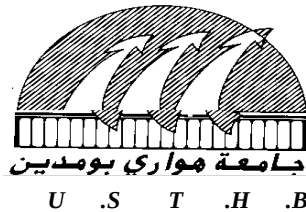


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI
BOUMEDIENE
FACULTE DE PHYSIQUE**



Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de *Doctorat*

En : physique

Spécialité : Electronique quantique

PAR

M^{elle} AYADI Samia

Thème:

Instabilités lasers : Approche analytique

Soutenue le 16/ 12/ 2008 , devant le jury composé de:

<i>M^r O. Ziane</i>	<i>Professeur, USTHB</i>	<i>Président</i>
<i>M^R B. MEZIANE</i>	<i>Professeur, Université d'Artois</i>	<i>Directeur de thèse</i>
<i>M^r H. Djelouah</i>	<i>Professeur, USTHB</i>	<i>Examineur</i>
<i>M^r A. Kellou</i>	<i>Professeur, USTHB</i>	<i>Examineur</i>
<i>M^r O. Lamrous</i>	<i>Professeur, Université de Tizi Ouzou</i>	<i>Examineur</i>
<i>M^{me} H.Zeghlache</i>	<i>Professeur, Université de Lille</i>	<i>Examineur</i>

A mes parents

A mes sœurs

A mes frères

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer ma gratitude à B.Meziane qui a su me guider dans mon travail de thèse.

Je remercie vivement O.Ziane qui m'a très aimablement fait l'honneur de présider ce jury.

Je remercie également A.Kellou , H.Djelouah, O.Lamrous et H.Zeghlache pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour leur participation au jury malgré leurs nombreuses occupations.

Je remercie également les membres du laboratoire de physique des lasers pour l'ambiance dynamique et chaleureuse qu'ils ont su faire régner autour de moi.

Enfin, je n'oublierai pas de remercier tous mes amis avec lesquels j'ai passé de très agréables moments.

Table des matières

Introduction

I Analyse self consistante de l'interaction rayonnement matière dans le laser Monomode 6

I.1	Equations lasers de Maxwell –Bloch	6
I.1.1	Equation pour le champ	7
I.1.1.a	Equations de Maxwell	7
I.1.1.b	Champ dans une cavité résonante	8
I.1.2	Equations pour la matière	9
I.1.2.a	Equations pour la matière en absence de champ électrique	10
I.1.2.b	Interaction rayonnement matière.....	10
I.1.2.c	Approximation du champ tournant.....	14
I.1.2.d	Approximation de l'enveloppe lentement variable	15
I.1.3	Traitement macroscopique du laser unidirectionnel.....	17
I.1.4	Equations finales.....	17
I.2	Autre forme normalisée des équations semi classiques	21
I.3	Les trois classes de lasers	22
I.4	Conclusion.....	24

II Hiérarchie de comportements dynamiques des lasers 25

II.1	Modèle du bilan	26
II.1.1	Equations cinétiques.....	26
II.1.1.a	Stabilité linéaire du régime stationnaire.....	27
II.2	Système Lorenz-Haken de dimension 3	32
II.2.1	Equivalence formelle du système de Lorenz et des équations laser.....	33
II.2.2	Solutions stationnaires. Analyse de stabilité linéaire	35
II.2.3	Fréquence d'oscillation au second seuil du laser	42
II.3	Conclusion	42

III Approche analytique 44

III.1	Etat de l'art	44
III.2	Approche analytique.....	49
III.2.1	Régime transitoire	49

III.2.1.a	Résultats numériques.....	49
III.2.1.b	Procédure	53
III.2.1.c	Résolution analytique	53
III.2.1.d	Expression analytique de la fréquence de relaxation.....	54
III.2.1.e	Comparaison analytique numérique.....	57
III.2.2	Régime auto-pulsé.....	59
III.2.2.a	Résolution numérique	59
III.2.2.b	Résolution analytique.....	61
III.2.2.c	Détermination de la fréquence de pulsation.....	63
III.2.2.d	Comparaison numérique analytique.....	65
III.2.2.e	Validité de la solution analytique.....	67
III.3	Fréquence de pulsation propre et zone de prédictibilité	68
III.4	Comparaison analytique numérique des fréquences de pulsations.....	72
III.5	Expression analytique pour le champ électrique	76
III.5.1	Expression du champ électrique à l'ordre 3.....	76
III.5.2	Développement d'ordre supérieur.....	78
III.6	Conclusion	84
IV	Route vers le chaos: Scénario à dédoublement de période ou cascade sous-harmonique	85
IV.1	Dédoublement de période.....	85
IV.1.1	Résultats numériques	86
IV.1.2	Zone de dédoublement de période	90
IV.2	Zone de fonctionnement chaotique	96
IV.3	Expression du champ électrique	97
IV.4	Conclusion.....	99
	Conclusions et perspectives	100
A	Critère de Routh-Hurwitz	103
B	Notion de bifurcation	105
C	Publications	109
	Bibliographie	139

Introduction

L'émission laser sous forme d'oscillations pulsées a été observée dès la première démonstration de l'effet laser en 1960 par Maiman [1-2] dans le laboratoire Hughes Research Laboratory en Californie. Ce laser «à état solide» ayant comme milieu amplificateur un cristal en rubis pompé par des lampes flash, délivrait un signal pulsé avec un fond de bruit considérable. En faisant varier le pompage, ces pulsations persistaient pour certains niveaux alors que pour d'autres elles disparaissaient régulièrement sous forme de relaxations vers un état stationnaire stable.

Ce comportement avait initialement été attribué à l'origine stochastique de l'émission spontanée, mais les larges fluctuations que présentait l'intensité de sortie de certains systèmes dépassaient largement le niveau d'émission spontanée. Il a donc fallu trouver d'autres origines physiques à ce comportement intrigant. Nous savons maintenant que ces larges fluctuations, sous formes de pulses intenses, réguliers ou chaotiques, ont une origine déterministe et que le laser est un système dynamique pouvant exhiber une grande variété de comportements. Il est intéressant de noter l'évolution des diverses approches théoriques qui ont jalonné le cheminement des causes physiques initialement attribuées [3-5] à ces pulsations.

Statz et De Mars [6] avaient dès 1960 construit un modèle simple, celui des "rate equations" ou "équation cinétiques". Ce modèle, fondé sur un bilan énergétique de l'interaction rayonnement-matière, reproduit bien l'amortissement régulier des oscillations de relaxation mais ne peut prédire l'instabilité [7-8] qui se présente sous forme de pulsations permanentes [9-10]. Cela laissa supposer alors que ce comportement est dû au caractère pulsé des lampes flash. Mais cette hypothèse a été vite écartée suite aux observations expérimentales de Nelson et Boyle [9] d'un comportement pulsé pour le laser à rubis avec un pompage continu.

Ces résultats suggéraient une révision des concepts de base, plus précisément de considérer le laser comme un système dynamique fortement non linéaire. Restait à élaborer les contours d'un modèle théorique approprié [11-14].

Bien que les instabilités dans les Masers et les lasers avaient été observées dans les années soixante et que plusieurs études sur des modèles théoriques [15-26] avaient prédit numériquement des instabilités intrinsèques, la possibilité que le laser puisse engendrer un signal pulsé chaotique tel que l'avaient mentionnés Buley et Cummings [27] sur la base d'un modèle semi-classique avait été rapidement mise à l'écart du fait d'une grande restriction du

domaine d'applicabilité de ce modèle. Il a fallu attendre 1975, pour que les prédictions de Buley et Cummings trouvent une explication théorique consistante, grâce essentiellement aux travaux de Haken [28] qui démontrent de façon univoque l'équivalence mathématique entre les équations du laser et les équations de Lorenz [29] initialement conçues pour simplifier des modèles mathématiques complexes, notamment les équations de Navier Stokes décrivant les phénomènes de turbulence atmosphérique. C'est ainsi que le terme de chaos déterministe fait son apparition en physique des lasers, alors qu'auparavant ce type de fonctionnement chaotique était qualifié de "bruit sans intérêt" que l'on cherchait plutôt à éliminer. Depuis, les chercheurs ont trouvé dans les lasers un outil de base pour l'étude au laboratoire des diverses routes qui mènent vers le chaos et qui ont fait l'objet d'une production scientifique très riche, incluant de nombreux ouvrages à caractère scientifique et pédagogique [30-33].

La singularité des travaux d'Edward Lorenz [29,80] réside dans l'élaboration d'un modèle simple de faible dimension pouvant aboutir à des trajectoires complexes et engendrant une dynamique chaotique avec seulement trois variables d'état. L'utilisation de l'ordinateur est essentielle pour la résolution de ce système dont les solutions sont fortement sensibles aux conditions initiales. Ces solutions dépendent aussi de paramètres de contrôle caractéristiques de chaque système dynamique. Pour certaines valeurs de ces paramètres, le modèle de Lorenz avait, dès les premiers calculs, mené à des solutions turbulentes donnant la forme d'attracteur étrange dans l'espace des phases du système. Dès lors le terme de "chaos déterministe" est adopté faisant entendre que les interactions non linéaires peuvent, sans l'intervention d'aucun paramètre stochastique, conduire à l'imprédictibilité dans un cadre strictement déterministe : un petit changement dans les conditions initiales se traduisant, à long terme, par des trajectoires différentes. De ce fait, toute prévision est limitée dans le temps par la précision de l'information sur les conditions initiales et toute instabilité surgissant à partir de perturbations infinitésimales dégénère en structure étrangement organisée dans un espace conventionnel appelé espace des phases et construit à partir des variables dynamiques du système.

Suite à ces prémices, le domaine de la dynamique non linéaire connaît une grande explosion sur le plan scientifique (élaboration de modèles) et technique (ordinateur, calculs numériques). La dynamique non linéaire fait partie de la physique, de la chimie mais aussi des domaines aussi variés que les sciences humaines, la biologie ou encore l'économie.

Dans tout ce progrès, la physique des lasers a participé pour une grande part dans les bouleversements scientifiques qui en découlèrent, le laser ayant été reconnu comme dispositif expérimental propice aux études expérimentales à l'échelle du laboratoire.

Le modèle le plus simple du laser est celui d'un système monomode à élargissement homogène. Il est décrit par un système de trois équations différentielles analogues aux équations de Lorenz et que l'on désigne communément par modèle de Lorenz-Haken ou Laser-Lorenz. La simplicité de ce modèle n'enlève rien à la complexité des solutions instables qu'il contient, comme en témoignent le nombre incalculable de publications qui lui sont consacrées depuis plus de 30 ans. Par contre, bien que son étude numérique soit simple, son étude analytique a toujours été limitée à l'analyse de petits signaux, telles que l'analyse de stabilité linéaire, qui permet l'obtention d'informations sur les conditions d'émergence de solutions instables (seuil d'instabilité et condition de mauvaise cavité) notamment. De plus, les résultats de telles études se limitent à l'état transitoire qui caractérise la solution stationnaire perturbée. On ne peut donc en extraire la moindre information sur les solutions pulsées permanentes.

La théorie de Floquet permet néanmoins d'écrire les solutions périodiques émergeant, toujours de façon perturbative, du second seuil laser et de déduire leur stabilité. On relèvera sur le plan théorique les études entreprises par Zeghlache et Mandel[70,72], sur les équations Laser-Lorenz avec ou sans detuning (désaccord entre la fréquence de pompage et celle du laser), ainsi que les travaux de C.Z.Ning et H.Haken avec detuning [77,79]. Ces études ont été vérifiées expérimentalement par l'équipe de Carl Weiss [60,63]. [60,63].

Nadurcci et al.[38] ont aussi rapporté des solutions analytiques, au premier ordre pour le champ électrique, dans le domaine de fonctionnement stable ou instable du laser avec des taux de relaxation de l'inversion de population plus faibles par rapport aux paramètres utilisés par Lorenz.

Il est à noter que du point de vue Mathématiques pures, les équations de Lorenz constituent un Challenge répertorié par Smale [65,66] dans sa liste des quatorze problèmes qui constituent, selon lui, de sérieux défis aux Mathématiciens du 21^{ème}.

L'objet de cette thèse est de présenter une méthode analytique originale basée sur un développement en séries de Fourier, dont la troncature au troisième ordre permet l'obtention d'expressions analytiques adaptées aux solutions permanentes dans le régime périodique et quasi-périodique du système. En particulier, nous proposons une formule analytique qui permet l'évaluation directe des fréquences de ces solutions pulsées en termes des paramètres de contrôle du système dynamique. Cela conduit tout naturellement à la construction de

solutions analytiques avec une analogie frappante avec les solutions numériques. Ce type de solutions permet de délimiter la zone des paramètres de contrôle pour lesquels le système est prédictible de celles où l'imprédictibilité semble dominante.

Le premier chapitre de ce manuscrit est dédié à une étude qualitative de l'interaction rayonnement-matière pour un milieu atomique à deux niveaux d'énergie placé dans une cavité en anneau (unidirectionnel) dans le but de construire les équations du système Lorenz-Haken. On montre que ce système d'équations communément désigné par «équations de Maxwell-Bloch» décrit les trois classes de laser rencontrées dans les expériences.

Par une simple analyse de stabilité linéaire on démontre dans le chapitre II: i) que les lasers de classe B, qui sont décrits par les équations de bilan énergétique (système à deux degrés de liberté), ne peuvent fonctionner qu'en régime continu quel que soit le taux de pompage appliqué et quelles que soient les valeurs des vitesses de relaxation des variables dynamiques du système; ii) que les lasers de classe C possèdent un 3^{ème} degré de liberté (la polarisation du milieu) qui évolue avec une constante de temps comparable aux deux autres et dont les solutions en régime instable sont décrites par le système de Lorenz-Haken (système à trois degrés de liberté). L'interaction non-linéaire entre le champ laser, l'inversion de population et la polarisation donne naissance à un fonctionnement pulsé régulier ou erratique à partir d'un niveau de pompage appelé deuxième seuil laser ou seuil d'instabilité, le premier seuil étant celui de mise en route du laser (fonctionnement continu, en intensité, à la fréquence sélectionnée par la cavité, par ailleurs égale celle du milieu atomique si le désaccord en fréquence est nul).

Dans le troisième chapitre nous exposerons la procédure de résolution de ces équations afin de caractériser le régime auto-pulsé des lasers de classe C. Nous montrons qu'un développement des solutions en séries de Fourier des diverses variables conduit à une méthode itérative qui se contente de l'harmonique d'ordre trois pour l'expression du champ laser. Cette approche nous a permis pour la première fois de démontrer l'existence d'une fréquence propre au système laser dans un domaine de paramètres de contrôle où le champ électrique oscille périodiquement autour de zéro. Nous devons signaler que ce résultat n'a jamais été proposé auparavant dans aucune contribution scientifique ou ouvrage traitant de la théorie laser. Ces oscillations propres peuvent être obtenues pour un niveau de pompage bien défini. Grâce à notre approche, des expressions analytiques relatives aux fréquences de pulsations dans le domaine stable et instable du régime transitoire ou du régime permanent vont être déduites. La comparaison entre les valeurs données par ces expressions et celles obtenues par résolution numérique du système de Lorenz-Haken donnera un caractère

authentique à notre procédure analytique et déterminera les conditions de sa validité ainsi que les causes des écarts entre les résultats numériques et analytiques lorsqu'ils subsistent. Nous établirons à la fin de ce chapitre l'expression analytique du champ électrique lorsque ce dernier effectue des oscillations périodiques autour de zéro.

Nous proposons enfin, dans le chapitre IV de ce manuscrit, d'utiliser notre approche analytique afin de localiser la frontière entre la zone de pulsations régulières et celle où le laser exhibe un fonctionnement chaotique, un régime que le laser peut atteindre après une cascade sous harmonique passant d'un signal de période une à un signal de période 2 puis de période 4 ainsi de suite jusqu'à ce que le signal présente une évolution irrégulière dans le temps. Les résultats présentés dans ce dernier chapitre donnent une vue d'ensemble des solutions analytiques obtenues jusqu'ici tout en mettant en relief des pistes inexplorées qui dépassent le cadre de cette thèse et dont l'étude se doit d'être envisagée au-delà de la zone des paramètres de contrôles caractéristique des solutions périodiques, objet de nos travaux.

Chapitre I

Analyse self consistante de l'interaction rayonnement matière dans le laser monomode

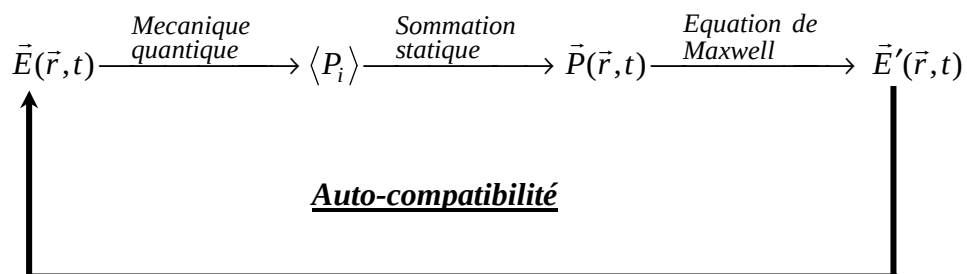
I.1 Equations du laser de Maxwell–Bloch

L'étude semi-classique de l'interaction rayonnement-matière entre un milieu amplificateur et le champ électrique d'une cavité résonante fait appel, d'une part à l'équation de Schrödinger pour décrire les transitions entre les niveaux d'énergie dans la matière et aux équations de Maxwell pour le rayonnement du champ laser oscillant dans la cavité.

L'évolution de la polarisation et de la population des différents niveaux du matériau sous l'influence d'un champ électromagnétique est obtenue par le formalisme de la mécanique quantique (équations matérielles). Tandis que la théorie classique de Maxwell étudie l'influence du matériau sur le rayonnement à partir de la polarisation du milieu, cette dernière apparaît comme un terme de source dans les équations de propagation des ondes électromagnétiques.

Par cette analyse on constate un couplage réciproque entre le champ électromagnétique et la polarisation. Le champ électrique induit dans le milieu une polarisation, qui constitue, elle-même, une source pour ce champ.

Ce couplage matière rayonnement se traduit par un schéma "self-consistant" illustré ci-dessous.



Cette approche semi-classique conduit à un système d'équations différentielles non linéaires qui couple les variables atomiques au champ laser et permet d'en décrire le comportement dynamique.

I.1.1 Equation pour le champ électrique

I.1.1.a Equations de Maxwell

Un milieu atomique peut être excité en lui fournissant une énergie suffisante pour que ses atomes soient portés aux niveaux d'énergie supérieurs, de durée de vie finie.

La désexcitation de ces atomes, qui se comportent comme des dipôles, s'accompagne d'émission d'un rayonnement électromagnétique caractérisé par un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ obéissant aux équations de Maxwell :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{I.1}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 (\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}) \quad \text{I.2}$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \text{div} \vec{P}) \quad \text{I.3}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{I.4}$$

Considérant une onde électromagnétique qui se propage dans un milieu homogène et isotrope, les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{P}$ sont colinéaires. Etant donné que dans une cavité laser la propagation du champ électrique se fait le long de l'axe de la cavité, on négligera la divergence du faisceau. Cela revient à considérer un champ électrique transversal et à poser

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad \text{I.5}$$

Les pertes dans le milieu et vers l'extérieur de la cavité sont représentées par $\vec{j}$, ces pertes sont uniformément distribuées et sont caractérisées par une conductivité σ qui lie $\vec{j}$ à $\vec{E}$ selon la loi d'ohm

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{I.6}$$

Dans le but d'obtenir l'équation de propagation de l'onde électromagnétique on élimine le champ magnétique $\vec{B}$ selon la procédure habituelle en calculant le rotationnel de la première équation I.1 et en utilisant l'identité :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \quad \text{I.7}$$

Compte tenu de I.5, le second membre de cette équation se réduit au laplacien $\Delta \vec{E}$ selon l'équation I.2:

$$\Delta \vec{E} = -\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \vec{B}) \quad \text{I.8}$$

$$= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad \text{I.9}$$

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{I.10}$$

$$= \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad \text{I.11}$$

et l'équation de propagation pour le champ électrique avec second membre s'écrit :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad \text{I.12}$$

Avec

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

L'équation I.11 représente l'équation de propagation d'une onde qui se propage à la vitesse c , modifiée en chaque point par la polarisation du milieu traversé. Selon I.12 $\vec{P}$ apparaît comme une source pour le champ électrique.

I.1.1.b Champ dans une cavité résonante

Dans un résonateur vide (cavité résonante vide d'atomes) le champ électrique de l'onde se propageant à l'intérieur se décompose sur la base des vecteurs orthogonaux $\vec{u}_\lambda(\vec{x})$ (modes propres de la cavité) et prend la forme suivante:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \sum_{\lambda} E_{\lambda}(t) \vec{u}_{\lambda}(\vec{x}) \quad \text{I.13}$$

reflétant ainsi l'établissement d'un système d'ondes stationnaires en accord de phase dans la cavité.

Les vecteurs $\vec{u}_\lambda(\vec{x})$ vérifient l'équation d'onde:

$$\Delta \vec{u}_\lambda(\vec{x}) = -k_{\lambda}^2 \vec{u}_\lambda(\vec{x}) = -\frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2} \vec{u}_\lambda(\vec{x}) \quad \text{I.14}$$

En insérant I.13 et I.14 dans l'équation I.12, multipliant le résultat obtenu par $\vec{u}_\lambda(\vec{x})$ et enfin en intégrant sur le volume de la cavité on trouve:

$$\omega_{\lambda}^2 E_{\lambda} + \frac{\partial^2 E_{\lambda}}{\partial t^2} + \sum_{\lambda'} \frac{\sigma_{\lambda\lambda'}}{\epsilon_0} \frac{\partial E_{\lambda'}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 P_{\lambda}}{\partial t^2} \quad \text{I.15}$$

L'orthonormalité de la base a été utilisée selon :

$$\delta_{\lambda\lambda'} = \int \vec{u}_{\lambda}(\vec{x}) \vec{u}_{\lambda'}(\vec{x}) dV \quad \text{I.16}$$

$\delta_{\lambda\lambda'}$ étant le symbole de Kronecker, ainsi que les notations suivantes:

$$\sigma_{\lambda\lambda'} = \int \vec{u}_{\lambda} \sigma \vec{u}_{\lambda'} dV \quad \text{I.17}$$

et

$$\frac{\partial^2 P_{\lambda}}{\partial t^2} = \int \vec{u}_{\lambda} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\lambda}}{\partial t^2} dV \quad \text{I.18}$$

Si on suppose que les pertes sont uniformément réparties sur les modes donc σ indépendant de $\vec{x}$ alors:

$$\sigma_{\lambda\lambda'} = \sigma \int \vec{u}_{\lambda} \vec{u}_{\lambda'} dV = \sigma \delta_{\lambda\lambda'} \quad \text{I.19}$$

et l'équation de propagation I.12 prend la forme pour chaque composante du champ:

$$\omega_{\lambda}^2 E_{\lambda} + \frac{\partial^2 E_{\lambda}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{\partial E_{\lambda}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 P_{\lambda}}{\partial t^2} \quad \text{I.20}$$

I.1.2 Equations décrivant la matière

La polarisation qui apparaît dans le second membre de l'équation I.12 n'est pas une source fixe, puisque le champ électrique $\vec{E}$ qui se propage engendre à son tour une polarisation dans le milieu. On se propose dans ce paragraphe de calculer cette polarisation via l'étude de l'interaction du champ électrique d'une onde classique et d'un atome à deux niveaux d'énergie, décrit de façon quantique par sa fonction d'onde obtenue par l'équation de Schrödinger.

I.1.2.a Equations pour la matière en absence de champ électrique

Les fonctions propres et les énergies correspondantes aux états occupés par l'atome à l'équilibre thermodynamique sont obtenues par la résolution de l'équation de Schrödinger:

$$H_0 \phi_i = E_i \phi_i \quad i = 1, 2 \quad \text{I.21}$$

H_0 : l'Hamiltonien de l'atome

E_i : niveau d'énergie occupé par l'atome.

φ_i est la fonction propre de l'état «i» ayant l'expression ci dessous après résolution de l'équation I.21

$$\varphi_i(\vec{x}, t) = \exp\left(-j \frac{E_i}{\hbar} t\right) \varphi_i(\vec{x}) \quad i=1,2 \text{ et } j^2 = -1 \quad \text{I.22}$$

Explicitant la dépendance temporelle.

I.1.2.b Interaction rayonnement matière

Dans l'hypothèse (tout à fait réaliste) où l'interaction de l'onde électromagnétique avec l'atome ne met en jeu que deux niveaux d'énergies et dans le cas où la fréquence d'oscillation du champ laser est proche de la fréquence de transition atomique entre les deux niveaux de l'atome (quasi-résonance), la fonction propre ψ de l'Hamiltonien H s'écrit sous forme de combinaison linéaire des états propres φ_i

$$\psi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \quad \text{I.23}$$

obéissant à l'équation d'évolution:

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{I.24}$$

$c_1(t)$ et $c_2(t)$ sont des coefficients dépendant du temps vérifiant la condition de normalisation

$$c_1^* c_1 + c_2^* c_2 = 1 \quad \text{I.25}$$

L'Hamiltonien H du système se compose de H_0 et de H^I qui schématise l'interaction du champ électrique et du dipôle atomique:

$$H = H_0 + H^I \quad \text{I.26}$$

Dans le cadre de l'approximation dipolaire électrique H^I est donné par

$$H^I = -\vec{p} \bullet \vec{E} \quad \text{I.27}$$

tel que :

$$\vec{p} = -e \vec{x} \quad \text{I.28}$$

$\vec{p}$: l'opérateur vecteur moment dipolaire atomique.

$\vec{x}$: déplacement de l'oscillateur local (déplacement de l'atome par rapport à sa position d'équilibre).

En reportant l'équation I.23 dans I.24 et après quelques transformations adéquates on aboutit à deux équations différentielles couplées à deux fonctions inconnues $c_1(t)$ et $c_2(t)$:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} E(t) H_{12}^I c_2 \quad \text{I.29}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} E(t) H_{21}^I c_1 \quad \text{I.30}$$

où

$$H_{mn}^I = \int \varphi_m^*(\vec{x}) e \vec{x} \varphi_n(\vec{x}) dV \exp(i\omega_{mn}t) \quad \text{I.31}$$

$$\omega_{mn} = \frac{1}{\hbar} (E_m - E_n) \quad \text{I.32}$$

L'atome ne possédant pas de moment dipolaire permanent on admet que:

$$H_{11}^I = H_{22}^I = 0 \quad \text{I.33}$$

La résolution des équations I.29 et I.30 détermine les amplitudes $c_1(t)$ et $c_2(t)$ qui nous permettront de calculer le moment dipolaire $\vec{p}$ de l'atome

$$\vec{p} = \int \psi^*(\vec{x}, t) (-e \vec{x}) \psi(\vec{x}, t) dV \quad (\text{valeur moyenne}) \quad \text{I.34}$$

Pour simplifier le traitement des équations on effectue la décomposition suivante:

$$\vec{p} = \vec{p}^+ + \vec{p}^- \quad \text{I.35}$$

où on adopte les relations suivantes:

$$\vec{p}^+ = \varphi_{12} \vec{\vartheta}_{12} \quad \text{I.36}$$

$$\vec{p}^- = \vec{p}^{+*} = \varphi_{21} \vec{\vartheta}_{21} \quad \text{I.37}$$

$$\varphi_{12} = \varphi_{21}^* = -c_1^* c_2 \exp(-i\bar{\omega}t) \quad \text{I.38}$$

$$\bar{\omega} = \omega_{21} = \frac{1}{\hbar} (E_2 - E_1) \quad \text{I.39}$$

$$\vec{\vartheta}_{mn} = e \vec{x}_{mn} \quad \vec{x}_{mn} = \int \varphi_m^* \vec{x} \varphi_n dV \quad \text{met } n = 1, 2 \quad \text{I.40}$$

L'évolution temporelle de $\bar{p}$ se ramène à l'étude de l'évolution de φ_{12} qui s'obtient en dérivant la relation I.38

$$\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial t} = -i\bar{\omega}\varphi_{12} - c_1^* \frac{\partial c_2}{\partial t} \exp(-i\bar{\omega}t) - c_2 \frac{\partial c_1^*}{\partial t} \exp(-i\bar{\omega}t) \quad \text{I.41}$$

En introduisant les équations suivantes dans I.41

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \bar{E}(t) \bar{\vartheta}_{12} \exp(-i\bar{\omega}t) c_2 \quad \text{I.42}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \bar{E}(t) \bar{\vartheta}_{21} \exp(i\bar{\omega}t) c_1 \quad \text{I.43}$$

on aura pour I.41

$$\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial t} = -i\bar{\omega}\varphi_{12} - \frac{1}{i\hbar} \bar{E}(t) \bar{\vartheta}_{21} |c_1|^2 + \frac{1}{i\hbar} \bar{E}(t) \bar{\vartheta}_{21} |c_2|^2 \quad \text{I.44}$$

$$= -i\bar{\omega}\varphi_{12} + \frac{1}{i\hbar} \bar{E}(t) \bar{\vartheta}_{21} \left[|c_2|^2 - |c_1|^2 \right] \quad \text{I.45}$$

soit encore :

$$\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial t} = -i\bar{\omega}\varphi_{12} + \frac{1}{i\hbar} \bar{E}(t) \bar{\vartheta}_{21} d(t) \quad \text{I.46}$$

avec
$$d(t) = |c_2|^2 - |c_1|^2 \quad \text{I.47}$$

$d(t)$ est la différence entre nombres d'occupation du niveau supérieur et du niveau inférieur de l'atome. Elle représente l'inversion de population dans le milieu laser. Cette grandeur atomique $d(t)$ indique que l'énergie va être absorbée si l'atome est dans son état inférieur et émise dans le cas où il est dans son état supérieur. En première remarque on voit bien apparaître dans l'équation de mouvement I.46 le terme $E(t)d(t)$ caractéristique de l'interaction atome-champ. Ce terme de couplage véhicule une non linéarité qui est la base de la dynamique du fonctionnement des lasers.

Pour une description complète de l'évolution de la polarisation atomique, l'effet de l'environnement est pris en considération en ajoutant d'une manière phénoménologique à l'équation I.46 un terme de relaxation (désexcitation de l'atome vers le niveau inférieur) dû aux interactions collisionnelles que subit l'atome avec les autres atomes dans le cas d'un gaz ou les phonons dans le cas d'un solide, constituant une perte pour le processus de polarisation. Ceci nous mène à

$$\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial t} = -i\bar{\omega}\varphi_{12} - \wp_{\perp}\varphi_{12} + \frac{1}{i\hbar}\bar{E}(t)\bar{\vartheta}_{21}d(t) \quad \text{I.48}$$

On obtient l'évolution du moment dipolaire en multipliant I.49 par le vecteur $\bar{\vartheta}_{21}$:

$$\frac{\partial \bar{p}^+}{\partial t} = -(i\bar{\omega} + \wp_{\perp})\bar{p}^+ + \frac{|\bar{\vartheta}_{12}|^2}{i\hbar}\bar{E}(t)d(t) \quad \text{I.49}$$

Arrivés à ce stade où on a décrit la matière par l'évolution temporelle de son moment dipolaire atomique il est judicieux de rajouter l'évolution de l'inversion de population qui génère l'amplification de l'onde dans le cas des lasers. Pour cela on va dériver l'équation I.47 par rapport au temps :

$$\frac{\partial d}{\partial t} = c_2^* \frac{\partial c_2}{\partial t} + c_2 \frac{\partial c_2^*}{\partial t} - c_1^* \frac{\partial c_1}{\partial t} - c_1 \frac{\partial c_1^*}{\partial t} \quad \text{I.50}$$

$$= \frac{2}{i\hbar}\bar{E}(t)[\varphi_{12}\bar{\vartheta}_{12} - \varphi_{21}\bar{\vartheta}_{21}] \quad \text{I.51}$$

L'influence du milieu où baigne notre atome se traduit par la désexcitation de celui-ci vers un état stationnaire d_0 . Cet effet va être rajouté aussi d'une manière phénoménologique à l'équation I.51

$$\frac{\partial d}{\partial t} = +\wp_{//}[d_0 - d(t)] + \frac{2}{i\hbar}\bar{E}(t)[\varphi_{12}\bar{\vartheta}_{12} - \varphi_{21}\bar{\vartheta}_{21}] \quad \text{I.52}$$

$$\frac{\partial d}{\partial t} = +\wp_{//}[d_0 - d(t)] + \frac{2}{i\hbar}\bar{E}(t)[\bar{p}^+ - \bar{p}^-] \quad \text{I.53}$$

Les équations I.49 et I.53 dénommées les équations de Bloch (optiques) se rapportent à un seul atome qu'on pourra distinguer individuellement des autres par un indice μ et qui se trouve à la position $\bar{x}_{\mu}$. Suite à cette remarque on aura pour I.50 et I.54

$$\frac{\partial d_{\mu}}{\partial t} = +\wp_{//}[d_0 - d_{\mu}(t)] + \frac{2}{i\hbar}\bar{E}(\bar{x}_{\mu}, t)[\bar{p}_{\mu}^+ - \bar{p}_{\mu}^-] \quad \text{I.54}$$

$$\frac{\partial \bar{p}_{\mu}^+}{\partial t} = -(i\bar{\omega} + \wp_{\perp})\bar{p}_{\mu}^+ + \frac{|\bar{\vartheta}_{12}|^2}{i\hbar}\bar{E}(\bar{x}_{\mu}, t)d_{\mu}(t) \quad \text{I.55}$$

Avant d'entreprendre toute autre procédure de calcul, résumons les résultats importants présentés :

- L'effet du milieu atomique sur la propagation du champ laser dans une cavité est pris en compte par la relation I.20

- La matière irradiée par un champ laser évolue selon les relations I.54 et I.55

En conséquence on a trois équations différentielles couplées non linéaires pour décrire le fonctionnement des systèmes lasers:

$$\frac{\partial d_\mu}{\partial t} = +\wp_{//} [d_0 - d_\mu(t)] + \frac{2}{i\hbar} \bar{E}(\bar{x}_\mu, t) [\bar{p}_\mu^+ - \bar{p}_\mu^-] \quad \text{I.56}$$

$$\frac{\partial \bar{p}_\mu^+}{\partial t} = -(i\bar{\omega} + \wp_\perp) \bar{p}_\mu^+ + \frac{|\bar{\vartheta}_{12}|^2}{i\hbar} \bar{E}(\bar{x}_\mu, t) d_\mu(t) \quad \text{I.57}$$

$$\omega_\lambda^2 E_\lambda + \frac{\partial^2 E_\lambda}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 P_\lambda}{\partial t^2} \quad \text{I.58}$$

Pour faciliter le traitement de ces équations on va appliquer deux approximations: i) l'approximation du champ tournant et ii) celle de l'enveloppe lentement variable. Il nous paraît aussi fondamental de signaler que ces développements sont exclusivement attribués au laser unidirectionnel dans une cavité en anneau, car le traitement du champ dans une cavité résonante est plus complexe.

I.1.2.c Approximation du champ tournant

La polarisation atomique selon l'équation I.36 et I.38 oscille à la fréquence $\bar{\omega}$, il est tout à fait justifiable de considérer que le champ dans la cavité en anneau figurant dans l'équation I.57 comporte deux types de composantes, «tournant» en sens inverse.

$$E_\lambda(t) = E_\lambda^+(t) + E_\lambda^-(t) = A_\lambda^+(t) \exp(-i\omega_\lambda t) + A_\lambda^-(t) \exp(i\omega_\lambda t) \quad \text{I.59}$$

Où les fréquences ω_λ sont celles longitudinales de la cavité, vide d'atomes

En introduisant la relation I.14 dans les équations I.57 et I.58 on aura:

$$\frac{\partial d_\mu}{\partial t} = +\wp_{//} [d_0 - d_\mu(t)] + \frac{2}{i\hbar} \left[\sum_\lambda E_\lambda(t) \bar{u}_\lambda(\bar{x}_\mu) \bar{p}_\mu^+ - \sum_\lambda E_\lambda(t) \bar{u}_\lambda(\bar{x}_\mu) \bar{p}_\mu^- \right] \quad \text{I.60}$$

$$\frac{\partial \bar{p}_\mu^+}{\partial t} = -(i\bar{\omega} + \wp_\perp) \bar{p}_\mu^+ + \frac{|\bar{\vartheta}_{12}|^2}{i\hbar} \sum_\lambda E_\lambda(t) \bar{u}_\lambda(\bar{x}_\mu) d_\mu(t) \quad \text{I.61}$$

Compte tenu de I.59 et I.60 il résulte les relations de proportionnalité suivantes:

$$\begin{aligned}\varphi_{12}E^+_{\lambda} &\propto \exp[-i(\bar{\omega} + \omega_{\lambda})t] & \varphi_{21}E^+_{\lambda} &\propto \exp[i(\bar{\omega} - \omega_{\lambda})t] \\ \varphi_{21}E^-_{\lambda} &\propto \exp[i(\bar{\omega} + \omega_{\lambda})t] & \varphi_{12}E^-_{\lambda} &\propto \exp[-i(\bar{\omega} - \omega_{\lambda})t]\end{aligned}$$

Les termes en $(\bar{\omega} + \omega_{\lambda})$ oscillent rapidement par rapport aux termes en $(\bar{\omega} - \omega_{\lambda})$ qui ne changent appréciablement pas pendant la période $\frac{2\pi}{\omega}$ par conséquent ils s'annulent en moyenne et peuvent être négligés. Ceci revient à ne considérer que les composantes des dipôles et du champ tournant dans le même sens (d'où l'appellation de champ tournant) tout en négligeant les composantes tournant en sens inverse. On ne retiendra donc, dans nos équations que les termes croisés suivants: $E^+ \bar{p}_{\mu}^-$ et $E^- \bar{p}_{\mu}^+$ ce qui revient:

- pour l'atome

$$\frac{\partial d_{\mu}}{\partial t} = +\wp_{//} [d_0 - d_{\mu}(t)] + \frac{2}{i\hbar} \left[\sum_{\lambda} \bar{u}_{\lambda}(\bar{x}_{\mu}) E_{\lambda}^-(t) \bar{p}_{\mu}^+ - \sum_{\lambda} \bar{u}_{\lambda}(\bar{x}_{\mu}) E_{\lambda}^+(t) \bar{p}_{\mu}^- \right] \quad \text{I.62}$$

$$\frac{\partial \bar{p}_{\mu}^+}{\partial t} = -(i\bar{\omega} + \wp_{\perp}) \bar{p}_{\mu}^+ + \frac{|\bar{\partial}_{12}|^2 d_{\mu}(t)}{i\hbar} \sum_{\lambda} E_{\lambda}^+(t) \bar{u}_{\lambda}(\bar{x}_{\mu}) \quad \text{I.63}$$

- pour l'onde

$$\omega_{\lambda}^2 E_{\lambda}^{\pm} + \frac{\partial^2 E_{\lambda}^{\pm}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{\partial E_{\lambda}^{\pm}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 P_{\lambda}^{\pm}}{\partial t^2} \quad \text{I.64}$$

I.1.2.d Approximation de l'enveloppe lentement variable

Conformément à l'équation I.59 les grandeurs $A_{\lambda}^{\pm}$ sont les enveloppes complexes associés à $\bar{E}_{\lambda}$. Ces enveloppes varient moins rapidement dans le temps par rapport à l'exponentielle complexe en ω_{λ} (fréquences optiques). Ceci permet d'introduire une échelle de temps plus lente associée à l'évolution temporelle de l'amplitude du champ (origine : le matériau).

Ceci se traduit par les inégalités:

$$\left| \frac{dA_{\lambda}^{\pm}}{dt} \right| \ll |\omega_{\lambda} A_{\lambda}^{\pm}| \ll \omega_{\lambda}^2 |A_{\lambda}^{\pm}| \quad \text{I.65}$$

En dérivant $\bar{E}_{\lambda}^+$ par rapport au temps:

$$\frac{dE_{\lambda}^{+}}{dt} = (-i\omega_{\lambda}A_{\lambda}^{+} + \frac{dA_{\lambda}^{+}}{dt})\exp(-i\omega_{\lambda}t) \quad \text{I.66}$$

$$\approx -i\omega_{\lambda}A_{\lambda}^{+}\exp(-i\omega_{\lambda}t) \quad \text{I.67}$$

$$\frac{dE_{\lambda}^{+}}{dt} \approx -i\omega_{\lambda}E_{\lambda}^{+} \quad \text{I.68}$$

La dérivée seconde de E_{λ}^{+} donne:

$$\frac{d^2E_{\lambda}^{+}}{dt^2} = \left[-\omega_{\lambda}^2 A_{\lambda}^{+} - 2i\omega_{\lambda} \frac{dA_{\lambda}^{+}}{dt} + \frac{d^2A_{\lambda}^{+}}{dt^2} \right] \exp(-i\omega_{\lambda}t) \quad \text{I.69}$$

$$\approx \left[-\omega_{\lambda}^2 A_{\lambda}^{+} - 2i\omega_{\lambda} \frac{dA_{\lambda}^{+}}{dt} \right] \exp(-i\omega_{\lambda}t) \quad \text{I.70}$$

$$\omega_{\lambda}^2 E_{\lambda}^{+} + \frac{d^2E_{\lambda}^{+}}{dt^2} \approx -2i\omega_{\lambda} \frac{dA_{\lambda}^{+}}{dt} \exp(-i\omega_{\lambda}t) \quad \text{I.71}$$

à partir de l'expression de $\frac{dA_{\lambda}^{+}}{dt}$ donnée par l'équation I.66 on a :

$$\omega_{\lambda}^2 E_{\lambda}^{+} + \frac{d^2E_{\lambda}^{+}}{dt^2} \approx -2i\omega_{\lambda} \left(\frac{dE_{\lambda}^{+}}{dt} + i\omega_{\lambda} E_{\lambda}^{+} \right) \quad \text{I.72}$$

Le membre de gauche de l'équation I.64 se ramène à

$$\omega_{\lambda}^2 E_{\lambda}^{\pm} + \frac{d^2E_{\lambda}^{\pm}}{dt^2} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{dE_{\lambda}^{\pm}}{dt} = -2i\omega_{\lambda} \left(\frac{dE_{\lambda}^{\pm}}{dt} + i\omega_{\lambda} E_{\lambda}^{\pm} \right) - i\omega_{\lambda} \frac{\sigma}{\epsilon_0} E_{\lambda}^{\pm} \quad \text{I.73}$$

En appliquant la même procédure pour la polarisation on trouve:

$$\frac{\partial^2 P_{\lambda}^{\pm}}{\partial t^2} \approx -\bar{\omega}^2 P_{\lambda}^{\pm} \quad \text{I.74}$$

Ce qui permet de récrire l'équation I.20

$$-2i\omega_{\lambda} \left(\frac{\partial E_{\lambda}^{\pm}}{\partial t} + i\omega_{\lambda} E_{\lambda}^{\pm} \right) - \frac{\sigma}{\epsilon_0} i\omega_{\lambda} E_{\lambda}^{\pm} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 P_{\lambda}^{\pm}}{\partial t^2} \quad \text{I.75}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial E_{\lambda}^{\pm}}{\partial t} + (i\omega_{\lambda} + k_{\lambda}) E_{\lambda}^{\pm} = \frac{\bar{\omega}}{2\epsilon_0} P_{\lambda}^{\pm} \quad \text{I.76}$$

$$\text{avec} \quad k_{\lambda} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

I.1.3 Traitement macroscopique du laser unidirectionnel

Les équations I.62 et I.63 décrivent l'interaction entre le champ laser et les variables atomiques du milieu. Il reste maintenant à les réécrire à l'échelle macroscopique compte tenu des relations :

$$\vec{P} = \sum_{\mu} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\mu}) \vec{p}_{\mu} = \vec{P}^{+} + \vec{P}^{-} \quad \text{I.77}$$

$$= \sum_{\mu} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\mu}) (\vec{p}_{\mu}^{+} + \vec{p}_{\mu}^{-}) \quad \text{I.78}$$

$$D(\vec{x}_{\mu}, t) = \sum_{\mu} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\mu}) d_{\mu}(t) \quad \text{I.79}$$

$\delta(\vec{x} - \vec{x}_{\mu})$ est la fonction delta usuelle, définie par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\mu}) = 1 & \vec{x} = \vec{x}_{\mu} \\ \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\mu}) = 0 & \vec{x} \neq \vec{x}_{\mu} \end{array} \right\} \quad \text{I.80}$$

On obtient pour la matière et le champ (relations I.62, I.63 et I.12) :

$$\frac{\partial D(\vec{x}, t)}{\partial t} = +\wp_{//} [D_0 - D] + \frac{2}{i\hbar} \vec{E}(\vec{x}, t) [\vec{P}^{+} - \vec{P}^{-}] \quad \text{I.81}$$

$$\frac{\partial \vec{P}^{\pm}}{\partial t} = -(i\omega + \wp_{\perp}) \vec{P}^{\pm} \pm \frac{|\vec{v}_{12}|^2}{i\hbar} \vec{E}(\vec{x}, t) D \quad \text{I.82}$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 (\vec{P}^{+} + \vec{P}^{-})}{\partial t^2} \quad \text{I.83}$$

Ce système (I.81, I.82 et I.83) est constitué de cinq équations différentielles réelles. L'étude analytique et numérique seront plus aisées moyennant les deux approximations enveloppe lentement variable et approximation du champ tournant.

I.1.4 Equations finales

Notre dernière étape de calculs consiste à simplifier les équations I.81, I.82 et I.83 en appliquant les deux approximations développées dans les paragraphes I.1.2.c et I.1.2.d à l'équation pour le champ d'abord puis celles pour la matière.

Commençons d'abord par le membre de gauche de la relation I.83

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}^{+}(\vec{x}, t) + \vec{E}^{-}(\vec{x}, t) \quad \text{I.84}$$

$$= \vec{E}_0^+ (\vec{x}, t) \exp i(\vec{k}\vec{x} - \omega t) + \vec{E}_0^- (\vec{x}, t) \exp -i(\vec{k}\vec{x} - \omega t) \quad \text{I.85}$$

$$\Delta \vec{E}^+ = \exp i(\vec{k}\vec{x} - \omega t) \left[-k^2 \vec{E}_0^+ + 2i(\vec{k}\vec{\nabla}) \vec{E}_0^+ + \Delta \vec{E}_0^+ \right] \quad \text{I.86}$$

$$- \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}^+}{\partial t^2} = \exp i(\vec{k}\vec{x} - \omega t) \left[\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_0^+ + \frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_0^+}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_0^+}{\partial t^2} \right] \quad \text{I.87}$$

$$- \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}^+}{\partial t} = \exp i(\vec{k}\vec{x} - \omega t) \mu_0 \sigma i \omega \vec{E}_0^+ \quad \text{I.88}$$

$$\Delta \vec{E}^+ - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}^+}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}^+}{\partial t} = \exp i(\vec{k}\vec{x} - \omega t) \left[\cancel{-k^2 \vec{E}_0^+} + 2i(\vec{k}\vec{\nabla}) \vec{E}_0^+ + \Delta \vec{E}_0^+ + \cancel{\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_0^+} + \frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_0^+}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_0^+}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma i \omega \vec{E}_0^+ \right]$$

$$\text{avec } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\Delta \vec{E}^+ - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}^+}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}^+}{\partial t} = \exp i(\vec{k}\vec{x} - \omega t) \left[+ 2i(\vec{k}\vec{\nabla}) \vec{E}_0^+ + \Delta \vec{E}_0^+ + \frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_0^+}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_0^+}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma i \omega \vec{E}_0^+ \right] \quad \text{I.89}$$

L'approximation de l'enveloppe lentement variable revient à négliger les variations par rapport à x et à t des termes du second ordre en faveur des termes du premier ordre on aura ainsi:

$$\Delta \vec{E}^+ - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}^+}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}^+}{\partial t} \approx \exp i(\vec{k}\vec{x} - \omega t) \left[+ 2i(\vec{k}\vec{\nabla}) \vec{E}_0^+ + \frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_0^+}{\partial t} + \mu_0 \sigma i \omega \vec{E}_0^+ \right] \quad \text{I.90}$$

Le vecteur nombre d'onde $\vec{k} = k \vec{e}_k$ où $\vec{e}_k$: vecteur unitaire de la direction de polarisation du champ.

On opère d'une façon similaire avec le second membre de l'équation de propagation pour avoir:

$$\vec{P}^\pm = \exp i(\vec{k}\vec{x} - \omega t) \vec{P}_0^\pm (\vec{x}, t) \quad \text{I.91}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{P}^\pm}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{P}_0^\pm \exp i(kx - \omega t) \quad \text{I.92}$$

L'équation de propagation se réécrit :

$$\exp i(\vec{k}\vec{x} - \omega t) \left[+ 2i(\vec{k}\vec{\bar{V}})\vec{E}_0^+ + \frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_0^+}{\partial t} + \mu_0 \sigma i \omega \vec{E}_0^+ \right] = -\mu_0 \bar{\omega}^2 \vec{P}_0^+ \exp i(\vec{k}\vec{x} - \bar{\omega} t) \quad \text{I.93}$$

avec $\omega \approx \bar{\omega}$ $k = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ et $\frac{1}{\varepsilon_0} = c^2 \mu_0$

$$+ 2i(\vec{k}\vec{\bar{V}})\vec{E}_0^+ + \frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_0^+}{\partial t} + \mu_0 \sigma i \omega \vec{E}_0^+ = -\mu_0 \bar{\omega}^2 \vec{P}_0^+ \quad \text{I.94}$$

$$+ 2ik(\vec{e}_k \vec{\bar{V}})\vec{E}_0^+ + \frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_0^+}{\partial t} + \mu_0 \sigma i \omega \vec{E}_0^+ = -\mu_0 \bar{\omega}^2 \vec{P}_0^+ \quad \text{I.95}$$

$$c(\vec{e}_k \vec{\bar{V}})\vec{E}_0^+ + \frac{\partial \vec{E}_0^+}{\partial t} + k \vec{E}_0^+ = i \frac{\bar{\omega}}{2\varepsilon_0} \vec{P}_0^+ \quad \text{I.96}$$

Avec l'approximation du champ tournant l'équation de mouvement de l'inversion de population I.81 revient à ne garder que les termes croisés $E^+ P^-$ et $E^- P^+$

On aura:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \wp(D_0 - D) + \frac{2}{i\hbar} [E^- P^+ - E^+ P^-] \quad \text{I.97}$$

avec $D_0 = \sum_{\mu} d_0 = Nd_0$ I.98

En effectuant la même chose pour l'équation I.82 avec l'approximation champ tournant:

$$\frac{\partial \vec{P}_0^+}{\partial t} = (i\omega - i\bar{\omega} - \wp_{\perp}) \vec{P}_0^+ + \frac{|\wp_{12}|^2}{i\hbar} \vec{E}_0^+ D \quad \text{I.99}$$

Afin d'alléger les calculs nous nous (intéressons) plaçons dans ce qui suit dans le cas résonant ($\omega = \bar{\omega}$). (Ceci n'affecte en rien la description et la généralisation au cas non résonant et ne pose pas de difficultés de principe)

Pour simplifier la forme du modèle, les équations I.96, I.97 et I.99 vont être normalisées par rapport à l'état stationnaire de chaque variable, obtenue en annulant les membres de gauche de ces équations:

$$E_s^+ = -\frac{i\bar{\omega}}{2\varepsilon_0 k} P_s^+ \quad \text{I.100}$$

$$D_s = \frac{2\varepsilon_0 k \hbar \wp_{\perp}}{\bar{\omega} |\wp_{12}|^2} \quad \text{I.101}$$

$$E_s^+ E_s^- = \frac{\hbar^2 \wp_{\perp} \wp_{\parallel}}{4 |\bar{\vartheta}_{12}|^2} \left(\frac{D_0}{D_s} - 1 \right) \quad \text{I.102}$$

En introduisant les variables sans dimension suivantes :

$$E = \frac{E_0^+}{E_s^+}, \quad P = \frac{P_0^+}{P_s^+}, \quad D \rightarrow \frac{D}{D_s} \quad \text{avec} \quad r = \frac{D_0}{D_s} - 1 \quad (\text{le taux de pompage})$$

on aura:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + k \right) E(x, t) = k P(x, t) \quad \text{I.103.a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \wp_{\perp} \right) P(x, t) = \wp_{\perp} E(x, t) D(x, t) \quad \text{I.103.b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \wp_{\parallel} \right) D(x, t) = \wp_{\parallel} (1 + r) - \frac{\wp_{\parallel} r}{2} \left[E^*(x, t) P(x, t) + E(x, t) P^*(x, t) \right] \quad \text{I.103.c}$$

Dans le cas d'un laser monomode longitudinal le terme $\frac{\partial E}{\partial x}$ est identiquement nul (on extrait la partie «propagation» par une séparation de variables du type $E(x, t) = E(x) E(t)$ avec $E(x) = \exp(-ik_x x)$ par exemple, où x est la variable qui décrit la propagation dans la cavité) ceci donne:

$$\frac{d}{dt} E(t) = -k E(t) + k P(t) \quad \text{I.104.a}$$

$$\frac{d}{dt} P(t) = -\wp_{\perp} P(t) + \wp_{\perp} E(t) D(t) \quad \text{I.104.b}$$

$$\frac{d}{dt} D(t) = -\wp_{\parallel} D(t) + \wp_{\parallel} (r + 1) - \frac{\wp_{\parallel} r}{2} \left[E^*(t) P(t) + E(t) P^*(t) \right] \quad \text{I.104.c}$$

Pour écrire ces équations, on suppose que le champ laser est résonant avec la transition atomique. Dans ce cas on peut prendre le champ électrique et la polarisation réels sans perte de généralité [34] et on obtient le système différentiel qui gouverne la dynamique du laser monomode dans une cavité unidirectionnelle (en anneau):

$$\frac{d}{dt} E(t) = -k E(t) + k P(t) \quad \text{I.105.a}$$

$$\frac{d}{dt} P(t) = -\wp_{\perp} P(t) + \wp_{\perp} E(t) D(t) \quad \text{I.105.b}$$

$$\frac{d}{dt} D(t) = -\wp_{\parallel} D(t) + \wp_{\parallel} (r + 1) - \wp_{\parallel} r E(t) P(t) \quad \text{I.105.c}$$

En plus des solutions stationnaires non oscillantes ou triviales:

$$E_s = 0 \quad \text{I.106.a}$$

$$P_s = 0 \quad \text{I.106.b}$$

$$D_s = r + 1 \quad \text{I.106.c}$$

le système I.105 possède les solutions stationnaires suivantes qui s'écrivent sous la forme très simple :

$$E_s = 1 \quad \text{I.107.a}$$

$$P_s = 1 \quad \text{I.107.b}$$

$$D_s = 1 \quad \text{I.107.c}$$

Où l'effet de la normalisation des variables apparaît. Ces solutions sont purement mathématiques, pour obtenir des solutions physiques on adopte une autre forme de normalisation.

I.2 Autre forme normalisée des équations semi classiques

On propose dans ce qui suit une autre forme des équations semi classique généralement adoptée pour introduire des variables normalisées, sans dimension. Cette forme ne change en rien les solutions du système dynamique mais permet une analyse numérique plus conviviale. En effectuant un changement de variable supplémentaire pour le système d'équations I.96, I.97 et I.99 comme suit :

$$P \rightarrow i \frac{2C \varepsilon_0 \hbar k \sqrt{\wp_{\parallel} \wp_{\perp}}}{|\vec{\vartheta}_{12}| \bar{\omega}} P \quad \text{I.108.a}$$

$$D \rightarrow \frac{2\varepsilon_0 \hbar k \wp_{\perp}}{\bar{\omega} |\vec{\vartheta}_{12}|^2} 2C D \quad \text{I.108.b}$$

$$E \rightarrow \frac{\hbar \sqrt{\wp_{\perp} \wp_{\parallel}}}{2 |\vec{\vartheta}_{12}|} E \quad \text{I.108.c}$$

où
$$2C = \frac{D_0}{D_s} = r + 1$$

Avec l'hypothèse que le champ laser est résonant avec la transition atomique, on dispose ainsi pour décrire la dynamique des systèmes lasers monomode dans une cavité en anneau des équations différentielles linéaires adimensionnées suivantes:

$$\frac{dE}{dt} = -k\{E(t) + 2C P(t)\} \quad \text{I.109.a}$$

$$\frac{dP}{dt} = -\wp_{\perp}\{P(t) + E(t)D(t)\} \quad \text{I.109.b}$$

$$\frac{d}{dt} D(t) = -\wp_{//}\{D(t) - 1 - E(t)P(t)\} \quad \text{I.109.c}$$

Cette forme standard permet aussi une étude très simple du comportement dynamique du laser et le nouveau (c'est le même, écrit différemment) état stationnaire non trivial du système est:

$$E_s = \pm\sqrt{2C-1} \quad \text{I.110.a}$$

$$D_s = \frac{1}{2C} \quad \text{I.110.b}$$

$$P_s = \mp \frac{\sqrt{2C-1}}{2C} \quad \text{I.110.c}$$

Ces états stationnaires dépendent du taux de pompage $2C$, résultat tout a fait réaliste

I.3 Les trois classes de lasers

Le comportement dynamique des lasers tel qu'on va le voir dans le chapitre suivant dépend fortement des ordres de grandeur des constantes de relaxation k du champ dans la cavité, $\wp_{//}$ de la différence de population et $\wp_{\perp}$ de la polarisation. Ces taux déterminent la vitesse avec laquelle les variables E , D et P relaxent vers l'état d'équilibre du système. On distingue habituellement trois classes de lasers selon les valeurs relatives de ces trois constantes de temps [35,36]

i) Lasers de classe A

C'est le cas des lasers He-Ne, Ar^+ et les lasers à colorants. Les variables atomiques P et D relaxent très vite vers leur état d'équilibre, ce qui se traduit par des taux de relaxation très supérieurs à la relaxation k du champ, ($\wp_{//}, \wp_{\perp} \gg k$: le champ subit de faibles pertes dans la cavité) de tel sorte que P et D suivent instantanément les variations temporelles du champ E . Les deux dernières équations du système s'éliminent de façon adiabatique.

En posant $\frac{dP}{dt} = 0$ et $\frac{dD}{dt} = 0$, le laser est alors régi par une seule équation non linéaire donnant l'évolution temporelle du champ électrique qu'on peut retrouver facilement à partir du système I.105.

$$\dot{P} = 0 \quad \text{donne} \quad P = E D$$

$$\dot{D} = 0 \quad \text{on aura} \quad D = \frac{1+r}{1+rI} \quad \text{où} \quad I = E^2$$

La relation 1.105.a se réécrit pour l'intensité laser:

$$\frac{dI}{dt} = -2kI \left[1 - \frac{1+r}{1+rI} \right] \quad \text{I.111}$$

Cette équation présente deux solutions stationnaires 0 et 1, et décrit le passage d'un état d'équilibre instable ($I=0$) à un état d'équilibre stable ($I=1$)

ii) Lasers de classe B

C'est le cas des lasers à état solide, du type rubis, ND:YAG, à gaz tels le CO₂, CO, et les semi-conducteurs.

La relaxation de la polarisation du milieu est très rapide par rapport à celle des 2 autres variables puisque $\wp_{\perp} \gg \wp_{\parallel}, k$. La polarisation peut être considérée comme stationnaire et suit de façon adiabatique les autres variables. L'aspect dynamique de ce type de laser est décrit par deux équations non linéaires couplées, reliant le champ à l'inversion de population et deux échelles de temps. Ces équations communément désignées «équations aux bilans» se déduisent facilement du système I.105 et feront sujet du paragraphe suivant:

$$\dot{P} = 0 \quad \text{donne} \quad P = E D$$

On aura pour I.105.a

$$\frac{dI}{dt} = 2k(-I + ID) \quad \text{I.112.a}$$

et pour I.105.c

$$\frac{dD}{dt} = \wp_{\parallel} [1 + r - D - rID] \quad \text{I.112.b}$$

Parmi les lasers faisant partie de cette classe on peut citer Nd-YAG:

$$\wp_{\perp} = 10^{12} \text{ s}^{-1} \quad \wp_{\parallel} = 10^4 \text{ s}^{-1} \quad k = 10^8 \text{ s}^{-1}$$

Les oscillations en intensité sont possibles.

iii) Lasers de classe C

C'est le cas des lasers infra rouge lointain comme celui à gaz ammoniac (NH_3). Toutes les variables évoluent avec des échelles de temps proches, aucune simplification ne peut être effectuée et le fonctionnement dynamique du laser est décrit par le système complet I.109 , I.110 et I.111.

Pour NH_3 on a: $\gamma_{\perp}=10^6 \text{ s}^{-1}$ $\gamma_{\parallel}=10^6 \text{ s}^{-1}$ $k=10^7 \text{ s}^{-1}$.

I.4 Conclusion

Nous avons consacré ce chapitre au rappel des étapes essentielles de la construction des 3 équations non-linéaires couplées du système de Maxwell-Bloch ou Haken-Lorenz (la raison de cette dénomination est donnée au chapitre suivant) décrivant l'interaction rayonnement-matière entre un champ laser résonant dans une cavité en anneau et un milieu atomique à deux niveaux placé à l'intérieur de cette cavité. Ce formalisme de base fait appel aux équations de Maxwell pour la description du signal laser et à la mécanique quantique pour la prise en compte des transitions entre les niveaux d'énergie du milieu. L'application des deux approximations classiques «champ tournant» et «enveloppe lentement variable» nous a permis de donner une dérivation complète du système d'équations de dimension 3 qui gouverne le fonctionnement dynamique du laser monomode à élargissement homogène.

Ce système permet de retrouver les équations qui gouvernent le comportement dynamique des trois classes principales de lasers, moyennant le principe de l'élimination adiabatique des variables rapides. Ce principe revenant simplement à remplacer les variables rapides par leurs valeurs à l'état stationnaire conduit à des modèles stables qui décrivent les états stationnaires des lasers de classe A et de classe B. La suite de ce manuscrit s'intéressera essentiellement au laser de classe C pour lequel les trois variables dynamiques, -champ laser - polarisation - inversion de population, relaxent avec des vitesses de même ordre de grandeur. L'étude dynamique des lasers de classe C, sujet des chapitres suivants, sera précédée aussi d'une étude des oscillations de relaxation qui interviennent à l'allumage des lasers de classe B afin de bien insister sur le caractère stable d'un système de dimension 2.

Chapitre II

Hiérarchie de comportements dynamiques des lasers

L'étude dynamique du système non linéaire laser nous apporte des éclaircissements simples et performants relatifs aux types de fonctionnement adopté par ce système et permet de dégager les conditions de leur apparition. Cette étude met en évidence les zones de stabilité et d'instabilité des différents régimes dynamiques observés sous l'influence des paramètres de contrôle du laser.

Dans le domaine instable, l'émission laser n'est pas continue mais présente un comportement pulsé parfois périodique mais le plus souvent fort irrégulier, voire chaotique. Pour expliquer ces comportements, il est commode d'élaborer des modèles dynamiques susceptibles de décrire son évolution dans le temps. On a déjà vu (voir chapitre I) que l'inventaire des différents mécanismes responsables de l'effet laser et la considération des ordres de grandeur des temps de relaxation propres à chaque variable dynamique: champ électrique, polarisation et inversion de population, donc de la classe du laser, permet de dresser des modèles qui peuvent servir de base pour toute analyse dynamique.

La richesse de comportements dynamiques dans les lasers (continu, oscillations régulièrement amorties, périodique, quasi périodique et chaotique) est incontestablement due à la non-linéarité et au nombre de variables nécessaires à la description de son fonctionnement dynamique intrinsèque.

Un laser de classe A faisant intervenir une seule équation ne peut délivrer qu'une intensité constante ($I=0$ ou $I=1$), qui sera représentée par un point fixe dans l'espace des phases.

Le système de classe B à deux degrés de liberté atteint son régime stationnaire après une période transitoire de train d'impulsions régulièrement décroissantes en fonction de la valeur des taux de relaxation k et $\varphi_{//}$. On observe dans l'espace des phases une évolution en spirale atteignant un point fixe (intensité continue), selon le pompage.

Le laser de classe C affiche une dynamique plus riche: fonctionnement périodique, quasi périodique et chaotique (faisant bien souvent intervenir deux fréquences incommensurables, comme il sera démontré dans ce travail pour la première fois en théorie laser). Ces solutions

diverses sont représentées dans l'espace des phases à trois dimensions par des cycles limites (signaux périodiques) et des attracteurs étranges (chaos déterministe).

Toutes ces indications vont être développées dans ce chapitre. Nous entreprendrons d'abord le modèle le plus simple qui, celui du bilan énergétique et concluons par un système plus complet qui est le modèle semi-classique.

II.1 Modèle du bilan

Le modèle le plus simple pour décrire le fonctionnement d'un laser monomode se base sur le bilan des échanges d'énergie entre le rayonnement et la matière. Ce modèle caractérise l'évolution temporelle de l'inversion de population et l'intensité du signal laser.

Sachant que les équations du bilan ou les "rate equations" ont été dressées et étudiées dans plusieurs ouvrages fondamentaux [34,37], nous nous contentons dans ce chapitre d'exposer une étude de stabilité linéaire des états d'équilibres en vue de prédire un changement de fonctionnement du laser.

II.1.1 Equations cinétiques

Comme déjà mentionné les équations du bilan relient l'inversion de population et le nombre de photons dans la cavité laser. Cette liaison est formulée sous forme d'équations non-linéaires de la forme [31]:

$$\frac{dD}{dt} = -2WnD - \wp_{//} (D - D_0) \quad \text{II.1.a}$$

$$\frac{dn}{dt} = WnD - kn \quad \text{II.1.b}$$

où

D : la différence de population entre les niveaux de la transition laser (sans dimension)

n : le nombre de photons dans la cavité laser (sans dimension)

$$[n(t) \propto E(t)^2 \propto I(t)]$$

D_0 : la différence de population en absence d'énergie électromagnétique ($n = 0$)

W : mesure le taux d'absorption et d'émission stimulée (s^{-1})

$\wp_{//}$: le taux de relaxation de la différence de population (s^{-1})

k : le taux de relaxation de l'intensité dans la cavité laser (s^{-1})

Par le changement de variables suivant:

$$D \rightarrow \frac{W}{k} D \quad \text{II.2.a}$$

$$n \rightarrow 2 \frac{W}{\wp_{//}} n \quad \text{II.2.b}$$

On retrouve les équations normalisées de Statz et De Mars [6,34,37] :

$$\frac{dD}{dt} = -\wp_{//} (-2C + D + nD) \quad \text{II.3.a}$$

$$\frac{dn}{dt} = kn(D-1) \quad \text{II.3.b}$$

Tel que

$$2C = \frac{D_0}{D_s} = \frac{W}{k} D_0 = r + 1 \quad \text{II.4.c}$$

II.1.1.a Stabilité linéaire du régime stationnaire

L'état stationnaire du système II.3 est obtenu en annulant la dérivée par rapport au temps de chaque variable soit:

$$D_s = 1 \quad \text{II.5.a}$$

$$n_s = 2C - 1 \quad \text{II.5.b}$$

Le nombre de photons croît avec C et le seuil de fonctionnement correspond à $C_s = 1/2$

L'étude de stabilité linéaire de l'état d'équilibre II.5 du système II.3 revient à imposer à cet état une perturbation infinitésimale et voir si le système revient à, ou s'écarte de son état stationnaire:

$$n = n_s + \delta n \quad \text{II.6.a}$$

$$D = D_s + \delta D \quad \text{II.6.b}$$

En introduisant ces dernières variables dans les équations II.3.a et II.3.b et en négligeant ensuite les termes croisés de second ordre en $\delta n \delta D$ par rapport aux termes linéaires on aura:

$$\frac{d}{dt} \delta D = \wp_{//} [\delta D - n_s \delta D - D_s \delta n] \quad \text{II.7}$$

Suite aux identités II.5.a et II.5.b on obtient:

$$\frac{d}{dt} \delta D = -\wp_{//} [\delta D + 2C \delta n] \quad \text{II.8}$$

Opérant de manière équivalente pour la perturbation relative au nombre de photons on obtient:

$$\frac{d}{dt} \delta n = k \delta n D_s - k \delta n + k n_s \delta D \quad \text{II.9}$$

$$\frac{d}{dt} \delta n = k \delta D [2C - 1] \quad \text{II.10}$$

On aboutit finalement aux équations linéaires des perturbations :

$$\frac{d}{dt} \delta n = k \delta D [2C - 1] \quad \text{II.11.a}$$

$$\frac{d}{dt} \delta D = -\wp_{//} [\delta D + 2C \delta n] \quad \text{II.11.b}$$

Pour résoudre ce système on procède par substitution :

On remplace δD figurant dans la relation II.11.a par sa valeur trouvée à partir de l'équation II.11.b Ce qui donne

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta n + \wp_{//} 2C \frac{d}{dt} \delta n + \wp_{//} k (2C - 1) \delta n = 0 \quad \text{II.12}$$

équation typique de l'oscillateur amorti, dont la solution générale est de la forme:

$$\delta n = \delta n_0 \exp(\lambda t) \quad \text{II.13}$$

En reportant dans l'équation II.12 on obtient l'équation caractéristique du second ordre:

$$\lambda^2 + \wp_{//} 2C \lambda + \wp_{//} k (2C - 1) = 0 \quad \text{II.14}$$

qui admet les solutions suivantes

$$\lambda_{12} = -\frac{\wp_{//} 2C}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{II.15}$$

où

$$\Delta = \wp_{//}^2 (2C)^2 - 4k \wp_{//} (2C - 1) \quad \text{II.16}$$

«2C» représente le paramètre de pompage qui vérifie la condition d'oscillation $2C > 1$.

Deux situations se présentent selon que les racines sont réelles ou complexes et suivant la valeur de k .

Pour $k < \wp_{//}$ (les pertes dans la cavité sont inférieures aux relaxations atomiques) on a $4k(2C - 1) < \wp_{//}^2 (2C)^2$ et les deux racines:

$$\lambda_1 \approx -\frac{k(2C-1)}{2C} \quad \text{et} \quad \lambda_2 \approx -\wp_{//} 2C \quad \text{II.17}$$

sont toujours négatives. La solution stationnaire est stable et le retour à l'équilibre (n_s, D_s) s'accompli sous forme d'une décroissance exponentielle (régime fortement amorti)

Dans le cas $k > \wp_{//}$, ce qui est vrai pour la plupart de lasers solides (les pertes dans la cavité sont supérieures aux relaxations atomiques) on a $4k(2C-1) \gg 2C^2$ et les deux racines sont complexes conjuguées

$$\lambda_{12} \approx -\frac{\wp_{//} 2C}{2} \pm i\sqrt{k\wp_{//}(2C-1)} = \alpha \pm i\Omega_r \quad \text{II.18}$$

La partie réelle de ces racines est toujours négative et la solution stationnaire est stable. La partie imaginaire Ω_r de λ représente la fréquence propre de retour vers la solution stationnaire. Le retour à l'équilibre (n_s, D_s) s'effectue donc par des oscillations de relaxation à la fréquence $\Omega_r = \sqrt{k\wp_{//}(2C-1)}$, aspect similaire à l'oscillateur harmonique amorti (régime sous amorti ou faiblement amorti).

En conclusion la solution de l'équation II.11.a ou II.11.b peut avoir un comportement transitoire présentant, ou non, des oscillations avant d'atteindre l'état d'équilibre. Ces différentes allures sont liées au signe du discriminant de l'équation caractéristique du deuxième ordre et dépendant précisément du rapport entre les quantité k et $\wp_{//}$.

Dans le cas où $k < \wp_{//}$ la solution est

$$n = n_s + A \exp(-\lambda_1 t) + B \exp(-\lambda_2 t) \quad \text{II.19}$$

Le régime transitoire s'amortit et tend asymptotiquement vers n_s avec deux constantes de temps $\frac{1}{\lambda_1}$ et $\frac{1}{\lambda_2}$ voir figure II.1 effectué pour $\wp_{//} = 10^7 \text{ s}^{-1}$, $k = 10^4 \text{ s}^{-1}$ et $2C=2$.

Dans le cas où $k > \wp_{//}$ la solution est de la forme:

$$n = n_s + \delta n_0 \exp\left(-\frac{\wp_{//} 2C}{2} t\right) \cos(\sqrt{k\wp_{//}(2C-1)} t) \quad \text{II.20}$$

qui décrit des oscillations de relaxation autour de la solution stationnaire n_s , de fréquence Ω_r . L'amplitude de ces pulsations décroît suivant une loi exponentielle avec une constante de

$$\text{temps } t_a = \frac{2}{\wp_{//} 2C}$$

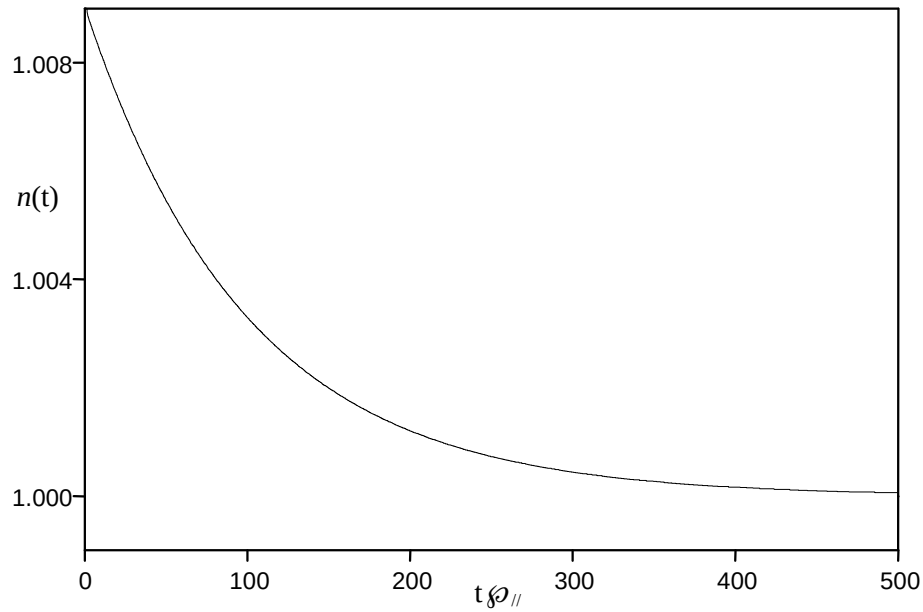


Fig.II.1: Simulation numérique du système II.3 qui montre le retour à l'état stationnaire par décroissance exponentielle $\wp_{||} = 10^7 \text{ s}^{-1}$, $k = 10^4 \text{ s}^{-1}$ et $2C = 2$

On a représenté sur la figure II.2 les pulsations amorties obtenues à partir d'un programme de simulation numérique utilisant les équations de bilan II.3 pour le laser CO_2 avec les constantes suivantes $\wp_{||} = 10^4 \text{ s}^{-1}$, $k = 10^7 \text{ s}^{-1}$ [37] et $2C = 2$.

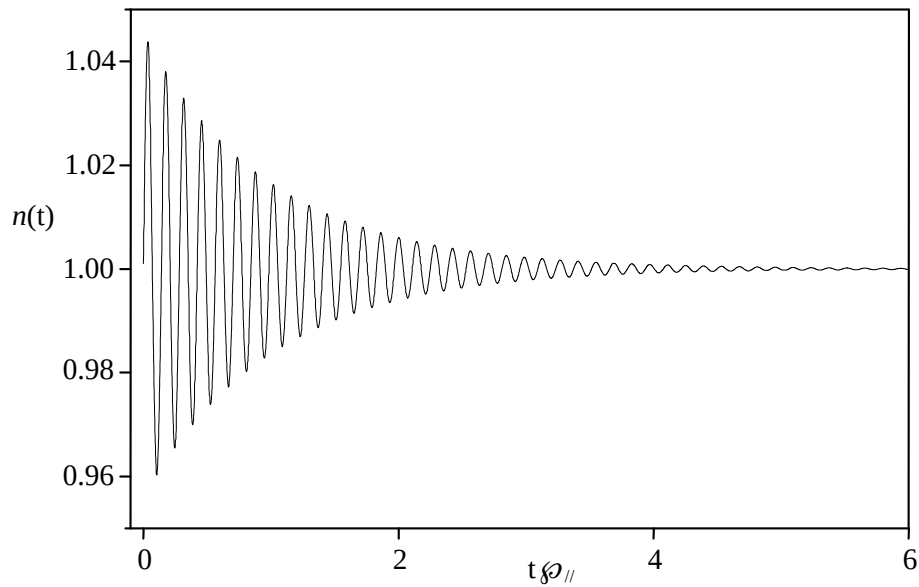


Fig.II.2: Simulation numérique des oscillations de relaxation du système II.3. $\wp_{||} = 10^4 \text{ s}^{-1}$, $k = 10^7 \text{ s}^{-1}$ et $2C = 2$

Pour ce cas on trouve $\Omega_r \approx 31.62 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ et $t_a = 10^{-4} \text{ s}$.

La figure II.3 illustre l'évolution du signal laser de manière oscillatoire amortie vers son état d'équilibre (n_s, D_s) dans l'espace de phase correspondant, en décrivant une spirale qui tend vers un point fixe qui est l'état stationnaire $D_s = 1$ et $n_s = 2C - 1$.

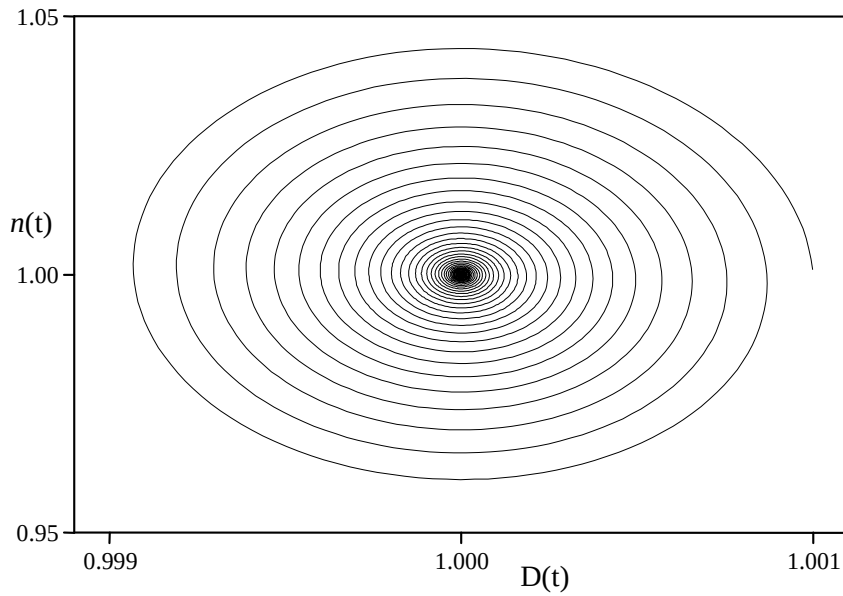


Fig.II.3: Projection des oscillations de relaxation de la fig.II.2 dans l'espace des phases (n, D) . Le système II.3 retourne vers son état d'équilibre $(n_s=1, D_s=1)$ en décrivant une spirale

D'après cette brève étude asymptotique et au voisinage de la solution stationnaire on perçoit qu'un laser modélisé par les équations cinétiques ci dessus, et plus précisément par un système d'équations à deux degrés de liberté ne peut exhiber un comportement dynamique autre qu'un régime de relaxation généralement, obtenu à l'allumage avant de se stabiliser en signal continu et cela quelles que soient les valeurs des paramètres de contrôle k , $\varphi_{//}$ et $2C$. Ce qui est dû aux pertes présentées par les deux variables. Ces équations ne peuvent donc décrire le régime pulsé qui s'installe de façon permanente dans certains types de lasers selon leurs configurations et particulièrement après la démonstration de Nelson et Boyle[9] d'un fonctionnement fortement bruité du laser à rubis avec un pompage continu.

Pour une meilleure description dynamique du fonctionnement d'un laser qui est l'objet de nos travaux, on a recourt aux équations semi- classique donc aux équations de Maxwell-Bloch. Un tel système d'équations à trois degrés de liberté prédit le régime de pulsation régulier ainsi que les régimes irréguliers observés dans certains systèmes.

II.2 Système Lorenz-Haken de dimension 3

Le système de Statz et de Mars décrit bien les oscillations de relaxation observées dans la plupart des lasers continus mais présente une défaillance pour décrire le régime pulsé caractéristique de certains systèmes. En fait, les équations cinétiques ne tiennent pas compte d'une variable fondamentale dans le milieu amplificateur, à savoir la polarisation du milieu, dont l'évolution, dans certains lasers ne peut être éliminée de façon adiabatique. Celle-ci évolue avec une constante de temps différente de celle de l'inversion de population et son introduction dans l'étude de l'interaction rayonnement-matière conduit à un système d'équations différentielles qui possède des solutions instables.

Le modèle semi classique développé dans le chapitre I donne lieu à trois équations différentielles non linéaires qui couplent l'équation de propagation d'une onde électromagnétique et deux équations qui décrivent le milieu amplificateur dans une cavité résonante. Ces équations ne peuvent être résolues analytiquement mais l'étude du comportement asymptotique des solutions à l'équilibre nous renseigne bien sur leurs différents régimes de fonctionnement.

Les équations de Maxwell Bloch, adaptées au laser par Haken, et qui décrivent les lasers monomodes à élargissement homogène sont analogues au système élaboré par Lorenz pour une description simplifiée de la turbulence atmosphérique. Ceci laisse présager que le laser sera sujet à des instabilités et donc susceptible d'entreprendre un mouvement chaotique conditionné par les valeurs des paramètres de contrôles. Ce comportement irrégulier est dû à la présence d'un troisième degré de liberté dans les équations laser alors que les équations aux bilans représentent un système dynamique non linéaire de dimension 2.

II.2.1 Equivalence formelle du système de Lorenz et des équations laser

Dès 1963 Lorenz propose un modèle basé sur une simplification des équations de Navier-Stokes qui rendent compte des mouvements de l'atmosphère au-dessus du sol. Ces simplifications conduisent à un système de 3 équations différentielles non linéaires qui couplent les variables principales et décrivant la turbulence atmosphérique:

X : L'amplitude du mouvement de convection de l'atmosphère

Y : La différence de température entre les courants descendants et ascendants

Z: L'écart entre la température donnée par le modèle et celle qui résulte d'une loi de décroissance en fonction de l'altitude.

Selon :

$$\frac{dX}{dt'} = \sigma Y - \sigma X \quad \text{II.21.a}$$

$$\frac{dY}{dt'} = -XZ + 2C X - Y \quad \text{II.21.b}$$

$$\frac{dZ}{dt'} = X Y - b Z \quad \text{II.21.c}$$

où σ , $2C$ et b sont des paramètres de contrôle.

Comme on peut le constater ces équations sont non linéaires par la présence des termes croisés XY et XZ , cela sous entend qu'on ne peut avoir de solutions analytiques exactes pour le problème. Comme voie alternative Lorenz proposa de visualiser les évolutions temporelles des variables X, Y, Z par résolution numérique de ces équations sur un ordinateur. Cela lui a permis de dégager les importantes découvertes suivantes:

- ❖ Sensibilité aux conditions initiales : une petite variation sur les valeurs initiales donne lieu à une prédictibilité aléatoire de l'évolution du système.
- ❖ Il suffit de 3 degrés de liberté pour entrevoir un comportement chaotique irrégulier dans le temps (aspect chaotique).
- ❖ Si le système paraît chaotique dans l'espace réel, sa représentation dans l'espace des phases fait apparaître un ordre sous forme géométrique complexe appelé " attracteur étrange" (terminologie proposée pour la première fois en 1971 par David Ruelle et Floris Takens)

D'une façon ingénieuse, Lorenz avait découvert l'un des premiers exemples de chaos déterministe dans les systèmes dissipatifs. Malgré l'originalité des travaux de Lorenz son modèle ne peut être utilisé dans le domaine de la météorologie et son système servit seulement d'outil pour l'étude du chaos. Jusqu'à ce que Haken prouva 1975 [28] que le système d'équations de Lorenz n'est pas exclusif de la mécanique des fluides mais pouvait aussi refléter une expérience physique dans le domaine des systèmes lasers à deux niveaux d'énergie et modélisés par les équations semi-classiques.

Afin de faire apparaître cette similitude entre le système de Lorenz et les équations de Maxwell-Bloch, Haken remplaça les variables des équations II.21.a, II.21.b et II.21.c par les nouvelles grandeurs suivantes:

$$X = \xi \quad Y = \eta \quad \text{et} \quad Z = r - \zeta$$

il obtient le nouveau système:

$$\frac{d\xi}{dt'} = \sigma\eta - \sigma\xi \quad \text{II.22.a}$$

$$\frac{d\eta}{dt'} = \zeta\xi - \eta \quad \text{II.22.b}$$

$$\frac{d\zeta}{dt'} = b(2C - \zeta) - \zeta\eta \quad \text{II.22.c}$$

qui sont analogues aux équations semi-classique du lasers (voir chapitre I) :

$$\frac{d}{dt} E = -k E + k P \quad \text{II.23.a}$$

$$\frac{d}{dt} P = -\wp_{\perp} P + \wp_{\perp} E D \quad \text{II.23.b}$$

$$\frac{d}{dt} D = -\wp_{\parallel} D + \wp_{\parallel} (1 + r) - \wp_{\parallel} r E P \quad \text{II.23.c}$$

dès lors que l'on effectue les transformations suivantes :

$$t \rightarrow t' \frac{\sigma}{k}, \quad E \rightarrow \alpha \xi, \quad P \rightarrow \alpha \eta, \quad D \rightarrow \zeta$$

avec $\alpha = \frac{1}{\sqrt{b(2C-1)}}$, $2C > 1$, $\wp_{\parallel} = \frac{kb}{\sigma}$, $\wp_{\perp} = \frac{k}{\sigma}$, $r = 2C - 1$

Il apparaît ainsi que le laser peut être considéré comme un système dynamique dont les non linéarités peuvent aussi engendrer un comportement chaotique.

Afin d'extraire les propriétés dynamiques du laser on effectue une analyse de stabilité linéaire de l'état stationnaire. On établit d'abord les solutions à l'état d'équilibre que l'on soumet à de petites perturbations afin d'extraire les conditions d'émergence des solutions (nouvelles stables ou instables) et d'en délimiter les zones en fonction des paramètres de contrôle qui gouvernent le système.

II.2.2 Solutions stationnaires. Analyse de stabilité

L'étude de stabilité des états stationnaires consiste à déterminer l'évolution d'un écart infinitésimal par rapport à cet état. Si l'état est instable le système s'en écarte d'une manière irrévocable et dans le cas où cet état est stable le système y retourne de façon systématique. L'état stationnaire du système est obtenu en annulant la dérivée par rapport au temps de chaque variable du système II.23. Ce qui donne:

$$E_s = 1 \quad \text{II.24.a}$$

$$D_s = 1 \quad \text{II.24.b}$$

$$P_s = 1 \quad \text{II.24.c}$$

La linéarisation du système se fait en posant:

$$E = E_s + \delta e \quad \text{II.25.a}$$

$$D = D_s + \delta d \quad \text{II.25.b}$$

$$P = P_s + \delta p \quad \text{II.25.b}$$

où δe , δd et δp les petites variations autour de l'équilibre.

En reportant ses variables dans le système II.23 et en négligeant les produits croisés du second ordre $\delta e \delta p$ et $\delta e \delta d$, on obtient le système linéaire suivant :

$$\frac{d}{dt} \delta e = -k \delta e + k \delta p \quad \text{II.26.a}$$

$$\frac{d}{dt} \delta p = \wp_{\perp} \{ \delta e - \delta p + \delta d \} \quad \text{II.26.b}$$

$$\frac{d}{dt} \delta d = \wp_{\parallel} \{ -\delta d - r \delta p - r \delta e \} \quad \text{II.26.c}$$

Après avoir utilisé les identités II.24. Le système linéaire II.26 est de la forme:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta e(t) \\ \delta p(t) \\ \delta d(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & +k & 0 \\ \wp_{\perp} & -\wp_{\perp} & \wp_{\perp} \\ -\wp_{\parallel} r & -\wp_{\parallel} r & -\wp_{\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta e \\ \delta p \\ \delta d \end{pmatrix} \quad \text{I.27}$$

La résolution de ce système revient à chercher les solutions sous forme $\delta x = \delta x_0 \exp \lambda t$ pour chaque perturbation autour de l'état stationnaire. Les valeurs de λ sont les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} -k & +k & 0 \\ \wp_{\perp} & -\wp_{\perp} & \wp_{\perp} \\ -\wp_{//}r & -\wp_{//}r & -\wp_{//} \end{pmatrix} \quad \text{II.28}$$

et solution du déterminant et de l'équation caractéristique ci-dessous :

$$\begin{vmatrix} -k - \lambda & +k & 0 \\ \wp_{\perp} & -\wp_{\perp} - \lambda & \wp_{\perp} \\ -\wp_{//}r & -\wp_{//}r & -\wp_{//} - \lambda \end{vmatrix} \quad \text{II.29}$$

$$-(k + \lambda)[(\wp_{\perp} + \lambda)(\wp_{//} + \lambda) + \wp_{\perp}\wp_{//}r] - k[-(\wp_{//} + \lambda)\wp_{\perp} + \wp_{\perp}\wp_{//}r] = 0 \quad \text{II.30}$$

$$\lambda^3 + (k + \wp_{\perp} + \wp_{//})\lambda^2 + \wp_{//}(k + \wp_{\perp}(1 + r))\lambda + 2k\wp_{//}\wp_{\perp}r = 0 \quad \text{II.31}$$

C'est une équation du 3^{ème} degré, dont l'expression explicite pour λ n'est pas assuré. On peut s'affranchir de cette tâche vu que notre objectif est l'étude de stabilité de l'état permanent, il suffit simplement de connaître le signe de la partie réelle des racines. Si les parties réelles des racines de l'équation caractéristique sont négatives l'état est stable. D'autre part si l'une au moins des racines possède une partie positive cet état est instable. Pour savoir si toutes les racines ont leurs parties réelles négatives on va s'appuyer sur le critère de "Routh Hurwitz" (voir Annexe A).

Les racines de l'équation d'ordre «3» $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$ ont toutes une partie réelle $Re(\lambda_i)$ négative si les conditions :

$$a_1 > 0, \quad a_1a_2 - a_3 > 0, \quad a_3 > 0$$

sont satisfaites. Appliqué au polynôme II.31, ce critère conduit à :

$$1 > 0 \quad \text{II.32}$$

$$\wp_{//}(\wp_{//} + \wp_{\perp} + k)(\wp_{\perp}(1 + r) + k) - 2k\wp_{\perp}\wp_{//}r > 0 \quad \text{II.33}$$

$$r > 0 \quad \text{II.34}$$

La première condition est toujours vérifiée, la dernière inégalité indique le taux de pompage nécessaire pour le fonctionnement laser couramment connu sous le nom du seuil d'oscillation laser. La deuxième inégalité après remise en forme se réécrit comme suit:

$$(\wp_{//} + \wp_{\perp} + k)(\wp_{\perp} + k) + r[\wp_{\perp}(\wp_{//} + \wp_{\perp} - k)] > 0 \quad \text{II.35}$$

et véhicule les informations suivantes:

si $k \leq \wp_{\perp} + \wp_{//}$ la relations II.35 est toujours vérifiée et la solution stationnaire est toujours stable.

En revanche si $k > \wp_{\perp} + \wp_{//}$ [18-21] les lasers présentent une solution stationnaire instable pour un niveau de pompage

$$r > \frac{(k + \wp_{\perp})(k + \wp_{\perp} + \wp_{//})}{\wp_{\perp}(k - \wp_{\perp} - \wp_{//})} \quad \text{II.36}$$

Dans l'hypothèse d'une mauvaise cavité $k > \wp_{\perp} + \wp_{//}$, qui se traduit par des pertes subies par le rayonnement laser plus importantes à celles cumulées de la polarisation et la différence de population, l'état de fonctionnement stationnaire sera donc instable lorsque le pompage excède une valeur critique $r > r_c$ tel que:

$$r_c = \frac{(k + \wp_{\perp})(k + \wp_{\perp} + \wp_{//})}{\wp_{\perp}(k - \wp_{\perp} - \wp_{//})} \quad \text{II.37}$$

représente le deuxième seuil du laser. Cette instabilité de "Lorenz-Haken" qu'on ne rencontre que dans les lasers de classe C, et n'apparaît pas dans les lasers de classe B régies par les équations du bilan. A l'heure actuelle, seuls les lasers moléculaires fonctionnant dans l'infrarouge lointain comme le laser à ammoniac NH_3 présente cette instabilité. Pour situer l'ordre de grandeur du 2^{ème} seuil laser on prend les valeurs suivantes à titre d'exemple $\wp_{\perp} = 10^6 \text{ s}^{-1}$ $\wp_{//} = 10^6 \text{ s}^{-1}$ $k = 10^7 \text{ s}^{-1}$ qui donnent $r_c = 16.5$, il faut pomper à 16.5 fois au dessus du premier seuil laser pour déstabiliser le fonctionnement continue du laser, un second seuil très élevé.

Cherchons maintenant la valeur minimale que peut prendre r_c en fonction de k pour un taux de relaxation de l'inversion de population $\wp_{//}$ fixe. Cela revient à annuler la dérivée de r_c par rapport au paramètre k ($\frac{dr_c}{dk} = 0$). On obtient:

$$k_{\min} = 1 + \wp + \sqrt{2(2 + 3\wp + \wp^2)} \quad \text{II.38}$$

et

$$r_c = 4 + 3\wp + 2\sqrt{2(2 + 3\wp + \wp^2)} \quad \text{II.39}$$

avec $\wp = \frac{\wp_{//}}{\wp_{\perp}}$ et $k \rightarrow \frac{k}{\wp_{\perp}}$

En utilisant les valeurs précédentes on trouve $k_{\min}=5.46$ et $r_c=16$. Cette valeur relativement élevée est en général difficile à atteindre expérimentalement, ce qui rend l'instabilité de Lorenz-Haken difficile à observer pour les lasers de classe C.

On a illustré dans les figures II.4, II.5 et II.6 le comportement dynamique du laser dans le cas d'une mauvaise cavité, obtenues par résolution numérique du système I.108 (ou le système II.23) au moyen de la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4, et en prenant comme conditions initiales les valeurs: $E = E_s + \delta e$, $D = D_s + \delta d$ et $P = P_s + \delta p$. On remarque d'après ces figures que le comportement dynamique du laser dépend de la valeur du taux de relaxation de l'inversion de population. On constate qu'au dessus du deuxième seuil laser r_c le régime continu se déstabilise et le laser fonctionne alors en régime pulsé périodiquement (en intensité) pour des valeurs de $\wp$ faibles et pour des valeurs plus élevées le signal est chaotique.

On rapporte aussi en figure II.6 un scénario de dédoublement de période qui s'exécute pour des valeurs de $\wp$ faibles, qui commence d'abord par un champ électrique symétrique de période une, passe par une allure asymétrique de période une qui donne une apparence d'un dédoublement de période si on considère l'intensité du champ qui n'en est pas un si on prospecte la trajectoire dans l'espace des phases (figure II.6.e), ensuite le champ expose une évolution asymétrique de période deux qui reflète le vrai dédoublement de période (figure II.6.f). Il est incontestable que l'accroissement de $\wp$ entraînera l'évolution du système vers un comportement chaotique qui n'a pas été illustré.

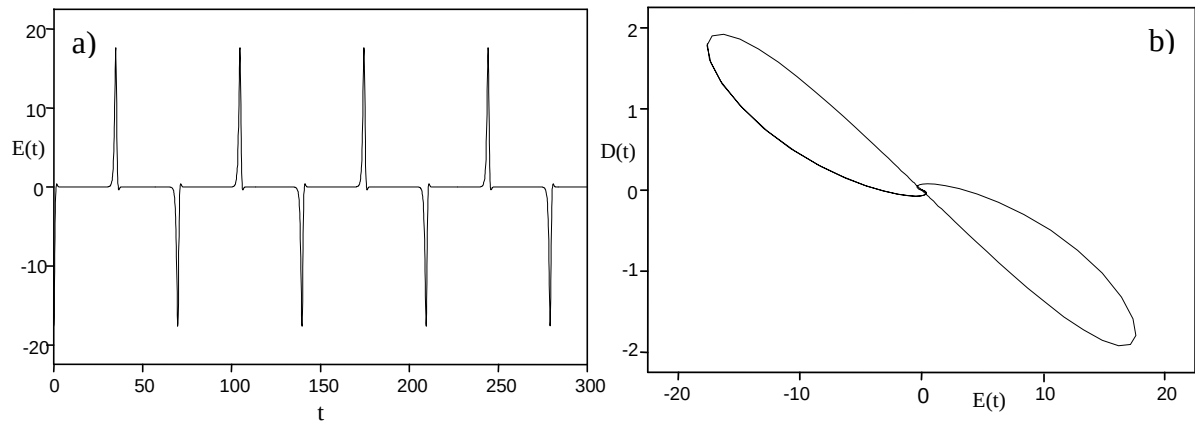


Fig.II.4: a) Pulses réguliers obtenus pour $k > 1 + \wp$, $k=4$ $\wp = 0.02$ et $r = 2C-1=9$
 b) Cycle limite correspondant dans l'espace des phase (E,D)

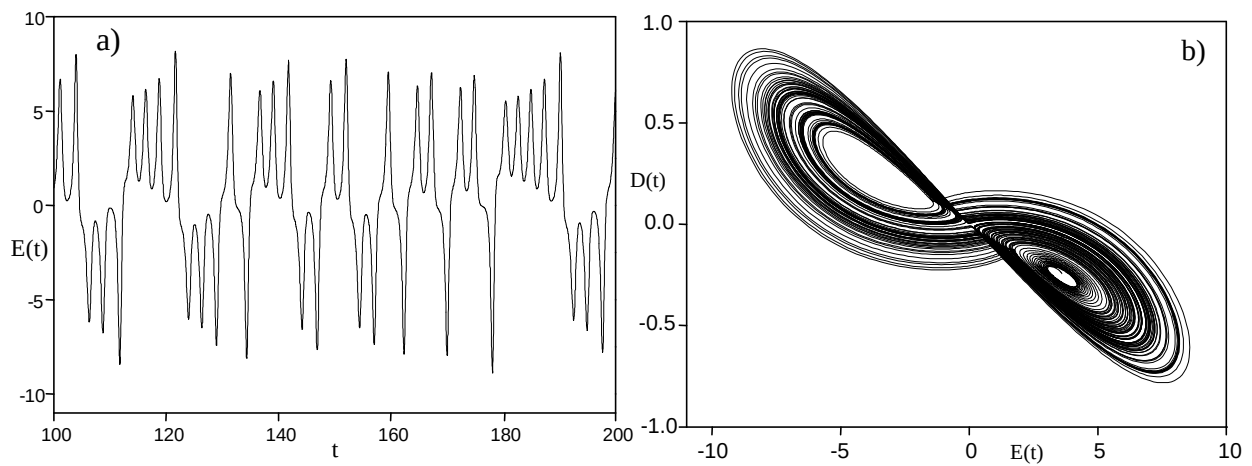


Fig. II.5: a) Pulses irréguliers obtenus pour $k > 1 + \wp$, $k=4$ $\wp = 0.5$ et $r = 2C-1=13$
 b) Attracteur étrange du régime chaotique a)

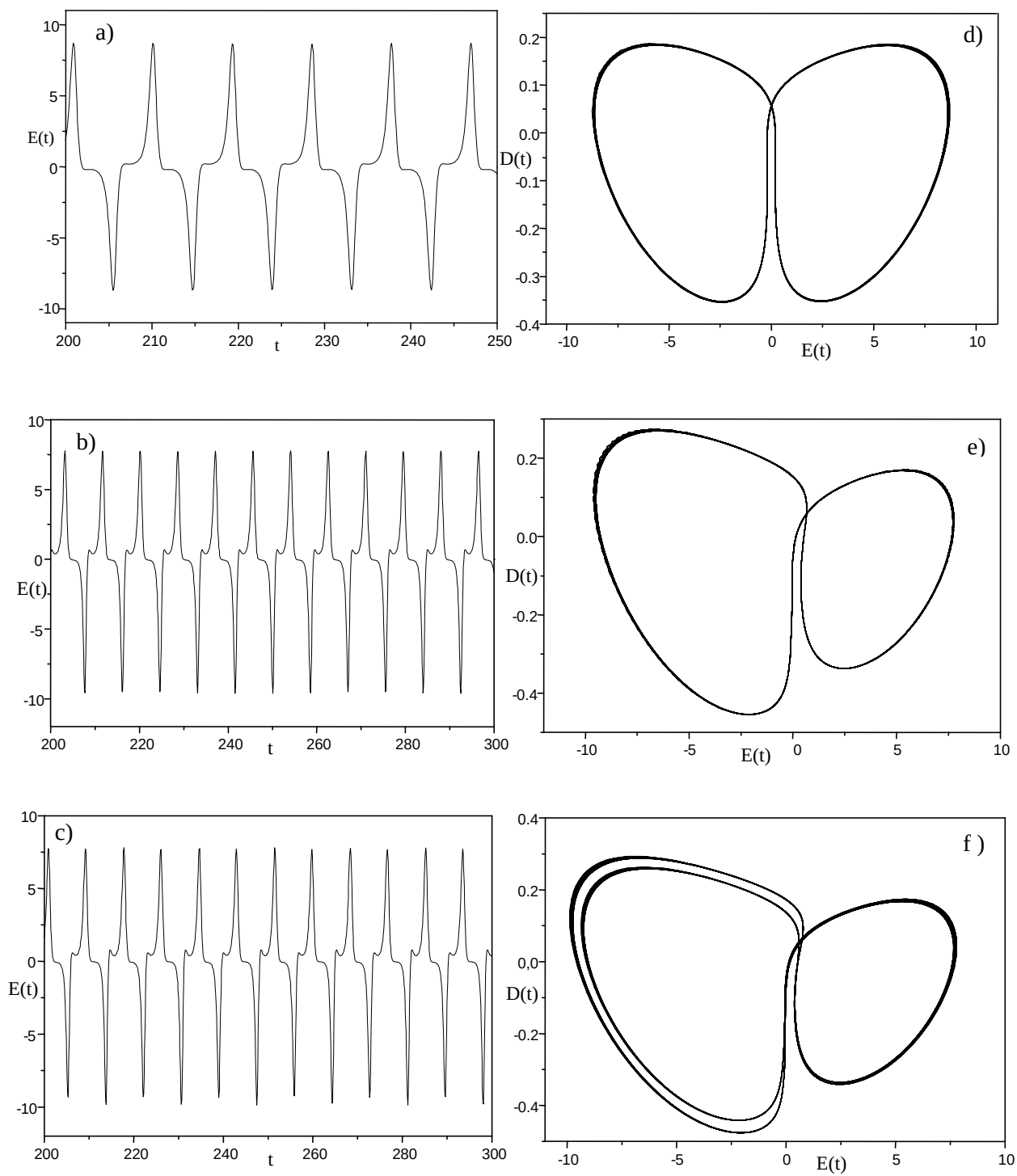


Fig. II.6: Pulses réguliers obtenus pour $k=5$ $r=2C-1=11$ a) symétriques de période une $\varphi=0.19$ b) asymétriques de période une $\varphi=0.24$, c) asymétriques de période deux $\varphi=0.244$ d), e) et f) trajectoires de phase correspondant respectivement aux cas a, b et c.

Le même scénario de dédoublement de période qui s'achève par un régime chaotique peut être obtenu par augmentation du taux de pompage r au dessus du deuxième seuil laser (voir chapitre IV) ou par diminution du paramètre d'excitation r selon les valeurs de $\wp$ [38]

A la différence des courbes précédentes le régime de fonctionnement continu donné par les relations II.24 reste stable (figure.II.7) dans le cas où la condition de mauvaise cavité est satisfaite et le taux de pompage inférieur au deuxième seuil. (Bassin d'attraction de la solution stationnaire et Conditions initiales très proches qui la stabilisent)

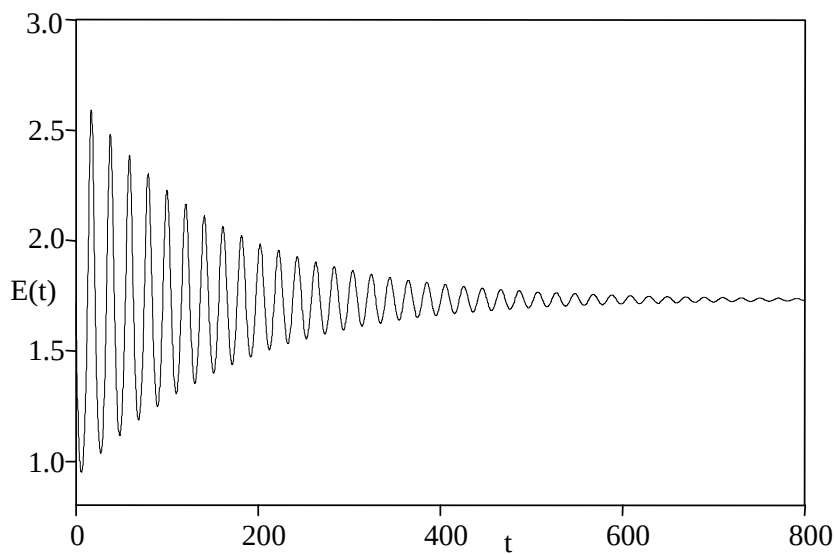


Fig.II.7: Comportement transitoire du champ électrique pour $k > 1 + \wp$, $k=4$, $\wp = 0.5$ et $r = 2C-1=3$

Le changement de comportement observé dans le fonctionnement du laser lorsqu'on varie le paramètre de pompe r s'interprète bien dans le cadre de la théorie de bifurcation. En $r=r_c$ (point de bifurcation) on observe une bifurcation de Hopf sous-critique (désaccord en fréquence nulle) [70,72], qui fait passer le laser d'un fonctionnement continu (point fixe dans l'espace des phases) à un fonctionnement chaotique (attracteur étrange).

Nous verrons plus loin qu'un fonctionnement en régime pulsé (cycle limite dans l'espace des phases) est cependant possible puisque des oscillations de grandes amplitudes arrivent à être stabiliser selon la valeur de gamma (petit).

II.2.3 Fréquence d'oscillation au second seuil du laser

Pour des valeurs du paramètre de pompage r supérieur à r_c la partie réelle négative des deux racines complexes conjuguées (système stable) change de signe et devient positive (système instable) en passant par une valeur identiquement nulle au point bifurcation $r = r_c$.

La fréquence d'oscillation au seuil s'obtient en cherchant une solution purement imaginaire $\lambda = i\omega_0$. L'introduction λ dans le polynôme caractéristique II.31 et en séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient le système d'équations suivant:

$$\omega_0^2 = \wp_{//}\wp_{\perp}(1 + r_c) + k\wp_{//} \quad \text{II.40}$$

$$\omega_0^2 = \frac{2k\wp_{//}\wp_{\perp}}{\wp_{//} + \wp_{\perp} + k} r_c \quad \text{II.41}$$

L'égalité de ces deux équations permet de retrouver la position de bifurcation r_c et les oscillations se manifestent pour la bifurcation de Hopf au seuil à la fréquence:

$$\omega_0^2 = \frac{2k\wp_{//}(k + \wp_{\perp})}{(k - \wp_{//} - \wp_{\perp})} \quad \text{II.42}$$

qui prend la forme en normalisant par rapport à $\wp_{\perp}$:

$$\tilde{\omega}_0^2 = \frac{2k\wp(k + 1)}{k - \wp - 1} \quad \text{II.43}$$

$$k \rightarrow \frac{k}{\wp_{\perp}}, \quad \wp = \frac{\wp_{//}}{\wp_{\perp}}.$$

II.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une étude de stabilité linéaire des états stationnaires des lasers de classe B et C. Les lasers de classe B dont le comportement dynamique est décrit par les équations de bilan énergétique, impliquant l'intensité et l'inversion de population, sont stables à l'égard de toute perturbation. De ce fait, le signal laser revient toujours après une période transitoire à son état d'équilibre en effectuant des oscillations de relaxation ou par une simple décroissance exponentielle suivant les valeurs des vitesses de relaxation de l'intensité et de l'inversion de population.

En revanche le laser de classe C dont le fonctionnement est décrit par le système d'équations de Lorenz-Haken peut afficher un comportement oscillatoire périodique ou chaotique au delà d'un certain seuil d'excitation extérieure appelé 2^{ème} seuil laser ou encore seuil d'instabilité. En plus de la condition liée à l'excitation, l'apparition d'un comportement instable est aussi tributaire d'une condition liée aux caractéristiques de la cavité, donc du coefficient de perte du miroir de sortie, c'est la condition de mauvaise cavité. Le régime de fonctionnement obtenu est ainsi intimement lié à la valeur des paramètres de contrôle qui apparaissent dans le système d'équations. Par exemple, l'augmentation du paramètre de pompe au delà du seuil d'instabilité peut se traduire par l'apparition d'un régime erratique à travers une série de dédoublement de période ou d'une manière discontinue selon les valeurs précises des autres paramètres. En deçà de ce seuil critique le laser est stable et fonctionne en continu. Nous consacrons le chapitre suivant à la construction de solutions analytiques périodiques du laser de classe C dans certains cas limites qui se traduisent par des solutions régulières dont le régime pulsé se caractérise par des oscillations autour d'une valeur moyenne nulle pour le champ électrique et la polarisation et autour d'une valeur moyenne différente de la valeur stationnaire pour l'inversion de population.

L'approche analytique est basée sur une méthode itérative pour laquelle chaque variable dynamique est décomposée suivant une série de Fourier adaptée aux solutions numériques.

Chapitre III

Approche analytique

III.1 Etat de l'art

Les divers comportements dynamiques qui peuvent se présenter dans les lasers à élargissement homogène ont été largement étudiés tant sur le plan expérimental que théorique faisant objet d'une production scientifique abondante depuis la première observation des pulsations lasers [1]. Nul besoin de citer toutes les études entreprises jusqu'à aujourd'hui et énonçons simplement les plus importantes pour indiquer le contexte dans lequel s'inscrit l'originalité de notre apport dans le domaine des systèmes dynamiques en général et celui de la physique des lasers en particulier.

Le modèle semi classique a été utilisé par plusieurs pionniers de la physique du laser dans le but d'élucider les phénomènes physiques observés expérimentalement. La première étude théorique relative à l'interaction rayonnement-matière dans une cavité contenant un milieu amplificateur avait été faite par Lamb (prix Nobel de Physique 1955 pour ses travaux sur la structure fine du spectre d'hydrogène) en (1964)[39]. La théorie de Lamb est basée sur une analyse auto-compatible (self-consistant) faisant intervenir l'interaction d'un champ électromagnétique oscillant dans une cavité avec un milieu excité dont les atomes subissent des transitions à la fréquence d'oscillation du champ dans la cavité. L'une des limites du modèle de Lamb est qu'il considère la polarisation du milieu comme une variable qui suit de façon adiabatique les variations du champ électrique. Si ce schéma correspond bien à ce qui se passe dans de nombreux systèmes stables, il n'en est rien pour les systèmes instables pour lesquels l'évolution de la polarisation suit des variations propres caractérisées par une constante de temps typique. De ce fait, ces systèmes sont caractérisés par trois variables d'état: le champ électrique, la polarisation et l'inversion de population du milieu. Ces limites sont contournées par la formulation quantique du modèle semi classique par Haken (1966) [23] et Risken Schmidt et Weidlich (1966) [24] qui ont permis de retrouver les mêmes conditions de fonctionnement instable déjà indiquées par Uspenskiy (1963) [18] Korobkin

et Uspenskiy (1964)[19] Uspenskiy (1964)[20] Grasyuk et Orayevskiy(1964)[21] en effectuant une analyse de stabilité linéaire. Les articles de Risken et Nummedal (1968)[25,26] sur le comportement «self-pulsing» intrinsèque du laser (pulsations sans aucune contribution d'une modulation extérieure) révèlent les conditions de transition d'un signal continu à un signal pulsé dans le cas d'un fonctionnement multimode.

Par un choix approprié des paramètres de contrôle, la résolution numérique des équations semi-classique réalisée pour la première fois par Buley et Cumming [27] montre un signal pulsé erratique, l'évidence même de l'existence d'un chaos déterministe pour les lasers chose qui a été mise à l'écart par les scientifiques, bien que le chaos était perçu dans le domaine de l'hydrodynamique à travers les investigations de Lorenz en 1963[29].

Il a fallu attendre 1975 et l'identification par Haken [28] d'une équivalence formelle entre les équations semi-classiques qui décrivent le comportement dynamique d'un laser monomode à élargissement homogène et les équations de Lorenz, dont l'étude avait été l'objet d'une attention particulière puisque qu'il constituait la première preuve de l'existence d'un système physique non linéaire sujet de comportement chaotique déterministe.

Cette réévaluation a permis l'utilisation du laser comme outil d'étude dans le domaine des systèmes dynamiques non linéaires et de confronter les résultats trouvés théoriquement avec ceux observés dans les laboratoires, tout particulièrement pour l'étude des routes qui mènent vers le chaos, un sujet qui reste d'actualité. Il est à noter que l'ordinateur a été d'une très grande contribution pour le perfectionnement des études faites durant toutes ces années et même aujourd'hui vu sa grande capacité de stockage et sa rapidité pour effectuer des calculs de plus en plus nombreux sur des durées de plus en plus courtes. .

L'instabilité dans les lasers se manifeste à partir d'une valeur critique du taux de pompage au-delà de laquelle ils passent d'un fonctionnement stable (intensité constante) à un signal pulsé régulier ou sans aucune périodicité. Afin d'éviter toute confusion, ce point est appelé «deuxième seuil laser» par opposition au premier seuil qui indique le niveau d'excitation nécessaire pour que l'effet laser s'installe dans une cavité résonante contenant un milieu amplificateur. Dans le domaine de l'étude des systèmes dynamiques ces deux points font référence à un phénomène de transition de phase.

Conformément au modèle Lorenz, le laser devrait passer d'un état stable à un état chaotique d'une façon discontinue à travers une bifurcation Hopf sous-critique[40,41,32,33]. Une telle discontinuité n'a pas été tout à fait bien observée dans les expériences. Cette difficulté provient du fait que le seuil d'instabilité du laser à élargissement homogène, dans des conditions les plus favorables, se situe à des niveaux supérieurs à 10 fois le premier seuil

laser. Ces niveaux extrêmement élevés rendent l'observation de ces instabilités des lasers monomode à élargissement homogène quasiment impossible. Parallèlement à l'évolution du sujet de dynamique laser en élargissement homogène, d'autres observations expérimentales relatives à un fonctionnement pulsé, avec des seuils bien plus bas, avaient été rapportées par Casperson et Yariv dès 1972 [42] dans les systèmes à élargissement inhomogène. Ces observations avaient été d'abord attribuées à des oscillations de relaxation à faibles pertes, signature de tout état transitoire qui accompagne un état perturbé stable. Mais il a fallu vite se rendre à l'évidence que ces oscillations traduisaient un comportement dynamique qui allait bien au-delà du simple phénomène de relaxation.

De nombreuses années se sont écoulées avant qu'une modélisation théorique convaincante ne soit élaborée. Il est clair maintenant que les lasers à élargissement inhomogène sont des systèmes dynamiques dont le seuil d'instabilité est bien plus bas que celui des lasers à élargissement homogène, ce qui explique l'observation de signaux pulsés bien avant une modélisation théorique adéquate par Casperson [42,43]. En plus de la condition sur le seuil d'instabilité, les constantes de temps des trois variables dynamiques doivent aussi satisfaire la condition contraignante de mauvaise cavité. D'où la difficulté d'observation d'états instables dans les lasers.

En revanche les lasers moléculaires qui émettent dans l'infrarouge lointain, selon les études sur la classe des lasers, sont les seuls à pouvoir vérifier les deux conditions d'instabilité relatives à la mauvaise cavité et au fort taux de pompage sans réajustement expérimental [44-48,60,71,69,75]. Néanmoins des mesures de précautions expérimentales [49,50,71,69] sont à prendre pour éviter l'apparition d'effets qui font obstacle à l'observation des instabilités propres au modèle de Lorenz [51]. La plupart des expériences illustrent le passage d'un fonctionnement continu vers des régimes pulsés périodiques [52,53].

Parallèlement à ces travaux expérimentaux sur le laser de Lorenz, on cite l'apport de Zeghlache et Mandel[70,72] sur le plan théorique, avec ou sans detuning (désaccord entre la fréquence de pompage et celle du laser). Ces études ont été vérifiées expérimentalement par l'équipe de Carl Weiss [60,63] qui ont confirmé la concordance entre les résultats théoriques et expérimentaux.

Sargent et Hendow [54,55] en optant pour la même méthode de décomposition dans le domaine des fréquences qu'avait employé Casperson[56,57,58] dans son étude sur le phénomène des pulsations observées dans les lasers à élargissement inhomogène, ont retrouvé les mêmes conditions d'instabilités que celles que procure l'analyse de stabilité linéaire et attribuent l'origine physique des régimes pulsés observés à l'unique pulsation de la différence

de populations [59,54,55]. Il est à noter que les trois variables qui gouvernent la dynamique des lasers, à savoir le champ électrique, la polarisation et l'inversion de population ont le même poids dans le modèle de Lorenz-Haken. De ce fait, attribuer les régimes périodiques observés à l'unique fluctuation de la différence de population paraît très insuffisant.

A partir de ces résultats peu concluants, Naducci et al.[38] ont réexaminé le modèle de Lorenz pour les lasers en considérant des taux de relaxation de l'inversion de population plus faibles par rapport aux paramètres utilisés par Lorenz dans son étude en météorologie. Leurs études dévoilent une zone de paramètres de contrôle où les solutions se traduisent par un régime pulsé périodique et qui peut s'obtenir avec des niveaux d'excitation situés bien en deçà du seuil d'instabilité.

Ces solutions ne peuvent être obtenues avec de faibles perturbations mais nécessitent l'application d'un niveau de pompage bref et intense qui a pour effet de forcer le système à s'installer sur un régime non-adiabatique, communément désigné par régime de «hard excitation». Cette zone est le lieu où deux fonctionnements stables peuvent coexister simultanément. Le premier est l'état stable tel que le prévoit la théorie d'analyse de stabilité linéaire et qui renvoie au signal d'intensité constante, le second fonctionnement peut être obtenu en imposant une forte perturbation au système placé dans l'état précédent et qui réfère à un signal chaotique ou pulsé selon le taux de relaxation de l'inversion de population. En conséquence un état stable par rapport aux petites fluctuations peut devenir instable suite à une forte perturbation. (Notion de bassin d'attraction)

Pour des taux de relaxation de l'inversion de population γ normalisés par rapport aux taux de relaxation de la polarisation supérieurs à 0.2, l'état stationnaire qui est le fonctionnement continu et le signal chaotique cohabitent ensemble dans une région en dessous du deuxième seuil laser. De ce fait un signal chaotique peut être obtenu bien en dessous du seuil prévu par la théorie de perturbation classique.

Pour des faibles valeurs de γ entre 0 et 0.2 le laser enclenche un signal pulsé périodique à partir du deuxième seuil qui peut aussi se présenter en dessous de ce point si l'état continu est fortement perturbé. Cette analyse théorique paraît en accord avec les résultats expérimentaux de [48,52].

Le plus notable apport de Narducci et al [38]. est l'expression analytique de la fréquence de pulsation de l'intensité laser pour des γ très faibles, obtenue par décomposition spectrale du champ laser au premier ordre uniquement et qui s'avère semblable à celle obtenue par résolution numérique.

A notre connaissance jusqu'à aujourd'hui aucune étude approfondie n'a été engagée dans le cadre d'une résolution analytique du modèle de Lorenz Haken en régime de «self-pulsing», à l'exception des travaux de H.Zeghlache [70,72,73,74] et C.Z.Ning et H.Haken [77,79]. La plupart se contentent de vérifier, par rapport aux résultats numériques, les résultats obtenus pour diverses configurations expérimentales qui peuvent engendrer des pulsations périodiques et faire l'étude des routes vers le chaos entreprises par chaque dispositif [60-63]. Il est utile de noter que l'analyse de stabilité linéaire ne donne des informations analytiques que sur l'état transitoire du système et que toutes les tentatives analytiques se sont heurtées à une algèbre complexe et fastidieuse qui n'a guère permis d'aller au-delà de l'analyse au premier ordre proposée par Narducci et al [38].

Ce chapitre propose une approche analytique basée sur un développement en séries de Fourier tout en s'inspirant de l'analyse aux petits signaux, initialement proposée par Casperson et largement améliorée par Hendow et Sargent dans le cadre des systèmes à élargissement inhomogène.

Une décomposition sur une base harmonique du champ, de la polarisation et de l'inversion de population permettra d'étendre les résultats aussi bien au régime transitoire qu'au régime permanent numériquement. En particulier, la considération d'un développement au delà du premier ordre nous permet d'obtenir la fréquence de relaxation du régime transitoire en fonction du paramètre de pompage aussi bien au-delà, qu'en deçà du deuxième seuil laser, expression qu'on pouvait obtenir auparavant qu'au voisinage du point de bifurcation à partir de l'analyse de stabilité linéaire. De plus, la forme des solutions périodiques nous permettra de proposer un développement aux grands signaux qui nous amènera à extraire pour la première fois une expression analytique de la fréquence de pulsations des signaux en régime permanent.

Pouvoir prédire le comportement dynamique d'un système modélisé par des équations couplées fortement non linéaires de dimension trois sans l'utilisation d'un ordinateur et d'une programmation fastidieuse est le grand souhait de tout chercheur et représente un grand pas d'avancement dans le domaine de la prédictibilité qui a tant intrigué la communauté scientifique.

Dire si le système Lorenz-Haken peut présenter des oscillations périodiques dans le temps est possible à partir de notre approche qui nous a permis d'accéder à une deuxième fréquence propre qui peut nous renseigner sans résolution numérique sur cette éventualité. On peut maintenant envisager de parler de prédictibilité un but que s'était fixé Lorenz en mettant en place son modèle pour la prévision météo.

Toutefois une parfaite similitude entre les résultats expérimentaux et théoriques reste toujours un champ de recherche ouvert nécessitant encore de nombreuses contributions, tant la richesse des solutions d'un système aussi simple que celui de Lorenz semble immensément vaste.

III.2 Approche analytique

Dans ce chapitre nous décrirons étape par étape cette méthode décrivant les signaux de grande amplitude et examinerons les résultats qui en découlent.

L'analyse linéaire de stabilité appliquée aux équations de Lorenz Haken faite au chapitre II prédit un fonctionnement instable à partir d'une valeur critique du paramètre de pompage et dans des conditions de fonctionnement de mauvaise cavité. Cette étude permet aussi d'obtenir la fréquence des oscillations au voisinage du deuxième seuil laser. En clair, l'analyse de stabilité linéaire est limitée au voisinage du seuil d'instabilité, aucune information ne peut être obtenue pour des taux de pompage supérieurs au deuxième seuil laser, hormis, bien sûr, celles fournies par l'intégration numérique directe des équations différentielles.

Une première approche analytique aux petits signaux va permettre une étude approfondie du régime transitoire tandis que l'analyse aux grands signaux est adaptée au régime pulsé permanent numériquement qui prend place à la suite du régime transitoire. Nous ne nous contenterons pas seulement de donner des expressions analytiques, mais nous tenterons, au moyen de cette approche, d'expliquer certains comportements dynamiques que le laser monomode exhibe selon les valeurs des paramètres de contrôle.

III.2.1 Régime transitoire

III.2.1.a Résultats numériques

Avant d'entamer le calcul analytique nous allons présenter quelques résultats obtenus par intégration numérique du système d'équations qui régit la dynamique du laser monomode à élargissement homogène [38], déjà évoqué dans le chapitre I (équations I.108), que nous allons réécrire:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t) = -k \{E(t) + 2C P(t)\} \quad \text{III.1.a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t) = -P(t) + E(t)D(t) \quad \text{III.1.b}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D(t) = -\gamma \{D(t) + 1 + E(t)P(t)\} \quad \text{III.1.c}$$

Où $E(t)$ représente le champ électrique dans la cavité laser, $P(t)$ et $D(t)$ sont respectivement la polarisation et l'inversion de population ($N_1 - N_2$) du milieu atomique. Les taux de relaxation du champ électrique k et de l'inversion de la population $\gamma_{\parallel}$ ont été normalisés par rapport à celui de la polarisation $\gamma_{\perp}$:

$$k \rightarrow \frac{k}{\gamma_{\perp}}, \quad \gamma = \frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp}}, \quad t \rightarrow t \gamma_{\perp}$$

$2C = r + 1$ désigne le taux de pompage.

L'évolution temporelle des variables dynamiques $E(t)$, $P(t)$ et $D(t)$ soumises à des petites perturbations autour de l'état stationnaire:

$$E_0 = +\sqrt{2C-1} \quad \text{III.2.a}, \quad D_0 = (N_1 - N_2)_0 = -\frac{1}{2C} \quad \text{III.2.b}, \quad P_0 = -\frac{\sqrt{2C-1}}{2C} \quad \text{III.2.c},$$

juste au-dessus du deuxième seuil laser:

$$2C_{2th} = \frac{(k+1)(k+1+\gamma)}{(k-1-\gamma)} + 1 = r_c + 1 \quad \text{III.3},$$

obtenue moyennant la résolution numérique du système III.2 par la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4, en prenant comme conditions initiales : $E = E_0 + \delta e$, $D = D_0 + \delta d$ et $P = P_0 + \delta p$, avec les paramètres de contrôle $k=3$ $\gamma=0.1$ et $2C=10 > 2C_{2th}=9.63$ (figures III.1.a,b,c), révèle que le laser effectue des relaxations périodiques autour de l'état d'équilibre ($E_0 = 3$, $P_0 = -0.3$, et $D_0 = -0.1$) avec accroissement de l'amplitude de la perturbation avant d'atteindre un régime périodique d'amplitude constante autour d'un état différent de l'état stationnaire.

D'après la figure III.2, où seulement les premières oscillations du régime transitoire ont été représentées, on constate que le champ laser, la polarisation et l'inversion de population oscillent à la même fréquence angulaire qu'on peut d'ailleurs évaluer en utilisant une règle de mesure, ou en effectuant la transformée de Fourier rapide (figure III.2.d) pour les trois tracés temporels. Selon cette figure $E(t)$, $P(t)$ et $D(t)$ oscillent périodiquement en déployant un déphasage entre eux. Ce sont ces points qui sont la base de notre modèle qui va nous permettre d'établir une solution analytique approchée du système III.1

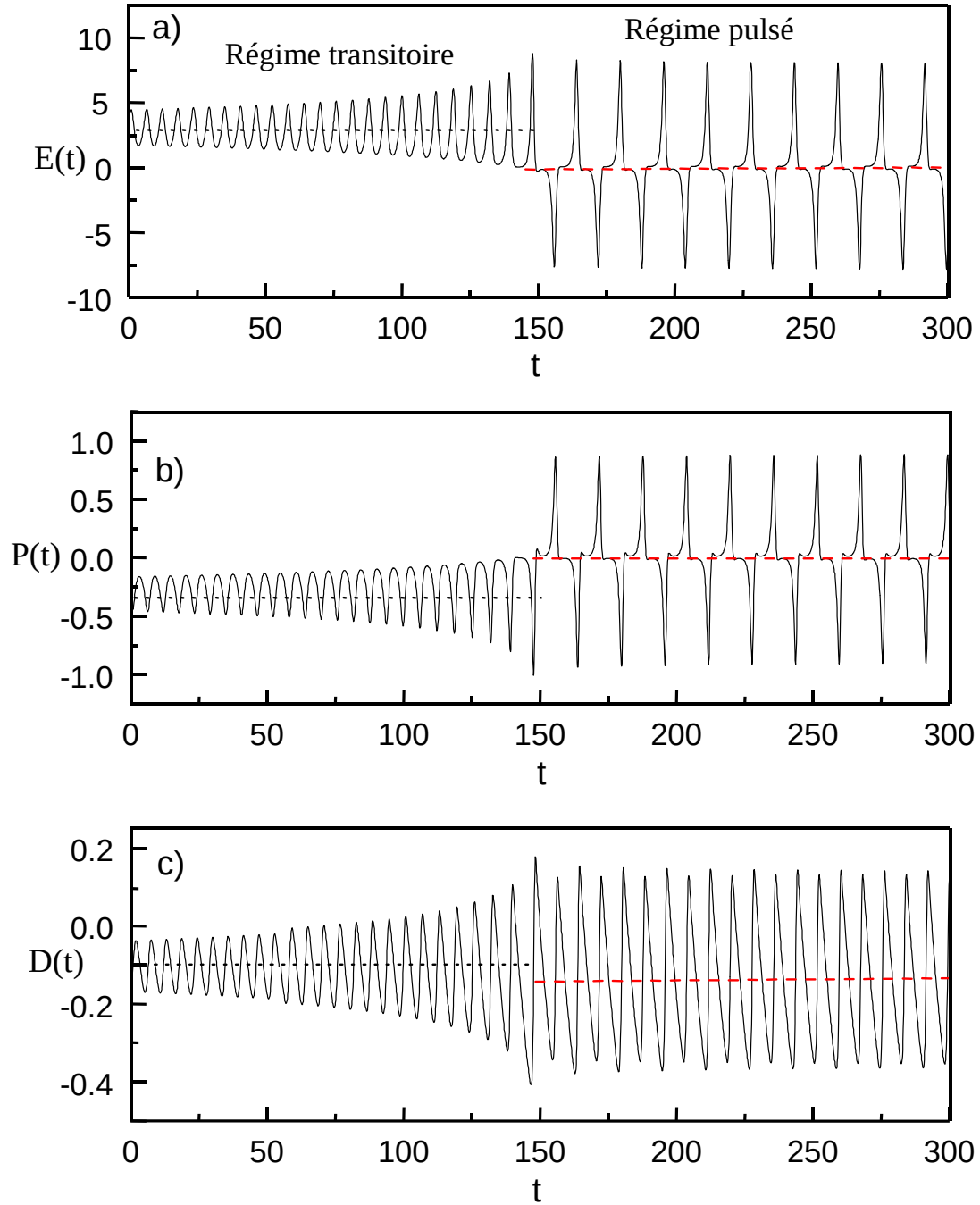


Fig.III.1: Régime transitoire et régime permanent: a) le champ électrique , b) la polarisation et d) l'inversion de population obtenus par intégration du système III.1 pour $k=3$, $\gamma=0.1$ et $2C=10$

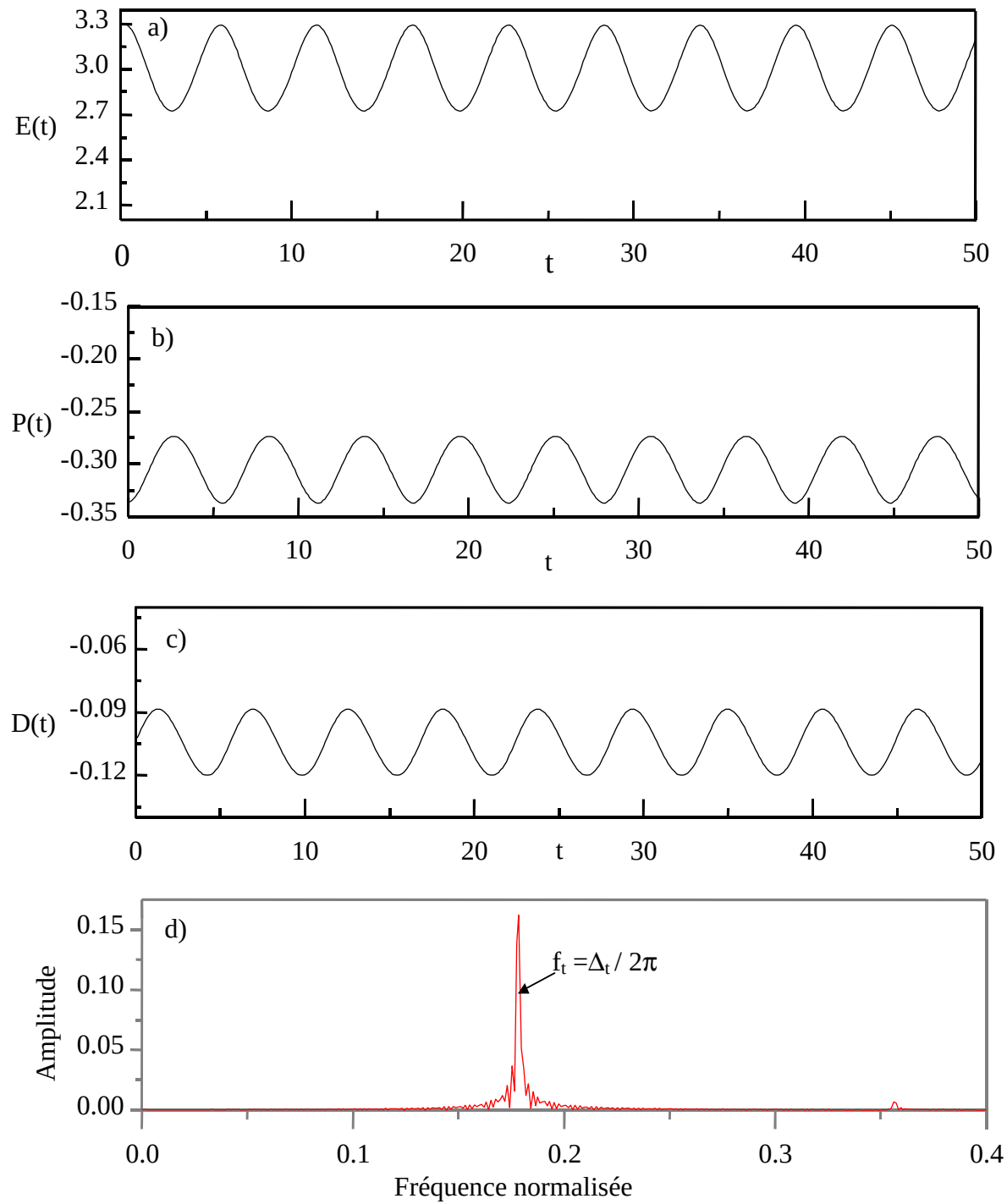


Fig.III.2: Premières oscillations périodiques du régime transitoire de la figure III.1: a) le champ électrique, b) la polarisation et c) l'inversion de population pour $k=3$, $\gamma=0.1$ et $2C=10$ ainsi que d) la FFT des trois signaux

III.2.1.b Procédure

La résolution analytique du système Haken- Lorenz dans le régime transitoire commence par établir une expression analytique approchée des variables dynamiques $E(t)$, $P(t)$ et $D(t)$ en supposant une perturbation qui évolue périodiquement autour de l'état stationnaire au lieu d'une exponentielle (small sideband approach) comme l'avaient antérieurement fait les auteurs des articles [54,55,56,57], à la seule différence que le déphasage existant entre les trois variables dynamiques est pris en compte. Ces expressions analytiques, solutions approchées du système d'équations différentielles II.2, vont être insérées dans ce dernier pour obtenir un système d'équations algébriques ne faisant pas intervenir les dérivées temporelles des variables $E(t)$, $P(t)$ et $D(t)$. C'est la résolution analytique du système obtenu qui va permettre d'atteindre notre but.

III.2.1.c Résolution analytique

En se basant sur les commentaires et les résultats qui découlent de la résolution numérique (paragraphe III.2.1.a) et conformément aux comportements transitoires des figures III.1 et III.2 nous formulons les expressions littérales des variables $E(t)$, $P(t)$ et $D(t)$, solutions approchées du système III.1 dans le régime transitoire qui précède l'état permanent comme suit:

$$E(t) = E_0 + e \cos(\Delta t) \quad \text{III.4.a}$$

$$P(t) = P_0 + p_1 \cos(\Delta t) + p_2 \sin(\Delta t) \quad \text{III.4.b}$$

$$D(t) = D_0 + d_1 \cos(\Delta t) + d_2 \sin(\Delta t) \quad \text{III.4.c}$$

où E_0, P_0, D_0 représentent les valeurs des variables à l'état stationnaire du système III.1 (voir relations III.2), et «e» fait référence à l'amplitude de la perturbation du champ électrique. p_1 et d_1 sont les perturbations respectives de la polarisation et de la différence de population en phase avec «e» alors que p_2 et d_2 désignent respectivement la perturbation de la polarisation et de la différence de population en déphasage par rapport à l'oscillation «e». Δ est la fréquence angulaire avec laquelle les perturbations engendrent un mouvement oscillatoire autour de l'état d'équilibre.

En insérant les équations III.4.a, b et c dans le système Haken-Lorenz III.1 on obtient:

$$-\Delta e \sin(\Delta t) = -\kappa \{E_0 + e \cos(\Delta t) + 2CP_0 + 2Cp_1 \cos(\Delta t) + 2Cp_2 \sin(\Delta t)\} \quad \text{III.5.a}$$

$$-\Delta p_1 \sin(\Delta t) + \Delta p_2 \cos(\Delta t) = -P_0 - p_1 \cos(\Delta t) - p_2 \sin(\Delta t) + (E_0 + e \cos(\Delta t))(D_0 + d_1 \cos(\Delta t) + d_2 \sin(\Delta t)) \quad \text{III.5.b}$$

$$-\Delta d_1 \sin(\Delta t) + \Delta d_2 \cos(\Delta t) = -\gamma \{D_0 + 1 + d_1 \cos(\Delta t) + d_2 \sin(\Delta t)\} - \gamma (E_0 + e \cos(\Delta t))(P_0 + p_1 \cos(\Delta t) + p_2 \sin(\Delta t)) \quad \text{III.5.c}$$

En égalisant les coefficients ayant le même cosinus et sinus on aboutit à un système algébrique de six équations à six inconnues qu'on peut résoudre par la méthode de substitution

$$\Delta e = \kappa 2Cp_2 \quad \text{III.6}$$

$$e = -2Cp_1 \quad \text{III.7}$$

$$-\Delta p_1 = -p_2 + E_0 d_2 \quad \text{III.8}$$

$$\Delta p_2 = -p_1 + E_0 d_1 + D_0 e \quad \text{III.9}$$

$$\Delta d_1 = \gamma d_2 + \gamma E_0 p_2 \quad \text{III.10}$$

$$\Delta d_2 = -\gamma d_1 - \gamma E_0 p_1 - \gamma P_0 e \quad \text{III.11}$$

Dans ce qui suit nous verrons que la résolution de ce système donne l'expression analytique de la fréquence de relaxation du laser monomode à élargissement homogène dans le domaine stable et instable

III.2.1.d Expression analytique de la fréquence de relaxation

Afin de parvenir à l'expression littérale de la fréquence d'oscillation pour le laser dans son régime transitoire on se propose de résoudre le système précédent par la méthode de substitution, tâche qu'on peut aussi accomplir et écourter en se servant du logiciel de calcul symbolique Mathematica [78].

Commençons par extraire les expressions de d_1 et d_2 à partir III.10 et III.11

$$d_1 = -\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta^2} \left\{ E_0 p_1 + E_0 e - \frac{\Delta}{\gamma} E_0 p_2 \right\} \quad \text{III.12}$$

$$d_2 = -\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta^2} \left\{ E_0 p_2 + \frac{\Delta}{\gamma} (E_0 p_1 + P_0 e) \right\} \quad \text{III.13}$$

En introduisant ces deux équations dans III.8 et III.9 nous en déduisons

$$\left\{-\Delta + \frac{\Delta\gamma}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0^2\right\} p_1 + \left\{1 + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0^2\right\} p_2 = -\frac{\Delta\gamma}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0 P_0 e \quad \text{III.14}$$

$$\left\{1 + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0^2\right\} p_1 - \left\{-\Delta + \frac{\Delta\gamma}{\lambda^2 + \Delta^2} E_0^2\right\} p_2 = \left(-\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0 P_0 + D_0\right) e \quad \text{III.15}$$

$$p_2 = \frac{\left(-\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0 P_0 + D_0\right) \left\{-\Delta + \frac{\Delta\gamma}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0^2\right\} + \left\{1 + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0^2\right\} \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0 P_0\right)}{\left\{-\Delta + \frac{\Delta\gamma}{\lambda^2 + \Delta^2} E_0^2\right\}^2 - \left\{1 + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0^2\right\}^2} e \quad \text{III.16}$$

$$p_1 = \frac{\left(-\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0 P_0 + D_0\right) \left\{1 + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0^2\right\} + \left\{-\Delta + \frac{\Delta\gamma}{\lambda^2 + \Delta^2} E_0^2\right\} \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0 P_0\right)}{\left\{-\Delta + \frac{\Delta\gamma}{\lambda^2 + \Delta^2} E_0^2\right\}^2 - \left\{1 + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0^2\right\}^2} e \quad \text{III.17}$$

Le rapport des deux relations III.6 et III.7:

$$\frac{\Delta}{\kappa} = -\frac{p_2}{p_1} = \frac{\left(-\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0 P_0 + D_0\right) \left\{-\Delta + \frac{\Delta\gamma}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0^2\right\} + \left\{1 + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0^2\right\} \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0 P_0\right)}{\left(-\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0 P_0 + D_0\right) \left\{1 + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0^2\right\} + \left\{-\Delta + \frac{\Delta\gamma}{\lambda^2 + \Delta^2} E_0^2\right\} \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma^2 + \Delta^2} E_0 P_0\right)} \quad \text{III.18}$$

et l'introduction des expressions de l'état stationnaire III.2 nous conduit à la fréquence de pulsation du transitoire $\Delta = \Delta_t$ formulée comme suit:

$$\Delta_t = \sqrt{\frac{(2C-1)^2 \gamma^2 + (2C-1)k\gamma(2+\gamma) - (k+1)\gamma^2}{(2C-1)\gamma + (k+1)}} \quad \text{III.19}$$

Cette expression est singulière et représente un résultat original du fait qu'elle nous permet d'avoir la pulsation des oscillations transitoires quel que soit le taux de pompage 2C donc en dessous et au-dessus du deuxième seuil d'instabilité, dans le domaine stable et instable, à la différence de l'expression trouvée par l'analyse de stabilité linéaire (II.43):

$$\Delta_{t0} = \sqrt{\frac{2\gamma k(k+1)}{(k-1-\gamma)}} \quad \text{III.20}$$

L'expression III.19 est plus générale que III.20: en effet, on remplace le taux de pompage $2C$ par sa valeur au seuil d'instabilité soit $2C_{2th}$ (III.3) ce qui revient à:

$$\Delta_t^2(2C_{2th}) = \frac{\frac{(k+1)^2(k+1+\gamma)^2}{(k-1-\gamma)^2} \gamma^2 + \frac{(k+1)(k+1+\gamma)}{(k-1-\gamma)} k\gamma(2+\gamma) - (k+1)\gamma^2}{\frac{(k+1)(k+1+\gamma)}{(k-1-\gamma)} \gamma + (k+1)} \quad \text{III.21.a}$$

$$\Delta_t^2 = \frac{(k+1)(k+1+\gamma)^2 \gamma^2 + (k-1-\gamma)(k+1+\gamma)k\gamma(2+\gamma) - (k-1-\gamma)^2 \gamma^2}{(k-1-\gamma)(k+1+\gamma)\gamma + (k-1-\gamma)^2} \quad \text{III.21.b}$$

$$\Delta_t^2 = \frac{(k+1)(k+1+\gamma)^2 \gamma^2 + (k-1-\gamma)(k+1)\gamma(2k+k\gamma+\gamma^2+\gamma)}{(k-1-\gamma)(k+1+\gamma)\gamma + (k-1-\gamma)^2} \quad \text{III.21.c}$$

$$\Delta_t^2 = \frac{(k+1)(k+1+\gamma)^2 \gamma^2 + (k-1-\gamma)(k+1)2\gamma k + (k-1-\gamma)(k+1)\gamma^2(k+1+\gamma)}{(k-1-\gamma)(k+1+\gamma)\gamma + (k-1-\gamma)^2} \quad \text{III.21.d}$$

$$\Delta_t^2 = \frac{2\gamma k(k+1)[(k+1+\gamma)\gamma + (k-1-\gamma)]}{(k-1-\gamma)[(k+1+\gamma)\gamma + (k-1-\gamma)]} \quad \text{III.21.e}$$

$$\Delta_t(2C_{2th}) = \sqrt{\frac{2\gamma k(k+1)}{(k-1-\gamma)}} = \Delta_{t0} \quad \text{III.21.f}$$

Ceci fait au seuil d'instabilité, confrontons maintenant la relation III.19 aux résultats numériques du paragraphe III.2.1.a effectués avec les valeurs suivantes $k = 3$ et $\gamma = 0.1$ pour $2C = 10$.

L'état transitoire du système III.1 est indiqué par les figures III.2.a, b et c où seulement les premiers pulses ont été représentés pour s'assurer d'avoir une pulsation monochromatique, en effet le système s'écarte de son état stationnaire en effectuant autour de ce dernier des oscillations transitoires pseudo périodiques. La transformée de Fourier de ces signaux (figure III.2.d) montre un pulse à la fréquence angulaire $\Delta_t = 1.13$ qui est quasiment identique à celle obtenue par la formule III.19 $\Delta_t = 1.14$.

III.2.1.e Comparaison analytique numérique

Afin de prouver l'exactitude de l'expression analytique III.19 pour toute valeur de l'énergie d'excitation $2C$ nous allons tracer sur la même courbe (figure III.3) les valeurs des fréquences de relaxation des oscillations en deçà et au delà du seuil d'instabilité dans la zone stable et instable, trouvées par intégration numérique du système III.1 (points en cercles) et ceux obtenus par la relation III.19 (trait plein).

La Figure III.3 dévoile une parfaite similitude entre les valeurs analytiques et numériques et démontre ainsi que la relation analytique III.19 est une bonne voire même une très bonne approximation et de ce fait cette approche est bien supérieure à celle de l'analyse de stabilité linéaire.

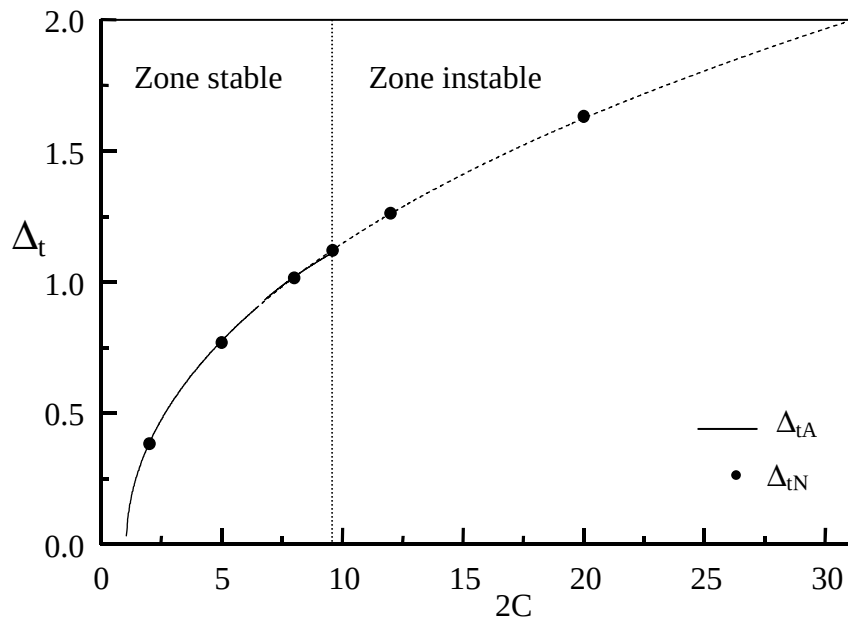


Fig.III.3: Fréquences des premières oscillations du régime transitoire en fonction de $2C$ pour $k=3$ et $\gamma=0.1$. Les fréquences correspondant à l'équation III.19 (trait plein), approchent parfaitement les valeurs obtenues par intégration numérique du système III.1 (points en cercles).

La résolution de l'équation II.31 suivante:

$$\lambda^3 + (k + \wp_{\perp} + \wp_{\parallel})\lambda^2 + \wp_{\parallel}(k + \wp_{\perp}(1+r))\lambda + 2k\wp_{\parallel}\wp_{\perp}r = 0$$

à l'aide du logiciel de calcul Mathematica, nous a permis d'obtenir les fréquences Δ_t en fonction de $r = 2C-1$, que nous avons reportées sur la figure.III.4 par des points en cercles.

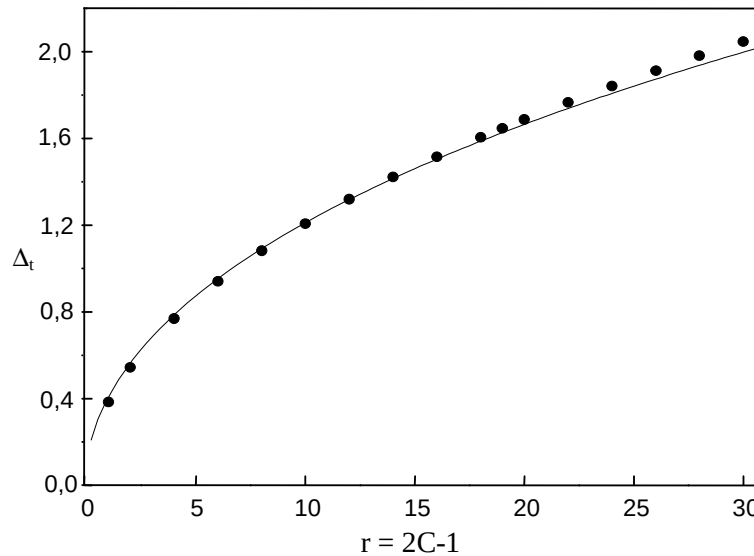


Fig.III.4: Fréquences des premières oscillations du régime transitoire en fonction de $2C$ pour $k=3$ et $\gamma=0.1$. Les fréquences correspondant à l'équation III.19 sont en trait plein et les valeurs obtenues par l'analyse de stabilité linéaire sont en points en cercles.

Cette figure montre un bon accord entre les fréquences analytiques (trait plein) et celles issues de l'analyse de stabilité linéaire, pour des taux pompes $2C$ inférieurs à 15. Au delà de cette valeur les solutions obtenues par l'analyse de stabilité linéaires sont légèrement supérieures à celle de l'approche analytique.

On en conclut que la fréquence analytique III.19 décrit parfaitement les premières oscillations périodiques du régime transitoire, que le laser modélisé par le système laser III.1, effectue autour de son état stationnaire avant d'atteindre un état permanent.

III.2.2 Régime auto pulsé

Il est à noter que l'expression III.19 ne représente en aucun cas la fréquence de pulsation dans le régime qui s'installe après le transitoire, d'ailleurs on voit bien apparaître des figures III.1.a et III.1.b pour le régime permanent que le champ et la polarisation oscillent autour de zéro alors que dans le transitoire les oscillations ont lieu autour de l'état stationnaire. L'inversion de population oscille autour d'une position moyenne différente de l'état stationnaire (figure III.1.c). A partir de ces distinctions on va adopter un autre raisonnement pour retrouver l'expression de la fréquence de pulsation du champ laser lorsque ce dernier présente des oscillations périodiques autour de zéro au delà du seuil d'instabilité $2C_{2th}$

III.2.2.a Résolution numérique

La figure III.5 présente un type de fonctionnement pulsé obtenu par résolution numérique du système III.1 avec les paramètres de contrôle $k=3$, $\gamma = 0.1$ pour $2C = 10$. A côté de chaque évolution temporelle on a représenté le spectre de Fourier qui lui correspond. On note tout particulièrement des figures III.5.a et b l'évolution périodique du champ laser et de la polarisation qui s'effectue autour d'une valeur moyenne égale à zéro différente des valeurs stationnaires III.2

$$\langle E(t) \rangle = 0 \neq E_0 = 3 \quad \text{III.22.a}$$

$$\langle P(t) \rangle = 0 \neq P_0 = -0.3 \quad \text{III.22.b}$$

On constate d'après les spectres de fréquences fig.III.5.d et e la présence d'harmoniques d'ordre impaire en plus de la fréquence fondamentale. D'autre part la différence de population (figure III.5.c) oscille périodiquement autour d'une valeur constante différente de celle de son état stationnaire

$$\langle D(t) \rangle \neq D_0 = -0.1 \quad \text{III.22.c}$$

en révélant des harmoniques d'ordre pair dans le domaine spectral (figure III.5.f).

La présence de ces harmoniques est signe de l'importance de l'interaction non-linéaire qui a lieu entre ces trois variables dynamiques qui gouvernent le fonctionnement de ce laser.

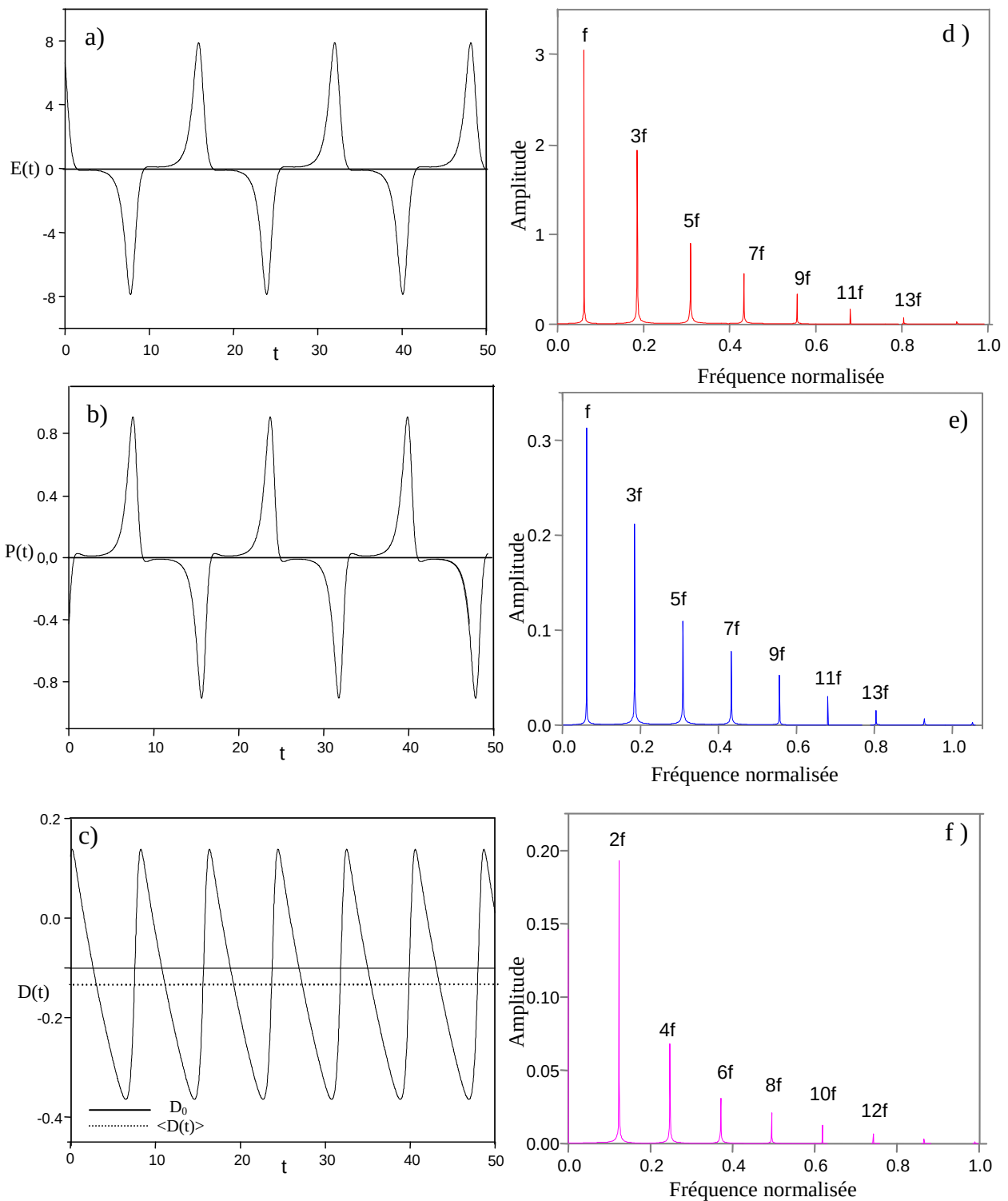


Fig.III.5: Evolutions temporelles a) le champ électrique, b) la polarisation et c) l'inversion de population obtenues par intégration du système III.1 ainsi que les FFT e) , f) et d) correspondant a chaque signal pour $k=3$, $\gamma=0.1$ et $2C=10$. On souligne la présence d'une composante continue à $f=0$ dans le spectre d), due à l'oscillation de $D(t)$ autour d'une valeur différente de zéro.

III.2.2.b Résolution analytique

Dans ce qui va suivre nous allons étendre notre méthode analytique au-delà du transitoire dans le but d'acquérir plus d'informations possibles sur le fonctionnement du laser. La démarche consiste à décomposer les variables dynamiques du système laser sur la base de ses harmoniques. Ceci est possible dans le cas où le signal émis par le laser est sous forme de pulsations périodiques.

Les grandes lignes de notre procédé se basent sur les observations préalablement faites au paragraphe III.2.1.c qui suggèrent d'écrire les solutions analytiques du système III.1 sous forme d'une sommation d'harmoniques d'ordre impair pour le champ et la polarisation et d'ordre pair pour l'inversion de population sans oublier de mettre en évidence la constante autour de laquelle ces pulsations évoluent, ce qui conduit à:

$$E(t) = \sum_n E_n \cos(n\Delta t) \quad n = 1,3,5, \quad \text{III.22.a}$$

$$P(t) = \sum_n (P_1)_n \cos(n\Delta t) + (P_2)_n \sin(n\Delta t) \quad n = 1,3,5, \quad \text{III.22.b}$$

$$D(t) = d_c + \sum_n (D_1)_n \cos(n\Delta t) + (D_2)_n \sin(n\Delta t) \quad n = 2,4,6, \quad \text{III.22.c}$$

Ces relations vont être introduites dans le système III.1 et on doit résoudre le système algébrique qui en découle par identification des membres ayant le même sinus et cosinus. Amorçons d'abord les calculs en se limitant à l'ordre 3 pour le champ et la polarisation, et à l'ordre 2 pour l'inversion de population ce qui revient à poser:

$$E(t) = E_1 \cos(\Delta t) + E_3 \cos(3\Delta t) \quad \text{III.23.a}$$

$$P(t) = P_1 \cos(\Delta t) + P_2 \sin(\Delta t) + P_3 \cos(3\Delta t) + P_4 \sin(3\Delta t) \quad \text{III.23.b}$$

$$D(t) = d_c + D_3 \cos(2\Delta t) + D_4 \sin(2\Delta t) \quad \text{III.23.c}$$

On souligne que le fait de se limiter à l'ordre 3 pour le champ III.23.a limite le développement à l'harmonique 2Δ dans l'expression de l'inversion de population III.23.b ceci n'est que le résultat de battement de fréquence entre l'ordre un et l'ordre trois qui figurent dans l'expression du champ électrique III.23.a.

L'insertion des relations III.23 dans le système III.1 donne:

$$-\Delta E_1 \sin(\Delta t) - 3\Delta E_3 \sin(3\Delta t) = -\kappa \left\{ \begin{array}{l} E_1 \cos(\Delta t) + E_3 \cos(3\Delta t) + 2CP_1 \cos(\Delta t) + \\ 2CP_2 \sin(\Delta t) + 2CP_3 \cos(3\Delta t) + 2CP_4 \sin(3\Delta t) \end{array} \right\} \quad \text{III.24.a}$$

$$\begin{aligned} -\Delta P_1 \sin(\Delta t) + \Delta P_2 \cos(\Delta t) - 3\Delta P_3 \sin(3\Delta t) + 3\Delta P_4 \cos(3\Delta t) = \\ \left\{ \begin{array}{l} -P_1 \cos(\Delta t) - P_2 \sin(\Delta t) - P_3 \cos(3\Delta t) - P_4 \sin(3\Delta t) \\ + d_c E_1 \cos(\Delta t) + \frac{E_1 D_3}{2} (\cos(\Delta t) + \cos(3\Delta t)) + \frac{E_1 D_4}{2} (\sin(\Delta t) + \sin(3\Delta t)) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad \text{III.24.b}$$

$$\begin{aligned} -2\Delta D_3 \sin(2\Delta t) + 2\Delta D_4 \cos(2\Delta t) = \\ -\gamma \left\{ \begin{array}{l} d_c + 1 + D_3 \cos(2\Delta t) + D_4 \sin(2\Delta t) + (E_1 \cos(\Delta t) + E_3 \cos(3\Delta t)) \\ (P_1 \cos(\Delta t) + P_2 \sin(\Delta t) + P_3 \cos(3\Delta t) + P_4 \sin(3\Delta t)) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad \text{III.24.c}$$

et l'identification des coefficients ayant le même cosinus et sinus nous conduit à ce système d'équations à résoudre

$$-\Delta E_1 = -\kappa 2CP_2 \quad \text{III.25}$$

$$E_1 = -2CP_1 \quad \text{III.26}$$

$$E_3 = -2CP_3 \quad \text{III.27}$$

$$-3\Delta E_3 = -\kappa 2CP_4 \quad \text{III.28}$$

$$-\Delta P_1 = -P_2 + \frac{E_1 D_4}{2} \quad \text{III.29}$$

$$-3\Delta P_3 = -P_4 + \frac{E_1 D_4}{2} \quad \text{III.30}$$

$$\Delta P_2 = -P_1 + d_c E_1 + \frac{E_1 D_3}{2} \quad \text{III.31}$$

$$3\Delta P_4 = -P_3 + \frac{E_1 D_3}{2} \quad \text{III.32}$$

$$d_c = -1 - \frac{E_1 P_1}{2} - \frac{E_3 P_3}{2} \quad \text{III.33}$$

$$2\Delta D_3 = \gamma \left(D_4 + \frac{E_1 P_2}{2} + \frac{E_1 P_4}{2} - \frac{E_3 P_2}{2} \right) \quad \text{III.34}$$

$$2\Delta D_4 = -\gamma \left(D_3 + \frac{E_1 P_1}{2} + \frac{E_1 P_3}{2} + \frac{E_3 P_1}{2} \right) \quad \text{III.35}$$

III.2.2.c Détermination de la fréquence de pulsation

On adopte la même méthode et le même cheminement entrepris dans le régime transitoire pour résoudre le système précédent. A partir des 3 dernières équations on trouve les composantes de l'inversion de population en fonction des différents ordres de la polarisation et du champ,

$$D_3 = -\frac{2\Delta\gamma}{\gamma^2 + 4\gamma^2} \left\{ \left(\frac{\gamma}{2\Delta} (P_1 + P_3) - (P_2 + P_4) \right) \frac{E_1}{2} + \left(\frac{\gamma}{2\Delta} P_1 + P_2 \right) \frac{E_3}{2} \right\} \quad \text{III.36}$$

$$D_4 = -\frac{2\Delta\gamma}{\gamma^2 + 4\gamma^2} \left\{ \left(\frac{\gamma}{2\Delta} (P_2 + P_4) + (P_1 + P_3) \right) \frac{E_1}{2} + \left(P_1 - \frac{\gamma}{2\Delta} P_2 \right) \frac{E_3}{2} \right\} \quad \text{III.37}$$

L'introduction de ces composantes et III.33 dans les relations III.29, III.30, III.31, III.32 procure:

$$P_1 = -\Gamma_d E_1 + \Gamma_d T_{1d} \left(\gamma^2 (1 - \Delta^2) - 4\gamma\Delta^2 \right) \frac{E_1^3}{4} \quad \text{III.38.a}$$

$$P_2 = -\Delta\Gamma_d E_1 + 2\Gamma_d T_{1d} \wp \Delta \left(1 + \wp - \Delta^2 \right) \frac{E_1^3}{4} \quad \text{III.38.b}$$

$$P_3 = \Gamma_d T_{3d} \left\{ \gamma^2 (1 - 3\Delta^2) - 8\gamma\Delta^2 \right\} \frac{E_1^3}{4} \quad \text{III.38.c}$$

$$P_4 = \Gamma_d T_{3d} 2\Delta\gamma \left\{ 1 + 2\gamma - 3\Delta^2 \right\} \frac{E_1^3}{4} \quad \text{III.38.d}$$

où

$$\Gamma_d = \frac{1}{1 + \Delta^2 + \frac{E_1^2}{2}} \quad \text{III.39.a}$$

$$T_{3d} = \frac{1}{(1 + 9\Delta^2)(\gamma^2 + 4\Delta^2)} \quad \text{III.39.b}$$

$$T_{1d} = \frac{1}{(1 + \Delta^2)(\gamma^2 + 4\Delta^2)} \quad \text{III.39.c}$$

A partir de III.26 et III.38.a on arrive à:

$$E_1 = -2C \left[-\Gamma_d E_1 + \Gamma_d T_{1d} \left(\gamma^2 (1 - \Delta^2) - 4\gamma\Delta^2 \right) \frac{E_1^3}{4} \right] \quad \text{III.40}$$

de là, on obtient

$$2C = \frac{1}{-\Gamma_d + \Gamma_d T_{1d} \left(\gamma^2 (1 - \Delta^2) - 4 \gamma \Delta^2 \right) \frac{E_1^2}{4}} \quad \text{III.41}$$

Le rapport des relations III.25 sur III.26 et III.38.a sur III.38.b conduit à

$$\frac{\Delta}{k} = -\frac{P_2}{P_1} = -\frac{-\Delta + 2 T_{1d} \gamma \Delta (1 + \gamma - \Delta^2) \frac{E_1^2}{4}}{-1 + T_{1d} \left(\gamma^2 (1 - \Delta^2) - 4 \gamma \Delta^2 \right) \frac{E_1^2}{4}} \quad \text{III.42}$$

A partir III.42 et III.39.c on retient l'expression du premier ordre du champ:

$$\frac{E_1^2}{4} = \frac{(k+1) (\gamma^2 + 4\Delta^2)(1 + \Delta^2)}{2k \gamma (1 + \gamma - \Delta^2) + \gamma^2 (1 - \Delta^2) - 4 \gamma \Delta^2} \quad \text{III.43}$$

et en utilisant cette relation et III.41, III.39.a, III.39.c on obtient l'expression de la fréquence de pulsation en fonction du paramètre d'excitation

$$\Delta = \sqrt{\frac{(2C-1)k\gamma(2+\gamma) - 3(k+1)\gamma^2}{8(k+1) - \gamma(2k+\gamma+4)}} \quad \text{II.44}$$

qui dépend du niveau de pompage et des vitesses de relaxation des variables dynamiques. On attire l'attention qu'une telle expression analytique n'a jamais été donnée jusqu'à présent et ne figure dans aucun livre qui traite la physique des lasers, étant donné que cela n'est possible que par notre méthode originale basée sur le développement harmonique des variables dynamiques qui rentrent en interaction dans le milieu laser.

A notre connaissance aucune approche analytique n'a été, jusqu'à présent, entreprise pour obtenir l'expression de la fréquence de pulsation dans le domaine de fonctionnement stable ou instable du laser à l'exception de Narducci et al [38]. qui sont parvenus à l'expression:

$$\Delta = \sqrt{\frac{(2C-1)k\gamma}{4(k+1)}} \quad \text{III.45}$$

qui est exclusivement valable dans le domaine instable pour des valeurs de γ très faibles qu'on peut d'ailleurs retrouver à partir de notre expression en considérant des $\gamma \ll 1$.

On vérifie que la fréquence des pulses représentée en figure III.5.a peut être évaluée par l'expression analytique III.44. Le spectre de fréquences de la figure III.5.d indique que les oscillations se font à la fréquence angulaire $\Delta_N \approx 0.39$ valeur très proche de celle évaluée à partir de III.44 qui vaut $\Delta \approx 0.42$. On conclut que l'expression III.42 donne la fréquence de pulsation du laser dans un domaine des paramètres de contrôle au dessus du seuil d'instabilité.

III.2.2.d Comparaison numérique analytique

Le tracé de la fréquence analytique III.44 (trait plein) en fonction du niveau de pompage $2C$ pour les taux de relaxations $k=3$ et $\gamma=0.1$ (Figure III.6) s'accorde parfaitement avec les valeurs des pulsations trouvées par intégration numérique du système III.1 (points en cercles) au dessus du deuxième seuil laser $2C_{2th}=9.63$ dans le cas d'une perturbation infinitésimale.

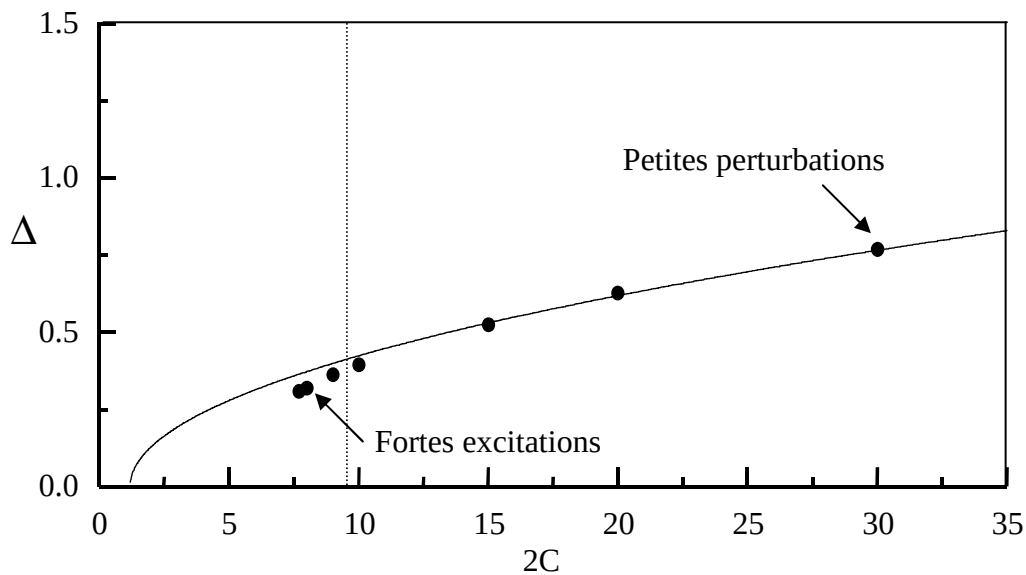


Fig.III.6: Fréquences du régime permanent évaluées à partir de l'équation III.44 (trait plein) approchent bien les valeurs obtenues par intégration numérique du système III.1 (points en cercles) pour des taux de pompage supérieurs à $2C_{2th}$ dans le cas $k=3$ et $\gamma=0.1$.

D'autre part pour des taux de pompage en dessous de $2C_{th2}$, dans le cas d'une forte perturbation, les valeurs analytiques sont inférieures à celles trouvées numériquement.

Rappelons que le laser peut fonctionner en régime pulsé en dessous du deuxième seuil d'instabilité prévu par l'analyse de stabilité linéaire si le système est fortement déstabilisé de son état stationnaire [76] (hard excitation), ceci peut justifier l'emplacement des points en cercle en dessous de la courbe en trait plein. Cet écart en fréquence est probablement dû à la dissipation d'énergie dans le système III.1 qui se traduit par une intensité moyenne inférieure à la valeur stationnaire du champ électrique au carré tel qu'on le perçoit dans la Figure III.7.a. Les valeurs moyennes de l'énergie du système dans le régime pulsé sont positionnées sur une droite parallèle à celle de l'énergie du système à l'état stationnaire, cela renvoie en dessous du seuil d'instabilité au phénomène d'hystérésis ou de bistabilité (voir Annexe B) qui a lieu à l'intérieur d'un domaine des paramètres de contrôle où deux attracteurs peuvent coexister : la solution stationnaire représentée par un point fixe dans l'espace des phases et la solution périodique ou chaotique qui n'est autre que le cycle limite ou l'attracteur étrange dans le plan des phases. Au dessus du seuil d'instabilité l'intensité du système est inférieure à l'intensité dans l'état stationnaire (Figure III.7.b).

Cette décroissance d'énergie est clairement constatée sur la courbe III.1.a. En effet le champ électrique s'éloigne de son état stationnaire en effectuant des oscillations de relaxation autour de cet état, pour enfin entreprendre après un laps de temps des oscillations périodiques autour de zéro.

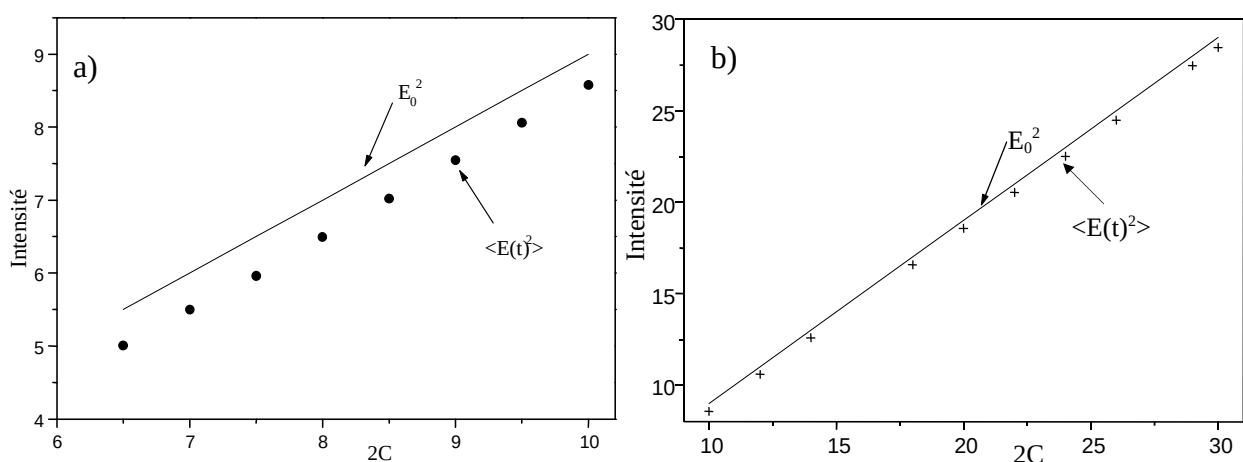


Fig.III.7: Intensité en fonction de $2C$ pour $\gamma=0.1$ et $k=3$. Valeur moyenne de l'intensité inférieure à la valeur stationnaire du champ au carré. a) en dessous du $2C_{th2}$ (hard excitation) b) au-dessus du $2C_{th2}$

III.2.2.e Validité de l'approche analytique

La représentation graphique des deux fréquences numérique et théorique (Figure.III.8.a) réalisée pour $k=4$ et $\gamma=0.1$ affiche un écart aussi bien au delà et qu'en deçà du deuxième seuil laser et dévoile qu'à partir d'un certain niveau du taux de pompage la fréquence analytique III.44 est supérieure à celle obtenue par intégration numérique du système III.1. Donc on ne peut conclure que la dissipation d'énergie (figure.III.8.b) est la seule source de divergence. Il faut aussi mentionner que notre méthode trouve sa validité pour des valeurs de l'excitation $2C_p$ proche du deuxième seuil laser ($2C_{2th}$) (voir les paragraphes qui suivent) et précisément autour de la valeur de k qui minimise le seuil d'instabilité (chapitre VI), pour ce cas on a $2C_p=10.52$ (III.48), $2C_{2th}=9.79$ (III.3) et $k_{min}=3.24$ (II.38). Sans oublier de préciser que cette méthode itérative est basée sur l'introduction des ordres du champ électrique ordre après ordre donc voir ce que peut fournir notre approche en introduisant tous les ordres en bloc serait intéressant.

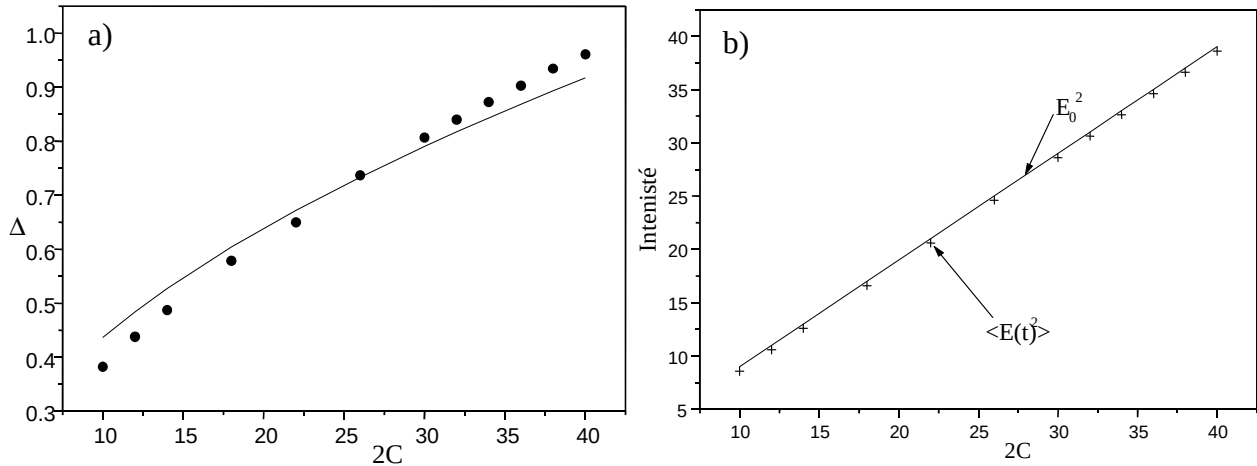


Fig.III.8: a) Fréquences de pulsation déduites de l'équation III.44 (trait plein) différent de celles évaluées par intégration numérique (points en cercles) b) Moyenne de l'intensité inférieure à la valeur stationnaire du champ au carré pour $k=4$ et $\gamma=0.1$

III.3 Fréquence de pulsation propre et zone de prédictibilité

Une autre expression aussi originale que la fréquence de pulsation III.44 qui découle des termes au premier ordre peut être obtenue des termes au troisième ordre en faisant le rapport de III.38.c sur III.38.d et le rapport de III.27 sur III.28. L'égalité de ces deux rapports donne:

$$\frac{3\Delta}{k} = -\frac{P_4}{P_3} = -\frac{2\Delta(1+2\gamma-3\Delta^2)}{\gamma(1-3\Delta^2)-8\Delta^2} \quad \text{III.46}$$

Ces identités mènent à l'expression d'une fréquence propre au système Laser- Lorenz:

$$\Delta_p = \sqrt{\frac{3\gamma+2k(1+2\gamma)}{24+6k+9\gamma}} \quad \text{III.47}$$

Cette fréquence ne fait intervenir que les paramètres intrinsèques du laser à savoir γ et k et ne présente aucune dépendance en $2C$, aspect déjà rencontré en faisant l'analyse de stabilité linéaire où on a pu soustraire la fréquence de relaxation Δ_{t0} qui est une fréquence propre au système.

Cette fréquence propre au système Δ_p va nous permettre de délimiter une zone où le laser effectue des oscillations périodiques et d'accéder à des informations concluantes relatives au régime auto pulsé. Commençons d'abord par trouver le niveau de pompage pour lequel le système entreprend des pulsations périodiques à la fréquence propre Δ_p . Ce niveau est obtenu en mettant Δ (relation III.44) égale à Δ_p (expression III.47. Après des lignes de calcul simple à faire on parvient à l'expression du taux de pompage caractéristique $2C_p$:

$$2C_p = \frac{4(k+1+2\gamma)(2k+3\gamma+4k\gamma)}{3k\gamma(8+2k+3\gamma)} \quad \text{III.48}$$

qui dépend uniquement des taux de relaxation k et γ . Il est à noter que le couple $(2C_p, \Delta)$ réfère aux propriétés propres du système lorsque le laser effectue des oscillations périodiques permanentes de la même manière que le couple $(2C_{2th}, \Delta_t)$ caractérise le début des oscillations autour de l'état stationnaire dans le régime transitoire.

Afin de connaître l'écart existant entre les trois niveaux de pompage le seuil de fonctionnement laser $2C_{1th}=1$, le deuxième seuil laser $2C_{2th}$ et $2C_p$ relatif aux pulsations périodiques à la fréquence propre Δ_p , on trace sur la même figure (figure III.8) les différents taux d'excitation en fonction de k , pour quatre valeurs de γ propre au milieu atomique choisies arbitrairement : $\gamma = 1$, $\gamma = 0.12$, $\gamma = 0.1$ et $\gamma = 0.05$. k schématise les pertes que subit le champ laser à l'intérieur de la cavité, choisi comme paramètre de contrôle du fait qu'on peut manuellement l'accommoder en changeant la réflectivité des miroirs ou la longueur de la cavité,

Dans un souci de simplicité nous avons représenté $2C_{2th}$ pour les trois cas d'étude $\gamma = 0.12$, $\gamma = 0.1$ et $\gamma = 0.05$ par une seule courbe moyenne étant donné que les tracés des trois ne diffèrent que de peu. Cette approximation est aussi justifiée par le fait que la valeur de k (II.38) qui minimise les trois taux de pompage est quasiment identique et vaut environ 3. On souligne d'après la figure III.9 que les deux taux de pompage $2C_{2th}$ et $2C_p$ sont toujours au dessus de $2C_{1th}$ résultat prévisible puisque ce dernier représente le seuil d'obtention de l'effet laser, contrairement à $2C_p$ qui peut se trouver en dessous de $2C_{2th}$ selon la valeur de γ .

En augmentant γ à partir de 0.05, l'écart entre $2C_p$ et $2C_{2th}$ diminue et les deux courbes finissent par se couper en deux points pour une valeur de γ avoisinant 0.11. Ces deux intersections délimitent une zone où $2C_p > 2C_{2th}$ à l'intérieur de laquelle le laser peut osciller périodiquement autour de zéro à la fréquence propre Δ_p sans difficulté. A l'extérieur de ce domaine $2C_p < 2C_{2th}$ mais reste encore proche l'un de l'autre. Cet arrangement rend les pulsations à la fréquence propre envisageables. Néanmoins il faudrait appliquer une forte perturbation (hard excitation) pour déstabiliser l'état stationnaire au lieu d'une simple perturbation infinitésimale.

Pour des valeurs de γ supérieures à 0.11 mais proches de cette valeur, on constate aucun croisement pour les deux courbes et $2C_p$ se trouve en dessous du seuil d'instabilité. Tant que l'écart entre les deux niveaux d'énergie $2C_p$ et $2C_{2th}$ n'est pas considérable un pompage le long de $2C_p$ laisse l'état stationnaire stable à l'égard des petites perturbations et le laser peut osciller périodiquement en forçant le système à pulser par le mécanisme de hard excitation. Pour des faibles valeurs de γ (γ inférieur à 0.11) le niveau de pompage $2C_p$ se trouve au-dessus du deuxième seuil d'instabilité $2C_{2th}$ pour toute valeur de $k > 1 + \gamma$ et les deux niveaux de pompage se croisent en un seul point, dans ces conditions le laser soumis à des faibles perturbations affiche un régime de pulsations propres pour toute excitation égale à $2C_p$ par

conséquent le laser manifeste aisément un comportement pulsé à partir du seuil d'instabilité $2C_{2th}$.

En augmentant la valeur de γ jusqu'à la limite radiative $\gamma=1$, le niveau de pompage $2C_p$ se retrouve proche du premier seuil laser (approximativement à 3 fois $2C_{1th}$), et on est tenté de conclure qu'on se trouve ici face à un résultat théorique original: Pour un taux de pompage égal $2C_p$ pas loin de $2C_{1th}$ notre laser peut pulser à la fréquence Δ_p il suffit seulement de trouver le mécanisme approprié qui rend ceci possible. Malheureusement ceci n'est pas possible vu que l'écart entre $2C_{2th}$ et $2C_p$ est très important et ce dernier se trouve bien en dessous du deuxième seuil laser de sorte que le système laser III.1 ne peut se mettre à pulser périodiquement quelle que soit l'amplitude de la perturbation appliquée et toute perturbation aussi faible et même aussi importante soit-elle sera vite annihilée et ne fera pas délocaliser le laser de son état de fonctionnement continu.

Maintenant si on pompe le laser juste ou au dessus du seuil d'instabilité il ne fonctionnera plus en continu et exhibera automatiquement un régime chaotique puisque il se trouve dans un domaine bien au dessus de son régime de pulsation périodique étant donné que le seuil de pulsation propre $2C_p$ est très inférieur au seuil d'instabilité ($2C_p < 2C_{2th}$). En conclusion le domaine des oscillations périodiques du laser peut être délimité par la position relative des deux taux de pompage caractéristique $2C_p$ et $2C_{2th}$ du laser.

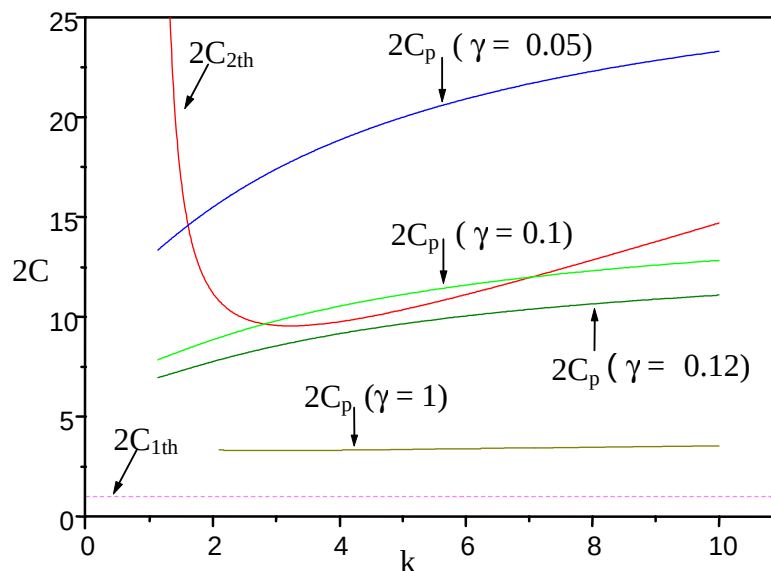


Fig.III.9: Taux de pompage en fonction de k pour différents γ . Pour $2C_p > 2C_{2th}$ le laser effectue des oscillations périodiques

Pour localiser la zone où le laser peut osciller, on met en égalité les taux de pompage $2C_p$ et $2C_{2th}$ ($2C_p = 2C_{2th}$):

$$\frac{4(k+1+2\gamma)(2k+4k\gamma+3\gamma)}{3k\gamma(8+2k+3\gamma)} = \frac{k(k+3+\gamma)}{(k-1-\gamma)} \quad \text{III.49}$$

Cette identité mène après quelques étapes de calcul à l'équation au troisième ordre en γ :

$$(24 + 32k + 9k^2)\gamma^3 + (36 + 52k + 35k^2 + 15k^3)\gamma^2 + (12 + 40k + 52k^2 + 36k^3 + 6k^4)\gamma + 8k(1 - k^2) = 0 \quad \text{III.50}$$

La résolution de cette équation en s'aidant du logiciel de calcul Mathematica donne une seule racine physique (γ positive) fonction de k qu'on a évité d'écrire vu sa complexité, qu'on peut en contrepartie représenter par une courbe (figure III.10). Le domaine à l'intérieur de cette courbe ($C_p > C_{2th}$) ayant un maximum à $\gamma = 0.11$ désigne la zone de prédictibilité du système Laser-Lorenz où le laser fonctionne en pulsé avec une fréquence qu'on peut évaluer à partir de l'expression III.44, en dehors de cette zone le laser à des allures variées allant du pulsé au chaos. Ceci représente un premier pas vers la prédictibilité de l'évolution du système de Lorenz Haken.

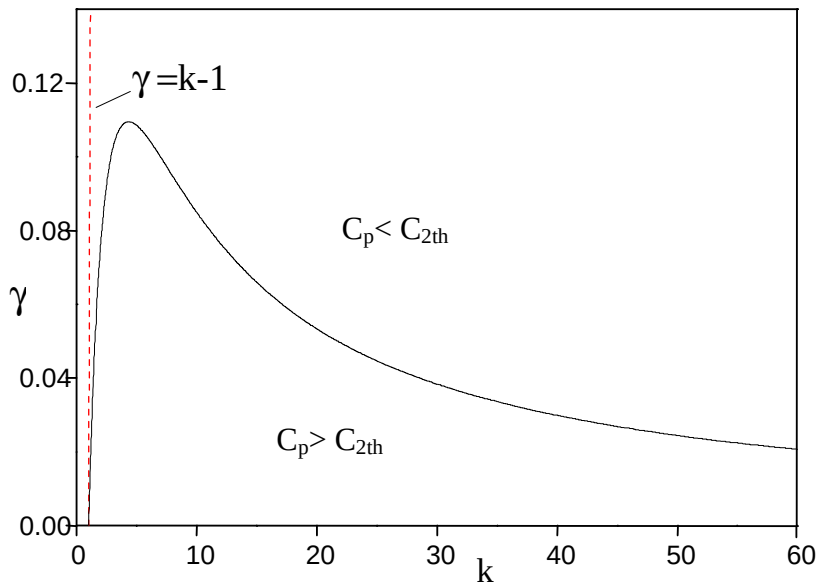


Fig.III.10: Zone de fonctionnement périodique pour $C_p > C_{2th}$

III.4 Comparaison analytique numérique des fréquences de pulsations

Afin de vérifier la validité de nos résultats analytiques on se propose de faire une étude comparative entre les trois fréquences analytiques, soient : la fréquence de pulsation propre du régime transitoire Δ_{t0} (III.20), celle du régime permanent Δ_p (III.47) et la fréquence de relaxation Δ_t (III.19) avec celles évaluées numériquement par intégration du système III.1. cette étude est effectuée en fonction du paramètre k avec un taux de pompage $2C=2C_p$, pour deux vitesses de relaxation de l'inversion de population: $\gamma = 0.05$ et $\gamma = 0.1$.

Cette analyse est illustrée dans deux figures III.11.a et b. Elles montrent un parfait accord entre les valeurs analytiques Δ_t (trait plein) et les fréquences numériques des transitoires (points en cercles). Ceci montre bien que les oscillations du régime transitoire au delà et en dessous du seuil d'instabilité ne peuvent être évaluées à partir Δ_{t0} (III.20) qui trouve sa validité uniquement au voisinage du seuil d'instabilité. On peut donc affirmer que cette approche est plus crédible que l'analyse de stabilité linéaire. En contrepartie on constate à travers les figures III.11.a et b que les valeurs des fréquences propres du régime permanent obtenues numériquement (points en cercles) présentent deux déviations par rapport à l'expression analytique Δ_p (trait plein).

Pour toute valeur de k correspondant au cas $\gamma = 0.1$ (figure.III.11.b) et notamment pour les valeurs $k=3,7$ et 8 relatives à $\gamma = 0.05$ (figure.III.11.a) les fréquences propres évaluées numériquement (points en cercle) se situent en dessous de Δ_p (trait plein), cet écart peut être expliqué par la diminution de l'intensité moyenne par rapport à l'état stationnaire : $E_0^2 \neq \langle E^2 \rangle$ (Figure.III.12.a). Cette dissipation d'énergie, déjà mentionnée auparavant, non prise en compte dans notre approche et qui surgit dans le système en raison de la forte interaction non linéaire entre les variables dynamiques ($E(t)$, $P(t)$ et $D(t)$) est à l'origine de cette divergence entre nos valeurs analytiques et celles obtenues numériquement.

Il faut ajouter à cela que nos résultats analytiques ont été obtenus en tronquant le développement harmonique à l'ordre 3. Par conséquent on espère pouvoir obtenir cet abaissement en fréquence analytiquement, à partir de la relation Δ_p , en considérant dans notre modélisation la décroissance d'énergie par rapport à l'état stationnaire et étendre notre approche aux ordres supérieurs à 3. On perçoit bien ce phénomène d'abaissement sur la figure III.1.a: au fur et à mesure que le système s'éloigne de son état stationnaire l'amplitude des oscillations s'amplifie et la fréquence d'oscillation diminue.

Tel qu'on peut le percevoir de la figure III.11.a le rapport entre Δ_t et Δ_p est 2 pour les cas $k=4,5$ et 6 et ce rapport est de 3 pour $k=9,10$, ainsi le régime permanent est verrouillé par le régime transitoire et empêche le champ laser d'osciller autour de zéro dans le régime permanent.

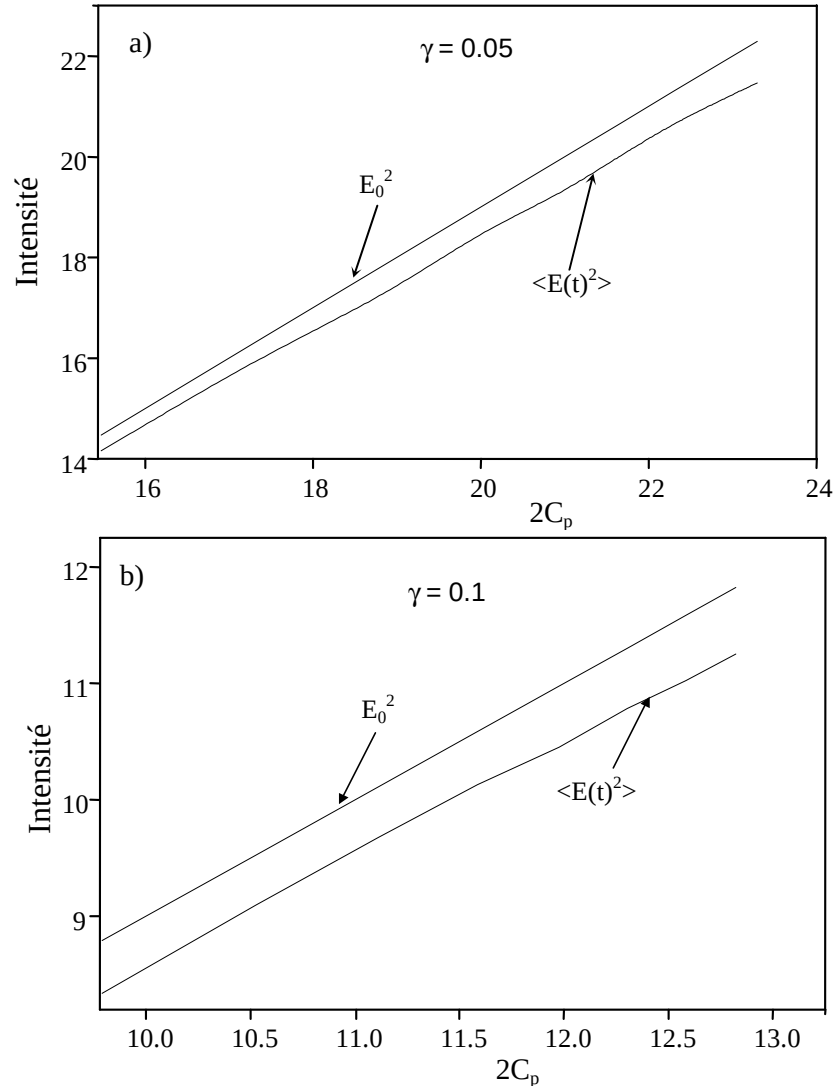


Fig.III.12: Intensité en fonction de $2C_p$ pour différents γ . La valeur moyenne de l'intensité est inférieure à la valeur stationnaire du champ électrique au carré.

La figure III.13.a illustre un exemple d'oscillations autour d'une valeur moyenne égale à zéro dans le régime permanent et autour de la valeur stationnaire E_0 dans le régime transitoire pour le champ électrique dans le cas $k=3$ et $\gamma=0.05$. On note qu'aucune relation ne lie Δ_t et Δ_p , alors que dans le cas de la figure III.13.b ($k=4$ et $\gamma=0.05$) le champ laser dans le régime permanent effectue des oscillations autour d'une valeur moyenne peu différente de E_0 , qui indique que le transitoire domine et verrouille le régime permanent à une fréquence.

Les spectres de fréquences des évolutions temporelles dans le régime permanent correspondant aux figures III.13.a et b montrent des composantes d'ordre impair aux positions Δ_p , $3\Delta_p$, $5\Delta_p$ dans le cas d'oscillations autour de zéro (figure III.14.a) et des composantes d'amplitudes dominantes à $\Delta_t = 2\Delta_p$, $2\Delta_t = 4\Delta_p$...etc. et d'amplitudes plus faibles à $\frac{\Delta_t}{2} = \Delta_p$, $\frac{5}{2}\Delta_t$... etc. (figure III.14.b), dans ce cas ($k=4$ et $\gamma = 0.05$) on souligne un blocage qui s'effectue à $\Delta_p = \Delta_t / 2$

A travers ces travaux on peut affirmer qu'on a bien analysé l'aspect dynamique du système Lorenz-Haken dans un large domaine des paramètres de contrôle. Ceci n'a pu être possible qu'à travers cette approche analytique basée sur un développement jusqu'à l'ordre trois de l'expression du champ électrique laser. Par cette étude on peut conclure que toute solution présentée par le système peut s'interpréter par les effets de compétition ou de blocage entre les fréquences du permanent et du transitoire. Dans une zone de paramètres de contrôle où l'amplitude du transitoire (donnée par la transformé de Fourier du champ électrique) est élevée, les oscillations ne s'effectuent pas autour de zéro (phénomène de blocage). Pour d'autres valeurs de ces paramètres c'est le régime permanent qui domine et les oscillations s'effectuent autour de zéro. Pour ces deux cas le rapport entre les deux fréquences est rationnel.

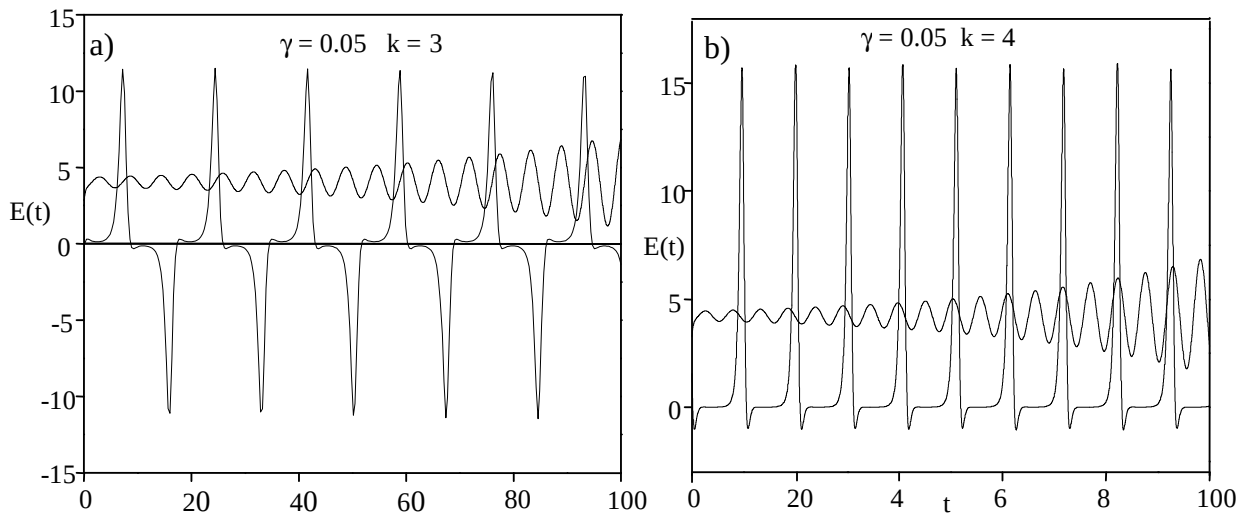


Fig.III.13: a) Oscillations périodiques autour de zéro dans le régime permanent :le régime permanent domine le régime transitoire. b) le phénomène de blocage entre les deux fréquences propres du régime permanent et du transitoire à $\Delta_p = \Delta_t / 2$ conduit à des pulsations autour d'une valeur différente de zéro

On peut aussi affirmer que les oscillations irrégulières dénuées de toute périodicité c'est à dire chaotiques peuvent prendre place pour des paramètres de contrôle où le phénomène de compétition entre les deux fréquences est très important dans ce cas les deux fréquences ont un rapport irrationnel.

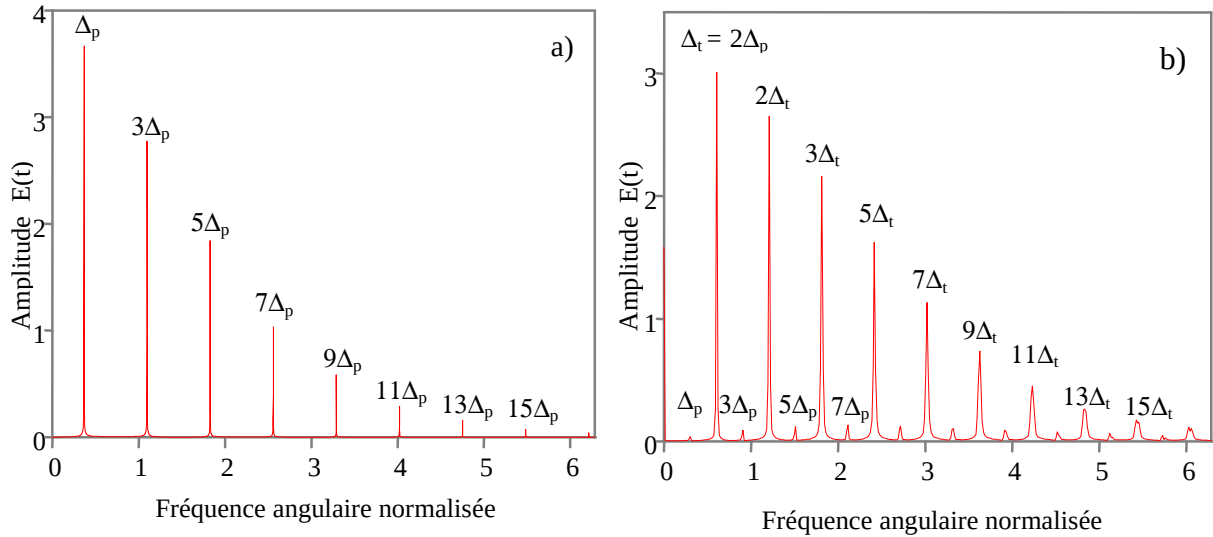


Fig.III.14: Spectres de fréquences des évolutions temporelles de la figure III.13 pour $\gamma = 0.05$ a) $k=3$ b) $k=4$. On distingue de b) le phénomène de blocage qui s'effectue à $\Delta_p = \Delta_t/2$. On souligne la présence d'une composante continue à $f=0$ dans le spectre b), due à l'oscillation de $E(t)$ autour d'une valeur différente de zéro.

III.5 Expression analytique pour le champ électrique

III.5.1 Expression du champ électrique à l'ordre 3

Dans ce paragraphe on va établir l'expression analytique du champ du signal laser en fonction des paramètres de contrôle sachant que l'expression du champ au premier ordre a été déjà formulée par la relation III.43.

Nous continuons la même démarche déjà mise en œuvre au début de ce chapitre afin d'obtenir l'amplitude du champ à l'ordre trois. Ceci revient à substituer les relations III.38.c et III.41 dans la relation III.27 pour enfin parvenir à

$$E_3 = - \frac{T_{3d} (\gamma^2 (1-3\Delta^2) - 8\gamma\Delta^2) \frac{E_1^3}{4}}{1 - T_{1d} (\gamma^2 (1-\Delta^2) - 4\gamma\Delta^2) \frac{E_1^2}{4}} \quad \text{III.51}$$

avec

$$E_1 = 2 \sqrt{\frac{(k+1)(\gamma^2 + 4\Delta^2)(1+\Delta^2)}{2k\gamma(1+\gamma-\Delta^2) + \gamma^2(1-\Delta^2) - 4\gamma\Delta^2}} \quad \text{III.52}$$

Les paramètres présents dans l'expression III.51 sont donnés par III.39.b, c.

En première vue on constate que l'amplitude E_3 donnée par la relation III.51 est fonction de E_1 . Sans oublier de mentionner la dépendance de E_3 et E_1 du paramètre de pompage $2C$, à travers l'expression de la fréquence donnée par III.44 qui n'est autre qu'une propriété propre aux oscillateurs non linéaires.

De ce fait l'expression du champ au troisième ordre s'écrit:

$$\begin{aligned} E(t) &= E_1 \cos(\Delta t) + E_3 \cos(3\Delta t) \\ &= E_1 \cos(\Delta t) - \frac{T_{3d}(\gamma^2(1-3\Delta^2) - 8\gamma\Delta^2) \frac{E_1^3}{4}}{1 - T_{1d}(\gamma^2(1-\Delta^2) - 4\gamma\Delta^2) \frac{E_1^2}{4}} \cos(3\Delta t) \end{aligned} \quad \text{III.53}$$

Vérifiant notre procédure pour un choix arbitraire des paramètres de contrôle en se plaçant au dessus du seuil d'instabilité: $k=3$, $\gamma=0.1$ et $2C=10$ ($2C_{2th}=9.63$). Ces valeurs introduites dans les expressions III.44, III.52 et III.51 donnent :

$$\Delta = 0.42, \quad E_1 = 5.19 \quad \text{et} \quad E_3 = 1.72$$

Ainsi l'expression III.53 prend la forme :

$$E(t) = 5.19 \cos(0.42t) + 1.72 \cos(1.26t) \quad \text{III.54}$$

La représentation graphique de ce champ à l'ordre 3 (figure III.15.a) montre une certaine similitude avec le tracé du champ laser donné par la résolution numérique de système III.1. L'évolution temporelle du champ électrique (figure III.5.a) s'accomplit de façon périodique avec $\Delta_N \approx 0.39$. Conformément à sa transformée de Fourier (figure III.5.e). Cette valeur est proche de $\Delta = 0.42$, obtenue analytiquement par la relation III.44. De ce fait en se limitant à l'ordre 3 l'expression de la fréquence de pulsation qui en découle approche très bien la valeur trouvée numériquement (résultat déjà annoncé aux paragraphes III.2.2.c et d).

Mais on ne peut dire autant pour l'amplitude du champ, tel qu'on le voit $E_N = 7.69$ pour la figure III.5.a, alors que la valeur analytique tirée de la figure III.15.a est $E_A = 6.95$.

Il va de soit que cette dissemblance est liée à notre restriction à l'ordre 3 dans l'expression du champ et on se propose donc d'étendre notre approche aux ordres supérieurs.

III.5.2 Développement d'ordre supérieur

Evaluons l'amplitude du champ à l'ordre 5. D'après le système III.22 on aura à l'ordre cinq pour le champ:

$$E(t) = E_1 \cos(\Delta t) + E_3 \cos(3\Delta t) + E_5 \cos(5\Delta t) \quad \text{III.55.a}$$

$$P(t) = P_1 \cos(\Delta t) + P_2 \sin(\Delta t) + P_3 \cos(3\Delta t) + P_4 \sin(3\Delta t) + P_5 \cos(5\Delta t) + P_6 \sin(5\Delta t) \quad \text{III.55.b}$$

$$D(t) = d_c + D_3 \cos(2\Delta t) + D_4 \sin(2\Delta t) + D_5 \cos(4\Delta t) + D_6 \sin(4\Delta t) \quad \text{III.55.c}$$

L'introduction de ces expressions dans III.22 donne:

$$-\Delta E_1 \sin(\Delta t) - 3\Delta E_3 \sin(3\Delta t) - 5\Delta E_5 \sin(5\Delta t) = -k \left(\begin{array}{l} E_1 \cos(\Delta t) + E_3 \cos(3\Delta t) + E_5 \cos(5\Delta t) \\ + 2CP_1 \cos(\Delta t) + 2CP_2 \sin(\Delta t) \\ + 2CP_3 \cos(3\Delta t) + 2CP_4 \sin(3\Delta t) \\ + 2CP_5 \cos(5\Delta t) + 2CP_6 \sin(5\Delta t) \end{array} \right) \quad \text{III.56.a}$$

$$\begin{aligned} & -\Delta P_1 \sin(\Delta t) + \Delta P_2 \cos(\Delta t) - 3\Delta P_3 \sin(3\Delta t) + 3\Delta P_4 \cos(3\Delta t) - 5\Delta P_5 \sin(5\Delta t) + 5\Delta P_6 \cos(5\Delta t) = \\ & \left(\begin{array}{l} -P_1 \cos(\Delta t) - P_2 \sin(\Delta t) - P_3 \cos(3\Delta t) + P_4 \sin(3\Delta t) - P_5 \cos(5\Delta t) - P_6 \sin(5\Delta t) + d_c E_1 \cos(\Delta t) \\ + \frac{E_1 D_3}{2} (\cos(\Delta t) + \cos(3\Delta t)) + \frac{E_1 D_4}{2} (\sin(\Delta t) + \sin(3\Delta t)) + \frac{E_1 D_5}{2} (\cos(3\Delta t) + \cos(5\Delta t)) \\ + \frac{E_1 D_6}{2} (\sin(3\Delta t) + \sin(5\Delta t)) + d_c E_3 \cos(3\Delta t) + \frac{E_3 D_3}{2} (\cos(\Delta t) + \cos(5\Delta t)) \\ + \frac{E_3 D_4}{2} (\sin(5\Delta t) - \sin(\Delta t)) + \frac{E_3 D_5}{2} (\cos(\Delta t) + \cos(7\Delta t)) + \frac{E_3 D_6}{2} (\sin(\Delta t) + \sin(7\Delta t)) \end{array} \right) \quad \text{III.5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2\Delta D_3 \sin(2\Delta t) + 2\Delta D_4 \cos(2\Delta t) - 4\Delta D_5 \sin(4\Delta t) + 4\Delta D_6 \cos(4\Delta t) = \\ & -\gamma \left(\begin{array}{l} d_c + 1 + D_3 \cos(2\Delta t) + D_4 \sin(2\Delta t) + D_5 \cos(4\Delta t) + D_6 \sin(4\Delta t) \\ + (E_1 \cos(\Delta t) + E_3 \cos(3\Delta t) + E_5 \cos(5\Delta t))(P_1 \cos(\Delta t) + P_2 \sin(\Delta t) + P_3 \cos(3\Delta t) \\ + P_4 \sin(3\Delta t) + P_5 \cos(5\Delta t) + P_6 \sin(5\Delta t)) \end{array} \right) \quad \text{III.56.c} \end{aligned}$$

Après identification des coefficients ayant le même sinus et cosinus, nous sommes conduits à résoudre le système suivant :

$$-\Delta E_1 = -\kappa 2CP_2 \quad \text{III.57.a}$$

$$-3\Delta E_3 = -\kappa 2CP_4 \quad \text{III.57.b}$$

$$-5\Delta E_5 = -\kappa 2CP_5 \quad \text{III.57.c}$$

$$E_1 = -2CP_1 \quad \text{III.57.d}$$

$$E_3 = -2CP_3 \quad \text{III.57.e}$$

$$E_5 = -2CP_5 \quad \text{III.57.f}$$

$$-\Delta P_1 = -P_2 + \frac{E_1 d_4}{2} - \frac{E_3 d_4}{2} + \frac{E_3 d_6}{2} \quad \text{III.57.g}$$

$$\Delta P_2 = d_c E_1 - P_1 + \frac{E_1 d_3}{2} + \frac{E_3 d_3}{2} + \frac{E_3 d_5}{2} \quad \text{III.57.h}$$

$$-3\Delta P_3 = -P_4 + \frac{E_1 d_4}{2} + \frac{E_1 d_6}{2} \quad \text{III.57.i}$$

$$3\Delta P_4 = -P_3 + E_3 d_c + \frac{E_1 d_3}{2} + \frac{E_1 d_5}{2} \quad \text{III.57.j}$$

$$-5\Delta P_5 = -P_6 + \frac{E_1 d_6}{2} + \frac{E_3 d_4}{2} \quad \text{III.57.k}$$

$$6\Delta P_6 = -P_5 + \frac{E_1 d_5}{2} + \frac{E_3 d_3}{2} \quad \text{III.57.l}$$

$$d_c = -1 - \frac{E_1 P_1}{2} - \frac{E_3 P_3}{2} \quad \text{III.57.m}$$

$$2\Delta d_3 = \gamma \left\{ d_4 + \frac{E_1 P_2}{2} + \frac{E_1 P_4}{2} - \frac{E_3 P_2}{2} \right\} \quad \text{III.57.n}$$

$$2\Delta d_4 = -\gamma \left\{ d_3 + \frac{E_1 P_1}{2} + \frac{E_1 P_3}{2} + \frac{E_3 P_1}{2} \right\} \quad \text{III.57.o}$$

$$2\Delta d_5 = \gamma \left\{ d_6 + \frac{E_1 P_4}{2} + \frac{E_3 P_2}{2} \right\} \quad \text{III.57.p}$$

$$2\Delta d_6 = -\gamma \left\{ d_5 + \frac{E_1 P_3}{2} + \frac{E_3 P_1}{2} \right\} \quad \text{III.57.q}$$

La résolution de ce système à la main est longue et fastidieuse pour se simplifier la tâche on utilise le logiciel Mathematica. L'expression à l'ordre cinq pour le champ prend la forme:

$$E_5 = -2C\Gamma_d\Gamma_5 \left\{ f(\Delta)E_1^5 + g(\Delta)E_1^2E_3 + h(\Delta)E_1^4E_3 + q(\Delta)E_1E_3^2 + s(\Delta)E_1^3E_3^2 \right\} \quad \text{III.58}$$

où

$$f(\Delta) = -\frac{1}{16} T_{3d} \Gamma_4 \left(\frac{\gamma \alpha_3}{4\Delta} - 2\gamma \Delta \alpha_4 - 5\Delta \alpha_3 - \frac{5\gamma^2 \Delta \alpha_4}{2} \right) \quad \text{III.59.a}$$

$$g(\Delta) = -\frac{1}{4} \left[\Gamma_4 \left(-\frac{\gamma}{4\Delta} + 6\Delta + \frac{5\gamma\Delta}{4} \right) + \Gamma_2 \left(-\frac{\gamma}{4\Delta} + 6\Delta + \frac{5\gamma\Delta}{4} \right) \right] \quad \text{III.59.b}$$

$$h(\Delta) = \frac{1}{16} \left[\begin{aligned} & -\Gamma_4 T_{1d} \left(\frac{\gamma \alpha_1}{4\Delta} - 2\gamma \Delta \alpha_2 - 5\Delta \alpha_1 - \frac{5\gamma^2 \Delta \alpha_2}{2} \right) - \Gamma_2 T_{1d} \alpha_1 \left(-5\Delta + \frac{\gamma}{2\Delta} \right) \\ & + 2\Gamma_2 T_{1d} \alpha_2 \gamma \Delta \left(1 + \frac{5\gamma}{2} \right) \\ & - \Gamma_2 T_{3d} \alpha_3 \left(-5\Delta + \frac{\gamma}{2\Delta} \right) + 2\Gamma_2 T_{3d} \alpha_4 \gamma \Delta \left(1 + 2\frac{5\gamma}{2} \right) \end{aligned} \right] \quad \text{III.59.c}$$

$$q(\Delta) = \Gamma_2 \left[\frac{\gamma}{8\Delta} - \Delta + 5\Delta \frac{\gamma}{8} \right] \quad \text{III.59.d}$$

$$s(\Delta) = \frac{1}{16} \left[-\Gamma_2 T_{1d} \left(\frac{\alpha_1 \gamma}{2\Delta} + 2\gamma \Delta \alpha_2 - 5\Delta (\alpha_1 - \alpha_2 \gamma^2) \right) \right] \quad \text{III.59.e}$$

$$\Gamma_2 = \frac{2\gamma\Delta}{\gamma^2 + 4\Delta^2}, \quad \Gamma_4 = \frac{4\gamma\Delta}{\gamma^2 + 16\Delta^2}, \quad \Gamma_5 = \frac{1}{1 + 25\Delta^2} \quad \text{III.60}$$

$$\alpha_1 = \gamma^2 (1 - \Delta^2) - 4\gamma\Delta^2, \quad \alpha_2 = 1 + \gamma - \Delta^2 \quad \text{III.61}$$

$$\alpha_3 = \gamma^2 (1 - 3\Delta^2) - 8\gamma\Delta^2, \quad \alpha_4 = 1 + 2\gamma - 3\Delta^2 \quad \text{III.62}$$

A ce stade le champ s'exprime par:

$$E(t) = E_1 \cos(\Delta t) + E_3 \cos(3\Delta t) + E_5 \cos(5\Delta t) \quad \text{III.63}$$

avec E_1 , E_3 et E_5 évaluées à partir de III.52, III.51, III.58.

Pour $k=3$, $\gamma = 0.1$ et $2C=10$ on aura:

$$E(t) = 5.19 \cos(0.42t) + 1.72 \cos(1.26t) + 1.23 \cos(2.1t) \quad \text{III.64}$$

dont la représentation graphique est indiquée par la figure III.15. On relève une différence frappante entre l'évolution temporelle de l'expression III.64 (figure III.15.b) et celle de la figure III.5.a. En se rapprochant de l'axe du temps, l'allure des deux courbes n'est pas exactement la même et l'amplitude du champ électrique s'élève à $E_A \approx 8$ pour la figure III.15.b

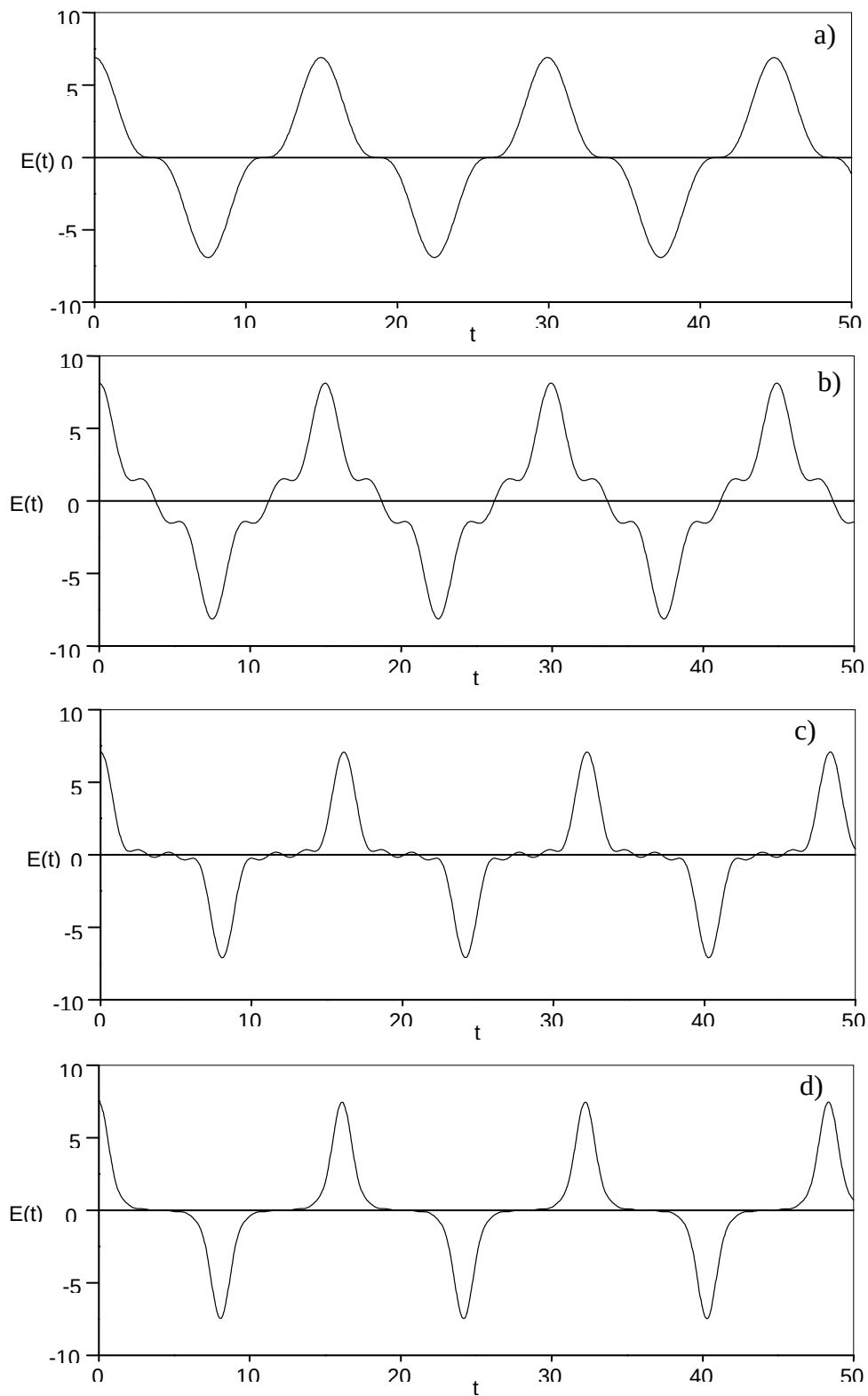


Fig.III.15: Tracé temporel de l'expression analytique du champ électrique a) à l'ordre trois , b) à l'ordre cinq, c) à l'ordre sept et d) à l'ordre onze

A partir de ces remarques on espère que les ordres supérieurs à 5 établiront une meilleure similitude, on va donc explorer cette hypothèse. Vu que les calculs algébriques sont très difficile à entreprendre au delà de l'ordre 5, on se voit donc contraint de continuer les calculs en s'aidant du spectre de Fourier représenté en figure III.5.d pour extraire les amplitudes du champ correspondant à l'ordre 7 et l'ordre 11.

D'après les figures III.15.c et d on peut conclure qu'étendre les calculs aux ordres supérieurs donne une meilleure similitude entre la résolution numérique et notre approche analytique.

On constate de la figure III.15.d réalisée à partir de l'expression analytique III.22.a que le champ électrique évolue symétriquement par rapport à l'axe du temps, alors que la figure III.5.a obtenue par intégration numérique du système III.1 dévoile l'existence d'une faible asymétrie. Cette asymétrie est occasionnée par le déphasage qui a lieu entre les différents ordres du champ et non considérés dans l'expression III.22.a où on a supposé que tous les ordres sont en phase ($\varphi_i = 0$).

A titre de comparaison utilisons les valeurs données par la transformée de Fourier rapide (Figure III.5.d), résumées dans le tableau III.1, pour tracer l'expression analytique du champ électrique en fonction du temps.

Tab.III.1: Valeurs des fréquences, des amplitudes et des phases du signal fig.III.5.a. Obtenues à partir de fig.III.5.d

Δ_1	Δ_3	Δ_5	Δ_7	Δ_9	Δ_{11}	Δ_{13}
0.394	1.184	1.973	0.43088	2.706	4.341	5.130
E_1	E_3	E_5	E_7	E_9	E_{11}	E_{13}
3.12453	2.15978	1.21408	0.59629	0.26652	0.11113	0.04367
φ_1	φ_3	φ_5	φ_7	φ_9	φ_{11}	φ_{13}
217.56578	280.88724	336,7167	389,67926	442,27686	135.46644	-170.65655

Sur la figure.III.22.a on a tracé le champ électrique en supposant que les différents ordres sont en phase (expression III.22.a) et sur la figure .III.22.a on l'a tracé en tenant compte du déphasage entre les différents ordres du champ. Dans ce dernier cas on suppose que l'expression du champ est sous forme:

$$E = \sum_n E_n \cos[(2n+1)\Delta_{2n+1} t + \varphi_{2n+1}] \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{III.66}$$

On relève d'après la figure III.16.a qu'en supposant que tous les ordres sont en phase (prendre tous les $\varphi_i = 0$) on obtient un signal parfaitement symétrique (sans distorsion par rapport à l'axe des t), différent de l'allure du signal représenté dans la figure III.5.a.

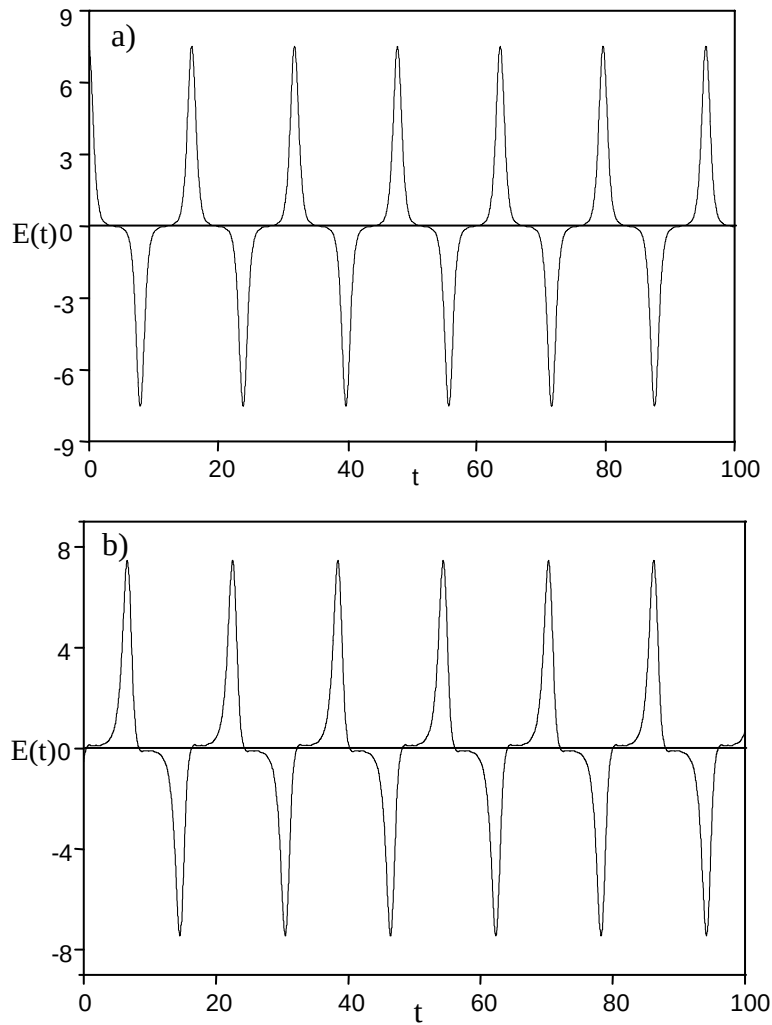


Fig.III.16: Tracés temporels de l'expression analytique du champ électrique III.66 en s'appuyant sur les valeurs du tableau III.1: a) avec $\varphi_i = 0$ et b) avec $\varphi_i \neq 0$.

D'autre part en considérant le déphasage (figure III.16.b) on parvient à une parfaite similitude entre les courbes: figure III.5.a et figure III.16.b. Ceci prouve que le déphasage joue un rôle sur l'allure du champ et n'est pas vraiment essentiel dans le cas où on veut obtenir l'amplitude du champ et la fréquence des oscillations.

III.6 Conclusion

Nous avons exposé, dans ce chapitre, notre approche analytique qui s'appuie sur un développement en série de Fourier des variables : champ électrique, inversion de population et polarisation. Notre démarche appliquée dans le régime transitoire nous a permis d'extraire l'expression analytique de la fréquence des oscillations de relaxation qui approche parfaitement les fréquences obtenues par résolution numérique du système de Lorenz-Haken dans le domaine stable et instable. Le développement harmonique aux grands signaux jusqu'à l'ordre trois pour l'amplitude du champ électrique nous a amené à démontrer pour la première fois l'existence d'une deuxième fréquence propre au système de Laser-Lorenz qui dépend uniquement des variables intrinsèques du laser à savoir les vitesses de désexcitation des variables dynamiques. L'obtention de ces pulsations propres exige un taux de pompage caractéristique dont l'expression a été aussi établie dans ce chapitre. Si ce niveau d'énergie se trouve bien en dessous du deuxième seuil laser le régime d'oscillations propres dans le régime permanent devient inaccessible et le laser affiche automatiquement un fonctionnement chaotique au-dessus du seuil d'instabilité.

Ces études approfondies sur le fonctionnement périodique du laser nous ont permis d'identifier un phénomène de blocage entre les deux fréquences propres des régimes transitoire et permanent, si le rapport entre ces deux fréquences est commensurable on obtient un signal périodique dans le cas où ce rapport est incommensurable le signal est chaotique. Notre résolution analytique nous a permis de dresser analytiquement une frontière entre la zone périodique et la zone chaotique et de donner l'expression analytique du champ électrique qui oscille périodiquement autour de zéro.

Chapitre IV

Route vers le chaos:

Scénario à dédoublement de période ou cascade sous-harmonique

L'identification expérimentale du chaos déterministe peut être réalisée en étudiant les itinéraires entrepris par les solutions périodiques pour parvenir à un état chaotique. Il est généralement admis qu'il existe uniquement trois sortes de scénarios (routes) qui peuvent conduire au chaos [31,32]. Ces routes sont: le dédoublement de périodes (cascade sous-harmonique), quasi- périodicité (l'appariation de fréquences incommensurables), et l'intermittence.

Dans le chapitre précédent nous avons mis en évidence la tendance du système dissipatif Haken-Lorenz à adopter un comportement périodique pour $2C_P$ voisin de $2C_{2th}$ et γ inférieur à 0.11. En accroissant le taux de pompage le laser perd sa stabilité en entreprenant une cascade sous harmonique qui le mène droit vers le chaos. Dans ce qui suit nous étudierons cette route de façon précise en indiquant pour quelle condition le chaos s'installe. Les résultats révéler dans ce chapitre donnent une vue d'ensemble des solutions analytiques obtenues, et portent à conclure combien il est difficile de dresser analytiquement une frontière entre les différentes zones périodiques du laser.

IV.1 Dédoublement de période

Un régime périodique de fréquence f qui subit une instabilité sous harmonique donne naissance à un autre régime périodique de période double, cela va entraîner l'apparition dans le spectre de Fourier de la fréquence $\frac{f}{2}$ de ses harmoniques impairs ($3\frac{f}{2}, 5\frac{f}{2}$, ect...) et pairs ($2\frac{f}{2}, 4\frac{f}{2}$, ect...).

IV.1.1 Résultats numériques

La résolution numérique du système III.1 faite avec $k = 3$ et $\gamma = 0.1$ atteste que la cascade sous harmonique ou le scénario à dédoublement de période s'amorce d'abord par une rupture de symétrie des oscillations du champ laser à partir de $2C = 18.5$ (figure IV.1.b) faisant paraître des harmoniques d'ordre pair dans le spectre de Fourier correspondant en plus des ordres impairs (figure IV.1.d). Le portrait de phase d'un tel fonctionnement est un cycle limite à deux boucles asymétriques dans l'espace (E, D) (figure IV.1.f) à l'inverse du signal symétrique de période une (figure IV.1.a) qui lui correspond un cycle limite à deux boucles symétriques dans l'espace des phases (figure IV.1.c) et un spectre de fréquences ne contenant que des harmoniques d'ordre impair (figure IV.1.e).

En augmentant le pompage jusqu'à $2C=27.9$, la période du signal se dédouble et une fenêtre de période 2 prend place (figures IV.2.a et IV.2.b), ceci se reflète par la présence de la fréquence $\frac{f}{2}$ et de ses sous harmoniques impairs $\frac{3f}{2}, \frac{5f}{2}$, etc.... en plus des ordres pairs et impairs de f dans le spectre de fréquences (figures IV.2.c et IV.2.d). La projection des solutions dans le plan de phase (E, D) sont des cycles limites avec des boucles asymétriques (figures IV.2.e et IV.2.f).

Cette série à dédoublement de période continue de s'accroître (figure IV.3.a) et se termine par un régime chaotique (figure IV.3.b) pour un taux de pompage $2C$ supérieur à 32. Le portrait de phase de chaque signal est illustré dans les figures IV.3.c, IV.3.d, tel qu'on le voit les attracteurs du système sont des cycles limites dans le cas d'un fonctionnement périodique et dans le cas d'un signal chaotique on a un attracteur étrange. On a représenté en figure IV.3.e et figure IV.3.f les spectres de Fourier relatifs aux champs électriques des figures précédentes. On souligne aussi la présence d'une composante non nulle à $f = 0$ sur les spectres de Fourier: figures IV.1.f, IV.2.e, IV.3.e et IV.3.f, signifiant que le signal n'est plus symétrique.

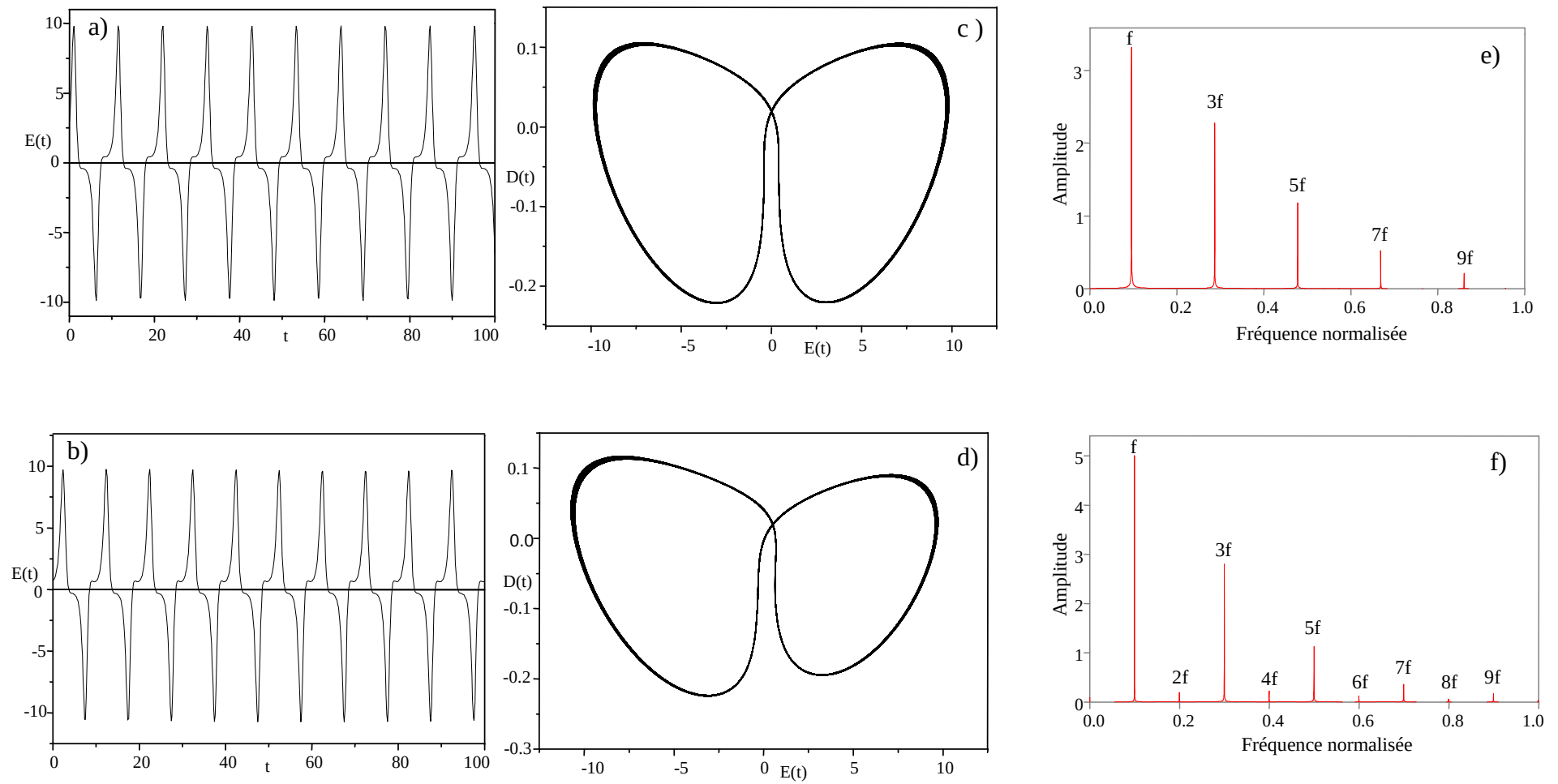


Fig.IV.1: Evolution temporelle du champ électrique pour $\gamma=0.1$ et $k=3$ avec : (a) $2C=18.4$, (b) $2C=20$. (c) et (d) portraits de phase de (a) et (b) (e) et (f) spectre de Fourier de (a) et (b).

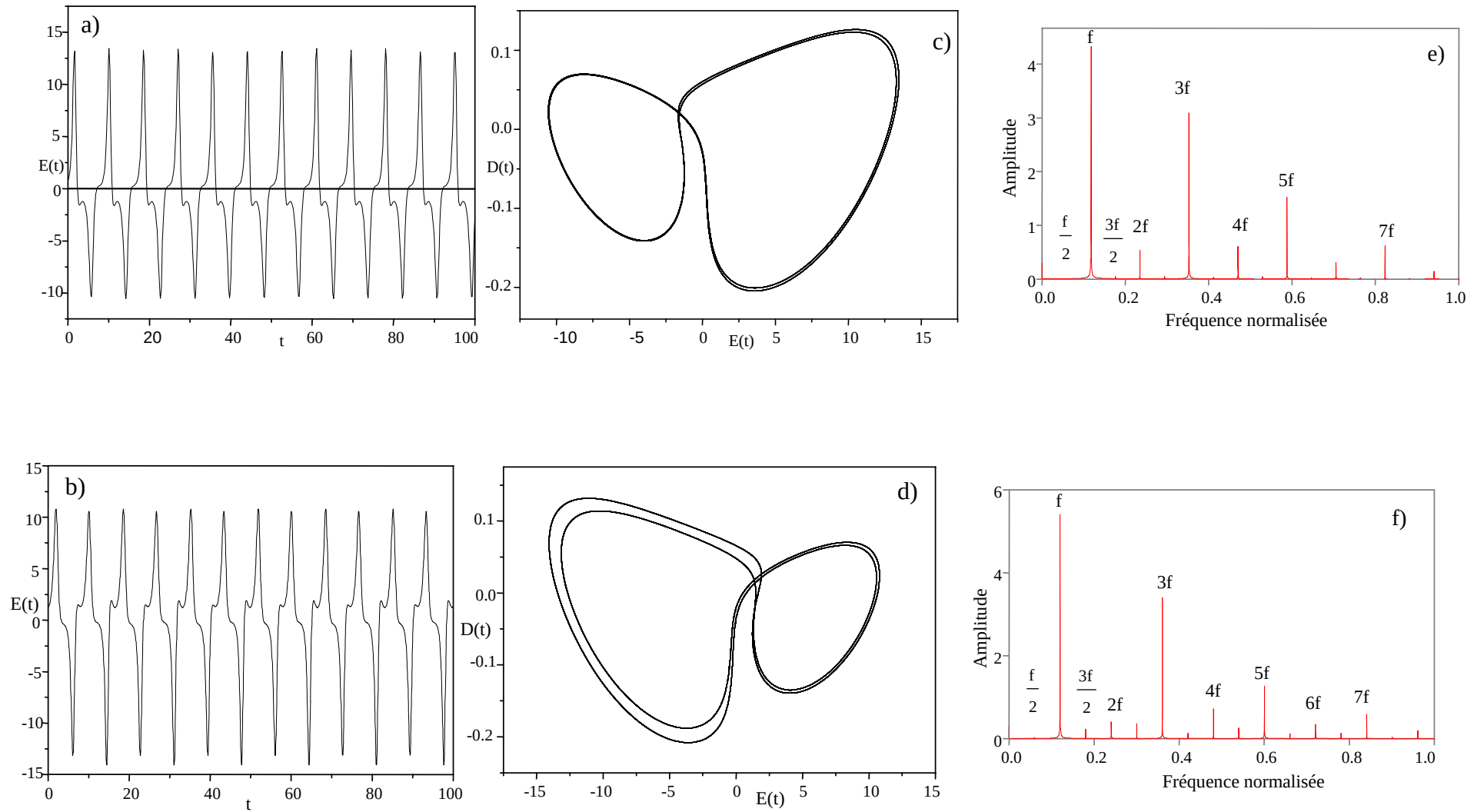


Fig.IV.2: Evolution temporelle du champ électrique pour $\gamma=0.1$ et $k=3$ avec : (a) $2C=27.9$, (b) $2C=29$. (c) et (d) portraits de phase de (a) et (b). (e) et (f) spectre de Fourier de (a) et (b).

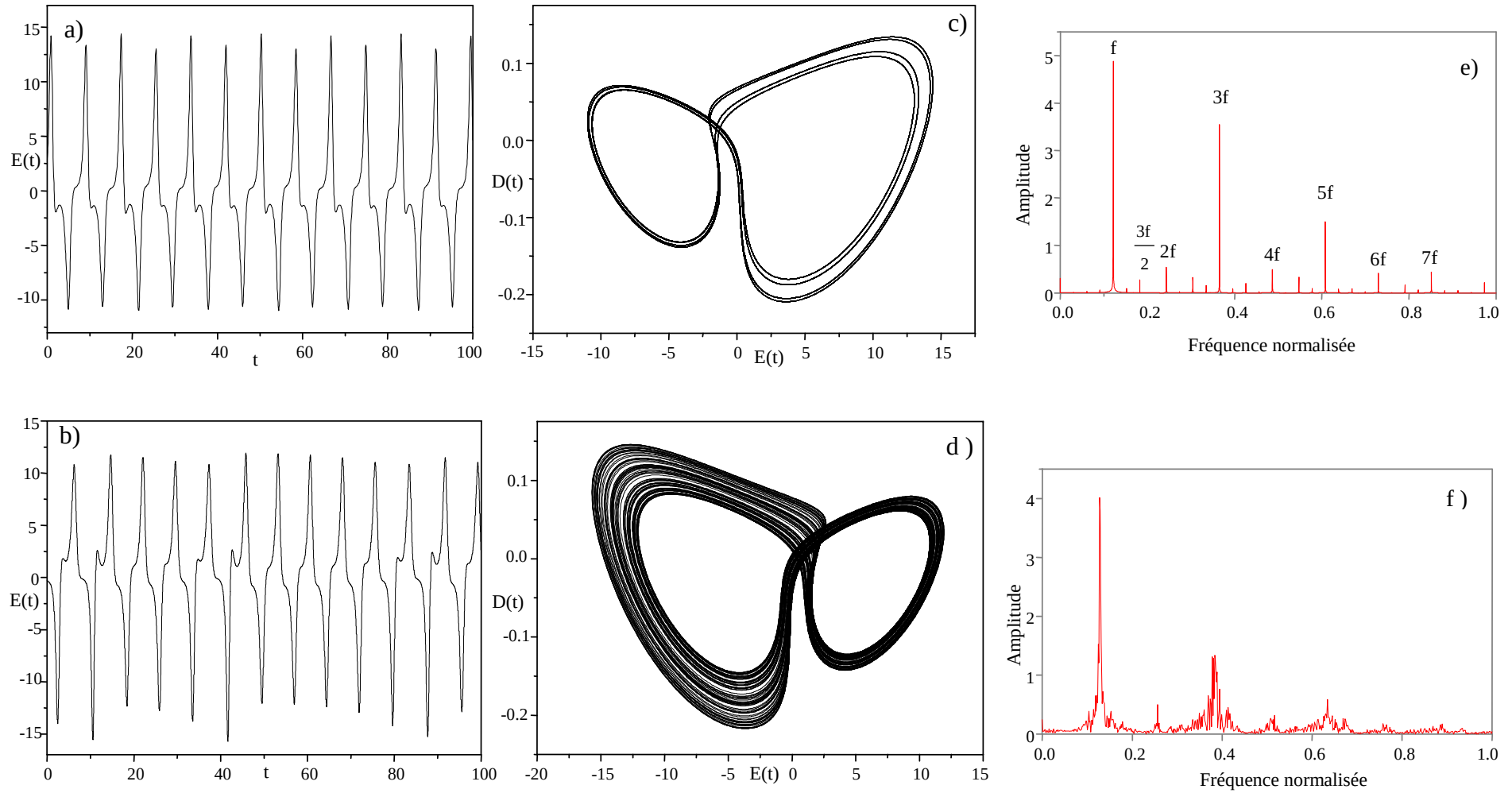


Fig.IV.3: Evolution temporelle du champ électrique pour $\gamma=0.1$ et $k=3$ avec : (a) $2C=29.7$, (b) $2C=32$. (c) et (d) portraits de phase de (a) et (b). (e) et (f) spectre de Fourier de (a) et (b).

IV.1.2 Zone de dédoublement de période

Dans ce paragraphe nous nous efforcerons de donner l'expression analytique des taux de pompage $2C_\alpha$ qui conduisent le laser à entreprendre des oscillations régulières, qui se succèdent suite à la hausse du pompage, suivant la hiérarchie de dédoublement de période. Nous tenterons de délimiter chaque zone périodique qui diffère qualitativement par rapport à une autre dans des cas bien précis.

Pour accomplir ceux ci nous allons supposés que la fréquence de pulsation dans le régime permanent III.44 est proportionnelle à la fréquence propre III.47 qui revient à écrire:

$$\Delta = \alpha \Delta_p \quad \text{VI.1}$$

α étant un nombre rationnel. Après quelques étapes de calculs faciles à exécuter, on aboutit à:

$$2C_\alpha = \frac{(2k + 3\gamma + 4k\gamma)\{\alpha^2[8(k+1) - \gamma(2k + \gamma + 4)] + 3\gamma(8 + 2k + 3\gamma)\}}{3k\gamma(2 + \gamma)(8 + 2k + 3\gamma)} \quad \text{VI.2}$$

La figure VI.4 illustre les différents tracés de $2C_\alpha$ pour $\gamma = 0.1$ en fonction de k pour les valeurs de α suivantes: $\alpha = 1, 1.25, 1.5, 1.75$ et 2 .

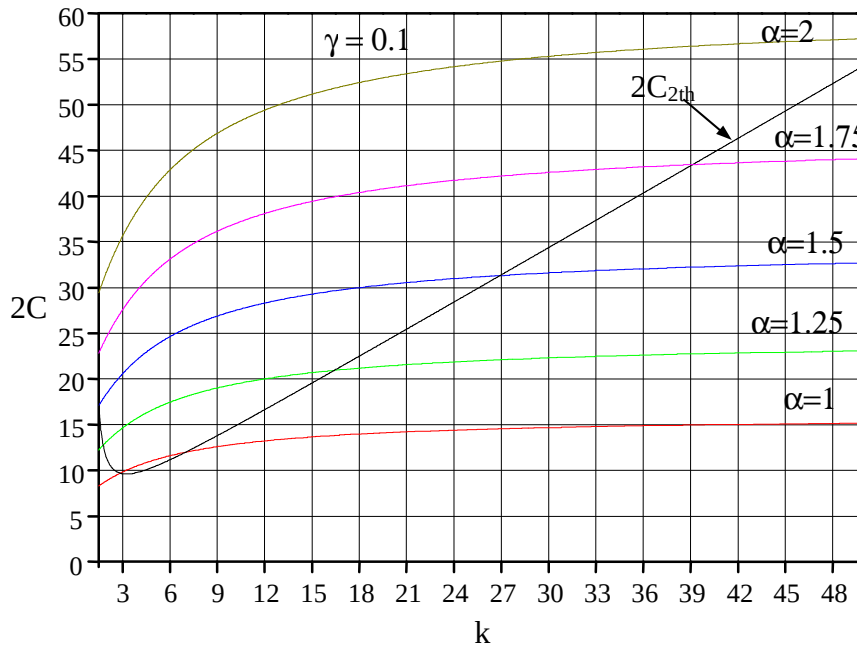


Fig.IV.4: Représentation de $2C_\alpha$ en fonction de k pour $\gamma = 0.1$ et différentes valeurs de α . On note une série de dédoublement de période pour $k = k_{min}$.

La résolution numérique du système III.1 pour les paramètres ci-dessus, par augmentation du niveau de pompage $2C$ et conformément aux courbes de la figure IV.4, procure les résultats suivants:

pour $k=3 \approx k_{\min}$ (II.38) qui correspond au minimum du deuxième seuil laser on parvient à une série de dédoublements de période répartie comme suit:

Régime pulsé symétrique de période une	$9.63 \leq 2C \leq 18.4$	et	$1 \leq \alpha < 1.5$
Régime pulsé asymétrique de période une	$18.4 < 2C \leq 27.8$	et	$\alpha \leq 1.75$
Régime pulsé asymétrique période deux et plus	$27.9 \leq 2C \leq 29.8$	et	$1.75 < \alpha < 2$
Régime chaotique	$2C \geq 32$	et	$\alpha > 2$

Suite à cette étude on constate que dû à l'accrochage des deux fréquences Δ et Δ_p l'une sur l'autre on observe un régime de dédoublement de période qui se manifeste pour un rapport rationnel entre les deux fréquences. Le premier dédoublement de période a lieu pour un rapport proche de $\frac{7}{4}$ pour $2C=27.9$ produisant un pic à la position $\frac{f}{2}$ et des sous harmoniques d'ordre pair et impair dans la représentation spectrale du champ électrique (figure IV.2.e). En augmentant le taux de pompage le scénario à dédoublement de période s'achève par un signal chaotique pour α supérieur à 2 (figure IV.3). En conclusion, pour un rapport supérieur à 2 entre les fréquences Δ et Δ_p un régime chaotique s'installe.

Examinons maintenant d'autres cas et vérifions si un rapport supérieur à 2 entre les deux fréquences Δ et Δ_p implique un fonctionnement irrégulier pour le laser.

➤ Cas $\gamma = 0.05$

Pour $\gamma = 0.05$ et $k_{\min} = 3.12$ le taux de pompage $2C_1 = 2C_p = 17.6$ est largement supérieur à $2C_{2th} = 9.3$ (voir figure IV.5.a) on en conclut qu'une légère perturbation suffit pour amener le champ laser à osciller périodiquement. On relève de l'intégration numérique du système Lorenz-Haken les évolutions suivantes:

Régime pulsé symétrique et asymétrique de période une	$9.3 \leq 2C \leq 75$	et	$\alpha < 2$
Régime pulsé asymétrique de période deux	$75 \leq 2C < 80$	et	$\alpha > 2$
Régime chaotique	$2C > 80$	et	$\alpha > 2$

D'après ces résultats on constate que le régime chaotique s'instaure pour un rapport supérieur à deux entre les deux fréquences du système.

Pour des γ supérieurs à 0.1 et pour des valeurs de k qui minimisent le seuil d'instabilité on constate les cheminements ci-dessous:

➤ **Cas $\gamma=0.15$**

$2C_p=3.37$ est inférieur au deuxième seuil $2C_{2th}=9.88$ pour $k_{min}=3.37$ et $2C_2$ supérieur à $2C_{2th}$. Les résultats des simulations numériques effectuées (non représentés graphiquement) révèlent que le régime chaotique surgit juste au seuil d'instabilité puis on observe une cascade sous harmonique inverse entre $2C=10.6$ et $2C=22$ qui débute par un signal asymétrique doublement périodique qui se termine par un signal de période une, puis redevient chaotique pour α supérieur à 2.

➤ **Cas $\gamma=0.2$**

$2C_p=6.22$ est inférieur au seuil d'instabilité $2C_{2th}=10.194$ pour $k_{min}=3.49$ et $2C_2$ supérieur à $2C_{2th}$ (voir figure IV.5.c).

Au voisinage du seuil on a un signal asymétrique de période une comportant 4 pics d'amplitude différente (Figure IV.6.a). La représentation spectrale (Figure IV.6.b) indique que l'harmonique d'ordre 3 est supérieur à l'ordre 1, cette allure temporelle du champ n'est pas prise en compte dans notre méthode itérative où on considère que l'ordre 3 est inférieur à l'ordre 1. N'empêche que le système est chaotique pour α supérieur à 2.

➤ **Cas $\gamma=0.3$**

$2C_p=4.98$ est inférieur au seuil d'instabilité $2C_{2th}=10.78$ pour $k_{min}=3.74$ et $2C_2$ supérieur à $2C_{2th}$ (voir figure IV.5.d).

On observe un signal chaotique juste au seuil d'instabilité suivi d'une fenêtre de périodicité et le signal redevient chaotique pour $\alpha = 2$

➤ **Cas $\gamma=0.5$ et $\gamma=1$**

$2C_p$ et $2C_2$ sont inférieurs à $2C_{2th}$ (voir figure IV.5.e et figure IV.5.f). Le système est chaotique dans un large domaine du paramètre de contrôle $2C$.

Il ressort de cette brève étude qu'il semble que le régime chaotique surgit pour un taux de pompage de valeur $2C_2$ pour un large domaine des paramètres de contrôle. Par conséquent il apparaît que dresser analytiquement une frontière entre les différentes zones périodiques semble difficile. Toutefois cela n'est pas étonnant étant donné que la non-linéarité de l'interaction rayonnement-matière l'emporte sur la simplicité de la forme des équations de Lorenz- Haken à faible dimension. Des travaux complémentaires s'avèrent donc nécessaires afin de mieux cerner les zones de paramètres de contrôles avec les comportements dynamiques associés à chaque zone.

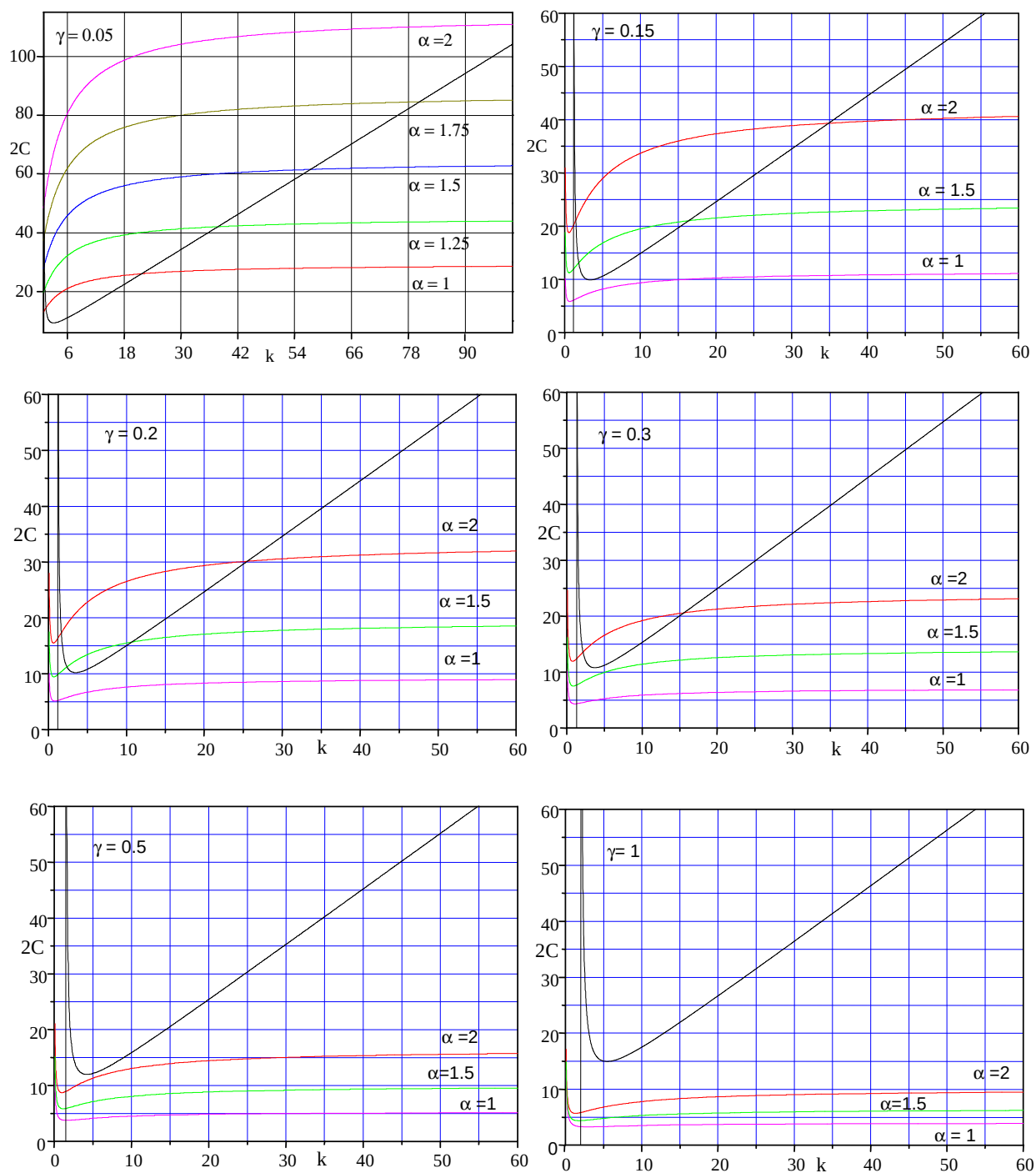


Fig.IV.5: Représentation de $2C_\alpha$ en fonction de k pour différentes valeurs de α et différents γ

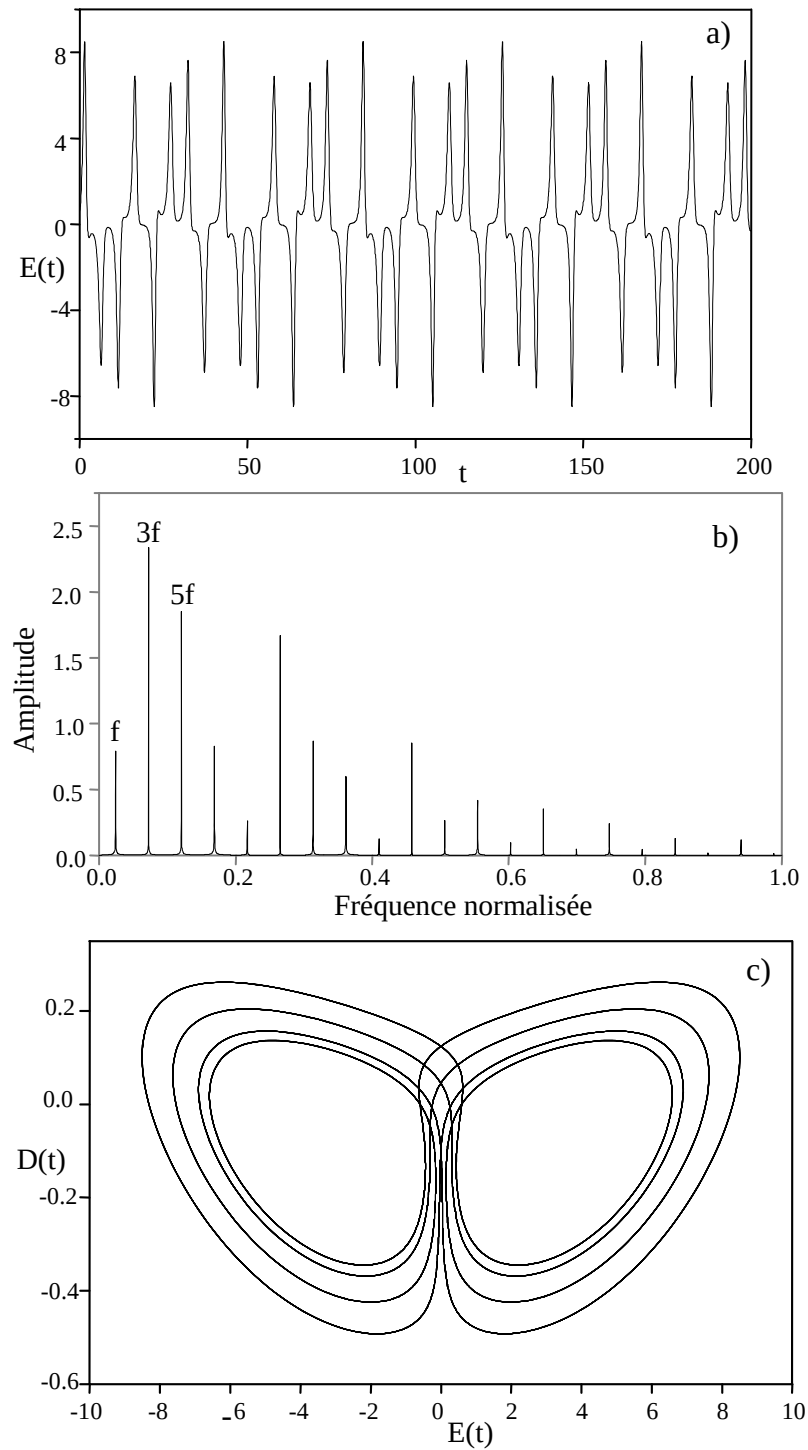


Fig.IV.6: a) Evolution temporelle du champ, b) Transformée de Fourier correspondante et c) Portrait de phase de a) pour $\gamma=0.2$, $k=3.49$ et $2C=10.6$

IV.2 Zone de fonctionnement chaotique

Les deux taux de pompage $2C_{2th}$ (III.3) et $2C_2$ ($\alpha = 2$) (IV.1) nous permettent de délimiter une zone où le fonctionnement du laser monomode à élargissement homogène ne peut être que chaotique. Il suffit de résoudre l'équation caractéristique de γ d'ordre 4 en fonction de k :

$$64k - 64k^3 + (96 + 208k + 92k^2 - 40k^3 + 12k^4)\gamma + (120 + 242k + 274k^2 + 70k^3 + 6k^4)\gamma^2 + (24 + 41k + 76k^2 - 5k^3)\gamma^3 + (15k + 29k^2)\gamma^4 = 0 \quad IV.2$$

qui découle de l'égalité $2C_{2th} = 2C_2$ soit:

$$\frac{(2k + 3\gamma + 4k\gamma)\{4[8(k+1) - \gamma(2k + \gamma + 4)] + 3\gamma(8 + 2k + 3\gamma)\}}{3k\gamma(2 + \gamma)(8 + 2k + 3\gamma)} = \frac{k(k + 3 + \gamma)}{k - 1 - \gamma} \quad IV.3$$

La résolution de l'équation IV.2 a été faite en s'aidant du logiciel de calcul Mathematica afin de retrouver les expressions analytiques des racines qui ne peuvent être réécrites étant donné leurs complexités. En ne retenant que les solutions physiques (γ positif), on obtient la courbe illustrée par la figure IV.7. Cette courbe sépare la zone de pulsation périodique de celle où le laser affiche un régime chaotique $C_2 > C_{2th}$.

Ceci est un grand pas dans le domaine de la prédictibilité dans la mesure où on peut connaître à l'avance quelles sont les paramètres de contrôle qui garantissent un fonctionnement chaotique.

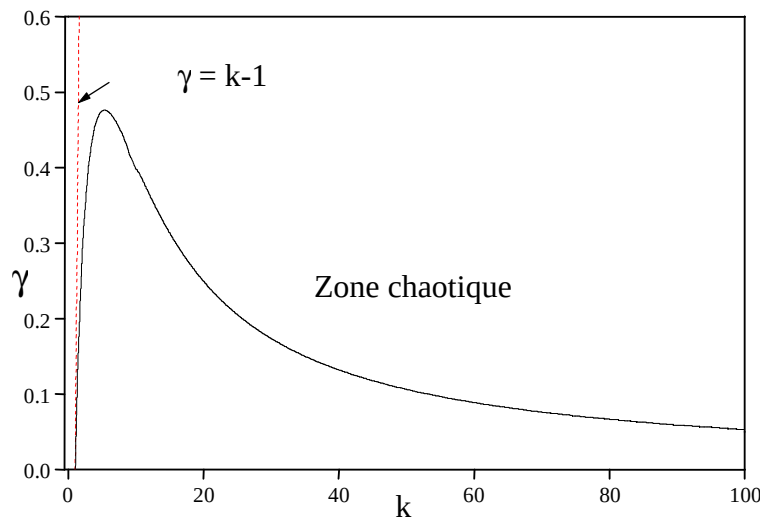


Fig.IV.7: Zone de fonctionnement chaotique pour $C_2 > C_{2th}$

IV.3 Expression du champ électrique

On peut adopter la même démarche entreprise dans le chapitre III afin de trouver l'expression analytique du champ électrique dans le cas où celui-ci effectue des oscillations de période 2, il suffit de noter d'après les figures IV.2.e et IV.2.f, qu'en plus d'harmoniques d'ordre impaire ($3f$, $5f$, ...) il faut tenir compte des harmoniques paires ($2f$, $4f$, ...) et des sous harmoniques ($1.5f$, $2.5f$, ...) dans l'expression du champ électrique III.22.a.

On se propose de tracer l'expression du champ électrique dans le cas où ce dernier entreprend des oscillations de période 2. Pour cela nous allons extraire les valeurs des différents ordres du champ du spectre de fréquences illustré sur la figure IV.2.f avec les paramètres $k = 3$ et $\gamma = 0.1$ et $2C = 29$. On perçoit une certaine similitude entre les deux tracés (figures IV.2.f et IV.8), ces légères différences sont dues au déphasage qui existe entre les différents ordres dans l'expression III.22.a, et qui n'a pas été pris en compte dans nos calculs.

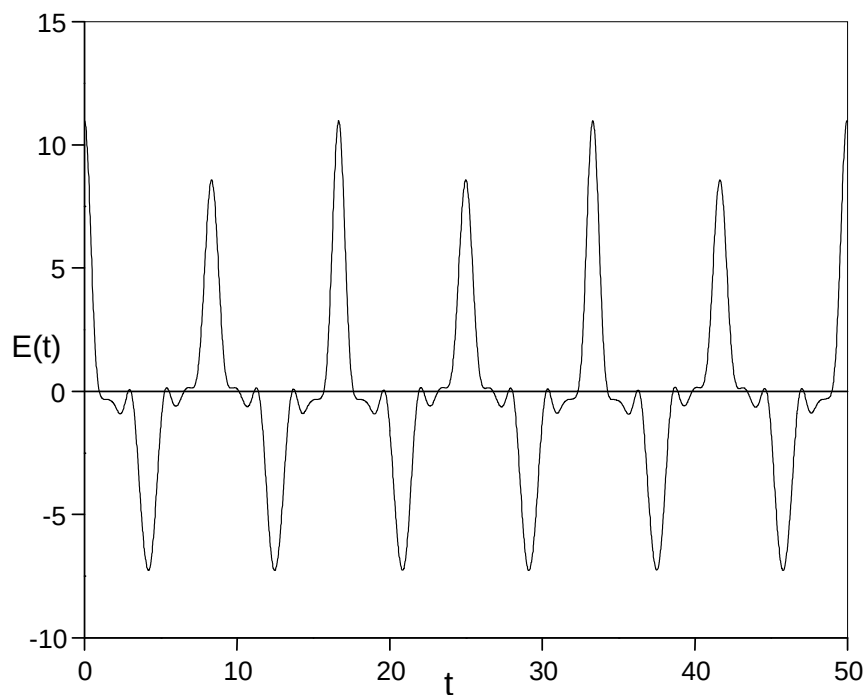


Fig.IV.8: Tracé temporel du champ électrique déduit l'expression III.22.a avec les paramètres de la figure IV.2.b et en s'appuyant sur le spectre de Fourier de la figure IV.2.f

IV.4 Conclusion

Ce chapitre démontre l'applicabilité du développement en série de Fourier aux équations de Lorenz dans les domaines de paramètres de contrôles qui vont au-delà de simples solutions périodiques d'ordre 1. La même procédure nous a permis de construire des solutions analytiques convenables des premiers termes de la très célèbre cascade sous-harmonique ou scénario à dédoublement de période.

Par ailleurs, les résultats présentés dans ce chapitre nous portent à conclure combien il est peu aisé de dresser analytiquement une frontière entre les différentes zones périodiques du laser, toutefois ceci n'est pas étonnant étant donné la nature non-linéaire de l'interaction rayonnement-matière. Nonobstant ces difficultés d'analyse, nos résultats permettent une localisation satisfaisante des zones chaotiques et des zones périodiques même si les contours précis entre ces différentes frontières restent à établir de façon mathématiquement plus rigoureuse.

Il est utile de signaler à ce stade que du point de vue Mathématiques pures, les équations de Lorenz constituent un Challenge répertorié par Smale[65,66] dans sa liste des quatorze problèmes qui constituent, selon lui, de sérieux défis aux Mathématiciens du 21^{ème}. Même si notre approche ne s'inscrit pas dans une démarche de Mathématiques pures, nos résultats peuvent constituer une piste d'analyse à ne pas négliger. C'est dans cette optique que nous envisageons de poursuivre ces travaux dans un futur très proche.

Conclusions et perspectives

Ce travail fût consacré à la mise en œuvre d'une approche analytique du régime d'oscillations périodiques qui se présentent dans un laser monomode à élargissement homogène dans une cavité en anneau selon les valeurs des paramètres de contrôle du laser. Cette approche basée sur un développement en série de Fourier de l'amplitude du champ électrique jusqu'à l'ordre 3 nous a permis pour la première fois en physique des lasers de trouver une seconde fréquence propre au système de Lorenz-Haken en plus de celle qui caractérise le régime de relaxation du laser, vu que son expression littérale ne fait intervenir que les vitesses de relaxation des trois variables dynamiques à savoir le champ électrique, l'inversion de population et la polarisation, dans une zone de paramètres de contrôle où l'amplitude du champ laser effectue des oscillations périodiques autour de zéro.

Moyennant cette approche aux grands signaux jusqu'à l'ordre 3, qui s'inspire de l'analyse aux petits signaux tenant compte du déphasage qui existe entre les trois variables dynamiques, on a pu déduire le taux de pompage qui force le laser à effectuer des oscillations périodiques à la fréquence propre dans des conditions qui favorisent un tel fonctionnement. Un tel comportement dynamique nécessite que le taux de pompage appliqué soit supérieur ou proche du deuxième seuil laser de telle sorte que le laser peut être délocalisé de son état stationnaire et atteint un autre état permanent périodique par une simple perturbation infinitésimale de l'état d'équilibre ou par le mécanisme de «hard excitation». Sur la base de ces résultats nous concluons que si le seuil de pulsation propre se situe très au-dessous du seuil d'instabilité, voire même proche du premier seuil, le laser ne peut entrevoir des oscillations périodiques propres et retourne inévitablement à son état stationnaire quel que soit le mécanisme de perturbation, et l'augmentation du taux pompage au dessus du deuxième seuil l'emporte loin de son état équilibre vers un état chaotique.

Le régime auto-pulsé qui est dû à l'interaction non linéaire entre le rayonnement laser et le milieu amplificateur peut être expliqué par l'influence de deux fréquences:

i) Une fréquence propre de pulsation qui caractérise les solutions dans le régime permanent dont on évoque l'existence pour la première fois par nos travaux et ii) une fréquence propre au régime transitoire avec laquelle le système laser s'écarte de son état de fonctionnement continu au dessus du seuil d'instabilité. Cette pulsation transitoire s'obtient par une simple

analyse de stabilité linéaire si on se trouve à proximité du seuil d'instabilité ou par notre approche où seulement les termes au premier ordre de faible amplitude dans les expressions du champ électrique, de la polarisation et de l'inversion de population jouent un rôle essentiel durant les interactions. Cette dernière expression qui ne se limite pas au seuil d'instabilité mais trouve sa validité au deçà et au delà du seuil d'instabilité.

Nos études faites sur le système Lorenz-Haken nous ont permis d'expliquer sa dynamique dans un domaine de paramètres de contrôle via le rapport de ces deux fréquences caractéristiques: pour un quotient rationnel un phénomène de blocage a lieu et la solution est périodique en contrepartie pour un rapport irrationnel les effets de compétitions entre les deux fréquences mènent le système vers le chaos.

On peut affirmer à travers ces travaux que le premier pas vers la prédictibilité a été franchi dans le sens où on peut déduire la fréquence de pulsation et l'amplitude du champ du laser sans résolution numérique et le plus important c'est qu'on a pu délimiter analytiquement la frontière qui sépare le régime périodique (prédictible) de la zone chaotique (imprédictible).

Soulignons que le système d'équations différentielles non linéaire «Lorenz-Haken» sert de base pour toute étude dynamique envisageable sur les lasers ou autre système physique équivalent étant donné que plusieurs expériences sur divers systèmes dynamiques révèlent un fonctionnement auto pulsé, de ce fait on espère que cette approche analytique jusqu'à l'ordre trois puissent servir de guide pour expliquer les différents comportements dynamiques qu'on rencontre lors des expériences.

En effet le Pr. B. Meziane a déjà appliqué cette méthode itérative sur un système dynamique plus complexe qui est le laser monomode à élargissement non homogène [67] qui affiche un comportement auto pulsé dont l'existence a été vérifiée tant sur le plan expérimental et théorique. Par cette méthode l'instabilité de Casperson[68] a pu être pour la première fois démontrée théoriquement malgré la complexité du système qui fait apparaître une intégrale sur la polarisation dans les équations différentielles.

Ce travail offre les perspectives suivantes:

- ❖ Etendre notre approche au delà du troisième ordre dans le développement harmonique de l'amplitude du champ laser pour contourner les quelques insuffisances qui découlent de cette troncature et pouvoir aussi traiter particulièrement des solutions périodiques autres que celles qui sont de période une.

- ❖ L'extension de cette approche à d'autres systèmes physiques dont le comportement dynamique peut être décrit par des équations analogues à celles du système Lorenz-Haken. Prouver expérimentalement l'existence de cette fréquence propre dans le régime permanent et démontrer ainsi par application d'une modulation extérieure à la fréquence propre que le laser ne peut entrevoir des pulsations propres quelle que soit l'amplitude de la modulation dans le cas de $\gamma=1$ (limite radiative)
- ❖ Approfondir l'étude analytique du scénario du dédoublement de période au moyen de cette approche.

Annexe A

Critère de Routh-Hurwitz

A.1 Polynôme d'Hurwitz

Un polynôme d'Hurwitz de variable λ est un polynôme à coefficients réels, tel que la partie réelle de tous ses zéros est négative. Si $\lambda_i = \alpha_i + j\omega$ est un de ses zéros, nous avons:

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \text{A.1}$$

quel que soit i compris entre 1 et le degré n du polynôme.

Le critère de stabilité qu'on peut déduire des propriétés mathématiques des polynômes d'Hurwitz s'énonce comme suit:

Un système physique régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants, sera stable si l'équation caractéristique est un polynôme d'Hurwitz. En effet, écarté de sa position d'équilibre, il y reviendra exponentiellement en fonction du temps.

Une condition nécessaire mais pas suffisante pour que tout polynôme:

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n \quad \text{A.2}$$

soit Hurwitzien est que tous ses coefficients soient strictement positifs.

Par exemple:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 18\lambda + 104 = (\lambda + 4)(\lambda - 1 + 5j)(\lambda - 1 - 5j) \quad \text{A.3}$$

n'est évidemment pas un polynôme d'Hurwitz, vu que ses deux racines complexes conjuguées $\lambda_2 = 1 + 5j$ et $\lambda_2 = 1 - 5j$ ont des parties réelles positives.

A.2 Critère de Routh-Hurwitz

Le critère de Routh permet de déterminer si les racines de l'équation caractéristique du système sont à parties réelles négatives ou non sans calculer explicitement ces racines.

Un polynôme $f(\lambda)$ à coefficient réel ($a_i > 0$) s'écrivant sous la forme:

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n \quad a_0 > 0 \quad \text{A.4}$$

sera dit hurwitzien s'il vérifie les conditions ci dessous:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & \dots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & & & 0 \\ & & & & & & a_{2i-1} \\ & & & & & & a_i \end{vmatrix} > 0. \quad \text{A.5}$$

Ces inégalités portent le nom de critère de Routh -Hurwitz

A.3 Exemples

$$\triangleright f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 5\lambda^2 + 2\lambda + 2 \quad \text{A.6}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 2$$

Tous les coefficients de $f(\lambda)$ sont positifs, vérifiant le critère de Routh-Hurwitz:

$$a_0 = 1 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 = 2 > 0 \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 8 > 0 \quad \text{A.7}$$

Le coefficient a_4 n'est pas utilisé. Il suffit qu'il soit positif: $a_4 = 2 > 0$.

On en déduit que les racines de l'équation $f(\lambda)$ du système sont à parties réelles négatives et le système physique décrit par cette équation est stable.

$$\triangleright f(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda + 1 \quad \text{A.8}$$

$f(\lambda)$ n'est sûrement pas un polynôme de Hurwitz car il possède un coefficient négatif il s'en suit que le système physique décrit par cette équation n'est pas stable:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = 1$$

Vérifions le critère de Routh- Hurwitz:

$$a_0 = 1 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 = 2 > 0 \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -8 < 0 \quad \text{A.9}$$

Annexe B

Notion de bifurcation

Le comportement des systèmes non linéaires dépend impérativement de leurs paramètres de contrôle et l'étude de ces systèmes dynamiques fait apparaître une notion tout à fait fondamentale qui est la bifurcation. En effet avant de devenir chaotique, ces systèmes présentent des changements de comportements brutaux et qualitatifs pour des valeurs précises d'un paramètre (ou des paramètres), dites valeurs critiques, on dit alors qu'une bifurcation se produit à chaque changement. Un point de l'espace des paramètres où survient un tel fait est, par définition, un point de bifurcation. La représentation d'une telle propriété en fonction du paramètre de bifurcation, constitue un diagramme de bifurcation.

B.1 Bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf donne naissance à des solutions oscillantes, telle que pour une valeur critique du paramètre de contrôle une solution stationnaire représentée par un point fixe dans l'espace des phases donne naissance à un cycle limite. Une telle bifurcation s'écrit dans le plan complexe et dans la forme normale la plus simple:

$$\dot{z} = \mu z - |z|^2 z \quad \text{B.1}$$

où z est une variable complexe.

En posant $\mu = \mu_r + i\mu_i$, et $z = Ae^{i\theta}$, on aura selon B.1:

$$\dot{A} = \mu_r A - A^3 \quad \text{B.2}$$

$$\dot{\theta} = \mu_i \quad \text{B.3}$$

Nous obtenons ainsi une bifurcation fourche (paragraphe B.3) pour l'amplitude tandis que la phase tourne à la vitesse μ_i . La solution est de ce fait périodique et les trajectoires décrivent une spirale attirée vers une courbe asymptotique nommée: cycle limite. Les solutions stationnaires de B.1 soit B.2 sont:

$$A=0 \text{ (soit } z=0) \text{ et } |z|^2 = A^2 = \mu_r.$$

En posant $z=x+iy$ on aura $|z|^2 = x^2 + y^2 = \mu_r$ et cette solution définit dans le plan (x,y) un cercle de rayon $\sqrt{\mu_r}$ (figure B.1).

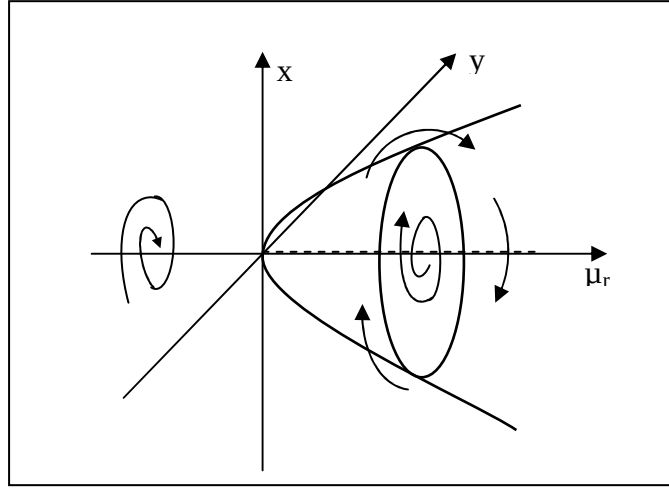


Fig.B.1: Diagramme de la bifurcation de Hopf. Les flèches représentent quelques lignes de force du champ de vecteurs.

B.2 Bifurcation sur-critique et sous-critique

La bifurcation ayant la forme normale B.1 est dite sur-critique (normale). Le cycle limite naît avec une amplitude nulle ceci est dû au terme non linéaire $z|z|^2$ qui a un effet opposé à celui de l'instabilité engendrée par les termes d'ordre moins élevé. Le terme $z|z|^2$ sature l'effet de l'instabilité linéaire pour $|z|^2 = \mu$. Par suite la solution stationnaire ne subit pas de transformation brutale à la bifurcation, mais change progressivement. Naturellement la bifurcation de Hopf peut être également sous critique si le coefficient du terme $z|z|^2$ est de signe positif menant à l'amplification de l'instabilité, il faut alors un terme négatif en $z|z|^4$ pour obtenir une saturation non- linéaire et stabiliser les oscillations de grande amplitude. La bifurcation de Hopf sous critique ou encore inverse à la forme normale suivante:

$$\dot{z} = \mu z + |z|^2 z - |z|^4 z \quad \text{B.4}$$

En posant $\mu = \mu_r + i\mu_i$, et $z = Ae^{i\theta}$, on obtient alors:

$$\dot{A} = \mu_r A + A^3 - A^5 \quad \text{B.5}$$

$$\dot{\theta} = \mu_i \quad \text{B.6}$$

La solution triviale $A=0$ est stable pour $\mu_r < \mu_{cr}$ et se déstabilise pour $\mu_r \geq \mu_{cr}$. Les solutions non triviales se calculent facilement et correspondent aux racines de $\mu_r + A^2 - A^4$, elles sont au nombre de quatre quand $\mu'_{cr} < \mu_r < \mu_{cr}$ et de deux lorsque $\mu_r \geq \mu_{cr}$. En linéarisant autour de ces solutions on peut déterminer leur stabilité, par conséquent pour $\mu_r > \mu_{cr}$, les solutions non triviales sont stables, et dans la région $\mu'_{rc} < \mu_r < \mu_{cr}$, les solutions telles que $A^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4\mu_r}}{2}$ sont stables. En revanche, celles qui correspondent à $A^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4\mu_r}}{2}$ sont instables. De ce fait il existe un domaine du paramètre $\mu'_{rc} < \mu_r < \mu_{cr}$ dans lequel il y a coexistence de la solution triviale et des solutions qui ne le sont pas (voir figure B.2).

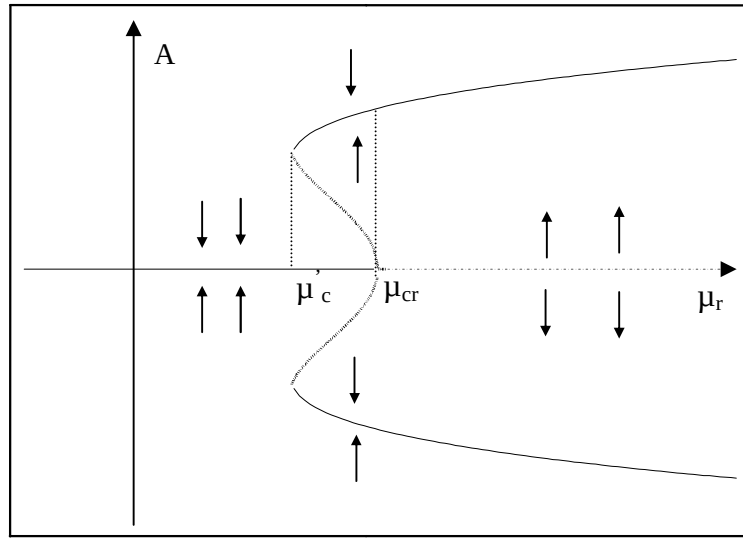


Fig.B.2: Bifurcation inverse ou sous-critique

Si on fait varier μ_r depuis $\mu_r < \mu'_{rc}$ continûment vers $\mu_r > 0$, le système choisit d'abord la solution triviale et ne se déstabilise que pour $\mu_r = \mu_{cr}$, en ce point A prend brutalement une valeur finie. En reprenant la même procédure mais en s'arrêtant à μ'_{rc} , on obtient la solution triviale qui est linéairement stable pour cette valeur du paramètre. Toutes fois si on soumet notre système à une perturbation assez importante le système se déstabilise et atteint la branche telle que $A^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4\mu_r}}{2}$. En opérant une rampe descendante sur le paramètre μ_r ,

le système reste sur la branche $A^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4\mu_r}}{2}$ jusqu'au moment où $\mu_r = \mu'_{rc}$, le système effectue un saut brutal. Entre la montée et la descente, il apparaît donc un hystérésis dans le comportement du système, caractéristique des bifurcations sous-critiques. A l'intérieur du domaine d'hystérésis $[\mu'_{cr}, \mu_{cr}]$ coexistent deux solutions stables : l'une stationnaire (point attracteur), l'autre oscillante (cycle limite). En faisant varier le paramètre μ_r de gauche à droite le cycle limite stable apparaît au point μ_{rc} avec une amplitude non nulle et se trouve à une distance finie de la solution stationnaire qui devient instable. Ce cycle limite disparaît aussi avec une amplitude non nulle au point μ'_{rc} si on fait varier le paramètre μ_r de droite à gauche. On note bien en μ_{rc} qu'un point instable donne naissance à un cycle limite instable et à un point stable, c'est l'inverse de la bifurcation de la figure B.1.

L'apparition d'un cycle limite d'amplitude d'oscillation non nulle en plus de l'hystérésis, attribue à la bifurcation sous-critique des propriétés spécifiques distinctes de celles d'une bifurcation de Hopf sur-critique.

B.3 Bifurcation fourche

Souvent les systèmes dynamiques renferment une symétrie du type $x \rightarrow -x$, c.à.d que ces systèmes possèdent une invariance pour la transformation $x \rightarrow -x$. Dans ce cas la première linéarité à apparaître est cubique et la forme normale de la bifurcation symétrique est

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad \text{B.7}$$

dont les points critiques sont donnés par $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{\mu}$ $\mu > 0$ (figure B.3).

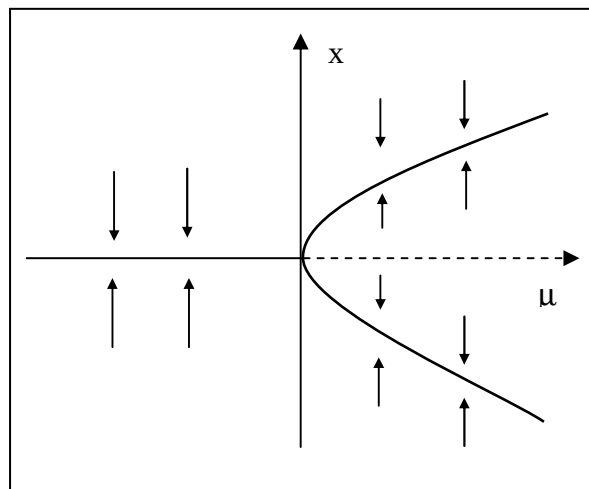


Fig.B.3: Diagramme de la bifurcation fourche

Annexe C

Publications

Third-order harmonic-expansion analysis of the Lorenz-Haken equations

S. Ayadi^a and B. Meziane^{*b}

^aInstitut de Physique, Laboratoire Lasers, USTHB, BP 32, El-Alia Bab-Ezzouar, Alger, Algérie

^bUniversité d'Artois, UCCS Artois, UMR CNRS 8181, Rue Jean Souvraz, SP18, 62307, Lens Cedex, France

ABSTRACT

This paper aims at revisiting the basic Lorenz-Haken equations with two-fold harmonic-expansion approaches, yielding new analytical information on both the transient and the long term characteristics of the system pulse-structuring. First, we extend the well-known Casperson Hendow-Sargent weak-sideband analysis to derive a general formula that gives the value of the transient frequencies, characteristic of the laser relaxing towards its long-term state, either stable or unstable. Its validity is shown to apply with a remarkable precision at any level of excitation, both beyond and below the instability threshold. Second, we put forward a strong-harmonic expansion scheme to analyse the system long-term solutions. Carried up to third order in field amplitude, the method allows for the derivation of a closed form expression of the system eigen-frequency (derived here for the first time in three decades of laser dynamics) that naturally yields an iterative algorithm to build, analytically, the regular pulsing solutions of the Lorenz-Haken equations. These solutions are constructed for typical examples, extending well beyond the boundary region of the instability domain, inside which the laser field amplitude undergoes regular pulsations around zero-mean values.

Keywords: Laser Physics, Non-linear dynamics, Instabilities and Chaos

INTRODUCTION

Despite their simple structure, the Lorenz-Haken equations that illustrate the dynamic properties of single-mode homogeneously broadened lasers have been challenging the scientific community for more than three decades, ever demanding for clearer insights in connection to the fundamental properties associated to the physics of light-matter interactions inside an amplifying medium.

This paper aims at delimiting the extent of validity of the usual small sideband analysis before applying a strong signal procedure to the single-mode laser equations. Such small and strong harmonic-expansion analyses have recently been proposed to light up some analytically unexplored aspects of laser dynamics for both the homogeneously and the inhomogeneously broadened systems [1-4]. Here, it is conclusively demonstrated that, in their pulsing regime of operation, these equations are characterized by a natural pulsing frequency which, to the best of our knowledge, has never been put forward in the laser literature. The derived closed-form expression of this basic eigen-frequency is related exclusively to the three relaxations rates of the interacting variables, namely κ for the electric field, $\wp_{\perp}$ for the polarization and $\wp_{\parallel}$ for the population inversion. The system enters its natural period-one pulsing regime with this fundamental driving frequency at a correspondingly fixed pumping level. This naturally brings us to define a typical excitation level, which, depending on the exact values of the three relaxation rates, may be situated above or below the second-laser threshold (onset of instability).

The following section gives a brief outline of the standard small sideband analysis, originally proposed by Casperson [3] and readjusted by Hendow and Sargent [4] to handle the laser instability problem. In particular, it is shown that the method only describes the transient properties of the laser signal when relaxing toward its permanent state, either stable or unstable. Leaning on the structure of the long term solutions of the Lorenz-Haken equations pulsing-regime, we put forward a strong harmonic expansion procedure that distils new analytical information that the small sideband approach fails to provide. The findings presented in Sec. 3 directly allow for the construction of analytical solutions, provided these consist of periodic pulse trains.

BRIEF OUTLINE OF THE LORENZ-HAKEN EQUATIONS

The single-mode homogeneously broadened laser is described with a set of three non-linearly coupled differential equations that relate the laser field $E(t)$, oscillating inside a resonant cavity, to the population inversion $D(t)$ and polarization $P(t)$ of the amplifying medium. For the simple case of a unidirectional ring cavity, a self-consistent analysis along with some simplifying, physically acceptable, hypotheses results in a set of three non-linearly coupled differential equations which, in the absence of detuning between the resonant cavity mode and the frequency of the medium's emitting-dipoles, takes, in real space, the following form [2, 5]

$$\partial_t E(t) = -\kappa\{E(t) + 2CP(t)\}, \quad (1a)$$

$$\partial_t P(t) = \wp_{\perp}\{-P(t) + E(t)D(t)\}, \quad (1b)$$

and

$$\partial_t D(t) = -\wp_{\parallel}\{D(t) + 1 + E(t)P(t)\}. \quad (1c)$$

Where κ , $\wp_{\perp}$, and $\wp_{\parallel}$ are, respectively, the field, polarization, and population inversion decay rates. Each variable is a normalised quantity.

For simplifying purposes, a scaled time $\wp_{\perp}t$ is usually defined while the cavity and population-inversion decay-rates are both normalised to the polarization relaxation rate. These normalisations amount to solely replacing $\kappa/\wp_{\perp}$ and $\wp_{\parallel}/\wp_{\perp}$, in the above set of equations with κ and $\wp$ respectively.

Self-pulsing solutions characterise the above equations when operated beyond the instability threshold. The development of such solutions from an initially stable state consists of a transient part undergoing an exponential growth before the final periodic signal sets in, typically following the representations of Fig. 1.

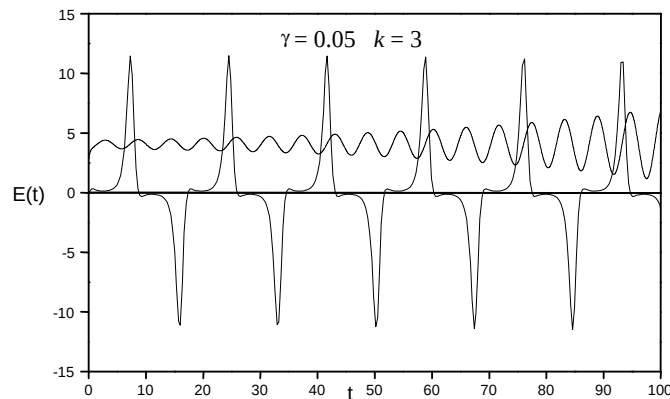


Fig. 2. Full structure of an unstable solution showing both the transient (exponentially growing) part of the time trace and its final long-term regular pulses.

SMALL SIDEBAND ANALYSIS: EXTENT OF VALIDITY

Small signal analysis of Eqs (1) is rooted on the application of a small perturbation to each of the three variables around their stationary values E_0 , P_0 , and D_0 .

Projected onto an adapted analytical framework, the laser-field transient signal of the above figure follows a small harmonic expansion of the form

$$E(t) = E_0 + e \cos(2\pi\nu_t) \quad (2a)$$

While the polarization and population inversion variables, that must take into account some out of phase evolution with respect to the driving field, write

$$P(t) = P_0 + p_1 \cos(2\pi\nu_t) + p_2 \sin(2\pi\nu_t) \quad (2b)$$

and

$$D(t) = D_0 + d_1 \cos(2\pi\nu_t) + d_2 \sin(2\pi\nu_t) \quad (2c)$$

Where e is a small perturbation of the field-amplitude, p_1 and p_2 represent, respectively, the in-phase and out-of phase components of the polarization perturbation, and d_1 and d_2 , the in-phase and out-of-phase components of the population inversion perturbation.

Inserted into Eqs (1-3), the above expansions yield a closed form expression for the transient pulsation, as a function of the system control parameters, which writes [5]

$$\nu_t = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(2C-1)^2 \wp^2 + \kappa \wp (2C-1)(2+\wp) - (\kappa+1)\wp^2}{\kappa+1+(2C-1)\wp}} \quad (3)$$

At the onset of instability, this relation yields the well known pulsation (obtained from standard linear stability analysis) characteristic of the transient signal that develops from its stable state

$$\Delta_{t0} = \sqrt{\frac{2\kappa\wp(\kappa+1)}{\kappa-1-\wp}} \quad (4)$$

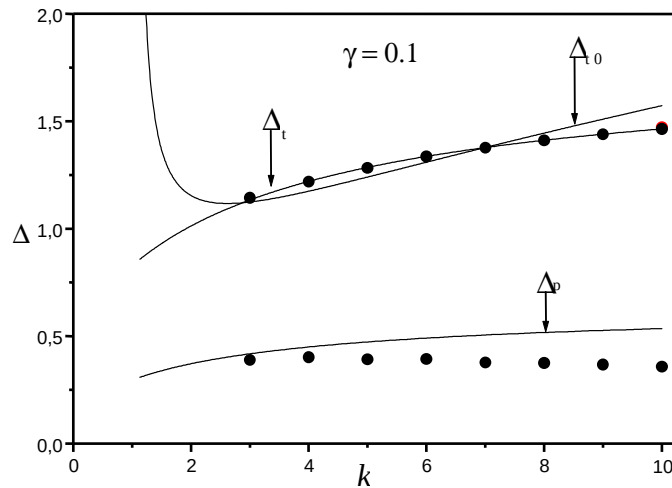


Fig. 2. Representations of the analytical expressions of the transient ($\Delta_t = 2\pi\nu_t$) and permanent ($\Delta_p = 2\pi\nu_p$) pulsations with respect to the cavity decay rate, obtained with $\wp=0.1$. The dots were obtained with direct numerical simulations of Eqs. (1). The curve (Δ_0) represents the pulsation values at the instability threshold (Eq. 4).

The transient properties of the unstable solutions are summarized in the upper curve of Fig. 2, showing a clear match between the analytical formula (3) (solid curve) with the results of direct numerical simulations of Eqs (1) (dots along the curve). The corresponding excitation level is chosen to correspond to the long term locus that gives period-one pulsing-solutions, as will be clarified in the following section.

The curve (Δ_{t_0}), representing the pulsation values at the instability threshold, given here as a mere reference, also indicates how the transient frequencies of the unstable signal relaxing towards its permanent state, may depart from its value at the instability threshold.

These simple elements indicate the limits of the usual small side-band method, as originally introduced by Casperson, since the original method is strictly equivalent to linear stability analysis, thus limiting its validity to the onset of instability. On the other hand, our method takes into account out-of-phase components that describe unavoidable competing effects between the three interacting variables that go along with light-matter interactions inside the lasing medium. Such competing effects are completely overlooked if one ignores the out-of phase components in the developments of Eqs. (2b) and (2c).

Beyond the representations given in Fig. 2, numerous examples were studied, both numerically and analytically and in all the cases a perfect match between the transient frequencies of the developing signals as obtained with the closed form expression Eq. (3) precisely match the numerical simulations obtained with Eqs (1). These results convincingly demonstrate that the validity of the readjusted small-sideband method extends to the whole domain of control parameter space, both below and beyond the instability threshold, whereas the original method proposed by Casperson [3] and readjusted by Hendow and Sargent [4] and which ignores the dephasing processes that do occur between the interacting variables, is limited to the onset of instability.

STRONG SIDEBAND ANALYSIS: SELF-PULSING PROPERTIES

As one may see from the signals of Fig. 1, there is a fundamental difference between the transient and the long term signals. While the transient trace develops with small oscillations around the steady state laser-field value E_0 , the permanent pulses oscillate around a zero mean value. As a consequence, an analytical expansion of the corresponding solution must evolve according to $\langle E(t) \rangle = 0$.

Adapted to the permanent time trace of Fig. 1 is the following harmonic Fourier-expansion

$$E(t) = \sum_n E_n \cos(n\Delta t) \quad (5a)$$

In opposition to the perturbation term e in Eq.(2a), the harmonic amplitudes E_n are no longer small quantities. In particular, E_1 is of the same order of magnitude as the stationary field E_0 . Driven by the field $E(t)$, the medium's variables evolve according to

$$P(t) = \sum_n \{P_{ipn} \cos(n\Delta t) + P_{opn} \sin(n\Delta t)\}, \quad (5b)$$

$$D(t) = d_{dc} + \sum_n \{d_{ipn} \cos(n\Delta t) + d_{opn} \sin(n\Delta t)\}. \quad (5c)$$

Where the indexes ip and op refer, respectively, to the in-phase and out-of phase components. When the above expansions are inserted into Eqs (1), one finds a hierarchical set of algebraic relations. These show that the field and polarization expansions (5a) and (5b) both contain odd terms while the population inversion development (5c) contains even terms, in conformity with the non-linear coupling of Eqs (1). Here, we limit the calculations to third order for the field and polarization, for they allow for the determination of the operating long-term frequencies. The first and third-order terms for the polarization, are derived, after lengthy, but straightforward calculations, and take the form

$$P_{ip1} = -\Gamma_d E_1 + \Gamma_d T_{1d} [\wp^2 (1 - \Delta^2) - 4\wp \Delta^2] \frac{E_1^3}{4} \quad (6a)$$

$$P_{op1} = -\Delta \Gamma_d E_1 + \Gamma_d T_{1d} \wp \Delta [1 + \wp - \Delta^2] \frac{E_1^3}{4} \quad (6b)$$

$$P_{ip3} = \Gamma_d T_{3d} [\wp^2 (1 - 3\Delta^2) - 8\wp \Delta^2] \frac{E_1^3}{4} \quad (6c)$$

$$P_{op3} = \Gamma_d T_{3d} 2\wp \Delta \left[1 + 2\wp - 3\Delta^2 \right] \frac{E_1^3}{4} \quad (6d)$$

Where, for simplifying purposes, we introduced the following parameters

$$\Gamma_d = \left(1 + \Delta^2 + \frac{E_1^2}{2} \right)^{-1} \quad (6e)$$

$$T_{1d} = (1 + \Delta^2)^{-1} (\wp^2 + 4\Delta^2)^{-1} \quad (6f)$$

and

$$T_{3d} = (1 + 9\Delta^2) (\wp^2 + 4\Delta^2) \quad (6g)$$

In addition to the above relations, the set of algebraic expressions obtained with Eq. (1) contain the following relationships between the first and the third-order field and polarization amplitudes

$$E_1 = -2CP_{ip1} \quad (7a)$$

$$\Delta E_1 = 2C\kappa P_{op1} \quad (7b)$$

$$E_3 = -2CP_{ip3} \quad (7c)$$

$$3\Delta E_3 = 2C\kappa P_{op3} \quad (7d)$$

An expression for the operating long-term frequency follows from the ratio of Eqs (7c) and (7d)

$$\frac{3\Delta}{\kappa} = - \frac{P_{op3}}{P_{ip3}} \quad (8)$$

Yielding, with Eqs (6c) and (6d)

$$\Delta_{p0} = \sqrt{\frac{2\kappa(1 + 2\wp) + 3\wp}{24 + 6\kappa + 9\wp}} \quad (9)$$

For $\kappa = 3$ and $\wp = 0.1$, we obtain $\Delta_{p0} = 0.418$, which excellently matches the long-term time-trace pulsation value.

This natural frequency characterizes the laser-matter interaction when the field third-order term E_3 , that scales as E_1^3 , plays an essential role. A beat note between the first and the third order field amplitude carries intensity information at twice Δ thus giving its signature to the population inversion first components d_1 and d_2 . Furthermore, closed form expressions of d_1 and d_2 , show, in addition to the usual second-order field amplitude E_1^2 (laser intensity) dependence, an additional term that scales to the fourth-order field amplitude E_1^4 (intensity square). The emergence of this last term enhances the non-linear nature of set (1). However, the third-order electric field, that contains the first-order laser intensity, seems to play the leading role, at least inside the parameter space of period-one solutions. These physical elements explain and justify the expansion-form of the population inversion in (5c).

As one may notice, the ratio between the transient and the long-term time periods of the signals is less than three. Further investigations reveal that when the transient solution approaches the permanent periodic state, the ratio between the transient pseudo-period and the long-term period is always two, in the regular period-one pulsing zone.

We insist on the fact that Eq. (9) represents the long term eigenpulsation of the system, since it does not show any dependence on excitation level but is exclusively related to the three interacting-variables decay-rates. Indeed, the system's response is closely related to the level

of excitation as demonstrated in Eq. (3) for the transient solution. The above procedure also gives a closed form expression for the long term pulsation in terms of the excitation parameter $2C$. The ratio of the first-order relations (7a) and (7b) yields

$$\frac{\Delta}{\kappa} = -\frac{P_2}{P_1} = -\Delta \frac{(\wp^2 + 4\Delta^2)(1 + \Delta^2) - \wp(1 + \wp - \Delta^2) \frac{E_1^2}{4}}{(\wp^2 + 4\Delta^2)(1 + \Delta^2) - [\wp^2(1 - \Delta^2) - 4\wp\Delta^2] \frac{E_1^2}{4}} \quad (10)$$

That easily transforms into

$$\frac{E_1^2}{4} = \frac{(1 + \kappa)(\wp^2 + 4\Delta^2)(1 + \Delta^2)}{2\kappa\wp(1 + \wp - \Delta^2) + \wp^2(1 - \Delta^2) - 4\wp\Delta^2} \quad (11)$$

The excitation parameter links to the first order amplitude through

$$2C = \frac{1}{\Gamma_d \left\{ 1 - T_{1d} \left(\wp^2(1 - \Delta^2) - 4\wp\Delta^2 \right) \frac{E_1^2}{4} \right\}} \quad (12)$$

From a straightforward combination of the above relations, we readily extract an expression for the long-term pulsation, showing an additional dependence on excitation level

$$\Delta_p = \sqrt{\frac{(2C - 1)\kappa\wp(2 + \wp) - 3(\kappa + 1)\wp^2}{8(\kappa + 1) - \wp(2\kappa + \wp + 4)}} \quad (13)$$

In short, the third-order relationships has led to the extraction of an eigenfrequency of the periodic state, while the first order one has led to the above relation. Indeed, both relations (i.e. Eqs 9 and 13) must be consistent with each other. It requires one more little step with little more effort to derive a closed form expression that gives the excitation-level locus that corresponds to period-one solutions.

Equalizing (9) with (13) yields

$$2C_{p1} = \frac{4[\kappa + 1 + 2\wp][2\kappa + 4\kappa\wp + 3\wp]}{3\kappa\wp[8 + 2\kappa + 3\wp]} \quad (14)$$

Let us point out that, in comparison to the instability threshold well-known relation, this last expression gives the excitation level for the related period-one solutions in terms of the system decay rates κ and $\wp$ only. As a consequence, it is also considered as an intrinsic property of the system's long term evolution, just as the instability threshold is an intrinsic property of the system's transient development.

accordingly, the first set of values $(2C_{2th}, \Delta_t)$ characterises the development of the transient signal, while the second set $(2C_{p1}, \Delta_p)$ typifies the intrinsic properties of the unstable permanent state.

A typical representation of the long-term pulsation values is given in the lower curve of Fig. 2. We have deliberately chosen to draw the curves with respect to the cavity decay rate, because for a given sealed system, the amplifying medium parameter $\wp$ usually remains fixed, while one may more easily adjust the cavity decay rate by modifying the mirrors reflectivity or the length of the unidirectional ring-cavity. The analytical locus for period-one solutions follows the lower solid-line of Fig. 2, while the closer dots correspond to pulsation values obtained numerically with Eqs (1). One may see a quite satisfactory match between the numerical and the analytical results, especially in the region of small cavity decay rates. As the cavity decay rates increases, small deviations from the analytical curve do occur. These can easily be understood, since a decay-rate increase also increases the dephasing processes between the interacting variables, thus resulting in the necessary inclusion of higher than the

third order components of this section. As a consequence, a better match could be obtained if the field expansion takes into account the high-order contribution. However, the third order structure gives a fairly good account to the physics involved in pulse formation inside the unstable regime of the Lorenz-Haken equations.

Once, for a given set of control parameter values, the long-term pulsation is evaluated, it becomes an easy task to obtain the corresponding pulsing solution. The first order field amplitude is computed from Eq. (11), while the third-order component is derived to take the following form

$$E_3 = -2C\Gamma_d T_{3d} [\wp^2(1 - 3\Delta^2) - 8\wp\Delta^2] \frac{E_1^3}{4} \quad (15)$$

Showing an explicit cubic dependence on the first order amplitude as expected from the non-linear nature of the field-matter interactions. Despite such a cubic dependence, E_3 always remains lower than E_1 as imposed by the saturating term Γ_d (see Eq. (6e)).

Let us focus on a typical example of pulse structuring with increasing field-order components. The long term operating frequency is estimated from Eq (13), while the first and the third order field components are evaluated from Eqs (11) and (15), respectively.

For $\kappa = 3$, $\wp = 0.1$ and $2C = 10$, the values of these components are $E_1 = 5.2$ and $E_3 = 1.73$, while the corresponding long term frequency is $\Delta \approx 0.42$. Thus, to third order, the analytical field expansion writes

$$E(t) = 5.2 \cos(0.42t) + 1.73 \cos(3 \times 0.42t) \quad (16)$$

This third-order expansion is represented in Fig. 3a. One may see that the global features of the numerical counterpart of Fig. 1 are recovered. However there still remain a few differences between the analytical and the numerical counterpart. For example, the pulse peak values of Fig. 1, $E_p = 7.96$, are higher than those of Fig. 3a, for which $E_p = 6.95$.

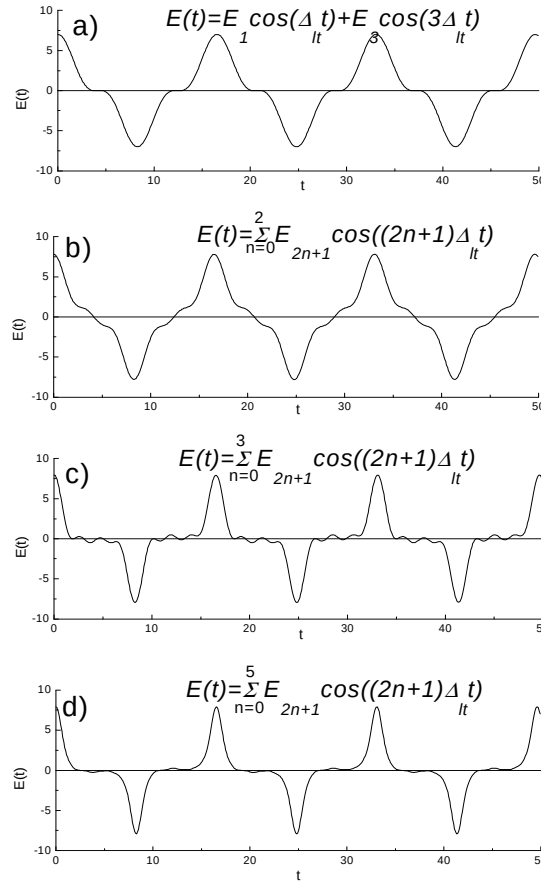


Fig. 3. Typical example of a hierarchy of analytical solutions with increasing accuracy, obtained to a) third-order, b) fifth-order, c) seventh-order, and d) eleventh-order, in laser-field amplitude.

In order to obtain a better fit, we extend the calculations towards fifth order in field amplitude; the strong-harmonic expansion technique can indeed be extended to extract the fifth order component which is obtained in terms of the first and the third-order field amplitudes in the form

$$E_5 = -2C\Gamma_d\Gamma_4\Gamma_5 \left\{ f(\Delta)E_1^5 + g(\Delta)E_1^2E_3 + h(\Delta)E_1^4E_3 + q(\Delta)E_1E_3^2 + s(\Delta)E_1^3E_3^2 \right\} \quad (17)$$

Where the weight functions $f(\Delta)$, $g(\Delta)$, $h(\Delta)$, $q(\Delta)$, and $s(\Delta)$ can be evaluated through straightforward but time-consuming application of the strong harmonic procedure.

For $\kappa = 3$, $\wp = 0.1$ and $2C = 10$, the fifth-order value is $E_5 = 0.8$, and to fifth order, the analytical field expansion writes:

$$E(t) = 5.2 \cos(0.42t) + 1.73 \cos(3 \times 0.42t) + 0.8 \cos(5 \times 0.42t) \quad (18)$$

and is represented in Fig. (3b). As compared to the signal of Fig.(3a), the time trace of Fig.(3b) shows thinner and higher peak values, approaching those of the numerical counterpart of Fig. 1. However, the solution has undergone some distortion that rules out any improved resemblance. Higher order terms are still required to achieve much better accuracy. The very lengthy and time consuming calculations (with an increased rate of error-occurrence with increasing order term evaluation) required to obtain the fifth order terms is of no encouragement to attempt higher-order-terms determination any further. Instead, a much more convenient way to find the amplitudes of high-order terms consists in a direct evaluation of the components peak-height from the frequency spectra of the corresponding numerical solutions. Such a procedure directly yields the analytical solution, up to the desired order. The

highest order term is dictated by the importance of the corresponding frequency component emerging from the frequency spectrum. The example of Fig. 1, shows a spectrum that contains field components up to the 11th term. Limiting the expansion to the ninth order only shows some differences with the exact numerical solution, as demonstrated in (Fig. 3c). The adapted expansion requires taking into account all the terms, including the eleventh-order. This demonstrates the importance of each term in pulse structuring.

The final analytical counterpart of the period-one permanent trace of Fig. 1 thus writes

$$E(t) = \sum_{n=0}^{n=5} E_{2n+1} \cos((2n+1)\Delta t) \quad (19)$$

It is represented in Fig. 3d. A one-to-one comparison with the solution of Fig. 1 demonstrates an almost perfect match between the two signals.

CONCLUSION

We have revisited the well-known small-sideband analysis to extend its validity to the whole control parameter space of the Laser-Lorenz equation. A first closed form expression was obtained to describe, with an extraordinary precision, the small oscillation frequencies of the transient part of the solution which develops from its initial stationary state, either stable or unstable, when subjected to a small perturbation. Furthermore, we have adapted the side-band procedure to a strong harmonic expansion procedure that has led us to extract a second closed form expression adapted to describe the self-pulsing frequencies of the permanent unstable solutions. Such a closed form expression has led us to propose an analytical description of the hierarchical structuring that characterizes a typical solution in the self-pulsing regime of the single-mode homogeneously broadened laser operating in a bad-cavity configuration. The method presented here is fairly general to be applicable to other differential sets of equations that qualitatively possess the same pulsing solutions. In particular, the well-known integro-differential “Maxwell-Bloch” equations adapted to describe the pulsing behavior of a single-mode inhomogeneously broadened laser have been, as well, handled with the same approach [6]. However, the involved algebra is much more complicated, and the analytical calculations do not exhibit simple closed form expressions as those obtained in this contribution.

REFERENCES

- ¹ H. Haken, "Analogy between higher instabilities in fluids and lasers", Phys. Lett. **A 53**, 77 (1975).
- ² H. Haken, [Light, Vol. 2, Laser Light Dynamics], Chap. 8, North Holland, Amsterdam, (1985).
- ³ L. W. Casperson, "Stability criteria for high-intensity lasers", Phys. Rev. A **21**, 911 (1980).
- ⁴ S. T. Hendow and M. Sargent III, "Theory of single mode instabilities", J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 2, No 1, 84 (1985).
- ⁵ S. Ayadi and B. Meziane, "Weak versus strong harmonic-expansion analyses of self-pulsing lasers: I-the Laser-Lorenz model", Opt. And Quant. Electron., <http://dx.doi.org/10.1007/s11082-007-9065-9>, (2007)
- ⁶ B. Meziane and S. Ayadi, "Weak versus strong harmonic-expansion analyses of self-pulsing lasers: II-the inhomogeneously broadened system", Opt. And Quant. Electron., <http://dx.doi.org/10.1007/s11082-007-9068-6> (2007).

Bibliographie

- [1] T.H.MAIMAN, *Nature.*, vol. 187, p. 493, 1960.
- [2] T.H.MAIMAN , *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 1134A, p. 50, 1960.
- [3] H.STATZ,C. LUCK, C. SHAFER and M. CIFTAN, in: *Advances in Quantum Electronics*. Edited by J.R. Singer (Columbia University Press, new york), p. 342, 1961.
- [4] G.L.CLARK, R.F.WUREKER, AND C.M.YORK, *J.Opt.Soc.Am.*, vol. 52, p. 878, 1962.
- [5] C.L.TANG, H.STATZ, and G.DEMARS, in: *lasers*. J.Weber, edited by Gordon and Breach, New York, p. 276, 1968.
- [6] H.STATZ and G.DEMARS, in: *Quantum electronics*. Edited by C.H.Townes, Columbia University Press, New York, p. 530, 1960.
- [7] G.MAKHOV, *J. Appl. Phys.* , vol. 33, p. 202, 1962.
- [8] D.M.SINNETT, *J. Appl. Phys.* , vol. 33, p.1578, 1962.
- [9] D.F.NELSON and W.S.BOYLE, *Appl. Opt.*, vol. 1, p. 181, 1962.
- [10] T.N.ZUBAREV and A.K.SOKOLOV, *Sov.Phys.Dokl.* , vol. 9, p. 1006, 1965.
- [11] J.R.SINGER and S.WANG, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 6, p. 351, 1961.
- [12] J.R.SINGERE and S.WANG, in: *Advances in Quantum Electronics*. Edited by J.R. Singer (Columbia University Press, New York) p.299, 1961.
- [13]Y-H.PAO, *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 52, p.871, 1962.
- [14]C.L.TANG, *J. Appl. Phys.* , vol. 34, p. 2935, 1963.
- [15]K.Y.KHALDRE and R.V.KHOKHLOV, *Izv. Vyss. Uchebn. Zaved (Radiofizika)*, vol. 1, p. 60, 1958.
- [16]A.G.GURTOVNIK, *Izv. Vyss. Uchebn. Zaved (Radiofizika)*, vol. 1, p. 83, 1958
- [17]N.ORAEVSKII, *Radio Eng. Electron. Physics (URSS)*, vol .4, p.718, 1959.
- [18]A.V.USPENSKIY, *Radio Eng. Elecron. physics*, vol. 8, p.1145, 1963.
- [19]V.V.KOROBIN and A.V.USPENSKIY, *Soviet Physics Jetp*, vol. 18, p.693, 1964.
- [20] A.V.USPENSKIY, *Radio Eng. Electron. Physics*, vol. 9, p. 605, 1964.
- [21]A.Z.GRASYUK and A.N.ORAEYVSKIY, *Radio Eng. Electron. physics*, 1964.
- [22]A.Z.GRASYUK and A.N.ORAEYVSKIY, in: *Quantum electronics and coherent light*. Edited by P.A Miles, (Academic, New York), p. 192, 1964.
- [23] H.HAKEN, *Zeitschrift fur physik*, vol. 190, p.327, 1966.
- [24]H.RISKEN C.SCHMIDT and W.WEIDLICH, *Zeitschrift fur physick* , vol .194, p. 337, 1966.

- [25] H.RISKEN and K. NUMMEDAL , *Phys. Lett.*, vol. 26A, p. 275, 1968.
- [26] H.RISKEN and K. NUMMEDAL , *J. Appl. Phys.*, vol 39, p. 4662, 1968.
- [27] E.R.BULEY and F.W.CUMMINGS, *Phys. Rev.*, vol.134, p. 1454, 1964.
- [28] H.HAKEN, *Phys. Lett* , vol. 53 A, p. 77, 1975.
- [29] E.N.LORENZ, *J. Atmos. Science.*, vol. 20, p. 130, 1963.
- [30] Instabilities in Active Optical Media, *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 2 , 1985.
- [31] H.HAKEN, *Light*. vol. 2, North-Holland physics publishing, 1985.
- [32] P.BERGE ,Y.POMEAU and C.VIDAL, *L'ordre dans le chaos*. Edition Hermann Paris, 1984.
- [33] Y.I.KHANIN, *Principals of laser dynamics*, North-Holland Elsevier Science, 1995.
- [34] A.E.SIEGMAN, *Laser*. Mill Valey. California: University Science Books, 1986.
- [35] F.T.ARECCHI, in: *optical instabilities*. Edited by R.W.Boyd, M.G.Raymer and L.M.Nadurcci (Cambridge University Press, Cambridge), p. 183, 1986.
- [36] F.T.Arrechi, R.G. Harrison, *Instabilities and chaos in quantum optics*. Springer verglas 1987.
- [37] D.DANGOISSE, D.HENNEQUIN, V.ZEHNLE-DHAOUI, " Les lasers". Dunod, Paris, 1998.
- [38] L.M.NARDUCCI, H.SADIKY, H.LUGIATO and N.B.ABRAHAM,, *Opt. Commun.*, vol 55, pp. 370-376, 1985.
- [39] W.E. LAMB JR., *Phys. Rev.A*, vol. 134, pp.1429, 1964.
- [40] C.T. SPARROW, *The Lorenz Equation: Bifurcation, Chaos and Strange Attractors*. Berlin Heidelberg: Springer-Verglas, 1982.
- [41] J.MARSDEN and M.MCCRACKEN, *The Hopf Bifurcation and its Application*. Lecture Notes in Applied Mathematics , vol. 18. Berlin Heidelberg: Springer-Verglas, 1976
- [42] LEE.W.CASPERSON and A.YARIV, *IEEE J. Quant. Electron.*, vol. 8, pp. 69, 1972.
- [43] M.L.MINDEN and LEE.W.CASPERSON, *IEEE J. Quant. Electron.*, vol. 18, pp. 1952-1957 , 1982.
- [44] W.KLISCH and C.O.WEISS, *Phys. Rev. A.*, vol. 31, pp. 4049-4051, 1985.
- [45] C.O.WEISS, N.ABRAHAM and U.HUBNER, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, pp. 1587-1590, 1988.
- [46] E.H.M. HOGENBOOM, W.KLISHE, C.O.WEISS, and A.GODONE, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 55, pp. 2571-2573, 1985.

- [47]U.HUBNER, N.ABRAHAM and C.O.WEISS, *Phys. Rev. A*, vol 40, pp. 6354-6365, 1989.
- [48]C.O.WEISS and J. BROCK, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, pp. 2804-2806, 1986.
- [49]M.A.DUPERTUIS, R.R.E.SALOMAA and M.R.SIEGRIST, *Opt. Commun.*, vol. 57, pp. 410-414, 1986.
- [50]R.B.HARRISON and D.J.BISWAS, *Prog. Quant. Electron.*, vol. 10, p. 147-228, 1985.
- [51]S.C. MEHENDALE and R.G.HARRISON, *Phys. Rev. A*, vol. 34, pp. 1613-1616, 1986.
- [52]L. M.NARDUCCI and N. B ABRAHAM, *Laser physics and laser instabilities*. World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1988.
- [53]R.B.HARRISON and I.A.AL-SAIDI, *Opt. Commun.*, vol. 54, pp. 107-116, 111
- [54]S.T. HENDOW and M.SARGENT, *Opt. Commun.*, vol. 40, pp. 385-389, 1982.
- [55]S.T. HENDOW and M.SARGENT, *J. Opt. Soc. Am. B.*, vol. 2, pp. 84-101, 1985.
- [56]LEE.W.CASPERSON, *IEEE J. Quant. Electron.*, vol. 14, pp. 756-761, 1978.
- [57]LEE.W.CASPERSON, *Phys. Rev. A*, vol. 21, pp. 911-923, 1980.
- [58]LEE.W.CASPERSON, *Phys. Rev. A*, vol. 23, pp. 248-260, 1981.
- [59]M.SARGENT, *Phys. Rep.*, vol. 43, p. 233, 1978.
- [60]C.O.WEISS, W. KLISHE, N.B.ABRAHAM and U.HUBNER, *Appl. Phys.B*, vol. 49, pp. 211-215, 1989.
- [61]N.M.LAMNDY and J.C.RYAN, *Opt. Comm*, vol. 63, pp. 53-56, 1987.
- [62]N.M.LAMNDY and D.V.PLANT, *Opt. Comm*, vol. 59, pp. 55-58, 1986.
- [63]M.P.SASSI, N.BARBEAU and C.O.WEISS, *Appl. Phys.B*, vol. 43, pp. 179-182, 1987.
- [64]J-C. CULIOLI, *Introduction à Mathematica*. Edition Ellipse.
- [65]S. SMALE, *Math. Intelligencer*, Vol. 20, pp.7-15, 1998.
- [66]W.TUCKER, *Foundations of Computational Mathematics*, vol. 2, pp. 53-117, 2002.
- [67] B.MEZIANE, *IEEE, J. Quant. Electron*, vol 43, pp. 1048-1054, 2007
- [68]B.MEZIANE, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, vol 40, pp. 3343-3355, 2007
- [69]E.ROLDAN, G.J. DE VALCARCEL, R. VILASECA, R. CORBALAN, V.J.MARTINEZ and R.GILMORE, *Quantum Semiclass. Opt.*, N° 40, pp. R1-R35, 1997
- [70]H.ZEGHLACHE and P.MANDEL, *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 2, pp.18-, 1985
- [71]D.Y.TANG, C.O.WEISS, E.ROLAND and G.J. DE VALCARCEL, *Opt. Comm*, vol. 89, pp. 47-53, 1992.
- [72]H.ZEGHLACHE, P.MANDEL, N.B.ABRAHAM and C.O.WEISS, *Phys. Rev. A*, vol. 38, pp. 3128-3131, 1988.

- [73] P.MANDEL and H.ZEGHLACHE, *Opt. Comm*, vol. 47, pp. 146-150, 1983.
- [74] H.ZEGHLACHE, *Analyse de stabilité linéaire en théorie du laser*. Thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles, 1988.
- [75] G.H.M.VAN TARTWIJK and G. P.AGRAWAL, *Progress in Quantum Electronics*, vol. 22, pp. 43-122, 1998
- [76] J.L.FONT, R. VILASECA, F.PRATI and E.ROLDAN, *Opt. Commun.*, vol 261, pp. 336-341, 2006.
- [77] C.Z.NING and H.HAKEN , *Phys. Rev. Lett*, vol. 68, pp. 2109-2112, 1992.
- [78] C.Z.NING and H.HAKEN , *Phys. Rev. A*, vol. 43, pp. 6410-6413, 1991.
- [79] C.Z.NING and H.HAKEN , *Phys. Rev. A*, vol. 41, pp. 3826-3837, 1990.
- [80] E.D.BELOKOLOS, V.O.KHARHENKO and D.O. KHARHENKO, *Chaos Solitons and Fractals*. In press , 2008.