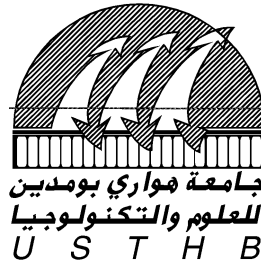


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE-ALGER



FACULTE DE MATHEMATIQUES

THESE

Présentée par

Madame HERNANE née BOUKARI Dahbia

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT D'ETAT EN MATHEMATIQUES

Spécialité : ANALYSE

Option : Equations aux dérivées partielles.

SUR LA STABILITE DES SOLUTIONS DE QUELQUES PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE

Résolution de deux problèmes de mécanique des fluides :
écoulement à frontière libre et convection mixte.

Soutenue publiquement le 7 mai 2005 devant le jury composé de :

Mr Keddour	LEMRAKET	Professeur (U.S.T.H-B)	Président
Mr Mustapha	AMAUCHE	Professeur (Université de Béjaia)	Directeur de thèse
Mr Djamel-Eddine	TENIOU	Professeur (U.S.T.H-B)	Codirecteur de thèse
Mr Malek	BOUHADEF	Professeur (U.S.T.H-B)	Examinateur
Mr Christian	KHARIF	Professeur (IRPHE, Marseille)	Examinateur
Mr Daniel	GANDOLFO	M.D.C habilité (CPT, Marseille)	Examinateur
Mme Assia	LAGHA	M.D.C habilitée (CMI, Marseille)	Examinatrice

Remerciements

Je suis heureuse de pouvoir exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Mustapha AMAOUCHE de l'Université Abderrahmane Mira de Béjaia, pour m'avoir fourni le sujet de cette thèse ainsi que pour son aide scientifique, notamment sur les problèmes de physique. Aussi, je lui exprime toute ma gratitude de m'avoir mise en contact avec une équipe de Physique théorique (CPT) de Luminy (Marseille), avec laquelle je suis en étroite et fructueuse collaboration scientifique .

Je tiens à exprimer toute ma gratitude au Professeur Djamel Eddine TENIOU, pour avoir bien voulu diriger avec beaucoup de patience, mon travail en tant que Codirecteur de thèse, pour sa précieuse aide scientifique, ses encouragements et son soutien moral ainsi que pour ses conseils sans réserve qui m'ont beaucoup motivée ; ils ont énormément contribué à l'aboutissement de cette thèse.

Je le remercie vivement en tant que Directeur de notre Laboratoire, pour avoir mis à notre disposition les moyens nécessaires et a su créer des conditions favorables à un travail de recherche au sein de son groupe de travail.

Je remercie infiniment le Professeur Keddour LEMRABET, pour l'honneur qu'il me fait, en acceptant de présider le jury de cette thèse et pour l'intérêt dont il me témoigne en lisant mon travail.

J'apprécie au plus haut point l'honneur que me fait la première femme Docteur en Mathématiques, en Algérie, en l'occurrence Madame Assia LAGHA, pour s'être intéressée à ce travail et en acceptant de faire partie du Jury de cette thèse en tant qu'examinatrice. Ces encouragements récents et passés, m'ont donné goût à la recherche. Ses nombreux conseils m'ont été d'un réconfort certain pour l'accomplissement de cette tâche.

Que Monsieur Daniel GANDOLFO trouve ici l'expression de ma reconnaissance pour son aide scientifique et matérielle, ses encouragements, ses conseils et sa gentillesse ; sa disponibilité lors de mes différents stages m'étaient d'un très grand intérêt pour l'accomplissement de ce travail, et pour les connaissances en numérique que je lui dois. Je le remercie pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie également le Professeur Malek BOUHADEF en acceptant de consacrer son temps pour lire cette thèse et de participer au jury en tant qu'examineur au vu de la surcharge de travail dûe à ses fonctions.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur le Professeur Christian KHARIF de l'IRPHE, pour s'être intéressé à ce travail, son aide scientifique et pour m'avoir donné l'occasion de rencontrer et de discuter avec le Professeur Efim PELINOVSKY qui m'a aidée à mieux comprendre l'application du problème (ondes de surface) que j'ai étudié dans cette thèse. Je lui exprime ici ma gratitude et je le remercie pour avoir accepté d'être membre de mon Jury.

Je remercie vivement le Professeur Ricardo LIMA, grâce à qui j'ai pu intégrer l'équipe de physique théorique du CPT de Luminy (Marseille). Je lui suis très reconnaissante également pour son aide matérielle qui m'a énormément aidée et motivée pour aller de l'avant dans mon travail de recherche.

Enfin je remercie toute personne physique ou morale qui directement ou indirectement a contribué à l'aboutissement de cette thèse. En particulier le personnel du Secrétariat du CPT, pour sa gentillesse et sa disponibilité.

Table des matières

1	Position du problème et description de quelques méthodes de résolutions.	8
1.1	Introduction.	8
1.2	Position du problème.	8
1.2.1	Description de l'écoulement.	9
1.2.2	Mise en équations.	10
1.2.3	Ecriture adimensionnelle.	11
1.3	Méthode de résolution.	12
1.3.1	Méthode des singularités.	12
1.3.2	Méthode des éléments finis.	12
1.3.3	Description de la méthode utilisée.	12
2	Quelques résultats sur la dérivation par rapport au domaine.	14
2.1	Introduction	14
2.2	Notations et définition de la dérivée par rapport au domaine.	15
2.2.1	Notations.	15
2.2.2	Définition de la dérivée par rapport au domaine.	15
2.3	Lemmes de changement de variables et de dérivation par rapport au domaine.	16
2.4	Dérivation d'une intégrale par rapport au domaine	18
2.4.1	Dérivation par rapport au domaine de la fonction u_t	18
2.4.2	Dérivation par rapport au domaine de l'intégrale $J(\Omega_t)$.	19
3	Etude théorique et numérique de la minimisation de la fonctionnelle d'énergie.	20
3.1	Introduction	20
3.2	Etude théorique de la minimisation de la fonctionnelle d'énergie.	21
3.2.1	Présentation du modèle.	21
3.2.2	Existence d'un domaine optimal.	22
3.3	Dérivation de $E(\Omega)$ par rapport au domaine	25
3.3.1	Dérivabilité par rapport au domaine de v_t	25
3.3.2	Condition d'équilibre.	27
3.4	Etude numérique de la détermination de la frontière libre d'équilibre.	28
3.4.1	Algorithme de la minimisation	28
3.4.2	Calcul numérique de $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ sur (SL) .	30
3.4.3	Organigramme de minimisation.	31
3.4.4	Résultats numériques.	33

TABLE DES MATIÈRES

4	Ecoulement à frontière libre au dessus d'un obstacle. Etude théorique du cas fluvial.	38
4.1	Introduction	38
4.2	The governing equations	39
4.3	Formulation of the problem in stream function	40
4.4	Solution of the free surface problem	42
4.4.1	Differentiability of the operator T_1 with respect to b and γ	44
4.4.2	Inversibility of $\frac{\partial T_1}{\partial \gamma}(0,0)$:	50
4.5	Conclusion	51
5	Influence des effets thermiques sur l'écoulement au point de stagnation bidimensionnel non orthogonal.	57
5.1	Introduction	57
5.2	Nomenclature	58
5.3	Basic equations	59
5.4	The basic flow	60
5.5	Asymptotic behaviour of the basic flow	62
5.6	Linearized disturbance equations	64
5.7	Numerical procedure and results	65
5.8	Conclusion. Partie B	67
5.9	figures et annexes	67
	Bibliographie	76

Introduction générale

Le travail auquel nous nous intéressons est divisé en deux parties distinctes, la première est constituée des quatre premiers chapitres de cette thèse ; elle porte sur l'étude d'un écoulement au dessus d'un obstacle, cette étude permet de mieux comprendre la génération des vagues en zone littorale, leur déferlement ainsi que l'influence des irrégularités de relief sous marin sur les ondes de surface. Dans la deuxième partie, cinquième et dernier chapitre de cette thèse, on étudie un problème de convection mixte ; nous nous intéressons à la détermination des conditions de transition vers l'état 3D d'un écoulement de convection mixte au point de stagnation 2D.

Dans la première partie, nous nous intéressons à un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide parfait incompressible perturbé par un obstacle placé au fond d'un canal hydraulique. Nous tenons compte de la gravité et nous négligeons les effets de tension superficielle. Notons que si le mouvement est irrotationnel au départ, il le reste pour tout le temps ultérieur. Nous supposons que le fond est plat partout sauf en un endroit où se trouve un obstacle. Le fluide occupe un domaine bidimensionnel Ω limité par le haut par une surface libre au dessus de laquelle se trouve l'air et par le bas par le fond du canal de longueur infinie. Nous nous intéressons alors à l'effet perturbateur de l'obstacle sur la frontière libre de l'écoulement. Celui-ci est caractérisé par un paramètre F appelé nombre de Froude que l'on fait apparaître au chapitre 1 après avoir adimensionné les équations gouvernant notre écoulement ; il s'agit d'un écoulement torrentiel si $F > 1$ et fluvial si $F < 1$.

De nombreux mathématiciens et physiciens se sont intéressés à ce type de problème ; une liste de quelques uns de ces auteurs est donnée à la fin de cette thèse. Nous citons quelques auteurs ayant abordé ce sujet, par exemple, M. BOUHAFEF [12], pour un obstacle de faible épaisseur dans un écoulement uniforme, a donné l'équation analytique de la surface libre en utilisant la méthode classique de Fourier et il étudie les ondes non linéaires d'obstacles par une méthode numérique d'éléments finis bidimensionnels, il développe alors un algorithme de résolution basé sur un traitement hyperbolique du problème. BAI [7], utilise une méthode d'éléments finis localisés associés à une méthode de point fixe pour la détermination de la position d'équilibre de la surface libre ; au niveau de celle-ci, les conditions cinématique et dynamique sont regroupées en une seule condition de Fourier faisant intervenir la fonction de courant de perturbation et sa dérivée normale. FORBES et SCHWARTZ [23], résolvent le problème particulier d'un obstacle sous forme d'un demi-cercle en utilisant un potentiel complexe avec une transformation conforme, qui est une généralisation de la transformation de Joukowski ([8]).

L'étude analytique des ondes générées à la surface d'un fluide en mouvement, au dessus d'un obstacle fixe, a débuté avec les travaux de RUSSEL [44] et RAYLEIGH [43]. Ces deux chercheurs ont mis l'accent sur le fait que la forme de la surface libre dépend de la valeur de la vitesse de l'écoulement par rapport à la vitesse critique $(gh)^{1/2}$; en effet, si le nombre de

TABLE DES MATIÈRES

Froude F est inférieur à un, la surface libre est le siège d'oscillations en aval de l'obstacle alors qu'elle se présente sous la forme d'une unique élévation pour un régime d'écoulement torrentiel.

Le problème de la modélisation des ondes de surface, dûes à la présence d'un obstacle dans un écoulement, s'est posé aux bureaux d'études des chantiers navals pour lesquels l'intérêt pratique est évident. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle de nombreux travaux ont été réalisés sur le problème de la résistance à l'avancement d'un navire. L'effet des non linéarités à la surface libre a fait l'objet de nombreux travaux, par exemple TUCK [54], montre l'importance des effets du second ordre sur la résistance à l'avancement d'un cylindre circulaire immergé.

SALVESEN [45] a fait une étude dans laquelle la condition de la surface libre est correctement prise en compte au second ordre alors que la condition de glissement n'est satisfaite qu'au premier ordre sur un obstacle profilé. Une étude comparable a été menée par GIESING et SMITH [24] qui satisfont la condition de glissement sur l'obstacle au second ordre avec une condition de surface libre linéarisée. Aussi SALVESEN [45] satisfait simultanément, au second ordre, la condition de surface libre et celle de glissement, sur des obstacles pouvant posséder un bord de fuite. Il montre alors que lorsque la profondeur d'immersion est faible, les effets non linéaires sont si importants que la prise en compte des termes du troisième ordre peut s'avérer nécessaire. La linéarisation de la condition dynamique à la surface libre peut en effet donner lieu à une sous estimation de la force de trainée. Ainsi, CHAKRABARTI et NAFTZGER [14], en utilisant la théorie non linéaire au cinquième ordre de Stokes, comparent la résistance de vagues obtenue, pour des obstacles profondément immergés, à celle déduite de la théorie linéaire. Ils montrent ainsi que la prise en compte exacte de la condition de Bernoulli à la surface libre a un effet important sur la trainée d'ondes dès que le rapport, de la profondeur du fluide à la hauteur maximale de l'obstacle, est inférieure à deux pour un hémisphère et à quatre pour un demi-cylindre circulaire.

Le cas d'un obstacle posé sur le fond d'un canal a été étudié par KORVING et HERMANS [30] en imposant, à la frontière avale du domaine, une condition d'uniformité du profil des vitesses. Dans un premier temps, ils résolvent un problème de Neumann où seule la condition cinématique à la surface est satisfaite, dans un système de coordonnées curvilignes où l'une d'elles est constante le long de la surface libre et le long du fond du canal perturbé. Une fois la surface libre déterminée, ils calculent le champ des vitesses superficielles qui permet ainsi, pour satisfaire la condition dynamique à la surface libre, de calculer une autre valeur de la côte de cette dernière. Ce système itératif de résolution de problèmes de Neumann successifs est alors poursuivi jusqu'à satisfaire la relation de Bernoulli. Notons que le processus itératif est initialisé par une surface libre sinusoïdale.

La difficulté rencontrée dans la modélisation numérique des ondes d'obstacles réside dans le fait que la surface libre est inconnue, sur laquelle se trouve un terme non linéaire et que le domaine spatial d'étude théoriquement infini, nécessite une troncature en des abscisses finies, tout à fait arbitraires ; ceci nous conduit alors à imposer des conditions aux limites sur les côtes latéraux donnés par ces abscisses. Utilisant quelques résultats expérimentaux, il est cohérent d'imposer une condition de Neumann homogène à droite du domaine pour un écoulement torrentiel, par contre pour un écoulement fluvial, il n'est pas évident de choisir une condition aux limites, car sur ce côté, on ignore si la particule fluide se trouve sur un extremum ou non, c'est la raison pour laquelle, nous avons résolu numériquement notre problème uniquement dans le cas d'un écoulement torrentiel.

ABERGEL et BONA [1], ont étudié un problème à frontière libre où ils perturbent l'écou-

TABLE DES MATIÈRES

lement de Poiseuille pour la détermination de la frontière d'équilibre d'un écoulement au dessus d'un obstacle de hauteur petite placé sur un fond incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.

Utilisant quelques résultats de ce travail, nous avons établi un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème pour un écoulement fluvial ; en collaboration avec le professeur D. TENIOU et Mme R. AIT-YAHIA-DJOUADI, ce travail intitulé " Free surface flow over an obstacle, theoretical study of the fluvial case" a été publié dans la revue "Abstract and Applied Analysis" et constitue le quatrième chapitre de cette thèse.

Nous allons décrire le plan du travail de cette thèse constituée de cinq chapitres et qui est divisée en deux parties A et B.

Dans le premier chapitre, sont données les équations gouvernant l'écoulement auquel nous nous intéressons ; ce dernier est caractérisé par le nombre de Froude F donné par $F = \frac{U}{\sqrt{gH}}$ qui est un nombre sans dimension dont le carré représente le rapport de l'énergie cinétique du liquide en mouvement à l'énergie potentielle de la pesanteur ; H est la hauteur du fluide non perturbé, g l'accélération de la pesanteur et U est la vitesse uniforme du fluide à l'amont loin de l'obstacle. Nous citons quelques méthodes de résolution utilisées dans [5], [6], [17], [31] et [56] ensuite nous terminons ce chapitre par une description de la méthode numérique que nous avons utilisée pour la détermination de la frontière libre d'équilibre de l'écoulement.

Au deuxième chapitre, nous donnons quelques résultats sur la dérivation par rapport au domaine (on pourra consulter [28] et [35]) ; nous avons besoin de définir la notion de la dérivée par rapport au domaine d'une intégrale sur un domaine Ω , par exemple

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} f(u_{\Omega}) dx$$

où u_{Ω} est une fonction qui dépend du domaine Ω et u_{Ω} est solution d'une équation aux dérivées partielles posée sur Ω . Cette notion a déjà été utilisée par SNEYD et MOFFAT [49] pour le formage des métaux liquides et par O. SERO-GUILLAUME [46] pour l'équilibre d'une goutte de ferrofluide [46].

Au troisième chapitre, nous présentons deux parties, la première est théorique, dans celle-ci, nous établissons un résultat d'existence d'un minimum de la fonctionnelle d'énergie totale du système et dans la partie numérique, nous donnons une proposition qui nous fournit un algorithme numérique pour la minimisation de l'énergie du système ; nous représentons sur des figures les résultats issus de notre méthode et là, nous remarquons un très bon accord avec ceux obtenus par M. BOUHADEF [12], FORBES [22], KING et BLOOR [34] et VANDEN BROEK [55] pour des écoulements autour d'obstacles de différentes formes, ceci prouve la validité de notre modèle numérique. Notons que cette méthode de minimisation utilisée uniquement dans la magnétohydrodynamique et la ferrohydrostatique a donné des résultats satisfaisants lors de son application pour la résolution de notre problème d'ondes de surface au dessus d'un obstacle.

Le quatrième chapitre est constitué de l'article cité plus haut et publié en 2001. Dans cette partie, nous ramenons par un changement de variable adéquat, le domaine variable à un rectangle infini, nous choisissons des algèbres et nous appliquons le théorème des fonctions implicites à l'équation de Bernoulli, nous montrons alors pour $F < 1$, l'existence et l'unicité locale de la solution du problème ; notons que le cas d'un écoulement fluvial n'a pas été étudié théoriquement auparavant. Dans cet article, la théorie démontre que cette solution

TABLE DES MATIÈRES

ne présente pas de phénomènes ondulatoires à l'aval de l'obstacle ; si ce type de solution n'a jamais été observé, c'est peut être dû à la difficulté expérimentale de mise en oeuvre.

Un deuxième article intitulé "Influence of thermal convection on non-orthogonal stagnation point flow" fait l'objet du cinquième et dernier chapitre de cette thèse. En collaboration avec le professeur M. AMAUCHE, cet article est publié en 2003 dans la revue "International Journal of Thermal Sciences". Dans ce travail, nous utilisons une méthode pseudo-spectrale de type Aguerrie pour étudier la stabilité linéaire d'un écoulement de convection mixte au point de stagnation non orthogonal. L'écoulement de base résulte de la superposition de l'écoulement classique de Hiemenz et d'un écoulement de cisaillement induit par la poussée d'Archimède et l'effet d'incidence de l'écoulement extérieur. Sa structure s'apparente à celle de l'écoulement observé au point de séparation. Une définition appropriée du nombre de Grashof permet de ramener la détermination des conditions critiques d'apparition d'instabilités tridimensionnelles à celles des conditions critiques relatives à l'écoulement de Hiemenz. Enfin, notons qu'à chaque chapitre, une introduction a été adjointe.

PARTIE A.

Dans cette partie, constituée de quatre chapitres, est posé un problème à frontière libre d'un écoulement au dessus d'un obstacle. Un paramètre F , appelé nombre de Froude de l'écoulement apparaît dans les équations du modèle que nous étudions.

Lorsque celui-ci est supérieur à un, nous montrons en utilisant la dérivation par rapport au domaine, l'existence d'un minimum de la fonctionnelle d'énergie totale du système et nous illustrons les résultats numériques obtenus par des courbes données à la fin du chapitre 3. Dans le cas $F < 1$, nous montrons, en utilisant le théorème des fonctions implicites, un résultat théorique d'existence et d'unicité de la solution du problème.

Chapitre 1

Position du problème et description de quelques méthodes de résolutions.

1.1 Introduction.

L'objectif de ce chapitre est de poser le problème de l'équilibre d'un écoulement plan, irrotationnel et stationnaire d'un fluide parfait incompressible au dessus d'un obstacle noyé au fond d'un canal de longueur infinie . Nous supposons que le fond du canal est partout plat sauf en un endroit où se trouve une bosse (figure 1). Nous tenons compte de la gravité (on note par g l'accélération de la pesanteur) et nous négligeons les effets de tension superficielle. Utilisant les propriétés de l'écoulement et celles du fluide, nous écrivons les équations régissant cet écoulement et en choisissant deux grandeurs caractéristiques, nous écrivons les équations sans dimension et là nous faisons apparaître un paramètre F appelé le nombre de Froude, qui selon sa valeur par rapport à un, décrit la nature de l'écoulement ; il s'agira d'un écoulement torrentiel si $F > 1$ et fluvial si $F < 1$; la valeur $F = 1$ étant une singularité du problème et dans ce cas l'écoulement n'est pas observable physiquement. Notons que l'inconnue principale de notre problème est la frontière libre d'équilibre. La difficulté de notre problème réside dans l'existence d'une ligne de courant inconnue sur laquelle on doit écrire des conditions aux limites à satisfaire ; cette difficulté est surmontée dans quelques cas particuliers, par exemple, on suppose que l'obstacle est de faible épaisseur, ce qui conduit à l'utilisation de la méthode des petites perturbations, où l'on considère des écoulements particuliers pour lesquelles l'équation (1.2.4) donnée en section 1.2 est linéarisée. Nous terminons ce chapitre en décrivant la méthode numérique de minimisation que nous avons utilisée.

1.2 Position du problème.

Dans cette partie, sont données, les équations gouvernant l'écoulement auquel nous nous intéressons. Notons que le problème peut être envisagé indifféremment sous les aspects potentiel de vitesse ou fonction de courant. Nous retrouverons cette équivalence dans le paragraphe (1.2.2).

1.2. POSITION DU PROBLÈME.

1.2.1 Description de l'écoulement.

Nous rappelons que l'écoulement est bidimensionnel, irrotationnel, et stationnaire et que le fluide est parfait et incompressible. A l'infini amont loin de l'obstacle, on supposera que le fluide occupe une hauteur H et possède une vitesse uniforme U . Le plan est rapporté à un système d'axes liés au profil dont l'origine est située au niveau du fond au dessous du sommet de l'obstacle. On désignera par (x, y) les coordonnées d'un point quelconque du domaine fluide où x est la variable horizontale, et y est la variable verticale. La géométrie du problème est la suivante (figure1)

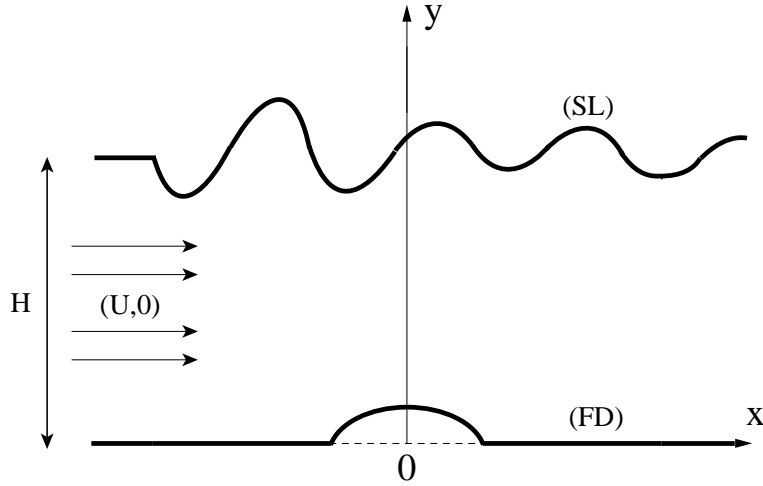


figure1

Le fluide occupe le domaine Ω de \mathbb{R}^2 donné par :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } f(x) < y < H + \eta(x)\}. \quad (1.2.1)$$

$y = f(x)$ est l'équation décrivant la courbe du fond (FD) du canal supposé rigide, $y = H$ est l'équation de la surface libre (SL) au repos et $y = H + \eta(x)$ son équation en présence d'un obstacle, $\eta(x)$ étant l'inconnue principale du problème

Le fond et la surface libre de Ω constituent des lignes de courant, c'est à dire qu'une particule fluide se trouvant sur une de ces lignes ne quitte pas cette dernière, cette hypothèse appelée condition cinématique traduit l'imperméabilité des frontières du domaine fluide et s'exprime par la nullité du produit scalaire suivant :

$$\nabla \mathfrak{S} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.2.2)$$

où

$$\mathfrak{S}(x, y) = \begin{cases} y - H - \eta(x) & \text{si } (x, y) \text{ est un point de la surface libre} \\ y - f(x) & \text{si } (x, y) \text{ est un point du fond} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

et ψ est la fonction de courant décrivant la vitesse d'une particule fluide et qui sera définie dans le paragraphe suivant. La condition dynamique est donnée par la continuité de la pression au travers de la surface libre. Elle s'exprime par :

$$\frac{\rho}{2}|V|^2 + \rho gy = C^{te} \text{ sur la surface libre de } \Omega. \quad (1.2.4)$$

1.2. POSITION DU PROBLÈME.

ρ étant la densité du fluide et V est le vecteur vitesse de la particule fluide.

1.2.2 Mise en équations.

L'écoulement étant irrotationnel, il existe une fonction $\phi(x, y)$ que nous appellerons potentiel des vitesses telle que :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} ; v = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (1.2.5)$$

u étant la composante horizontale de la vitesse V et v sa composante verticale.

L'écoulement étant uniforme en amont de l'obstacle, donc irrotationnel, il le restera partout dans le fluide, on en déduit que la fonction ϕ est harmonique :

$$\Delta \phi = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (1.2.6)$$

Il est alors possible d'introduire une autre fonction harmonique ψ sur le domaine Ω telle que $\phi + i\psi$ est une fonction holomorphe de $z = x + iy$.

Cela signifie que ϕ et ψ satisfont les conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + i \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (1.2.7)$$

La fonction ψ est appelée fonction de courant car ψ est constante le long d'une ligne de courant.

Examinons maintenant le sens mathématique de la relation (1.2.2) ; celle-ci signifie que la dérivée tangentielle de ψ est nulle sur la surface libre et sur le fond de Ω , ceci nous permet d'écrire :

$$\psi = C^{te} \text{ aussi bien sur la surface libre que sur le fond de } \Omega.$$

Les constantes intervenant dans la relation précédente ne sont pas essentielles, mais par contre la différence entre ces deux valeurs prises à la surface libre et sur le fond l'est.

On peut fixer arbitrairement la valeur de ψ sur le fond, par exemple

$$\psi(x, f(x)) = 0 \quad (1.2.8)$$

mais alors la valeur de ψ sur la surface libre n'est plus arbitraire et demande à être déterminée. Aussi interviennent les conditions à l'infini qu'il importe de rajouter aux équations (1.2.4), (1.2.6) et (1.2.8) pour avoir un problème bien posé physiquement et mathématiquement.

Nous rappelons que le fluide se déplace de la gauche vers la droite (c'est à dire vers les x croissants) et nous nous imposons que le mouvement du fluide soit asymptotiquement uniforme en amont. Nous avons alors à l'infini amont de l'obstacle :

$$\psi = Uy \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \eta(x) = 0 \quad (1.2.9)$$

Par contre à l'aval, il n'existe pas de condition supplémentaire, seulement la vitesse et la côte de la surface libre doivent y être bornées.

1.2. POSITION DU PROBLÈME.

En vertu des relations (1.2.8) et (1.2.9) la valeur de ψ sur la surface libre satisfait nécessairement à

$$\psi = UH \quad (1.2.10)$$

qui n'est rien d'autre que le débit du fluide à l'infini amont. Soient (SL) et (FD) les courbes décrivant respectivement la surface libre et le fond de Ω , en récapitulant toutes ces équations, voici donc posé notre problème :

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \psi = UH & \text{sur } (SL) \\ \psi = 0 & \text{sur } (FD) \end{cases} \quad (1.2.11)$$

et

$$\frac{\rho}{2}|\nabla\psi|^2 + \rho gy = C^{te} \text{ sur } (SL). \quad (1.2.12)$$

Nous écrivons dans la section suivante, sous forme adimensionnelle, le problème à résoudre ainsi que l'expression de l'énergie totale du système.

1.2.3 Ecriture adimensionnelle.

En choisissant comme grandeurs caractéristiques U et H , nous posons :

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{H} \\ y^* &= \frac{y}{H} \\ \psi^*(x^*, y^*) &= \frac{\psi(x, y)}{UH} \end{aligned}$$

et le problème (1.2.11)-(1.2.12) (en enlevant les astérisques) devient :

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \psi = 1 & \text{sur } (SL) \\ \psi = 0 & \text{sur } (FD) \end{cases} \quad (1.2.13)$$

$$\frac{F^2}{2}|\nabla\psi|^2 + y(x) = C^{te} \text{ sur } (SL). \quad (1.2.14)$$

F étant le nombre de Froude de l'écoulement donné par $F = \frac{U}{\sqrt{gH}}$.

De plus, quand x tend vers $-\infty$, $\eta(x)$ tend vers 0 ; et quand x tend vers ∞ , $\eta(x)$ est bornée. Lorsque $F > 1$, la solution du problème pour un fond plat correspond à $\eta = 0$ et $\psi = y$; ceci nous permet d'évaluer la constante figurant dans la relation (1.2.14) ; elle vaut $1 + \frac{F^2}{2}$. D'autre part, l'énergie totale de l'écoulement est constituée de la somme de deux énergies ; elle est donnée par :

$$E(\Omega) = \frac{F^2}{2} \iint_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx dy + \iint_{\Omega} y dx dy \quad (1.2.15)$$

1.3. MÉTHODE DE RÉOLUTION.

où

$$\frac{F^2}{2} \iint_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx dy \quad (1.2.16)$$

est l'énergie cinétique du système et

$$\iint_{\Omega} y dx dy \quad (1.2.17)$$

est son énergie potentielle.

1.3 Méthode de résolution.

Plusieurs méthodes de calcul ont été mises au point pour résoudre ce problème aux limites. Nous citons deux méthodes utilisées par quelques auteurs ensuite nous exposons la méthode que nous avons utilisée.

1.3.1 Méthode des singularités.

C'est une méthode classique pour la résolution des problèmes aux limites linéaires consistant à remplacer, au point de vue cinématique, un obstacle dans un écoulement de fluide parfait, par une distribution de singularités (sources, doublets, dipôles). Cette méthode a le gros avantage de satisfaire implicitement les conditions de rayonnement à l'infini et de ne nécessiter, du point de vue informatique, qu'un faible encombrement mémoire. Cependant, le travail analytique, précédant la programmation sur ordinateur, est délicat et nécessite des calculs assez laborieux d'intégrales dans le plan complexe. On pourra se référer à l'ouvrage de WEHAUSEN et LAITONE [56].

1.3.2 Méthode des éléments finis.

Dans le problème des ondes générées par la présence d'obstacles, la méthode des éléments finis a été appliquée pour la première fois par BAI [5]. Le domaine à discrétiser étant théoriquement non borné, il est tronqué avec des conditions adéquates aux frontières verticales ainsi délimitées. La méthode des éléments finis est alors appliquée dans un domaine limité par deux plans verticaux, l'un en amont de l'obstacle, l'autre en aval, le plan de la surface libre non perturbée, le fond et le corps. Au delà de ces plans, la solution est représentée par une série de fonctions analytiques régulières élémentaires connues. Cette méthode due à BAI [5] et YEUNG [6], et appliquée également par CHENOT [17], assure un bon traitement des conditions de rayonnement à l'infini. Une autre méthode, permettant de ramener le calcul dans un domaine illimité à celui d'un domaine borné, a été proposée par JAMI et LENOIR [31] qui couplent une méthode d'éléments finis à une représentation intégrale.

Dans le paragraphe suivant, nous décrivons la méthode que nous utilisons pour la détermination de la frontière libre d'équilibre.

1.3.3 Description de la méthode utilisée.

La résolution numérique de notre problème nous a amené à limiter le domaine Ω à gauche et à droite loin de l'obstacle, on est donc amené à imposer des conditions aux limites sur

1.3. MÉTHODE DE RÉOLUTION.

ces côtés. Notons que la condition à imposer latéralement n'est évidente que dans le cas d'un écoulement torrentiel, et c'est pour cette raison que nous avons traité numériquement, seulement le cas torrentiel, ceci est justifié par des résultats expérimentaux décrivant le comportement de la surface libre, On constate :

- une unique élévation au dessus de l'obstacle puis retour graduel au niveau non perturbé ($y = 1$) si l'écoulement amont est torrentiel ($F > 1$).

- une dépression au voisinage de l'obstacle, suivie ou non d'un système d'ondes, si l'écoulement est fluvial ($F < 1$) rendant délicat le choix d'une condition au bord à l'aval.

Comme conséquences de ces limitations, la méthode que nous utilisons pour résoudre ce problème ne s'applique que pour des valeurs du nombre de Froude supérieures à un, il est donc naturel d'imposer dans ce cas une condition de Neumann du type :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{en} \quad x = L \quad \text{et} \quad x = -L \quad \text{où} \quad L \in \mathbb{R} \quad (1.3.18)$$

ou encore

$$\psi = y \quad \text{en} \quad x = -L \quad (1.3.19)$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{en} \quad x = L \quad (1.3.20)$$

Nous utilisons une approche variationnelle sur l'équilibre de la surface libre. Le domaine Ω occupé par le fluide, constitue une position d'équilibre si l'énergie correspondante est extrême. L'énergie $E(\Omega)$ est donc une fonctionnelle du domaine. l'idée essentielle de la méthode est d'introduire une petite perturbation du domaine et d'examiner ensuite la variation de l'énergie, ce qui conduit à la notion de dérivée par rapport au domaine (quelques détails sur cette notion sont donnés au deuxième chapitre). Cette méthode a été développée par MURAT et SIMON [42] dans un cadre général et par O-SERO-GUILLAUME [46] dans le cadre de la ferrohydrostatique.

La surface libre d'équilibre $\partial\Omega$ du domaine Ω est celle qui minimise la fonctionnelle d'énergie totale $E(\Omega)$. A l'aide de l'algorithme suivant, nous cherchons ce minimum avec la contrainte imposée sur la conservation de l'aire.

Soit Ω_0 un domaine initial, après k déformations de la surface de l'écoulement, le domaine Ω_k est limité par la surface libre $\partial\Omega_k$. Le domaine Ω_{k+1} est alors obtenu à partir de $\partial\Omega_k$ par le déplacement V_{k+1} qui, sous certaines conditions, assure une minimisation de l'énergie totale du système (voir le troisième chapitre), ainsi

$$\partial\Omega_{k+1} = \partial\Omega_k + V_{k+1}(x) \quad (1.3.21)$$

x étant un point de $\partial\Omega_k$.

Nous donnons au troisième chapitre, l'organigramme utilisé pour la détermination de la surface libre d'équilibre.

Chapitre 2

Quelques résultats sur la dérivation par rapport au domaine.

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, sont exposés dans un cadre général quelques résultats sur la notion de la dérivation par rapport au domaine. Ces résultats seront formulés par des lemmes dont la démonstration est donnée dans [46]. La dérivation par rapport au domaine est rencontrée dans la résolution de certains problèmes à frontière libre, dits surdéterminés au sens où en plus de l'équation d'état, qui est un problème bien posé, apparaît une équation supplémentaire que doit vérifier la solution du problème sur le bord du domaine qui est aussi une inconnue du problème (signalons qu'une méthode de ce type a été développée dans [49] à propos des métaux liquides).

Dans [41], Masmoudi montre que la méthode du Lagrangien utilisée avec la dérivée matérielle se prête facilement à une justification mathématique et donne, de ce fait, un moyen fiable pour calculer la dérivée par rapport à des variations de domaine. Aussi, il montre que l'expression de la dérivée matérielle de la fonctionnelle considérée donne lieu à un calcul très précis du gradient, dans le cadre de la méthode des éléments finis (de volume). Dans [46], O.Séro Guillaume utilise la dérivée par rapport au domaine pour étudier un joint liquide, en particulier pour connaître sa stabilité.

Dans notre cas, nous utilisons cette dérivée pour la minimisation de la fonctionnelle de l'énergie totale $E(\Omega)$ du système ; l'idée est de déformer légèrement le domaine Ω par une application $T = Id + \theta$ où Id est l'application identité de \mathbb{R}^2 et θ un champ de vecteurs de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et de norme petite ensuite d'examiner si l'énergie a varié autour de ce domaine. On peut écrire l'intégrale $E(\Omega_t) = E(T(\Omega))$ sur le domaine $T(\Omega)$, par un changement de variable dans l'intégrale, ramener $E(\Omega_t)$ à une intégrale sur le domaine fixe Ω , seul l'intégrand dans E dépend de θ , on peut alors différentier par rapport à θ , en $\theta = 0$, on obtient alors, ce qu'on appelle dérivée de E par rapport au domaine et qui est notée $dE(\Omega, V)$, car l'on applique cette différentielle (ici une forme linéaire sur un espace fonctionnel) à un champ de vecteur V représentant les déplacements admissibles. Dans notre problème, nous avons perturbé le domaine fluide Ω par un champ de vecteur à un paramètre, soit $T = Id + tV$, t étant un réel petit et V est un champ de déformation appartenant à un espace qu'on précisera dans la suite.

Notons que cette relation est analogue à la formule de dérivation particulière (ou matérielle) d'intégrale où t est le temps et V est un champ de vitesse indépendant du temps. On peut

2.2. NOTATIONS ET DÉFINITION DE LA DÉRIVÉE PAR RAPPORT AU DOMAINE.

écrire :

$$dE(\Omega, V) = \frac{d}{dt}[E(I + tV)(\Omega)]_{t=0} \quad (2.1.1)$$

Le plan de ce chapitre est :

- 1) Notations et définition de la dérivée par rapport au domaine.
- 2) Lemmes de changement de variables et de dérivation par rapport au domaine.
- 3) Dérivation d'une intégrale par rapport au domaine.

2.2 Notations et définition de la dérivée par rapport au domaine.

2.2.1 Notations.

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et T un vecteur de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Si y représente un point de Ω , on pose $x = T(y)$ et x parcourt $\Omega_t = T(\Omega)$; le bord de $T(\Omega)$ sera noté $\partial(T(\Omega))$.

On pose : $T(y) = y + tV(y) = (Id + tV)(y)$ où V sera le champ de déplacements, et on choisira comme espace des déplacements admissibles, l'espace :

$$E_{da} = \{V \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) / Id + tV \text{ soit un difféomorphisme} \}$$

On introduit de plus, les espaces habituels :

$L^p(\Omega)$: ensemble des fonctions mesurables de puissance $p^{i\text{ème}}$ sommables.

$H^1(\Omega)$: ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées premières (au sens des distributions) sont dans $L^2(\Omega)$.

$W^{m,p}(\Omega)$: ensemble des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées $m^{i\text{ème}}$ (au sens des distributions) sont dans $L^p(\Omega)$.

On notera T' la matrice jacobienne de T , T'^{-1} son inverse et T'^t sa transposée.

2.2.2 Définition de la dérivée par rapport au domaine.

La dérivation par rapport au domaine est en général utilisée dans des problèmes dits à frontière libre (c'est le cas que nous étudions dans ce travail) ou dans ceux d'optimum design, ils s'écrivent de la façon suivante :

Trouver un domaine Ω qui minimise la fonctionnelle :

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} f(u) dy \quad (2.2.2)$$

où u est solution d'un système d'équations aux dérivées partielles posé sur Ω c-à-d :

$$\mathcal{F}(y, u) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.2.3)$$

$$\mathcal{G}(y, u) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (2.2.4)$$

Il est donc nécessaire de disposer de la dérivée ou plus précisément de la différentielle de la fonctionnelle J , et c'est là où réside la difficulté; En effet, pour des raisons évidentes, on a l'habitude de ne définir une notion de différentiabilité, que dans des espaces vectoriels (normés de surcroît). Or l'ensemble des ouverts ou des domaines de \mathbb{R}^n n'est pas muni d'une telle structure d'espace vectoriel, il faut donc contourner cette difficulté. L'idée est de définir

2.3. LEMMES DE CHANGEMENT DE VARIABLES ET DE DÉRIVATION PAR RAPPORT AU DOMAINE.

un champ de déplacement ou de déformation V tel qu'il a été défini au paragraphe (2.2.1) et de considérer les quotients du type :

$$\frac{J(\Omega_t) - J(\Omega)}{t} \quad (2.2.5)$$

ensuite passer à la limite quand $t \rightarrow 0$. On s'est donc ramené à étudier des dérivées de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , ce qui est à rapprocher de la notion de dérivabilité au sens de Gâteaux, d'où la définition suivante :

Définition 2.1. *On appelle dérivée par rapport au domaine de J au point Ω , suivant la direction de déformation V , la limite notée $dJ(\Omega, V)$, si elle existe*

$$dJ(\Omega, V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(\Omega_t) - J(\Omega)}{t} \quad (2.2.6)$$

Notons que pour pouvoir calculer cette éventuelle dérivée, il va falloir avant tout dériver par rapport au domaine la fonction u_t vérifiant le système :

$$\mathcal{F}(y, u_t) = 0 \quad \text{dans } \Omega_t \quad (2.2.7)$$

$$\mathcal{G}(y, u_t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_t \quad (2.2.8)$$

Or les fonctions u_t ne sont pas définies sur le même ouvert, on ne peut donc pas considérer aussi facilement des quotient différentiels du type (2.2.5). Nous allons contourner cette difficulté de la manière suivante :

Soit K un compact inclus dans Ω , alors par définition de Ω_t , on a $K \subset \Omega_t$ pour t assez petit, les fonctions u_t ainsi que la fonction u sont ainsi définies sur K . On peut alors étudier la dérivabilité de la fonction $t \rightarrow u_t|_K$ et ceci pour tout compact K . Comme Ω est la réunion de tels compacts, on voit qu'ainsi u' donnée par :

$$u' = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_t - u}{t} \quad (2.2.9)$$

est bien définie sur l'ouvert Ω tout entier.

2.3 Lemmes de changement de variables et de dérivation par rapport au domaine.

Dans ce paragraphe, nous allons énoncer quelques lemmes de changement de variables et de dérivation par rapport au domaine.

Lemme 2.2. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $T \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ et $1 \leq p < \infty$, nous avons :*

i) $f \in L^p(T(\Omega))$ si et seulement si $f \circ T \in L^p(\Omega)$, de plus

$$\int_{T(\Omega)} f dx = \int_{\Omega} f \circ T |\det T'| dy$$

ii) $(grad f) \circ T = (T'^t)^{-1} grad(f \circ T)$

2.3. LEMMES DE CHANGEMENT DE VARIABLES ET DE DÉRIVATION PAR RAPPORT AU DOMAINE.

Donnons par exemple la démonstration du point ii).

Démonstration. (ii)

f est une application de $T(\Omega)$ dans \mathbb{R}

$$x \in T(\Omega) \rightarrow f(x)$$

or $x = T(y)$ avec $y \in \Omega$, donc $(grad f) \circ T$ est le vecteur de composantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad i = 1, 2$$

Mais on a

$$f(x) = f(T(y)) = \tilde{f}(y)$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

Or T' est la matrice dont les éléments sont :

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$$

Donc $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$ représente l'élément de la matrice $(T'^t)^{-1}$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_j}$ est la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur $grad(f \circ T)$, d'où

$$(grad f) \circ T = (T'^t)^{-1} grad(f \circ T)$$

□

Lemme 2.3. *L'application $T \rightarrow |\det T'|$ est dérivable de E_{da} (E_{da} étant un ouvert) dans $C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ pour tout T et on a :*

$$\forall \tau \in E_{da} \quad \frac{\partial}{\partial T} [|\det T'|] \cdot \tau = \{(\text{div}(\tau \circ T^{-1})) \circ T\} |\det T'|$$

Lemme 2.4. *Soient Φ une fonction fixée de $H^1(B)$, B étant l'ouvert donné au chapitre 3 par la figure 3 (resp. $L^2(B)$) et Q un ouvert régulier avec \overline{Q} inclus dans B .*

Alors l'application qui à t réel associe $\Phi \circ (Id + tV)|_Q$ (la restriction à Q de $\Phi \circ (Id + tV)$) est dérivable dans $L^2(Q)$ (resp. $H^{-1}(Q)$) et a pour dérivée

$$\frac{d}{dt} \Phi \circ (Id + tV)|_{t=0} = \nabla \Phi \cdot V$$

Démonstration. On pourra consulter le chapitre 5 de [28]

□

Lemme 2.5. *L'application $T \rightarrow T'^{-1}$ est dérivable pour tout $T \in E_{da}$, et on a $\forall \tau \in E_{da}$:*

$$\frac{\partial}{\partial T} (T'^{-1}) \cdot \tau = -T'^{-1} \tau' T'^{-1}$$

2.4 Dérivation d'une intégrale par rapport au domaine

Comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction, nous avons besoin de calculer la dérivée par rapport au domaine de la fonction u_t pour évaluer celle de l'intégrale définie par :

$$J(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} f(u_{\Omega_t}) dx$$

2.4.1 Dérivation par rapport au domaine de la fonction u_t

Dans tout le paragraphe, Ω désigne un ouvert lipschitzien. On note $\Omega_t = (Id + tV)(\Omega)$ et nous considérons un opérateur différentiel A linéaire ou non-linéaire, à coefficients constants ou non et supposons que, pour tout ouvert Ω' voisin de Ω

$$A \text{ envoie continûment } W^{1,p}(\Omega') \text{ dans } D'(\Omega') \quad (1 \leq p < \infty) \quad (2.4.10)$$

$$\text{et } A \text{ est différentiable de } L^p(\Omega') \text{ dans } D'(\Omega'). \quad (2.4.11)$$

La différentiabilité évoquée ci-dessus signifie simplement que pour toute fonction $\varphi \in D'(\Omega')$, l'application $v \rightarrow \langle A(v), \varphi \rangle_{D' \times D}$ est différentiable, et nous noterons $\frac{\partial A}{\partial u}$ la différentielle de cette application au point $u = u_0$ qui est donc une application linéaire continue de $L^p(\Omega)$ dans $D'(\Omega)$. On se donne une distribution f sur \mathbb{R}^N et on considère une fonction u_t appartenant à l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega_t)$ et solution de l'équation aux dérivées partielles

$$A(u_t) = f \quad \text{dans } \Omega_t. \quad (2.4.12)$$

Considérons également un opérateur différentiel B linéaire ou non-linéaire, à coefficients constants ou non et supposons que, pour tout ouvert Ω' voisin de Ω

$$B \text{ envoie continûment } W^{1,p}(\Omega') \text{ dans } W^{1,1}(\Omega') \quad (2.4.13)$$

$$\text{et } B \text{ est différentiable de } L^p(\Omega') \text{ dans } D'(\Omega'). \quad (2.4.14)$$

On se donne une fonction g appartenant à $W^{2,1}(\mathbb{R}^N)$ et on suppose que la fonction u_t vérifie la condition au bord

$$B(u_t) = g \quad \text{sur } \partial\Omega_t. \quad (2.4.15)$$

On suppose enfin que l'application

$$t \rightarrow u_t \circ (Id + tV) \text{ est dérivable en } t = 0 \text{ à valeurs dans } W^{1,p}(\Omega), \quad (2.4.16)$$

l'application

$$t \rightarrow B(u_t) \circ (Id + tV) \text{ est dérivable en } t = 0 \text{ à valeurs dans } W^{2,1}(\Omega). \quad (2.4.17)$$

et

$$B(u_0) \in W^{2,1}(\Omega) \quad (2.4.18)$$

On a alors (voir [28])

Théorème 2.6. *Supposons que $u_t \in W^{1,p}(\Omega_t)$ soit solution de*

$$\begin{cases} A(u_t) = f & \text{dans } \Omega_t \\ B(u_t) = g & \text{sur } \partial\Omega_t \end{cases}$$

Avec A et B vérifiant (2.4.10), (2.4.11), (2.4.13) et (2.4.14). Supposons de plus que $t \rightarrow u_t$ satisfait (2.4.16), (2.4.17) et (2.4.18). Alors $t \rightarrow u_t$ est dérivable à l'origine et sa dérivée u' définie par (2.2.9) vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial u} u' = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial B}{\partial u} u' = -\frac{\partial}{\partial n}(B(u_0) - g)V.n & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4.19)$$

2.4.2 Dérivation par rapport au domaine de l'intégrale $J(\Omega_t)$.

Considérons l'intégrale définie par (2.2.2); On prendra donc u_Ω dans un certain espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$. La fonction f désignera une fonction ou un opérateur différentiel défini sur $W^{m,p}(\Omega')$ pour tout domaine Ω' proche de Ω et à valeurs dans $L^1(\Omega')$. On a alors (voir [28]) :

Théorème 2.7. *On suppose que l'ouvert Ω est lipschitzien et on note Γ son bord. On suppose que l'application $t \rightarrow u_{\Omega_t}$ est dérivable à l'origine dans $W^{m-1,p}(\Omega')$ et que la dérivée $u' \in W^{m-1,p}(\Omega)$. On suppose que f est différentiable de $W^{m-1,p}(\Omega')$ dans $L^1(\Omega')$, on note $f'[u]$ sa différentielle en un point u . On suppose enfin que $f'(u_\Omega)$ possède une trace qui est dans $L^1(\Gamma)$. Alors la fonction de \mathbb{R} dans $\mathbb{R} : t \rightarrow J(u_{\Omega_t})$ est dérivable à l'origine et sa dérivée est donnée par :*

$$dJ(\Omega, V) = \int_{\Omega} f'[u_\Omega](u') dx + \int_{\Gamma} f(u) V.n d\sigma. \quad (2.4.20)$$

Démonstration. On procède par un changement de variable pour se ramener au domaine fixe. On a :

$$J(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} f(u_{\Omega_t}) dx = \int_{\Omega} f(u_{\Omega_t} \circ (Id + tV)) \det(Id + tV)' dy. \quad (2.4.21)$$

La dérivabilité de la fonction $t \rightarrow u_{\Omega_t}$ entraîne celle de $t \rightarrow u_{\Omega_t} \circ (Id + tV)$ et plus précisément, la dérivée à l'origine de cette dernière fonction vaut $u' + \nabla u_\Omega.V$. Comme par ailleurs $t \rightarrow \det(Id + tV)'$ est dérivable à l'origine de dérivée $divV$, les règles usuelles de dérivation (produit, composée, intégrale) montrent que $t \rightarrow J(u_{\Omega_t})$ est dérivable à l'origine de dérivée

$$dJ(\Omega, V) = \int_{\Omega} f'[u_\Omega](u' + \nabla u_\Omega.V) dx + \int_{\Omega} f(u_\Omega) divV dx. \quad (2.4.22)$$

Or $f'[u_\Omega](\nabla u_\Omega.V) + f(u_\Omega)divV$ n'est autre que $div(Vf(u_\Omega))$ et la formule (2.4.20) se déduit immédiatement de (2.4.22) par une intégration par parties. \square

Chapitre 3

Etude théorique et numérique de la minimisation de la fonctionnelle d'énergie.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons un résultat d'existence d'un minimum de la fonctionnelle d'énergie totale du système, nous montrons que cette dernière est dérivable par rapport au domaine et l'expression de sa dérivée nous fournit un algorithme numérique qu'on donne au paragraphe (3.4.3) pour la détermination de la frontière libre d'équilibre. Nous illustrons les résultats numériques obtenus par quelques courbes données à la fin de ce chapitre. Le domaine fluide est représenté par un ouvert borné de \mathbb{R}^2 (voir figure 2) obtenu à partir de la figure 1 du chapitre 1 en faisant une troncature latérale à gauche et à droite du domaine fluide initial, il est défini par :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -L < x < L, 0 \leq b(x) < y < H + \eta(x)\} \quad (3.1.1)$$

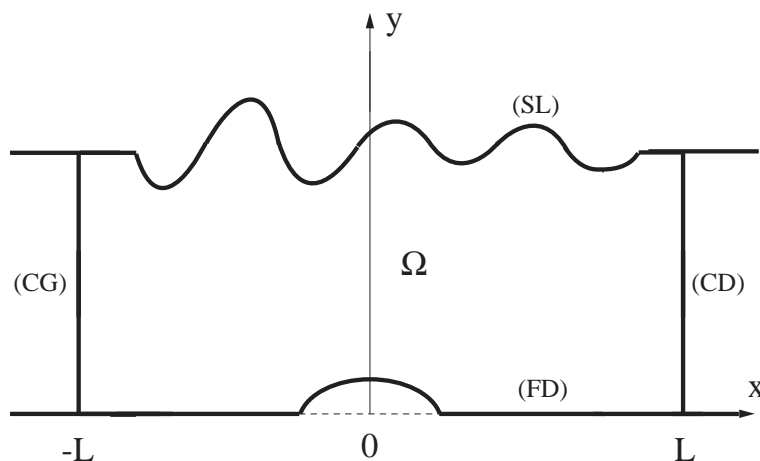


figure 2

où $y = b(x)$ est l'équation du fond, $y = H + \eta(x)$ ($\eta(x)$ inconnue), celle de la frontière libre (SL) et (CD), (CG) sont les côtés latéraux donnés par la troncature.

3.2 Etude théorique de la minimisation de la fonctionnelle d'énergie.

Dans ce paragraphe, nous présentons le cadre fonctionnel de minimisation de la fonctionnelle d'énergie.

3.2.1 Présentation du modèle.

La fonctionnelle à minimiser est l'énergie totale du système donnée par :

$$E(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx dy + \int_{\Omega} y dx dy. \quad (3.2.2)$$

ψ vérifiant le système :

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \psi = 1 & \text{sur } (SL) \\ \psi = 0 & \text{sur } (FD) \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 & \text{sur } (CD) \cup (CG) \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Nous rappelons que les conditions au bord imposées sur les côtés latéraux (CD) d'équation $x = L$ et (CG) d'équation $x = -L$ ont été justifiées au chapitre 1. La contrainte ψ n'étant pas nulle, nous allons moyennant un relèvement rendre le système homogène en les conditions initiales.

Soit w dans $H^2(\mathbb{R}^2)$ tel que

$$\begin{cases} w = 1 & \text{sur un voisinage de } (SL) \\ w = 0 & \text{sur } (FD) \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{sur } (CD) \cup (CG) \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Nous faisons remarquer que la forme de l'ouvert Ω permet l'existence d'un tel w .

On pose : $v = \psi - w$, alors v vérifie

$$\begin{cases} \Delta v = -\Delta w & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } (SL) \cup (FD) \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } (CD) \cup (CG) \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Nous considérons alors la nouvelle fonctionnelle d'énergie encore notée $E(\Omega)$:

$$E(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dy + \int_{\Omega} y dx dy. \quad (3.2.6)$$

Maintenant, nous exposons la démarche nous permettant d'établir un résultat d'existence d'un minimum de cette fonctionnelle.

Soit B un ouvert de \mathbb{R}^2 (voir figure 3) défini à partir de Ω par :

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -L < x < L, b(x) < y < 2\} \quad (3.2.7)$$

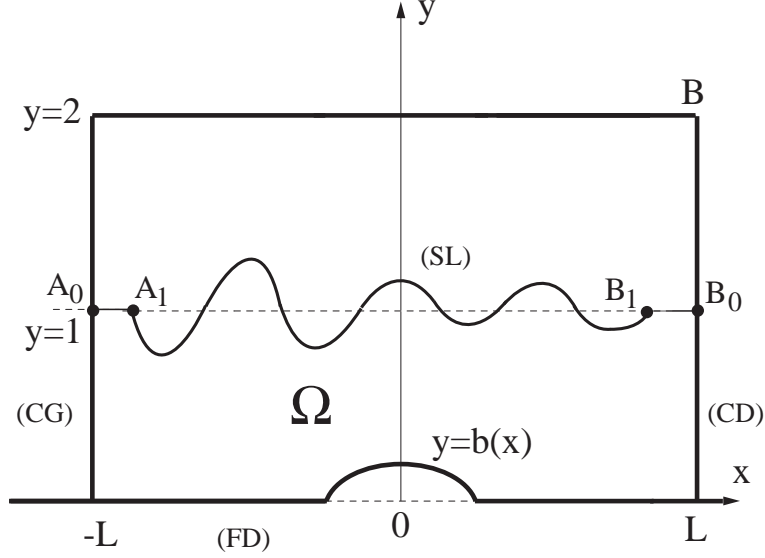


figure 3

On a : $\{\Omega \cup (SL)\} \subset B$, soit τ l'ensemble des bijections T de B qui sont dans $(W^{1,\infty}(B))^2$ ainsi que leurs inverses. Soit τ_{ad} un sous ensemble de τ , compact pour la topologie *faible** de $(W^{1,\infty}(B))^2$. Nous supposons que lorsque T agit sur Ω , les côtés latéraux et le fond restent fixes ; nous supposons que la surface libre (SL) reste horizontale lorsqu'on s'écarte de ϵ du point A_0 et que la déformation ne commence éventuellement qu'à partir du point A_1 ; l'hypothèse $F > 1$ permet ainsi de supposer que la frontière (SL) redevient horizontale à partir de B_1 avec la même hauteur 1 qu'en amont. Notons par $(SL)_T = T[(SL)]$ la surface libre déformée et $\Omega_T = T(\Omega)$ le domaine déformé.

On définit l'ensemble Ω_{ad} des contrôles admissibles comme celui des images Ω_T de Ω quand T parcourt τ_{ad} . Aussi nous définissons l'état v_T du système pour l'ouvert Ω_T , c-à-d pour le contrôle T nous avons le système :

$$\begin{cases} \Delta v_T = -\Delta w & \text{dans } \Omega_T \\ v_T = 0 & \text{sur } (SL) \cup (FD) \\ \frac{\partial v_T}{\partial n} = 0 & \text{sur } (CD) \cup (CG) \end{cases} \quad (3.2.8)$$

dont la formulation variationnelle est :

$$\begin{cases} v_T \in \mathcal{H}(\Omega_T) \\ \int_{\Omega_T} \nabla v_T \nabla \varphi = \int_{\Omega_T} \Delta w \varphi \quad \varphi \in \mathcal{H}(\Omega_T) \end{cases} \quad (3.2.9)$$

où

$$\mathcal{H}(\Omega_T) = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } (SL) \cup (FD)\}$$

3.2.2 Existence d'un domaine optimal.

Théorème 3.1. *Il existe un élément $T_0 \in \tau_{ad}$ qui réalise le minimum de $E(\Omega)$.*

3.2. ÉTUDE THÉORIQUE DE LA MINIMISATION DE LA FONCTIONNELLE D'ÉNERGIE.

Démonstration. Soit (T_n) une suite minimisante, τ_{ad} étant compact pour la topologie faible* de $(W^{1,\infty}(B))^2$, on peut extraire une sous suite (encore notée (T_n)) telle que :

$$\begin{cases} T_n \rightarrow T_0 & \text{dans } (W^{1,\infty}(B))^2 \text{ faible}^*, T_0 \in \tau_{ad} \\ T_n \rightarrow T_0 & \text{converge uniformment sur } B \end{cases} \quad (3.2.10)$$

et telle que, si l'on note χ_Ω la fonction indicatrice de Ω , alors

$$\chi_{\Omega_{T_n}} \rightarrow \chi_{\Omega_{T_0}} \quad \text{dans } L^\infty(B) \text{ faible}^* \quad (3.2.11)$$

On note \tilde{v}_{T_n} le prolongé de v_{T_n} par zéro en dehors de Ω_{T_n} , soit :

$$\tilde{v}_{T_n} = \begin{cases} v_{T_n} & \text{dans } \Omega_{T_n} \\ 0 & \text{dans } B - \Omega_{T_n} \end{cases} \quad (3.2.12)$$

on a $\tilde{v}_{T_n} \in H^1(B)$, de plus on a :

$$\|\tilde{v}_{T_n}\|_{H^1(B)} = \|v_{T_n}\|_{H^1(\Omega_{T_n})} \leq \|\Delta w\|_{L^2(\Omega_{T_n})} \leq \|\Delta w\|_{L^2(B)}$$

On peut alors extraire une nouvelle sous-suite encore notée \tilde{v}_{T_n} telle que :

$$\tilde{v}_{T_n} \rightarrow v^* \text{ dans } H^1(B) \text{ faible et } L^2(B) \text{ fort.} \quad (3.2.13)$$

1) Montrons que $v^* = \tilde{v}_{T_0}$

Soit $\varphi \in D(\Omega_{T_0})$, le support de φ est inclus dans Ω_{T_0} et il résulte de (3.2.10) que pour n assez grand $\text{Supp}\varphi \subset \Omega_{T_n}$. L'équation (3.2.9) relative à Ω_{T_n} s'écrit alors :

$$\int_{\text{supp}\varphi} \nabla v_{T_n} \nabla \varphi = \int_{\text{supp}\varphi} \Delta w \cdot \varphi \quad (3.2.14)$$

Par passage à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\int_{\text{supp}\varphi} \nabla v^* \cdot \nabla \varphi = \int_{\text{supp}\varphi} \Delta w \cdot \varphi \quad (3.2.15)$$

équation qui est vérifiée pour tout $\varphi \in D(\Omega_{T_0})$, ceci montre que

$$\Delta v^* = -\Delta w \quad \text{dans } \Omega_{T_0} \quad (3.2.16)$$

Nous allons montrer maintenant que v^* vérifie les mêmes conditions aux limites que v_{T_0} sur $\partial\Omega_{T_0}$ c-à-d

$$v^* = 0 \quad \text{sur } (SL)_{T_0} \cup (FD) \quad (3.2.17)$$

et

$$\frac{\partial v^*}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } (CD) \cup (CG) \quad (3.2.18)$$

il résulte de (3.2.11) que

$$0 = \int_{B - \Omega_{T_n}} |\tilde{v}_{T_n}|^2 = \int_B (1 - \chi_{\Omega_{T_n}}) |\tilde{v}_{T_n}|^2 \rightarrow \int_B (1 - \chi_{\Omega_{T_0}}) |v^*|^2 \quad (3.2.19)$$

ce qui montre que $v^* = 0$ en dehors de Ω_{T_0} et donc

3.2. ÉTUDE THÉORIQUE DE LA MINIMISATION DE LA FONCTIONNELLE D'ÉNERGIE.

$$v^* = 0 \quad \text{sur} \quad (SL)_{T_0} \quad \text{car} \quad v^* \in H^1(B) \quad (3.2.20)$$

Il est évident que

$$v^* = 0 \quad \text{sur} \quad (FD), \quad (3.2.21)$$

il reste à prouver la relation (3.2.18).

Nous avons $\Delta \tilde{v}_{T_n}$ qui converge vers Δv^* dans $H^{-1}(B)$; d'autre part si on prend φ dans l'espace :

$$\mathcal{H}_0(B) = \{v \in H^1(B), v = 0 \quad \text{sur} \quad \partial B - ((CD) \cup (CG))\},$$

alors le crochet de dualité entre $\mathcal{H}_0(B)$ et son dual $(\mathcal{H}_0(B))'$ donne :

$$\begin{aligned} \langle \Delta \tilde{v}_{T_n}, \varphi \rangle_{(\mathcal{H}_0(B))', \mathcal{H}_0(B)} + \int_B \nabla \tilde{v}_{T_n} \cdot \nabla \varphi &= \left\langle \frac{\partial \tilde{v}_{T_n}}{\partial n}, \varphi \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial B), H^{1/2}(\partial B)} \\ &= 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_0(B) \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Par passage à la limite quand $n \rightarrow \infty$ dans cette dernière relation, il vient :

$$\left\langle \frac{\partial v^*}{\partial n}, \varphi \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial B), H^{1/2}(\partial B)} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_0(B) \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad (3.2.23)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad (CD) \cup (CG) \quad (3.2.24)$$

Les points (3.2.20), (3.2.21), (3.2.16) et (3.2.24) montrent que

$$v^* = \tilde{v}_{T_0} \quad \text{dans} \quad B$$

car la solution v_{T_0} de (3.2.9) relative à Ω_{T_0} est unique.

2) Il reste à montrer que T_0 réalise l'inf de E sur τ_{ad} . Nous avons :

$$\begin{aligned} E(\Omega_{T_n}) &= \frac{F^2}{2} \|\nabla v_{T_n}\|_{L^2(\Omega_{T_n})}^2 + \|y\|_{L^1(\Omega_{T_n})}^2 \\ &= \frac{F^2}{2} \|\nabla \tilde{v}_{T_n}\|_{L^2(B)}^2 + \|\chi_{\Omega_{T_n}} y\|_{L^1(B)}^2 \end{aligned}$$

D'après (3.2.13) et le lemme de Fatou, on peut écrire :

$$\liminf \|\nabla \tilde{v}_{T_n}\|_{L^2(B)}^2 \geq \|\nabla v^*\|_{L^2(B)}^2$$

On a alors

$$\begin{aligned} \liminf E(\Omega_{T_n}) &\geq \frac{F^2}{2} \|\nabla v^*\|_{L^2(B)}^2 + \|\chi_{\Omega_{T_0}} y\|_{L^1(B)}^2 \\ &= E(\Omega_{T_0}) \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

ce qui démontre le théorème. □

3.3 Dérivation de $E(\Omega)$ par rapport au domaine

Le domaine Ω est déformé par le difféomorphisme $T = Id + tV$ où t est un petit paramètre réel et V un champ de déformation de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , à divergence nulle et qui garde constante la frontière parabolique (voir le paragraphe 3.2.1); ce vecteur sera dit dans la suite déplacement admissible. On note par $(SL)_t = T[(SL)]$ la surface libre déformée et $\Omega_t = T(\Omega)$ le domaine déformé. Nous allons dériver par rapport au domaine la fonctionnelle :

$$E(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \left(\frac{F^2}{2} (|\nabla v_t|^2 + y) \right) dx \quad (3.3.26)$$

où

y est l'ordonnée d'un point x de Ω_t , w le relèvement défini au paragraphe (3.2.1) et v_t est solution de :

$$\begin{cases} \Delta v_t = -\Delta w & \text{dans } \Omega_t \\ v_t = 0 & \text{sur } (SL)_t \cup (FD) \\ \frac{\partial v_t}{\partial n} = 0 & \text{sur } (CD) \cup (CG) \end{cases} \quad (3.3.27)$$

Avant de montrer la dérivabilité de $E(\Omega)$, montrons d'abord celle de v_t

3.3.1 Dérivabilité par rapport au domaine de v_t

Nous allons développer les calculs nécessaires pour dériver v_t par rapport au domaine. Pour t assez petit, v_t est solution du problème variationnel :

$$\begin{cases} v_t \in H^1(\Omega_t) \quad \text{et} \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}(\Omega_t) \\ \int_{\Omega_t} \nabla v_t \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega_t} \Delta w \cdot \varphi \, dx \end{cases} \quad (3.3.28)$$

$$\mathcal{H}(\Omega_t) = \{ \varphi \in H^1(\Omega_t) / \varphi = 0 \quad \text{sur } (SL)_t \cup (FD) \}$$

On va se ramener par un changement de variable à l'ouvert de base Ω . On effectue dans $E(\Omega_t)$ le changement de variable $X = (Id + tV)^{-1}(x)$ et on note par v_V^t la fonction transportée sur Ω par

$$v_V^t(X) = v_t \circ (Id + tV)(X)$$

Nous définissons de même $\varphi_V = \varphi \circ (Id + tV)$. Le jacobien de la transformation est $\det(Id + tV)'$ qui est un nombre réel positif, $(Id + tV)'$ désigne la matrice jacobienne de l'application $(Id + tV)$. On obtient donc en remplaçant dans (3.3.28) relativement au domaine Ω

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(Id + tV)^{-1t} \nabla v_V^t \cdot (Id + tV)^{-1t} \nabla \varphi_V] \det(Id + tV)' dX \\ &= \int_{\Omega} \Delta w \circ (Id + tV) \varphi_V \det(Id + tV)' dX \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Il est clair que quand φ décrit $\mathcal{H}(\Omega_t)$, φ_V décrit $\mathcal{H}(\Omega)$ (car $(Id + tV)$ est un difféomorphisme) donc dans (3.3.29), on peut remplacer φ_V partout par φ . On peut vérifier facilement (voir chapitre 2) que quand t tend vers 0, on a :

3.3. DÉRIVATION DE $E(\Omega)$ PAR RAPPORT AU DOMAINE

- $v_V^t \rightarrow v$ dans $\mathcal{H}(\Omega)$,
- $(Id + tV)^{-1} \rightarrow Id$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)^{2 \times 2}$,
- $\det(Id + tV)' \rightarrow 1$,
- $\Delta w \circ (Id + tV) \rightarrow \Delta w$ dans $L^2(B)$

Nous avons aussi l'application $t \mapsto (Id + tV)'$ qui est dérivable dans l'espace des matrices $L^\infty(\mathbb{R}^2)^{2 \times 2}$ et a pour dérivée $[V']$ (voir le chapitre 2) et donc d'après les règles de dérivation de l'inverse

$$\frac{d}{dt}(Id + tV)^{-1}|_{t=0} = -[V']$$

D'autre part les résultats classiques sur la dérivation des applications multilinéaires montrent (voir chapitre 2) que l'application $t \mapsto \det(Id + tV)'$ est dérivable dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)^{2 \times 2}$ avec

$$\frac{d}{dt}\det(Id + tV)'|_{t=0} = \operatorname{div} V \quad (3.3.30)$$

où $\operatorname{div} V$ désigne la divergence de V .

En soustrayant les équations (3.3.29) relatives à t et à 0, on montre grâce à tout ce qui précède que le quotient

$$\frac{v_V^t - v}{t} \quad (3.3.31)$$

est borné dans $\mathcal{H}(\Omega)$ et a une limite ω faible dans $\mathcal{H}(\Omega)$.

Pour conclure sur la dérivabilité de v_t en $t = 0$, nous décomposons le quotient

$$\frac{v_t - v}{t} \quad (3.3.32)$$

en

$$\frac{v_t - v}{t} = \frac{v_t - v_V^t}{t} + \frac{v_V^t - v}{t} \quad (3.3.33)$$

Le calcul précédent montre que le deuxième terme du second membre de l'équation (3.3.33) converge vers ω dans $H^1(B)$ et le lemme (2-4) cité au deuxième chapitre (voir [28]) montre que son premier terme converge vers $\operatorname{grad} V$ dans $L^2(B)$. On en déduit le résultat suivant :

Théorème 3.2. *Pour tout déplacement admissible V , l'application $t \mapsto v_t$ de \mathbb{R} dans $L^2(B)$ est dérivable en $t = 0$, et sa dérivée est donnée par :*

$$v' = \omega - \operatorname{grad} v.V \quad (3.3.34)$$

Utilisant ce résultat, le lemme (2-4) et le théorème (2.7) du chapitre 2, nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.3. *Pour tout déplacement admissible V , l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à t associe $E(\Omega_t)$ est dérivable en $t = 0$, de dérivée :*

$$dE(\Omega, V) = \int_{(SL)} \left[\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)^2 + y(x) \right] V.n \, d\sigma. \quad (3.3.35)$$

3.3. DÉRIVATION DE $E(\Omega)$ PAR RAPPORT AU DOMAINE

où $y = y(x)$ représente l'équation de la surface libre (SL) et $n = (-y'(x), 1) \frac{1}{\sqrt{1+(y'(x))^2}}$ le vecteur unitaire qui lui est normal.

ainsi la relation $v = \psi - w$ donnée au paragraphe 3.2.1, nous permet d'écrire, l'expression de $dE(\Omega, V)$ en fonction de la fonction de courant ψ , soit :

Proposition 3.4. *Pour tout déplacement admissible V , l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à t associe $E(\Omega_t)$ est dérivable en $t = 0$, de dérivée :*

$$dE(\Omega, V) = \int_{(SL)} \left[\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)^2 + y(x) \right] V.n d\sigma. \quad (3.3.36)$$

Nous avons aussi le résultat suivant :

Proposition 3.5. *Si $S(\Omega_t)$ est l'aire du domaine Ω_t , alors, pour tout déplacement admissible V , l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à t associe $S(\Omega_t)$ est dérivable en $t = 0$, de dérivée :*

$$dS(\Omega, V) = \int_{(SL)} V.n d\sigma. \quad (3.3.37)$$

3.3.2 Condition d'équilibre.

Dans ce paragraphe, nous montrons que le domaine fluide est en équilibre si et seulement si son énergie est stationnaire ; nous avons :

Proposition 3.6. *Soit ψ la solution de 3.2.3, alors*

$$\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)^2 + y(x) = c^{te}, x \in [-L, L] \iff dE(\Omega, V) = 0 \forall V \text{ déplacement admissible} \quad (3.3.38)$$

Démonstration. Le sens (\implies) est évident, car on peut écrire dans la relation (3.3.36) :

$$dE(\Omega, V) = \int_{(SL)} \left[\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)^2 + y(x) \right] V.n d\sigma = \left[\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)^2 + y(x) \right] \int_{(SL)} V.n d\sigma \quad (3.3.39)$$

et comme la condition de la conservation de l'aire est donnée par

$$dS(\Omega, V) = 0 \quad (3.3.40)$$

alors

$$dE(\Omega, V) = 0, \forall V \text{ déplacement admissible} \quad (3.3.41)$$

Supposons maintenant que

$$dE(\Omega, V) = 0, \forall V \text{ déplacement admissible} \quad (3.3.42)$$

3.4. ETUDE NUMÉRIQUE DE LA DÉTERMINATION DE LA FRONTIÈRE LIBRE D'ÉQUILIBRE.

et montrons que le sens (\Leftarrow) est vrai. En effet, le champ de vecteur V est à divergence nulle et nul aux points $(-L, 1)$ et $(L, 1)$, on peut donc trouver une fonction dans $D(\Omega)$ telle que :

$$V = \left(\frac{\partial h}{\partial y}, -\frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (3.3.43)$$

La relation (3.3.42) donne alors :

$$\int_{(SL)} \left[\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)^2 + y(x) \right] \left(\frac{\partial h}{\partial y}, -\frac{\partial h}{\partial x} \right) \cdot (-y'(x), 1) \frac{1}{\sqrt{(1 + (y'(x))^2)}} d\sigma = 0, \forall h \in D(\Omega) \quad (3.3.44)$$

\Leftrightarrow

$$\int_{-L}^L \left[\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial \psi(x, y(x))}{\partial n} \right)^2 + y(x) \right] \left(\frac{\partial h}{\partial y}, -\frac{\partial h}{\partial x} \right) (-y'(x), 1) \frac{\sqrt{(1 + (y'(x))^2)}}{\sqrt{(1 + (y'(x))^2)}} dx = 0 \quad \forall h \in D(\Omega) \quad (3.3.45)$$

\Leftrightarrow

$$\int_{-L}^L \left[\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial \psi(x, y(x))}{\partial n} \right)^2 + y(x) \right] \frac{dh}{dx} dx = 0 \quad \forall h \in D(\Omega) \quad (3.3.46)$$

Faisant une intégration par parties, il vient :

$$\left\langle \frac{d}{dx} \left[\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial \psi(x, y(x))}{\partial n} \right)^2 + y(x) \right], h \right\rangle_{(D(\Omega))' \cdot D(\Omega)} = 0 \quad \forall h \in D(\Omega) \quad (3.3.47)$$

ce qui donne :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial \psi(x, y(x))}{\partial n} \right)^2 + y(x) \right] dx = 0 \quad \forall x \in [-L, L] \quad (3.3.48)$$

et donc :

$$\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)^2 + y(x) = c^{te} \text{ sur } [-L, L] \quad (3.3.49)$$

□

3.4 Etude numérique de la détermination de la frontière libre d'équilibre.

3.4.1 Algorithme de la minimisation

Nous rappelons que la fonctionnelle $E(\Omega)$ d'énergie totale du système admet pour dérivée par rapport au domaine Ω vis à vis d'un déplacement V conservant l'aire, l'expression suivante :

$$dE(\Omega, V) = \int_{(SL)} \left[\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)^2 + y(x) \right] V \cdot n d\sigma \quad (3.4.50)$$

3.4. ÉTUDE NUMÉRIQUE DE LA DÉTERMINATION DE LA FRONTIÈRE LIBRE D'ÉQUILIBRE.

où n est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de (SL) . Le minimum de E est recherché avec la contrainte de la conservation de l'aire

$$S(\Omega) = \int_{\Omega} dx dy = c^{te} \quad (3.4.51)$$

une nouvelle fonctionnelle \tilde{E} est donc introduite :

$$\tilde{E}(\Omega) = E(\Omega) - \lambda S(\Omega) \quad (3.4.52)$$

et la dérivée de \tilde{E} par rapport au domaine Ω est :

$$d\tilde{E}(\Omega, V) = dE(\Omega, V) - \lambda dS(\Omega, V) \quad (3.4.53)$$

λ est un multiplicateur de Lagrange déterminé par :

$$dS(\Omega, V) = 0 \quad (3.4.54)$$

qui s'écrit aussi

$$\int_{(SL)} V.n d\sigma = 0 \quad (3.4.55)$$

Pour avoir la direction de plus grande pente de $\tilde{E}(\Omega)$, on choisit V comme :

$$V = - \left[\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)^2 + y(x) - \lambda \right] n \quad (3.4.56)$$

Le choix d'un tel déplacement donne :

$$d\tilde{E}(\Omega, V) = - \int_{(SL)} \left[\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)^2 + y(x) - \lambda \right]^2 d\sigma \quad (3.4.57)$$

et donc

$$d\tilde{E}(\Omega, V) < 0 \quad (3.4.58)$$

La relation (3.4.55) donne :

$$\lambda = - \frac{\int_{(SL)} \left[\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)^2 + y(x) \right] d\sigma}{\int_{(SL)} d\sigma} \quad (3.4.59)$$

On construit l'algorithme suivant : $\partial\Omega^{(0)}$ donné,

$$V_{k+1}(x, y) = -\varepsilon \left[\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)^2 + y(x) - \lambda \right]_k .n_k \quad (3.4.60)$$

$$\partial\Omega^{(k+1)} = \partial\Omega^k + V_{k+1} \quad (3.4.61)$$

et le déplacement de $\partial\Omega^{(k)}$ effectué diminue l'énergie totale du système.

Notons que dans la relation (3.4.60) on a :

- (x, y) est un point de la frontière $\partial\Omega^{(k)}$

- n_k la normale unitaire extérieure au point (x, y) à la frontière $\partial\Omega^{(k)}$

3.4. ETUDE NUMÉRIQUE DE LA DÉTERMINATION DE LA FRONTIÈRE LIBRE D'ÉQUILIBRE.

- Dans la relation (3.4.60), la quantité entre crochets d'indice k et la normale sont calculées sur $\partial\Omega^{(k)}$,

- ε est un paramètre réel positif à adapter à chaque pas de calcul pour obtenir une forte décroissance de $\tilde{E}(\Omega)$.

Chaque étape de calcul nécessite la résolution du système (3.2.3) qu'on résout par une technique d'intégrale curviligne où l'on utilise la deuxième formule de Green. En fait, dans la relation (3.4.60), nous avons besoin de connaître $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ sur la surface libre. Nous allons décrire dans le paragraphe suivant la méthode utilisée pour la détermination de ces inconnues.

3.4.2 Calcul numérique de $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ sur (SL) .

D'après la formule de Green, si P est un point du bord de Ω , alors on peut écrire :

$$\frac{1}{2}\psi(P) = \int_{\partial\Omega} [\psi(\nabla G).n - G(\nabla\psi).n] d\sigma \quad (3.4.62)$$

G étant la solution élémentaire du Laplacien en $2D$.

La frontière $\partial\Omega$ est divisée en M arcs $(\partial\Omega)_m, m = 1, 2, \dots, M$ que nous remplaçons par des segments. Sur chacun des segments, les fonctions ψ et $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ sont supposées constantes et égales aux valeurs attribuées aux milieux des segments. On pose :

$$\partial\Omega = \sum_{m=1}^M (\partial\Omega)_m$$

$$\psi(P_k) = \psi_k; P_k \text{ milieu du segment } (\partial\Omega)_k \quad (3.4.63)$$

L'équation (3.4.62) discrétisée devient :

$$\frac{1}{2}\psi(P_k) = \sum_{m=1}^M \psi_m \left[\int_{(\partial\Omega)_m} (\nabla G).n d\sigma \right] - \sum_{m=1}^M (\nabla\psi.n)_m \left[\int_{(\partial\Omega)_m} G d\sigma \right] \quad (3.4.64)$$

Comme $G = \frac{1}{2\pi} \log(r), r = \overrightarrow{P_k P_m}$, on obtient :

$$\pi\psi_k = \sum_{m=1}^M \psi_m \left[\int_{(\partial\Omega)_m} \frac{r.n}{r^2} d\sigma \right] - \sum_{m=1}^M (\nabla\psi.n)_m \left[\int_{(\partial\Omega)_m} \log(r) d\sigma \right] \quad (3.4.65)$$

qu'on peut écrire :

$$\pi\psi_k = \sum_{m=1}^M H_{km}\psi_m - \sum_{m=1}^M (\nabla\psi.n)_m G_{km} \quad (3.4.66)$$

avec

$$H_{km} = \int_{(\partial\Omega)_m} \frac{r.n}{r^2} d\sigma \quad \text{et} \quad G_{km} = \int_{(\partial\Omega)_m} \log(r) d\sigma \quad (3.4.67)$$

La relation (3.4.66) est équivalente à :

$$\sum_{m=1}^M (H_{km} - \pi.\delta_{km})\psi_m = \sum_{m=1}^M (\nabla\psi.n)_m G_{km} \quad (3.4.68)$$

3.4. ETUDE NUMÉRIQUE DE LA DÉTERMINATION DE LA FRONTIÈRE LIBRE D'ÉQUILIBRE.

Si l'on note par $N1$, $N2$, $N3$ et $N4$ (avec $N1 + N2 + N3 + N4 = M$) respectivement le nombre de segments obtenus par la discrétisation de $\partial\Omega$ sur (SL) , (CD) , (FD) et (CG) alors la relation (3.4.68) s'écrit matriciellement :

$$A.X = B \quad (3.4.69)$$

avec X le vecteur inconnu de composantes :

$$\begin{aligned} X_j &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_j, & j = 1, \dots, N1 \\ &= \psi_j, & j = N1 + 1, \dots, N2 + N1 \\ &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_j, & j = N2 + N1 + 1, \dots, N3 + N2 + N1 \\ &= \psi_j, & j = N3 + N2 + N1 + 1, \dots, N4 + N3 + N2 + N1 \end{aligned}$$

A la matrice d'éléments :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= -G_{ij} & i = 1, \dots, M \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, N1 \\ &= H_{ij} - \pi.\delta_{ij} & i = 1, \dots, M \quad \text{et} \quad j = N1 + 1, \dots, N1 + N2 \\ &= -G_{ij} & i = 1, \dots, M \quad \text{et} \quad j = N2 + N1 + 1, \dots, N3 + N2 + N1 \\ &= H_{ij} - \pi.\delta_{ij} & i = 1, \dots, M \quad \text{et} \quad j = N3 + N2 + N1 + 1, \dots, N4 + N3 + N2 + N1 \end{aligned}$$

et B le vecteur de composantes :

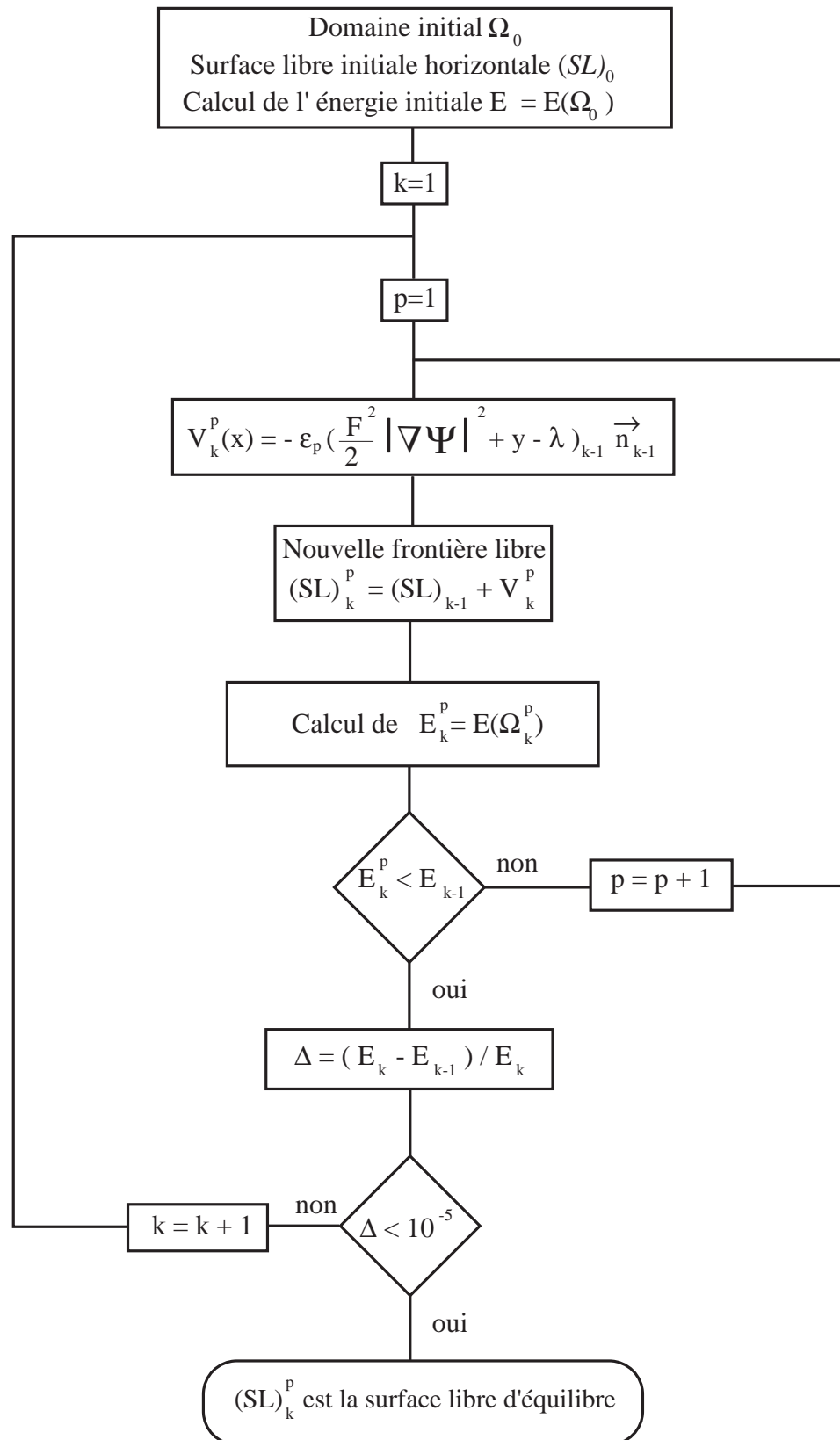
$$\begin{aligned} B_j &= -\sum_{m=1}^M (H_{jm} - \pi.\delta_{jm})\psi_m, & j = 1, \dots, N1 \\ &= \sum_{m=1}^M G_{jm}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_m, & j = N1 + 1, \dots, N2 + N1 \\ &= -\sum_{m=1}^M (H_{jm} - \pi.\delta_{jm})\psi_m, & j = N2 + N1 + 1, \dots, N3 + N2 + N1 \\ &= \sum_{m=1}^M G_{jm}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_m, & j = N3 + N2 + N1 + 1, \dots, N4 + N3 + N2 + N1 \end{aligned}$$

δ_{km} étant le symbole de Kronecker.

3.4.3 Organigramme de minimisation.

Nous donnons un schéma de l'organigramme de la minimisation de la fonctionnelle d'énergie. Le processus itératif est initialisé par la donnée d'une surface libre horizontale $y = 1$.

3.4. ÉTUDE NUMÉRIQUE DE LA DÉTERMINATION DE LA FRONTIÈRE LIBRE D'ÉQUILIBRE.



3.4.4 Résultats numériques.

Dans tous nos calculs la longueur L a été fixée à 10, le pas de discrétisation h a été fixé à 0.1. Afin de valider notre méthode, nous avons comparé nos résultats à ceux donnés par quelques auteurs ayant déjà traité ce problème, par exemple [12], [23] et [34] ; nos résultats sont en très bon accord avec les leurs. Nous avons alors considéré des obstacles de hauteur maximale b et décrits par les équations suivantes :

- 1) $b(x) = \frac{b^3}{b^2 + x^2}$
- 2) $b(x) = \sqrt{b^2 - x^2}$
- 3) $b(x) = \frac{1}{2} \exp(-x^2)$
- 4) $b(x) = -\frac{3}{4} \operatorname{sech} \pi x$
- 5) $b(x) = \frac{1}{2} \exp(-x^2) - \frac{2}{5} \exp(-\frac{(x-1)^2}{2})$
- 6) $b(x) = \frac{b}{2} (\operatorname{th} x + 1)$

En faisant varier le nombre de Froude F et la hauteur b de la bosse, nous représentons ci-dessous, sur les figures 4,5,6,7,8 et 9 les différentes formes de la frontière libre d'équilibre obtenue ; sur la figure 10, nous représentons l'évolution de la surface libre en fonction du nombre de Froude pour une hauteur de l'obstacle fixée à $b = 0.3$. Nous faisons remarquer que sur la figure 6, nous avons reproduit à deux niveaux sur le fond (FD), l'obstacle défini par l'expression :

$$b(x) = \frac{b^3}{b^2 + x^2}$$

3.4. ÉTUDE NUMÉRIQUE DE LA DÉTERMINATION DE LA FRONTIÈRE LIBRE D'ÉQUILIBRE.

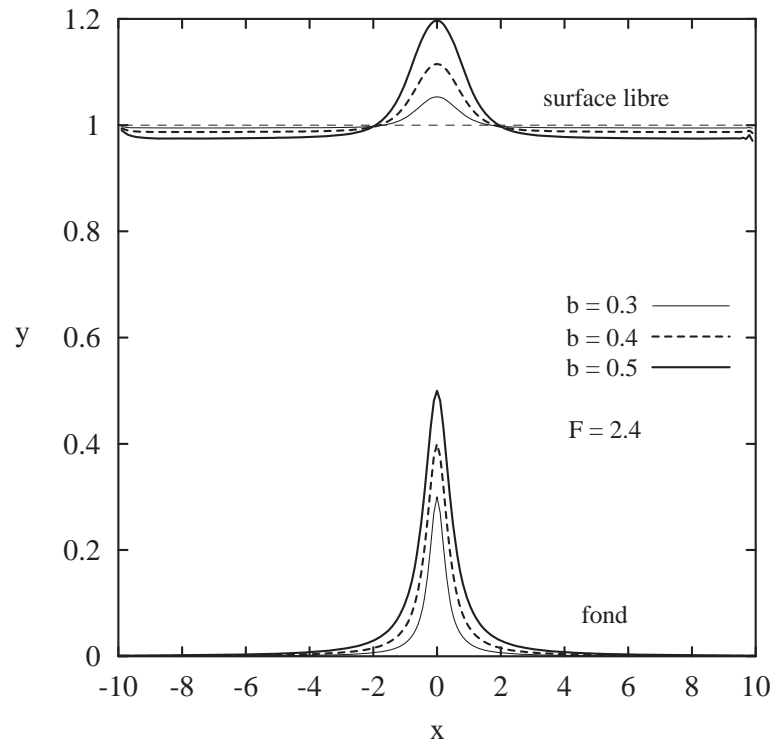


Figure 4.

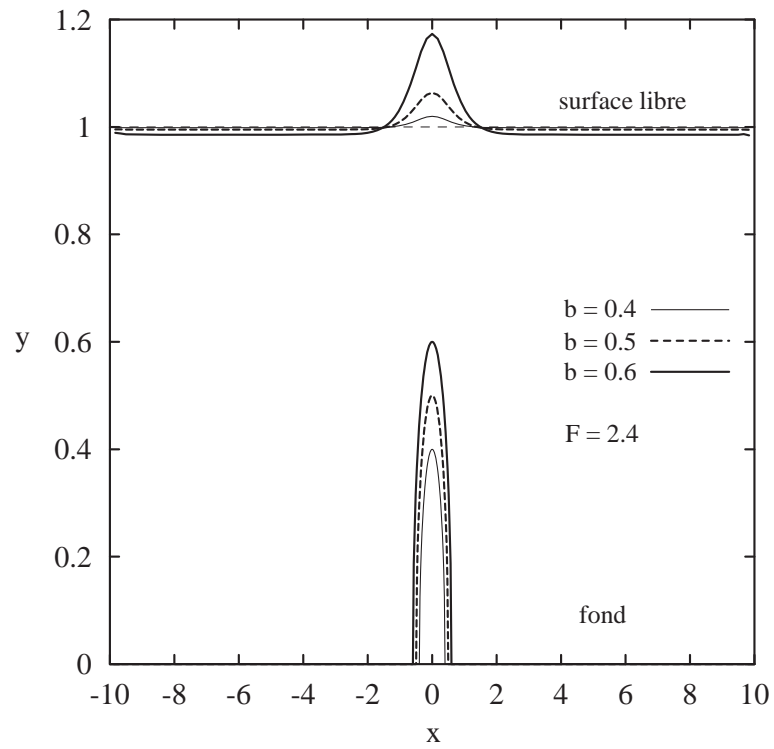


Figure 5.

3.4. ÉTUDE NUMÉRIQUE DE LA DÉTERMINATION DE LA FRONTIÈRE LIBRE D'ÉQUILIBRE.

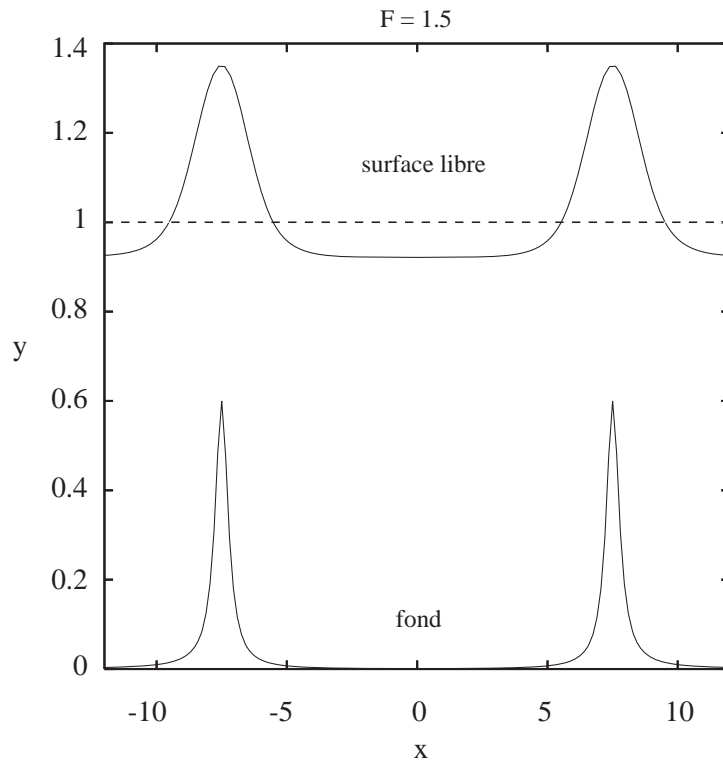


Figure 6.

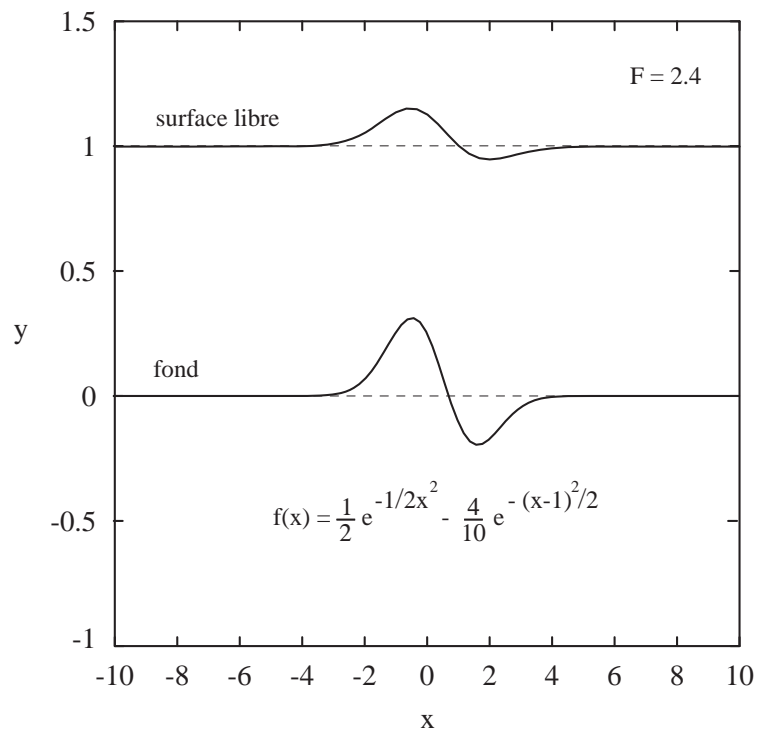


Figure 7.

3.4. ÉTUDE NUMÉRIQUE DE LA DÉTERMINATION DE LA FRONTIÈRE LIBRE D'ÉQUILIBRE.

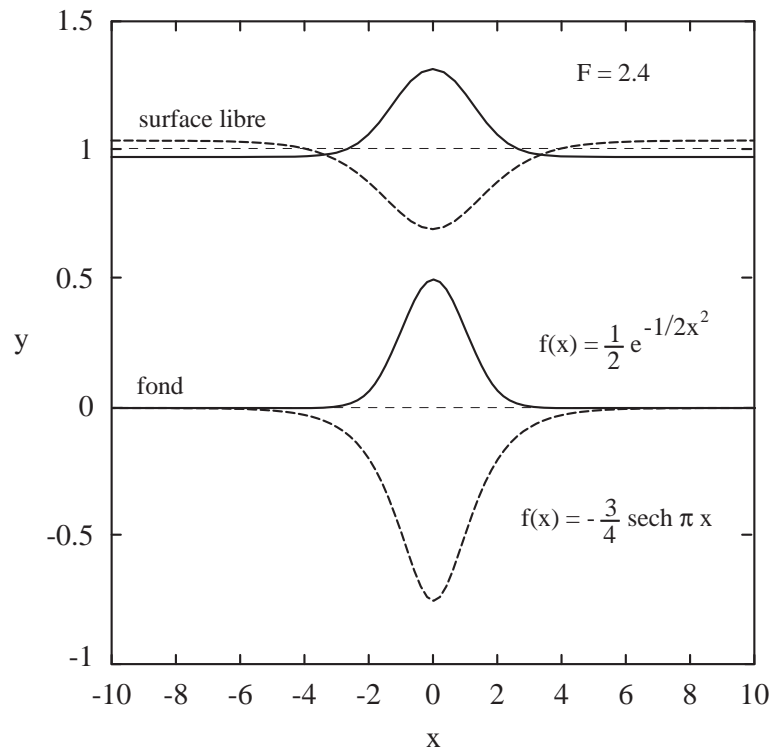


Figure 8.

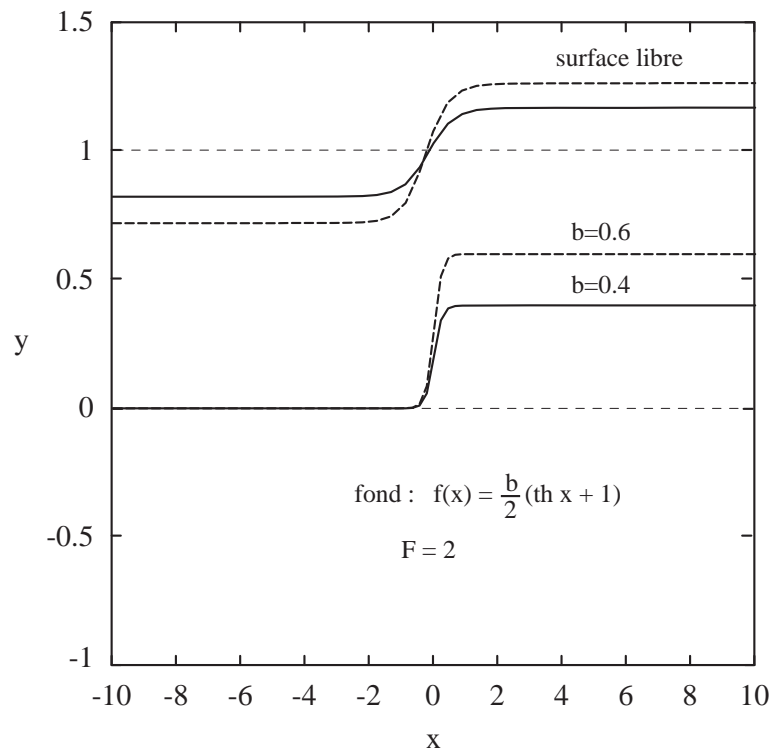


Figure 9.

3.4. ETUDE NUMÉRIQUE DE LA DÉTERMINATION DE LA FRONTIÈRE LIBRE D'ÉQUILIBRE.

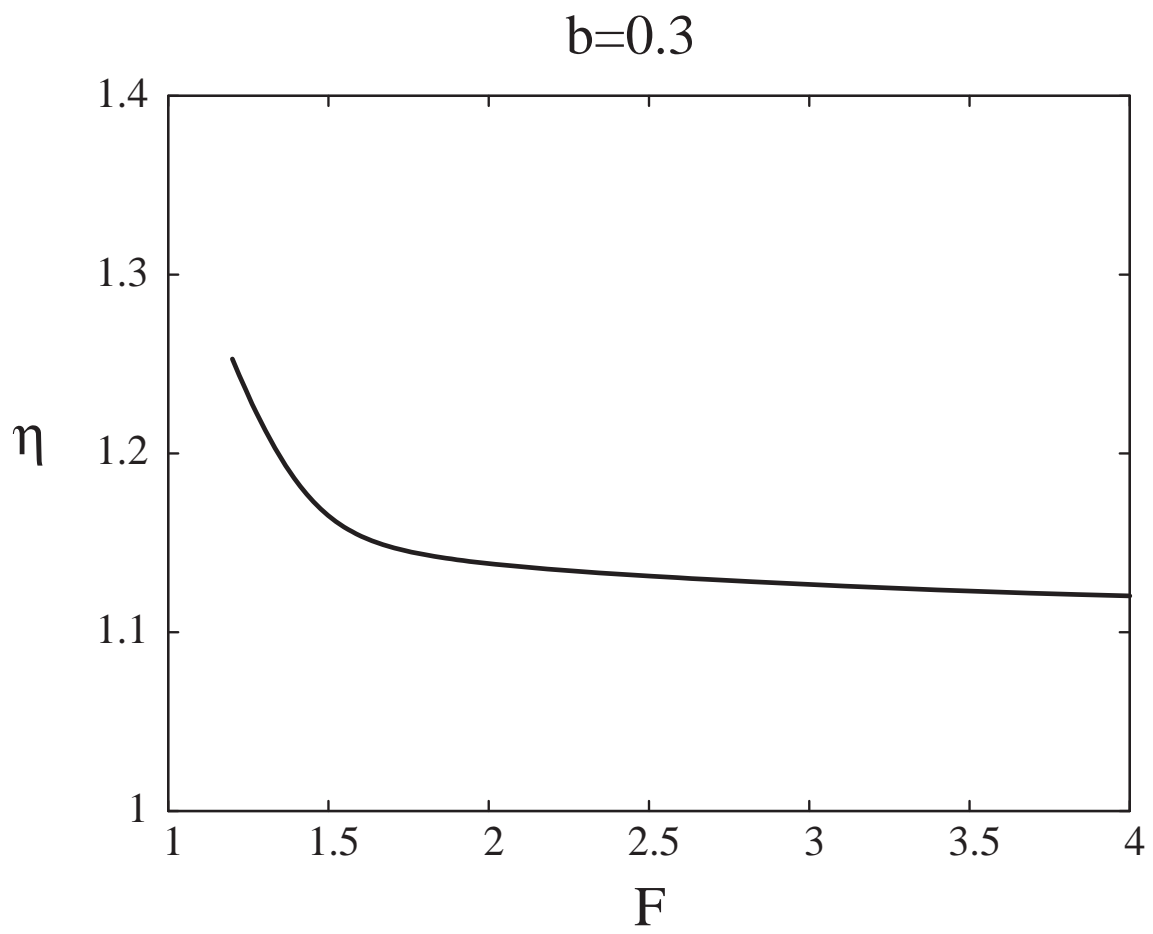


Figure 10.

Chapitre 4

Ecoulement à frontière libre au dessus d'un obstacle. Etude théorique du cas fluvial.

Introduction.

Dans ce chapitre, en utilisant le théorème des fonctions implicites et quelques résultats issus de [1], nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème correspondant à un écoulement fluvial. Ce travail a été réalisé en collaboration avec le Professeur D. TENIOU et Mme R AIT-YAHIA-DJOUADI et a été publié en 2001 dans la revue "Abstract And Applied Analysis" sous le titre "Free surface flow over an obstacle. Theoretical study. Fluvial case". Nous faisons remarquer qu'en utilisant la proposition (4.2) de la page 7 de [1], il est possible d'appliquer le théorème des fonctions implicites et de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème, même dans le cas d'un écoulement torrentiel; cette solution appartient à $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$. Dans cette partie, les notations y_0 et $\gamma(x)$ correspondent respectivement aux notations H et $\eta(x)$ déjà vues au chapitre 1.

4.1 Introduction

This paper considers the problem of determining the free surface of flow of an ideal fluid down an infinitely long channel of uniform width. We suppose that the bottom of the channel is perturbed by an obstacle represented by a regular function with a compact support. Free surface flows of an ideal fluid are nonlinear problems; the non-linearity is essentially due to the dynamic condition written at the free surface.

The practical applications of this type of flow arise both in the hydraulic engineering of fast flow in a channel or a river. The numerical study of this problem has been treated by various authors. M. BOUHADF [12] has given a numerical study of the problem in the fluvial and torrential case. A.C.KING and M.I.G BLOOR [34] have given a generalization of the Schwarz-Christoffel transformation to formulate the problem of free streamline jet flow over curved wall as a pair of coupled equations for the tangential angles onto the free surface and the wall shape. Linearized solutions and nonlinear numerical solutions are presented for a variety of wall shapes. But no theoretical result has been given. However several authors have given theoretical results of this problem in the linear case. F.ABERGEL and J.L.

4.2. THE GOVERNING EQUATIONS

BONA [1] have considered a steady, two-dimensional of an incompressible, newtonian fluid flowing under gravity down an inclined channel ; they have established an existence theory for steady, highly viscous flow. In this paper, we want to establish a theoretical result of existence and unicity of a solution which decrease exponentially at infinity. The plan of this paper is as follows :

In section 4.2 we formulate the governing equations of the problem in the undimensionless form.

In section 4.3 we introduce the stream function in these equations.

In section 4.4, the resolution of the dynamic equation written at the free surface boils down to a fixed point problem and here we apply the implicit function theorem.

In section 4.5, we give a conclusion achieving this work.

4.2 The governing equations

We consider a steady two dimensional flow of an ideal fluid in a stream in which has been placed an obstacle described by the equation $y = b(x)$. We denote by Ω_b^γ the domain occupied by the fluid, where b is the equation of the obstacle and γ is the perturbation of the free surface. We put

$$\Omega_b^\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\infty < x < +\infty, b(x) < y < y_0 + \gamma(x)\}$$

(x, y) is a coordinate system in which x and y are respectively the horizontal and positive vertical directions. The function $b(x)$ verify $0 \leq b(x) < y_0$ and is regular, with a compact support. The function $\gamma(x)$ is regular. The problem is formulated as :

Given a bottom configuration b , find a function $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (free surface) and a vector field \vec{u} (velocity of the fluid) such that :

governing equations in Ω_b^γ :

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ in } \Omega_b^\gamma \tag{4.2.1}$$

$$\operatorname{curl} \vec{u} = 0 \text{ in } \Omega_b^\gamma \tag{4.2.2}$$

Equation (4.2.1) expresses the incompressibility of the fluid, equation (4.2.2) is given by the irrotationality of the flow.

boundary conditions :

$$\vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ for } y = b(x) \tag{4.2.3}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ for } y = y_0 + \gamma(x) \tag{4.2.4}$$

where $\vec{\nu}$ is the exterior normal to the boundary of Ω_b^γ . Equation (4.2.3) describe the impermeability of the flow at the bottom of the domain Ω_b^γ .

Conditions at infinity :

We suppose that the flow is asymptotically uniform and horizontal far upstream and downstream of the obstacle. We write then

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \vec{u}(x, y) = (u_0, 0) \tag{4.2.5}$$

4.3. FORMULATION OF THE PROBLEM IN STREAM FUNCTION

hence

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \gamma(x) = 0 \quad (4.2.6)$$

Condition across the free surface :

The dynamic condition of continuity of the pressure across the free surface is given by :

$$\frac{\rho}{2} \left| \vec{u} \right|^2 + \rho g y = c \quad (4.2.7)$$

where ρ is the density of the fluid, g is the downward acceleration due to the gravity and c is a constant. This equation is called Bernoulli equation.

Dimensionless equations :

Dimensionless variables are defined by referring all lengths to the quantity y_0 , and all velocities to u_0 . We put :

$$\begin{cases} \vec{u} = u_0 \vec{u}^* \\ x = y_0 x^* \\ y = y_0 y^* \end{cases}$$

The equation (4.2.7) becomes :

$$\frac{F^2}{2} \left| \vec{u}^* \right|^2 + y^* = c \quad (4.2.8)$$

4.3 Formulation of the problem in stream function

In the following, we write all the variables without the symbol $*$. The irrotationality and the incompressibility of the fluid lead us to define an harmonic stream function Ψ such that :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Equation (4.2.3) will be written :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b'(x) \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

and becomes :

$$b'(x) \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \text{ on } y = b(x).$$

This is equivalent to

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = 0 \text{ on } y = b(x).$$

In the same way, equation (4.2.4) gives :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = 0 \text{ on } y = 1 + \gamma(x)$$

4.3. FORMULATION OF THE PROBLEM IN STREAM FUNCTION

We deduce that Ψ is constant on $y = b(x)$ and $y = 1 + \gamma(x)$.

Thanks to the condition at infinity, we can evaluate the constant which appears in the equation (4.2.7), and the values of Ψ at the bound of Ω_b^γ .

In fact, at infinity we have :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Psi(x, y) = y + k$$

and

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \gamma(x) = 0.$$

The function Ψ is a stream function, then we can choose $k = 0$.

Hence

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Psi(x, y) = y \tag{4.3.9}$$

We replace these limits in equation (4.2.7) we obtain :

$$\frac{F^2}{2} + 1 = c$$

Moreover, we deduce from (4.3.9) that

$$\Psi = 0 \text{ on } y = b(x)$$

and

$$\Psi = 1 \text{ on } y = 1 + \gamma(x).$$

Then the stream function Ψ verifies :

$$\Delta \Psi = 0 \text{ in } \Omega_b^\gamma \tag{4.3.10}$$

$$\Psi = 0 \text{ on } y = b(x) \tag{4.3.11}$$

$$\Psi = 1 \text{ on } y = 1 + \gamma(x) \tag{4.3.12}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Psi(x, y) = y \tag{4.3.13}$$

$$\frac{F^2}{2} |\nabla \Psi|^2(x, 1 + \gamma(x)) + \gamma(x) = \frac{F^2}{2} \tag{4.3.14}$$

Taking into account the condition (4.3.13), we can write

$$\Psi = y + \psi$$

where ψ is the perturbation of stream function.

4.4. SOLUTION OF THE FREE SURFACE PROBLEM

The equations (4.3.10)-(4.3.14) will be written as :

$$\Delta\psi = 0 \text{ in } \Omega_b^\gamma \quad (4.3.15)$$

$$\psi = -b(x) \text{ on } y = b(x) \quad (4.3.16)$$

$$\psi = -\gamma(x) \text{ on } y = 1 + \gamma(x) \quad (4.3.17)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x, y) = 0 \quad (4.3.18)$$

$$\frac{F^2}{2} (|\nabla\psi|^2 + 2\frac{\partial\psi}{\partial y} + 1) + \gamma(x) = \frac{F^2}{2} \text{ on } y = 1 + \gamma(x) \quad (4.3.19)$$

4.4 Solution of the free surface problem

We transform the equation (4.3.19) in

$$\gamma(x) = -\frac{F^2}{2} \left[|\nabla\psi|^2(x, 1 + \gamma(x)) + 2\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 1 + \gamma(x)) \right] \quad (4.4.20)$$

and we put :

$$T(b, \gamma) = -\frac{F^2}{2} \left[|\nabla\psi|^2(x, 1 + \gamma(x)) + 2\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 1 + \gamma(x)) \right].$$

The problem can be formulated as :

given a function an expression $y = b(x)$ which represents an obstacle, find a function $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (free surface) such that :

$T(b, \gamma) = \gamma$ with ψ verifying the equations (4.3.15)-(4.3.18).

This is equivalent to solve the equation :

$$T_1(b, \gamma) = \gamma - T(b, \gamma) = 0 \text{ for a fixed } b$$

For $b = \gamma = 0$, $\psi = 0$ verifies equations (4.3.15)-(4.3.19). So $T(0, 0) = 0$ and $T_1(0, 0) = 0$.

To solve $T_1(b, \gamma) = 0$, we use the implicit function theorem at a neighbourhood of $(b, \gamma) = (0, 0)$.

Consider the change of variables :

$$\begin{cases} \tilde{x} = x \\ \tilde{y} = \frac{y-b(x)}{1+\gamma(x)-b(x)} \end{cases} \quad (4.4.21)$$

we transform the domain Ω_b^γ in the following infinite strip Q :

4.4. SOLUTION OF THE FREE SURFACE PROBLEM

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\infty < x < +\infty, 0 < y < 1\}.$$

We put $\psi(x, y) = \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$ then $\tilde{\psi}$ verifies :

$$\Delta \tilde{\psi} + \mathcal{P}_b^\gamma \tilde{\psi} = 0 \text{ in } Q \quad (4.4.22)$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}, 0) = -b(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathbb{R} \quad (4.4.23)$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}, 1) = -\gamma(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathbb{R} \quad (4.4.24)$$

\mathcal{P}_b^γ is an operator defined by :

$$\mathcal{P}_b^\gamma = a_1 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + a_3 \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}$$

where

$$a_1 = 2 \frac{\tilde{y}(b' - \gamma') - b'}{1 + \gamma - b}$$

$$a_2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - 1 + \frac{1}{(1 + \gamma - b)^2}$$

and

$$a_3 = \frac{-1}{1 + \gamma - b} [b'' + \tilde{y}(\gamma'' - b'')] + \frac{2}{(1 + \gamma - b)^2} (\gamma' - b') [b' + \tilde{y}(\gamma' - b')].$$

The gradient operator becomes :

$$\tilde{\nabla}_{b,\gamma} = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{-b' - \tilde{y}(\gamma' - b')}{(1 + \gamma - b)^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{1}{1 + \gamma - b} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \end{array} \right)$$

The equation (4.4.20) will be written :

$$\gamma(\tilde{x}) = \frac{-F^2}{2} \left[\left| \tilde{\nabla}_{b,\gamma} \tilde{\psi} \right|^2(\tilde{x}, 1) + \frac{2}{1 + \gamma - b} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right]$$

where γ and b are searched in the space :

$$B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) = \left\{ v \in C^{2,\lambda}(\mathbb{R}) / \sum_{0 \leq k \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{c|x|} |D_x^k v(x)| < \infty \right\}$$

and $\tilde{\psi}$ in the space :

$$B_c^{2,\lambda}(\bar{Q}) = \left\{ v \in C^{2,\lambda}(\bar{Q}) / \sup_{k+l \leq 2} \sup_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Sigma} e^{c|\tilde{x}|} |D_x^k D_y^l v| < \infty \right\}$$

4.4. SOLUTION OF THE FREE SURFACE PROBLEM

where $0 < \lambda < 1$ and $c > 0$.

The choice of these spaces will appear evident later.

Remark 1. *i) The space $B_c^{m,\lambda}(\overline{Q})$ defined by :*

$$B_c^{m,\lambda}(\overline{Q}) = \left\{ v \in C^{m,\lambda}(\overline{Q}) / \sup_{k+l \leq m} \sup_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \overline{Q}} e^{c|\tilde{x}|} \left| D_{\tilde{x}}^k D_{\tilde{y}}^l v \right| < \infty \right\} \text{ provided with the norm :}$$

$$\|v\|_{m,c,\lambda} = \sum_{k+l \leq m} \sup_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \overline{Q}} e^{c|\tilde{x}|} \left| D_{\tilde{x}}^k D_{\tilde{y}}^l v \right| + \sup_{k+l=m} \sup_{\substack{(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq (\tilde{x}', \tilde{y}') \\ (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \overline{Q}}} \frac{\left| D_{\tilde{x}}^k D_{\tilde{y}}^l v(\tilde{x}, \tilde{y}) - D_{\tilde{x}}^k D_{\tilde{y}}^l v(\tilde{x}', \tilde{y}') \right|}{\left[(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2 \right]^{\lambda/2}}$$

is a Banach algebra.

ii) The space $B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R})$ defined by :

$$B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R}) = \left\{ v \in C^{m,\lambda}(\mathbb{R}) / \sum_{0 \leq k \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{c|x|} \left| D_x^k v(x) \right| < \infty \right\} \text{ provided with the norm :}$$

$$\|v\|_{m,c,\lambda} = \sum_{0 \leq k \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{c|x|} \left| D_x^k v \right| + \sup_{\substack{(x, x') \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq x'}} \frac{|D_x^m v(x) - D_x^m v(x')|}{|x - x'|^{\lambda/2}}$$

is also a Banach algebra.

Now we are able to state the main result of this section :

Theorem 1. *There exist $\tilde{c} > 0$, there exist $K < 1$, there exist an open ball \mathcal{B} of radius r_0 centered at the origin of $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ where $c \in]0, \tilde{c}[$, and $0 < \lambda < 1$, there exist a neighbourhood \mathcal{V}_b of zero in $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$, there exist a mapping $g : \mathcal{V}_b \rightarrow B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ of class \mathcal{C}^1 , such that $\forall F \in]0, K[$, $\{\forall (b, \gamma) \in \mathcal{B}, T_1(b, \gamma) = 0\} \Leftrightarrow \{b \in \mathcal{V}_b, \gamma = g(b)\}$.*

Proof : In the next subsections, we shall verify the hypothesis of the implicit function theorem.

4.4.1 Differentiability of the operator T_1 with respect to b and γ

We have $T_1(b, \gamma) = \gamma - T(b, \gamma)$; to show the differentiability of T_1 with respect to b and γ , it suffices to study the differentiability of T with respect to b and γ . For this we use the following results :

4.4. SOLUTION OF THE FREE SURFACE PROBLEM

Theorem 2. *There exist $\tilde{c} > 0$ such that for all $c \in]0, \tilde{c}[$ and $\lambda \in]0, 1[$ there exist an open ball \mathcal{B} of radius $r_0 > 0$, centered at the origin in $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ such that whenever $(b, \gamma) \in \mathcal{B}$, the following statement holds :*

The problem :

$$\begin{cases} \Delta\psi &= 0 \text{ in } \Omega_b^\gamma \\ \psi(x, 1 + \gamma(x)) &= -\gamma(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ \psi(x, b(x)) &= -b(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

has a unique solution ψ such that :

a) $\tilde{\psi}$, the transform of ψ by equations (4.4.21) is in $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$.

b) The mapping $S : (b, \gamma) \mapsto \tilde{\psi}$ is continuously differentiable from \mathcal{B} into $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$.

To prove this theorem, we use the following proposition which is proved in the annex

Proposition 4.1. *: Let the boundary value problem*

$$\begin{cases} \Delta v &= b_1 \text{ in } Q \\ v(\tilde{x}, 1) &= b_2(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathbb{R} \\ v(\tilde{x}, 0) &= b_3(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.4.25)$$

where $(b_1, b_2, b_3) \in B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$, then there exists $\tilde{c} > 0$ such that whenever $0 < c < \tilde{c}$, problem (4.4.25) has a unique solution $v \in B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$. Furthermore the solution map $(b_1, b_2, b_3) \mapsto v$ is a topological isomorphism between the corresponding spaces.

proof of Theorem 2

Proof of a)

Denote by \mathcal{A}_b^γ the linear operator defined by :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_b^\gamma : B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}) &\rightarrow B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) = \mathcal{Y} \\ v &\mapsto (\Delta v + \mathcal{P}_b^\gamma v, v(\cdot, 0), v(\cdot, 1)) \end{aligned}$$

and $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0^0$. We shall verify that :

$$\|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_b^\gamma)v\|_{\mathcal{Y}} \leq L(\|b\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}) \cdot \|v\|_{B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})}.$$

where $L(\cdot, \cdot)$ is a continuous function on \mathbb{R}^2 verifying $L(0, 0) = 0$.

We have $(\mathcal{A} - \mathcal{A}_b^\gamma)v = (-\mathcal{P}_b^\gamma v, 0, 0)$, then

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_b^\gamma)v\|_{\mathcal{Y}} &= \|\mathcal{P}_b^\gamma v\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})} \\ &= \left\| a_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{y}^2} + a_3 \frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} \right\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})}. \end{aligned}$$

4.4. SOLUTION OF THE FREE SURFACE PROBLEM

We need the following lemma which is easy to prove :

Lemma 1. : Let $(b, \gamma) \in B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$.

We have $(a_1, a_2, a_3) \in (B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}))^3$, furthermore :

$$\|a_i\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})} \leq L_i(\|b\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}), 1 \leq i \leq 3$$

where

$L_i(\cdot, \cdot)$ are continuous functions verifying $L_i(0, 0) = 0$.

Then we have :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_b^\gamma v\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})} &\leq \left\| a_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \right\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})} + \left\| a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{y}^2} \right\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})} + \left\| a_3 \frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} \right\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})} \\ &\leq (\|a_1\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})} + \|a_2\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})} + \|a_3\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})}) \|v\|_{B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})} \end{aligned}$$

and using the last lemma we obtain :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_b^\gamma v\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})} &\leq (L_1(\|b\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}) + L_2(\|b\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}) + \\ &\quad + L_3(\|b\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})})) \|v\|_{B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})} \end{aligned}$$

So :

$$\|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_b^\gamma)v\|_{\mathcal{Y}} \leq L(\|b\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}) \|v\|_{B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})} \quad (4.4.26)$$

where $L(\cdot, \cdot)$ is a continuous function verifying $L(0, 0) = 0$.

The operator \mathcal{A} being an isomorphism, we show that \mathcal{A}_b^γ is also an isomorphism for small values of b and γ .

Indeed the set of the isomorphisms $Isom(B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}), \mathcal{Y})$ is open, then

$$\exists r_0 > 0; B(\mathcal{A}, r_0) \subset Isom(B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}), \mathcal{Y}).$$

The relation (4.4.26) gives us :

$$\|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_b^\gamma)\|_{\mathcal{L}(B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}), \mathcal{Y})} \leq L(\|b\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}).$$

The continuity of the function L and $L(0, 0) = 0$ imply that for small (b, γ) , $\mathcal{A}_b^\gamma \in B(\mathcal{A}, r_0)$

Hence \mathcal{A}_b^γ is an isomorphism from $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$ to \mathcal{Y} .

Thus the problem

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\psi} + \mathcal{P}_b^\gamma \tilde{\psi} = 0 & \text{in } Q \\ \tilde{\psi}(\tilde{x}, 0) = -b(\tilde{x}), & \tilde{x} \in \mathbb{R} \\ \tilde{\psi}(\tilde{x}, 1) = -\gamma(\tilde{x}), & \tilde{x} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

4.4. SOLUTION OF THE FREE SURFACE PROBLEM

has a unique solution in $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$. This gives the proof of a) of the theorem 2.

Now we shall prove b), i.e the application :

$$S : B(0, r_0) \subset B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \rightarrow B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$$

$$(b, \gamma) \mapsto \tilde{\psi}$$

is continuously differentiable.

We define S_1 and S_2 as follows :

$$S_1 : B(0, r_0) \rightarrow \mathcal{L}(B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}), \mathcal{Y})$$

$$(b, \gamma) \mapsto \mathcal{A}_b^\gamma$$

and

$$S_2 : Isom(B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}), \mathcal{Y}) \rightarrow Isom(\mathcal{Y}, B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}))$$

$$L \mapsto L^{-1}$$

and we put :

$$\mathcal{F}(b, \gamma) = (0, -b(\tilde{x}), -\gamma(\tilde{x}) = \mathcal{A}_b^\gamma \tilde{\psi} \in \mathcal{Y}$$

We have :

$$S_2 \circ S_1(b, \gamma) = (\mathcal{A}_b^\gamma)^{-1} \text{ with } (b, \gamma) \in B(0, r_0)$$

and

$$S(b, \gamma) = (S_2 \circ S_1(b, \gamma))\mathcal{F}(b, \gamma) = (\mathcal{A}_b^\gamma)^{-1}(\mathcal{A}_b^\gamma \tilde{\psi}) = \tilde{\psi}.$$

The differentiability of $\tilde{\psi}$ is given by the differentiability of S_1, S_2 and $\mathcal{F}(b, \gamma)$. It is evident that $\mathcal{F}(b, \gamma)$ is continuously differentiable with respect to b and γ . S_2 is a C^∞ operator. We need the continuous differentiability of S_1 to prove b).

We have :

$$S_1 : (b, \gamma) \rightarrow \mathcal{A}_b^\gamma = \Delta + a_1 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + a_3 \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}.$$

It is sufficient to prove that a_i $1 \leq i \leq 3$ which are rational functions in $b, \gamma, b', \gamma', b'', \gamma''$, are continuously differentiable with respect to b and γ . For this we use the next lemma which is evident to prove [1].

Lemma 2. : *Let p be a rational function of k variables which is devoid of poles in a neighbourhood of the origin in \mathbb{R}^k (k a positive integer) such that $p(0) = 0$. Then the mapping*

$$P : \prod_{1 \leq i \leq k} B_c^{n_i, \lambda}(\mathbb{R}) \longrightarrow B_c^{n_0, \lambda}(\mathbb{R})$$

$$(g_1, \dots, g_k) \mapsto P(g_1, \dots, g_k) \text{ where } n_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k, n_0 = \min\{n_i, 1 \leq i \leq k\}$$

is continuously differentiable in a neighborhood of the origin in $\prod_{1 \leq i \leq k} B_c^{n_i, \lambda}(\mathbb{R})$.

4.4. SOLUTION OF THE FREE SURFACE PROBLEM

The coefficients a_1, a_2 and a_3 verify the hypothesis of lemma 2, then they are continuously differentiable with respect to b and γ . This gives continuous differentiability of S_1 with respect to b and γ . Then theorem 2 is proved.

In the new variables \tilde{x}, \tilde{y} , the operator $T(b, \gamma)$ takes the form :

$$\begin{aligned} T(b, \gamma) &= -\frac{F^2}{2} \left\{ \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, 1) - \frac{\gamma'}{(1 + \gamma - b)^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right]^2 + \frac{1}{(1 + \gamma - b)^2} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right)^2 + \frac{2}{1 + \gamma - b} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right\} \\ &= -\frac{F^2}{2} \left\{ \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, 1) + \lambda_1(b, \gamma) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right]^2 + \lambda_2^2(b, \gamma) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right)^2 + 2\lambda_2(b, \gamma) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right\} \end{aligned}$$

with

$$\lambda_1(b, \gamma) = -\frac{\gamma'}{(1 + \gamma - b)^2} ; \quad \lambda_2(b, \gamma) = \frac{1}{1 + \gamma - b}.$$

Theorem 3. *Under the hypothesis of the theorem2, the operator T is continuously Frechet differentiable on \mathcal{B} .*

Proof :

We have shown that $\tilde{\psi}$ is continuously differentiable with respect to b and γ . Moreover, it is evident that $\lambda_1(b, \gamma)$ and $\lambda_2(b, \gamma)$ are continuously differentiable with respect to b and γ . We deduce that $T(b, \gamma)$ is continuously Frechet differentiable with respect to b and γ . Then T_1 is continuously differentiable on \mathcal{B} .

We come back to the system

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\psi} + \mathcal{P}_b^\gamma \tilde{\psi} = 0 & \text{in } Q \\ \tilde{\psi}(\tilde{x}, 0) = -b(\tilde{x}), \tilde{x} \in \mathbb{R} \\ \tilde{\psi}(\tilde{x}, 1) = -\gamma(\tilde{x}), \tilde{x} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

We have $\tilde{\psi}|_{b=\gamma=0} = 0$ in Q and $\mathcal{P}_0^0 \tilde{\psi} = 0$.

Let $h \in B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$. We put $b = 0$ in the problem above, we derive with respect to γ in the direction h and we evaluate the derivative at $\gamma = 0$. We put

$$w = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma} \Big|_{b=\gamma=0}$$

We obtain

$$\begin{cases} \Delta w + \mathcal{P}_0^0 w + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\mathcal{P}_0^\gamma) \Big|_{\gamma=0} \tilde{\psi}|_{b=\gamma=0} \cdot h = 0 & \text{in } Q \\ w(\tilde{x}, 0) = 0 & \tilde{x} \in \mathbb{R} \\ w(\tilde{x}, 1) = -h(\tilde{x}) & \tilde{x} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

and it follows the theorem :

Theorem 4. *Let be $h \in B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ and $w = w(h) = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma}(\cdot, 1)|_{b=\gamma=0} \cdot h$. Then $w(h)$ is the unique solution of the problem :*

4.4. SOLUTION OF THE FREE SURFACE PROBLEM

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } Q \\ w(\tilde{x}, 0) = 0, \tilde{x} \in \mathbb{R} \\ w(\tilde{x}, 1) = -h(\tilde{x}), \tilde{x} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

and we have :

$$\|w(h)\|_{B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})} \leq k \|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}, k > 1 \quad (4.4.27)$$

Proof :

For the existence and unicity, we use the proposition 4.1 . Now to prove the inequality (4.4.27), we need the next lemma proved in the annex :

Lemma 3. : Let h in the space $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$. Then the function $(\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto h(\tilde{x})\tilde{y}$ is in the space $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$ and verify :

$$\|h(\tilde{x})\tilde{y}\|_{B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})} \leq k \|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}, \quad \text{where } k > 1.$$

Now we are able to establish the relation (4.4.27). We can write :

$$w(\tilde{x}, \tilde{y}) = u(\tilde{x}, \tilde{y}) - h(\tilde{x})\tilde{y}$$

where u is the solution of the problem :

$$\begin{cases} \Delta u = h''(\tilde{x})\tilde{y} & \text{in } Q \\ u(\tilde{x}, 0) = 0, \tilde{x} \in \mathbb{R} \\ u(\tilde{x}, 1) = 0, \tilde{x} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

We have :

$$\begin{aligned} \|u\|_{B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})} &\leq k_1 \|\Delta u\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})}, \quad k_1 > 1 \quad (\text{evident}) \\ &\leq k_1 \left\| h''(\tilde{x})\tilde{y} \right\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})} \\ &\leq k_1 k_2 \|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}, \quad k_2 > 1 \quad (\text{lemma 3}) \\ &\leq k_3 \|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} \quad \text{where } k_3 = k_1 k_2 \end{aligned}$$

Using lemma 3 we obtain :

$$\begin{aligned} \|w(h)\|_{B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})} &\leq k_3 \|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} + k_4 \|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} \quad (k_4 \text{ is given by lemma 3}) \\ &\leq k \|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} \quad k = k_3 + k_4 > 1. \end{aligned}$$

Now we can evaluate $\frac{\partial T_1}{\partial \gamma}(0, 0)$. We have :

$$\frac{\partial T_1}{\partial \gamma}(0, 0) \cdot h = [Id - \frac{\partial T}{\partial \gamma}(0, 0)] \cdot h, \quad h \in B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \quad (4.4.28)$$

where Id is the identity mapping of $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$. we calculate $\frac{\partial T}{\partial \gamma}(0, 0) \cdot h$:

$$T(0, \gamma) = -\frac{F^2}{2} \left\{ \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}(\cdot, 1) - \frac{\gamma'}{(1+\gamma)^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\cdot, 1) \right]^2 + \frac{1}{(1+\gamma)^2} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\cdot, 1) \right)^2 + \frac{2}{1+\gamma} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\cdot, 1) \right\}_{|b=0}$$

4.4. SOLUTION OF THE FREE SURFACE PROBLEM

We derive with respect to γ in the direction h at $\gamma = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \gamma}(0,0) \cdot h &= -\frac{F^2}{2} \left\{ 2 \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}(\cdot, 1) - \frac{\gamma'}{(1+\gamma)^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}(\cdot, 1) \right]_{|b=\gamma=0} \times \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}(\cdot, 1) - \frac{\gamma'}{(1+\gamma)^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}(\cdot, 1) \right] \cdot h + \right. \\ &\left. \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \right)^2(\cdot, 1)_{|b=\gamma=0} \cdot h - 2 \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}(\cdot, 1) \right]_{|b=\gamma=0}^2 \cdot h - 2 \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}(\cdot, 1) \right]_{|b=\gamma=0} \cdot h + 2 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}(\cdot, 1)_{|b=\gamma=0} \right) \cdot h \right\} \end{aligned}$$

which gives :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \gamma}(0,0) \cdot h &= -F^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}(\cdot, 1)_{|b=\gamma=0} \right) \cdot h \right\} \\ &= -F^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma}(\cdot, 1)_{|b=\gamma=0} \right) \cdot h \right\} \\ &= -F^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}(w(h)). \end{aligned}$$

We replace $\frac{\partial T}{\partial \gamma}(0,0) \cdot h$ by its expression in (4.4.28) and we find :

$$\frac{\partial T_1}{\partial \gamma}(0,0) \cdot h = [Id + F^2 \frac{\partial w}{\partial \tilde{y}}] \cdot h.$$

4.4.2 Inversibility of $\frac{\partial T_1}{\partial \gamma}(0,0)$:

To prove the inversibility of $\frac{\partial T_1}{\partial \gamma}(0,0) = Id + F^2 \frac{\partial w}{\partial \tilde{y}}$, it suffices to show that :

$$\left\| F^2 \frac{\partial w}{\partial \tilde{y}} \right\|_{\mathcal{L}(B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}), B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R}))} < 1$$

We have :

$$\begin{aligned} \left\| F^2 \frac{\partial w}{\partial \tilde{y}} \right\|_{\mathcal{L}(B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}), B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R}))} &= F^2 \sup_{h \neq 0} \frac{\left\| \frac{\partial w}{\partial \tilde{y}} \right\|_{B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})}}{\|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}} \leq F^2 \sup_{h \neq 0} \frac{\|w(h)\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}}{\|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}} \\ &\leq F^2 \sup_{h \neq 0} \frac{k \|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}}{\|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}} \leq F^2 k. \text{ (see theorem 4)} \end{aligned}$$

It suffices that $F^2 k < 1$ for the inversibility of $\frac{\partial T_1}{\partial \gamma}(0,0)$. Then the inversibility of $\frac{\partial T_1}{\partial \gamma}(0,0)$ is obtained for $F \in]0, \frac{1}{\sqrt{k}}[$.

These results achieve the proof of the theorem 1.

4.5 Conclusion

In this work, we have established a local result of existence and uniqueness of the solution when the Froude number takes values in $]0, K[\subset]0, 1[$. More precisely for a given small obstacle b in $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$, there exists a unique function γ in $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ describing the perturbation of the free surface. The result established here does not exclude the existence of solutions in other spaces. In [27] it is said that there is no uniqueness of the solution when $F < 1$. However, in our paper, we have solved without linearization the problem of existence and uniqueness, using the implicit function theorem in subspaces of Holder spaces.

ANNEX : Proof of the proposition 4.1

The proof of this proposition is given as follows :
First, consider the homogeneous problem :

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta v = f_1 & \text{in } Q \\ v(., 1) = v(., 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R} \end{cases}$$

First of all , there exists a weak solution $v \in \widetilde{H}^2(Q) := \{v \in H^2(Q) ; v(., 1) = v(., 0) = 0\}$.

Because Δ is coercive, self adjoint operator from $\widetilde{H}^2(Q)$ into $L^2(Q)$ and f_1 obviously belongs to $L^2(Q)$, then we obtain that v is a classical solution in $\mathcal{C}^{2,\lambda}(\overline{Q})$

To prove that $v \in B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$, we must show that :

$$\sup_{k+l \leq 2} \sup_Q e^{c|x|} |D_x^k D_y^l v| < \infty.$$

For this we use the result established in [15] where we replace the operator L by $-\Delta$ (Δ is the laplace operator). We conclude that there exists $\tilde{c} > 0$ such that for each $c \in]0, \tilde{c}[$, the problem (1) has a unique solution in $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$ when f_1 is given in $B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})$.

We return to the nonhomogeneous problem :

$$\begin{cases} \Delta v = b_1 & \text{in } Q \\ v(x, 1) = b_2(x), & x \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) = b_3(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

We put $v(x, y) = v_1(x, y) + h_1(x, y)$ where v_1 verify :

$$\begin{cases} \Delta v_1 = \Delta v - \Delta h_1 & \text{in } Q \\ v_1(x, 1) = b_2(x), & x \in \mathbb{R} \\ v_1(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

We determinate h_1 :

$$\begin{cases} v(x, 1) = b_2(x) = b_2(x) + h_1(x, 1) \\ v(x, 0) = b_3(x) = 0 + h_1(x, 0) \end{cases}$$

it suffices that :

4.5. CONCLUSION

$$h_1(x, y) = (1 - y)b_3(x).$$

Then we have :

$$v(x, y) = v_1(x, y) + (1 - y)b_3(x)$$

where v_1 verify :

$$\begin{cases} \Delta v_1 &= b_1 - \Delta((1 - y)b_3(x)) \text{ in } Q \\ v_1(x, 1) &= b_2(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ v_1(x, 0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

We put :

$$v_1(x, y) = v_2(x, y) + h_2(x, y)$$

where v_2 verify :

$$\begin{cases} \Delta v_2 &= \Delta v_1 - \Delta h_2 \text{ in } Q \\ v_2(x, 1) &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ v_2(x, 0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

We determinate $h_2(x, y)$:

$$\begin{cases} v_1(x, 1) &= b_2(x) = 0 + h_2(x, 1) \\ v_1(x, 0) &= 0 = 0 + h_2(x, 0) \end{cases}$$

Then :

$$\begin{cases} h_2(x, 1) &= b_2(x) \\ h_2(x, 0) &= 0 \end{cases} .$$

It suffices that :

$$h_2(x, y) = b_2(x)y.$$

Then we have :

$$v_1(x, y) = v_2(x, y) + yb_2(x)$$

and :

$$v(x, y) = v_2(x, y) + yb_2(x) + (1 - y)b_3(x)$$

where v_2 verify :

$$\begin{cases} \Delta v_2 &= b_1 - \Delta((1 - y)b_3(x)) - \Delta(yb_2(x)) = F_2(x, y) \text{ in } Q \\ v_2(x, 1) &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ v_2(x, 0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

4.5. CONCLUSION

It is evident that $F_2 \in B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})$ because $b_1 \in B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})$ and $(b_2, b_3) \in B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$. Then $v_2 \in B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$. We deduce that $v \in B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$.

Proof of lemma 3 :

We put

$$u(x, y) = h(x)y$$

The functions $(x, y) \mapsto h(x)$ and $(x, y) \mapsto y$ are in $\mathcal{C}^{2,\lambda}(Q)$, then $(x, y) \mapsto h(x)y$ is in $\mathcal{C}^{2,\lambda}(Q)$. We have also :

$$\sup_{(x,y) \in Q} \sup_{k+l \leq 2} e^{c|x|} \left| D_x^k D_y^l u(x, y) \right| < \infty.$$

Then

$$u(x, y) = h(x)y \in B_c^{2,\lambda}(Q).$$

Now we show that :

$$\|h(x)y\|_{B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})} \leq k \|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}.$$

We have

$$\|h(x)y\|_{B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})} = \sum_{k+l \leq 2} \sup_{(x,y) \in Q} e^{c|x|} \left| D_x^k D_y^l (h(x)y) \right| +$$

$$\sup_{k+l=2} \sup_{(x,y) \neq (x',y')} \frac{|(D_x^k D_y^l (h(x)y)(x, y) - (D_x^k D_y^l (h(x)y)(x', y'))|}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{\lambda/2}} =$$

$$\sup_{(x,y) \in \overline{Q}} e^{c|x|} |h(x)y| + \sup_{(x,y) \in \overline{Q}} e^{c|x|} |h'(x)y| + \sup_{(x,y) \in \overline{Q}} e^{c|x|} |h''(x)y| + \sup_{(x,y) \in \overline{Q}} e^{c|x|} |h(x)| +$$

$$\max \left\{ \sup_{(x,y) \neq (x',y')} \frac{|h''(x)y - h''(x')y'|}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{\lambda/2}}, \sup_{(x,y) \neq (x',y')} \frac{|h'(x) - h'(x')|}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{\lambda/2}} \right\} \|h(x)y\|_{B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})}$$

$$\leq 2 \|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} + \|h\|_{B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})} + \sup_{(x,y) \neq (x',y')} \frac{|h''(x)y - h''(x')y'|}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{\lambda/2}}.$$

We have :

$$\sup_{(x,y) \neq (x',y')} \frac{|h''(x)y - h''(x')y'|}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{\lambda/2}} \leq \sup_{(x,y) \neq (x',y')} \frac{|h''(x)y - h''(x')y + h''(x')y - h''(x')y'|}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{\lambda/2}}$$

$$\leq \sup_{x \neq x'} \frac{|h''(x) - h''(x')|}{|x-x'|^\lambda} + \sup_{(x,y) \neq (x',y')} \frac{|h''(x')| |y-y'|}{|y-y'|^\lambda}$$

$$\leq \|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} + |y-y'|^{1-\lambda} \|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} \leq 2 \|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}$$

4.5. CONCLUSION

Then we obtain :

$$\|h(x)y\|_{B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})} \leq (4 + c) \|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}$$

and :

$$\|h(x)y\|_{B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})} \leq k \|h\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}$$

where $k > 1$.

Conclusion. Partie A.

Le problème d'un écoulement fluvial, a été traité numériquement par plusieurs auteurs cités dans l'introduction générale. FREDERIC HELEIN ([27]) l'a traité au point de vue théorique mais en le linéarisant. Nous avons considéré ce problème au chapitre 4 et nous avons établi un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème non linéarisé, notons que les recherches bibliographiques montrent que ce problème n'a pas été traité auparavant.

Le cas d'un écoulement torrentiel est traité théoriquement et numériquement. Dans la partie numérique, à travers tous les tests réalisés sur différents obstacles, nous avons constaté que la frontière libre épouse la forme du fond; un des avantages de notre méthode de minimisation est qu'elle n'est pas limitée dans le choix de l'obstacle, d'autre part, nous avons un gain en temps calcul car la discrétisation du domaine Ω n'a lieu que sur $\partial\Omega$. Notons que cette méthode est conçue uniquement pour le cas torrentiel ($F > 1$) car cette hypothèse nous permet de supposer que la frontière libre redevient horizontale à droite de l'obstacle et donc ne pose pas de problème de condition aux limites en $x = L$, ce qui n'est pas évident lorsque $F < 1$. Notons que notre processus itératif présente une forte sensibilité au choix de la condition initiale et ne converge pas lorsque la hauteur de la bosse est très proche de un; ceci s'explique par le fait que le domaine Ω perd sa connexité.

PARTIE B.

Dans cette partie constituant le dernier chapitre de cette thèse, nous commençons par décrire le modèle que nous étudions, nous exposons la résolution numérique du problème puis nous donnons les résultats obtenus. Nous terminons cette partie par deux annexes ; dans l'annexe A, on fait un rappel sur une méthode spectrale basée sur les polynômes de Laguerre et dans l'annexe B, nous déterminons les points d'intégration de Gauss et de Gauss-Radeau.

Nous utilisons une méthode pseudo-spectrale de type Laguerre pour étudier la stabilité linéaire d'un écoulement de convection mixte au point de stagnation bidimensionnel non orthogonal. L'écoulement de base résulte de la superposition de l'écoulement classique de Hiemenz et d'un écoulement de cisaillement induit par la poussée d'Archimède et l'effet d'incidence de l'écoulement extérieur. Sa structure s'apparente à celle de l'écoulement observé au point de séparation. Une définition appropriée du nombre de Grashof permet de ramener la détermination des conditions critiques d'apparition d'instabilités tridimensionnelles à celles des conditions critiques relatives à l'écoulement de Hiemenz.

Chapitre 5

Influence des effets thermiques sur l'écoulement au point de stagnation bidimensionnel non orthogonal.

Influence des effets thermiques sur l'écoulement au point de stagnation bidimensionnel non orthogonal.

5.1 Introduction

We examine the influence of thermal convection on the laminar two-dimensional flow of an incompressible fluid impinging obliquely on a heated flat plate. The flow under consideration is a generalization of the classical Hiemenz flow [29] which occurs in the boundary layer, near an orthogonal stagnation point. In a real situation, this flow results when a uniform stream approaches a blunt two-dimensional body of finite curvature. The investigations in this area are motivated by the possibility of solving exactly the boundary layer equation at the stagnation point and by their relevance to a wide range of engineering applications. Basic insight into the physical mechanisms involved at the leading edge and nose regions of bodies in high speed flight can be achieved by considering the model of stagnation point flow. Moreover, this simple model would enable us to understand how a boundary layer begins to develop and therefore to determine its evolution from the stagnation point whose location is hence of capital importance. Obliqueness of the free stream is believed to have applications to the reattachment zone of certain separated flows and in the problem of premixed laminar flame extinction.

Due to the many different ways by which such flows can be established, the study of their stability is of capital interest, as, for instance, in the receptivity of acoustic disturbances in steady boundary layer flows on airfoils or in vapor deposition processes used in semiconductor manufacture. It is known since the work by Wilson and Gladwell [58] that the Hiemenz flow is linearly stable to three-dimensional disturbances. By developing a nonlinear analysis, Lyell and Huerre [39] found that the same flow can be destabilized by disturbances of sufficiently high level. Hall et al, [26] showed that the flow can also be destabilized with sufficient cross flow in the free stream. More recently, Kerr and Dold [33] found that the Hiemenz flow is nonlinearly unstable to three-dimensional disturbances and gave a new class of steady state three-dimensional nonlinear solutions to the Navier Stokes equations; these

5.2. NOMENCLATURE

consist of a periodic array of counter rotating vortices with the axes aligned with streamwise directions.

When heat transfer is present and in the forced convection case, Sutura [51] found that the terminal boundary layer is substantially sensitive to vorticity input of the mean flow. When buoyancy convection is taken into account, the orientation of the heated wall with respect to the gravity field is of fundamental importance. In the horizontal case Chen et al. [16] found that a critical Rayleigh number exists above which thermal excitation generates three-dimensional unstable disturbances. Amaouche [3] showed that if the heated plate is not horizontal, buoyancy induces a tangential component that drastically modifies the Hiemenz flow in the neighborhood of the stagnation point. The result is the appearance of a region where the flow acquires a structure similar to that observed in separated flows. The stagnation point is displaced from its position in the Hiemenz flow and the displacement is proportional to the Grashof number and decreases as the Prandtl number is raised. Near the stagnation point, the flow is primarily controlled by buoyancy.

When the main stream impinges on the wall at some angle of incidence, an analogous behaviour is obtained without heating the plate. In this problem discussed by Stuart [50], Tamada [52] and more recently by Dorrepaal [19], the stream function splits again into a Hiemenz and a tangential components. The primary consequence of the free stream obliqueness is the shift of the stagnation point toward the incoming flow; this shift increases when decreasing the free stream incidence.

The interplay between obliqueness and thermal effects and their influence on the linear stability problem has been analyzed by Lasseigne and Jackson [37] by using temperature dependant laws for viscosity and density. They showed, under the circumstances, that the stagnation point shifts away from the incoming stream as the angle of attack is decreased and that this angle can be eliminated by a proper scaling when considering the stability characteristics of the mean flow.

When the effects of mixed convection and of the free stream incidence are both taken into account, several situations may arise depending on these mechanisms act to either favor or opposite each other. In the following, we examine at first the major consequence of this interaction on the basic flow. After this, the linear stability of the basic flow to three-dimensional disturbances is analyzed.

5.2 Nomenclature

a, b constants characterizing the outer flow	(s^{-1})
F_0, F_1, G dimensionless functions describing the boundary layer flow	
g gravity acceleration	$(m.s^{-2})$
Gr Grashof number	
$\hat{G}r$ modified Grashof number	
f, g, h renormalized functions corresponding to F_0, F_1, G	
\mathbf{i}, \mathbf{j} unit vectors along x and y axis	
L_1^*, L_2^* differential operators	
L_n nth order Laguerre polynomial	
Nu Nusselt number	
p basic pressure	$(kg.m^{-1}.s^{-2})$
\tilde{p} pressure perturbation	$(kg.m^{-1}.s^{-2})$

5.3. BASIC EQUATIONS

\tilde{Pr}	Prandtl number	
q	dimensionless wave number	
R_1, R_2	parameters indicative of the importance of thermal and obliqueness effects	
T	temperature	(K)
(u, v)	dimensionless basic velocity components along x and y axis	
(\tilde{u}, \tilde{v})	perturbations of (u, v)	
\mathbf{v}	basic velocity field	($m^{-1}.s^{-1}$)
\mathbf{v}_e	external velocity field	($m^{-1}.s^{-1}$)
\tilde{w}	spanwise velocity component	
(x^*, y^*, z^*)	dimensional coordinates	(m)
(x, y, z)	dimensionless coordinates	
x_s	stagnation point abscissa	
\hat{y}	modified normal coordinate	
\hat{y}_k	kth collocation node	

Greek symbols

α	inclination of the y axis with respect to the vertical	
β	coefficient of thermal expansion	(K^{-1})
γ	angle of attack of the incoming flow	
$\boldsymbol{\lambda}$	vertical unit vector	
ρ	density	($kg.m^{-3}$)
ν	kinematic viscosity	($m^2.S^{-1}$)
τ	wall shear stress	
ψ^*	dimensional basic stream function	($m^2.S^{-1}$)
ψ	dimensionless basic stream function	
θ	basic normalized temperature	
$\tilde{\theta}$	perturbation of θ	

Subscripts

c	characterizes critical values
w	refers to the wall
∂_x, ∂_y	partial derivation with respect to x and y
∞	refers to the far stream

5.3 Basic equations

We consider a Boussinesq fluid impinging on a flat plate at some angle of incidence; the plate is heated and lies in the (x^*, z^*) plane. The geometry of the problem is sketched in Fig.1 where $\boldsymbol{\lambda}$ indicates a vertical unit vector and α is the angle between $\boldsymbol{\lambda}$ and the y^* axis which is normal to the plate and pointing towards the flow. The latter is steady and two-dimensional in the (x^*, y^*) plane. The fluid properties of interest are the density ρ , the kinematic viscosity ν , the thermal expansion coefficient β , and the Prandtl number Pr . In terms of velocity and temperature fields, \mathbf{v} and T respectively, the equations describing the flow are :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5.3.1)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p / \rho = \nu \nabla^2 \mathbf{v} + g \beta (T - T_\infty) \boldsymbol{\lambda} \quad (5.3.2)$$

5.4. THE BASIC FLOW

$$Pr(\mathbf{v} \cdot \nabla)T = \nu \nabla^2 T \quad (5.3.3)$$

These equations are subjected to the boundary conditions

$$\mathbf{v}(x^*, 0) = 0, \quad T(x^*, 0) = T_w \quad (4a)$$

$$\mathbf{v}(x^*, y^*) = \mathbf{v}_e(x^*, y^*), \quad T(x^*, y^*) = T_\infty \text{ as } y^* \equiv \infty \quad (4b)$$

where p is the pressure, g is the acceleration due to the gravity, T_∞ and T_w are the constant wall temperature and the free stream temperature respectively. Finally, $\mathbf{v}_e(x^*, y^*) = a(x^* \mathbf{i} - y^* \mathbf{j}) + by^* \mathbf{i}$ is the external velocity field; \mathbf{i} and \mathbf{j} are unit vectors along x^* and y^* axes, respectively. The external flow is a combination of a linear shear flow (shear stress b) parallel to the streamwise direction and a potential stagnation point flow characterized by the constant a . In a realistically formulated problem, the cross stream component and the shear part of the streamwise component of the external velocity field start out with a linear variation with respect to y^* , transforming continuously to constant values as $y^* \rightarrow \infty$. In Hiemenz idealization which corresponds to a vanishingly small curvature, the velocity components remain proportional to y^* and tends to infinity as $y^* \rightarrow \infty$. However, this idealization has no influence on the main characteristics of the flow as shown by Wilson and Gladwell [58].

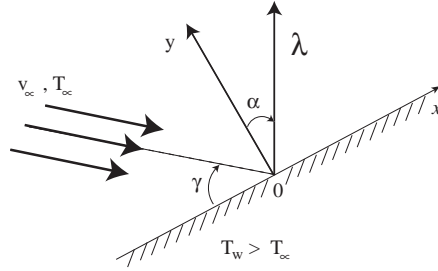


Fig. 1. Sketch of non-orthogonal stagnation point flow.

5.4 The basic flow

The continuity equation is satisfied by describing the flow in terms of the stream function ψ^* which is related to the velocity by $\mathbf{v} = \text{curl}(\psi^* \mathbf{i} \wedge \mathbf{j})$ and the pressure can be eliminated by taking the curl of (5.3.2). If the variables (x^*, y^*) , ψ^* and T are made dimensionless using the scales $\nu^{1/2}(\alpha^2 + b^2)^{-1/4}$, ν and $T_w - T_\infty$ respectively, the basic equations (5.3.2), (5.3.3) and the corresponding boundary conditions (4a), (4b) thereby take the dimensionless form :

$$\nabla^2(\nabla^2 \psi) + \psi_x(\nabla^2 \psi)_y - \psi_y(\nabla^2 \psi)_x + Gr(\theta_y \sin \alpha - \theta_x \cos \alpha) = 0 \quad (5.4.4)$$

$$\nabla^2 \theta + Pr(\psi_x \theta_y - \psi_y \theta_x) = 0 \quad (5.4.5)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_y(x, 0) = \theta(x, 0) - 1 = 0 \quad (7a)$$

$$\theta(x, y) = 0 \text{ as } y \rightarrow \infty \quad (5.4.6)$$

5.4. THE BASIC FLOW

$$\psi(x, y) = xy \sin \gamma + \frac{1}{2}y^2 \cos \gamma \quad \text{as } y \equiv \infty \quad (5.4.7)$$

where $Gr = g\beta(T_w - T_\infty)(\nu^{1/2}(a^2 + b^2)^{-1/4})^3/\nu^2$ indicates the Grashof number, $\theta = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$ is the scaled temperature and $\gamma = \tan^{-1}(2(a/b))$ is, in compliance with the standard definition, the angle at which ψ vanishes as $y \rightarrow \infty$. By setting $\gamma = \pi/2$ which corresponds to $b = 0$, the Fig. 1. gives a sketch of Hiemenz flow. A trivial solution to Eqs. (5.4.4)-(7b) serving as basic flow, is easily found in the following form which is inspired by the boundary conditions :

$$\psi(x, y) = xF_1(y) + F_0(y) \quad (8a)$$

$$\theta(x, y) = G(y) \quad (8b)$$

The case of an x dependent basic temperature is considered by Lyell [39] who imposed a linearly variable wall temperature.

Substituting these expressions in Eqs. (5.4.4), (5.4.5) gives the following differential equations for F_1 , G and F_0 :

$$F_1^{IV} + F_1 F_1''' - F_1' F_1'' = 0 \quad (9a)$$

$$G'' + Pr F_1 G' = 0 \quad (5.4.8)$$

$$F_0^{IV} + F_1 F_0''' - F_1' F_0'' + Gr \sin \alpha G' = 0 \quad (11a)$$

Eqs. (9a) and (11a) are readily integrated to give :

$$F_1''' + F_1 F_1'' - F_1'^2 + K_1 = 0 \quad (9b)$$

$$F_0''' + F_1 F_0'' - F_1' F_0' + Gr \sin \alpha G + K_2 = 0 \quad (11b)$$

where K_1 and K_2 are constants of integration to be determined by the prescribed boundary conditions which become :

$$F_1(0) = F_0(0) = F_1'(0) = F_0'(0) = 0, \quad G(0) = 1$$

$$F_1'(\infty) = \sin \gamma, \quad F_0''(\infty) = \cos \gamma, \quad G(\infty) = 0$$

The constant K_1 is immediately found to be $\sin^2 \gamma$ by taking the limit $y \rightarrow \infty$ in Eq. (9b) and by using the condition $F_1'(\infty) = \sin \gamma$.

let $y \sin \gamma - c_0(\sin \gamma)^{1/2}$, c_0 a real constant, be the asymptotic behaviour of F_1 for large y , then by taking the limit $y \rightarrow \infty$ in Eq. (11b) and by using $F_0''(\infty) = \cos \gamma$ and $F_0'(\infty) = y \cos \gamma$ we found $K_2 = c_0(\sin \gamma)^{1/2} \cos \gamma$. By setting $\hat{y} = y(\sin \gamma)^{1/2}$, $F_1(y) = (\sin \gamma)^{1/2} f(\hat{y})$, $F_0(y) = g(\hat{y})/\sin \gamma$ and $G(y) = h(\hat{y})$, Eqs. (5.4.8), (9b), (11b) and the corresponding boundary conditions take the normalized form :

$$f''' + f f'' - f'^2 + 1 = 0 \quad (5.4.9)$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1$$

$$h'' + Pr f h' = 0 \quad (5.4.10)$$

$$h(0) = 1, \quad h(\infty) = 0$$

$$g''' + f g'' - f' g' + Gr \sin \alpha (\sin \gamma)^{-1/2} h + c_0 \cos \gamma = 0 \quad (5.4.11)$$

5.5. ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE BASIC FLOW

$$g(0) = g'(0) = 0, \quad g''(\infty) = \cos \gamma$$

Note that the rescaled variables amount to take $\gamma = \pi/2$ and allow to cast Eq. (9b) in a form which is no longer dependent of the angle γ and so, which describes the classical orthogonal Hiemenz flow. Examination of Eqs. (5.4.9), (5.4.10), and (5.4.11) reveals that the temperature field and the tangential component of the flow are fully slaved to the normal component of the flow. Heat is therefore transferred by forced convection which involves the only normal component of the flow field.

The linearity of Eq. (5.4.11) allows us to look for the solution in the form

$$g(\hat{y}) = Gr \sin \alpha (\sin \gamma)^{-1/2} g_1(\hat{y}) + \cos \gamma g_2(\hat{y}) \quad (5.4.12)$$

where g_1 and g_2 must be solution of the following problems :

$$g_1''' + f g_1'' - f' g_1' + h = 0 \quad (5.4.13)$$

$$g_1(0) = g_1'(0) = g_1'(\infty) = 0$$

$$g_2''' + f g_2'' - f' g_2' + c_0 = 0 \quad (5.4.14)$$

$$g_2(0) = g_2'(0) = 0, \quad g_2''(\infty) = 1$$

Hence, the stream function finally reads :

$$\psi(x, y) = (\sin \gamma)^{1/2} [x f(\hat{y}) + R_1 g_1(\hat{y}) + R_2 g_2(\hat{y})] \quad (18a)$$

where $R_1 = Gr \sin \alpha (\sin \gamma)^{-2}$ and $R_2 = \cos \gamma (\sin \gamma)^{-3/2}$. In addition to the Hiemenz component, the flow field contains a parallel component which is composed of two parts induced by buoyancy and obliqueness.

After determining the primary velocity flow from the stream function (18a), the pressure field may be calculated by integrating the momentum equation (5.3.2); one obtains :

$$p(x, y) = -\frac{x^2}{2} (\sin \gamma)^2 + Gr \cos \alpha \int_0^y G(t) dt - \sin \gamma (f' - \frac{1}{2} f^2) + Const \quad (18b)$$

It is to be noted that the so-called tangential component of the flow velocity has not any role on the pressure field.

5.5 Asymptotic behaviour of the basic flow

The dividing streamline $\psi = 0$ and the curve $u = 0$ intersect the wall at the stagnation point where the wall shear stress vanishes. The latter is given by :

$$\tau_w = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \sin \gamma (x f''(0) + R_1 g_1''(0) + R_2 g_2''(0)) \quad (19a)$$

Hence, the stagnation point location writes :

$$x_s = -(R_1 g_1''(0) + R_2 g_2''(0)) / f''(0) \quad (19b)$$

5.5. ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE BASIC FLOW

This is the most apparent result of the conjugate effects of buoyancy free convection and obliqueness of the far stream on the boundary layer flow. At the stagnation point, the slopes of the above mentioned particular lines are :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\hat{y}}\right)_{\psi=0, \hat{y}=0} &= \frac{(R_1 + c_0 R_2) f''(0) - R_2 g_2''(0) - R_1 g_1''(0)}{3 f''^2(0)} \\ \left(\frac{dx}{d\hat{y}}\right)_{u=0, \hat{y}=0} &= \frac{3}{2} \left(\frac{dx}{d\hat{y}}\right)_{\psi=0, \hat{y}=0} \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

The last expression shows that the ratio of these slopes is universal constant ; it does not depend at all on the parameters Gr , α and γ ; this follows from the linear dependance in x of the stream function. Another quantity of particular technical interest is the Nusselt number which characterizes the rate of heat transfer ; it is given by :

$$Nu = -\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{y=0} = -(\sin \gamma)^{1/2} \frac{\partial h}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=0} = -(\sin \gamma)^{1/2} Nu_h \quad (5.5.16)$$

where Nu_h indicates the Nusselt number for the Hiemenz flow.

The asymptotic behaviour of the solutions to differential equations (5.4.9), (5.4.10), (5.4.13) and (5.4.14) far from the wall is of capital importance. This is useful for numerical computation in selecting the size of the computed domain. Possible non existence of the mean flow (8a) and (8b) may be discussed again on the basis of the knowledge of this behaviour.

For large \hat{y} the following asymptotic behaviours are easily found :

$$\begin{aligned} f(\hat{y}) &\cong \hat{y} - c_0 + O[(\hat{y} - c_0)^{-4} \exp(-\frac{1}{2}(\hat{y} - c_0)^2)] \\ h(\hat{y}) &\cong \frac{Const}{\hat{y} - c_0} \exp(-\frac{1}{2}Pr(\hat{y} - c_0)^2) \\ g_1(\hat{y}) &\cong \begin{cases} c_1 + \frac{h(\hat{y})}{(Pr^3 - Pr^2)(\hat{y} - c_0)^3} & \text{if } Pr < 1 \\ c_1 - \frac{h(\hat{y})}{\hat{y} - c_0} & \text{if } Pr = 1 \\ c_1 + \frac{Const}{(\hat{y} - c_0)^3} \exp(-\frac{1}{2}(\hat{y} - c_0)^2) & \text{if } Pr > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

Concerning the behaviour of $g_2(\hat{y})$ at large \hat{y} , it is to be noted that Eq. (5.4.14) can be solved exactly, as mentioned by Dorrepaal [19], its solution is of the form :

$$g_2(\hat{y}) = c_0 f(\hat{y}) + \tilde{f}(\hat{y}) \quad (5.5.18)$$

in which the function \tilde{f} must satisfy the corresponding homogeneous equation and the condition $\tilde{f}'(\hat{y}) = \hat{y} - c_0$ as $\hat{y} \rightarrow \infty$. Put $\tilde{f}'(\hat{y}) = \hat{y} - c_0 + \xi(\hat{y})$ and $f(\hat{y}) = \hat{y} - c_0 + \eta(\hat{y})$. Then,

5.6. LINEARIZED DISTURBANCE EQUATIONS

for large \hat{y} and after linearization, we obtain :

$$\xi'' + (\hat{y} - c_0)\xi' - \xi = (\hat{y} - c_0)\eta' - \eta$$

The solution for this equation is sought by the method of variation of parameters which leads to the behaviour :

$$g_2(\hat{y}) \cong c_2 + \frac{1}{2}\hat{y}^2 + O[(\hat{y} - c_0)^{-3} \log(\hat{y} - c_0) \exp(-\frac{1}{2}(\hat{y} - c_0)^2)] \quad (5.5.19)$$

The constants c_0 , c_1 and c_2 are obtained by numerical computation of f , g_1 and g_2 ; we found : $c_0 = 0.647900$, $c_1 = 0.379630$, $c_2 = 0.215395$.

5.6 Linearized disturbance equations

The marginal stability of the basic solution (8a),(8b) is considered here. To do this, the variables $(u, v, 0, p, \theta)$ of the basic state are augmented by disturbance quantities $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{\theta})$. The following linearized disturbance equations are thus obtained from Eqs. (5.3.1)-(5.3.3) :

$$\begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z & 0 & 0 \\ (L^* - \nabla^2 + u_x) & u_y & 0 & \partial_x & -Gr \sin \alpha \\ 0 & (L^* - \nabla^2 - u_x) & 0 & \partial_y & -Gr \cos \alpha \\ 0 & 0 & (L^* - \nabla^2) & \partial_z & 0 \\ 0 & Pr.\theta_y & 0 & 0 & (Pr.L^* - \nabla^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{p} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.6.20)$$

Homogeneous boundary conditions are required on $y = 0$ and as $y \rightarrow \infty$ since the basic variables and the disturbed ones must obey the same boundary conditions. In the system (5.6.20), L^* indicates the linear differential operator $u\partial_x + v\partial_y$.

As reported by many authors [33], [16], cross flow instability in two-dimensional stagnation boundary layers often results in the formation of periodic and stationary rolls of constant height and width axes parallel to the streamwise direction at the surface. Accordingly, we investigate the stability problem by assuming all perturbations are periodic in z . Furthermore, solutions are sought which have the same underlying properties, with respect to the streamwise coordinate, as the basic flow, e.g.,

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{p} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu_1(\hat{y}) + R_1u_{21}(\hat{y}) + R_2u_{22}(\hat{y}) \\ v_1(\hat{y})/(\sin \gamma)^{1/2} \\ w_1(\hat{y})/(\sin \gamma)^{1/2} \\ p_1(\hat{y}) \\ \theta_1(\hat{y})/\sin \gamma \end{pmatrix} \cdot \exp(i(\sin \gamma)^{1/2}.q.z) \quad (5.6.21)$$

Substitution of (5.6.21) into the system (5.6.20) then leads after some manipulations to the following eigenvalue problem governing the marginal stability.

5.7. NUMERICAL PROCEDURE AND RESULTS

$$\begin{pmatrix} L_2^* D & L_2^*(D^2 - q^2) & -\hat{G}r q^2 \\ L_2^* - 3f' & -f'' & 0 \\ 0 & -Prh' & D^2 + PrfD - q^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.6.22)$$

where $\hat{G}r = Gr \cos \alpha (\sin \gamma)^{-3/2}$ is a modified Grashof number, D denotes, as the prime, derivation with respect to the coordinate \hat{y} and L_2^* is the operator $D^2 + fD + (f' - q^2)I$. Only for some characteristic values of the so-called modified Grashof number will the problem allow a non trivial solution for given q and Pr . Note that the appropriate scaling used in (5.6.21) leads to a same eigenvalue problem than for the stability of Hiemenz flow because α and γ no longer appear explicitly in (5.6.22). Once the system (5.6.22) has been inverted, the rest of unknowns can be found from the following relations :

$$\begin{aligned} w_1 &= i(u_1 + v_1)/q \\ p_1 &= i(f' - L_2^*)w_1/q \\ u_{21} &= (L_2^* - 2f')^{-1}(g_1''v_1 + g_1'u_1 - \theta_1) \\ u_{22} &= (L_2^* - 2f')^{-1}(g_2''v_1 + g_2'u_1) \end{aligned} \quad (5.6.23)$$

5.7 Numerical procedure and results

The mean flow and the corresponding stability problem are approximated by using a pseudo-spectral method based on expansion by Laguerre's functions. The collocation nodes \hat{y}_k ($k = 1, \dots, N$) are selected to be the zeros of the Nth order Laguerre polynomial, so that the truncated error is minimized.

The particular distribution of the roots \hat{y}_k is very appropriate to approximate the boundary layer problems. An approximation $f_N(\hat{y})$ of $f(\hat{y})$ is written in the form :

$$f_N(\hat{y}) = \exp(-\hat{y}) \sum_{k=1}^N A_k \frac{\hat{y} L_N(\hat{y})}{\hat{y}_k (\hat{y} - \hat{y}_k) D L_N(\hat{y}_k)} \quad (5.7.24)$$

where L_N is the Nth order Laguerre polynomial and A_k are coefficients to be determined. The convergence of the numerical scheme has been checked by varying the number N of collocation nodes.

It has been found that 30 terms are usually sufficient to insure a good convergence. Details about theory and numerical experiments and suggestions concerning the improvement of practical performances can be found in Madey et al. [40].

The combined effects of non-orthogonality of the main stream and buoyancy act to either reinforce $0 < \gamma < \pi/2$ or oppose ($\pi/2 < \gamma < \pi$) one another. As we can see from expression (18a), these two effects tend to vanish as $|x| \rightarrow \infty$, and become increasingly important as $x \rightarrow 0$. In the favourable case, the stagnation point is at the left ($s_s < 0$) of the origin $x = 0$. When buoyancy is opposite to obliqueness, then whether the stagnation point is at the left or at the right of the origin depends upon the balance between these two mechanisms.

If the plate is sufficiently heated, which corresponds to $Gr \sin \alpha > 0.620403g_2''(0)/g_1''(0)$, buoyancy will overwhelm the effect of obliqueness of the far stream and the stagnation point is then at the left of the origin. This critical value is $Gr \sin \alpha = 1.417841$ for $Pr = 0.7$.

5.7. NUMERICAL PROCEDURE AND RESULTS

Furthermore, if Gr is decreased from Gr_1 , a second critical value depending on γ will be reached

$$(Gr_2 \sin \alpha = -\cos \gamma \cdot \sin^{1/2} \gamma (g_2''(0)/g_1''(0)), \quad \pi/2 < \gamma < \pi) \quad (5.7.25)$$

under which the non-orthogonality of the free stream overcomes buoyancy. For this second critical value of Gr , there is a balance between buoyancy and non-orthogonal effects and therefore the stagnation point remains at the origin. if Gr is decreased again, the flow is dominated by the non-orthogonal effects in the stagnation zone. The stagnation point comes then at the right of the origin.

In order to illustrate these various situations, some streamlines are drawn in Fig. 2 for $Pr = 0.7$. Fig. 2(a) displays the case corresponding to $\gamma = \pi/4$ when non-orthogonality is favourable to buoyancy. Figs 2(b) and (d) represent unfavourable cases with dominant effects of buoyancy and non orthogonality respectively whereas the critical case is shown in Fig. 2(c), all illustrated for $\gamma = 3\pi/4$.

Concerning the stability problem, the numerical procedure allows to transform the differential system (5.6.22) to an homogeneous set of linear algebraic equations for the unknowns A_k . The determinant of the associated matrix must vanish in order that a nontrivial solution exists.

The vanishing of this determinant gives the critical conditions for the appearance of a secondary flow. This is illustrated in Fig. 3 where a sequence of marginal curves in the (q, \hat{Gr}) plane is displayed for some Prandtl numbers. Each curve shows the minimum value of \hat{Gr} required to destabilize the mode of wavenumber q . A least stable point (q_c, \hat{Gr}_c) exists for each Prandtl number. These critical values are listed in the Table 1 for three selected Prandtl numbers.

If \hat{Gr} is below \hat{Gr}_c , the flow will be linearly stable. If \hat{Gr} exceeds this value, the flow will be unstable. One can observe that the critical values \hat{Gr}_c and q_c increase with increasing the Prandtl number, this means that decreasing the thermal boundary layer thickness has a stabilizing effect on the flow. Another distinguishing feature is that the product $q_c Pr^{-1/3}$ is almost constant, which signifies that the critical wavelength is practically proportional to the thermal boundary layer thickness, especially for relatively large Prandtl numbers.

Figs. 4(a)-(f) illustrate the predicted structure of the secondary flow at the instability threshold (q_c, \hat{Gr}_c) for two Prandtl numbers. Note that the magnitude of the eigenfunctions are essentially arbitrary since the system of equations is homogeneous. It is also worth noting that the decay rate of the amplitude w_1 is somewhat greater than the other amplitudes.

The boundary layer for the spanwise velocity is then thicker than the thermal boundary layer and those corresponding to the other components of the secondary flow velocity.

Fig. 4(e) shows that the spanwise velocity exhibits a change of sign along the normal to the plane which suggests that a reverse flow occurs in the spanwise direction.

This behaviour confers to the secondary flow its cellular structure. Furthermore, it is to be noted that the streamwise velocity of the secondary flow can be neglected withing 10 % besides the other components ; this indicates that the secondary flow is nearly two-dimensional in the (y, z) plane.

5.8 Conclusion. Partie B

The outcome of the analysis herein can be summarized as follows : The basic flow exhibits a structure similar to that observed near a separation point. The effects of obliqueness and buoyancy may reinforce or oppose one another. When in competition, the stagnation point is either at the left or at the right of the origin depending on the balance between these two mechanisms. It is to be noted that heat is convected exclusively by the Hiemenz component of the flow.

When considering the stability problem, it has been found that an appropriate normalization of the disturbance quantities allows to eliminate the influence of the angles α and γ ; this means that the flow induced by obliqueness and buoyancy does not play any role in the occurrence of the instability. A minimum value of the modified Grashof number, depending on Prandtl number, is required to destabilize the basic flow.

5.9 figures et annexes

Dans cette section, nous illustrons par quelques figures, les résultats numériques obtenus, ensuite nous faisons un rappel sur les polynômes de Laguerre, la détermination des points d'intégration de Gauss et de Gauss-Radeau et nous expliquons pourquoi le rejet et la reprise de la méthode spectrale basée sur les polynômes de Laguerre.

5.9. FIGURES ET ANNEXES

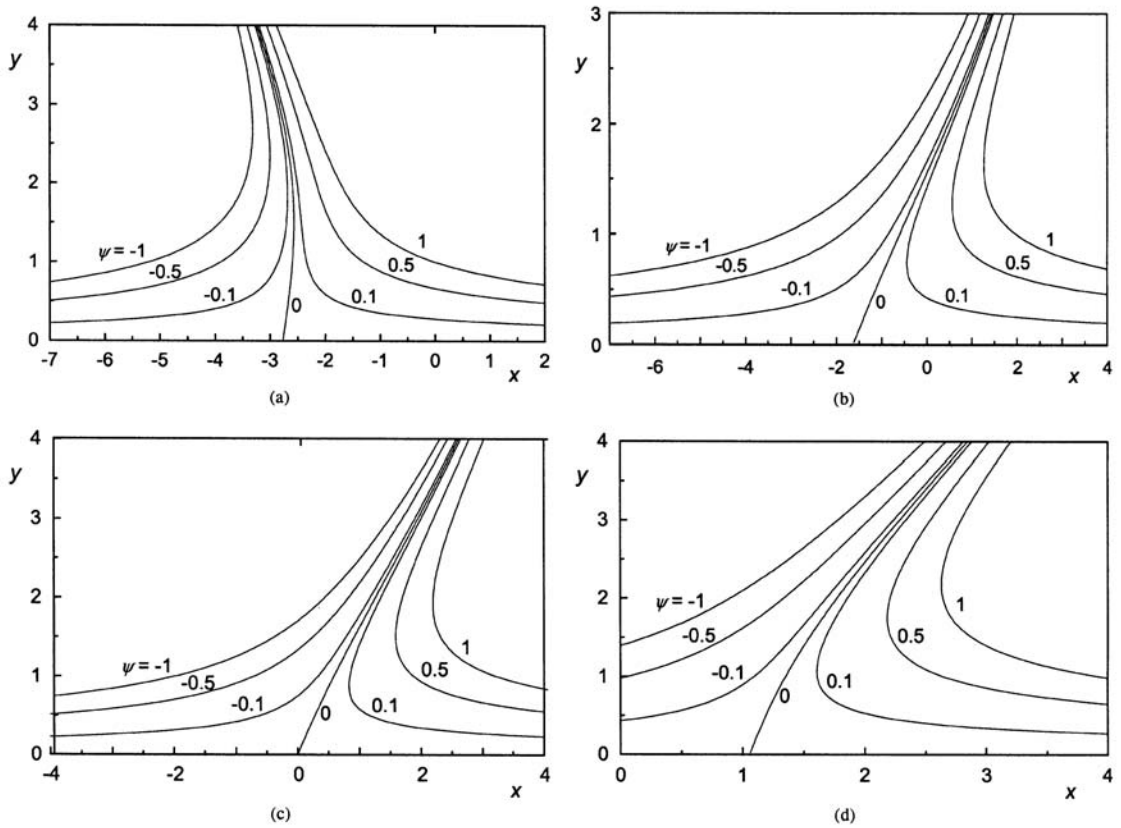


Fig. 2. Plot of streamlines for $Pr = 0.7$. (a) Favourable case $\gamma = \pi/4$, $\widehat{Gr} \sin \alpha = 1.417841$; (b) Unfavourable case with dominant buoyancy effects, $\gamma = 3\pi/4$, $\widehat{Gr} \sin \alpha = 3$. (c) Critical case, $\gamma = 3\pi/4$, $\widehat{Gr} \sin \alpha = 1.358879$. (d) Unfavourable case with dominant effects of obliqueness, $\gamma = 3\pi/4$, $\widehat{Gr} \sin \alpha = 0.3$.

Table 1
Least stable point in the (q, \widehat{Gr}) plane for some values of Pr

Pr	0.7	3	10
q_c	0.6953	1.0720	1.6313
\widehat{Gr}_c	36.73	40.05	45.20
$q_c Pr^{-1/3}$	0.783	0.743	0.757

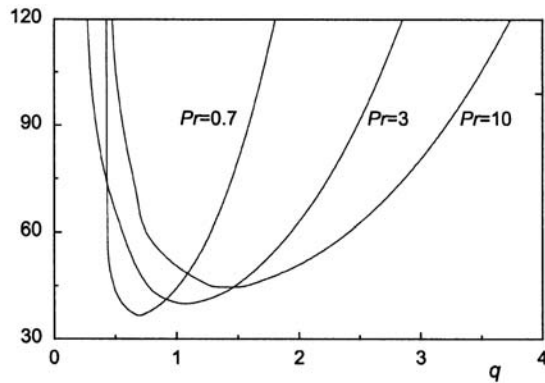


Fig. 3. Neutral stability curves.

5.9. FIGURES ET ANNEXES

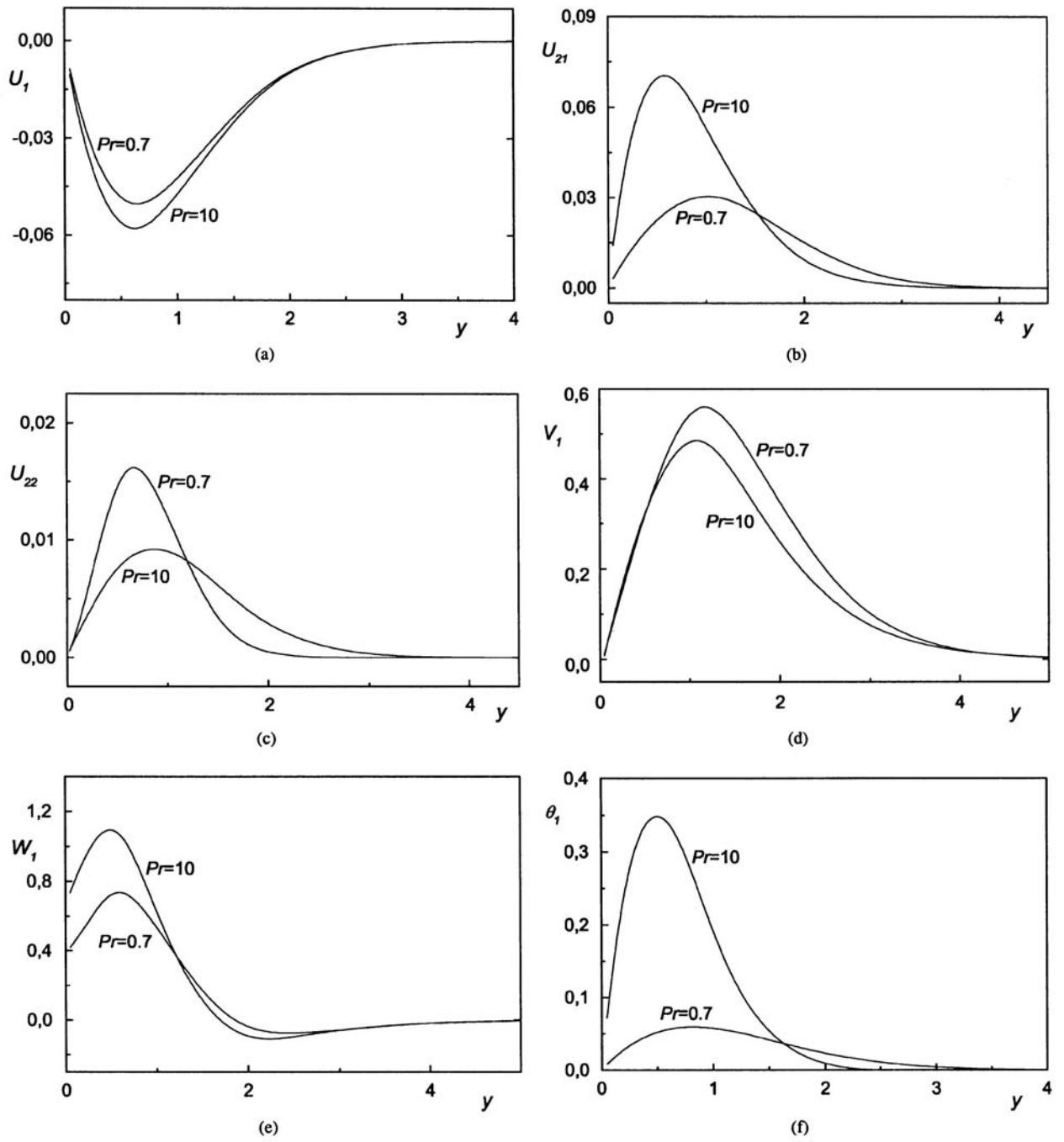


Fig. 4. Eigenfunctions at the onset of instability (a)–(c) Streamwise velocity components. (d) Normal velocity component. (e) Spanwise velocity component. (f) Temperature.

Annexe A.

Introduction

La méthode spectrale ou pseudo-spectrale de type Laguerre utilisée pour approcher des solutions d'équations aux dérivées partielles, a été antérieurement rejetée, cependant ces dernières années, il a été vu qu'il y a une classe de fonctions pour lesquelles elle peut en fait être appliquée. Nous donnons en quelques lignes, pourquoi le rejet et la reprise de cette méthode.

Rappelons tout d'abord, le résultat classique suivant :

Si f est une fonction définie sur un intervalle I , X un ensemble de $N + 1$ points distincts dans I , et si l'on désigne par $P(f, X)$ le seul polynôme de degré inférieur ou égal à N qui coïncide avec f en tous les points de X , on a :

$$\begin{aligned} \| f - P(f, X) \|_{L^\infty(I)} &= \sup_{y \in I} | f(y) - P(f, X)(y) | \\ &\leq L(X) \inf_{p \in P_N} \| f - p \|_{L^\infty(I)}, \quad (1) \end{aligned}$$

(ici P_N désigne l'ensemble des polynômes sur I de degré inférieur ou égal à N , à coefficients réels). L'estimation globale de $\| f - P(f, X) \|_{L^\infty(I)}$ obtenue par (1) fait apparaître deux termes indépendants l'un de l'autre.

D'une part, la quantité $\inf_{p \in P_N} \| f - p \|_{L^\infty(I)}$ ne dépend que de la régularité de f sur I . (Par exemple, si f est analytique sur un voisinage de I , ce terme tend vers zéro, au moins aussi vite que ρ^N , avec $\rho < 1$.)

D'autre part, la constante de Lebesgue $L(X)$ ne dépend que de la répartition des points sur I .

Rappelons à cet effet, que ERDÖS [20] a montré que, si X possède $N + 1$ points, $L(X)$ se comporte asymptotiquement au moins comme $\text{Log}N$ quand N tend vers l'infini.

Dans le cas où I est borné (par exemple si $I = [-1, 1]$, ce comportement en $\text{Log}N$ n'est obtenu que pour un ensemble X de points, s'accumulant aux extrémités de I (i.e. en $+1$ et -1).

Ceci est le cas pour l'ensemble des points utilisés pour une formule d'intégration numérique de Gauss, associée aux polynômes de Tchebycheff ou plus généralement, aux polynômes de Jacobi.

Cependant, si les points sont choisis équidistants sur I , ou bien accumulés à une seule extrémité de I , $L(X)$ croît au moins aussi vite que τ^N (avec $\tau > 1$). Nous pouvons conclure les deux points suivants :

1. Pour une classe de fonction f de régularité globale donnée, l'ensemble X de points de

l'intervalle I qui donnera la meilleure approximation de f par une méthode de collocation, sera celui pour lequel la constante $L(X)$ est la plus faible possible. (Par exemple, pour un intervalle borné I , X sera un ensemble de points de type Tchebycheff ou Jacobi.)

2. Cependant, le résultat global fourni par (1) ne donne plus de renseignements pour un choix optimal de l'ensemble X de points dans le cas de l'approximation de fonctions n'ayant que des propriétés locales de régularité. Ainsi, de bons résultats peuvent être obtenus malgré une mauvaise valeur de la constante $L(X)$, comme ceci est le cas pour une méthode spectrale de type Laguerre où les points de collocation de l'intégration numérique de Gauss s'accroissent en une seule extrémité.

Nous pouvons conclure qu'une telle méthode peut être adaptée aux fonctions ayant un comportement limite amorti à l'infini.

Rappel sur les polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constituent la famille de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire :

$$(\phi, \psi) \mapsto \int_0^{+\infty} \phi(x)\psi(x)e^{-x} dx$$

Ils vérifient :

$$\int_0^{+\infty} L_n(x)L_m(x)e^{-x} dx = \delta_{nm}, \quad (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad (\text{A.1})$$

δ_{nm} étant le symbole de Kronecker.

Comme toute famille de polynômes orthogonaux, ils satisfont une relation de récurrence qui est la suivante :

$$\begin{aligned} nL_n &= (-x + 2n - 1)L_{n-1} - (n - 1)L_{n-2}, \\ L_0 &= 1, \\ L_1 &= 1 - x. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Les premiers termes de la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont :

$$L_0(x) = 1; \quad L_1(x) = 1 - x;$$

$$L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2};$$

$$L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3;$$

$$L_4(x) = 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

et

$$L_5(x) = 1 - 5x + 5x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5.$$

Ils vérifient l'équation différentielle suivante :

$$(xe^{-x}L_n')' = -nL_ne^{-x}, \quad (\text{A.3})$$

qui s'écrit :

$$xL_n'' + (1 - x)L_n' + nL_n = 0. \quad (\text{A.4})$$

5.9. FIGURES ET ANNEXES

Ces polynômes vérifient également :

$$\int L_n = -L_{n+1} + L_n, \quad (\text{A.5})$$

qui s'écrit aussi :

$$L'_n = -\sum_{j=0}^{n-1} L_j$$

relation de laquelle on peut déduire, par analogie avec (A.2) :

$$\begin{aligned} (n-1)L'_n &= (2(n-1) - x)L'_{n-1} - (n-1)L'_{n-2}, \\ L'_0 &= 0, \\ L'_1 &= -1, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

On peut noter, en outre, le résultat suivant :

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré au plus N et P' le polynôme dérivé de P .

On peut écrire :

$$P(x) = \sum_{k=0}^N a_k L_k(x)$$

et

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k L_k(x).$$

De plus, la formule (A.5) et une transformation d'Abel donnent :

$$P'(x) = -\sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=k+1}^N a_j \right) L_k.$$

Les coefficients $(b_k)_{k=0, \dots, N-1}$ se déduisent des $(a_k)_{k=0, \dots, N}$ au moyen de l'algorithme en N opérations suivant :

$$\begin{aligned} b_{N-1} &= -a_N, \\ b_k &= b_{k+1} - a_{k+1}, \quad k = N-2, \dots, 0 \end{aligned}$$

Annexe B.

DETERMINATION DES POINTS D'INTEGRATION DE GAUSS ET DE GAUSS-RADEAU.

1) Points d'intégration de Gauss.

Les points d'intégration de Gauss sont les zéros de $L_n^\alpha(x)$. Dans ce qui suit, on se propose justement de déterminer les zéros de $L_n^\alpha(x)$. La méthode de Newton-Raphson pourrait être utilisée, pour les premiers polynômes de Laguerre, $n \leq 10$. Au delà et en raison de la variation rapide des valeurs du polynôme de Laguerre (tangente presque verticale en zéro), il est difficile de se rapprocher de la racine du polynôme par la méthode de Newton. Une autre technique est adaptée, elle est basée sur ce qui suit :

Dans le cas général, les polynômes de Laguerre vérifient la relation de récurrence suivante :

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) - (2n+\alpha+1-x)L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0 \quad (1)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

avec $L_{n-1}^\alpha(x) = 0$

Supposons que nous nous intéressons aux zéros de $L_{n+1}^\alpha(x)$. Ce polynôme possède $(N+1)$ racines distinctes et réelles.

La relation (1) peut être appliquée pour $n = N$ et $x = x_i$ où $x = x_i$ est une racine de $L_{N+1}^\alpha(x)$.

La relation (1) se réduit alors à :

$$-(2N+\alpha+1-x_i)L_N^\alpha(x_i) + (N+\alpha)L_{N-1}^\alpha(x_i) = 0$$

que nous préférons écrire sous la forme :

$$-(N+\alpha)L_{N-1}^\alpha(x_i) + (2N+\alpha+1-x_i)L_N^\alpha(x_i) = 0 \quad (2)$$

Ecrivons maintenant la relation (1) pour $x = x_i$ et en faisant varier n de 0 à $N-1$, il vient :

- pour $n = 0$;

$$L_1^\alpha(x_i) - (\alpha+1-x_i)L_0^\alpha(x_i) = 0$$

ou encore :

$$(\alpha+1-x_i)L_0^\alpha(x_i) - L_1^\alpha(x_i) = 0$$

- pour $n = 1$;

$$2L_2^\alpha(x_i) - (2+\alpha+1-x_i)L_1^\alpha(x_i) + (1+\alpha)L_0^\alpha(x_i) = 0$$

Perspectives

Les extensions de de travail de thèse sont multiples, tant du du point de vue théorique que numérique, et certaines ont déjà été entreprises.

On se propose de calculer la dérivée seconde par rapport au domaine de la fonctionnelle d'énergie, afin d'étudier la stabilité de la solution de notre problème à frontière libre.

On va, d'autre part, considérer le même problème en introduisant explicitement le temps dans les équations.

Une application intéressante de ce travail au phénomène de "Tsunami" est envisagée. L'effondrement de bords côtiers ou un mouvement du fond causé par un tremblement de terre engendre une déformation du fond marin que le type de modèle étudié dans cette thèse permet de modéliser.

Dans le cadre numérique, nous souhaitons appliquer une méthode de recuit simulé pour déterminer le minimum de la fonctionnelle d'énergie pour déterminer la surface libre d'équilibre. A notre connaissance, cette méthode n'a pas été utilisée dans ce cadre de problème.

Bibliographie

- [1] ABERGEL. F. et BONA. J. L., A Mathematical Theory For Viscous, Free-Surface Flows Over a Perturbed Plane, *Report NO. AM 81*, February (1991)
- [2] AKYLAS. T. R., On the excitation of long nonlinear water waves by a moving pressure distribution, *J. Fluid Mech.* 141, 455-466, (1984)
- [3] AMAOUCHE. M., On some mixed convection flows described by exact solutions of Prandtl equations, *European J. Mech. B/Fluids* 10, 295-312, (1991)
- [4] AMAOUCHE. M. et HERNANE-BOUKARI. D., Influence of thermal convection on non-orthogonal stagnation point flow, *International Journal of thermal Sciences*, vol 42, 303-310, (2003)
- [5] BAI K. J., A variational method in potential flows with a free surface, *University of California, Berkeley, Rep NA 72-2*, (1972)
- [6] BAI. K. J. et YEUNG. R. W., Numerical solutions for free surface flow problems, *10th Symp. Nav. Hydrodyn.*, 609, M.I.T., Cambridge, Massachusetts (1974)
- [7] BAI K. J., A localized finite element method for steady two-dimensional free surface flow problems, *First Internat. Conf. On Numer. Ship Hydrodyn*, Gaithersburg, Maryland, 209 (1975)
- [8] BATCHELOR. G. K., An introduction to fluids dynamics, *Cambridge University Press* (1967)
- [9] BELWARD. S. R., W. W. READ. S. R. and P. J. HIGGINS., Iterative schemes for series solutions to Laplacian free boundary problems in Computational techniques and applications : *CTAC95 (eds. R.L. May and A.K. EASTON)*, (World Scientific, Singapore), 669-676, C98, C102, C104, C112, (1996)
- [10] BELWARD. S.R., and L. K. FORBES., Fully nonlinear two-layer flow over arbitrary topography, *J. Eng. Math.* 27,419-432, C98, C105, (1993)
- [11] BELWARD. S.R., and L. K. FORBES., Interfacial waves and hydraulic falls : some applications to atmospheric flows in the Lee of mountains, *J. Eng. Math.* 29,161-179, C98, (1995)
- [12] BOUHADEF. M., Contribution à l'étude des ondes de surface dans un canal. Application à l'écoulement au dessus d'un obstacle immergé. Thèse de Doctorat Es Sciences Physiques présentée à l'université de Poitiers (U.E.R. Centre d'Etudes Aérodynamiques et thermiques), (1988)
- [13] CANUTO. C., HUSSAINI. M. Y., QUARTERONI. A. and ZHANG. T.A., Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, New York, C110, C111, (1988)
- [14] CHAKRABARTI. S.K et NAFTZGER. R.A., Nonlinear wave forces on halfcylinder an hemisphere, *J. of the Waterways Harb. and Coastal Engineer. Division*, 189, (1974)

BIBLIOGRAPHIE

- [15] CHARLES. J. AMICK., Properties Of Steady Navier-Stokes Solutions For Certain Unbounded Channels And Pipes, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and applications, Vol. 2 No 6, pp. 689-720*, (1978)
- [16] CHEN. K., CHEN. M. M., SOHN. C.W., Thermal instability of two-dimensional stagnation point boundary layers, *J. Fluid Mech. 132, 49-63*, (1983)
- [17] CHENOT. J. L., Méthodes numériques du calcul du mouvement d'un corps flottant soumis à l'influence d'une houle périodique en théorie linéaire, *Revue de l'Inst. Franc. du Pétrole, 30, N 5, 779* (1975)
- [18] DIAS. F. and VANDEN-BROEK. J.-M., Open channel flow with submerged obstructions, *J. Fluid Mech. 206, 155-170*, (1989)
- [19] DORREPAAL. J. M., An exact solution of the Navier-Stokes equation which describes non orthogonal stagnation point flow in two dimensions, *J. Fluid Mech. 163, 141-147*, (1986)
- [20] ERDÖS. P., On the role of the Lebesgue functions in the theory of Lagrange interpolation. *ACTA Math. Acad. Sci., Hung. 6, nř 1-2, p. 47-60.*, (1955)
- [21] FLUCHER. M. et RUMPF. M., Bernoulli's free-boundary problem, qualitative theory and numerical approximation, *preprint Nr. 24/1995-5.10* (1995)
- [22] FORBES. L.K., Non-linear, drag-free flow over a submerged semi-elliptical body, *J. Eng. Math. 16,171-180, C97*, (1982)
- [23] FORBES. L. K. and SCHWARTZ. L. W., Free surface flow over a semi-circular obstruction, *J. Fluid Mech., 114, 299-314*(1982).
- [24] GIESING. J. P. et SMITH. A. M. O., Potential flow about two-dimensional hydrofoils, *J. Fluid Mech. 113*, (1967)
- [25] GILL. A.W., READ. W.W. and SNEDDON. G.E., On solutions to Laplacian free boundary problems in Computational techniques and applications : *CTA C95 (eds. R.L. May and A.K. EASTON), (World Scientific, Singapore), 343-350, C98*, (1996)
- [26] HALL. P., POLL, On the stability of an infinite swept attachment line boundary layer, *Proc. Roy. Soc. London Ser 395, 229-245*, (1984)
- [27] HELEIN. F., Ecoulement stationnaire dans un canal a fond presque plat, *Groupe Hydrodynamique Navale, URA CNRS 853, ENSTA, Centre de l'Yvette, 91120 Palaiseau, France*
- [28] HENROT. A., Cours de DEA, Nancy.
- [29] HIEMENZ. K., Die Grenzschicht an einem in den gleichformigen Flussigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder, *Gottingen Dingl. Polytech. J. 326*(1991)
- [30] HERMANS. A. J., KORVING. C., The wave resistance for flow problems with a free surface, *Second Inter. Conf. on Num. Ship Hydrody. university of California, Berkeley, 285* (1977)
- [31] JAMI. A. et LENOIR. M., Formulation variationnelle pour le couplage entre une méthode d'éléments finis et une représentation intégrale, *C.R.A.S. de Paris, 285, A, 269* (1977)
- [32] JAMIA. et LENOIR. M., A variational formulation for exterior problems in linear hydrodynamics, *Comput. Meth. in Appl. Mech. and Engineer., 341* (1978)

BIBLIOGRAPHIE

- [33] KERR. O. S., DOLD. J. W., Periodic steady corticies in a stagnation point flow, *J. Fluid Mech.* 276, 307-325, (1994)
- [34] KING. A. C. and M. I. G. BLOOR., Free Streamline Flow Over Curved Topography, *Quarterly Of applied Mathematics*, Vol XLVIII, Number 2, Pages 281-293, June (1990)
- [35] KOENIG. M., ZOLESIO. J. P., Sur la localisation d'un domaine de forme donnée. *Thèse, Nice*(1973).
- [36] LAMB. H., Hydrodynamics, 6th ed., *Dover Publications, New York*.
- [37] LASSEIGNE. D. G., JACKSON. T. L., Stasbility of nonorthogonalstagnation flow to three dimensional disturbances, *Theory Comput. Fluid Dyn.* 3, 207-218, (1992)
- [38] LYELL. M. J.,HUERRE. P., Linear and nonlinear stability of plane stagnation low, *J. Fluid Mech.* 161 295-372, (1985)
- [39] LYELL. M.J., A representation of the temperature field near the stagnation region in oblique stagnation flow, *Phys. Fluids A* 2, 456-457, (1990)
- [40] MADEY. Y., PERNAUD. B. T., H. VANDEVEN., Une rehabilitation des méthodes spectrales de type Laguerre, *la recherche Aéropaciale* 6, 353-375, (1985)
- [41] MASMOUDI. M., Outils pour la conception optimale de formes et environnement d'exploitation, Thèse de Docteur ès sciences mathématiques, 23 juin (1987).
- [42] MURAT. F., SIMON. J., Sur le controle par un domaine géométrique. *Report 76015, Laboratoire d'Analyse Numérique, Paris* (1976).
- [43] RAYLEIGH. L., The form of standing waves on the surface of running water, *Proc, Lond, Math. Soc.* 15, 69 (1883).
- [44] RUSSEL. J. S., Report on waves, *British Association Report*, 311 (1844)
- [45] SALVESEN N., On Second-order wave theory for submerged two-dimensional bodies, Office of Naval Research 6th Nav. Hydrodyn. Symp. (1966)
- [46] SERO-GUILLAUME. O., Sur l'équilibre des ferrofluides et des métaux liquides. *Thèse présentée à l'I.N.P.L. de Doctorat es Sciences* (1983).
- [47] SHEN. S.S., Locally forced critical surface waves in channels of arbitrary cross section, *Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 42, 122-138, (1991)
- [48] SHEN. S.S. and SHEN. M. C., A new equilibrium of subcritical flow over an obstruction in a channel of arbitrary cross section, *Euro. J. Mech. B/Fluids* 9, 59-74, (1990)
- [49] SNEYD. A. D. and H. K. MOFFAT., The Fluid Dynamic of the Process of Levitation Melting. *J. Fluid. Mech.*, 117, 45-70(1982).
- [50] STUART. J. T., The viscous flow near a stagnation point when the external flow has uniform vorticity, *J. Aero. Space Sci.* 26, 124-125, (1959)
- [51] SUTERA. S.P., Vorticity amplification in stagnation point flow and its effect on heat transfer, *J. Fluid Mech.* 21 513-534, (1965)
- [52] TAMADA. K., Two-dimensional stagnation point flow in impinging obliquely on a plan wall, *J. Ohys. Soc. Japan* 46, 310-311, (1979)
- [53] TENIOU. D., AIT-YAHIA-DJOUADI. R. et HERNANE-BOUKARI. D., Free surface flow over an obstacle. Theoretical study of the fluvial case, *Abstract and Applied Analysis*, (2001)

BIBLIOGRAPHIE

- [54] TUCK. E. O., The effect of non-linearity at the free surface on flow past a submerged cylinder, *J. Fluid Mech.* 22, 401 (1965)
- [55] VANDEN-BROEK. J.-M., Free-surface flow over an obstruction in a channel, *Phys. Fluids* 30 (8), August (1987)
- [56] WEHAUSEN. J. V. et LAITONE. E. V., Surfaces waves, Handbuch der Physik, Vol. 9, Springer Verlag Berlin (1960)
- [57] WHITHAM. G. B., Linear and Nonlinear Waves, John Wiley, New York.
- [58] WILSON. S.D.R., GLADWELL. I., The stability of two-dimensional flow to three-dimensional disturbances, *J. Fluid Mech.* 84, 517-527, (1978)



Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène
Faculté de Mathématiques
Département d'Analyse
Laboratoire : Equations aux Dérivées Partielles

THESE DE DOCTORAT D'ETAT

Titre

SUR LA STABILITE DES SOLUTIONS DE QUELQUES
PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE *

Présentée par

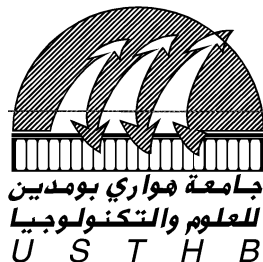
Mme HERNANE née BOUKARI Dahbia **

Résumé

Nous présentons dans ce travail, deux parties indépendantes ; la première porte sur les ondes d'obstacle, elle est constituée des quatre premiers chapitres et la deuxième porte sur un problème de convection mixte constituant le dernier chapitre de cette thèse. Dans la première partie, nous nous intéressons à la détermination de la frontière libre d'équilibre d'un écoulement au dessus d'un obstacle. Cette étude permet de mieux comprendre la génération des vagues en zone littorale, leur déferlement ainsi que l'influence des irrégularités de relief sous marin sur les ondes de surface. Nous nous intéressons à un écoulement uniforme, irrotationnel, bidimensionnel et permanent d'un fluide parfait incompressible perturbé par un obstacle placé au fond d'un canal hydraulique. Nous négligeons les effets de tension superficielle et nous tenons compte de la gravité g . Dans le premier chapitre, nous posons le problème d'ondes à résoudre et nous décrivons la méthode de résolution utilisée ; des détails sur cette méthode sont donnés aux deuxième et troisième chapitres ; pour un écoulement torrentiel (nombre de Froude >1), nous avons établi un résultat d'existence d'un minimum de la fonctionnelle de l'énergie totale du système et nous l'avons déterminé numériquement pour plusieurs formes d'obstacles choisis. Dans le quatrième chapitre, nous montrons en utilisant le théorème des fonctions implicites, l'existence et l'unicité de la solution du problème pour un écoulement fluvial. Dans la deuxième partie constituant le cinquième chapitre de cette thèse, nous nous intéressons à la détermination des conditions de transition vers l'état 3D d'un écoulement de convection mixte au point de stagnation 2D.

* Thèse de Doctorat d'état

** Directeur de thèse, Professeur Mustapha AMAUCHE (Université de Béjaïa)
Co-Directeur de thèse, Professeur Djamel-Eddine TENIOU (U.S.T.H-B)



FACULTE DE MATHEMATIQUES

THESE

Présentée par

Madame HERNANE née BOUKARI Dahbia

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT D'ETAT EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse - Equations aux dérivées partielles.

SUR LA STABILITE DES SOLUTIONS DE QUELQUES PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE

Résolution de deux problèmes de mécanique des fluides :
écoulement à frontière libre et convection mixte.

Soutenue publiquement le 7 mai 2005.

Devant le jury composé de :

Mr Keddour	LEMABET	Professeur (U.S.T.H-B)	Président
Mr Mustapha	AMAUCHE	Professeur (Université de Béjaia)	Directeur de thèse
Mr Djamel-Eddine	TENIOU	Professeur (U.S.T.H-B)	Codirecteur de thèse
Mr Malek	BOUHADEF	Professeur (U.S.T.H-B)	Examineur
Mr Christian	KHARIF	Professeur (IRPHE, Marseille)	Examineur
Mr Daniel	GANDOLFO	M.D.C habilité (CPT, Marseille)	Examineur
Mme Assia	LAGHA	M.D.C habilitée (CMI, Marseille)	Examinatrice