\vartheta \in \text{Irr}(G \times H)$. En particulier, si $G \times H$ est le produit direct de deux groupes G et H , on a

$$c.d.(G \times H) = \{\varphi(1)\vartheta(1) \mid \varphi \in \text{Irr}(G) \text{ et } \vartheta \in \text{Irr}(H)\}$$

Voici des résultats jugés importants dans l'étude de la théorie des caractères des groupes finis. Le plus célèbre résultat dans ce domaine c'est ce théorème de Ito.

Théorème 9 (Ito) Soit G un groupe résoluble, alors G a un p -sous groupe de Sylow normal abélien si et seulement si tout élément de $c.d.(G)$ est relativement premier avec p .

Un autre résultat sur la structure d'un groupe, en étudiant les degrés de caractères, est due à Thompson.

Théorème 10 (Thompson) Si G est un groupe et p est un nombre premier tel que $p \nmid \chi(1)$ pour tout caractère $\chi \in \text{Irr}(G)$, alors G a un p -complément normal.

Théorème 11 (Gallagher) Soit G un groupe avec $N \triangleleft G$. Si $\vartheta \in \text{Irr}(N)$ est extensible à $\vartheta_0 \in \text{Irr}(G)$, alors les caractères $\vartheta\lambda$ pour $\lambda \in \text{Irr}(G/N)$, sont tous des constituants irréductibles de ϑ^G . Particulièrement, $\vartheta(1)\lambda(1) \in c.d.(G)$ pour tout $\lambda \in \text{Irr}(G/N)$.

Lemme 2 Soit G un groupe résoluble non abélien. Alors tous les caractères irréductibles non linéaires de G ont le même degré, ou il existe un sous groupe non-trivial normal abélien N de G tel que G/N ne soit pas abélien.

Le lemme suivant est utile dans les preuves de certains résultats jugés importants dans l'étude des graphes premiers des groupes.

Lemme 3 Soit G un groupe résoluble et soit N l'unique minimal sous groupe normal de G , alors tous les caractères irréductibles non linéaires de G ont un même degré r , et l'une des situations suivantes est satisfaite :

- i) G est un p -groupe, ou
- ii) G est un groupe de Frobenius avec un complément de Frobenius abélien d'ordre r . Aussi N est le noyau de Frobenius et il est un p -groupe élémentaire abélien.

Le théorème suivant sera utilisé avec le lemme précédent dans les démonstrations des résultats dans le chapitre qui suit.

Théorème 12 Soit $K \triangleleft G$ tel que G/K est le groupe de Frobenius avec le noyau de Frobenius N/K , un p -groupe élémentaire abélien. Soit $\chi \in \text{Irr}(N)$. Alors :

- i) $|G : N| \chi(1) \in \text{c.d.}(G)$, ou
- ii) $|N : K|$ divise $\chi(1)^2$.

Théorème 13 Soit $N \triangleleft G$ et $\chi \in \text{Irr}(G)$. Soit $\varphi \in \text{Irr}(N)$ un constituant irréductible de χ_N . Alors : $\chi(1) / \varphi(1)$ divise $|G : N|$.

Le résultat suivant est une application des deux théorèmes précédents.

Lemme 4 Soit K un sous groupe normal de G tel que G/K est un groupe de Frobenius avec un noyau N/K , un abélien élémentaire p -groupe pour un certain nombre premier p . Supposons que $a \in \text{c.d.}(G)$ est premier avec $n = |G : N|$. Alors l'un des cas suivants doit être vérifié :

- (a) $na \in \text{c.d.}(G)$
- (b) $p \nmid a$.

Corollaire 4 Un groupe G est abélien si et seulement si tout caractère irréductible est linéaire.

Preuve. Un groupe G est abélien si et seulement si le nombre des classes de conjugaisons est égal à l'ordre de G . On a

$$\sum_{i=1}^k \chi_i(1)^2 = |G|$$

où k est le nombre des classes de conjugaisons. Mais $\chi_i(1) \geq 1$ pour tout i . Ainsi $k = |G|$ si et seulement si $\chi_i(1) = 1$ pour tout i . ■

Notation 3 On note par $\rho(G)$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent certains degrés de caractères de G .

En utilisant cette définition le corollaire précédent peut être présenter comme suit :

Corollaire 5 Un groupe G est abélien si et seulement si $\rho(G) = \emptyset$.

Proposition 14 Pour chaque nombre premier p , il existe un groupe résoluble G tel que $\rho(G) = \{p\}$.

Preuve. On sait que tout p -groupe est résoluble, alors il existe un groupe résoluble non abélien G tel que $|G| = p^m$ pour $m \geq 3$ (on sait que tout p -groupe est abélien si son ordre est p ou p^2). Comme G n'est pas abélien, on a $\rho(G) \neq \emptyset$, et d'après le théorème 2.2.6 qui dit que tout degré de caractère divise l'ordre de G , alors $\rho(G) = \{p\}$. ■

Théorème 14 Soit G un groupe, et supposons que chaque élément de $c.d.(G) \setminus \{1\}$ est un nombre premier. Alors G est résoluble.

Chapitre 3

Les graphes premiers des groupes finis

Dans ce chapitre nous allons faire des rappels sur la théorie des graphes, en considérant que les graphes sont non orientés. Puis on va introduire un nouveau élément qui est les graphes premiers des groupes finis. A la fin du chapitre on va présenter des résultats récents qui nous permettent de dire quel graphe peut être un graphe premier d'un groupe résoluble.

3.1 Rappel sur la théorie des graphes

Définition 52 *Un graphe Γ est une paire (V, E) , où les éléments de V sont appelés les sommets et E est l'ensemble des paires non ordonnées des éléments de V , qu'on appelle arêtes. On dessine un graphe en dessinant un point pour chaque sommet et joindre deux de ces points par une ligne si les deux sommets correspondants forment une arête.*

Définition 53 *On dit qu'une paire $\{x, y\} \in E$ si et seulement s'il y'a une arête entre x et y dans Γ , pour une paire $\{x, y\}$ nous allons écrire xy . Pour $x, y \in V$, on dit que x et y sont adjacents si et seulement si $xy \in E$. on dit que x est un voisin de y .*

Définition 54 *Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe. Le voisinage d'un sommet $v \in V$, noté $N(v)$, est l'ensemble des sommets de Γ auxquelles v est adjacent, autrement dit*

$$N(v) = \{x \in V / xv \in E\}$$

Le nombre de voisins d'un sommet dans un graphe est appelé le degré du sommet. Dans un graphe chacun des sommets pourrait avoir un degré différent. Dans le cas où les sommets ont le même degré, on dit que le graphe est régulier, et son degré noté k est le degré des sommets.

Le sommet d'ordre 0 est dit isolé.

La propriété suivante est un résultat important dans la théorie des graphes et elle est utile dans l'étude des graphes premiers de degré impair.

Proposition 15 *Le nombre de sommets de degré impair dans un graphe est pair.*

Définition 55 Un graphe Γ est appelé k —régulier s'il est régulier de degré k .

Un graphe 3—régulier est dit cubique.

Un graphe avec n sommets est dit d'ordre n .

Définition 56 Soit Γ un graphe d'ordre n . Si Γ est tel que tous les sommets sont adjacents, alors Γ est appelé un graphe complet noté K_n .

Définition 57 Soit $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ et $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes. On dit que Γ_1 et Γ_2 sont isomorphes si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

a) On peut renommer les ensembles des sommets $V_1 = \{u_1, \dots, u_t\}$ avec $V_2 = \{v_1, \dots, v_s\}$ pour certains entiers positifs $s = t \geq 1$ tel que (b) est satisfaite.

b) Pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, t\}$, $u_i \in N(u_j)$ dans Γ_1 si et seulement si $v_i \in N(v_j)$ dans Γ_2 . On dit que u_i correspond à v_i .

Définition 58 La suite $v_1, v_2, \dots, v_k$ dans un graphe $\Gamma = (V, E)$, pour $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$, est un chemin si $v_i v_{i+1} \in E$ pour $i = 1, 2, \dots, k - 1$.

Définition 59 Un graphe est dit connexe si pour chaque paire de sommets nous pouvons trouver un chemin entre eux.

Définition 60 La distance entre deux sommets u et v notée $\partial(u, v)$ est la longueur du plus court chemin qui les relie, et c'est le nombre des arêtes entre eux dans ce chemin.

Définition 61 Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe connexe. Le diamètre de Γ noté $\text{diam}(\Gamma)$, est la distance maximale sur toutes les paires de sommets.

$$\text{diam}(\Gamma) = \max_{x, y \in V} \partial(x, y)$$

Définition 62 Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe et S la suite $v_0, v_1, \dots, v_k$ pour $\{v_0, v_1, \dots, v_k\} \subset V$. La suite S est appelée un cycle noté C_k si l'ensemble des arêtes contient $v_0 v_k$ et $v_i v_{i+1}$, $i = 0, \dots, k - 1$ seulement.

Définition 63 Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe et soit $\Gamma' = (V', E')$ un graphe tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. Alors Γ' est appelé un sous graphe de Γ .

Remarque 6 *un sous graphe peut être obtenu par suppression des sommets, des arêtes ou des deux à partir du graphe original.*

Définition 64 *Soit $\mu = (V, E)$ un graphe. Un sous graphe connexe maximal est appelé composant de μ .*

Si x et y sont dans différents connexes composants du graphe Γ on ne définit pas la distance entre eux.

Exemple 4 *Soit le graphe $G = (V, E)$ tel que $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,*

$$E = \{(1, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 1), (2, 5), (5, 3)\}.$$

$G' = (V', E')$ est un sous graphe de G définit par $V' = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$E' = \{(1, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 1)\}.$$

tel qu'on a $V' \subset V$ et $E' \subset E$.

Définition 65 *Soit Γ un graphe, un sous graphe Ψ est appelé un sous graphe propre de Γ s'il n'est pas égale à Γ .*

Définition 66 *Un sous graphe obtenu par suppression des sommets et des arêtes attachées aux sommets supprimés est appelé un graphe induit.*

Définition 67 *Soit K_r un graphe complet d'ordre r . Un graphe est dit K_r libre s'il n'a pas K_r comme un sous graphe induit.*

Définition 68 *Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe et $I \subset V$ tel que si $x, y \in I$, alors $x \notin N(y)$. Le sous ensemble I de V est appelé un ensemble indépendant.*

Définition 69 *Le nombre indépendant d'un graphe Γ noté $Ind(\Gamma)$ est la taille maximale des ensembles indépendants dans un graphe Γ .*

Définition 70 *Le coloriage des sommets d'un graphe $\Gamma = (V, E)$ est une application*

$$C : V \rightarrow S = \{1, 2, \dots, k\}$$

tel que $C(v) \neq C(w)$ avec v et w sont adjacents. Les éléments de S sont appelés les couleurs disponibles.

On dit qu'un graphe Γ est k -colorable si ses sommets peuvent être colorer en utilisant k couleurs tel que si $x \in N(y)$, alors x et y sont colorés de différentes couleurs.

Définition 71 *Le nombre chromatique d'un graphe Γ noté $\chi(\Gamma)$ est le plus petit nombre k tel que Γ est k -colorable.*

Théorème 15 [1] *Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe tel que $|V| = n$ et le degré maximal $d \geq 3$. Supposons que Γ est K_{d+1} -libre, alors $n \leq \text{Ind}(\Gamma) d$.*

Définition 72 *Soient $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$, $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes. Une application $f : V_1 \rightarrow V_2$ est un homomorphisme si $(x, y) \in E_1 \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E$*

On peut dire que l'automorphisme d'un graphe $\Gamma = (V, E)$ est une permutation σ sur l'ensemble des sommets V , tel que $uv \in E$ si et seulement si $\sigma(u)\sigma(v) \in E$.

Il s'agit d'un sous groupe du groupe symétrique S_n des permutations de n éléments où $n = \# V$.

Proposition 16 *Soient Γ un graphe et φ un automorphisme de Γ . Pour tout sommets u, v on a :*

$$\begin{aligned} \deg(u) &= \deg(\varphi(u)) \\ d(u, v) &= d(\varphi(u), \varphi(v)) \end{aligned}$$

Définition 73 *Soit Γ un graphe et A son groupe d'automorphismes. On dit que Γ est de sommet transitive si pour tout $u, v \in V(\Gamma)$ il existe $\sigma \in A$ tel que $\sigma(u) = v$.*

3.2 Les graphes premiers

Définition 74 [16] *Soit G un groupe fini, et $\text{Irr}(G)$ l'ensemble de tous les caractères complexes irréductibles de G . Soit $c.d.(G)$ l'ensemble de tous les degrés de caractères de G et on note par $\rho(G)$ l'ensemble des nombres premiers qui dévisent certains degrés de caractères de G .*

Le graphe premier $\Delta(G)$ associé à G est un graphe dont l'ensemble des sommets est $\rho(G)$ et il existe une arête entre deux nombres premiers distincts p et q si et seulement si le produit pq divise certain degré de caractère de G .

Nous allons présenter quelques graphes premiers de groupes finis, on a utilisé le logiciel de calcul formel *GAP* pour trouver l'ensemble $c.d.(G)$ ainsi que l'ensemble $\rho(G)$.

Exemple 5 Soit $G = S_7$ le groupe symétrique qui a $7! = 5040$ éléments, en utilisant le logiciel GAP on obtient

$$c.d.(G) = \{1, 6, 14, 15, 20, 21, 35\}$$

et l'ensemble des sommets de $\Delta(G)$ sera l'ensemble

$$\rho(G) = \{2, 3, 5, 7\}$$

ce qui donne l'ensemble des arêtes E :

$$\{\{2, 3\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}\}.$$

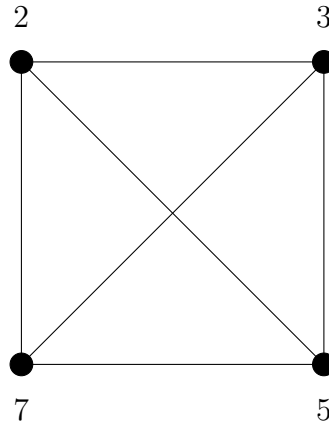


FIGURE 3.1 – Graphe premier de S_7

Exemple 6 Soit $G = A_8$, le groupe alterné avec $\frac{8!}{2} = 20160$ éléments, en utilisant GAP on obtient :

$$c.d.(G) = \{1, 7, 14, 20, 21, 28, 35, 45, 56, 64, 70\}$$

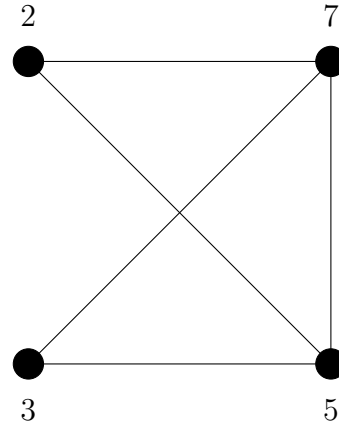
$$V = \rho(G) = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$E = \{\{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}\}.$$

3.3 Résultats importants

Nous allons considérer les résultats les plus importants dans l'étude des graphes premiers pour déterminer la structure des groupes finis.

Le théorème suivant est important pour répondre à la question :
Quels graphes finis sont des graphes premiers de certains groupes résolubles ?

FIGURE 3.2 – Graphe premier de A_8

Théorème 16 [11] (condition de Pálffy) Soit G un groupe résoluble et $\rho(G)$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent certains degrés de caractères $\chi(1)$ pour $\chi \in \text{Irr}(G)$. Soit π l'ensemble de nombres premiers contenu dans $\rho(G)$. Si $|\pi| \geq 3$, alors il existe un caractère irréductible dont le degré est divisible par deux nombres premiers de π .

Cette condition affirme que si on prend trois sommets de $\Delta(G)$ où G est un groupe résoluble, alors au moins deux de ces sommets sont adjacents.

Dans le cas général on a le théorème suivant :

Théorème 17 (Condition de Moretó-Tiep) Soit G un groupe et π l'ensemble des nombres premiers contenu dans $\rho(G)$. Si $|\pi| \geq 4$, alors il existe un caractère irréductible dont le degré est divisible au moins par deux nombres premiers de π .

Lewis a classé les graphes premiers des groupes résolubles avec $|\rho(G)| = 5$ [7].

Théorème 18 [7] (théorème principal) Les graphes avec 5 sommets qui se présentent comme $\Delta(G)$ pour un certain groupe résoluble G sont précisément les graphes avec un diamètre d'au plus 2 qui satisfont la condition de Pálffy sauf les graphes (1), (2) et éventuellement (3) de la figure 3.3

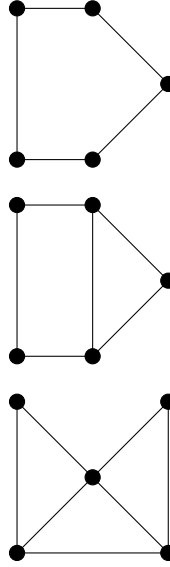


FIGURE 3.3 – Graphes à 5 sommets

Lemme 5 [7] Soit ζ un graphe d'ordre n . Supposons qu'il n'existe pas un sous graphe propre de ζ d'ordre n ou $n - 1$ qui est un $\Delta(G)$ pour un certain groupe résoluble G . Alors ζ n'est pas un graphe premier $\Delta(G)$ pour un certain groupe résoluble.

Preuve. Voir [7] pour la preuve. ■

Proposition 17 Soit Γ_1 un graphe premier d'un groupe résoluble et Γ la jointe de Γ_1 et un graphe d'un seul sommet. Alors Γ est aussi un graphe premier d'un groupe résoluble.

Preuve. Nous allons montrer l'existence d'un groupe résoluble dont le graphe premier est l'union d'un graphe premier Γ_1 d'un groupe résoluble et un graphe d'un seul sommet. Soit G et H deux groupes résolubles dont les graphes premiers sont Γ_1 et un graphe avec un seul sommet respectivement. On peut obtenir un groupe résoluble H tel que $\rho(H) = \{p\}$ et $p \notin \rho(G)$ d'après la proposition(12. chap2).

On sait que le produit direct de groupes résolubles est résoluble, alors $G \times H$ est résoluble. On définit Γ comme le graphe premier de $G \times H$.

Par définition on a :

$$c.d(G \times H) = \{\varphi(1)\vartheta(1) / \varphi \in Irr(G) \text{ et } \vartheta \in Irr(H)\}$$

et on remarque que :

$$\rho(G \times H) = \rho(G) \cup \rho(H).$$

Soit : $\rho(G) = \{q_1, \dots, q_s\}$ tel que q_i est un nombre premier $\forall i = 1, \dots, s$ et $\rho(H) = \{p\}$.

Alors $\rho(G \times H) = \{q_1, \dots, q_s, p\}$. On voit que les arêtes dans Γ_1 existent aussi dans Γ , il nous reste à prouver qu'il existe une arête entre p et chaque q_i , pour $i = 1, \dots, s$.

Soit $q_i \backslash \varphi(1)$ pour $\varphi \in \text{Irr}(G)$ et $p \backslash \vartheta(1)$ pour $\vartheta \in \text{Irr}(H)$. Alors $pq_i \backslash \varphi(1) \vartheta(1)$, et par définition $\varphi(1) \vartheta(1) \in c.d(G \times H)$, ça implique que pour chaque i il existe une arête entre q_i et p .

■

Lemme 6 [9] *Soit G un groupe résoluble. Si $\Delta(G)$ a au moins 4 sommets, alors, soit $\Delta(G)$ contient un triangle ou $\Delta(G)$ c'est un carré.*

Lemme 7 [15] *Si G est résoluble et $\Delta(G)$ n'a pas de triangle, alors $|\rho(G)| \leq 4$.*

Un résultat plus général pour les groupes finis est donné par Hung P. Tong-Viet [15].

Théorème 19 *Si G est un groupe fini dont le graphe premier $\Delta(G)$ n'a pas de triangle, alors $\Delta(G)$ a au plus 5 sommets.*

Chapitre 4

Les graphes premiers réguliers des groupes finis

Dans ce chapitre nous allons étudier les graphes k -réguliers qui existent comme graphe premier d'un groupe résoluble, pour un $k \leq 4$. Nous allons parler brièvement des cas où $k = 1, 2, 3$.

On va se concentrer sur le cas où $k = 4$.

4.1 Résultats importants

En utilisant les théorème 14, théorème 15 et théorème 16 du chapitre précédent on a les résultats suivant :

Corollaire 6 [16] *Soit G un groupe et $\Delta(G)$ son graphe premier. Alors le nombre indépendant $\text{Ind}(\Delta(G))$ est au plus 3 en général et au plus 2 si G est résoluble.*

Le résultat suivant est une conséquence du corollaire précédent. Il va nous aider à avoir une limite maximale pour le nombre des sommets d'un graphe 4-régulier pour qu'il soit un graphe premier d'un groupe résoluble.

Corollaire 7 [16] *Soit G un groupe avec le graphe premier $\Delta(G)$. On suppose que le degré maximal de $\Delta(G)$ est $d \geq 3$ et $\Delta(G)$ est K_{d+1} -libre. Alors $|\rho(G)| \leq 3d$, et si G est résoluble, alors $|\rho(G)| \leq 2d$. En particulier, si $\Delta(G)$ est k -régulier connexe pour un certain $k \geq 3$ qui n'est pas K_{k+1} , alors $|\rho(G)| \leq 3k$, et si G est résoluble alors $|\rho(G)| \leq 2k$.*

Lemme 8 *Soit G un groupe résoluble avec un graphe premier $\Delta(G)$. Si $\Delta(G)$ est non-connexe, alors $\Delta(G)$ contient 2 composantes connexes qui sont les deux des graphes complets.*

Preuve. De la condition de PÁLFY, si G est résoluble, alors $\Delta(G)$ à au plus 2 composantes connexes. Soit $\Delta(G)$ qui contient 2 composantes connexes A et B . Il suffit de montrer que si l'un des deux n'est pas complet alors $\Delta(G)$ n'est pas un graphe premier d'un groupe résoluble. Supposons que A a l'ensemble des sommets $V(A) = \{u_1, \dots, u_k\}$ où $k \geq 2$. Si A n'est pas complet, alors $\exists u_r, u_s \in V(A)$ pour certains $1 \leq s, r \leq k$ tel que $u_r \notin N(u_s)$. On suppose que B a l'ensemble des sommets $V(B) = \{v_1, \dots, v_t\}$ où $t \geq 1$. On remarque qu'il n'y'a pas une arête entre deux des sommets $u_r, u_s, v_i \in V(\Delta(G))$ pour tout $i = 1, \dots, t$.

Ainsi dû à la condition de PÁLFY, $\Delta(G)$ ne peut pas être un graphe premier d'un groupe résoluble. ■

On a besoin des résultats suivants pour les preuves des résultats qui viennent après.

Théorème 20 [8] *Soit G un groupe résoluble et $\Delta(G)$ le graphe premier associé avec deux composantes connexes. Soit la taille de l'ensemble des sommets des deux composantes n et N avec $n \leq N$. Alors $N \geq 2^n - 1$.*

Lemme 9 [16] *Soit G un groupe et soit un entier $k \geq 0$. Si $\Delta(G)$ est un graphe non-connexe k -régulier, alors $k = 0$.*

Preuve. Pour la preuve complète voir [16]. On s'intéresse au cas où G est résoluble. Supposons que $\Delta(G)$ est non -connexe, on sait que $\Delta(G)$ a deux composantes connexes qui sont tous deux des graphes complets. Soient leurs ordres n et N tel que $n \leq N$. Puisque $\Delta(G)$ est k -régulier alors chaque sommet dans les deux composantes est de degré k , ainsi $k = n - 1 = N - 1$, on obtient $n = N = k + 1$. Du théorème 19 on a $N \geq 2^n - 1$, ainsi $k + 1 \geq 2^{k+1} - 1$, on déduit que $k = 0$. ■

4.2 Les graphes 1-réguliers et 2-réguliers

Le résultat suivant va donner une classification de tous les graphes k -réguliers avec $0 \leq k \leq 2$, qui peuvent être $\Delta(G)$ pour un groupe G .

Proposition 18 [16] *Soit G un groupe. Supposons que le graphe premier $\Delta(G)$ est k -régulier pour certain k avec $0 \leq k \leq 2$. Alors ce qui suit est vérifié :*

1. *Si $k = 0$, alors $\Delta(G)$ a au plus 3 sommets et chaque sommet de $\Delta(G)$ est isolé.*
2. *Si $k = 1$, alors $\Delta(G)$ est isomorphe à K_2 , un graphe complet avec 2 sommets, en particulier, G est résoluble.*
3. *Si $k = 2$, alors $\Delta(G)$ est soit un triangle ou c'est un carré. En plus, G est résoluble si $\Delta(G)$ est un carré.*

de cette proposition on conclue que les seuls graphes 1-réguliers et 2-réguliers qui surviennent comme graphes premiers sont indiqués dans les figures 4.1, 4.2, 4.3



FIGURE 4.1 – Graphe 1-régulier

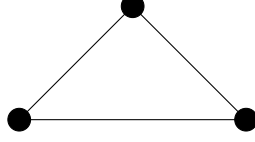


FIGURE 4.2 – Graphes 2-réguliers

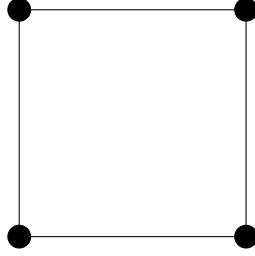


FIGURE 4.3 – Graphes 2-réguliers

4.3 Les graphes 3-réguliers

Un graphe 3-régulier est défini comme un graphe où tout sommet est de degré 3. Dans son travail Hung. P. Tong-Viet [16] a fait une analyse profonde pour les graphes 3-réguliers et il a pu avoir les résultats suivants.

Proposition 19 [16] *Si le graphe premier $\Delta(G)$ d'un groupe est un graphe 3-régulier connexe avec $|\rho(G)| \geq 6$, alors $\Delta(G)$ est isomorphe à l'un des graphes des Figures 4 – 4, 5, 6 ou 7.*

Lemme 10 [16] *Supposant que le graphe premier d'un groupe G est isomorphe au graphe dans la figure 4 – 4. Alors $G' = G''$. En particulier, G n'est pas résoluble.*

En partant des résultats précédents Tong-Viet a obtenu le théorème suivant.

Théorème 21 [16] *Soit G un groupe résoluble. Si $\Delta(G)$ est un graphe cubique, alors $\Delta(G)$ est isomorphe à un graphe complet d'ordre quatre.*

Preuve. Supposons que $\Delta(G)$ est un graphe cubique d'un groupe résoluble G . D'après le lemme 9, $\Delta(G)$ est connexe. Du corollaire 7 on a $|\rho(G)| \leq 6$, Alors

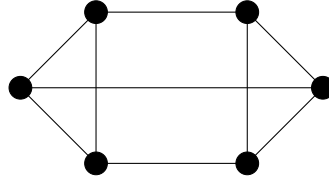


FIGURE 4.4 – Graphe cubique d'ordre 6 avec 2 triangles

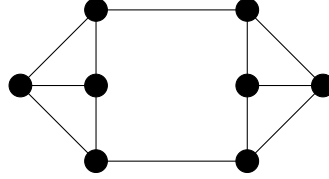


FIGURE 4.5 – Graphe cubique d'ordre 8 avec 4 triangles

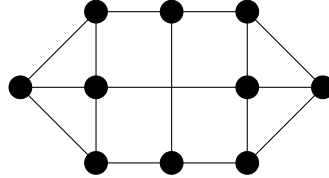


FIGURE 4.6 – Graphe cubique d'ordre 8 avec 2 triangles

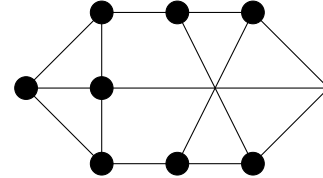
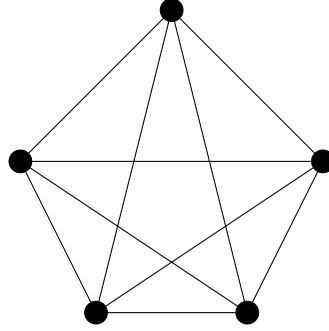


FIGURE 4.7 – Graphe cubique d'ordre 8 avec un triangle

$|\rho(G)| = 4, 5$ ou 6 . De la proposition 13 on a $|\rho(G)| \neq 5$. Si $|\rho(G)| = 4$, alors $\Delta(G)$ est un carré complet. Supposons que $|\rho(G)| = 6$, alors de la proposition 17, $\Delta(G)$ est isomorphe au graphe de la figure 4.4. Mais d'après Le lemme 10, G est non résoluble ce qui est une contradiction. Ainsi $\Delta(G)$ doit être un carré complet. ■

4.4 Les graphes premiers 4-réguliers des groupes résolubles finis

Pour avoir un graphe 4-régulier il nous faut au moins 5 sommets. On va entamer le premier cas où $|\rho(G)| = 5$. Pour obtenir un graphe 4-régulier il faut que tous les 5 sommets soient adjacents les uns les autres, ça va produire un graphe complet de 5 sommets, on le note K_5 , voir figure 4.8 La question qui se

FIGURE 4.8 – Graphe 4-régulier d'ordre 5 (K_5)

pose, est ce que K_5 est un graphe premier d'un groupe résoluble ?

Proposition 20 *Pour chaque graphe complet K_m où m est un entier positif, il existe un groupe résoluble dont le graphe premier $\Delta(G)$ est isomorphe à K_m .*

Preuve. D'après la proposition 12(chapitre 2) il existe un groupe résoluble G tel que $\rho(G) = \{p\}$ pour chaque nombre premier p . Soit $G = G_1 \times \dots \times G_k$, $k \geq 1$, le produit direct des groupes résolubles finis G_i avec $\rho(G_i) = \{p_i\}$ pour des nombres premiers p_i . Il s'ensuit que $\rho(G) = \{p_1, \dots, p_k\}$. Alors $\Delta(G)$ a k sommets. Nous avons besoin de montrer que $\Delta(G)$ est un graphe complet. Remarquons que $c.d..(G_i) = \{p_i, p_i^2, \dots, p_i^j\}$ pour un entier $j \geq 1$ n'est pas nécessairement le même pour chaque i . Pour obtenir $c.d.(G)$ on multiplie chaque élément de $c.d.(G_r)$ avec tous les éléments de $c.d.(G_t)$ pour $t \neq r$ et $1 \leq r, t \leq k$. Ainsi pour chaque pair $(p_x, p_y) \in \rho(G)$ on peut trouver $c_l \in c.d.(G)$ tel que le produit $p_x p_y \setminus c_l$ pour $1 \leq x, y \leq k$ et $1 \leq l \leq |c.d.(G)|$. Dans ce cas on note que $m = k - 1$. ■

Alors de la proposition précédente il s'ensuit qu'il existe un groupe résoluble G tel que $\Delta(G)$ est le graphe dans la figure 4.8.

Pour le cas $\rho(G) = 6$, on va commencer par exclure quelques graphes qui ne peuvent pas être des graphes premiers. On va utiliser la condition de Pálffy (théorème 15) et le théorème 18.

Soit $\rho(G) = \{p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3\}$, on suppose que nous avons un triangle avec les sommets p_1, p_2, p_3 , les sommets restants sont q_1, q_2 et q_3 .

Si les p_i sont tous adjacents à un sommet des q_i , il est clair qu'il n'existe aucun moyen pour compléter le graphe pour former un graphe 4-régulier d'ordre 6.

Maintenant, soient deux sommets des p_i , disons p_1 et p_2 adjacents à un des q_i , disons q_1 . Il s'ensuit que nous devons avoir p_3 et un des autres p_i , disons p_2

qui soient adjacents à un des sommets $\{q_2, q_3\}$, disons q_3 . Il y'a une seule façon de compléter ce graphe, on va joindre p_1 et p_3 à q_2 , et alors nous aurons les q_i qui forment un triangle. On obtient le graphe dans la figure 4.9.

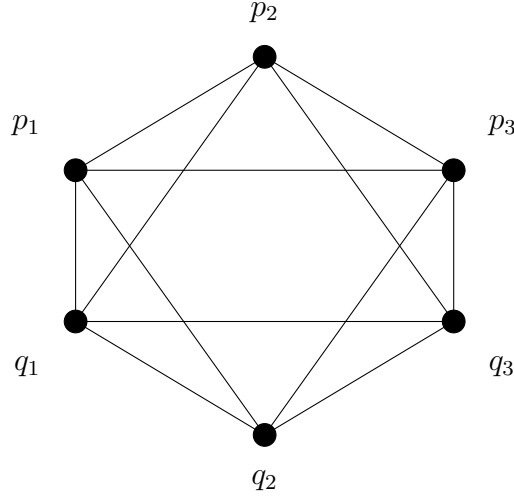


FIGURE 4.9 – Graphe 4-régulier d'ordre 6

Proposition 21 *Il existe un groupe résoluble G dont le graphe premier $\Delta(G)$ est isomorphe au graphe de la figure 4.9.*

Preuve. Il suffit de montrer l'existence des groupes G_i pour $i = 1, 2, 3$ tel que

$$c.d.(G_1) = \{1, p_1, q_3\}, \quad c.d.(G_2) = \{1, p_2, q_2\}, \quad c.d.(G_3) = \{1, p_3, q_1\}$$

pour des nombres premiers distincts $\{p_j\}_{j=1}^3$ et $\{q_k\}_{k=1}^3$. On peut montrer que tels groupes existent. Par exemple, pour les paires $\{p_1, q_3\}$, s'ils satisfont la condition $p_1 \nmid q_3 - 1$. Soit P un groupe extraspecial d'ordre q_3^3 et d'exposant q_3 . On peut montrer que P a un automorphisme σ d'ordre p_1 qui centralise le centre de P . Si on prend G_1 le produit semi direct du groupe généré par σ agissant sur P , alors $c.d.(G_1) = \{1, p_1, q_3\}$. pour chacune des paires il existe un groupe avec un ensemble de degrés de caractères pareil, et du théorème 13 (chap 2) on déduit qu'ils doivent être résolubles. Le groupe $G = G_1 \times G_2 \times G_3$ est résoluble et son graphe premier $\Delta(G)$ est isomorphe au graphe dans la figure 4.9. la preuve est complète. ■

Considérons les cas où $|\rho(G)| \geq 7$.

Proposition 22 *Il n'y'a pas un groupe résoluble G dont le graphe premier $\Delta(G)$ est un graphe 4-régulier avec $|\rho(G)| \geq 7$.*

Preuve. Soit G un groupe résoluble et $\Delta(G)$ son graphe premier associé. Si $\Delta(G)$ est 4-régulier, alors d'après le lemme 9, le graphe doit être connexe et d'après le corollaire 7 on a $|V| = |\rho(G)| \leq 2.4 = 8$. Alors $|\rho(G)| = 5, 6, 7$ ou 8.

Si $|\rho(G)| \geq 7$, alors $|\rho(G)| = 7$ ou 8. $\Delta(G)$ doit contenir un triangle, qu'on suppose $\{p_1, p_2, p_3\}$. ■

- Considérons le cas où $\Delta(G)$ est un graphe 4-régulier d'ordre 7. Soient les sommets restants $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$. Il y'a deux cas :

Cas 22 1 : *Supposons que q_1 est adjacent à tous les p_i . On a $\deg(p_i) = 3, \forall i$. On considère trois possibilités :*

1. Soit $q_2 \in N(p_i), \forall i$, alors on a $\deg(p_i) = 4, \forall i$. On remarque que c'est impossible de compléter le graphe pour qu'il soit un graphe 4-régulier avec 7 sommets.
2. Soit q_2 adjacent à deux sommets de l'ensemble $\{p_1, p_2, p_3\}$ disons p_1 et p_2 . Soit p_3 adjacent à q_3 , alors on aura $\deg(p_i) = 4, \forall i$. on ne peut pas compléter $\Delta(G)$ pour avoir un graphe 4-régulier d'ordre 7.
3. Soient $q_2 \in N(p_1), q_3 \in N(p_2), q_4 \in N(p_3)$, ça implique que $\deg(p_i) = 4, \forall i$, mais c'est impossible d'avoir un graphe 4-régulier d'ordre 7.

Cas 23 2 : *On suppose qu'il n'y'a pas un j tel que q_j est adjacent à tous les p_i . Alors ça donne que deux des q_j sont chacun adjacent à deux des p_i . Il y'a deux possibilités :*

1. Soient deux des q_i disons q_1 et q_4 qui sont adjacents à deux sommets dans l'ensemble $\{p_1, p_2, p_3\}$, disons p_1 et p_3 , Alors il s'ensuit que q_2 et q_3 sont adjacents à p_2 . Remarquons que $\deg(p_i) = 4, \forall i$. Pour compléter le graphe on a besoin que q_2 et q_3 soient adjacents à q_1 et q_4 , ce qui donne le graphe dans la figure 4.13
2. Soit un des $q_j, j = 1, 2, 3, 4$, disons q_1 adjacent à deux des sommets $\{p_1, p_2, p_3\}$, disons p_1 et p_2 , et soient p_3 et un des $\{p_1, p_2\}$, disons p_2 adjacents à q_4 . Il y'a deux possibilités :

- (a) On a que p_1 et p_2 adjacents à q_3 , ça implique que $\deg(p_i) = 4, \forall i$. Il est impossible de compléter le graphe pour qu'il soit un graphe 4-régulier.
- (b) On a p_1 et p_3 sont adjacents à q_2 et q_3 respectivement. Pour compléter le graphe on a besoin que q_3 soit adjacent à q_1, q_2 et q_1, q_4 adjacents à q_2 . Ainsi on obtient le graphe dans la figure 4.10.

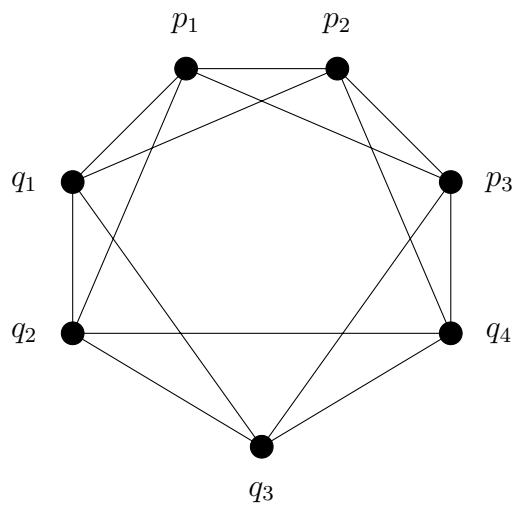
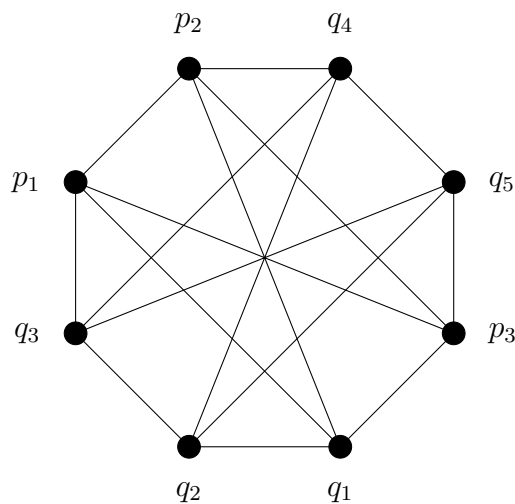


FIGURE 4.10 – Graphe 4-régulier d'ordre 7 avec 7 triangles

FIGURE 4.11 – Graphe 4-régulier d'ordre 8 avec 2 (K_4)

Considérons maintenant le cas où $\Delta(G)$ est un graphe 4-régulier d'ordre 8. soit le triangle $\{p_1, p_2, p_3\}$ et les sommets restants $\{q_j\}_{j=1}^5$, il existe 3 cas :

Cas 24 1 : Soient tous les p_i adjacents à un des q_j , disons q_1 . Il y'a trois possibilités :

1- Soient tous les p_i adjacents à q_2 . On obtient : $\deg(p_i) = 4$, $\deg(q_1) = \deg(q_2) = 3$, si on joint q_3 à tous les q_i on aura : $\deg(q_3) = \deg(q_1) = \deg(q_2) = 4$, mais on ne peut pas compléter le graphe pour qu'il soit 4-régulier.

2- Soit un sommet des $q_j, j = 2, 3, 4, 5$, disons q_2 adjacent à deux des sommets dans $\{p_1, p_2, p_3\}$, disons p_1, p_2 et que p_3 soit adjacent à un des $q_j, j = 3, 4, 5$, disons q_3 . On obtient que $\deg(p_i) = 4, \forall i$, $\deg(q_1) = 3$ et $\deg(q_2) = 2$. Soit q_4 adjacent à tous les q_i , ainsi on a : $\deg(q_1) = \deg(q_4) = 4$, mais on ne peut pas compléter le graphe pour qu'il soit 4-régulier.

3- Soit chacun des p_i adjacent à différents $q_j, j = 3, 4, 5$, disons que : p_1, p_2, p_3 respectivement adjacents à q_3, q_4, q_5 . On a déjà $\deg(p_i) = 4$, $\deg(q_1) = 3$. Soit q_2 adjacent à tous les q_j . La seule possibilité pour compléter le graphe c'est d'avoir q_3 adjacent à q_4 et q_5 et q_4 adjacent à q_5 . Ainsi on a le graphe dans la figure 4.11.

Cas 25 2 : Soient deux sommets de l'ensemble $\{p_1, p_2, p_3\}$ disons p_1, p_2 adjacents à un sommet de l'ensemble $\{q_j\}_{j=1}^5$, disons q_1 et un des p_i pour $i = 1, 2$, disons p_2 avec p_3 sont tous les deux adjacents à un des q_j pour $j = 2, 3, 4, 5$ disons q_5 . Alors il y'a deux possibilités :

1- Soient p_1 et p_3 adjacents à un des $q_j, j = 2, 3, 4$, disons q_3 . Il y'a une seule possibilité de compléter le graphe. Soient les q_j restants, qui sont q_2 et q_4 adjacents l'un à l'autre et à les autres q_j . Ainsi, on obtient le graphe de la figure 4.16.

2- Soient p_1 et p_3 adjacent chacun à un des $q_j, j = 2, 3, 4$, disons q_2 . On aura $\deg(p_i) = 4, \forall i$. Il y'a une seule façon de compléter le graphe pour obtenir un graphe 4-régulier d'ordre 8. Soit q_3 adjacent à tous les autres q_i , pour obtenir $\deg(q_3) = 4$. On complète le graphe en laissant $q_4 \in N(q_2)$, $q_1 \in N(q_2)$ et $q_5 \in N(q_4)$, on obtient ainsi le graphe dans la figure 4.12.

Cas 26 3 : Soient deux des p_i , disons p_1 et p_2 adjacents à un des q_j , disons q_1 . Aussi soient p_3 et un sommet de l'ensemble $\{p_1, p_2\}$ disons p_2 adjacents à q_5 et q_3 respectivement. Alors ily'a deux possibilités :

1- Soit p_3 adjacent à un sommet de l'ensemble $\{q_2, q_4\}$, disons q_4 et $p_1 \in N(q_2)$. Soit q_1 adjacent à q_2 et q_5 tel qu'on obtient $\deg(p_i) = \deg(q_1) = 4, \forall i$. Alors il existe une seule façon de compléter le graphe, en faisant joindre q_3 à q_2, q_4 et q_5 , et on joint q_4 à q_5 et q_2 . On obtient le graphe dans la figure 4.14

2- Soient p_1 et p_3 adjacents les deux à un des sommets de l'ensemble $\{q_2, q_4\}$, chacun séparé de l'autre. Alors il y'a une seule façon de compléter le graphe. Laissons q_1 joindre q_2 et q_5 , et si on joint q_2 à q_3 et à q_4 , et on laisse q_3, q_4 et q_5 adjacents les un aux autres, on obtient le graphe dans la figure 4.15

Assertion 27 1. Les graphes dans les figures 4.10 et 4.12 ne peuvent pas être des graphes premiers de certains groupes résolubles.

Preuve. On suppose que G est résoluble et $\Delta(G)$ est isomorphe à l'un des graphes dans les figures 4.10 ou 4.12. Soit K un sous-groupe normal maximal de G , tel que G/K n'est pas abélien. D'après le lemme 3(chap 2), un des deux cas suivants est vérifié :

(a) G/K est un p -groupe non abélien pour un certain p . Dans ce cas on va montrer que p est adjacent à chaque sommet de $\rho(G)$, ce qui est impossible. Soit $q \in \rho(G) \setminus \{p\}$. Alors il existe $\varphi \in Irr(G)$ tel que $q \nmid \varphi(1)$. Comme G/K n'est pas abélien, alors il a un caractère non trivial $\theta \in Irr(G/K)$. Maintenant si $p \nmid \varphi(1)$, alors $pq \nmid \varphi(1)$ ainsi p et q sont adjacents et on a terminé. Sinon, supposons $p \mid \varphi(1)$. Alors, comme G/K est un p -groupe, on a $p \mid \gcd(|G : K|, \varphi(1)) = 1$ et ainsi $\varphi_k \in Irr(K)$. Du théorème de Gallagher (2.2.10), $\varphi\theta \in Irr(G)$, et ainsi $pq \nmid \varphi(1)\theta(1) \in c.d.(G)$, alors p et q sont adjacents. Donc p est adjacent à chaque sommet dans $\rho(G) \setminus \{p\}$ comme c'est voulue.

(b) G/K est un groupe de Frobenius avec le noyau N/K . On sait que N/K est un p -groupe élémentaire abélien pour un certain nombre premier p et $|G : N| = n \in c.d.(G)$ avec $p \nmid \gcd(p, n) = 1$. De plus, si $\theta \in Irr(N)$, alors soit $n\theta(1) \in c.d.(G)$ ou $p \nmid \theta(1)$.

Remarquons que les graphes dans les figures 4.10 et 4.12 n'ont pas un carré complet. Alors $|\pi(\chi(1))| \leq 3$ pour chaque $\chi \in Irr(G)$. En particulier $|\pi(n)| \leq 3$.

Pour chaque p possible et chaque $\pi(n)$ possible on peut trouver une paire de sommet $\{u, v\}$ tel que u et v sont adjacents dans $\Delta(G)$ et $u \notin \pi(n)$,

$\pi(n) \not\subseteq \{u, v\}$ et $\{p, u, v\}$ et $\{u, v, r\}$ ne sont pas des triangles dans $\Delta(G)$, où $r \in \pi(n) \setminus \{u, v\}$.

Soit $\chi \in \text{Irr}(G)$ tel que $uv \setminus \chi(1)$ et soit $\theta \in \text{Irr}(N)$ un constituant irréductible de χ_N . On a $u \notin \pi(n) \Rightarrow \text{pgcd}(u, |G/N|) = 1$, alors $u \setminus \theta(1)$. En plus $p \nmid \theta(1)$ mais $p \setminus \chi(1)$. Ça implique que $\{p, u, v\}$ est un triangle. On pose $f := n\theta(1) \in \text{c.d.}(G)$. Si $v \in \pi(n)$, alors $ruv \setminus f$. Si $v \notin \pi(n)$, alors $v \setminus \theta(1)$ d'où $ruv \setminus f$. Dans les deux cas $\{r, u, v\}$ est un triangle dans $\Delta(G)$. Cette contradiction complète la preuve. ■

Assertion 28 2. *Il n'y'a pas un groupe résoluble dont le graphe premier $\Delta(G)$ est isomorphe au graphe dans la figure 4.11.*

Preuve. Notons que le graphe de la figure 4.11 est isomorphe au graphe Γ de la figure 4.17. Alors il suffit de montrer que Γ n'est pas un graphe premier d'un groupe résoluble, pour que le graphe dans la figure 4.11 soit de tel. On suppose que G est un groupe avec $\Delta(G)$ isomorphe à Γ , alors $G' = G''$. Prouvons cela par la contradiction. On suppose $G' \neq G''$, alors G'/G'' est un groupe résoluble non abélien. Soit K le maximal sous-groupe normal de G tel que G/K est un groupe résoluble minimal non abélien. D'après le lemme 3 un de ces cas est satisfait :

(a) G/K est un p -groupe pour un certain nombre premier p . En plus, G/K a un caractère irréductible $\vartheta \in \text{Irr}(G/K)$ avec $\vartheta(1) = p^a$, pour a un entier positif. On peut montrer dans ce cas que p est connexe à chaque nombre premier dans l'ensemble $\rho(G) \setminus \{p\}$. On sait que pour chaque $q \in \rho(G)$, il existe $\varphi \in \text{Irr}(G)$ tel que $q \setminus \varphi(1)$. Si $p \setminus \varphi(1)$, alors $pq \setminus \varphi(1)$ et ça donne que $pq \in E(\Gamma)$ et on a terminé.

Maintenant, supposons que $p \nmid \varphi(1)$, et on a $\varphi_K \in \text{Irr}(G)$ et d'après le théorème de Gallagher $\varphi\vartheta \in \text{Irr}(G)$ et ainsi $pq \setminus \varphi(1)\vartheta(1)$. Donc, $pq \in E(\Gamma)$, et on a terminé. On remarque que dans le graphe Γ il n'y'a pas un sommet lié à tous les 7 autres sommets, d'où vient la contradiction.

(b) $G \setminus K$ est un groupe de Frobenius avec le noyau de Frobenius N/K , un p -groupe abélien élémentaire pour certain nombre premier p . Soit $|G : N| = n$. Notons que $n \in \text{c.d.}(G)$ et $\text{pgcd}(n, p) = 1$. Du théorème 11 on a : pour chaque $\vartheta \in \text{Irr}(N)$, soit $n\vartheta(1) \in \text{c.d.}(G)$ ou $p \setminus \vartheta(1)$. Il est clair que Γ ne contient pas un sous-graphe isomorphe à K_5 par conséquent pour chaque $\chi \in \text{Irr}(G)$, $|\pi(\chi(1))| \leq 4$. Remarquons que Γ contient seulement 2 sous-graphes complets K_4 avec les sommets $\{p_i\}_{i=1}^4$ et $\{q_j\}_{j=1}^4$ plus les arêtes restantes $p_k q_k$ pour $k = 1, 2, 3, 4$.

Maintenant on a $n \in c.d.(G)$, $|\pi(n)| \leq 4$ et $|\pi(n) \cup \{p\}| \leq 5$, ça implique qu'ils existent des indices $1 \leq l \leq 4$, tel que $p \notin \{p_l, q_l\}$ et $\pi(n) \not\subseteq \{p_l, q_l\}$, d'où il existe $r \in \pi(n) \setminus \{p_l, q_l\}$. Maintenant soit $\chi \in Irr(G)$ tel que $p_l q_l \chi(1)$. Considérons Γ , on remarque que $\pi(\chi(1)) = \{p_l, q_l\}$. Soit $\theta \in Irr(N)$ un constituant irréductible de χ_N . De $\theta(1) \setminus \chi(1)$ on déduit que $p \nmid \theta(1)$, d'où $n\theta(1) \in c.d(G)$. Mais dans Γ , le triangle $\{r, p_l, q_l\}$ ne se forme pas, d'où on a une contradiction. Ainsi on conclue que $G' = G''$. Si G est résoluble il s'ensuit que $G' = G'' = 1$, ça implique que G est abélien, ce qui est impossible car $\rho(G) = 8$ ($\neq \emptyset$). Ainsi Γ ne peut pas être un graphe premier d'un groupe résoluble. ■

Assertion 29 3. *Il n'existe pas un groupe résoluble dont le graphe premier $\Delta(G)$ est isomorphe aux graphes des figures 4.13 – 4.16*

Preuve. De la condition de Pálffy, pour chaque trois sommets dans $\Delta(G)$ d'un groupe résoluble aux moins deux de ces sommets doivent être adjacents. Maintenant, considérons l'ensemble $\pi = \{q_1, p_2, q_4\}$ dans la figure 4.13. Il n'y'a pas d'arête entre deux sommets parmi les trois de π .

De même pour le graphe dans la figure 4.14. Prenons $\pi = \{q_1, p_3, q_3\}$.

Pour le graphe dans la figure 4.15, on prend $\pi = \{p_1, q_2, q_5\}$.

Finalement pour le graphe dans la figure 4.16, on prend $\pi = \{q_1, q_3, q_5\}$, et c'est terminé.

En suivant toutes les revendication on termine la preuve. ■

Corollaire 8 *Soit G un groupe résoluble avec le graphe premier $\Delta(G)$. Si $\Delta(G)$ est 4-régulier, alors $|\rho(G)| \leq 6$.*

Preuve. La preuve est une conséquence des propositions 18, 19 et 20. ■

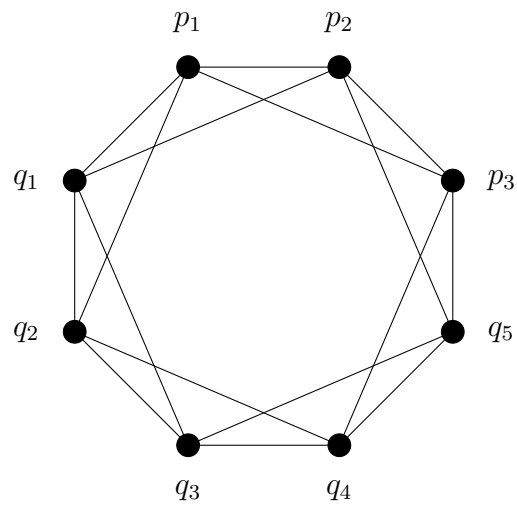


FIGURE 4.12 – Graphe 4-régulier d'ordre 8 avec 8 triangles

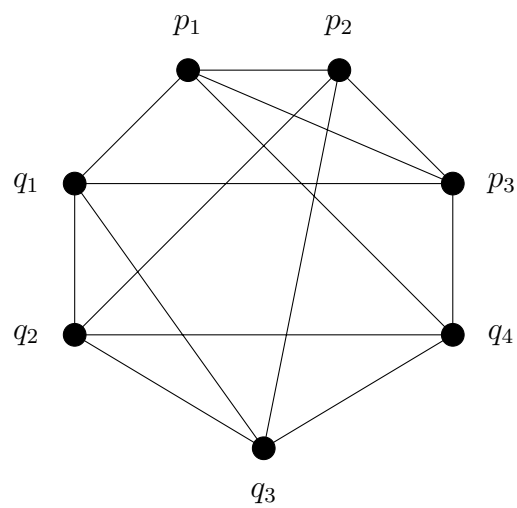


FIGURE 4.13 – Graphe 4-régulier d'ordre 7 avec 6 triangles

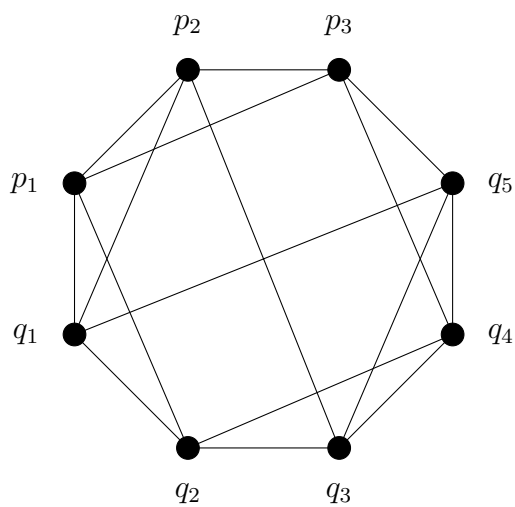


FIGURE 4.14 – Graphe 4-régulier d'ordre 8 avec 6 triangles

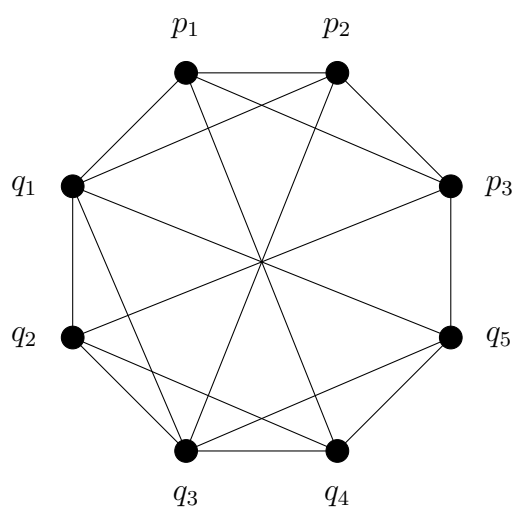


FIGURE 4.15 – Graphe 4-régulier d'ordre 8 avec 4 triangles

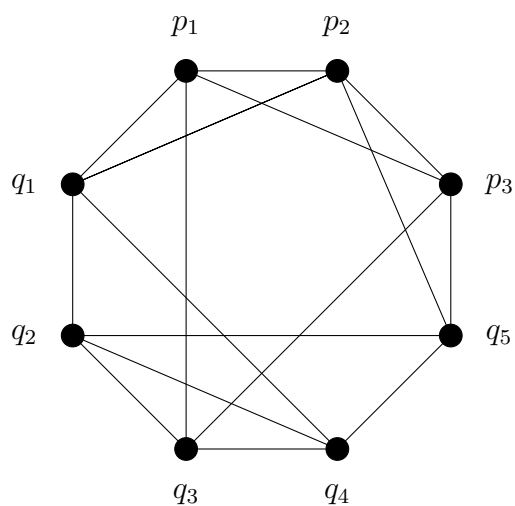
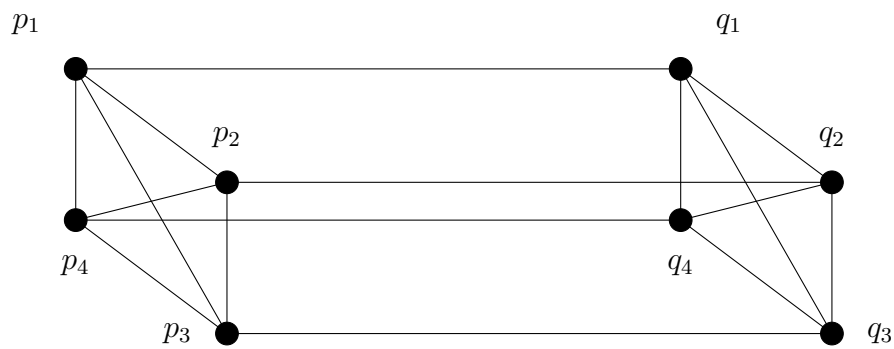


FIGURE 4.16 – Graphe 4-régulier d'ordre 8 avec 7 triangles

FIGURE 4.17 – Graphe isomorphe au graphe 4-régulier d'ordre 8 avec $2(K_4)$

Chapitre 5

Conclusion

Il est toujours un défi dans l'étude des graphes premiers des groupes finis de déterminer quel graphe fini peut être un graphe premier d'un groupe résoluble. Dans ce travail notre but est de sélectionner les graphes 4-réguliers qui peuvent être des graphes premiers de certains groupes résolubles finis. On a prouvé que c'est des graphes d'ordre inférieur ou égal à 6. En particulier, il y'a seulement deux graphes. Le graphe complet avec 5 sommets et le graphe d'ordre 6. Pour le cas général Tong Viet dans [16] a conjecturé que les graphes k -réguliers qui peuvent être des graphes premiers d'un groupe sont le graphe complet d'ordre $k + 1$ et le graphe k -régulier d'ordre $k + 2$ où $k \geq 4$ et pair. Pour $k \geq 5$ et impair le seul graphe premier c'est le graphe complet d'ordre $k + 1$. De plus si on a $|\rho(G)| = k + 2$, alors G est résoluble.

Bibliographie

- [1] R.L. Brooks, On colouring the nodes of a network. Proc. Cambridge Philos. Soc, 37 :194-197, 1941.
- [2] J. Calais, Eléments de théorie des groupes. Presse universitaire de France 1984
- [3] R. Diestel, Graph Theory, Electronic Edition 2000.
- [4] S. Dolfi, E. Pacifici, and L. Sanus, Finite groups with real-valued irreducible characters of prime degree. J. Algebra, 320 :2181-2195, 2008.
- [5] B. Huppert, Research in representation theory at mainz. Progress in Mathematics, 95, 1991.
- [6] M. L. Lewis, Determining group structure from sets of irreducible character degrees. J. Algebra, 206 :235-260, 1998.
- [7] M. L. Lewis, Classifying character degree graphs with five vertices. In Finite Groups 2003, pages 247-265, 2004.
- [8] M. L. Lewis, An overview of graphs associated with character degrees and conjugacy class sizes in finite groups. Rocky Mountain j. Math, 38 :175-211, 2008.
- [9] M. Lewis and Q. Meng, Square character degree graphs yield direct products. J. Algebra, 349 :185-200, 2012.
- [10] I. Martin Isaacs, Character theory of finite groups. Academic press 1976.
- [11] P. Pálfi, On the character degree graph of solvable groups. I : Three primes, Periodica Math. Hungar. 36, 61-65 (1998).
- [12] J. Querré, cours d'algèbre. MASSON 1976.
- [13] J. P. Serre, représentations linéaires des groupes finis. Hermann, editeur des sciences et des arts 1971.

- [14] J. G. Thompson, Normal p -complements and irreducible characters. *J. Algebra*, 14 :129-134, 1970.
- [15] H. P. Tong-Viet, Groups whose prime graphs have no triangles. *J. Algebra*, 378 :196-206, 2013.
- [16] H. P. Tong-Viet, Finite groups whose prime graphs are regular. *Journal of Algebra* 397, 18-31, 2014.
- [17] Yi-Tao and Pu Zhang, Finite Solvable groups whose character graphs are trees. *J. Algebra*, 308 :536-544, 2007.