

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat LMD

en : **MATHEMATIQUES**

Spécialité: **Analyse: Systèmes dynamiques**

par: **Abdelkarim KELLECHE**

Stabilisation de certains systèmes en mouvement axial

Soutenue publiquement le **28/06/2016** à **10h30** devant le jury composé de

BEBBOUCHI R.	Pr.	USTHB	Président
TATAR N-E.	Pr.	Université King Fahd	Directeur
KHEMMOUDJ A.	Pr.	USTHB	Co-Directeur
KESSAB A.	Pr.	USTHB	Examineur
DJEBABLA A.	M.C.A.	Université d'Annaba	Examineur
MAZOUZI S.	Pr.	Université d'Annaba	Examineur

Résumé

L'objet principal de cette thèse est de stabiliser certaines structures en mouvement axial (corde, poutre, plate). En général, ces structures sont sujets à des vibrations indésirables pendant leur fonctionnement. Ces vibrations peuvent réduire leur durée de vie, ou provoquer un dysfonctionnement ou même détruire certaines composantes. Les vibrations sont dues à différents facteurs tels que la non-uniformité de la matière, les perturbations de l'environnement, les grandes vitesses, etc.

Afin d'atténuer ces vibrations, on adopte la stratégie suivante: profiter de la propriété d'amortissement dont jouissent les matériaux viscoélastiques plutôt que d'autres types d'amortissement utilisés dans des travaux publiés auparavant qui peuvent être chers ou inadéquats. Les matériaux viscoélastiques sont présents dans de nombreux domaines de l'ingénierie. Ils sont capables de dissiper l'énergie mécanique des vibrations en chaleur.

Notre travail consiste à définir un "bon" contrôle qui permet au système d'atteindre son équilibre le plus tôt possible. Il s'agit donc de stabiliser le système rapidement en tenant compte des efforts et du coût. Par conséquent, les résultats trouvés doivent améliorer les résultats publiés auparavant. La méthode adoptée est celle des "Multiplicateurs" connue aussi sous le nom de "Méthode de l'énergie"

La difficulté principale dans notre travail réside dans le fait que les structures considérées se déplacent dans la direction de leurs axes en plus des vibrations perpendiculaires (verticales) à leurs axes. Cela conduit à l'apparition de nouveaux termes aux bords dans la dérivée de l'énergie (en comparaison avec les structures immobiles.). En effet, on a besoin d'appliquer le "Théorème de Transport de Reynolds" qui stipule que le taux net du flux de la masse à travers la frontière doit être pris en compte lors du calcul de la dérivée totale. Pour résoudre ce problème on introduit de nouvelles fonctionnelles de type Lyapunov et quelques estimations appropriées.

REMERCIEMENTS

La présente étude n'aurait pas été possible sans le bienveillant soutien de certaines personnes. Et je ne suis pas non plus capable de dire dans les mots qui conviennent, le rôle qu'elles ont pu jouer à mes côtés pour en arriver là. Cependant, je voudrais les prier d'accueillir ici tous mes sentiments de gratitude qui viennent du fond de mon cœur, en acceptant mes remerciements.

Tout d'abord nous rendons grâce à Dieu tout puissant qui nous a permis d'achever ce travail dans de bonnes conditions.

Mes premiers remerciements vont d'abord à mon directeur de thèse, **Prof. Nasser-eddine Tatar**, de King Fahd University of Petroleum and Minerals. Je le remercie pour la confiance constante qu'il m'a accordée, sa disponibilité et ses encouragements pour me guider dans mes années de formation. Je remercie également mon co-directeur, **Prof. Ammar Khemmoudj** pour ses orientations, sa disponibilité, ses encouragements, ses conseils pendant cette formation et ainsi pendant la préparation de cette thèse.

Je remercie **Prof. Rachid Bebbouchi**, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je remercie également **Prof. Amor Kessab**, **Dr. Abdelhak Djebabla** et **Prof. Said Mazouzi** d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury, et je les en remercie sincèrement.

Mes remerciements vont aussi à tous mes collègues de la faculté de mathématiques, qui d'une manière ou d'une autre ont joué un rôle certain dans l'accomplissement de cette œuvre.

De plus, mes remerciements seraient incomplets, si je ne fais pas mention de mes parents, qui ont pu supporter dans toute cette période de formation. J'adresse mes chaleureux remerciements à tous mes amis, à tous les enseignants de la faculté de mathématiques, en particulier ceux de l'équipe de systèmes dynamiques et ceux de l'équipe d'EDP.

Mes remerciements vont également à mon pays, L'Algérie, qui m'a permis de terminer cette formation, en me fournissant les ressources nécessaires disponibles. Que tous ceux qui ont contribué à faciliter cette étude dans ce cadre trouvent ici le témoignage de ma sincère gratitude.

Sommaire

1	Introduction	1
1.1	Aperçu historique	2
1.1.1	Cas de la corde	2
1.1.2	Contrôle d'une corde en mouvement axial	6
1.1.3	Cas de la poutre	10
1.1.4	Quelques résultats de stabilité pour l'équation de la poutre	11
1.2	Organisation de la thèse	17
2	Rappels généraux et définitions	18
2.1	Topologie faible et topologie faible*	19
2.1.1	Topologie faible	19
2.1.2	Topologie faible*	20
2.1.3	Espace réflexif	20
2.1.4	Espace separable	21
2.2	Espaces $L^p(\Omega) : 1 \leq p < \infty$	21
2.3	Espaces de Sobolev	22
2.3.1	Dérivée faible	22
2.3.2	Espace $W^{1,p}(\Omega)$	22
2.3.3	Espaces $W^{m,p}(\Omega)$	22
2.3.4	Inégalités	23
2.3.5	Espaces de fonctions à valeurs vectorielles	24
2.4	Principe d'invariance de Lasalle	25

3	Préliminaires	27
I	Matériaux viscoélastiques	28
3.1	Introduction	29
3.2	Définition de la viscoélasticité	29
3.2.1	Loi de Hooke	29
3.3	Viscoélasticité linéaire	30
3.3.1	Principe de superposition de Boltzmann	31
3.3.2	Modèles mathématiques pour la viscoélasticité linéaire	32
3.4	Conclusion	34
II	Taux de variation de l'énergie d'un système en mouvement axial	36
3.5	Introduction	37
3.6	Formulation du problème	37
3.7	La méthode correcte	40
3.8	Conclusion	45
4	Etude d'une corde en mouvement axial de type Kirchhoff	46
4.1	Introduction	46
4.2	Préliminaires	48
4.3	Existence, unicité et régularité de la solution	49
4.4	Stabilité asymptotique	54
4.4.1	Stabilité asymptotique dans le cas de mouvement ($v \neq 0$)	57
4.4.2	Stabilité asymptotique dans le cas $v = 0$	59
5	Etude d'une poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli en mouvement axial	62
5.1	Introduction	62
5.2	Préliminaires	64

5.3	Existence et unicité de la solution	66
5.4	Stabilisation	70
5.5	Comportement asymptotique	72

Liste des Figures

1.1.1 Corde en mouvement axial	2
1.1.2 Contrôle actif	6
1.1.3 Contrôle passif par un amortisseur visqueux	7
1.1.4 Corde en mouvement axial avec le système de contrôle MAR	7
1.1.5 Modèle d'une poutre	10
1.1.6 Déplacement transversal et déplacement longitudinal	14
3.3.1 Courbe caractéristique de fluage	31
3.3.2 Courbe caractéristique de relaxation	31
3.3.3 Principe de superposition de Boltzmann	32
3.3.4 Modèle de Maxwell	33
3.3.5 Modèle de Kelvin-Voigt	34
3.6.1 Corde en mouvement axial	37
4.1.1 Corde en mouvement axial contrôlé par un modèle de Maxwell	47
5.1.1 Poutre en mouvement axial soumise à une force.	63

Chapitre 1

Introduction

Les structures en mouvement axial se trouvent dans plusieurs domaines. Elles apparaissent sous forme de scies à ruban, feuilles de papier au cours des processus de fabrication, de traitement et d'impression, de bandes de textiles pendant la fabrication et de la transformation, de tuyaux de transport de fluides et de courroies de transmission. Dans toutes ces applications, la vitesse de transport maximale ou la vitesse de transport est souhaitée en vue d'accroître l'efficacité et d'optimiser les coûts d'investissement et de la performance des machines et ses installations sont parfois coûteuses et complexes. Cependant le comportement dynamique de ces systèmes empêche souvent d'atteindre ces objectifs.

Les dynamiques des systèmes en mouvement axial ont été étudiés depuis plus de 60 ans. Les premières publications concernant l'étude des vibrations transversales d'une corde en mouvement axial remontent à l'année 1950. Les pionniers dans ce domaine sont Sack [94] et Archibald et Emslie [2]. Le cas d'une corde et d'une poutre en mouvement axial attire l'attention de plusieurs scientifiques. Cet intérêt est soutenu par l'apparition de nouvelles applications dans plusieurs domaines.

1.1 Aperçu historique

1.1.1 Cas de la corde

Une corde en mouvement axial est un modèle type largement utilisé pour représenter: des fils, des bandes magnétiques, des ceintures, des scies à ruban et des câbles; en particulier lorsque l'objet concerné est long et étroit et a une rigidité à flexion négligeable.

L'une des premières études consacrées à l'analyse des vibrations d'une corde en mouvement axial est celle de Archibald et Emslie [2]. Elle traite le cas de vibrations transversales d'une corde se déplaçant avec une vitesse constante c le long de la direction longitudinale, désigné par X .

Soient $y(x, t)$ le déplacement transversal de la corde à la position x et l'instant t et l la longueur de la corde entre les deux extrémités (voir Fig 1.1.1)

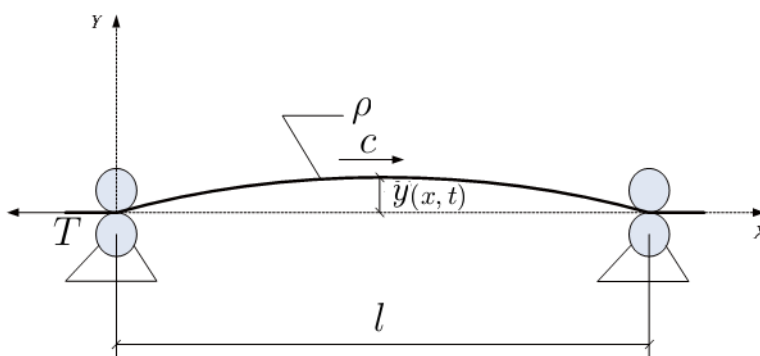


Figure 1.1.1 : Corde en mouvement axial

où T et ρ représentent la tension et la masse par unité de longueur de la corde, respectivement. En partant du principe de Hamilton (voir [69]), on a

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta E_c - \delta E_p) dt = 0, \quad t_0 < t_1 \quad (1.1.1)$$

où

$$E_c := \frac{1}{2} \int_0^l \rho [c^2 + (y_t + cy_x)^2] dx, \quad E_p := \frac{1}{2} \int_0^l T y_x^2 dx.$$

Ici E_c et E_p désignent l'énergie cinétique et l'énergie potentielle, respectivement entre $x = 0$ et $x = l$ à l'instant t . Intégrons par parties l'équation (1.1.1) en tenant compte du fait que $\delta y(x, t_0) = \delta y(x, t_1) = 0$ et $\delta y(0, t) = \delta y(l, t) = 0$ où le symbole δ indique qu'il est en fait

une infime variation du trajet emprunté pour aller de 0 à l . Les vibrations transversales ou le déplacement transversal de la corde sont donnée par

$$\rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} - (T - \rho c^2) y_{xx} = 0 \quad (1.1.2)$$

où y_{tt} est l'accélération locale dans la direction transversale de la corde, y_{xt} est l'accélération de Coriolis et $c^2 y_{xx}$ est l'accélération centripète. La solution de l'équation (1.1.2) est donnée sous la forme d'une somme de fonctions harmoniques par

$$y(x, t) = C_1 \cos \omega \left[t + \left(\frac{c\rho + \sqrt{\rho T}}{T - \rho c^2} \right) x \right] + C_2 \cos \omega \left[t + \left(\frac{c\rho - \sqrt{\rho T}}{T - \rho c^2} \right) x \right] \quad (1.1.3)$$

telle que

$$c < \sqrt{T/\rho}$$

(voir [76]) où C_1, C_2 sont des constantes et ω est la vitesse angulaire des vibrations transversales.

En supposant que la corde vérifie les conditions aux limites simples

$$y(0) = y(l) = 0, \quad (1.1.4)$$

les auteurs dans [2] ont donné la solution de l'équation sous la forme générale

$$y = F_1[x - (c_w + c)t] + F_2[x + (c_w - c)t] \quad (1.1.5)$$

où F_1 et F_2 sont des fonctions et

$$c_w = \sqrt{T/\rho}.$$

L'influence de l'amortissement sur le comportement dynamique de la corde en mouvement a fait l'objet de plusieurs études. Dans [77], un amortissement linéaire sous la forme de βw_t , où β représente le coefficient d'amortissement a été introduit. Dans [68] et [110] un amortissement sous la forme de $\beta(w_t + c w_x)$ a été considéré. La quantité $w_t + c w_x$ représente la vitesse transversale de l'élément de la corde.

Dans plusieurs études, des modèles de cordes élastiques se déplaçant avec une vitesse axiale variable ($c = c(t)$) ont été étudiés (voir par exemple [3] et [81]). Dans ce cas, le modèle (1.1.2) s'écrit sous la forme

$$\rho(y_{tt} + c'(t)y_x + 2c(t)y_{xt}) - (T - \rho c^2) y_{xx} = 0. \quad (1.1.6)$$

Cette équation linéaire du mouvement est valable uniquement pour des petits déplacements y et pour des grandes valeurs de T . Dans [81] l'équation 1.1.6 a été résolue en utilisant la méthode de Galerkin (voir [70]) en supposant que la vitesse est de la forme $c(t) = c_0 \sin w_0 t$ où c_0 et w_0 désignent l'amplitude de la vitesse axiale de la corde et la fréquence de la variation de la vitesse, respectivement. Les auteurs ont obtenu une solution de la forme

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \sin(i\pi x/l) \quad (1.1.7)$$

où $\sin(i\pi x/l)$ est la $i^{\text{ème}}$ fonction propre de l'équation de la corde stationnaire ($c(t) = 0$) et $q_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, sont des fonctions à déterminer. Pour plus de détails on renvoie le lecteur à la référence [81].

Dans [29], Fung et al. ont étudié, pour la première fois, la dynamique d'une corde viscoélastique en mouvement axial. Le mouvement est modélisé par l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{T}{A} + \sigma\right) y_{xx} + \sigma_x y_x = \rho (y_{tt} + 2cy_{xt} + c^2 y_{xx}) \quad (1.1.8)$$

où A est la section en coupe de la corde et σ la contrainte. Ils ont considéré le cas où la tension T est de la forme

$$T = T_0 + T_1 \cos wt.$$

Les auteurs ont traité la cas de l'équation constitutive uni-dimensionnelle d'un matériau de type intégral (appelé matériau de Boltzmann) qui est donnée par le principe de superposition de Boltzmann (voir [18])

$$\sigma(x, t) = \varepsilon(x, t)G_0 + \int_0^t \dot{G}(t-s)\varepsilon(x, s)ds \quad (1.1.9)$$

où $G(t)$ est la fonction de relaxation et $\varepsilon(x, t)$ est donnée par

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2}y_x^2(x, t). \quad (1.1.10)$$

En substituant les formules (1.1.9) et (1.1.10) dans l'équation (1.1.8), ils ont obtenu

$$Y_{\tau\tau} + 2C(\tau)Y_{\xi\tau} + (C^2(\tau) - 1 - \bar{T} \sin \bar{w}t) Y_{\xi\xi} + C'(\tau)Y_{\xi} = \frac{3}{2}k_1^2 Y_{\xi}^2 Y_{\xi\xi} - \frac{1}{2}Y_{\xi\xi} \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial s} \bar{G}(\tau-s) Y_{\xi}^2(\xi, s) ds - Y_{\xi} \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial s} \bar{G}(\tau-s) Y_{\xi}(x, s) Y_{\xi\xi}(\xi, s) ds \quad (1.1.11)$$

où

$$\begin{aligned} Y &= y/l, \quad \bar{G}(t-s) = G(t-s)/\rho c_2^2, \quad \bar{T} = T_1/T_0, \quad k_1 = c_1/c_2, \\ \bar{w} &= wl/c_2, \quad \tau = c_2 t/l, \quad c_1 = \sqrt{G_0/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{T_0/\rho A}. \end{aligned}$$

Pour les petites oscillations, les termes non linéaires peuvent être négligé, l'équation linéaire devient

$$Y_{\tau\tau} + 2C(\tau)Y_{\xi\tau} + (C^2(\tau) - 1 - \bar{T} \sin \bar{w}\tau) Y_{\xi\xi} + C'(\tau)Y_{\xi} = 0. \quad (1.1.12)$$

En raison de la complexité du problème. La méthode de Galerkin a été utilisée ici pour séparer les variables spatiales de la variable temporelle. En se basant sur cette méthode, le déplacement supposé satisfait aux conditions $Y(0, \tau) = Y(1, \tau) = 0$. La solution est donnée par

$$Y(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n q_i(\tau) \sin(i\pi\xi).$$

Pour plus de détails concernant cette méthode voir [29] et [30]. Le cas d'une corde viscoélastiques avec une vitesse variable dans un état de contrainte uniforme a attiré plusieurs chercheurs (par exemple [10] et [37]).

Le cas d'une tension variable de la corde a suscité l'intérêt d'un bon nombre de chercheurs. On cite, en particulier, le travail de Mockensturm et Guo [75]. Une équation non linéaire de mouvement pour une corde en mouvement axial composée d'un matériau viscoélastique est obtenue. Dans [75], Les auteurs ont noté que si la corde est composée d'un matériau viscoélastique, la tension est liée à la déformation par

$$T = A(E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}) = A[E\varepsilon + \eta(\varepsilon_t + c\varepsilon_x)].$$

Si $\varepsilon_x = 0$, alors la tension ne dépend pas de la vitesse axiale. Cependant, la tension dépend encore de la vitesse de la déformation. Si ε est de la forme $\varepsilon = \Delta \sin(\Omega t)$, alors la tension est donnée par

$$\frac{T}{A} = E\Delta \sin(\Omega t) + \eta\Delta\Omega \cos(\Omega t).$$

On désigne par U le déplacement axial de la corde, la déformation est donnée par

$$\varepsilon(x, t) = U_x(t) + \frac{1}{2}y_x^2(x, t).$$

Pour un matériau viscoélastique, la tension devient

$$\frac{T}{A} = E \left(U_x(t) + \frac{1}{2} y_x^2(x, t) \right) + \eta (U_{xt}(t) + y_x(x, t) y_{xt}(x, t) + c y_x y_{xx}).$$

L'équation du mouvement de la corde résultante est

$$\begin{aligned} & \rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} + (\rho c^2 - E U_x - \eta U_{xt}) y_{xx} \\ & = \left(y_x \left[\frac{1}{2} E y_x^2(x, t) + \eta (y_x(x, t) y_{xt}(x, t) + c y_x y_{xx}) \right] \right)_x. \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

La méthode de perturbation est appliquée directement à l'équation aux dérivées partielles (1.1.13). Pour plus de détails on renvoie le lecteur à la référence [75].

1.1.2 Contrôle d'une corde en mouvement axial

Différents type de contrôle, y compris le contrôle de domaine [118], le contrôle paramétrique [89] et le contrôle de la structure variable [31], ont été étudiées. Le contrôle frontière fournit un moyen efficace pour supprimer les vibrations transversales car il est facile à implémenter. Il est important aussi de citer le travail de [55] où les auteurs ont étudié le système suivant

$$\begin{cases} \rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} - (T - \rho c^2) y_{xx} = f(x, t) \\ y_x(l, t) = f_c(t) \text{ ou } -y_x(0, t) = f_c(t), \end{cases}$$

où $f(x, t)$ est une force distribuée. Ici, la corde est contrôlée à l'extrémité gauche et/ou droite. Un schéma d'une corde en mouvement axial avec un contrôle frontière actif à l'extrémité droite est représentée par la Fig 1.1.2

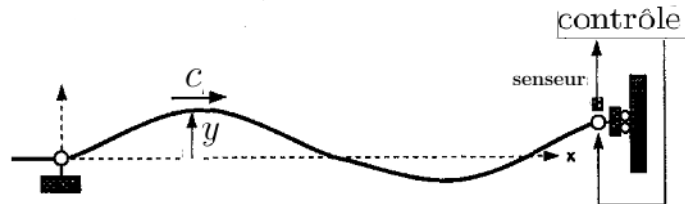


Figure 1.1.2 : Contrôle actif

ou un amortisseur frontière passif représenté par la Fig 1.1.3

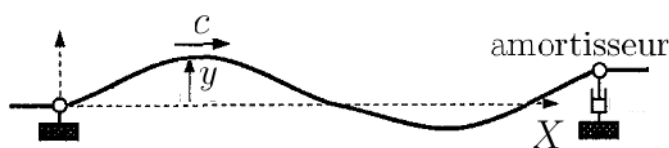


Figure 1.1.3 : Contrôle passif par un amortisseur visqueux

La méthode de Lyapunov a été employée afin de trouver le contrôle pour stabiliser l'énergie des vibrations. Dans le cas où le contrôle agit sur l'extrémité droite $x = l$ avec l'extrémité gauche fixée, ils ont proposé le contrôle suivant

$$f_c(t) = y_x(l, t) = -k_1 y_t(l, t), \quad k_1 > 0. \quad (1.1.14)$$

Dans le cas où le contrôle est placé au point $x = 0$, et l'extrémité droite ($x = l$) est fixée, les auteurs ont proposé le contrôle suivant

$$f_c(t) = -y_x(0, t) = -k_2 y_t(0, t), \quad k_2 > 0$$

ou

$$f_c(t) = -y_x(0, t) = -k_3 \{y_t(l, t) + c y_x(l, t)\}, \quad k_3 > 0.$$

Notons que dans les deux cas, la stabilisation a été obtenue sans taux de décroissance de l'énergie.

Un autre type de contrôle: Masse-Amortisseur-Ressort (MAR), a été proposé dans [33]. Le mécanisme de contrôle MAR comprend une masse m , un amortisseur visqueux avec un coefficient d_m et un ressort de rigidité k_m . (voir la figure ci dessous)

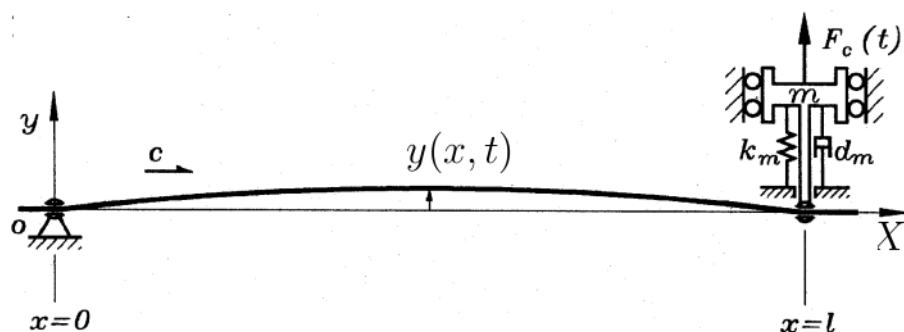


Figure 1.1.4 : Corde en mouvement axial avec le système de contrôle MAR

Les équations du mouvement sont

$$\begin{cases} \rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} - (T - \rho c^2) y_{xx} + c_v(y_t + c y_x) = 0 \\ y(0, t) = 0 \\ f_c(t) = m q_{tt} + (d_m - \rho c) q_t + k_m q + (T - \rho c^2) y_x(l, t) \end{cases}$$

où $q = y(l, t)$ et c_v est le coefficient de dissipation interne. Les auteurs ont prouvé la stabilité asymptotique du système en appliquant le contrôle

$$f_c(t) = -\hat{m}(\beta q_t + \alpha q) + (\hat{d}_m - \hat{\rho}c)q_t + \hat{k}_m q + (\hat{T} - \rho c^2) y_x(l, t)$$

où $\hat{m}, \alpha, \beta, \hat{d}_m, \hat{\rho}, \hat{k}_m, \hat{T}$ sont des paramètres du système. La performance du contrôle proposé a été vérifiée par des simulations numériques en utilisant la méthode des différences finies.

Pour les modèles nonlinéaires, il existe très peu de travaux traitant le problème de contrôle. En utilisant le même mécanisme de contrôle “MAR ” que celui utilisé dans [33], Fung et Tseng [32] ont prouvé la stabilité du problème nonlineaire

$$\begin{cases} \rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} - (T_0 - \rho c^2) y_{xx} + c_v(y_t + c y_x) - \frac{3EA}{2} y_x^2 y_{xx} = 0 \\ y(0, t) = 0 \\ f_c(t) = m q_{tt} + (d_m - \rho c) q_t + k_m q + (T_0 - \rho c^2 + \frac{EA}{2} y_x^2(l, t)) y_x(l, t). \end{cases}$$

Ce système est caractérisé par le fait que la tension dans la corde n'est pas constante, c'est à dire T est donnée par

$$T(x, t) = T_0 + \frac{3EA}{2} y_x^2(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0$$

où T_0 représente la tension initiale de la corde. La stabilité asymptotique du système a été établie à l'aide de la théorie des semi-groupes. Enfin, un schéma aux différences finies a été utilisé pour vérifier les résultats théoriques.

Le même système a été étudié par Li and Hou dans [59] mais en utilisant un mécanisme de contrôle différent, il s'agit du même mécanisme utilisé par Lee et Mote dans [55] (voir (1.1.14)). Le système s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} - (T_0 - \rho c^2) y_{xx} - \frac{3EA}{2} y_x^2 y_{xx} = 0 \\ y(0, t) = 0 \\ f_c(t) = (T_0 - \rho c^2 + \frac{EA}{2} y_x^2(l, t)) y_x(l, t). \end{cases}$$

En utilisant la méthode directe de Lyapunov, avec le contrôle $f_c(t) = -ky_t(l, t)$, $k > 0$, les auteurs ont prouvé que le contrôle frontière linéaire assure la suppression des vibrations de la corde. Ils ont démontré aussi que la solution du système est exponentiellement stable.

Dans [99], Shahruz a considéré un autre modèle d'une corde en mouvement axial, connu sous le nom de "Kirchhoff", décrit par

$$\begin{cases} \rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} - \left(T_0 - \rho c^2 + b \int_0^1 y_x^2 dx\right) y_{xx} = 0 \\ y(0, t) = 0 \\ u_c(t) = \left(T_0 - \rho c^2 + b \int_0^1 y_x^2 dx\right) y_x(l, t). \end{cases}$$

Ce modèle est caractérisé par le fait que la tension dépend seulement de la variable temporelle

$$T(t) = T_0 + b \int_0^1 y_x^2 dx.$$

L'auteur a prouvé que cette équation non linéaire peut être stabilisée par le contrôle suivant

$$u_c(t) = -ky_t(l, t), \quad k > 0.$$

Un modèle non linéaire général a été considéré par Li *et al.* dans [60]. Les auteurs ont adapté l'expression exacte de la déformation ε pour décrire la nonlinéarité géométrique en fonction de la déformation transversale. Dans ce cas là, l'énergie potentielle des vibrations est donnée par

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l \left(T_0 \varepsilon_x + \frac{EA}{2} \varepsilon_x^2 \right) dx$$

où

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + y_x^2(x, t)} dx - \Delta x}{\Delta x} \\ &= \sqrt{1 + y_x^2} - 1. \end{aligned}$$

Ils ont obtenu le système suivant

$$\begin{cases} \rho (y_{tt} + 2cy_{xt} + c^2 y_{xx}) - \left\{ y_x \left[\frac{T_0}{\sqrt{1+y_x^2}} + EA \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y_x^2}} \right) \right] \right\}_x = 0, \\ y(0, t) = 0, \\ f_c(t) = -\rho c^2 y_x(l, t) + \left\{ y_x \left[\frac{T_0}{\sqrt{1+y_x^2}} + EA \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y_x^2}} \right) \right] \right\}. \end{cases} \quad (1.1.15)$$

Dans des applications pratiques de l'ingénierie, on suppose généralement que $y_x^2 \ll 1$. Dans ce cas, on peut écrire

$$\frac{1}{\sqrt{1+y_x^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}y_x^2. \quad (1.1.16)$$

Cet approximation réduit l'équation du mouvement à

$$\rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} - (T_0 - \rho c^2) y_{xx} - \frac{3}{2}(EA - T_0) y_x^2 y_{xx} = 0. \quad (1.1.17)$$

En outre, la tension initiale est généralement est très petite comparativement à la rigidité, $T_0 \ll EA$. L'équation (1.1.17) peut être simplifiée à

$$\rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} - (T_0 - \rho c^2) y_{xx} - \frac{3}{2}EA y_x^2 y_{xx} = 0 \quad (1.1.18)$$

qui est la même équation que celle adoptée par Li et Hou dans [59]. Les auteurs ont prouvé que le système (1.1.17) est exponentiellement stable sous le feedback linéaire

$$f_c(t) = -k y_t(l, t), \quad k > 0.$$

Leur preuve repose sur la méthode de Lyapunov.

1.1.3 Cas de la poutre

Le terme “poutre ” désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses. Autrement dit, on appelle “poutre ” un solide engendré par des surfaces finies, appelées “sections droites”, telles que

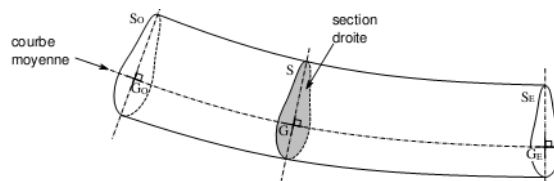


Figure 1.1.5 : Modèle d'une poutre

- L'ensemble des centres de gravité des sections droites est une courbe continue et différentiable, appelée “moyenne”; son rayon de courbure est grand par rapport à sa longueur.

- Les sections droites sont perpendiculaires à la courbe moyenne ; elles “varient de manière continue et lente”.
- La racine carrée de la surface des sections droites est petite devant la longueur de la courbe moyenne.

1.1.4 Quelques résultats de stabilité pour l'équation de la poutre

1) Cas de la poutre stationnaire ($c = 0$)

En 1980, une classe de poutres de type Euler-Bernoulli avec un amortissement de flexion a été proposée par Chen et Russell [14] et Huang [35]. La stabilité exponentielle d'une poutre de type Euler-Bernoulli a été largement étudiée, par Chen et Russell [14] en premier et ensuite par Huang [35] et [36]. Voir aussi Chen et al. [12] et Kim [47] pour une poutre avec une dissipation visqueuse, Chen, Liu et Liu [13] et Liu et Liu [66] et [67] pour une poutre avec un amortissement de type Kelvin-Voigt. De nos jours on peut trouver plusieurs autres dans la littérature.

La question de la stabilité et la stabilisation frontière a été étudiée par de nombreux auteurs. On cite notamment B.Z. Guo et W. Guo dans [41] qui ont étudié la stabilisation frontière de l'équation de la poutre de type Euler-Bernoulli dans le cas où une extrémité est fixée et l'autre est contrôlée

$$\begin{cases} y_{tt} + y_{xxxx} = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = y_{xx}(1, t) = 0, \\ y_{xxx}(1, t) = u(t) - \tilde{\theta} \sin t. \end{cases}$$

Dans [41], il a été mentionné que dans le cas où $u(t) = -ky_t(1, t)$ et $\tilde{\theta} = 0$ le système est exponentiellement stable. Toutefois, lorsque le système est soumis à une perturbation telle que

$$\begin{cases} u(t) = k(t)y_t(1, t) + \theta(t) \sin t, \\ k'(t) = ry_t^2(1, t), \quad k(0) = 0, \quad r > 0, \\ \theta'(t) = y_t(1, t) \sin t, \quad \theta(0) = \theta_0, \end{cases}$$

les auteurs, après avoir prouvé l'existence et l'unicité de la solution, ont démontré que la solution est seulement asymptotiquement stable sans aucune vitesse explicite de décroissance. La stabilité d'une poutre avec deux extrémités libres a été étudiée par Guo et Huang dans [40]. Ils ont établi des conditions suffisantes et nécessaires pour que le système soit stable exponentiellement. Leur méthode est basée sur la technique des semi-groupes, la technique des multiplicateurs. Littman et Markus [65] ont démontré la stabilité à l'aide d'un contrôle dépendant de la vitesse (voir aussi Rao [90]). Conrad et Morgul [20] ont utilisé la méthode des multiplicateurs pour démontrer la stabilisation exponentielle par le contrôle linéaire $(-ky_t(1, t) + y_{xxxx}(1, t))$. Récemment, Guo [38] a obtenu la stabilisation exponentielle d'une poutre de type Euler-Bernoulli non-uniforme par un contrôle frontière linéaire.

Dans [39], les auteurs ont considéré l'équation d'une poutre de type Euler-Bernoulli avec un stabilisateur de cisaillement au niveau du joint d

$$\begin{cases} y_{tt} + y_{xxxx} = 0, & 0 < x < d, \quad d < x < 1, \\ y(0, t) = y(1, t) = y_{xx}(0, t) = y_{xx}(1, t) = 0, \\ y(d^+, t) = y(d^-, t), \quad y_x(d^+, t) = y_x(d^-, t), \quad y_{xx}(d^+, t) = y_{xx}(d^-, t), \\ y_{xxx}(d^+, t) - y_{xxx}(d^-, t) = ky_t(d, t). \end{cases}$$

Les auteurs ont démontré que les fonctions propres de ce système forment une base de Riesz pour l'espace d'état. La stabilité exponentielle, ainsi que le comportement asymptotique des valeurs propres ont été étudiés. Dans le cas d'une poutre viscoélastique, Park et Kim dans [85] ont considéré une équation de la poutre de type Euler-Bernoulli avec un terme mémoire, fixée en une extrémité tandis que l'autre extrémité est soumise à une force nonlinéaire

$$\begin{aligned} y_{tt} + y_{xxxx} - \int_0^t h(t-s)y_{xxxx}(s)ds + g(y_t) &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = y_{xx}(1, t) &= 0, \\ y_{xxx}(1, t) - \int_0^t h(t-s)y_{xxxx}(s)ds &= f(y(1, t)). \end{aligned}$$

En supposant que la fonction de relaxation h décroît exponentiellement, les auteurs ont prouvé l'existence et la stabilité exponentielle de la solution. Les mêmes auteurs dans [83] ont étudié le même problème mais avec un contrôle frontière vérifiant

$$\begin{cases} u(t) = k(t)y_t(1, t), \quad k(0) > 0 \\ k'(t) = ry_t^2(1, t), \quad r > 0 \end{cases}$$

et sous les mêmes hypothèses sur la fonction de relaxation h . Ils ont prouvé l'existence de la solution en utilisant la méthode de Galerkin et ont obtenu la stabilité exponentielle en utilisant la technique des multiplicateurs. Un résultat similaire a été obtenu dans [43] avec une dissipation frontière vérifiant

$$\begin{cases} u(t) = k(t)y_t(1, t) + \theta(t) \sin t \\ k'(t) = ry_t^2(1, t), k(0) = 0, r > 0 \\ \theta'(t) = y_t(1, t) \sin t, \theta(0) = \theta_0. \end{cases}$$

Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à ([42, 51, 62, 85]).

Cas de la poutre en mouvement axial

Le premier modèle d'une poutre en mouvement axial qui a inspiré les chercheurs est celui de Mote [76]. En appliquant le principe de Hamilton

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta E_c - \delta E_p) dt = 0$$

où

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^l \rho [c^2 + (y_t + cy_x)^2] dx, \quad E_p = \frac{1}{2} \int_0^l T y_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI y_{xx}^2 dx,$$

ρ est la masse par unité de longueur de la poutre, T est la tension de la poutre (supposée constante), c est la vitesse axiale, EI est la rigidité à flexion de la poutre, E est le coefficient d'élasticité et I est le moment d'inertie. En supposant que la poutre est soumise aux conditions aux limites

$$y(0, t) = y(0, l) = y_{xx}(0, t) = y_{xx}(0, l) = 0,$$

l'équation du mouvement résultante est donnée par

$$\rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} - (T - \rho c^2) y_{xx} + EI y_{xxxx} = 0. \quad (1.1.19)$$

Le modèle le plus général qui décrit la dynamique d'une poutre en mouvement axial est celui obtenu par Wickert dans [112]. L'auteur a traité les déplacements transversaux et longitudinaux de la poutre et a obtenu le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \rho (u_{tt} + 2cu_{xt} + c^2 u_{xx}) - (EA (u_x + \frac{1}{2} y_x^2))_x = 0 \\ \rho (y_{tt} + 2cy_{xt} + c^2 y_{xx}) - \{ [T_0 + EA (u_x + \frac{1}{2} y_x^2)] y_x \}_x + EI y_{xxxx} = 0 \end{cases} \quad (1.1.20)$$

où u et y représentent respectivement le déplacement longitudinal et le déplacement transversal

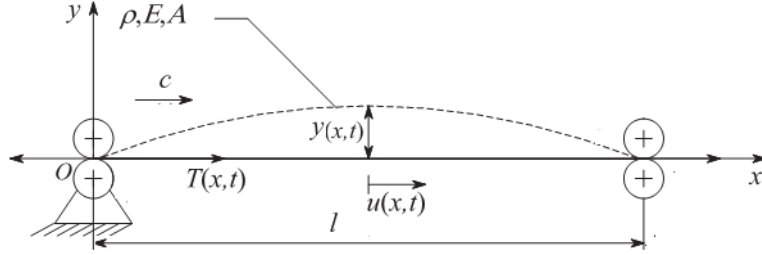


Figure 1.1.6 : Déplacement transversal et déplacement longitudinal

Notons que dans ce cas l'énergie potentielle est définie par

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l T \varepsilon_x dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI y_{xx}^2 dx,$$

la tension est donnée par la relation (voir [16] et [79])

$$T(x, t) = T_0 + EA \left(u_x + \frac{1}{2} y_x^2 \right)$$

et la relation déplacement-déformation est définie par

$$\varepsilon(x, t) = u_x + \frac{1}{2} y_x^2.$$

Une vue schématique du système considéré est représentée par la Fig 1.1.6 .

En posant $u = 0$ dans l'équation (1.1.20) puis en omettant les termes nonlinéaires d'ordre supérieur, on obtient l'équation du mouvement transversal (voir [11])

$$\rho (y_{tt} + 2cy_{xt} + c^2 y_{xx}) - T_0 y_{xx} + v_w^2 y_{xxxx} = \frac{v_l^2}{2} y_{xx} \int_0^l y_x^2 dx. \quad (1.1.21)$$

Ainsi, une autre forme simplifiée de l'équation du mouvement a été définie par (voir [11])

$$\rho (y_{tt} + 2cy_{xt} + c^2 y_{xx}) - \left\{ \left[T_0 + \frac{EA}{2} y_x^2 \right] y_x \right\}_x + EI y_{xxxx} = 0. \quad (1.1.22)$$

Notons que les deux équations réduites (1.1.21) et (1.1.22) sont basées sur différentes hypothèses sur le mouvement longitudinal (voir [11] et [112]).

Quelques résultats de contrôle d'une poutre en mouvement axial

On commence d'abord cette partie avec le cas linéaire. Lee et Mote dans [56] ont considéré une poutre de type Euler-Bernoulli dont l'une des extrémités est fixée

$$\rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} - (T - \rho c^2) y_{xx} + EI y_{xxxx} = 0$$

L'objet de leur étude est de contrôler le mouvement transversal via un amortissement actif ou passif appliqué à l'extrémité libre. Lorsque l'extrémité en $x = 0$ est fixée c'est à dire

$$y(0, t) = y_x(0, t) = 0,$$

les lois de contrôle suivantes ont été proposées

- 1) $y_t(l, t) = -k_1 y_x(l, t) \operatorname{sgn}(T y_x(1, t) - y_{xxx}(1, t))$, $k_1 > c$,
- 2) $y_x(l, t) = -k_2 y_t(l, t) \operatorname{sgn}(T y_x(1, t) - y_{xxx}(1, t))$, $k_2 > \frac{1}{c}$,
- 3) $T y_x(l, t) - y_{xxx}(l, t) = -k_3 (y_t(l, t) + c y_x(l, t))$, $k_3 > 0$.

Lorsque l'extrémité en $x = l$ est fixée, le contrôle suivant a été appliqué en $x = 0$.

$$T y_x(0, t) - y_{xxx}(0, t) = k_4 (y_t(0, t) + c y_x(0, t)), k_4 > 0.$$

Ils ont démontré la stabilité asymptotique de la solution du système. Lee et Rahn [61] ont étudié un contrôle pour une poutre linéaire se déplaçant axialement en divisant la partie mobile en deux sous-systèmes, une partie contrôlée par un régulateur constitué d'un moment de torsion $\tau_c(t)$ et un moment d'inertie J localisé au point $x = a$ et une partie non contrôlée. L'équation du mouvement s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} - (T - \rho c^2) y_{xx} + EI y_{xxxx} = f_u H(x - a), \quad x \in (0, a) \cup (a, l), \\ y(0, t) = y(l, t) = y(a, t) = y_x(0, t) = y_x(l, t) = 0, \\ y_x(a^-, t) = y_x(a^+, t), \\ J y_{xtt} - EI (y_{xx}(a^+, t) - y_{xx}(a^-, t)) = \tau_c(t) \end{array} \right.$$

où f_u est une force de contrôle appliquée par le régulateur et H est la fonction de Heaviside. Les auteurs ont tiré la conclusion suivante: En supposant un amortissement $(k y_t(x, t))$ dans la partie non contrôlée, le contrôle adaptatif permet au déplacement transversal de s'approcher de 0 de manière exponentielle.

Pour le cas d'une poutre de type Euler-Bernoulli nonlinéaire, les auteurs, dans [15], ont étudié le système, ci dessous, modélisant les vibrations d'une bande d'acier contrôlée par un régulateur placé à l'extrémité $x = l$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} + \rho c^2 y_{xx} - \left(T_0 + \frac{3EA}{2} y_x^2(x, t)\right) y_{xx} + EI y_{xxxx} = 0, \\ x \in (0, l), t > 0, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = y_{xx}(l, t) = 0, t \geq 0, \\ u(t) = m y_{tt}(l) + (d_c - \rho c) y_t(l) + (T - \rho c^2 + \frac{EA}{2} y_x^2) y_x(l) - EI y_{xxx}(l), t \geq 0 \end{array} \right.$$

où

$$T(x, t) = T_0 + \frac{3EA}{2} y_x^2(x, t)$$

m et d_c désignent la masse et le coefficient de dissipation de l'actuateur, respectivement. Les auteurs ont prouvé la stabilité exponentielle du système en utilisant le contrôle

$$u(t) = -k y_{xt}(l), k > 0$$

avec $d_c > \frac{\rho c}{2}$. Le même système a été étudié par Yang dans [116] mais avec des conditions différentes sur la tension $T(x, t)$. Les auteurs ont considéré un amortissement supplémentaire agissant dans l'équation elle même

$$\rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} + \rho c^2 y_{xx} - (T(x, t) y_x)_x + EI y_{xxxx} + c_v (y_t + c y_x) = 0$$

où la tension vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < T_{s, \min} \leq T_s(x, t) \leq T_{s, \max} \\ |(T_s(x, t))_t| \leq (T_s)_{t, \max} \\ |(T_s(x, t))_x| \leq (T_s)_{x, \max} \end{array} \right.$$

pour tout $x \in [0, l]$, $t \geq 0$ où c_v désigne le coefficient de dissipation. Ils ont prouvé un résultat de stabilité asymptotique du système avec le contrôle frontière

$$u(t) = (d_c - 2\rho c) w_t(l, t) - k w_{xt}(l, t), k > 0$$

à condition que $T_{s, \min}$ est suffisamment plus grande que $(T_s)_{t, \max}$ et $(T_s)_{x, \max}$.

1.2 Organisation de la thèse

Le reste de cette thèse est organisé comme suit :

Chapitre 2 : Dans ce chapitre on présente des notions et des résultats de base d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans notre travail. En particulier, on donne des résultats fondamentaux concernant des espaces fonctionnels et des théorèmes d'existence pour des problèmes d'évolution.

Chapitre 3: Ce chapitre est divisé en deux parties

Partie 1: est consacrée à un rappel de quelques propriétés des matériaux viscoélastiques et leur rôle dans l'atténuation des vibrations dans les systèmes mécaniques.

Partie 2: Dans cette partie, on introduit la méthode de la dérivation d'une fonctionnelle (énergie, fonction de Liapunov, etc.) associé à un système en mouvement axial.

Chapitre 4 : Dans cette partie on présente notre première contribution, notamment sur la stabilisation d'une corde de type Kirchhoff en mouvement axial par un contrôle frontière de type mémoire (viscoélastique). Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication parue dans la revue **Journal of Dynamical and Control Systems**, sous le titre:

Uniform stabilization of an axially moving Kirchhoff string by a boundary control of memory type.

Chapitre 5 : Dans cette partie, on présente notre deuxième contribution concernant la stabilisation uniforme d'une poutre en mouvement axial. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de deux publications, l'une dans la revue **Applied Mathematics and Optimization**, intitulée:

Uniform decay for solutions of an axially moving viscoelastic beam

et l'autre dans la revue: **Journal of Dynamical and Control Systems**

sous le titre :

Stability of an axially moving viscoelastic beam.

Conclusion et perspectives : Cette partie a pour but d'évaluer les résultats obtenus et de présenter quelques perspectives pour les améliorer et d'introduire d'autres problèmes ouverts dans lesquels s'inscrit notre travail.

Chapitre 2

Rappels généraux et définitions

Ce chapitre vise à présenter les notions essentielles d'analyse fonctionnelle, ainsi que certains résultats concernant les espaces L^p , les espaces de Sobolev et des théorèmes d'existence pour des problèmes d'évolution qui seront utilisés par la suite.

Soit Ω l'intervalle défini par

$$\Omega =]0, l[, \quad l > 0.$$

Dans la suite, on notera par

- – $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans \mathbb{R} ,
- $(C(\Omega))^m$ est l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans \mathbb{R}^m ,
- $C_b(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions continues et bornées sur $\bar{\Omega}$, on le munit de la norme

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$$

pour $k \geq 1$ entier,

- – $C^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω ,
- $C_c^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $C^k(\Omega)$ dont le support est compact et inclus dans Ω ,

- $C_0^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, à supports compacts qu'on appelle espace des fonctions test.

Définition 2.1 *On dit qu'un espace vectoriel normé E est un espace de Banach s'il est complet.*

2.1 Topologie faible et topologie faible*

2.1.1 Topologie faible

Soit E un espace de Banach muni de la norme $\| \cdot \|_E$ et soit E^* son espace dual.

Notation 2.1 *Le crochet de dualité est la forme bilinéaire définie par*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E^* \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, x) &\rightarrow \langle f, x \rangle = f(x). \end{aligned}$$

Définition 2.2 *La topologie faible sur E notée $\sigma(E, E^*)$ est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les formes linéaires sur E^* .*

Un système fondamental de voisinages de la topologie $\sigma(E, E^)$ en un point $x_0 \in E$ est donné par*

$$V_{\varepsilon, I}^{x_0} = \{x \in E : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon, \forall i \in I\}$$

où $\varepsilon > 0$, I fini, $f_i \in E^*$.

Définition 2.3 *On dit qu'une suite $(x_n)_n$ de E converge faiblement vers $x \in E$ si pour tout $f \in E^*$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x).$$

On note cette convergence par $x_n \rightharpoonup x$.

On parle de convergence forte quand on a convergence en norme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_E = 0$$

on la note par $x_n \rightarrow x$.

Proposition 2.1 (Voir [7]) Soit $(x_n)_n$ une suite de E . On a les propriétés suivantes

1. Si $x_n \rightarrow x$ alors $x_n \rightharpoonup x$.
2. Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $\|x_n\|_E$ est bornée et $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$.
3. Si $x_n \rightharpoonup x$ dans E et si $f_n \rightarrow f$ dans E^* alors $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ dans \mathbb{R} .

Théorème 2.1 (voir [7]) Dans un espace vectoriel normé, toute suite faiblement convergente est bornée.

2.1.2 Topologie faible*

Soit E un espace de Banach

Définition 2.4 La topologie faible* sur E^* , notée $\sigma(E^*, E)$ est la topologie la moins fine sur E^* rendant continues toutes les applications pour tout $x \in E$. Un système fondamental de voisinages de la topologie $\sigma(E^*, E)$ en un point $f_0 \in E^*$ est donné par

$$V_{\varepsilon, I}^{f_0} = \{f \in E^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, \forall i \in I\}$$

où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue, $\varepsilon > 0$, I fini, $x_i \in E$.

On note "une suite $(f_n)_n$ qui converge vers f pour la topologie $\sigma(E^*, E)$ " par $f_n \xrightarrow{*} f$.

Proposition 2.2 (voir [7]) Soit $(f_n)_n$ une suite E^* . On a les propriétés suivantes

1. Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E^*, E)$ est équivalente à $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ dans \mathbb{R} , $\forall x \in E$.
2. Si $f_n \rightarrow f$ alors $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E^*, E^{**})$,
si $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E^*, E^{**})$ alors $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E^*, E)$.
3. Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E^*, E)$ alors $\|f_n\|$ est bornée dans E^* et $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.
4. Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E^*, E)$ et $x_n \rightarrow x$ dans E alors $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ dans \mathbb{R} .

2.1.3 Espace réflexif

Définition 2.5 Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E^{**} (bidual de E). On dit que E est réflexif si $J(E) = E^{**}$.

Lorsque E est réflexif, on identifie implicitement E et E^{**} (à l'aide de l'isomorphisme J).

2.1.4 Espace separable

Définition 2.6 On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense dans E .

Théorème 2.2 Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(x_n)_n$ une suite bornée dans E . Alors il existe une sous-suite extraite (x_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(E, E^*)$.

Preuve: Voir [7].

2.2 Espaces $L^p(\Omega) : 1 \leq p < \infty$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace des classes de fonctions $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty\}.$$

Sa norme est donnée par

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \exists C > 0, u \text{ mesurable} : |u(x)| < C \text{ pp.}\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C \in \mathbb{R}_+, |u(x)| < C \text{ pp.}\}.$$

Remarque 2.1 L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx, \quad u, v \in L^2(\Omega)$$

est un espace de Hilbert et l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach $1 \leq p \leq \infty$.

Proposition 2.3 1. $L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

2. $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.

Preuve: Voir [7]

2.3 Espaces de Sobolev

2.3.1 Dérivée faible

Définition 2.7 On dit que u est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$, s'il existe une fonction $w \in L^2(\Omega)$, telle que $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$ on ait

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{dv(x)}{dx} dx = - \int_{\Omega} v(x) w(x) dx. \quad (2.3.1)$$

Cela revient à dire que $\frac{du(x)}{dx} = w(x)$ au sens des distributions.

2.3.2 Espace $W^{1,p}(\Omega)$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{du}{dx} \in L^p(\Omega) \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

ou $\frac{du(x)}{dx}$ est la dérivée faible de u . désigne par

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

2.3.3 Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Soient $m \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq \infty$, on définit $W^{m,p}(\Omega)$ par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{d^k u}{dx^k} \in L^p(\Omega), k \leq m \right\}$$

où $\frac{d^k u}{dx^k}$ est la dérivée faible d'ordre k de u au sens de la définition (2.3.1). L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{k \leq m} \left\| \frac{d^k u}{dx^k} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Remarque 2.2 Les espaces $H^m(\Omega)$, sont des espaces de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{k \leq m} \left(\frac{d^k u}{dx^k}, \frac{d^k v}{dx^k} \right)_{L^2(\Omega)}, \quad u, v \in H^m(\Omega).$$

2.3.4 Inégalités

Lemme 2.1 (Inégalité de Hölder): Soient p et q deux nombres réels avec $1 \leq p, q \leq \infty$ vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{2.3.2}$$

et soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$. Alors $uv \in L^1(\Omega)$ et

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}. \tag{2.3.3}$$

Si $p = q = 2$ l'inégalité (2.3.3) est appelée inégalité de Cauchy-Schwarz.

Dans la suite, on notera par

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$$

Lemme 2.2 (Inégalité de Poincaré)(voir [34]) Soit $u \in H^2(\Omega)$ vérifiant la condition

$$u(0) = 0, \tag{2.3.4}$$

alors les inégalités suivantes sont vérifiées

$$u^2(x) \leq l \|u_x\|^2, \quad \forall x \in [0, l],$$

$$\|u\|^2 \leq l^2 \|u_x\|^2.$$

Si de plus la fonction vérifie la condition

$$u_x(0) = 0,$$

alors les inégalités suivantes sont vérifiées

$$u_x^2 \leq l \|u_{xx}\|^2 \quad \forall x \in [0, l],$$

$$\|u_x\|^2 \leq l^2 \|u_{xx}\|^2.$$

Lemme 2.3 (Inégalité de Young) Soient $a, b \geq 0$ et $1 < p, q < \infty$ vérifiant (2.3.2). Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2.3.5 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Définition 2.8 Soit X un espace de Banach, $1 \leq p < \infty$ et $]0, T[$ un intervalle de \mathbb{R} . On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans X et on note

$$\begin{aligned} L^p(0, T; X) &= \left\{ f :]0, T[\rightarrow X \text{ mesurable, telle que } \int_0^T \|u\|_X^p dt < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}, \\ L^\infty(0, T; X) &= \left\{ f :]0, T[\rightarrow X \text{ mesurable, telle que } \sup_{t \in]0, T[} \|u\|_X < \infty \right\}. \end{aligned}$$

munis des normes suivantes

$$\begin{aligned} i) \|u\|_{L^p(0, T; X)} &= \left(\int_0^T \|u\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ ii) \|u\|_{L^\infty(0, T; X)} &= \sup_{t \in]0, T[} \|u\|_X. \end{aligned}$$

Remarque 2.3 $L^p(0, T; X), 1 \leq p \leq \infty$, est un espace de Banach.

Remarque 2.4 Soit (X, Y) un couple d'espaces de Banach, $L(Y; X)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de $Y \rightarrow X$

Si $Y = X$ on note $L(X)$ au lieu de $L(X, X)$.

Définition 2.9 On appelle espace des distributions sur $]0, T[$ à valeurs dans X , l'espace défini par

$$D' (]0, T[; X) = L(D (]0, T[); X).$$

Remarque 2.5 Soit (X, Y) un couple d'espaces de Banach tel que $X \hookrightarrow Y$ (Injection continue). Alors, on a $L^p(0, T; X) \hookrightarrow L^p(0, T; Y), 1 \leq p \leq \infty$.

A une fonction $f \in L^p(0, T; X)$ on associe une distribution, notée f , sur $]0, T[$ à valeurs dans X , définie par

$$f(\varphi) = \int_0^T f(t) \varphi(t) dt, \quad \varphi \in D (]0, T[).$$

Définition 2.10 Si $f \in D' (]0, T[; X)$, on définit df/dt par

$$\frac{df}{dt}(\varphi) = (-1) f \left(\frac{d\varphi}{dt} \right), \quad \forall \varphi \in D (]0, T[).$$

Lemme 2.4 Soit $v \in L^p(0, T; X)$; et $dv/dt \in L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p \leq \infty$)

Alors la fonction v est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $[0, T] \rightarrow X$.

Preuve: Voir Lions-Magenes ([63, Chapitre 1]).

Lemme 2.5 (*Inégalité de Gronwall*)

(1) Soit $\eta(t)$ une fonction positive, absolument continue sur $[0, T]$, qui satisfait l'inégalité différentielle suivante

$$\eta'(t) \leq \varphi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

pour presque tout $t \in [0, T]$, où $\varphi(t), \psi(t)$ sont des fonctions positives et sommables sur $[0, T]$

. Alors

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \varphi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right]$$

pour presque tout $t \in [0, T]$.

(2) Soit $\eta(t)$ une fonction positive, absolument continue sur $[0, T]$, qui satisfait l'inégalité suivante

$$\eta(t) \leq C_1 \int_0^t \eta(s) ds + C_2$$

pour $C_1, C_2 > 0$ et pour presque tout $t \in [0, T]$. En particulier, si

$$\eta(t) \leq C_1 \int_0^t \eta(s) ds$$

pour $C_1 > 0$ et pour presque tout $t \in [0, T]$. Alors

$$\eta(t) = 0 \text{ presque tout.}$$

Preuve Voir Evans [26].

2.4 Principe d'invariance de Lasalle

Rappelons le principe d'invariance de LaSalle qui est un outil très utilisé pour étudier le comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles.

Définition 2.11 Un ensemble invariant \mathcal{I} , pour un système dynamique

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t))$$

est défini comme un ensemble de conditions initiales x_0 , tel que la solution $\chi(x_0, t)$ reste dans l'ensemble $\mathcal{I} \forall t \geq 0$, c.-à-d

$$\mathcal{I} = \{x : x_0 \in \mathcal{I} \implies \chi(x, t) \in \mathcal{I}, \forall t \geq 0\}$$

Théorème 2.3 (*Théorème d'invariance de LaSalle*)

Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et soit $a > 0$, on pose

$$\Omega_a = \{x : V(x(t)) \leq a\}.$$

On suppose que

- 1) Ω_a fermé et borné
- 2) $\forall x \in \Omega_a$, on a $\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq 0$
- 3) $\mathcal{V} \subset \Omega_a$ et $\mathcal{V} = \{x : \frac{d}{dt}V(x(t)) = 0\}$
- 4) \mathcal{I} est le plus grand ensemble invariant, $\mathcal{I} \subset \mathcal{V}$

alors

$\forall x_0 \in \Omega_a$, $\chi(x_0, t) \rightarrow \mathcal{I}$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Preuve: Voir [111].

Chapitre 3

Préliminaires

Ce chapitre est divisé en deux parties, la première partie est consacrée à un rappel de quelques propriétés physiques et quelques avantages des matériaux viscoélastiques. La deuxième partie est réservée à la méthode de la différentiation d'une fonctionnelle associée à un système en mouvement axial.

Partie I

Matériaux viscoélastiques

3.1 Introduction

Les matériaux viscoélastiques ont des applications dans tous les domaines de l'ingénierie et des systèmes mécaniques, de l'électroménager au spatial en passant par l'automobile, l'aéronautique ou le génie civil.

3.2 Définition de la viscoélasticité

Un matériau viscoélastique se caractérise par le fait qu'il possède à la fois un comportement visqueux et élastique. L'élasticité se traduit par la conservation et restitution de l'énergie après déformation. La viscosité se traduit par la dissipation de l'énergie. Les polymères représentent un bon exemple de matériaux qui ont un comportement viscoélastique.

3.2.1 Loi de Hooke

Pour une pièce de matériau ayant une surface de section transversale A , et une longueur initiale l_0 , soumise à une force F (de traction/compression), la réponse correspondante est donnée par le déplacement Δl . Le modèle de déformation le plus simple est la traction (étirement) ou la compression. Pour les petites déformations, la variation de la longueur Δl est proportionnelle à la force F

$$F = k \times \Delta l$$

où k est la raideur de la pièce. Le rapport de la force F par l'aire S de la section droite de la pièce s'appelle "contrainte". La contrainte est donc une grandeur homogène qui s'exprime par

$$\sigma = \frac{F}{S}.$$

Le rapport de l'allongement Δl par la longueur initiale l_0 s'appelle "déformation" ou allongement relatif

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

On distingue les cas suivants

Matériau élastique: Toute l'énergie stockée au cours du chargement de la force F est retournée une fois la force enlevée. Dans ce cas la loi de Hooke s'exprime alors sous la forme

$$\sigma = E.\varepsilon$$

où E est le module de Young ou module d'élasticité, qui est une caractéristique du matériau; c'est l'équivalent en mécanique des milieux continus de la raideur d'un ressort.

Matériau visqueux: Ce type de matériau ne renvoie aucune partie de l'énergie stockée au cours du chargement. Toute l'énergie est perdue sous forme d' "amortissement pur" une fois la charge enlevée. Dans ce cas, la contrainte est proportionnelle à la vitesse de la déformation, et le rapport de la contrainte par la vitesse de déformation est connue comme "viscosité". Ces matériaux présentent l'amortissement sans aucune rigidité.

Matériau viscoélastique: On appelle matériau viscoélastique, un matériau dont une partie de l'énergie stockée dans le système est récupérée lors de la suppression de la charge, et l'autre partie se dissipe sous forme de chaleur.

3.3 Viscoélasticité linéaire

La viscoélasticité linéaire se caractérise par le comportement élastique et dissipatif d'un matériau pour les petites déformations. Celle-ci peut être considérée à différentes échelles. En mécanique des structures, c'est le niveau macroscopique qui est retenu. Cependant, quelques éléments d'une approche à une échelle inférieure (ici moléculaire) permettent de comprendre le phénomène physique de dissipation dans ces matériaux, ce qui permet de déterminer ou d'expliquer l'influence de certains facteurs à prendre en compte.

D'un point de vue moléculaire, quand un effort est appliqué sur un matériau viscoélastique, par exemple pour un polymère, deux mécanismes atomiques interviennent [93]. Les liaisons atomiques changent de longueur et d'angle. Les atomes sont alors déplacés à de nouvelles positions, avec une augmentation de l'énergie interne de façon extrêmement rapide.

3.3.1 Principe de superposition de Boltzmann

Pour certains matériaux, la réponse à une déformation ou à une contrainte constante varie au cours du temps. Ces observations se font plus particulièrement dans les cas des essais de fluage et de relaxation. Pour un essai de fluage, une contrainte constante est appliquée, et il se produit une augmentation de la déformation au cours du temps. Réciproquement, pour un essai de relaxation, c'est une déformation constante qui est imposée, et c'est alors une diminution de la contrainte qui apparaît au cours du temps. Ces deux phénomènes se caractérisent par les courbes expérimentales présentées dans la Figure (3.3.1) et la Figure (3.3.2) qui caractérisent ces matériaux.

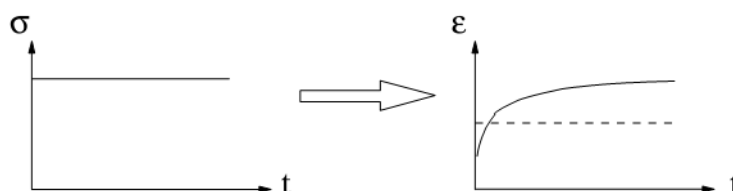


Figure 3.3.1 : Courbe caractéristique de fluage

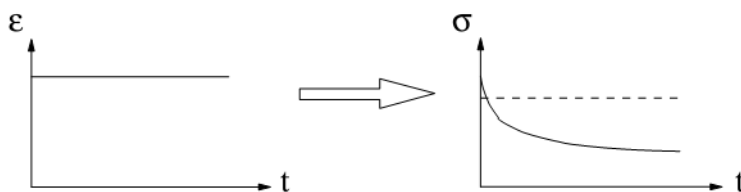


Figure 3.3.2 : Courbe caractéristique de relaxation

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, la loi de comportement, donnant la relation entre la contrainte et la déformation est donnée par le produit de convolution suivant

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds$$

avec h la fonction de relaxation.

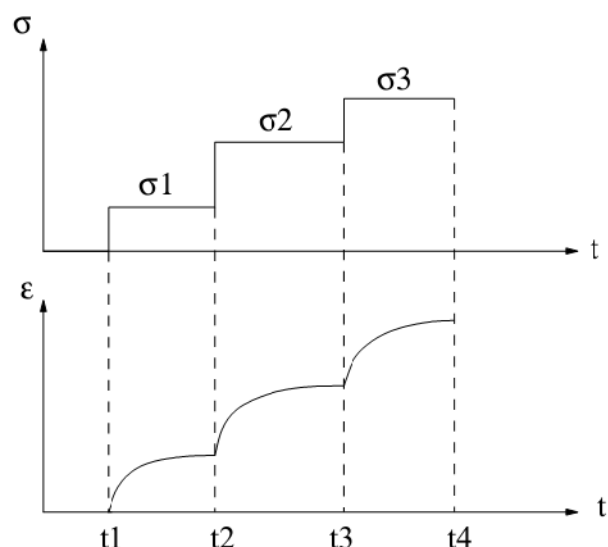


Figure 3.3.3 : Principe de superposition de Boltzmann

Si on considère qu'il y a équilibre jusqu'au temps $t = 0$, dans un cadre mono-dimensionnel en traction-compression, cette relation peut se mettre sous la forme

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \int_0^t E(t-s) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds.$$

Les différents modèles viscoélastiques diffèrent par le choix du noyau (ou de la fonction de relaxation) h .

3.3.2 Modèles mathématiques pour la viscoélasticité linéaire

Les modèles rhéologiques sont des éléments qui permettent de représenter les comportements mécaniques de base. Deux comportements nous intéressent :

1. l'élasticité avec le ressort.
2. la viscosité avec l'amortisseur.

Leur combinaison permet d'obtenir des lois de comportement proches des celles des matériaux.

Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell décrit un matériau viscoélastique, c'est-à-dire ayant à la fois des propriétés élastiques et visqueuses. Ce modèle fut proposé par James Clerk Maxwell en

1867. Le modèle de Maxwell est représenté par un amortisseur purement visqueux et un ressort hookéen mis en série comme l'indique la Figure 3.3.4 .



Figure 3.3.4 : Modèle de Maxwell

Dans cette configuration, lorsqu'une contrainte axiale est appliquée, la contrainte totale σ et la déformation totale ε sont données par

$$\sigma = \sigma_A = \sigma_R$$

$$\varepsilon = \varepsilon_A + \varepsilon_R$$

où l'indice A désigne l'amortisseur et l'indice R le ressort. Les contraintes de l'amortisseur et du ressort sont données respectivement par :

$$\sigma_A = \eta \dot{\varepsilon}_A$$

$$\sigma_R = k \varepsilon_R$$

où k est le module d'élasticité associé au ressort et η le coefficient de viscosité associé à l'amortisseur représentant un fluide newtonien.

En dérivant la déformation totale par rapport au temps, on obtient

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_A + \dot{\varepsilon}_R = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{k}.$$

En multipliant cette équation par k et en utilisant $\tau = \frac{\eta}{k}$. L'équation précédente s'écrit

$$k\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + \frac{1}{\tau}\sigma.$$

La solution générale de l'équation de Maxwell est donnée par

$$\sigma(t) = \frac{\eta}{\tau} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{(t-s)}{\tau}\right) \dot{\varepsilon}(s) ds.$$

Modèle de Kelvin-Voigt

Le modèle de Kelvin-Voigt peut être représenté par un amortisseur purement visqueux et un ressort hookéen mis en parallèle comme l'indique la figure ci-dessous

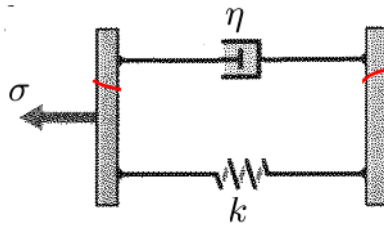


Figure 3.3.5 : Modèle de Kelvin-Voigt

Dans ce modèle en parallèle, la contrainte totale σ et la déformation totale ε sont données par

$$\sigma = \sigma_A + \sigma_R,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_A = \varepsilon_R.$$

Les contraintes de l'amortisseur et du ressort sont données respectivement par

$$\sigma_A = \eta \dot{\varepsilon},$$

$$\sigma_R = k\varepsilon.$$

On en déduit alors que

$$\sigma(t) = k\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t).$$

De même que pour le modèle de Maxwell, on en déduit un temps caractéristique de relaxation $\tau = \frac{\eta}{k}$.

Il existe d'autres modèles qui peuvent décrire le comportement d'un matériau viscoélastique tels que: le modèle de Zener, le modèle SLS type Kelvin-Voigt, le modèle SLS de type Maxwell et le modèle de Maxwell généralisé. Le lecteur trouvera plus de détails autour de ce sujet dans ([93]).

Ainsi, le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt et celui de Maxwell restent parmi les modèles les plus simples pour représenter expérimentalement le comportement de ces matériaux.

3.4 Conclusion

L'une des fonctions principales des matériaux viscoélastiques est de fournir un mécanisme de dissipation de l'énergie mécanique des vibrations en chaleur. Par conséquent, ils permettent

3.4. Conclusion

d'atténuer le bruit et les vibrations, et de plus augmenter de la durée de vie des structures. Ces avantages nous encouragent à adopter ces matériaux dans notre étude comme un outil pour stabiliser certaines structures en mouvement axial.

Partie II

Taux de variation de l'énergie d'un système en mouvement axial

3.5 Introduction

Dans cette partie, en utilisant la version de la règle de Leibniz en trois dimensions, on rappelle la méthode “correcte” de dérivation de l’énergie associée à un système en mouvement axial (voir [117]). On montrera que la méthode de [91], qui décrit la façon d’obtention du taux de la variation temporelle d’une énergie fonctionnelle dans la description eulérienne, et les résultats antérieurs [57, 61] ne sont pas complets. Le point clé est que les dérivées temporelles aux frontières dans la description eulérienne d’un système en mouvement axial doivent tenir compte de la vitesse de la matière en mouvement elle-même. Deux exemples, de systèmes en mouvement axial (corde et poutre), sont donnés pour illustrer cette méthode.

3.6 Formulation du problème

La Figure 3.6.1 représente le schéma d’une corde se déplaçant axialement. Elle sera utilisée comme exemple représentatif pour l’élaboration d’une technique et la comparaison avec les méthodes anciennes. Les deux rouleaux de support aux deux extrémités sont supposés fixes, c’est à dire fixés dans le sens qu’il n’y a pas de mouvement vertical, mais ils permettent à la corde de se déplacer dans la direction horizontale

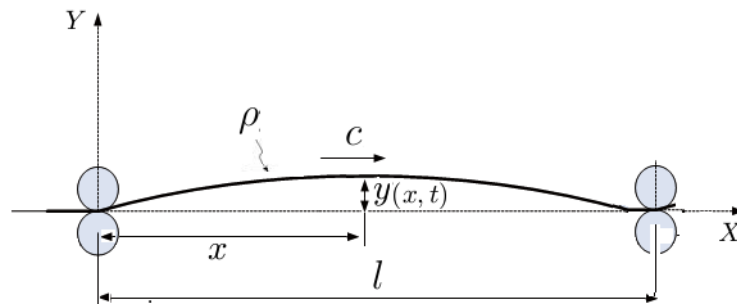


Figure 3.6.1 : Corde en mouvement axial

En utilisant le principe de Hamilton, l’équation et les conditions aux limites sont données par (voir introduction, (1.1.1))

$$\begin{cases} \rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} - (T - \rho c^2) y_{xx} = 0, & 0 < x < l, t \geq 0, \\ y(0, t) = y(l, t) = 0. \end{cases} \quad (3.6.1)$$

Comme la corde se déplace avec une vitesse constante c , l'opérateur de la dérivée totale (dérivée particulière) par rapport au temps est défini par

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}.\end{aligned}\quad (3.6.2)$$

L'énergie mécanique de la corde entre $x = 0$ et $x = l$ est donnée par

$$E_{corde} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho (y_t + cy_x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l T y_x^2 dx, \quad t \geq 0. \quad (3.6.3)$$

Dans le procédé de conception d'un contrôle, en utilisant la méthode de Lyapunov, il est essentiel d'analyser et de traiter la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov du système considéré et en particulier l'énergie mécanique. Renshaw et *al.* [91] ont présenté une méthode pour obtenir la dérivée temporelle de l'énergie associée à un système en mouvement axial, où seule une fonctionnelle eulérienne a été considérée comme fonction de Lyapunov sous l'hypothèse de définie positivité et sans utiliser la fonctionnelle lagrangienne.

La description eulérienne de l'énergie mécanique de la partie dans la Figure 3.6.1 est

$$E_{eul} = \frac{1}{2} \int_0^l [\rho (y_t + cy_x)^2 + T y_x^2] dx, \quad t \geq 0. \quad (3.6.4)$$

La description lagrangienne de l'énergie mécanique de l'ensemble des particules entre $x = ct$ et $x = ct + l$ est

$$E_{lag} = \frac{1}{2} \int_{ct}^{ct+l} [\rho (y_t + cy_x)^2 + T y_x^2] dx, \quad t \geq 0 \quad (3.6.5)$$

où $E_{eul} = E_{lag}$ à l'instant $t = 0$. Mais, notons que $\frac{d}{dt} E_{eul}$ et $\frac{d}{dt} E_{lag}$ sont distinctes. Les assertions principales [91] se résument comme suit:

Pour $\frac{d}{dt} E_{eul}$ le résultat suivant a été "revendiqué", en suivant la règle unidimensionnelle de Leibniz

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)}^{B(t)} f(t, s) ds = \int_{A(t)}^{B(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, s) ds + f(t, B(t)) B'(t) - f(t, A(t)) A'(t). \quad (3.6.6)$$

La dérivée totale de l'énergie se calcule comme suit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} E_{eul} &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} [\rho (y_t + cy_x)^2 + T y_x^2] dx \\ &= \int_0^l [\rho (y_t + cy_x) (y_{tt} + cy_{xt}) + T y_x y_{xt}] dx, \quad t \geq 0.\end{aligned}\quad (3.6.7)$$

En substituant y_{tt} de l'équation (3.6.1) dans la relation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_{eul} &= \int_0^l [(y_t + cy_x) [(T - \rho c^2) y_{xx} - \rho cy_{xt}] + Ty_x y_{xt}] dx \\ &= (T - \rho c^2) \int_0^l y_t y_{xx} dx + c(T - \rho c^2) \int_0^l y_x y_{xx} dx - \rho c \int_0^l y_t y_{xt} dx \\ &\quad - \rho c^2 \int_0^l y_x y_{xt} dx + T \int_0^l y_x y_{xt} dx, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

En utilisant une intégration par partie et en tenant compte des conditions aux limites $y(0, t) = y(l, t) = 0$, on arrive à

$$\frac{d}{dt}E_{eul} = \frac{c}{2} (T - \rho c^2) y_x^2 \Big|_0^l, \quad t \geq 0. \quad (3.6.9)$$

La première égalité de (3.6.7) peut également être obtenue à partir de l'équation suivante

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_{eul} &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} [\rho (y_t + cy_x)^2 + Ty_x^2] dx \\ &\quad + \frac{1}{2} [\rho (y_t + cy_x)^2 + Ty_x^2] \frac{dx}{dt} \Big|_0^l, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

si $\frac{dx}{dt}$ est égale à zéro en $x = 0$ et en $x = l$.

D'autre part, pour $\frac{d}{dt}E_{lag}$, les bornes d'intégration dépendent du temps. Le résultat obtenu par Renshaw *et al.* [91] est

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_{lag} &= \frac{1}{2} \int_{ct}^{ct+l} \frac{\partial}{\partial t} [\rho (y_t + cy_x)^2 + Ty_x^2] dx \\ &\quad + \frac{1}{2} [\rho (y_t + cy_x)^2 + Ty_x^2] \frac{dx}{dt} \Big|_{ct}^{ct+l} . \\ &= \frac{c}{2} (T - \rho c^2) y_x^2 \Big|_{ct}^{ct+l} + \frac{1}{2} [\rho (y_t + cy_x)^2 + Ty_x^2] \frac{dx}{dt} \Big|_{ct}^{ct+l} \\ &= cTy_x^2 \Big|_{ct}^{ct+l}, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.6.11)$$

où $y_t = 0$ aux deux extrémités grâce aux conditions aux limites fixées.

Renshaw *et al.* [91] ont observé que (3.6.11) est valable uniquement en $t = 0$ parce que (3.6.1) s'applique uniquement lorsque les particules associées à E_{lag} comprennent la partie de la corde $[0, l]$ et donc (3.6.11) est une énergie valable uniquement en $t = 0$. Par conséquent, leurs conclusions étaient les suivantes: Une fonctionnelle lagrangienne définie positive, même si elle est une dérivée particulière, ne peut être utilisée comme une fonction

de Lyapunov, parce que sa dérivée temporelle n'est pas valable pour plus d'un instant. Par contre, la fonctionnelle eulérienne de (3.6.9) peut être utilisée comme une fonction de Lyapunov, même si elle n'est pas une dérivée particulaire.

Remarque 3.1 *La remarque dans [91] que la fonctionnelle lagrangienne ne peut pas être une fonction de Lyapunov est correcte. Mais, la façon d'évaluer la fonctionnelle eulérienne (3.6.9) est incorrecte. Dans la littérature de nombreux résultats ([32], [33], [55], [56]) se sont appuyés sur la dérivée particulaire, et ont tous cru qu'ils sont corrects.*

Remarque 3.2 *L'affirmation dans [91] manque d'un élément essentiel dans l'évaluation (3.6.9), c'est à dire que dx/dt ne doit pas être considérée nulle en $x = 0, l$ même si 0 et l sont des constantes. Il semble que cette affirmation est due à la mauvaise interprétation de la dérivée. En effet, dx/dt a été considéré comme représentant de la vitesse de la surface de la partie $[0, l]$ dans la description eulérienne. Alors que dx/dt dans (3.6.10) représente la vitesse du matériau en cours de transmission, et ne représente pas la vitesse du point d'appui.*

Par conséquent, l'évaluation correcte de (3.6.9) devrait être donnée sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{eul} &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} [\rho (y_t + cy_x)^2 + T y_x^2] dx \\ &\quad + \frac{c}{2} [\rho (y_t + cy_x)^2 + T y_x^2] \Big|_0^l \\ &= c T y_x^2 \Big|_0^l, \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

qui sera expliquée en détail dans la section suivante.

3.7 La méthode correcte

La dérivée temporelle de l'énergie d'une structure en mouvement axial a été obtenue en utilisant la règle de Leibniz en trois dimensions . Pour cela, on introduit un volume variant avec le temps $U(t)$ de grandeur finie avec une surface variante avec le temps $S(t)$ qui l'enferme (à noter que "variant avec le temps" signifie "se déplaçant et / ou se déformant" tandis

que “invariant avec le temps ” signifie “fixe”, c’est à dire. “ne se déplace pas/ ne se déforme pas”).

Notre attention se concentre sur ce qui se passe sur une région spécifique. Le volume et la surface occupés par une région spécifique de la partie mobile devraient être considérés comme variant avec le temps puisque le système en mouvement axial vibre même dans le cas où les deux conditions aux limites sont fixées.

On définit

$$\varphi(t) = \int_{U(t)} \psi(\vec{x}, t) dU, \quad (3.7.1)$$

où \vec{x} est le vecteur position par rapport à une origine choisie et la quantité ψ représente les flux de masse, de quantité de mouvement, le moment angulaire, l’énergie, l’énergie cinétique, etc. Notons que le vecteur position \vec{x} est indépendant du temps dans la description eulérienne, tandis que le vecteur \vec{x} dépend du temps dans la description lagrangienne (voir [[101], pp 8-11]).

Dans la description eulérienne, \vec{x} est appelé la coordonnée du champ et $d\vec{x}/dt = \vec{u}$ est appelée la vitesse particulaire donnée en coordonnées du champ (voir [[101], pp 8-11]). En tenant compte de la dérivée particulaire telle que définie dans (3.6.2), la vitesse \vec{u} peut également être obtenue par

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{x} = \vec{u}$$

où $\partial \vec{x} / \partial t = 0$, puisque x et t sont indépendants. D’autre part, la vitesse particulaire dans la description lagrangienne est donnée par

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{u}$$

où \vec{x} est une variable dépendante du temps qui est attachée au point qui se déplace (voir [[101], pp 9]).

Maintenant, une expression pour $d\varphi/dt$, c’est à dire, une version en trois dimensions de la règle de Leibniz est obtenue:

Si U dans (3.7.1) est invariante par rapport au temps, alors la dérivation par rapport à t sous le signe intégrale, $d\psi/dt$, peut se justifier pour tout t sur un intervalle de temps où ψ et $\partial\psi/\partial t$ sont continues pour $a \leq t \leq b$ et le domaine d’intégration.

Plus généralement, lorsque $U(t)$ varie avec le temps, $\varphi(t)$ peut être considérée comme une fonction de t . A travers la variable intermédiaire $S(t)$ qui désigne les bornes de $U(t)$ dans l'intégrale volumique. Notons que la région $S(t)$ est occupée par des points matériels à l'instant t et chaque point sur la surface est également décrit comme le champ de coordonnées \vec{x} à l'instant t dans la description eulérienne. Ainsi φ peut être écrite comme $\varphi(\vec{x}, t)$. Il suit alors la dérivée totale

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\varphi, \quad (3.7.2)$$

Si les dérivées du second membre de (3.7.2) sont continues, alors $\partial\varphi/\partial t$ doit être calculée en traitant U comme une région invariante par rapport au temps lorsque ψ et $\partial\psi/\partial t$ sont continues. Pour calculer l'autre dérivée partielle de φ dans (3.7.2), l'utilisation du théorème de Gauss donne

$$\nabla\varphi = \int_U \nabla\psi dU = \oint_S \psi \nu dS$$

où ν est le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de $S(t)$. Notons que la surface $S(t)$ est occupée par le matériau avec la vitesse \vec{u} au cours du mouvement. Par conséquent, la règle de Leibniz en trois dimensions est donnée par

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{d}{dt} \int_{U(t)} \psi dU = \int_{U(t)} \frac{\partial}{\partial t} \psi dU + \oint_{S(t)} \vec{u} \psi \nu dS, \quad (3.7.3)$$

où le premier terme dans la deuxième égalité de (3.7.3) représente la variation ψ qui se produit à l'intérieur de $U(t)$, tandis que le deuxième terme représente le transport de ψ qui traverse la surface $S(t)$. Notons que l'intégrale surfacique de (3.7.3) désigne le flux net de ψ qui traverse $S(t)$ puisque la quantité de ψ qui traverse une zone dS de $S(t)$ par unité de temps est $\vec{u} \psi \nu dS$.

Remarque 3.3 *Le point le plus important dans l'application de (3.7.3) est: Dans la règle de Leibniz de (3.7.3), \vec{u} désigne la vitesse du matériau donné en coordonnées de champ, et non la vitesse de la surface $S(t)$. De ce fait, même si les conditions aux limites de la Figure 3.6.1 sont fixées, dx/dt dans (3.7.2) ne doit pas être considérée comme nulle.*

Enfin, la dérivée temporelle de la fonctionnelle (énergie, fonction de Lyapunov, etc....) d'un système en mouvement axial peut être obtenue par la règle de Leibniz en trois dimensions: Au cours des vibrations, la forme du volume change à cause du déplacement et à

la déformation et prend successivement de nouvelles régions dans l'espace. Par conséquent $U(t)$ représente la région occupée par la partie mobile à l'instant t . Toutefois, la surface $S(t)$ est représentée par deux points dans le cas unidimensionnel (les bornes de l'intégrale).

Exemple 1: Pour la corde en mouvement axial introduite dans (3.6.1), la vitesse \vec{u} est remplacée par \vec{c} . Notons que dans ce cas les points $x = 0, l$ ont encore la vitesse \vec{c} malgré que des conditions aux limites sont fixées. Donc $\vec{c} \cdot \nu$ dans les limites sont données comme $-cv$ pour $x = 0$ et $+cv$ pour $x = l$ puisque v est le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de $S(t)$. Alors la dérivée de (3.6.3) en appliquant (3.7.3) est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{corde} &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} [\rho (y_t + cy_x)^2 + Ty_x^2] dx \\ &\quad + \frac{c}{2} [\rho (y_t + cy_x)^2 + Ty_x^2]_0^l \\ &= cTy_x^2|_0^l. \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

Les calculs pour le premier terme dans la première égalité se font de la même manière que dans (3.6.8). Notons que (3.7.4) est la même que (3.6.3) et tout à fait différent des résultats de (3.6.9) et (3.6.11), qui sont obtenus dans [91].

Exemple 2: On applique maintenant (3.7.3) à la dérivée de l'énergie associée à une poutre se déplaçant axialement. L'équation du mouvement s'écrit

$$\rho y_{tt} + 2\rho cy_{xt} - (T - \rho c^2) y_{xx} + EI y_{xxxx} = 0, \quad 0 < x < l.$$

L'énergie associée à ce système est définie par

$$E_{poutre} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho (y_t + cy_x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l Ty_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI y_{xx}^2 dx.$$

La dérivée de (3.6.3), en appliquant (3.7.3), est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{poutre} &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} [\rho (y_t + cy_x)^2 + Ty_x^2 + EI y_{xx}^2] dx \\ &\quad + \frac{c}{2} [\rho (y_t + cy_x)^2 + Ty_x^2 + EI y_{xx}^2]_0^l. \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

En évaluant le premier terme du second membre de (3.7.5), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_{poutre} &= \int_0^l [(y_t + cy_x) [(T - \rho c^2) y_{xx} - \rho cy_{xt} - EI y_{xxxx}] + T y_x y_{xt}] dx \\
&\quad + \frac{c}{2} [\rho (y_t + cy_x)^2 dx + T y_x^2 + EI y_{xx}^2]_0^l \\
&= (T - \rho c^2) \int_0^l y_t y_{xx} dx + c (T - \rho c^2) \int_0^l y_x y_{xx} dx - \rho c \int_0^l y_t y_{xt} dx \\
&\quad - \rho c^2 \int_0^l y_x y_{xt} dx - EI \int_0^l (y_t + cy_x) y_{xxxx} dx + T \int_0^l y_x y_{xt} dx + \int_0^l EI y_{xx} y_{xxt} dx \\
&\quad + \frac{c}{2} [\rho (y_t + cy_x)^2 + T y_x^2 + EI y_{xx}^2]_0^l.
\end{aligned}$$

Après des intégrations par parties, on arrive à

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_{poutre} &= (T - \rho c^2) y_t y_x|_0^l + \frac{c}{2} (T - \rho c^2) y_x^2|_0^l - \frac{\rho c}{2} y_t^2|_0^l \\
&\quad - EI (y_t + cy_x) y_{xxx}|_0^l + EI (y_t + cy_x)_x y_{xx}|_0^l - \frac{EIc}{2} y_{xx}^2|_0^l \\
&\quad + \frac{c}{2} [\rho (y_t + cy_x)^2 + T y_x^2 + EI y_{xx}^2]_0^l.
\end{aligned}$$

Cas 1: Conditions aux limites fixées, c'est à dire, $y(0, t) = y(l, t) = y_x(0, t) = y_x(l, t) = 0$

$$\frac{d}{dt}E_{poutre} = EIc y_{xx}^2|_0^l.$$

Cas 2: Conditions simplement supportées, c'est à dire, $y(0, t) = y(l, t) = y_{xx}(0, t) = y_{xx}(l, t) = 0$

$$\frac{d}{dt}E_{poutre} = cT y_x^2|_0^l - EIc y_x y_{xxx}|_0^l.$$

Remarque 3.4 De (3.7.4) et (3.7.5), la dérivée particulaire définie en (3.6.2) peut être directement utilisée dans la dérivation (3.7.4) et (3.7.5) comme suit

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E &= \frac{d}{dt} \int_0^l \tilde{E}(x, t) dx = \int_0^l \frac{d}{dt} \tilde{E}(x, t) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{E}(x, t) + c \frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}(x, t) \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \tilde{E}(x, t) dx + c E(x, t)|_0^l
\end{aligned} \tag{3.7.6}$$

où

$$\tilde{E}(x, t) = \frac{1}{2} [\rho (y_t(x, t) + cy_x(x, t))^2 + T y_x^2(x, t) + EI y_{xx}^2(x, t)]$$

dans le cas de la poutre et

$$\tilde{E}(x, t) = \frac{1}{2} [\rho (y_t(x, t) + cy_x(x, t))^2 + Ty_x^2(x, t)]$$

dans le cas de la corde.

3.8 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre la méthode “correcte” de calcul la dérivée de l’énergie. Cette règle sera utilisée pour calculer la dérivée totale des fonctionnelles qui introduite par la suite.

Chapitre 4

Etude d'une corde en mouvement axial de type Kirchhoff

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie la stabilité d'une corde en mouvement axial de type Kirchhoff par un contrôle frontière viscoélastique. La corde se déplace entre deux œillets avec une vitesse constante v telle que $0 \leq v < 1$. L'un des œillets est attaché à un corps rigide, tandis que l'autre est attaché à un corps ayant des propriétés viscoélastiques. La distance entre les deux œillets est supposée égale à 1 (voir Fig 4.1.1). La dynamique de la corde peut être représentée par le modèle (4.1.1) ci-dessous (voir [100]), qui est obtenu en utilisant le principe de Hamilton généralisé (voir [48])

$$\begin{cases} y_{tt} + 2vy_{xt} = (1 - v^2 + b \|y_x\|^2) y_{xx}, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ y(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ (1 - v^2 + b \|y_x\|^2) y_x(1, t) + \int_0^t h(t-s)y_t(1, s)ds = 0, & t \geq 0, \\ y(x, 0) = f(x), \quad y_t(x, 0) = g(x), & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (4.1.1)$$

où $y(x, t)$ représente le déplacement transversal de la corde et b est une constante positive. La première équation dans (4.1.1) nous indique que ce modèle se caractérise par le fait que la tension de la corde est une fonction dépendante du temps (voir [99]), donnée par

$$T(t) = 1 + b \|y_x\|^2, \quad \forall t \geq 0.$$

La première condition aux limites dans (4.1.1) indique que la corde est fixée au point $x = 0$, la deuxième condition exprime le fait que la corde est attachée à un corps possédant des propriétés viscoélastiques, décrite par le modèle de Maxwell (voir chapitre 1) au point $x = 1$ et le terme de convolution représente le contrôle frontière.

Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ représentent le déplacement initial et la vitesse initiale de la corde, respectivement. On suppose au moins que l'une des deux fonctions f et g n'est pas identiquement nulle sur $[0, 1]$.

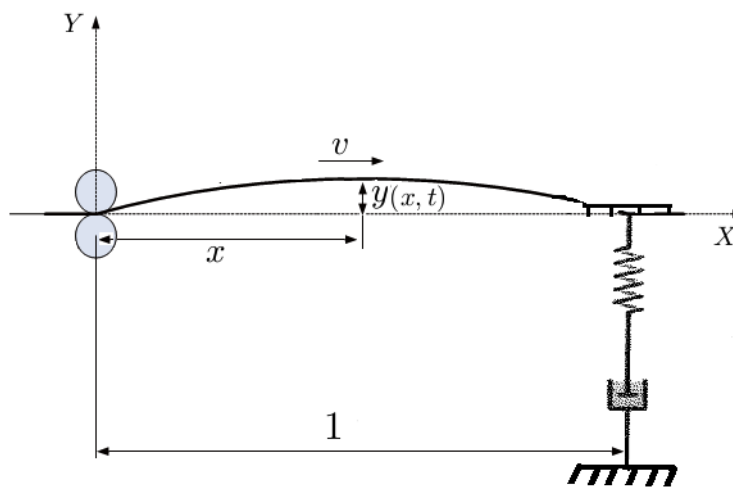


Figure 4.1.1 : Corde en mouvement axial contrôlé par un modèle de Maxwell

Le contrôle frontière de type mémoire a été utilisé par plusieurs auteurs et de nombreux résultats sur l'existence et la stabilité des solutions ont été établis pour des structures immobiles. Pour l'équation des ondes, voir [73, 96, 97] et pour un problème en électromagnétisme voir [27]. Pour des références plus utiles, on renvoie le lecteur à [87]. Des situations plus avantageuses sont traitées par Cornilleau et Nicaise en [21], Lazzari et Nibbi en [53], Nicaise et Pignotti en [80], Wu et Li en [115] et Park en [82] où d'autres types d'amortissement frictionnels linéaires et non linéaires sont présents dans la frontière. Dans d'autres œuvres, l'amortissement supplémentaire est ajouté à l'intérieur comme dans l'équation [49] et [50].

Il est également intéressant de noter que d'autres types d'amortissement ont été utilisés pour supporter le terme mémoire. En outre, une condition équivalente à la nôtre a été discutée dans [4, 9, 92, 95, 119].

La stabilité d'une corde en mouvement axial de type Kirchhoff en utilisant un contrôle frontière a attiré de nombreux chercheurs à cause de leur commodité dans les applications.

Shahruz dans [99] a étudié le modèle (4.1.1) en utilisant le contrôle frontière suivant

$$u(t) = -ky_t(1, t), \quad \forall t \geq 0$$

où k est une constante positive. Il a prouvé la stabilité exponentielle de la corde et a noté que la corde reste stable sans contrôle frontière lorsqu'une de ses extrémités se déplace transversalement. Le même modèle a été étudié par Kim *et al.* dans [48] avec une dissipation frontière différente

$$u(t) = -k(t)y_t(1, t) - \theta(t) \sin t, \quad \forall t \geq 0$$

où $k, \theta \in C^1[0, \infty)$. Il est prouvé que ce contrôle frontière est suffisant pour stabiliser la corde de manière exponentielle.

Le problème (4.1.1) a été considéré par Kelleche *et al.* dans [45]. Ici le problème a été de stabiliser le même modèle que celui de [48], en utilisant une dissipation plus faible, c'est à dire un contrôle frontière de type viscoelastique (terme mémoire). Lorsque $v = 0$, on démontre que le contrôle frontière est suffisant pour stabiliser asymptotiquement le système (voir la section 3). Cependant, on n'a pas de taux de décroissance explicite.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit: Dans la deuxième section, on introduit les hypothèses sur la fonction de relaxation (le noyau) et on donne quelques notations, lemmes, définitions, etc, nécessaires pour la preuve de notre résultat. Dans la troisième, on prouve le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème. Dans la dernière, on étudie la stabilité asymptotique dans le cas où $v \neq 0$ en utilisant la méthode des multiplicateurs et la stabilité asymptotique dans le cas $v = 0$ en utilisant le principe d'invariance de LaSalle.

4.2 Préliminaires

Dans cette section, on donne les hypothèses sur la fonction de relaxation et on introduit quelques notations qui seront utilisées dans ce chapitre. On suppose que

Hypothèse sur le noyau

(A1) $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue

(A2) Il existe une fonction croissante $\alpha(t)$ telle que $\alpha'(t)/\alpha(t) = \eta(t)$ est une fonction décroissante vérifiant

$$\int_0^\infty h(s)\alpha(s)ds < \infty.$$

Remarque 4.1 Notons qu'il y a une vaste classe de fonctions vérifiant l'hypothèse (A1)-(A2)

1) Soit $h(t) = a(1+t)^{-p}$, où $a > 0$, $p > 1$.

Des calculs simples montrent que h vérifie les conditions dans (A) avec

$$\alpha(t) = b(1+t)^\beta, \eta(t) = b\beta(1+t)^{-1} \text{ où } b, p > 0 \text{ et } p - \beta > 1.$$

2) $h(t) = a(1+t)^b e^{-pt}$, $p > 0$ est également un exemple vérifiant (A) avec

$$\alpha(t) = (1+t)^\beta e^{qt}, b > 0, 0 < q < p \text{ et } \beta > 0, \eta(t) = (1+t)^{-1} [\beta + q(1+t)].$$

3) $h(t) = e^{-pt}$, $\alpha(t) = e^{qt}$, $0 < q < p$, $\eta(t) = q$.

Pour d'autres exemples ainsi que pour d'autres types de fonctions vérifiant l'hypothèse (A), on renvoie le lecteur aux références [103, 104, 105, 106, 107, 108, 109].

4.3 Existence, unicité et régularité de la solution

Dans cette partie, on considère l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème (4.1.1). On note par

$$V = \{u \in H^1(0, 1), u(0) = 0\}.$$

Théorème 4.1 Supposons que $(y_0, y_1) \in (V \cap H^2(0, 1)) \times V$, alors le système (4.1.1) a une unique solution (faible) y vérifiant

$$y \in L^\infty(0, \infty; V), y_t \in L^\infty(0, \infty; L^2(0, 1)), y_{tt} \in L^2(0, \infty; V^*)$$

où V^* est le dual de V et $y(x, t)$ satisfait (4.1.1) pour tout $t \in [0, T]$ et presque tout x dans $(0, 1)$.

Preuve: Considérons le problème variationnel associé à (4.1.1) qui est donné par: trouver $y(t) \in V$ telle que

$$\begin{aligned} & (y_{tt}, w) + 2v(y_{xt}, w) + \left(1 - v^2 + b \int_0^1 y_x^2 dx\right) (y_x, w_x) \\ & + w(1) \int_0^t h(t-s)y_t(1, s)ds = 0, \forall w \in V. \end{aligned}$$

Soit $\{w^i\}_{i=1}^\infty$ un système orthonormal complet de V . Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, on note par $V_m = \text{span}\{w^1, w^2, \dots, w^m\}$ l'espace engendré par $\{w^1, w^2, \dots, w^m\}$. On cherche une fonction $y^m(x, t)$ de la forme

$$y^m(x, t) = \sum_{i=1}^m c_m^i(t) w^i(x), \quad x \in (0, 1), \quad t \geq 0, \quad (4.3.1)$$

vérifiant, pour toute $w \in V_m$, le problème approximé

$$\begin{cases} (y_{tt}^m, w) + 2v(y_{xt}^m, w) + (1 - v^2 + b \|y_x^m\|^2) (y_x^m, w_x) \\ + w(1) \int_0^t h(t-s) y_t^m(1, s) ds = 0, \quad \forall w \in V. \\ y^m(x, 0) = y_0^m(x) \rightarrow f(x) \text{ dans } V, \quad y_t^m(x, 0) = y_1^m(x) \rightarrow g(x) \text{ dans } L^2(0, 1). \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Ces équations conduisent à un système d'équations différentielles ordinaires dont les inconnues sont $c_m^i(t)$. D'après le théorème d'existence standard des ODE, on peut prouver l'existence d'une solution y^m de (4.3.2) sur un intervalle $[0, t_m)$, pour chaque $m \in \mathbb{N}$. L'estimation a priori ci-dessous permet de prolonger la solution à l'intervalle $[0, T)$, pour tout $T > 0$ donné.

Estimation a priori : On définit la fonction $E^m(t)$ par

$$E^m(t) = \frac{1}{2} \|y_t^m\|^2 + \frac{1}{2} (1 - v^2) \|y_x^m\|^2 + \frac{b}{4} \|y_x^m\|^4 + \beta \int_0^t H_\alpha(t-s) [y_t^m(1, s)]^2 ds, \quad t \geq 0$$

où

$$H_\alpha(t) = \alpha(t)^{-1} \int_t^\infty h(s) \alpha(s) ds \text{ et } \beta > 0.$$

La dérivée totale de $E^m(t)$ peut se calculer par la formule (3.7.3) (voir aussi 3.7.6, chapitre 4)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E^m(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^1 \widetilde{E}^m(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_0^t H_\alpha(t-s) [y_t^m(1, s)]^2 ds \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial t} \widetilde{E}^m(x, t) + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \widetilde{E}^m(x, t) \right] dx + \frac{d}{dt} \int_0^t H_\alpha(t-s) [y_t^m(1, s)]^2 ds \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{E}^m(x, t) dx + v \widetilde{E}^m(x, t) \Big|_0^1 + \frac{d}{dt} \int_0^t H_\alpha(t-s) [y_t^m(1, s)]^2 ds, \quad t \in [0, t_m) \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

où

$$\widetilde{E}^m(x, t) = \frac{1}{2} [y_t^m(x, t)]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - v^2 + \frac{b}{2} \|y_x^m\|^2 \right) [y_x^m(x, t)]^2, \quad t \in [0, t_m).$$

Ensuite, d'après la définition de $\widetilde{E}^m(x, t)$, on a

$$\widetilde{E}^m(x, t) \Big|_0^1 \leq \frac{1}{2} [y_t^m(1, t)]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - v^2 + \frac{b}{2} \|y_x^m\|^2 \right) [y_x^m(1, t)]^2, \quad t \in [0, t_m]. \quad (4.3.4)$$

Dans (4.3.2), En posant $w = y_t^m$ et en intégrant par partie, on obtient

$$\begin{aligned} & (y_{tt}^m, y_t^m) + 2v(y_{xt}^m, y_t^m) + (1 - v^2 + b \|y_x^m\|^2) (y_x^m, y_{xt}^m) \\ & + y_t^m(1) \int_0^t h(t-s) y_t^m(1, s) ds = 0. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Il en résulte que

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{E}^m(x, t) dx = -y_t^m(1) \int_0^t h(t-s) y_t^m(1, s) ds - \rho v [y_t^m(1, t)]^2, \quad t \in [0, t_m]. \quad (4.3.6)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^t H_\alpha(t-s) [y_t^m(1, s)]^2 ds = H_\alpha(0) [y_t^m(1, t)]^2 + \int_0^t H'_\alpha(t-s) [y_t^m(1, s)]^2 ds \\ & = H_\alpha(0) [y_t^m(1, t)]^2 - \int_0^t \frac{\alpha'(t-s)}{\alpha(t-s)} H_\alpha(t-s) [y_t^m(1, s)]^2 ds - \int_0^t h(t-s) [y_t^m(1, s)]^2 ds \quad (4.3.7) \\ & \leq H_\alpha(0) [y_t^m(1, t)]^2 - \eta(t) \int_0^t H_\alpha(t-s) [y_t^m(1, s)]^2 ds - \int_0^t h(t-s) [y_t^m(1, s)]^2 ds, \quad t \in [0, t_m]. \end{aligned}$$

En substituant les relations (4.3.4), (4.3.6) et (4.3.7) dans (4.3.3), la dérivée totale de $E^m(t)$ est estimée par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E^m(t) & \leq -y_t^m(1, t) \int_0^t h(t-s) y_t^m(1, s) ds \\ & + \left(\beta H_\alpha(0) - \frac{v}{2} \right) [y_t^m(1, t)]^2 + \frac{v}{2} \left(1 - v^2 + \frac{b}{2} \|y_x^m\|^2 \right) [y_x^m(1, t)]^2 \\ & - \beta \eta(t) \int_0^t H_\alpha(t-s) [y_t^m(1, s)]^2 ds - \beta \int_0^t h(t-s) [y_t^m(1, s)]^2 ds. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

En tenant compte des conditions aux limites dans (4.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} & -y_t^m(1, t) \int_0^t h(t-s) y_t^m(1, s) ds \\ & \leq \frac{\delta}{2} [y_t^m(1, t)]^2 + \frac{\|h\|_1}{2\delta} \int_0^t h(t-s) [y_t^m(1, s)]^2 ds \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

et

$$\begin{aligned} (1 - v^2 + b \|y_x^m\|^2) [y_x^m(1, t)]^2 & \leq \frac{1}{1 - v^2} \left(\int_0^t h(t-s) y_t^m(1, s) ds \right)^2 \\ & \leq \frac{\|h\|_1}{1 - v^2} \int_0^t h(t-s) [y_t^m(1, s)]^2 ds. \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

pour tout $t \in [0, t_m)$. En remplaçant (4.3.9) et (4.3.10) dans (4.3.8), la dérivée totale de $E^m(t)$ est estimée comme suit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E^m(t) &\leq \left(\beta H_\alpha(0) - \frac{v}{2} + \frac{\delta}{2} \right) [y_t^m(1, t)]^2 \\ &+ \left(\frac{v \|h\|_1}{2(1-v^2)} + \frac{\|h\|_1}{2\delta} - \beta \right) \int_0^t h(t-s) [y_t^m(1, s)]^2 ds \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

pour tout $t \in [0, t_m)$. En prenant $\delta = \frac{v}{2}$ dans (4.3.11), pour assurer que la dérivée totale de $E^m(t)$ soit négative, on doit avoir

$$\frac{v \|h\|_1}{2(1-v^2)} + \frac{\|h\|_1}{v} \leq \beta \leq \frac{v}{4H_\alpha(0)}. \quad (4.3.12)$$

Pour cela, on a besoin de

$$H_\alpha(0) \|h\|_1 < \frac{v^2(1-v^2)}{2(2-v^2)}.$$

Ce qui implique que

$$E^m(t) \leq E^m(0) \leq K_1 \quad (4.3.13)$$

où $K_1 = (\|y_1\|, \|y_{0x}\|)$. L'estimation (4.3.13) implique

$$\begin{cases} y^m \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T; V), \\ y_t^m \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)). \end{cases} \quad (4.3.14)$$

Passage à la limite:

Par conséquent, il existe une sous suite de y^m vérifiant

$$\begin{cases} y^\mu \rightharpoonup y \text{ in } L^\infty(0, T; V) \text{ faible étoile,} \\ y_t^\mu \rightharpoonup y_t \text{ in } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \text{ faible étoile.} \end{cases} \quad (4.3.15)$$

On déduit aisément de (4.3.14) que y^m et y_t^m sont bornées dans $L^2(0, T; V)$ et $L^2(0, T; L^2(0, 1))$, respectivement.

Comme l'injection $H^1(0, T; V) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(0, 1))$ est compacte, on déduit que $y^\mu \rightarrow y$ forte dans $L^2(0, T; L^2(0, 1))$. Donc $y^\mu \rightharpoonup y$ fortement et presque partout dans $(0, T) \times (0, 1)$.

On peut maintenant passer à la limite dans le problème (4.3.2) que l'on utilise pour $m = \mu$ pour obtenir une solution faible du problème (4.1.1). D'après (4.3.2)

$$\begin{aligned} &(y_{tt}^\mu, w) + 2v(y_{xt}^\mu, w) + (1 - v^2 + b \|y_x^\mu\|^2) (y_x^\mu, w_x) \\ &+ w(1) \int_0^t h(t-s) y_t^\mu(1, s) ds = 0, \quad \forall w \in V. \end{aligned}$$

4.3. Existence, unicité et régularité de la solution

On suppose que $\|y_x^\mu\|^2 y_x^\mu \rightarrow \chi$ faible étoile dans $L^\infty(0, T; V)$, on va prouver que $\|y_x^\mu\|^2 y_x^\mu \rightarrow \|y_x\|^2 y_x$ quand $\mu \rightarrow \infty$ faible étoile dans $L^\infty(0, T; V)$, on a

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T (\chi - b \|y_x\|^2 y_x, w_x) dt \\
 = & \int_0^T (\chi - b \|y_x^\mu\|^2 y_x^\mu, w_x) dt + \int_0^T b \|y_x^\mu\|^2 (y_x^\mu - y_x, w_x) dt \\
 & + b \int_0^T (\|y_x^\mu\|^2 - \|y_x\|^2) (y_x^\mu, w_x) dt.
 \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

On déduit de (4.3.15) que le premier et le deuxième terme de (4.3.16) tendent vers zéro quand $\mu \rightarrow \infty$. Pour le terme nonlinéaire, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \int_0^T (\|y_x^\mu\|^2 - \|y_x\|^2) (y_x^\mu, w_x) dt & \leq \int_0^T (\|y_x^\mu\|^2 - \|y_x\|^2) \|y_x^\mu\| \|w_x\| dt \\
 & \leq c_1 \int_0^T (\|y_x^\mu\| + \|y_x\|) \|y_x^\mu - y_x\|^2 \|y_x^\mu\| \|w_x\| dt \\
 & \leq c_2 \int_0^T \|y_x^\mu - y_x\|^2 dt \rightarrow 0 \text{ quand } \mu \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Il suit que

$$(1 - v^2 + b \|y_x^\mu\|^2) (y_x^\mu, w_x) \rightharpoonup (1 - v^2 + b \|y_x\|^2) (y_x, w_x) \text{ dans } L^\infty(0, T) \text{ faible étoile,}$$

$$(y_t^\mu, w) \rightharpoonup (y_t, w) \text{ dans } L^\infty(0, T) \text{ faible étoile,}$$

donc

$$(y_{xt}^\mu, w) \rightharpoonup (y_{xt}, w) \text{ dans } D'(0, T) \text{ faible étoile,}$$

et

$$(y_{tt}^\mu, w) \rightharpoonup (y_{tt}, w) \text{ dans } D'(0, T) \text{ faible étoile,}$$

Par consequence

$$\begin{aligned}
 & (y_{tt}, w) + 2v(y_{xt}, w) + (1 - v^2 + b \|y_x\|^2) (y_x, w_x) \\
 & + w(1) \int_0^t h(t-s) y_t(1, s) ds = 0, \quad \forall w \in V.
 \end{aligned}$$

D'où y vérifie la première équation de (4.1.1).

Unicité: Soient u et z deux solutions du problème (4.1.1), on pose $y = u - z$. Alors, y

satisfait

$$\begin{cases} (y_{tt}, w) + 2v(y_{xt}, w) + (1 - v^2 + b \|y_x\|^2) (y_x, w_x) \\ + w(1) \int_0^t h(t-s)y_t(1, s)ds = 0, \quad \forall w \in V. \\ y(x, 0) = 0, \quad y_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (4.3.17)$$

On définit

$$Y(t) = \frac{1}{2} \|y_t\|^2 + \frac{1}{2}(1 - v^2) \|y_x\|^2 + \frac{b}{4} \|y_x\|^4 + \beta \int_0^t H_\alpha(t-s) [y_t(1, s)]^2 ds, \quad t \geq 0.$$

En raisonnant de la même manière que pour le cas de l'estimation a priori, la dérivée totale de $Y(t)$ vérifie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Y(t) &\leq \left(\beta H_\alpha(0) - \frac{v}{2} + \frac{\delta}{2} \right) [y_t(1, t)]^2 \\ &+ \left(\frac{v \|h\|_1}{2(1 - v^2)} + \frac{\|h\|_1}{2\delta} - \beta \right) \int_0^t h(t-s) [y_t(1, s)]^2 ds, \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

pour tous $t \in [0, T]$ où δ est donné par (4.3.11). D'après la condition (4.3.12), $Y(t) \leq 0$, $t \in [0, T]$. Ce qui implique que

$$Y(t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

et $u = z$. Ceci achève la démonstration du théorème.

4.4 Stabilité asymptotique

On définit l'énergie classique associée à (4.1.1) par

$$E(t) = \frac{1}{2} \|y_t\|^2 + \frac{1}{2}(1 - v^2) \|y_x\|^2 + \frac{b}{4} \|y_x\|^4, \quad t \geq 0.$$

Lemme 4.1 *Pour toute solution y de (4.1.1), la dérivée de $E(t)$ satisfait*

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -\frac{1}{2}(v - \delta)y_t^2(1, t) + \frac{1}{2} \|h\|_1 \left(\frac{1}{\delta} + \frac{v}{1 - v^2} \right) \int_0^t h(t-s)y_t^2(1, s)ds, \quad (4.4.1)$$

pour tout $t \geq 0$ et $\delta > 0$.

Preuve: La dérivée totale de $E(t)$ est égale à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \tilde{E}(x, t) dx = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{E}(x, t) \right) dx + v \tilde{E}(x, t) \Big|_0^1 \\ &= \int_0^1 y_t y_{tt} dx + \left(1 - v^2 + b \int_0^1 y_x^2 dx \right) \int_0^1 y_x y_{xt} dx + v \tilde{E}(x, t) \Big|_0^1 \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

où

$$\tilde{E}(x, t) = \frac{1}{2}y_t^2(x, t) + \frac{1}{2}\left(1 - v^2 + \frac{b}{2}\|y_x\|^2\right)y_x^2(x, t), \quad t \geq 0. \quad (4.4.3)$$

En tenant compte des conditions aux limites dans (4.1.1) et de la définition (4.4.3), il en résulte que

$$\tilde{E}(x, t)\Big|_0^1 \leq \frac{1}{2}y_t^2(1, t) + \frac{1}{2}(1 - v^2 + b\|y_x\|^2)y_x^2(1, t), \quad t \geq 0. \quad (4.4.4)$$

En substituant y_{tt} de (4.1.1) dans (4.4.2), en tenant compte de la relation (4.4.4) et en utilisant une intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &\leq \left(1 - v^2 + b \int_0^1 y_x^2 dx\right) y_t(1, t)y_x(1, t) - \frac{v}{2}y_t^2(1, t) \\ &\quad + \frac{v}{2}\left(1 - v^2 + \frac{b}{2} \int_0^1 y_x^2 dx\right) y_x^2(1, t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Notons que

$$1 - v^2 + b \int_0^1 y_x^2 dx \geq 1 - v^2.$$

Les conditions aux limites de (4.1.1) permettent d'obtenir l'estimation

$$\begin{aligned} \left(1 - v^2 + b \int_0^1 y_x^2 dx\right) y_x^2(1, t) &\leq \frac{1}{1 - v^2} \left(\int_0^t h(t - s)y_t(1, s) ds\right)^2 \\ &\leq \frac{\|h\|_1}{1 - v^2} \int_0^t h(t - s)y_t^2(1, s) ds. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

L'estimation du premier terme du second membre de (4.4.5) donne

$$\begin{aligned} &\left[1 - v^2 + b \int_0^1 y_x^2 dx\right] y_t(1, t)y_x(1, t) \\ &\leq \frac{\delta}{2}y_t^2(1, t) + \frac{1}{2\delta} \left[1 - v^2 + b \int_0^1 y_x^2 dx\right]^2 y_x^2(1, t) \\ &\leq \frac{\delta}{2}y_t^2(1, t) + \frac{\|h\|_1}{2\delta} \int_0^t h(t - s)y_t^2(1, s) ds, \quad \delta > 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Une combinaison de (4.4.5), (4.4.6) et (4.4.7) achève la démonstration du lemme.

On observe que $\frac{d}{dt}E(t)$ n'est pas de signe constant et explicite. Maintenant, on introduit les fonctionnelles

$$\Phi_1(t) = \int_0^1 xy_x(y_t + vy_x) dx, \quad t \geq 0$$

et

$$\Phi_2(t) = \int_0^t H_\alpha(t - s)y_t^2(1, s) ds, \quad t \geq 0$$

où

$$H_\alpha(t) = \alpha(t)^{-1} \int_t^\infty h(s)\alpha(s)ds$$

et la fonctionnelle modifiée

$$F(t) = E(t) + \lambda_1 \Phi_1(t) + \lambda_2 \Phi_2(t), \quad t \geq 0.$$

La proposition suivante montre que $F(t)$ et $E(t) + \Phi_2(t)$ sont équivalentes.

Proposition 4.1 *Il existe des constantes $\beta_i > 0$, $i = 1, 2$ telles que*

$$\beta_1 [E(t) + \Phi_2(t)] \leq F(t) \leq \beta_2 [E(t) + \Phi_2(t)] \quad (4.4.8)$$

pour tout $t \geq 0$.

Preuve En appliquant l'inégalité de Young, la fonctionnelle $\Phi_1(t)$ est estimée comme suit

$$\Phi_1(t) \leq \frac{1}{2} \|y_t\|^2 + \left(\frac{1}{2} + v\right) \|y_x\|^2, \quad t \geq 0.$$

On obtient pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned} F(t) &\leq E(t) + \frac{\lambda_1}{2} \|y_t\|^2 + \frac{\lambda_1}{2} (1 + 2v) \|y_x\|^2 + \lambda_2 \Phi_2(t) \\ &\leq \frac{1}{2} (\lambda_1 + 1) \|y_t\|^2 + \frac{1}{2} [1 - v^2 + \lambda_1 (1 + 2v)] \|y_x\|^2 + \frac{b}{4} \|y_x\|^4 + \lambda_2 \Phi_2(t) \\ &\leq \beta_2 [E(t) + \Phi_2(t)] \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

où

$$\beta_2 = \max \left\{ \lambda_1 + 1, \frac{[1 - v^2 + \lambda_1 (1 + 2v)]}{1 - v^2}, \lambda_2 \right\}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} F(t) &\geq \frac{1}{2} (\lambda_1 - 1) \|y_t\|^2 + \frac{1}{2} [1 - v^2 - \lambda_1 (1 + 2v)] \|y_x\|^2 + \frac{b}{4} \|y_x\|^4 + \lambda_2 \Phi_2(t) \\ &\geq \beta_1 [E(t) + \Phi_2(t)] \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

est vérifiée, si l'on prend

$$\lambda_1 < \min \{1, (1 - v^2) / (1 + 2v)\}$$

avec

$$\beta_1 = \min \left\{ 1 - \lambda_1, \frac{[1 - v^2 - \lambda_1 (1 + 2v)]}{1 - v^2}, \lambda_2 \right\}.$$

et λ_1 suffisamment petit.

La relation (4.4.8) est obtenue en combinant (4.4.9) et (4.4.10).

4.4.1 Stabilité asymptotique dans le cas de mouvement ($v \neq 0$)

Dans cette section, on énonce et on démontre le résultat de décroissance. On commence par estimer la dérivée de $\Phi_1(t)$.

Lemme 4.2 *Pour toute solution de (4.1.1), la fonctionnelle $\Phi_1(t)$ satisfait*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi_1(t) &\leq -E(t) + \frac{\|h\|_1}{2(1-v^2)} \left[1 + \frac{v(1+2v)}{1-v^2} \right] \int_0^t h(t-s)y_t^2(1,s)ds \\ &\quad + \frac{1}{2}(1+v)y_t^2(1,t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Preuve: La dérivée de $\Phi_1(t)$ de (4.1.1) est égale à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi_1(t) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\tilde{\Phi}_1(x,t)dx = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\Phi}_1(x,t) \right) dx + v\tilde{\Phi}_1(x,t)\Big|_0^1 \\ &= \int_0^1 xy_x(y_{tt} + vy_{xt})dx + \int_0^1 xy_{xt}(y_t + vy_x)dx + v\tilde{\Phi}_1(x,t)\Big|_0^1, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

où

$$\tilde{\Phi}_1(x,t) = xy_x(x,t)(y_t(x,t) + vy_x(x,t)), \quad t \geq 0. \quad (4.4.13)$$

En tenant compte des conditions aux limites dans (4.1.1) et de la définition (4.4.13), on obtient

$$\tilde{\Phi}_1(x,t)\Big|_0^1 \leq \frac{1}{2}y_t^2(1,t) + \frac{1}{2}(1+2v)y_x^2(1,t), \quad t \geq 0. \quad (4.4.14)$$

En substituant y_{tt} de (4.1.1) dans (4.4.12) et en tenant compte de la relation (4.4.14), la dérivée totale de $\Phi_1(t)$ est estimée par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi_1(t) &\leq -2v \int_0^1 xy_x y_{xt} dx + [1 - v^2 + b\|y_x\|^2] \int_0^1 xy_x y_{xx} dx \\ &\quad + 2v \int_0^1 xy_x y_{xt} dx + \int_0^1 xy_{xt} y_t dx + \frac{v}{2}y_t^2(1,t) + \frac{v}{2}(1+2v)y_x^2(1,t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Une intégration par partie et les conditions aux limites dans (4.1.1) impliquent que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi_1(t) &\leq -E(t) + \frac{1}{2} \left[1 - v^2 + b \int_0^1 y_x^2 dx \right] y_x^2(1,t) + \frac{1}{2}(1+v)y_t^2(1,t) \\ &\quad + \frac{v}{2}(1+2v)y_x^2(1,t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Enfin, l'assertion (4.4.11) découle des relations (4.4.6) et (4.4.15).

Théorème 4.2 *On suppose que les hypothèses (A1)-(A2) est satisfaite.*

Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \eta = 0$, alors

$$E(t) \leq Ae^{-\gamma \int_0^t \eta(s) ds}, \quad t \geq 0$$

et si $\eta \neq 0$, alors

$$E(t) \leq Ae^{-\gamma t}, \quad t \geq 0$$

à condition que $H_\alpha(0) \|h\|_1 < \frac{v^2(1-v^2)}{2(2-v^2)}$ où A et γ sont des constantes positives.

Preuve: La dérivation de $\Phi_2(t)$ donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_2(t) &= H_\alpha(0) y_t^2(1, t) + \int_0^t H'_\alpha(t-s) y_t^2(1, s) ds \\ &= H_\alpha(0) y_t^2(1, t) - \int_0^t \frac{\alpha'(t-s)}{\alpha(t-s)} H_\alpha(t-s) y_t^2(1, s) ds - \int_0^t h(t-s) y_t^2(1, s) ds \\ &\leq H_\alpha(0) y_t^2(1, t) - \eta(t) \int_0^t H_\alpha(t-s) y_t^2(1, s) ds - \int_0^t h(t-s) y_t^2(1, s) ds, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

où l'on a utilisé l'hypothèse que $\alpha'(t)/\alpha(t) = \eta(t)$ est une fonction décroissante.

En utilisant (4.4.1), (4.4.11) et (4.4.16), la dérivée totale de $F(t)$ est estimée par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(t) &\leq -\lambda_1 E(t) - \left[\frac{1}{2}(v-\delta) - \lambda_2 H_\alpha(0) - \lambda_1 \frac{(1+v)}{2} \right] y_t^2(1, t) \\ &\quad - \left\{ \lambda_2 - \frac{1}{2} \|h\|_1 \left(\frac{1}{\delta} + \frac{v}{1-v^2} \right) - \lambda_1 \frac{\|h\|_1}{2(1-v^2)} \left[1 + \frac{v(1+2v)}{1-v^2} \right] \right\} \\ &\quad \times \int_0^t h(t-s) y_t^2(1, s) ds - \lambda_2 \eta(t) \int_0^t H_\alpha(t-s) y_t^2(1, s) ds, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

On prend $\delta = \frac{v}{2}$ et on choisit λ_2 telle que

$$\frac{1}{2} \|h\|_1 \left(\frac{2}{v} + \frac{v}{1-v^2} \right) < \lambda_2 < \frac{v}{4H_\alpha(0)}.$$

Pour cela, on a besoin

$$H_\alpha(0) \|h\|_1 < \frac{v^2(1-v^2)}{2(2-v^2)}.$$

Ensuite, en prenant le paramètre λ_1 assez petit, on obtient

$$\frac{d}{dt} F(t) \leq -\lambda_1 E(t) - \lambda_2 \eta(t) \int_0^t H_\alpha(t-s) y_t^2(1, s) ds, \quad t \geq 0.$$

Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0$, alors, pour tout $C_1 > 0$, il existe $t_*(C_1) \geq 0$ tel que $\eta(t) \leq C_1$. D'après la proposition 4.1, il résulte

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -C_2\eta(t)F(t), \quad t \geq t_* = t_*(C_2) \quad (4.4.18)$$

où C_2 est une constante positive. Une intégration de (4.4.18) donne

$$F(t) \leq C_3 e^{-C_2 \int_{t_*}^t \eta(s) ds}, \quad t \geq t_*$$

où C_3 est une constante positive. Par continuité et d'après la Proposition 4.1, il en découle

$$E(t) \leq A e^{-\gamma \int_0^t \eta(s) ds}, \quad t \geq 0$$

où A et γ sont des constantes positives.

Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) \neq 0$, alors il existe $\hat{t} \geq 0$ et $C_4 > 0$ telles que $\eta(t) \geq C_4$ pour $t \geq \hat{t}$. Ainsi

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -C_5 F(t), \quad t \geq \hat{t}$$

pour $C_4 > 0$. Ceci qui conduit à

$$E(t) \leq A e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0$$

où A et γ des constantes positives. Ceci achève la démonstration du théorème.

4.4.2 Stabilité asymptotique dans le cas $v = 0$

Dans cette section, on traite le problème (4.1.1) dans le cas où la corde est immobile ($v = 0$).

C'est à dire, on va considérer le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{tt} = (1 + b \|y_x\|^2) y_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ y(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ (1 + b \|y_x\|^2) y_x(1, t) = \int_0^t h(t-s)y(1, s)ds, \quad t \geq 0, \\ y(x, 0) = f(x), \quad y_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, 1]. \end{array} \right. \quad (4.4.19)$$

Comme on l'a mentionné dans les sections précédentes, la corde en mouvement produit un amortissement supplémentaire représenté par le terme $-\frac{v}{2}y_t^2(1, t)$. Pour cela, on va considérer la condition dans (4.4.19) qui est équivalente à la même condition que celle de

l'état en mouvement. On aura encore la stabilité asymptotique mais sans taux explicite.

On définit l'énergie classique associée à (4.4.19) par

$$E(t) = \frac{1}{2} \|y_t\|^2 + \frac{1}{2} \|y_x\|^2 + \frac{b}{4} \|y_x\|^4, \quad t \geq 0.$$

l'énergie classique sera modifiée par

$$\mathcal{E}(t) = E(t) - \frac{1}{2} \left(\int_0^t h(s) ds \right) y^2(1, t) + \frac{1}{2} (h \circ y)(1, t), \quad t \geq 0$$

où

$$(h \circ y)(u) = \int_0^t h(t-s) |u(t) - u(s)|^2 ds, \quad t \geq 0.$$

On suppose que le noyau est tel que

$$h(t) > 0 \text{ and } h'(t) \leq 0 \text{ for all } t \geq 0$$

avec

$$1 - \int_0^\infty h(s) ds > 0.$$

Comme $y(0, t) = 0$, alors $y^2(1, t) \leq \|y_x\|^2$, ce qui implique que $\mathcal{E}(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.

Proposition 4.2 *La dérivée de l'énergie modifiée $\mathcal{E}(t)$ satisfait*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} (h' \circ y)(1, t) - \frac{1}{2} h(t) y^2(1, t), \quad t \geq 0.$$

Preuve: En multipliant (4.4.19) par y_t et en intégrant sur $(0, 1)$, on obtient

$$\int_0^1 y_{tt} y_t dx = (1 + b \|y_x\|^2) \int_0^1 y_{xx} y_t dx, \quad t > 0.$$

Une integration par parties donne

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y_t\|^2 = (1 + b \|y_x\|^2) \int_0^1 y_{xx} y_t dx, \quad t > 0.$$

L'assertion est obtenue immédiatement en utilisant une intégration par partie sur $(0, 1)$ et l'égalité suivante

$$\begin{aligned} & y_t(1, t) \left(\int_0^t h(t-s) y(1, s) ds - y(1, t) \right) \\ &= \frac{1}{2} (h' \circ y)(1, t) + \left(\int_0^t h(s) ds \right) y_t(1, t) y(1, t) - \frac{1}{2} (h \circ y)'(1, t) \\ &= \frac{1}{2} (h' \circ y)(1, t) - \frac{1}{2} (h \circ y)'(1, t) - \frac{1}{2} h(t) y^2(1, t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\int_0^t h(s) ds \right) y^2(1, t) \right]. \end{aligned}$$

Théorème 4.3 *En vertu de la nouvelle hypothèse sur le noyau h , le système (4.4.19) est asymptotiquement stable.*

Preuve: La Proposition 4.2 montre que toutes les orbites sont bornées dans $V \times L^2(0, 1)$. De plus $E'(t) = 0$ si $y(1, t) = 0$, $t \geq 0$. Si l'on considère $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(y)$, alors un simple argument comme dans la proposition 4.2 donne

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(y_t) = \frac{1}{2}(h' \circ y_t)(1, t) - \frac{1}{2}h(t)y_t^2(1, t), \quad t \geq 0.$$

L'estimation du deuxième ordre de l'énergie et le premier implique la précompacité des trajectoires (voir [25]). En utilisant le principe d'invariance de Lasalle, les trajectoires convergent vers le plus grand ensemble invariant B , tel que

$$B = \left\{ y : \frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = 0 \right\}.$$

Maintenant, on montre que B se réduit à la solution nulle. Pour cela, on va prouver que la seule solution de (4.4.19) avec $y(1, t) = 0$ est la solution triviale. On considère la fonctionnelle suivante

$$F(t) = \mathcal{E}(t) + \lambda_1 \Phi_1(t), \quad t \geq 0$$

où

$$\Phi_1(t) = \int_0^1 xy_x y_t dx, \quad t \geq 0.$$

Des calculs similaires à ceux du lemme 4.2 et en tenant compte de $y(1, t) = 0$, conduisent à

$$\frac{d}{dt}F(t) = -\lambda_1 E(t), \quad t \geq 0.$$

Ceci implique que $F(t)$ décroît exponentiellement vers zéro, c'est à dire

$$\mathcal{E}(t) = E(t) = Cst \leq Me^{-ct}, \quad t \geq 0.$$

On conclut alors que $E(t) = 0$. Autrement dit, on a la solution nulle.

Chapitre 5

Etude d'une poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli en mouvement axial

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère une structure viscoélastique en mouvement axial modélisée comme une poutre d'Euler-Bernoulli (voir [102]). La poutre se déplace dans la direction de son axe (voir Figure 5.1.1). L'extrémité gauche de la poutre est fixée. L'extrémité droite est libre, mais elle est soumise à une force non linéaire agissant sur cette extrémité. Le problème est modélisé par

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(y_{tt} + 2vy_{xt} + v^2y_{xx}) + EIy_{xxxx} - EI \int_0^t h(t-s)y_{xxxx}(s)ds = 0, \quad x \in (0, l), t \geq 0, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = y_{xx}(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ \rho v^2 y_x(l, t) + EI y_{xxx}(l, t) - EI \int_0^t h(t-s)y_{xxx}(l, s)ds = f(y(l, t)), \quad t \geq 0, \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x), \quad x \in (0, l) \end{array} \right. \quad (5.1.1)$$

où $y = y(x, t)$ est le déplacement transversal de la poutre, v est la vitesse axiale (supposée ici constante), EI est la rigidité flexurale de la poutre et ρ est la masse par unité de longueur de la poutre. Les fonctions $y_0(x)$, $y_1(x)$ sont données et la fonction positive h et le terme nonlinéaire f seront précisés ultérieurement.

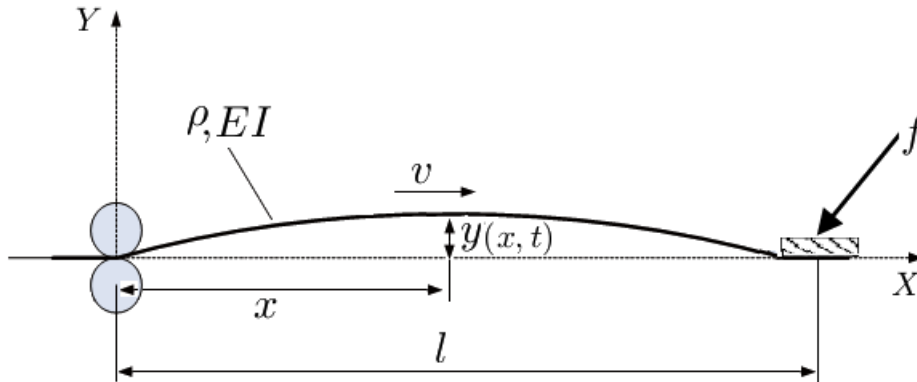


Figure 5.1.1 : Poutre en mouvement axial soumise à une force.

Le premier terme décrit la force d'inertie où y_{tt} est l'accélération locale dans le sens transversal de la poutre, y_{xt} est l'accélération de Coriolis, et y_{xx} est l'accélération centripète. Le second terme représente la rigidité à la flexion (voir [102]). Le terme intégral représente le terme mémoire ou l'amortissement viscoélastique. Il est obtenu de la relation entre la contrainte et l'historique de la déformation selon le principe de Boltzmann (voir chapitre 1). Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [18, 19, 28]. Notons que l'existence, l'unicité et ainsi la stabilité de la solution du problème (5.1.1) ont été étudiés dans [44, 46].

Concernant ce modèle, Zhang et *al.* dans [120] ont étudié la stabilité et la stabilisation d'une poutre décrit par

$$\begin{cases} \rho(y_{tt} + 2vy_{xt} + v^2y_{xx}) + EIy_{xxxx} = 0, & x \in (0, l), t \geq 0, \\ -EIy_{xxx}(l, t) = f_1(t), \\ EIy_{xx}(l, t) = f_2(t). \end{cases} \quad (5.1.2)$$

Ils ont démontré que, sans les contrôles frontières, c'est à dire, $f_1(t) = f_2(t) = 0$, la structure est stable. En outre, ils ont prouvé sous des contrôles frontières appropriés, que la solution décroît comme $O(\frac{1}{t})$.

Dans ce chapitre, on démontre l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin, on prouve la stabilité du problème (5.1.1). On démontre que, lorsque la vitesse axiale de la poutre est inférieure à une valeur critique, la dissipation produite par le matériau viscoélastique est suffisante pour atténuer les vibrations transversales qui se produisent lors du mouvement axial de la poutre. On démontre que le taux de

décroissance est arbitraire: si on veut un ordre de décroissance $\gamma(t)$ le noyau doit être du même ordre.

Ce chapitre est organisé comme suit: Dans la section suivante, on formule les hypothèses sur la fonction de relaxation et sur le terme non linéaire, on présente quelques notations et des lemmes qui seront utilisés dans la suite. Dans la section 2, on démontre l'existence et l'unicité de la solution. La section 3 est consacrée à la présentation de notre résultat de stabilité.

5.2 Préliminaires

On présente d'abord les notations suivantes:

Pour chaque ensemble mesurable $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_+$, on définit pour tout $t \geq 0$

$$\hat{h}(\mathcal{A}) = \frac{1}{k} \int_{\mathcal{A}} h(s) ds \quad (5.2.1)$$

tel que

$$k = \int_0^{\infty} h(s) ds$$

et

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A} \cap [0, t].$$

L'ensemble "plat" et le taux de "platitude" de h sont définis par

$$\mathcal{F}_h = \{s \in \mathbb{R}_+ : h(s) > 0 \text{ et } h'(s) = 0\} \quad (5.2.2)$$

et

$$\mathcal{R}_h = \hat{h}(\mathcal{F}_h),$$

respectivement. On définit aussi

$$\tilde{\mathcal{F}}_h = \{s \in \mathbb{R}_+ : h(t-s) > 0 \text{ et } h'(t-s) = 0\}.$$

On formule maintenant les hypothèses sur la fonction de relaxation $h(t)$ et le terme non linéaire par

(A1) $h(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ et $0 < k = \int_0^{\infty} h(s) ds < 1$.

(A2) $h'(t) \leq 0$ p.p tout $t > 0$.

(A3) Il existe une fonction croissante $\gamma(t) > 0$ telle que $\sup_{t \geq 0} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$ et $H_\gamma = \int_0^\infty h(s)\gamma(s)ds$ sont bornés.

(A4) f vérifie les hypothèses suivantes

$$f(0) = 0, \quad |f(u) - f(v)| \leq m(1 + |u|^\alpha + |v|^\alpha) |u - v|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+$$

$$0 \leq F(u) \leq uf(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

$$\text{où } F(z) = \int_0^z f(s)ds.$$

Soit $t_* > 0$ un nombre réel tel que $\int_0^{t_*} h(s)ds = h_* > 0$. Pour des raisons de simplicité, on considère des noyaux continus partout et continûment différentiables presque partout.

On définit l'énergie classique associée à (5.1.1) par

$$E(t) = \frac{\rho}{2} \|y_t\|^2 - \frac{\rho v^2}{2} \|y_x\|^2 + \frac{EI}{2} \|y_{xx}\|^2 + F(y(l)), \quad t \geq 0$$

et l'énergie modifiée par

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{\rho}{2} \|y_t\|^2 - \frac{\rho v^2}{2} \|y_x\|^2 + \frac{EI}{2} \left(1 - \int_0^t h(s)ds\right) \|y_{xx}\|^2 \\ &\quad + \frac{EI}{2} \int_0^l (h \circ y_{xx})(t)dx + F(y(l)), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme de $L^2(0, 1)$

$$(h \circ w)(t) = \int_0^t h(t-s) |w(t) - w(s)|^2 ds, \quad t \geq 0.$$

Proposition 5.1 Si $v^2 < EI(1 - k)/\rho l^2$, on a

$$e(t) \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Preuve: Comme $y(0, t) = y_x(0, t) = 0$ il en résulte de l'inégalité de Poincaré que

$$\|y_x\|^2 \leq l^2 \|y_{xx}\|^2, \quad t \geq 0$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} e(t) &\geq \frac{\rho}{2} \|y_t\|^2 + \frac{1}{2} \left[EI - \rho v^2 l^2 - EI \int_0^t h(s)ds \right] \|y_{xx}\|^2 \\ &\quad + \frac{EI}{2} \int_0^l (h \circ y_{xx})(t)dx + F(y(l)), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Si $v^2 < EI(1 - k)/\rho l^2$, l'assertion de proposition 5.1 est satisfaite.

5.3 Existence et unicité de la solution

L'existence et l'unicité de la solution du problème (5.1.1) se fait en utilisant la méthode de Faedo Galerkin. Pour cela, on définit les espaces suivants

$$V = \{u \in H^2(0, l), u(0) = u_x(0) = 0\}$$

et

$$W = \{u \in V \cap H^4(0, l), u_{xx}(l) = 0\}.$$

Théorème 5.1 *Soit $(y_0, y_1) \in V \times L^2(0, l)$. Sous les hypothèses (A1), (A2) et $v^2 < EI(1 - k)/\rho l^2$, le problème (5.1.1) admet une unique solution (faible) telle que*

$$y \in L^\infty(0, \infty; V), y_t \in L^\infty(0, \infty; L^2(0, l)), y_{tt} \in L^2(0, \infty; V^*) \quad (5.3.1)$$

où V^* est le dual de V .

Preuve: Soit le problème variationnel associé à (5.1.1) donné par: trouver $y(t) \in V$ telle que

$$\begin{aligned} & \rho(y_{tt}, w) + 2\rho v(y_{xt}, w) - \rho v^2(y_x, w_x) + EI(y_{xx}, w_{xx}) \\ & - EI \int_0^t h(t-s)(y_{xx}(s), w_{xx}) ds + f(y(l, t))w(l) = 0, \forall w \in V. \end{aligned}$$

Soit $\{w^i\}_{i=1}^\infty$ une base orthonormale de W . Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, on note

$$W_m = \text{span}\{w^1, w^2, \dots, w^m\}$$

l'espace engendré par $\{w^1, w^2, \dots, w^m\}$.

On cherche une fonction

$$y^m(x, t) = \sum_{i=1}^m c_m^i(t) w^i(x), \quad x \in (0, l), \quad t \geq 0 \quad (5.3.2)$$

vérifiant, pour toute $w \in W_m$, le problème approché

$$\begin{cases} \rho(y_{tt}^m, w) + 2\rho v(y_{xt}^m, w) - \rho v^2(y_x^m, w_x) + EI(y_{xx}^m, w_{xx}) \\ - EI \int_0^t h(t-s)(y_{xx}^m(s), w_{xx}) ds + f(y^m(l, t))w(l) = 0 \\ y^m(x, 0) = y_{0,m}(x) \rightarrow y_0 \text{ dans } V, y_t^m(x, 0) = y_{1,m}(x) \rightarrow y_1 \text{ dans } L^2(0, l). \end{cases} \quad (5.3.3)$$

Cette suite de problèmes conduit à un système d'équations différentielles dont les inconnues sont $c_m^i(t)$. D'après le théorème standard d'existence pour les ODE, on peut conclure l'existence d'une solution y^m de (5.3.3) sur un intervalle maximal $[0, t_m)$, pour chaque $m \in \mathbb{N}$. L'estimation a priori ci-dessous permet de prolonger la solution à l'intervalle $[0, T)$, pour tout $T > 0$ donné.

Estimation a priori : On définit la fonction E^m par

$$E^m(t) = \frac{\rho}{2} \|y_t^m\|^2 - \frac{\rho v^2}{2} \|y_x^m\|^2 + \frac{EI}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds\right) \|y_{xx}^m\|^2 + \frac{EI}{2} \int_0^1 (h \circ y_{xx}^m) dx + F(y^m(l, t)), \quad t \in [0, t_m)$$

et X^m par

$$X^m(t) = \frac{\rho}{2} \|y_t^m\|^2 + \frac{1}{2} [EI(1-k) - \rho v^2 l^2] \|y_{xx}^m\|^2 + \frac{EI}{2} \int_0^1 (h \circ y_{xx}^m) dx + F(y^m(l, t)), \quad t \in [0, t_m).$$

Comme $y^m \in V$, il en résulte de l'inégalité de Poincaré que

$$\|y_x^m\|^2 \leq l^2 \|y_{xx}^m\|^2, \quad t \in [0, t_m)$$

ce qui implique que, pour $v^2 < EI(1-k)/\rho l^2$

$$0 < X^m(t) < E^m(t), \quad t \in [0, t_m)$$

où y^m est une solution de (5.3.3). La dérivée totale de $E^m(t)$ est calculée par la formule (3.7.3) (voir aussi 3.7.6, chapitre 4)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E^m(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^l \widetilde{E}^m(x, t) dx + \frac{d}{dt} F(y^m(l, t)) \\ &= \int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial t} \widetilde{E}^m(x, t) + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \widetilde{E}^m(x, t) \right] dx + \frac{d}{dt} F(y^m(l, t)) \\ &= \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{E}^m(x, t) dx + v \widetilde{E}^m(x, t) \Big|_0^l + \frac{d}{dt} F(y^m(l, t)), \quad t \in [0, t_m) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{E}^m(x, t) &= \frac{\rho}{2} [y_t^m(x, t)]^2 - \frac{\rho v^2}{2} [y_x^m(x, t)]^2 + \frac{EI}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds\right) [y_{xx}^m(x, t)]^2 \\ &\quad + \frac{EI}{2} (h \circ y_{xx}^m)(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \in [0, t_m). \end{aligned}$$

Ensuite, en tenant compte de la définition de y^m et $\widetilde{E}^m(x, t)$, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{E}^m(x, t) \Big|_0^l &= \frac{\rho}{2} [y_t^m(l, t)]^2 - \frac{\rho v^2}{2} [y_x^m(l, t)]^2 - \frac{EI}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) [y_{xx}^m(0, t)]^2 \\ &\quad - \frac{EI}{2} (h \circ y_{xx}^m)(0, t), \quad t \in [0, t_m]. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (h \circ y_{xx}^m)(t) &= (h' \circ y_{xx}^m)(t) - 2 \int_0^t h(t-s) (y_{xx}^m(s), y_{xxt}^m) ds \\ &\quad + 2 \left(\int_0^t h(s) ds \right) y_{xxt}^m(t) y_{xx}^m(t), \quad t \in [0, t_m]. \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Dans (5.3.3), en prenant $w = y_t^m$ et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \rho(y_{tt}^m, y_t^m) - \rho v^2 (y_x^m, y_{xt}^m) + EI (y_{xx}^m, y_{xxt}^m) - EI \int_0^t h(t-s) (y_{xx}^m(s), y_{xxt}^m) ds \\ + f(y^m(l, t)) y_t^m(l, t) = -\rho v [y_t^m(l, t)]^2, \quad t \in [0, t_m]. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

En utilisant la relation (5.3.5) dans (5.3.6), on déduit que

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{E}^m(x, t) dx + \frac{d}{dt} F(y^m(l, t)) \\ = -\rho v [y_t^m(l, t)]^2 - \frac{EI}{2} h(t) \|y_{xx}^m\|^2 + \frac{EI}{2} (h' \circ y_{xx}^m)(t), \quad t \in [0, t_m]. \end{aligned}$$

Par conséquent, en tenant compte de la relation précédente et la relation (5.3.4), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E^m(t) &= -\frac{EI}{2} h(t) \|y_{xx}^m\|^2 + \frac{EI}{2} \int_0^l (h' \circ y_{xx}^m) dx - \frac{\rho v}{2} |y_t^m(l, t)|^2 \\ &\quad - \frac{\rho v^3}{2} |y_x^m(l, t)|^2 - \frac{EIv}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) |y_{xx}^m(0, t)|^2 - \frac{EIv}{2} (h \circ y_{xx}^m)(0, t) \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, t_m]$. Cela signifie, en utilisant (A2), que, pour une constante positive K_1 indépendante de t et m

$$X^m(t) < E^m(t) \leq E^m(0) \leq K_1 \quad (5.3.7)$$

où $K_1 = (\|y_1\|, \|y_{0xx}\|, \|y_{0x}\|)$. L'estimation (5.3.7) implique que

$$\begin{cases} y^m \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T; V), \\ y_t^m \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T; L^2(0, l)). \end{cases} \quad (5.3.8)$$

Passage à la limite

Par conséquent, il existe une sous-suite de y^m vérifiant

$$\begin{cases} y^\mu \rightharpoonup y \text{ dans } L^\infty(0, T; V) \text{ faible étoile,} \\ y_t^\mu \rightharpoonup y_t \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(0, l)) \text{ faible étoile.} \end{cases}$$

On déduit aisément de (5.3.8) que y^m et y_t^m sont bornées dans $L^2(0, T; V)$ et $L^2(0, T; L^2(0, l))$, respectivement.

Comme l'injection $H^1(0, T; V) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(0, l))$ est compacte on déduit que $y^\mu \rightarrow y$ fortement dans $L^2(0, T; L^2(0, l))$. Donc $y^\mu \rightharpoonup y$ fortement et p.p. dans $(0, T) \times (0, l)$. L'hypothèse (A4) et l'inegalité de Poincaré conduisent à

$$\begin{aligned} |f(y^m(l, t))| &\leq k(|y^m(l, t)| + |y^m(l, t)|^{(\alpha+1)}) \\ &\leq k \left(l^{\frac{3}{2}} \|y_{xx}^m\| + l^{\frac{3(\alpha+1)}{2}} \|y_{xx}^m\|^{(\alpha+1)} \right), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

En tenant compte de (5.3.8), la relation précédente implique (voir [64])

$$f(y^m(l, t)) \rightharpoonup f(y(l, t)) \text{ dans } L^\infty(0, T) \text{ faible étoile.}$$

On peut maintenant passer à la limite dans le problème approché (5.3.3) pour obtenir la solution faible du problème (5.1.1) (voir [64]).

Unicité:

Soient u et z deux solutions du problème (5.1.1). posons $y = u - z$. Alors, y vérifie

$$\begin{cases} \rho(y_{tt}, w) + 2\rho v(y_{xt}, w) - \rho v^2(y_x, w_x) + EI(y_{xx}, w_{xx}) \\ -EI \int_0^t h(t-s)(y_{xx}(s), w_{xx}) ds + [f(u(l, t)) - f(z(l, t))] w(l) = 0, \\ y(x, 0) = 0, \quad y_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (5.3.9)$$

On définit

$$\begin{aligned} Y(t) &= \frac{\rho}{2} \|y_t\|^2 - \frac{\rho v^2}{2} \|y_x\|^2 + \frac{EI}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \|y_{xx}\|^2 \\ &\quad + \frac{EI}{2} \int_0^1 (h \circ y_{xx}) dx, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Notons que si $v^2 < EI(1 - k)/\rho l^2$, on a $Y(t) > 0$. D'après un raisonnement similaire à celui de l'estimation a priori, la dérivée totale de $Y(t)$ vérifie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Y(t) &= -\frac{EI}{2}h(t)\|y_{xx}\|^2 + \frac{EI}{2}\int_0^l (h' \circ y_{xx}) dx - \frac{\rho v}{2}y_t^2(l, t) - \frac{\rho v^3}{2}y_x^2(l, t) \\ &\quad - \frac{EIv}{2}\left(1 - \int_0^t h(s)ds\right)y_{xx}^2(0, t) - \frac{EIv}{2}(h \circ y_{xx})(0, t) \\ &\quad + [f(y_2(l, t)) - f(y_1(l, t))]y_t(l, t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Ensuite, l'hypothèse **(A4)** et l'inégalité de Poincaré impliquent

$$\begin{aligned} [f(z(l, t)) - f(u(l, t))]y_t(1) &\leq k(1 + |z(1, t)|^\alpha + |u(1, t)|^\alpha)|y(l, t)||y_t(l, t)| \\ &\leq k\left(1 + l^{\frac{3\alpha}{2}}\|z_{xx}\|^\alpha + l^{\frac{3\alpha}{2}}\|u_{xx}\|^\alpha\right)l^{\frac{3}{2}}\|y_{xx}\| |y_t(l, t)| \\ &\leq K_3\|y_{xx}\| |y_t(l, t)| \leq \mu K_3 y_t^2(l, t) + \frac{K_3}{4\mu}\|y_{xx}\|^2 \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

où K_3 et μ sont deux constantes positives et $t \in [0, T)$.

En injectant (5.3.11) dans (5.3.10) et en intégrant sur $(0, t)$, on obtient

$$Y(t) \leq \left(\mu K_3 - \frac{\rho v}{2}\right)\int_0^t y_t^2(1, s)ds + \frac{K_3}{4\mu}\int_0^t \|y_{xx}(s)\|^2 ds, \quad t \in [0, T).$$

Maintenant, pour μ suffisamment petit, il est clair que

$$Y(t) \leq K_4 \int_0^t |Y(s)| ds, \quad t \in [0, T)$$

où K_4 est une constante positive. En utilisant l'inégalité de Gronwall, on déduit que

$$Y(t) = 0, \quad t \in [0, T),$$

ce qui signifie que $u = z$. Ceci achève la démonstration du Théorème 5.1.

5.4 Stabilisation

On commence cette partie par l'introduction des fonctionnelles suivantes

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= \rho \int_0^l y_t y dx + \frac{\rho v}{2}y^2(l), \quad t \geq 0, \\ \Psi_2(t) &= -\rho \int_0^l y_t \int_0^t h(t-s)(y(t) - y(s))ds dx, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

et

$$L(t) = e(t) + \sum_{i=1}^2 \lambda_i \Psi_i(t), \quad t \geq 0$$

où λ_i , $i = 1, 2$, sont des constantes positives.

Le premier résultat consiste à établir l'équivalence entre l'énergie modifiée $e(t)$ et la fonctionnelle $L(t)$.

Proposition 5.2 *Si $v^2 < EI(1 - k)/l^2\rho$, alors, on a*

$$\frac{1}{2}L(t) \leq e(t) \leq 2L(t), \quad t \geq 0.$$

où λ_i , $i = 1, 2$ sont suffisamment petites.

Preuve: L'inégalité de Young conduit à

$$\begin{aligned} L(t) \leq e(t) &+ \frac{\lambda_1\rho}{2} \|y_t\|^2 + \frac{\lambda_1\rho}{2} \|y\|^2 + \frac{\lambda_2\rho}{2} \|y_t\|^2 \\ &+ \frac{\lambda_2\rho}{2} \int_0^l \left(\int_0^t h(t-s)(y(t) - y(s))ds \right)^2 dx + \frac{\lambda_1\rho v}{2} y^2(l). \end{aligned}$$

Les inégalités de Cauchy-schwarz et de Poincaré permettent d'obtenir l'estimation suivante

$$\begin{aligned} &\int_0^l \left(\int_0^t h(t-s)(y(t) - y(s))ds \right)^2 dx \\ &= \int_0^l \left(\int_0^t \sqrt{h(t-s)}\sqrt{h(t-s)}(y(t) - y(s))ds \right)^2 dx \\ &\leq \left(\int_0^t h(t-s)ds \right) \int_0^l (h \circ y_{xx})(t)dx \leq \frac{kl^4}{2} \int_0^l (h \circ y_{xx})(t)dx, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} L(t) \leq e(t) &+ \frac{\rho}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) \|y_t\|^2 + \frac{\lambda_1 l}{2} \rho(l + v) \|y_x\|^2 \\ &+ \frac{\lambda_2 \rho k l^4}{2} \int_0^l (h \circ y_{xx})(t)dx, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{aligned} &2e(t) - L(t) \\ &\geq \frac{\rho}{2} [1 - (\lambda_1 + \lambda_2)] \|y_t\|^2 - \frac{\rho}{2} [v^2 + \lambda_1 l(l + v)] \|y_x\|^2 \\ &+ \frac{EI}{2} \left(1 - \int_0^t h(s)ds \right) \|y_{xx}\|^2 + \frac{1}{2} [EI - \lambda_2 \rho k l^4] \int_0^l (h \circ y_{xx})(t)dx \\ &+ F(y(l)), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

D'autre part, l'inégalité de Poincaré et le fait que $1 - \int_0^t h(s)ds \geq 1 - k$ impliquent

$$\begin{aligned} & 2e(t) - L(t) \\ & \geq \frac{\rho}{2} [1 - (\lambda_1 + \lambda_2)] \|y_t\|^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{EI}{l^2} (1 - k) - \rho v^2 - \lambda_1 \rho (1 + v) \right] \|y_x\|^2 \\ & \quad + F(y(l)) + \frac{1}{2} [EI - \lambda_2 \rho k] \int_0^l (h \circ y_{xx})(t) dx, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

En tenant compte de l'hypothèse $v^2 < EI(1 - k)/\rho l^2$ et en choisissant $\lambda_i, i = 1, 2$, suffisamment petits, c'est à dire $\lambda_1 \leq \min\{1, [EI(1 - k) - l^2 \rho v^2]/l^2 \rho (1 + v)\}$ et $\lambda_2 \leq \min\{1 - \lambda_1, EI/\rho k\}$, on trouve que

$$2e(t) - L(t) \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Des calculs et des raisonnements similaires conduisent à

$$L(t) - \frac{1}{2}e(t) \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Ceci achève la preuve de la proposition 5.2.

Le deux lemmes suivants seront utilisés dans la suite.

Lemme 5.1 (*Inégalité de Young*). Soient $f \in L^p(\mathbf{R})$ et $g \in L^q(\mathbf{R})$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Alors $(f * g) \in L^r(\mathbf{R})$ et

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Lemme 5.2 (*Voir [109]*) On a pour $h \in C(0, \infty)$ et $w \in C((0, \infty); L^2(0, l))$

$$\begin{aligned} & \int_0^l w \int_0^t h(t-s)w(s)ds dx \\ & = \frac{1}{2} \left(\int_0^t h(s)ds \right) \|w\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t h(t-s) \int_0^l w^2(s)dx ds - \frac{1}{2} \int_0^l (h \circ w) dx, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

5.5 Comportement asymptotique

Dans cette section, on démontre notre résultat de décroissance de l'énergie.

Lemme 5.3 Soit y la solution du problème (5.1.1). Alors, l'énergie $e(t)$ vérifie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e(t) &\leq \frac{EI}{2} \int_0^l (h' \circ y_{xx})(t) dx - \frac{\rho v}{2} y_t^2(l) - \frac{\rho v^3}{2} y_x^2(l) \\ &\quad - \frac{EIv}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds\right) y_{xx}^2(0) - \frac{EIv}{2} (h \circ y_{xx})(0), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

Preuve: On remarque que si $h' \leq 0$, l'énergie $e(t)$ est décroissante et bornée uniformément par $e(0)$. La dérivée totale de $e(t)$ est donnée par (3.7.3) (voir aussi 3.7.6, chapitre 4)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^l \tilde{e}(x, t) dx + \frac{d}{dt} F(y(l)) = \int_0^l \frac{d}{dt} \tilde{e}(x, t) dx + \frac{d}{dt} F(y(l)) \\ &= \int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial t} \tilde{e}(x, t) + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{e}(x, t) \right] dx + \frac{d}{dt} F(y(l)) \\ &= \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \tilde{e}(x, t) dx + v \tilde{e}(x, t)|_0^l + \frac{d}{dt} F(y(l)), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{e}(x, t) &= \frac{\rho}{2} y_t^2(x, t) - \frac{\rho v^2}{2} y_x^2(x, t) + \frac{EI}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds\right) y_{xx}^2(x, t) \\ &\quad + \frac{EI}{2} (h \circ y_{xx})(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

L'utilisant de la première équation du problème (5.1.1) donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e(t) &= - \int_0^l y_t \left[2\rho v y_{xt} + \rho v^2 y_{xx} + EI \left(y_{xxxx} - \int_0^t h(t-s) y_{xxxx}(s) ds \right) \right] dx \\ &\quad - \rho v^2 \int_0^l y_x y_{xt} dx + EI \left(1 - \int_0^t h(s) ds\right) \int_0^l y_{xxt} y_{xx} dx - \frac{EI}{2} h(t) \|y_{xx}\|^2 \\ &\quad + \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} (h \circ y_{xx})(t) dx + y_t(l) f(y(l)) + v \tilde{e}(x, t)|_0^l, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

En intégrant par parties et en tenant compte des conditions aux limites dans (5.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e(t) &= -\rho v y_t^2(l) - y_t(l) \left[\rho v^2 y_x(l) + EI y_{xxx}(l) \right. \\ &\quad \left. - EI \int_0^t h(t-s) y_{xxx}(l, s) ds \right] + EI \int_0^l y_{xxt} \int_0^t h(t-s) y_{xx}(s) ds dx \\ &\quad - EI \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_0^l y_{xxt} y_{xx} dx - \frac{EI}{2} h(t) \|y_{xx}\|^2 \\ &\quad + \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} (h \circ y_{xx})(t) dx + y_t(l) f(y(l)) + v \tilde{e}(x, t)|_0^l, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Ensuite, à partir des conditions aux limites dans (5.1.1) et de la définition de $\tilde{e}(x, t)$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{e}(x, t)|_0^l &= \frac{\rho}{2}y_t^2(l) - \frac{\rho v^2}{2}y_x^2(l) - \frac{EI}{2}\left(1 - \int_0^t h(s)ds\right)y_{xx}^2(0) \\ &\quad - \frac{EI}{2}(h \circ y_{xx})(0), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

Clairement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h \circ y_{xx})(x, t) &= (h' \circ y_{xx})(x, t) - 2y_{xxt}(x, t) \int_0^t h(t-s)y_{xx}(x, s)ds \\ &\quad + 2\left(\int_0^t h(s)ds\right)y_{xxt}(x, t)y_{xx}(x, t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Par conséquent, en tenant compte de (5.5.3), (5.5.4) et des conditions aux limites de (5.1.1), on obtient (5.5.1).

Lemme 5.4 *Soit y la solution du problème (5.1.1). Alors, la fonctionnelle $\Psi_1(t)$ vérifie pour tout $t \geq 0$*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Psi_1(t) &\leq 2\rho\|y_t\|^2 + 2\rho v^2\|y_x\|^2 - EI\left(1 - \frac{k}{2}\right)\|y_{xx}\|^2 \\ &\quad + \frac{EI}{2}\int_0^t h(t-s)\|y_{xx}(s)\|^2 ds - \frac{EI}{2}\int_0^l (h \circ y_{xx})(t)dx - y(l)f(y(l)). \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

Preuve: La dérivée totale de $\Psi_1(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Psi_1(t) &= \int_0^l \frac{d}{dt}\tilde{\Psi}_1(x, t)dx = \int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\Psi}_1(x, t)\right)dx + v\tilde{\Psi}_1(x, t)|_0^l \\ &= \rho\|y_t\|^2 + \rho\int_0^l yy_{tt}dx - \rho v y_t(l)y(l) + v\tilde{\Psi}_1(x, t)|_0^l, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

où

$$\tilde{\Psi}_1(x, t) = \rho y(x, t)y_t(x, t), \quad t \geq 0.$$

En vertu des conditions aux limites dans (5.1.1) on voit que

$$\tilde{\Psi}_1(x, t)|_0^l = \rho y_t(l)y(l), \quad t \geq 0. \quad (5.5.7)$$

On utilise la première équation du problème (5.1.1) et on intègre par parties, on arrive à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Psi_1(t) &\leq \rho\|y_t\|^2 + 2\rho v\int_0^l y_x y_t dx + \rho v^2\|y_x\|^2 - EI\|y_{xx}\|^2 \\ &\quad + EI\int_0^l y_{xx}\int_0^t h(t-s)y_{xx}(s)ds dx - y(l)f(y(l)), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

On estime maintenant le second terme du membre de droite de (5.5.8) par

$$2\rho v \int_0^l y_x y_t dx \leq \rho \|y_t\|^2 + \rho v^2 \|y_x\|^2, \quad t \geq 0. \quad (5.5.9)$$

L'injection de (5.5.9) dans (5.5.8) et l'utilisation du Lemme 5.2 achèvent la preuve du Lemme 5.4.

Lemme 5.5 *Soit y la solution du problème (5.1.1). Alors, la dérivée de la fonctionnelle $\Psi_2(t)$ vérifie*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_2(t) &\leq -\frac{h(0)l^4}{4\eta_4} \int_0^l (h' \circ y_{xx})(t) dx + \rho \left(-h_* + \eta_4 + 2\eta_3 + k\hat{h}(\mathcal{F}) \right) \|y_t\|^2 \\ &+ \rho v^2 \left(-h_* + \eta_3 + k\hat{h}(\mathcal{F}) \right) \|y_x\|^2 + \{2\eta_1(1-h_*)EI + 2\eta_5\beta \\ &+ EI(1-h_*)k\hat{h}(\mathcal{F})\} \|y_{xx}\|^2 + \eta_7 l^3 k \int_0^l (h \circ y_{xx})(t) dx \\ &+ \frac{1}{4} \left((1-h_*) \frac{kEI}{\eta_1} + \frac{\rho v^2 l^2 k}{\eta_3} + \frac{4\rho v^2 l^2 k}{\eta_3} + \frac{l^3 k}{\eta_5} \right) \int_0^t h(t-s) \|y_{xx}(s)\|^2 ds \\ &+ (1+\eta_2) EI k \hat{h}(\mathcal{F}) \int_0^l \int_{\mathcal{F}_t} h(t-s) |y_{xx}(t) - y_{xx}(s)|^2 ds dx + k \left\{ (1-h_*) \frac{EI}{4\eta_1} \right. \\ &+ \left. \left(1 + \frac{1}{\eta_2} \right) EI + \frac{\rho v^2 l^2}{\eta_3} + \frac{l^3}{4\eta_5} \right\} \int_0^l \int_{\mathcal{A}_t} h(t-s) |y_{xx}(t) - y_{xx}(s)|^2 ds dx \\ &+ k\hat{h}(\mathcal{F})y(l)f(y(l)) + \frac{\rho v}{4\eta_7} y_t^2(l), \quad t \geq t_* > 0. \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

$$\text{où } \beta = 2m^2 \left[1 + \left(\frac{2E(0)}{kEI - \rho v^2} \right)^\alpha \right].$$

Preuve: Une différentiation de $\Psi_2(t)$ donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_2(t) &= \int_0^l \frac{d}{dt} \widetilde{\Psi}_2(x, t) dx = \int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} \widetilde{\Psi}_2(x, t) \right) dx + v \widetilde{\Psi}_2(x, t) \Big|_0^l \\ &= -\rho \int_0^l y_{tt} \int_0^t h(t-s)(y(t) - y(s)) ds dx - \rho \left(\int_0^t h(s) ds \right) \|y_t\|^2 \\ &\quad - \rho \int_0^l y_t \int_0^t h'(t-s)(y(t) - y(s)) ds dx + v \widetilde{\Psi}_2(x, t) \Big|_0^l, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

où

$$\widetilde{\Psi}_2(x, t) = -\rho y_t(x, t) \int_0^t h(t-s)(y(x, t) - y(x, s)) ds, \quad t \geq 0. \quad (5.5.12)$$

D'autre part, les conditions aux limites dans (5.1.1) impliquent

$$\widetilde{\Psi}_2(x, t) \Big|_0^l = -\rho y_t(l) \int_0^t h(t-s)(y(l, t) - y(l, s)) ds, \quad t \geq 0. \quad (5.5.13)$$

En intégrant par parties et en tenant compte (5.5.13), la dérivée totale (5.5.11) est donnée par

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Psi_2(t) &= EI \left(1 - \int_0^t h(s)ds\right) \int_0^l y_{xx} \int_0^t h(t-s)(y_{xx}(t) - y_{xx}(s))ds \\
&\quad + EI \int_0^l \left| \int_0^t h(t-s)(y_{xx}(t) - y_{xx}(s))ds \right|^2 dx \\
&\quad - \rho v^2 \int_0^l y_x \int_0^t h(t-s)(y_x(t) - y_x(s))ds dx \\
&\quad - 2\rho v \int_0^l y_t \int_0^t h(t-s)(y_x(t) - y_x(s))ds dx \\
&\quad - \rho \int_0^l y_t \int_0^t h'(t-s)(y(t) - y(s))ds dx - \rho \left(\int_0^t h(s)ds \right) \|y_t\|^2 \\
&\quad + f(y(l)) \int_0^t h(t-s)(y(l,t) - y(l,s))ds \\
&\quad + \rho v y_t(l) \int_0^t h(t-s)(y(l,t) - y(l,s))ds, \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.5.14}$$

On estime maintenant les termes de (5.5.14). Soient \mathcal{A} et \mathcal{F} des ensembles mesurables tels que $\mathcal{A} = \mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{F}$ alors, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^l y_{xx} \int_0^t h(t-s)(y_{xx}(t) - y_{xx}(s))ds dx \\
&= \int_0^l y_{xx} \left(\int_{\mathcal{A}_t} h(t-s)(y_{xx}(t) - y_{xx}(s))ds + \int_{\mathcal{F}_t} h(t-s)(y_{xx}(t) - y_{xx}(s))ds \right) dx \\
&\leq \int_0^l y_{xx} \int_{\mathcal{A}_t} h(t-s)(y_{xx}(t) - y_{xx}(s))ds dx + \left(\int_{\mathcal{F}_t} h(t-s)ds \right) \|y_{xx}\|^2 \\
&\quad - \int_0^l y_{xx} \int_{\mathcal{F}_t} h(t-s)y_{xx}(s)ds dx.
\end{aligned} \tag{5.5.15}$$

En utilisant l'ingalité de Young. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned}
&\int_0^l y_{xx} \int_{\mathcal{A}_t} h(t-s)(y_{xx}(t) - y_{xx}(s))ds dx \\
&\leq \eta_1 \|y_{xx}\|^2 + \frac{k}{4\eta_1} \int_0^l \int_{\mathcal{A}_t} h(t-s) |y_{xx}(t) - y_{xx}(s)|^2 ds dx, \quad \eta_1 > 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& - \int_0^l y_{xx} \int_{\mathcal{F}_t} h(t-s)y_{xx}(s)ds dx \\
&\leq \eta_1 \|y_{xx}\|^2 + \frac{k}{4\eta_1} \int_0^t h(t-s) \|y_{xx}(s)\|^2 ds, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la relation (5.5.15) est estimée par

$$\begin{aligned}
& \int_0^l y_{xx} \int_0^t h(t-s)(y_{xx}(t) - y_{xx}(s)) ds dx \\
\leq & \left(2\eta_1 + k\hat{h}(\mathcal{F})\right) \|y_{xx}\|^2 + \frac{k}{4\eta_1} \int_0^l \int_{\mathcal{A}_t} h(t-s) |y_{xx}(t) - y_{xx}(s)|^2 ds dx \\
& + \frac{k}{4\eta_1} \int_0^t h(t-s) \|y_{xx}(s)\|^2 ds, \quad t \geq 0
\end{aligned} \tag{5.5.16}$$

où $\hat{h}(\mathcal{F})$ est défini par (5.2.1). De même

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left| \int_0^t h(t-s)(y_{xx}(t) - y_{xx}(s)) ds \right|^2 dx \\
\leq & \left(1 + \frac{1}{\eta_2}\right) k \int_0^l \int_{\mathcal{A}_t} h(t-s) |y_{xx}(t) - y_{xx}(s)|^2 ds dx \\
& + (1 + \eta_2) k \hat{h}(\mathcal{F}) \int_0^l \int_{\mathcal{F}_t} h(t-s) |y_{xx}(t) - y_{xx}(s)|^2 ds dx, \quad \eta_2 > 0.
\end{aligned} \tag{5.5.17}$$

Pour le troisième terme, on peut écrire

$$\begin{aligned}
& - \int_0^l y_x \int_0^t h(t-s)(y_x(t) - y_x(s)) ds dx \\
= & - \left(\int_0^t h(s) ds \right) \|y_x\|^2 + \int_0^l y_x \int_0^t h(t-s) y_x(s) ds dx \\
\leq & (\eta_3 - h_*) \|y_x\|^2 + \frac{l^2 k}{4\eta_3} \int_0^t h(t-s) \|y_{xx}(s)\|^2 ds, \quad \eta_3 > 0, \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.5.18}$$

Comme pour le premier terme, le quatrième s'écrit comme

$$\begin{aligned}
& -2\rho v \int_0^l y_t \int_0^t h(t-s)(y_x(t) - y_x(s)) ds dx \\
= & -2\rho v \int_0^l y_t \left(\int_{\mathcal{A}_t} h(t-s)(y_x(t) - y_x(s)) ds + \int_{\mathcal{F}_t} h(t-s)(y_x(t) - y_x(s)) ds \right) dx \\
= & -2\rho v \int_0^l y_t \int_{\mathcal{A}_t} h(t-s)(y_x(t) - y_x(s)) ds dx - 2\rho v \left(\int_{\mathcal{F}_t} h(t-s) ds \right) \int_0^l y_t y_x dx \\
& + 2\rho v \int_0^l y_t \int_{\mathcal{F}_t} h(t-s) y_x(s) ds dx
\end{aligned} \tag{5.5.19}$$

et les différents termes du second membre de (5.5.19) sont estimés par

$$\begin{aligned}
& -2\rho v \int_0^l y_t \int_{\mathcal{A}_t} h(t-s)(y_x(t) - y_x(s)) ds dx \\
\leq & \eta_3 \rho \|y_t\|^2 + \frac{\rho v^2 l^2 k}{\eta_3} \int_0^l \int_{\mathcal{A}_t} h(t-s) |y_{xx}(t) - y_{xx}(s)|^2 ds dx, \quad t \geq 0, \\
& -2\rho v \left(\int_{\mathcal{F}_t} h(t-s) ds \right) \int_0^l y_t y_x dx \leq \rho k \hat{h}(\mathcal{F}) \|y_t\|^2 + \rho v^2 k \hat{h}(\mathcal{F}) \|y_x\|^2 \quad (5.5.20)
\end{aligned}$$

et

$$2\rho v \int_0^l y_t \int_{\mathcal{F}_t} h(t-s) y_x(s) ds dx \leq \eta_3 \rho \|y_t\|^2 + \frac{\rho v^2 l^2 k}{\eta_3} \int_0^t h(t-s) \|y_{xx}(s)\|^2 ds \quad (5.5.21)$$

pour tout $t \geq 0$.

En substituant (5.5.20) et (5.5.21) dans (5.5.19), on obtient

$$\begin{aligned}
& -2\rho v \int_0^l y_t \int_0^t h(t-s)(y_x(t) - y_x(s)) ds dx \\
\leq & \rho \left(2\eta_3 + k \hat{h}(\mathcal{F}) \right) \|y_t\|^2 + \rho v^2 k \hat{h}(\mathcal{F}) \|y_x\|^2 + \frac{\rho v^2 l^2 k}{\eta_3} \int_0^t h(t-s) \|y_{xx}(s)\|^2 ds \\
& + \frac{\rho v^2 l^2 k}{\eta_3} \int_0^l \int_{\mathcal{A}_t} h(t-s) |y_{xx}(t) - y_{xx}(s)|^2 ds dx. \quad (5.5.22)
\end{aligned}$$

Le cinquième terme est estimé comme suit

$$\begin{aligned}
& -\rho \int_0^l y_t \int_0^t h'(t-s)(y(t) - y(s)) ds dx \\
\leq & \eta_4 \rho \|y_t\|^2 - \frac{\rho h(0) l^4}{4\eta_4} \int_0^l (h' \circ y_{xx})(t) dx, \quad \eta_4 > 0, \quad t \geq 0. \quad (5.5.23)
\end{aligned}$$

Estimation du terme non linéaire

Maintenant, on passe au terme non linéaire, on a

$$\begin{aligned}
& f(y(l)) \int_0^t h(t-s)(y(l,t) - y(l,s)) ds \\
& = f(y(l)) \left(\int_{\mathcal{A}_t} h(t-s)(y(l,t) - y(l,s)) ds + \int_{\mathcal{F}_t} h(t-s)(y(l,t) - y(l,s)) ds \right) \\
& = f(y(l)) \int_{\mathcal{A}_t} h(t-s)(y(l,t) - y(l,s)) ds - f(y(l)) \int_{\mathcal{F}_t} h(t-s) y(l,s) ds \\
& + \left(\int_{\mathcal{F}_t} h(t-s) ds \right) y(l) f(y(l)), \quad t \geq 0. \quad (5.5.24)
\end{aligned}$$

Alors, les deux premiers termes du second membre de (5.5.24) sont estimés par

$$\begin{aligned} & f(y(l)) \int_{\mathcal{A}_t} h(t-s)(y(l,t) - y(l,s)) ds \\ & \leq \eta_5 |f(y(l))|^2 + \frac{l^3 k}{4\eta_5} \int_0^l \int_{\mathcal{A}_t} h(t-s) |y_{xx}(t) - y_{xx}(s)|^2 ds dx, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

et

$$-f(y(l)) \int_{\mathcal{F}_t} h(t-s)y(l,s) ds \leq \eta_5 |f(y(l))|^2 + \frac{l^3 k}{4\eta_5} \int_0^t h(t-s) \|y_{xx}(s)\|^2 ds, \quad t \geq 0.$$

D'après l'hypothèse (A4), de (5.2.4) et l'inégalité de Poincaré on peut écrire

$$\begin{aligned} & |f(y(l))|^2 \leq 2m^2(|y(l)|^2 + |y(l)|^{2(\alpha+1)}) \\ & \leq 2m^2 l^3 \left[\|y_{xx}\|^2 + \left(\frac{2}{EI k - \rho v^2 l^2} E(0) \right)^\alpha \|y_{xx}\|^2 \right] = \beta \|y_{xx}\|^2, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, la relation (5.5.24) devient

$$\begin{aligned} & f(y(l)) \int_0^t h(t-s)(y(l,t) - y(l,s)) ds \\ & \leq 2\eta_5 \beta \|y_{xx}\|^2 + \frac{l^3 k}{4\eta_5} \int_0^t h(t-s) \|y_{xx}(s)\|^2 ds \tag{5.5.25} \\ & + k \hat{h}(\mathcal{F}) y(l) f(y(l)) + \frac{l^3 k}{4\eta_5} \int_0^l \int_{\mathcal{A}_t} h(t-s) |y_{xx}(t) - y_{xx}(s)|^2 ds dx, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Pour le dernier terme, on peut écrire

$$\begin{aligned} & \rho v y_t(l) \int_0^t h(t-s)(y(l,t) - y(l,s)) ds \\ & \leq \frac{\rho v}{4\eta_7} y_t^2(l) + \eta_7 l^3 k \int_0^l (h \circ y_{xx}) dx, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{5.5.26}$$

L'insertion de (5.5.16)-(5.5.18), (5.5.22), (5.5.23), (5.5.25) et (5.5.26) dans (5.5.14) termine la preuve de Lemme 5.5.

Théorème 5.2 *Supposons que les hypothèses (A1)-(A4), $v^2 < EI(1-k)/l^2\rho$ sont satisfaites. Si $\mathcal{R}_h < \frac{1}{5}$, $\sup_{0 \leq z \leq s} \frac{\gamma(s)}{\gamma(s-z)\gamma(z)} \leq M$ et H_γ et $\sup_{t \geq 0} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$ sont suffisamment petits où M est une constante positive, alors il existe une constante positive A telle que*

$$E(t) \leq A\gamma(t)^{-1}, \quad t \geq 0.$$

Preuve: L'utilisation des Lemme 5.3-Lemme 5.5 dans la dérivée de la fonctionnelle $L(t)$, nous donne

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}L(t) &\leq \left(\frac{EI}{2} - \lambda_2 \frac{h(0)l^4}{4\eta_4} \right) \int_0^l (h' \circ y_{xx})(t) dx \\
 &+ \rho \left\{ 2\lambda_1 + \lambda_2 \left(-h_* + \eta_4 + 2\eta_3 + k\hat{h}(\mathcal{F}) \right) \right\} \|y_t\|^2 \\
 &+ \rho v^2 \left\{ 2\lambda_1 + \lambda_2 \left(-h_* + \eta_3 + k\hat{h}(\mathcal{F}) \right) \right\} \|y_x\|^2 + \{ \lambda_2 [2\eta_1 (1 - h_*) EI + 2\eta_5 \beta \\
 &+ EI (1 - h_*) k\hat{h}(\mathcal{F})] - \lambda_1 EI \left(1 - \frac{k}{2} \right) \} \|y_{xx}\|^2 \\
 &\left\{ -\lambda_1 \frac{EI}{2} + \lambda_2 \eta_7 l^3 k \right\} \int_0^l (h \circ y_{xx})(t) dx + \left\{ \lambda_1 \frac{EI}{2} + \frac{\lambda_2 k}{4} \left((1 - h_*) \frac{EI}{\eta_1} \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{\rho v^2 l^2}{\eta_3} + \frac{4\rho v^2 l^2}{\eta_3} + \frac{l^3}{\eta_5} \right) \int_0^t h(t-s) \|y_{xx}(s)\|^2 ds + \lambda_2 (1 + \eta_2) EI k \hat{h}(\mathcal{F}) \right. \\
 &\times \int_0^l \int_{\mathcal{F}_t} h(t-s) |y_{xx}(t) - y_{xx}(s)|^2 ds dx + \lambda_2 k \left\{ (1 - h_*) \frac{EI}{4\eta_1} + \left(1 + \frac{1}{\eta_2} \right) EI \right. \\
 &+ \left. \left(1 + \frac{1}{\eta_2} \right) EI + \frac{\rho v^2 l^2}{\eta_3} + \frac{l^3}{4\eta_5} \right\} \int_0^l \int_{\mathcal{A}_t} h(t-s) |y_{xx}(t) - y_{xx}(s)|^2 ds dx \\
 &+ \left. \left\{ -\lambda_1 + \lambda_2 k \hat{h}(\mathcal{F}) \right\} y(l) f(y(l)) + \frac{\rho v}{2} \left(\frac{\lambda_2}{2\eta_7} - 1 \right) y_t^2(l), \quad t \geq t_*. \tag{5.5.27}
 \end{aligned}$$

On choisit

$$\lambda_2 \leq \min\{\eta_4 EI / h(0)l^4, 2\eta_7\}$$

pour que

$$\frac{EI}{2} - \lambda_2 \frac{h(0)l^4}{4\eta_4} \geq \frac{EI}{4} \tag{5.5.28}$$

et

$$\frac{\lambda_2}{2\eta_7} - 1 \leq 0. \tag{5.5.29}$$

En multipliant les deux membres de (5.5.27) par $\gamma(t)$ et en intégrant sur $[t_*, t]$, on trouve

$$\begin{aligned}
 \gamma(t)L(t) - \gamma(t_*)L(t_*) &\leq \int_{t_*}^t \gamma'(s)L(s) ds + \frac{EI}{4} \int_{t_*}^t \gamma'(s) \int_0^l (h' \circ y_{xx}) dx ds \\
 &+ \rho \left\{ 2\lambda_1 + \lambda_2 \left(-h_* + k\hat{h}(\mathcal{F}) + \eta_4 + 2\eta_3 \right) \right\} \int_{t_*}^t \gamma(s) \|y_t\|^2 ds \\
 &+ \rho v^2 \left\{ 2\lambda_1 + \lambda_2 \left(-h_* + k\hat{h}(\mathcal{F}) + \eta_3 \right) \right\} \int_{t_*}^t \gamma(s) \|y_x\|^2 ds \\
 &+ \lambda_2 \left\{ [2\eta_1 (1 - h_*) EI + 2\eta_5 \beta + EI (1 - h_*) k\hat{h}(\mathcal{F})] - \lambda_1 EI \left(1 - \frac{k}{2} \right) \right\} \int_{t_*}^t \gamma(s) \|y_{xx}\|^2 ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ -\lambda_1 \frac{EI}{2} + \lambda_2 \eta_7 l^3 k \right\} \int_{t_*}^t \gamma(s) \int_0^l (h \circ y_{xx})(s) dx ds \\
 & + \left\{ \lambda_1 \frac{EI}{2} + \frac{\lambda_2 k}{4} \left((1 - h_*) \frac{EI}{\eta_1} + \frac{\rho v^2 l^2}{\eta_3} + \frac{4\rho v^2 l^2}{\eta_3} + \frac{l^3}{\eta_5} \right) \right\} \\
 & \times \int_{t_*}^t \gamma(s) \int_0^s h(s - \tau) \|y_{xx}(\tau)\|^2 d\tau ds \\
 & + \lambda_2 (1 + \eta_2) EIk \hat{h}(\mathcal{F}) \int_{t_*}^t \gamma(s) \int_0^l \int_{\mathcal{F}_s} h(t - s) |y_{xx}(s) - y_{xx}(\tau)|^2 d\tau dx ds \\
 & + \lambda_2 k \left\{ (1 - h_*) \frac{EI}{4\eta_1} + \left(1 + \frac{1}{\eta_2} \right) EI + \frac{\rho v^2 l^2}{\eta_3} + \frac{l^3}{4\eta_5} \right\} \\
 & \times \int_{t_*}^t \gamma(s) \int_0^l \int_{\mathcal{A}_s} h(t - s) |y_{xx}(s) - y_{xx}(\tau)|^2 d\tau dx ds \tag{5.5.30} \\
 & + \left\{ -\lambda_1 + \lambda_2 k \hat{h}(\mathcal{F}) \right\} \int_{t_*}^t \gamma(s) y(l) f(y(l)) ds, \quad t \geq t_*.
 \end{aligned}$$

Pour le premier terme du second membre de (5.5.30), en utilisant la proposition 5.2, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \int_{t_*}^t \gamma'(s) L(s) ds & = \int_{t_*}^t \gamma(s) \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} L(s) ds \leq \Gamma_1 \int_{t_*}^t \gamma(s) L(s) ds \\
 & \leq 2\Gamma_1 \int_{t_*}^t \gamma(s) e(s) ds \tag{5.5.31}
 \end{aligned}$$

où $\Gamma_1 = \sup_{t \geq 0} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$, on remarque que

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_*}^t \gamma(s) \int_0^s h(s - \tau) \|y_{xx}(\tau)\|^2 d\tau ds \\
 & = \int_{t_*}^t \int_0^s h(s - \tau) \gamma(s - \tau) \frac{\gamma(s)}{\gamma(s - \tau) \gamma(\tau)} \gamma(\tau) \|y_{xx}(\tau)\|^2 d\tau ds \\
 & \leq \Gamma_2 \int_{t_*}^t \int_0^s h(s - \tau) \gamma(s - \tau) \gamma(\tau) \|y_{xx}(\tau)\|^2 d\tau ds \tag{5.5.32}
 \end{aligned}$$

où $\Gamma_2 = \sup_{0 \leq \tau \leq s} \frac{\gamma(s)}{\gamma(s - \tau) \gamma(\tau)}$.

le Lemme 5.1 implique que

$$\int_{t_*}^t \gamma(s) \int_0^s h(s - \tau) \|y_{xx}(\tau)\|^2 d\tau ds \leq \Gamma_2 \int_0^t h(s) \gamma(s) ds \int_{t_*}^t \gamma(s) \|y_{xx}(s)\|^2 ds, \quad t \geq t_*. \tag{5.5.33}$$

En substituant les relations (5.5.31)-(5.5.33) dans (5.5.30) on déduit que

$$\begin{aligned}
 \gamma(t)L(t) &\leq \gamma(t_*)L(t_*) + \frac{EI}{4} \int_{t_*}^t \gamma'(s) \int_0^l (h' \circ y_{xx}) dx ds \\
 &+ \rho \left\{ 2\lambda_1 + \lambda_2 \left(-h_* + k\hat{h}(\mathcal{F}) + \eta_4 + 2\eta_3 \right) + \Gamma_1 \right\} \int_{t_*}^t \gamma(s) \|y_t\|^2 ds \\
 &+ \rho v^2 \left\{ 2\lambda_1 + \lambda_2 \left(-h_* + k\hat{h}(\mathcal{F}) + \eta_3 \right) - \Gamma_1 \right\} \int_{t_*}^t \gamma(s) \|y_x\|^2 ds \\
 &+ \left\{ \lambda_2 [2\eta_1 (1 - h_*) EI + 2\eta_5 \beta + EI (1 - h_*) k\hat{h}(\mathcal{F})] \right. \\
 &\left. - \lambda_1 EI \left(1 - \frac{k}{2} \right) + \Gamma_1 EI + \Gamma_2 H_\gamma U \right\} \int_{t_*}^t \gamma(s) \|y_{xx}\|^2 ds \\
 &+ \left\{ -\lambda_1 \frac{EI}{2} + \lambda_2 \eta_7 l^3 k + \Gamma_1 EI \right\} \int_{t_*}^t \gamma(s) \int_0^l (h \circ y_{xx})(s) dx ds \\
 &+ \lambda_2 (1 + \eta_2) EI k \hat{h}(\mathcal{F}) \int_{t_*}^t \gamma(s) \int_0^l \int_{\mathcal{F}_s} h(t-s) |y_{xx}(s) - y_{xx}(\tau)|^2 d\tau dx ds \\
 &+ \lambda_2 k \left\{ (1 - h_*) \frac{EI}{4\eta_1} + \left(1 + \frac{1}{\eta_2} \right) EI + \frac{\rho v^2 l^2}{\eta_3} + \frac{l^3}{4\eta_5} \right\} \\
 &\times \int_{t_*}^t \gamma(s) \int_0^l \int_{\mathcal{A}_s} h(t-s) |y_{xx}(s) - y_{xx}(\tau)|^2 d\tau dx ds \\
 &+ \left\{ -\lambda_1 + \lambda_2 k \hat{h}(\mathcal{F}) + 2\Gamma_1 \right\} \int_{t_*}^t \gamma(s) y(l) f(y(l)) ds, \quad t \geq t_*. \tag{5.5.34}
 \end{aligned}$$

où

$$U = \lambda_1 \frac{EI}{2} + \frac{\lambda_2 k}{4} \left((1 - h_*) \frac{EI}{\eta_1} + \frac{\rho v^2 l^2}{\eta_3} + \frac{4\rho v^2 l^2}{\eta_3} + \frac{l^3}{\eta_5} \right).$$

Comme dans [86], on introduit

$$\mathcal{A}_n = \{s \in \mathbb{R}_+ : nh'(s) + h(s) \leq 0\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

et

$$\tilde{\mathcal{A}}_{nt} = \{s \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq s \leq t, nh'(t-s) + h(t-s) \leq 0\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Notons que

$$\bigcup_n \mathcal{A}_n = \mathbb{R}_+ \setminus \{\mathcal{F}_h \cup \mathcal{N}_h\}$$

tel que \mathcal{N}_h est l'ensemble où h' n'est pas définie et \mathcal{F}_h est donnée par (5.5.7), si l'on note $\mathcal{F}_n = \mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{A}_n$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{h}(\mathcal{F}_n) = \hat{h}(\mathcal{F}_h)$ car $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n$ pour tout n et $\bigcap_n \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_h \cup \mathcal{N}_h$.

Dans (5.5.34), on prend $\mathcal{A}_t := \tilde{A}_{nt}$, $\mathcal{F}_t := \tilde{F}_{nt}$ et pour h_* suffisamment large ($h_* > k\hat{h}(\mathcal{F})$) on prend $\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{2} (h_* - k\hat{h}(\mathcal{F}) - \varepsilon)$. Il en découle que

$$\begin{aligned}
\gamma(t)L(t) &\leq \gamma(t_*)L(t_*) + \rho \{ \lambda_2 (-\varepsilon + \eta_4 + 2\eta_3) + \Gamma_1 \} \int_{t_*}^t \gamma(s) \|y_t\|^2 ds \\
&\quad + \rho v^2 \{ \lambda_2 (-\varepsilon + \eta_3) - \Gamma_1 \} \int_{t_*}^t \gamma(s) \|y_x\|^2 ds \\
&\quad + \left\{ \lambda_2 [2\eta_1 (1 - h_*) EI + 2\eta_5 \beta + EI (1 - h_*) k\hat{h}(\mathcal{F}_n)] \right. \\
&\quad \left. - \lambda_1 EI \left(1 - \frac{k}{2} \right) + \Gamma_1 EI + \Gamma_2 H_\gamma U \right\} \int_{t_*}^t \gamma(s) \|y_{xx}\|^2 ds \\
&\quad + \left\{ -\lambda_1 \frac{EI}{2} + \lambda_2 (1 + \eta_2) EIk\hat{h}(\mathcal{F}_n) + \lambda_2 \eta_7 l^3 k + \Gamma_1 EI \right\} \\
&\quad \times \int_{t_*}^t \gamma(s) \int_0^l (h \circ y_{xx})(s) dx ds \\
&\quad + \lambda_2 k \left\{ (1 - h_*) \frac{EI}{4\eta_1} + \left(1 + \frac{1}{\eta_2} \right) EI + \frac{\rho v^2 l^2}{\eta_3} + \frac{l^3}{4\eta_5} - \frac{EI}{4nk} \right\} \\
&\quad \times \int_{t_*}^t \gamma(s) \int_0^l \int_{\tilde{A}_{nt}} h(t-s) |y_{xx}(s) - y_{xx}(\tau)|^2 d\tau dx ds \\
&\quad + \left\{ -\lambda_1 + \lambda_2 k\hat{h}(\mathcal{F}_n) + 2\Gamma_1 \right\} \int_{t_*}^t \gamma(s) y(l) f(y(l)) ds, \quad t \geq t_*. \quad (5.5.35)
\end{aligned}$$

On sélectionne λ_2 suffisamment petit de tel sorte que

$$\lambda_2 k \left\{ (1 - h_*) \frac{EI}{4\eta_1} + \left(1 + \frac{1}{\eta_2} \right) EI + \frac{\rho v^2 l^2}{\eta_3} + \frac{l^3}{4\eta_5} \right\} \leq \frac{EI}{4n}.$$

Il est claire que

$$-\frac{\lambda_1 EI}{2} + \lambda_2 (1 + \eta_2) EIk\hat{h}(\mathcal{F}_n) + \lambda_2 \eta_7 l^3 k + \Gamma_1 EI \leq 0$$

et

$$-\lambda_1 + \lambda_2 k\hat{h}(\mathcal{F}_n) + 2\Gamma_1 \leq 0$$

pour $\varepsilon, \eta_2, \eta_7, \Gamma_1$ suffisamment petits et $\hat{h}(\mathcal{F}_n) < \frac{1}{5}$ et h_* suffisamment large ($h_* > 5k\hat{h}(\mathcal{F})$).

Il suffit maintenant de vérifier si

$$(1 - h_*) k\hat{h}(\mathcal{F}_n) - \lambda_1 \left(1 - \frac{k}{2} \right) < 0$$

pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment large et on choisit les différents paramètres $\eta_i, i = 1 \dots 7, \Gamma_1, H_\gamma$ et λ_2 suffisamment petit pour s'assurer que les coefficients dans (5.5.35) sont négatifs ou nulle.

Il est clair que cette inégalité est satisfaite si on choisit t_* suffisamment large telle que

$$h_* > k\hat{h}(\mathcal{F}_n) \left(3 - \frac{k}{2}\right) / \left(2k\hat{h}(\mathcal{F}_n) + 1 - \frac{k}{2}\right).$$

Ces choix conduisent à

$$\gamma(t)L(t) \leq C_1, \quad t \geq t_*$$

où C_1 est une constante positive. Le second membre de l'inégalité de la proposition 5.2 implique que

$$e(t) \leq \frac{C_2}{\gamma(t)}, \quad t \geq t_*$$

où C_2 est une constante positive. La continuité de $e(t)$ et le fait que l'intervalle $[0, t_*]$ soit fini, nous permettent de conclure.

Remarque 5.1 *Notons que si l'inégalité de (A2) est stricte alors $\mathcal{R}_h = \hat{h}(\mathcal{F}_h) = 0$ et la preuve devient plus courte.*

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, on a abordé le problème des vibrations transversales produites lors du fonctionnement d'une structure en mouvement axial (corde, poutre, plaque). Notre but était d'apporter des nouveaux mécanismes capables d'atténuer ces vibrations et d'améliorer les résultats antérieurs. Notre contribution dans ce sujet concerne la stabilisation de deux systèmes (corde et poutre) à l'aide d'un amortissement de type viscoélastique. Dans la première contribution l'amortissement engendré par un contrôle frontière. Ce résultat a été obtenu sous la condition de négligence de l'effet du déplacement longitudinal et des conditions d'approximation de la tension. Ce résultat peut s'améliorer si l'on adoptant l'expression exacte de la tension, notamment

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho (y_{tt} + 2cy_{xt} + c^2y_{xx}) - \left\{ y_x \left[\frac{T_0}{\sqrt{1+y_x^2}} + EA \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y_x^2}} \right) \right] \right\}_x = 0, \\ y(0, t) = 0, \\ f_c(t) = -\rho c^2 y_x(l, t) + \left\{ y_x \left[\frac{T_0}{\sqrt{1+y_x^2}} + EA \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y_x^2}} \right) \right] \right\}, \\ y(0, x) = f(x), \quad y_t(0, x) = g(x). \end{array} \right.$$

où

$$f_c(t) = \int_0^t h(t-s)y_t(s)ds$$

ou l'en tenant compte de l'effet du déplacement longitudinal, c'est à dire le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho (u_{tt} + 2cu_{xt} + c^2u_{xx}) - [EA (u_x + \frac{1}{2}y_x^2)]_x = 0, \\ \rho (y_{tt} + 2cy_{xt} + c^2y_{xx}) - \{ [T_0 + EA (u_x + \frac{1}{2}y_x^2)] y_x \}_x = 0, \\ y(0, t) = u(0, t) = 0, \\ f_1(t) = -\rho c^2 u_x(l, t) + EA (u_x(l, t) + \frac{1}{2}y_x^2(l, t)), \\ f_2(t) = -\rho c^2 y_x(l, t) + [T_0 + EA (u_x(l, t) + \frac{1}{2}y_x^2(l, t))] y_x(l, t) \\ y(0, x) = g_1(x), \quad y_t(0, x) = g_2(x), \quad u(0, x) = g_3(x), \quad u_t(0, x) = g_4(x). \end{array} \right.$$

où f_1 et f_2 sont des contrôles de type viscoélastique.

5.5. *Comportement asymptotique*

Dans la deuxième contribution qui se trouve dans le chapitre 6, on est parvenu à stabiliser une poutre en mouvement axial à l'aide de matériaux viscoélastique incorporant dans la poutre elle meme. Notre résultat a été obtenu sous la condition que la vitesse de la poutre ne doit pas dépasser une certaine valeur critique qui dépend des paramètres du système et ainsi sous certaines conditions sur la fonction de relaxation.

Il serait intéressant d'améliorer ce résultat si l'on parvient à améliorer la condition sur la vitesse et d'élargir la classe des fonctions de relaxation.

Bibliographie

- [1] S. Abrate, Vibration of Belts and Belt Drives, *Mechanism and Machine Theory* 27 (1992), 645-659.
- [2] F.R. Archibald, A.G. Emslie, The vibrations of a string having a uniform motion along its length, *J. Appl. Mech. ASME.* 25 (1958), 347– 348.
- [3] S.T. Ariaratnam, N.S. Namachchivaya, Dynamic stability of pipes conveying pulsating fluid, *J. Sound Vib.* 107(2) (1986), 215– 230.
- [4] J. J. Bae, S.B. Yoon, On uniform decay of wave equation of carrier model subject to memory condition at the boundary, *J. Korean Math. Soc.* 44 (4) (2007), 1013-1024.
- [5] V.A. Bapat, P. Srinivasan, Nonlinear transverse oscillations in traveling strings by the method of harmonic balance, *J. Appl. Mech.* 34 (1967), 775-777.
- [6] R. Barreto, E.C. Lapa, J.E. Munoz Rivera, Decay rates for viscoelastic plates with memory, *J. Elasticity* 44(1) (1996), 61-87.
- [7] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, 1987.
- [8] G.F. Carrier, On the nonlinear vibration problem of the elastic string, *Quart. Appli. Maths.* 3 (1965), 157-165.
- [9] M.M. Cavalcanti, V.N.D. Cavalcanti, M.L. Santos, Uniform decay rates of solutions to a nonlinear wave equation with boundary condition of memory type, *Sys. Mod. Optim.* (166) series IFIP Inter. Feder. Info. Proces, (1999), 239-255.

- [10] L.Q. Chen, H. Chen, Asymptotic analysis of nonlinear vibration of axially accelerating viscoelastic strings with the standard linear solid model, *J. Eng. Math.* 67(2010), 205–218.
- [11] L-Q, Chen, H. Ding, Steady-state transverse response in coupled planar vibration of axially moving viscoelastic beams, *J. Vib. Acoust* 132(1) (2010), (9pages).
- [12] G. Chen, S. A. Fulling, F.J. Narcowich, S. Sun, Exponential decay of energy of evolution equations with locally distributed dampings, *J. Appl. Math.*, 51 (1991), 266–301.
- [13] S. Chen, K. Liu, Z. Liu, Spectrum and stability for elastic systems with global or local Kelvin–Voigt damping, *J. Appl. Math.*, 59 (1998), 651–668.
- [14] G. Chen, D.L. Russell, A mathematical model for linear elastic systems with structure damping, *Quart. Appl. Math.*, 39 (1982), 433–454.
- [15] J.Y. Choi, K.S. Hong, K.J. Yang, Exponential stabilization of an axially moving tensioned strip by passive damping and boundary control, *J. Vib Acoust.* 10 (5) (2004), 661-682.
- [16] J. Chung, C.S. Han, K. Yi, Vibration of an axially moving string with geometric non-linearity and translating acceleration, *J. Sound Vib.* 240 (4) (2001), 733–746.
- [17] C.H. Chung, C.A. Tan, Active vibration control of the axially moving string by wave cancellation, *J. Vib. Acoust.* 117 (1995), 49-55.
- [18] B.D. Coleman, W. Noll, Foundations of linear viscoelasticity, *Rev. Modern Phys.* 33 (1961), 239-249.
- [19] B.D. Coleman, V.J. Mizel, On the general theory of fading memory, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 29 (1968), 18-31.
- [20] F. Conrad, O. Morgul, On the stabilization of a flexible beam with a tip mass, *J. Control Optim.*, 36 (1998), 1962–1986.
- [21] P. Cornilleau, S. Nicaise, Energy decay for solutions of the wave equation with general memory boundary conditions, *Diff. Integ. Equ.* 22 (12) (2009), 1173-1192.

- [22] J.M. Coron and B. d'Andrea-Novel, Stabilization of a rotating rody beam without damping, *IEEE Trans. Auto. Control* 43 (5) (1998), 608-619.
- [23] C.M. Dafermos, Asymptotic stability in viscoelasticity, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 37 (1970), 297-308.
- [24] C.M. Dafermos, On abstract Volterra equations with applications to linear viscoelasticity, *J. Diff Equ* 7 (1970), 554-569.
- [25] K.-J. Engel, R. Nagel, One parameter semigroups for linear evolution equations, vol. 194 of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [26] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [27] M. Fabrizio, M. Morro, A boundary condition with memory in electromagnetism, *Arch. Rational. Mech. Anal.* 136 (1996), 359-381.
- [28] M. Fabrizio, A. Morro, *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*, SIAM Stud. Appl. Math. Philadelphia 1992.
- [29] R.F. Fung, J.S. Huang, Y.C. Chen, The transient amplitude of the viscoelastic traveling string: an integral constitutive law. *J. Sound Vib.* 201(2) (1997), 153 – 167.
- [30] R.F. Fung, J.S. Huang, Y.C. Chen, C.M. Yao, Non-linear dynamic analysis of the viscoelastic string with a harmonically varying transport speed, *Comput. Struct.* 66(1998), 777 – 784.
- [31] R.F. Fung, C.C. Liao, Application of variable structure control in the nonlinear system. *I. J. Mech. Sci.* 37 (1995), 985–993.
- [32] R.F. Fung, C.Tseng, Boundary control of an axially moving string via Lyapunov method, *J. Dyn. Syst. Meas. Control* , 121 (1999), 105–110.
- [33] R.F. Fung, J.W. Wen, Adaptive boundary control of an axially moving string system, *J. Vib. Acous.* 124(3) (2002), 435-440.

- [34] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1959.
- [35] F. Huang, On the mathematical model for linear elastic systems with analytic damping, *J. Control Optim.*, 26 (1988), 714–724.
- [36] F.L. Huang, Some problems for linear elastic systems with damping, *Acta Math. Sci.*, 6 (1986), 101–107.
- [37] M.H. Ghayesh, Nonlinear transversal vibration and stability of an axially moving viscoelastic string supported by a partial viscoelastic guide, *J. Sound Vib.* 314(3-5) (2010), 757-774.
- [38] B.Z. Guo, Riesz basis property and exponential stability of controlled Euler–Bernoulli beam equations with variable coefficients, *J. Control Optim.*, 40 (2002), 1905–1923.
- [39] B.Z. Guo, K.Y. Chan, Riesz basis generation eigenvalues distribution and exponential stability for an Euler-Bernoulli beam with joint feedback control, *revista Mat. Complut.* XIV (1) (2001), 295-229.
- [40] F. Guo, F. Huang, Boundary Feedback Stabilization of the undamped Euler-Bernoulli beam with both ends free, *J. Control Optim.* 43 (1) (2004), 341-356.
- [41] B.Z. Guo, W. Guo, Stabilization and parameter estimation for an Euler–Bernoulli beam equation with uncertain harmonic disturbance under boundary output feedback control, *Nonl. Anal.* 61 (2005), 671-693.
- [42] B.Z. Guo, Q. Song, Tracking control of a flexible beam by nonlinear boundary feedback, *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* 8 (1) (1995), 47-58.
- [43] Y.H. Kang, J.Y. Park, J.A. Kim, A memory type boundary stabilization for an Euler-Bernoulli beam under output feedback control. *J. Korean. Math. Soc.* 49(5) (2012), 947-964.
- [44] A. Kelleche, N.-e. Tatar, Uniform Decay for Solutions of an Axially Moving Viscoelastic Beam. Doi :10.1007/s00245-016-9334-8 *Appl. Math. Optim.*

- [45] A. Kelleche, N.-e. Tatar, A. Khemmoudj, Uniform stabilization of an axially moving Kirchhoff string by a boundary control of memory type, *J. Dyn. Control Sys.* Doi : 10.1007/s10883-016-9310-2.
- [46] A. Kelleche, N.-e. Tatar, A. Khemmoudj, stability of an Axially Moving Viscoelastic Beam, *J. Dyn. Control Sys.* Doi:10.1007/s10883-016-9317-8.
- [47] J.U. Kim, Exponential decay of the energy of a one-dimensional nonhomogeneous medium, *J. Control Optim.*, 29 (1991), 368–380.
- [48] D. Kim, Y.H. Kang, J.B. Lee, G.R. Ko, I.H. Jung, Stabilization of a nonlinear Kirchhoff equation by boundary feedback control , *J. Eng. Math.* 77(1) (2012), 197-209.
- [49] M. Kirane, N.-e. Tatar, A memory type boundary stabilization of a midly damped wave equation, *Electron. J. Qual. Th. Diff. Equ.* 6 (1999), 1-17.
- [50] M. Kirane, N.-e. Tatar, Nonexistence results for a semilinear hyperbolic problem with boundary condition of memory type, *Zeit. Anal. Anw.* 19(2) (2000), 1-16.
- [51] S. Labidi and N.-e. Tatar, Blow-up for the Euler-Bernoulli beam problem with a fractional boundary dissipation, *Dyn. Syst. Appl.* 17 (2008), 109-120.
- [52] LaSalle, J. Lefschetz, *Stability by Liapunov's direct method with applications.* Academic Press: San Diego, CA, 1961.
- [53] B. Lazzari, R. Nibbi, On the exponential decay of the Euler-Bernoulli beam with boundary energy dissipation, 389 (2) (2012), 1078-1085.
- [54] L.G. Leal, *Advanced transport phenomena: fluid mechanics and connective transport processes,* Cambridge university Press, p.912 (2007).
- [55] S.Y. Lee, C.D. Mote, Vibration control of an axially moving string by boundary control, *J. Dyn. Sys. Meas. Control* 118(1) (1996), 66-74.
- [56] S.Y. Lee, C.D. Mote, Wave characteristics and vibration control of translating beams by optimal boundary damping, *J.Vib .Acoust* 121(1) (1999), 18-25.

- [57] Y. Li, D. Aron, C.D. Rahn, Adaptive vibration isolation for axially moving strings: Theory and experiment, *Automatica*, 38(3) (2002), 379-390.
- [58] T. Li, Z. Hou, Exponential stabilization of an axially moving string with geometrical nonlinearity by linear boundary feedback, *J. Sound. Vib.* 296 (2006), 861-870.
- [59] T. Li, Z.C. Hou, Exponential stability of an axially moving string with linear boundary feedback. *J. Sound Vib.* 296 (2006), 861–870.
- [60] T.C. Li, Z.C. Hou, J.F. Li, Stabilization analysis of a generalized nonlinear axially moving string by boundary velocity feedback, *Automatica*, 44(2) (2007), 498-503.
- [61] Y.Li, C.D. Rahn, Adaptive vibration isolation for axially moving beams, *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, 5(4) (2000), 419 - 428.
- [62] M.D. Lima Santos, F. Junior, A boundary condition with memory for Kirchhoff plates equations, *Appl. Math. Comput.* 148 (2004), 475-496.
- [63] J. Lions, E.Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol.1 et 2. Paris (1968).
- [64] J.-L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, 1969.
- [65] W. Littman, L. Markus, Stabilization of a hybrid system of elasticity by feedback boundary damping, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 152 (1988), 281–330.
- [66] K. Liu, Z. Liu, Exponential decay of energy of the Euler–Bernoulli beam with locally distributed Kelvin–Voigt damping, *SIAM J. Control Optim.*, 36 (1998), 1086–1098.
- [67] K.S. Liu, Z.Y. Liu, Boundary stabilization of a nonhomogeneous beam with rotary inertia at the tip, *J. Comput. Appl. Math.*, 114(2000), 1–10.
- [68] S. Mahalingam, Transverse vibrations of power transmission chains, *Br. J. Appl. Phys.* 8 (1957), 145– 148.

- [69] D.B. McIver, Hamilton's principle for systems of changing mass, *J. Eng. Math.* 7(3) (1973), 249–261.
- [70] L. Meirovitch, *Computational Methods in Structural Dynamics*, Groningen, The Netherlands sijnthoff and Noordhoff (1980).
- [71] C.D. Mote, Dynamic stability of axially moving materials, *Shock. Vib. Dig.* 4(4) (1972), 2-11.
- [72] S. Messaoudi, General decay of solutions of a viscoelastic equation, *J. Math. Anal. Appl.* 341(2) (2008), 1457-1467.
- [73] S.A. Messaoudi, A. Soufyane, General decay of solutions of a wave equation with a boundary control of memory type, *Nonl. Anal. Real World Appl.* 11(4) (2010), 2896-2904.
- [74] S. Messaoudi, N.-e. Tatar, Exponential decay for a quasilinear viscoelastic equation, *Math. Nachr.* 282(10) (2009), 1443-1450.
- [75] E.M. Mockersturm, J. Guo, Nonlinear vibration of parametrically excited, viscoelastic, axially moving strings. *J. Appl. Mech. ASME.*72(3)(2005), 374-380.
- [76] C.D. Mote, A study of band saw vibrations, *J. Frankl. Inst.* 279(6) (1965), 430– 444.
- [77] C.D. Mote, Stability of systems transporting accelerating axially moving materials, *J. Dyn. Syst. Meas. Control ASME.* 97(1) (1975), 96– 98.
- [78] A.I. Murdoch, Remarks on the foundations of linear viscoelasticity, *J. Mech. Phys. Solids.* 40(7) (1992), 1559–1568.
- [79] R. Narasimsha, Non-linear vibration of an elastic string, *J. Sound Vib.* 8 (1) (1967) 135–146.
- [80] S. Nicaise, C. Pignotti, Stabilization of the wave equation with variable coefficients and boundary condition of memory type, *Asym. Anal.* 50 (2006), 31-67.

- [81] M. Pakdemirli, A.G. Ulsoy, Transverse vibration of an axially accelerating string, *J. Sound Vib.* 169(2) (1994), 179 – 196.
- [82] S.H. Park, General decay for a semilinear wave equation with boundary frictional and memory conditions, *Bull. Korean Math. Soc.* 51(3) (2014), 681-689.
- [83] J.Y. Park, Y.H. Kang, J.A. Kim, Existence and exponential stability for an Euler-Bernoulli beam equation with memory and boundary output feedback control term, *Acta. Appl. Math.* 104(2008), 287-301.
- [84] J.Y. Park, J.A. Kim, Existence and uniform decay for Euler–Bernoulli beam equation with memory term, *Maths. Method. Appl. Sci.* 27(14) (2004), 1629-1640.
- [85] J.Y. Park, J.A. Kim, Global existence and stability for Euler-Bernoulli beam equation with memory condition at the boundary. *J. Korean Math.Soc.* 42(6) (2005), 1137-1152.
- [86] V. Pata, Exponential stability in linear viscoelasticity , *Quart. Appl. Math.* LXIV (3) (2006), 499-513.
- [87] J. Prüss, *Evolutionary integral equations and applications*, Birkhäuser Basel 1993.
- [88] G. Propst, J. Prüss, On wave equations with boundary dissipation of memory type. *J. integral Equat. Appl.* 8 (1) (1996), 99-123.
- [89] C.D. Rahn, J.R. Mote, Parametric control of flexible systems. *J. Vib. Acous.* 116 (1994), 379–385.
- [90] B. Rao, Uniform stabilization of a hybrid system of elasticity, *SIAM J. Control Optim.*, 33(1995), 440–454.
- [91] A.A. Renshaw, C.D. Rahn, J.A. Wickert, C.D. Mote, Energy and conserved functionals for axially moving materials, *J. Vib. Acous.* 120 (1998), 634-636.
- [92] J.E.M. Rivera, D. Andrade, Exponential decay of non-linear wave equation with a viscoelastic boundary condition, *Math. Meth. Appl. Sci.* 23(1) (2000), 41-61.

- [93] D. Roylance: Engineering viscoelasticity. Rapport technique, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [94] R.A. Sack, Transverse oscillations in travelling strings, *Br. J. Appl. Phys.* 5(6) (1954), 224-226.
- [95] M.L. Santos, Decay rates for solutions of semilinear wave equations with a memory condition at the boundary, *Electron. J. Qual. Th. Diff. Equ.* 7(2002), p. 2.
- [96] M.L. Santos, Asymptotic behavior of solutions to wave equations with a memory condition at the boundary, *J. Diff. Eqs.* 73 (2001), 1-11.
- [97] M.L. Santos, J. Ferreira, D.C. Pereira, C.A. Raposo, Global existence and stability for wave equation of Kirchhoff type with memory condition at the boundary, *Nonl. Anal. T.M.A.* 54 (2003), 959-976.
- [98] S.M. Shahruz, Boundary control of a nonlinear axially moving string, *Inter. J. Robust Nonlinear control* 10(1) (2000), 17-25.
- [99] S.M. Shahruz, Boundary control of the axially moving Kirchhoff string. *Automatica*, 34(10) (1998), 1273-1277.
- [100] S.M. Shahruz, D.A. Kurmaji, Vibration suppression of a non-linear axially moving string by boundary control, *J. Sound. Vib.* 201(1) (1997), 145-152.
- [101] J.H. Spurk, *Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.
- [102] B. Tabarrok, C.M. Leech, Y. I. Kim, On the dynamics of an axially moving beam, *J. Franklin. Inst.* 297(3) (1974), 201-220.
- [103] N.-e. Tatar, On a problem arising in isothermal viscoelasticity, *Int. J. Pure. Appl. Maths* 3(1) (2003) 1-12.
- [104] N.-e. Tatar, Polynomial stability without polynomial decay of the relaxation function, *Math. Meth. Appl. Sci.* 31(15) (2008), 1874-1886.

- [105] N.-e. Tatar, How far can relaxation functions be increasing in viscoelastic problems, *Appl. Math. Letters* 22(3) (2009), 336-340.
- [106] N.-e. Tatar, Exponential decay for a viscoelastic problem with singular kernel, *Zeit. Angew. Math. Phys* 60(4) (2009), 640-650.
- [107] N.-e. Tatar, On a large class of kernels yielding exponential stability in viscoelasticity, *Appl. Math. Comp.* 215(6) (2009), 2298-2306.
- [108] N.-e. Tatar, Arbitrary decays in viscoelasticity, *J. Math. Physics* 52(1) (2011), 013502.
- [109] N.-e. Tatar, A new class of kernels leading to an arbitrary decay in viscoelasticity, *Mediterr. J. Math.* 10 (2013), 213-226.
- [110] A.G. Ulsoy, C.D. Mote, Vibrations of wide band saw blades, *J. Eng. Ind. ASME*, 104 (1982), 71– 78.
- [111] J. A. Walker, *Dynamical Systems and Evolution Equations , Theory and Applications.* Plenum Press: New York, 1980.
- [112] J.A. Wickert, Non-linear vibration of a traveling tensioned beam, *Int. J. Non-Linear Mech.* ;27(3) (1992), 503– 517.
- [113] J.A. Wickert, C.D. Mote, Classical vibration analysis of axially moving continua, *J. Appl. Mech.* 57 (1990), 738-744.
- [114] J.A. Wickert, C.D. Mote, Current research on the vibration and stability of axially-moving materials, *Shock. vib. Dig.* 20(5) (1988), 3-13.
- [115] J. Wu, S. Li, S. Chai, Uniform decay of the solution to a wave equation with memory conditions on the boundary, *Nonl. Anal.* 73 (2010), 2213-2220.
- [116] K.J. Yang, K.S. Hong, F. Matsuno, Boundary control of an axially moving steel string *under* a spatiotemporally varying tension, *JSM. Inter. J.* 47(2) (2004), 665-674.
- [117] K-J. Yang, K.S. Hong, F. Matsuno, The rate of change of an energy functional for axially moving continua, *ICCAS .10* (2003), 2707-2712.

- [118] B. Yang, C.D. Mote, Active vibration control of the axially moving string in the S domain, *J. Appl. Mech.* 58 (1991), 189–196.
- [119] Q. Zhang, Global existence and exponential stability for a quasilinear wave equation with memory damping at the boundary, *J. Optim. Theory Appl.* 139(3) (2008), 617-634.
- [120] H.H. Zhang, H. Matsuo, H. Morita, H. Yamakawa, Stability and stabilization of a deployable flexible structure, *37th IEEE Conference on Decision and Control* 4 (1998), 4541-4542.