

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENE »
FACULTE DE PHYSIQUE**



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : Physique

Spécialité : Energétique et Mécanique des Fluides

Par : HADJ RAHMOUN Oum el kheir

Sujet

**REPONSE DES SYSTEMES HYDROELASTIQUES A UNE
EXCITATION PARAMETRIQUE**

Soutenu publiquement le 03/05/2011, devant le jury composé de :

Mr- Ferhat SOUIDI	Professeur, à USTHB	Président
Mr- Mohamed DEBIANE	Maitre de Conférences, à USTHB	Directeur de thèse
M^{me}- Amina MATAOUI	Professeur, à USTHB	Examineur
Mr- Mouloud TRIBECHÉ	Professeur, à USTHB	Examineur
Mr- Abdelrahmane GHEZAL	Maitre de Conférences, à USTHB	Examineur

A la mémoire de mon père

Remerciements

Ce travail a été réalisé au laboratoire de mécanique des fluides théorique et appliquée, à la faculté de physique de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Mohamed DEBIANE, pour sa disponibilité, sa patience, sa gentillesse et son esprit de famille. Je le remercie de m'avoir communiqué une partie de son savoir dans le domaine d'interaction fluide-structure.

Je remercie Monsieur Ferhat SOUIDI, professeur à la faculté de physique de l'USTHB qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

J'exprime mes remerciements pour Madame Amina MATAOUI, Monsieur Abdelrahmane GHEZAL et Monsieur Mouloud TRIBECHE qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail.

Je remercie, ma mère de m'avoir soutenue et encouragée, à ma belle-mère à mes frères « Menad et Mohamed », mes sœurs « Leïla, Ahlam et Roza » pour leur sincère et fidèle assistance. Sans oublier mes nièces « Nassima et Allae » et mon neveu « Mouloud ». Surtout à mon cher mari Toufik, pour sa patience et tout ce qu'il fait pour moi.

Sans oublier, mes amies et collègues Chahra, Ibtissam et Dalila pour leur soutien moral et tous les moments inoubliables qu'on a partagé durant notre cursus commun, sans omettre toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Je prie dieu, de leurs accorder longue vie et bonne santé.

SOMMAIRE

Page

SOMMAIRE	1
NOMENCLATURE.....	2
INTRODUCTION GENERALE	4

CHAPITRE I : POSITION DU PROBLEME

1.1 Revue bibliographique.....	10
1.2 Hypothèses et équations du base.....	22
1.2.1 Equations du mouvement du fluide.....	24
1.2.2 Equations du mouvement de la paroi déformable.....	29

CHAPITRE II : METHODE DE RESOLUTION

2.1 Théorie.....	30
2.1.1 formes des solutions.....	30
2.1.2 Détermination de la suite q_n	32
2.1.3 Détermination des coefficients a_n et b_n	35
2.2 Application	40
2.2.1 Cas où la poutre est articulée à sa base	41
2.2.2 Cas où la poutre se déplace comme un piston	47

CHAPITRE III : RESULTATS ET DISCUSSION

3.1 Introduction.....	51
3.2 Cas où la poutre se déplace comme un piston	56
3.2.1 courbes de stabilité neutre	56
3.2.2 Influence du la tension superficielle	58
3.3 Cas où la poutre est articulée à sa base.....	62
3.2.1 courbes de stabilité neutre	62
3.2.2 Influence de la profondeur du fluide	65

CONCLUSION GENERALE	69
ANNEXE.....	70
REFERENCES.....	72

Nomenclature

Lettres majuscules

A	L'aire de la section.
EI	Le module de flexion de la poutre.
$E_k(y)$	Le kième mode normal de l'oscillation de la poutre.
$\vec{F}$	Les forces volumiques extérieures.
Fr	Nombre de froude : $Fr = \sqrt{\frac{\omega^2 h}{g}}$.
G	Une matrice.
H	la hauteur de réservoir.
I	Moment d'inertie de la paroi mobile.
K	La constante de torsion équivalente.
L	Longueur de réservoir.
L^2	L'espace vectoriel.
P	La pression de fluide à l'interface.
p_a	La pression atmosphérique.
R_1 et R_2	Les rayons de courbures principaux de la surface libre.
T	Le coefficient de tension superficielle.
$U_n(y)$	Des fonctions de variable réelles y .
U_n	Fonction propre.
$\vec{V}(u, v)$	Champ de vitesse dans le fluide.

Lettres minuscules

a_n et b_n	Des coefficients dépendent du temps (coordonnées généralisées).
----------------	---

g_0	L'accélération de la pesanteur.
g_1	L'accélération de mouvement harmonique verticale.
h	le remplissage de réservoir.
K	Une constante arbitraire.
$\vec{n}$	Le vecteur normal à l'interface.
$p(t)$	Une fonction vectorielle périodique.
V	Un vecteur.
w	La déformation de la paroi élastique.
x	La coordonnée horizontale.
y	La coordonnée verticale.

Lettres grecques

δ et γ	des nombres adimensionnels
$\phi(x, y, t)$	Le potentiel de vitesse.
$\eta(x, t)$	L'élévation de la surface libre.
κ'	Un nombre adimensionnel caractérise la capillarité.
θ	l'angle de décalage de la poutre par rapport à l'axe (oy)
ω	La fréquence de mouvement harmonique verticale.
ρ_f	Densité volumique de fluide.
ρ_s	La densité de masse surfacique de la poutre.
σ	Constante complexe (constante de floquet).
ψ_k	Une troisième mode normal de l'oscillation.
Ω_n	La fréquence naturelle du nième mode de vibration.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Un produit scalaire de l'espace fonctionnel L^2 .

Introduction générale

Les structures solides sont en général en contact avec au moins un fluide. Elles peuvent être rigides, mobiles ou déformables. Les comportements d'une structure et d'un fluide en contact sont couplés. Le déplacement et/ou la déformation du solide affecte, au moins localement, l'écoulement du liquide et ce dernier, caractérisé par son champ de vitesse et de pression, exerce des forces aérodynamiques (forces de pression) sur la surface mouillée qui se déplace et/ou se déforme sous leur action.

Ce sont les phénomènes d'interaction fluide-structure qui sont à l'origine du fonctionnement de certains systèmes, mais dans d'autres cas ils manifestent un dysfonctionnement ou engendrent des dégradations. Par exemple, l'écoulement traversant une hélice, ou l'action du vent sur une voile de bateau permettent de propulser un système, mais les vibrations produites par l'écoulement peuvent causer des dégâts. Dans ce cas, les phénomènes en jeu doivent pouvoir être prédits afin d'éviter l'usure accélérée du système, la fatigue des matériaux, voire sa destruction lorsque les vibrations dépassent un certain seuil.

Les études des interactions fluides-structure interviennent dans de nombreux domaines d'applications. Nous allons donner quelques exemples pour mettre en évidence l'importance de ces phénomènes.

Le génie civil :

C'est un des premiers grands secteurs où les études des interactions fluide-structure sont apparues. Elles concernent, notamment, les ponts suspendus, les tours, et les barrages. Le développement de ce domaine d'application est lié à l'effondrement du pont de Tacoma Narrows (1940) sous l'effet d'un vent perpendiculaire de 68 km/h qui lui a fait subir de nombreuses oscillations d'amplitude croissante dues à un phénomène de résonance (figure 1).

A l'heure actuelle, les simulations expérimentales ne permettent pas d'obtenir des résultats très fiables en raison du coût prohibitif des maquettes potentiellement réalistes qui correspondent à des échelles de l'ordre de $1/50^{\text{ème}}$. Ainsi, l'analyse expérimentale ne peut pas toujours respecter les similitudes et conserver les paramètres sans dimension qui régissent les phénomènes physiques. C'est pour cette raison qu'elle est complétée par des théories

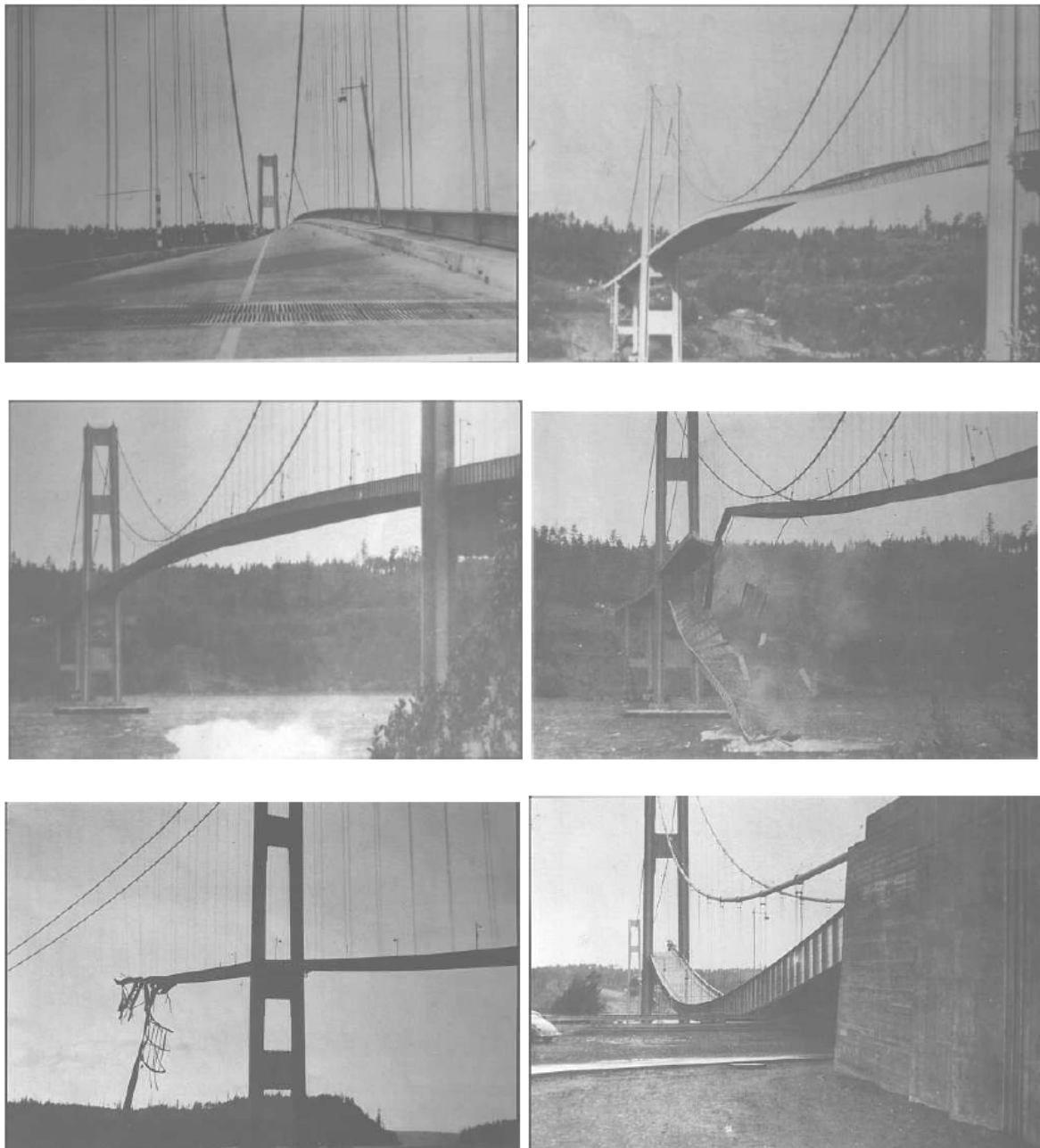


Figure 1 : Différentes vue successives de l'effondrement du pont de Tacoma

permettant une prédiction approchée du comportement couplé du fluide et de la structure. Avec l'accroissement de la puissance des ordinateurs, la simulation numérique est de plus en plus utilisée pour l'analyse aéroélastique ou hydroélastique des ouvrages. Les travaux intègrent des détails de plus en plus fins des géométries et des propriétés mécaniques des matériaux. A l'heure actuelle, les simulations numériques sont capables, par exemple, d'accélérer le design grossier des ouvrages, de traduire les forces exercées par le fluide sur la structure et de prédire certaines instabilités. Il est intéressant de noter que les calculs ne se limitent pas à la configuration finale d'un ouvrage d'art. Par exemple, on vérifie qu'un pont ou un barrage ne risque pas de s'effondrer dans toutes les configurations intermédiaires qu'il peut prendre en cours de construction.

Le génie nucléaire :

Dans le domaine du Génie Nucléaire, plusieurs problèmes générés par des phénomènes d'interaction fluide-structure peuvent devenir critiques et nécessitent que l'on trouve des moyens de les faire disparaître ou au moins de les contrôler.

Un des premiers exemples intéressants est celui des réfrigérants de centrales (hyperboloïdes de révolution dont le but est de refroidir la vapeur d'eau). Ainsi, dans un vent régulier, des structures tourbillonnaires sont générées par l'écoulement du vent autour des premiers réfrigérants situés en amont ; ces structures vont impacter les derniers réfrigérants de manière périodique et, si cela a lieu à une fréquence critique de résonance, ces ouvrages peuvent alors être le siège d'une interaction fluide-structure destructrice.

Un autre problème potentiel encore plus dangereux se pose à l'intérieur même du réacteur. Rappelons que le combustible, l'uranium 235, est conditionné sous forme de petites pastilles. Celles-ci sont empilées dans des gaines métalliques étanches réunies en assemblages. Placés dans une cuve en acier remplie d'eau, ces assemblages forment le cœur du réacteur. Ils sont le siège de la réaction en chaîne, qui les porte à haute température. L'eau de la cuve s'échauffe à leur contact (plus de 300°C). Elle est maintenue sous pression, ce qui l'empêche de bouillir, et circule dans un circuit fermé appelé circuit primaire. Ces grappes de tubes légèrement déformables se trouvent dans un écoulement qui risque de provoquer des contacts qui pourraient mettre en danger le contrôle de la réaction.

Interaction fluide structure en mer :

Dans ce domaine, la plupart des études s'intéressent aux charges exercées par la houle sur les édifices et les installations en mer, comme les constructions portuaires et les plateformes offshore d'extraction du pétrole. Il s'agit d'évaluer leur résistance à la houle, mais surtout de minimiser la houle dans les zones concernées

L'autre champ d'application important concerne l'hydrodynamique navale. Il s'agit alors de concevoir et d'optimiser des formes de coques pour minimiser la traînée mais également pour la résistance à la houle et aux impacts des vagues déferlantes, notamment pour les gros navires.

Interaction fluide structure dans le corps humain :

Le corps humain contient de nombreux fluides qui interagissent avec les tissus avec lesquels ils sont en contact (air pulmonaire, sang liquide oculaire...). Ces tissus étant très déformables, cette interaction fluide structure peut engendrer des maladies telles que le glaucome, les veines collabables (susceptibles de s'écraser), les ruptures d'anévrismes.... De nombreux modèles numériques ont été mis au point pour une meilleure compréhension de leur apparition ou pour la conception de prothèses (valves artificielles, pontages, etc...).

Le génie industriel :

Dans le domaine du génie industriel, les interactions fluides-structures concernent essentiellement les plaques et les réservoirs.

De nombreuses applications des plaques, constituées de matériaux extrêmement variés et de formes très différentes, interviennent dans l'ingénierie. Par exemple, elles sont utilisées dans les ailes d'avions, les structures suspendues en porte à faux et le bâtiment..... Elles sont conçues pour être rigides lorsqu'elles subissent des charges importantes mais elles sont dotées d'une certaine flexibilité lorsqu'elles sont sollicitées pour se cambrer. La problématique de leur sensibilité à l'action d'un fluide est la même que celle des ponts suspendus et des réfrigérants des centrales nucléaires.

Pour la famille des réservoirs, il s'agit de prévoir leur tenue mécanique aux charges qu'ils subissent, mais aussi le comportement du fluide en cas de mouvement de la structure. Le comportement du fluide est d'ailleurs difficile à prévoir aussi bien pour tous les véhicules terrestres (camions citernes), maritimes (tankers) et aériens (avions civils et militaires, satellites, lanceurs) que pour les réservoirs fixes au sol, dont la résistance aux séismes doit être assurée. Un des objectifs que les ingénieurs se fixent pour la conception d'un réservoir est de faire en sorte que les épaisseurs de ses éléments soient les plus fines possibles pour économiser la matière et pour alléger la structure. Les réservoirs sont souvent soumis à des charges dynamiques qui provoquent des vibrations qui donnent lieu à des oscillations des fluides qu'ils contiennent. En raison de leur nature fine, les parois subissent alors des déformations qui engendrent une rétroaction qui peut affecter les mouvements des fluides.

Problème étudié :

Lorsqu'un système fluide/réservoir élastique est soumis à une force dépendant du temps, sa réponse peut être fortement influencée par l'interaction entre les mouvements du liquide et ceux de la structure qui le contient. Dans ce contexte, nous nous proposons de considérer le cas de l'interaction entre un liquide oscillant et une paroi élastique d'un réservoir rectangulaire soumis à des oscillations harmoniques verticales. Ce problème qui représente une extension naturelle de celui de Faraday est rencontré dans de nombreuses situations dans lesquelles se manifestent des phénomènes de mélange de liquides, ou de ballottements dus à une agitation ou à un mouvement quelconque de l'enceinte. Outre son intérêt scientifique, une motivation particulière est suscitée par la nécessité d'effectuer, pour des raisons de sécurité l'analyse sismique des réservoirs de stockage ou de transport de liquides. Du point de vue expérimental, ce sujet s'est révélé attractif car il est caractérisé par des échelles de temps courtes et ses deux principaux paramètres, l'amplitude et la fréquence de vibration, sont faciles à contrôler.

Dans cette étude, il s'agit plus précisément de proposer une méthode qui permet de détecter, dans le cadre de la théorie linéaire, les conditions de transition entre les états stables et instables. Dans le cas du problème de Faraday, une analyse basée sur une décomposition en modes normaux aboutit à un système découplé d'équations de Mathieu gouvernant l'évolution

de chaque mode du mouvement de la surface libre. La transition des régions stables vers celles instables apparaît à travers des bifurcations harmoniques ou sous-harmoniques. Pour le cas qui nous intéresse son état sera décrit par un système d'équations de Mathieu couplées. Cependant, la réponse à une excitation paramétrique peut être plus complexe que celle synchrone ou sous-harmonique d'un réservoir rigide. La stabilité de ce système est examinée à partir du calcul des valeurs propres de la matrice de monodromie. Si cette matrice a au moins une valeur propre dont le module est supérieur à 1, la solution du système est instable. Une application de la méthode au cas d'une paroi modélisée soit par une plaque articulée à sa base ou par un système masse-ressort est présentée en guise d'illustration.

Chapitre 1

Position du problème

Ce chapitre est composé de deux parties : la première constitue l'étude bibliographique dans laquelle figurent des commentaires qui permettent de mesurer la complexité du problème et de situer cette recherche par rapport aux travaux antérieurs. Dans la deuxième, nous avons présenté les équations qui régissent le problème étudié. Ce dernier est composé des équations couplées des mouvements du fluide et de la paroi élastique. Le problème est formulé en utilisant les équations linéarisées du fluide et en modélisant la paroi déformable à travers le cas d'une plaque mince.

1.1. Revue bibliographique :

L'étude des interactions fluides-structures concerne la description des mouvements couplés des structures et de fluides qu'elles contiennent où dans lequel elles sont immergées. Une structure peut se déformer ou se mouvoir sous l'action des forces exercées par le liquide et le mouvement de ce dernier est à son tour affecté par le déplacement de la (ou des) paroi(s). Parce que ces composants communiquent dynamiquement, une analyse de la réponse du système doit considérer les deux simultanément. De telles études ont pour objectif la détermination de la façon dont le fluide modifie le comportement de la structure et, à l'inverse, comment la structure influe sur le mouvement du fluide. Le couplage fluide-structure étudie les interactions entre une structure fixe ou mobile, rigide ou déformable, et un fluide liquide ou gazeux, compressible ou incompressible, visqueux ou non visqueux s'écoulant autour d'elle, ou qu'elle contient. On parle de deux phénomènes couplés lorsque l'évolution de l'un est liée à celle de l'autre. Les problèmes d'interaction fluide-structure se situent à la frontière entre la dynamique des structures et la dynamique des fluides, ce qui implique que ce domaine emprunte aux deux disciplines. Il existe différents problèmes d'interaction fluide-structure qui regroupent un domaine physique vaste aux applications

industrielles multiples (voir l'introduction). Ces phénomènes peuvent être aussi provoqués par les vibrations propres au fonctionnement d'installations industrielles, de réservoirs ou de lignes de transfert de fluides comme ils peuvent être dus à des effets inertiels ou à des phénomènes naturels tels que les séismes.

La difficulté dans l'étude des phénomènes d'interaction fluide-structure est de résoudre les équations du problème en géométrie variable. Pour résoudre le problème de la structure, il faut connaître le chargement du fluide sur cette dernière, c'est-à-dire la pression exercée par le fluide alors qu'elle est une inconnue du problème global. Pour analyser le mouvement du fluide, il faut connaître les conditions aux frontières, en particulier, les conditions cinématiques et dynamiques sur les interfaces fluide-structure qui sont, elles aussi, des inconnues du problème global. Les problèmes d'interaction fluide-structure sont alors considérés globalement et la résolution est faite en tenant compte des deux domaines. L'autre difficulté rencontrée dans leur modélisation est liée aux effets qu'il faut prendre en compte dans celle des deux éléments. Ces effets sont nombreux et variés. Dans le fluide, on peut prendre en compte ou négliger la viscosité, la tension superficielle, la présence d'une surface libre et la compressibilité. La structure peut être représentée par une poutre, une membrane, une plaque, une coque ou un solide déformable. Sur le plan dynamique, on peut considérer les faibles ou les grandes déformations de la structure et, enfin, sur le plan géométrique, on peut examiner les géométries carrées, cylindriques, sphériques ou autres.

La complexité du problème dépendra du nombre d'effets, de la nature du fluide, du type de la structure, des géométries et du type du mouvement considéré. En plus de toutes ces contraintes, il faut aussi considérer la position du fluide par rapport à la structure. On conçoit bien la complexité que peut revêtir le problème en prenant en compte tous ces effets dans un modèle et en sachant que les équations qui les régissent sont en outre non-linéaires.

Cette revue est constituée de deux parties : la première concerne les études sur le ballonnement des fluides et la seconde celle de l'interaction entre un fluide et une structure. Chaque partie rend compte des travaux antérieurs et présente les modèles développés et les principaux résultats acquis. On se limitera au cas où le fluide est contenu dans la structure.

Le ballonnement d'un fluide dans un réservoir est caractérisé par des fréquences propres qui sont liées au mouvement du fluide sans interaction avec la structure. Le

phénomène du ballottement est important dans plusieurs domaines de l'industrie. La connaissance de fréquences propres du fluide en contact avec une structure solide déformable permet de prévoir les risques d'endommagement et d'éviter les catastrophes industrielles, écologiques et les pertes humaines.

Dans le cadre des études sur les véhicules spatiaux, plusieurs nouveaux problèmes liés à leur technologie sont mis en évidence. Leurs formes étant allongées, leurs fréquences de rotations sont faibles et leurs diamètres étant grands, les fréquences propres du fluide sont petites. Ainsi, ces tendances limitent le choix des fréquences de contrôle. Des problèmes aigus résultent de ce regroupement compact des fréquences en raison de l'interaction entre la structure, le ballottement du fluide et la fréquence de contrôle. Des considérations de performance nécessitent des engins avec des structures faibles. Par conséquent, les effets des vibrations élastiques de la structure du véhicule, du ballottement du fluide et du système de contrôle deviennent plus critiques en raison des basses fréquences et du faible amortissement global. Bien que les fréquences du sloshing soient proches de celles du contrôle, les effets du ballottement du fluide sur la stabilité peuvent être maîtrisés plus facilement que ceux de la structure élastique.

Les vibrations non-linéaires couplées, d'un réservoir rectangulaire et du ballottement de l'eau qui le remplit partiellement ont été étudiées théoriquement et expérimentalement par **IKEDA et NAKAGAWA [1997] et IKEDA et SHIN[2005]**. Le réservoir, soumis à une excitation sinusoïdale verticale est attaché à une structure pour supprimer les vibrations horizontales. Les équations modales du ballottement ont été établies en tenant compte de la non-linéarité due à l'inertie du liquide qui est engendrée par une grande amplitude du ballottement. Les réponses du fluide et de la structure ont été étudiées ainsi que leur stabilité. Les courbes de résonance obtenues changent en passant d'un ressort du type mou à un ressort du type dur quand la profondeur diminue. Ces courbes montrent également l'apparition d'oscillations harmoniques dans la structure et sous-harmoniques dans le liquide. La forme de ces courbes dépend fortement du taux de remplissage du réservoir.

FALTINSEN et AL [2000], ont utilisé le principe variationnel de **BATEMAN-LUKE** pour établir un système modal qui permet d'étudier le problème tridimensionnel du ballottement dans un réservoir rectangulaire rigide, partiellement rempli par un fluide incompressible, avec l'hypothèse d'un écoulement irrotationnel. Ce système tient compte du

couplage entre les coordonnées généralisées de la surface libre et celles de la distribution du potentiel des vitesses, représentées par des développements en séries de Fourier généralisées. Il présente la particularité de ne pas concerner exclusivement les modes normaux, ce qui confère aux équations modales la forme la plus générale. Cette méthode a été appliquée au cas bidimensionnel d'un réservoir soumis à un mouvement arbitraire de faible amplitude et de fréquence moyenne proche de la plus petite fréquence naturelle du ballonnement. Les modes qui interagissent entre eux ont différents ordres de grandeur et le plus bas est supposé dominant. L'aspect important de cette méthode est que la formulation utilisant des équations différentielles ordinaires non-linéaires, fonctions du temps, permet de décrire les effets transitoires. La théorie a été testée par comparaison avec des mesures expérimentales effectuées dans le cas de configurations faisant apparaître des impacts du liquide sur la face supérieure du réservoir. Cette confrontation a montré un bon accord entre les résultats. Cependant, ce modèle a montré ses limitations dans la simulation de ballonnements lorsque l'élévation de la surface libre est de l'ordre de grandeur de la largeur du réservoir ou de la profondeur du fluide. L'hypothèse d'un seul mode dominant est également contestable. Un moyen de résoudre ce problème a été proposé dans un deuxième article (**FALTINSEN et AL. [2001]**). L'analyse est basée sur le concept de résonance secondaire. Elle suggère que pour une excitation résonante de fréquence σ du mode primaire, les non-linéarités peuvent produire des oscillations de fréquence $n\sigma$ telle que la n ème fréquence naturelle, σ_n , soit très proche de $n\sigma$. La n ème coordonnée généralisée sera amplifiée et pourrait être du même ordre de grandeur que le fondamental.

FRANDSEN et BORTHWICK [2003] ont étudié le problème des ondes stationnaires produites dans un réservoir rectangulaire fixe ou soumis à des oscillations verticales. Le problème bidimensionnel a été traité, dans le cadre de la théorie potentielle en utilisant un schéma aux différences finies de second ordre. Pour ce faire, ils ont exploité une transformation qui convertit le domaine fluide, de géométrie variable, en une couche rectangulaire et fixe qui permet de simplifier la discrétisation des équations. Cette méthode a été validée dans le cas des ondes stationnaires siégeant dans une structure fixe. Cela a également permis de montrer l'importance des non-linéarités d'ordres supérieurs qui étaient inaccessibles aux méthodes antérieures. Ce travail a été étendu au cas où le réservoir est soumis à des oscillations verticales. Ils ont, en particulier, examiné les conséquences de l'élimination des termes non-linéaires effectuée dans les travaux antérieurs. Leurs effets sont

caractérisés par un paramètre qui mesure l'importance du forcing extérieur. Lorsque celui-ci est faible, le comportement du ballotement, en dehors des configurations instables, est similaire à celui d'une structure fixe. On enregistre un comportement périodique similaire à celui qu'on obtient pour les petites amplitudes. Ce caractère disparaît aux grandes valeurs du paramètre de forcing pour laisser place à un comportement faisant apparaître des amplitudes irrégulières presque imprévisibles. Dans les régions stables, les solutions sont cependant limitées, alors que dans les zones instables apparaissent des effets drastiques en rapport avec des phénomènes de résonance.

FALTINSEN et AL. [2003] ont construit un système modal asymptotique pour modéliser le ballotement non-linéaire dans un réservoir rectangulaire. Le système couple, de façon non-linéaire, neuf fonctions modales décrivant l'évolution en temps des modes normaux. Il suppose que les deux premiers modes sont dominants. Le système est équivalent au modèle présenté par **FALTINSEN et AL. [2000]** pour le cas bidimensionnel. Il est valide pour un ballotement résonnant dans un bassin à base carrée. L'étude fait intervenir la profondeur du fluide dont les effets sont discutés. La partie théorique se concentre sur les solutions périodiques du système modal (état du mouvement de l'onde stationnaire) pour une excitation longitudinale (le long de la paroi) et diagonale (dans le plan diagonal vertical). Trois types de solutions sont établis pour chaque cas :

- 1- ondes stationnaires résonnantes planes/diagonales pour des excitations longitudinales/diagonales;
- 2- ondes tourbillonnaires se déplaçant le long des parois du réservoir dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire;
- 3- ondes stationnaires résonnantes couplées, en phase avec les plus bas modes.

La contribution des modes les plus élevés, et l'influence de la profondeur du liquide sont étudiées en détail. L'étude va révéler des zones où les régimes instables existent et des régions où il y a deux solutions périodiques stables.

L'approche modale de troisième ordre utilisée par **FALTINSEN et TIMOKHA [2001]** a été modifiée pour étudier le sloshing tridimensionnel dans un bassin de section rectangulaire. Les hypothèses adoptées considèrent le fluide incompressible, l'écoulement irrotationnel et

exclut la réflexion des ondes et leur impact sur le toit. La surface libre est perpendiculaire aux parois verticales du bassin. En outre, le forcing externe, latéral et angulaire, est suffisamment petit. Leur approche modale aboutit à un système dimensionnel composé d'un nombre infini d'équations différentielles ordinaires couplant les fonctions modales, non linéaires et dépendantes du temps. Ce système décrit l'évolution temporelle des modes normaux de la surface libre correspondants. La non linéarité est de type polynomiale est conforme à la théorie de troisième ordre de **ZAKHAROV [1968]**. La théorie modale adaptative peut expliquer l'amplification d'un nombre infini de modes normaux.

Le cas des grandes amplitudes du sloshing dans un réservoir bidimensionnel pourvu d'une chicane et soumis à une excitation horizontale, a été considéré par **CHO et LEE [2004]**. L'étude a été menée, dans le cadre de la théorie potentielle, comme un problème à valeur initiale, en utilisant la méthode des éléments finis qui s'est avérée stable et précise. Le champ des vitesses a été déduit à partir du potentiel avec des éléments de second ordre au moyen d'une méthode des moindres carrés. Les conditions cinématique et dynamique ont été traitées en utilisant une méthode du type « prédicteur-correcteur ». Le maillage est réalisé avec une approche semi-Lagrangienne combinée avec la correction de l'élévation de la surface libre, afin de maintenir sa régularité et de garder le volume du liquide inchangé. L'étude des caractéristiques hydrodynamiques a été effectuée en changeant la taille de l'installation et la largeur d'ouverture de la chicane. L'étude a montré que le mouvement du liquide et la variation de pression dynamique au-dessus de la chicane sont actifs ; ceux ayant lieu en dessous sont considérablement passifs. D'autre part, la surface libre montre des fluctuations très complexes nettement influencées par la largeur d'ouverture de la chicane.

Les interactions entre les fluides et les structures, de formes géométriques diverses, ont fait l'objet de plusieurs travaux. Les structures et les fluides sont caractérisés par des fréquences et des modes propres. L'interaction entre les deux éléments est associée à des fréquences et des modes, dits couplés, différents des précédents.

Les modes normaux d'oscillation d'un fluide incompressibles dans un réservoir ouvert dont une partie de la paroi supposée flexible est modélisée par une membrane, ont été étudiés par **SHULES [1990]**. Il a d'abord analysé la décroissance des fréquences propres d'un fluide

non visqueux dans le cas où une partie de la paroi rigide du réservoir est remplacée par une membrane. Le problème des oscillations d'un fluide visqueux dans un réservoir flexible est alors étudié numériquement en utilisant la technique des éléments finis. Il a observé deux types de fréquences propres : les modes liés aux oscillations de la surface libre et les modes liés aux vibrations de la structure. La dépendance des deux modes à l'égard du nombre de Bond (qui mesure rapport de la force de gravité sur la force de tension superficielle) et du nombre de Reynolds a été étudiée.

Pour obtenir la réponse des structures soumises au chargement dynamique d'un fluide, **GUTPA et HUTCHINSON [1988]** ont utilisé un principe variationnel pour obtenir des fonctionnelles qui décrivent les oscillations couplées d'un corps élastique avec un liquide. Ces formules permettent d'estimer les fréquences et les modes propres du couplage pour un réservoir cylindrique à base circulaire, partiellement remplis d'un liquide qui oscille de façon asymétrique.

Les vibrations libres et forcées, non linéaires d'un bassin cylindrique en contact avec un fluide au repos ont été étudiées par **AMABILI et AL [1998]**. Le problème est décrit par un système d'équations différentielles en utilisant des formes modales avec trois degrés de liberté pour plusieurs configurations. On y montre que le caractère non linéaire des vibrations de la structure est accentué par la présence du fluide.

L'influence de la viscosité sur le comportement du couplage, dans le cas d'une gravité nulle, a fait l'objet d'une étude effectuée par **BAUER et KOMATSU [1998]**. Les effets de la viscosité du liquide, de la flexibilité du réservoir et de l'épaisseur de la couche liquide ont été déterminés pour des lignes de contact en glissement libre ou ancrées. Quand la flexibilité du réservoir augmente, les fréquences et les amplitudes de vibration du fluide diminuent et une plus grande partie du fluide est en mouvement. Il apparaît aussi dans ces systèmes un mouvement apériodique, qui n'était pas encore observé dans le cas des fluides parfaits, et qui dépend essentiellement de la viscosité et de l'épaisseur du fluide. Les fréquences du ballonnement du liquide se sont avérées plus grandes pour les lignes de contact ancrées que pour les lignes de contact libre. Par ailleurs, les fréquences de couplage diminuent quand la flexibilité augmente et quand l'épaisseur du fluide diminue. Dans tous les cas les fréquences du ballonnement et du couplage sont plus faible que celles obtenues dans le cas des fluides non visqueux.

Les vibrations libres d'un réservoir hermétique, simplement soutenu à sa base, ont été étudiées par **AMABILI [2000]**. Le réservoir est composé d'une coquille cylindrique reliée à ses extrémités à deux plaques circulaires identiques. La méthode des « ressorts artificiels » qui est une extension de celle de Rayleigh-Ritz a été utilisée pour traiter le problème. L'étude a été réalisée pour les deux cas où le réservoir est vide ou rempli d'un fluide parfait incompressible. L'interaction entre les plaques et la coquille par l'intermédiaire du fluide est considérée et des expressions exactes pour le potentiel des vitesses dans le liquide ont été utilisées. L'effet de la flexibilité des jonctions entre les plaques et la coquille est considéré. Des résultats pour une coquille remplie d'un fluide et simplement soutenue, fermée par des extrémités rigides sont également obtenus et comparés à ceux d'une coquille ouverte classique. Les modes normaux du réservoir sont en grande partie affectés par la présence d'un fluide dense à l'intérieur. En fait, pour les modes inférieurs, la pression du liquide sur la surface mouillée est en phase avec l'accélération structurale. Ainsi le fluide apparaît comme une masse ajoutée. Il a été observé que les modes dominants du système coquille-plaques sont aussi présents pour les premiers modes et que l'effet de la flexibilité des jonctions coquille-plaques peut être très grand. Le cas spécial d'une coquille flexible, remplie et fermée rigidement aux extrémités est caractérisé par des fréquences propres plus grandes que celle de la même coquille ouverte et remplie avec le même liquide.

BAUER et CHIBA [2000] ont montré que si la surface d'un liquide visqueux est complètement couverte par une structure élastique, les fréquences hydroélastiques sont décalées vers des valeurs plus grandes que celles obtenues avec une surface libre non couverte. Ils ont également constaté que la viscosité diminue les fréquences d'oscillation par rapport aux fréquences couplées du fluide parfait et qu'un nouveau phénomène apparaît, exhibant pour certaines hauteurs du liquide un mouvement apériodique. Ce phénomène apériodique diminue avec l'augmentation des nombres des modes, circonférentiels et radiaux. Des modes plus élevés montrent une plus grande atténuation. L'étude a aussi montré que :

- Une augmentation de la tension de la membrane diminue la région apériodique et un accroissement du paramètre de la pesanteur produit l'effet inverse. Cette augmentation est plus prononcée pour les modes inférieurs ;

- La diminution du rapport hauteur du liquide/rayon du réservoir amplifie la réduction de cette région et affaiblit la fréquence d'oscillation. Les modes plus élevés subissent une atténuation plus forte et disparaissent avec le temps .

La réponse d'un réservoir cylindrique horizontal partiellement rempli et soumis à une excitation dans la direction transversale a été étudiée par **PAPASPYROU et AL. [2004]**. Ils ont développé un modèle mathématique bidimensionnel pour décrire les effets du ballonnement dans des réservoirs rigides. Le potentiel de vitesse est exprimé sous la forme d'une série, dans laquelle chaque terme est le produit d'une fonction du temps et d'une fonction spatiale associée. Dans cette configuration géométrique les fonctions spatiales ne sont pas orthogonales. Le système d'équations différentielles linéaires obtenu est résolu numériquement. Les fréquences du sloshing d'un cylindre horizontal à moitié plein ont été calculées, et une solution semi analytique est obtenue pour une excitation harmonique. Ils ont aussi étudié les effets de la déformation des parois du réservoir en supposant que celle du cylindre est de type poutre. En développant une formulation couplée, la réponse dynamique d'un réservoir déformable à moitié plein est obtenue pour une excitation externe de type sismique. Il est apparu que la déformation des parois peut avoir un effet considérable sur toute la force sismique, Tandis que l'influence de la déformation des parois sur le sloshing est plutôt insignifiante.

KARAGIOZIS et AL [2005] ont développé deux modèles théoriques différents pour le problème des vibrations non-linéaires d'un réservoir cylindrique, à base circulaire, vide ou rempli , encastrées aux deux extrémités et soumis à une excitation harmonique radiale. Dans le premier, une forme standard (dite de Donnel) des équations non-linéaires pour des réservoirs peu profonds est employée. La formulation du problème utilise les fonctions propres de la poutre encastrée pour décrire les variations axiales de la déformation radiale du réservoir. Les équations discrétisées ont été obtenues au moyen de la méthode de Galerkin. Dans le deuxième modèle, une approche hamiltonienne a été adoptée pour donner lieu à des équations lagrangiennes plus générales que les précédentes. Les deux approches utilisent une formulation linéaire de l'interaction fluide structure, justifiée par l'épaisseur supposée faible du réservoir, et utilisent des méthodes du type de celle de Ritz. Par rapport à la méthode des éléments finis, elles offrent l'avantage d'accéder aux configurations résonantes. Cependant,

elles consomment des temps de calcul et des espaces mémoires importants. Elles souffrent également de la nécessité de disposer de conditions initiales sur la surface du réservoir.

Les vibrations couplées, non linéaires, d'une structure élastique en interaction avec un liquide dans un réservoir cylindrique ont fait l'objet d'une étude réalisée par **IKEDA et SHIN [2005]**. Le comportement de la surface liquide est régi par une forme d'équation de Mathieu parce que la structure est soumise à des vibrations verticales sinusoïdales. Des équations modales décrivant le ballonnement du liquide et régissant les mouvements couplés, sont dérivées quand la fréquence propre de la structure est égale à deux fois celle d'un mode antisymétrique du sloshing. Ils ont déterminé les courbes théoriques de résonance et étudié l'influence des différents paramètres sur ces courbes quand la fréquence d'excitation est choisie comme paramètre de contrôle. Leurs principaux résultats peuvent être résumés comme suit :

- des oscillations harmoniques et sous-harmoniques apparaissent dans le fluide et dans la structure ;
- l'inclinaison des courbes de résonance de la surface libre varie de façon à faire pencher vers la droite les pics de résonance ;
- des modulations d'amplitude et de phase peuvent exister dans certaines conditions et les enveloppes correspondantes varient avec l'excitation.

Alors que de nombreuses études ont été faites pour les réservoirs cylindriques ayant soit une paroi latérale soit un fond élastique, les travaux consacrés à la géométrie rectangulaire restent très limités.

BAUER et AL. [1968] ont étudié le problème d'un réservoir rectangulaire ayant une paroi élastique traitée comme une poutre encastree. Les comportements des parties sèche et immergée de cette dernière sont cependant modélisés par les mêmes équations alors que dans la réalité seule la partie en contact avec l'eau subit la pression hydrodynamique, l'autre étant libre de tout chargement. Ainsi, une seule solution est utilisée pour décrire la forme du mode dans la paroi entière. Les résultats présentés ne concernent que la première fréquence couplée, pour le rapport de la hauteur de liquide à la longueur de la poutre compris entre 0.4 et 1.

BAUER [1981] a considéré le cas d'un réservoir rectangulaire ayant un fond élastique et des parois rigides. Il a constaté que les fréquences étaient inférieures à celles non couplées de la structure et supérieures à celles du ballotement.

SOEDEL S.M. & SOEDEL W. [1994] ont étudié le problème de la vibration forcée ou libre d'une poutre portant un liquide. La surface libre est supposée parallèle à la poutre. Les conditions imposées à l'écoulement au niveau des limites de cette plaque correspondent à une situation dans laquelle la poutre représente une petite portion du fond, par ailleurs rigide, d'un grand réservoir. Une solution analytique du problème a été trouvée en utilisant la méthode de séparation des variables.

CHAI et AL. [1996] ont réalisé une étude analytique et expérimentale de l'interaction fluide-structure dans un réservoir rectangulaire. Ils ont calculé les fréquences et les modes couplés dans deux configurations de mouvement de structure. Dans un premier cas, une des parois verticales est supposée animée d'un mouvement de type piston modélisé par un système masse-ressort. Les phénomènes de couplage ont été mis en évidence en utilisant la fonction de réponse en fréquence. Les effets du fluide sur la structure sont présents par le terme de masse ajoutée qui se calcule analytiquement et s'exprime en fonction du nombre de Froude et du ratio de la longueur du réservoir à la profondeur du fluide. Dans le deuxième cas d'interaction considéré, une des parois latérales du réservoir est élastique et modélisée comme une poutre encastree. L'évolution des fréquences et modes propres avec le nombre de Froude et le niveau de remplissage a été étudiée. Une expérience a été réalisée dans le cas d'une structure souple pour valider les résultats théoriques. Cette dernière est composée d'une plaque soudée à sa base au fond d'un réservoir rectangulaire contenant de l'eau et excitée par un électro-aimant.

CHEUNG et ZHOU [2000] ont considéré le cas d'une plaque mince soudée au fond rigide d'un réservoir rectangulaire rempli d'un fluide dont les effets de la surface libre sont négligés. La méthode des résidus pondérés de Ritz a été utilisée pour étudier les caractéristiques des vibrations de la plaque. . Les effets des rapports des hauteurs du liquide et de la plaque et l'influence de la densité sur les fréquences normales du système sont étudiés en détail. Les résultats prouvent que la méthode est également applicable à une plaque rectangulaire horizontale de dimensions infinies supportant un fluide en remplaçant ce dernier

par un autre ayant les mêmes propriétés mais avec des dimensions horizontales finies et une plus grande hauteur.

Les principaux résultats de ces travaux concernent la mise en évidence de l'existence de deux types de modes propres :

- le mode de type ballotement caractérisé par des fréquences couplées proches des fréquences propres non-couplées du fluide et l'effet du mouvement de la structure est faible ;
- le mode de type structure dont la forme propre est similaire à celle du mode sec de structure le plus proche.

La flexibilité de la structure joue souvent un rôle majeur. Par exemple, dans le cas où elle est faible les modes de ballotement sont peu affectés et l'influence des oscillations de la surface libre sur les modes de structure est également négligeable. Dans ce cas, une paroi plane peut remplacer cette interface dans les applications dominées par les modes du type "structure" sans altérer la précision. La déformation de la surface libre est effective dans les modes de type ballotement. Ces caractéristiques vibratoires intrinsèques sont déterminantes pour comprendre comment apparaissent les perturbations et la relation entre leur développement et l'excitation qui en est à l'origine.

Depuis les observations de **FARADAY [1831]**, on sait que dans le cas d'une structure rigide les ondes à la surface du liquide qu'elle contient sont paramétriquement excitées si l'amplitude de vibration dépasse une valeur critique qui dépend de la fréquence. Ces ondes entrent en résonance sous-harmonique avec une fréquence moitié de celle du forcing sauf dans certains intervalles très petits dans lesquels on relève une réponse synchrone. Pour expliquer les observations de Faraday, **BENJAMIN & URSELL [1954]**, considérant le cas d'un fluide non visqueux, ont effectué, dans la cadre de la théorie linéaire, une analyse basée sur une décomposition en modes normaux qui a abouti à un système découplé d'équations de Mathieu gouvernant l'évolution de chaque mode du mouvement de la surface libre. S'appuyant sur les propriétés des équations de Mathieu, ils mirent en évidence des régions où les solutions sont oscillatoires et périodiques ou apériodiques, et des zones dans lesquelles l'amplitude de l'interface croît de façon exponentielle pour donner lieu à des mouvements

instables. La transition des régions stables vers celles instables apparaît à travers des bifurcations harmoniques ou sous-harmoniques. Ce comportement est relié au spectre de la matrice de monodromie, c'est-à-dire la matrice de transfert qui fait progresser la solution d'une période en temps. Pour le cas qui nous intéresse son état sera décrit par un système d'équations de Mathieu couplées. Cependant, la réponse à une excitation paramétrique peut être plus complexe que celle synchrone ou sous-harmonique d'un réservoir rigide. Des solutions oscillatoires sont obtenues lorsque toutes les valeurs propres de la matrice de monodromie sont distinctes et se présentent dans le plan complexe sur un cercle de rayon égal à l'unité. Dans tout autre cas on obtient des solutions non bornées en raison des propriétés d'inversion de la matrice de Floquet. Le passage à l'état instable peut avoir lieu soit (i) de manière similaire au cas de équations de Mathieu ou (ii) lorsque deux paires de valeurs propres conjuguées fusionnent en dehors de l'axe des réels et quittent radialement le cercle unitaire.

1.2. Hypothèses et équations de base :

La difficulté dans l'étude des phénomènes d'interaction fluide-structure est de définir une entrée au problème. Ainsi, pour résoudre le problème de la structure, il faut connaître le chargement du fluide sur cette dernière, c'est-à-dire la pression exercée par le fluide alors qu'elle est une inconnue du problème globale. Pour analyser le mouvement du fluide, il faut connaître les conditions aux frontières, en particulier, les conditions cinématiques et dynamiques sur les interfaces fluide-structure qui sont, elles aussi, des inconnues du problème global. Les problèmes d'interaction fluide-structure sont alors considérés globalement et la résolution est faite en tenant compte des deux domaines. L'autre difficulté rencontrée dans leur modélisation est liée aux effets qu'il faut prendre en compte dans celle des deux éléments. Ces effets sont nombreux et variés. Dans le fluide, on peut prendre en compte ou négliger la viscosité, la tension superficielle, la présence d'une surface libre et la compressibilité. La structure peut être représentée par une poutre, une membrane, une plaque, une coque ou un solide déformable. Sur le plan dynamique, on peut considérer les faibles ou les grandes déformations de la structure et, enfin, sur le plan géométrique, on peut examiner les géométries carrées, cylindriques, sphériques ou autres.

La complexité du problème dépendra du nombre d'effets, de la nature du fluide, du type de la structure, de sa géométrie et du type du mouvement considéré. En plus de toutes ces contraintes, il faut aussi considérer la position du fluide par rapport à la structure. On conçoit bien la complexité que peut revêtir le problème en prenant en compte tous ces effets dans un modèle et en sachant que les équations qui les régissent sont en outre non-linéaires.

Nous nous proposons de considérer le mouvement forcé d'un liquide incompressible et non visqueux, de densité ρ_f et de profondeur h , remplissant partiellement un réservoir rectangulaire de longueur L et de hauteur $h+H$ (voir figure 1). L'ensemble est soumis à un mouvement harmonique vertical d'accélération g_1 et de fréquence ω . Le réservoir, dont une des parois verticales est flexible, a des dimensions transversales suffisamment grandes pour que tout mouvement puisse être considéré bidimensionnel dans le plan (o,x,y) .

L'axe (oy) qui est vertical ascendant est dans le plan contenant la paroi élastique dans son état non déformé et (ox) est perpendiculaire à ce dernier. L'origine o est placée au niveau que la surface libre occupe dans son état de repos. La paroi flexible est modélisée par une poutre qui est, soit soudée par sa base au fond du réservoir, soit simplement guidée alors que son extrémité supérieure est traitée comme une frontière libre.

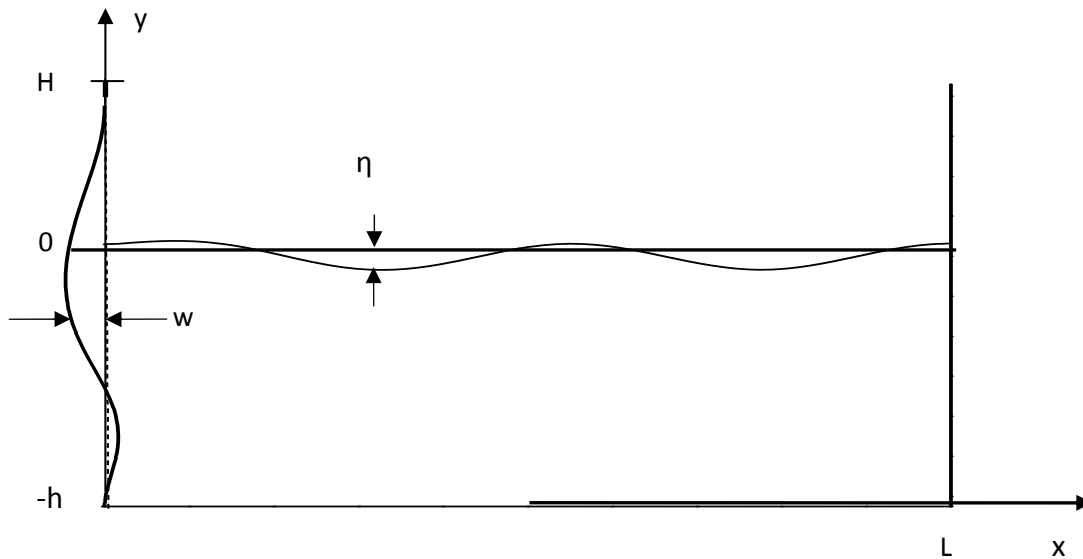


Figure 1. Schéma du réservoir

1.2.1. Equations du mouvement du fluide

Les équations de Navier-Stokes, pour un fluide newtonien incompressible, décrivent le mouvement de l'eau dans leur globalité. Cependant, la résolution de ces équations pose des problèmes, surtout dans le cas des écoulements à surface libre, et en particulier pour les vagues, objet de notre travail. La difficulté provient du fait que la position de la surface libre est elle-même inconnue et que les conditions aux limites inhérentes à cette surface sont relativement compliquées. Le problème classique des ondes est établi avec l'hypothèse d'écoulement potentiel. En plus du fait que les équations sont plus faciles à résoudre dans ce cas, **COLIN & COLL.(1995,1996)** ont montré que malgré cette conjecture on obtient une très bonne modélisation des ondes de surface. En outre, l'eau a un très petit coefficient de viscosité et dans beaucoup de cas le mouvement d'un tel fluide s'accorde très bien avec celui d'un fluide parfait. Notons aussi que, dans le problème des ondes que nous étudions, la vorticité joue un rôle plutôt mineur et une connaissance profonde de la vorticité n'est pas une condition préalable pour l'étude de ces vagues. Cependant, dans le cas de vagues de vent l'application de l'hypothèse d'écoulement potentiel est plutôt discutable.

L'écoulement irrotationnel d'un fluide incompressible et non-visqueux satisfait les trois équations suivantes :

- l'équation d'Euler qui est en soit une équation dynamique:

$$(1) \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{F} - \frac{\vec{\nabla} P}{\rho}$$

- l'équation de continuité qui, en vertu de l'hypothèse d'incompressibilité, traduit la constance de la densité volumique ρ_f :

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

- l'équation qui exprime le caractère irrotationnel de l'écoulement :

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$$

$\vec{V}(u, v)$ représente le champ de vitesse dans le fluide, $\vec{F}$ celui des forces volumiques extérieures, P la pression et l'opérateur $\vec{\nabla}$ est défini par :

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

où x est la coordonnée horizontale et l'axe des y est vertical ascendant.

D'après le théorème de Poincaré, la condition d'irrotationnalité fait que le champ des vitesses $\vec{V}(u, v)$ dérive d'un potentiel $\phi(x, y, t)$, soit :

$$(4) \quad \vec{V}(u, v) = \vec{\nabla} \phi(x, y, t)$$

En substituant (4) dans (2), on obtient :

$$(5) \quad \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq L ; -h \leq y \leq 0$$

Cette équation de Laplace est linéaire et du second ordre. Sa résolution se ramène à la recherche de fonctions harmoniques satisfaisant les conditions aux limites. L'écoulement est caractérisé par une condition dynamique et une condition cinématique, à la surface libre et des conditions de non pénétration aux interfaces avec les parois du réservoir. Ces conditions sont formulées en faisant abstraction des phénomènes de transferts de masse et de chaleur à travers

les différentes interfaces et en l'absence de gradient de concentration. Sur la surface libre, la pression est supposée constante et égale à la pression atmosphérique.

A la surface libre les conditions dynamique et cinématique sont données en $y = 0$:

- **la condition cinématique:** elle stipule qu'une particule fluide qui se trouve à l'interface y reste (pas de décollement, donc hors déferlement). Il en résulte l'égalité de la vitesse normale de l'interface avec celle d'une particule fluide qui s'y trouve, ce qui se traduit par :

$$\left[\frac{D}{Dt}(y - \eta(x, t)) \right]_{y=\eta} \cdot \vec{n} = 0$$

où $\eta(x, t)$ est l'élévation de la surface libre, et $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ désigne la dérivée particulaire et $\vec{n}$ le vecteur normal à l'interface. Il en découle :

$$\eta_t + u\eta_x - v = 0$$

soit

$$\eta_t + \phi_x \eta_x - \phi_y = 0$$

Les indices désignent des dérivées partielles. Etant concernés par une étude du problème linéaire, cette équation se ramène à

$$(6) \quad \eta_t - \phi_y = 0 \quad \text{en } y=0$$

- **la condition dynamique:** elle traduit l'équilibre des forces de surface qui s'exercent de part et d'autre de l'interface. Si on convient de négliger les tensions visqueuses, la différence des forces de pression des deux cotés de la surface libre est équilibrée par la tension superficielle. Ainsi, si p représente la pression du fluide à l'interface, p_a la pression atmosphérique et T le coefficient de tension superficielle, on aura l'égalité suivante:

$$p - p_a = -T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Ici R_1 et R_2 sont les rayons de courbures principaux de la surface libre, comptés positivement si le centre de courbure se situe du côté du fluide.

L'équation de Bernoulli à l'interface, s'écrit donc :

$$\rho_f \phi_t + \rho_f g \eta + \frac{1}{2} \rho_f (\vec{\nabla} \phi)^2 - T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = p_a + f(t)$$

L'ensemble réservoir-liquide étant soumis à un mouvement harmonique vertical d'accélération g_1 et de fréquence ω , il convient d'écrire la composante verticale de l'accélération

$$g(t) = g_0 (1 + \beta \sin \omega t)$$

avec $\beta = g_1 / g_0$, g_0 étant l'accélération de la pesanteur.

En incluant la pression p_a , supposée constante, dans le terme de l'énergie potentielle et $f(t)$ dans la fonction $\phi(x, y, t)$, cette équation donne lieu à la condition dynamique:

$$\phi_t + g \eta + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{T}{\rho_f} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0$$

Dans le cas bidimensionnel

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \eta_{xx} (1 + \eta_x^2)^{-3/2}$$

Il vient

$$\phi_t + g \eta + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{T}{\rho_f} \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2}} = 0$$

En théorie linéaire cette équation se réduit à

$$(7) \quad \phi_t + g(t) \eta - \frac{T}{\rho_f} \eta_{xx} = 0 \quad \text{en } y = 0$$

En l'absence de la viscosité, la condition cinématique sur les interfaces fluide-solide traduit l'imperméabilité de la surface. Elle stipule que la vitesse normale du liquide à la paroi est la même que celle du point solide lui correspondant. Ainsi, sur la paroi élastique on aura :

$$(8) \quad \phi_x = w_t \quad \{x = 0, -h < y < 0\}$$

où w désigne la déformation de la paroi élastique. Sur les parois rigides et sur le fond du réservoir on aura:

$$(9) \quad \phi_x = 0 \quad \{x = L, -h < y < 0\}$$

$$(10) \quad \phi_y = 0 \quad \text{en } y = -h$$

Nous avons choisi d'adimensionnaliser ces équations en utilisant comme longueur de référence celle du réservoir, L , et comme temps de référence $\sqrt{L/g_0}$. Les relations entre les nouvelles variables et les anciennes sont alors :

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}, \frac{t}{\sqrt{L/g_0}} \right)$$

$$(\tilde{\phi}, \tilde{\eta}) = \left(\frac{\phi}{\sqrt{g_0 L^3}}, \frac{\eta}{L} \right)$$

Les équations (5) à (10) deviennent, en enlevant les tildes

$$(11a) \quad \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1; -h \leq y \leq 0$$

$$(11b) \quad \phi_y = \eta_t \quad \text{en } y = 0$$

$$(11c) \quad \phi_t - \kappa' \Delta \eta + g(t) \eta = 0 \quad \text{en } y = 0$$

$$(11d) \quad \phi_x = w_t \quad \{x = 0, -h < y < 0\}$$

$$(11e) \quad \phi_x = 0 \quad \{x = 1, -h < y < 0\}$$

$$(11f) \quad \phi_y = 0 \quad \text{en } y = -h$$

$\kappa' = \tau / \rho_f g_0 L^2$ est un nombre adimensionnel qui caractérise la capillarité et $g(t) = 1 + \beta \sin \omega t$ avec $\beta = g_1 / g_0$.

1.2.2. Equations du mouvement de la paroi déformable

Ce mouvement est modélisé en utilisant la loi de comportement linéaire élastique d'une poutre soumise à une charge latérale et dans le cadre d'une cinématique de Bernoulli, c'est à dire :

- une section plane avant déformation reste plane après.
- une section perpendiculaire à la fibre moyenne avant déformation reste perpendiculaire à la fibre moyenne déformée.

Les équations de vibration transverse (TIMOSHENKO et AL. [1974] ; CHAI et AL. [1996]) sont alors données par :

$$(12) \quad \left(\partial_t^2 + \frac{1}{\delta} \partial_y^4 \right) w = \gamma \partial_t \phi(x, 0, t)$$

où $\delta = (EI) / (\rho_s g_0 A L^3)$, $\gamma = \rho_f L / (\rho_s A)$ sont des paramètres adimensionnels; ρ_s , A et (EI) étant respectivement la densité de masse surfacique de la poutre, l'aire de sa section et son module de flexion.

Les conditions limites associées à (12) sont

$$(13) \quad w = \partial_y w = 0 \quad \text{en } y = -h$$

$$(14) \quad \partial_y^2 w = \partial_y^3 w = 0 \quad \text{en } y = H$$

Elles traduisent le fait que la poutre est encastree à sa base et qu'elle ne se déforme pas à son extrémité supérieure.

Chapitre 2

Méthode de résolution

Une forme particulièrement intéressante de comportement dynamique est celle des systèmes couplés. Une question centrale qui leur est liée est de savoir dans quelles conditions ces dispositifs sont stables ou instables au regard des formes des liaisons et des autres propriétés de ces systèmes. Cette question a été souvent abordée dans le cadre de la théorie du chaos ou celle des cycles limites. Ces études considèrent une forme particulière de couplage pour ensuite étudier les aspects de stabilité et de bifurcations à partir des états synchronisés. M. AMAOUCHE et M. DEBIANE ont développé une autre approche à caractère générale d'un problème d'interaction-fluide structure. C'est une approche fondée sur la recherche de normes minimales qui produisent une réponse de la structure à la limite de l'instabilité. Le présent travail a pour but de la mettre en pratique pour deux cas particuliers où la paroi mobile a, soit un mouvement du type piston, ou celui d'une poutre articulée à sa base. Dans le cas d'un fluide soumis à des oscillations verticales, il apparaît à la surface libre des ondes dites de Faraday. Dans certains cas, la surface excitée croît en amplitude avec le temps. Cette croissance peut mener à l'instabilité. Cette dernière peut être un inconvénient mais, dans des situations particulières elle peut être exploitée de façon avantageuse. Par exemple, dans le stade ultime de cette instabilité des gouttelettes sont éjectées de la surface libre. Ce phénomène est utilisé pour produire des atomisations de fluides avec des excitations ultrasoniques.

2.1. Théorie

2.1.1. Formes des solutions

Il est clair que le déplacement de la poutre est influencé par l'excitation externe par l'intermédiaire du mouvement du fluide. Ce dernier est à son tour le résultat des effets simultanés du déplacement de la paroi et de l'excitation paramétrique. Pour ces raisons, et compte tenu de la linéarité du problème, l'écoulement du fluide sera décrit en décomposant le

potentiel des vitesses en deux parties, ϕ_1 et ϕ_2 , chacune d'elles obéissant à l'équation de Laplace:

$$(15) \quad \Delta\phi_{1,2} = 0$$

Cette équation est résolue avec des conditions limites qui proviennent d'une décomposition adéquate des relations (11b à 11f):

- Conditions sur les parois :

$$(16) \quad \partial_x \phi_{1,2} = 0 \quad \text{en } x = 1$$

$$(17) \quad \partial_y \phi_{1,2} = 0 \quad \text{en } y = -h$$

$$(18) \quad \partial_x \phi_1 = 0 \quad \text{en } x = 0$$

$$(19) \quad \partial_x \phi_2 = \partial_t w \quad \text{en } x = 0$$

- Conditions sur la surface libre:

$$(20) \quad \partial_t \eta = \partial_y \phi_1 + \partial_y \phi_2$$

$$(21) \quad \partial_t \phi_1 - \kappa' \Delta \eta + g(t) \eta = -\partial_t \phi_2$$

Ces dernières assurent le couplage entre les deux potentiels des vitesses. En appliquant la méthode de séparation des variables, on peut alors choisir pour les équations (15), (16),(17),(18),(20),(21) des solutions ayant les formes:

$$(22) \quad \phi_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dt} \cdot \frac{\cos n\pi x \cdot \cosh n\pi(y+h)}{n\pi \sinh(n\pi h)}$$

$$(23) \quad \phi_2(x, y, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{db_n}{dt} \cdot \frac{\cos q_n(y+h) \cdot \cosh q_n(x-1)}{q_n \sin(q_n h)}$$

$$(24) \quad \eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n(t) \cosh q_n(x-1) + a_n(t) \cos n\pi x\}$$

où les coefficients a_n et b_n qui dépendent du temps (souvent appelés coordonnées généralisées) seront déterminés ultérieurement.

2.1.2. Détermination de la suite q_n

Dans ce qui suit, plusieurs opérations vont être effectuées en exploitant les propriétés d'orthogonalité de certaines fonctions. Nous allons rappeler le principe de la méthode. Soit alors $\langle , \rangle$ un produit scalaire défini sur l'espace fonctionnel L^2 des fonctions $U_n(y)$ de variable réelle y , et pour lequel deux fonctions propres U_n distinctes sont orthogonales on a alors:

$$\langle U_p, U_q \rangle = 0 \quad \text{si } p \neq q$$

$$\langle U_m, U_m \rangle = \|U_m\|^2$$

Ici,

On peut tirer avantage de cette propriété dans de nombreuses situations. Par exemple, dans le cas où ces fonctions interviennent dans des équations comportant des sommations du type.

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n U_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n$$

On a alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \langle U_n, U_m \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \langle f_n, U_m \rangle$$

Soit

$$B_m \|U_m\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \langle f_n, U_m \rangle$$

Cette opération a donc permis d'éliminer la sommation du terme de gauche.

Par ailleurs, les fonctions propres forment alors une base orthogonale de l'espace vectoriel L^2 des fonctions U_n . Il en résulte alors qu'une fonction f , supposée de carré intégrable est développable de façon unique en série de fonctions propres. Les coefficients B_m , composantes de f suivant les vecteurs de base U_n , s'obtiennent en calculant le produit scalaire.

$$\langle f, U_m \rangle = \langle \sum_{n=0}^{\infty} B_n U_n, U_m \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \langle U_n, U_m \rangle = B_m \|U_m\|^2$$

On en déduit que:

$$B_m = \frac{\langle f, U_m \rangle}{\|U_m\|^2}$$

Revenons à notre cas de calcul des q_n . La suite q_n est choisie de telle sorte que les fonctions $\cos q_n(y+h)$ soient orthogonales au sens de $L^2[-h,0]$. Il en découle une condition (que nous allons démontrer) que cette suite satisfait et qui permet de déterminer ses éléments.

L'équation aux fonctions propres de l'opérateur $\frac{d^2}{dy^2}$ s'écrit :

$$(25) \quad \phi_n'' - q_n^2 \phi_n = 0 \quad \text{pour } \phi_n$$

$$(26) \quad \phi_m'' - q_m^2 \phi_m = 0 \quad \text{pour } \phi_m$$

Multiplions (25) par ϕ_m et (26) par ϕ_n et retranchons membre à membre les deux équations obtenues. Il vient :

$$(27) \quad \phi_n \phi_m'' - \phi_m \phi_n'' = (q_n^2 - q_m^2) \phi_n \phi_m$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$(28) \quad \int_{-h}^0 (\phi_n \Delta \phi_m - \phi_m \Delta \phi_n) dy = (q_n^2 - q_m^2) \int_{-h}^0 \phi_n \phi_m dy$$

L'utilisation du théorème de Green donne lieu à :

$$(29) \quad (\phi_n \phi_m' - \phi_m \phi_n')_{-h}^0 = (q_n^2 - q_m^2) \int_{-h}^0 \phi_n \phi_m dy$$

Comme $\phi_j'(y = -h) = 0$, (29) peut s'écrire :

$$(30) \quad (\phi_n \phi_m' - \phi_m \phi_n')_{y=0} = (q_n^2 - q_m^2) \int_{-h}^0 \phi_n \phi_m dy$$

Le premier membre peut être nul si on choisit des fonctions ϕ_j telles que $\phi_j' = K\phi_j$, K étant une constante arbitraire. Si on opte pour les fonctions $\phi_j = \cos q_j z$, on aurait:

$$(31) \quad \phi_j' = K\phi_j \Leftrightarrow -\sin q_j y = K \cos q_j y$$

Ce qui implique que si la suite q_j vérifie les équations:

$$(32) \quad q_j h \tan q_j h = \text{constante}$$

Les fonctions $\phi_j = \cos q_j z$ forment une base orthogonale pour le produit scalaire:

$$(33) \quad \langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_{-h}^0 \phi_n \phi_m dy$$

Ceci veut dire que pour tout couple (m, n) où m et n sont deux éléments distincts,

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$$

Au regard de l'égalité (32), on peut, par exemple, fixer la constante égale à 1 et résoudre numériquement, par la méthode de la sécante l'équation

$$(34) \quad X \tan X = 1, \quad X = q_j h$$

2.1.3. Détermination des coefficients a_n et b_n

Compte tenu de la condition limite (21), la solution (22)- (23) - (24) doit maintenant satisfaire l'équation:

$$(35) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{d^2 a_n}{dt^2} + n\pi th(n\pi h)(g(t) + n^2 \pi^2 \kappa') a_n \right] \frac{\cos n\pi x}{n\pi th(n\pi h)} - \left[h \frac{d^2 b_n}{dt^2} - (g(t) - \kappa' q_n^2) b_n \right] \cosh q_n (x-1) \right\} = 0$$

Multiplions les deux membres par $\cos n\pi x$ et, en raison de l'orthogonalité de $\cos n\pi x$ au sens de $L^2[-h,0]$, l'intégration des deux membres donne lieu à:

$$(36) \quad \frac{d^2 a_n}{dt^2} + n\pi th(n\pi h)(g(t) + n^2 \pi^2 \kappa') a_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \left[h \frac{d^2 b_k}{dt^2} - (g(t) - \kappa' q_k^2) b_k \right]$$

n=1,2,.....

avec

$$(37) \quad A_{nk} = 2n\pi q_k \frac{\text{sh} q_k \text{th} n\pi h}{q_k^2 + n^2 \pi^2}$$

L'équation (36) montre que les coefficients a_n sont influencés par l'excitation paramétrique, mais aussi par le mouvement de la poutre à travers les coefficients b_k . Avec $b_k = 0$, on retrouve à l'équation de Mathieu obtenue par **BENJAMIN & URSELL [1954]** pour le mode normal n dans le cas d'un réservoir rigide. Comme nous le verrons ultérieurement, les coefficients b_k sont directement reliés au mouvement de la paroi élastique à travers la condition cinématique (19) qui s'écrit, compte tenu de l'expression (23),

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{db_n}{dt} \cdot \frac{\cos q_n (y+h) \cdot \sinh q_n}{\sin(q_n h)}$$

Son intégration par rapport au temps se traduit par:

$$(38) \quad w(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \frac{\sinh q_n}{\sin q_n h} \cos q_n (y + h)$$

Cette expression est obtenue en supposant que le système hydroélastique est au repos à $t=0$. La propriété d'orthogonalité des fonctions $\cos q_n (y + h)$ nous permet d'exprimer $b_n(t)$ en fonction de la déformation de la poutre:

$$(39) \quad b_n(t) = \frac{\sin q_n h}{\sinh q_n \|\cos q_n (y + h)\|^2} \int_{-h}^0 w(y, t) \cos q_n (y + h) dy$$

En adoptant pour l'équation de la poutre une solution de la forme:

$$(40) \quad w(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) E_k(y)$$

Où $E_k(y)$ est le k ème mode normal de l'oscillation de la poutre et ψ_k une troisième suite de coordonnées généralisées. L'équation (39) devient:

$$(41) \quad b_n(t) = \frac{\sin q_n h}{\sinh q_n \|\cos q_n (y + h)\|^2} \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \int_{-h}^0 E_k(y) \cos q_n (y + h) dy$$

Dans le cas d'une poutre simplement encastrée, les modes normaux $E_k(y)$ sont:

$$(42) \quad E_k(y) = (\sin p_k (y + h) - \sinh p_k (y + h)) + C_k (\cos p_k (y + h) - \cosh p_k (y + h))$$

avec

$$(43) \quad C_k = \frac{\cos p_k (h + H) + \cosh p_k (h + H)}{\sin p_k (h + H) - \sinh p_k (h + H)}$$

Les valeurs propres p_k sont les racines de l'équation:

$$(44) \quad \cosh p_k(h+H) \cdot \cosh p_k(h+H) + 1 = 0$$

La relation (41) signifie que le potentiel ϕ_2 est régi par le mouvement de la poutre. Par conséquent, on peut éliminer la suite b_n au profit des $\psi_n(t)$ dans l'équation (36) qui devient alors:

$$(45) \quad \frac{d^2 a_n}{dt^2} + n\pi h(n\pi h)(g(t) + n^2 \pi^2 \kappa') a_n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (A_{nk} X_{km}) \left[h \frac{d^2 \psi_m}{dt^2} - (g(t) - \kappa' q_k^2) \psi_m \right]$$

où les élément X_{km} de la matrice X sont introduits pour exprimer (39) sous une forme plus compacte.

Dans le cas où la poutre n'est pas chargée, les coordonnées généralisées $\psi_n(t)$ sont données par: $\psi_n(t) = \sin \Omega_n t$ où Ω_n est la fréquence naturelle du nième mode de vibration et elle est définie par $\Omega_n = p_n^2 / \sqrt{\delta}$.

Dans le cas général d'une paroi élastique chargée, les coordonnées généralisées $\psi_n(t)$ doivent être déterminées en substituant la forme choisie pour la solution (40) dans l'équation (21) qui devient après simplification:

$$(46) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 \psi_k}{dt^2} + \frac{p_k^4}{\delta} \psi_k \right) E_k(y) = \gamma \frac{\partial \phi(0, y, t)}{\partial t}$$

L'orthogonalité des modes normaux $E_k(y)$ au sens de $L^2[-h, H]$ permet d'écrire :

$$(47) \quad \frac{d^2 \psi_n}{dt^2} + \frac{p_n^4}{\delta} \psi_n = \frac{\gamma}{\|E_n\|^2} \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi(0, y, t)}{\partial t} E_n(y) dy$$

En remplaçant ϕ par la somme $\phi_1 + \phi_2$ et en utilisant les relations (22), (23) puis l'égalité (39) pour éliminer $b_n(t)$ au profit de $\psi_n(t)$, l'équation (47) prend la forme:

$$(48) \quad \frac{d^2 \psi_n}{dt^2} + \frac{p_n^4}{\delta} \psi_n + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} X_{mk} \frac{d^2 \psi_k}{dt^2} - C_{nk} \frac{d^2 a_k}{dt^2} \right] = 0$$

avec

$$(49) \quad C_{nk} = \frac{\gamma}{\|E_n\|^2 k \pi \sinh k \pi h} \int_{-h}^0 \cosh k \pi (y + h) E_n(y) dy$$

$$(50) \quad B_{nm} = \frac{\gamma \cosh q_m}{\|E_n\|^2 q_m \sin q_m h} \int_{-h}^0 \cos q_m (y + h) E_n(y) dy$$

En supposant que les développements représentant ϕ et w puissent être tronqués au Nième mode les équations (48) et (45) forment un système d'équations de Mathieu couplées qui se met sous la forme:

$$(51) \quad G \frac{dZ}{dt} = F(t)Z$$

où G est une matrice $4N \times 4N$ constante , $Z = \left(a, \frac{da}{dt}, \psi, \frac{d\psi}{dt} \right)^t$ est un vecteur de dimension $4N$,

et $F(t)$ est une matrice $4N \times 4N$ périodique et de fréquence ϖ . La réponse du système hydroélastique s'exprime à travers les nombres caractéristiques de Floquet du système (51). D'après la théorie de Floquet le vecteur solution $Z(t)$ d'un tel système peut s'écrire sous la forme:

$$(52) \quad Z(t) = e^{\sigma t} \cdot P(t)$$

où σ est une constante complexe appelée constante de Floquet et $P(t)$ est une fonction vectorielle périodique de période T égale à celle du forcing. Les valeurs propres $e^{\sigma T}$ de la matrice de monodromie contrôlent le taux d'amplification de la solution. Cette matrice peut

être obtenue en intégrant (51) N fois sur la période T avec des conditions initiales données par la matrice identité. Pour un forcing harmonique la matrice de monodromie est réelle et inversible. En conséquence, si λ_n est valeur propre, il en est de même pour λ_n^{-1} , $\bar{\lambda}_n$ et $\bar{\lambda}_n^{-1}$, la barre signifiant qu'il s'agit du nombre complexe conjugué. Compte tenu de cette propriété, le système hydroélastique est stable si toutes les valeurs propres λ_n sont distinctes et se trouvent sur le cercle unité, dans le plan complexe. La transition vers l'instabilité a lieu lorsque deux valeurs propres quittent le cercle unité après avoir fusionné.

2.2.Application

2.2.1. Cas où la poutre est articulée à sa base:

Pour cet exemple de cas d'école mais très utilisé dans la pratique nous modéliserons la paroi située en $x = 0$ à l'aide d'une poutre encastree à sa base et soumise à des efforts de flexion. En faisant l'hypothèse que les déformations sont faibles, nous pouvons faire le schéma suivant dans lequel, sous l'effet d'un moment de torsion, la poutre est décalée d'un angle θ par rapport à l'axe $(0y)$, la matière subissant une tension de torsion.

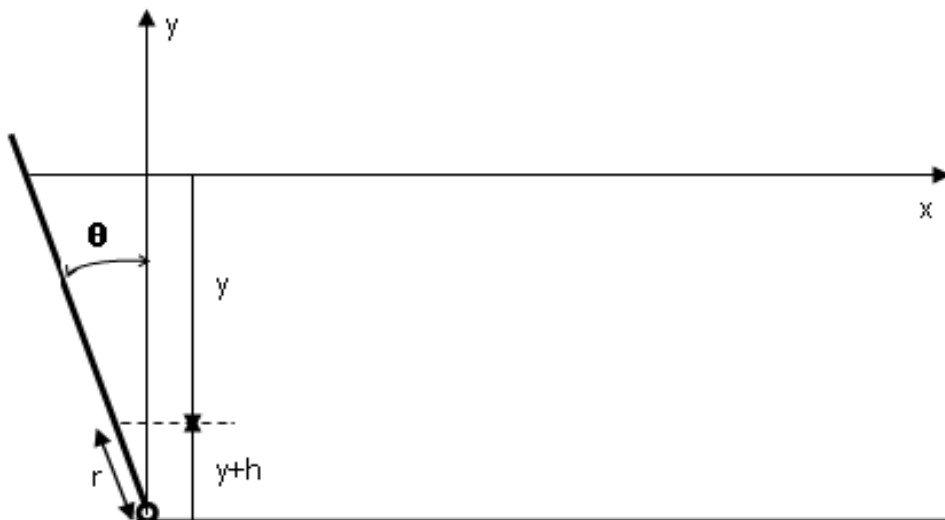


Figure2 : modélisation de la paroi mobile par une poutre articulée à sa base.

La conservation du moment angulaire donne

$$(53) \quad I \frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta = \int_{-h}^0 r \frac{\partial\phi}{\partial t} \Big|_{x=0} dy$$

Ici I est le moment d'inertie de la paroi mobile et K la constante de torsion équivalente.

L'adimensionalisation est effectuée avec les grandeurs de références suivantes

$$(54) \quad I_0 = \rho_f L^4; K_0 = \rho_f g L^3; t_0 = \sqrt{L/g}$$

Du fait que la poutre s'écarte peu de l'axe (Oy) (petites valeurs de θ), nous pouvons écrire $r \approx y + h$. Sachant que

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} \Big|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot \frac{\cosh n\pi(y+h)}{n\pi \sinh(n\pi h)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot \frac{\cos q_n(y+h) \cdot \cosh q_n}{q_n \sin(q_n h)}$$

il vient

$$\int_{-h}^0 (y+h) \frac{\partial\phi}{\partial t} \Big|_{x=0} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot \frac{1 + \sinh(n\pi h) * n\pi h - \cosh(n\pi h)}{n^3 \pi^3 \sinh(n\pi h)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot \frac{-1 + \sin(q_n h) * q_n h + \cos(q_n h)}{q_n^3 \sin(q_n h)} \cosh(q_n)$$

Ainsi, l'équation (53) devient

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2a_n}{dt^2} \cdot \frac{n\pi h \sinh(n\pi h) - \cosh(n\pi h) + 1}{n^3 \pi^3 \sinh(n\pi h)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2b_n}{dt^2} \cdot \frac{q_n h \sin(q_n h) + \cos(q_n h) - 1}{q_n^3 \sin(q_n h)} \cosh(q_n)$$

Ce qui peut se mettre sous la forme

$$(55) \quad I \frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{d^2a_n}{dt^2} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \frac{d^2b_n}{dt^2}$$

Avec

$$A_n = \frac{n\pi h \sinh(n\pi h) - \cosh(n\pi h) + 1}{n^3 \pi^3 \sinh(n\pi h)}$$

$$B_n = \frac{q_n h \sin(q_n h) + \cos(q_n h) - 1}{q_n^3 \sin(q_n h)} \cosh(q_n)$$

En l'absence de la viscosité, la condition cinématique sur les interfaces fluide-solide traduit l'imperméabilité de la surface. Elle stipule que la composante normale à la paroi de la vitesse du liquide est la même que celle du point solide lui correspondant. Ceci est traduit par la condition limite (19), soit :

$$(56) \quad \partial_x \phi_2 = \partial_t w \quad \text{en } x = 0$$

Compte tenu de l'expression (23) de ϕ_2 , le premier membre de cette équation s'écrit :

$$\phi_{2x}(0, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{db_n}{dt} \cdot \frac{\cos q_n(y+h) \cdot \sinh q_n}{\sin(q_n h)}$$

Le second membre s'obtient, en faisant l'approximation

$$\partial_t w = r \frac{d\theta}{dt} \approx (y+h) \frac{d\theta}{dt}$$

La condition (56) ci-dessus prend la forme explicite :

$$(57) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{db_n}{dt} \cdot \frac{\cos q_n(y+h) \cdot \sinh q_n}{\sin(q_n h)} = (y+h) \frac{d\theta}{dt}$$

Ce qui donne après intégration par rapport au temps :

$$(58) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cdot \frac{\cos q_n(y+h) \cdot \sinh q_n}{\sin(q_n h)} = (y+h)\theta(t)$$

Cette expression est obtenue en supposant que le système hydroélastique est au repos à $t=0$. La propriété d'orthogonalité des fonctions $\cos q_n(y+h)$ nous permet d'exprimer $b_n(t)$ en fonction de l'angle $\theta(t)$:

$$b_n(t) \cdot \frac{\|\cos q_n(y+h)\|^2 \cdot \sinh q_n}{\sin(q_n h)} = \theta(t) \int_{-h}^0 (y+h) \cos q_n(y+h) dy$$

$$= \theta(t) \frac{\cos(q_n h) + q_n h \sin(q_n h) - 1}{q_n^2}$$

Soit

$$(59) \quad b_n(t) = \frac{\sin(q_n h) \cos(q_n h) + q_n h \sin^2(q_n h) - \sin(q_n h)}{q_n^2 \sinh q_n \|\cos q_n(y+h)\|^2} \theta(t)$$

$$= T_n \theta(t)$$

où

$$T_n = \frac{\sin(q_n h) \cos(q_n h) + q_n h \sin^2(q_n h) - \sin(q_n h)}{q_n^2 \sinh q_n \|\cos q_n(y+h)\|^2}$$

En introduisant (59) dans (55), on obtient

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + K \theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{d^2 a_n}{dt^2} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot T_n \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

soit

$$(60) \quad \left[I + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot T_n \right] \frac{d^2 \theta}{dt^2} + K \theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{d^2 a_n}{dt^2}$$

Par ailleurs, en remplaçant b_n par son expression (59) dans l'équation (36)

$$(61) \quad \frac{d^2 a_n}{dt^2} + n\pi th(n\pi h)[g(t) + n^2 \pi^2 \kappa'] a_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k \left[h \frac{d^2 \theta}{dt^2} - (g(t) - \kappa' q_k^2) \theta \right]$$

En multipliant les deux membres par A_n et en sommant sur n , on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{d^2 a_n}{dt^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k A_n \left[h \frac{d^2 \theta}{dt^2} - (g(t) - \kappa' q_k^2) \theta \right] - \sum_{n=1}^{\infty} A_n n\pi th(n\pi h)[g(t) + n^2 \pi^2 \kappa'] a_n$$

Compte tenu de ce résultat l'équation (60) s'écrit

$$\left[I + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot T_n \right] \frac{d^2 \theta}{dt^2} + K\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k A_n \left[h \frac{d^2 \theta}{dt^2} - (g(t) - \kappa' q_k^2) \theta \right] - \sum_{n=1}^{\infty} A_n n\pi th(n\pi h)[g(t) + n^2 \pi^2 \kappa'] a_n$$

soit

$$I_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + K_0 \theta = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n [n\pi th(n\pi h)(g(t) + n^2 \pi^2 \kappa') a_n]$$

Avec

$$I_0 = I + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot T_n - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k A_n h ; \quad K_0 = K + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k A_n [g(t) - \kappa' q_k^2]$$

Ce qui se met sous la forme

$$(62) \quad \begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{K_0}{I_0}\theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{I_0} n\pi h(n\pi h) [g(t) + n^2 \pi^2 \kappa'] a_n \\ &= -\frac{K_0}{I_0}\theta + \sum_{n=1}^{\infty} E_n a_n \end{aligned}$$

Avec :

$$E_n = -\frac{A_n}{I_0} n\pi h(n\pi h) [g(t) + n^2 \pi^2 \kappa']$$

Par rapport à (60), cette relation présente l'avantage de ne faire intervenir qu'une seule dérivée seconde, celle de θ . Justement, nous proposons de transformer la relation (60) pour ne conserver que celle de a_n . Pour ce faire, on combine (60) et (62) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_n}{dt^2} + n\pi h(n\pi h) [g(t) + n^2 \pi^2 \kappa'] a_n &= \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k h \left[-\frac{K_0}{I_0} \theta - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{I_0} m\pi h(m\pi h) [g(t) + m^2 \pi^2 \kappa'] a_m \right] \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k [g(t) - \kappa' q_k^2] \theta \end{aligned}$$

Soit

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k \left[\frac{K_0 h}{I_0} + g(t) - \kappa' q_k^2 \right] \theta - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\delta_{mn} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k \frac{A_m h}{I_0} \right] m\pi h(m\pi h) [g(t) + m^2 \pi^2 \kappa'] a_m$$

Cette équation peut se mettre sous la forme condensée

$$(63) \quad \frac{d^2 a_n}{dt^2} = C_n \theta + \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm} a_m$$

où

$$C_n = -\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k \left[\frac{K_0 h}{I_0} + [g(t) - \kappa' q_k^2] \right] ;$$

$$D_{nm} = -\left[\delta_{mn} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k \frac{A_m h}{I_0} \right] m\pi th(m\pi h) [g(t) + m^2 \pi^2 \kappa']$$

Ici, δ_{mn} est le symbole de Kronecker.

Ainsi, les équations (62) et (63) forment un système d'équations de Mathieu couplées

$$(64) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{K_0}{I_0} \theta + \sum_{n=1}^{\infty} E_n a_n \\ \frac{d^2 a_n}{dt^2} = C_n \theta + \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm} a_m \end{cases}$$

Il se met sous la forme (51), soit

$$(65) \quad G \frac{dZ}{dt} = F(t)Z$$

où G est une matrice d'ordre $(2N+2) \times (2N+2)$ constante, N étant l'ordre de troncature des séries, $Z = \left(\theta, \frac{d\theta}{dt}, a_n, \frac{da_n}{dt} \right)^t$ est un vecteur de dimension $2N+2$ et $F(t)$ est une matrice $(2N+2) \times (2N+2)$ périodique et de fréquence ϖ .

2.2.2 Cas où la poutre se déplace comme un piston:

On s'intéresse, ici, au cas où la poutre est modélisée par un système masse-ressort. La masse m_s est une paroi rigide et mobile, animée d'un mouvement de translation horizontal (figure 3). Elle est connectée à une paroi fixe et rigide avec un ressort sans masse et de rigidité k_s . Dans ce cas, les équations qui gouvernent le problème se simplifient de façon notable

parce que le mouvement de la poutre est décrit par une variable $w(t)$ qui ne dépend que du temps. En conséquence, la relation (39) devient:

$$(66) \quad b_n(t) = B_n w(t)$$

avec:

$$(67) \quad B_n = \frac{4 \sin^2 q_n h}{\sinh q_n (2q_n h + \sin 2q_n h)}$$

Ce résultat s'obtient en réécrivant la condition (19) sous la forme

$$\frac{dw(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{db_n}{dt} \cdot \frac{\cos q_n (y+h) \cdot \sinh q_n}{\sin(q_n h)}$$

Son intégration par rapport au temps traduit par:

$$w(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \frac{\sinh q_n}{\sin q_n h} \cos q_n (y+h)$$

Cette expression est obtenue en supposant que le système hydroélastique est au repos à $t=0$.

La propriété d'orthogonalité des fonctions $\cos q_n (y+h)$ conduit alors à la relation (66).

Par ailleurs l'équation des vibrations transverses de la poutre (21) est remplacée par l'équation dynamique:

$$(68) \quad m_s \frac{d^2 w}{dt^2} + k_s w = \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{x=0} dy$$

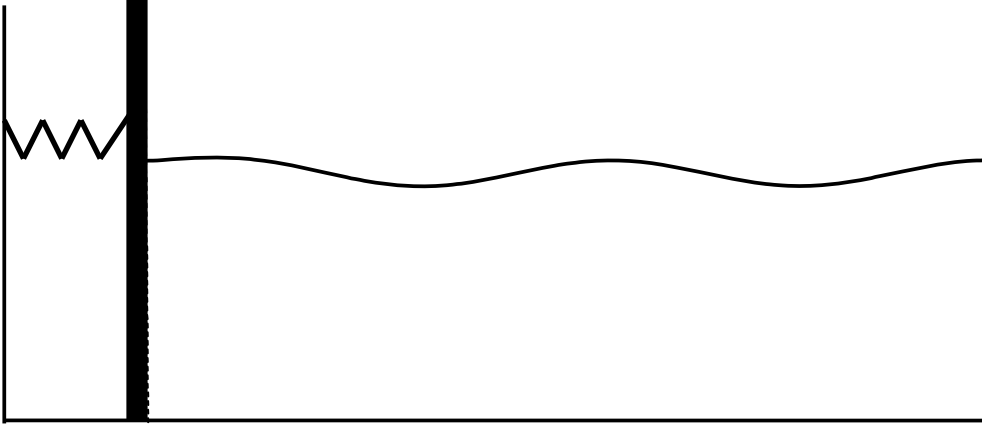


Figure 3: *modélisation de la paroi mobile par un système masse-ressort*

L'adimensionnalisation des équations relatives à la structure est faite avec la masse de référence $\rho_f L^2$ et la raideur de référence $\rho_f g_0 L$. Le traitement de l'équation (68) donne lieu à la forme suivante:

$$(69) \quad M_s \frac{d^2 w}{dt^2} + K_s w + \sum_{n=1}^N A_n^* a_n = 0$$

avec:

$$M_s = m_s + \sum_n \frac{ch(q_n) \sin^2(q_n h)}{q_n^3 sh(q_n) \parallel \parallel_n^2} - \sum_m \frac{\tilde{A}_m}{m^2 \pi^2}$$

$$K_s = k_s - \sum_m \frac{\tilde{B}_m}{m^2 \pi^2}$$

$$A_n^* = \frac{n\pi th(n\pi h) [g(t) + \kappa' n^2 \pi^2]}{n^2 \pi^2}$$

Dans ces expressions $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n$ et la norme $\| \cdot \|_m^2$ sont donnés par les relations :

$$\begin{aligned}\tilde{A}_m &= \sum_n \frac{\sin^2(q_n h)}{q_n \operatorname{sh}(q_n) \| \cdot \|_n^2} \frac{2m\pi \operatorname{th}(m\pi h) (q_n h) \operatorname{sh}(q_n)}{q_n^2 + m^2 \pi^2} \\ \tilde{B}_m &= - \sum_n \frac{\sin^2(q_n h)}{q_n \operatorname{sh}(q_n) \| \cdot \|_n^2} 2m\pi \operatorname{th}(m\pi h) [g(t) - \kappa' q_n^2] \frac{q_n \operatorname{sh}(q_n)}{q_n^2 + m^2 \pi^2} \\ \| \cdot \|_m^2 &= \| \cos[q_m(z+h)] \|^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2q_m h)}{2q_m} + h \right]\end{aligned}$$

Par ailleurs, on montre que la relation (45) devient dans le cas présent :

$$(70) \quad \frac{d^2 a_m}{dt^2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} a_n = B_m w$$

avec

$$A_{mn} = R_m(t) \delta_{mn} + \tilde{A}_m \frac{R_m(t)}{n^2 \pi^2 M_s^*}$$

$$B_m = \tilde{B}_m - \tilde{A}_m \frac{K_s}{M_s}$$

où

$$R_m(t) = m\pi \operatorname{th}(m\pi h) [g(t) + \kappa' m^2 \pi^2]$$

Ainsi, le système d'équations de Mathieu couplées (51) devient:

$$(71) \quad \begin{cases} \frac{d^2 a_n}{dt^2} + \sum_{k=1}^N A_{nk} a_k - B_n w = 0 \\ M_s \frac{d^2 w}{dt^2} + K_s w + \sum_{n=1}^N A_n^* a_n = 0 \end{cases}$$

Chapitre 3

Résultats et discussion

3.1. Introduction

Les développements représentant ϕ_1 et ϕ_2 sont tronqués au septième mode car l'augmentation de ce nombre n'engendre pas de variation significative dans les résultats. De plus, les coefficients sont en général hiérarchisés par rapport à l'information qu'ils contiennent. Cela signifie que les premiers coefficients sont porteurs de la majeure partie de l'information.

Nous avons vu que les équations des deux cas considérés se mettent sous la forme de systèmes d'équations de Mathieu couplées :

$$(72) \quad G \frac{dZ}{dt} = F(t)Z$$

G est alors une matrice 16×16 constante, $Z = \left(a, \frac{da}{dt}, w, \frac{dw}{dt} \right)^t$ est un vecteur de dimension 16, et $F(t)$ est une matrice 16×16 périodique, de période T et de fréquence ω . Ces équations sont linéaires, avec des coefficients fonctions $2\pi/\omega$ périodiques dans le temps. En conséquence, on a affaire à un problème d'excitation paramétrique. En effet, Il est généralement admis qu'un système est excité paramétriquement si l'excitation apparait sous forme de coefficients variables avec le temps dans les équations du mouvement. Le mécanisme de l'excitation paramétrique se distingue physiquement et mathématiquement de celui d'une excitation directe. Mathématiquement, les problèmes liés à l'excitation paramétrique sont modélisés par des équations différentielles homogènes à coefficients variables avec le temps ; le deuxième cas a une formulation sous forme d'équations différentielles non-homogènes à coefficients constants ou qui dépendent faiblement du temps. Le terme non homogène représente l'excitation assimilée à un forcing.

La principale différence physique entre les deux mécanismes réside dans le fait qu'une faible excitation directe ne peut engendrer une réponse forte que si la fréquence du forcing est suffisamment proche d'une des fréquences naturelles du système. Ce phénomène est celui de la résonance primaire. Inversement, une faible excitation paramétrique (même infinitésimale si la dissipation est négligeable) peut produire une forte réponse lorsque la fréquence du « forcing » est loin des fréquences naturelles du système. Lorsque cela peut se produire à deux fois la valeur de ces dernières on a affaire à la résonance paramétrique principale. En outre, pour les systèmes linéaires paramétriquement excités, la solution instable croît exponentiellement en dépit de la présence de la dissipation visqueuse contrairement aux systèmes directement excités pour lesquels la résonance peut être contrariée par un amortissement.

La stabilité du système (72) est examinée à partir du calcul des valeurs propres de sa matrice de monodromie. Si G_T représente cette matrice, alors, par définition

$$(73) \quad Z(t+T) = G_T Z(t)$$

Elle permet de représenter la solution à l'instant t en fonction de la solution à l'instant $t+T$ ou $t-T$. En faisant $t = 0$ dans (62) on obtient :

$$(74) \quad Z(T) = G_T Z(0)$$

La matrice de monodromie apparaît ainsi comme la matrice des composantes des vecteurs $Z(T)$ pour un choix d'un vecteur de conditions initiales. Cette matrice peut être calculée en intégrant le système (72) sur une période T , avec $Z(0) = I$, I étant la matrice identité. Dans notre cas cette opération a été effectuée numériquement, en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Nous avons vu que les propriétés des valeurs propres de la matrice de monodromie impliquent qu'il n'y a stabilité que si tous leurs modules sont égaux à un. Le passage à l'état instable se fait lorsque une (des) paire (s) de valeurs propres quitte(nt) le cercle unité après avoir fusionné, avec un déplacement radial qui conduit l'une d'elles vers l'intérieur et l'autre

vers l'extérieur. Cette sortie peut se faire sur l'axe des réels aux points de coordonnées (-1) et (+1) et dans ce cas la transition sera dite de type I (figure 4). Lorsque cette fusion se fait en dehors de l'axe des réels la transition est désignée par le type II (figure 5).

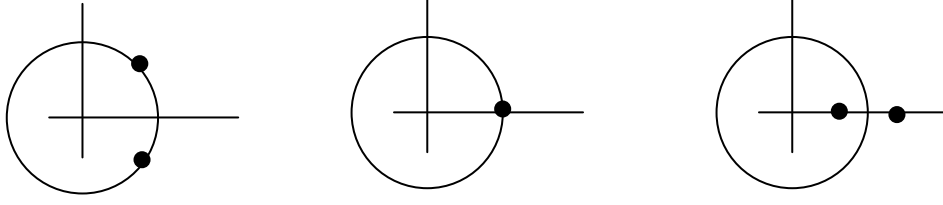


Figure 4: *fusion des valeurs propres lors d'une transition de type I*

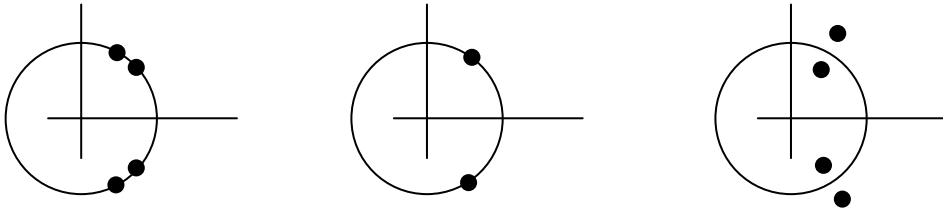


Figure 5: *fusion des valeurs propres lors d'une transition de type II*

Rappelons par ailleurs que, d'après le théorème de Floquet, si λ_n est valeur propre de G_T la solution $Z(t)$ vérifie la solution suivante :

$$(75) \quad Z(t+T) = \lambda_n Z(t)$$

On a alors

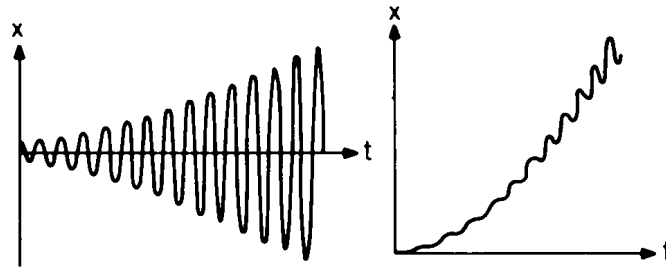
$$Z(t) = \frac{1}{\lambda_n} Z(t+T)$$

En conséquence, λ_n^{-1} est aussi valeur propre de G_T , ce qui implique que ces valeurs propres interviennent par paires $(\lambda_n, \lambda_n^{-1})$. De plus, la matrice G_T est à coefficients réels ; ses valeurs propres sont réelles ou complexes conjuguées. Compte tenu de ces deux remarques, si λ_n est valeur propre de G_T , il en est de même pour λ_n^{-1} , $\bar{\lambda}_n$ et $\bar{\lambda}_n^{-1}$. Toutefois, sur le cercle unitaire le module étant égal à un (01) pour toutes les valeurs propres, ce nombre est ramené à deux (02). Le tableau 1 qui contient un ensemble de valeurs propres obtenues au cours d'une itération montre bien que ces dernières vont par paires conjuguées.

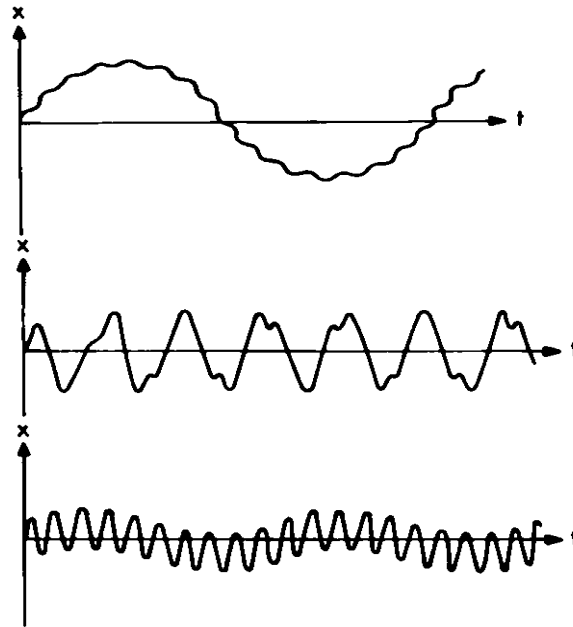
Partie imaginaire	Partie réelle
0.903387272689520	0.428825646864921
-0.903387272689520	0.428825646864921
0.283190594398053	0.959063650785471
-0.283190594398053	0.959063650785471
0.137708600931131	0.990472784087704
-0.137708600931131	0.990472784087704
0.987230687245772	-0.159297102518913
-0.987230687245772	-0.159297102518913
0.151610137185360	-0.988440370635435
-0.151610137185360	-0.988440370635435
0.789698524620723	-0.613495101681992
-0.789698524620723	-0.613495101681992
0.585687076104209	-0.810537259393106
-0.585687076104209	-0.810537259393106
0.579397419857678	-0.815045169270134
-0.579397419857678	-0.815045169270134

Tableau 1 : Exemple de valeurs propres obtenues au cours d'une itération

Le cas de fusion $\lambda_1 = \lambda_2 = +1$ correspond à l'existence d'une solution périodique de période T alors que le cas $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ se rapporte à celle d'une solution de période $2T$ (voir annexe). Outre la transition résultant de la perte de stabilité, les diverses possibilités de fusion ont sur le comportement ultérieur du système des conséquences variées. Les solutions non bornées (celles correspondant à des valeurs propres de modules supérieurs à 1) peuvent être divisées qualitativement en deux types différents. Les deux croissent exponentiellement avec le temps mais l'un est oscillatoire alors que l'autre ne l'est pas.

Figure 6: *Solutions non bornées de l'équation de Mathieu*

Les solutions bornées sont apériodiques et possèdent deux fréquences : la partie imaginaire de λ et la fréquence de l'excitation extérieure. Les profils correspondant à ces solutions sont variés et dépendent du rapport de ces fréquences. Lorsque ce ratio est petit la solution est presque périodique, avec une amplitude et une phase ayant une modulation haute fréquence. Dans le cas contraire, les profils ont des formes complexes.

Figure 7: *Solutions bornées de l'équation de Mathieu*

3.2.Cas où la poutre se déplace comme un piston

On considère, ici, le cas où la poutre est modélisée par un ensemble masse-ressort, et le fluide est sous l'effet de la gravité seule. Les calculs effectués concernent le cas d'un système dont les caractéristiques sont :

$$L=1.2192\text{m}, H+h=1.524\text{m}, \rho_f=1041\text{kg/m}^3, m_s = 1, k_s = 0.64$$

$$\frac{h}{h+H} = 0.5 \text{ (taux de remplissage), } \alpha = 0.00001$$

3.2.1. courbes de stabilité neutre

Rappelons que lorsque le module de toutes les valeurs propre est égal à 1, ces dernières correspondent aux fréquences propres du système et se représentent dans le plan complexe sur un cercle de rayon égal à l'unité. Le passage à l'état instable se produit lorsque une (des) paire(s) quitte(nt) le cercle unité après avoir fusionné. Nous avons représenté dans les figures 8 (transitions de type I) et 9(transitions de type II) les courbes de stabilité neutre obtenues dans le plan (β, ω) . Ces résultats ont été obtenus en utilisant une forme de méthode de bisection pour les deux modes de passage à l'instabilité. Cette opération est d'autant plus fastidieuse que les langues d'instabilités sont minces. Certaines figures on nécessité plusieurs semaines de calculs.

Ces courbes séparent les régions marquées « st » où les solutions sont stables de celles où elles sont instables. Les zones instables sont naturellement plus importantes aux plus grandes accélérations de l'excitation externe. Notons que sur ces diagrammes les zones d'instabilité correspondant à des transitions de type I couvrent un domaine plus important que celui associé à l'autre transition. On peut observer sur les figures que ces zones peuvent avoir des parties communes, ce qui montre la possibilité de coexistence de plusieurs modes et qui rend difficile la prévision de la réponse du système à une excitation donnée. Notons, aussi, que deux valeurs propres peuvent se croiser sur le cercle unitaire sans le quitter. Nous avons donc systématiquement vérifié que la sortie a effectivement eu lieu après chaque fusion.

Les zones instables forment des pics de plus en plus étroits avec la diminution de β . Il semble que c'est également le cas lorsque la fréquence s'affaiblit. En théorie ces courbes atteignent l'axe $\beta = 0$ mais dans notre cas nous n'avons pas considéré les cas où les

épaisseurs des pics sont inférieures à 10^{-6} . Du point de vue pratique, les transitions qui se produisent sur l'axe $\beta = 0$ sont importantes. En effet, ces instabilités qui sont générées avec des accélération faibles sont plus facile à observer. Lorsque $\beta = 0$, une étude réalisée par **DEBIANE [2005]** fait apparaître deux sortes de modes propres : le type "ballottement" et le type "structure" :

- le mode de type ballottement caractérisé par des fréquences couplées proches des fréquences propres du fluide seul et pour lequel l'effet du mouvement de la structure est faible ;
- le mode de type structure dont la forme propre est similaire à celle du mode sec de structure le plus proche. Il correspond à des fréquences différentes de celles non couplées du fluide.

Aux faibles valeurs du taux de remplissage, $h/(H+h)$, les fréquences couplées sont proches des fréquences naturelles du fluide. Leur forme propre est également voisine de celle du ballottement pur et l'effet du mouvement de la structure est faible. Un tel mode est de type ballottement. Avec l'accroissement du rapport h/H l'effet de la déformation de la paroi se manifeste progressivement.

Sur l'axe $\beta = 0$, il existe des fréquences de résonance qui représentent des transitions potentielles à l'instabilité. Ainsi, il y a des cas où l'introduction d'une charge vibrationnelle peut déstabiliser le système et d'autre n'ont aucun effet sur les propriétés de stabilité du système. **NAYFEH et MOOK [1979]** ont montré que pour de telles situations il existe deux possibilités de sortie du cercle unitaire. La première, qui se fait sur une distance de l'ordre de β , a un taux d'amplification significatif qui donne lieu à une transition vers une instabilité qui est qualifiée de forte. La deuxième possibilité correspond à une sortie d'une longueur de l'ordre de β^2 engendrant un taux d'amplification faible. La transition est alors dite faible. Dans les situations réelles, ces dernière transitions ne sont pas observées car elles sont contrariées par la dissipation visqueuse.

3.2.2. Influence de la tension superficielle

La figure 10 représente la courbe de stabilité neutre, pour une transition de type I, en l'absence de la tension superficielle. Sa comparaison avec la figure 8 qui correspond au cas où le fluide est l'eau ($\alpha = 0.00001$) révèle que la tension superficielle n'affecte pas de façon significative les propriétés de la stabilité du système. Cela est sans doute dû au caractère linéaire du problème. En effet, ce dernier implique que des élévations faibles de la surface libre. En conséquence, ses rayons de courbure sont trop grands pour que l'effet de la capillarité puisse être marquant.

Par ailleurs, l'introduction de la tension superficielle suggère de tenir compte des effets de la ligne de contact, c'est-à-dire celle où l'interface rencontre les parois solides. De façon générale la condition d'imperméabilité d'une paroi verticale se traduit par l'équation

$$\phi_x = 0$$

Sur la surface libre on a, d'après la condition (20):

$$\phi_y = \eta_t$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi_y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial y}(\phi_x)$$

Soit, au niveau de la ligne de contact,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} = 0$$

il s'en suit que :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \text{sa valeur initiale} = 0$$

La valeur de l'angle de contact est ainsi constante et égale à 90° sur la paroi verticale. Dans ce cas la ligne de contact est dite libre. Dans les conditions réelles, même si la tension superficielle ne change pas de façon significative lorsque l'interface est en mouvement,

l'angle de contact subit une variation du type hystérésis et a pour effet d'induire des actions de dissipation qui sont, par conséquent, stabilisantes. Il peut également affecter les fréquences naturelles si la longueur d'onde est suffisamment petite ($\leq 1\text{cm}$).

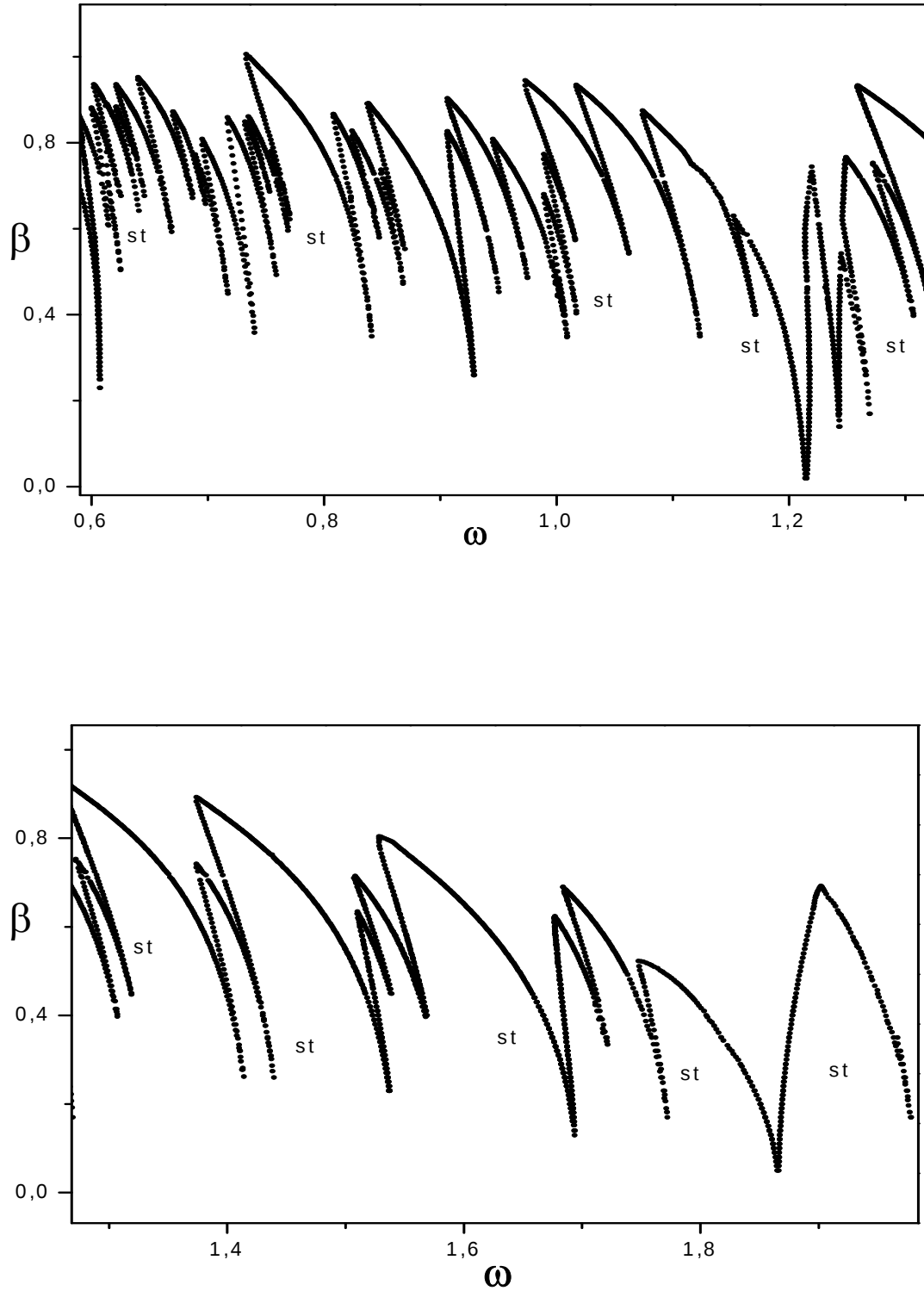


Figure 8 : courbes de stabilité neutre pour la transition I. L'indication « st » correspond à la stabilité

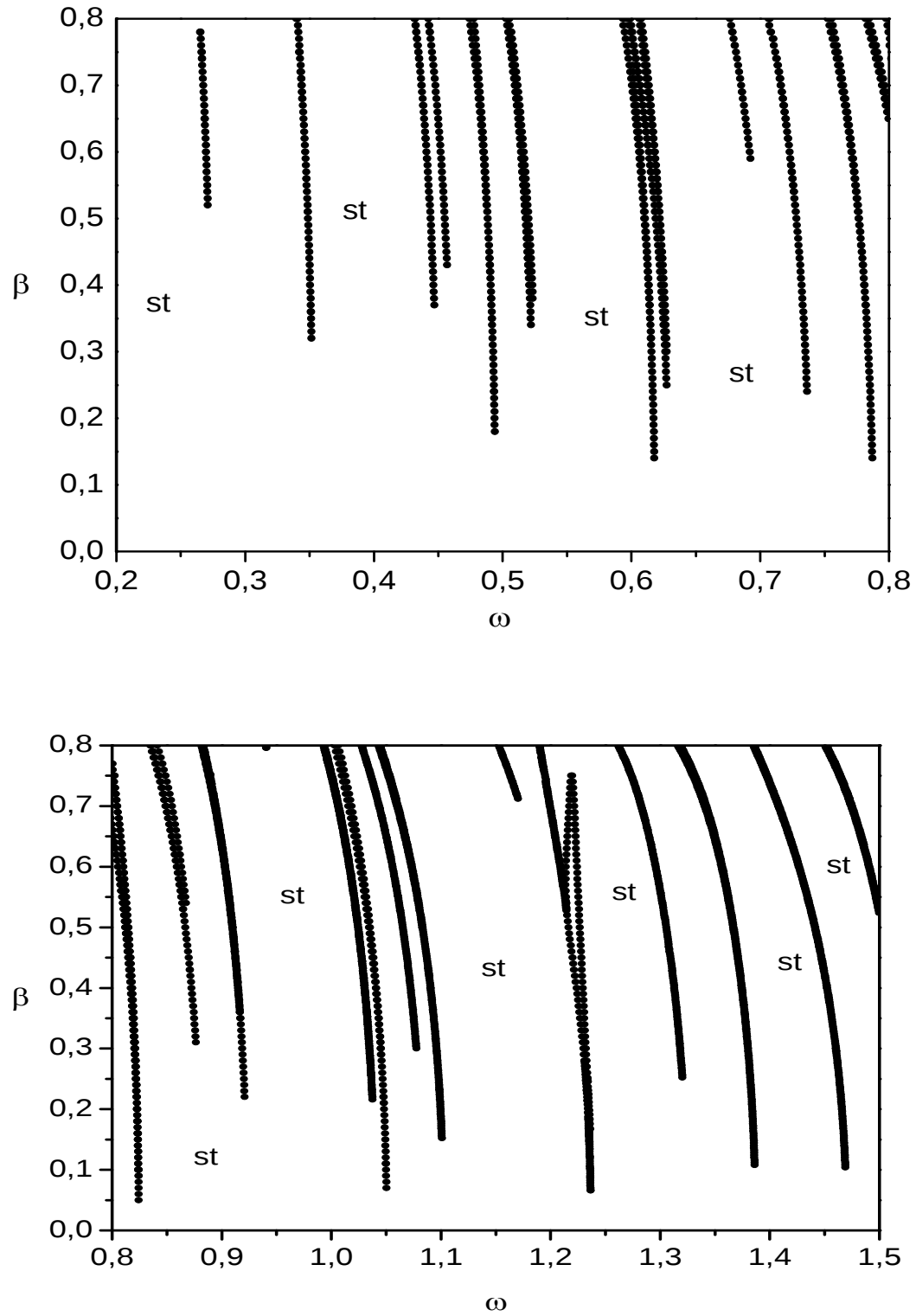


Figure 9 : courbes de stabilité neutre pour la transition II. L'indication « st » correspond à la Stabilité.

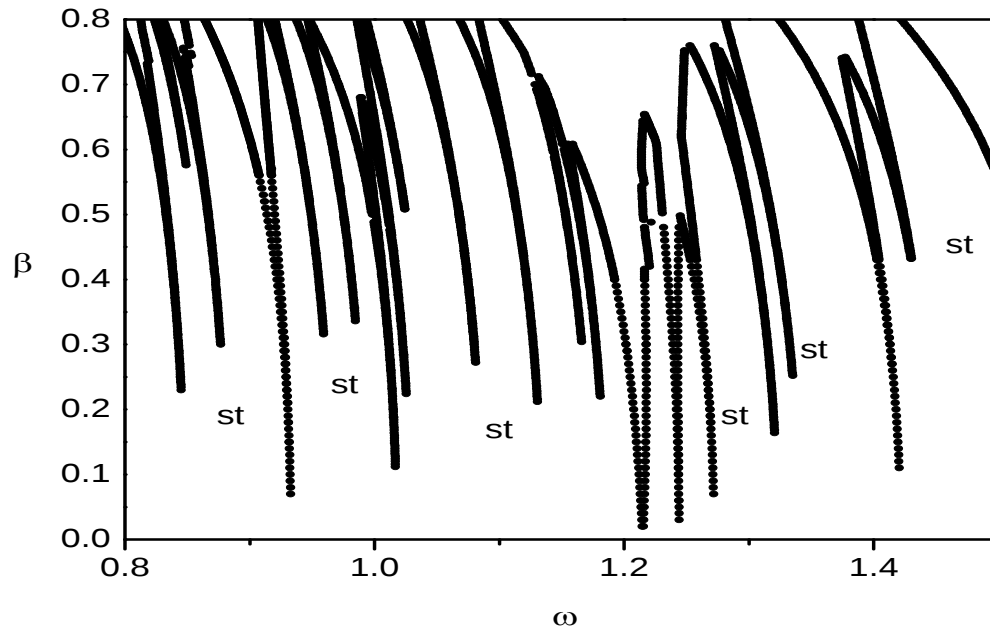
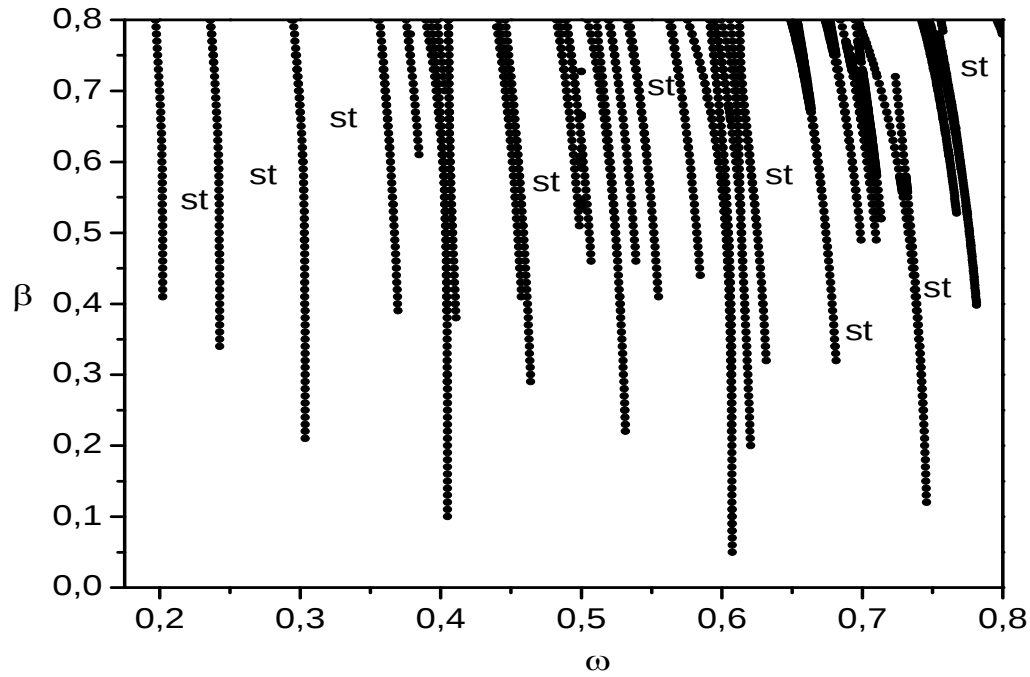


Figure 10 : courbes de stabilité neutre pour la transition I. L'indication « st » correspond à la stabilité en gravité pure.

3.3.Cas où la poutre est articulée à sa base

Maintenant nous abordons le cas où la paroi est modélisée par une poutre articulée à sa base avec les paramètres

$$K_0 = 0.325 ; I_0 = 0.344$$

3.3.1. Courbes de stabilité neutre.

Pour un taux de remplissage de 0.5, nous avons représenté dans les figures 11 (transitions de type I) et 12 (transitions de type II) les courbes de stabilité obtenues dans le plan (β, ω) en utilisant, là aussi, une forme de la méthode de bisection pour le passage à l'instabilité. Il faut noter que pour la transition de type II les pics d'instabilité sont très étroits. Il est possible que certains soient si fins qu'ils sont indétectables par la technique de prospection que nous avons utilisée. Ceci est d'autant plus vrai qu'en théorie leur amorçage sur l'axe $\beta = 0$ se fait pour des fréquences de résonance discrètes. Nous n'avons représenté que ceux que nous avons révélés. Par ailleurs, il convient de noter que les commentaires effectués à la fin du paragraphe (3.2.2) sur le cas des faibles excitations restent également valables pour une poutre articulée à sa base.

Comme dans le cas d'une poutre de type piston, il apparaît que sur ces diagrammes les zones d'instabilité correspondant à des transitions de type I couvrent un domaine plus important que celui la transition de type II. Ces figures font également apparaître des zones communes aux deux types de transition avec pour conséquence la possibilité de coexistence de plusieurs modes qui rend difficile la prévision de la réponse du système à une excitation donnée.

L'influence du type de couplage peut être mise en évidence en comparant les figures 8 et 9, relatives au cas d'une modélisation du type piston, avec les figures 11 et 12 correspondant à une représentation du type poutre articulée. On constate que, globalement, les zones d'instabilité associées au deuxième modèle sont plus importantes. Remarquons que,

dans les deux cas, l'interaction fluide structure dépend du nombre de Froude : $Fr = \sqrt{\frac{\omega^2 h}{g}}$

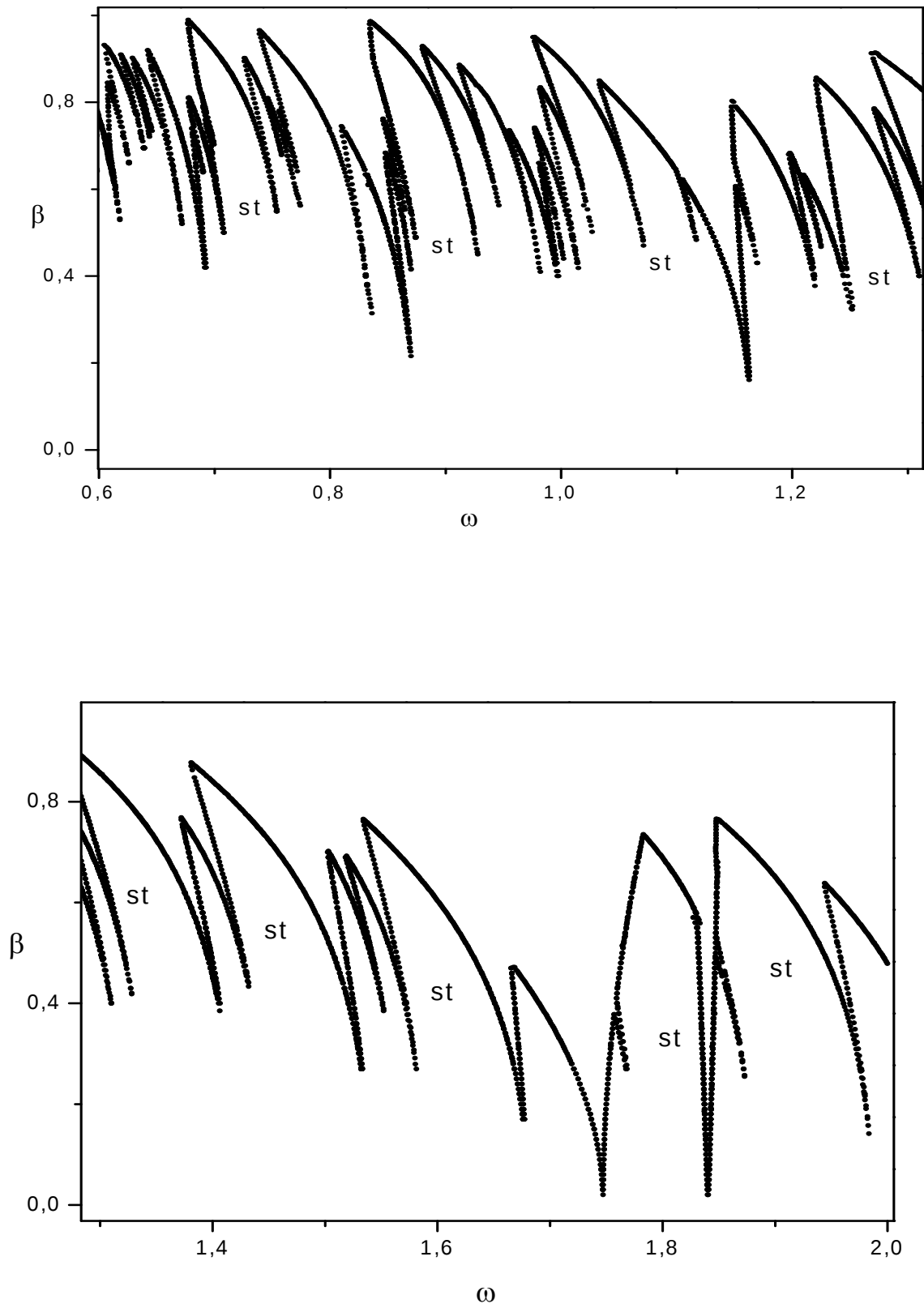


Figure 11 : courbes de stabilité neutre pour la transition I. $h=0.5$

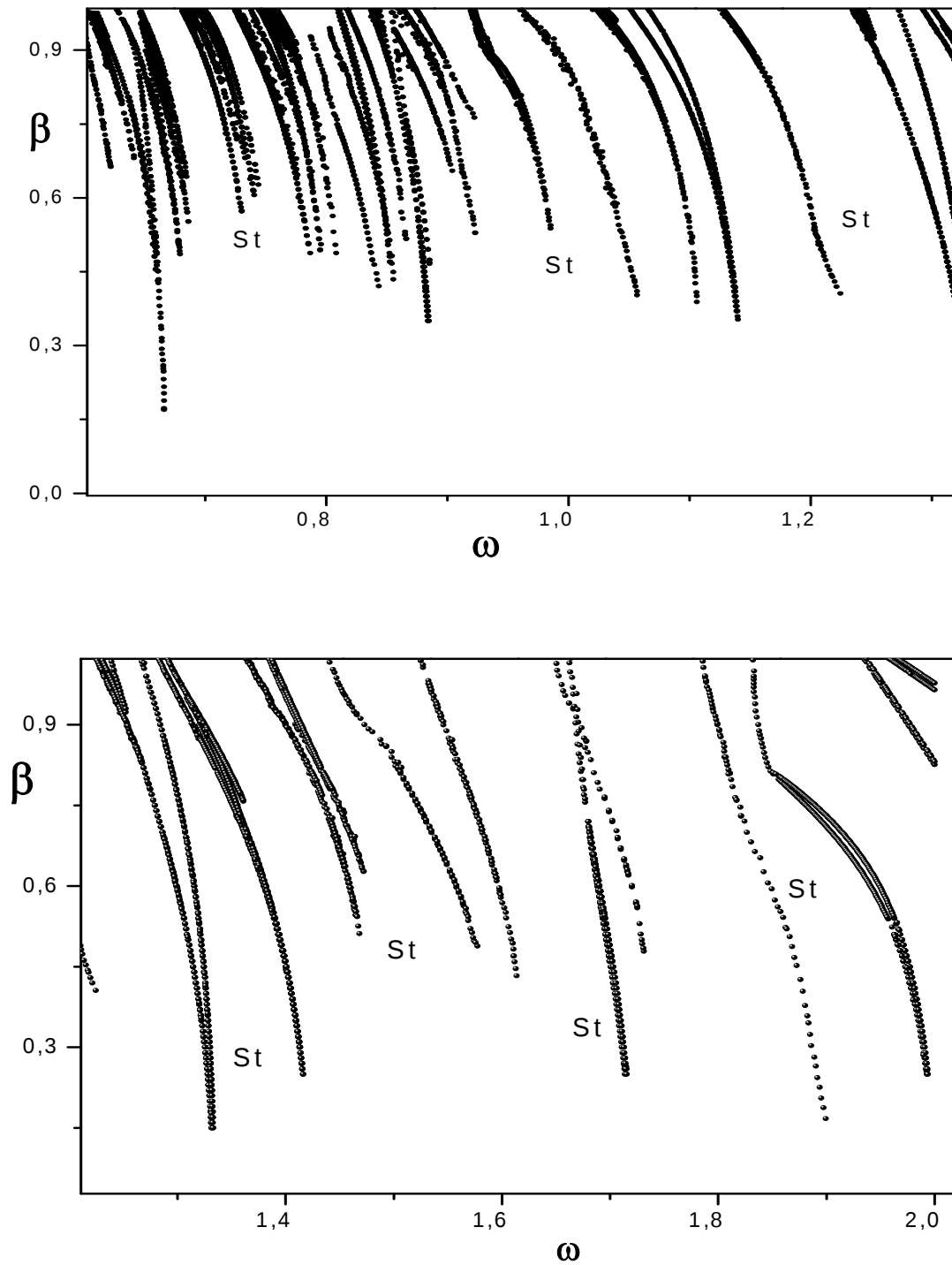


Figure 12 : courbes de stabilité neutre pour la transition II. $h=0.5$

Lorsque le nombre de Froude est grand ($Fr \gg 1$), les efforts d'inertie sont bien plus grands que ceux dus à la pesanteur. L'influence sur la paroi des ondes de surface est négligeable par rapport à l'influence de l'inertie du fluide. Si le nombre de Froude est petit ($Fr \ll 1$) c'est la

surface libre qui échange de l'énergie avec la poutre. On se retrouverait dans la configuration analogue à celle des petites valeurs de β . Dans le cas d'un nombre de Froude de l'ordre de 1, on enregistre une influence simultanée de l'inertie du fluide et de la surface libre.

3.3.2. Influence de la profondeur du fluide

Les courbes de stabilité obtenues dans le plan (β, ω) pour les transitions de type I de la figure 12, pour un taux de remplissage de 0,3. L'influence de la profondeur du fluide est mise en évidence en comparant ces courbes avec leurs homologues obtenues avec un taux de remplissage de 0,5, c'est-à-dire la figure 11. Ces résultats montrent que l'instabilité croît avec la diminution de l'épaisseur du fluide. Nous précisons qu'il est connu que dans les problèmes du type de celui de Faraday, les termes des solutions, responsables du couplage des équations sont indépendants de la profondeur du fluide. Il s'en suit que l'instabilité n'est pas influencée par cette profondeur. A l'opposé, lorsque l'épaisseur du fluide devient petite, les déformations de la poutre dans sa partie humide sont plus faibles que dans sa partie centrale et ainsi les effets de son mouvement sur le fluide sont faibles. On se retrouve dans une configuration analogue à celle d'un réservoir rigide étudié par **BENJAMIN & URSELL [1954]** que nous résumons dans ce qui suit :

Un fluide incompressible et non visqueux est placé dans un récipient de profondeur h et de section droite rectangulaire. le réservoir est soumis à un mouvement vertical avec l'accélération $f \cos \omega t$. Les équations du problème ont été établies pour un écoulement considéré irrotationnel et des conditions aux limites linéarisées.

Pour résoudre ce problème, la déformation de la surface libre et le potentiel des vitesses sont exprimés sous les formes

$$\eta(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} k_m^2 a_m(t) s_m(x, y)$$

$$\Phi(x, y, t) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{da_m}{dt} \frac{\cosh k_m(h-z)}{\sinh(k_m h)} s_m(x, y)$$

Ces solutions sont exprimées dans un système de coordonnées cartésiennes lié au réservoir. Les axes (Ox) et (Oy) sont horizontaux alors que (Oz) est vertical ascendant. L'origine est placée telle que le niveau moyen de l'interface soit contenu dans le plan

horizontal (XOY). $s_m(x, y)$ est l'ensemble des fonctions orthogonales et k_m^2 des valeurs propres réelles et positives vérifiant les équations

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_m^2\right)s_m(x, y) = 0 \text{ dans contour (C) de la surface libre}$$

$$\frac{\partial s_m}{\partial n} = 0 \text{ sur (C)}$$

Les coefficients $a_m(t)$ vérifient l'équation

$$(76) \quad \frac{d^2 a_m}{dT^2} + (p_m - 2q_m \cos 2T)a_m = 0$$

Avec

$$p_m = \frac{4k_m \tanh k_m h}{\omega^2} \left(g + \frac{k_m^2 \gamma}{\rho}\right)$$

$$q_m = \frac{2k_m \tanh k_m f \tanh k_m h}{\omega^2}$$

$$T = \frac{1}{2} \omega t$$

où T est le coefficient de tension superficielle et ρ la masse volumique. (76) est une équation de Mathieu. Son diagramme de stabilité dans le plan (p, q) est montré en partie dans la figure 13. Les zones claires correspondent aux configurations stables, les parties sombres à celles qui sont instables. Ces zones sont séparées par les courbes de stabilité neutres. L'analyse de floquet de ce problème révèle

- des régimes de solutions périodiques (il en existe au moins une sur les courbes de stabilité neutre) ;
- des régimes où les solutions sont oscillatoires mais pas périodiques (dans les zones stables).

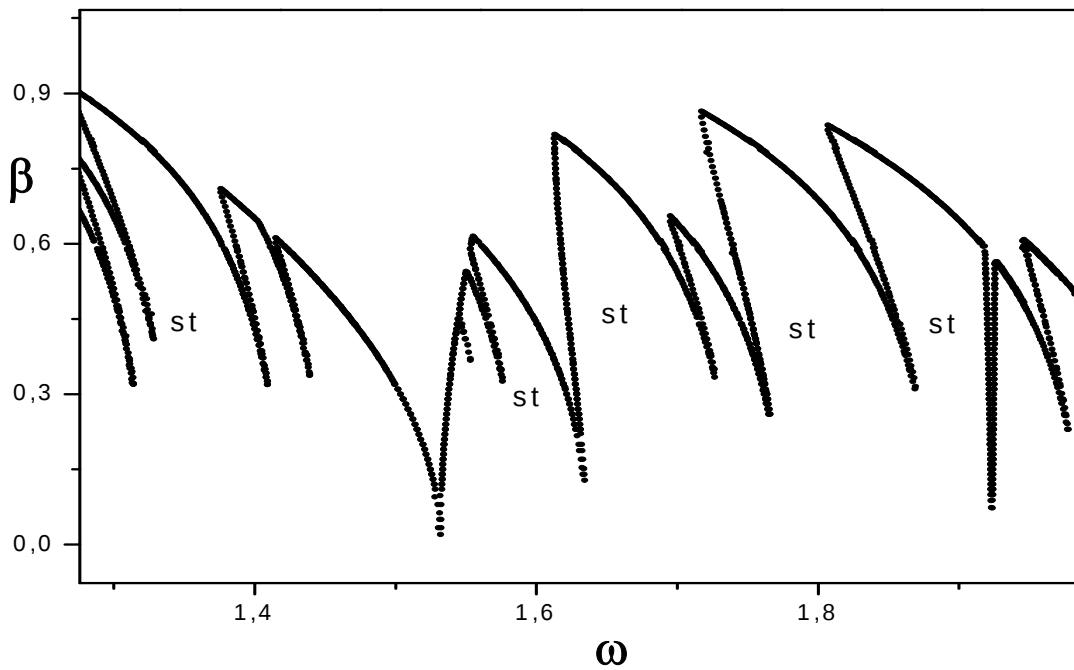
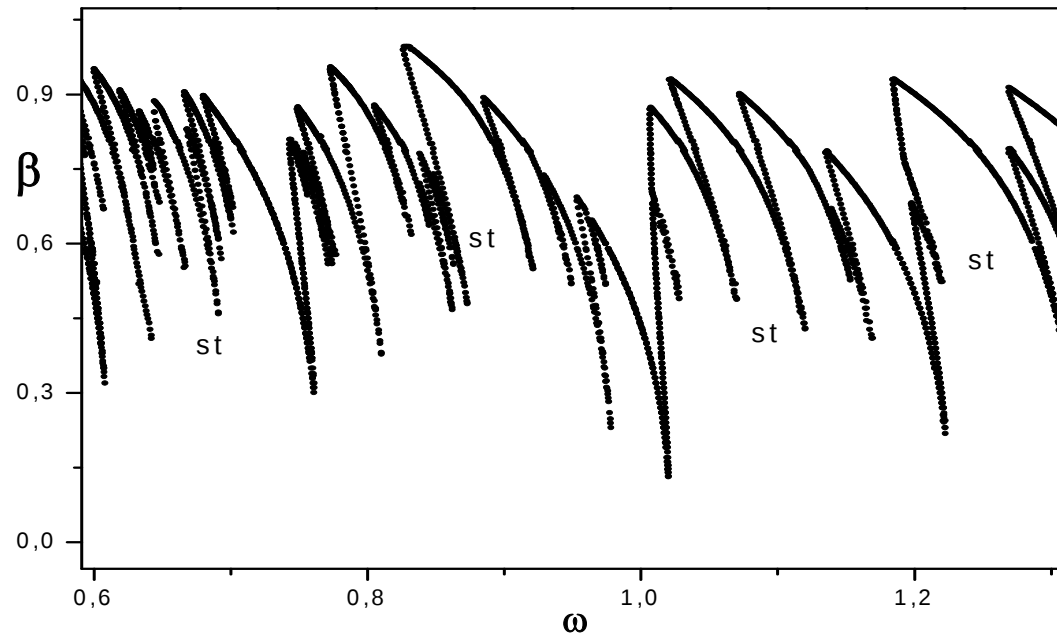


Figure 12 : courbes de stabilité neutre pour la transition I. $h=0.3$

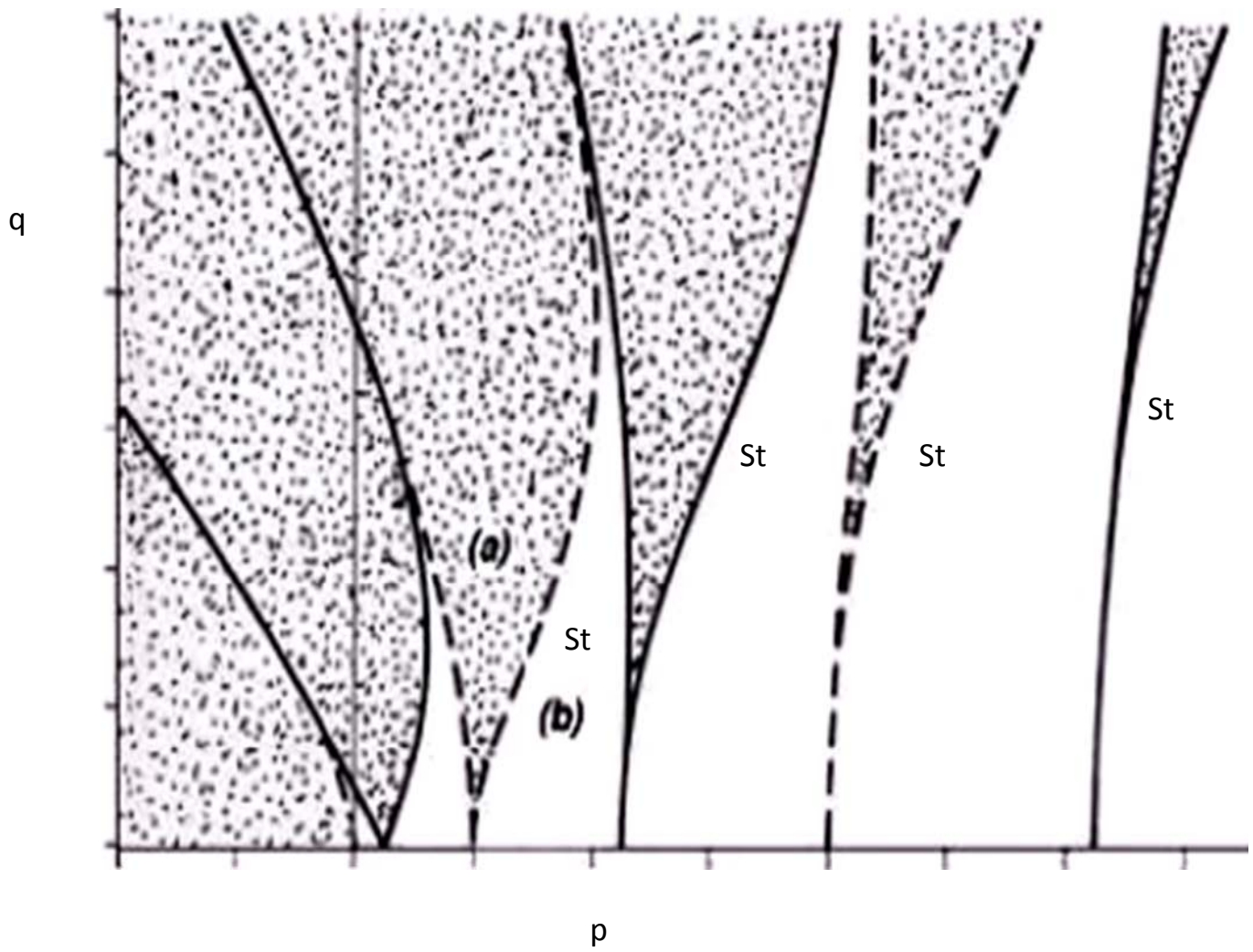


Figure 13 : courbes de stabilité neutre pour l'équation de Mathieu

Conclusions et perspectives

Le présent travail a trait à l'étude de l'interaction entre un liquide oscillant et une paroi élastique d'un réservoir rectangulaire, en tenant compte des effets de la gravité et de la tension superficielle. Plus précisément, il s'agit d'étudier la stabilité de la réponse du réservoir lorsqu'il est soumis à des oscillations harmoniques verticales. Nous avons appliqué une méthode développée par AMAOUCHE et DEBIANE pour deux cas particuliers où la paroi mobile a, soit un mouvement du type piston, ou celui d'une poutre articulée à sa base. Le problème est formulé en utilisant les équations linéarisées du fluide et en modélisant la paroi déformable à travers le problème d'une plaque mince. La solution explicite obtenue pour le fluide supposé parfait se présente sous la forme d'un développement de fonctions propres qui a nécessité l'introduction d'un produit scalaire approprié. Ce problème qui représente une extension naturelle de celui de Faraday est décrit par un système d'équations de Mathieu couplées. La réponse du modèle hydroélastique s'exprime à travers les nombres caractéristiques de Floquet de ce système et peut être plus complexe que celle synchrone ou sous-harmonique d'un réservoir rigide. La stabilité de ce système a été examinée à partir du calcul des valeurs propres de la matrice de monodromie. Si cette matrice a au moins une valeur propre dont le module est supérieur à un, la solution du système est instable. Cette approche linéaire a permis seulement d'identifier les différentes transitions entre les champs d'ondes; ils sont insuffisants pour rendre compte de toute la complexité des phénomènes qui y ont lieu. Il est intéressant alors d'aborder ce problème à l'aide d'une formulation variationnelle dans le cadre de la théorie non-linéaire. Une autre voie à explorer consistera à tenir compte des effets de la dissipation visqueuse.

ANNEXE

Considérons l'équation

$$A1 \quad \ddot{u} + p_1(t)\dot{u} + p_2(t)u = 0$$

où les p_n sont des fonctions périodiques de période T . En introduisant la transformation

$$u = x \exp \left[-\frac{1}{2} \int p_1(t) dt \right]$$

A1 peut se mettre sous la forme standard

$$A2 \quad \ddot{x} + p(t)x = 0$$

avec

$$A3 \quad p(t) = p_2 - \frac{1}{4} p_1^2 - \frac{1}{2} \dot{p}_1$$

Lorsque

$$p(t) = \delta + 2\varepsilon \cos 2t$$

A2 se réduit à

$$A4 \quad \ddot{x} + (\delta + 2\varepsilon \cos 2t)x = 0$$

Mathieu a analysé cette équation (qui porte son nom) dans la cadre d'une étude des vibrations d'une membrane elliptique. A1 étant une équation linéaire, homogène et de second ordre, elle admet deux solutions linéaires, indépendante et non-triviales. Ces dernières, qu'on désignera $u_1(t)$ et $u_2(t)$, sont appelées ensemble de solutions fondamentales parce que toute solution de A1 est une combinaison linéaire de ces deux solutions, c'est-à-dire

$$A2 \quad u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes. Puisque $p_n(t) = p_n(t+T)$

$$\begin{aligned}\ddot{u}(t+T) &= -p_1(t+T)\dot{u}(t+T) - p_2(t+T)u(t+T) \\ &= -p_1(t)\dot{u}(t+T) - p_2(t)u(t+T)\end{aligned}$$

En conséquence, si $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont des solutions fondamentales, $u_1(t+T)$ et $u_2(t+T)$ le sont également. Ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}u_1(t+T) &= a_{11}u_1(t) + a_{12}u_2(t) \\ u_2(t+T) &= a_{21}u_1(t) + a_{22}u_2(t)\end{aligned}$$

où les a_{mn} sont les éléments d'une matrice constantes et non singulière $[A]$. Cette matrice n'est pas unique ; elle dépend de l'ensemble fondamental utilisé. On montre qu'il existe des ensembles ayant les propriétés

$$\begin{aligned}\text{A5} \quad u_1(t+T) &= \lambda_1 u_1(t) \\ u_2(t+T) &= \lambda_2 u_2(t)\end{aligned}$$

Les λ_m sont des constantes qui peuvent être complexes et de telles solutions sont dites normales ou solutions de Floquet. λ_1 et λ_2 peuvent être les valeurs propres de la matrice $[A]$, c'est-à-dire les solutions distinctes de

$$|[A] - \lambda[I]| = 0$$

Ainsi A5 permet d'écrire

$$\text{A6} \quad u_i(t+nT) = \lambda_i^n u_i(t)$$

En conséquence lorsque $n \rightarrow \infty$ (i.e. $n \rightarrow \infty$)

$$u_i(t) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } |\lambda_i| < 1 \\ \infty & \text{si } |\lambda_i| > 1 \end{cases}$$

$\lambda_i = +1$ correspond à une solution périodique de période T alors que le cas $\lambda_i = -1$ se rapporte à celle d'une solution de période $2T$.

References

- [1] **AMABILI M., [2000];** Vibrations of Fluid-filled hermetic cans, J. of Fluids and Structures, Vol. 14, pp. 235–255.
- [2] **AMABILI M., PELLICANO F. & PAIDOUSSIS M. P., (1998);** Nonlinear vibrations of simply supported, circular cylindrical shells, coupled to quiescent fluid, J. of Fluids and Structures, Vol. 12 pp. 883–918.
- [3] **BARTELLETT S., WINTON M. & CLAUSEN P. D. ; (2001);** An added mass theory for the base plate in a partially filled rectangular tank for use with FEA, J. Sound and Vibration, Vol. 246, N°2, pp. 221–223.
- [4] **BATEMAN H., (1944);** Partial Differential Equations of Mathematical Physics. Dover.
- [5] **BAUER H. F., (1963 a);** Theory of liquid Sloshing in compartmented Cylindrical Tanks due to Bending Excitation, AIAA Journal, Vol. 1, N°7, pp. 1590–1596.
- [6] **BAUER H. F. & EIDEL W., (2004);** Hydroelastic vibrations in a two-dimensional rectangular container filled with frictionless liquid and partly elastically covered free surface, J. of Fluids and Structures, Vol. 19, pp. 209–220.
- [7] **BAUER H. F. & CHIBA M., (2000);** Hydroelastic viscous oscillations in a circular cylindrical container with an elastic cover, Journal of Fluids and Structures, Vol. 14, pp.917–936.
- [8] **BAUER H. F. , HSU T .M.&WANG J.T.S, (1968);** Interaction of a sloshing liquid with elastic containers, AIME J .Basic Eng.90(3) pp.373–377.
- [9] **BAUER H. F. & KOMATSU K., (1998);** Vibration of a hydrostatic system consisting of a sector shell and viscous liquid in zero gravity, J. of Fluids and Structures, Vol. 12, pp.367–385.
- [10] **BINJAMIN T.B. & URSELL F., (1954);** The stability of a plane free surface of a liquid in vertical periodic motion ,Proc.R.Soc.Lond.,A 225,505-515.

- [11] **CHAI X. J. GENEVAUX J. M. & BRANCHER J. P., (1996);** Fluid-solid interaction in rectangular container, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, Vol. 15, N°6, pp.865–883.
- [12] **CHEUNG Y. K. & ZHOU D., (2000);** coupled vibratory characteristics of a rectangular container bottom plate, *J. of Fluids and Structures*, Vol. 14. pp. 339–357.
- [13] **CHO J. R. & LEE H. W., (2004);** Numerical study on liquid sloshing in baffled tank by nonlinear finite element method; *Compt. Methods Appl. Mech. Ennerg.* Vol. 193, pp.2581–2598.
- [14] **CHO J. R. & SONG J. M., (2001);** Assessment of classical numerical models for the separate fluid-structure modal analysis, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 239 N° 5, pp.995–1012.
- [15] **COLIN T.,DIAS F.,GHADAGLIA J.M.,(1995);**on rotational effects in the modulations of weakly nonlinear water waves over finite depth .*Eur .J .Mech.*b14.775-793.
- [16]**COLIN T.,DIAS F.,GHIDAGLIA .J .M.,(1996);**On modulations of weakly nonlinear water waves .*contemp .Math*,200,47-56.
- [17] **DEBIANE M., (2005) ;** Contribution à l'étude des ondes de surface, Doctorat d'Etat es-science, Energétiques et Mécanique des Fluides, Faculté de Physique, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne, Alger, Algérie.
- [18] **FALTINSEN O. M., ROGNEBAKKE O. F., LUKOVSKY I. A. & TIMOKHA A.N., (2000);** Multidimensional Modal of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 407, pp.201–234.
- [20] **FALTINSEN O. M., ROGNEBAKKE O. F., TIMOKHA A. N., (2003);** Resonant three – dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 478, pp.1–42.
- [21] **FALTINSEN O. M., & TIMOKHA A. N., (2001);** An adaptive multimodal approach to nonlinear sloshing in a rectangular tank, *J. Fluid Mech.* Vol.432, pp. 167–200.
- [22] **FARADAY M., (1830);** On the form and states assumed by fluids in contacts with vibrating elastic surfaces, *Phyl.Trans.Soc.lond* **121**, pp. 319–340.

- [23] **FRANDSEN J.B., & BORTHWICK A G. L., (2003)**; Simulation of sloshing motions in fixed and vertically excited containers using a 2-d inviscid -transformed finite difference solver, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 18, pp. 197–214.
- [24] **GUPTA R. K. & HUTCHINSON G. L., (1988)**; Free vibration analysis of liquid storage tanks, *J. Sound and Vibration*, Vol. 122, N°3, PP. 491–506.
- [25] **IKEDA T. & NAKAGAWA N., (1997)**; Non-linear vibrations of a structure caused by water sloshing in a rectangular tank, *J. of Sound and Vibrations*, Vol.201, N°1, pp.23–41.
- [26] **IKEDA T. & SHIN M., (2005)**; Autoparametric resonances in a structure/fluid interaction system carrying liquid tank, *Journal of Sound and Vibrations*, Vol.285, N°1, pp.517–546.
- [27] **KARAGIOZIS K.N., AMABILI M., PAIDOUSSIS M.P., MISRA A.K.,(2005)**; Nonlinear vibrations of fluid-filled clamped circular cylindrical shells, *J. of Fluids and Structures*, Vol. 21, pp 579-595.
- [28] **LU D.,TAKIZAWA A. & KONDO S., (1997)**; Overflow induced vibration of a weir coupled with sloshing in a downstream tank, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 11, pp.367–393.
- [29] **LUKE J.C., (1967)**; A variational principal for a fluid with a free surface, *J. Fluid Mech.* N°27, pp.395–397.
- [30] **MILES J.W., (1958)**; Los Angeles, California, *Journal of Applied Mechanics*, A-12, pp.277–283.
- [31] **MODARRES-SADEGHI Y., PAIDOSSIS M.P., SEMLER C., (2005)**; A nonlinear model for extensible slender flexible cylinder subjected to axial flow, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 21, pp. 609–627.
- [32] **NAYFEH.A.H et MOOK.D.T (1979)**; *Nonlineaire oscillations* ed Wiley.
- [33] **PAPASPYROU S., KARAMANOS S. A. & VALOUGEORGIS D., (2004)**; Response of half-full horizontal cylinders under transverse excitation, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 19, pp.985–1003.
- [34] **RAYLEIGH L., (1876)**; On waves, *Phil. Mag.* Vol.5 N°1, pp. 257–279.

- [35] **SHULES R.M.S.M., (1990);** Fluid oscillation in an open, flexible container, Journal of Engineering Mathematics, Vol.24, pp. 237–259.
- [36] **SOEDEL S.M. & SOEDEL W., (1994);** on the free and forced vibration of a plate supporting a freely sloshing surface liquid, J. sound vib., **171**((2), 159-171
- [37] **TIMOSHENKO S., YOUNG D.H. & WEAVER W. Jr., (1974);** Vibration problems in Engineering, Fourth Edition, John Wiley & Sons.
- [38] **ZAKHAROV V. E., (1968);** Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of deep fluid, Zh. Prikl. Mekh. Fiz. 9, 86–94 (English transl.: J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2, 190)