

N^o d'ordre : 01/2016 - D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari-Boumediène

Faculté de Mathématiques



THESE

Présentée pour l'obtention du **grade de DOCTEUR EN SCIENCES**

EN : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse : Systèmes Dynamiques

Par : ABDELKADER SAADI

Sujet

Existence de solutions positives pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire

Soutenue publiquement, le 08/12/2016, devant le jury composé de :

Mr.	R. BEBBOUCHI	Professeur	à l'USTHB	Président
Mr.	A. BENMEZAI	Professeur	à l'USTHB	Directeur de thèse
Mr.	M. BENBACHIR	Professeur	à l'U.Kh Miliana	Examineur
Mr.	S. DJEBALI	Professeur	à l'ENS Kouba	Examineur
Mme.	O. MEZIANI	Maître de Conférence/A	à l'U. d' Alger 3	Examinatrice
Mr.	D. REBAH	Maître de Conférence/A	à l'USTHB	Examineur

Dédicaces

A la mémoire de mes parents

A mes enfants Amira, Walid et Alaa.

A toute ma famille.

Remerciements

Je tiens tout d'abord et en premier lieu à exprimer toute ma reconnaissance et ma gratitude envers le Professeur Abdelhamid Benmezai pour l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à ma recherche, pour le soutien attentif et chaleureux permanent dont j'ai bénéficié tout au long de la réalisation de ce travail.

Je remercie aussi Monsieur R. Bebbouchi, Professeur à l'USTHB, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de soutenance de ma thèse et je remercie également les professeurs M. Benbachir, Professeur à l'U. Khemis Miliana, S. Djebali, Professeur à l'ENS Kouba, O. Meziani, MCA à l'U. Alger 3 et D. Rebah MCA à l'USTHB, qui ont accepté d'examiner mon manuscrit de thèse.

Résumé

Nous nous intéressons à étudier certaines équations différentielles d'ordre fractionnaire. Notre objectif est de présenter quelques résultats d'existence et de multiplicité de solutions positives pour quelques classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire. Pour obtenir l'existence des solutions positives, des conditions suffisantes seront considérées dans l'étude des différentes classes de problèmes aux limites associés aux équations différentielles d'ordre fractionnaire de cette thèse. La démarche suivie consiste à ramener la recherche de l'existence (sous des conditions convenables) de ces solutions positives à la recherche de l'existence des points fixes d'opérateurs appropriés moyennant la fonction de Green en appliquant différentes alternatives non linéaires dans les espaces de Banach, pour montrer l'existence des points fixes de ces opérateurs qui sont les solutions de nos problèmes. Cette méthode est basée sur des célèbres théorèmes du point fixe tels que, le théorème de point fixe de Krasnosel'skii, la théorie de l'indice de point fixe sur les cônes et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Cette thèse se compose d'une introduction et de six chapitres.

Le premier chapitre sera consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire, un rappel historique et trois approches (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo) à la généralisation des notions de dérivation seront ensuite considérées, ainsi que les différents théorèmes de points fixes utilisés dans cette thèse.

Dans les chapitres qui suivent nous présentons nos contributions dans cette thèse. Les résultats de ces chapitres varient selon les hypothèses portant sur le terme non-linéaire de l'équation différentielle du problème étudié.

Mots-clés : Dérivée fractionnaire, FBVPs, fonction de Green, cône, positive solutions, espaces de Banach, théorème de point fixe de Krasnosel'skii, théorie de l'indice de point fixe, théorème d'alternative non linéaire de Leray-Schauder, ;....

Classifications AMS : 26A33 - 34A08 - 34B15 - 93B05.

Abstract

We are interested in studying some differential equations of fractional order. Our goal is to present some results of existence and multiplicity of positive solutions for some classes of differential equations of fractional order. For the existence of positive solutions; sufficient conditions will be considered in the study of different classes of boundary value problems associated with differential equations of fractional order in this thesis. The approach is to transform the research of existence (under suitable conditions) of these positive solutions into the research of the existence of fixed points of suitable operators, by the use of the Green function and by applying different nonlinear alternatives in Banach spaces, to show that the existence of fixed points of these operators are exactly the solutions to our problems. This method is based on some well known fixed point theorems such as, Krasnosel'skii fixed point theorem, the theory of fixed point index on the cones and nonlinear Leray-Schauder alternative.

This thesis consists of an introduction and six chapters. The first chapter will be devoted to the basics of fractional calculus, historical background and three approaches (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo) of derivative generalization concepts will be considered, and the various theorems of fixed points used in this thesis. In the following chapters we present our contributions in this thesis. The results of these chapters vary from one to other upon the assumptions on the nonlinear term of the differential equation of the problem studied.

Key words : Fractional derivatives, FBVPs, cône, positive solutions, Green function, Banach spaces, fixed point theorem of Krasnosel'skii, fixed point index theory, Leray-Schauder nonlinear alternative theorem,

AMS Subject Classification : 26A33; 34B16; 34B18; 34B27.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Préliminaires	5
1.1 Critère de compacité	5
1.1.1 Opérateurs compacts	5
1.1.2 Critère de compacité dans $C([a, b]; \mathbb{R})$	6
1.2 Théorèmes du point fixe	7
1.2.1 Les cônes	7
1.2.2 Théorie de l'indice du point fixe	7
1.2.3 Théorème et alternative de Leray Schauder	8
1.2.4 Théorèmes du point fixe dans les cônes	9
1.3 Éléments de Calcul Fractionnaire	10
1.3.1 Aperçu historique	10
1.3.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	11
1.3.3 Dérivée fractionnaire	15
2 Solutions positives d'une EDF non linéaire ([53])	20
2.1 Introduction	20
2.2 Préliminaires	22
2.3 Résultats principaux	28
2.4 Exemples illustratifs	32
3 Solutions positives d'une EDF semi-positive ([54])	34
3.1 Introduction	34
3.2 Préliminaires	35
3.3 Résultat principal	41
3.4 Exemple	45
4 Solutions positives d'une EDF singulière et semi-positive ([55])	47
4.1 Introduction	47
4.2 Préliminaires	49
4.3 Résultat principal	55
4.4 Exemple	59

5	Solutions positives d'une EDF dans domaine non borné ([18])	60
5.1	Introduction	60
5.2	Préliminaires	61
5.3	Résultats principaux	66
5.4	Exemples	68
6	Solutions positives d'une EDF avec des conditions aux limites intégrales ([19])	70
6.1	Introduction	70
6.2	Préliminaires	70
6.3	Résultats principaux	73
6.4	Exemple	76
7	Solutions positives d'un Système de N-EDF avec des conditions aux limites intégrales ([20])	77
7.1	Introduction	77
7.2	Préliminaires	77
7.3	Résultats principaux	80
	Conclusion et perspectives	85

Introduction générale

L'objet de cette thèse est d'étudier l'existence et la multiplicité des solutions positives pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire "EDF" associées à différentes conditions aux limites et posées sur des intervalles bornés ou non bornés.

L'approche utilisée est de ramener la recherche de l'existence (sous des conditions convenables) de ces solutions à la recherche de l'existence des points fixes d'opérateurs appropriés en appliquant différentes alternatives non linéaires dans les espaces de Banach pour montrer l'existence des points fixes de ces opérateurs qui sont les solutions de nos problèmes. Cette méthode est basée sur des célèbres théorèmes du point fixe.

Les problèmes aux limites associés aux équations différentielles d'ordre fractionnaire jouent un rôle important dans certaines applications physiques telles que : le contrôle, l'élasticité non linéaire, les problèmes de réaction-diffusion, la mécanique non-Newtonienne, milieux poreux, électrochimie,.... Il a été prouvé que dans de nombreux cas, ces modèles fournissent des résultats plus appropriés que les modèles analogues avec des dérivées entières. En conséquence, l'étude des problèmes aux limites associés aux équations différentielles d'ordre fractionnaire gagne beaucoup d'importance et d'attention. Pour plus de détails, on peut voir les références ([1, 3 – 7, 9 – 16]).

Cette thèse est organisée comme suit :

Le premier chapitre sera consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire, un rappel historique et trois approches (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo) à la généralisation des notions de dérivation seront ensuite considérées, ainsi que les différents théorèmes de points fixes utilisés dans ce travail.

Dans les chapitres qui suivent nous présentons notre contribution dans cette thèse. Les résultats de ces chapitres varient selon les hypothèses portant sur le terme non linéaire de l'équation différentielle du problème étudié.

Le deuxième chapitre intitulé "Solutions positives d'une EDF non linéaire" concerne l'existence ou la non-existence de solutions positives pour le problème aux limites non linéaire suivant :

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} u + a(t)f(u(t)) = 0, & 2 < \alpha \leq 3, 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = 0, u'(1) - \mu u'(\eta) = \lambda, \end{cases} \quad (1)$$

où D_{0+}^{α} est la dérivation standard de Riemann-Liouville d'ordre α , $\eta \in [0, 1[$, $\mu \in \left[0, \frac{1}{\eta^{\alpha-2}}\right[$ sont des constantes arbitraires et $\lambda \in [0, \infty[$ est un paramètre.

Sous les hypothèses

(C1) $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ est continue ;

(C2) $a :]0, 1[\rightarrow [0, \infty[$ est continue.

nous montrons que le problème aux limites fractionnaire (1) possède au moins une solution positive ou ne possède aucune solution positive selon les cas traités. Les résultats de ce chapitre sont basé sur le théorème de point fixe de Guo-Krasnosel'skii (Théorème 1.2.5). Finalement, on donnera deux exemples pour voir l'utilité du nos résultats

Le troisième chapitre intitulé "Solutions positives d'une EDF semi-positive" concerne l'étude de l'existence de solutions positives du problème aux limites non linéaire suivant :

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} u + f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1, & 2 < \alpha \leq 3, \\ u(0) = u'(0) = 0, & u'(1) = \mu u'(\eta), \end{cases} \quad (2)$$

où D_{0+}^{α} est la dérivation standard de Riemann-Liouville d'ordre α , $\eta \in [0, 1[$, $\mu \in \left[0, \frac{1}{\eta^{\alpha-2}}\right[$ sont des constantes arbitraires et $f : [0, 1] \times [0, +\infty[\rightarrow]-\infty, +\infty[$ est une fonction continue de signe arbitraire.

Sous les hypothèses suivantes :

(H1) $f : [0, 1] \times [0, \infty[\rightarrow]-\infty, +\infty[$ est de type \mathbb{L}^1 -Carathéodory.

(H2) Il existe une fonction $M(t) \in \mathbb{L}^1(]0, 1[)$, $M(t) > 0$ presque tout., $t \in]0, 1[$, telle que pour presque tout., $t \in [0, 1]$, on a

$$f(t, u) \geq -M(t), u \geq 0.$$

nous arrivons à prouver, en imposant des conditions de croissance sur le terme non linéaire f , que le problème (2) a au moins deux solutions positives. Le principal outil utilisé dans ce chapitre est la théorie de l'indice du point fixe (Théorème 1.2.4). A la fin nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats.

Le quatrième chapitre intitulé "Solutions positives d'une EDF singulière et semi-positive", sera consacré à l'existence des solutions positives pour le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} u + f(t, u(t)) + a(t) = 0, & 0 < t < 1, & 2 < \alpha \leq 3, \\ u(0) = u'(0) = 0, & u'(1) - \mu u'(\eta) = \lambda, \end{cases} \quad (3)$$

où D_{0+}^{α} est la dérivation standard de Riemann-Liouville d'ordre α , $\eta \in [0, 1[$, $\mu \in \left[0, \frac{1}{\eta^{\alpha-2}}\right[$ sont des constantes arbitraires et $\lambda \in [0, +\infty[$ est un paramètre, le terme non linéaire $f :]0, 1[\times [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est continu et peut être singulier au points $t = 0$, $t = 1$ et $a :]0, 1[\rightarrow]-\infty, +\infty[$ est Lebesgue integrable et peut avoir des singularités.

Sous les deux hypothèses suivantes

(H1). Pour tout $t \in]0, 1[$, $f(t, 1) > 0$, il existe des constantes $m_1 \geq m_2 > 1$ telles que, pour tout $t \in]0, 1[$, $u \in [0, +\infty[$,

$$c^{m_1} f(t, u) \leq f(t, cu) \leq c^{m_2} f(t, u), \quad \forall c \in [0, 1].$$

(H2). Il existe $\rho > 0$, tel que

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} a_-(s) ds = \rho > 0,$$

et

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} [f(s, 1) + a_+(s)] ds < \frac{\rho}{\left(\frac{2\rho}{(1-\mu)\Gamma(\alpha)} + 1\right)^{m_1} + 1},$$

où,

$$a_+(t) = \max\{a(t), 0\}, a_-(t) = \max\{-a(t), 0\},$$

et en utilisant le théorème de l'indice du point fixe (Théorème 1.2.4), on démontre l'existence d'une seule constante $\lambda^* > 0$ telle que pour tout $\lambda \in]0, \lambda^*[$, le problème (4.1)-(4.2) possède au moins une solution positive. Finalement, on donnera un exemple pour voir l'utilité de notre résultat.

Dans le cinquième chapitre intitulé "Solutions positives d'une EDF dans domaine non borné", on s'intéresse à l'existence des solutions positives pour le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D_{0+}^\alpha u(t) + f(t, u(t)) = 0, t \in J = [0, +\infty[, \\ u(0) = u'(0) = 0, D_{0+}^{\alpha-1} u(\infty) = \int_0^\infty \varphi(s) u(s) ds, \end{cases} \quad (4)$$

où D_{0+}^α , $D_{0+}^{\alpha-1}$ sont les dérivées fractionnaire de type Riemann-Liouville d'ordre α et $\alpha-1$ respectivement, $2 < \alpha \leq 3$, $D_{0+}^{\alpha-1} u(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} D_{0+}^{\alpha-1} u(t)$ et $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard.

Sous les deux hypothèses suivantes

(H₁). Pour tout $t \in J$ supposons que

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1} \varphi(t) dt = \mu < +\infty, \quad \mu \in]0, \Gamma(\alpha)[$$

(H₂). Il existe deux fonctions positives $a(t)$ et $b(t)$ définies sur $[0, +\infty[$ et une constante $\rho > 0$ telle que

$$|f(t, u(t))| \leq a(t) + b(t) |u(t)|^\rho$$

avec

$$\int_0^{+\infty} a(t) dt = a < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} (1+t^{\alpha-1})^\rho b(t) dt = b < +\infty.$$

Le fait que le problème (4) est posé sur un intervalle non borné a imposé un cadre de travail spécifique. En utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder (Théorème 1.2.3) combinée avec le critère de compacité de Corduneanu (Lemme 1.1.1). nous démontrons trois résultats d'existence pour les solutions positives du problème (4). Finalement, on donnera un exemple pour voir l'utilité de notre résultat.

Dans le sixième chapitre intitulé "Solutions positives d'une EDF avec des conditions aux limites intégrales", nous étudions l'existence de solutions positives pour le problème aux limites fractionnaire à trois points suivant :

$$\begin{cases} D_{0+}^\alpha u(t) + \lambda f(t, u(t)) = 0, 0 < t < 1, 2 < \alpha \leq 3, \\ u(0) = u'(0) = 0, u'(1) - \mu u'(\eta) = \int_0^1 g(s) u'(s) ds, \end{cases} \quad (5)$$

où, D_{0+}^{α} est la dérivée fractionnaire de type Riemann-Liouville d'ordre α , $0 < \mu, \eta < 1$, sous les conditions suivantes :

1. $f : [0, 1] \times [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction continue.
- 2.

$$\int_0^1 s^{\alpha-2} g(s) ds < +\infty \text{ et } d = 1 - \mu\eta^{\alpha-2} - \int_0^1 s^{\alpha-2} g(s) ds > 0.$$

et en utilisant le principe de compression et d'expansion de type norme d'un cône d'un espace de Banach (Théorème 1.2.5), nous démontrons un résultat d'existence pour chacun des cas où la fonction f est sous-linéaire et le cas où f est sur-linéaire. Finalement, on donnera un exemple pour voir l'utilité de notre résultat.

Dans le dernier chapitre on concentre notre attention à étudier l'existence de solutions positives pour un système de N -équations différentielles fractionnaires de type Riemann-Liouville avec des conditions aux bords sous forme intégrale de la forme suivante :

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha_i} u_i(t) + \lambda_i a_i(t) f_i(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) = 0, 0 < t < 1, \\ u_i(0) = u_i'(0) = 0, u_i'(1) - \mu_i u_i'(\eta_i) = \int_0^1 \phi_i(t) u_i'(t) dt, \end{cases} \quad (6)$$

où, pour chaque $i = 1, \dots, n$, $D_{0+}^{\alpha_i}$, représente la dérivée d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha_i \in]2, 3]$, μ_i, η_i sont tels que $\mu_i > 0$, $\eta_i \in (0, 1)$, $f_i \in C(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+)$, $a_i \in C([0, 1], \mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et les λ_i sont des paramètres positifs.

Sous les conditions suivantes :

$\phi_i :]0, 1[\rightarrow]0, +\infty[$ sont des fonctions continues, et

$$\rho_i = \int_0^1 s^{\alpha_i-2} \phi_i(s) ds < +\infty, i = 1, \dots, n.$$

ainsi que

$$d_i = 1 - \mu_i \eta_i^{\alpha_i-2} - \int_0^1 s^{\alpha_i-2} \phi_i(s) ds > 0, i = 1, \dots, n.$$

Le théorème du point fixe de Krasnosel'skii sur les cônes (Théorème 1.2.5) sera utilisé dans une première étape pour montrer un premier résultat d'existence de solutions positives de (6).

Dans une seconde étape, la version vectorielle du théorème de point fixe de Krasnosel'skii (Théorème 1.2.8) est appliquée au problème (6) afin d'obtenir de nouveaux résultats d'existence de solutions positives de (6) ainsi que la localisation de leurs composantes.

Préliminaires

Ce chapitre est introductif. Il a pour objectif de présenter la notion du calcul fractionnaire, ses principales propriétés et de donner certains résultats sur ce type de calcul. On présente, en outre, quelques théorèmes de points fixes utilisés dans cette thèse

Pour plus de détails concernant les résultats cités dans ce chapitre, nous nous référons à l'ouvrage classique d'Oldham et Spanier [49] et à d'autres auteurs dont nous ne citons que ([39]-[50]-[48]).

1.1 Critère de compacité

Dans cette section, nous rappelons quelques éléments de base liés à la théorie de compacité. Pour cela, soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et $\Omega \subset E$ une partie non vide.

1.1.1 Opérateurs compacts

Définition 1.1.1. Une application $f : \Omega \rightarrow F$ est dite compacte si et seulement si

1. f est continue
2. $f(\overline{\Omega})$ est un compact.

D'autre part, on vérifie sans peine que tout opérateur linéaire borné, envoie un ensemble relativement compact dans un ensemble relativement compact. Donc la propriété de compacité est généralement plus forte que la continuité ; par exemple, l'opérateur identité défini sur un espace de dimension infinie, n'est pas compact, puisqu'il envoie la boule unité dans elle-même, or celle-ci n'est pas compacte.

Définition 1.1.2. Une application $f : \Omega \rightarrow F$ est dite complètement continue si et seulement si

1. f est continue
2. pour tout $B \subset \Omega$ borné $\Rightarrow \overline{f(B)}$ est compact.

Remarque 1.1.1. Si f est linéaire, alors f complètement continue $\Leftrightarrow f$ compacte.

1.1.2 Critère de compacité dans $C([a, b]; \mathbb{R})$

Définition 1.1.3. On dit qu'une fonction d'un sous-ensemble $M \subset C([a, b]; \mathbb{R})$ est uniformément bornée, s'il existe une constante $c > 0$ telle que $|x(t)| \leq c$ pour tout x de M et quel soit $t \in [a, b]$.

Définition 1.1.4. On dit qu'une fonction d'un sous-ensemble $M \subset C([a, b]; \mathbb{R})$ est équicontinue, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ dépendant uniquement de ε , tel que pour tous $t_1, t_2 \in [a, b]$ satisfaisant à l'inégalité $|t_1 - t_2| < \delta$ et pour toute fonction x de M l'on ait $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$.

Le Théorème suivant est généralement utilisé pour prouver la compacité d'un opérateur T .

Théorème 1.1.1. (Théorème d'Ascoli-Arzelà). Soit $M \subset C([a, b]; \mathbb{R})$, M est relativement compact (i.e. \overline{M} est compact) si et seulement si :

1. M est uniformément borné.
2. M est équicontinu.

Remarque 1.1.2. Le théorème d'Arzela-Ascoli ne peut être appliqué à l'espace de Banach $C([a, +\infty[; \mathbb{R})$, ceci étant dû au fait que l'intervalle $[0, +\infty[$ n'est pas compact. Le critère de compacité de Corduneanu nous sera utile pour contourner ce problème.

Soit l'espace de Banach suivant

$$C_l([0, +\infty[, \mathbb{R}) = \left\{ y \in C([0, +\infty[, \mathbb{R}) : \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) \text{ existe} \right\}$$

Théorème 1.1.2. ([21]) Soit $M \subset C_l([0, +\infty[, \mathbb{R})$. Alors M est relativement compact dans $C_l([0, +\infty[, \mathbb{R})$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (a). M est uniformément bornée dans $C_l([0, +\infty[, \mathbb{R})$
- (b). Les fonctions appartenant à M sont presque équicontinues sur $[0, +\infty[$; i.e., équicontinues sur chaque intervalle compact de $[0, +\infty[$.
- (c). Les fonctions de M sont équiconvergentes; i.e., Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $T(\varepsilon) > 0$ telle que

$$|x(t) - l| < \varepsilon$$

pour tout $t \geq T(\varepsilon)$ et $x \in M$.

A partir du théorème ci-dessus nous avons déduit le résultat suivant (voir, par exemple, [9]).

Soit l'espace de Banach suivant

$$E = \left\{ u \in C([0, +\infty[, \mathbb{R}) : \sup_{t \in J} \frac{|u(t)|}{1 + t^{\alpha-1}} < +\infty \right\}, \quad 2 < \alpha \leq 3$$

Lemme 1.1.1. Soit $M \subset E$ un ensemble borné. Alors M est relativement compact dans E si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout $u \in M$, $t \rightarrow \frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}$ est équicontinu sur tout intervalle compact $[0, +\infty[$.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $T = T(\varepsilon) > 0$ telle que

$$\left| \frac{u(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}} - \frac{u(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}} \right| < \varepsilon$$

pour tout $t_1, t_2 \geq T$ et $u(t) \in M$.

1.2 Théorèmes du point fixe

Dans cette section, nous rappelons quelques éléments de base liés à la théorie du point fixe dans les cônes qui seront les outils principaux pour l'obtention de tous nos résultats d'existence ou de multiplicité.

1.2.1 Les cônes

Définition 1.2.1. *Un ensemble non-vide convexe fermé $K \subset E$ est dit cône de E s'il vérifie les conditions suivantes :*

1. Pour tout $x \in K$ et $x \neq 0$, alors $\sigma x \in K$ pour $\sigma \geq 0$.
2. $x \in K$ et $(-x) \in K$ alors $x = 0$.

Notons que on a $K \cap (-K) = \{0\}$.

Remarque 1.2.1. 1. *Chaque cône K induit une relation d'ordre partiel dans E noté " \leq ", définie par $x \leq y$ ou $y \geq x$ si et seulement si $y - x \in K$.*

2. *Les éléments de K est appelés positifs.*
3. *L'espace de Banach E est dit espace ordonné par le cône K .*

1.2.2 Théorie de l'indice du point fixe

Introduction

Un des outils les plus importants de l'analyse fonctionnelle, non linéaire est le degré topologique de Leray-Schauder pour le champs des vecteurs compacts, définis sur la fermeture des sous-ensembles ouverts bornés dans les espaces de Banach. Cependant, en relation avec les applications non linéaires dans les espace de Banach ordonnés, il est naturel de considérer aussi les applications qui sont définies sur les sous-ensembles ouverts d'un cône positif (ces sous-ensembles sont ouverts par rapport à la topologie induite de l'espace tout entier). Si le cône positif n'a pas de points intérieurs (la plupart des cônes de dimension infinie intéressants-du point de vue des applications-ont ce défaut), le degré de Leray-Schauder n'est pas immédiatement applicable.

Mais à cause du fait que le cône positif est un rétracte de l'espace de Banach qui le contient, d'après le corollaire du théorème d'extension de Dugundji car, il est fermé convexe, il est possible de définir "L'indice du point fixe" pour les applications compactes, définies

dans le cône positif. Cet indice du point fixe est une extension de la notion du degré de Leray-Schauder.

Dans ce qui suit, on donne les propriétés, les plus importantes de cet indice ; on indique en particulier que l'indice du point fixe peut être dérivé du degré bien connu de Leray-Schauder.

Définition 1.2.2. Soit E un espace de Banach. On dit que $A \subset E$ est un rétracte de E s'il existe une application continue $r : E \rightarrow A$ telle que $r(x) = x, \forall x \in A$.

Définition 1.2.3. Toute partie convexe fermée de E est un rétracte de E ; en particulier tout cône $K \subset E$ est un rétracte de E .

Axiomes de l'indice du point fixe

Théorème 1.2.1. (*Définition axiomatique*) ([32])

Soit A un rétracte de l'espace de Banach E . Pour chaque sous-ensemble ouvert Ω de A et chaque application $f : \overline{\Omega} \rightarrow A$ compacte sans point fixe sur $\partial\Omega$, il existe un nombre entier $i(f, \Omega, A)$ satisfaisant les conditions suivantes :

- (i). **Normalisation.** $i(f, \Omega, A) = 1$ si $f(x) = y_0 = \text{cte} \in \Omega, \forall x \in \overline{\Omega}$.
- (ii). **Additivité.** Pour toute paire de sous-ensembles ouverts disjoints Ω_1, Ω_2 de Ω tel que f n'admet pas de point fixe sur $\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, on a

$$i(f, \Omega, A) = i(f, \Omega_1, A) + i(f, \Omega_2, A)$$

où $i(f, \Omega_k, A) = i(f|_{\overline{\Omega_k}}, \Omega_k, A), k = 1, 2$.

- (iii). **Invariance homotopie.** L'indice $i(h(x, t), \Omega, A)$ est indépendant du paramètre $t, 0 \leq t \leq 1$ où $h : \overline{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow A$ est une application compacte et $h(x, t) \neq x$ pour tout $x \in \partial\Omega$ et $0 \leq t \leq 1$.

Plus généralement, on peut remplacer l'intervalle $[0, 1]$ par un intervalle fermé de \mathbb{R} .

- (iv). **Permanence.** Si Λ est une rétractée de A et $f(\overline{\Omega}) \subset \Lambda$, alors

$$i(f, \Omega, A) = i(f, \Omega \cap \Lambda, \Lambda)$$

où $i(f, \Omega \cap \Lambda, \Lambda) = i(f|_{\overline{\Omega \cap \Lambda}}, \Omega \cap \Lambda, \Lambda)$.

Maintenant nous allons présenter les théorèmes de points fixe que nous allons utiliser tout au long de cette thèse.

1.2.3 Théorème et alternative de Leray Schauder

Notre première résultat de point fixe est le théorème de point fixe de Schauder, ce théorème fut démontré pour le cas des espaces de Banach en 1930 par Juliusz Schauder.

Théorème 1.2.2. ([41]) Soit \mathcal{C} un sous-ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach E et $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ une application compacte. Alors f admet au moins un point fixe dans \mathcal{C} .

Corollaire 1.2.1. *Soit \mathcal{C} un sous ensemble convexe, compact, non vide d'un espace de Banach E et $T : K \rightarrow K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.*

Théorème 1.2.3. (*[41]*) *Soient E un espace de Banach et $\mathcal{C} \subset E$ un convexe fermé. On suppose qu'il existe un ouvert U dans \mathcal{C} tel que $0 \in U$, $T : \bar{U} \rightarrow \mathcal{C}$ un opérateur complètement continu.*

On a l'alternative suivant : ou bien

1. *T admet un point fixe ; ou bien*
2. *il existe $u \in \partial U$; $u = \lambda T(u)$ pour un certain $\lambda \in]0, 1[$.*

1.2.4 Théorèmes du point fixe dans les cônes

Théorème 1.2.4. (*[32]*) *Soient $K \subset E$ un cône et soit $\Omega_r = \{u \in K : \|u\| \leq r\}$. Supposons que $T : \Omega_r \rightarrow K$ est un opérateur complètement continu satisfaisant $Tu \neq u, \forall u \in \partial \Omega_r$.*

Alors

- (a). *Si $\|Tu\| \leq \|u\|, \forall u \in \partial \Omega_r$, alors l'indice de point fixe $i(T, \Omega_r, K) = 1$,*
- (b). *Si $\|Tu\| \geq \|u\|, \forall u \in \partial \Omega_r$, alors l'indice de point fixe $i(T, \Omega_r, K) = 0$.*

Théorèmes de point fixe de Krasnosel'skii

1. Version de type norme

La version de type norme du théorème d'expansion et de compression d'un cône de Krasnosel'skii est obtenue par Guo (voir [32],[41]).

Théorème 1.2.5. (*Guo-Krasnosel'skii*) *Soit E un espace de Banach et soit $K \subset E$ un cône de E . Supposons que Ω_1 et Ω_2 sont des ensembles ouverts de E avec $0 \in \Omega_1$ et $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Soit $T : K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ un opérateur complètement continu. En plus on supposera que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée*

- (a). *$\|Tu\| \leq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial \Omega_1$ et $\|Tu\| \geq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial \Omega_2$,*
- (b). *$\|Tu\| \leq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial \Omega_2$ et $\|Tu\| \geq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial \Omega_1$.*

Alors T admet au moins un point fixe dans $K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$.

2. Version Scalaire

Nous rappelons ici deux versions du théorème de point fixe de Krasnosel'skii dans un cône ([32], [41]).

Théorème 1.2.6. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, $K \subset E$ un cône, $0 < r < R$ deux nombres réels et $K_{r,R} = \{u \in K : r \leq \|u\| \leq R\}$. Soit $T : K_{r,R} \rightarrow K$ une application compacte telle que l'une des conditions suivantes soit vérifiée*

- (a). *$\|Tu\| \leq \|u\|$ si $\|u\| = r$ et $\|Tu\| \geq \|u\|$ si $\|u\| = R$;*
- (b). *$\|Tu\| \geq \|u\|$ si $\|u\| = r$ et $\|Tu\| \leq \|u\|$ si $\|u\| = R$.*

Alors T possède un point fixe u dans $K_{r,R}$.

Théorème 1.2.7. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, $K \subset E$ un cône, $0 < r < R$ deux nombres réels et $K_{r,R} = \{u \in K : r \leq \|u\| \leq R\}$. Soit $T : K_{r,R} \rightarrow K$ une application compacte telle que l'une des conditions suivantes soit vérifiée

- (a). $Tu \leq u$ si $\|u\| = r$ et $Tu \geq u$ si $\|u\| = R$;
- (b). $Tu \geq u$ si $\|u\| = r$ et $Tu \leq u$ si $\|u\| = R$.

Alors T possède un point fixe u dans $K_{r,R}$.

3. Version vectorielle

Maintenant nous allons rappeler la version vectorielle du théorème de point fixe de Krasnosel'skii dans un cône ([26]-[51]).

Avant cela, nous allons introduire quelques notations. Considérons n cônes K_i , ($i = 1, \dots, n$) de E et leur cône produit correspondant $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$ de E^n .

Pour $r, R \in \mathbb{R}_+^n$, $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)$, on écrit $0 < r < R$ si $0 < r_i < R_i$ ($i = 1, \dots, n$), et on a les notations :

$$(K_i)_{r_i, R_i} = \{u_i \in K_i : r_i \leq \|u_i\| \leq R_i\}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$K_{r,R} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in K : r_i \leq \|u_i\| \leq R_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Clairement, $K_{r,R} = (K_1)_{r_1, R_1} \times (K_2)_{r_2, R_2} \times \dots \times (K_n)_{r_n, R_n}$

Théorème 1.2.8. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, $K_1, K_2, \dots, K_n \subset E$ n cônes, $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$ et $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, $R = (R_1, R_2, \dots, R_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ avec $0 < r < R$. Soit $T = (T_1, T_2, \dots, T_n) : K_{r,R} \rightarrow K$ une application compacte. Supposons que pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, l'une des conditions suivantes est vérifiée

- (a). $T_i u \not\leq u_i$ si $\|u_i\| = r_i$ et $T_i u_i \not\leq \|u_i\|$ si $\|u_i\| = R_i$;
- (b). $T_i u \not\leq u_i$ si $\|u_i\| = r_i$ et $T_i u_i \not\leq \|u_i\|$ si $\|u_i\| = R_i$.

Alors T possède un point fixe $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in K_{r,R}$.

1.3 Éléments de Calcul Fractionnaire

1.3.1 Aperçu historique

Dans cette section, on introduit des notations, définitions et des lemmes concernant le calcul fractionnaire. Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour une large gamme de fonctions.

Le concept de calcul fractionnaire découle historiquement d'une question soulevée dans l'année 1695 par Marquis de L'Hôpital (1661-1704) à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Lorsque Leibniz a répondu par une lettre à L'Hôpital, il a désigné la $n^{\text{ème}}$ dérivée d'une fonction f par le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), L'Hôpital a répondu alors, "Que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?" Dans sa réponse, datée du 30 Septembre 1695, Leibniz écrit à L'Hôpital comme suit :

"... C'est un paradoxe apparent, à partir duquel un jour, des conséquences utiles seront tirées...". Plusieurs auteurs considèrent cette lettre datée en 30 septembre 1695, comme heure de naissance du calcul fractionnaire. Donc le calcul fractionnaire est un sujet mathématique datant de plus de 300 ans.

Par la suite plusieurs mathématiciens célèbres comme P. S. Laplace (1812), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), A. K. Grunwald (1867-1872), A. V. Letnikov (1868-1872), H. Weyl (1917) et M. Riesz (1949)...ont contribué aux développements de la théorie de base du calcul fractionnaire. Pour plus de détails sur les aspects historiques de la théorie du calcul fractionnaire le lecteur intéressé est invité à consulter les ouvrages [49, 48]. Où un exposé historique détaillé est donné en introduction de K.B. Oldham et J. Spanier [49], une synthèse théorique a été proposée dans le livre de K.S. Miller et B. Ross [48], où certains aspects algébriques des équations différentielles d'ordre fractionnaire sont complètement développés.

Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée; de plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche intéressants restent dans l'ombre. L'incompatibilité des définitions distinctes fut résolue par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière. Ce n'est que récemment (2ème partie du XXème siècle) que son application, notamment en Sciences pour l'Ingénieur, s'avère significative.

Pendant ces trois dernières décennies, le calcul fractionnaire a connu le plus d'intérêt et les champs d'applications des dérivées fractionnaires se sont le plus diversifiés.

J. Liouville est le premier à étudier en détail le calcul fractionnaire, comme semblent l'attester les huit articles qu'il publia entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann propose une approche qui s'est avérée celle de Liouville essentiellement. Depuis, cette théorie porte le nom de Riemann-Liouville.

La théorie du Calcul Fractionnaire connaît actuellement une grande popularité parmi les chercheurs dans les sciences fondamentales et en ingénierie,

Comme il est bien connu, l'extension de la notion de dérivée aux ordres non-entiers ne se fait pas de manière unique. Par conséquent, il en existe plusieurs variantes. Dans ce cadre et pour notre support bibliographique nous nous sommes appuyés principalement sur l'ouvrage classique d'Oldham et Spanier [49] et les ouvrages de Samko, Kilbas et Marichev ([56], 1993), celui de Podlubny ([50], 1996) ainsi que Kilbas, Srivastava et Trujillo ([40], 2006).

1.3.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire est inspirée de la formule de Cauchy qui donne les primitives successives (n fois) d'une fonction continue qui est donnée par l'équation :

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds; t \geq a \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

En généralisant cette formule à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura la définition suivante :

Définition 1.3.1. *L'intégrale fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $-\infty < a < b < +\infty$ est formellement définie par :*

$$I_{a^+}^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad a < t < b. \quad (1.1)$$

Nous verrons que toutes les définitions que nous avons données sont des définitions "à gauche", il existe des versions symétriques (à droite) :

$$I_{b^-}^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad a < t < b.$$

Celles-ci sont rarement utilisées car elles dépendent du futur des fonctions,

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$. Afin d'alléger les notations, nous noterons dans tout ce qui suit $I_{a^+}^{(\alpha)} = I_a^\alpha$.

Exemple 1.3.1. *Considérons la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ où $\beta > -1$. Alors*

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^\beta ds.$$

A l'aide de changement de variable $s = a + (t-a)\tau$, on trouve :

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\beta+\alpha}.$$

Pour $\beta = 0$

$$(I_a^\alpha 1)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha$$

Pour $\alpha = 1$ et $\beta > -1$

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\beta+1} (t-a)^{\beta+1}.$$

Pour $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$ et $a = 0$

$$I_0^{0.5}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} t^{1.5} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2.5)}.$$

Propriétés principales des intégrales fractionnaires

Nous avons les propriétés suivantes :

1. Pour que l'intégrale non entière $I_{a^+}^{(\alpha)} f(t)$ d'une fonction temporelle f existe, il suffit que f soit continue par morceaux sur $]t_0, +\infty[$ et intégrable sur $[t_0, t]$ pour tout $t > t_0$.
2. L'opérateur intégral I_a^α est linéaire.

Lemme 1.3.1. *Soit $f \in C([a, b])$. Pour α, β complexes tels que $\text{Re}(\alpha) > 0$ et $\text{Re}(\beta) > 0$ on a*

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f$$

et pour $\operatorname{Re}(\alpha) > 1$ on a

$$\frac{d}{dx} I_a^\alpha f = I_a^{\alpha-1} f.$$

Et pour $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (I_a^\alpha f)(x) = f(x).$$

Preuve. En effet,

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (I_a^\beta f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\int_a^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \left(\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds \right) d\tau \end{aligned}$$

On pose $s = \tau + (t-s)u$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du \\ &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (I_a^\beta f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) d\tau \\ &= I_a^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

La deuxième identité se justifie par les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et l'utilisation de l'équation fondamentale de la fonction Gamma d'Euler : $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$.

Pour la dernière, soit $f \in C([a, b])$ alors

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

et grâce à l'exemple $(I_a^\alpha 1)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha$, on a

$$(I_a^\alpha 1)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha \rightarrow_{\alpha \rightarrow 0^+} 1$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \left| I_a^\alpha f(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha f(t) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(x) ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s) - f(x)| ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-s)^{\alpha-1} |f(s) - f(x)| ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s) - f(x)| ds
\end{aligned}$$

La continuité de f sur $[a, b[$ implique que

$$\forall t, s \in [a, b[, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |t-s| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(x)| < \varepsilon$$

ce qui donne

$$\int_{t-\delta}^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s) - f(x)| ds \leq \varepsilon \int_{t-\delta}^t (t-s)^{\alpha-1} ds = \frac{\varepsilon \delta^\alpha}{\alpha}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
& \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} |f(t) - f(x)| dt \leq \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} (|f(t)| + |f(x)|) dx \\
&\leq \sup_{\xi \in [a, x]} |f(\xi)| \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} dt, \forall x \in [a, b[\\
&= 2M \left(\frac{(x-a)^\alpha}{\alpha} - \frac{\delta^\alpha}{\alpha} \right)
\end{aligned}$$

avec $M = \sup_{\xi \in [a, x]} |f(\xi)|$

d'où

$$\begin{aligned}
& \left| (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(x) \right| \\
&\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} [\varepsilon \delta^\alpha + 2M((x-a)^\alpha - \delta^\alpha)] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [\varepsilon \delta^\alpha + 2M((x-a)^\alpha - \delta^\alpha)].
\end{aligned}$$

En faisant tendre α vers 0^+ , on obtient

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left| (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(x) \right| \leq \varepsilon$$

Donc

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} |(I_a^\alpha f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

D'où

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(x) = f(x).$$

■

1.3.3 Dérivée fractionnaire

Plusieurs approches ont été développées pour donner un sens à $\frac{d^n f}{dx^n}$ lorsque $n \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Dans cette partie on se limite à la présentation de trois approches de dérivations fractionnaires à savoir l'approche de Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville et celle de Caputo, qui sont les plus utilisées.

L'opérateur fractionnaire généralisé sera noté $D^{(\alpha)}$, avec α réel entier ou non entier. Si α est positif, il s'agira d'un opérateur dérivé. Si α est négatif, il s'agira d'un opérateur intégrale.

Dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires, donc on peut exprimer la dérivée d'ordre entier n (si n est positif) et l'intégrale répétée ($-n$) fois (si n est négatif) d'une fonction f par la formule suivante :

$$D^{(n)} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh)$$

$$\text{où } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

La généralisation de cette formule pour α non entier (avec $0 \leq n-1 < \alpha < n$) et comme

$$\begin{aligned} (-1)^k \binom{\alpha}{k} &= \frac{-\alpha(1-\alpha)\dots(k-\alpha-1)}{k!} \\ &= \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)}. \end{aligned}$$

Cette relation peut être généralisée pour donner la définition de Grunwald-Letnikov

$${}^G D_a^{(\alpha)} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(x - kh).$$

Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'une des définitions les plus rencontrées de la dérivée d'ordre fractionnaire est celle de Riemann-Liouville.

Définition 1.3.2. Soit $\alpha \in]n-1, n[$ avec $n \geq 1$. On appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par

$$({}^{RL} D_a^{(\alpha)} f)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_a^{n-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds.$$

Exemple 1.3.2. Reprenons l'exemple de la fonction $f(x) = (x - a)^\beta$. Alors

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{(\alpha)}(x - a)^\beta &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)}(x - a)^{\beta + n - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} \frac{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)}(x - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)}(x - a)^{\beta - \alpha} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la formule

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x - a)^\lambda = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1)(x - a)^{\lambda - n} = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + 1 - n)}(x - a)^{\lambda - n}.$$

Pour $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{(1)}(x - a)^\beta &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + n)}(x - a)^{\beta + n - 1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta)}(x - a)^{\beta - 1} \\ &= \beta(x - a)^{\beta - 1} = \frac{d}{dx}(x - a)^\beta. \end{aligned}$$

Si on pose $\beta = 0$ dans l'égalité précédent, on obtient

$${}^{RL}D_a^{(\alpha)}(1) = \frac{(x - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}.$$

C'est -à-dire que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est plus nulle! est en général infinie pour $x = a$.

Dans ce qui suit nous rappelons quelques résultats essentiels utiles pour notre étude.

Lemme 1.3.2. Soit $\alpha \in]n - 1, n[$ avec $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et f une fonction vérifiant ${}^{RL}D_a^{(\alpha)}f = 0$. Alors

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j + 1)}{\Gamma(j + 1 + \alpha - n)}(x - a)^{j + \alpha - n}$$

où les c_j sont des constantes quelconques.

Preuve. Partons de ${}^{RL}D_a^{(\alpha)}f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha}f)(x) = 0$, alors on a d'abord

$$I_a^{n-\alpha}f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (x - a)^j$$

et par application de I_a^α on obtient

$$I_a^n f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j + 1)}{\Gamma(j + 1 + \alpha)}(x - a)^{j + \alpha}$$

ensuite par dérivation classique le resultat. ■

Lemme 1.3.3. *L'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville ${}^{RL}D_a^{(\alpha)}$ possède les propriétés suivantes :*

1. ${}^{RL}D_a^{(\alpha)}$ est un opérateur linéaire.
2. En général ${}^{RL}D_a^{(\alpha)} \circ {}^{RL}D_a^{(\beta)} \neq {}^{RL}D_a^{(\beta)} \circ {}^{RL}D_a^{(\alpha)}$ et aussi $\neq {}^{RL}D_a^{(\alpha+\beta)}$.
3. $\lim_{\alpha \rightarrow (n-1)^+} {}^{RL}D_a^{(\alpha)} f = f^{(n-1)}$ et $\lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^{RL}D_a^{(\alpha)} f = f^{(n)}$.
4. ${}^{RL}D_a^{(\alpha)} \circ I_a^\alpha = id$.
5. $\left(I_a^\alpha \circ {}^{RL}D_a^{(\alpha)} \right) f(x) = f(x) + \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)}$.

Preuve. Pour la linéarité c'est une simple vérification. Pour le deuxième point un contre exemple suffit (considérer $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ et $f(x) = x$). Montrons la deuxième égalité de la propriété 3. Supposons que f est de classe C^n , alors

$$f(x) = (I_a^n f^{(n)})(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j$$

et donc

$$\begin{aligned} I_a^{n-\alpha} f(x) &= I_a^{n-\alpha} (I_a^n f^{(n)})(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} I_a^{n-\alpha} (x-a)^j \\ &= I_a^{2n-\alpha} (f^{(n)})(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1+n-\alpha)} (x-a)^{j+n-\alpha} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{(\alpha)} f(x) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left[I_a^{2n-\alpha} (f^{(n)})(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1+n-\alpha)} (x-a)^{j+n-\alpha} \right] \\ &= I_a^{n-\alpha} (f^{(n)})(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1-\alpha)} (x-a)^{j-\alpha} \end{aligned}$$

par passage a la limite quand $\alpha \rightarrow (n)^-$ on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow (n)^-} {}^{RL}D_a^{(\alpha)} f(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow n^-} I_a^{n-\alpha} (f^{(n)})(x) + \lim_{\alpha \rightarrow n^-} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1-\alpha)} (x-a)^{j-\alpha} \\ &= f^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Pour la propriété 4 on écrit

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{(\alpha)} \circ I_a^\alpha f(x) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_a^{n-\alpha} (I_a^\alpha f(x)) \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_a^n f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Pour la dernière égalité et d'après la propriété 4, on écrit

$$\left({}^{RL}D_a^{(\alpha)} \circ I_a^\alpha \circ {}^{RL}D_a^{(\alpha)}\right) f = {}^{RL}D_a^{(\alpha)} f$$

donc

$${}^{RL}D_a^{(\alpha)} \left(I_a^\alpha \circ {}^{RL}D_a^{(\alpha)} f - f \right) = 0$$

D'après le lemme précédent on aura

$$I_a^\alpha \circ {}^{RL}D_a^{(\alpha)} f(x) - f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} (x-a)^{j+\alpha-n}$$

D'où

$$I_a^\alpha \circ {}^{RL}D_a^{(\alpha)} f(x) = f(x) + \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} (x-a)^{j+\alpha-n}.$$

En particulier pour $2 < \alpha \leq 3$, ($n = 3$) et $a = 0$; de l'égalité précédente nous obtenons

$$\begin{aligned} I_{0+}^\alpha \circ {}^{RL}D_{0+}^{(\alpha)} f(x) &= f(x) + \sum_{j=0}^2 c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-3)} x^{j+\alpha-3} \\ &= f(x) + c_0 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha-2)} x^{\alpha-3} + c_1 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha-1)} x^{\alpha-2} + c_2 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent la solution d'une équation différentielle fractionnaire de la forme

$$D_{0+}^{(\alpha)} u(x) + y(x) = 0,$$

est donnée par

$$u(x) = -c_1 x^{\alpha-1} - c_2 x^{\alpha-2} - c_3 x^{\alpha-3} - I_{0+}^\alpha y(x),$$

pour certaines constantes arbitraires $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ ■

Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire définie par :

Définition 1.3.3. Soit $\alpha \in]n-1, n[$ avec $n \geq 1$ et $f \in C^n([a, b])$. On appelle dérivée d'ordre α de la fonction f au sens de Caputo la fonction définie par

$${}^C D_a^{(\alpha)} f(x) = \left(I_a^{n-\alpha} f^{(n)} \right) (x).$$

Exemple 1.3.3. Reprenons l'exemple de la fonction $f(x) = (x - a)^\beta$. Alors

$$\begin{aligned}
{}^C D_a^{(\alpha)} (x - a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - s)^{n-\alpha-1} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - n)} (s - a)^{\beta-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(\beta + 1 - n)} \int_a^x (x - s)^{n-\alpha-1} (s - a)^{\beta-n} ds \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} (x - a)^{\beta+n-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} \frac{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (x - a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (x - a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.3.1. La dérivée au sens de Caputo permet de rattraper certaines "anomalies" que nous avons rencontré dans le cas de Riemman-Liouville. En voici la première

$${}^C D_a^{(\alpha)} 1 = 0.$$

i.e, la dérivée de Caputo d'une constante est nulle.

Propriétés principales des dérivées fractionnaires

Les principales propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires sont les suivantes :

1. La définition de la dérivation d'ordre fractionnaire étant basée sur celle d'une intégration d'ordre fractionnaire,
2. Une dérivation d'ordre fractionnaire revêt un caractère global contrairement à une dérivation entière. Il s'avère en effet que la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction $f(t)$ nécessite la connaissance de $f(t)$ sur l'intervalle $[a, t]$, alors que dans le cas entier, seule la connaissance locale de f autour de t est nécessaire. Cette propriété permet d'interpréter les systèmes d'ordre fractionnaire comme des systèmes à mémoire longue, les systèmes entiers étant alors interprétables comme des systèmes à mémoire courte.
3. Pour $\alpha = n$, où n est un nombre entier, l'opération ${}^C D_a^{(\alpha)} f(x)$ produit le même résultat que la dérivation classique d'ordre entier.
4. Pour $\alpha = 0$, l'opérateur est l'opérateur identité, ainsi ${}^C D_a^{(0)} f(x) = f(x)$.

Solutions positives d'une EDF non linéaire ([53])

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence et la non-existence de solutions positives pour le problème aux limites non linéaire suivant :

$$D_{0+}^{\alpha} u + a(t)f(u(t)) = 0, \quad 2 < \alpha \leq 3, \quad 0 < t < 1, \quad (2.1)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \mu u'(\eta) = \lambda, \quad (2.2)$$

où α est un nombre réel, D_{0+}^{α} est la dérivation standard de Riemann-Liouville d'ordre α , $\eta \in]0, 1[$, $\mu \in \left[0, \frac{1}{\eta^{\alpha-2}}\right[$ sont des constantes arbitraires, $\lambda \in [0, \infty[$ est un paramètre positif.

Par solution positive, on entend une fonction u positive sur $]0, 1[$ et satisfaisant (2.1)-(2.2).

Tout au long de ce chapitre, on supposera que les conditions suivantes sont vérifiées :

(C1). $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ est continue ;

(C2). $a :]0, 1[\rightarrow [0, \infty[$ est continue.

Nous montrons, sous certaines conditions convenables sur le terme non-linéaire f , que le problème aux limites fractionnaire (2.1)-(2.2) possède au moins une solution positive ou ne possède aucune solution positive selon les cas traités. Cela sera fait en utilisant le théorème de point fixe de Guo-Krasnosel'skii (Théorème 1.2.5).

L'utilisation de la théorie du point fixe sur les cônes pour l'étude des problèmes aux limites est aussi riche que diverse dans la littérature. En effet, plusieurs auteurs ont utilisé les théorèmes de point fixe pour montrer l'existence de solutions positives pour les problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires, équations aux différences, ainsi que pour certain systèmes dynamiques. Plus particulièrement, Delbosco et Rodino [27] se sont intéressés à l'existence de solutions pour l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire $D_{0+}^{\alpha} u = f(t, u)$, où $0 < \alpha < 1$ et $f : [0, a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $0 < a \leq +\infty$ est une fonction donnée, supposée continue sur $]0, a[\times \mathbb{R}$, et ils ont réussi des résultats d'existence par l'usage du théorème du point fixe de Schauder ainsi que le principe de contraction de Banach. Bai et

Lü [16] ont étudié l'existence et la multiplicité de solutions positives pour le problèmes aux limites suivant :

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} u + f(t, u(t)) = 0, & 1 < \alpha < 2, 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où D_{0+}^{α} est la dérivation standard de Riemann-Liouville d'ordre α . Plus récemment Bai et Qiu [17] se sont intéressés à l'existence de solutions positives pour le problème aux limites de l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} u + f(t, u(t)) = 0, & 2 < \alpha \leq 2, 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(1) = u''(0) = 0, \end{cases}$$

où D_{0+}^{α} est la dérivation fractionnaire de Caputo, et $f :]0, 1] \times [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, avec $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t, \cdot) = +\infty$. Leurs résultats ont été obtenus au moyen du théorème du point fixe de Krasnoselskii et par une variante de l'alternative non-linéaire de Leray-Schauder dans un cône.

Lü Zhang [47] quant à lui à considéré le problème d'existence de solution positive pour le problème fractionnaire suivant, faisant intervenir la dérivation de Caputo :

$$\begin{cases} D_t^{\alpha} u + f(t, u(t)) = 0, & 1 < \alpha < 2, 0 < t < 1, \\ u(0) = \nu \neq 0, \quad u(1) = \rho \neq 0. \end{cases}$$

Dans un autre papier, et par l'utilisation de la théorie du point fixe sur les cônes, Zhang [67] a étudié l'existence et la multiplicité de solutions positives pour le problème aux limites non-linéaire fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D_t^{\alpha} u + f(t, u(t)) = 0, & 1 < \alpha < 2, 0 < t < 1, \\ u(0) + u'(0) = 0, \quad u(1) + u'(1) = 0, \end{cases}$$

où D_{0+}^{α} désigne la dérivation fractionnaire de Caputo. Benchohra, Henderson, Ntoyas et Ouahab [15] ont utilisé le théorème de point fixe de Banach et l'alternative non-linéaire de Leray-Schauder pour prouver l'existence de solutions pour le problème fractionnaire d'équations fonctionnelles et à retard infini suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha} y(t) = f(t, y_t), & \text{pour chaque } t \in J = [0, b], 0 < \alpha < 1, \\ y(t) = \phi(t), & t \in]-\infty, 0], \end{cases}$$

où D_{0+}^{α} est la dérivation standard de Riemann-Liouville, $f : J \times B \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses, $\phi \in B$, $\phi(0) = 0$ et B est appelé espace de phases. En utilisant le théorème de point fixe de Krasnoselskii sur des cônes, El-Shahed [28] à traité l'existence et la non-existence de solution positive pour le problème non-linéaire fractionnaire aux limites suivant :

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} u + \lambda a(t) f(u(t)) = 0, & 2 < \alpha < 3, 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

où D_{0+}^{α} est la dérivation standard de Riemann-Liouville d'ordre α . Certains résultats d'existence pour le problème (2.1)-(2.2) avec $\alpha = 3$ ont été obtenus par Sun [52]. Le problème aux limites (2.1)-(2.2) intervient dans différents domaines de mathématiques appliquées et de physique, et seules les solutions positives ont un sens en pratique.

Dans la section suivante nous allons présenter quelques notions et lemmes préliminaires, la section trois est quant à elle dédiée à montrer l'existence et la non-existence de solution positives pour le problème aux limites (2.1)-(2.2).

2.2 Préliminaires

Dans cette section, nous allons donner les notations, les définitions et les lemmes de base qui seront utilisés par la suite pour démontrer nos principaux résultats. Commençons d'abord par introduire les fonctions nécessaires à la formulation de point fixe du problème (2.1)-(2.2).

Pour $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$

$$G(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2} - (t-s)^{\alpha-1}, & s \leq t \\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}, & t \leq s \end{cases} \quad (2.3)$$

et

$$G_1(\eta, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \eta^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2} - (\eta-s)^{\alpha-2}, & s \leq \eta \\ \eta^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}, & \eta \leq s \end{cases} \quad (2.4)$$

Dans le but de vérifier l'existence de solutions positives, nous donnons quelques propriétés des fonctions G et G_1 .

Lemme 2.2.1. *Pour tout $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$, on a*

$$(P1). \quad \frac{\partial G(t, s)}{\partial t} = (\alpha - 1) G_1(t, s).$$

$$(P2). \quad 0 \leq G_1(\eta, s) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \eta^{\alpha-2} (1-s)^{\alpha-2},$$

$$(P3). \quad \gamma G(1, s) \leq G(t, s) \leq G(1, s), \quad (t, s) \in [\tau, 1] \times [0, 1],$$

où $G(1, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} s(1-s)^{\alpha-2}$, $\gamma = \tau^{\alpha-1}$, et τ est tel que

$$\int_{\tau}^1 s(1-s)^{\alpha-2} a(s) ds > 0. \quad (2.5)$$

Preuve. (P1) et (P2) sont évidentes.

Nous allons montrer (P3).

Pour chaque $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$, (P1) et (P2) impliquent que, $0 \leq G(t, s) \leq G(1, s)$.

Si $0 \leq s \leq t \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{G(t, s)}{G(1, s)} &= \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2} - (t-s)^{\alpha-1}}{s(1-s)^{\alpha-2}} \\ &\geq \frac{t(t-ts)^{\alpha-2} - (t-ts)^{\alpha-1}}{s(1-s)^{\alpha-2}} = \frac{t(t-ts)^{\alpha-2} - (t-ts)(t-ts)^{\alpha-2}}{s(1-s)^{\alpha-2}} \\ &= \frac{ts(t-ts)^{\alpha-2}}{s(1-s)^{\alpha-2}} = t^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Si $0 \leq t \leq s \leq 1$, on a

$$\frac{G(t, s)}{G(1, s)} = \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{s(1-s)^{\alpha-2}} \geq \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}}{(1-s)^{\alpha-2}} = t^{\alpha-1}.$$

Alors,

$$t^{\alpha-1} G(1, s) \leq G(t, s) \leq G(1, s), \quad (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Donc,

$$\tau^{\alpha-1}G(1, s) \leq G(t, s) \leq G(1, s), \quad (t, s) \in [\tau, 1] \times [0, 1].$$

Ce qui termine la démonstration du Lemme 2.2.1. ■

Considérons l'espace de Banach $E=C([0, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|u\|_{\infty} = \max \{|u(t)| : t \in [0, 1]\}.$$

Soit $E^+ = \{u \in E : u(t) \geq 0\}$ cône de E , et $K \subset E^+$ le cône défini par

$$K = \left\{ u \in E : \min_{t \in [\tau, 1]} u(t) \geq \gamma \|u\| \right\}, \quad \gamma = \tau^{\alpha-1}$$

Soit $L : E \rightarrow E$ l'opérateur linéaire défini pour $u \in E$ par

$$Lu(t) = \int_0^1 G(t, s)u(s)ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)u(s)ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \quad (2.6)$$

avec,

$$d = 1 - \mu\eta^{\alpha-2} > 0.$$

Il est claire que, L est continue, $L(E^+) \subset E^+$.

Lemme 2.2.2. *Pour $h \in E$ une fonction donnée. Alors $u = Lh$ est l'unique solution du problème*

$$D_{0+}^{\alpha}u(t) + h(t) = 0, \quad 2 < \alpha \leq 3, \quad 0 < t < 1, \quad (2.7)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \mu u'(\eta) = \lambda, \quad (2.8)$$

Preuve. En appliquant les lemmes 1.3.2 et 1.3.3, l'équation (2.7) est équivalent à l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = -c_1 t^{\alpha-1} - c_2 t^{\alpha-2} - c_3 t^{\alpha-3} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds. \quad (2.9)$$

pour certaines constantes arbitraires $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Les conditions aux limites (2.8), nous permettent de déduire leurs exactes valeurs

$$c_2 = c_3 = 0$$

$$c_1 = \frac{-1}{d\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds - \mu \int_0^{\eta} (\eta-s)^{\alpha-2} h(s) ds \right) - \frac{\lambda}{(\alpha-1)d}.$$

Alors, l'unique solution de (2.7)-(2.8) est donnée par la formule

$$\begin{aligned} u(t) = & -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds \\ & - \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta} (\eta-s)^{\alpha-2} h(s) ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds \\
&+ \frac{\mu \eta^{\alpha-2} t^{\alpha-1}}{d \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds - \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d \Gamma(\alpha)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-2} h(s) ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(-\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + t^{\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds + t^{\alpha-1} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds \right) \\
&+ \frac{\mu t^{\alpha-1} \eta^{\alpha-2}}{d \Gamma(\alpha)} \left(\int_0^\eta (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds + \int_\eta^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds - \frac{1}{\eta^{\alpha-2}} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-2} h(s) ds \right) \\
&+ \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 G(t,s) h(s) ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d \Gamma(\alpha)} \int_0^1 G_1(\eta,s) h(s) ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d}
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du Lemme 2.2.1. ■

Lemme 2.2.3. *Si $h \in E^+$, alors l'unique solution u du problèmes aux limites (2.7)-(2.8) est positive et satisfait l'estimation*

$$\min_{t \in [\tau, 1]} u(t) \geq \gamma \|u\|, \quad \gamma = \tau^{\alpha-1} \quad (2.10)$$

Preuve. Soit $h \in E^+$; il est clair que u est positive. Pour chaque $t \in [0, 1]$, par (2.6) et le Lemme 2.2.1, il découle que

$$\begin{aligned}
u(t) &= \int_0^1 G(t,s) h(s) ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta,s) h(s) ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \\
&\leq \int_0^1 G(1,s) h(s) ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta,s) h(s) ds + \frac{\lambda}{(\alpha-1)d},
\end{aligned}$$

et par suite

$$\|u\| \leq \int_0^1 G(1,s) h(s) ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta,s) h(s) ds + \frac{\lambda}{(\alpha-1)d}.$$

De plus, (2.6) et le Lemme 2.2.1 impliquent que pour tout $t \in [\tau, 1]$,

$$\begin{aligned}
u(t) &= \int_0^1 G(t,s) h(s) ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta,s) h(s) ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \\
&\geq \gamma \int_0^1 G(1,s) h(s) ds + \frac{\mu \tau^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta,s) h(s) ds + \frac{\lambda \tau^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \\
&= \gamma \left(\int_0^1 G(1,s) h(s) ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta,s) h(s) ds + \frac{\lambda}{(\alpha-1)d} \right).
\end{aligned}$$

et donc

$$\min_{t \in [\tau, 1]} u(t) \geq \gamma \|u\|.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Soit $T : E^+ \rightarrow E^+$ l'opérateur intégrale défini pour $u \in E^+$ par

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \quad (2.11)$$

Alors on le lemme suivant

Lemme 2.2.4. *la fonction $u \in K$ est solution du problème (2.1)-(2.2) si et seulement si u est un point fixe de T .*

Afin d'utiliser le théorème de point fixe de Guo-Krasnosel'skii (Théorème 1.2.5) on doit montrer que T est complètement continu.

Lemme 2.2.5. *Supposons que les hypothèses (C1) et (C2) sont vérifiées. Alors $T : K \rightarrow K$ est complètement continu*

Preuve. On sépare la preuve en deux cas.

(A). Dans un premier temps on suppose que la fonction $a :]0, 1[\rightarrow]0, \infty[$ est continue.

Puisque $G(t, s), G_1(\eta, s) \geq 0$, alors $Tu(t) \geq 0$ pour tout $u \in K$.

(a). On commence par montrer que $T(K) \subset K$. En fait,

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G(t, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \\ &\leq \int_0^1 G(1, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\lambda}{(\alpha-1)d} \end{aligned}$$

donc,

$$\|Tu\| \leq \int_0^1 G(1, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\lambda}{(\alpha-1)d},$$

d'un autre côté, le Lemme 2.2.1 implique que pour tout $t \in [\tau, 1]$,

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G(t, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \\ &\geq \gamma \int_0^1 G(1, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu \tau^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\lambda \tau^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \\ &= \gamma \left(\int_0^1 G(1, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\lambda}{(\alpha-1)d} \right), \end{aligned}$$

et, pour $u \in K$

$$\min_{t \in [\tau, 1]} Tu(t) \geq \gamma \|Tu\|.$$

Par conséquent, on a $T(K) \subset K$.

(b). Maintenant nous allons démontrer que T est continu. En effet, posons

$$N = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 s(1-s)^{\alpha-2}a(s)ds + \frac{\mu\eta^{\alpha-2}}{d} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}a(s)ds \right),$$

supposons que $u_n, u_0 \in K$ et $u_n \rightarrow u_0$, alors $\|u_n\| \leq c < \infty$, pour chaque $n \geq 0$. Puisque f est continue sur $[0, c]$, elle y est uniformément continue. Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|u_1 - u_2| < \delta$ implique que $|f(u_1) - f(u_2)| < \frac{\epsilon}{N}$. Puisque $u_n \rightarrow u_0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_n - u_0\| < \delta$ pour $n \geq n_0$. Ainsi on a $|f(u_n(t)) - f(u_0(t))| < \frac{\epsilon}{N}$, pour $n \geq n_0$ et $t \in [0, 1]$. Ce qui implique que pour $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} & \|Tu_n - Tu_0\| \\ &= \left\| \int_0^1 G(t, s)a(s) [f(u_n(s)) - f(u_0(s))] ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s) [f(u_n(s)) - f(u_0(s))] ds \right\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{N} \left(\int_0^1 G(1, s)a(s) ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s) ds \right) \\ &\leq \frac{\epsilon}{N} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s(1-s)^{\alpha-2} a(s) ds + \frac{\mu \eta^{\alpha-2}}{d} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} a(s) ds \right) \\ &\leq \frac{\epsilon}{N} (N) = \epsilon. \end{aligned}$$

Donc, $T : K \rightarrow K$ est continu.

(c). Maintenant nous montrons que $\forall B \subset K$ un ensemble borné, alors $\overline{T(B)} \subset K$ est un ensemble compact.

En effet,

(c1). Soit $B \subset K$ un ensemble borné, alors nécessairement $T(B) \subset K$ est uniformément borné.

En effet, puisque B est borné, alors il existe un certain $m > 0$ tel que $\|u\| \leq m$, pour tout $u \in B$.

Soit,

$$C = \max \{|f(u(t))| : 0 \leq \|u\| \leq m\}$$

alors

$$\|Tu\| \leq C_1 N \quad \text{pour tout } u \in B.$$

tel que

$$C_1 = C + \frac{\lambda}{(\alpha - 1) d N}.$$

(c2). L'équicontinuité de $T(B)$ vient du fait que les fonctions de Green G et G_1 sont continues sur $[0, 1] \times [0, 1]$ donc uniformément continues. Par le théorème d'Arzela-Ascoli (Théorème 1.1.1), on obtient que $T(B)$ est un ensemble relativement compact, i.e., T est un opérateur complètement continu.

(B). Nous allons à présent traiter le cas plus général où $a :]0, 1[\rightarrow]0, +\infty[$ est continue ;

Pour surmonter les singularités, nous considérons l'opérateur d'approximation :

$$T_n : E^+ \rightarrow E^+$$

$$T_n u(t) = \int_0^1 G(t, s)a_n(s)f(u(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a_n(s)f(u(s))ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha - 1) d}$$

où $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$ et

$$a_n(t) = \begin{cases} a(\frac{1}{n}), & 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ a(t), & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 - \frac{1}{n}, \\ a(1 - \frac{1}{n}), & 1 - \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

Clairement, $a_n \in C([0, 1]; [0, +\infty[)$.

Par un raisonnement similaire il est immédiat que $T_n : K \rightarrow K$ est complètement continu.

Puisque

$$\begin{aligned} 0 &< \int_0^1 G(t, s)a(s)ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)ds \\ &< \int_0^1 G(1, s)a(s)ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)ds \\ &< \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 s(1-s)^{\alpha-2}a(s)ds + \frac{\mu\eta^{\alpha-2}}{d} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}a(s)ds \right] \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

et par la continuité absolue de l'intégrale, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{e(n)} s(1-s)^{\alpha-2}a(s)ds + \frac{\mu\eta^{\alpha-2}t^{\alpha-1}}{d} \int_{e(n)} (1-s)^{\alpha-2}a(s)ds \right) = 0,$$

où $e(n) = [0, \frac{1}{n}] \cup [1 - \frac{1}{n}, 1]$.

Soit $r > 0$ et $u \in B_r = \{u \in E : \|u\| \leq r\}$ et

$$M_r = \max \{f(u(t)) : (t, u) \in [0, 1] \times [0, r]\} < +\infty,$$

par (2.12), le Lemme 2.2.1 (P3), et par la continuité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n u - Tu\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t < 1} \left| \int_0^1 G(t, s)(a_n(s) - a(s))f(u(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)(a_n(s) - a(s))f(u(s))ds \right| \\ &\leq \frac{M_r}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 s(1-s)^{\alpha-2}(a(s) - a_n(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}(a(s) - a_n(s))ds \right] \\ &\leq \frac{M_r}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{e(n)} s(1-s)^{\alpha-2}(a(s) - a_n(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_{e(n)} (1-s)^{\alpha-2}(a(s) - a_n(s))ds \right] \\ &= \frac{M_r}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^{\frac{1}{n}} s(1-s)^{\alpha-2}(a(s) - a_n(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^{\frac{1}{n}} (1-s)^{\alpha-2}(a(s) - a_n(s))ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 s(1-s)^{\alpha-2}(a(s) - a_n(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_{1-\frac{1}{n}}^1 (1-s)^{\alpha-2}(a(s) - a_n(s))ds \right] \\ &\leq \frac{M_r}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{e(n)} s(1-s)^{\alpha-2}a(s)ds + \frac{\mu\eta^{\alpha-2}t^{\alpha-1}}{d} \int_{e(n)} (1-s)^{\alpha-2}a(s)ds \right) = 0. \end{aligned}$$

Alors, $T : K \rightarrow K$ est complètement continu. ■

2.3 Résultats principaux

Dans cette section, nous allons étudier l'existence de solutions positives pour le problème aux limites (2.1)-(2.2). Nous commençons par introduire les notations suivantes :

$$\Lambda_1 := \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s(1-s)^{\alpha-2} a(s) ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) a(s) ds \right)^{-1},$$

$$\Lambda_2 := \left(\frac{\gamma}{\Gamma(\alpha)} \int_\tau^1 s(1-s)^{\alpha-2} a(s) ds + \frac{\mu\gamma}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s) a(s) ds \right)^{-1}.$$

Il est facile de voir que $\Lambda_2 > \Lambda_1 > 0$. On pose aussi

$$f_0 = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{f(r)}{r}, \quad f_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r)}{r}.$$

Théorème 2.3.1. *Soit (C1) et (C2) vérifiées. De plus, on suppose que f est sur-linéaire, i.e.*

$$f_0 = 0, \quad f_\infty = \infty.$$

Alors il existe λ_1, λ_2 avec $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < +\infty$ tels que

si $\lambda \in]0, \lambda_1[$ le problème aux limites (2.1)-(2.2) admet au moins une solution positive,
si $\lambda \in]\lambda_2, +\infty[$ le problème aux limites (2.1)-(2.2) n'admet pas de solution positive .

Preuve. On divise la preuve en deux étapes.

Étape 1. On montre que le problème aux limites (2.1)-(2.2) possède au moins une solution positive pour λ suffisamment petit.

Puisque $f_0 = 0$, pour $\Lambda_1 > 0$, il existe $R_1 > 0$ tel que $\frac{f(r)}{r} \leq \frac{\Lambda_1}{2}$, $r \in [0, R_1]$. Ainsi,

$$f(r) \leq \frac{r\Lambda_1}{2}, \text{ for } r \in [0, R_1]. \quad (2.13)$$

Soit,

$$\Omega_1 = \{u \in C[0, 1] : \|u\| \leq R_1\}$$

et soit λ satisfaisant,

$$0 < \lambda \leq \frac{(\alpha - 1) d R_1}{2}. \quad (2.14)$$

Alors pour chaque $u \in K \cap \partial\Omega_1$, il découle du Lemme 2.2.1, (2.11), (2.13) et (2.14) que

$$\begin{aligned}
Tu(t) &= \int_0^1 G(t, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s(1-s)^{\alpha-2} a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\lambda}{(\alpha-1)d} \\
&\leq \frac{\Lambda_1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s(1-s)^{\alpha-2} a(s)u(s)ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)u(s)ds \right) \\
&\quad + \frac{(\alpha-1)dR_1}{2(\alpha-1)d} \\
&\leq \frac{\Lambda_1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s(1-s)^{\alpha-2} a(s)ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)ds \right) \|u\| + \frac{R_1}{2} \\
&= \frac{\|u\|}{2} + \frac{\|u\|}{2} = \|u\|.
\end{aligned}$$

Et donc

$$\|Tu\| \leq \|u\|, \quad \text{pour } u \in K \cap \partial\Omega_1. \quad (2.15)$$

D'un autre côté, puisque $f_\infty = \infty$, pour $\Lambda_2 > 0$, il existe $R_2 > R_1$ tel que $\frac{f(r)}{r} \geq \Lambda_2$, $r \in [\gamma R_2, \infty)$.

Nous avons alors

$$f(r) \geq r\Lambda_2, \quad \text{pour } r \in [\gamma R_2, \infty). \quad (2.16)$$

Posons,

$$\Omega_2 = \{u \in C[0, 1] : \|u\| \leq R_2\}.$$

Pour chaque $u \in K \cap \partial\Omega_2$, par le Lemme 2.2.1 on a

$$\min_{s \in [\tau, 1]} u(s) \geq \gamma \|u\| = \gamma R_2.$$

Donc, par (2.15) on peut conclure que

$$\begin{aligned}
Tu(1) &= \int_0^1 G(1, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\lambda}{(\alpha-1)d} \\
&\geq \int_0^1 G(1, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds \\
&\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\tau^1 s(1-s)^{\alpha-2} a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds \\
&\geq \Lambda_2 \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\tau^1 s(1-s)^{\alpha-2} a(s)u(s)ds + \frac{\mu}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s)a(s)u(s)ds \right) \\
&\geq \gamma \Lambda_2 \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\tau^1 s(1-s)^{\alpha-2} a(s)ds + \frac{\mu}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s)a(s)ds \right) \|u\| \\
&= \|u\|,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|Tu\| \geq \|u\|, \quad \text{pour } u \in K \cap \partial\Omega_2. \quad (2.17)$$

Et donc, par (2.15), (2.17) et la première assertion du théorème de point fixe de Guo-Krasnosel'skii (Théorème 1.2.5). On sait que l'opérateur T possède au moins un point fixe $u \in K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$, qui n'est autre qu'une solution positive du problème aux limites (2.1)-(2.2).

Étape 2. On montre que le problème aux limites (2.1)-(2.2) ne possède pas de solution positive pour λ suffisamment grand. Car sinon, il existe $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$, avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$, tel que pour chaque entier positif n , le problème aux limites

$$\begin{cases} D^\alpha u + a(t)f(u) = 0, & 2 < \alpha < 3, & 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = 0, & u'(1) - \mu u'(\eta) = \lambda_n, \end{cases}$$

possède une solution positive $u_n(t)$, par (2.6), on a

$$\begin{aligned} u_n(1) &= \int_0^1 G(1, s)a(s)f(u_n(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u_n(s))ds + \frac{\lambda_n}{(\alpha - 1)d} \\ &\geq \frac{\lambda_n}{(\alpha - 1)d} \rightarrow +\infty, \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Donc

$$\|u_n\| \rightarrow +\infty, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Puisque $f_\infty = \infty$, pour $4\Lambda_2 > 0$, il existe $\widehat{R} > 0$ tel que

$$\frac{f(r)}{r} \geq 4\Lambda_2, \quad \forall r \in [\gamma\widehat{R}, \infty[,$$

ce qui implique que

$$f(r) \geq 2\Lambda_2 r, \quad \forall r \in [\gamma\widehat{R}, \infty[.$$

Soit n suffisamment grand de sorte que $\|u_n\| \geq \widehat{R}$, alors

$$\begin{aligned} \|u_n\| &\geq u_n(1) \\ &= \int_0^1 G(1, s)a(s)f(u_n(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u_n(s))ds + \frac{\lambda_n}{(\alpha - 1)d} \\ &\geq 2\Lambda \left(\int_0^1 G(1, s)a(s)u_n(s)ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)u_n(s)ds \right) \\ &\geq 2\Lambda \left(\int_\tau^1 G(1, s)a(s)u_n(s)ds + \frac{\mu}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s)a(s)u_n(s)ds \right) \\ &\geq 2\Lambda_2 \left(\gamma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\tau^1 (1-s)^{\alpha-2} sa(s)ds + \frac{\mu\gamma}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s)a(s)ds \right) \|u_n\| \\ &= 2 \|u_n\|, \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Ceci termine la preuve. ■

Maintenant nous allons considérer le cas f sous-linéaire.

Théorème 2.3.2. *Soit (C1) et (C2) vérifiées. De plus, on suppose que f est sous-linéaire, i.e.*

$$f_0 = \infty, \quad f_\infty = 0.$$

Alors le problème aux limites (2.1)-(2.2) possède au moins une solution positive pour chaque $\lambda \in]0, \infty[$.

Preuve. Puisque $f_0 = \infty$, il existe $R_1 > 0$ tel que $f(r) \geq \Lambda_2 r$, pour chaque $r \in [0, R_1]$. Ainsi pour tout $u \in K$ avec $\|u\| = R_1$ et pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned}
Tu(1) &= \int_0^1 G(1, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\lambda}{(\alpha - 1)d} \\
&\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s(1-s)^{\alpha-2}a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds \\
&\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\tau^1 s(1-s)^{\alpha-2}a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds \\
&\geq \Lambda_2 \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\tau^1 s(1-s)^{\alpha-2}a(s)u(s)ds + \frac{\mu}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s)a(s)u(s)ds \right) \\
&\geq \Lambda_2 \left(\gamma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\tau^1 s(1-s)^{\alpha-2}a(s)ds + \frac{\mu\gamma}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s)a(s)ds \right) \|u\| \\
&= \|u\|,
\end{aligned}$$

et par conséquence, $\|Tu\| \geq \|u\|$.

Donc, si l'on pose $\Omega_1 = \{u \in K : \|u\| < R_1\}$, alors

$$\|Tu\| \geq \|u\|, \text{ pour } u \in K \cap \partial\Omega_1. \quad (2.18)$$

A présent nous allons construire l'ensemble Ω_2 ; on considère les deux cas : f bornée ou f non bornée.

Cas (1) : Supposons que f est bornée, soit par exemple $f(r) \leq M$ pour tout $r \in [0, \infty[$. Dans ce cas on choisit

$$R_2 \geq \max \left\{ 2R_1, \frac{2M}{\Lambda_1}, \frac{2\lambda}{(\alpha - 1)d} \right\},$$

et alors pour $u \in K$ avec $\|u\| = R_2$, on a

$$\begin{aligned}
Tu(t) &= \int_0^1 G(t, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)d} \\
&\leq M \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s(1-s)^{\alpha-2}a(s)ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)ds \right) + \frac{\lambda}{(\alpha - 1)d} \\
&\leq \frac{M}{\Lambda_1} + \frac{R_2}{2} \leq \frac{R_2}{2} + \frac{R_2}{2} = R_2 = \|u\|.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|Tu\| \leq \|u\|.$$

Cas (2) : Quand f est non bornée. Maintenant, puisque $f_\infty = 0$, il existe $R_0 > 0$ tel que

$$f(r) \leq \frac{\Lambda_1}{2} r, \forall r \in [R_0, \infty[, \quad (2.19)$$

Soit

$$R_2 \geq \max \left\{ 2R_1, R_0, \frac{2\lambda}{(\alpha - 1)d} \right\},$$

tel que

$$f(r) \leq f(R_2), \quad r \in [0, R_2].$$

Pour $u \in K$ avec $\|u\| = R_2$, par (2.11) et (2.19), on a

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G(t, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(u(s))ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \\ &\leq \int_0^1 G(t, s)a(s)f(R_2)ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)f(R_2)ds + \frac{\lambda}{(\alpha-1)d} \\ &\leq \frac{\Lambda_1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s(1-s)^{\alpha-2}a(s)ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)ds \right) R_2 + \frac{R_2}{2} \\ &= \frac{R_2}{2} + \frac{R_2}{2} = R_2 = \|u\|. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\|Tu\| \leq \|u\|.$$

Ainsi, dans chacun des deux cas on peut poser $\Omega_2 = \{u \in K : \|u\| < R_2\}$, et on a

$$\|Tu\| \geq \|u\|, \quad \text{pour } u \in K \cap \partial\Omega_2. \quad (2.20)$$

Et par suite, il découle de (2.18), (2.20) et de la deuxième assertion du théorème de point fixe de Guo-Krasnosel'skii (Théorème 1.2.5) que T possède un point fixe $u^* \in K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$, qui est une solution positive du problème (2.1)-(2.2). Ce qui achève la démonstration. ■

2.4 Exemples illustratifs

Exemple 2.4.1. *Considérons le problème fractionnaire suivant :*

$$D_{0^+}^{\frac{5}{2}}u(t) + \frac{1}{\sqrt{t(1-t^2)}}u^{\frac{3}{2}}(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (2.21)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}u'\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda, \quad (2.22)$$

On peut facilement montrer que $f(u(t)) = u^{\frac{3}{2}}(t)$ vérifie :

$$f_0 = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \sqrt{u(t)} = 0, \quad f_\infty = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \sqrt{u(t)} = +\infty,$$

pour $t \in [0, 1]$ (preque partout), on a

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}a(s)ds = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(1+s)}} < +\infty.$$

Ainsi les conditions (C1), (C2) sont vérifiées, on peut toujours choisir $R_2 > R_1 > 0$, et pour λ satisfaisant $0 < \lambda \leq \frac{9}{16}R_1 < R_2$, on peut choisir

$$\Omega_1 = \{u \in K : \|u\| < R_1\}, \quad \Omega_2 = \{u \in K : \|u\| < R_2\}$$

et par le Théorème 2.3.1, on peut montrer que le problème aux limites (2.21)-(2.22) possède au moins une solution positive $u(t) \in K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ pour λ suffisamment petit et ne possède pas de solution positive pour λ assez grand.

Exemple 2.4.2. *Considérons le problème fractionnaire suivant :*

$$D_{0^+}^{\frac{5}{2}} u(t) + \frac{1}{\sqrt{t(1-t^2)}} \exp(-u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (2.23)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \frac{1}{2\sqrt{2}} u'(\frac{1}{2}) = \lambda, \quad (2.24)$$

On peut facilement montrer que $f(u(t)) = \exp(-u(t))$ vérifie :

$$f_0 = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{u \exp(u)} = \infty, \quad f_\infty = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u \exp(u)} = 0,$$

pour $t \in [0, 1]$ (preque partout), on a

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} a(s) ds = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(1+s)}} < +\infty.$$

Ainsi les conditions (C1), (C2) sont vérifiées, et par le Théorème 2.3.2, on peut montrer que le problème aux limites (2.23)-(2.24) possède au moins une solution positive $u(t)$, pour chaque $\lambda \in]0, \infty[$.

Solutions positives d'une EDF semi-positive ([54])

3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'existence de solutions positives du problème aux limites non linéaire semi-positive suivant :

$$D_{0+}^{\alpha} u + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad 2 < \alpha \leq 3, \tag{3.1}$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) = \mu u'(\eta), \tag{3.2}$$

où α est un nombre réel, D_{0+}^{α} est la dérivation standard de Riemann-Liouville d'ordre α , $\eta \in]0, 1[$, $\mu \in \left[0, \frac{1}{\eta^{\alpha-2}}\right[$ sont des constantes arbitraires et $f : [0, 1] \times [0, +\infty[\rightarrow]-\infty, +\infty[$ est une fonction de signe arbitraire. Par solution positive, on entend une fonction u positive sur $]0, 1[$ et satisfaisant (3.1)-(3.2).

Par la suite nous allons imposer les hypothèses suivantes :

- (H1) $f : [0, 1] \times [0, \infty[\rightarrow]-\infty, +\infty[$ est de type \mathbb{L}^1 -Carathéodory.
- (H2) Il existe une fonction $M(t) \in \mathbb{L}^1(]0, 1[)$, $M(t) > 0$ presque tout., $t \in]0, 1[$, telle que pour presque tout., $t \in [0, 1]$, on a

$$f(t, u) \geq -M(t), \quad u \geq 0.$$

- (H3) On suppose aussi que M vérifie aussi

$$0 < \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-2} M(s) ds < \infty$$

Nous arrivons à prouver, en imposant des conditions de croissance sur le terme non linéaire f , que le problème (3.1)-(3.2) a au moins deux solutions positives. L'outil principal utilisé sera le théorème de l'indice du point fixe (Théorème 1.2.4).

Le problème (3.1)-(3.2) apparaît dans différents domaines en mathématiques appliquées et en physique, et c'est la raison pour laquelle on s'intéresse uniquement aux solutions positives, car seules, celles-ci ont un sens en pratique.

Définition 3.1.1. On dira que $f : [0, 1] \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est de type \mathbb{L}^1 -Carathéodory, si les hypothèses suivantes sont vérifiées

1. Pour presque tout $t \in [0, 1]$, $f(t, \cdot)$ est continue.
2. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, u)$ est mesurable.
3. Pour chaque $k > 0$, il existe $a_k \in \mathbb{L}^1(0, 1)$ tel que pour presque tout $t \in [0, 1]$, on a

$$|f(t, u)| \leq a_k(t), \quad |u| \leq k.$$

Le reste du chapitre est organisé comme suit ; la section deux est dédiée à rappeler quelques lemmes qui seront utilisés pour démontrer les résultats obtenus. La section trois est consacrée à traiter l'existence de solution positive pour le problème (3.1)-(3.2). Enfin, dans la quatrième section on présente un exemple pour illustrer le résultat obtenu.

3.2 Préliminaires

D'une manière similaire à celle utilisée dans les préliminaires du chapitre précédent, considérons l'espace de Banach $E=C([0, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \max \{|u(t)| : t \in [0, 1]\}.$$

Soit $E^+ = \{u \in E : u(t) \geq 0\}$ un cône de E , et $K \subset E^+$ le cône défini par

$$K = \left\{ u \in E : \min_{t \in [\tau, 1]} u(t) \geq \gamma \|u\| \right\}, \quad \gamma = \tau^{\alpha-1}$$

Soit $L : E \rightarrow E$ l'opérateur linéaire défini pour $u \in E$ par

Lemme 3.2.1.

$$Lu(t) = \int_0^1 G(t, s)y(s)ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)y(s)ds, \quad (3.3)$$

où $G(t, s)$ et $G_1(\eta, s)$ sont définies comme dans le premier chapitre,

$$d = 1 - \mu\eta^{\alpha-2} > 0.$$

et $F : E^+ \rightarrow E^+$ l'opérateur de Nymitski associé au terme non linéaire f . Il est clair que, L est continue, $L(E^+) \subset E^+$ et F est borné.

on démontrent les Lemme suivants

Lemme 3.2.2. Soit $h \in E^+$ une fonction donnée. Alors $u = Lh$ est l'unique solution du problème

$$D_{0+}^\alpha u(t) + h(t) = 0, \quad 2 < \alpha \leq 3, \quad 0 < t < 1, \quad (3.4)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) = \mu u'(\eta), \quad (3.5)$$

Lemme 3.2.3. Soit $h \in E^+$ une fonction donnée. Alors l'unique solution u du problème (3.4)-(3.5) est positive et vérifie

$$u(t) \geq q(t) \|u\|_\infty, \quad q(t) = t^{\alpha-1}, \quad (3.6)$$

de plus

$$\min_{t \in [\tau, 1]} u(t) \geq \gamma \|u\|_\infty, \quad \gamma = \tau^{\alpha-1}. \quad (3.7)$$

On considère à présent le problème auxiliaire non linéaire suivant :

Lemme 3.2.4. Soit $w(t)$ solution du problème suivant :

$$D_{0+}^\alpha u(t) + M(t) = 0, \quad 2 < \alpha < 3, \quad 0 < t < 1, \quad (3.8)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) = \mu u'(\eta), \quad (3.9)$$

où $M(t) \in \mathbb{L}^1(0, 1)$, $M(t) > 0$, alors,

$$0 \leq w(t) \leq \frac{q(t)}{d\Gamma(\alpha)} \|M\|_1, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.10)$$

$$\text{où } \|M\|_1 = \int_0^1 M(s) ds$$

Preuve. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_0^1 G(t, s) M(s) ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) M(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-2} - (t-s)^{\alpha-1}) M(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-2} M(s) ds \\ &\quad + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^\eta (\eta^{\alpha-2} (1-s)^{\alpha-2} - (\eta-s)^{\alpha-2}) M(s) ds \\ &\quad + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_\eta^1 [\eta^{\alpha-2} (1-s)^{\alpha-2}] M(s) ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-2} M(s) ds + \int_t^1 t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-2} M(s) ds \right) \\ &\quad + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^\eta \eta^{\alpha-2} (1-s)^{\alpha-2} M(s) ds + \int_\eta^1 \eta^{\alpha-2} (1-s)^{\alpha-2} M(s) ds \right) \\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (1-s)^{\alpha-2} M(s) ds + \int_t^1 (1-s)^{\alpha-2} M(s) ds \right) \\ &\quad + \frac{\mu \eta^{\alpha-2} t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^\eta (1-s)^{\alpha-2} M(s) ds + \int_\eta^1 (1-s)^{\alpha-2} M(s) ds \right) \\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} M(s) ds + \frac{\mu \eta^{\alpha-2} t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} M(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\mu\eta^{\alpha-2}t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \right) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} M(s) ds \\
&= \frac{t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} M(s) ds \leq \frac{t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^1 M(s) ds \\
&= \frac{q(t)}{d\Gamma(\alpha)} \|M\|_1.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du Lemme 3.2.4. ■

Pour $u \in E$, on définit la fonction $[u(t)]^*$

$$[u(t)]^* = \begin{cases} u(t), & u(t) \geq 0, \\ 0, & u(t) < 0. \end{cases}$$

On considère la fonction modifiée $F : [0, 1] \times [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ définie par :

$$F(t, u(t)) = f(t, [u(t) - w(t)]^* + M(t).$$

Clairement, F est continue et vérifie la condition \mathbb{L}^1 -Carathéodory.

On considère à présent le problème auxiliaire non linéaire suivant

$$D_{0+}^\alpha u(t) + F(t, u(t)) = 0, \quad 2 < \alpha \leq 3, \quad 0 < t < 1, \quad (3.11)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) = \mu u'(\eta), \quad (3.12)$$

où $w(t)$ est la solution positive du problème (3.8)-(3.9).

Lemme 3.2.5. *Si $\tilde{u}(t)$ est telle que $\tilde{u}(t) \geq w(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$ est une solution positive du problème (3.11)-(3.12). Alors $u(t) = \tilde{u}(t) - w(t)$ est une solution positive du problème (3.1)-(3.2).*

Preuve. En fait, si $\tilde{u}(t)$ est solution positive de (3.11)-(3.12) telle que $\tilde{u}(t) \geq w(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Soit $u(t) = \tilde{u}(t) - w(t)$, alors $u(t) \geq 0$, et $u(t) = [\tilde{u}(t) - w(t)]^*$, $t \in [0, 1]$. Comme $w(t)$ est l'unique solution positive du problème (3.8)-(3.9), pour $t \in [0, 1]$, on a

$$D_{0+}^\alpha \tilde{u}(t) + F(t, \tilde{u}(t)) = 0,$$

i.e

$$D_{0+}^\alpha u(t) + D_{0+}^\alpha w(t) + f(t, u(t)) + M(t) = 0.$$

Donc

$$D_{0+}^\alpha u(t) + f(t, u(t)) = 0.$$

D'un autre côté on a

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) = \mu u'(\eta).$$

Ce qui achève la preuve du Lemme 3.2.5.

Nous allons donc localiser notre attention à l'étude du problème (3.11)-(3.12). Clairement, (3.11)-(3.12) est équivalent à l'équation intégrale

$$\tilde{u}(t) = \int_0^1 G(t, s) F(s, \tilde{u}(s)) ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) F(s, \tilde{u}(s)) ds. \quad (3.13)$$

Et par conséquent, sa solution vérifie le problème de point fixe suivant $\tilde{u} = T\tilde{u}$ avec l'opérateur $T : E^+ \rightarrow E^+$ donné par

$$(T\tilde{u})(t) = \int_0^1 G(t, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds. \quad (3.14)$$

Dans le but d'utiliser le théorème de l'indice du point fixe (Théorème 1.2.4), on a besoin de montrer que $T : K \rightarrow K$ est complètement continu. ■

Lemme 3.2.6. *Supposons que (H1), (H2) et (H3) soit vérifiées. Alors $T : K \rightarrow K$ est complètement continu.*

Preuve. Comme $G(t, s), G_1(\eta, s) \geq 0$, alors $(T\tilde{u})(t) \geq 0$ pour tout $\tilde{u} \in K$.

(a) Dans un premier temps, on montre que $T(K) \subset K$. Par (P3) du Lemme 2.2.1 et par (3.14), pour tout $\tilde{u} \in K, t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} (T\tilde{u})(t) &= \int_0^1 G(t, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds \\ &\leq \int_0^1 G(1, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds. \end{aligned}$$

Donc,

$$\|T\tilde{u}\| \leq \int_0^1 G(1, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds.$$

D'un autre côté, par (P3) du Lemme 2.2.1 et par (3.14), pour tout $t \in [\tau, 1]$, on a

$$\begin{aligned} (T\tilde{u})(t) &= \int_0^1 G(t, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds \\ &\geq \gamma \int_\tau^1 G(1, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu \tau^{\alpha-1}}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds \\ &= \gamma \left(\int_\tau^1 G(1, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds \right), \end{aligned}$$

et donc pour $\tilde{u} \in K$,

$$\min_{t \in [\tau, 1]} T\tilde{u}(t) \geq \gamma \|T\tilde{u}\|,$$

alors $T(K) \subset K$.

(b) On montre à présent que T est continu.

Soit,

$$N = \int_0^1 G(1, s)ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)ds,$$

supposons que $\tilde{u}_n, \tilde{u}_0 \in K$ et $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_0$ ($n \rightarrow \infty$), alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\|\tilde{u}_0\| \leq c < \infty, \|\tilde{u}_n\| \leq c < \infty$, pour tout $n \geq 0$. Comme $f(t, \cdot)$ est continue sur $[0, c]$, elle est uniformément continue. et donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1| < \delta$ ce qui implique que

$$|F(t, \tilde{u}_2(t)) - F(t, \tilde{u}_1(t))| = |f(t, [\tilde{u}_2(t) - w(t)]^*) - f(t, [\tilde{u}_1(t) - w(t)]^*)| < \frac{\varepsilon}{N}.$$

Comme $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|\tilde{u}_n - \tilde{u}_0\| < \delta$ pour $n \geq n_0$. Par suite on a $|F(t, \tilde{u}_n(t)) - F(t, \tilde{u}_0(t))| < \frac{\varepsilon}{N}$, pour $n \geq n_0$ et $t \in [0, 1]$.

Ce qui donne pour $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
|(T\tilde{u}_n)(t) - (T\tilde{u}_0)(t)| &\leq \left| \int_0^1 G(t, s) [F(s, \tilde{u}_n(s)) - F(s, \tilde{u}_0(s))] ds \right| \\
&\quad + \left| \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) [F(s, \tilde{u}_n(s)) - F(s, \tilde{u}_0(s))] ds \right| \\
&\leq \left| \int_0^1 G(t, s) [F(s, \tilde{u}_n(s)) - F(s, \tilde{u}_0(s))] ds \right| \\
&\quad + \left| \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) [F(s, \tilde{u}_n(s)) - F(s, \tilde{u}_0(s))] ds \right| \\
&\leq \int_0^1 G(t, s) |F(s, \tilde{u}_n(s)) - F(s, \tilde{u}_0(s))| ds \\
&\quad + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) |F(s, \tilde{u}_n(s)) - F(s, \tilde{u}_0(s))| ds \\
&\leq \int_0^1 G(1, s) |F(s, \tilde{u}_n(s)) - F(s, \tilde{u}_0(s))| ds \\
&\quad + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) |F(s, \tilde{u}_n(s)) - F(s, \tilde{u}_0(s))| ds \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2N} \left(\int_0^1 G(1, s) ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) ds \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{N} (N) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Soit que, $T : K \rightarrow K$ est continu.

(c) Maintenant nous montrons que T est un opérateur compact. Soit $\mathcal{D} \subset K$ soit un ensemble borné quelconque, il existe alors une constante $c > 0$ telle que

$$\|\tilde{u}\| \leq c, \tilde{u} \in \mathcal{D}$$

Par, $\tilde{u}(s) - w(s) \leq \tilde{u}(s) \leq \|\tilde{u}\| \leq c$, on choisit

$$L = \sup_{0 \leq t \leq 1, \|\tilde{u}\| \leq c} |f(s, [\tilde{u}(s) - w(s)]^*)|,$$

et donc,

$$0 \leq |F(s, \tilde{u}(s))| = |f(s, [\tilde{u}(s) - w(s)]^*) + M(s)| \leq L + M(s),$$

alors, pour tout $\tilde{u} \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned}
|(T\tilde{u})(t)| &= \left| \int_0^1 G(t,s)F(s,\tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta,s)F(s,\tilde{u}(s))ds \right| \\
&\leq \int_0^1 G(1,s)F(s,\tilde{u}(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta,s)F(s,\tilde{u}(s))ds \\
&\leq \int_0^1 G(1,s)(L+M(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta,s)(L+M(s))ds \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

et par suite, $T(\mathcal{D})$ est uniformément borné.

(d) En fin on montre que $T(\mathcal{D})$ est equicontinu sur $[0, 1]$.

Pour tout $\tilde{u} \in \mathcal{D}$, $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dt} (T\tilde{u})(t) \right| &= \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} G(t,s)F(s,\tilde{u}(s))ds + \frac{(\alpha-1)\mu t^{\alpha-2}}{d} \int_0^1 G_1(\eta,s)F(s,\tilde{u}(s))ds \right| \\
&\leq \left| \int_0^1 G_1(t,s)F(s,\tilde{u}(s))ds \right| + \left| \frac{(\alpha-1)\mu t^{\alpha-2}}{d} \int_0^1 G_1(\eta,s)F(s,\tilde{u}(s))ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-2} (1-s)^{\alpha-2} F(s,\tilde{u}(s))ds \\
&\quad + \frac{(\alpha-1)\mu \eta^{\alpha-2} t^{\alpha-2}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} F(s,\tilde{u}(s))ds \\
&\leq \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} F(s,\tilde{u}(s))ds \\
&\quad + \frac{(\alpha-1)\mu \eta^{\alpha-2} t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)d} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} F(s,\tilde{u}(s))ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-2} \left(1 + \frac{(\alpha-1)\mu \eta^{\alpha-2}}{d} \right) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} F(s,\tilde{u}(s))ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-2} \left(1 + \frac{(\alpha-1)\mu \eta^{\alpha-2}}{d} \right) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} (L+M(s))ds \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

et donc pour tout $\tilde{u} \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} (T\tilde{u})(t) \right| dt \\
&\leq \int_0^1 \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-2} \left(1 + \frac{(\alpha-1)\mu \eta^{\alpha-2}}{d} \right) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} (L+M(s))ds \right) dt \\
&= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{(\alpha-1)\mu \eta^{\alpha-2}}{d} \right) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} (L+M(s))ds \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Par la continuité de l'intégrale, on sait que $T(\mathcal{D})$ est équicontinu sur $[0, 1]$. Donc, comme conséquence du théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.1.1) on obtient que $T(\mathcal{D})$ est un ensemble relativement compact, i.e., T est un opérateur compact.

(e) De plus, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on peut aisément obtenir que $T : K \rightarrow K$ est un opérateur complètement continu. ■

3.3 Résultat principal

Dans cette section, nous allons utiliser le théorème de l'indice du point fixe (Théorème 1.2.4) pour montrer l'existence de solutions positives pour le problème aux limites (3.1)-(3.2).

Nous commençons par introduire les notations suivantes :

$$\Lambda_1 = \left(\int_0^1 G(1, s) ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) ds \right)^{-1},$$

$$\Lambda_2 = \left(\int_\tau^1 G(1, s) ds + \frac{\mu}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s) ds \right)^{-1}.$$

Il est clair que $\Lambda_2 > \Lambda_1 > 0$.

On définit

$$f_0 = \lim_{u \rightarrow 0^+} \min_{0 \leq t \leq 1} \frac{f(t, u)}{u}, \quad f_\infty = \lim_{u \rightarrow \infty} \min_{0 \leq t \leq 1} \frac{f(t, u)}{u}.$$

Théorème 3.3.1. *Supposons que les hypothèses (H1), (H2) et (H3) sont vérifiées et que*

$$f_0 = \infty, \quad f_\infty = \infty.$$

Alors le problème (3.1)-(3.2) possède au moins deux solutions positives dans K .

Preuve. (a) On montre à présent que

$$\|T\tilde{u}\| \leq \|\tilde{u}\|, \quad \forall \tilde{u} \in K \cap \partial\Omega.$$

En effet, pour tout $\tilde{u} \in K$ et $k > \frac{2\|M\|_1}{(1-\mu\eta^{\alpha-2})\Gamma(\alpha)}$ avec $\|\tilde{u}\| = k$.

Par les Lemmes 3.2.3 et 3.2.4 on a

$$\begin{aligned} \tilde{u}(s) - w(s) &\geq \|\tilde{u}\| q(s) - \frac{\|M\|_1}{d\Gamma(\alpha)} q(s) \\ &= \left(k - \frac{\|M\|_1}{d\Gamma(\alpha)} \right) q(s) \geq 0. \end{aligned}$$

Par

$$[\tilde{u}(s) - w(s)]^* \leq \tilde{u}(s) \leq k$$

on obtient $\|\tilde{u} - w\| \leq k$. En utilisant la définition de la condition \mathbb{L}^1 -Carathéodory, il va exister une fonction $a \in \mathbb{L}^1([0, 1])$ telle que

$$\|a\|_1 \leq kd\Gamma(\alpha)$$

et

$$F(s, \tilde{u}(s)) = f(s, [\tilde{u}(s) - w(s)]^*) + M(s) \leq a(s), \quad \|\tilde{u} - w\| \leq k, \quad s \in [0, 1].$$

En utilisant (3.14), on obtient

$$\begin{aligned} (T\tilde{u})(t) &= \int_0^1 G(t, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds \\ &\leq \int_0^1 G(t, s)a(s)ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)a(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2} - (t-s)^{\alpha-1}] a(s)ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2} a(s)ds \\ &\quad + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^\eta [\eta^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2} - (\eta-s)^{\alpha-2}] a(s)ds \\ &\quad + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_\eta^1 \eta^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2} a(s)ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2} a(s)ds + \int_t^1 t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2} a(s)ds \right) \\ &\quad + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^\eta \eta^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2} a(s)ds + \int_\eta^1 \eta^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2} a(s)ds \right) \\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (1-s)^{\alpha-2} a(s)ds + \int_t^1 (1-s)^{\alpha-2} a(s)ds \right) \\ &\quad + \frac{\mu \eta^{\alpha-2} t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^\eta (1-s)^{\alpha-2} a(s)ds + \int_\eta^1 (1-s)^{\alpha-2} a(s)ds \right) \\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} a(s)ds + \frac{\mu \eta^{\alpha-2} t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} a(s)ds \\ &= \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\mu \eta^{\alpha-2} t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \right) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} a(s)ds \\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} a(s)ds \leq \frac{t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^1 a(s)ds \\ &= \frac{q(t)}{d\Gamma(\alpha)} \|a\|_1 \leq \frac{\|a\|_1}{d\Gamma(\alpha)} \leq k. \end{aligned}$$

On définit alors l'ensemble

$$\Omega = \{\tilde{u} \in K : \|\tilde{u}\| < k\},$$

on a alors

$$\|T\tilde{u}\| \leq \|\tilde{u}\|, \forall \tilde{u} \in K \cap \partial\Omega.$$

Par le le théorème de l'indice du point fixe Théorème 1.2.4 Théorème 1.2.4, on peut voir que

$$i(T, \Omega, K) = 1. \quad (3.15)$$

(b) Soit à présent $r \in \left] \frac{2\|M\|_1}{d\Gamma(\alpha)}, k \right[$ et par le fait que $f_0 = \infty$, il va exister $m > \frac{2\Lambda_2}{\gamma^2}$, telle que

$$F(t, \tilde{u}(t)) \geq f(t, \tilde{u}(t) - w(t)) \geq m(\tilde{u}(t) - w(t)), 0 < \tilde{u} \leq r, 0 \leq t \leq 1.$$

On considère l'ensemble

$$\Omega_1 = \{\tilde{u} \in K : \|\tilde{u}\| < r\}$$

pour tout $\tilde{u} \in \partial\Omega_1$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) - w(t) &\geq \tilde{u}(t) - \frac{\|M\|_1}{d\Gamma(\alpha)}q(t) \\ &\geq \tilde{u}(t) - \frac{r}{2}q(t) \\ &\geq q(t) \|\tilde{u}\| - \frac{r}{2}q(t) \\ &= \left(r - \frac{r}{2}\right)q(t) = \frac{r}{2}q(t), \end{aligned}$$

donc,

$$\tilde{u}(t) - w(t) \geq \frac{1}{2}r\gamma, \quad \tau \leq t \leq 1,$$

alors pour tout $t \in [0, 1]$ et $\tilde{u} \in \partial\Omega_1$, on a

$$\begin{aligned} (T\tilde{u})(t) &= \int_0^1 G(t, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds \\ &\geq \int_0^1 q(t)G(1, s)m(\tilde{u}(s) - w(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)m(\tilde{u}(s) - w(s))ds \\ &\geq \gamma \int_\tau^1 G(1, s)m(\tilde{u}(s) - w(s))ds + \frac{\mu \tau^{\alpha-1}}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s)m(\tilde{u}(s) - w(s))ds \\ &= \gamma m \left(\int_\tau^1 G(1, s)(\tilde{u}(s) - w(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s)(\tilde{u}(s) - w(s))ds \right) \\ &\geq \frac{1}{2}r\gamma^2 m \left(\int_\tau^1 G(1, s)ds + \frac{\mu}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s)ds \right) \\ &\geq r = \|\tilde{u}\|. \end{aligned}$$

et par suite

$$\|T\tilde{u}\| \geq \|\tilde{u}\|, \forall \tilde{u} \in K \cap \partial\Omega_1.$$

Par le le théorème de l'indice du point fixe Théorème 1.2.4 Théorème 1.2.4, on déduit que

$$i(T, \Omega_1, K) = 0. \quad (3.16)$$

(c) De plus par $f_\infty = \infty$, on peut toujours choisir $l > 0$ et $m > \frac{2\Lambda_2}{\gamma^2}$, tels que

$$F(t, \tilde{u}) \geq f(t, \tilde{u}(t) - w(t)) \geq m(\tilde{u}(t) - w(t)), \tilde{u} - w \geq l, 0 \leq t \leq 1.$$

Posons,

$$R > \max \left\{ l, k, \frac{2\|M\|_1}{d\Gamma(\alpha)} \right\}$$

et

$$\Omega_2 = \{\tilde{u} \in K : \|\tilde{u}\| < R\},$$

pour tout $\tilde{u} \in \partial\Omega_2$, on a alors

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) - w(t) &\geq \tilde{u}(t) - \frac{\|M\|_1}{d\Gamma(\alpha)}q(t) \geq \tilde{u}(t) - \frac{R}{2}q(t) \geq q(t)\|\tilde{u}\| - \frac{R}{2}q(t) \\ &= \left(R - \frac{R}{2}\right)q(t) = \frac{1}{2}Rq(t), \end{aligned}$$

donc,

$$\tilde{u}(t) - w(t) \geq \frac{1}{2}R\gamma, \tau \leq t \leq 1,$$

et pour $t \in [0, 1]$ et $\tilde{u} \in \partial\Omega_2$, on a

$$\begin{aligned} (T\tilde{u})(t) &= \int_0^1 G(t, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds \\ &\geq \int_0^1 q(t)G(1, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds \\ &\geq \gamma \int_\tau^1 G(1, s)m(\tilde{u}(s) - w(s))ds + \frac{\mu \tau^{\alpha-1}}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s)m(\tilde{u}(s) - w(s))ds \\ &\geq \frac{1}{2}R\gamma^2m \left(\int_\tau^1 G(1, s)ds + \frac{\mu}{d} \int_\tau^1 G_1(\eta, s)ds \right) \\ &\geq R = \|\tilde{u}\|, \end{aligned}$$

on obtient alors

$$\|T\tilde{u}\| \geq \|\tilde{u}\|, \forall \tilde{u} \in K \cap \partial\Omega_2.$$

Alors par le Théorème 1.2.4, on a

$$i(T, \Omega_2, K) = 0. \tag{3.17}$$

Encore une fois par (3.15), (3.16), (3.17), et $r < k < R$, on arrive à

$$i(T, \Omega \setminus \bar{\Omega}_1, K) = 1 \text{ et } i(T, \Omega_2 \setminus \bar{\Omega}, K) = -1$$

Donc l'opérateur T possède deux points fixes $\tilde{u}_1 \in K \cap (\Omega \setminus \bar{\Omega}_1)$, $\tilde{u}_2 \in K \cap (\Omega_2 \setminus \bar{\Omega})$,

$$r \leq \|\tilde{u}_1\| \leq k \leq \|\tilde{u}_2\| \leq R.$$

Finalement, nous allons montrer que $\tilde{u}_1(t) \geq w(t), \tilde{u}_2(t) \geq w(t), t \in (\tau, 1)$.

Par les Lemmes 3.2.3 et 3.2.4, pour $t \in (\tau, 1)$, on a

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1(t) &\geq \|\tilde{u}_1\| q(t) \geq r q(t) > \frac{\|M\|_1}{d\Gamma(\alpha)} q(t) \geq w(t), \\ \tilde{u}_2(t) &\geq \|\tilde{u}_2\| q(t) \geq R q(t) > \frac{\|M\|_1}{d\Gamma(\alpha)} q(t) \geq w(t).\end{aligned}$$

i.e.,

$$u_1(t) = \tilde{u}_1(t) - w(t), u_2(t) = \tilde{u}_2(t) - w(t)$$

sont deux solutions positives pour le problème (3.1)-(3.2).

Ce qui complète la preuve du Théorème 3.3.1. ■

3.4 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de notre principal résultat.

Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(t) + \frac{\cos u}{1+t^2} + \frac{4}{\pi^2} t^2 u^2 = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (3.18)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) = \frac{1}{\sqrt{8}} u'(\frac{1}{2}), \quad (3.19)$$

où $\alpha = \frac{5}{2}, \mu = \frac{1}{\sqrt{8}}, \eta = \frac{1}{2}$ et $f(t, u) = \frac{\cos u}{1+t^2} + \frac{4}{\pi^2} t^2 u^2$.

On peut alors facilement montrer que

$$f(t, u) = \frac{\cos u}{1+t^2} + \frac{4}{\pi^2} t^2 u^2 \geq -\frac{1}{1+t^2} = -M(t),$$

clairement, pour presque tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\int_0^1 M(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4},$$

et

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} M(s) ds = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-s}}{1+s^2} ds < +\infty.$$

Pour $\|u\| = k = \pi$, on choisit $a(t) = \frac{1}{1+t^2} + 4t^2$, et on obtient

$$|f(t, u)| \leq a(t), \quad \|u\| \leq \pi, \text{ p.p. } t \in [0, 1].$$

Donc, les hypothèses (H1), (H2) et (H3) sont vérifiées. Par la suite, on peut facilement montrer que $f_0 = f_\infty = \infty$, i.e., les conditions (A1), (A2) sont réalisées. On peut alors choisir

$$\frac{\|M\|_1}{(1-\mu\eta^{\alpha-2})\Gamma(\alpha)} < r < \pi < R$$

et par le Théorème 3.3.1, on peut montrer que le problème (3.18)-(3.19) possède au moins deux solutions positives u_1, u_2 telles que

$$r < \|u_1\| < \pi < \|u_2\| < R.$$

Solutions positives d'une EDF singulière et semi-positive ([55])

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions positives du problème aux limites non linéaire singulier suivant

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) + f(t, u(t)) + a(t) = 0, \quad 2 < \alpha \leq 3, \quad 0 < t < 1, \quad (4.1)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \mu u'(\eta) = \lambda, \quad (4.2)$$

où α est un nombre réel, D_{0+}^{α} est la dérivation standard de Riemann-Liouville d'ordre α , $\eta \in]0, 1[$, $\mu \in \left[0, \frac{1}{\eta^{\alpha-2}}\right[$ sont des constantes arbitraires, $f :]0, 1[\times [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction continue et $a :]0, 1[\rightarrow]-\infty, +\infty[$ est Lebesgue intégrable. Par solution positive, on entend une fonction u positive sur $]0, 1[$ et satisfaisant (4.1)-(4.2).

Tout au long de ce chapitre, on supposera que les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H1). Pour tout $t \in]0, 1[$, $f(t, 1) > 0$, il existe des constantes $m_1 \geq m_2 > 1$ telles que, pour tout $t \in]0, 1[$, $u \in [0, +\infty[$,

$$c^{m_1} f(t, u) \leq f(t, cu) \leq c^{m_2} f(t, u), \quad \forall c \in [0, 1].$$

(H2). Il existe $\rho > 0$, tel que

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} a_-(s) ds = \rho > 0, \quad (4.3)$$

et

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} [f(s, 1) + a_+(s)] ds < \bar{D}, \quad (4.4)$$

où,

$$\bar{D} = \frac{\rho}{\left(\frac{2\rho}{(1-\mu\eta^{\alpha-2})\Gamma(\alpha)} + 1\right)^{m_1} + 1},$$

$$a_+(t) = \max \{a(t), 0\}, a_-(t) = \max \{-a(t), 0\},$$

Remarque 4.1.1. Pour tout $c \geq 1$, $(t, u) \in]0, 1[\times [0, +\infty[$, on a

$$c^{m_2} f(t, u) \leq f(t, cu) \leq c^{m_1} f(t, u). \quad (4.5)$$

En fait, pour tout $c \geq 1$, $(t, u) \in]0, 1[\times [0, +\infty[$, par (4.3) on obtient

$$f(t, u) = f\left(t, \frac{1}{c}.cu\right) \leq \left(\frac{1}{c}\right)^{m_2} f(t, cu),$$

donc,

$$c^{m_2} f(t, u) \leq f(t, cu).$$

D'un autre côté, par (4.3) on obtient,

$$f(t, u) = f\left(t, \frac{1}{c}.cu\right) \geq \left(\frac{1}{c}\right)^{m_1} f(t, cu),$$

et donc,

$$f(t, cu) \leq c^{m_1} f(t, u).$$

Ainsi, quand $c \geq 1$, on a

$$c^{m_2} f(t, u) \leq f(t, cu) \leq c^{m_1} f(t, u).$$

Remarque 4.1.2. Si f vérifiée l'hypothèse (H1), alors pour tout $t \in]0, 1[$, $f(t, \cdot)$ est croissante sur $[0, +\infty[$, et pour tout $[a, b] \subset]0, 1[$,

$$f_\infty = \lim_{u \rightarrow +\infty} \min_{t \in [a, b]} \frac{f(t, u)}{u} = +\infty. \quad (4.6)$$

En fait, pour tout $t \in]0, 1[$, $u, v \in [0, +\infty[$, et sans perte de généralité, soit $0 \leq u \leq v$. Si $v = 0$, alors $f(t, u) \leq f(t, v)$ est clairement vérifiée. Si $v \neq 0$, soit $c = \frac{u}{v}$, alors $0 \leq c \leq 1$. Il découle de (4.3) que

$$f(t, u) = f(t, cv) \leq c^{m_2} f(t, v) \leq f(t, v).$$

Donc $f(t, u)$ est croissante sur $u \in [0, +\infty[$.

D'un autre côté, choisissons $u > 1$. Il découle de (4.6) que

$$f(t, u) = f(t, u.1) \geq u^{m_2} f(t, 1).$$

Par suite

$$\frac{f(t, u)}{u} \geq u^{m_2-1} f(t, 1), \quad \forall t \in]0, 1[.$$

Il découle de l'hypothèse (H1), pour tout $[a, b] \subset]0, 1[$, $\forall t \in [a, b]$, on a

$$\min_{t \in [a, b]} \frac{f(t, u)}{u} \geq \min_{t \in [a, b]} u^{m_2-1} f(t, 1) > 0.$$

et par conséquent

$$f_\infty = \lim_{u \rightarrow +\infty} \min_{t \in [a, b]} \frac{f(t, u)}{u} = +\infty.$$

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit :

Dans la deuxième section, on présente quelques lemmes qui nous seront utiles pour démontrer nos principaux résultats. La Section trois est dédiée à prouver l'existence de solutions positives pour le problème (4.1)-(4.2). Dans la quatrième section, on donne quelques exemples pour illustrer les résultats que nous avons obtenus.

4.2 Préliminaires

Suivant un raisonnement similaire à celle donné au préliminaires du premier chapitre Considérons l'espace de Banach $E = C([0, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \max \{|u(t)| : t \in [0, 1]\}.$$

Soit $E^+ = \{u \in E : u(t) \geq 0\}$ un cône de E , et $K \subset E^+$ le cône défini par

$$K = \{u \in E^+ : u(t) \geq q(t) \|u\|_\infty, \forall t \in]0, 1[\}, q(t) = t^{\alpha-1}.$$

On démontrent les lemmes suivants

Lemme 4.2.1. *Soit $h \in E^+$, alors le problème aux limites*

$$D_{0+}^\alpha u(t) + h(t) = 0, \quad 2 < \alpha \leq 3, 0 < t < 1, \quad (4.7)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \mu u'(\eta) = \lambda, \quad (4.8)$$

a une solution unique

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) h(s) ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) h(s) ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d}, \quad (4.9)$$

où $G(t, s)$ et $G_1(\eta, s)$ sont définies comme dans le premier chapitre,

$$d = 1 - \mu \eta^{\alpha-2} > 0.$$

De plus cette solution u satisfait :

$$u(t) \geq q(t) \|u\|, \quad \forall t \in [0, 1], \quad q(t) = t^{\alpha-1}. \quad (4.10)$$

On considère à présent le problème auxiliaire non linéaire suivant

Lemme 4.2.2. *Supposons que $w(t)$ est solution du problème*

$$D_{0+}^\alpha u(t) + a_-(t) = 0, \quad 2 < \alpha \leq 3, 0 < t < 1, \quad (4.11)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \mu u'(\eta) = 0, \quad (4.12)$$

alors,

$$0 \leq w(t) \leq \frac{\rho}{d\Gamma(\alpha)} q(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad q(t) = t^{\alpha-1}. \quad (4.13)$$

Preuve. Pour $t \in [0, 1]$, nous pouvons avoir

$$\begin{aligned}
w(t) &= \int_0^1 G(t, s) a_-(s) ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) a_-(s) ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-2} a_-(s) ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 \eta^{\alpha-2} (1-s)^{\alpha-2} a_-(s) ds \right) \\
&= \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\mu \eta^{\alpha-2} t^{\alpha-1}}{d \Gamma(\alpha)} \right) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} a_-(s) ds \\
&= \frac{t^{\alpha-1}}{d \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} a_-(s) ds = \frac{\rho}{d \Gamma(\alpha)} q(t).
\end{aligned}$$

D'où la preuve du lemme 4.2.2. ■

Pour $u \in E$, on pose $[u(t)]^*$

$$[u(t)]^* = \begin{cases} u(t), & u(t) \geq 0, \\ 0, & u(t) < 0. \end{cases}$$

On définit la fonction modifiée suivante

$$F(t, u) = f(t, [u(t) - w(t)]^*) + a_+(t),$$

et on considère le problème aux limite non-linéaire associé a cette fonction F

$$D_{0+}^\alpha u(t) + F(t, u) = 0, \quad 2 < \alpha \leq 3, 0 < t < 1, \quad (4.14)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \mu u'(\eta) = \lambda, \quad (4.15)$$

où $w(t)$ est la solution positive du problème (4.11)-(4.12).

Lemme 4.2.3. Soit $\tilde{u}(t)$ telle que $\tilde{u}(t) \geq w(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$ une solution positive du problème (4.14)-(4.15), alors

$$u(t) = \tilde{u}(t) - w(t)$$

est une solution positive du problème (4.1)-(4.2).

Preuve. En fait $\tilde{u}(t)$ est une solution positive du problème (4.14)-(4.15) telle que $\tilde{u}(t) \geq w(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Soit $u(t) = \tilde{u}(t) - w(t)$, alors $u(t) \geq 0$, et $u(t) = [\tilde{u}(t) - w(t)]^*$, $t \in [0, 1]$. Puisque $w(t)$ est l'unique solution positive du problème (4.11)-(4.12), pour $t \in [0, 1]$, on a

$$D_{0+}^\alpha \tilde{u}(t) + F(t, \tilde{u}) = 0,$$

i.e.,

$$D_{0+}^\alpha u(t) + D_{0+}^\alpha w(t) + f(t, [\tilde{u}(t) - w(t)]^*) + a_+(t) = 0.$$

il découle alors de $a(t) = a_+(t) - a_-(t)$ que

$$D_{0+}^\alpha u(t) + D_{0+}^\alpha w(t) + f(t, u(t)) + a(t) + a_-(t) = 0.$$

Donc

$$D_{0+}^\alpha u(t) + f(t, u(t)) + a(t) = 0.$$

D'un autre côté, il est clair que nous avons

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \mu u'(\eta) = \lambda.$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 4.2.3. ■

Comme conséquence, nous allons localiser notre étude sur le problème (4.14)-(4.15). Clairement, (4.14)-(4.15) est équivalent à l'équation intégrale

$$\tilde{u}(t) = \int_0^1 G(t, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d}.$$

Et par voie de conséquence, sa solution est solution du problème de point fixe suivant $T\tilde{u} = \tilde{u}$ avec l'opérateur $T : E^+ \rightarrow E^+$ donné par

$$(T\tilde{u})(t) = \int_0^1 G(t, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d}.$$

Dans le but d'utiliser le théorème de l'indice du point fixe (Théorème 1.2.4), on doit montrer que $T : K \rightarrow K$ est complètement continu.

Suivant un raisonnement analogue à celui de la preuve du Lemme 2.2.5 du premier chapitre.

Considérons l'hypothèse suivante :

$$f : [0, 1] \times [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\text{ est continue.} \quad (H^*1)$$

Lemme 4.2.4. *Supposons que (H*1), (H1) et (H2) soient vérifiées. Alors $T : K \rightarrow K$ est complètement continu.*

Preuve. Comme $G(t, s), G_1(\eta, s) \geq 0$, alors $T\tilde{u}(s) \geq 0$ pour tout $u \in K$.

(a). On commence par montrer que $T(K) \subset K$. En fait, on a

$$\begin{aligned} T\tilde{u}(s) &= \int_0^1 G(t, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \\ &\leq \int_0^1 G(1, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\lambda}{(\alpha-1)d}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\|Tu\| \leq \int_0^1 G(1, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\lambda}{(\alpha-1)d}.$$

D'un autre côté, le Lemme 2.2.1 implique que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} T\tilde{u}(s) &= \int_0^1 G(t, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \\ &\geq t^{\alpha-1} \int_0^1 G(1, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \\ &= t^{\alpha-1} \left(\int_0^1 G(1, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\lambda}{(\alpha-1)d} \right), \end{aligned}$$

et par suite, pour $u \in K$ on a

$$T\tilde{u}(s) \geq q(t) \|T\tilde{u}\|, \quad q(t) = t^{\alpha-1}.$$

Par conséquence $T(K) \subset K$.

(b). Nous montrons à présent que T est continu. En fait, soit

$$N = \int_0^1 G(1, s) ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) ds, \quad (4.16)$$

supposons que $\tilde{u}_n, \tilde{u}_0 \in K$ et $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_0$ ($n \rightarrow \infty$), alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\|\tilde{u}_0\| \leq c < \infty$, $\|\tilde{u}_n\| \leq c < \infty$, pour chaque $n \geq 0$. puisque $f(t, \cdot)$ est continue sur $[0, c]$, elle est uniformément continue. Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1| < \delta$ implique que

$$|F(t, \tilde{u}_2(t)) - F(t, \tilde{u}_1(t))| = |f(t, [\tilde{u}_2(t) - w(t)]^*) - f(t, [\tilde{u}_1(t) - w(t)]^*)| < \frac{\varepsilon}{N}.$$

Comme $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|\tilde{u}_n - \tilde{u}_0\| < \delta$ pour $n \geq n_0$. Donc, nous avons $|F(t, \tilde{u}_n(t)) - F(t, \tilde{u}_0(t))| < \frac{\varepsilon}{N}$, pour $n \geq n_0$ and $t \in [0, 1]$.

Ce qui implique que pour $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |(T\tilde{u}_n)(t) - (T\tilde{u}_0)(t)| &\leq \left| \int_0^1 G(t, s) [F(s, \tilde{u}_n(s)) - F(s, \tilde{u}_0(s))] ds \right| \\ &\quad + \left| \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) [F(s, \tilde{u}_n(s)) - F(s, \tilde{u}_0(s))] ds \right| \\ &\leq \int_0^1 G(t, s) |F(s, \tilde{u}_n(s)) - F(s, \tilde{u}_0(s))| ds \\ &\quad + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) |F(s, \tilde{u}_n(s)) - F(s, \tilde{u}_0(s))| ds \\ &\leq \int_0^1 G(1, s) |F(s, \tilde{u}_n(s)) - F(s, \tilde{u}_0(s))| ds \\ &\quad + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) |F(s, \tilde{u}_n(s)) - F(s, \tilde{u}_0(s))| ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{N} \left(\int_0^1 G(1, s) ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) ds \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{N} (N) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, $T : K \rightarrow K$ est continu.

(c). Nous montrons à présent que T est un opérateur compact. Soit $B \subset K$ un ensemble borné quelconque, alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\|\tilde{u}\| \leq c$, pour tout $\tilde{u} \in B$. De plus, pour tout $\tilde{u} \in B$, $t \in [0, 1]$, on a

$$[\tilde{u}(t) - w(t)]^* = \tilde{u}(t) - w(t) \leq \tilde{u}(t) \leq \|\tilde{u}\| \leq c < c + 1,$$

et par (4.3) ainsi que le remarque 4.1.2, on a aussi

$$\begin{aligned}
F(t, \tilde{u}(t)) &= f(t, [\tilde{u}(t) - w(t)]^*) + a^+(t) \\
&\leq f(t, c + 1) + a^+(t) \\
&\leq (c + 1)^{m_1} f(t, 1) + a_+(t) \\
&\leq ((c + 1)^{m_1} + 1) (f(t, 1) + a_+(t)) \\
&= \bar{C} (f(t, 1) + a_+(t)),
\end{aligned}$$

où

$$\bar{C} = (c + 1)^{m_1} + 1.$$

Par conséquence, pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
T\tilde{u}(t) &= \int_0^1 G(t, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \\
&\leq \bar{C} \left(\int_0^1 G(1, s) [f(s, 1) + a_+(s)] ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) [f(s, 1) + a_+(s)] ds \right) \\
&\quad + \frac{\lambda}{(\alpha-1)d} \\
&\leq \frac{\bar{C}}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} [f(s, 1) + a_+(s)] ds + \frac{\mu\eta^{\alpha-2}}{d} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} [f(s, 1) + a_+(s)] ds \right) \\
&\quad + \frac{\lambda}{(\alpha-1)d} \\
&\leq \frac{\bar{C}}{d\Gamma(\alpha)} \bar{D} + \frac{\lambda}{(\alpha-1)d} < \infty,
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que $T(B)$ est uniformément borné.

(d). Enfin, on montre que $T(B)$ est équicontinu sur $[0, 1]$. Pour tout $\tilde{u} \in B$, $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left| \frac{d}{dt} (T\tilde{u})(t) \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} G(t, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{(\alpha-1)\mu t^{\alpha-2}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\lambda t^{\alpha-2}}{d} \right| \\
&\leq \int_0^1 G_1(t, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{(\alpha-1)\mu t^{\alpha-2}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\lambda t^{\alpha-2}}{d} \\
&\leq \frac{\bar{C}t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{(\alpha-1)\mu\eta^{\alpha-2}}{d} \right) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} [f(s, 1) + a_+(s)] ds + \frac{\lambda t^{\alpha-2}}{d} \\
&= \frac{\bar{C}t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{(\alpha-1)\mu\eta^{\alpha-2}}{d} \right) \bar{D} + \frac{\lambda t^{\alpha-2}}{d} \\
&= \left(\frac{\bar{C} [1 + (\alpha-2)\mu\eta^{\alpha-2}]}{\Gamma(\alpha)d} \bar{D} + \frac{\lambda}{d} \right) t^{\alpha-2} \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

donc pour chaque $\tilde{u} \in B$, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} (T\tilde{u})(t) \right| dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\frac{\bar{C} [1 + (\alpha - 2) \mu \eta^{\alpha-2}] \bar{D}}{\Gamma(\alpha)d} + \frac{\lambda}{d} \right) t^{\alpha-2} dt \\ &= \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{\bar{C} [1 + (\alpha - 2) \mu \eta^{\alpha-2}] \bar{D}}{\Gamma(\alpha)d} + \frac{\lambda}{d} \right) \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Par la continuité de l'intégrale, on sait que $T(B)$ est équicontinu sur $[0, 1]$. Ainsi, par le théorème d'Ascoli-Arzelà on sait que $T(B)$ est un ensemble relativement compact, i.e., T est un opérateur compact.

(e). De plus, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on peut aisément montrer que $T : K \rightarrow K$ est un opérateur complètement continu.

Ce qui achève la preuve du Lemme 4.2.4. \blacksquare

Nous allons à présent traiter le cas plus général où $f :]0, 1[\times [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est continue.

On définit, pour ($n \geq 2$), la fonction

$$f_n(t, u(t)) = \begin{cases} f(\frac{1}{n}, u(\frac{1}{n})), & 0 < t \leq \frac{1}{n}, \\ f(t, u(t)), & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 - \frac{1}{n} \\ f(1 - \frac{1}{n}, u(1 - \frac{1}{n})), & 1 - \frac{1}{n} \leq t < 1. \end{cases}$$

Alors $f_n : [0, 1] \times [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est continue.

On définit l'opérateur $T_n : E^+ \rightarrow E^+$ par

$$(T_n \tilde{u})(t) = \int_0^1 G(t, s) F_n(s, \tilde{u}(s)) ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) F_n(s, \tilde{u}(s)) ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha - 1) d},$$

où,

$$\begin{aligned} F_n(t, \tilde{u}(t)) &= f_n(t, [\tilde{u}(t) - w(t)]^*) + a_+(t) \\ &\leq f(t, [\tilde{u}(t) - w(t)]^*) + a_+(t) \\ &= F(t, \tilde{u}(t)) \end{aligned}$$

Lemme 4.2.5. *Supposons que (H1) et (H2) sont vérifiées. Alors $T : K \rightarrow K$ est complètement continu.*

Preuve. Par des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du Lemme 4.2.4, il devient évident que $T_n : K \rightarrow K$ est complètement continu.

Soit

$$B_r = \{\tilde{u} \in K : \|\tilde{u}\| \leq r\}.$$

En remarquant que $[\tilde{u}(t) - w(t)]^* \leq \tilde{u}(t) \leq r < r + 1$.

Alors, pour tout $t \in [0, 1]$, et pour chaque $r > 0$ fixé, et $u \in B_r$, par (H1), (H2), le Lemme 4.2.2, et la continuité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned}
& |T_n u(t) - T u(t)| \\
&= \left| \int_0^1 G(t, s) [F_n(s, \tilde{u}(s)) - F(s, \tilde{u}(s))] ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) [F_n(s, \tilde{u}(s)) - F(s, \tilde{u}(s))] ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{1}{n}} s(1-s)^{\alpha-2} F(s, \tilde{u}(s)) ds + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 s(1-s)^{\alpha-2} F(s, \tilde{u}(s)) ds \\
&+ \frac{\mu t^{\alpha-1} \eta^{\alpha-2}}{d \Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} (1-s)^{\alpha-2} F(s, \tilde{u}(s)) ds + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 (1-s)^{\alpha-2} F(s, \tilde{u}(s)) ds \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_{e(n)} s(1-s)^{\alpha-2} F(s, \tilde{u}(s)) ds + \frac{\mu t^{\alpha-1} \eta^{\alpha-2}}{d} \int_{e(n)} (1-s)^{\alpha-2} F(s, \tilde{u}(s)) ds \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{e(n)} s(1-s)^{\alpha-2} (f(s, [\tilde{u}(s) - w(s)]^* + a_+(s)) ds \\
&+ \frac{\mu t^{\alpha-1} \eta^{\alpha-2}}{d \Gamma(\alpha)} \int_{e(n)} (1-s)^{\alpha-2} (f(s, [\tilde{u}(s) - w(s)]^* + a_+(s)) ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{e(n)} s(1-s)^{\alpha-2} (f(s, r+1) + a_+(s)) ds \\
&+ \frac{\mu t^{\alpha-1} \eta^{\alpha-2}}{d \Gamma(\alpha)} \int_{e(n)} (1-s)^{\alpha-2} [f(s, f(s, r+1) + a_+(s)) ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{e(n)} s(1-s)^{\alpha-2} [(r+1)^{m_1} f(s, 1) + a_+(s)] ds \\
&+ \frac{\mu t^{\alpha-1} \eta^{\alpha-2}}{d \Gamma(\alpha)} \int_{e(n)} (1-s)^{\alpha-2} [(r+1)^{m_1} f(s, 1) + a_+(s)] ds \\
&\leq \left(\frac{((r+1)^{m_1} + 1)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\mu t^{\alpha-1} \eta^{\alpha-2}}{d \Gamma(\alpha)} \right) \int_{e(n)} (1-s)^{\alpha-2} [f(s, 1) + a_+(s)] ds \\
&\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),
\end{aligned}$$

où $e(n) = [0, \frac{1}{n}] \cup [1 - \frac{1}{n}, 1]$. Alors, T_n converge uniformément vers T quand $n \rightarrow \infty$, et par suite T est complètement continu. Ce qui complète la preuve. ■

4.3 Résultat principal

Nous sommes à présent en position d'énoncer et de démontrer notre résultat d'existence pour le problème (4.1)-(4.2).

Théorème 4.3.1. *Supposons que (H1) et (H2) soient vérifiées. Alors il existe une constante $\lambda^* > 0$ telle que pour tout $\lambda \in]0, \lambda^*[$, le problème (4.1)-(4.2) possède au moins une solution positive.*

Preuve. (a) Premièrement, pour $\tilde{u} \in K$, $r < \frac{2\rho}{d\Gamma(\alpha)}$ tel que $\|\tilde{u}\| = r$. Par les Lemmes 4.2.1 et 4.2.2 on a

$$\begin{aligned}\tilde{u}(s) - w(s) &\geq \|\tilde{u}\| q(s) - \frac{\rho}{d\Gamma(\alpha)} q(s) \\ &> \left(r - \frac{r}{2}\right) q(s) \\ &= \frac{r}{2} q(s) \geq 0.\end{aligned}$$

Par $[\tilde{u}(s) - w(s)]^* = \tilde{u}(s) - w(s) \leq \tilde{u}(s) \leq r < r + 1$, on a $\|\tilde{u} - w\| < r + 1$, ainsi par (H1) et (H2), on a

$$\begin{aligned}F(s, \tilde{u}(s)) &= f(s, [\tilde{u}(s) - w(s)]^*) + a_+(s) \\ &\leq f(s, r + 1) + a_+(s) \\ &\leq ((r + 1)^{m_1} + 1) (f(s, 1) + a_+(s)).\end{aligned}$$

Choisissons,

$$\lambda^* = \frac{d(\alpha - 1)r}{2}$$

Par (4.5) et par le Lemme 4.2.1, on a

$$\begin{aligned}(T\tilde{u})(t) &= \int_0^1 G(t, s) F(s, \tilde{u}(s)) ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) F(s, \tilde{u}(s)) ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)d} \\ &\leq \int_0^1 G(1, s) F(s, \tilde{u}(s)) ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s) F(s, \tilde{u}(s)) ds + \frac{\lambda}{(\alpha - 1)d} \\ &\leq \frac{((r + 1)^{m_1} + 1)}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{\mu\eta^{\alpha-2}}{d}\right) \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-2} [f(s, 1) + a_+(s)] ds + \frac{\lambda}{(\alpha - 1)d} \\ &= \frac{((r + 1)^{m_1} + 1)}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-2} [f(s, 1) + a_+(s)] ds + \frac{\lambda}{(\alpha - 1)d} \\ &\leq \frac{((r + 1)^{m_1} + 1)r}{2\rho} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-2} [f(s, 1) + a_+(s)] ds + \frac{\lambda}{(\alpha - 1)d} \\ &\leq \frac{((r + 1)^{m_1} + 1)r}{2\rho} \frac{\rho}{\left(\frac{2\rho}{d\Gamma(\alpha)} + 1\right)^{m_1} + 1} + \frac{\lambda}{(\alpha - 1)d} \\ &\leq \frac{((r + 1)^{m_1} + 1)r}{2\rho} \frac{\rho}{\left(\frac{2\rho}{d\Gamma(\alpha)} + 1\right)^{m_1} + 1} + \frac{d(\alpha - 1)r}{2(\alpha - 1)d} \\ &\leq \frac{r}{2} \left[\frac{\left(\left(\frac{2\rho}{d\Gamma(\alpha)} + 1\right)^{m_1} + 1\right)}{\left(\frac{2\rho}{d\Gamma(\alpha)} + 1\right)^{m_1} + 1} + 1 \right] \\ &= r\end{aligned}$$

Soit

$$\Omega = \{\tilde{u} \in E : \|\tilde{u}\| < r\},$$

on a

$$\|T\tilde{u}\| \leq \|\tilde{u}\|, \quad \forall \tilde{u} \in K \cap \partial\Omega.$$

Alors par le théorème de l'indice du point fixe (Théorème 1.2.4), on a

$$i(T, \Omega_r, K) = 1. \quad (4.17)$$

(c) De plus, choisissons a, b et $M > 0$, telles que

$$[a, b] \subset]0, 1[, \quad M > \frac{2}{a^{2\alpha-2}} \left(\int_a^b G(1, s) ds + \frac{\mu}{d} \int_a^b G_1(\eta, s) ds \right)^{-1}$$

Par $f_\infty = \infty$, il va exister $R_1 > 0$ tel que, pour tout $t \in [a, b]$, $\tilde{u} \geq R_1$

$$\frac{f(t, \tilde{u})}{\tilde{u}} \geq \min_{t \in [a, b]} \frac{f(t, \tilde{u})}{\tilde{u}} \geq M.$$

Soit encore

$$f(t, \tilde{u}) \geq M\tilde{u}, \quad t \in [a, b], \quad \tilde{u} \geq R_1.$$

En posant

$$R = \max \{R_1, r\},$$

et

$$\Omega_R = \{\tilde{u} \in K : \|\tilde{u}\| < R\},$$

alors pour tout $\tilde{u} \in K \cap \partial\Omega_R$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) - w(t) &\geq \tilde{u}(t) - \frac{\rho}{d\Gamma(\alpha)} q(t) \\ &\geq \tilde{u}(t) - \frac{R}{2} q(t) \geq q(t) \|\tilde{u}\| - \frac{R}{2} q(t) \\ &= \left(R - \frac{R}{2} \right) q(t) = \frac{1}{2} R a^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

donc,

$$\tilde{u}(t) - w(t) \geq \frac{1}{2} R a^{\alpha-1} > 0, \quad a \leq t \leq b,$$

et par (H1) et (H2), on a

$$\begin{aligned} F(s, \tilde{u}(s)) &= f(s, [\tilde{u}(s) - w(s)]^*) + a_+(s) \\ &= f(s, \tilde{u}(s) - w(s)) + a_+(s) \\ &\geq f(s, \tilde{u}(s) - w(s)) \\ &\geq M [\tilde{u}(s) - w(s)] \\ &\geq \frac{M}{2} R a^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Donc, pour $t \in [a, b]$ et $\tilde{u} \in K \cap \partial\Omega_R$, on obtient

$$\begin{aligned}
(T\tilde{u})(t) &= \int_0^1 G(t, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)d} \\
&\geq \int_0^1 G(t, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds \\
&\geq \int_0^1 q(t)G(1, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds \\
&= q(t) \left(\int_0^1 G(1, s)F(s, \tilde{u}(s))ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)F(s, \tilde{u}(s))ds \right) \\
&\geq a^{\alpha-1} \left(\int_a^b G(1, s) \left(\frac{M}{2} Ra^{\alpha-1} \right) ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_a^b G_1(\eta, s) \left(\frac{M}{2} Ra^{\alpha-1} \right) ds \right) \\
&= \frac{M}{2} Ra^{2\alpha-2} \left(\int_a^b G(1, s)ds + \frac{\mu}{d} \int_a^b G_1(\eta, s)ds \right) \\
&= \frac{M}{2} Ra^{2\alpha-2} \left(\int_a^b G(1, s)ds + \frac{\mu}{d} \int_a^b G_1(\eta, s)ds \right) \\
&\geq \frac{M}{2} Ra^{2\alpha-2} \left(\int_0^1 G(1, s)ds + \frac{\mu}{d} \int_0^1 G_1(\eta, s)ds \right) \\
&\geq R = \|\tilde{u}\|.
\end{aligned}$$

C'est pourquoi nous avons

$$\|T\tilde{u}\| \geq \|\tilde{u}\|, \quad \forall \tilde{u} \in K \cap \partial\Omega_R.$$

Alors par le théorème de l'indice du point fixe (Théorème 1.2.4), on a

$$i(T, \Omega_R, K) = 0. \quad (4.18)$$

Encore une fois par(4.17)-(4.18), et par la définition de l'indice du point fixe, on a

$$i(T, \Omega_R \setminus \overline{\Omega}_r, K) = -1.$$

L'opérateur T possède un point fixe $\tilde{u} \in K \cap (\Omega_R \setminus \overline{\Omega}_r)$, avec $r < \|\tilde{u}\| < R$.

Finalement il reste à montrer que $\tilde{u}(t) \geq w(t)$, $t \in]0, 1[$.

Par les Lemmes 4.2.1 et 4.2.2, pour $t \in]0, 1[$, on a

$$\tilde{u}(t) \geq \|\tilde{u}\| q(t) > r q(t) > \frac{\rho}{d\Gamma(\alpha)} q(t) \geq w(t),$$

i.e., $u(t) = \tilde{u}(t) - w(t)$ est une solution positive du problème (4.1)-(4.2). Ce qui termine la preuve du Théorème 4.3.1. ■

4.4 Exemple

Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$D_{0+}^{\frac{5}{2}}u(t) + \frac{u^{\frac{5}{2}}}{(1-t)\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (4.19)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) = \frac{1}{\sqrt{8}}u'(\frac{1}{2}), \quad (4.20)$$

où $\alpha = \frac{5}{2}, \mu = \frac{1}{\sqrt{8}}, \eta = \frac{1}{2}, f(t, u) = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\gamma^p(1-t)\sqrt{t}}, (p > 2, \gamma \geq 6)$ and $a(t) = -\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$.

Il est facile de voir $f :]0, 1[\times [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est continue et $a :]0, 1[\rightarrow]-\infty, +\infty[$ est Lebesgue intégrable. Pour tout $t \in]0, 1[$ on peut facilement montrer que, $f(t, 1) = \frac{1}{\gamma^p(1-t)\sqrt{t}} > 0$, et qu'il existe des constantes $m_1 = p \geq m_2 = \frac{p}{2} > 1$ telles que, pour tout $t \in]0, 1[, u \in [0, +\infty[$,

$$c^p f(t, u) \leq f(t, cu) = c^{p-1} \frac{u^{p-1}}{\gamma^p(1-t)\sqrt{t}} \leq c^{\frac{p}{2}} f(t, u), \quad \forall c \in [0, 1].$$

clairement, on a

$$a_+(t) = \max \{a(t), 0\} = \max \left\{ -\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}, 0 \right\} = 0$$

$$a_-(t) = \max \{-a(t), 0\} = \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}, 0 \right\} = \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Ainsi, les hypothèses (H1)-(H2) sont vérifiées. Par la suite, on peut aisément montrer que $f_\infty = \infty$. On choisit alors $0 < r < R$, et par le Théorème 4.3.1, on peut montrer que le problème (4.19)-(4.20) possède au moins une solution positive u et $r < \|u\| < R$, pour tout $\lambda \in]0, \lambda^*[$.

Solutions positives d'une EDF dans domaine non borné ([18])

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'est intéressé au résultat d'existence des solutions positives pour le problème aux limites :

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) + a(t)f(t, u(t)) = 0, t \in J = [0, +\infty[, \tag{5.1}$$

$$u(0) = u'(0) = 0, D_{0+}^{\alpha-1} u(+\infty) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)u(t)dt, \tag{5.2}$$

où D_{0+}^{α} , $D_{0+}^{\alpha-1}$ les dérivées fractionnaire de type Riemann-Liouville d'ordre α et $\alpha - 1$ respectivement, $2 < \alpha \leq 3$, $D_{0+}^{\alpha-1} u(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} D_{0+}^{\alpha-1} u(t)$ et $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard. Par solution positive, on entend une fonction u positive sur $]0, 1[$ et satisfaisant (5.1)-(5.2).

Tout au long de ce chapitre, nous supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :

(H₁). Pour tout $t \in J$ supposons que

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \varphi(t) dt = \mu < +\infty, \quad \mu \in]0, \Gamma(\alpha)[$$

(H₂). Il existe deux fonctions positives a et b définies sur $[0, +\infty[$ et une constante $\rho > 0$ telle que

$$|f(t, u(t))| \leq a(t) + b(t) |u(t)|^{\rho}$$

et

$$\int_0^{+\infty} a(t) dt = \bar{a} < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} (1 + t^{\alpha-1})^{\rho} b(t) dt = \bar{b} < +\infty.$$

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit :

Dans la deuxième section, nous présentons quelques lemmes qui seront utilisés pour prouver nos principaux résultats. La section trois est consacrée aux principaux résultats et leurs preuves et se termine par des exemples illustratifs.

L'outil principal de cet chapitre est l'Alternative non linéaire de Leray-Schauder (Théorème 1.2.3) combiné avec le critère de compacité de Corduneanu (Lemme 1.1.1).

5.2 Préliminaires

Dans le but de la recherche d'une représentation intégrale du problème aux limites (5.1)-(5.2) nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 5.2.1. *Soit $h \in C(J, \mathbb{R})$ telle que $0 < \int_0^\infty h(s)ds < +\infty$. Pour $\Gamma(\alpha) \neq \mu$, le problème aux limites*

$$D_{0+}^\alpha u(t) + h(t) = 0, \quad t \in J, \quad 2 < \alpha \leq 3 \quad (5.3)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad D_{0+}^{\alpha-1} u(+\infty) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)u(t)dt, \quad (5.4)$$

admet une solution unique donnée par

$$u(t) = \int_0^\infty G(t, s)h(s)ds, \quad (5.5)$$

où

$$G(t, s) = G_1(t, s) + G_2(t, s), \quad (5.6)$$

$$G_1(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq s \leq t < +\infty \\ t^{\alpha-1}, & 0 \leq t \leq s < +\infty \end{cases} \quad (5.7)$$

et

$$G_2(t, s) = \frac{t^{\alpha-1}}{(\Gamma(\alpha) - \mu)} \int_0^\infty \varphi(t)G_1(t, s)dt \quad (5.8)$$

La fonction G est la fonction de Green'associée au problème aux limites (5.3)-(5.4).

Preuve. D'après les Lemmes 1.3.2 et 1.3.3, nous pouvons réduire l'équation (5.3) à une équation intégrale équivalente

$$u(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3}, \quad (5.9)$$

pour certains $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

d'après les conditions $u(0) = u'(0) = 0$, nous savons que $c_2 = c_3 = 0$.

Donc,

$$u(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds + c_1 t^{\alpha-1}. \quad (5.10)$$

D'autre part

$$D_{0+}^{\alpha-1} u(t) = -\int_0^t h(s)ds + c_1 \Gamma(\alpha)$$

combiner avec

$$D_{0+}^{\alpha-1} u(+\infty) = \int_0^t \varphi(s)u(s)ds,$$

on obtient

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^\infty \varphi(s)u(s)ds + \int_0^\infty h(s)ds \right)$$

Par conséquent, l'unique solution de (5.3)-(5.4) s'écrit

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^\infty \varphi(s)u(s)ds + \int_0^\infty h(s)ds \right) \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} h(s)ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \varphi(s)u(s)ds \\ &= \int_0^\infty G_1(t,s)h(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \varphi(s)u(s)ds \end{aligned}$$

où $G_1(t,s)$ est définie par (5.7).

D'après

$$u(t) = \int_0^\infty G_1(t,s)h(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \varphi(s)u(s)ds \quad (5.11)$$

on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi(t)u(t)dt &= \int_0^\infty \varphi(t) \left(\int_0^\infty G_1(t,s)h(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \varphi(s)u(s)ds \right) dt \\ &= \int_0^\infty \varphi(t) \left(\int_0^\infty G_1(t,s)h(s)ds \right) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \varphi(t) \left(\int_0^\infty t^{\alpha-1} \varphi(s)u(s)ds \right) dt \\ &= \int_0^\infty \varphi(t) \int_0^\infty G_1(t,s)h(s)dsdt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \varphi(t)dt \int_0^\infty \varphi(t)u(t)dt \end{aligned}$$

il en résulte que

$$\int_0^\infty \varphi(t)u(t)dt = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \varphi(t)dt\right)} \int_0^\infty \varphi(t) \int_0^\infty G_1(t,s)h(s)dsdt,$$

donc

$$\int_0^\infty \varphi(t)u(t)dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha) - \mu} \int_0^\infty \varphi(t) \int_0^\infty G_1(t,s)h(s)dsdt. \quad (5.12)$$

Substituant (5.12) dans (5.11), nous obtenons

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^\infty G_1(t,s)h(s)ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) - \mu} \int_0^\infty \varphi(t) \int_0^\infty G_1(t,s)h(s)dsdt \\ &= \int_0^\infty G_1(t,s)h(s)ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) - \mu} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \varphi(t)G_1(t,s)dt \right) h(s)ds \\ &= \int_0^\infty G_1(t,s)h(s)ds + \int_0^\infty G_2(t,s)h(s)ds \\ &= \int_0^\infty G(t,s)h(s)ds \end{aligned}$$

où $G(t, s)$, $G_1(t, s)$, et $G_2(t, s)$ sont définis par (5.6), (5.7) et (5.8) respectivement.

La preuve est terminée. ■

Nous avons besoin de certaines propriétés des fonctions G_1 , G_2 et G afin de discuter l'existence de solutions positives.

Lemme 5.2.2. ([47]) *La fonction G_1 définie par (5.7) satisfait*

- (i). G_1 est une fonction continue et $G_1(t, s) \geq 0$ pour $(t, s) \in J \times J$,
- (ii). G_1 est strictement croissante par rapport à la première variable,
- (iii). $\frac{G_1(t, s)}{1 + t^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$, pour tout $(t, s) \in J \times J$,
- (iv). $\int_0^\infty \varphi(t)G_1(t, s)dt < \frac{\mu}{\Gamma(\alpha)}$ pour tout $s \in J \times J$.

Proposition 5.2.1. *Si $\mu \in]0, \Gamma(\alpha)[$, la fonction G_2 définie par (5.8) vérifie*

- (i). G_2 est une fonction continue et $G_2(t, s) \geq 0$ pour tout $(t, s) \in J \times J$,
- (ii). $G_2(t, s) \leq \frac{\mu t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(\Gamma(\alpha) - \mu)}$, pour tout $(t, s) \in J \times J$,
- (iii). $\frac{G_2(t, s)}{1 + t^{\alpha-1}} \leq \frac{\mu}{\Gamma(\alpha)(\Gamma(\alpha) - \mu)}$, pour tout $(t, s) \in J \times J$.

Preuve. En utilisant les propriétés de G_1 , on peut facilement montrer que (i), (ii) et (iii) maintenir. ■

Lemme 5.2.3. *Si $\mu \in]0, \Gamma(\alpha)[$, la fonction G définie par (5.6) satisfait*

- (i). G est une fonction continue et $G(t, s) \geq 0$ pour tout $(t, s) \in J \times J$,
- (ii). $\frac{G(t, s)}{1 + t^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha) - \mu}$, pour tout $(t, s) \in J \times J$.

Preuve. Il résulte des Lemme 5.2.2 et Proposition 5.2.1 que G est continue et que $G(t, s) \geq 0$ pour tout $(t, s) \in J \times J$.

(ii). Si $(t, s) \in J \times J$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{G(t, s)}{1 + t^{\alpha-1}} &= \frac{G_1(t, s)}{1 + t^{\alpha-1}} + \frac{G_2(t, s)}{1 + t^{\alpha-1}} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{t^{\alpha-1}}{1 + t^{\alpha-1}} + \frac{t^{\alpha-1}}{1 + t^{\alpha-1}} \frac{1}{(\Gamma(\alpha) - \mu)} \int_0^\infty \varphi(t) G_1(t, s) dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{(\Gamma(\alpha) - \mu)} \int_0^\infty \varphi(t) G_1(t, s) dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha) (\Gamma(\alpha) - \mu)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \varphi(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\mu}{\Gamma(\alpha) (\Gamma(\alpha) - \mu)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{\mu}{\Gamma(\alpha) - \mu} \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha) - \mu} \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha) - \mu}
\end{aligned}$$

D'où la preuve du Lemme 5.2.3. ■

Pour nos construction, nous allons considérer l'espace

$$E = \left\{ u \in C(J, \mathbb{R}) : \sup_{t \in J} \frac{|u(t)|}{1 + t^{\alpha-1}} < +\infty \right\}, \quad (5.13)$$

équipé de la norme $\|u\|_E = \sup_{t \in J} \frac{|u(t)|}{1 + t^{\alpha-1}}$.

Lemme 5.2.4. ([47]) $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach.

Le théorème d'Arzela-Ascoli, ne peut être appliqué à l'espace de Banach E , ceci étant dû au fait que l'intervalle $J = [0, +\infty[$ n'est pas compact. Le critère de compacité de Corduneanu (Lemme 1.1.1) nous sera utile pour contourner ce problème.

Soit l'opérateur $T : E \rightarrow E$ défini comme suit

$$Tu(t) = \int_0^\infty G(t, s) f(s, u(s)) ds, \quad t \in J, \quad (5.14)$$

où $G(t, s)$ est donnée par (5.6).

Observons que le problème (5.1)-(5.2) possède une solution si et seulement si l'opérateur T défini par (5.14) possède un point fixe.

Dans le but d'utiliser le théorème de l'Alternative non linéaire de Leray-Schauder (Théorème 1.2.3), on doit montrer que $T : E \rightarrow E$ est complètement continu.

Lemme 5.2.5. *Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) soient vérifiées. Alors l'opérateur $T : E \rightarrow E$ est complètement continu.*

Preuve. On sépare la démonstration en plusieurs étapes.

- (a) . L'opérateur $T : E \rightarrow E$ est uniformément borné. Soit Ω un borné quelconque de E ; alors il existe une constante $R > 0$ telle que $\|u\|_E \leq R$. Par (H₂), on a

$$\begin{aligned} \|Tu\|_E &= \sup_{t \in J} \int_0^{+\infty} \frac{G(t, s)}{1 + t^{\alpha-1}} |f(s, u(s))| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha) - \mu} \int_0^{+\infty} \left[a(s) + b(s) (1 + s^{\alpha-1})^\rho \frac{|u(s)|^\rho}{(1 + s^{\alpha-1})^\rho} \right] ds \\ &\leq \frac{\bar{a} + \bar{b} \|u\|_E^\rho}{\Gamma(\alpha) - \mu} \\ &\leq \frac{\bar{a} + \bar{b} R^\rho}{\Gamma(\alpha) - \mu} \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $T(\Omega)$ est uniformément borné.

- (b). L'opérateur $T : E \rightarrow E$ est continu. Considérons $u_n, u \in E$ telle que $\|u_n\|_E < +\infty$, $\|u\|_E < +\infty$ et $u_n \rightarrow u$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors par (H₂), on a

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \frac{G(t, s)}{1 + t^{\alpha-1}} f(s, u_n(s)) ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha) - \mu} \int_0^{+\infty} \left[a(s) + b(s) (1 + s^{\alpha-1})^\rho \frac{|u_n(s)|^\rho}{(1 + s^{\alpha-1})^\rho} \right] ds \\ &\leq \frac{\bar{a} + \bar{b} \|u_n\|_E^\rho}{\Gamma(\alpha) - \mu} \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue et la continuité de f , on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{G(t, s)}{1 + t^{\alpha-1}} f(s, u_n(s)) ds = \int_0^{+\infty} \frac{G(t, s)}{1 + t^{\alpha-1}} f(s, u(s)) ds.$$

En prenant la limite quand $n \rightarrow \infty$, on a

$$\|Tu_n - Tu\|_E = \sup_{t \in J} \int_0^{+\infty} \frac{G(t, s)}{1 + t^{\alpha-1}} |f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))| ds \rightarrow 0.$$

Par suite T est continu.

- (c). L'opérateur $T : E \rightarrow E$ est équicontinu. On considère deux cas.
(c₁). Soit $I \subset J$ soit un intervalle comme et $t_1, t_2 \in I$ tels que $t_1 < t_2$. Soit Ω soit un ensemble borné quelconque de X , alors pour tout $u \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{Tu(t_2)}{1 + t_2^{\alpha-1}} - \frac{Tu(t_1)}{1 + t_1^{\alpha-1}} \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{G(t_2, s)}{1 + t_2^{\alpha-1}} - \frac{G(t_1, s)}{1 + t_1^{\alpha-1}} \right) f(s, u(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{G(t_2, s)}{1 + t_2^{\alpha-1}} - \frac{G(t_1, s)}{1 + t_1^{\alpha-1}} \right| \left(a(s) + b(s) (1 + s^{\alpha-1})^\rho \frac{|u(s)|^\rho}{(1 + s^{\alpha-1})^\rho} \right) ds \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{G(t_2, s)}{1 + t_2^{\alpha-1}} - \frac{G(t_1, s)}{1 + t_1^{\alpha-1}} \right| (a(s) + b(s) (1 + s^{\alpha-1})^\rho \|u\|_E^\rho) ds. \end{aligned}$$

Donc,

$$\left| \frac{Tu(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{Tu(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}} \right| \leq \int_0^\infty \left| \frac{G(t_2, s)}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{G(t_1, s)}{1+t_1^{\alpha-1}} \right| (a(s) + b(s) (1+s^{\alpha-1})^\rho \|u\|_E^\rho) ds. \quad (5.15)$$

Comme G est continu sur $J \times J$, on a $\frac{G(t, s)}{1+t^{\alpha-1}}$ est une fonction uniformément continue sur l'ensemble compact $I \times I$. De plus, pour $s \geq t$, cette fonction dépend uniquement de t , et par conséquence elle est uniformément continue sur $I \times (J \setminus I)$. Ainsi nous avons pour tout $s \in J$ et $t_1, t_2 \in I$ que la propriété suivante est réalisée :

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $|t_2 - t_1| < \delta$ alors $\left| \frac{G(t_2, s)}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{G(t_1, s)}{1+t_1^{\alpha-1}} \right| < \varepsilon$.

En combinant ce qui précède avec (5.15), et le fait que

$$\int_0^\infty (a(s) + b(s) (1+s^{\alpha-1})^\rho R^\rho) ds < \infty, \quad (5.16)$$

on peut conclure que T est équicontinu sur I .

(c₂). En fait, quand $t \rightarrow \infty$, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(t, s)}{1+t^{\alpha-1}} = 0. \quad (5.17)$$

Par ce qui précède, il n'est pas difficile de vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe une constante $T' = T'(\varepsilon) > 0$ telle que

$$\left| \frac{G(t_2, s)}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{G(t_1, s)}{1+t_1^{\alpha-1}} \right| < \varepsilon.$$

pour tout $t_1, t_2 \geq T'$ et $s \in J$. Alors, T est équiconvergent à l'infini.

Par suite la conclusion du Lemme 1.1.1 peut être appliquée, puisque T est relativement compact sur J . Donc, $T : E \rightarrow E$ est complètement continu. Ce qui achève la preuve. ■

5.3 Résultats principaux

Nous sommes à présent en position d'énoncer et de démontrer le résultat d'existence pour le problème (5.1)-(5.2).

Théorème 5.3.1. *Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) soient vérifiées pour $\sigma = 1$. S'il existe $r > 0$ tel que*

$$r \left(1 - \frac{\bar{b}}{\Gamma(\alpha) - \mu} \right) > \frac{\bar{a}}{\Gamma(\alpha) - \mu}. \quad (5.18)$$

Alors le problème (5.1)-(5.2) possède une solution u satisfaisant

$$0 \leq u(t) \leq (1+t^{\alpha-1}) r, \text{ pour } t \in J.$$

Preuve. Soit $U = \{u \in E, \|u\|_E < r\}$. Pour $u \in \partial U$, s'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $u = \lambda Tu$, alors on a

$$\begin{aligned} \|u\|_E &= \sup_{t \in J} \frac{|u(t)|}{1 + t^{\alpha-1}} = \sup_{t \in J} \frac{|\lambda(Tu)(t)|}{1 + t^{\alpha-1}} \\ &\leq \sup_{t \in J} \int_0^\infty \frac{G(t,s)}{1 + t^{\alpha-1}} |f(s, u(s))| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha) - \mu} \int_0^\infty |a(s) + b(s)u(s)| ds \\ &\leq \frac{\bar{a} + \bar{b} \|u\|_E}{\Gamma(\alpha) - \mu}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$r \left(1 - \frac{\bar{b}}{\Gamma(\alpha) - \mu} \right) \leq \frac{\bar{a}}{\Gamma(\alpha) - \mu},$$

qui est en contradiction avec (5.18). Par le Lemme 5.2.5 et le Théorème 1.2.3, on conclut que le problème (5.1)-(5.2) possède une solution u telle que

$$0 \leq u(t) \leq (1 + t^{\alpha-1}) r, \text{ pour } t \in J.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Théorème 5.3.2. *Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) soient vérifiées avec $0 < \sigma < 1$. S'il existe $r > 0$ tel que*

$$r > \max \left\{ \frac{2\bar{a}}{\Gamma(\alpha) - \mu}, \left(\frac{2\bar{b}}{\Gamma(\alpha) - \mu} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \right\}. \quad (5.19)$$

Alors le problème (5.1)-(5.2) possède une solution u telle que

$$0 \leq u(t) \leq (1 + t^{\alpha-1}) r, \text{ pour } t \in J.$$

Preuve. Dans ce cas, on prend

$$r > \max \left\{ \frac{2\bar{a}}{\Gamma(\alpha) - \mu}, \left(\frac{2\bar{b}}{\Gamma(\alpha) - \mu} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \right\}.$$

Le reste de la preuve est complètement similaire à celle du Théorème 5.3.1. ■

Théorème 5.3.3. *Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) soient vérifiées pour $\sigma > 1$. S'il existe $r > 0$ tel que*

$$\frac{2\bar{a}}{\Gamma(\alpha) - \mu} < r < \left(\frac{2\bar{b}}{\Gamma(\alpha) - \mu} \right)^{\frac{1}{1-\rho}}. \quad (5.20)$$

Alors le problème (5.1)-(5.2) possède une solution u vérifiant

$$0 \leq u(t) \leq (1 + t^{\alpha-1}) r, \text{ pour } t \in J.$$

Preuve. Dans ce cas, on prend

$$\frac{2\bar{a}}{\Gamma(\alpha) - \mu} < r < \left(\frac{2\bar{b}}{\Gamma(\alpha) - \mu} \right)^{\frac{1}{1-\rho}}.$$

Le reste de la preuve est complètement similaire à celle du Théorème 5.3.1. ■

5.4 Exemples

On considère le problème fractionnaire suivant :

$$D_{0+}^{\frac{5}{2}}u(t) + \frac{1}{1+t^2} + \frac{|u(t)|^\sigma}{(1+t^4)\left(1+t^{\frac{3}{2}}\right)} = 0, \quad t \in J = [0, +\infty[, \quad (5.21)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad D_{0+}^{\alpha-1}u(\infty) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{t} \exp(t)}{1+t^2} u(t) dt, \quad (5.22)$$

où $\alpha = \frac{5}{2}$, $\varphi(t) = \frac{\sqrt{t} \exp(t)}{1+t^2}$ et $f(t, u) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{|u(t)|^\sigma}{(1+t^4)\left(1+t^{\frac{3}{2}}\right)}$.

Alors on peut facilement montrer que

$$|f(t, u(t))| = \left| \frac{1}{1+t^2} + \frac{|u(t)|^\sigma}{(1+t^4)\left(1+t^{\frac{3}{2}}\right)} \right| \leq \frac{1}{1+t^2} + \frac{|u(t)|^\sigma}{(1+t^4)\left(1+t^{\frac{3}{2}}\right)},$$

clairement $t \in [0, +\infty[$ p.p, on a

$$\mu = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \varphi(t) dt = \int_0^\infty \frac{t^2 \exp(t)}{t^2+1} dt < +\infty.$$

Ainsi (H₁) est vérifiée.

Posons, aussi $a(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et $b(t) = \frac{1}{(1+t^4)(1+\sqrt{t})}$ pour $t \in [0, +\infty[$.

Alors on peut aisément obtenir

$$f(t, u(t)) \leq a(t) + b(t) |u(t)|^\rho.$$

cas 1 : Pour $\sigma = 1$. Un calcul direct donne :

$$\bar{a} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt < +\infty, \quad \bar{b} = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^{\frac{3}{2}}}{(1+t^4)\left(1+t^{\frac{3}{2}}\right)} dt < +\infty.$$

Ainsi, l'hypothèse (H₂) est vérifiée. Alors par le Théorème 5.3.1 le problème (5.21)-(5.22) possède une solution u telle que

$$0 \leq u(t) \leq (1+t^{\alpha-1}) r, \quad \text{pour } t \in J,$$

où

$$r \left(1 - \frac{b}{\Gamma(\alpha) - \mu} \right) > \frac{a}{\Gamma(\alpha) - \mu}$$

cas 2 : Pour $\sigma = 0.5 < 1$. Un calcul direct donne :

$$\bar{a} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt < +\infty, \quad \bar{b} = \int_0^\infty \frac{1}{(t^4+1)\sqrt{t^{\frac{3}{2}}+1}} dt < +\infty.$$

Ainsi l'hypothèse (H_2) est vérifiée. Alors par le théorème 5.3.2 le problème (5.21)-(5.22) a une solution u satisfaisant

$$0 \leq u(t) \leq (1 + t^{\alpha-1}) r \quad , \text{ pour } t \in J,$$

où

$$r > \max \left\{ \frac{2\bar{a}}{\Gamma(\alpha) - \mu}, \left(\frac{2\bar{b}}{\Gamma(\alpha) - \mu} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \right\}.$$

cas 3 : Pour $\sigma = 2 > 1$. Un calcul direct conduit à :

$$\bar{a} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt < +\infty, \quad \bar{b} = \int_0^{\infty} \frac{1}{t^4+1} \left(t^{\frac{3}{2}} + 1 \right) dt < +\infty,$$

comme précédemment l'hypothèse (H_2) est vérifiée, et par le Théorème 5.3.3 on conclut que le problème (5.21)-(5.22) possède une solution u telle que

$$0 \leq u(t) \leq (1 + t^{\alpha-1}) r \quad , \text{ pour } t \in J.$$

Solutions positives d'une EDF avec des conditions aux limites intégrales ([19])

6.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'existence de solutions positives pour le problème aux limites fractionnaire à trois points suivant

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) + \lambda f(t, u(t)) = 0, \quad t \in]0, 1[, \quad (6.1)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \mu u'(\eta) = \int_0^1 g(s) u'(s) ds, \quad (6.2)$$

où, D_{0+}^{α} est dérivée fractionnaire de type Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]2, 3]$, λ, μ, η sont des paramètres réels avec $\lambda > 0, \mu \geq 0, \eta \in]0, 1[$, et le terme non linéaire $f : [0, 1] \times [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction continue et $g :]0, 1[\rightarrow]0, +\infty[$ est une fonction continue. Par solution positive, on entend une fonction u positive sur $]0, 1[$ et satisfaisant (6.1)-(6.2).

Tout au long de ce chapitre, on supposera que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\int_0^1 s^{\alpha-2} g(s) ds < +\infty \text{ et } d = 1 - \mu \eta^{\alpha-2} - \int_0^1 s^{\alpha-2} g(s) ds > 0. \quad (6.3)$$

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans la deuxième section, nous présentons le cadre dans lequel le problème (6.1)-(6.2) est formulé dans une équation de point fixe. La section 3 est consacrée aux principaux résultats et leurs preuves et se termine par un exemple illustratif.

L'outil principal de cet chapitre est le théorème de Guo-Krasnosel'skii dans un cône (Théorème 1.2.5).

6.2 Préliminaires

Maintenant, nous allons introduire certaines fonctions nécessaires à la formulation de point fixe du problème (6.1)-(6.2).

Pour $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$

$$G(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2} - (t-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (6.4)$$

$$G_1(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2} - (t-s)^{\alpha-2}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (6.5)$$

et

$$H(t, s) = G(t, s) + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} G_1(\eta, s). \quad (6.6)$$

Lemme 6.2.1. *pour tout $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$, on a*

$$P1). \quad 0 \leq G_1(t, s) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-2} (1-s)^{\alpha-2},$$

$$P2). \quad t^{\alpha-1} G(1, s) \leq G(t, s) \leq G(1, s), \quad (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

$$P3). \quad t^{\alpha-1} H(1, s) \leq H(t, s) \leq H(1, s), \quad (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

Preuve. P1) est évidente et P3) est facilement obtenu à partir de P2). Ainsi, nous devons prouver P2). Soit $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$, on distingue deux cas.

Case 1 : $0 \leq s \leq t \leq 1$. dans ce cas on a

$$\frac{G(t, s)}{G(1, s)} \leq \frac{t(t-s)^{\alpha-2} - (t-s)^{\alpha-1}}{s(1-s)^{\alpha-2}} = \left(\frac{t-s}{1-s} \right)^{\alpha-2} \leq t^{\alpha-2} \leq 1$$

et

$$\frac{G(t, s)}{G(1, s)} \geq \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2} - (t-ts)^{\alpha-1}}{s(1-s)^{\alpha-2}} = t^{\alpha-1}.$$

Case 2 : $0 \leq t \leq s \leq 1$. dans ce cas on a

$$t^{\alpha-1} \leq \frac{G(t, s)}{G(1, s)} = \frac{t^{\alpha-1}}{s} \leq s^{\alpha-2} \leq 1.$$

Ce qui achève la preuve du Lemme 6.2.1. ■

Considérons l'espace de Banach $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|u\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$. Soit $E^+ = \{u \in E : u(t) \geq 0\}$ un cône de E , et $K \subset E^+$ le cône défini par

$$K = \left\{ u \in E : u(t) \geq t^{\alpha-1} \|u\| \text{ pour tout } t \in [0, 1] \right\}. \quad (6.7)$$

Soit $L : E \rightarrow E$ l'opérateur linéaire défini pour $u \in E$ par

$$Lu(t) = \int_0^1 H(t, s) u(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 G_1(s, \tau) u(\tau) d\tau \right) ds$$

et $F : E^+ \rightarrow E^+$ l'opérateur de Nymetski associé au terme non linéaire f . Il est clair que, L est continue, $L(E^+) \subset E^+$ et F est borné.

Lemme 6.2.2. *Sous l'hypothèse (6.3) et pour $h \in E$ une fonction donnée. Alors $u = Lh$ est l'unique solution du problème*

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) + h(t) = 0, \quad \alpha \in]2, 3], \quad t \in]0, 1[, \quad (6.8)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \mu u'(\eta) = \int_0^1 g(s) u'(s) ds. \quad (6.9)$$

Preuve. En utilisant les Lemmes 1.3.2 et 1.3.3, l'équation (6.8) implique

$$u(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3},$$

pour $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. d'après (6.9), $c_2 = c_3 = 0$ et

$$c_1 = \frac{1}{d\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds - \mu \int_0^{\eta} (\eta-s)^{\alpha-2} h(s) ds - \psi \right],$$

où

$$\psi = \int_0^1 g(s) \left(\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-2} h(\tau) d\tau \right) ds.$$

Par conséquent, l'unique solution du problème (6.8)-(6.9) est

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds \\ &\quad - \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta} (\eta-s)^{\alpha-2} h(s) ds - \frac{t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^1 g(s) \left(\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-2} h(\tau) d\tau \right) ds \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds \\ &\quad + \frac{(1-d)t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds - \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta} (\eta-s)^{\alpha-2} h(s) ds \\ &\quad - \frac{t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^1 g(s) \left(\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-2} h(\tau) d\tau \right) ds \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds \\ &\quad + \frac{\mu \eta^{\alpha-2} t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds - \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta} (\eta-s)^{\alpha-2} h(s) ds \\ &\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 s^{\alpha-2} g(s) ds \left(\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds - \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-2} h(\tau) d\tau \right) ds \right] \\ &\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 s^{\alpha-2} g(s) ds \left(\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds - \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-2} h(\tau) d\tau \right) ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \right] \\
&+ \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 \eta^{\alpha-2} (1-s)^{\alpha-2} h(s) ds - \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-2} h(s) ds \right] \\
&+ \frac{t^{\alpha-1}}{d\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 s^{\alpha-2} (1-\tau)^{\alpha-2} h(\tau) d\tau - \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-2} h(\tau) d\tau \right) ds \right] \\
&= \int_0^1 G(t,s) h(s) ds + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_1(\eta,s) h(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 G_1(s,\tau) h(\tau) d\tau \right) ds \\
&= \int_0^1 H(t,s) h(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 G_1(s,\tau) h(\tau) d\tau \right) ds.
\end{aligned}$$

D'où la preuve. ■

Lemme 6.2.3. *Sous l'hypothèse (6.3) et soit $T_\lambda = \lambda LF$. On obtient*

- i) T_λ est complètement continu ,*
- ii) $T(E^+) \subset K$ et*
- iii) $u \in K$ est solution du problème (6.1)-(6.2) si et seulement si u est un point fixe de T .*

Preuve. i) Car l'opérateur $u \rightarrow \frac{t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 G_1(s,\tau) u(\tau) d\tau \right) ds$ est de dimension un et continu et la fonction H est uniformément continué sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

ii) Soit $u \in E^+$, d'après P3) du Lemme 6.2.1 on a

$$\begin{aligned}
T_\lambda u(t) &= \lambda \int_0^1 H(t,s) f(s, u(s)) ds + \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 G_1(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds \\
&\geq \lambda t^{\alpha-1} \left(\int_0^1 H(1,s) f(s, u(s)) ds + \frac{1}{d} \int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 G_1(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds \right) \\
&\geq t^{\alpha-1} \|T_\lambda u\|
\end{aligned}$$

c'est à dire $T_\lambda u \in K$.

iii) est une conséquence du Lemme 6.2.2. ■

6.3 Résultats principaux

L'énoncé et la démonstration de résultats principaux ainsi que de leurs preuves, nécessitent l'introduction des notations suivantes. Posons pour $\nu = 0$ ou $+\infty$

$$f_\nu = \lim_{u \rightarrow \nu} \inf \left(\min_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u} \right) \quad \text{et} \quad f^\nu = \lim_{u \rightarrow \nu} \sup \left(\max_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u} \right)$$

$$\Lambda_\nu = \begin{cases} (\Gamma_0 f_\nu)^{-1} & \text{si } 0 < f_\nu < +\infty \\ 0 & \text{si } f_\nu = +\infty \\ +\infty & \text{si } f_\nu = 0 \end{cases} \quad \Lambda^\nu = \begin{cases} (\Gamma_\infty f^\nu)^{-1} & \text{si } 0 < f^\nu < +\infty \\ +\infty & \text{si } f^\nu = 0 \\ 0 & \text{si } f^\nu = +\infty \end{cases}$$

où

$$\Gamma_\infty = \int_0^1 H(1, s) ds + \frac{1}{d} \int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 G_1(s, \tau) d\tau \right) ds$$

et

$$\Gamma_0 = \int_0^1 s^{\alpha-1} H(1, s) ds + \frac{1}{d} \int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 \tau^{\alpha-1} G_1(s, \tau) d\tau \right) ds$$

Théorème 6.3.1. *Soit l'hypothèse (6.3) vérifiée, et $\Lambda_{+\infty} < \Lambda^0$. Alors le problème (6.1)-(6.2) possède au moins une solution positive, pour tout $\lambda \in]\Lambda_{+\infty}, \Lambda^0[$.*

Preuve. Soit $\lambda \in]\Lambda_{+\infty}, \Lambda^0[$ et soit $\epsilon > 0$ tels que $\lambda < ((f^0 + \epsilon) \Gamma_1)^{-1}$. Il existe $r_0 > 0$ tel que $f(., x) \leq (f^0 + \epsilon)x$ pour tout $x \in [0, r_0]$ et $t \in [0, 1]$. Par suite, si $u \in K$ est tel que $\|u\| = r_0$, on a

$$\begin{aligned} \|T_\lambda u\| &\leq \lambda (f^0 + \epsilon) r_0 \left[\int_0^1 H(1, s) ds + \frac{1}{d} \int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 G_1(s, \tau) d\tau \right) ds \right] \\ &= \lambda (f^0 + \epsilon) r_0 \Gamma_\infty \leq r_0 = \|u\|. \end{aligned}$$

Soit à présent $M \in]0, f_\infty[$ tel que $\lambda > (M \Gamma_0)^{-1}$, il existe $c > 0$ telle que $f(., x) \geq Mx - c$ pour tout $x \geq 0$ and $t \in [0, 1]$.

A ce niveau on affirme qu'il existe r_∞ assez grand tel que $\|T_\lambda u\| \geq \|u\|$, pour tout $u \in K \cap \partial B(0, r_\infty)$.

En effet, si ce n'est pas vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in K \cap \partial B(0, n)$ tel que

$$\|T_\lambda u_n\| \leq \|u_n\|$$

on a alors,

$$\begin{aligned} \|T_\lambda u_n\| + \|\lambda L(c)\| &= \|T_\lambda u_n + \lambda L(c)\| \\ &\geq T_\lambda u_n(1) + \lambda L(c)(1) \\ &\geq \lambda \left[\int_0^1 H(1, s) M u_n(s) ds + \frac{1}{d} \int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 G_1(s, \tau) M u_n(\tau) d\tau \right) ds \right] \\ &\geq \lambda M \left[\int_0^1 H(1, s) s^{\alpha-1} + \frac{1}{d} \int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 G_1(s, \tau) \tau^{\alpha-1} d\tau \right) ds \right] \|u_n\| \\ &= \lambda M \|u_n\| \Gamma_0 \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$1 + \frac{\|T_\lambda u_n\|}{\|u_n\|} \geq \frac{\|T_\lambda u_n\|}{\|u_n\|} + \frac{\|\lambda L(c)\|}{\|u_n\|} \geq \lambda M \Gamma_0.$$

en passant à la limite $n \rightarrow \infty$, on obtient la contradiction $1 \geq \lambda M \Gamma_0 > 1$.

Enfin, choisissons

$$\Omega_\nu = \{u \in E : \|u\| < r_\nu\} \text{ pour } \nu = 0 \text{ ou } \infty,$$

on obtient par la première assertion du Théorème 1.2.5 que T admet un point fixe $u \in K$ avec $r_0 \leq \|u\| \leq r_\infty$, alors par iii) du Lemme 6.2.3, u est une solution positive du problème (6.1)-(6.2). Ce qui achève la preuve. \blacksquare

Théorème 6.3.2. *Supposons que l'hypothèse (6.3) soit vérifiée et $\Lambda_0 < \Lambda^{+\infty}$. Alors le problème (6.1)-(6.2) possède au moins une solution positive $\lambda \in]\Lambda_0, \Lambda^{+\infty}[$.*

Preuve. Soit $\lambda \in]\Lambda_0, \Lambda^{+\infty}[$ et soit $m \in]0, f_0[$ tels que $\lambda > (m\Gamma_0)^{-1}$. Il existe $r_0 > 0$ tel que $f(\cdot, x) \geq mx$ pour tout $x \in [0, r_0]$ et $t \in [0, 1]$. Tel que, si $u \in K$ est tel que $\|u\| = r_0$, on a

$$\begin{aligned} \|T_\lambda u\| &\geq T_\lambda u(1) \\ &\geq \lambda m r_0 \left[\int_0^1 H(1, s) s^{\alpha-1} ds + \frac{1}{d} \int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 G_1(s, \tau) \tau^{\alpha-1} d\tau \right) ds \right] \\ &= \lambda m r_0 \Gamma_0 \geq r_0 = \|u\|. \end{aligned}$$

Posons à présent $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda < ((f^\infty + \varepsilon)\Gamma_1)^{-1}$, il existe $c > 0$ tel que $f(\cdot, x) \leq (f^\infty + \varepsilon)x + c$ for all $x \geq 0$ and $t \in [0, 1]$.

A ce stade on prouve qu'il existe r_∞ assez grand tel que $\|T_\lambda u\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial B(0, r_\infty)$.

Par l'absurde, supposons que $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in K \cap \partial B(0, n)$ tel que $\|T_\lambda u_n\| \geq \|u_n\|$, on a alors pour tout $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} T_\lambda u_n(t) &\leq \\ &\lambda \int_0^1 H(1, s) ((f^\infty + \varepsilon)u_n(s) + c) ds + \frac{\lambda}{d} \int_0^1 g(s) \left(\int_0^1 G_1(s, \tau) ((f^\infty + \varepsilon)u_n(\tau) + c) d\tau \right) ds \\ &\leq \lambda (f^\infty + \varepsilon) \Gamma_\infty \|u_n\|_\infty + c \Gamma_\infty \end{aligned}$$

ce qui nous amène à

$$1 \leq \frac{\|T_\lambda u_n\|}{\|u_n\|} \leq \lambda (f^\infty + \varepsilon) \Gamma_\infty + \frac{c \Gamma_\infty}{\|u_n\|},$$

en passant à la limite $n \rightarrow \infty$, donne une contradiction $1 \leq \lambda (f^\infty + \varepsilon) \Gamma_\infty < 1$.

Enfin, en choisissant

$$\Omega_\nu = \{u \in E : \|u\| < r_\nu\} \text{ pour } \nu = 0 \text{ ou } \infty,$$

par la deuxième assertion du Théorème 1.2.5 on obtient que T possède un point fixe $u \in K$ avec $r_0 \leq \|u\| \leq r_\infty$, alors par iii) du Lemme 6.2.3, u est une solution positive du problème (6.1)-(6.2). ce qui achève la preuve. ■

Remarque 6.3.1. *Clairement, les Théorèmes 6.3.1 et 6.3.2 couvrent respectivement les cas,*

$$f^0 = 0, f_\infty = +\infty \text{ et } f^\infty = 0, f_0 = +\infty.$$

En particulier, si $f(t, u) = u^\gamma$ avec $\gamma \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ alors le problème (6.1)-(6.2) admet une solution positive pour tout $\lambda > 0$.

6.4 Exemple

Considérons le problème (6.1)-(6.2) avec

$$f(t, u) = \frac{Au}{1+u} + \frac{Bu^3}{1+u^2}.$$

Dans ce cas, on a

$$f^0 = f_0 = A \quad \text{et} \quad f^\infty = f_\infty = B.$$

Par les théorèmes 6.3.1 et 6.3.2, on obtient que pour cette nonlinéarité, le problème (6.1)-(6.2) admet une solution positive pour tout $\lambda \in]\Lambda^-, \Lambda^+[$ où

$$\Lambda^- = \begin{cases} (A\Gamma_0)^{-1} & \text{si } A\Gamma_0 > B\Gamma_\infty \\ (B\Gamma_\infty)^{-1} & \text{si } A\Gamma_0 < B\Gamma_\infty \end{cases} \quad \Lambda^+ = \begin{cases} (B\Gamma_\infty)^{-1} & \text{si } A\Gamma_0 > B\Gamma_\infty \\ (A\Gamma_0)^{-1} & \text{si } A\Gamma_0 < B\Gamma_\infty. \end{cases}$$

Solutions positives d'un Système de N-EDF avec des conditions aux limites intégrales ([20])

7.1 Introduction

Dans ce chapitre on concentre notre attention à étudier l'existence de solutions positives pour un système d'équations différentielles fractionnaires de type Riemann-Liouville avec des conditions aux bords sous forme intégrale de la forme :

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha_i} u_i(t) + \lambda_i a_i(t) f_i(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) = 0, 0 < t < 1, \\ u_i(0) = u'_i(0) = 0, u'_i(1) - \mu_i u'_i(\eta_i) = \int_0^1 \phi_i(t) u'_i(t) dt, \end{cases} \quad (7.1)$$

où, pour chaque $i = 1, \dots, n$, $D_{0+}^{\alpha_i}$, représente la dérivée d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha_i \in (2, 3]$, μ_i, η_i sont tels que $\mu_i > 0$, $\eta_i \in]0, 1[$, $f_i \in C(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+)$, $a_i \in C([0, 1], \mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et les λ_i sont des paramètres positifs.

Tout au long de ce chapitre, on supposera que les conditions suivantes sont vérifiées :

(H1). $\phi_i :]0, 1[\rightarrow]0, +\infty[$ sont des fonctions continues, et

$$\rho_i = \int_0^1 s^{\alpha_i-2} \phi_i(s) ds < +\infty, i = 1, \dots, n. \quad (7.2)$$

(H2). ainsi que

$$d_i = 1 - \mu_i \eta_i^{\alpha_i-2} - \int_0^1 s^{\alpha_i-2} \phi_i(s) ds > 0, i = 1, \dots, n. \quad (7.3)$$

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit :

Dans la section deux, on présente quelques préliminaires et quelques lemmes qui seront utilisés pour montrer nos résultats principaux. La section trois est consacrée à démontrer l'existence de solutions positives pour le problème aux limites fractionnaires, (7.1).

7.2 Préliminaires

Nous présentons maintenant la fonction de Green associée au problème aux limites (7.1).

Lemme 7.2.1. Soit $h \in C[0, 1]$ une fonction donnée, et $2 < \alpha \leq 3$ alors l'unique solution du problème

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) + h(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (7.4)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \mu u'(\eta) = \int_0^1 \phi(s) u'(s) ds, \quad (7.5)$$

est donnée par

$$u(t) = \int_0^1 H_{\alpha}(t, s) h(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 \phi(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha}(s, \tau) h(\tau) d\tau \right) ds, \quad (7.6)$$

avec

$$H_{\alpha}(t, s) = G_{\alpha}(t, s) + \frac{\mu t^{\alpha-1}}{d} G_{1\alpha}(\eta, s) \quad (7.7)$$

$$G_{\alpha}(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2} - (t-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (7.8)$$

$$G_{1\alpha}(\eta, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \eta^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2} - (\eta-s)^{\alpha-2}, & 0 \leq s \leq \eta \leq 1 \\ \eta^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}, & 0 \leq \eta \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (7.9)$$

Les résultats à venir nous procurent quelques propriétés des fonctions de Green $G_{\alpha}(t, s)$, $G_{1\alpha}(\eta, s)$, et $H_{\alpha}(t, s)$, avec pour objectif d'établir l'existence de solutions positives.

Lemme 7.2.2. $G_{\alpha}(t, s)$ définie par (7.8) vérifie les conditions suivantes :

(P1) $G_{\alpha}(t, s)$ est continue pour tout $t, s \in [0, 1]$, $G_{\alpha}(t, s) > 0$, pour $t, s \in (0, 1)$,

(P2) $\frac{\partial G_{\alpha}(t, s)}{\partial t} = (\alpha - 1) G_{1\alpha}(t, s)$ pour $t, s \in (0, 1)$,

(P3) $t^{\alpha-1} G_{\alpha}(t, s) \leq G_{\alpha}(t, s) \leq G_{\alpha}(1, s)$, $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$,

(P5) Pour $l \in (0, 1)$ $\min_{l \leq t \leq 1} G_{\alpha}(t, s) \geq (l)^{\alpha-1} G_{\alpha}(1, s)$,

$$\text{où } G_{\alpha}(1, s) = \frac{s(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Lemme 7.2.3. $G_{1\alpha}(t, s)$ définie par (7.9) vérifie les conditions suivantes :

(P1) $G_{1\alpha}(\eta, s) > 0$ pour $t, s \in (0, 1)$,

(P2) $0 \leq G_{1\alpha}(\eta, s) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \eta^{\alpha-2} (1-s)^{\alpha-2}$.

Lemme 7.2.4. $H_{\alpha}(t, s)$ définie par (7.7) vérifie les conditions suivantes :

(P1) $t^{\alpha-1} H_{\alpha}(1, s) \leq H_{\alpha}(t, s) \leq H_{\alpha}(1, s)$, $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$,

(P2) Pour $l \in]0, 1[$

$$\min_{l \leq t \leq 1} H_{\alpha}(t, s) \geq (l)^{\alpha-1} H_{\alpha}(1, s).$$

Lemme 7.2.5. L'unique solution $u(t)$ du problème (7.4)-(7.5) est positive et vérifiée

$$\min_{l \leq t \leq 1} u(t) \geq (l)^{\alpha-1} \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|, \quad \forall t \in [0, 1], \quad l \in]0, 1[. \quad (7.10)$$

Preuve. Il est évident que $u(t)$ est positive. Pour chaque $t \in [0, 1]$, par (7.6) et le Lemme 7.2.4, il découle que

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 H_\alpha(t, s)h(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 \phi(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha}(s, \tau) h(\tau) d\tau \right) ds \\ &\leq \int_0^1 H_\alpha(1, s)h(s)ds + \frac{1}{d} \int_0^1 \phi(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha}(s, \tau) h(\tau) d\tau \right) ds \end{aligned}$$

et par suite,

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)| \leq \int_0^1 H_\alpha(1, s)h(s)ds + \frac{1}{d} \int_0^1 \phi(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha}(s, \tau) h(\tau) d\tau \right) ds,$$

D'un autre côté, (7.6) et le Lemme 7.2.4 impliquent pour tout $t \in [l, 1]$,

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 H_\alpha(t, s)h(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 \phi(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha}(s, \tau) h(\tau) d\tau \right) ds \\ &\geq t^{\alpha-1} \left[\int_0^1 H_\alpha(1, s)h(s)ds + \frac{1}{d} \int_0^1 \phi(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha}(s, \tau) h(\tau) d\tau \right) ds \right] \\ &\geq (l)^{\alpha-1} \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)| \end{aligned}$$

Par conséquence

$$\min_{l \leq t \leq 1} u(t) \geq (l)^{\alpha-1} \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|.$$

Ce qui achève la preuve du Lemme 7.2.5. ■

Nous allons à présent écrire le système (7.1) sous forme équivalente de système d'équations intégrales.

Définition 7.2.1. La fonction vectorielle $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est dite solution positive du système (7.1) si et seulement si u vérifie (7.1) et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $u_i(t) > 0$ pour $t \in]0, 1[$.

Lemme 7.2.6. Supposons que $f_i : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $i = 1, \dots, n$, sont continues. Alors $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E$ est une solution du problème (7.1) si et seulement si pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$u_i(t) = \lambda_i \left[\int_0^1 H_{\alpha_i}(t, s)a_i(s)f_i(u(s))ds + \frac{t^{\alpha_i-1}}{d_i} \int_0^1 \phi_i(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau)f_i(u(\tau))d\tau \right) ds \right],$$

Preuve. Nous allons omettre la preuve, car c'est une conséquence directe de la discussion précédente. ■

Soit l'espace de Banach $E = C([0, 1], \mathbb{R}_+^n)$ muni de la norme

$$\|u\|_E = \sum_{i=1}^n \max_{0 \leq t \leq 1} |u_i(t)| \quad \text{pour } u = (u_1, u_2, \dots, u_n),$$

où $\|u\|_{C([0,1], \mathbb{R}_+)} = \max_{0 \leq t \leq 1} |u_i(t)|$.

En utilisant l'estimation (7.10) on définit les cônes :

$$K_i = \left\{ u_i \in C([0, 1], \mathbb{R}_+) : \min_{t \in [l, 1]} u_i(t) \geq \delta_i \|u_i\| \right\}, (i = 1, 2, \dots, n),$$

où $\delta_i = (l)^{\alpha_i - 1}$, $l \in]0, 1[$ et le cône produit $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$ dans E .

Soit $T : E \rightarrow E$ l'opérateur défini par :

$$T(u) = (T_1 u, T_2 u, \dots, T_n u),$$

où pour tout $t \in [0, 1]$,

$$T_i(u)(t) = \lambda_i \left[\int_0^1 H_{\alpha_i}(t, s) a_i(s) f_i(u(s)) ds + \frac{t^{\alpha_i - 1}}{d_i} \int_0^1 \phi_i(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) f_i(u(\tau)) d\tau \right) ds \right]$$

On peut alors écrire le Lemme 7.2.5 sous la forme suivante : $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une solution de (7.1) si et seulement si u est un point fixe de l'opérateur T .

Lemme 7.2.7. *L'opérateur $T : E \rightarrow E$ est complètement continu.*

Preuve. Par (7.10) nous avons la propriété d'invariance $T(K) \subset K$. De plus, l'opérateur T est complètement continu, car chacune des composantes T_i est complètement continue. ■

7.3 Résultats principaux

Dans cette section, nous allons étudier l'existence de solutions positives pour le problème aux limites (7.1). Nous commençons par introduire les notations suivantes :

(H1). Pour $\nu = 0$ ou $+\infty$ il existe des constantes positives f_i^ν ($i = 1, 2, \dots, n$) données par

$$f_i^\nu = \lim_{\|x\| \rightarrow \nu} \frac{f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\|x\|}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(H2). Pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $l \in]0, 1[$. Soit

$$\Gamma_i^0 = \begin{cases} (\delta^2 B_{\alpha_i}^i f_i^\nu)^{-1} & \text{si } 0 < f_i^\nu < +\infty \\ 0 & \text{si } f_i^\nu = +\infty \\ +\infty & \text{si } f_i^\nu = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Gamma_i^\infty = \begin{cases} (A_{\alpha_i}^i f_i^\nu)^{-1} & \text{si } 0 < f_i^\nu < +\infty \\ +\infty & \text{si } f_i^\nu = 0 \\ 0 & \text{si } f_i^\nu = +\infty \end{cases}$$

où

$$A_{\alpha_i}^i = \int_0^1 H_{\alpha_i}(1, s) a_i(s) ds + \frac{1}{d_i} \int_0^1 \phi_i(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) d\tau \right) ds$$

$$B_{\alpha_i}^i = \int_l^1 H_{\alpha_i}(1, s) a_i(s) ds + \frac{1}{d_i} \int_l^1 \phi_i(s) \left(\int_l^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) d\tau \right) ds.$$

(H3). Pour $\nu = 0$ ou $\nu = \infty$ il existe des constantes positives F_i^ν ($i = 1, 2, \dots, n$) données par

$$F_i^\nu = \lim_{x_i \rightarrow \nu} \frac{f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_i}$$

uniformément par rapport $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ sur tout compact de $(\mathbb{R}_+)^{n-1}$.

(H4). Pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $l \in]0, 1[$. Soit

$$\Lambda_i^0 = \begin{cases} (A_{\alpha_i}^i f_i^\nu)^{-1} & \text{si } 0 < f_i^\nu < +\infty \\ +\infty & \text{si } f_i^\nu = 0 \\ 0 & \text{si } f_i^\nu = +\infty \end{cases} \quad \text{et} \quad \Lambda_i^\infty = \begin{cases} (\delta B_{\alpha_i}^i f_i^\nu)^{-1} & \text{si } 0 < f_i^\nu < +\infty \\ 0 & \text{si } f_i^\nu = +\infty \\ +\infty & \text{si } f_i^\nu = 0 \end{cases}$$

Le théorème du point fixe de Krasnoselk'skii sur les cônes Théorème 1.2.6 sera utilisé à présent pour montrer un premier résultat d'existence de solutions positives

Théorème 7.3.1. *Avec les mêmes notations que dans (H1) et (H2). Supposons que l'hypothèse (7.3) est vérifiée et que $\Gamma_i^\infty < \Gamma_i^0$. Alors le problème (7.1) possède au moins une solution positive pour $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{R}_1$,*

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) : \frac{\Gamma_i^\infty}{n} < \lambda_i < \frac{\Gamma_i^0}{n} \right\}.$$

Preuve. Soit

$$\frac{\Gamma_i^\infty}{n} < \lambda_i < \frac{\Gamma_i^0}{n}, i = 1, \dots, n$$

choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{1}{n(f_i^\infty - \varepsilon)\delta_i B_{\alpha_i}^i} \leq \lambda_i \leq \frac{1}{nA_{\alpha_i}^i(f_i^0 + \varepsilon)}$, $i = 1, \dots, n$.

Par la définition des f_i^0 ($i = 1, 2, \dots, n$), il existe $H_1 > 0$ tel que

$$f_i(u) = f_i(u_1, \dots, u_n) \leq (f_i^0 + \varepsilon) \|u\| \quad \text{pour } u_i \geq 0, \|u\| \in [0, H_1].$$

Soit $u = (u_1, \dots, u_n) \in K$ avec $\|u\| = \|(u_1, \dots, u_n)\| = H_1$. Pour $i = 1, 2, \dots, n$ et tout $t \in [0, 1]$ on a :

$$\begin{aligned} T_i(u)(t) &= \lambda_i \left[\int_0^1 H_{\alpha_i}(t, s) a_i(s) f_i(u(s)) ds + \frac{t^{\alpha_i-1}}{d_i} \int_0^1 \phi_i(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) f_i(u(\tau)) d\tau \right) ds \right] \\ &\leq \lambda_i \left[\int_0^1 H_{\alpha_i}(1, s) a_i(s) f_i(u(s)) ds + \frac{1}{d_i} \int_0^1 \phi_i(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) f_i(u(\tau)) d\tau \right) ds \right] \\ &\leq \lambda_i (f_i^0 + \varepsilon) \|u\| \left[\int_0^1 H_{\alpha_i}(1, s) a_i(s) ds + \frac{1}{d_i} \int_0^1 \phi_i(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) d\tau \right) ds \right] \\ &\leq \lambda_i (f_i^0 + \varepsilon) A_{\alpha_i}^i \|u\| \leq \frac{1}{nA_{\alpha_i}^i (f_i^0 + \varepsilon)} A_{\alpha_i}^i (f_i^0 + \varepsilon) \|u\| = \frac{1}{n} \|u\|. \end{aligned}$$

Par suite $\|T_i(u)\| \leq \frac{1}{n} \|u\|$ pour chaque $i = 1, \dots, n$. Par conséquence

$$\|Tu\| = \sum_{i=1}^{i=n} \|T_i u\| \leq \|u\|.$$

Soit $r = H_1$. Alors $\|Tu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K$ avec $\|u\| = r$.

De plus, par la définition des f_i^∞ ($i = 1, 2, \dots, n$), il existe $H_2 > 0$ telle que

$$f_i(u) = f_i(u_1, \dots, u_n) \geq (f_i^\infty - \varepsilon) \|u\| \quad \text{pour } u_i \geq 0, \|u\| \in [H_2, +\infty[.$$

Soit $R = H_3 = \max \{2H_1, \frac{1}{\delta}H_2\}$. Si $u \in K$ avec $\|u\| = R$. Alors

$$\min_{t \in [l, 1]} \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_i \right) \geq \delta \sum_{i=1}^{i=n} \|u_i\| = \delta \|u\| \geq H_2, \text{ où } \delta = \min_{1 \leq i \leq n} \delta_i$$

Donc, pour $t \in [l, 1]$, $l \in]0, 1[$ on a

$$\begin{aligned} T_i(u)(t) &= \lambda_i \left[\int_0^1 H_{\alpha_i}(t, s) a_i(s) f_i(u(s)) ds + \frac{t^{\alpha_i-1}}{d_i} \int_0^1 \phi_i(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) f_i(u(\tau)) d\tau \right) ds \right] \\ &\geq \lambda_i \left[\int_l^1 H_{\alpha_i}(t, s) a_i(s) f_i(u(s)) ds + \frac{t^{\alpha_i-1}}{d_i} \int_l^1 \phi_i(s) \left(\int_l^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) f_i(u(\tau)) d\tau \right) ds \right] \\ &\geq \lambda_i (l)^{\alpha_i-1} \left[\int_l^1 H_{\alpha_i}(1, s) a_i(s) f_i(u(s)) ds + \frac{1}{d_i} \int_l^1 \phi_i(s) \left(\int_l^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) f_i(u(\tau)) d\tau \right) ds \right] \\ &\geq \lambda_i (l)^{\alpha_i-1} (f_i^\infty - \varepsilon) \|u\| \left[\int_l^1 H_{\alpha_i}(1, s) a_i(s) ds + \frac{1}{d_i} \int_l^1 \phi_i(s) \left(\int_l^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) d\tau \right) ds \right] \\ &\geq \lambda_i (l)^{\alpha_i-1} (f_i^\infty - \varepsilon) \|u\| \left[\int_l^1 H_{\alpha_i}(1, s) a_i(s) ds + \frac{1}{d_i} \int_l^1 \phi_i(s) \left(\int_l^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) d\tau \right) ds \right] \\ &\geq \lambda_i (f_i^\infty - \varepsilon) \delta \|u\| B_{\alpha_i}^i \geq \frac{1}{n (f_i^\infty - \varepsilon) \delta B_{\alpha_i}^i} (f_i^\infty - \varepsilon) \delta B_{\alpha_i}^i \|u\| = \frac{1}{n} \|u\|. \end{aligned}$$

Par suite

$$\|T(u)\| = \sum_{i=1}^{i=n} \|T_i(u)\| \geq \|u\|.$$

Ce qui nous permet de dire que la première condition du Théorème 1.2.6 est satisfaite. Par conséquence, T possède un point fixe $u = (u_1, \dots, u_n) \in K$ avec $r \leq \|u\| \leq R$, alors par le Lemme 7.2.5 et le Lemme 7.2.6, u est une solution positive de (7.1). Ce qui termine la preuve. ■

De façon similaire on peut démontrer le résultat suivant.

Théorème 7.3.2. *Avec les notations (H1) et (H2). Supposons que l'hypothèse (7.3) est vérifiée et que $\Gamma_i^0 < \Lambda_i^\infty$. Alors le problème (7.1) possède au moins une solution positive pour $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{R}_2$,*

$$\mathcal{R}_2 = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) : \frac{\Gamma_i^0}{n} < \lambda_i < \frac{\Gamma_i^\infty}{n} \right\}.$$

Dans cette partie du chapitre, la version vectorielle du théorème de point fixe de Krasnosel'skii Théorème 1.2.8 est appliquée au problème (7.1) afin d'obtenir de nouveaux résultats d'existence de solutions positives de (7.1) ainsi que la localisation de leur composante. Notre résultat principal dans cette section est le suivant :

Théorème 7.3.3. *Avec les mêmes notations (H3) et (H4). Supposons que l'hypothèse (7.3) est vérifiée et que $\Lambda_i^\infty < \Lambda_i^0$. Alors le problème (7.1) possède au moins une solution positive pour $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{Q}_1$,*

$$\mathcal{Q}_1 = \{ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) : \Lambda_i^\infty < \lambda_i < \Lambda_i^0 \}.$$

Preuve. Soit

$$\Lambda_i^\infty < \lambda_i < \Lambda_i^0, i = 1, \dots, n.$$

et choisissons $\varepsilon > 0$ tel que

$$\frac{1}{\delta_i^2 B_{\alpha_i}^i (F_i^\infty - \varepsilon)} \leq \lambda_i \leq \frac{1}{A_{\alpha_i}^i (F_i^0 + \varepsilon)}, i = 1, \dots, n.$$

Par la définition des F_i^0 , il existe $H_1 > 0$ tel que

$$f_i(u) = f_i(u_1, \dots, u_n) \leq (F_i^0 + \varepsilon) u_i \text{ pour } u_i \in [0, H_1], (i = 1, 2, \dots, n)$$

Ainsi, $T_i u \not\prec u_i$ si $\|u_i\| = H_1$ pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pour s'en convaincre supposons le contraire, i.e.

$$u_i \prec T_i u(t), \text{ pour } \|u_i\| = H_1$$

alors

$$\begin{aligned} u_i(t) &< T_i(u)(t) \\ &= \lambda_i \left[\int_0^1 H_{\alpha_i}(t, s) a_i(s) f_i(u(s)) ds + \frac{t^{\alpha_i-1}}{d_i} \int_0^1 \phi_i(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) f_i(u(\tau)) d\tau \right) ds \right] \\ &\leq \lambda_i \left[\int_0^1 H_{\alpha_i}(1, s) a_i(s) f_i(u(s)) ds + \frac{1}{d_i} \int_0^1 \phi_i(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) f_i(u(\tau)) d\tau \right) ds \right] \\ &\leq \lambda_i (F_i^0 + \varepsilon) \|u_i\| \left[\int_0^1 H_{\alpha_i}(1, s) a_i(s) ds + \frac{1}{d_i} \int_0^1 \phi_i(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) d\tau \right) ds \right] \\ &= \lambda_i (F_i^0 + \varepsilon) A_{\alpha_i}^i \|u_i\| \leq \frac{(F_i^0 + \varepsilon) A_{\alpha_i}^i}{A_{\alpha_i}^i (F_i^0 + \varepsilon)} H_1 = H_1, \forall t \in (0, 1). \end{aligned}$$

On arrive à la contradiction $\|u_i\| = H_1 < H_1$.

Par la définition des F_i^∞ , il existe $H_2 > 0$ tel que

$$f_i(u) = f_i(u_1, \dots, u_n) \geq (F_i^\infty - \varepsilon) u_i \text{ pour } u_i \in [H_2, +\infty), (i = 1, \dots, n).$$

Soit $H_3 = \max \{2H_1, \frac{1}{\delta} H_2\}$. Si $u = (u_1, \dots, u_n) \in K$ avec $\|u_i\| = H_3$, alors

$$\min_{t \in [l, 1]} u_i(t) \geq \delta \|u_i\| \geq H_2, i = 1, \dots, n.$$

Par suite, $Tu_i \not\prec \|u_i\|$ si $\|u_i\| = H_3$ pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pour s'en convaincre, supposons le contraire, i.e.

$$u_i(t) \succ T_i u(t), \text{ pour } u = (u_1, \dots, u_n) \in K \text{ avec } \|u_i\| = H_3.$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
u_i(t) &> T_i(u)(t) \\
&= \lambda_i \left[\int_0^1 H_{\alpha_i}(t, s) a_i(s) f_i(u(s)) ds + \frac{t^{\alpha_i-1}}{d_i} \int_0^1 \phi_i(s) \left(\int_0^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) f_i(u(\tau)) d\tau \right) ds \right] \\
&\geq \lambda_i \left[\int_l^1 H_{\alpha_i}(t, s) a_i(s) f_i(u(s)) ds + \frac{t^{\alpha_i-1}}{d_i} \int_l^1 \phi_i(s) \left(\int_l^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) f_i(u(\tau)) d\tau \right) ds \right] \\
&\geq \lambda_i t^{\alpha_i-1} \left[\int_l^1 H_{\alpha_i}(1, s) a_i(s) f_i(u(s)) ds + \frac{1}{d_i} \int_l^1 \phi_i(s) \left(\int_l^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) f_i(u(\tau)) d\tau \right) ds \right] \\
&\geq \lambda_i (l)^{\alpha_i-1} (F_i^\infty - \varepsilon) \left[\int_l^1 H_{\alpha_i}(1, s) a_i(s) u_i(s) ds + \frac{1}{d_i} \int_l^1 \phi_i(s) \left(\int_l^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) u_i(\tau) d\tau \right) ds \right] \\
&\geq \lambda_i (l)^{2\alpha_i-2} (F_i^\infty - \varepsilon) \|u_i\| \left[\int_l^1 H_{\alpha_i}(1, s) a_i(s) ds + \frac{1}{d_i} \int_l^1 \phi_i(s) \left(\int_l^1 G_{1\alpha_i}(s, \tau) a_i(\tau) d\tau \right) ds \right] \\
&\geq \lambda_i \delta^2 (F_i^\infty - \varepsilon) \|u_i\| B_{\alpha_i}^i = \frac{1}{\delta^2 B_{\alpha_i}^i (F_i^\infty - \varepsilon)} \delta^2 (F_i^\infty - \varepsilon) B_{\alpha_i}^i H_3 = H_3.
\end{aligned}$$

On arrive à la contradiction

$$\|u_i\| = H_3 > H_3.$$

Ainsi la première condition du Théorème 1.2.8 est satisfaite. Par conséquent l'opérateur T possède un point fixe $u = (u_1, \dots, u_n)$ avec $u_i \in K_{H_1, H_3}$, ($i = 1, \dots, n$). ■

Le prochain résultat d'existence peut être démontré de manière analogue, sa preuve est omise.

Théorème 7.3.4. *Avec les mêmes notations (H3) et (H4). Supposons que l'hypothèse (7.3) est vérifiée et que $\Lambda_i^0 < \Lambda_i^\infty$. Alors le problème (7.1) possède au moins une solutions positive pour $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{Q}_2$,*

$$\mathcal{Q}_2 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) : \Lambda_i^0 < \lambda_i < \Lambda_i^\infty\}.$$

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse on a présenté quelques résultats concernant l'existence des solutions positives pour certaines classes de problèmes aux limites fractionnaires. Le travail effectué dans le cadre de cette thèse a permis de réaliser plusieurs publications apparues dans des revues de renommée établie et un travail soumis .

Nous estimons que les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des équations différentielles fractionnaires, en ouvrant de nouveaux horizons à la recherche scientifique sur cette thématique émergente.

Enfin, vu sa nouveauté ce domaine est très riche en questions ouvertes ; par conséquent différentes perspectives peuvent être lancées à la suite de ce travail. En effet, nous avons l'intention d'étudier ultérieurement la stabilité des solutions d'une telle classe d'équations.

Bibliographie

- [1] R. P. Agarwal, M. Benchohra and S. Hammani, A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential and inclusions, *Acta Appl. Math.* Doi 10.1007/s10440-008-9356-6.
- [2] R.P. Agarwal, D. O'Regan, *Infinite Interval Problems for Differential, Difference and Integral Equations*, Kluwer Academic, 2001.
- [3] B. Ahmad and J. J. Nieto, Riemann-Liouville fractional differential equations with fractional boundary conditions, *Fixed Point Theory*, 13(2012), 329-336.
- [4] B. Ahmad and J. J. Nieto, Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions. *Computers & Mathematics with Applications*, Vvol. 58, no. 9, pp. 1838–1843, 2009.
- [5] B. Ahmad, J. Nieto, Existence results for nonlinear boundary value problems of fractional integro differential equations with integral boundary conditions, *Boundary Value Problems*, Vol. 2009(2009), Article ID 708576, 11 pages.
- [6] B. Ahmad and J. J. Nieto, Riemann-Liouville fractional integro-differential equations with fractional nonlocal integral boundary conditions. *Boundary Value Problems*, 2011, 36 (2011), 11 pages.
- [7] B. Ahmad, S. K. Ntouyas and A. Alsaadi, New existence results for nonlinear fractional differential equations with three-point integral boundary conditions, *Advances in Difference Equations*. Vol 2011, ID 107384, 11 pages.
- [8] R. P. Agarwal, D. O'Regan and P. J. Y. Wong, *Positive solutions of Differential, Difference, and Integral Equations*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.
- [9] R. P. Agarwal, D. O'Regan, *Infinite Interval Problems for Differential, Difference and Integral Equations*. Kluwer Academic, Dordrecht (2001)
- [10] C. Bai, Triple positive solutions for a boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ*, 24 (2008) 1-10.
- [11] C. Bai, Positive solutions for nonlinear fractional differential equations with coefficient that changes sign, *Nonlinear Anal.* 64 (2006), 677-685.
- [12] Z. Bai, On positive solutions of a nonlocal fractional boundary value problem, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 72(2010), 916-924.

- [13] C. Bai and J. Fang, The existence of a positive solution for a singular coupled system of nonlinear fractional differential equations, *Appl. Math. Comput.* 150 (2004), no. 3, 611-621.
- [14] M. Benchohra, S. Hammani, S. K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equation with fractional order and nonlocal conditions, *Nonlinear Anal. TMA*, 71(2009), 2391-2396.
- [15] M. Benchohra, J. Henderson, S. K. Ntouyas and A. Ouahab, Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay, *J. Math. Anal. Appl.* 338 (2008), 1340-1350.
- [16] Z. Bai, H. Lü, Positive solutions for a boundary value problem of nonlinear fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 311 (2005), 495-505.
- [17] Z. Bai and T. Qiu, Existence of positive solutions for singular fractional differential equations, *Electron. J. Diff. Eqns.* 2008 (2008), no. 146, 1-19.
- [18] A. Benmezai, A. Saadi, Existence results for a nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions on the half-line. *Differ. Equ. Appl.* 7, No. 3 (2015), 333-346.
- [19] A. Benmezai, A. Saadi., Existence of positive solutions for a nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions, *Journal of Fractional Calculus and Applications JFCA*, Vol. 7(2) July 2016, pp. 145-152.
- [20] A. Benmezai, A. Saadi., Existence results for boundary value problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions. (Soumis).
- [21] C. Corduneanu, *Integral Equations and Stability of Feedback Systems*, Academic Press, New York, 1973.
- [22] Y. Chen, D. Chen and Z. Lv, The existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with multi-point boundary conditions, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society* Vol. 38 No. 3 (2012), pp 607-624.
- [23] J. Caballero, I. Cabrera, and K. Sadarangani, Positive solutions of nonlinear fractional differential equations with Integral boundary value conditions, *Abstract and Applied Analysis*, Vol 2012, Article ID 303545, 11 pages.
- [24] A. Cabada, G. Wang, Positive solutions of nonlinear fractional differential equations with integral boundary value conditions. *J. Math. Anal. Appl.* 389(2012), 403-411.
- [25] S. Djebali, *Degré topologique : théorie et applications aux EDO-EDP*, Cours policopié, Département de mathématiques, ENS-Kouba, Alger, (2006).
- [26] S. Djebali, T. Moussaoui and R. Precup, Fourth-Order p -Laplacian Nonlinear Systems via the Vector Version of Krasnosel'skii's Fixed Point Theorem, *Mediterr. J. Math.* 6 (2009), 447-460.
- [27] D. Delbosco and L. Rodino, Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation, *J. Math. Anal. Appl.* 204(1996), 609-625.
- [28] M. El-Shahed, Positive solutions for boundary-value problem of nonlinear fractional differential equation, *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2007, Article ID 10368, 8 pages, 2007doi :10.1155/2007/10368.

- [29] D. Fu, W. Ding, Existence of positive solutions of third-order boundary value problems with integral boundary conditions in Banach spaces. *Adv. Differ. Equ.* 2013, 65 (2013).
- [30] M. Feng, X. Zhang and W. Ge, New existence results for Higher-order nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions, *Boundary Value Problems*, vol 2011, ID 720702, 20 pages.
- [31] C. S. Goodrich, Existence of a positive solution to systems of differential equations of fractional order, *Comput. Math. Appl.* 62 (2011) 1251–1268.
- [32] D. Guo & V. Lakshmikantham, *Nonlinear Problèmes in Abstract Cones*, Acad Press, San Diego, 1988.
- [33] J. Henderson, R. Luca, Positive solution for a system of nonlocal fractional boundary value problems, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 16(2013), No. 4, 985–1008.
- [34] W. Jiang, Solvability for fractional differential equations at resonance on the half line, *Applied Mathematics and Computation* 247 (2014), 90–99.
- [35] M. Jia, X. Liu, Three nonnegative solutions for fractional differential equations with integral boundary conditions, *Comput. Math. Appl.* 62(2011) 1405-1412.
- [36] J. Jin, X. Liu, M. Jia., Existence of positive solutions for singular fractional differential equations with integral boundary conditions, *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 2012 (2012), No. 63, pp. 1-14.
- [37] E. R. Kaufmann, Positive Solutions of a three-point boundary-value problems on a time scale, *Electron. J. Diff. Eqns.* 2003 (2003), n₀ 82, 1-11.
- [38] A. A. Kilbas and S. A. Marzan, Nonlinear differential equations with Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions, *Diff : Uravn* 41 (2005), n₀ 1, 82-86; translation in *Differ. Equ* 41 (2005), N₀ 1, 84-89.
- [39] A. A. Kilbas, O. I. Marichev, S. G. Samko, *Fractional Integral and Derivatives (Theory and Applications)*. Gordon and Breach, Switzerland, 1993.
- [40] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B. V., Amsterdam, 2006.
- [41] M.A. Krasnosel'skii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*. Cambridge University Press, New York, 1964.
- [42] M. A. Krasnosel'skii, *Positive solutions of operator equations*, Noordhoff Gronigen, Netherland, 1964.
- [43] R. A. Khan, M. Ur Rehman and J. Henderson, Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions, *Fractional Differential Calculus*, Vol 1, Number 1 (2011), 29-43.
- [44] M. A. Krasnosel'skii and P. P. Zabreiko, *Geometrical methods of nonlinear analysis*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [45] Y.S. Liu, Existence and unboundedness of positive solutions for singular boundary value problems on half-line, *Applied Mathematics and Computation*, 144(2003), 543-556.
- [46] Y. Liu, B. Ahmad, R.P. Agarwal, Existence of solutions for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with fractional boundary conditions on the half-line, *Advances in Difference Equations* 2013, 2013 :46.

- [47] S. Liang, J. Zhang, Existence of three positive solutions of m -point boundary value problems for some nonlinear fractional differential equations on an infinite interval, *Computers and Mathematics with Applications*, 61(2011)3343-3354.
- [48] Miller, K. S. and Ross, B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York : Wiley, 1993.
- [49] Oldham, K. B. and Spanier, J. *The Fractional Calculus : Integrations and Differentiations of Arbitrary Order*. New York : Academic Press, 1974.
- [50] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [51] R. Precup, A vector version of Krasnosel'skii's fixed point theorem in cones and positive periodic solutions of nonlinear systems. *Fixed Point Theory Appl.* 2 (2007), 141–151.
- [52] X. Su, Boundary value problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations, *Appl. Math. Lett.* 22 (2009) 64–69.
- [53] A. Saadi, M. Benbachir, Positive solutions for three-point nonlinear fractional boundary value problems, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ*, 3 (2011) 1-19.
- [54] A. Saadi, A Benmezai, M. Benbachir, Positive solutions for three-point nonlinear fractional semi- positone boundary value problems, *PanAmerican Mathematical Journal*, Vol. 22(2012), Number 4, 41-57.
- [55] A. Saadi, A Benmezai, Positive solutions for three-point nonlinear singular semi- positone fractional boundary value problems, *Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems*, Vol. 5, Issue. 1, 2013, pp. 1-17.
- [56] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integral And Derivatives (Theory and Applications)*. Gordon and Breach, Switzerland, 1993.
- [57] X.Su, S. Zhang, Unbounded solutions to a boundary value problem of fractional order on the half-line, *Computers and Mathematics with applications*, 61(2011)1079-1087.
- [58] W. Sudsutad, J. Tariboon, Boundary value problems for fractional differential equations with three-point fractional integral boundary conditions, *Adv. Differ. Equ.* 2012, 93 (2012).
- [59] Y. Sun, Positive Solutions for third-order three-point nonhomogeneous boundary value problems, *Appl. Math. Lett.* 22 (2009), 45-51.
- [60] J. Tariboon, T. Sitthiwirattam, Positive solutions of a nonlinear integral boundary value Problem, *Boundary Value Problems*, vol 2010, ID 519210, 11 pages.
- [61] F. J. Torres, Existence of a positive solution for a boundary value problem of a nonlinear fractional differential equation, *BIMS*,39(2013), No. 2, 307-323.
- [62] G. Wang, A. Cabada, L. Zhang, An integral boundary value problem for nonlinear differential equations of fractional order on an unbounded domain, *J. Integral Equations Appl.* 26, No. 1, (2014), 117–129.
- [63] S. Xie, Positive solutions for a system of higher-order singular nonlinear fractional differential equations with nonlocal boundary conditions, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ*, 18(2015), 1–17.

-
- [64] W. G. Yang, Positive solutions for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions, *Comput. Math. Appl.* 63 (2012) 288–297.
- [65] C. Yuan, Multiple positive solutions for $(n - 1, 1)$ -type semipositone conjugate boundary value problem of nonlinear fractional differential equations, *Electron.J. Qual. Theory. Diff. Eqns.* 36 (2010),1-12.
- [66] S. Q. Zhang, Existence results of positive solutions to fractional differential equation with integral boundary conditions, *Math. Bohem.* 135(2010), No. 2, 299–317.
- [67] S. Zhang, Existence of solution for a boundary value problems of fractional order, *Acta Mathematica Scientia* , Vol. 26, n^o 2(2006), 220-228.
- [68] S. Zhang, Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equation, *Electron. J. Diff. Eqns.* 36(2006), 1-12.
- [69] L. Zhang, B. Ahmad, G. Wang, R. P. Agarwal, M. Al-Yami and W. Shammakh, Nonlocal integrodifferential boundary value problem for nonlinear fractional differential equations on an unbounded domain, *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2013, Article ID 813903, 5 page, 2013.
- [70] C. X. Zhu, X. Z. Zhang, Z. Q. Wu, Solvability for a coupled system of fractional differential equations with nonlocal integral boundary conditions, *Taiwanese J. Math.* 17(2013), No. 6, 2039–2054.