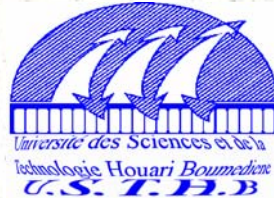


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTE DE MATHEMATIQUES



# MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de  
**MAGISTER**

En: **Mathématiques**  
**SPECIALITE: ANALYSE**  
**Equations aux dérivées partielles**

Par: **BOUHRICHE Fouzia**

## THEME

Modèle de coagulation fragmentation  
avec diffusion

Soutenu le 06/12/2006, devant le jury composé de:

D.E.	TENIOU,	Professeur	USTHB	Président
M.S.	MOULAY,	Professeur	USTHB	Rapporteur
K.	LEMRABET,	Professeur	USTHB	Examinateur
N.	AISSA	Maitre de conférence	USTHB	Examinatrice
T.	ALI ZIANE,	Maitre de conférence	USTHB	Examinateur

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>ESPACES DE BESOV</b>	<b>11</b>
2.1	Préliminaires . . . . .	11
2.2	Distributions à valeurs vectorielles . . . . .	14
2.3	Espaces de Sobolev et de Slobodeckii . . . . .	15
2.4	Espaces de Besov . . . . .	17
2.4.1	Propriétés . . . . .	19
2.4.2	Propriétés . . . . .	19
2.4.3	Résultat de dualité . . . . .	20
2.4.4	Interpolation dans les espaces de Besov . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Interpolation</b>	<b>23</b>
3.1	Foncteurs d'interpolation . . . . .	23
3.1.1	Inégalité d'interpolation . . . . .	24
3.1.2	Rétractions . . . . .	25
3.1.3	Foncteurs d'interpolation standard . . . . .	29
3.1.3.1	Foncteurs d'interpolation réels . . . . .	30
3.1.3.2	Foncteurs d'interpolation complexe . . . . .	30
3.1.3.3	Foncteurs d'interpolation continue . . . . .	31
3.1.4	Injections continues . . . . .	32
3.1.5	Propriétés de dualité 33	
3.1.6	Compacité . . . . .	33
3.1.7	Propriétés de réitération . . . . .	34
3.1.8	Foncteurs d'interpolation admissible . . . . .	35
3.2	Exemples et applications . . . . .	35
3.2.1	Interpolation dans les espaces $l_p(E)$ . . . . .	36
3.2.2	Interpolation dans les espaces $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	36

<b>4</b>	<b>Multiplicateurs de Fourier</b>	<b>37</b>
4.1	Multiplication . . . . .	37
4.1.1	Exemples de multiplications . . . . .	38
4.2	Convolution . . . . .	40
4.3	Multiplicateurs de Fourier . . . . .	41
4.4	Espaces de Besov . . . . .	43
4.5	Multiplication dans les espaces de Besov . . . . .	46
4.6	Théorèmes fondamentaux . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Problèmes paraboliques linéaires</b>	<b>59</b>
5.1	Problème de Cauchy . . . . .	59
5.1.1	Notions de solution . . . . .	59
5.2	Opérateurs d'évolution paraboliques 60	
5.2.1	Equations integrales . . . . .	63
5.3	Equations intégrales de Volterra . . . . .	64
5.3.1	Noyaux résolvants . . . . .	66
5.4	Existence des opérateurs d'évolution . . . . .	67
5.4.1	Estimations des semi-groupes . . . . .	72
5.4.2	Construction des opérateurs d'évolution . . . . .	78
5.4.3	Théorème principal . . . . .	87
5.4.4	Théorème d'existence pour les problèmes paraboliques linéaires . . .	93
5.5	Stabilité . . . . .	96
5.5.1	Estimation des opérateurs d'évolution . . . . .	96
5.5.2	Estimation de Hölder . . . . .	101
5.6	Invariance et positivité ... . . . .	104
5.6.1	Positivité . . . . .	104
5.6.2	Invariance . . . . .	109
<b>6</b>	<b>Problème de Coagulation-Fragmentation avec diffusion</b>	<b>115</b>
6.1	Enoncé du théorème principal . . . . .	116
6.1.1	Préliminaires . . . . .	117
6.2	Termes de coagulation et de fragmentation . . . . .	119
6.3	Opérateur de diffusion convection . . . . .	121
6.3.1	Cas de la diffusion constante . . . . .	122
6.3.2	Cas particulier de la diffusion variable . . . . .	124
6.3.3	Diffusion-convection : le cas général . . . . .	128

---

6.4	Existence, unicité et régularité de la solution . . . . .	132
6.5	Positivité des solutions . . . . .	143
6.6	Conservation du volume global . . . . .	154
6.7	Existence globale. . . . .	157



# Chapitre 1

## Introduction

Dans ce mémoire on étudie un problème de coagulation-fragmentation avec diffusion, qui modélise plusieurs phénomènes de la nature : en astronomie, hématologie , chimie des polymères, ... etc.

Le premier modèle de ce genre fut considéré par Smoluchowski [5]. Depuis lors, le processus de coagulation-fragmentation a attiré l'attention de nombreux chercheurs.

Ainsi , à titre d'exemple, le modèle discret sans diffusion a d'abord été considéré par M. Aizenman , T. A. Bak [8], I. W. Stewart [10], [11]. Le cas discret avec diffusion a été traité par D. Wrzosek [12].

D'autre part le modèle continu avec diffusion , que nous envisageons dans ce mémoire, est beaucoup plus délicat et n'a été étudié que récemment par H. Amann [4] en considérant l'espace tout entier  $\mathbb{R}^n$  , ainsi que par Christophe Walker [7] sur un domaine borné.

Le modèle mathématique du processus de coagulation-fragmentation avec diffusion, est caractérisé par un nombre infini d'équations de réaction-diffusion et c'est ce nombre même qui en fait représente la difficulté majeure dans la résolution. Car même une approximation d'un tel modèle par un système fini ou dénombrable d'équations de réaction-diffusion, ne permet pas d'aboutir à un résultat optimal.

La méthode, suivie dans ce mémoire, consiste à transformer le système infini d'équations en considération en un problème de Cauchy abstrait, de type parabolique semi-linéaire, c.à.d. de la forme :

$$(1) \begin{cases} \dot{u} + A(t) u = R(t, u), & t > 0, \\ u(0) = u^0, \end{cases}$$

Le problème ainsi transformé est posé sur un espace de distributions à valeurs dans un espace de dimension infinie. Cela veut dire que l'opérateur de diffusion-convection approprié  $A$  possède un symbole à valeurs opérateurs i.e. dans un espace de type  $\mathcal{L}(E, F)$  ,  $E$  et  $F$  étant des espaces de Banach appropriés .

Généralement dans ce cas on fait appel à des résultats sur les multiplicateurs de Fourier de type Mihklin pour établir que  $-A$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique. Mais ce procédé n'est pas valide si  $F$  n'est pas isomorphe à un espace de Hilbert - résultat dû à G. Pisier - et c'est bien le cas dans notre situation.

C'est pourquoi on utilise les espaces de Besov  $B_{p,q}^s$  [1] sur lesquels les résultats précédents [3] sont valides.

Concernant le terme de réaction  $R$ , on montre qu'il possède une certaine régularité sur les espaces de Besov. Cela nous permet de résoudre l'existence locale. On montre en outre, sous certaines conditions, l'existence globale, la conservation du volume, ainsi que la positivité des solutions.

Plus précisément le problème modélisant le processus de coagulation-fragmentation avec diffusion est de la forme suivante :

$$(2) \begin{cases} \partial_t u + A(x, t, y) u = R(x, t, y, u), & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0, y) = u^0(x, y), & x \in \mathbb{R}^n, y \in Y, \end{cases}$$

où  $n = 1, 2, 3$  ;

$Y$  : est le support du paramètre  $y$  qui caractérise le volume des agrégats de particules (clusters). Par la suite on désignera ce type de regroupements par "faisceaux de particules". Ces derniers, représentés donc par  $y$ , peuvent coaguler entre eux pour augmenter de volume ou se fragmenter en particules de plus petite taille.

$A$  : représente l'opérateur de diffusion-convection du processus,

$R$  : est le terme de réaction caractérisant le mouvement cinétique du processus,

$u$ , enfin, désigne la fonction distribution caractérisant la densité .

D'autre part, comme l'indiquent plusieurs domaines d'application du processus décrit ci-dessus, ( astrophysique, physique atmosphérique,...), il est généralement très difficile, voire impossible, de délimiter les bornes ainsi que les conditions aux limites du domaine où évolue ce processus. C'est pourquoi on suppose généralement que la fonction distribution de densité  $u$  évolue sur l'espace tout entier  $\mathbb{R}^n$  tout en admettant qu'elle prenne des valeurs très petites à l'infini .

Notons qu'on peut considérer en même temps le cas continu et le cas discret . En effet, si on note par

$$\int_X \int_{y_0}^{y_1} u(x, t, y) dy dx,$$

le nombre de particules de volume variant dans l'intervalle  $[y_0, y_1] \subset \mathbb{R}^+$ , et contenues dans le domaine  $X \subset \mathbb{R}^+$  à chaque instant  $t$ , alors cette quantité considérée dans le cas continu prend dans le cas discret la forme suivante

$$\int_X \left[ \sum_{y=y_0}^{y_1} u(x, t, y) \right] dx, \{y_0, \dots, y_1\} \subset \mathbb{N}.$$

Afin de mieux préciser le phénomène en question, nous allons dans la suite décrire explicitement les termes de diffusion convection et de réaction .

Commençons d'abord par l'opérateur  $A$ . Il est défini par

$$A(x, t, y)u = -\text{div}(\mathbf{a}(x, t, y)\text{grad}(u)) + \vec{a}(x, t, y)u + \vec{b}(x, t, y) \cdot \text{grad}.u + a_0(x, t, y)u,$$

où  $\text{div}$ , et  $\text{grad}$  sont pris pour  $x \in \mathbb{R}^n$  .

La matrice de diffusion  $\mathbf{a}$  est une fonction suffisamment régulière pour les variables  $(x, t)$ , mesurable pour  $y \in Y$ . On suppose en outre qu'elle est symétrique et définie positive uniformément pour  $(x, t, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times Y$  ( $Y = \mathbb{R}^+$  dans le cas continu et  $\mathbb{N} - \{0\}$  dans le cas discret).

D'autre part, le taux d'absorption  $a_0$ , les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , décrivant respectivement le transport des particules et la vitesse du fluide où les particules sont en suspension, sont supposés suffisamment réguliers pour  $(x, t)$ , et mesurables pour  $y \in Y$ .

**Remarque 1.1 :** *A propos de la vitesse du fluide  $\vec{b}$*

*La modélisation du processus de coagulation-fragmentation est obtenue généralement en faisant les considérations suivantes :*

*on observe l'ensemble des particules en interaction comme étant un mélange de fluides (supposé de type Newtonien) : chaque particule est alors un fluide de type  $y$  avec une vitesse propre et le fluide où baignent ces particules est lui-même considéré comme étant l'élément de type  $y = 0$ .*

*On prend en considération les mouvements de ces différents types. On fait le bilan tout en écrivant la conservation de masse (la densité totale du mélange doit être constante) et l'équation de continuité.*

*Le modèle est alors décrit par les équations de Navier-Stokes couplées avec des systèmes de réaction diffusion.*

*En particulier en notant par  $\vec{v}$  la vitesse barycentrique du mélange, alors on a  $\vec{v} = \vec{b}$  avec  $\text{div } \vec{v} = 0$ .*

*Donc en fait le système (2) devrait être complété par les équations de Navier-Stokes pour le vecteur  $\vec{b}$ .*

*On suppose qu'on est dans une situation où l'on peut résoudre ces équations en  $\vec{b}$  et par suite considérer que ce dernier est un vecteur donné.*

*Il y a en fait plusieurs cas de figure où cette situation a lieu, comme dans les cas de faible concentration dans les aérosols.*

Le terme de réaction  $R$  est décrit comme suit :

$$R(x, t, y, u) = c(x, t, y, u) + f(x, t, y, u) + h(x, t, y),$$

$c$ , étant le terme de coagulation et prend la forme :

$$c(x, t, y, u) = \frac{1}{2} \int_0^y \gamma(x, t, y - y', y') u(y - y') u(y') dy' - u(y) \int_0^\infty \gamma(x, t, y, y') u(y') dy',$$

où  $\gamma$  désigne le taux de "coalescence" c-à-d. le nombre moyen de coagulations entre les particules de volumes  $y$  à  $y + dy$  et ceux de volumes  $y'$  à  $y' + dy'$ , dans l'intervalle d'espace  $[x, x + dx]$  et l'intervalle de temps  $[t, t + dt]$ . Il vérifie :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \gamma(x, t, y, y') = \gamma(x, t, y', y) \leq \beta, \\ (x, t, y, y') &\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times Y^2. \end{aligned}$$

La première intégrale dans le terme de coagulation  $c$ , exprime que les particules de volume  $y$  se forment uniquement si deux particules de volume  $y - y'$  et  $y'$  se coagulent ( $y' \leq y$ ), étant entendu que le facteur  $1/2$  assure que chaque coagulation est comptée seulement une fois. Tandis que la deuxième intégrale exprime que les particules de volume  $y$  disparaissent en se coagulant avec celles de volume supérieur ( $y' \geq y$ ).

Le terme de fragmentation  $f$  s'écrit :

$$f(x, t, y, u) = \int_y^\infty \varphi(x, t, y', y) u(y') dy' - \phi(x, t, y) u(y)$$

La première intégrale dans  $f$  représente la production des faisceaux de particules de taille  $y$  due à la fragmentation de faisceaux de particules de taille  $y'$  plus grande. Dans ce cas  $\varphi$  est le taux de fragmentation et vérifie :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi(x, t, y, y') \leq \beta, \\ \text{pour } 0 &< y \leq y' < \infty, \quad y, y' \in Y, \quad (x, t, y, y') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times Y^2 \end{aligned}$$

Le dernier terme dans  $f$  tient compte de la disparition des faisceaux de particules de taille  $y$  par leur fragmentation en faisceaux de taille inférieure. On a en fait, dans ce cas :

$$\phi(x, t, y) = 1/y \int_0^y \varphi(x, t, y, y') y' dy',$$

On supposera également :

$$\phi(x, t, y) \leq \beta, \quad (x, t, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times Y,$$

Finalement, le terme source  $h$  vérifie :

$$h(x, t, y) \geq 0, \quad y \in Y$$

et décrit la formation de faisceaux de taille  $y$  à l'instant  $t$  et à la position  $x$ , provenant par exemple de l'infiltration de particules externes.

L'étude du processus de coagulation-fragmentation décrit ci-dessus porte essentiellement sur l'existence locale, l'unicité, l'existence globale et la positivité de la fonction distribution  $u$ , ainsi que la conservation de la masse.

On peut énoncer le résultat principal de la manière suivante :

**Théorème 1.1** *On suppose  $\vec{b} = 0$  et que  $u_0 \geq 0$  vérifie :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_Y |\partial_x^\alpha u_0(x, y)| (1 + y) dy dx < \infty \quad \text{avec } |\alpha| \leq 2$$

Alors il existe  $T > 0$  maximal, tel que le système de fragmentation-coagulation (2) possède une unique solution  $u$  sur  $[0, T]$  positive et vérifiant :

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y u(t, x, y)(1 + y)dydx < \infty, \quad 0 \leq t < T$$

De plus  $u$  est régulière pour tout  $t > 0$  et dépend continûment de la donnée initiale

D'autre part s'il n'y a ni absorption, ni infiltration de particules externes, alors le volume total est conservée :

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y u(t, x, y)ydydx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y u_0(x, y)ydydx, \quad 0 \leq t < T$$

Enfin  $T = \infty$ , c'est-à-dire  $u$  est globale, si  $n = 1$ , ou  $\gamma = 0$  ou bien  $\mathbf{a}$  est indépendante de  $y$ .

La relation (3) exprime que le nombre total de particules ainsi que leur volume total demeurent finis durant l'évolution dans le temps.

L'espace de base qui contient la solution  $u$  pour tout  $t \in [0, T)$ , tel que suggéré par le résultat précédent, serait le suivant :

$$L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$$

où :

$$\mathbb{F} = L_1(Y, (1 + y)dy) \ni v \Leftrightarrow \int_Y |v(y)|(1 + y)dy = \|v\|_{\mathbb{F}}$$

On sera amené, comme signalé plus haut, à considérer plutôt les espaces de Besov, pour pouvoir appliquer la théorie des multiplicateurs de Fourier et montrer précisément que l'opérateur  $-A$ , défini sur  $W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ , est générateur d'un semi-groupe analytique sur l'espace :

$$W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) = B_{1,1}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), \quad s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

Enfin il faudra montrer que le terme de réaction  $R$  est un opérateur régulier, plus précisément :

$$R: W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \hookrightarrow W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}),$$

avec :

$$\tau < \sigma, \quad -1 < s < \tau < \sigma < s + 2$$

Ainsi il sera loisible d'établir l'existence et l'unicité de la solution  $u(t)$  dans l'espace

$$W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), \quad s < 0,$$

et en utilisant les injections

$$W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \hookrightarrow L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \hookrightarrow W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), \quad -1 < s < 0,$$

on en déduit que

$$u(t) \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), \text{ pour tout } t, \quad 0 \leq t < T.$$

On suivra dans notre étude le plan suivant, composé essentiellement des chapitres suivants :

Après l'introduction, on rappelle dans le chapitre 2 des notions fondamentales, notamment celles des espaces de Besov et leurs propriétés. On étudie ensuite la théorie de l'interpolation, objet du troisième chapitre. Le quatrième sera consacré à l'étude de la théorie des multiplicateurs de Fourier, notamment le théorème de type Mihlin pour les espaces de Besov. On abordera ensuite, dans le cinquième chapitre, l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions pour les problèmes semi linéaires paraboliques abstraits, comme préalable à la résolution du problème de coagulation fragmentation avec diffusion, laquelle résolution est établie dans le sixième chapitre. Ce dernier est subdivisé en quatre parties :

- la première est consacrée à l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité de la solution,
- la deuxième concerne l'étude de la positivité de la solution, en supposant celle de la donnée initiale,
- la troisième et la quatrième sont respectivement consacrées à l'étude de la conservation de la masse et l'existence globale sous certaines conditions.

# Chapitre 2

## ESPACES DE BESOV

### 2.1 Préliminaires

On désigne par  $E$  un espace de Banach et on note par  $\mathcal{F}$  la transformation de Fourier. On pose

$$\overset{\wedge}{\varphi} := \mathcal{F}\varphi, \text{ pour } \varphi \in L_1(\mathbb{R}^n, E).$$

Le lemme de Riemann Lebesgue assure que

$$\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L_1(\mathbb{R}^n, E), C_0(\mathbb{R}^n, E)),$$

Pour  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  et  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ , on pose

$$\overset{\wedge}{u}(\varphi) := u\left(\overset{\wedge}{\varphi}\right), \text{ et } \mathcal{F}u = \overset{\wedge}{u}.$$

on a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\in \mathcal{L}aut(S(\mathbb{R}^n, E)) \cap \mathcal{L}aut(S'(\mathbb{R}^n, E)), \\ \mathcal{F}^{-1}u &= (2\pi)^{-n} \overset{\vee}{u} = (2\pi)^{-n} \widehat{\overset{\vee}{u}}, \end{aligned}$$

où

$\mathcal{L}aut(X)$  est l'ensemble des automorphismes dans  $X$ ,

$$\overset{\vee}{\varphi}(x) := \varphi(-x), \text{ et } \overset{\vee}{u}(\varphi) := u\left(\overset{\vee}{\varphi}\right).$$

Posons  $D_j := -i\partial_j$  pour  $1 \leq j \leq n$ . On a :

$$\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \widehat{u}, \quad \widehat{\xi^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{u}, \text{ pour } u \in S'(\mathbb{R}^n, E), \text{ et } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

On définit l'homothétie  $\sigma_t$  pour  $t > 0$  par

$$\sigma_t \varphi(x) := \varphi(tx), \quad (\sigma_t u)(\varphi) := t^{-n} u(\sigma_{1/t} \varphi), \text{ pour } \varphi \in S(\mathbb{R}^n, E), \text{ et } u \in S'(\mathbb{R}^n, E).$$

L'ensemble  $\{\sigma_t, t > 0\}$  est un groupe d'automorphisme sur  $(S(\mathbb{R}^n, E))$  et sur  $S'(\mathbb{R}^n, E)$ , avec les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} (\sigma_t)^{-1} &= \sigma_{1/t} \quad , \\ \mathcal{F} \circ \sigma_t &= t^{-n} \sigma_{1/t} \circ \mathcal{F}, \quad \partial^\alpha \circ \sigma_t = t^{|\alpha|} \sigma_t \circ \partial^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, t > 0 \quad , \\ L_p(\mathbb{R}^n, E) &: \text{ est invariant par le groupe } \{\sigma_t, t > 0\} \quad , \\ \|\sigma_t u\|_p &= t^{-n/p} \|u\|_p, \quad u \in L_p(\mathbb{R}^n, E), 1 \leq p \leq \infty, \quad t > 0 \quad . \end{aligned}$$

Soit  $u \in D'(\mathbb{R}, E)$ , vérifiant  $\text{supp}(u) \subset \mathbb{R}^+$ . Supposons qu'il existe  $\omega \in \mathbb{R}$  tel que

$$e^{-\langle \cdot, \xi \rangle} u \in S'(\mathbb{R}, E) \quad \text{pour tout } \xi > \omega, \text{ où } \langle \xi, x \rangle = \xi x.$$

Alors la transformation de Laplace de  $u$  :

$$\zeta = \xi + i\eta \longmapsto \tilde{u}(\zeta) := (\widehat{e^{-\langle \cdot, \xi \rangle} u})(\eta),$$

est bien définie et analytique sur  $[\text{Re } \zeta > \omega]$ , de plus elle est à croissance polynomiale dans le sens où il existe deux constantes  $c$  et  $k$  telles que

$$|\tilde{u}(\zeta)| \leq c(1 + |\zeta|)^k, \quad \text{Re } \zeta > \omega.$$

Réciproquement, si  $\tilde{u}$  est une fonction analytique borné polynomialement sur  $[\text{Re } \zeta > \omega]$  pour un certain  $\omega \in \mathbb{R}$ , elle est alors la transformation de Laplace de la distribution  $u \in D'(\mathbb{R}, E)$  dont le support est contenu dans  $\mathbb{R}^+$  (c'est un cas particulier de la théorie de Paley Wiener).

### Définition 2.1 .

1) *Partition de l'unité dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  :*

*Soit  $\psi$  une fonction radiale et  $\mathbb{B}$  la boule unité dans  $\mathbb{R}^n$  telles que :*

$$\psi \in D(\mathbb{R}^n), \psi/\mathbb{B}^n = 1, \quad \text{supp}(\psi) \subset 2\mathbb{B}^n =: \Omega_0.$$

*On pose*

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &: = \psi - \sigma_2 \psi = \psi - \psi(2 \cdot), \\ \psi_0 &: = \psi, \quad \psi_k := \sigma_{2^{-k}} \tilde{\psi} = \psi(2^{-k} \cdot) - \psi(2^{-k+1} \cdot), \quad k \in \mathbb{N}, \text{ et} \\ \eta_j &: = \sigma_{2^{-j}} \tilde{\psi} = \psi(2^{-j} \cdot) + \psi(2^{-j+1} \cdot), \quad j \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

*soient*

$$\begin{aligned} \Omega_k &: = [2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}], \quad k \in \mathbb{N}, \text{ et} \\ \sum_j &: = [2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}], \quad j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

*Alors on a*

$$\psi_k, \eta_j \in D(\mathbb{R}^n), \text{supp}(\psi_k) \subset \Omega_k, \quad \text{supp}(\eta_j) \subset \sum_j, \quad \text{pour } k \in \mathbb{N} \text{ et } j \in \mathbb{Z},$$

$$\sum_{k=0}^m \psi_k(\xi) = \psi(2^{-m}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad m \in \mathbb{N}, \text{ et}$$

$$\sum_{j=m'}^m \eta_j(\xi) = \psi(2^{-m}\xi) - \psi(2^{m'+1}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad m, m' \in \mathbb{N},$$

par conséquent

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{et} \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \eta_j(\xi) = 1, \quad \xi \in (\mathbb{R}^n)^*,$$

d'où  $(\psi_k) := (\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\eta_j) := (\eta_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  sont respectivement les résolutions de l'identité sur  $\mathbb{R}^n$  et sur  $(\mathbb{R}^n)^*$ , les résolutions dyadiques de l'identité induites par  $\psi$ .

2) Posons

$$\chi_k := \psi_{k-1} + \psi_k + \psi_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

tel que  $\psi_{-1} := 0$ ,

On a

$$\psi_k = \psi_k \chi_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

En effet :

$$\begin{aligned} \psi_k \chi_k &= \psi_k \psi_{k-1} + \psi_k \psi_k + \psi_k \psi_{k+1} \\ &= [\psi(2^{-k}\cdot) - \psi(2^{-k+1}\cdot)] \{ [\psi(2^{-k+1}\cdot) - \psi(2^{-k+2}\cdot)] \\ &\quad + [\psi(2^{-k}\cdot) - \psi(2^{-k+1}\cdot)] + [\psi(2^{-k-1}\cdot) - \psi(2^{-k}\cdot)] \} \\ &= \psi_k \end{aligned}$$

or : pour  $\xi \in \text{supp}(\psi_k) \subset \Omega_k$  . c.à.d  $2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}$ ,  
on a :  $2^{-2} \leq 2^{-k-1} |\xi| \leq 1$  et  $2 \leq 2^{-k+2} |\xi| \leq 2^3$   
et puisque  $\psi/\mathbb{B}^n = 1$  et  $\text{supp}(\psi) \subset 2\mathbb{B}^n$ , on obtient

$$\psi(2^{-k-1}\xi) = 1, \quad \text{et} \quad \psi(2^{-k+2}\xi) = 0,$$

ce qui donne  $\psi_k \chi_k = \psi_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et c'est bien le résultat cherché.

**Définition 2.2** Soient  $S(E)$  l'espace de Schwartz des fonctions régulières à décroissance rapide, définies sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $E$  et  $S'(E) = \mathcal{L}(S, E)$ , l'espace des distributions tempérées à valeurs dans  $E$  définies sur  $S = S(K)$  où  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Si  $X$  est un espace réel localement convexe, on note par  $X_{\mathbb{C}} = X + iX$  sa complexification.

Alors  $X_{\mathbb{C}}$  est un espace complexe localement convexe et l'injection canonique de  $X$  dans  $X_{\mathbb{C}}$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire, continue.

Si  $Y$  est un autre espace localement convexe réel et

$$T : X \longrightarrow Y,$$

est une application linéaire, alors

$$T \in \mathcal{L}(X, Y) \text{ ssi } T_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}}),$$

où  $T_{\mathbb{C}}$ , la complexification de  $T$ , est définie par

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{C}}(x + iy) &= Tx + iTy \text{ pour } x + iy \in X_{\mathbb{C}}, \text{ de plus} \\ \mathcal{L}(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}}) &= [\mathcal{L}(X, Y)]_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Si  $X$  est un espace de Banach réel alors  $X_{\mathbb{C}}$ , est un espace de Banach complexe muni de la norme

$$\|x + iy\|_{X_{\mathbb{C}}} := \sup_{0 < \alpha < 2\pi} \|x \cos \alpha + iy \sin \alpha\|_X, \quad x + iy \in X_{\mathbb{C}}.$$

On note que

$$S(E_{\mathbb{C}}) = [S(E)]_{\mathbb{C}} \text{ et } S'(E_{\mathbb{C}}) = [S'(E)]_{\mathbb{C}}.$$

## 2.2 Distributions à valeurs vectorielles

Soit  $X$  un sous ensemble non vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $E$  un espace de Banach. On note par :

$D(X, E)$  l'espace des fonctions tests sur  $X$  à valeurs dans  $E$ , muni de la topologie limite inductive,

$\mathcal{E}(X, E) := C^{\infty}(X, E)$ , muni de la topologie de la convergence compacte de toutes les dérivées,

$S(\mathbb{R}^n, E)$  l'espace de Schwartz des fonctions régulières à décroissance rapide sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $E$ , muni de la topologie de Fréchet standard.

$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n, E)$  l'espace des fonctions régulières à croissance lente sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $E$ , c.à.d

$\varphi \in \mathcal{O}^M(\mathbb{R}^n, E)$  si pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , il existe  $C_{\alpha}$  et  $m_{\alpha} \in \mathbb{N}$ , tel que

$$|\partial^{\alpha} \varphi(x)| \leq C_{\alpha} (1 + |x|)^{m_{\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n, E)$  est un espace localement convexe muni de la topologie induite par la famille des semi-normes

$$\{\varphi \mapsto \|\partial^{\alpha} \varphi\|_{\infty}; \varphi \in S(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}), \alpha \in \mathbb{N}^n\}.$$

Dans la suite on utilisera les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(X, E) &:= \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, E), \mathcal{F} \in \{S, \mathcal{O}_M\}, \text{ et} \\ \mathcal{F}(X) &:= \mathcal{F}(X, E), \mathcal{F} \in \{D, \mathcal{E}, S, \mathcal{O}_M\}. \end{aligned}$$

On définit l'espace dual

$$\mathcal{F}'(X, E) := \mathcal{L}(\mathcal{F}(X), E), \mathcal{F} \in \{D, \mathcal{E}, S, \mathcal{O}_M\},$$

tandis que

$$\mathcal{F}'(X, \mathbb{K}) := \mathcal{F}(X)'$$

Ainsi on note par  $D'(X, E)$  l'espace des distributions sur  $X$  à valeurs dans  $E$ , et  $S'(\mathbb{R}^n, E)$  l'espace des distributions tempérées sur  $\mathbb{R}^n$ , le support d'une distribution à valeurs dans  $E$  est défini de la même façon que dans le cas scalaire, en outre  $\mathcal{E}'(X, E)$  est l'ensemble des distributions à valeurs dans  $E$  à support compact dans  $X$ .

On identifie la fonction  $u \in L_{1,loc}(X, E)$  avec la distribution à valeur dans  $E$  suivante

$$\varphi \longmapsto u(\varphi) := \int_X \varphi(x)u(x)dx, \varphi \in D(X),$$

alors  $L_{1,loc}(X, E)$  est l'espace des distributions régulières sur  $X$  à valeur dans  $E$ .

On a les injections suivantes ( $d$ =dense) :

$$\begin{aligned} D(X, E) &\xrightarrow{d} L_{1,loc}(X, E) \xrightarrow{d} D'(X, E), \\ D(X, E) &\xrightarrow{d} \mathcal{E}(X, E) \xrightarrow{d} D'(X, E), D(X, E) \xrightarrow{d} \mathcal{E}'(X, E) \xrightarrow{d} D'(X, E), \\ \text{et } D(\mathbb{R}^n, E) &\xrightarrow{d} S'(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} S'(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} D'(\mathbb{R}^n, E). \end{aligned}$$

Pour  $u \in D'(X, E)$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , on définit  $\partial^\alpha u$  par

$$(\partial^\alpha u)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi), \varphi \in D(X).$$

Le produit d'une distribution à valeurs vectorielles par une fonction est défini de la manière suivante :

$$(au)(\varphi) := u(a\varphi) \text{ pour } a \in \mathcal{E}(X), u \in D'(X, E), \text{ et } \varphi \in D(X),$$

alors l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X) \times D'(X, E) &\longrightarrow D'(X, E), \\ (a, u) &\longmapsto au, \end{aligned}$$

est bilinéaire, hypocontinue, en plus on a la propriété suivante

$$[(u \longmapsto au) \in \mathcal{L}(S'(\mathbb{R}^n, E))] \iff [a \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)].$$

## 2.3 Espaces de Sobolev et de Slobodeckii

**Définition 2.3** 1) On définit l'espace  $W_p^m(X, E)$  pour  $m \in \mathbb{N}$  et  $p \in [1, \infty]$ , dit espace de Sobolev, comme étant :

$$\{u : D'(X, E) / \partial^\alpha u \in L_p(X, E), \text{ pour } |\alpha| \leq m\},$$

c'est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{m,p} = \left[ \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_p(X,E)}^p \right]^{1/p},$$

ou encore de la norme équivalente

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_p(X,E)}.$$

2) Pour  $p \in [1, \infty]$  et  $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ , l'espace  $W_p^s(X, E)$ , défini par

$$\begin{aligned} W_p^s(X, E) & : = \{u \in W_p^{[s]}(X, E) / [\partial^\alpha u]_{s-[s],p} < \infty, \text{ pour } |\alpha| = m\}, \text{ où} \\ [u]_{\theta,p}^p & : = \int_{X \times X} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+\theta p}} d(x, y), \text{ pour } \theta \in (0, 1), \text{ et } p \in [1, \infty), \end{aligned}$$

où  $[s]$  désigne la partie entière de  $s$ ,

$W_p^s(X, E)$ , est un espace de Banach muni de la norme

$$u \longmapsto \|u\|_{s,p} := (\|u\|_{[s],p}^p + \sum_{|\alpha|=[s]} [\partial^\alpha u]_{s-[s],p}^p)^{1/p},$$

en plus, on a les injections suivantes

$$\begin{aligned} D(X, E) & \hookrightarrow W_p^s(X, E) \xrightarrow{d} D'(X, E), \\ S(X, E) & \xrightarrow{d} W_p^s(X, E) \xrightarrow{d} S'(X, E), \\ \text{Pour } s & \in \mathbb{R}^+, 1 \leq p < \infty \end{aligned}$$

3) Soit  $p \in [1, \infty]$  et  $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ , alors  $W_p^{-s}(X, E)$  est défini comme suit

$$\begin{aligned} W_p^{-s}(X, E) & : = \left\{ u : D'(X, E) / \exists (u_\alpha \in W_p^{[s]-s+1}(X, E) \text{ pour } |\alpha| \leq [s] + 1) \right. \\ & \left. \text{vérifiant } u = \sum_{|\alpha| \leq [s]+1} \partial^\alpha u_\alpha \right\}, \end{aligned}$$

c'est un espace de Banach muni de la norme

$$u \longmapsto \|u\|_{-s,p} := \inf \left\{ \sum_{|\alpha| \leq [s]+1} \|u_\alpha\|_{[s]-s+1,p}, u = \sum_{|\alpha| \leq [s]+1} \partial^\alpha u_\alpha \right\},$$

et on a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} W_p^s(X, E) & \xrightarrow{d} W_p^t(X, E), \quad -\infty < t < s < \infty, \\ \partial^\alpha & \in \mathcal{L}(W_p^{s+|\alpha|}(X, E), W_p^s(X, E)), \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4) On note par  $BUC^m(X, E)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , l'espace de Banach défini par

$$BUC^m(X, E) := \{u \in C(\mathbb{R}^n, E) / \partial^\alpha u, \text{ bornée, u.c sur } X, \text{ pour } |\alpha| \leq m\},$$

muni de la norme  $\|\cdot\|_{m,\infty}$ .

Si  $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ , alors  $BUC^s(X, E)$  est l'espace de Hölder caractérisé par

$$BUC^s(X, E) := \{u \in BUC^{[s]}(X, E) / [\partial^\alpha u]_{s-[s]} < \infty, \text{ pour } |\alpha| = [s]\},$$

où

$$[s]_\theta := [s]_{\theta, X} := \sup_{(x, y) \in X / x \neq y} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{|x - y|^\theta}$$

si  $[u]_\theta < \infty$ , cette dernière propriété montre la continuité de  $u$  de Hölder uniforme de type  $\theta$ .

L'espace  $BUC^s(X, E)$ , est un espace de Banach muni de la norme

$$u \mapsto \|u\|_{s, \infty} := \|u\|_{[s], \infty} + \max_{|\alpha|=[s]} [\partial^\alpha u]_{s-[s]},$$

de plus on a

$$\begin{aligned} BUC^s(X, E) &\hookrightarrow W_\infty^{[s]}(X, E) \hookrightarrow D'(X, E), \quad s \in \mathbb{N}^+, \\ BUC^s(X, E) &\hookrightarrow BUC^t(X, E), \quad 0 \leq t \leq s < \infty. \end{aligned}$$

5) maintenant on définit l'espace  $buc^s(X, E)$  comme suite si  $s \in \mathbb{N}$  alors

$$buc^s(X, E) := BUC^s(X, E),$$

et si  $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ , alors  $buc^s(X, E)$  est le sous espace fermé de  $BUC^s(\mathbb{R}^n, E)$  suivant

$$buc^s(X, E) := \left\{ u \in BUC^s(\mathbb{R}^n, E) / \max_{|\alpha|=[s]} [\partial^\alpha u]_{s-[s], Y} \xrightarrow{\text{diam}(Y) \rightarrow 0} 0 \right\}.$$

6) Enfin, on note par  $C_0^s(X, E)$  la fermeture de  $D(X, E)$  dans  $BUC^s(X, E)$ , alors on a les injections suivantes

$$S(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} C_0^s(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow buc^s(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow BUC^s(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n, E); \quad \text{pour } s \in \mathbb{R}^+,$$

en outre on note que

$$[u \in C_0^m(X, E)]$$

$\iff$

$$[u \in C^m(X, E) / \forall \xi > 0, \exists K (\text{compact}) \subset X; |\partial^\alpha u(x)| < \varepsilon, \forall x \in X \setminus K; |\alpha| \leq m].$$

## 2.4 Espaces de Besov

Soit  $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$ , une fonction radiale vérifiant  $\psi/\mathbb{B}^n = 1$ ,  $\text{supp}(\psi) \subset 2\mathbb{B}^n$ .

**Définition 2.4** Soient  $s \in \mathbb{R}$  et  $p, q \in [1, \infty]$ , l'espace de Besov,  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E)$  est défini par

$$\begin{aligned} B_{p,q}^s & : = \left( \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^n, E) / \|u\|_{B_{p,q}^s} < \infty \right\}, \|\cdot\|_{B_{p,q}^s} \right), \\ \|u\|_{B_{p,q}^s} & : = \left\| \left( 2^{sk} \|\psi_k(D)u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} \right)_{k \in \mathbb{N}} \right\|_{l_q}, \end{aligned}$$

où :  $(\psi_k)$  est la résolution de l'identité sur  $\mathbb{R}^n$  induite par  $\psi$ ,

$$\psi_k(D) = \mathcal{F}^{-\infty} \psi_k \mathcal{F}$$

$$\text{et } l_p(E) = \{a, a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}, a_k \in E, \|a\|_{l_p(E)} = (\sum \|a_k\|^p)^{1/p} < \infty\}$$

L'espace  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E)$  est un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|_{B_{p,q}^s}$ .

Différents choix de  $\psi$  donnent des normes équivalentes et c'est le cas effectivement pour tout  $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$ .

Dans toute la suite on notera, quand il n'y a pas de confusion à craindre :

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) = B_{p,q}^s, \quad \text{et } S(\mathbb{R}^n, E) = S.$$

**Remarque 2.1** Soient :  $\Delta_t := \tau_t - 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $p \in [1, \infty]$ ,  $q \in (1, \infty)$  et  $\theta \in [0, 1]$ , on pose :

$$\begin{aligned} [u]_{\theta,p,q} & : = \sum_{j=1}^n \left\| t^{-\theta} \|\Delta_{te_j} u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^+, dt/t)}, \\ [u]_{1,p,q} & : = \sum_{j=1}^n \left\| t^{-1} \|\Delta_{te_j}^2 u\|_{L_p(\mathbb{R}^n, E)} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^+, dt/t)} \end{aligned}$$

alors :  $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$

$$u \mapsto \left( \sum_{|\alpha| \leq [s]} \|\partial^\alpha u\|_p^p + \sum_{|\alpha| = [s]} [\partial^\alpha u]_{s-[s],p,q}^p \right)^{1/p},$$

est une norme équivalente sur  $B_{p,q}^s$ , et pour  $s \in \mathbb{N}$ ,

$$u \mapsto \left( \sum_{|\alpha| \leq s-1} \|\partial^\alpha u\|_p^p + \sum_{|\alpha| = s-1} [\partial^\alpha u]_{1,p,q}^p \right)^{1/p},$$

est une norme équivalente sur  $B_{p,q}^s$

### 2.4.1 Propriétés

Si :  $-\infty < s_0 < s_1 < \infty$ , et  $p, q_0, q_1 \in [1, \infty]$ , alors :

$$S \hookrightarrow B_{p,q_1}^{s_1} \hookrightarrow B_{p,q_0}^{s_0} \hookrightarrow S', \quad B_{p,q_0}^s \hookrightarrow B_{p,q_1}^s, \quad s \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq q_0 < q_1 \leq \infty.$$

Si en outre :  $S_1 - n/p_1 = S_0 - n/p_0$ , alors :

$$B_{p_1,q}^{s_1} \hookrightarrow B_{p_0,q}^{s_0}, \quad -\infty < s_0 < s_1 < \infty, \quad \text{et } p_0, p_1, q \in [1, \infty]$$

Enfin on peut identifier les espaces de Besov, de Nicolskii et de Hölder comme suit :

$$B_{p,p}^s \doteq \begin{cases} W_1^s, & p = 1, s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z} \\ BUC^s, & p = \infty, s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

où  $(\doteq)$  signifie l'équivalence des normes, tandis que pour  $1 \leq p < \infty$  et  $k \in \mathbb{N}$  on a

$$B_{p,p}^k \neq W_p^k,$$

excepté le cas où :  $p = 2$  et  $E$  un espace de Hilbert .

D'autre part on a

$$B_\infty^k \neq BUC^k, \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}.$$

**Définition 2.5** On note  $\overset{\circ}{B}_{p,q}^s := \overset{\circ}{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) :=$  la fermeture de  $S$  dans  $B_{p,q}^s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p, q \leq \infty$ , en outre  $b_{p,q}^s := b_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) :=$  la fermeture de  $B_{p,q}^{s+1}$  dans  $B_{p,q}^s$ .

### 2.4.2 Propriétés

On a

$$\begin{cases} \overset{\circ}{B}_{p,q}^s = B_{p,q}^s, & s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, q < \infty \\ \overset{\circ}{B}_{p,q}^s = C_0^s, & s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}, p, q = \infty, \end{cases}$$

$$b_{p,q}^s = \begin{cases} B_{p,q}^s, & 1 \leq p, q < \infty \\ \overset{\circ}{B}_{p,\infty}^s, & 1 \leq p < \infty, q = \infty \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Les injections canoniques suivantes sont valides

$$B_{p,1}^k \xrightarrow{d} W_p^k \xrightarrow{d} \overset{\circ}{B}_{p,\infty}^k, \quad 1 \leq p < \infty, \quad B_{\infty,1}^k \xrightarrow{d} BUC^k \xrightarrow{d} b_{\infty,\infty}^k,$$

En outre :

$$\overset{\circ}{B}_{\infty,1}^k \xrightarrow{d} C_0^k \xrightarrow{d} \overset{\circ}{B}_{\infty,\infty}^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

et

$$S \xrightarrow{d} B_{p,q_1}^{s_1} \xrightarrow{d} B_{p,q_0}^{s_0} \xrightarrow{d} \overset{\circ}{B}_{p,\infty}^{s_0} = b_{p,\infty}^{s_0} \xrightarrow{d} S', \quad p < \infty.$$

à condition que

$$\begin{aligned} s_1 &= s_0 \text{ et } 1 \leq q_1 \leq q_0 < \infty, \text{ ou} \\ s_0 &< s_1, \quad \text{et} \quad q_0 \vee q_1 < \infty. \end{aligned}$$

De plus on a

$$S \xrightarrow{d} \mathring{B}_{\infty, \infty}^s \hookrightarrow b_{\infty, \infty}^s \hookrightarrow B_{\infty, \infty}^s \xrightarrow{d} S', s \in \mathbb{R}.$$

Finalement, on note que les deux injections dense suivante sont d'une importance dans les applications, et surtout dans les problèmes d'évolution dont nous nous intéressons, et pour cette raison on a introduit les espaces  $\mathring{B}_{p,q}^s, b_{p,q}^s$ ,

$$\mathring{B}_{p,q}^s \xrightarrow{d} \mathring{B}_{p,q}^t, b_{p,q}^s \xrightarrow{d} b_{p,q}^t,$$

pour  $-\infty < t < s < \infty$  et  $p, q \in [1, \infty]$ . Et pour la dérivation on a

$$(u \in B_{p,q}^s) \iff (\partial^\alpha u \in B_{p,q}^{s-m}, |\alpha| \leq m),$$

et

$$u \longmapsto \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{B_{p,q}^{s-m}}$$

est une norme équivalente dans  $B_{p,q}^s$  pour  $s \in \mathbb{R}$  et  $1 \leq p, q \leq \infty$ .

**Remarque 2.2** Les propriétés de dérivations précédentes sont valides dans les espaces  $\mathring{B}_{p,q}^s$  et  $b_{p,q}^s$  pour  $s \in \mathbb{R}$  et  $1 \leq p, q \leq \infty$ .

Supposons maintenant que  $E_1 \hookrightarrow E_0$ , alors on a pour  $s \in \mathbb{R}$  et  $1 \leq p, q \leq \infty$

$$\begin{aligned} B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_1) &\hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0), \\ \mathring{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_1) &\hookrightarrow \mathring{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0), \text{ et} \\ b_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_1) &\hookrightarrow b_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0), \end{aligned}$$

**Remarque 2.3** Si en plus l'injection  $E_1 \hookrightarrow E_0$  est dense alors les deux dernières injections sont aussi denses.

### 2.4.3 Résultat de dualité

Si  $E$  est réflexif ou  $E'$  séparable ou encore en général, si  $E'$  possède la propriété de Radon Nicolym alors le résultat de dualité suivant est valide

$$\left( \mathring{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) \right)' \doteq B_{p',q'}^{-s}(\mathbb{R}^n, E'), s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, q \leq \infty.$$

avec le produit de dualité entre  $S'$  et  $S$

$$\begin{aligned} \langle u', u \rangle_{\mathring{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E)} &= \langle u', u \rangle_{S(\mathbb{R}^n, E)}, \\ u' &\in B_{p',q'}^{-s}(\mathbb{R}^n, E'), u \in S(\mathbb{R}^n, E). \end{aligned}$$

**Remarque 2.4** Si  $p = \infty$ , le résultat de dualité précédent est valide lorsque  $E$  un espace de Banach quelconque.

### 2.4.4 Interpolation dans les espaces de Besov

La théorie de l'interpolation sera examinée dans le chapitre suivant. Toutefois on peut déjà affirmer que les espaces de Besov sont stables par l'interpolation réelle et plus précisément :

si  $0 < \theta < 1$  et  $-\infty < s_0 < s_1 < \infty$ , alors

$$(B_{p,q_0}^{s_0}, B_{p,q_1}^{s_1})_{\theta,q} \doteq B_{p,q}^{(1-\theta)s_0+\theta s_1}, \quad p, q, q_0, q_1 \in [1, \infty],$$

où  $(\cdot, \cdot)_{\theta,p}$  est le foncteur d'interpolation réel de type  $\theta$ .

En plus, si  $0 < s < m$  et  $m \in \mathbb{N}$ , alors

$$B_{p,q}^s \doteq (L_p, W_p^m)_{(s/m),q}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

Pour le foncteur d'interpolation continu on a pour  $0 < \theta < 1$  et  $-\infty < s_0 < s_1 < \infty$

$$(B_{p,q_0}^{s_0}, B_{p,q_1}^{s_1})_{\theta,\infty}^\circ \doteq (b_{p,q_0}^{s_0}, b_{p,q_1}^{s_1})_{\theta,\infty} \doteq b_{p,\infty}^{(1-\theta)s_0+\theta s_1}, \quad p, q_0, q_1 \in [1, \infty],$$

tandis que pour le foncteur d'interpolation complexe on a pour  $-\infty < s_0 < s_1 < \infty$ , le résultat suivant

$$\begin{aligned} [B_{p,q_0}^{s_0}, B_{p,q_1}^{s_1}]_\theta &\doteq \overset{\circ}{B}_{p,q}^{(1-\theta)s_0+\theta s_1}, \quad p, q, q_0, q_1 \in [1, \infty], \theta \in (0, 1), \text{ et} \\ [b_{p,q_0}^{s_0}, b_{p,q_1}^{s_1}]_\theta &\doteq b_{p,q}^{(1-\theta)s_0+\theta s_1}, \quad p, q, q_0, q_1 \in [1, \infty], \theta \in (0, 1), \end{aligned}$$

où  $[\cdot, \cdot]_\theta$  est le foncteur d'interpolation complexe standard de type  $\theta$ .



# Chapitre 3

## Interpolation

Soient  $E_j, F_j, j = 0, 1$  des espaces de Banach et  $X, Y$  deux espaces localement convexe tels que

$E_j \hookrightarrow X, F_j \hookrightarrow Y, j = 0, 1$  ( $\hookrightarrow$  injection continue ). On dit dans ce cas que  $(E_0, E_1), (F_0, F_1)$  sont des couples d'interpolation.

La théorie de l'interpolation nous donne la possibilité de construire des espaces d'interpolation  $E, F$  tel que si  $T \in \mathcal{L}(E_j, F_j), j = 0, 1$  alors  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Pour construire ces espaces on peut procéder de deux manières.

La première consiste à trouver un "constructeur" qu'on appellera "foncteur"  $\mathcal{F}$  permettant de former "des espaces interpolés" de type :  $\mathcal{F}[(E_0, E_1)]$  à partir d'un couple  $(E_0, E_1)$  donné, de façon que la propriété suivante, dite d'interpolation, soit vérifiée :

$$(T \in \mathcal{L}(X); T \in \mathcal{L}(E_j, F_j), j = 0, 1) \implies T \in \mathcal{L}(E, F)$$

La deuxième consiste à trouver tous les espaces  $E, F$  vérifiant la propriété d'interpolation ainsi que toutes les constructions  $\mathcal{F}$ .

Il est évident que la première procédure est plus pratique que la deuxième, c'est pour cela qu'on se basera sur elle surtout.

### 3.1 Foncteurs d'interpolation

**Définition 3.1** 1) Un couple  $(E_0, E_1)$  d'espaces de Banach est dit couple d'interpolation si'il existe un espace localement convexe  $X$  tel que  $E_j \hookrightarrow X, j = 0, 1$ . Dans ce cas  $E_0 \cap E_1$  et  $E_0 + E_1$  sont bien définis. Observons que si  $E_1 \hookrightarrow E_0$  alors on a  $E_0 \cap E_1 = E_1$  et  $E_0 + E_1 = E_0$ , ainsi on peut choisir  $X = E_0$ .

2) Si  $(E_0, E_1)$  est un couple d'interpolation et  $E_0 \cap E_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow E_0 + E_1$  alors  $E$  est dit espace intermédiaire relatif à  $(E_0, E_1)$ .

3) Soit  $B$  la catégorie dont les éléments sont les espaces de Banach. Les morphismes de  $B$  sont les opérateurs linéaires bornés, et la composition dans  $B$  est la composition usuelle des applications. On note par  $B_1$  la catégorie des couples d'interpolation, un morphisme  $B_1$  est éléments  $A$  de  $\mathcal{L}(E_0 + E_1, F_0 + F_1)$  vérifiant :  $A \in \mathcal{L}(E_j, F_j), j = 0, 1$  où  $(E_0, E_1)$  et  $(F_0, F_1)$  sont des couples d'interpolation ; la composition dans  $B_1$  est aussi la composition usuelle des applications.

On notera par  $A : (E_0, E_1) \longrightarrow (F_0, F_1)$ , si  $(E_0, E_1)$  et  $(F_0, F_1)$  sont des couples d'interpolation et  $A$  un morphisme de  $B_1$ .

4) Soient  $(E_0, E_1), (F_0, F_1)$  des couples d'interpolation. Alors  $E$  et  $F$  sont des espaces d'interpolation relatifs à  $(E_0, E_1)$  et  $(F_0, F_1)$  respectivement si  $E$  et  $F$  sont des espaces intermédiaires relatifs à  $(E_0, E_1)$  et  $(F_0, F_1)$  respectivement, et  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  si  $A : (E_0, E_1) \longrightarrow (F_0, F_1)$ .

De plus,  $E, F$  sont des espaces d'interpolation d'exposant  $\theta$ , où  $0 < \theta < 1$ , relatif à  $(E_0, E_1)$  et  $(F_0, F_1)$  s'il existe  $c(\theta) > 0$  tel que

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq C(\theta) \|A\|_{\mathcal{L}(E_0, F_0)}^{1-\theta} \|A\|_{\mathcal{L}(E_1, F_1)}^{\theta}$$

pour  $A : (E_0, E_1) \longrightarrow (F_0, F_1)$ . Si  $C(\theta) = 1$  alors  $E$  et  $F$  sont des espaces d'interpolation exacte d'exposant  $\theta$  relativement à  $(E_0, E_1)$  et  $(F_0, F_1)$ .

5) Finalement, un foncteur covariant  $F$  de  $B_1$  dans  $B$  est un foncteur d'interpolation [exacte], [d'exposant  $\theta$ ], si pour  $(E_0, E_1)$  et  $(F_0, F_1)$  des couples d'interpolation donnés, alors  $\mathcal{F}(E_0, E_1)$  et  $\mathcal{F}(F_0, F_1)$  sont des espaces d'interpolation [exacte], [d'exposant  $\theta$ ] relativement à  $(E_0, E_1)$  et  $(F_0, F_1)$  et si  $\mathcal{F}(A) = A \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(E_0, E_1), \mathcal{F}(F_0, F_1))$ , avec  $A \in \mathcal{L}((E_0, E_1), (F_0, F_1))$ .

### 3.1.1 Inégalité d'interpolation

la proposition suivante montre que les normes des espaces intermédiaires possèdent une propriété de convexité importante.

**Proposition 1** Soit  $\mathcal{F}_\theta$  un foncteur d'interpolation d'exposant  $\theta$ . pour  $(E_0, E_1)$  un couple d'interpolation donné, posons  $E_\theta = \mathcal{F}_\theta(E_0, E_1)$ . Alors

$$(3.1) \quad \|x\|_{E_\theta} \leq C_\theta \|x\|_{E_0}^\theta \|x\|_{E_1}^{1-\theta}, \quad x \in E_0 \cap E_1.$$

**Preuve.** puisque  $(lk, lk)$  est un couple d'interpolation et  $\mathcal{F}_\theta$  un foncteur d'interpolation d'exposant  $\theta$ , alors  $\mathcal{F}_\theta(lk, lk)$  est un espace d'interpolation relatif à  $(lk, lk)$  c'est à dire  $\mathcal{F}_\theta(lk, lk)$  est un espace intermédiaire relatif à  $(lk, lk)$  d'où  $lk = lk \cap lk \hookrightarrow \mathcal{F}_\theta(lk, lk) \hookrightarrow lk + lk = lk \Leftrightarrow \mathcal{F}_\theta(lk, lk) = lk$ .

Soit  $x \in E_0 \cap E_1$ , on définit l'opérateur  $A : (lk, lk) \longrightarrow (E_0, E_1)$  par  $A\lambda := \lambda x$ . Observons que

$$\|A\|_{\mathcal{L}(lk, E_j)} = \sup_{|\lambda| \leq 1} \|\lambda x\|_{E_j} = \|x\|_{E_j}, \quad j = 0, 1$$

d'où on déduit de 3.1 l'existence d'une constante  $C(\theta) > 0$  telle que

$$\begin{aligned} C_1(\theta) \|x\|_{E_\theta} &\leq \sup_{|\lambda|_{K_\theta} = 1} \|\lambda x\|_{E_\theta} = \|A\|_{\mathcal{L}(lk_\theta, E_\theta)} \leq C(\theta) \|x\|_{E_0}^{1-\theta} \|x\|_{E_1}^\theta \implies \\ \|x\|_{E_\theta} &\leq \frac{C(\theta)}{C_1(\theta)} \|x\|_{E_0}^{1-\theta} \|x\|_{E_1}^\theta = C_\theta \|x\|_{E_0}^{1-\theta} \|x\|_{E_1}^\theta. \end{aligned}$$

l'estimation ci dessus est dite aussi l'inégalité d'interpolation. Il s'ensuit de l'inégalité de Young

$$0 \leq x^\theta y^{1-\theta} \leq \theta x + (1 - \theta) y, \quad x, y \in \mathbb{R}^+, \theta \in (0, 1),$$

que

$$\begin{aligned} \|x\|_{E_\theta} &\leq C_\theta \|x\|_0^{1-\theta} \|x\|_1^\theta \\ &\leq (C_\theta^{\frac{1}{1-\theta}} \theta^{\frac{\theta}{1-\theta}} \varepsilon^{\frac{\theta}{\theta-1}} \|x\|_0)^{1-\theta} (\theta^{-\theta} \varepsilon^\theta) \|x\|_1^\theta \\ &\leq [C_\theta^{\frac{1}{1-\theta}} \theta^{\frac{\theta}{1-\theta}} \varepsilon^{\frac{\theta}{\theta-1}} \|x\|_0]^{1-\theta} [\theta^{-1} \varepsilon \|x\|_1]^\theta \\ &\leq (1 - \theta) C_\theta^{\frac{1}{1-\theta}} \theta^{\frac{\theta}{1-\theta}} \varepsilon^{\frac{\theta}{\theta-1}} \|x\|_0 + \theta (\theta^{-1} \varepsilon \|x\|_1) \\ &\leq \varepsilon^{\frac{\theta}{\theta-1}} C(\theta) \|x\|_0 + \varepsilon \|x\|_1 \end{aligned}$$

donc

$$\|x\|_{E_\theta} \leq \varepsilon \|x\|_1 + C(\theta) \varepsilon^{\frac{\theta}{\theta-1}} \|x\|_0, \quad x \in E_0 \cap E_1, \quad \varepsilon > 0, \quad \text{avec } C(\theta) := (1-\theta)\theta^{\theta/(1-\theta)} C_\theta^{1/(1-\theta)}.$$

□

### 3.1.2 Rétractions

Un objet  $Y$  dans une catégorie donnée est un rétracteur de l'objet  $X$  s'il existe des morphismes  $r : X \rightarrow Y$  (rétraction surjective) et  $r^C : Y \rightarrow X$  ( corétraction pour  $r$ ) tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{id} & Y \\ r^C \searrow & & \nearrow r \\ & X & \end{array}$$

soit commutatif.

D'une autre façon, le morphisme  $r : X \rightarrow Y$  est un rétracteur de  $X$  dans  $Y$  s'il est surjectif et s'il admet un inverse à droite dans une catégorie donné.

**Lemme 3.1** *soit  $r \in \mathcal{L}(X, Y)$  une rétracion dans la catégorie des espaces localement convexes et soit  $r^C \in \mathcal{L}(Y, X)$  la corétraction de  $r$ . Alors  $p := r^C r \in \mathcal{L}(X)$  est une projection et  $X$  est représenté par une somme topologique directe,*

$$X = X_p \oplus X_{1-p} \quad X_p := im(p) \quad X_{1-p} := im(1-p).$$

De plus  $r^C \in \mathcal{L}is(Y, X_p)$  et  $X_{1-p} = Ker(p) = Ker(r)$ .

**Preuve.** Observons que

$$p^2 = (r^C r)(r^C r) = r^C (r r^C) r = r^C Id_Y r = r^C r = p,$$

de plus

$$im(1-p) = Ker(p) \supset Ker(r),$$

puisque

$$p(x) = 0 \implies 0 = rp(x) = r(r^C r(x)) = r(x),$$

il s'ensuit que

$$\text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(r), \text{ d'ou } \text{Ker}(p) = \text{Ker}(r).$$

Montrons maintenant que

$r^C \in \mathcal{L}is(Y, X_p)$ , sachons que  $r^C$  est injectif car c'est l'inverse à droite de  $r$ , c'est à dire :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(r^C) &\implies r^C(x) = 0 \implies r(r^C(x)) = x = 0 \\ &\implies \text{Ker}(r^C) = \{0\}, \end{aligned}$$

il suffit donc de montrer que  $X_p := \text{im}(r^C)$ ,

\* soit

$$y \in X_p := \text{im}(p) \implies \exists x \in X : y = p(x) = (r^C r(x)) \implies y \in \text{im}(r^C).$$

\* soit

$$\begin{aligned} y_1 \in \text{im}(r^C) \text{ c.à.d. } \exists x_1 \in Y : y_1 = r^C(x_1) \in X \\ \implies r(y_1) = rr^C(x_1) = x_1 \implies x_1 \in \text{im}(r), \end{aligned}$$

donc

$$y_1 = r^C r(y_1) = p(y_1) \implies y_1 \in \text{im}(p) \implies X_p = \text{im}(r^C).$$

D'ou

$$r^C \in \mathcal{L}is(Y, X_p).$$

□

**Proposition 2** Soit  $r : (E_0, E_1) \longrightarrow (F_0, F_1)$  une rétraction dans la catégorie  $B_1$  des couples d'interpolation, et soit  $r^C : (F_0, F_1) \longrightarrow (E_0, E_1)$  la corétraction de  $r$ . Supposons que  $\mathcal{F}$  est un foncteur d'interpolation de  $B_1$  dans  $B$ . alors

$$r \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(E_0, E_1), \mathcal{F}(F_0, F_1)),$$

est une rétraction et  $r^C$  est la corétraction pour  $r = \mathcal{F}(r)$ .

**Preuve.** d'après les propriétés du foncteur d'interpolation, puisque  $(E_0, E_1)$  et  $(F_0, F_1)$  sont des couples d'interpolation alors  $\mathcal{F}(E_0, E_1)$  et  $\mathcal{F}(F_0, F_1)$  sont des espaces d'interpolation et

$$\mathcal{F}(r) = r \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(E_0, E_1), \mathcal{F}(F_0, F_1)) \text{ pour } r : (E_0, E_1) \longrightarrow (F_0, F_1).$$

On veut montré maintenant que  $r \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(E_0, E_1), \mathcal{F}(F_0, F_1))$  est une rétraction c-à-d

$$\exists r^C \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(F_0, F_1), \mathcal{F}(E_0, E_1)); rr^C = id_{\mathcal{F}(F_0, F_1)}.$$

On a

$$r : (E_0, E_1) \longrightarrow (F_0, F_1), r^C : (F_0, F_1) \longrightarrow (E_0, E_1)$$

c.à.d

$$r \in \mathcal{L}(E_0 + E_1, F_0 + F_1), r^C \in \mathcal{L}(F_0 + F_1, E_0 + E_1)$$

et

$$r \in \mathcal{L}(E_j, F_j), r^C \in \mathcal{L}(F_j, E_j) \text{ pour } j = 0, 1$$

de plus on a

$$\begin{aligned} E_0 \cap E_1 &\subset \mathcal{F}(E_0, E_1) \subset E_0 + E_1 \\ F_0 \cap F_1 &\subset \mathcal{F}(F_0, F_1) \subset F_0 + F_1, \end{aligned}$$

donc pour  $x \in \mathcal{F}(F_0, F_1) \subset F_0 + F_1$

$$rr^C(x) = rr^C(x_0 + x_1) = rr^C(x_0) + rr^C(x_1) = x_0 + x_1 = x, \text{ ou } x_0 \in F_0, x_1 \in F_1$$

car  $r : (E_0, E_1) \longrightarrow (F_0, F_1)$  est une rétraction et  $r^C$  est la corétraction de  $r$ , d'où le résultat.  $\square$

**Proposition 3** Soient  $(E_0, E_1)$  et  $(F_0, F_1)$  des couples d'interpolation tels que  $E_1 \hookrightarrow E_0$  et  $F_1 \hookrightarrow F_0$ . soit  $\mathcal{F}$  un foncteur d'interpolation de  $B_1$  dans  $B$ . Alors  $(E_0 \times F_0, E_1 \times F_1)$  est un couple d'interpolation, et

$$E_1 \times F_1 \hookrightarrow \mathcal{F}(E_0, E_1) \times \mathcal{F}(F_0, F_1) \doteq \mathcal{F}(E_0 \times F_0, E_1 \times F_1) \hookrightarrow E_0 \times F_0.$$

**Preuve.** puisque  $(E_0, E_1)$  et  $(F_0, F_1)$  sont des couples d'interpolation alors il existe deux espaces localement convexe  $X$  et  $Y$  tels que

$$E_j \hookrightarrow X, \quad F_j \hookrightarrow Y \quad \text{pour } j = 0, 1,$$

donc

$$E_0 \times F_0 \hookrightarrow X \times Y \quad \text{et} \quad E_1 \times F_1 \hookrightarrow X \times Y,$$

ainsi  $(E_0 \times F_0, E_1 \times F_1)$  est un couple d'interpolation avec  $E_1 \times F_1 \hookrightarrow E_0 \times F_0$ . soit  $r_E : E_0 \times F_0 \longrightarrow E_0$  la projection naturelle et  $i_E : E_0 \longrightarrow E_0 \times F_0$  l'injection naturelle. Observons que

$$\begin{aligned} r_E &: (E_0 \times F_0, E_1 \times F_1) \longrightarrow (E_0, E_1) \quad \text{et} \\ i_E &: (E_0, E_1) \longrightarrow (E_0 \times F_0, E_1 \times F_1) \end{aligned}$$

de plus,  $r_E$  est une rétraction et  $i_E$  est la corétraction pour  $r_E$  dans la catégorie  $B_1$ , car on a

$$r_E : (E_0 \times F_0, E_1 \times F_1) \longrightarrow (E_0, E_1), \quad i_E : (E_0, E_1) \longrightarrow (E_0 \times F_0, E_1 \times F_1),$$

soit  $x_0 + x_1 \in E_0 + E_1$ ,

$$\begin{aligned} r_E i_E(x_0 + x_1) &= r_E(i_E(x_0) + i_E(x_1)) \\ &= r_E((x_0, y_0) + (x_1, y_1)) \\ &= r_E(x_0 + x_1, y_0 + y_1) = x_0 + x_1, \quad \text{avec } (y_0 + y_1) \in F_0 \times F_1, \end{aligned}$$

donc

$$r_E i_E : E_0 + E_1 \xrightarrow{id} E_0 + E_1$$

avec

$$r_E i_E : E_0 \xrightarrow{id} E_0, \quad r_E i_E : E_1 \xrightarrow{id} E_1$$

d'où

$$r_E i_E : (E_0, E_1) \xrightarrow{id} (E_0, E_1)$$

par conséquent  $r_E$  est une rétraction et  $i_E$  la corétraction pour  $r_E$ , et d'après la proposition 2

$$r_E = \mathcal{F}(r_E) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(E_0 \times F_0, E_1 \times F_1), \mathcal{F}(E_0, E_1))$$

est une rétraction, et  $i_E = \mathcal{F}(i_E)$  est la corétraction pour  $r_E$ , et d'après le lemme 3.1 on a

$$\mathcal{F}(E_0 \times F_0, E_1 \times F_1) = im(p) \oplus Ker(p),$$

où

$$p : i_E r_E \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(E_0 \times F_0, E_1 \times F_1)), \text{ et } i_E \in \mathcal{L}is(\mathcal{F}(E_0, E_1), im(p)).$$

Soit  $r_F : E_0 \times F_0 \longrightarrow F_0$ , la projection naturelle et  $i_F : F_0 \longrightarrow E_0 \times F_0$ , l'injection naturelle.

$r_F$  et  $i_F$  ont les mêmes propriétés que  $r_E$  et  $i_E$ , respectivement, de plus  $i_F r_F = 1 - p$ , et puisque  $Ker(p) = im(1 - p)$ , ainsi

$$i_F \in \mathcal{L}is(\mathcal{F}(F_0, F_1), Ker(p)),$$

d'où

$$(e, f) \longmapsto i_E(e) + i_F(f) \in \mathcal{L}is(\mathcal{F}(E_0, E_1) \times \mathcal{F}(F_0, F_1), \mathcal{F}(E_0 \times F_0, E_1 \times F_1))$$

Car

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(E_0 \times F_0, E_1 \times F_1) &= im(p) \oplus Ker(p), \text{ et} \\ Ker(p) \cap im(p) &= \{0\}. \end{aligned}$$

Effectivement

$$\begin{aligned} x \in Ker(p) \cap im(p) &\Rightarrow p(x) = 0 \text{ et } x = p(y) \\ &\Rightarrow 0 = p(x) = p^2(y) = p(y) \Rightarrow y \in Ker(p) \Rightarrow x = p(y) = 0. \end{aligned}$$

Et puisqu'on sait que  $\mathcal{F}(E_0, E_1)$  et  $\mathcal{F}(F_0, F_1)$  sont des espaces d'interpolation relatifs à  $(E_0, E_1)$  et  $(F_0, F_1)$  respectivement alors on a

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \cap E_1 \hookrightarrow \mathcal{F}(E_0, E_1) \hookrightarrow E_0 + E_1 = E_0 \\ \text{et } F_1 &\hookrightarrow \mathcal{F}(F_0, F_1) \hookrightarrow F_0, \end{aligned}$$

d'où

$$E_1 \times F_1 \hookrightarrow \mathcal{F}(E_0, E_1) \times \mathcal{F}(F_0, F_1) \doteq \mathcal{F}(E_0 \times F_0, E_1 \times F_1) \hookrightarrow E_0 \times F_0.$$

□

### 3.1.3 Foncteurs d'interpolation standard

Dans ce qui suit on introduit brièvement les foncteurs d'interpolation classiques qui sont importants pour des applications concrètes.

### 3.1.3.1 Foncteurs d'interpolation réels

Soit  $(E_0, E_1)$  un couple d'interpolation. Pour  $x \in E_0 + E_1$ , on définit la fonctionnelle  $k$  par

$$k(t, x) := k(t, x, E_0, E_1) := \inf\{\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}; x = x_0 + x_1\}, \text{ pour } t > 0,$$

posons

$$\|x\|_{\theta, q} := \|t^{-\theta} k(t, x)\|_{L_q(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t})}, \quad 0 < \theta < 1, \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

et

$$(E_0, E_1)_{\theta, q} := (\{x \in E_0 + E_1; \|x\|_{\theta, q} < \infty\}, \|\cdot\|_{\theta, q}), \text{ pour } 0 < \theta < 1, 1 \leq q \leq \infty.$$

Soit  $\mathcal{F}_{\theta, q}(E_0, E_1) := (E_0, E_1)_{\theta, q}$  et  $\mathcal{F}_{\theta, q}(A) := A$  pour  $A : (E_0, E_1) \longrightarrow (F_0, F_1)$ . Alors en donnant  $q \in [1, \infty]$  et  $\theta \in (0, 1)$ , ce qui fait de  $\mathcal{F}_{\theta, q}$  un foncteur d'interpolation exacte d'exposant  $\theta$ , notée  $(\cdot, \cdot)_{\theta, q}$  et appelé foncteur d'interpolation réel d'exposant  $\theta$  et de paramètre  $q$ .

### 3.1.3.2 Foncteurs d'interpolation complexe

Soient  $(E_0, E_1)$  un couple d'interpolation,  $F(E_0, E_1)$  l'ensemble de toutes les fonctions bornées, continues  $f$  de  $\bar{S}$  dans  $E_0 + E_1$ , où  $S := \{0 < \operatorname{Re} Z < 1\}$  tel que

$$f/S \text{ est holomorphe et } f/S_j \in C_0(S_j, E_j), j = 0, 1.$$

Où  $S_j = [\operatorname{Re} Z = j]$  et  $C_0$  est l'espace des fonctions continues s'annulant à l'infini.

Alors  $F(E_0, E_1)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{F(E_0, E_1)} := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(it)\|_{E_0} \vee \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(1+it)\|_{E_1} \text{ pour } \theta \in (0, 1),$$

Posons

$$[E_0, E_1]_{\theta} := (\{x \in E_0 + E_1; f(\theta) = x \text{ pour } f \in F(E_0, E_1)\}, \|\cdot\|_{\theta}),$$

où

$$\|x\|_{\theta} := \inf\{\|f\|_{F(E_0, E_1)}; f(\theta) = x\},$$

et

$$\mathcal{F}_{\theta}(E_0, E_1) := [E_0, E_1]_{\theta} \text{ et } \mathcal{F}_{\theta}(A) := A \text{ pour } A : (E_0, E_1) \longrightarrow (F_0, F_1)$$

Ainsi  $\mathcal{F}_{\theta}$  est un foncteur d'interpolation d'exposant  $\theta$ , plus précisément c'est un foncteur d'interpolation exacte.

## 3.1.3.3 Foncteurs d'interpolation continue

On note par  $B_2$  la sous catégorie de  $B_1$  des couples d'espaces de Banach à injection dense. Soient  $(E_0, E_1)$  et  $(F_0, F_1)$  deux couples de  $B_2$ . Il s'en suit du théorème du graphe fermé que  $A \in \mathcal{L}((E_0, E_1), (F_0, F_1))$  si et seulement si  $A \in \mathcal{L}(E_0, F_0)$  et  $A(E_1) \subset F_1$ .

Effectivement il suffit de montrer l'implication :

$$A \in \mathcal{L}(E_0, F_0) \text{ et } A(E_1) \subset F_1 \Rightarrow A \in \mathcal{L}((E_0, E_1), (F_0, F_1)),$$

et pour montrer que  $A \in \mathcal{L}((E_0, E_1), (F_0, F_1))$ , il suffit de montrer que  $A \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$ , car on a déjà  $A \in \mathcal{L}(E_0, F_0)$ .

Pour cela montrons que  $G(A/E_1)$  est fermé.

Soit  $(x_n, y_n) \in G(A/E_1)$  tel que

$$x_n \xrightarrow{E_1} x \text{ et } y_n \xrightarrow{F_1} y,$$

Puisque  $G(A)$  est fermé, car  $A \in \mathcal{L}(E_0, F_0)$ , alors du fait que  $(x_n, y_n) \in G(A)$  on a  $(x, y) \in G(A)$ , c'est à dire  $y = Ax$  avec  $x \in E_0$ . Mais  $x_n \in E_1 \forall n$  et  $E_1$  est un espace de Banach, donc

$x \in E_1$  et  $y = Ax \in F_1$ , donc  $(x, y) \in G(A/E_1)$ . D'où on en déduit, grâce au théorème du graphe fermé, que  $A \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$ .

Sur la catégorie  $B_2$ .

On définit maintenant un autre foncteur d'interpolation important.

Soit  $(E_0, E_1)$  un couple d'espace de Banach à injection dense. Pour  $\theta \in (0, 1)$  posons

$$(E_0, E_1)_{\theta, \infty}^0 := \text{la fermeture de } E_1 \text{ dans } (E_0, E_1)_{\theta, \infty}.$$

Soit  $(F_0, F_1)$  un second objet de  $B_2$  et supposons que  $A \in \mathcal{L}((E_0, E_1), (F_0, F_1))$ . Puisque  $A(E_1) \subset F_1$ , on obtient

$$A \in \mathcal{L}((E_0, E_1)_{\theta, \infty}^0, (F_0, F_1)_{\theta, \infty}^0)$$

effectivement on a

$$(E_0, E_1)_{\theta, \infty}^0 := \overline{E_1}^{(E_0, E_1)_{\theta, \infty}} \text{ et } (F_0, F_1)_{\theta, \infty}^0 := \overline{F_1}^{(F_0, F_1)_{\theta, \infty}}$$

on veut montrer que

$$A \in \mathcal{L}((E_0, E_1)_{\theta, \infty}^0, (F_0, F_1)_{\theta, \infty}^0)$$

c.à.d

$$A : \overline{E_1}^{(E_0, E_1)_{\theta, \infty}} \longrightarrow \overline{F_1}^{(F_0, F_1)_{\theta, \infty}}$$

est continue, pour cela il suffit de montrer que pour  $(x_n) \subset E_1$  (muni de la topologie induite par celle de  $(E_0, E_1)_{\theta, \infty}$ ), on a

$$x_n \xrightarrow{cv} x \implies Ax_n \xrightarrow{cv} Ax,$$

soit  $(x_n) \subset E_1 \subset E_0$  t q

$$x_n \xrightarrow{(E_0, E_1)_{\theta, \infty}} x$$

alors

$$Ax_n \xrightarrow{(F_0, F_1)_{\theta, \infty}} Ax$$

Car

$$A \in \mathcal{L}((E_0, E_1)_{\theta, \infty}, (F_0, F_1)_{\theta, \infty})$$

c.a.d

$$A \in \mathcal{L}\left(E_1, \overline{F_1}^{(F_0, F_1)_{\theta, \infty}}\right)$$

avec  $E_1$  muni de la topologie induite par celle de  $(E_0, E_1)_{\theta, \infty}$ , ainsi en appliquant le théorème de prolongement par continuité on obtient le résultat cherché. D'où on posant  $\mathcal{F}_\theta(E_0, E_1) := (E_0, E_1)_{\theta, \infty}^0$  et  $\mathcal{F}_\theta(A) := A$ , on obtient un foncteur d'interpolation exact d'exposant  $\theta$ . on le note par

$$(\cdot, \cdot)_{\theta, \infty}^0$$

et on l'appelle le foncteur d'interpolation continue. L'espace  $(E_0, E_1)_{\theta, \infty}^0$  est caractérisé par

$$(E_0, E_1)_{\theta, \infty}^0 = \{x \in E_0; \lim_{t \rightarrow 0} t^{-\theta} k(t, x) = 0\}$$

### 3.1.4 Injections continues

Supposons que  $(E_0, E_1)$  soit un couple d'interpolation. En donnant  $\theta \in (0, 1)$ , on définit un espace d'interpolation relatif à  $(E_0, E_1)$  par

$$(E_0, E_1)_{\theta, \infty}^0 := \text{fermeture de } E_0 \cap E_1 \text{ dans } (E_0, E_1)_{\theta, \infty}$$

alors les injections importantes suivantes sont valides

$$(3.2) \quad \begin{aligned} E_0 \cap E_1 &\xrightarrow{d} (E_0, E_1)_{\xi, q} \xrightarrow{d} (E_0, E_1)_{\eta, 1} \xrightarrow{d} [E_0, E_1]_{\eta} \\ &\hookrightarrow (E_0, E_1)_{\eta, \infty}^0 \hookrightarrow (E_0, E_1)_{\eta, \infty} \xrightarrow{d} (E_0, E_1)_{\zeta, q} \hookrightarrow E_0 + E_1 \end{aligned}$$

pour  $1 \leq q < \infty$  et  $0 < \zeta < \eta < \xi < 1$

on a aussi

$$(3.3) \quad (E_0, E_1)_{\theta, q} \xrightarrow{d} (E_0, E_1)_{\theta, r} \xrightarrow{d} (E_0, E_1)_{\theta, \infty}^0$$

pour  $1 \leq q < r < \infty, 0 < \theta < 1$ .

De plus

$$(3.4) \quad (E_0, E_1)_{\theta, q} = (E_1, E_0)_{1-\theta, q}, \quad [E_0, E_1]_{\theta} = [E_1, E_0]_{1-\theta}$$

pour  $0 < \theta < 1$  et  $1 \leq q \leq \infty$ .

### 3.1.5 Propriétés de dualité

Pour  $q \in [1, \infty]$ , on définit l'exposant dual  $q' \in [1, \infty]$  par  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ . Alors on a les propriétés de dualité suivantes

$$(E_0, E_1)'_{\theta, q} = (E'_0, E'_1)_{\theta, q'}, \quad 0 < \theta < 1, \quad 1 \leq q < \infty, \quad [(E_0, E_1)_{\theta, \infty}^0]' \doteq (E'_0, E'_1)_{\theta, 1}$$

avec les crochets de dualité naturelle induite par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_0 \cap E_1}$ , pourvu que

$$E_0 \cap E_1 \xrightarrow{d} E_j \quad \text{pour } j = 0, 1$$

Si  $E_0$  ou  $E_1$  est réflexif et  $E_0 \cap E_1 \xrightarrow{d} E_j$ ,  $j = 0, 1$  alors

$$[E_0, E_1]'_{\theta} = [E'_0, E'_1]_{\theta}, \quad 0 < \theta < 1,$$

les crochets de dualité induite naturellement par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_0 \cap E_1}$ , de plus  $[E_0, E_1]_{\theta}$  est réflexif pour  $0 < \theta < 1$ .

### 3.1.6 Compacité

On pose dans ce qui suit

$$(E_0, E_1)_{j, q} := E_j, \quad j = 0, 1, \quad 1 \leq q \leq \infty$$

Supposons que l'injection  $E_1 \hookrightarrow E_0$  soit compacte, alors  $(E_0, E_1)_{\theta_1, q_1} \hookrightarrow (E_0, E_1)_{\theta_0, q_0}$  est une injection compacte pour  $0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 1$ ,  $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$

### 3.1.7 Propriétés de réitération

Supposons que

$$(*) \quad (E_0, E_1)_{\theta_j, 1} \hookrightarrow F_j \hookrightarrow (E_0, E_1)_{\theta_j, \infty}, \quad j = 0, 1,$$

où  $0 \leq \theta_j \leq 1$  et  $\theta_0 \neq \theta_1$ . Alors

$$(3.5) \quad (F_0, F_1)_{\eta, q} \doteq (E_0, E_1)_{(1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1, q}, \quad 0 < \eta < 1, \quad 1 \leq q \leq \infty$$

On pose

$$(3.6) \quad [E_0, E_1]_j := E_j, \quad j = 0, 1$$

alors en supposant, pour simplifier, que  $(E_0, E_1)$  est un couple d'espaces de Banach à injection dense, on a

$$(3.7) \quad [[E_0, E_1]_{\theta_0}, [E_0, E_1]_{\theta_1}]_{\eta} = [E_0, E_1]_{(1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1}, \quad \theta_0, \theta_1, \eta \in [0, 1]$$

Observons que 3.3, (\*) et 3.5 impliquent

$$(3.8) \quad ([E_0, E_1]_{\theta_0}, [E_0, E_1]_{\theta_1})_{\eta, q} \doteq (E_0, E_1)_{(1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1, q}$$

Effectivement si on montre que  $F_0 = [E_0, E_1]_{\theta_0}$  et  $F_1 = [E_0, E_1]_{\theta_1}$  vérifient

$$(E_0, E_1)_{\theta_j, 1} \hookrightarrow F_j \hookrightarrow (E_0, E_1)_{\theta_j, \infty} \text{ pour } j = 0, 1,$$

alors on obtient le résultat, de 3.3 cette condition est vérifiée d'où le résultat pour  $\theta_0, \theta_1, \eta \in (0, 1)$ ;  $\theta_0 \neq \theta_1$  et  $1 \leq q \leq \infty$ , d'autre part on a

$$(3.9) \quad [(E_0, E_1)_{\theta_0, q_0}, (E_0, E_1)_{\theta_1, q_1}]_{\eta} \doteq (E_0, E_1)_{(1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1, q}$$

pour  $\theta_0, \theta_1, \eta \in (0, 1)$  avec  $\theta_0 \neq \theta_1$  et  $1 \leq q \leq \infty$ , ou  $\frac{1}{q} := (1-\eta)/q_0 + \eta/q_1$

où le cas  $q_0 = q_1 = \infty$  est exclu.

Soit (\*) satisfait. Alors 3.5 implique que

$$(F_0, F_1)_{\theta, \infty}^0 = \text{la fermeture de } F_0 \cap F_1 \text{ dans } (E_0, E_1)_{(1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1, \infty},$$

De 3.3, 3.4 et 3.5 on déduit que

$$F_0 \cap F_1 \xrightarrow{d} (F_0, F_1)_{\eta, 1} \doteq (E_0, E_1)_{(1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1, 1} \xrightarrow{d} (E_0, E_1)_{(1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1, \infty}^0$$

D'où

$$(3.10) \quad (F_0, F_1)_{\eta, \infty}^0 \doteq (E_0, E_1)_{(1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1, \infty}^0, \quad 0 < \eta < 1$$

### 3.1.8 Foncteurs d'interpolation admissible

Supposons que  $0 < \theta < 1$

Par foncteur d'interpolation admissible, noté par  $(\cdot, \cdot)_\theta$ , on entend un foncteur d'interpolation d'exposant  $\theta$  pour la catégorie des couples d'espaces de Banach à injection dense vérifiant  $E_1$  dense dans  $(E_0, E_1)_\theta$ , c.a.d.

$$(E_0, E_1) \text{ verifiant } E_1 \xrightarrow{d} E_0 \implies E_1 \xrightarrow{d} (E_0, E_1)_\theta,$$

Observons que le foncteur d'interpolation réel  $(\cdot, \cdot)_{\theta p}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , le foncteur d'interpolation complexe  $[\cdot, \cdot]_\theta$ , et le foncteur d'interpolation continu  $(\cdot, \cdot)_{\theta, \infty}^0$  sont admissibles. S'il n'ya pas de confusion on pose  $E_\theta := (E_0, E_1)_\theta$ , et on note la norme dans  $E_\theta$  par  $\|\cdot\|_\theta$ .

**Théorème 3.1** *si  $(E_0, E_1)$  est un couple d'espaces de Banach à injection dense,*

$$(3.11) \quad E_1 \xrightarrow{d} E_\alpha \xrightarrow{d} E_\beta \xrightarrow{d} E_0, 0 < \beta < \alpha < 1.$$

*En donnant  $\alpha, \beta, \gamma, [0, 1]$  avec  $0 \leq \gamma < \beta < \alpha \leq 1$ , il existe  $c := c(\alpha, \beta, \gamma)$  tel que*

$$(3.12) \quad \|x\|_\beta \leq c \|x\|_\gamma^{(\alpha-\beta)/(\alpha-\gamma)} \|x\|_\alpha^{(\beta-\gamma)/(\alpha-\gamma)}, x \in E_\alpha,$$

*de plus*

$$(E_1 \hookrightarrow E_0 \text{ injection compacte}) \implies (E_\alpha \hookrightarrow E_\beta \text{ injection compacte}), 0 \leq \beta < \alpha \leq 1$$

*récioproquement*

$$\begin{aligned} (\exists \alpha, \beta \in [0, 1]; E_\alpha \hookrightarrow E_\beta \text{ injection compacte avec } \beta < \alpha) \\ \implies (E_1 \hookrightarrow E_0 \text{ injection compacte}) \end{aligned}$$

**Remarque 3.1** *Soit  $(E_0, E_1)$  un couple d'espaces de Banach à injection dense. Alors l'ensemble des espaces de Banach  $\{E_\alpha; 0 \leq \alpha \leq 1\}$  possède la propriété de réitération suivante*

*si*

$$0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \text{ et } 0 < \eta_- < \eta < \eta_+ < 1$$

*alors*

$$(E_\alpha, E_\beta)_{\eta_+} \hookrightarrow E_{(1-\eta)\alpha + \eta\beta} \hookrightarrow (E_\alpha, E_\beta)_{\eta_-}.$$

## 3.2 Exemples et applications

Vu que notre travail se base sur les espaces de Besov  $B_{p,q}^s$  ainsi que les les espace  $l_p$ , on donne dans ce qui suit deux applications pour la théorie d'interpolation dans ces espaces.

### 3.2.1 Interpolation dans les espaces $l_p(E)$

Si  $E$  est des espace de Banach, alors

$$l_p(E) = \{a/a = \{a_j\}_{j=1}^\infty; a_j \in E; \|a\|_{l_p(E)} = \left( \sum_{j=1}^\infty \|a_j\|^p \right)^{1/p} < \infty\}, \text{ avec } 1 \leq p < \infty,$$

et

$$l_\infty(E) = \{a/a = \{a_j\}_{j=1}^\infty; a_j \in E; \|a\|_{l_\infty(E)} = \sup_j \|a_j\|_E < \infty\}$$

sont aussi des espaces de Banach.

Soit  $(E, F)$ , un couple d'interpolation, alors  $(l_{p_0}(E), l_{p_1}(F))$  sont aussi pour  $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$  des couples d'interpolation.

**Théorème 3.2** soit  $1 \leq p_0, p_1 < \infty, 0 < \theta < 1$ , et  $\frac{1}{P} = \frac{1-\theta}{P_0} + \frac{\theta}{P_1}$ . Alors

$$(l_{p_0}(E), l_{p_1}(F))_{\theta, P} := l_p((E, F)_{\theta, P})$$

et

$$[l_{p_0}(E), l_{p_1}(F)]_{\theta, P} = l_p([E, F]_\theta)$$

### 3.2.2 Interpolation dans les espaces $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$

**Théorème 3.3** (a) soit  $-\infty < s_0, s_1 < \infty, s_0 \neq s_1, 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q_0, q_1, q \leq \infty$ , et  $0 < \theta < 1$ . Alors

$$(B_{p,q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), B_{p,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta, q} = B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{ou} \quad s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1.$$

(b) Soit  $-\infty < s_0, s_1 < \infty, 1 \leq q_0, q_1 < \infty, 1 < p_0, p_1 < \infty$ , et  $0 < \theta < 1$ . Alors en posant

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{P} = \frac{1-\theta}{P_0} + \frac{\theta}{P_1}$$

Si  $p = q$ , alors

$$(B_{p_0,q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), B_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta, q} = B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n).$$

(c) Soit  $-\infty < s_0, s_1 < \infty, 1 \leq q_0 < \infty, 1 < P_0, P_1 < \infty$ , et  $0 < \theta < 1$ . Alors

$$\begin{aligned} [B_{p_0,q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), B_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n)]_\theta &= B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{ou} \quad s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1, \\ \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{P} = \frac{1-\theta}{P_0} + \frac{\theta}{P_1} \end{aligned}$$

(d) soit  $-\infty < s_0, s_1 < \infty, s_0 \neq s_1, 1 < p < \infty$ , et  $0 < \theta < 1$ . Alors

$$[B_{p,\infty}^{s_0}(\mathbb{R}^n), B_{p,\infty}^{s_1}(\mathbb{R}^n)]_\theta = \mathring{B}_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{où} \quad s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1.$$

# Chapitre 4

## Multiplicateurs de Fourier

Dans ce chapitre on montre que si on fixe deux espaces de Banach  $E$  et  $F$  et un symbole  $a \in S^m(\mathbb{R}^n \mathcal{L}(E, E))$ , l'opérateur  $a(D) := \mathcal{F}^{-1} a \mathcal{F}$ , vérifie

$$a(D) : B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E) \longrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, F), \quad s \in \mathbb{R} \text{ et } p, q \in [1, \infty]$$

est continu. De plus le résultat reste vrai si on remplace ces espaces par des sous espaces fermés.

### 4.1 Multiplication

Soit  $a \in \mathcal{E}(X, E_1)$ , on définit la multiplication de  $a$  par une distribution  $u$  régulière à valeurs dans  $E_0$  par

$$(4.1) \quad (a \cdot u)(x) := a(x) \cdot u(x) \quad p.p. x \in X.$$

On remarque que  $a \cdot u$  est une distribution régulière à valeurs dans  $E_0$ .

Les résultats qui vont être énoncés dans cette première partie montrent que même si  $u$  est une distribution général, alors on peut donner un sens à la multiplication définie ci-dessus, et cela par le moyen du produit tensoriel.

Pour  $u_j \in D(\mathbb{R}^n, E_j)$ ,  $j = 1, 2$ , on définit le produit de convolution induit par la multiplication 4.1 par

$$(u_1 * u_2)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x-y) \cdot u_2(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} u_1(y) \cdot u_2(x-y) dy, \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n$$

Dans cette même partie on montre que cette définition peut être étendue aux espaces de distributions à valeurs dans des espaces de Banach et en particulier pour  $u_1 \in S'(\mathbb{R}^n, E_1)$  et  $u_2 \in S'(\mathbb{R}^n, E_2)$ .

Soient  $E_1, E_2, E_0$  trois espaces de Banach munis de la norme notée par :

$$|\cdot|_{E_j}, \quad j = 0, 1, 2.$$

On définit l'application

$$\begin{aligned} (*) \quad E_1 \times E_2 &\longrightarrow E_0 \\ (e_1, e_2) &\longmapsto (e_1 \cdot e_2). \end{aligned}$$

On dit que l'application définie ci-dessus est une multiplication si cette dernière est bilinéaire, continue et de norme inférieure à un.

#### 4.1.1 Exemples de multiplications

*i.* Multiplication par un scalaire

$$\begin{aligned} IK \times E &\longrightarrow E \\ (\alpha, e) &\longmapsto \alpha e; \end{aligned}$$

*ii.* Produit de dualité

$$\begin{aligned} E' \times E &\longrightarrow Ik \\ (e', e) &\longmapsto \langle e', e \rangle_E; \end{aligned}$$

*iii.* Valeur d'une application en un point

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E_1, E_0) \times E_1 &\longrightarrow E_0 \\ (A, e) &\longmapsto Ae; \end{aligned}$$

*iv.* Composition

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E_1, E_2) \times \mathcal{L}(E_0, E_1) &\longrightarrow \mathcal{L}(E_0, E_2) \\ (S, T) &\longmapsto ST. \end{aligned}$$

Remarquons que la relation bien connue :

$$(u_1 * u_2)^\wedge = \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2,$$

établit un lien entre la convolution et la multiplication définie précédemment.

Pour  $a \in O_M(\mathbb{R}^n, E)$  on pose

$$a(D)u := \mathcal{F}^{-1}a \cdot \mathcal{F}u := \mathcal{F}^{-1}(a \cdot \hat{u}), \quad u \in S'(\mathbb{R}^n, E).$$

Alors, on a

$$a(D)u := \mathcal{F}^{-1}a \cdot \mathcal{F}u := \mathcal{F}^{-1}(a) * u$$

$$a(D)u := \mathcal{F}^{-1}a \cdot \mathcal{F}u := \mathcal{F}^{-1}(a) * u$$

Il s'agit dans la suite de trouver les conditions sur  $a$  pour que  $a(D)$  vérifie

$$a(D) \in \mathcal{H} \left( B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n, E), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E) \right)$$

Soit  $Y \in \{D, D', E, E', S, S', \mathcal{O}_M\}$ , avec :

$$Y(X, E) := Y(\mathbb{R}^n, E) \text{ si } Y \in \{S, \mathcal{O}_M\}$$

et

$$Y(X) := Y(X, Ik) \text{ si } Y \in \{D, \mathcal{E}, S, \mathcal{O}_M\} X \subset \mathbb{R}^n.$$

On pose  $\varphi \otimes e := \varphi e$  pour  $\varphi \in Y(X)$  et  $e \in E$ .

Par suite, le produit tensoriel  $Y(\mathbb{R}^n) \otimes E := \text{s.e.v}$  engendré par  $\{\varphi \otimes e ; \varphi \in Y(\mathbb{R}^n), e \in E\}$  a un sens. Ici le sous espace est pris dans  $Y(\mathbb{R}^n, E)$ . On a alors le résultat suivant

$$D(X) \otimes E \xrightarrow{d} Y(X, E)$$

car le s.e.v cité avant est dense dans  $D(\mathbb{R}^n, E)$  et de plus

$$D(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} S(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n, E)$$

Soient maintenant  $a := \varphi \otimes e_1$  et  $u := \psi \otimes e_2$  où  $\varphi, \psi \in D(X)$  et  $e_1, e_2 \in E$ .

On pose  $a \cdot u := \varphi \psi \otimes (e_1 \cdot e_2)$ .

Le but du théorème suivant est d'étendre cette définition à tout  $(a, u)$  ;  
 $(a, u) \in \mathcal{E}(X, E_1) \times D'(X, E_2)$ , par des arguments de densité et de continuité.

**Théorème 4.1** *Il existe une unique application bilinéaire hypocontinue*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X, E_1) \times D'(X, E_2) &\longrightarrow D'(X, E_0) \\ (a, u) &\longmapsto a \cdot u \end{aligned}$$

dite multiplication point par point induite par la multiplication  $(*)$ , telle que

$$(\varphi \otimes e_1) \cdot (\psi \otimes e_2) = \varphi \psi \otimes (e_1 \cdot e_2),$$

pour  $a := \varphi \otimes e_1 \in D(X) \otimes E_1$  et  $u := \psi \otimes e_2 \in D(X) \times E_2$ .

Elle est le prolongement des applications bilinéaires hypocontinues suivantes

$$\mathcal{F}_1(X_1 \times E_1) \times \mathcal{F}_2(X, E_2) \longrightarrow \mathcal{F}_0(X, E_0).$$

où  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_0)$  est l'un des triplets suivant

$(\mathcal{E}, D; D), (\mathcal{E}, \mathcal{E}; \mathcal{E}), (\mathcal{O}_M, S; S), (\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_M; \mathcal{O}_M), (\mathcal{E}, \mathcal{E}; \mathcal{E}),$  ou  $(\mathcal{O}_M, S'; S')$ .

## 4.2 Convolution

Pour  $u_j \in D(\mathbb{R}^n, E_j), j = 1, 2$ , on définit la convolution induite par la multiplication  $(*)$  par :

$$(4.2) \quad (u_1 * . u_2)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x - y) \cdot u_2(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} u_1(y) \cdot u_2(x - y) dy, x \in \mathbb{R}^n$$

De plus :

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \otimes e_1) * . (\varphi_1 \otimes e_1) &= (\varphi_1 * \varphi_2) \otimes (e_1 \cdot e_2) ; \\ \varphi_1, \varphi_2 &\in D(\mathbb{R}^n), e_j \in E_j \text{ pour } j = 1, 2 \end{aligned}$$

**Théorème 4.2** *Supposons que  $u_1 \in D'(\mathbb{R}^n, E_1)$  et  $u_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_2)$ , ou bien  $u_1 \in S(\mathbb{R}^n, E_1)$  et  $u_2 \in S'(\mathbb{R}^n, E_2)$ .*

*Alors il existe une distribution unique dans  $D'(\mathbb{R}^n, E_0)$  ou dans  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n, E_0)$  respectivement, qui est la convolution de  $u_1$  et  $u_2$  relative à la multiplication  $(*)$  et notée par  $u_1 * . u_2$ , c.à.d. l'application :*

$$(u_1, u_2) \longrightarrow (u_1 * . u_2),$$

$$\begin{aligned} D'(\mathbb{R}^n, E_1) \times \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, E_2) &\longrightarrow D'(\mathbb{R}^n, E_0), \\ S(\mathbb{R}^n, E_1) \times S'(\mathbb{R}^n, E_2) &\longrightarrow \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n, E_0) \end{aligned}$$

*qui de plus est bilinéaire et hypocontinue.*

**Théorème 4.3** *Supposons que  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$  soit l'un des triplets suivants :  $(BUC, L_1; BUC), (C_0, L_1; C_0), (L_p, L_1; L_p), (L_\infty, L_1; BUC), (L_q, L_{q'}, C_0)$ , où  $1 \leq p < \infty$  et  $1 < q < \infty$ .*

*Alors la convolution relative à la multiplication  $(*)$  se prolonge de  $\mathcal{F}_1(\mathbb{R}^n, E_1) \times D(\mathbb{R}^n, E_2)$  en une multiplication de :*

$$\mathcal{F}_1(\mathbb{R}^n, E_1) \times \mathcal{F}_2(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n, E_0),$$

*donnée par 4.2 .*

**Théorème 4.4** *On suppose que les hypothèses du théorème 4.3 sont valides . On a l'inégalité :*

$$\|u_1 * . u_2\|_{\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n, E_0)} \leq \|u_1\|_{\mathcal{F}_1(\mathbb{R}^n, E_1)} \|u_2\|_{\mathcal{F}_2(\mathbb{R}^n, E_2)} \quad , \quad u_j \in \mathcal{F}_j(\mathbb{R}^n, E_j), j = 1, 2$$

*(qui est l'inégalité de Young pour la convolution)*

**Théorème 4.5** *Si  $u_1 \in S'(\mathbb{R}^n, E_1)$  et  $u_2 \in S(\mathbb{R}^n, E_2)$  alors*

$$(u_1 * . u_2)^\wedge = u_1^\wedge \cdot u_2^\wedge$$

**Remarque 4.1** Soit  $a \in O_M(\mathbb{R}^n, E_1)$ , on pose

$$a(D) := \mathcal{F}^{-1}a \cdot \mathcal{F}u := \mathcal{F}^{-1}(a \cdot \hat{u}), \quad u \in S'(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Sachant que

$$\mathcal{F} \in \mathcal{L}aut(S(\mathbb{R}^n, E) \cap \mathcal{L}aut(S'(\mathbb{R}^n, E))),$$

le théorème 4.1 garantit alors que

$$a(D) \in \mathcal{L}(S(\mathbb{R}^n, E_2), S(\mathbb{R}^n, E_0)) \cap \mathcal{L}(S'(\mathbb{R}^n, E_2), S'(\mathbb{R}^n, E_0)).$$

De plus,

$$a(D)u = \mathcal{F}^{-1}a * u \quad \text{pour } u \in S(\mathbb{R}^n, E_2).$$

### 4.3 Multiplicateurs de Fourier

On pose

$$\mathcal{FL}_1(\mathbb{R}^n, E) := (\{u \in S'(\mathbb{R}^n, E); \mathcal{F}^{-1}u \in L_1(\mathbb{R}^n, E)\}, \|\cdot\|_{\mathcal{FL}_1}),$$

où

$$\|u\|_{\mathcal{FL}_1} = \|\mathcal{F}^{-1}u\|_1$$

Il est clair que  $\mathcal{FL}_1(\mathbb{R}^n, E)$  est un espace de Banach (puisque  $L_1$  l'est)

De plus : le lemme de Riemann Lebesgue, la densité de  $S$  dans  $L_1$  et le fait que  $\mathcal{F} \in \mathcal{L}aut(S'(\mathbb{R}^n, E) \cap \mathcal{L}aut(S(\mathbb{R}^n, E)))$  impliquent que

$$(4.3) \quad S(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} \mathcal{FL}_1(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} C_0(\mathbb{R}^n, E),$$

D'autre part si  $E$  est un espace de Hilbert et  $k \geq \frac{n}{2}$ , alors

$$(4.4) \quad W_2^k(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{d} \mathcal{FL}_1(\mathbb{R}^n, E),$$

Enfin, puisque le théorème de Planchrel est valide dans  $L_2(\mathbb{R}^n, E)$  avec  $E$  un espace de Hilbert et on a l'estimation :

$$\|u\|_{\mathcal{FL}_1} \leq \mathbf{c} \|u\|_2^{1-\theta} (\text{Max}_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha \mathbf{u}\|_2)^\theta \leq \mathbf{c} \|u\|_{2,k}, \quad \text{ou } \theta = \frac{n}{2k}.$$

L'introduction de l'espace  $\mathcal{FL}_1$  est motivée par le résultat suivant :

Supposons que  $F \in \{BUC, C_0, L_p; 1 \leq p < \infty\}$ , alors

$$[a \longmapsto a(D)] \in \mathcal{L}(\mathcal{FL}_1(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{L}(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, E_2), \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, E_0))),$$

de plus

$$[a \longmapsto a(D)] \in \mathcal{L}(\mathcal{FL}_1(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{L}(L_\infty(\mathbb{R}^n, E_2), BUC(\mathbb{R}^n, E_0))),$$

**Remarque 4.2** Les normes des applications précédentes sont bornées par un.

**Lemme 4.1** Supposons que  $a \in D'(\mathbb{R}^n, E)$  et que toutes les dérivées d'ordre  $\leq n+1$  sont régulières,

(i) pour  $j \in \mathbb{Z}$  et  $\mu_j := \max_{|\alpha| \leq n+1} \|\xi^\alpha \partial^\alpha a\|_{\infty, \Sigma_j} < \infty$ . on a

$$\eta_j a \in \mathcal{FL}_1(\mathbb{R}^n, E), \text{ et } \|\eta_j a\|_{\mathcal{FL}_1} \leq c\mu_j$$

avec  $c(n, \Psi)$  indépendante de  $a$  et  $j$

(ii) Si  $a \in W_\infty^{n+1}(\Omega_0, E)$ , alors

$$\Psi a \in \mathcal{FL}_1(\mathbb{R}^n, E), \text{ et } \|\Psi a\|_{\mathcal{FL}_1} \leq c \|a\|_{n+1, \infty, \Omega_0}$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $a$ ,  $|\xi|^\alpha u : \xi \mapsto |\xi|^\alpha u(\xi)$ .

**Proposition 4** Supposons que  $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$  avec  $\psi/IB^n = 1$  et  $\text{supp}(\psi) \subset 2IB^n$ , et soit  $(\psi_k)$  la résolution dyadique de l'identité sur  $\mathbb{R}^n$  induite par  $\psi$ . De plus supposons que

$$\mathcal{F} \in \{BUC, C_0, L_p, 1 \leq p < \infty\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} (\psi_k a)(D) &\in \mathcal{L}(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, E_2), \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, E_0)), \\ (\psi_k a)(D) &\in \mathcal{L}(L_\infty(\mathbb{R}^n, E_2), BUC(\mathbb{R}^n, E_0)) \text{ pour } a \in S^0(\mathbb{R}^n, E_1), \end{aligned}$$

et

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|(\psi_k a)(D)\| \leq C \|a\|_{S^0}, a \in S^0(\mathbb{R}^n, E_1),$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $a$ .

**Preuve.** d'après le lemme 4.1 on a

si  $a \in W_\infty^{n+1}(\Omega_0, E)$  alors  $\psi a \in \mathcal{FL}_1(\mathbb{R}^n, E) \Rightarrow \psi_k a \in \mathcal{FL}_1(\mathbb{R}^n, E)$  car

$$\psi_k := \sigma_{2^{-k}} \tilde{\psi} = \psi(2^{-k}) - \psi(2^{-k+1}),$$

de plus si  $a \in S^0(\mathbb{R}^n, E)$  alors

$$\begin{aligned} \|a\|_{n+1, \infty} &\leq \|a\|_{S^0}, \\ \mu_j &\leq \|a\|_{S^0}, \text{ pour } j \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

donc  $\psi_k a \in \mathcal{FL}_1(\mathbb{R}^n, E)$  et d'après le théorème 4.3 on a

$$(\psi_k a)(D) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, E_2), \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, E_0)).$$

de plus

$$(\psi_k a)(D) \in \mathcal{L}(L_\infty(\mathbb{R}^n, E_2), BUC(\mathbb{R}^n, E_0)),$$

et d'après le lemme 4.1 on a

$$\begin{aligned} \|\psi a\|_{\mathcal{FL}_1} &\leq C \|a\|_{n+1,\infty,\Omega_0}, \\ \psi_k &:= \sigma_{2^{-k}} \tilde{\psi} = \psi(2^{-k}\cdot) - \psi(2^{-k+1}\cdot), \\ \Rightarrow \|\psi_k a\|_{\mathcal{FL}_1} &\leq C \|a\|_{n+1,\infty,\Omega_0} \leq C \|a\|_{S^0}, \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

or :

$$\psi_k a \longmapsto (\psi_k a)(D) \in \mathcal{L}(\mathcal{FL}_1, \mathcal{L}(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, E_2), \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, E_0))),$$

donc  $\exists M > 0$  tel que

$$\|(\psi_k a)(D)\| \leq M \|\psi_k a\|_{\mathcal{FL}_1} \leq C \|a\|_{S^0},$$

d'où le résultat.  $\square$

## 4.4 Espaces de Besov

Supposons que  $F \in \{BUC, C_0, L_p, 1 \leq p < \infty\}$  et posons :

$$l_q^s \mathcal{F} := l_q^s \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, E) := \{u \in S'(\mathbb{R}^n, E); (\psi_k(D)u) \in l_q^s(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, E))\},$$

$$\|u\|_{l_q^s \mathcal{F}} := \|(\psi_k(D)u)\|_{l_q^s(\mathcal{F})} \text{ pour } s \in \mathbb{R} \text{ et } q \in [1, \infty].$$

On définit  $C_0^s \mathcal{F}$  de la même façon, notons que  $B_{p,q}^s = l_q^s L_p$ .

On munit l'espace  $(S')^{\mathbb{N}}$  avec la topologie de la convergence simple.

Alors du fait que pour  $a \in O_M(\mathbb{R}^n, E_1)$

$$a(D) \in \mathcal{L}(S(\mathbb{R}^n, E_2), S(\mathbb{R}^n, E_0)) \cap \mathcal{L}(S'(\mathbb{R}^n, E_2), S'(\mathbb{R}^n, E_0))$$

on peut dire que l'application

$$\begin{aligned} R^c &: S' \longrightarrow (S')^{\mathbb{N}} \\ u &\longmapsto (\psi_k(D)u)_k \end{aligned}$$

est bien définie, linéaire et continue. Notons que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{R^c} & (S')^{\mathbb{N}} \\ \cup & & \uparrow \\ l_q^s \mathcal{F} & \xrightarrow{R^c} & l_q^s(\mathcal{F}) \end{array}$$

est commutatif. On considère de plus l'application

$$\begin{aligned} R &: \bigcup_{s,q} l_q^s(\mathcal{F}) \longrightarrow S' \\ (v_k) &\longmapsto \sum_k \chi_k(D) v_k \end{aligned}$$

Le lemme suivant montre que  $R$  est une rétraction bien définie, continue c.à.d qu'elle possède un inverse à droite continu noté  $R^c$ .

**Lemme 4.2** *L'application  $R$  est une rétraction continue de  $l_q^s(F)$  dans  $l_q^s\mathcal{F}$  et de  $C_0^s(F)$  dans  $C_0^s\mathcal{F}$  respectivement.*

*Preuve.*  $R$  est évidemment linéaire, posons  $\psi_k = 0$  pour  $k \leq 0$ .

Puisque on a

$$\psi_k \chi_l = 0 \text{ pour } |k - l| \geq 3,$$

on trouve

$$\psi_k(D)Rv = \sum_l \psi_k(D)\chi_l(D)v_l = \sum_{j=-2}^2 \psi_k(D)\chi_{j+k}(D)v_{j+k} \text{ pour } v = (v_k) \in l_q^s(\mathcal{F}).$$

Dans la proposition 4 on pose  $a := 1_E$

$$\begin{aligned} \|\psi_k(D)Rv\|_{\mathcal{F}} &= \left\| \sum_{j=-2}^2 \psi_k(D)(\chi_{k+j}a)(D)v_{k+j} \right\|_{\mathcal{F}} \\ &\leq \sum_{j=-2}^2 \|\psi_k(D)(\chi_{k+j}a)(D)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})} \|v_{k+j}\|_{\mathcal{F}} \\ &\leq C \sum_{j=-2}^2 \|a\|_0 \|v_{k+j}\|_{\mathcal{F}} = C \sum_{j=-2}^2 \|v_{k+j}\|_{\mathcal{F}}, k \in \mathbb{N}, v \in l_q^s(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Ca implique que  $R \in L(l_q^s(\mathcal{F}), l_q^s\mathcal{F}) \cap L(C_0^s(\mathcal{F}), C_0^s\mathcal{F})$ . De plus, sachant que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(D)u = u$$

dans  $S'(\mathbb{R}^n, E)$  pour  $u \in S'(\mathbb{R}^n, E)$ , on trouve

$$RR^c u = \sum_k \chi_k(D)\chi_k(D)u = \sum_k (\psi_k \chi_k)(D)u = \sum_k \psi_k(D)u = u$$

Pour  $u \in l_q^s\mathcal{F} \subset S'$ . Par conséquent  $R$  est une rétraction et  $R^c$  est la corétraction associée à  $R$ .  $\square$

**Lemme 4.3** *On a les deux identités suivantes*

$$\begin{aligned} l_q^s L_{\infty} &= l_q^s BUC, \\ C_0^s L_{\infty} &= C_0^s BUC. \end{aligned}$$

*Preuve.* D'une part on a  $l_q^s BUC \subset l_q^s L_{\infty} (\subset i.e.s, e, v)$ , et d'autre part on montre que  $l_q^s L_{\infty} \subset l_q^s BUC$  Soit  $u \in l_q^s L_{\infty} \implies \psi_k(D)u \in L_{\infty} \implies \chi_k(D)u \in L_{\infty}$ , et puisque  $\psi_k \chi_k = \psi_k$ , on a  $\psi_k(D)u = (\psi_k \chi_k)(D)u = \psi_k(D)(\chi_k(D)u) \in BUC$ , ainsi  $l_q^s L_{\infty} = l_q^s BUC$ . Maintenant et puisque  $C_0^s\mathcal{F}$  est un s,e,v fermé de  $l_q^s\mathcal{F}$  le résultat obtenu pour  $l_q^s\mathcal{F}$  est valide pour  $C_0^s\mathcal{F}$  c,a,d  $C_0^s L_{\infty} = C_0^s BUC$ .  $\square$

**Proposition 5** *Les identités suivantes sont valides*

$$B_{p,q}^s = \left\{ \begin{array}{ll} B_{p,q}^s, & 1 \leq p, q < \infty \\ C_0^s L_p, & 1 \leq p < \infty, q = \infty \\ l_q^s C_0, & p = \infty, 1 \leq q < \infty, \\ C_0^s C_0, & p = q = \infty. \end{array} \right\}.$$

**Preuve.** Puisqu'on sait  $B_{p,q}^s$  est la fermeture de  $S$  dans  $B_{p,q}^s$ , en outre on a  $C_0^s L_p, l_q^s C_0$  et  $C_0^s C_0$  sont des sous espaces linéaires de  $l_q^s L_p = B_{p,q}^s$ , ainsi pour démontrer cette proposition il suffit de montrer que  $S$  est dense dans ces espaces. Notons que le Lemme 4.2 nous donne la possibilité de travailler sur l'espace  $l_q^s(\mathcal{F})$ , puisque  $R$  est une rétraction de  $l_q^s(\mathcal{F})$  dans  $l_q^s \mathcal{F}$ . Soit  $u \in \left\{ \begin{array}{ll} l_q^s \mathcal{F} & 1 \leq q < \infty \\ C_0^s \mathcal{F} & q = \infty \end{array} \right\}$  ou  $\mathcal{F} := \left\{ \begin{array}{ll} L_p, & 1 \leq p < \infty \\ C_0, & p = \infty \end{array} \right\}$ , d'une part on saisque l'ensemble des suites à support compact noté  $S_c$  est dense dans  $l_q^s(\mathcal{F})$  si  $1 \leq q < \infty$  et dans  $C_0^s(\mathcal{F})$  si  $q = \infty$ , ainsi  $\exists (v) \in S_c$  tel que  $(v)$  converge vers  $R^c u$  dans  $\left\{ \begin{array}{ll} l_q^s(\mathcal{F}) & 1 \leq q < \infty \\ C_0^s(\mathcal{F}) & q = \infty \end{array} \right\}$ , sachant que  $S$  est dense dans  $\mathcal{F}$  et  $(v) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$  alors on peut prendre  $(v) \in S^{\mathbb{N}}$ , et d'après ce qui précède on peut dire que  $\psi_k(D) \in \mathcal{L}(S, S)$ , ainsi  $Rv \in S$ . Montrons maintenant que  $Rv$  converge vers  $u$  dans  $\left\{ \begin{array}{ll} l_q^s \mathcal{F} & 1 \leq q < \infty \\ C_0^s \mathcal{F} & q = \infty \end{array} \right\}$ , on a  $u - Rv = R(R^c u - v)$ , puisque  $v$  converge vers  $R^c u$  dans  $\left\{ \begin{array}{ll} l_q^s(\mathcal{F}) & 1 \leq q < \infty \\ C_0^s(\mathcal{F}) & q = \infty \end{array} \right\}$  et d'après le Lemme 4.2 on peut dire que  $R(R^c u - v)$  converge vers zero dans  $\left\{ \begin{array}{ll} l_q^s \mathcal{F} & 1 \leq q < \infty \\ C_0^s \mathcal{F} & q = \infty \end{array} \right\}$ , c.à.d  $Rv$  converge vers  $u$  dans  $\left\{ \begin{array}{ll} l_q^s \mathcal{F} & 1 \leq q < \infty \\ C_0^s \mathcal{F} & q = \infty \end{array} \right\}$ .  
□

**Proposition 6** *les identités suivantes sont valides :*

$$b_{p,q}^s = \left\{ \begin{array}{ll} B_{p,q}^s, & 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty, \\ B_{p,\infty}^s, & 1 \leq p < \infty, q = \infty, \\ C_0^s BUC, & p = q = \infty. \end{array} \right.$$

*De plus*

$$(4.5) \quad b_{p,q}^s \text{ est la fermeture de } B_{p,q}^t \text{ dans } B_{p,q}^s, -\infty < s < t < \infty, \text{ et } p, q \in [1, \infty]$$

**Preuve.** Si  $p \vee q < \infty, -\infty < s_0 < s_1 < \infty, p_0, p_1, q \in [1, \infty]$  :

$$B_{p_1,q}^{s_1} \hookrightarrow B_{p_0,q}^{s_0}$$

on en déduit

$$B_{p,q}^t \xrightarrow{d} B_{p,q}^s, t \geq s$$

ce qui implique

$$b_{p,q}^s = B_{p,q}^s = \overset{\circ}{B}_{p,q}^s,$$

et  $b_{p,q}^s$  est la fermeture de  $B_{p,q}^t$  dans  $B_{p,q}^s$ , pour  $p \vee q < \infty$ ,  $t \not\geq s$ . D'autre part, compte tenu de

$$(**) l_p^s(E) \xrightarrow{d} l_q^t(E) \xrightarrow{d} l_r^t(E) \xrightarrow{d} C_0^t(E) \hookrightarrow l_\infty^t(E),$$

pour  $-\infty < t < s < \infty$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , et  $1 \leq q \leq r < \infty$ , on a

$$B_{\infty,q}^t = l_q^t L_\infty \xrightarrow{d} B_{\infty,q}^s$$

pour  $s < t$ ,  $1 \leq q < \infty$ . Ca prouve que  $b_{\infty,q}^s = B_{\infty,q}^s$ , également 4.5 est vérifié si  $1 \leq q < \infty$ .

De (\*\*\*) on déduit que

$$l_\infty^t(L_p) \xrightarrow{d} C_0^s(L_p), t > s.$$

Par conséquent on obtient  $b_{p,\infty}^s = C_0^s L_p$  et 4.5 est vérifié si  $1 \leq p \leq \infty$  et  $q = \infty$  par le fait que  $C_0^s L_p$  est un sous espace linéaire fermé de  $l_\infty^s L_p = B_{p,\infty}^s$ .

On conclut grâce au lemme 4.3 et la proposition 5.  $\square$

## 4.5 Multiplication dans les espaces de Besov

Dans cette partie on fixe  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E$  est un espace de Banachet et on omettera  $(\mathbb{R}^n, E)$  dans la notation des espaces. On pose

$$J^s = A^s(D) = (1 - \Delta)^{s/2}, s \in \mathbb{R}^n.$$

**Théorème 4.6** On a

$$J^s \in \begin{cases} \mathcal{L}is(B_{p,q}^{s+t}, B_{p,q}^t) \\ \mathcal{L}is(\overset{\circ}{B}_{p,q}^{s+t}, \overset{\circ}{B}_{p,q}^t) \\ \mathcal{L}is(b_{p,q}^{s+t}, b_{p,q}^t) \end{cases},$$

et  $(J^s)^{-1} = J^{-s}$  pour  $s, t \in \mathbb{R}$  et  $p, q \in [1, \infty]$ .

**Preuve.** On montre d'abord que :

$$J^s \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+t}, B_{p,q}^t).$$

et idem pour les espaces  $\overset{\circ}{B}$  et  $b$ .

Grâce à la formule de leibnitz on a :

$$|\partial^\alpha (\Lambda^s \psi_k)| \leq c(\alpha, s) \max_{\beta \leq \alpha} (\Lambda^{s-|\beta|} |\partial^{\alpha-\beta} \psi_k|), \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

Sachant que

$$\Lambda^s(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2},$$

et du résultat donné précédemment

$$2^{k|\alpha|} |\partial^\alpha \psi_k| \leq C(\alpha, \psi) \chi_{\Omega_k}, k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^n$$

on déduit que

$$C(\alpha, s) \max_{\beta \leq \alpha} \Lambda^{|\alpha|} \Lambda^{s-|\beta|} 2^{-k|\alpha-\beta|} \chi_{\Omega_k} \leq C(\alpha, s) \max_{|\beta| \leq \alpha} \Lambda^{s+|\alpha-|\beta||} 2^{-k|\alpha-\beta|} \chi_{\Omega_k}$$

où

$$\Omega_k = [2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}], k \in \mathbb{N}$$

de plus

$$\begin{aligned} 2^{k-1} &\leq |\xi| \leq 2^{k+1}, k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow 1 + 2^{2k-2} &\leq 1 + |\xi|^2 \leq 1 + 2^{2k+2} \\ \Rightarrow (1 + 2^{2k-2})^{1/2} &\leq (1 + |\xi|^2)^{1/2} \leq (1 + 2^{2k+2})^{1/2} \\ \Rightarrow (1 + 2^{2k-2})^{1/2} &\leq \Lambda(\xi) \leq (1 + 2^{2k+2})^{1/2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Lambda^{s+|\alpha-|\beta||}(\xi) &\leq (1 + 2^{2k+2})^{1/2(s+|\alpha-|\beta||)} \\ &\leq (2 + 2^{2k+2})^{1/2(s+|\alpha-|\beta||)} \\ &\leq 2^{(k+\frac{3}{2})(s+|\alpha-|\beta||)}, s + |\alpha| - |\beta| \geq 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Lambda^{s+|\alpha-|\beta||}(\xi) &\leq (1 + 2^{2k-2})^{\frac{1}{2}(s+|\alpha-|\beta||)} \\ &\leq 2^{(k-1)(s+|\alpha-|\beta||)}, s + |\alpha| - |\beta| \leq 0 \end{aligned}$$

(car  $1 + 2^{2k-2} \geq 2^{2k-2}$ ), et puisque

$$\begin{aligned} s + |\alpha| - |\beta| &\leq 0, \text{ alors :} \\ (1 + 2^{2k-2})^{\frac{1}{2}(s+|\alpha-|\beta||)} &\leq 2^{(k-1)(s+|\alpha-|\beta||)}, \end{aligned}$$

donc si

$$s + |\alpha| - |\beta| \geq 0,$$

on a

$$\Lambda^{s+|\alpha-|\beta||} 2^{-k|\alpha-\beta|} \leq 2^{(k+\frac{3}{2})(s+|\alpha-|\beta||)} 2^{-K|\alpha-\beta|},$$

et puisque on a

$$|\alpha - \beta| \geq ||\alpha| - |\beta|| \geq |\alpha| - |\beta|,$$

alors on obtient

$$\begin{aligned}\Lambda^{s+|\alpha|-|\beta|}2^{-k|\alpha-\beta|} &\leq 2^{\left(k+\frac{3}{2}\right)(s+|\alpha|-|\beta|)}2^{-k(|\alpha|-|\beta|)} \\ &= 2^{ks}2^{\frac{3}{2}(s+|\alpha|-|\beta|)},\end{aligned}$$

et si

$$s + |\alpha| - |\beta| \leq 0$$

alors on a

$$\begin{aligned}\Lambda^{s+|\alpha|-|\beta|}2^{-k|\alpha-\beta|} &\leq 2^{(k-1)(s+|\alpha|-|\beta|)}2^{-k|\alpha-\beta|} \\ &\leq 2^{(k-1)(s+|\alpha|-|\beta|)}2^{-k}(|\alpha|-|\beta|) \\ &= 2^{ks}2^{-(s+|\alpha|-|\beta|)},\end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\Lambda^{|\alpha|}|\partial^\alpha(\Lambda^s\psi_k)| \leq C(\alpha, s)2^{ks}, \alpha \in \mathbb{N}^n, k \in \mathbb{N},$$

ainsi

$$\begin{aligned}|\partial^\alpha(\Lambda^s\psi_k)(\xi)| &\leq C(\alpha, s)2^{ks}(1+|\xi|^2)^{\frac{-|\alpha|}{2}}, \alpha \in \mathbb{N}^n, k \in \mathbb{N} \\ &\leq C(\alpha, s)2^{ks}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}, \alpha \in \mathbb{N}^n, k \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\Lambda^s\psi_k \in S^0,$$

et pour  $\alpha = 0$  l'inégalité précédente donne

$$\|2^{-Ks}\Lambda^s\psi_k\|_{S^0} := \max_{|\alpha| \leq n+1} \|\Lambda^{|\alpha|}\partial^\alpha(\Lambda^s\psi_k)\|_\infty \leq C(s), \text{ pour } k \in \mathbb{N},$$

Supposons que pour

$$Y \in \{BUC, C_0, L_p; 1 \leq p \leq \infty\}.$$

Alors la proposition 4 implique

$$\sup_{K \in \mathbb{N}} \|(\psi_k \Lambda^s \psi_k)(D)\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq C \|\Lambda^s \psi_k\|_{S^0},$$

donc

$$\|(\Lambda^s \psi_k \psi_k)(D)\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq C \|\Lambda^s \psi_k\|_{S^0}, \forall k \in \mathbb{N},$$

alors

$$\begin{aligned}\|2^{-ks}(\Lambda^s \psi_k \chi_k)(D)\|_{\mathcal{L}(Y)} &\leq \sum_{j=-1}^1 \|2^{-ks}(\Lambda^s \psi_k \psi_{k+j})(D)\|_{\mathcal{L}(Y)} \\ &\leq \sum_{J=-1}^1 \|2^{-Ks}\Lambda^s\psi_k\|_{S^0} \leq C(s),\end{aligned}$$

d'où alors  $\|2^{-Ks} (\Lambda^s \psi_k \chi_k) (D)\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq C(s); k \in \mathbb{N}$ . Sachant que

$$\begin{aligned} \psi_k &:= \psi_k \chi_k, \text{ alors :} \\ \psi_k &:= (\psi_k \chi_k) \chi_k = \psi_k \chi_k^2, \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \|\psi_k (D) J^s u\|_Y &= 2^{ks} \|2^{-ks} (\Lambda^s \psi_k \chi_k) (D) \chi_k (D) u\|_Y \\ &\leq 2^{ks} \|2^{-ks} (\Lambda^s \psi_k \chi_k) (D)\|_{\mathcal{L}(Y)} \|\chi_k (D) u\|_Y \\ &\leq C(s) 2^{ks} \|\chi_k (D) u\|_Y \\ &= C(s) 2^{ks} \left\| \sum_{j=-1}^1 \psi_{k+j} (D) u \right\|_Y \\ &\leq C(s) \sum_{j=-1}^1 2^{(k+j)s} \|\psi_{k+j} (D) u\|_Y, \end{aligned}$$

pour  $k \in \mathbb{N}$ , pourvu que

$$\psi_k (D) u \in Y; (c.a.d. : \chi_k (D) u \in Y) \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

Alors de

$$\|\psi_k (D) J^s u\|_Y \leq C(s) \sum_{j=-1}^1 2^{(k+j)s} \|\psi_{k+j} (D) u\|_Y$$

on obtient si  $q \leq \infty$

$$\begin{aligned} \|J^s u\|_{\ell_q^t Y}^q &:= \|(\psi_k (D) J^s u)\|_{\ell_q^t(Y)}^q = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{Ktq} \|\psi_k (D) J^s u\|_Y^q \\ &\leq C(s) \sum_{j=-1}^1 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{ktq} 2^{(k+j)sq} \|\psi_{k+j} (D) u\|_Y^q \\ &\leq C(s) \sum_{j=-1}^1 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(k+j)(s+t)q} \|\psi_{k+j} (D) u\|_Y^q. \end{aligned}$$

en posant  $k + j = \ell$ , on obtient

$$\|J^s u\|_{\ell_q^t Y}^q \leq C(s) \sum_{j=-1}^1 \sum_{\ell=j}^{\infty} 2^{\ell(s+t)q} \|\psi_{\ell} (D) u\|_Y^q,$$

et on a

$$\sum_{\ell=j}^{\infty} 2^{\ell(s+t)q} \|\psi_{\ell} (D) u\|_Y = \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell(s+t)q} \|\psi_{\ell} (D) u\|_Y, j = -1.0; \text{ car } : \psi_{-1} = 0 \\ \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{\ell(s+t)q} \|\psi_{\ell} (D) u\|_Y \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell(s+t)q} \|\psi_{\ell} (D) u\|_Y; \text{ si } ; j = 1, \end{cases}$$

d'où on a

$$\|J^s u\|_{\ell_q^t Y} \leq C(s) \|u\|_{\ell_q^{s+t} Y}, u \in \ell_q^{s+t} Y,$$

et pour  $q = \infty$ ; on a

$$\|J^s u\|_{\ell^\infty Y} := \|\psi_k(D) J^s u\|_{\ell^\infty(Y)} = \sup_k 2^{tk} \|\psi_k(D) J^s u\|_Y,$$

et puisqu'on a

$$2^{tk} \|\psi_k(D) J^s u\|_Y \leq C(s) \sum_{j=-1}^1 2^{(k+j)(t+s)} \|\psi_{k+j}(D) u\|_Y,$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} \sup_k 2^{tk} \|\psi_k(D) J^s u\|_Y &\leq C(s) \sup_k \sum_{j=-1}^1 2^{(k+j)(t+s)} \|\psi_{k+j}(D) u\|_Y \\ &\leq C(s) \sup_\ell 2^{\ell(s+t)} \|\psi_\ell(D) u\|_Y, \end{aligned}$$

d'où

$$\|J^s u\|_{\ell^\infty Y} \leq C(s) \|u\|_{\ell^\infty^{s+t} Y}, u \in \ell^\infty^{s+t} Y.$$

Finalement on a

$$\|J^s u\|_{\ell_q^t Y} \leq C(s) \|u\|_{\ell_q^{s+t} Y}, u \in \ell_q^{s+t} Y, 1 \leq q \leq \infty$$

et de même pour l'espace  $C_0^t Y$  on obtient,

$$\|J^s u\|_{C_0^t Y} \leq C(s) \|u\|_{C_0^{s+t} Y}, u \in C_0^{s+t} Y.$$

Du Lemme 4.3, les propositions 5 et 6, on déduit que

$$\begin{aligned} J^s &\in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+t}, B_{p,q}^t), \\ J^s &\in \mathcal{L}(B_{p,q}^{\circ s+t}, B_{p,q}^{\circ t}), \\ J^s &\in \mathcal{L}(b_{p,q}^{s+t}, b_{p,q}^t), \end{aligned}$$

et cela pour

$$s, t \in \mathbb{R}, \text{ et } p, q \in [1, \infty].$$

□

**Théorème 4.7** Soit  $m \in \mathbb{R}$ , On a :

$$\begin{aligned} (a \longmapsto a(D)) &\in \mathcal{L}(S^m(R^n, E_1), \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m}(R^n, E_2), B_{p,q}^s(R^n, E_0))) \\ &\text{pour } s \in \mathbb{R}; \text{ et } p, q \in [1, \infty], \end{aligned}$$

la même propriété est vérifiée si on remplace l'espace  $B_{p,q}^t$  par l'espace  $B_{p,q}^{\circ t}$  ou encore par l'espace  $b_{p,q}^t$ .

*Preuve.* Puisqu'on a

$$a \in S^m(\mathbb{R}^n, E_1).$$

il vient que

$$|\partial^\alpha a(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}, \xi \in (\mathbb{R}^n)^\bullet, |\alpha| \leq n+1$$

en calculons  $|\partial^\alpha \Lambda^{-m} a(\xi)|$ , on trouve :

$$|\partial^\alpha \Lambda^{-m} a(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-|\alpha|}, \xi \in (\mathbb{R}^n), \alpha \leq n+1$$

d'où

$$\Lambda^{-m} a \in S^0(\mathbb{R}^n, E_1),$$

on remarque que

$$a(D) = J^m(\Lambda^{-m} a)(D).$$

Si on considère  $S^0(\mathbb{R}^n, E_1)$ , on obtient

$$a \longmapsto a(D) \in \mathcal{L}(S^0(\mathbb{R}^n, E_1), \mathcal{L}(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0))),$$

d'après le Lemme précédent on a

$$J^m \in \mathcal{L}is(B_{p,q}^{m+t}, B_{p,q}^t),$$

sachant que

$$a \in S^m(\mathbb{R}^n, E_1),$$

et de

$$a(D) = J^m(\Lambda^{-m} a)(D)$$

on obtient

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_2) \xrightarrow{(\Lambda^{-m} a)(D)} B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0) \xrightarrow{J^m} B_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R}^n, E_0),$$

posons

$$s' = s - m; \text{ c.à.d. } s = s' + m$$

puisque

$$(\Lambda^{-m} a)(D) \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s'+m}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^{s'+m}(\mathbb{R}^n, E_0)),$$

et

$$J^m \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s'+m}(\mathbb{R}^n, E_0), B_{p,q}^{s'}(\mathbb{R}^n, E_0)),$$

alors on obtient

$$J^m(\Lambda^{-m} a)(D) = a(D) \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s'+m}(\mathbb{R}^n, E_2), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)),$$

d'où, il suffit de prendre dans le théorème  $m = 0$ .

Supposons que  $Y \in \{BUC, C_0, L_p, 1 \leq p \leq \infty\}$ , alors, en prenant  $a \in S^0(\mathbb{R}^n, E_1)$ , la proposition 4 et le fait que

$$\psi_k a = \psi_k a \chi_k$$

donnent :

$$\|\psi_k(D) a(D) u\|_Y \leq C \|a\|_{s^0} \|\chi_k(D) u\|_Y, K \in \mathbb{N}$$

pourvu que

$$\chi_k(D) u \in Y(\mathbb{R}^n, E_2), K \in \mathbb{N},$$

alors on obtient

$$\|a(D) u\|_{\ell_q^0 Y} \leq C \|a\|_{s^0} \|u\|_{\ell_q^0 Y}, u \in \ell_q^0 Y(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Par ailleurs

$$\|a(D) u\|_{C_0^0 Y} \leq C \|a\|_{s^0} \|u\|_{C_0^0 Y}, u \in C_0^0 Y(\mathbb{R}^n, E_2).$$

le Lemme 4.3 et l'inégalité

$$\|a(D) u\|_{\ell_q^0 Y} \leq C \|a\|_{s^0} \|u\|_{\ell_q^0 Y}, u \in \ell_q^0 Y(\mathbb{R}^n, E_2)$$

impliquent

$$\|a(D) u\|_{B_{p,q}^0} \leq C \|a\|_{s^0} \|u\|_{B_{p,q}^0}, u \in B_{p,q}^0(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Puisque  $a(D)$  et  $J^s$  commutent, alors on a pour

$$u \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_2), J^s u \in B_{p,q}^0(\mathbb{R}^n, E_2)$$

$$\|a(D) J^s u\|_{B_{p,q}^0} \leq C \|a\|_{s^0} \|J^s u\|_{B_{p,q}^0},$$

et puisque le théorème précédant donne ;

$$J^s \in \mathcal{L}(B_{p,q}^s, B_{p,q}^0),$$

$$J^{-s} \in \mathcal{L}(B_{p,q}^0, B_{p,q}^s),$$

alors, on obtient

$$\|a(D) J^s u\|_{B_{p,q}^0} \leq C \|a\|_{s^0} \|J^s u\|_{B_{p,q}^0}$$

$$\|J^s a(D) u\|_{B_{p,q}^0} \leq C \|a\|_{s^0} \|J^s\|_{\mathcal{L}(B_{p,q}^s, B_{p,q}^0)} \|u\|_{B_{p,q}^s},$$

d'un autre côté on a

$$\|a(D) u\|_{B_{p,q}^s} = \|J^{-s}(J^s a(D) u)\|_{B_{p,q}^s} \leq \|J^{-s}\|_{\mathcal{L}(B_{p,q}^0, B_{p,q}^s)} \cdot \|J^s a(D) u\|_{B_{p,q}^0},$$

d'où

$$\|a(D) u\|_{B_{p,q}^s} \leq C \|a\|_{s^0} \|u\|_{B_{p,q}^s}, u \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_2).$$

Et pour les espaces  $\mathring{B}_{p,q}^s$  et  $b_{p,q}^s$ , des propositions 5 et 6 et de

$$\|a(D) u\|_{\ell_q^0 Y} \leq C \|a\|_{s^0} \|u\|_{\ell_q^0 Y}, u \in \ell_q^0 Y(\mathbb{R}^n, E_2)$$

ainsi que

$$\|a(D) u\|_{C_0^0 Y} \leq C \|a\|_{s^0} \|u\|_{C_0^0 Y}, u \in C_0^0 Y(\mathbb{R}^n, E_2)$$

on obtient

$$\|a(D) u\|_{\mathring{B}_{p,q}^0} \leq C \|a\|_{s^0} \|u\|_{\mathring{B}_{p,q}^0}, u \in \mathring{B}_{p,q}^0(\mathbb{R}^n, E_2),$$

$$\|a(D) u\|_{b_{p,q}^0} \leq C \|a\|_{s^0} \|u\|_{b_{p,q}^0}, u \in b_{p,q}^0(\mathbb{R}^n, E_2).$$

□

## 4.6 Théorèmes fondamentaux

Avant d'énoncer le théorème principal de ce chapitre on commence par donner la définition suivante

**Définition 4.1** Soient  $E_0, E_1$  deux espaces de Banach, pour  $\vartheta \in [0, \pi]$ , on note par  $S_\vartheta$  la fermeture dans  $\mathbb{C}$  du secteur

$$\{z \in \mathbb{C}; |\arg z| < \vartheta\}, \text{ notons que } S_0 := \{0\}.$$

1) On dit que l'opérateur  $A \in L(E_1, E_0)$  appartient à  $P(E_1, E_0; k, \vartheta)$  si  $S_\vartheta \subset \rho(-A)$  et

$$(1 + |\lambda|)^{1-j} \|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0, E_j)} \leq k, \lambda \in S_\vartheta \text{ et } j = 0, 1.$$

On pose

$$P(E_1, E_0; \vartheta) := \bigcup_{k \geq 1} P(E_1, E_0; k, \vartheta) \text{ et } P(E_1, E_0) := \bigcup_{0 < \vartheta \leq \pi} P(E_1, E_0; \vartheta).$$

2) Si  $\omega + A \in P(E_1, E_0; k, \frac{\pi}{2})$  avec  $E_1 \xrightarrow{d} E_0$ , on dit que  $A \in H(E_1, E_0)$ .

Notons que  $H(E_1, E_0)$  est un sous espace vectoriel ouvert de  $L(E_1, E_0)$  qui contient les générateurs infinitésimaux des semi groupes analytiques fortement continu sur  $E_0$ .

**Remarque 4.3** Supposons qu'il existe deux constantes :  $k \geq 1$  et  $\omega > 0$ , tel que  $A \in L(E_1, E_0)$ , vérifie

$$\begin{aligned} \omega + A &\in \mathcal{L}is(E_1, E_0) \text{ et } |\lambda| \|u\|_{E_0} \leq k \|(\lambda + A)u\|_{E_0}, \operatorname{Re} \lambda \geq \omega \text{ ou} \\ \omega + A &\in \mathcal{L}is(E_1, E_0) \text{ et } \|u\|_{E_1} \leq k \|(\lambda + A)u\|_{E_0}, \operatorname{Re} \lambda \geq \omega, u \in E_1 \end{aligned}$$

Alors  $A \in \mathcal{H}(E_1, E_0)$ .

**Théorème 4.8** Soient  $s \in \mathbb{R}^n$ ,  $p, q \in [1, \infty]$ ,  $m_i \in \mathbb{R}^+, E_i \hookrightarrow E_0, 1 \leq i \leq \ell$  Supposons que

$$b_i \in S^{m_i}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_i, E_0)), 1 \leq i \leq \ell$$

et posons

$$b := b_1 + \dots + b_\ell.$$

Supposons encore qu'il existe  $k \geq 1, \omega \in \mathbb{R}$ , et;  $\vartheta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , tel que

$$\begin{aligned} (i) \quad &\omega + S_\vartheta \subset \rho(-b(\xi)) \\ (ii) \quad &(1 + |\xi|)^{m_i} |(\lambda + b(\xi))^{-1}|_{\mathcal{L}(E_0, E_i)} + (1 + |\lambda|) |(\lambda + b(\xi))^{-1}|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq k, \\ &\xi \in (\mathbb{R}^n)^\bullet, 1 \leq i \leq \ell \text{ et } \lambda \in \omega + S_\vartheta. \end{aligned}$$

Alors

$$\omega + b(D) \in P\left(\bigcap_{i=1}^{\ell} B_{p,q}^{s+m_i}(\mathbb{R}^n, E_i), B_{p,q}^s; c, \vartheta\right),$$

où  $C := C(k)$  est indépendant de  $b$ .

De plus on a

$$(\lambda + b(D))^{-1} = (\lambda + b)^{-1}(D), \lambda \in \omega + S_\vartheta$$

*Preuve.* On a

$$b := b_1 + \dots + b_\ell; \text{ avec } : b_i \in S^{m_i}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_i, E_0)), 1 \leq i \leq \ell,$$

alors d'après le théorème précédent

$$b_i(D) \in \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+m_i}(\mathbb{R}^n, E_i), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)), 1 \leq i \leq \ell,$$

d'où alors

$$b(D) \in \mathcal{L}\left(\bigcap_{i=1}^{\ell} B_{p,q}^{s+m_i}(\mathbb{R}^n, E_i), B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E_0)\right).$$

Puisque l'application inverse  $B \mapsto B^{-1}$  est analytique, on a

$$(\lambda + b)^{-1} \in C^{n+1}((\mathbb{R}^n)^\bullet, \mathcal{L}(E_0, E_i)), 1 \leq i \leq \ell, \lambda \in \omega + S_\vartheta.$$

Sachant que

$$\partial_j (\lambda + b)^{-1} = -(\lambda + b)^{-1} (\partial_j b) (\lambda + b)^{-1},$$

on en déduit que  $\partial^\alpha (\lambda + b)^{-1}$  est pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  avec,  $|\alpha| \leq n + 1$  une somme finie de termes de la forme :

$$\pm (\lambda + b)^{-1} (\partial^{\alpha_1} b) (\lambda + b)^{-1} \dots (\partial^{\alpha_k} b) (\lambda + b)^{-1},$$

où les  $\alpha_j \in \mathbb{N}^n$  vérifient  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = \alpha$ .

On a

$$\begin{aligned} \Lambda^{|\alpha|}(\xi) \left| \partial^\alpha b_i(\xi) (\lambda + b(\xi))^{-1} \right|_{\mathcal{L}(E_0)} &\leq \Lambda^{|\alpha|}(\xi) \left| \partial^\alpha b_i(\xi) \right|_{\mathcal{L}(E_i, E_0)} \left| (\lambda + b)^{-1} \right|_{\mathcal{L}(E_0, E_i)} \\ &= \Lambda^{|\alpha|-m_i}(\xi) \left| \partial^\alpha b_i(\xi) \right|_{\mathcal{L}(E_i, E_0)} \Lambda^{m_i} \left| (\lambda + b)^{-1} \right|_{\mathcal{L}(E_0, E_i)}, \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse (ii), et en utilisant la propriété

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{m_i}{2}} \leq (1 + |\xi|)^{m_i},$$

on obtient :

$$\Lambda^{m_i}(\xi) \left| (\lambda + b)^{-1} \right|_{\mathcal{L}(E_0, E_i)} \leq k. \text{ pour } ; \xi \in (\mathbb{R}^n)^\bullet \text{ et } ; 1 \leq i \leq \ell$$

en plus on remarque que

$$\Lambda^{|\alpha|-m_i}(\xi) \left| \partial^\alpha b_i(\xi) \right|_{\mathcal{L}(E_i, E_0)} \leq \|b\|_{S^{m_i}} = C, \xi \in (\mathbb{R}^n)^\bullet, |\alpha| \leq n + 1, 1 \leq i \leq \ell,$$

d'où alors

$$\Lambda^{|\alpha|}(\xi) \left| \partial^\alpha b_i(\xi) (\lambda + b(\xi))^{-1} \right|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq C(k), |\alpha| \leq n + 1, \xi \in (\mathbb{R}^n)^\bullet, 1 \leq i \leq \ell,$$

ainsi

$$\Lambda^{|\alpha|}(\xi) \left| \partial^\alpha (\lambda + b)^{-1}(\xi) \right|_{\mathcal{L}(E_0, E_j)} \leq C(k) \left| (\lambda + b)^{-1}(\xi) \right|_{\mathcal{L}(E_0, E_j)}, |\alpha| \leq n+1$$

pour :  $\xi \in (|\mathbb{R}^n)^\bullet$  et ;  $1 \leq j \leq \ell$ ,

cette dernière inégalité est valide grâce à

$$\begin{aligned} \partial^\alpha (\lambda + b)^{-1} &:= \Sigma \pm (\lambda + b)^{-1} (\partial^{\alpha_1} b) (\lambda + b)^{-1} \dots (\partial^{\alpha_k} b) (\lambda + b)^{-1} \\ &= \Sigma \pm (\lambda + b)^{-1} \left( \sum_{i=1}^{\ell} \partial^{\alpha_1} b_i \right) (\lambda + b)^{-1} \dots \left( \sum_{i=1}^{\ell} \partial^{\alpha_k} b_i \right) (\lambda + b)^{-1}, \end{aligned}$$

( $\Sigma$  signifie une somme finie ). Puisqu'on a , d'une part

$$(\lambda + b)^{-1} \in C^{m+1}((\mathbb{R}^n)^\bullet, \mathcal{L}(E_0, E_j)), 1 \leq j \leq \ell, \lambda \in \omega + S_\vartheta,$$

Par ailleurs

$$\Lambda^{|\alpha|+m_j}(\xi) \left| \partial^\alpha (\lambda + b)^{-1}(\xi) \right|_{\mathcal{L}(E_0, E_j)} \leq C(K) \left| (\lambda + b)^{-1}(\xi) \right|_{\mathcal{L}(E_0, E_j)} \Lambda^{m_j} \leq C(k),$$

pour ;  $|\alpha| \leq n+1, \xi \in (\mathbb{R}^n)^\bullet$ , et :  $0 \leq j \leq \ell$ ,

sachant que  $m_0 = 0$ , alors on trouve

$$(\lambda + b)^{-1} \in S^{-m_j}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0, E_j)), 0 \leq j \leq \ell,$$

en plus ,on remarque que :

$$\left\| (\lambda + b)^{-1} \right\|_{S^{-m_i}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0, E_i))} = \sup_{|\alpha| \leq n+1} \left\| \Lambda^{|\alpha|+m_i} \partial^\alpha (\lambda + b)^{-1} \right\|_\infty \leq C(k),$$

ainsi que

$$(1 + |\lambda|) \left\| (\lambda + b)^{-1} \right\|_{S^0(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0))} = (1 + |\lambda|) \sup_{|\alpha| \leq n+1} \left\| \Lambda^{|\alpha|} \partial^\alpha (\lambda + b)^{-1} \right\|_\infty,$$

de (ii), sachant que

$$\Lambda^{|\alpha|}(\xi) \left| \partial^\alpha (\lambda + b)^{-1} \right|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq C(k) \left| (\lambda + b)^{-1} \right|_{\mathcal{L}(E_0)},$$

on trouve

$$\begin{aligned} (1 + |\lambda|) \Lambda^{|\alpha|}(\xi) \left| \partial^\alpha (\lambda + b)^{-1} \right|_{\mathcal{L}(E_0)} &\leq C(k) (1 + |\lambda|) \left| (\lambda + b)^{-1} \right|_{\mathcal{L}(E_0)} \\ &\leq C(k), |\alpha| \leq n+1, \xi \in (\mathbb{R}^n)^\bullet, \end{aligned}$$

d'où

$$(1 + |\lambda|) \left\| (\lambda + b^{-1}) \right\|_{S^0(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0))} \leq C(k).$$

D'où alors

$$\begin{aligned} \left\| (\lambda + b)^{-1} \right\|_{S^{-m_i}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0, E_i))} + (1 + |\lambda|) \left\| (\lambda + b)^{-1} \right\|_{S^0(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0))} &\leq C(k), \\ 1 \leq i \leq \ell, \text{ et ; } \lambda \in \omega + S_\vartheta. \end{aligned}$$

Puisque

$$(\lambda + b)^{-1} \in s^{-m_i}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0, E_i)), 0 \leq i \leq \ell,$$

alors le théorème précédent garantit que

$$\begin{aligned} (\lambda + b)^{-1}(D) &\in \mathcal{L}(B_{p,q}^s, B_{p,q}^{s+m_i}), 0 \leq i \leq \ell, \text{ alors} \\ (\lambda + b)^{-1}(D) &\in \mathcal{L}\left(B_{p,q}^s, \bigcap_{i=1}^{\ell} B_{p,q}^{s+m_i}\right), \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} &\|(\lambda + b)^{-1}(D)\|_{\mathcal{L}\left(B_{p,q}^s, \bigcap_{i=1}^{\ell} B_{p,q}^{s+m_i}\right)} + (1 + |\lambda|) \|(\lambda + b)^{-1}\|_{\mathcal{L}(B_{p,q}^s)} \\ &\leq C_1 \|(\lambda + b)^{-1}\|_{s^{-m_i}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0, E_i))} + C_2 (1 + |\lambda|) \|(\lambda + b)^{-1}\|_{S^0(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0))} \leq C(k), \end{aligned}$$

d'où alors

$$\|(\lambda + b)^{-1}(D)\|_{\mathcal{L}\left(B_{p,q}^s, \bigcap_{i=1}^{\ell} B_{p,q}^{s+m_i}\right)} + (1 + |\lambda|) \|(\lambda + b)^{-1}(D)\|_{\mathcal{L}(B_{p,q}^s)} \leq C(k), \lambda \in \omega + S_{\vartheta}.$$

Maintenant on montre que

$$(\lambda + b(D))^{-1} = (\lambda + b)^{-1}(D), \lambda \in \omega + S_{\vartheta},$$

$$\begin{aligned} (\lambda + b(D))(\lambda + b)^{-1}(D) &= \lambda(\lambda + b)^{-1}(D) + \sum_{i=1}^{\ell} b_i(D)(\lambda + b)^{-1}(D) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\lambda(\lambda + b)^{-1}\mathcal{F} + \sum_{i=1}^{\ell} \mathcal{F}^{-1}b_i(\lambda + b)^{-1}\mathcal{F} \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\lambda + b)(\lambda + b)^{-1}\mathcal{F} \\ &= 1_{B_{p,q}^s}, \end{aligned}$$

et de la même manière on trouve

$$(\lambda + b)^{-1}(D)(\lambda + b(D)) = 1_{\bigcap_{i=1}^{\ell} B_{p,q}^{s+m_i}}, \lambda \in \omega + S_{\vartheta}.$$

Ainsi

$$\omega + S_{\vartheta} \subset \rho(-b(D))$$

et

$$(\lambda + b(D))^{-1} = (\lambda + b)^{-1}(D) \text{ pour } \lambda \in \omega + S_{\vartheta}.$$

Finalement, les résultats obtenus, c.à.d

$$b(D) \in \mathcal{L} \left( \bigcap_{i=1}^l B_{p,q}^{s+m_i}, B_{p,q}^s \right), \quad \omega + S_\vartheta \subset \rho(-b(D))$$

$$\text{et } \|(\lambda + b)^{-1}(D)\|_{\mathcal{L} \left( B_{p,q}^s, \bigcap_{i=1}^l B_{p,q}^{s+m_i} \right)} + (1 + |\lambda|) \|(\lambda + b)^{-1}(D)\|_{\mathcal{L}(B_{p,q}^s)} \leq C(k), \lambda \in \omega + S_\vartheta.$$

montrent que

$$\omega + b(D) \in P \left( \bigcap_{i=1}^l B_{p,q}^{s+m_i}, B_{p,q}^s; C, \vartheta \right).$$

□

**Remarque 4.4** Le théorème précédent reste valide si on remplace l'espace  $B_{p,q}^s$  par  $\overset{\circ}{B}_{p,q}^s$  ou encore par  $b_{p,q}^s$ .

**Théorème 4.9** Supposons que les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites avec la condition  $\vartheta \geq \frac{\pi}{2}$ , supposons en outre que  $\bigcap_{i=1}^l E_i \xrightarrow{d} E_0$ .

Alors :

$$b(D) \in \mathcal{H} \left( \bigcap_{i=1}^l B_{p,q}^{\overset{\circ}{s+m_i}}, B_{p,q}^{\overset{\circ}{s}} \right).$$

**Preuve.** D'après le théorème précédent :

$$\omega + b(D) \in P \left( \bigcap_{i=1}^l B_{p,q}^{\overset{\circ}{s+m_i}}, B_{p,q}^{\overset{\circ}{s}}; C, \vartheta \right),$$

si on montre en plus que  $\bigcap_{i=1}^l B_{p,q}^{\overset{\circ}{s+m_i}}$  est dense dans  $B_{p,q}^{\overset{\circ}{s}}$ , on déduit alors que

$$b(D) \in \mathcal{H} \left( \bigcap_{i=1}^l B_{p,q}^{\overset{\circ}{s+m_i}}, B_{p,q}^{\overset{\circ}{s}} \right).$$

D'après les hypothèses on a

$$\bigcap_{i=1}^l E_i \xrightarrow{d} E_0, \quad \text{et} \quad \bigcap_{i=1}^l E_i \hookrightarrow E_i, \quad 1 \leq i \leq \ell,$$

alors on a

$$B_{p,q}^{\circ t} \left( \mathbb{R}^n, \bigcap_{i=1}^l E_i \right) \hookrightarrow B_{p,q}^{\circ t} (\mathbb{R}^n, E_i) \hookrightarrow B_{p,q}^{\circ s+m_i}; 1 \leq i \leq l$$

$$\text{et}; B_{p,q}^{\circ t} \left( \mathbb{R}^n, \bigcap_{i=1}^l E_i \right) \xrightarrow{d} B_{p,q}^{\circ s}, \text{ pour}; t \geq s + \max .m_i,$$

effectivement, sachant que

$$B_{p,q}^{\circ t} (\mathbb{R}^n, E_0) \xrightarrow{d} B_{p,q}^{\circ s} (\mathbb{R}^n, E_0), \text{ pour}$$

$$-\infty \leq s \leq t \leq \infty. \text{ et}; p, q \in [1, \infty],$$

alors on a

$$B_{p,q}^{\circ t} \left( \mathbb{R}^n, \bigcap_{i=1}^l E_i \right) \xrightarrow{d} B_{p,q}^{\circ t} (\mathbb{R}^n, E_0) \xrightarrow{d} B_{p,q}^{\circ s} (\mathbb{R}^n, E_0)$$

d'où alors

$$B_{p,q}^{\circ t} \left( \mathbb{R}^n, \bigcap_{i=1}^l E_i \right) \xrightarrow{d} \bigcap_{i=1}^l B_{p,q}^{\circ s+m_i} (\mathbb{R}^n, E_i),$$

$$B_{p,q}^{\circ t} \left( \mathbb{R}^n, \bigcap_{i=1}^l E_i \right) \xrightarrow{d} B_{p,q}^{\circ s} (\mathbb{R}^n, E_0), t \geq s + \max m_i,$$

$$\text{et} \bigcap_{i=1}^l B_{p,q}^{\circ s+m_i} (\mathbb{R}^n, E_i) \hookrightarrow B_{p,q}^{\circ s} (\mathbb{R}^n, E_0),$$

ce qui implique

$$\bigcap_{i=1}^l B_{p,q}^{\circ s+m_i} (\mathbb{R}^n, E_i) \xrightarrow{d} B_{p,q}^{\circ s} (\mathbb{R}^n, E_0)$$

d'où le résultat .

□

**Remarque 4.5** le théorème précédent reste valide si on change l'espace  $B_{p,q}^{\circ s}$  par l'espace  $b_{p,q}^s$ .

# Chapitre 5

## Problèmes paraboliques linéaires

Dans ce chapitre, on étudie quelques résultats fondamentaux sur les problèmes d'évolution de type parabolique linéaire, comme préliminaire à l'étude du cas non linéaire. On examinera plus particulièrement l'existence et l'unicité des solutions, via la théorie des semigroupes.

### 5.1 Problème de Cauchy

#### 5.1.1 Notions de solution

**Définition 5.1** Soient :  $J \subset \mathbb{R}$ , un intervalle parfait (i.e. contenant plus qu'un point) ;  $s = \min J$  ;  $A(t) (\forall t \in J)$  : opérateur linéaire dans  $E$  et  $f : J \rightarrow E$  .  
l'équation

$$\dot{u} + A(t)u = f(t), \quad t \in J \setminus \{s\},$$

est dite équation d'évolution parabolique si

–  $A(t)$  est le générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique fortement continu, le problème de Cauchy associé avec la condition initiale  $u(s) = x$ , est le suivant :

$$\dot{u} + A(t)u = f(t), \quad t \in J \setminus \{s\}, \quad u(s) = x.$$

On dit que  $u : J \rightarrow E$ , est une solution du problème de Cauchy précédent si

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C(J, E) \cap C^1(J \setminus \{s\}, E) \\ u(t) \in \text{dom}(A(t)) \quad \text{et} \quad \dot{u} + A(t)u = f(t), \quad t \in J \setminus \{s\}, \quad u(s) = x, \end{array} \right.$$

Si de plus :

$A \in C(J, \mathcal{H}(E_1, E_0))$ , c.à.d  $\text{dom}A(t) = E_1, \forall t \in J$   
alors  $u \in C(J \setminus \{s\}, E_1)$  .

Soit  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalle parfait. On pose  $J_\Delta = \{(t, s) \in J \times J, \quad s \leq t\}$ ,  
et  $J_\Delta^* = \{(t, s) \in J \times J \setminus s < t\}$

Si  $\varphi$  est une fonction sur  $J_\Delta^*$  à valeurs opérateurs et  $\psi$  une fonction à valeurs opérateurs

définis sur  $J$ , on pose :

$$\psi\varphi(t, s) := \psi(t)\varphi(s) \quad , \quad \varphi\psi(t, s) := \varphi(t)\psi(s) \quad ,$$

si ces compositions ont un sens.

## 5.2 Opérateurs d'évolution paraboliques

**Définition 5.2** On suppose que  $F \hookrightarrow E$  et que  $A : J \longrightarrow \mathcal{C}(E)$  avec  $\text{dom}(A(t)) \subset F$ ,  $t \in J$ . On dit que l'opérateur

$$U : J_\Delta \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

est un opérateur d'évolution parabolique (solution fondamentale) pour  $A$  avec espace de régularité  $F$  si les conditions suivantes sont vérifiées :

1/

$$(5.1) \quad U \in C(J_\Delta, \mathcal{L}_s(E)) \cap C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E, F)) ,$$

2/

$$(5.2) \quad U(t, t) = 1, U(t, s) = U(t, \tau)U(\tau, s), \quad s \leq \tau \leq t,$$

3/

$$(5.3) \quad \text{Im}(U(t, s)) \subset \text{dom}(A(t)) \subset F, \quad \text{pour } (t, s) \in J_\Delta^*$$

4/

$$(5.4) \quad AU \in C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E)) ,$$

avec  $\text{Sup}_{(t,s) \in I_\Delta^*} (t-s) \|AU(t, s)\|_{\mathcal{L}(E)} < \infty, \quad I \subset \subset J,$

5/

$$(5.5) \quad U(., s) \in C^1(J \cap (s, \infty), \mathcal{L}(E)), \quad s \in J,$$

6/

$$(5.6) \quad \partial_1 U = -AU$$

7/

$$(5.7) \quad U(t, .) \in C^1(J \cap (-\infty, t), \mathcal{L}_s(F, E)), \quad t \in J,$$

8/

$$(5.8) \quad \partial_2 U \supset UA.$$

**Remarque 5.1** Supposons que  $(E_0, E_1)$  est un couple à injection dense et que  $A \in \mathcal{H}(E_1, E_0)$ . Posons

$$U_A(t, s) := e^{-(t-s)A}, (t, s) \in J_\Delta, \text{ avec } J := \mathbb{R}^+.$$

Alors  $U_A$  est un opérateur d'évolution parabolique pour l'opérateur constant

$$J \longrightarrow \mathcal{C}(E), \quad t \longrightarrow A,$$

avec  $E_1$  comme espace de régularité.

**Remarque 5.2** (a) Soit  $u$  solution du problème de Cauchy

$$\dot{u} + A(t)u = f(t), \quad t \in J \cap (s, \infty), u(s) = x$$

avec  $f \in C(J \cap [s, \infty), E)$ .

Supposons encore que  $V \in C(J_\Delta, \mathcal{L}_s(E))$  vérifiant

$$V(t, t) = 1, \quad V(t, \cdot) \in C^1(J \cap (s, t), \mathcal{L}_s(F, E))$$

où  $\partial_2 V \supset VA$ , pour  $t \in J \cap (s, \infty)$ . Alors

$$u(t) = V(t, s)u(s) + \int_s^t V(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad t \in J \cap [s, \infty).$$

(b) On suppose que  $A$  possède un opérateur d'évolution parabolique  $U$ , soit  $(s, x) \in J \times E$  et  $f \in C(J \cap [s, \infty), E)$ , on remarque que  $U$  vérifie les propriétés de  $V$  dans (a), d'où alors le problème de Cauchy possède au plus une solution définie par

$$u(t) = U(t, s)u(s) + \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad t \in J \cap [s, \infty),$$

car si le problème possède une autre solution, elle s'écrira de la même manière que précédemment, d'où l'égalité des deux solutions.

(c) Il existe au plus un opérateur d'évolution parabolique pour  $A$ , plus précisément, si  $U_j$  est un opérateur d'évolution parabolique pour  $A$  avec espace de régularité  $F_j$  pour  $j = 1, 2$ , alors on a  $U_1 = U_2 := U$ , en plus  $F_1 \cap F_2$  est un espace de régularité pour  $U$ .

(d) Soit  $U_A$  un opérateur d'évolution parabolique pour  $A$  avec espace de régularité  $F$ , soit  $\alpha \in K$ , on pose

$$U_{\alpha+A}(t, s) := e^{-\alpha t} U_A(t, s) e^{\alpha s}, \quad (t, s) \in J_\Delta,$$

alors  $U_{\alpha+A}$  est un opérateur d'évolution parabolique pour  $\alpha + A$  avec espace de régularité  $F$ .

(e) Supposons qu'il existe un opérateur d'évolution parabolique  $U_A$  pour  $A$ , soit

$$(x, f) \in E \times L_{1,loc}(J, E) \quad , \quad \text{où } (J \subset \mathbb{R}^+) \text{ et } 0 \in J \quad ,$$

posons

$$u(t, x, A, f) := U_A(t, 0)x + \int_0^t U_A(t, \tau) f(\tau) d\tau \quad , \quad t \in J \quad .$$

Alors  $u(\cdot, x, A, f)$  est une bonne solution du problème de Cauchy linéaire défini dans (a) avec ( $s = 0$ ). De plus on a :

$$u(\cdot, x, A, f) \in C(J, E) \quad .$$

et

$$\begin{aligned} u(\cdot, x, A, f) &= e^{\alpha t} u(\cdot, x, \alpha + A, e^{-\alpha t} f) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad , \text{avec} \\ e^{\alpha t} v &: t \longmapsto e^{\alpha t} v(t) . \end{aligned}$$

**Preuve.**

(a) Puisque  $u$  est solution du problème de Cauchy, alors on a

$$u \in C(J \cap [s, \infty), E) \cap C^1(J \cap (s, \infty), E) \quad ,$$

en outre, sachant que

$$V \in C(J_\Delta, \mathcal{L}_s(E)) \quad ,$$

alors on obtient :

$$V(t, \cdot) \in C(J \cap (-\infty, t], \mathcal{L}_s(E)) \cap C^1(J \cap (s, t), \mathcal{L}_s(F, E))$$

d'où alors

$$V(t, \cdot) u \in C([s, t], E) \cap C^1((s, t), E) \quad , \quad t \in (s, \infty) \quad ,$$

si on calcule  $\partial_2 (Vu)(t, \tau)$ , on trouve

$$\begin{aligned} \partial_2 (Vu)(t, \tau) &= \partial_2 V(t, \tau) u(\tau) + V(t, \tau) \dot{u}(\tau) \\ &= \partial_2 V(t, \tau) u(\tau) + V(t, \tau) [-A(\tau) u(\tau) + f(\tau)] \quad , \end{aligned}$$

ainsi

$$\partial_2 (Vu)(t, \tau) = \partial_2 V(t, \tau) u(\tau) - V(t, \tau) A(\tau) u(\tau) + V(t, \tau) f(\tau) \quad ,$$

parmis les propriétés de  $V$ , on a

$$\partial_2 V \supset VA \quad ,$$

c.à.d

$$\text{dom}(VA) \subset \text{dom}(\partial_2 V) \quad ,$$

et  $VA(v) = \partial_2 V(v)$  si  $v \in \text{dom}(VA)$ , d'où alors

$$\partial_2 (Vu)(t, \tau) = V(t, \tau) f(\tau) \quad \text{pour } s < \tau < t,$$

d'où encore

$$\begin{aligned} \int_{s'}^{t'} V(t, \tau) f(\tau) d\tau &= \int_{s'}^{t'} \partial_2 (Vu)(t, \tau) d\tau, \quad s < s' < t' < t \\ &= V(t, t') u(t') - V(t, s') u(s'), \quad s < s' < t' < t, \end{aligned}$$

et en faisant tendre  $t'$  vers  $t$  et  $s'$  vers  $s$ , on obtient

$$\begin{aligned} V(t, t) u(t) &= V(t, s) u(s) + \int_s^t V(t, \tau) f(\tau) d\tau, \text{ c.à.d} \\ u(t) &= V(t, s) u(s) + \int_s^t V(t, \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

(c) Soit  $(s, x) \in (J \times E)$ , les propriétés 5.1, 5.2, 5.5 et 5.6 montrent que  $U_j(\cdot, s)x$  est une solution du problème de Cauchy homogène ( $f := 0$ ) dans (a) pour ( $j = 1, 2$ ). La remarque 5.2 (b) montre que le problème de Cauchy homogène possède au plus une solution, d'où alors  $U_1(\cdot, s)x = U_2(\cdot, s)x, \forall (t, x) \in J \cap [s, \infty[ \times E$ , ainsi on obtient  $U_1 = U_2$ .  $\square$

Dans les théorèmes d'existence et d'unicité, on donnera des conditions suffisantes sur  $f$  pour que la bonne solution soit en fait une solution pour le problème de Cauchy.

### 5.2.1 Equations integrales

Après cette étape de préparation, on détermine dans ce qui suit deux équations intégrales, possédant la même solution, et mettant en relief l'opérateur d'évolution parabolique  $A$ .

Soient :  $(E_0, E_1)$  un couple d'espaces avec injection dense,  $J \subset \mathbb{R}^+$  un intervalle parfait avec  $0 \in J$  et un opérateur  $A$  vérifiant :  $A \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0))$  pour un certain  $\rho \in (0, 1)$ .

Considérons également :  $U_A$ , un opérateur parabolique pour  $A$ , avec  $E_1$  comme sous-espace de régularité. On a alors

$$[\tau \mapsto U_A(t, \tau) e^{-(\tau-s)A(s)}] \in C([s, t], \mathcal{L}_s(E_0)) \cap C^1((s, t), \mathcal{L}_s(E_0)),$$

En effet, d'après la remarque 5.1

$$(t, s) \mapsto e^{-(t-s)A}$$

est un opérateur d'évolution parabolique pour  $A$  avec comme espace de régularité  $E_1$  c.à.d

$$[(t, s) \mapsto e^{-(t-s)A}] \in C(J_\Delta, \mathcal{L}_s(E_0)) \cap C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E_0, E_1)),$$

donc

$$[\tau \mapsto e^{-(\tau-s)A}] \in C(J \cap [s, \infty), \mathcal{L}_s(E_0)) \cap C(J \cap (s, \infty), \mathcal{L}(E_0, E_1)),$$

sachant que

$$[(t, \tau) \mapsto U_A(t, \tau)] \in C(J_\Delta, \mathcal{L}_s(E_0)) \cap C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E_0, E_1)),$$

donc

$$[\tau \mapsto U_A(t, \tau)] \in C(J \cap (-\infty, t], \mathcal{L}_s(E_0)) \cap C(J \cap (-\infty, t), \mathcal{L}(E_0, E_1)),$$

d'où alors

$$[\tau \mapsto U_A(t, \tau) e^{-(\tau-s)A(s)}] \in C([s, t], \mathcal{L}_s(E_0)) \cap C^1((s, t), \mathcal{L}(E_0, E_1)),$$

d'après les propriétés 5.5 et 5.7 sur les opérateurs d'évolution paraboliques. En outre, et d'après les propriétés 5.6 et 5.8 on trouve

$$\partial_\tau [U_A(t, \tau) e^{-(\tau-s)A(s)}] = [U_A(t, \tau)] [A(\tau) - A(s)] e^{-(\tau-s)A(s)}, (t, s) \in J_\Delta^*, et, s < \tau < t,$$

par integration, on obtient

$$U_A(t, s) = e^{-(t-s)A(s)} - \int_s^t U_A(t, \tau) [A(\tau) - A(s)] e^{-(\tau-s)A(s)} d\tau, \text{ pour } (t, s) \in J_\Delta,$$

de même pour

$$\partial_\tau [e^{-(t-\tau)A(t)} U_A(\tau, s)] = e^{-(t-\tau)A(t)} [A(t) - A(\tau)] U_A(\tau, s), \text{ pour } 0 \leq s < \tau < t, t \in J,$$

qui donne après intégration entre  $s$  et  $t$  l'équation intégrale

$$U_A(t, s) = e^{-(t-s)A(t)} + \int_s^t e^{-(t-\tau)A(t)} [A(t) - A(\tau)] U_A(\tau, s) d\tau, \text{ pour } (t, s) \in J_\Delta$$

dans  $\mathcal{L}_s(E_0)$ .

On voit que  $U_A$  est solution pour les deux équations intégrales ci dessus, et c'est bien l'opérateur d'évolution parabolique pour  $A$ . Autrement dit on peut établir l'existence et l'unicité pour les problèmes de Cauchy de type parabolique linéaire .

### 5.3 Equations intégrales de Volterra

On commence par donner quelques propriétés pour les équations intégrales de Volterra.

Soit  $J \subset \mathbb{R}^+$  un intervalle parfait avec  $0 \in J$ , on définit

$$(J_T) := J \cap [0, T], T \in \mathbb{R}^+.$$

On définit l'espace

$$K(E, F, \alpha) := \left\{ k \in C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E, F)) / \|k\|_{(\alpha), T} < \infty, T \in J \right\},$$

où

$$\|k\|_{(\alpha), T} := \|k\|_{(\alpha), T, \mathcal{L}(E, F)} := \sup_{0 \leq s < t \leq T} (t-s)^\alpha \|k(t, s)\|_{\mathcal{L}(E, F)}, T \in J,$$

$\left( K(E, F, \alpha), \left\{ \|\cdot\|_{(\alpha), T}; T \in J \right\} \right)$  est un espace de Fréchet avec :  $\left\{ \|\cdot\|_{(\alpha), T}; T \in J \right\}$  comme famille de semi-normes ,

On note par  $K(E, \alpha)$  , l'espace  $K(E, E, \alpha)$  . Soit

$$\|k\|_{(\alpha)} := \sup_{(t,s) \in J_\Delta^*} (t-s)^\alpha \|k(t, s)\|_{\mathcal{L}(E, F)}$$

l'espace  $K_\infty(E, F, \alpha) := \left\{ k \in K(E, F, \alpha) / \|k\|_{(\alpha)} < \infty \right\}$  est un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|_{(\alpha)}$  .

Les espaces définis juste avant possèdent les propriétés suivantes :

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1/

$$K(E, F, \beta) \hookrightarrow K(E, F, \alpha) \quad , \alpha > \beta$$

avec

$$\|\cdot\|_{(\alpha), T} \leq T^{\alpha - \beta} \|\cdot\|_{(\beta), T} \quad , \alpha > \beta \quad , \quad T \in J.$$

2/

$$K_\infty(E, F, \alpha) \hookrightarrow K(E, F, \alpha)$$

et

$$K_\infty(E, F, 0) = BC(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E, F)).$$

3/ Si  $\alpha < 0$  , alors pour tout  $k \in K(E, F, \alpha)$  , si on pose  $k(t, t) = 0, t \in J$  , on a  $k \in C(J_\Delta, \mathcal{L}(E, F))$ , d'où alors

$$K(E, F, \alpha) \hookrightarrow C(J_\Delta, \mathcal{L}(E, F)) \quad , \alpha < 0.$$

4/ Si  $(E = \mathbb{K})$  , on identifie  $\mathcal{L}(\mathbb{K}, F)$  avec  $F$  via

$$\mathcal{L}(\mathbb{K}, F) \ni B \leftrightarrow B.1 \in F.$$

On a alors

$$(k \in K(\mathbb{K}, F, \alpha)) \text{ ssi } \begin{cases} k \in C(J_\Delta^*, F), \text{ et} \\ \sup_{0 \leq s < t \leq T} (t-s)^\alpha \|k(t, s)\|_F < \infty, T \in J \end{cases} .$$

En plus de l'identification de  $C \left( \dot{J}, F \right)$  avec  $C (J_{\Delta}^*, F)$

via

$$\left[ C \left( \dot{J}, F \right) \ni u \leftrightarrow [(t, s) \mapsto u(t)] \in C (J_{\Delta}^*, F) \right],$$

il en résulte

$$BC \left( \dot{J}, F \right) \leftrightarrow K_{\infty} (\mathbb{K}, F, 0) = BC (J_{\Delta}^*, F).$$

5/ Soit  $G$  un espace de Banach, on pose pour  $\alpha, \beta \in (-\infty, 1)$

$$k * h(t, s) \quad : \quad = \int_s^t h(t, \tau) k(\tau, s) d\tau, \quad (t, s) \in J_{\Delta}, \text{ où}$$

$$k \in K (K, F, \alpha) \text{ et } h \in K (F, G, \beta),$$

on a alors

$$h * k \in K (E, G, \alpha + \beta - 1)$$

et

$$\|h * k\|_{(\alpha+\beta-1), T} \leq (B(1-\alpha, 1-\beta)) \|h\|_{(\alpha), T} \|k\|_{(\beta), T}, \quad T \in \dot{J},$$

où  $B$  est la fonction beta d'Euler.

Enfin, en vertu du théorème de Fubini, l'opération  $*$  est associative.

### 5.3.1 Noyaux résolvants

**Remarque 5.3** Soit  $k \in K (E, \alpha)$  avec  $\alpha \in [0, 1)$ , alors on a pour  $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \underbrace{k * k * \dots * k}_n (t, s) \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{[\Gamma(1-\alpha) \|k\|_{(\alpha), T}]^n}{\Gamma(n(1-\alpha))} (t-s)^{n(1-\alpha)-1}, \quad 0 \leq s < t \leq T.$$

En posant

$$w := \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{k * \dots * k}_j,$$

on a

$$w \in K (E, \alpha),$$

et pour  $\varepsilon > 0$  donné, on a

$$(t-s)^{\alpha} \|w(t, s)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq C(\alpha, \varepsilon) m e^{(1+\varepsilon)m^{1/(1-\alpha)}(t-s)}, \quad 0 \leq s < t \leq T \text{ et } T \in \dot{J}$$

où  $m := \Gamma(1-\alpha) \|k\|_{(\alpha), T}$ , avec  $e^{(1+\varepsilon)m^{1/(1-\alpha)}(t-s)}$  peut être remplacé par  $e^{(m^{1/(1-\alpha)}+\varepsilon)(t-s)}$ .

Il est maintenant loisible d'énoncer les résultats d'existence et d'unicité pour les équations intégrales linéaires abstraites de Volterra.

## 5.4 Existence des opérateurs d'évolution

**Théorème 5.1** *Supposons que  $\alpha, \beta \in [0, 1)$  et  $k \in K(E, \alpha)$ , alors chaque une des équations de Volterra linéaires suivantes :*

$$u = a + u * k, \quad v = b + k * v,$$

*possède pour tout  $a \in K(E, F, \beta)$  et  $b \in K(E, F, \beta)$  une solution unique, soit respectivement :  $u \in K(E, F, \beta)$  et  $v \in K(F, E, \beta)$ , données par*

$$u = a + a * w, \quad v = b + w * b$$

*respectivement ,*

*sachant que  $w := \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{k * \dots * k}_j$ .*

**Preuve.** La preuve est identique pour les deux équations , il suffit donc de donner la preuve pour la première.

Soient  $w := \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{k * \dots * k}_j$ , et  $u = a + a * w$ , d'après la dernière remarque, on a :

$w \in K(E, \alpha)$ , et puisqu'on a vu que  $a * w \in K(E, F, \alpha + \beta - 1)$  en outre, on a :  $K(E, F, \beta + (\alpha - 1)) \hookrightarrow K(E, F, \beta)$ , puisque  $\alpha \in [0, 1)$  donc  $\beta + (\alpha - 1) < \beta$  et alors  $u \in K(E, F, \beta)$ . De plus

$$\begin{aligned} u * k &= (a + a * w) * k = a * k + a * w * k \\ &= a * k + a * \left( \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{k * \dots * k}_j \right) * k \\ &= a * k + a * k * k + \dots + a * k * k \\ &= a * w, \end{aligned}$$

donc  $u$  est solution de l'équation  $u = a + u * k$ .

Ainsi l'existence de solution est vérifiée, il reste à montrer l'unicité de cette solution.

Pour cela, on fixe  $T \in J$  et on remplace  $J$  par  $(J_T)$ . Sachant que :

$$\begin{aligned} \|h * k\|_{(\beta), T_0} &\leq T_0^{(1-\alpha)} \|h * k\|_{(\alpha + \beta - 1), T_0} \\ &\leq T_0^{(1-\alpha)} B(1 - \alpha, 1 - \beta) \|h\|_{(\beta), T_0} \|k\|_{(\alpha), T_0}, \quad T_0 \in J \cap [0, T], \end{aligned}$$

c.à.d

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq s < t \leq T_0} (t - s)^\beta \|h * k(t, s)\|_{\mathcal{L}(E, F)} \\ &\leq T_0^{(1-\alpha)} B(1 - \alpha, 1 - \beta) \|k\|_{(\alpha), T_0} \sup_{0 \leq s < t \leq T} (t - s)^\beta \|h(t, s)\|_{\mathcal{L}(E, F)}, \end{aligned}$$

$T_0 \in J \cap [0, T]$ ,

et puisqu'on a remplacé  $J$  par  $J \cap [0, T]$ , on déduit que

$$\begin{aligned} \|h * k\|_{(\beta)} & : = \sup_{(t,s) \in (J \cap [0,T])_{\Delta}^*} (t-s)^{\beta} \|h * k(t,s)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \\ & = \sup_{0 \leq s < t \leq T_0} (t-s)^{\beta} \|h * k(t,s)\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty, \quad (s,t) \in J_{\Delta}^*, \end{aligned}$$

car  $h * k \in K(E, F, \beta)$ , c.à.d

$$\sup_{0 \leq s < t \leq T_0} (t-s)^{\beta} \|h * k(t,s)\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty, \quad \forall T_0 \in \dot{J},$$

d'où alors

$$h * k \in K_{\infty}(E, F, \beta),$$

on retourne à l'inégalité

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq s < t \leq T_0} (t-s)^{\beta} \|h * k(t,s)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \\ & \leq T_0^{(1-\alpha)} B(1-\alpha, 1-\beta) \|k\|_{(\alpha), T_0} \sup_{0 \leq s < t \leq T} (t-s)^{\beta} \|h(t,s)\|_{\mathcal{L}(E,F)}, \end{aligned}$$

$\forall T_0 \in \dot{J} \cap [0, T]$ ,

et puisque  $T \in \dot{J}$ , l'inégalité précédente est vraie pour  $T$ , d'où encore

$$\|h * k\|_{K_{\infty}(E,F,\beta)} \leq T^{(1-\alpha)} B(1-\alpha, 1-\beta) \|k\|_{(\alpha), T} \|h(t,s)\|_{K_{\infty}(E,F,\beta)},$$

ce qui implique

$$* k \in \mathcal{L}(K_{\infty}(E, F, \beta)).$$

De la propriété déjà vue

$$\|k * k * \dots * (k)(t,s)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{[\Gamma(1-\alpha) \|k\|_{(\alpha), T}]^n}{\Gamma(n(1-\alpha))} (t-s)^{n(1-\alpha)-1},$$

$n \in \dot{\mathbb{N}}, 0 \leq s < t \leq T_0$

on en déduit que le rayon spectral de l'opérateur  $*k$  est égale à zéro, d'où alors l'équation intégrale de Volterra  $u = a + u * k$ , possède au plus une solution sur  $J_T, \forall T \in \dot{J}$ . Alors  $u = a + u * w$  est la solution unique de l'équation de Volterra définie ci-dessus.  $\square$

Maintenant, on passe à la construction d'un opérateur d'évolution parabolique associé à  $A \in C^{\rho}(J, \mathcal{H}(E_1, E_0))$ , vérifiant quelques conditions qu'on va voir après. Si on revient à l'équation intégral déjà vue

$$U_A(t,s) = e^{-(t-s)A(s)} - \int_s^t U_A(t,\tau) [A(\tau) - A(s)] e^{-(\tau-s)A(s)} d\tau,$$

et si on pose

$$(5.9) \quad a_A(t, s) := e^{-(t-s)A(s)}, K_A(t, s) := -[A(t) - A(s)]a_A(t, s),$$

on remarque que

$$U_A(t, s) = a_A(t, s) + U_A * K_A(t, s),$$

c.à.d

$$U_A = a_A + U_A * K_A,$$

ou encore si on veut rendre les choses un peu plus clair, on dit que  $U_A$  vérifie l'équation intégrale de Volterra

$U_A = a_A + U_A * K_A$ , pour laquelle on a montré dans le théorème 5.1, l'existence et l'unicité d'une solution de la forme

$$\begin{aligned} u &= a_A + a_A * w_A, \text{ où} \\ w_A &: = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{k_A * \dots * k_A}_j, \end{aligned}$$

et cela pour  $a_A, k_A$  vérifiant quelques conditions qu'on va confirmer dans le lemme qui suit, et puisque  $U_A$  vérifie l'équation de Volterra  $u = a_A + u * K_A$ , alors  $U_A$  s'écrit sous la forme  $U_A = a_A + a_A * w_A$ ,

Si on montre que  $U_A$  ainsi défini, vérifie les conditions désirées pour qu'il soit un opérateur d'évolution parabolique pour  $A$ , alors il sera l'opérateur d'évolution parabolique recherché, et c'est effectivement ce qu'on va montrer dans la suite.

**Remarque 5.4** Dans la définition de  $K(E, F, \alpha)$  on peut remplacer l'hypothèse  $k \in C(J_{\Delta}^*, \mathcal{L}(E, F))$  par ( $k \in L_{\infty, loc}(J_{\Delta}^*, \mathcal{L}(E, F))$ ). Alors tout ce qui précède reste valide pourvu que

- (1)  $\sup_{0 \leq s < t \leq T}$  est remplacé par  $\sup_{0 \leq s < t \leq T} -ess$ .
- (2) le résultat

$$K(E, F, \alpha) \hookrightarrow C(J_{\Delta}, \mathcal{L}(E, F)) \quad , \quad \alpha < 0,$$

est remplacé par

$$K(E, F, \alpha) \cap C(J_{\Delta}^*, \mathcal{L}(E, F)) \hookrightarrow C(J_{\Delta}, \mathcal{L}(E, F)) \quad , \quad \alpha < 0.$$

(3) dans la définition de  $K(\mathbb{K}, F, \alpha)$ ,  $C(J_{\Delta}^*, F)$  est remplacé par  $L_{\infty, loc}(J_{\Delta}^*, F)$ .

(4)  $K_{\infty}(E, F, 0) = BC(J_{\Delta}^*, \mathcal{L}(E, F))$ ,

$BC(\dot{J}, F) \hookrightarrow K_{\infty}(\mathbb{K}, F, 0) = BC(J_{\Delta}^*, F)$ , sont remplacés par :

$$K_{\infty}(E, F, 0) = L_{\infty}(J_{\Delta}^*, \mathcal{L}(E, F)) \text{ et } L_{\infty}(\dot{J}, F) \hookrightarrow K_{\infty}(\mathbb{K}, F, 0) = L_{\infty}(J_{\Delta}^*, F).$$

Ainsi, on obtient par cette nouvelle définition de  $K(E, F, \alpha)$ ,

$$K(F, G, \beta) * K(E, F, \alpha) \hookrightarrow K(E, G, \alpha + \beta - 1) \cap C(J_{\Delta}, \mathcal{L}(E, G)), \text{ si } \alpha + \beta < -1.$$

Le théorème suivant, donnant l'inégalité de Gronwall généralisé, est en fait une application du théorème 5.1.

**Théorème 5.2** Soient  $\alpha, \beta \in [0, 1)$  et  $\varepsilon > 0$ , tel que

$$u : J \longrightarrow \mathbb{R}; [t \longmapsto t^\beta u(t)] \in L_{\infty,loc}(J, \mathbb{R}), \text{ et}$$

$$u(t) \leq At^{-\beta} + B \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} u(\tau) d\tau, \text{ p.p } t \in J,$$

où  $A, B$  sont des constantes positives.

Alors il existe une constante positive  $c := c(\alpha, \beta, \varepsilon)$ , telle que

$$u(t) \leq At^{-\beta} (1 + cBt^{1-\alpha} e^{(1+\varepsilon)\mu(\alpha, B)t}) \text{ p.p } t \in J,$$

où  $\mu(\alpha, B) := (\Gamma(1-\alpha)B)^{1/(1-\alpha)}$ .

**Preuve.** Posons  $E := F := \mathbb{R}$  et  $k(t, s) := B(t-s)^{-\alpha}$  pour  $(t, s) \in J_\Delta^*$ , alors on a :

$$k \in K(E, \alpha) \text{ et } \|k\|_{(\alpha), T} = B \text{ pour } T \in J,$$

En outre, soit  $a(t) := At^{-\beta}$ , on remarque que  $a \in C(J, E)$ , ainsi en identifiant

$$t \longmapsto a(t) \text{ avec } [(t, s) \longmapsto a(t)] \in C(J_\Delta^*, E),$$

on déduit que  $a \in K(E, \beta)$  et  $\|a\|_{(\beta), T} = A$  pour  $T \in J$ ,

puisque l'on a déjà vu dans la remarque 5.4 qu'on peut remplacer la condition

$k \in C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E, F))$  par  $k \in L_{\infty,loc}(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E, F))$  dans la définition de  $K(E, F, \alpha)$ , ainsi et puisqu'on a

$$[t \longmapsto t^\beta u(t)] \in L_{\infty,loc}(J, \mathbb{R}), \text{ par conséquent } u \in K(E, \beta).$$

Donc

$$k * u \in K(E, \alpha + \beta - 1) \hookrightarrow K(E, \beta),$$

et par suite on a

$$b := a + k * u - u \in K(E, \beta)$$

d'où

$$u = a - b + k * u$$

Maintenant en appliquant le théorème 5.1, on obtient

$$u = (a - b) + w * (a - b),$$

et d'après nos hypothèses on a

$$u(t) \leq At^{-\beta} + B \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} u(\tau) d\tau, \text{ p.p } t \in J,$$

ainsi

$(a(t) + k * u(t) - u(t)) \geq 0$ , par conséquent  $b \geq 0$ , et puisqu'on a  $k \geq 0$  alors  $w \geq 0$ , d'où  $u = (a - b) + w * (a - b) \leq a + w * a$ , c.à.d

$$u(t) \leq At^{-\beta} + A \int_0^t w(t - \tau) \tau^{-\beta} d\tau, \text{ p.p } t \in J.$$

en outre, la remarque 5.3 implique

$$w(t) \leq c(\alpha, \varepsilon) (Bt^{-\alpha} e^{(1+\varepsilon)\mu(\alpha, B)t}) \quad , \quad t > 0 \quad , \quad \varepsilon > 0 \quad ,$$

par conséquent

$$\begin{aligned} u(t) &\leq At^{-\beta} + A \int_0^t w(t - \tau) \tau^{-\beta} d\tau \quad , \quad \text{p.p } t \in J \\ &\leq At^{-\beta} + A \int_0^t [c(\alpha, \varepsilon) B (t - \tau)^{-\alpha} e^{(1+\varepsilon)\mu(\alpha, B)(t-\tau)}] \tau^{-\beta} d\tau \\ &\leq At^{-\beta} + Ac(\alpha, \varepsilon) B \int_0^t [(t - \tau)^{-\alpha} e^{(1+\varepsilon)\mu(\alpha, B)(t-\tau)}] \tau^{-\beta} d\tau \\ &\leq At^{-\beta} + Ac(\alpha, \varepsilon) B e^{(1+\varepsilon)\mu(\alpha, B)t} \int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} \tau^{-\beta} d\tau \\ &\leq At^{-\beta} + Ac(\alpha, \varepsilon) B e^{(1+\varepsilon)\mu(\alpha, B)t} [B(1 - \alpha, 1 - \beta) t^{1-\alpha-\beta}] \quad , \end{aligned}$$

d'où finalement

$$u(t) \leq At^{-\beta} (1 + cBt^{1-\alpha} e^{(1+\varepsilon)\mu(\alpha, B)t}) \quad , \quad \text{p.p } t \in J.$$

□

**Corollaire 5.3** *Sous les hypothèses du théorème 5.2, on a : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $c := c(\varepsilon, \alpha, \beta, B)$ , tel que :*

$$u(t) \leq Act^{-\beta} B e^{(1+\varepsilon)\mu(\alpha, B)t} \quad , \quad \text{p.p } t \in J.$$

On fait la notation suivante :

$$\sum_{\vartheta} : = \left[ |\arg z| \leq \vartheta + \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{pour } \vartheta \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$$

**Lemme 5.1** Soient  $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  fixé,  $\Gamma$  une courbe simple arbitraire régulière par morceaux dans  $\dot{\Sigma}_\vartheta$ , définie de  $\infty e^{-i(\vartheta+\frac{\pi}{2})}$  à  $\infty e^{i(\vartheta+\frac{\pi}{2})}$ , enfin  $X$  est un espace métrique. Supposons que l'application

$$f : \dot{\Sigma}_\vartheta \times X \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow E$$

vérifie les propriétés suivantes :

(i)  $f(., x, t) : \dot{\Sigma}_\vartheta \longrightarrow E$  holomorphe pour  $(x, t) \in X \times \mathbb{R}^+$ .

(ii)  $f(z, ., .) \in C(X \times \mathbb{R}^+, E)$  pour  $z \in \dot{\Sigma}_\vartheta$ .

(iii) il existe deux constantes  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $M > 0$ , telles que :

$$\|f(z, x, t)\| \leq M |z|^{\alpha-1} e^{t \operatorname{Re} z}, \quad (z, x, t) \in \dot{\Sigma}_\vartheta \times X \times \mathbb{R}^+.$$

Alors on a

$$\left[ (x, t) \longmapsto \int_{\Gamma} f(z, x, t) dz \right] \in C(X \times \mathbb{R}^+, E), \text{ et}$$

$$\left\| \int_{\Gamma} f(z, x, t) dz \right\| \leq c M t^{-\alpha}, \quad (z, x, t) \in \dot{\Sigma}_\vartheta \times X \times \mathbb{R}^+.$$

Le lemme 5.1 est essentiel pour la suite.

### 5.4.1 Estimations des semi-groupes

Soit  $(E_0, E_1)$  un couple d'espaces de Banach à injection dense,  $J \subset \mathbb{R}^+$ , un intervalle parfait avec  $0 \in J$  et

$\rho \in (0, 1)$ . On suppose que

1/

$$\mathcal{A} \subset C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0)).$$

2/  $\exists M, \eta \in \mathbb{R}^+$  et  $\vartheta \in (0, \pi/2)$ , tel que

$$[A]_{\rho, J} = \sup_{\substack{(s, t) \in J^2 \\ s \neq t}} \frac{\|A(s) - A(t)\|}{|s - t|^\rho} \leq \eta, \quad A \in \mathcal{A}.$$

3/  $\dot{\Sigma}_\vartheta \subset \rho(-A(s))$ , avec

$$\|A(s)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} + (1 + |\lambda|)^{1-j} \|(\lambda + A(s))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0, E_j)} \leq M,$$

pour  $(s, \lambda, A) \in J \times \sum_{\vartheta} \times \mathcal{A}$  et  $j = 0, 1$ .

Les trois conditions précédentes impliquent

$$(5.10) \quad M^{-1} \|x\|_1 \leq \|A(s) x\|_0 \leq M \|x\|_1, \quad (s, x, A) \in J \times E_1 \times \mathcal{A}.$$

Dans ce qui suit, on notera les trois conditions précédentes par  $(\Sigma)$ .

La condition  $(\Sigma)$  assure des estimations uniformes pour les semi-groupes ayant  $-A(s)$  comme générateur infinitésimal, ainsi que leur dépendance continue pour  $s \in J$ , comme il est indiqué dans le lemme suivant.

**Lemme 5.2** Soit  $A \in C^p(J, \mathcal{H}(E_1, E_0))$ , vérifiant la condition  $(\Sigma)$ , alors on a

$$\left\| [tA(s)]^k e^{-tA(s)} \right\|_{\mathcal{L}(E_j)} + t \left\| [tA(s)]^k (e^{-tA(s)}) \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq c(k),$$

pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(t, s, A) \in \mathbb{R}^+ \times J \times \mathcal{A}$ ,  $j = 0, 1$ ,

en outre on a

$$[(t, s) \mapsto e^{-tA(s)}] \in C(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}_s(E_k, E_j)) \cap C(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}_s(E_j, E_k)),$$

pour  $j, k \in \{0, 1\}$ ,  $j \leq k$ .

**Preuve.** D'après la théorie des semi-groupes analytiques, on a

$$A^k(s) e^{-tA(s)} = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^k e^{t\lambda} (\lambda + A(s))^{-1} d\lambda, \quad (t > 0), \quad k \in \mathbb{N},$$

où  $\Gamma$  une courbe régulière par morceaux, allant de  $\infty e^{-i(\vartheta+\pi/2)}$  à  $\infty e^{i(\vartheta+\pi/2)}$ ,

dans  $\sum_{\vartheta}$ .

Posons  $(f(\lambda, s, t)) := \lambda^k e^{t\lambda} (\lambda + A(s))^{-1}$ , on remarque que

(i)  $f(\cdot, s, t) : \sum_{\vartheta} \rightarrow \mathcal{L}(E_0)$  est holomorphe pour  $(s, t) \in J \times \mathbb{R}^+$ ,

(ii)  $f(\lambda, \cdot, \cdot) \in C(J \times \mathbb{R}^+, \mathcal{L}(E_0))$  pour  $\lambda \in \sum_{\vartheta}$ ,

(iii)  $\|f(\lambda, s, t)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq M |\lambda|^{k-1} e^{t\operatorname{Re}\lambda}$ ,  $(\lambda, s, t) \in \sum_{\vartheta} \times J \times \mathbb{R}^+$ ,

Effectivement on a, grâce à la troisième hypothèse de  $(\Sigma)$  pour  $j = 0$  :

$$|\lambda| \left\| (\lambda + A(s))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq \|A(s)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} + (1 + |\lambda|) \left\| (\lambda + A(s))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq M,$$

d'où alors

$$\|f(\lambda, s, t)\|_{\mathcal{L}(E_0)} = \left\| \lambda^k e^{t\lambda} (\lambda + A(s))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq M |\lambda|^{k-1} e^{t\operatorname{Re}\lambda},$$

d'où la validité de (iii) avec  $\alpha = k$ .

En appliquant le lemme 5.1 , on trouve

$$\|t^k A^k (s) e^{-tA(s)}\|_{\mathcal{L}(E_0)} = \frac{|t|^k}{2\pi} \left\| \int_{\Gamma} f(\lambda, s, t) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq M \frac{|t|^k}{2\pi} c(k) t^{-k} = c(k),$$

ainsi

$$\left\| [tA(s)]^k e^{-tA(s)} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq c(k), \quad (t, s, A) \in \mathbb{R}^+ \times J \times \mathcal{A}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On établit dans la suite cette inégalité pour la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E_1)}$ .  
pour cela, soit  $x \in E_1$ , d'après la propriété 5.10 on remarque que

$$\left\| [tA(s)]^k e^{-tA(s)} x \right\|_{E_1} = \left\| t^k A^{k-1}(x) e^{-tA(s)} A(s) x \right\|_{E_1},$$

ceci résulte du fait que le semi groupe commute avec son générateur infinitésimal pour  $x \in \text{dom}(A(t))$ , ainsi on trouve

$$\begin{aligned} \left\| [tA(s)]^k e^{-tA(s)} x \right\|_{E_1} &= \left\| t^k A^{k-1}(x) e^{-tA(s)} A(s) x \right\|_{E_1} \\ &\leq \left\| A(s) [t^k A^{k-1}(x) e^{-tA(s)} A(s) x] \right\|_{E_0} \\ &\leq \left\| [tA(s)]^k e^{-tA(s)} A(s) x \right\|_{E_0} \\ &\leq \left\| [tA(s)]^k e^{-tA(s)} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \|A(s) x\|_{E_0} \\ &\leq c(k) \|A(s) x\|_{E_0} \leq Mc(k) \|x\|_{E_1}, \end{aligned}$$

d'où alors

$$\left\| [tA(s)]^k e^{-tA(s)} \right\|_{\mathcal{L}(E_1)} \leq c(k),$$

et maintenant, on montre que

$$t \left\| [tA(s)]^k e^{-tA(s)} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq c(k),$$

pour cela on a

$$\begin{aligned} t \left\| [tA(s)]^k e^{-tA(s)} x \right\|_{E_1} &= \left\| t^{k+1} A^k(s) e^{-tA(s)} x \right\|_{E_1} \quad \text{pour } x \in E_0 \\ &\leq M \left\| A(s) [t^{k+1} A^k(s) e^{-tA(s)} x] \right\|_{E_0} \\ &\leq \left\| [tA(s)]^{k+1} e^{-tA(s)} x \right\|_{E_0} \\ &\leq Mc(k+1) \|x\|_{E_0}, \end{aligned}$$

d'où alors

$$t \left\| [tA(s)]^k e^{-tA(s)} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq c(k+1),$$

ainsi on a établi que l'estimation

$$\left\| [tA(s)]^k e^{-tA(s)} \right\|_{\mathcal{L}(E_j)} + t \left\| [tA(s)]^k (e^{-tA(s)}) \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq c(k),$$

est valide pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(t, s, A) \in \mathbb{R}^+ \times J \times \mathcal{A}$ , et  $j = 0, 1$ .

Il nous reste à montrer que

$$[(t, s) \mapsto e^{-tA(s)}] \in C(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}_s(E_k, E_j)) \cap C(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}_s(E_j, E_k)),$$

pour  $j \in \{0, 1\}$ ,  $j \leq k$ .

Pour cela on a

$$A \in C^\rho(J, \mathcal{L}(E_1 E_0)), \text{ alors } A \in C(J, \mathcal{L}(E_1 E_0)) \quad (\text{du fait que } A \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1 E_0)))$$

et puisque l'application  $B \mapsto B^{-1}$  est régulière, alors on a

$$[s \mapsto (\lambda + A(s))^{-1}] \in C(J, \mathcal{L}(E_0, E_1))$$

En outre en utilisant la propriété  $E_1 \hookrightarrow E_0$  et grâce à 5.10 on trouve pour  $s \in J$

$$\begin{aligned} \|(\lambda + A(s))^{-1} x\|_{E_1} &\leq M \|A(s) [(\lambda + A(s))^{-1} x]\|_{E_0} \\ &\leq M \|(\lambda + A(s))^{-1} A(s) x\|_{E_1} \\ &\leq M \|(\lambda + A(s))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \|A(s) x\|_{E_0} \\ &\leq M c_1 M \|x\|_{E_1} \leq c \|x\|_{E_1}, \end{aligned}$$

(sachant bien sûr qu'un opérateur linéaire fermé commute avec sa résolvante). De même

$$\|(\lambda + A(s))^{-1} x\|_{E_0} \leq c \|(\lambda + A(s))^{-1} x\|_{E_1} \leq c \|x\|_{E_0}, \quad s \in J$$

[puisque'on a déjà  $[s \mapsto (\lambda + A(s))^{-1}] \in C(J, \mathcal{L}(E_0, E_1))$ ],  
ce qui donne enfin

$$[s \mapsto (\lambda + A(s))^{-1}] \in C(J, \mathcal{L}(E_j, E_k)), \quad j, k \in \{0, 1\}, \quad j \leq k.$$

Ainsi, puisque  $f(\lambda, s, t) := e^{t\lambda} (\lambda + A(s))^{-1}$  vérifie les hypothèses du lemme 5.1, alors on a

$$[(t, s) \mapsto e^{-tA(s)}] \in C(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}(E_j, E_k)) \quad \text{pour } j, k \in \{0, 1\} \text{ avec } j \leq k.$$

Enfin, on montre que

$$[(t, s) \mapsto e^{-tA(s)}] \in C\left(\mathbb{R}^+ J, \mathcal{L}(E_k, E_j)\right) \text{ pour } j, k \in \{0, 1\} \text{ avec } j \leq k.$$

Pour cela, soit  $x \in E_1$ . On a

$$e^{-tA(s)}x - x = \int_0^t \partial_z e^{-\tau A(s)} x d\tau = - \int_0^t e^{-\tau A(s)} A(s) x d\tau,$$

on a en outre

$$\begin{aligned} \|e^{-tA(s)}x - x\|_{E_0} &\leq \int_0^t \|e^{-\tau A(s)} A(s) x\|_{E_0} d\tau \\ &\leq \int_0^t \|A(s) (e^{-\tau A(s)} x)\|_{E_0} d\tau \\ &\leq M \int_0^t \|e^{-\tau A(s)} x\|_{E_1} d\tau, \end{aligned}$$

(d'après l'inégalité 5.10), et grâce à l'inégalité suivante, déjà vue,

$$\left\| [tA(s)]^k e^{-tA(s)} \right\|_{\mathcal{L}(E_j)} + t \left\| [tA(s)]^k (e^{-tA(s)}) \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq c(k),$$

pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(t, s, A) \in \mathbb{R}^+ \times J \times \mathcal{A}$ ,  $j = 0, 1$ ,  
on obtient pour  $k = 0$ ,  $j = 1$

$$\|e^{-tA(s)}\|_{\mathcal{L}(E_1)} \leq \|e^{-tA(s)}\|_{\mathcal{L}(E_1)} + t \|e^{-tA(s)}\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq c,$$

ce qui permet d'établir

$$\begin{aligned} \|e^{-tA(s)}x - x\|_{E_0} &\leq M \int_0^t \|e^{-\tau A(s)} x\|_{E_1} d\tau \leq M \int_0^t \|e^{-\tau A(s)}\|_{\mathcal{L}(E_1)} \|x\|_{E_1} d\tau \\ &\leq tc \|x\|_{E_1}, t \in \mathbb{R}^+, s \in J, \end{aligned}$$

c.à.d

$$\begin{aligned} \|e^{-tA(s)}x - x\|_{E_0} &\leq tc \|x\|_{E_1}, t \in \mathbb{R}^+, s \in J, \\ &\implies [t \mapsto e^{-tA(s)}] \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(E_1, E_0)). \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} e^{-tA(s)} - e^{-tA(s')} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{t\lambda} \left[ (\lambda + A(s))^{-1} - (\lambda + A(s'))^{-1} \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{t\lambda} \left[ (\lambda + A(s))^{-1} [A(s') - A(s)] (\lambda + A(s'))^{-1} \right] d\lambda, \end{aligned}$$

ce qui donne d'après le Lemme 5.1, la condition  $(\Sigma)$  et l'inégalité 5.10

$$\left\| e^{-tA(s)} - e^{-tA(s')} \right\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \leq ct |s - s'|^\rho, \quad t \in \mathbb{R}^+, s, s' \in J,$$

Par suite, en écrivant :

$$e^{-tA(s)}x - e^{-t'A(s')}x = \left( e^{-tA(s)} - e^{-tA(s')} \right)x + \left( e^{-tA(s')}x - x \right) - \left( e^{-t'A(s')}x - x \right)$$

et compte tenu de

$$[(t, s) \mapsto e^{-tA(s)}] \in C(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}(E_j, E_k)) \quad \text{pour } j, k \in \{0, 1\} \text{ avec } j \leq k,$$

on en déduit que

$$[(t, s) \mapsto e^{-tA(s)}] \in C(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}_s(E_1, E_0)),$$

Maintenant, en utilisant cette propriété, et puisqu'on a déjà montré que

$$e^{-tA(s)} \in \mathcal{L}(E_0), \quad (t, s) \in \mathbb{R}^+ \times J,$$

et compte tenu du fait que  $E_1$  est dense dans  $E_0$ , pour  $x \in E_0$ ,  $\exists (x_n) \subset E_1$  tel que  $x_n \xrightarrow[\text{E}_0]{cv} x$ , pour  $x_n \in E_1$ , on obtient

$$\left\| e^{-tA(s)}x_n - e^{-t'A(s')}x_n \right\|_{E_0} \leq c |t - t'| |s - s'| \|x_n\|_{E_1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

d'où alors

$$[(t, s) \mapsto e^{-tA(s)}] \in C(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}_s(E_0)),$$

Finalement, on remarque que pour  $x \in E_1$

$$\|e^{-tA(s)}x - x\|_{E_1} \leq M \|e^{-tA(s)}A(s)x - A(s)x\|_{E_0} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0,$$

car si  $x \in E_1$ , alors  $A(s)x \in E_0$ , en plus on a

$$[(t, s) \mapsto e^{-tA(s)}] \in C(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}_s(E_0)),$$

en outre, puisque on a déjà vu que

$$[(t, s) \mapsto e^{-tA(s)}] \in C(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}(E_1)),$$

et que

$$e^{-tA(s)}x - e^{-t'A(s')}x = \left( e^{-tA(s)} - e^{-tA(s')} \right) x + \left( e^{-tA(s')} x - x \right) - \left( e^{-t'A(s')} x - x \right),$$

on en déduit que

$$[(t, s) \mapsto e^{-tA(s)}] \in C(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}_s(E_1)).$$

Enfin et d'après tous ce qui précède, on a

$$[(t, s) \mapsto e^{-tA(s)}] \in C\left(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}(E_j, E_k)\right) \cap C(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}_s(E_k, E_j)),$$

pour  $j, k \in \{0, 1\}$  avec  $j \leq k$ . □

### 5.4.2 Construction des opérateurs d'évolution

En fait, ce dernier lemme avec la condition  $(\Sigma)$  et l'inégalité suivante  $M^{-1} \|x\|_{E_1} \leq \|A(s)x\|_{E_0} \leq M \|x\|_{E_1}$ ,  $(s, x, A) \in J \times E_1 \times \mathcal{A}$ , assurent les propriétés suivantes (voir 5.9 pour les notations)

$$\begin{aligned} a_A &\in K_\infty(E_0, 0) \cap K_\infty(E_1, 0) \cap K_\infty(E_0, E_1, 1), \text{ avec} \\ \|a_A\| &\leq c_0, \quad A \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

où la norme  $\|\cdot\|$  désigne la norme dans l'espace  $K_\infty(E_0, 0) \cap K_\infty(E_1, 0) \cap K_\infty(E_0, E_1, 1)$ , et

$$k_A \in K(E_0, 1 - \rho) \cap K(E_1, E_0, -\rho),$$

avec

$$(t-s)^{1-j-\rho} \|k_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \leq c, \quad \text{pour } (t, s) \in J_\Delta^*, \quad A \in \mathcal{A}, \quad j = 0, 1.$$

Ce qui nous permet effectivement, comme on la déjà remarqué, d'appliquer le théorème 5.1 qui confirme que l'équation de Volterra  $u = a_A + u * k_A$  admet une solution unique  $u = a_A + a_A * w_A$  où

$$w_A := \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{k_A * \dots * k_A}_j.$$

En fait,  $U_A$  qui vérifie l'équation intégrale

$$U_A(t, s) = e^{-(t-s)A(s)} - \int_s^t U_A(t, \tau) [A(\tau) - A(s)] e^{-(\tau-s)A(s)} d\tau,$$

est la solution de l'équation de Volterra c.à.d  $U_A = a_A + a_A * w_A$ .

Maintenant, il nous reste à montrer que  $U_A$  est un opérateur d'évolution parabolique pour  $A$ , c'est l'objet des lemmes suivants.

**Lemme 5.3** *On suppose que  $0 < \beta < \rho$ , alors la fonction  $w_A := \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{k_A * \dots * k_A}_n$ , est bien définie, et satisfait*

$$w_A \in K(E_0, 1 - \rho) \cap K(E_1, E_0, -\rho), \text{ avec} \\ (t - s)^{1-j-\rho} \|w_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \leq c(\varepsilon) e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)}; \varepsilon > 0, (t, s) \in J_{\Delta}^*, A \in \mathcal{A}, j = 0, 1.$$

En outre  $w_A$  vérifie l'inégalité

$$\|w_A(t, s) - w_A(\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \\ \leq c(\varepsilon) \left\{ \delta_{1,j} (t - \tau)^{\rho} + (t - \tau)^{\beta} (\tau - s)^{j+\rho-\beta-1} \right\} e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)},$$

pour  $\varepsilon > 0, s < \tau < t, A \in \mathcal{A}, j = 0, 1$ .

**Preuve.** D'après la Remarque 5.3, et puisque

$$k_A \in K(E_0, 1 - \rho) \cap K(E_1, E_0, -\rho), \\ \text{avec } (t - s)^{1-j-\rho} \|k_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \leq c, \text{ pour } (t, s) \in J_{\Delta}^*, A \in \mathcal{A}, j = 0, 1,$$

on a

$$w_A \in K(E_0, 1 - \rho) \text{ et, } (t - s)^{1-\rho} \|w_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_0, E_0)} \leq c(\varepsilon) e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)},$$

pour  $\varepsilon > 0, (t, s) \in J_{\Delta}^*, A \in \mathcal{A}, j = 0, 1$

où  $\mu = (\Gamma(\rho) c \eta)^{1/\rho}$ .

Ceci affirme la première inégalité de ce lemme pour  $j = 0$ .

Maintenant, on remarque que

$w_A = k_A + k_A * w_A = k_A + w_A * k_A$ , en outre on a  $k_A \in K(E_0, 1 - \rho) \cap K(E_1, E_0, -\rho)$ , et puisqu'on a déjà vu que  $w_A \in K(E_0, 1 - \rho)$ , alors on trouve

$$w_A * k_A \in K(E_1, E_0, -2\rho) \hookrightarrow K(E_1, E_0, -\rho),$$

d'où

$$w_A = k_A + k_A * w_A \in K(E_1, E_0, -\rho).$$

Maintenant, on montre que pour  $0 < \beta < \rho$

$$\|w_A(t, s) - w_A(\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \\ \leq c(\varepsilon) \left\{ \delta_{1,j} (t - \tau)^{\rho} + (t - \tau)^{\beta} (\tau - s)^{j+\rho-\beta-1} \right\} e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)},$$

pour  $\varepsilon > 0, s < \tau < t, A \in \mathcal{A}, j = 0, 1$ . On a pour  $0 \leq s < \tau < t$ ,

$$k_A(t, s) - k_A(\tau, s) = [A(\tau) - A(t)] a_A(t, s) - [A(\tau) - A(s)] [a_A(t, s) - a_A(\tau, s)],$$

sachant que

$$\|a_A\| \leq c_0, \text{ avec } a_A \in K_{\infty}(E_0, 0) \cap K_{\infty}(E_1, 0) \cap K_{\infty}(E_0, E_1, 1),$$

où  $\| \cdot \|$  est la norme de ce dernier espace, et puisque on a

$$\|A(\tau) - A(t)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \leq \eta |\tau - t|^\rho,$$

sachant que  $t > \tau$ , on trouve

$$(t - s)^{1-j} \|[A(t) - A(\tau)] a_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \leq c |t - \tau|^\rho = c (t - \tau)^\rho \quad \text{pour } j \in \{0, 1\}.$$

Puisqu'on a

$$a_A(t, s) - a_A(\tau, s) = - \int_{\tau}^t A(s) e^{-(\sigma-s)A(s)} d\sigma,$$

d'après le lemme 5.2, on trouve pour  $j \in \{0, 1\}$

$$\|a_A(t, s) - a_A(\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_1)} \leq M \int_{\tau}^t (\sigma - s)^{j-2} d\sigma \leq M (t - \tau) (\tau - s)^{j-2},$$

d'où alors

$$\|[A(\tau) - A(s)] [a_A(t, s) - a_A(\tau, s)]\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \leq c (t - \tau) (\tau - s)^{\rho+j-2}, \text{ pour } j \in \{0, 1\}.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} & \|[A(\tau) - A(s)] [a_A(t, s) - a_A(\tau, s)]\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \\ & \leq c (\tau - s)^\rho \left\{ \|a_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_1)} + \|a_A(\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_1)} \right\} \\ & \leq c \left( (t - s)^{j-1} (\tau - s)^\rho + (\tau - s)^{\rho-1+j} \right) \leq c (\tau - s)^{\rho-1+j}, \end{aligned}$$

puisque

$$a_A \in K_\infty(E_0, 0) \cap K_\infty(E_1, 0) \cap K_\infty(E_0, E_1, 1), \text{ et } \|a_A\| \leq c_0$$

ç.à.d

$$\begin{aligned} \sup_{(t,s) \in J_\Delta^*} (t - s) \|a_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} & \leq c_0, \\ \sup_{(t,s) \in J_\Delta^*} \|a_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_1)} & \leq c_0, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \|a_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} & \leq c_0 (t - s)^{-1}, \quad (t, s) \in J_\Delta^*, \text{ et} \\ \|a_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_1)} & \leq c_0, \quad (t, s) \in J_\Delta^*, \end{aligned}$$

Si on pose

$$\begin{aligned} & \| [A(\tau) - A(s)] [a_A(t, s) - a_A(\tau, s)] \|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \\ = & \| [A(\tau) - A(s)] [a_A(t, s) - a_A(\tau, s)] \|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)}^{\rho + (1-\rho)}, \end{aligned}$$

et puisqu'on a

$$\| [A(\tau) - A(s)] [a_A(t, s) - a_A(\tau, s)] \|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)}^\rho \leq c (t - \tau)^\rho (\tau - s)^{\rho(\rho + j - 2)},$$

et

$$\| [A(\tau) - A(s)] [a_A(t, s) - a_A(\tau, s)] \|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)}^{1-\rho} \leq c (\tau - s)^{(1-\rho)(\rho-1+j)},$$

on déduit que

$$\begin{aligned} \| [A(\tau) - A(s)] [a_A(t, s) - a_A(\tau, s)] \|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} & \leq \\ & c (t - \tau)^\rho (\tau - s)^{\rho(\rho-2+j)} (\tau - s)^{(\rho-1+j)(1-\rho)} \\ & \leq c (t - \tau)^\rho (\tau - s)^{j-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$(\tau - s)^{1-j} \| k_A(t, s) - k_A(\tau, s) \|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \leq c (t - \tau)^\rho, \quad j \in \{0, 1\}$$

D'un autre part et puisqu'on a

$$(t - s)^{1-j-\rho} \| k_A(t, s) \|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \leq c \quad \text{pour} \quad (t, s) \in J_\Delta^*, A \in \mathcal{A}, j = 0, 1,$$

on trouve

$$\| k_A(t, s) - k_A(\tau, s) \|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq c [(t - s)^{\rho-1} + (\tau - s)^{\rho-1}] \leq c (\tau - s)^{\rho-1}$$

puisque  $\rho - 1 < 0$

d'où alors

$$\begin{aligned} \| k_A(t, s) - k_A(\tau, s) \|_{\mathcal{L}(E_0)} & = \| k_A(t, s) - k_A(\tau, s) \|_{\mathcal{L}(E_0)}^{\beta/\rho + (1-\beta)/\rho} \\ & \leq c [(t - \tau)^\rho (\tau - s)^{-1}]^{\beta/\rho} (\tau - s)^{(\rho-1)(1-\beta/\rho)} \\ & \leq c (t - \tau)^\beta (\tau - s)^{\rho-\beta-1}, \end{aligned}$$

On note encore une fois que  $w_A = k_A + k_A * w_A$ , donc

$$\begin{aligned} w_A(t, s) - w_A(\tau, s) & = k_A(t, s) - k_A(\tau, s) + \int_s^\tau [k_A(t, \sigma) - k_A(\tau, \sigma)] w_A(\sigma, s) d\sigma \\ & \quad + \int_\tau^t k_A(t, \sigma) w_A(\sigma, s) d\sigma. \end{aligned}$$

En utilisant la première inégalité de ce lemme déjà démontrée et la dernière inégalité vue juste avant c.à.d

$$\|k_A(t, s) - k_A(\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq c(t - \tau)^\beta (\tau - s)^{\rho - \beta - 1},$$

on trouve

$$\begin{aligned} & \|w_A(t, s) - w_A(\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \\ & \leq c(\varepsilon) \left\{ (t - \tau)^\beta (\tau - s)^{\rho - \beta - 1} \right. \\ & \quad \left. + \left[ \int_s^\tau (t - \tau)^\beta (\tau - \sigma)^{\rho - \beta - 1} (\sigma - s)^{\rho - 1} d\sigma + \int_\tau^t (t - \sigma)^{\rho - 1} (\sigma - s)^{\rho - 1} d\sigma \right] e^{(\mu + \varepsilon)(t - s)} \right\} \\ & \leq c(\varepsilon) \left[ (t - \tau)^\beta (\tau - s)^{\rho - \beta - 1} (1 + (t - s)^\rho) + (t - \tau)^\beta (\tau - s)^{\rho - 1} \right] e^{(\mu + \varepsilon)(t - s)} \\ & \leq c(\varepsilon) \left[ (t - \tau)^\beta (\tau - s)^{\rho - \beta - 1} \right] e^{(\mu + \varepsilon)(t - s)}, \text{ pour } \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

De même et en utilisant l'inégalité

$$(\tau - s)^{1 - j} \|k_A(t, s) - k_A(\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \leq c(t - \tau)^\rho, j = 0, 1,$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \|w_A(t, s) - w_A(\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \\ & \leq c(\varepsilon) \left\{ (t - \tau)^\rho + (t - \tau)^\beta (\tau - s)^{2\rho - \beta} + (t - \tau)^\rho (t - s)^\rho \right\} e^{(\mu + \varepsilon)(t - s)} \\ & \leq c(\varepsilon) \left\{ (t - \tau)^\rho + (t - \tau)^\beta (\tau - s)^{\rho - \beta} \right\} e^{(\mu + \varepsilon)(t - s)}. \end{aligned}$$

d'où finalement

$$\|w_A(t, s) - w_A(\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \leq c(\varepsilon) \left\{ \delta_{1, j} (t - \tau)^\rho + (t - \tau)^\beta (\tau - s)^{j + \rho - \beta - 1} \right\} e^{(\mu + \varepsilon)(t - s)},$$

pour  $\varepsilon > 0, s < \tau < t, A \in \mathcal{A}, j = 0, 1.$

□

**Lemme 5.4** *Posons*

$$e_A(t, s) := A(t) e^{-(t-s)A(t)} - A(s) e^{-(t-s)A(s)}, \quad (t, s) \in J_\Delta^*.$$

*Alors*

$$\begin{aligned} e_A & \in K(E_0, 1 - \rho), \\ \text{et } (t - s)^{1 - \rho} \|e_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_0)} & \leq c, \quad (t, s) \in J_\Delta^*, A \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

**Preuve.** On a d'après la condition( $\Sigma$ )

$$\begin{aligned}
& \left\| (\lambda + A(t))^{-1} - (\lambda + A(s))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \\
&= \left\| (\lambda + A(t))^{-1} (A(t) - A(s)) (\lambda + A(s))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \\
&\leq \left\| (\lambda + A(t))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \|A(t) - A(s)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \left\| (\lambda + A(s))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \\
&\leq c(t-s)^\rho |\lambda|^{-1}, \text{ pour } \lambda \in \sum_{\vartheta}, 0 \leq s < t \leq T, \text{ et } A \in \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

En utilisant ce résultat, on déduit d'après le lemme 5.1 que

$$\begin{aligned}
& \left\| A(t) e^{-(t-s)A(t)} - A(s) e^{-(t-s)A(s)} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda(t-s)} [(\lambda + A(t))^{-1} - (\lambda + A(s))^{-1}] d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \\
&\leq c(t-s)^{\rho-1}, (t, s) \in J_{\Delta}^*, A \in \mathcal{A},
\end{aligned}$$

Maintenant il nous suffit de montrer que  $e_A \in C(J_{\Delta}^*, \mathcal{L}(E_0))$  effectivement, puisque  $A \in C(J, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ , et d'après le lemme 5.2

$$[(t, s) \mapsto e^{-tA(s)}] \in C\left(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}(E_j, E_k)\right) \quad j, k \in \{0, 1\}, \quad j \leq k$$

c.à.d

$$[((t-s), s) \mapsto e^{-(t-s)A(s)}] \in C(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}(E_j, E_k)) \quad j, k \in \{0, 1\}$$

$j \leq k$  puisque  $t - s > 0$

d'où alors

$$e_A \in C(J_{\Delta}^*, \mathcal{L}(E_0)), \text{ ainsi } e_A \in K(E_0, 1 - \rho).$$

□

Posons

$$d_{\varepsilon}(t, s) := \int_s^{t-\varepsilon} a_A(t, \tau) w_A(\tau, s) d\tau, \quad 0 < \varepsilon < t - s,$$

et

$$d_{\varepsilon}(t, s) := 0 \quad \text{pour } s \leq t \leq s + \varepsilon,$$

On remarque que

$$d_{\varepsilon}(t, s) \longrightarrow a_A * w_A(t, s) \quad \text{dans } \mathcal{L}(E_0) \quad \text{qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

de plus, on a

$$\begin{aligned}
\partial_1 d_\varepsilon(t, s) &= e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)} w_A(t-\varepsilon, s) - \int_s^{t-\varepsilon} A(\tau) a_A(t, \tau) w_A(\tau, s) d\tau \\
&= e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)} w_A(t-\varepsilon, s) - [e^{-\varepsilon A(t)} - e^{-(t-s)A(t)}] w_A(t, s) \\
&\quad + \int_s^{t-\varepsilon} e_A(t, \tau) w_A(\tau, s) d\tau \\
&\quad - \int_s^{t-\varepsilon} A(t) e^{-(t-\tau)A(t)} [w_A(\tau, s) - w_A(t, s)] d\tau,
\end{aligned}$$

dans  $\mathcal{L}(E_0)$  pour  $t > s + \varepsilon$ ,

ce dernier résultat est valide du fait que  $A(t) e^{-(t-\tau)A(t)} = \partial_\tau e^{-(t-\tau)A(t)}$ .

Maintenant, on pose

$$\dot{d}_A := e^{-(t-s)A(t)} w_A(t, s) + \int_s^t e_A(t, \tau) w_A(\tau, s) d\tau + \int_s^t A(t) e^{-(t-\tau)A(t)} [w_A(t, s) - w_A(\tau, s)] d\tau.$$

Des lemmes 5.2, 5.3 et 5.4, et en posant  $\beta = \frac{\rho}{2}$  dans le lemme 5.3, on déduit que

$$\dot{d}_A \in K(E_j, E_0, 1 - j - \rho),$$

et

$$\begin{aligned}
(t-s)^{1-j-\rho} \left\| \dot{d}_A(t, s) \right\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} &\leq c(\varepsilon) (e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)}) \\
\text{pour } \varepsilon > 0, \quad (t, s) \in J_\Delta^* &, \quad A \in \mathcal{A}, \quad j = 0, 1,
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\partial_1 d_\varepsilon \longrightarrow \dot{d}_A \quad \text{dans } C(J_\Delta^*, \mathcal{L}_s(E_0)) \quad \text{qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

et puisqu'on a déjà vu que

$$d_\varepsilon(t, s) \longrightarrow a_A * w_A(t, s) \quad \text{dans } \mathcal{L}(E_0) \quad \text{qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

alors on a

$$\begin{aligned}
a_A * w_A(\cdot, s) &\in C^1(J \cap (s, \infty), \mathcal{L}_s(E_0)), \quad s \in J, \text{ et} \\
\partial_1 (a_A * w_A) &= \dot{d}_A,
\end{aligned}$$

ainsi

$$a_A * w_A(t, s) - a_A * w_A(t', s) = \int_{t'}^t \dot{d}_A(\tau, s) d\tau, \quad s < t' < t, \quad \text{dans } \mathcal{L}_s(E_0).$$

D'autre part, et puisqu'on a

$$\begin{aligned} \dot{d}_A &\in K(E_0, 1 - \rho), \text{ et} \\ (t-s)^{1-\rho} \left\| \dot{d}_A(t, s) \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} &\leq c(\varepsilon) (e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)}), \end{aligned}$$

on en déduit que

$$a_A * w_A(t, s) - a_A * w_A(t', s) = \int_{t'}^t \dot{d}_A(\tau, s) d\tau, \quad s < t' < t, \quad \text{dans } \mathcal{L}(E_0),$$

$$\text{ainsi } a_A * w_A(\cdot, s) \in C^1(J \cap (s, \infty), \mathcal{L}(E_0))$$

**Lemme 5.5** *Soit*  $A \in \mathcal{A}$ . *Alors*

$$\begin{aligned} U_A(\cdot, s) &= a_A(\cdot, s) + a_A * w_A(\cdot, s) \in C^1(J \cap (s, \infty), \mathcal{L}(E_0)), \quad s \in J, \text{ et} \\ \partial_1 U_A &= -AU_A. \end{aligned}$$

*De plus*

$$\begin{aligned} a_A * w_A &\in K(E_j, E_k, k - j - \rho), \text{ et} \\ (t-s)^{k-j-\rho} \|a_A * w_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j E_k)} &\leq c(\varepsilon) (e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)}), \end{aligned}$$

pour  $\varepsilon > 0$ ,  $(t, s) \in J_\Delta^*$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , et  $j, k \in \{0, 1\}$ .

**Preuve.** Posons

$$U_A^\varepsilon(t, s) := e^{-(t-s)A(s)} + d_\varepsilon(t, s), \quad 0 < \varepsilon < t - s.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} &\partial_1 U_A^\varepsilon(t, s) + A(t) U_A^\varepsilon(t, s) \\ &= -k_A(t, s) + e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)} w_A(t-\varepsilon, s) - \int_s^{t-\varepsilon} k_A(t, \tau) w_A(\tau, s) d\tau, \quad 0 < \varepsilon < t - s. \end{aligned}$$

Puisqu'on a déjà vu que :

$$d_\varepsilon(t, s) \longrightarrow a_A * w_A(t, s) \quad \text{dans } \mathcal{L}(E_0) \quad \text{qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

alors

$$U_A^\varepsilon(t, s) \longrightarrow U_A(t, s) \quad \text{dans } \mathcal{L}(E_0) \quad \text{qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

sachant que  $A(t)$  est fermé, alors on obtient

$$A(t) U_A^\varepsilon(t, s) \longrightarrow A(t) U_A(t, s), \quad \text{qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

sachant encore que

$$\begin{aligned} \partial_1 d_\varepsilon &\longrightarrow \dot{d}_A \text{ dans } C(J_\Delta^*, \mathcal{L}_s(E_0)) \text{ qd } \varepsilon \longrightarrow 0, \\ \partial_1(a_A * w_A) &= \dot{d}_A, \text{ c.à.d} \\ \partial_1 d_\varepsilon &\longrightarrow \partial_1(a_A * w_A) \text{ dans } C(J_\Delta^*, \mathcal{L}_s(E_0)) \text{ qd } \varepsilon \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

on en déduit alors que

$$\partial_1 U_A^\varepsilon + A U_A^\varepsilon \longrightarrow \partial_1 U_A + A U_A \text{ sur } J_\Delta^* \text{ qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

d'autre part

$$\partial_1 U_A^\varepsilon + A U_A^\varepsilon \longrightarrow w_A - k_A - k_A * w_A \text{ sur } J_\Delta^* \text{ qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

d'où alors

$$\partial_1 U_A + A U_A = w_A - k_A - k_A * w_A = 0, (\text{car } w_A = k_A + k_A * w_A).$$

Puisqu'on a

$$a_A \in K_\infty(E_0, 0) \cap K_\infty(E_1, 0) \cap K_\infty(E_0, E_1, 1), \text{ et } \|a_A\| \leq c_0,$$

et d'après le Lemme 5.3

$$\begin{aligned} w_A &\in K(E_0, 1 - \rho) \cap K(E_1, E_0, -\rho), \text{ avec} \\ (t - s)^{1-j-\rho} \|w_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} &\leq c(\varepsilon) e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)}; \varepsilon > 0, (t, s) \in J_\Delta^*, A \in \mathcal{A}, j = 0, 1, \end{aligned}$$

alors

$$a_A * w_A \in K(E_j, E_0, -j - \rho) \text{ pour } j = 0, 1,$$

et

$$\begin{aligned} (t - s)^{-j-\rho} \|a_A * w_A\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} &\leq \|a_A\| (t - s)^{1-j-\rho} \|w_A\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \\ &\leq c_0 c(\varepsilon) e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)} = c(\varepsilon) e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)} \\ \text{pour } \varepsilon > 0, (t, s) \in J_\Delta^*, A \in \mathcal{A}, \text{ et } j \in \{0, 1\}, \end{aligned}$$

ce qui montre la deuxième assertion pour  $k = 0$ .

Pour  $k = 1$ , on a

$$\begin{aligned} A(a_A * w_A) &= A U_A - A a_A = -\partial_1 U_A - A a_A \\ &= -\partial_1 a_A - A a_A - \partial_1(a_A * w_A) \\ &= k_A - \partial_1(a_A * w_A). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité qu'on a souvent utilisé

$$M^{-1} \|x\|_1 \leq \|A(s) x\|_0 \leq M \|x\|_1, (s, x, A) \in J \times E_1 \times \mathcal{A},$$

on trouve

$$\|a_A * w_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_1)} \leq M \left( \|k_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} + \|\partial_1(a_A * w_A)(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \right),$$

pour  $(t, s) \in J_\Delta^*$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , et  $j \in \{0, 1\}$ . Sachant que

$$\partial_1(a_A * w_A) = \dot{d}_A \in K(E_j, E_0, 1 - j - \rho),$$

avec

$$(t - s)^{1-j-\rho} \left\| \dot{d}_A(t, s) \right\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \leq c(\varepsilon) e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)}, \text{ pour } \varepsilon > 0, (t, s) \in J_\Delta^*, A \in \mathcal{A}, \text{ et } j \in \{0, 1\},$$

et que

$$k_A \in K(E_0, 1 - \rho) \cap K(E_1, E_0, -\rho), \text{ avec} \\ (t - s)^{1-j-\rho} \|k_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \leq c, \text{ pour } (t, s) \in J_\Delta^*, A \in \mathcal{A}, j = 0, 1.$$

on en déduit alors que

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq s < t \leq T} (t - s)^{1-j-\rho} \|a_A * w_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_1)} \\ & \leq \sup_{0 \leq s < t \leq T} (t - s)^{1-j-\rho} \|k_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \\ & + \sup_{0 \leq s < t \leq T} (t - s)^{1-j-\rho} \|\partial_1(a_A * w_A)(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} < \infty, \forall T \in J, \end{aligned}$$

avec

$$(t - s)^{1-j-\rho} \|a_A * w_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j, E_1)} \leq c(\varepsilon) e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)},$$

pour  $\varepsilon > 0$ ,  $(t, s) \in J_\Delta^*$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , et  $j \in \{0, 1\}$ . □

### 5.4.3 Théorème principal

Maintenant, on donne le premier résultat principal de ce chapitre

**Théorème 5.4** *On suppose que la condition  $(\Sigma)$  est vérifiée. Alors pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , il existe un opérateur d'évolution parabolique unique  $U_A$ , avec espace de régularité  $E_1$ , et satisfaisant*

1/

$$U_A \in C(J_\Delta^*, \mathcal{L}_s(E_1)) \cap K(E_0, 0) \cap K(E_1, 0) \cap K(E_0, E_1, 1).$$

2/ *Il existe une constante  $c(\rho) > 0$ , indépendante de  $\eta$ , tel qu si on suppose que  $\mu := \mu(\eta) := c(\rho) \eta^{1/\rho}$ , alors on a*

$$\|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j)} + (t - s) \|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq c(\varepsilon) e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)},$$

pour  $\varepsilon > 0$ ,  $(t, s) \in J_\Delta^*$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , et  $j \in \{0, 1\}$ .

**Preuve.** On définit  $U_A$  par

$$U_A := a_A + a_A * w_A.$$

on montre que  $U_A$  ainsi défini est l'opérateur d'évolution parabolique pour  $A$   
Puisqu'on a

$$K(E, F, \alpha) \hookrightarrow C(J_\Delta, \mathcal{L}(E, F)) \quad , \quad \alpha < 0 ,$$

et d'après les lemmes 5.2 , 5.5 on a

$$a_A * w_A \in K(E_j, E_k, k - j - \rho) \quad , \quad j, k \in \{0, 1\}$$

de plus

$$[(t, s) \mapsto e^{-tA(s)}] \in C(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}_s(E_k, E_j)) \cap C\left(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}_s(E_j, E_k)\right),$$

pour  $j, k \in \{0, 1\}, j \leq k$ .

c.à.d

$$\begin{aligned} a_A * w_A &\in K(E_0, -\rho) \hookrightarrow C(J_\Delta, \mathcal{L}(E_0)) \quad (\text{puisque } \rho < 0), \\ a_A &\in C(J_\Delta, \mathcal{L}_s(E_0)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_A * w_A &\in K(E_0, E_1, 1 - \rho) \subset C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E_0, E_1)), \\ a_A &\in C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E_0, E_1)), \end{aligned}$$

donc on a

$$U_A \in C(J_\Delta, \mathcal{L}_s(E_0)) \cap C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E_0, E_1)).$$

Ainsi,  $U_A$  vérifie la première condition d'opérateur d'évolution parabolique pour  $A$  avec espace de régularité  $E_1$ , il nous reste maintenant à montrer que  $U_A$  vérifie les sept autres conditions.

Les conditions 5.5 et 5.6 résultent directement du lemme 5.5.

Puisqu'on a

$$A \in C^p(J, \mathcal{L}(E_1, E_0)) \quad \text{et} \quad U_A \in C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E_0, E_1)),$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} AU_A &\in C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E_0)), \\ \text{avec } \sup_{(t,s) \in I_\Delta^*} (t-s) \|AU_A(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_0)} &< \infty, I \subset\subset J \end{aligned}$$

puisque l'on a

$$\begin{aligned} U_A &:= a_A + a_A * w_A, a_A \in K_\infty(E_0, E_1, 1), \text{ et} \\ a_A * w_A &\in K(E_0, E_1, 1 - \rho) \hookrightarrow K(E_0, E_1, 1), \end{aligned}$$

c.à.d

$$U_A \in K(E_0, E_1, 1) ,$$

ce qui prouve la condition 5.4, en plus

$$\text{Im}(U_A(t, s)) \subset \text{dom}(A(t)) \subset E_1 , \quad (t, s) \in J_\Delta^* ,$$

et c'est la condition 5.3 qui est valide. En outre, on a d'après le lemme 5.5

$$\begin{aligned} a_A * w_A &\in K(E_1, -\rho) \hookrightarrow C(J_\Delta, \mathcal{L}(E_1)) , \\ a_A * w_A &\in K(E_1, -\rho) \hookrightarrow K(E_1, 0) , \text{ et} \\ a_A * w_A &\in K(E_0, -\rho) \hookrightarrow K(E_0, 0) , \end{aligned}$$

en outre, et d'après le Lemme 5.2

$$a_A \in C(J_\Delta^*, \mathcal{L}_s(E_1))$$

sachant encore que

$$a_A \in K_\infty(E_0, 0) \cap K_\infty(E_1, 0) \cap K_\infty(E_0, E_1, 1) ,$$

on déduit que

$$U_A \in C(J_\Delta^*, \mathcal{L}_s(E_1)) \cap K(E_0, 0) \cap K(E_1, 0) \cap K(E_0, E_1, 1) ,$$

ce qui donne la première assertion du théorème.

D'après l'inégalité démontrée dans le lemme 5.5, ainsi que le lemme 5.2, on trouve que

$$\|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j)} + (t-s) \|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq c(\varepsilon) e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)}$$

est valide pour  $\varepsilon > 0$ ,  $(t, s) \in J_\Delta^*$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , et  $j \in \{0, 1\}$ , ce qui prouve la deuxième assertion du théorème.

Maintenant on montre que  $U_A$  vérifie les conditions 5.7 et 5.8 d'opérateur d'évolution parabolique pour  $A$ .

On suppose en plus de  $A \in \mathcal{A}$  que  $A \in C^1(J, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ , et que  $J$  est compact. Alors

$$\begin{aligned} [\lambda + A(\cdot)]^{-1} &\in C^1(J, \mathcal{L}(E_0)) , \text{ et} \\ \partial [\lambda + A]^{-1} &= -(\lambda + A)^{-1} \partial A (\lambda + A)^{-1} , \text{ pour } \lambda \in \sum_{\vartheta} . \end{aligned}$$

En utilisant la condition  $(\Sigma)$ , on montre que

$$\|\partial_s [\lambda + A(s)]^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq c |\lambda|^{-1} , \quad (\lambda, s) \in \sum_{\vartheta} \times J ,$$

ainsi, d'après le lemme 5.1 on a

$$m(t, s) := 1/2\pi i \int_{\Gamma} e^{\lambda(t-s)} \partial_s (\lambda + A(s))^{-1} d\lambda ,$$

vérifie

$$[(t, s) \mapsto m(t, s)] \in C(J_{\Delta}^*, \mathcal{L}(E_0)), \text{ avec } \|m(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq cM,$$

c.à.d

$$m \in K_{\infty}(E_0, 0),$$

en outre, sachant que  $\partial_2 a_A(t, s) = A(s) (e^{-(t-s)A(s)} + m(t, s))$ , on déduit que

$$\partial_2 a_A \in C(J_{\Delta}^*, \mathcal{L}(E_0)).$$

D'où le théorème 5.1 assure l'existence d'une solution unique

$$v \in K_{\infty}(E_0, 0),$$

pour l'équation intégrale

$$v = m + v * m.$$

Posons maintenant

$$V := a_A + v * a_A,$$

sachant que  $a_A \in K_{\infty}(E_0, 0)$ ,  $v \in K(E_0, 0)$ , alors on a

$$v * a_A \in K(E_0, -1) \hookrightarrow C(J_{\Delta}, \mathcal{L}(E_0)), \text{ et}$$

$$v * a_A \in K(E_0, -1) \hookrightarrow K(E_0, 0),$$

d'où

$$V \in K(E_0, 0),$$

de plus, et d'après le lemme 5.2, on a

$$a_A \in C(J_{\Delta}, \mathcal{L}_s(E_0)),$$

ainsi

$$V \in C(J_{\Delta}, \mathcal{L}_s(E_0)) \cap K(E_0, 0), \text{ et}$$

$$V(t, t) = 1, t \in J.$$

Soit  $t \in J$ , alors on a

$$V(t, \cdot) \in C^1((0, t), \mathcal{L}_s(E_1, E_0)), \text{ et}$$

$$\partial_2 V = \partial_2 a_A - v + (v * a_A) A + v * m$$

$$= (a_A + v * a_A) A + m + v * m - v$$

$$= VA \text{ dans } \mathcal{L}_s(E_1, E_0).$$

On a  $U_A(t, s)x$  est pour tout  $(s, x) \in J \times E_0$ , une solution du problème de Cauchy

$$\dot{u} + A(t)u = 0, \quad t \in J \cap (s, \infty),$$

$$u(s) = x.$$

Puisqu'on a

$$\begin{aligned} V &\in C(J_\Delta, \mathcal{L}_s(E_0)), \\ V(t, t) &= 1, V(t, \cdot) \in C^1((0, t), \mathcal{L}_s(E_1, E_0)), \text{ et} \\ \partial_2 V &= VA. \end{aligned}$$

Alors la remarque 5.2 (a) montre que  $V = U_A$ ,

ce qui donne les deux conditions 5.7 et 5.8, en outre la condition 5.2 résulte de la remarque 5.2 (a) qui montre que le problème de Cauchy cité avant admet une solution unique. Ainsi  $U_A$  est l'opérateur d'évolution parabolique pour  $A$  avec sous espace de régularité  $E_1$ , pourvu que  $A \in C^1(J, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ .

Maintenant pour supprimer la condition  $A \in C^1(J, \mathcal{L}(E_1, E_0))$ , on suppose que  $J$  est compact.

Pour l'opérateur  $A \in \mathcal{A}$ , on fait un prolongement par zéro sur  $\mathbb{R}$ , et on pose

$$A_\varepsilon := (\varphi_\varepsilon * A) \setminus J,$$

où  $\{\varphi_\varepsilon; \varepsilon > 0\}$  est une suite régularisante sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $(A_\varepsilon) \in C^\infty(J, \mathcal{L}(E_1, E_0))$  et par l'inégalité de Young, on a

$$\|A_\varepsilon\|_{C(J, \mathcal{L}(E_1, E_0))} \leq \|A\|_{C(J, \mathcal{L}(E_1, E_0))} \quad , \quad \varepsilon > 0,$$

de plus

$$A_\varepsilon(s) - A_\varepsilon(t) = \int \varphi_\varepsilon(\tau) [A(s - \varepsilon\tau) - A(t - \varepsilon\tau)] d\tau$$

implique

$$[A_\varepsilon]_{\rho, J} \leq \eta \quad , \quad \varepsilon > 0.$$

Maintenant, puisqu'on a

$$A_\varepsilon \longrightarrow A \text{ dans } C(J, \mathcal{L}(E_1, E_0)) \text{ qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

[[2]Théorème I.1.3.1(i)] avec le fait que  $[A_\varepsilon]_{\rho, J} \leq \eta$ , montre qu'il existe  $\varepsilon > 0$ , tel que

$$A_\varepsilon \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0)) \quad , \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Notons que la borne spectrale de  $-A$ ,  $s(-A)$  est négative.

Puisqu'on a déjà vu que

$$A_\varepsilon \longrightarrow A \text{ dans } C(J, \mathcal{L}(E_1, E_0)) \text{ qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

[[2]corollaire I.1.4.3] cela montre qu'il existe  $M' > 0$ ,  $\vartheta' \in (0, \pi/2)$ , et  $\varepsilon' > 0$  tel que la famille

$$\mathcal{A}' := \{A_\varepsilon; 0 < \varepsilon < \varepsilon'\},$$

vérifie la condition  $(\Sigma)$  (avec  $M$  et  $\vartheta$  sont remplacés par  $M'$  et  $\vartheta'$  respectivement).

Ainsi, sachant qu'il existe un opérateur d'évolution parabolique unique  $U_\varepsilon$ , pour  $A_\varepsilon$ ,  $0 <$

$\varepsilon < \varepsilon'$ ,  
soit  $(t, s) \in J_{\Delta}^*$ , on a

$$\partial_{\tau} [U_{\varepsilon}(t, \tau) U(\tau, s)] = U_{\varepsilon}(t, \tau) [A_{\varepsilon}(\tau) - A(\tau)] U(\tau, s),$$

après intégration, on trouve

$$U(t, s) - U_{\varepsilon}(t, s) = \int_s^t U_{\varepsilon}(t, \tau) [A_{\varepsilon}(\tau) - A(\tau)] U(\tau, s) d\tau,$$

ce qui donne

$$\|U_{\varepsilon} - U\|_{C(J_{\Delta}, \mathcal{L}(E_1, E_0))} \leq c \|A_{\varepsilon} - A\|_{C(J, \mathcal{L}(E_1, E_0))}, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon',$$

en outre on a

$$A_{\varepsilon} \longrightarrow A \text{ dans } C(J, \mathcal{L}(E_1, E_0)) \text{ qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

et puisque  $U_{\varepsilon}$  est uniformément borné dans  $\mathcal{L}(E_0)$  pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ , et  $E_1$  est dense dans  $E_0$ , on trouve

$$U_{\varepsilon} \longrightarrow U \text{ dans } C(J_{\Delta}, \mathcal{L}_s(E_0)) \text{ qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

en plus on a

$$U_{\varepsilon}(t, s)x - U_{\varepsilon}(t, s')x = \int_{s'}^s \partial_{\tau} U_{\varepsilon}(t, \tau) x d\tau = \int_{s'}^s U_{\varepsilon}(t, \tau) A_{\varepsilon}(\tau) x d\tau, \text{ pour } s' < s < t,$$

on obtient alors

$$U(t, s) - U(t, s') = \int_{s'}^s U(t, \tau) A(\tau) d\tau, \quad 0 \leq s' < s < t, \text{ dans } \mathcal{L}_s(E_1, E_0),$$

du fait que

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon} &\longrightarrow A \text{ dans } C(J, \mathcal{L}(E_1, E_0)) \text{ qd } \varepsilon \longrightarrow 0, \text{ et} \\ U_{\varepsilon} &\longrightarrow U \text{ dans } C(J_{\Delta}, \mathcal{L}_s(E_0)) \text{ qd } \varepsilon \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

par conséquent la deuxième et dernière condition pour que  $U_A$  soit un opérateur d'évolution parabolique pour  $A$ , résulte de la remarque 5.2 (a).  $\square$

**Corollaire 5.5** *Supposons que  $\exists \rho \in (0, 1)$  tel que*

$$A \in C^{\rho}(J, \mathcal{H}(E_1, E_0)).$$

*Alors, il existe un opérateur d'évolution parabolique pour  $A$  unique avec sous espace de régularité  $E_1$ .*

**Preuve.** Si  $J$  est compact, alors [[2]théorème I.1.2.2 et Corollaire I.1.4.3] impliquent l'existence de  $\sigma \in \mathbb{R}$ , tel que  $\{\sigma + A\} := \mathcal{A}$  vérifie la condition  $(\Sigma)$ . D'où en utilisant la remarque 5.2 (d) et le théorème 5.4, on déduit que  $A$  admet un opérateur d'évolution parabolique unique.

Dans le cas où  $J$  n'est pas compact, on applique ce résultat pour chaque sous intervalle compact de  $J$ , ce qui donne la validité de l'assertion.  $\square$

#### 5.4.4 Théorème d'existence pour les problèmes paraboliques linéaires

Maintenant, on peut énoncer le théorème d'existence et d'unicité suivant

**Théorème 5.6** *Soit  $(E_0, E_1)$  un couple d'espaces de Banach à injection dense et*

$$(x, A, f) = (x, (A, f)) \in E_0 \times C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0) \times E_0), \text{ pour } \rho \in (0, 1).$$

*Alors le problème de Cauchy*

$$\begin{aligned} \dot{u} + A(t)u &= f(t), \quad t \in J \setminus \{s\}, \\ u(s) &= x. \end{aligned}$$

*possède une solution unique*

$$u(\cdot, s, x, A, f) \in C(J \setminus \{s\}, E_1) \cap C^1(J \setminus \{s\}, E_0).$$

**Preuve.** Soit  $J \subset \mathbb{R}^+$  avec  $0 \in J$ , et  $s = 0$ ,  $\mathcal{A} := \{A\}$  satisfaisant à la condition  $(\Sigma)$ . D'après la remarque 5.2 (a) et (b), il suffit de montrer que la bonne solution

$$u := (U_A x + U_A * f)(\cdot, 0)$$

est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{u} + A(t)u &= f(t), \quad t \in J \setminus \{0\}, \\ u(0) &= x, \end{aligned}$$

D'après les propriétés sur les opérateurs d'évolution parabolique,  $U_A$  vérifie

$$U_A(\cdot, 0)x \in C(J, E_0) \cap C^1(J \setminus \{0\}, E_0),$$

et

$$\partial_1 U_A(\cdot, 0)x = -A U_A(\cdot, 0)x,$$

c.à.d

$$U_A(\cdot, 0)x \in C(J, E_0) \cap C^1(J \setminus \{0\}, E_0)$$

avec

$$\partial_t U_A(t, 0)x + A(t)U_A(t, 0)x = 0 \quad , \quad t \in J \setminus \{0\} \quad , \quad U_A(0, 0)x = x$$

d'où  $U_A(\cdot, 0)x$ , est la solution du problème homogène

$$\begin{aligned} \dot{u} + A(t)u &= 0, \quad t \in J \setminus \{0\}, \\ u(0) &= x, \end{aligned}$$

ainsi si on montre que  $U_A * f := U_A * f(\cdot, 0)$  est la solution du problème non homogène

$$\begin{aligned} \dot{u} + A(t)u &= f(t), \quad t \in J \setminus \{0\}, \\ u(0) &= x, \end{aligned}$$

alors  $u := (U_A x + U_A * f)(\cdot, 0)$  sera la solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{u} + A(t)u &= f(t), \quad t \in J \setminus \{0\}, \\ u(0) &= x. \end{aligned}$$

Pour cela rappelons que  $U_A = a_A + a_A * w_A$ . Ainsi d'après le lemme 5.5, on a

$$a_A * w_A \in K(E_0, -\rho) \hookrightarrow C(J_\Delta, \mathcal{L}(E_0)),$$

et puisqu'on a déjà vu que

$$\partial_1(a_A * w_A) = \dot{d}_A$$

donc

$$\begin{aligned} (t-s)^{1-\rho} \|\partial_1(a_A * w_A)\|_{\mathcal{L}(E_0)} &\leq c(\varepsilon) e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)} \\ \text{pour } (t, s) &\in J_\Delta^*, \quad \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

ainsi on obtient

$$\partial_t \int_0^t (a_A * w_A)(t, \tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t \partial_1(a_A * w_A)(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

en outre, et d'après l'inégalité notée juste avant, on déduit que

$$[(a_A * w_A) * f](\cdot, 0) \in C^1(J, E_0).$$

Maintenant, on va montrer que

$$[a_A * f](\cdot, 0) \in C^1(J, E_0),$$

pour cela posons

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(t) &: = \int_0^{t-\varepsilon} e^{-(t-\tau)A(\tau)} f(\tau) d\tau, \quad \varepsilon > 0, \quad t \in J, \quad t \geq \varepsilon, \text{ avec} \\ v_\varepsilon(t) &: = 0 \quad \text{pour } 0 \leq t < \varepsilon, \end{aligned}$$

on remarque que

$$v_\varepsilon(t) \longrightarrow [a_A * f](\cdot, 0) \quad \text{dans } E_0 \quad \text{qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

on a en plus

$$\begin{aligned} \partial v_\varepsilon(t) &= e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)} f(t-\varepsilon) - \int_0^{t-\varepsilon} A(\tau) e^{-(t-\tau)A(\tau)} f(\tau) d\tau \\ &= e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)} f(t-\varepsilon) + \int_0^{t-\varepsilon} e(t, \tau) f(\tau) d\tau - \int_0^{t-\varepsilon} A(t) e^{-(t-\tau)A(t)} f(\tau) d\tau \\ &= e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)} f(t-\varepsilon) + \int_0^{t-\varepsilon} e(t, \tau) f(\tau) d\tau - \int_0^{t-\varepsilon} A(t) e^{-(t-\tau)A(t)} (f(\tau) - f(t)) d\tau \\ &\quad + \int_0^{t-\varepsilon} A(t) e^{-(t-\tau)A(t)} f(t) d\tau \\ &= e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)} f(t-\varepsilon) + \int_0^{t-\varepsilon} e(t, \tau) f(\tau) d\tau - \int_0^{t-\varepsilon} A(t) e^{-(t-\tau)A(t)} (f(\tau) - f(t)) d\tau \\ &\quad + [e^{-\varepsilon A(t)} - e^{-tA(t)}] f(t), \end{aligned}$$

puisqu'on a  $f \in C^\rho(J, E_0)$ , et d'après le lemme 5.2 et le lemme 5.5, on trouve qu'il existe  $w \in C(J, E_0)$ , tel que

puisque  $f \in C^\rho(J, E_0)$ , et d'après les lemmes précédent il existe  $w \in C(J, E_0)$  tel que

$$\partial v_\varepsilon \longrightarrow w \quad \text{dans } C(J, E_0), \quad \text{qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

sachant que

$$v_\varepsilon(t) \longrightarrow v(t) := a_A * f(\cdot, 0) \quad \text{dans } E_0 \quad \text{qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

on en déduit que

$$v \in C^1(J, E_0),$$

et puisqu'on a déjà montré que

$$(a_A * w_A) * f(\cdot, 0) \in C^1(J, E_0),$$

alors

$$U_A * f(\cdot, 0) \in C^1(J, E_0).$$

Maintenant, on montre que  $U_A * f(\cdot, 0)$  vérifie le problème de Cauchy

$$\dot{u} + A(t)u = f(t), \quad t \in J \setminus \{0\}, \quad u(0) = x,$$

puisque  $U_A$  est un opérateur d'évolution parabolique pour  $A$  alors on a

$$\partial_1 U_A = -AU_A,$$

et puisque  $A(t)$  est un opérateur fermé, alors on obtient

$$\partial_t \int_0^{t-\varepsilon} U_A(t, \tau) f(\tau) d\tau + A(t) \int_0^{t-\varepsilon} U_A(t, \tau) f(\tau) d\tau = U_A(t, t-\varepsilon) f(t-\varepsilon),$$

car

$$\int_0^{t-\varepsilon} U_A(t, \tau) f(\tau) d\tau = U_A(t, t-\varepsilon) f(t-\varepsilon) + \int_0^{t-\varepsilon} \partial_1 U_A(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Enfin, puisque  $A(t)$  est fermé et  $U_A$  est fortement continu sur  $J_\Delta$ , et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on en déduit que

$U_A * f(., 0)$  est la solution de

$$\dot{u} + A(t)u = f(t), \quad t \in J \setminus \{0\}, u(0) = 0,$$

ce qui prouve le résultat de l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème

$$\dot{u} + A(t)u = f(t), \quad t \in J \setminus \{0\}, u(0) = x.$$

□

## 5.5 Stabilité

Dans ce qui suit on donne quelques résultats de régularité, en outre on donnera des estimations à décroissance rapide pour la solution du problème de Cauchy cité avant.

Soient  $E_0, E_1$  deux espaces de Banach, tel que  $E_1$  est dense dans  $E_0$ ,  $J$  un intervalle parfait de  $\mathbb{R}^+$ , tel que  $0 \in J$  et  $\rho \in (0, 1)$ .

On suppose que  $\mathcal{A} \subset C^\rho(J, \mathcal{L}(E_1, E_0))$  et qu'il existe des constantes  $\eta \geq 0$ ,  $\omega > 0$ ,  $k \geq 1$  et  $\sigma \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{aligned} [A]_{\rho, J} &\leq \eta, \quad A \in \mathcal{A}, \text{ et} \\ \sigma + A &\subset C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0, k, \omega)) \end{aligned}$$

On notera l'ensemble de ces hypothèses par  $(X)$ .

### 5.5.1 Estimation des opérateurs d'évolution

**Théorème 5.7** *Supposons  $(X)$  vérifiée.*

*Alors il existe une constante  $c_0(\rho)$  indépendante de  $\eta$  tel que pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , il existe un opérateur d'évolution parabolique unique pour  $A$ , avec sous espace de régularité  $E_1$  et vérifiant*

$$\|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_j)} + (t-s) \|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq ce^{\nu(t-s)},$$

*pour  $(t, s) \in J_\Delta^*$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , et  $j = 0, 1$ , où  $\nu := c_0(\rho) \eta^{1/\rho} + \sigma + \omega$ .*

**Preuve.** D'après l'hypothèse (X) ,[[2]] la proposition I.1.4.1 et le corollaire I.1.4.3], il existe  $\tilde{\omega} < \omega$  ,  $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})$  et  $M > 0$  tel que

$$\sigma + \tilde{\omega} + \sum_{\vartheta} \subset \rho (-A(s)), \text{ et}$$

$$\|\sigma + \tilde{\omega} + A(s)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} + (1 + |\lambda|)^{1-j} \|\lambda + (\sigma + \tilde{\omega} + A(s))\|_{\mathcal{L}(E_0, E_j)}^{-1} \leq M ,$$

pour  $(s, \lambda, A) \in J \times \sum_{\vartheta} \times \mathcal{A}$ ,  $j = 0, 1$ .

ainsi le Théorème 5.4 implique l'existence d'une constante  $c_0(\rho)$ , indépendante de  $\eta$ , tel que

pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , il existe un opérateur d'évolution parabolique unique  $U_{\sigma+\tilde{\omega}+A}$  pour  $\sigma + \tilde{\omega} + A$ , possédant  $E_1$  comme sous-espace de régularité et vérifiant

$$U_{\sigma+\tilde{\omega}+A} \in C(J_{\Delta}, \mathcal{L}_s(E_1))$$

et en prenant  $\varepsilon = \omega - \tilde{\omega}$  on trouve

$$\|U_{\sigma+\tilde{\omega}+A}\|_{\mathcal{L}(E_j)} + (t-s) \|U_{\sigma+\tilde{\omega}+A}\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq ce^{(\mu+\omega-\tilde{\omega})(t-s)},$$

pour  $(t, s) \in J_{\Delta}^*$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , et  $j = 0, 1$ , où  $\mu := c_0(\rho) \eta^{1/\rho}$ .

D'après la remarque 5.2 (d)

$$U_A(t, s) := e^{(\sigma+\tilde{\omega})(t-s)} U_{\sigma+\tilde{\omega}+A}(t, s), (t, s) \in J_{\Delta},$$

est un opérateur d'évolution parabolique pour  $A$ , avec sous-espace de régularité  $E_1$ , alors  $U_A$  est l'unique opérateur d'évolution parabolique pour  $A$  avec

$$\|U_A\|_{\mathcal{L}(E_j)} + (t-s) \|U_A\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq ce^{(\mu+\sigma+\omega)(t-s)} = ce^{\nu(t-s)},$$

d'où le résultat voulu. □

On notera dans la suite :  $\nu := c_0(\rho) \eta^{1/\rho} + \sigma + \omega$ ,

**Lemme 5.6** *On suppose que  $0 \leq \beta_- \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ , et que  $\beta_- < \beta$  ssi  $0 < \beta < \alpha < 1$ , et qu'il n'existe pas de foncteur d'interpolation  $\mathcal{F}$  d'exposant  $\beta/\alpha$  tel que  $\mathcal{F}(E_0, E_{\alpha}) = E_{\beta}$ . Alors*

$$U_A \in C(J_{\Delta}, \mathcal{L}_s(E_{\alpha})) \cap C(J_{\Delta}^*, \mathcal{L}(E_{\beta}, E_{\alpha})),$$

et

$$\|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha})} + (t-s)^{\alpha-\beta_-} \|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_{\beta}, E_{\alpha})} \leq ce^{\nu(t-s)}, \text{ pour } (t, s) \in J_{\Delta}^*, A \in \mathcal{A}.$$

**Preuve.** Si  $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ , alors le résultat découle du théorème 5.7, sachant qu'on a mentionné dans la preuve de ce théorème que  $U_A(t, s) := e^{(\sigma+\tilde{\omega})(t-s)} U_{\sigma+\tilde{\omega}+A}(t, s)$ ,  $(t, s) \in$

$J_\Delta$ , et que  $U_{\sigma+\tilde{\omega}+A} \in C(J_\Delta, \mathcal{L}_s(E_1))$ , d'où le résultat voulu. Maintenant pour  $\{\alpha, \beta\} \notin \{0, 1\}$  et puisqu'on a

$$\begin{aligned} U_A &\in C(J_\Delta, \mathcal{L}_s(E_1)) \cap C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E_0, E_1)), \text{ c.à.d} \\ \forall (t, s) &\in J_\Delta, U_A(t, s) \in \mathcal{L}(E_1, E_1), \text{ et} \\ \forall (t, s) &\in J_\Delta^*, U_A(t, s) \in \mathcal{L}(E_0, E_1), \end{aligned}$$

ce qui donne par interpolation pour  $0 < \beta < 1$

$$U_A(t, s) \in \mathcal{L}(E_\beta, E_1), \forall (t, s) \in J_\Delta^*$$

ainsi on a

$$U_A \in C(J_\Delta, \mathcal{L}_s(E_1)) \cap C(J_\Delta, \mathcal{L}(E_\beta, E_1)),$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} U_A &\in C(J_\Delta, \mathcal{L}_s(E_0)) \cap C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E_0)), \\ U_A &\in C(J_\Delta, \mathcal{L}_s(E_1)) \cap C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E_0, E_1)), \end{aligned}$$

c.à.d

$$\begin{aligned} \forall (t, s) &\in J_\Delta^*, U_A(t, s) \in \mathcal{L}(E_0, E_1), \text{ et} \\ \forall (t, s) &\in J_\Delta^*, U_A(t, s) \in \mathcal{L}(E_0, E_0), \end{aligned}$$

Par interpolation pour  $0 < \alpha < 1$ , on obtient

$$U_A(t, s) \in \mathcal{L}(E_0, E_\alpha),$$

ainsi

$$U_A(t, s) \in C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E_0, E_\alpha)),$$

en outre et puisqu'on a  $E_1 \xrightarrow{d} E_\alpha$ , alors on obtient

$$\forall (t, s) \in J_\Delta, U_A(t, s) \in \mathcal{L}_s(E_\alpha)$$

ainsi, on déduit que

$$\begin{aligned} U_A &\in C(J_\Delta, \mathcal{L}_s(E_\alpha)) \cap C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E_0, E_\alpha)) \quad \text{pour } 0 < \alpha < 1, \text{ et} \\ U_A &\in C(J_\Delta, \mathcal{L}_s(E_1)) \cap C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E_\beta, E_1)) \quad \text{pour } 0 < \beta < 1. \end{aligned}$$

En ce qui concerne l'inégalité

$$\|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha)} + (t-s)^{\alpha-\beta-} \|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_\beta, E_\alpha)} \leq ce^{\nu(t-s)}, \text{ pour } (t, s) \in J_\Delta^*, A \in \mathcal{A},$$

dans les deux cas où  $\alpha = 1$  et  $0 < \beta < 1$ , ainsi que  $\beta = 0$  et  $0 < \alpha < 1$ , elle résulte de l'inégalité d'interpolation.

Supposons maintenant que  $0 < \alpha < 1$ , par interpolation du morphisme

$$U_A(t, s) : (E_0, E_\alpha) \longrightarrow (E_\alpha, E_\alpha)$$

(puisque'on a déjà vu que  $U_A \in C(J_\Delta, \mathcal{L}_s(E_\alpha)) \cap C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E_0, E_\alpha))$  pour  $0 < \alpha < 1$ ), et grâce au foncteur d'interpolation d'exposant  $\xi$ , on trouve

$$U_A \in C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(\mathcal{F}(E_0, E_\alpha), E_\alpha)), \text{ et} \\ (t-s)^{(1-\xi)\alpha} \|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}(E_0, E_\alpha), E_\alpha)} \leq ce^{\nu(t-s)}, \text{ pour } (t, s) \in J_\Delta^*, A \in \mathcal{A}, 0 < \xi < 1.$$

S'il existe un foncteur d'interpolation  $\mathcal{F}$  d'exposant  $(\beta/\alpha)$  tel que  $\mathcal{F}(E_0, E_\alpha) \doteq E_\beta$ , si on pose  $\xi = \beta/\alpha$ , alors l'assertion est valide, sinon on pose  $\mathcal{F} := (\cdot, \cdot)_\xi$ , avec  $\xi := \beta_-/\alpha$  et on obtient le résultat par la propriété de réitération dans [[2] Remarque I.11.2].  $\square$

**Lemme 5.7** *On suppose que  $0 \leq \beta < 1$  et  $0 < \alpha \leq 1$ . Alors*

$$(t-s)^{\beta-\alpha} \|(U_A - U_B)(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_\beta)} \leq ce^{\nu(t-s)} \max_{s \leq \tau \leq t} \|A(\tau) - B(\tau)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)},$$

pour  $(t, s) \in J_\Delta^*$ , et  $A, B \in \mathcal{A}$ .

**Preuve.** Puisque  $U_A$  et  $U_B$  sont des opérateurs d'évolution parabolique pour  $A$  et  $B$  respectivement alors on a

$$\partial_\tau [U_A(t, \tau) U_B(\tau, s)] = U_A(t, \tau) [A(\tau) - B(\tau)] U_B(\tau, s),$$

par intégration, on obtient

$$U_A(t, s) - U_B(t, s) = - \int_s^t U_A(t, \tau) [A(\tau) - B(\tau)] U_B(\tau, s) d\tau, \text{ pour } (t, s) \in J_\Delta,$$

ainsi

$$\begin{aligned} \|(U_A - U_B)(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_\beta)} &= \left\| \int_s^t U_A(t, \tau) [A(\tau) - B(\tau)] U_B(\tau, s) d\tau \right\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_\beta)} \\ &\leq \int_s^t \|U_A(t, \tau)\|_{\mathcal{L}(E_0, E_\beta)} \| [A(\tau) - B(\tau)] \|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \\ &\quad \cdot \|U_B(\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_1)} d\tau \\ &\leq ce^{\nu(t-s)} \int_s^t (t-\tau)^{-\beta} (\tau-s)^{\alpha-1} d\tau \max_{s \leq \tau \leq t} \|(A-B)(\tau)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \\ &= cB(\alpha, 1-\beta) \max_{s \leq \tau \leq t} \|(A-B)(\tau)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} (t-s)^{\alpha-\beta} e^{\nu(t-s)}, \end{aligned}$$

où  $B$  est la fonction bêta d'Euler, et la dernière inégalité résulte du lemme 5.6 . D'où

$$(t-s)^{\beta-\alpha} \|(U_A - U_B)(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_\beta)} \leq ce^{\nu(t-s)} \max_{s \leq \tau \leq t} \|A(\tau) - B(\tau)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)},$$

pour  $(t, s) \in J_{\Delta}^*$ , et  $A, B \in \mathcal{A}$ . □

Pour  $(x, A, f) \in E_0 \times \mathcal{A} \times L_{1,loc}(J, E_0)$ , on considère le problème de Cauchy linéaire

$$\dot{u} + A(t)u = f(t), \quad t \in J, u(0) = x$$

D'après la remarque 5.2 (e), la bonne solution de ce problème s'écrit sous la forme

$$u(\cdot, x, A, f) := (U_A x + U_A * f)(\cdot, 0).$$

Dans la suite, on donne deux théorèmes assurant la continuité par rapport aux données initiales pour la bonne solution indiquée ci-dessus.

**Théorème 5.8** *Supposons que  $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$  avec  $\alpha > 0$  et  $1 > \beta$  et  $0 < \gamma \leq 1$ . Alors*

$$\begin{aligned} & \|u(t, x_0, A_0, f_0) - u(t, x_1, A_1, f_1)\|_{\beta} \\ & \leq c \left\{ t^{\alpha-\beta} \|A_0 - A_1\|_{C([0,t], \mathcal{L}(E_1, E_0))} \left[ \|x_0\|_{\alpha} + t^{1-\alpha+\gamma} \|f_0\|_{L_{\infty}((0,t), E_{\gamma})} \right] \right\} \\ & \quad + c \left\{ \|x_0 - x_1\|_{\beta} + t^{1-\beta} \|f_0 - f_1\|_{L_{\infty}((0,t), E_0)} e^{\gamma t} \right\}, \end{aligned}$$

pour  $t \in J, (x_j, A_j, f_j) \in E_{\alpha} \times \mathcal{A} \times L_{\infty,loc}(J, E_{\gamma})$ .

**Preuve.** Posons  $u_j := u(\cdot, x_j, A_j, f_j)$ , et  $U_j := U_{A_j}$ , on a

$$\begin{aligned} u_0 - u_1 &= (U_0 x_0 + U_0 * f_0) - (U_1 x_1 + U_1 * f_1) \\ &= (U_0 - U_1) x_0 + (U_0 - U_1) * f_0 + U_1 (x_0 - x_1) + U_1 * (f_0 - f_1), \end{aligned}$$

d'où alors et d'après les lemmes 5.6 et 5.7 on a

$$\begin{aligned} & \|u(t, x_0, A_0, f_0) - u(t, x_1, A_1, f_1)\|_{\beta} \leq \\ & \|(U_0 - U_1)(t, 0) x_0\|_{\beta} + \|(U_0 - U_1) * f_0(t, 0)\|_{\beta} \\ & + \|U_1(t, 0)(x_0 - x_1)\|_{\beta} + \|U_1 * (f_0 - f_1)(t, 0)\|_{\beta}, \end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned} \|(U_0 - U_1)(t, 0) x_0\|_{\beta} &\leq ct^{\alpha-\beta} \|A_0 - A_1\|_{C([0,t], \mathcal{L}(E_1, E_0))} \|x_0\|_{\alpha}, \\ \|(U_0 - U_1) * f_0(t, 0)\|_{\beta} &= \left\| \int_0^t (U_0 - U_1)(t, \tau) f_0(\tau) d\tau \right\|_{\beta} \\ &\leq \int_0^t \|(U_0 - U_1)(t, \tau)\|_{\mathcal{L}(E_{\gamma}, E_{\beta})} \|f_0(\tau)\|_{E_{\gamma}} d\tau \\ &\leq \int_0^t \|(U_0 - U_1)(t, \tau)\|_{\mathcal{L}(E_{\gamma}, E_{\alpha})} \|f_0(\tau)\|_{E_{\gamma}} d\tau \end{aligned}$$

(cette dernière inégalité résulte du fait que  $(E_\alpha \hookrightarrow E_\beta)$ ),  
ainsi

$$\begin{aligned} \|(U_0 - U_1) * f_0(t, 0)\|_\beta &\leq c \|f_0\|_{L_\infty((0,t), E_\gamma)} t^{1-\alpha} e^{\gamma t} \|A_0 - A_1\|_{C([0,t], \mathcal{L}(E_1, E_0))}, \\ \|U_1(t, 0)(x_0 - x_1)\|_\beta &\leq c e^{\nu t} \|x_0 - x_1\|_\beta, \text{ et} \\ \|U_1 * (f_0 - f_1)(t, 0)\|_\beta &\leq \|f_0 - f_1\|_{L_\infty((0,t), E_0)} \int_0^t \|U_1(t, \tau)\|_{\mathcal{L}(E_0, E_\beta)} d\tau \\ &\leq \|f_0 - f_1\|_{L_\infty((0,t), E_0)} \int_0^t c t^{-\beta} e^{\nu t} d\tau \\ &= c t^{1-\beta} \|f_0 - f_1\|_{L_\infty((0,t), E_0)} e^{\nu t}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

### 5.5.2 Estimation de Hölder

**Théorème 5.9** *Supposons que  $0 \leq \beta \leq \alpha < 1$ . Si  $x \in E_\alpha$  et  $f \in L_{\infty,loc}(J, E_0)$ .  
Alors*

$$u := u(., x, A, f) \in C^{\alpha-\beta}(J, E_\beta),$$

avec

$$\|u(t) - u(s)\|_\beta \leq c(t-s)^{\alpha-\beta} e^{\nu t} \left( \|x\|_\alpha + \|f\|_{L_\infty((0,t), E_0)} \right),$$

pour  $(s, t) \in J_\Delta$ , et  $(x, A, f) \in E_\alpha \times \mathcal{A} \times L_{\infty,loc}(J, E_0)$

**Preuve.** On a

$$\|A(t)U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_0)} \leq \|A(t)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_1)},$$

ainsi

$$\begin{aligned} &\|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha)} + (t-s)^{1-\alpha} \|A(t)U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_0)} \\ &\leq \|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha)} + (t-s)^{1-\alpha} \|A(t)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_1)}, \end{aligned}$$

rappelons que dans la preuve du théorème 5.7 on a pris  $\varepsilon = \omega - \tilde{\omega}$ , si on remplace ce  $\varepsilon$  par  $\varepsilon_0$  tel que  $\varepsilon_0 < \omega - \tilde{\omega}$ , et d'après le lemme 5.6 il existe  $\varepsilon = \omega - \varepsilon_0 - \tilde{\omega}$ , tel que

$$\|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha)} + (t-s)^{1-\alpha} \|A(t)U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_0)} \leq c e^{(\nu-\varepsilon)(t-s)},$$

pour  $(t, s) \in J_\Delta^*$ , et  $A \in \mathcal{A}$ .

D'après cette dernière inégalité on trouve

$$\|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha)} \leq e^{(\nu-\varepsilon)(t-s)},$$

si de plus on utilise le lemme 5.6 avec  $\beta = 0$  et le fait que  $U_A$  est fortement continu, alors l'assertion est valide pour  $\alpha = 0$ .

Maintenant on suppose que  $\alpha > 0$ , avec  $\alpha > \beta$ , posons

$$v(t, s) := U_A(t, s)x \text{ pour } (t, s) \in J_\Delta \text{ et } x \in E_\alpha.$$

D'après le lemme 5.6 on a

$$v(\cdot, s) \in C(J \cap [s, \infty), E_\alpha),$$

et d'après les propriétés d'opérateurs d'évolution parabolique on a

$$\begin{aligned} v(\cdot, s) &\in C^1(J \cap ((s, \infty), E_0), \text{c.à.d}) \\ v(\cdot, s) &\in C(J \cap [s, \infty), E_\alpha) \cap C^1(J \cap (s, \infty), E_0), \end{aligned}$$

avec

$$\partial_1 v(t, s) = -A(t)U_A(t, s)x,$$

d'où

$$v(t, s) - v(r, s) = - \int_r^t (\tau - s)^{1-\alpha} A(\tau) U_A(\tau, s) x (\tau - s)^{\alpha-1} d\tau, \text{ et}$$

$$\|v(t, s) - v(r, s)\|_{E_0} \leq c(t-r)^\alpha e^{(\nu-\varepsilon)(t-s)} \|x\|_\alpha, \text{ pour } (t, s) \in J_\Delta, s \leq r \leq t,$$

cette dernière inégalité résulte de l'inégalité

$$\|U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha)} + (t-s)^{1-\alpha} \|A(t)U_A(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_0)} \leq ce^{(\nu-\varepsilon)(t-s)},$$

qui implique aussi

$$\|v(t, s) - v(r, s)\|_{E_\alpha} \leq \|v(t, s)\|_{E_\alpha} + \|v(r, s)\|_{E_\alpha} \leq ce^{(\nu-\varepsilon)(t-s)} \|x\|_{E_\alpha}.$$

En appliquant l'inégalité d'interpolation en prenant  $\gamma = 0$  dans le théorème 3.1, on trouve

$$\|U_A(t, s) - U_A(r, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_\beta)} \leq c(t-r)^{\alpha-\beta} e^{(\nu-\varepsilon)(t-s)},$$

pour  $s \leq r \leq t$ ,  $(t, s) \in J_\Delta$ , et  $A \in \mathcal{A}$ . Posons maintenant  $w = U_A * f(\cdot, 0)$ , alors on a

$$w(t) - w(s) = \int_s^t U_A(t, \tau) f(\tau) d\tau + \int_0^s [U_A(t, \tau) - U_A(s, \tau)] f(\tau) d\tau,$$

$$\text{pour } (t, s) \in J_\Delta,$$

d'après le lemme 5.6 on trouve

$$\begin{aligned} \left\| \int_s^t U_A(t, \tau) f(\tau) d\tau \right\|_{E_\beta} &\leq ce^{(\nu-\varepsilon)t} \int_s^t (t-\tau)^{-\beta} d\tau \|f\|_{L_\infty((0,t), E_0)} \\ &\leq ce^{(\nu-\varepsilon)t} (t-s)^{1-\beta} \|f\|_{L_\infty(0,t), E_0} \\ &\leq c(t-s)^{\alpha-\beta} e^{\nu t} \|f\|_{L_\infty((0,t), E_0)}, \end{aligned}$$

puisqu'on a  $(t-s)^{1-\beta} \leq t^{1-\alpha}(t-s)^{\alpha-\beta}$ ,  
 toujours d'après le lemme 5.6 on trouve

$$\begin{aligned} \|U_A(t, \tau) - U_A(s, \tau)\|_{\mathcal{L}(E_0, E_\beta)} &\leq \|U_A(t, s) - U_A(s, s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_\beta)} \|U_A(s, \tau)\|_{\mathcal{L}(E_0, E_\alpha)} \\ &\leq c(t-s)^{\alpha-\beta}(s-\tau)^{-\alpha} e^{(\nu-\varepsilon)(t-\tau)} e^{(\nu-\varepsilon)(t-s)} \\ &\leq c(t-s)^{\alpha-\beta}(s-\tau)^{-\alpha} e^{(\nu-\varepsilon)(t-\tau)}, \text{ pour } \tau \leq s \leq t, \end{aligned}$$

ainsi

$$\left\| \int_0^s [U_A(t, \tau) - U_A(s, \tau)] f(\tau) d\tau \right\|_{E_\beta} \leq c(t-s)^{\alpha-\beta} e^{\nu t} \|f\|_{L_\infty((0,t), E_0)},$$

pour  $(t, s) \in J_\Delta$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , et  $f \in L_{\infty, loc}(J, E_0)$ .

D'où alors

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(s)\|_{E_\beta} &= \|(U_A(t, 0) - U_A(s, 0))x + U_A * f(t, 0) - U_A * f(s, 0)\|_{E_\beta} \\ &\leq \|(U_A(t, 0) - U_A(s, 0))x\|_{E_\beta} + \|U_A * f(t, 0) - U_A * f(s, 0)\|_{E_\beta} \\ &\leq c(t-s)^{\alpha-\beta} e^{(\nu-\varepsilon)t} \|x\|_{E_\alpha} + c(t-s)^{\alpha-\beta} e^{\nu t} \|f\|_{L_\infty((0,t), E_0)} \\ &\leq c(t-s)^{\alpha-\beta} e^{\nu t} (\|x\|_{E_\alpha} + \|f\|_{L_\infty((0,t), E_0)}). \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\alpha = \beta$  on a

$$v(\cdot, s) \in C(J \cap [s, \infty), E_\alpha)$$

d'où

$$U_A(t, 0)x \in C(J, E_\beta).$$

D'autre part on montre que  $w \in C(J, E_\beta)$  pour  $\alpha = \beta$ ,

on a  $w(t) = U_A * f(t, 0)$ , en posant  $\beta = 0$  et  $\alpha = \beta$ , dans le lemme 5.6, on trouve

$$U_A \in C(J_\Delta^*, \mathcal{L}(E_0, E_\beta)),$$

ainsi on obtient

$$\|w(t) - w(s)\|_{E_\beta} \leq \left\| \int_s^t U_A(t, \tau) f(\tau) d\tau \right\|_{E_\beta} + \left\| \int_0^s [U_A(t, \tau) - U_A(s, \tau)] f(\tau) d\tau \right\|_{E_\beta},$$

en outre et d'après le lemme 5.6 on a

$$\left\| \int_s^t U_A(t, \tau) f(\tau) d\tau \right\|_{E_\beta} \leq \|f\|_{L_\infty((0,t), E_0)} \int_s^t (t-\tau)^{-\beta} e^{(\nu-\varepsilon)(t-\tau)} d\tau \leq \|f\|_{L_\infty((0,t), E_0)} e^{(\nu-\varepsilon)t} (t-s)^{1-\beta},$$

de plus

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^s [U_A(t, \tau) - U_A(s, \tau)] f(\tau) d\tau \right\|_{E_\beta} &\leq \|f\|_{L_\infty((0,t), E_0)} \int_0^s \|U_A(t, \tau) - U_A(s, \tau)\|_{\mathcal{L}(E_0, E_\beta)} d\tau \\ &\leq c \|f\|_{L_\infty((0,t), E_0)} e^{\nu(t-s)}, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $w \in C(J, E_\beta)$ . On en déduit finalement que  $u \in C(J, E_\beta)$  pour  $\alpha = \beta$ .  
□

## 5.6 Invariance et positivité des opérateurs d'évolution paraboliques

Dans cette partie le résultat qui nous intéresse le plus est celui de la positivité de l'opérateur d'évolution parabolique associé à  $A \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0))$ , et pour cela on fait quelques hypothèses sur  $A$  assurant ce résultat.

### 5.6.1 Positivité

**Définition 5.3** (*Approximation de Yosida*)

On suppose qu'il existe  $\omega \geq 0$  tel que

$$A \in \mathcal{C}(E) \quad \text{et} \quad (\omega, \infty) \subset \rho(-A).$$

Alors

$$A_\varepsilon := A(I + \varepsilon A)^{-1} \in \mathcal{L}(E) \quad \text{pour} \quad 0 < \varepsilon < 1/\omega,$$

et on note  $\{A_\varepsilon; 0 < \varepsilon < 1/\omega\}$  l'approximation Yosida de  $A$ .

**Proposition 7** (a) *Supposons que*

$$\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq k, \quad \lambda > \omega.$$

Alors

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (I + \varepsilon A)^{-1} x &= x, \quad x \in \overline{\text{dom}(A)}, \\ \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon x &= Ax, \quad x \in \text{dom}(A). \end{aligned}$$

(b) *Soient  $E_0, E_1$  deux espaces de Banach tels que  $E_1 \xrightarrow{d} E_0$ , supposons que*

$$A \in \mathcal{H}(E_1, E_0, k, \omega)$$

pour un certain  $k \geq 1$  et  $\omega > 1$ . Alors

$$A \in \mathcal{C}(E_0) \quad \text{et} \quad (\omega, \infty) \subset \rho(-A),$$

ainsi  $A_\varepsilon \in \mathcal{L}(E_0)$  est bien défini pour  $0 < \varepsilon < 1/\omega$ . Sachant que

$$\|(I + \varepsilon A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq k/\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1/\omega$$

alors on obtient

$$\|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq \varepsilon^{-1} k \|A\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)}, \quad 0 < \varepsilon < 1/\omega,$$

d'où

$$A_\varepsilon \in \mathcal{H} \left( E_0, E_0, 2, 1 + 2\varepsilon^{-1}k \|A\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \right).$$

(c) Supposons que  $A \in \mathcal{C}(E_0)$  et qu'il existe  $\omega, k \in \mathbb{R}^+$ , tels que

$$[\operatorname{Re}\lambda \geq \omega] \subset \rho(-A) \quad \text{et} \quad \|\lambda(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq k, \quad \operatorname{Re}\lambda \geq \omega.$$

Alors

$$\begin{aligned} [\operatorname{Re}z \geq \omega / (1 - \varepsilon\omega)] &\subset \rho(-A_\varepsilon), \\ \text{et } \|\lambda(\lambda + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} &\leq k + 1, \operatorname{Re}\lambda \geq \omega / (1 - \varepsilon\omega), \text{ pour } 0 < \varepsilon < 1/\omega. \end{aligned}$$

(d) Supposons que  $A \in \mathcal{C}(E_0)$ ,  $[\operatorname{Re}z \geq 0] \subset \rho(-A)$ , et qu'il existe  $k > 0$ , tel que

$$\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq k, \operatorname{Re}\lambda \geq 0$$

Alors il existe  $v := v(k) \in (0, \pi/2)$  et  $c := c(k) > 0$  tel que

$$\|\lambda(\lambda + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq c, \quad \lambda \in \sum_{\vartheta} \text{ pour } \varepsilon > 0.$$

Soient maintenant  $E_0, E_1$ , deux espaces de Banach tels que  $E_1 \xrightarrow{d} E_0$ ,  $J$  un sous-intervalle parfait de  $\mathbb{R}^n$  contenant 0, et supposons que  $\rho \in (0, 1)$ ,  $k \geq 1$ , et  $\omega > 0$ , avec

$$A \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0, k, \omega)).$$

Alors l'ensemble des approximations de Yosida  $\{A_\varepsilon(s) \in \mathcal{L}(E_0); 0 < \varepsilon < 1/\omega\}$  est bien défini pour  $s \in J$ .

et puisque les applications

$$\mathcal{H}(E_1, E_0, k, \omega) \longrightarrow \mathcal{L}(E_0, E_1), B \longrightarrow (I + \varepsilon B)^{-1}$$

sont analytiques pour  $0 < \varepsilon < 1/\omega$ , alors le fait que  $A \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0, k, \omega))$ , implique

$$A_\varepsilon \in C^\rho(J, \mathcal{L}(E_0)) \quad \text{pour } 0 < \varepsilon < 1/\omega.$$

D'où, grâce au corollaire 5.5, il existe un opérateur d'évolution parabolique unique  $U_{A_\varepsilon}$  possédant  $E_0$  comme un sous espace de régularité.

Dans ce qui suit on va montrer que

$$U_{(\omega+A)_\varepsilon - \omega}(t, s) \xrightarrow{cv} U_A(t, s), \quad \text{dans } \mathcal{L}_s(E_0) \text{ qd } \varepsilon \xrightarrow{cv} 0.$$

Posons

$$B := \omega + A,$$

puisque  $(\omega, \infty) \subset \rho(-A)$ , alors

$$[\operatorname{Re} z \geq 0] \subset \rho(-B(s)) , \quad s \in J ,$$

en outre  $A \in \mathcal{H}(E_1, E_0, k, \omega)$ , donc  $\|(\lambda + A(s))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq \frac{k}{|\lambda|} \quad \operatorname{Re} \lambda \geq \omega \quad \forall s \in J$ ,  
d'où

$$\|(\lambda + B(s))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq \frac{k}{|\lambda + \omega|} \leq \frac{k}{|\lambda|} , \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0 , \quad s \in J .$$

Ainsi l'approximation de Yosida  $\{B_\varepsilon(s) := (B(s))_\varepsilon; \varepsilon > 0\}$  est bien définie pour  $s \in J$ .

Dans le lemme suivant on examine quelques estimations uniformes pour les semi groupes ayant pour générateur infinitésimal  $-B_\varepsilon(s)$

**Lemme 5.8** *Il existe une constante  $c(k) > 0$ , et  $\omega$ , tel que*

$$\left\| [B_\varepsilon(s)]^k e^{-tB_\varepsilon(s)} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq ct^{-k}, \text{ pour } t > 0, s \in J, \varepsilon > 0, \text{ et } k \in \{0, 1\} .$$

**Preuve.** D'après la propriété (d) des approximations de Yosida, et puisqu'on a

$$\|\lambda(\lambda + B(s))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq k, \operatorname{Re} \lambda \geq 0, s \in J,$$

on en déduit qu'il existe  $\vartheta := \vartheta_k \in (0, \pi/2)$  et  $c := c(k) > 0$ , tel que

$$\|\lambda(\lambda + B_\varepsilon(s))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq c, \lambda \in \sum_{\vartheta}, s \in J, \text{ pour } \varepsilon > 0 .$$

Sachant que

$$[B_\varepsilon(s)]^k e^{-tB_\varepsilon(s)} = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^k e^{t\lambda} (\lambda + B_\varepsilon(s))^{-1} d\lambda,$$

où  $\Gamma$  est une courbe simple régulière par morceau dans  $\sum_{\vartheta}$  traversant de  $\infty e^{-i(\vartheta + \frac{\pi}{2})}$  à  $\infty e^{i(\vartheta + \frac{\pi}{2})}$ ,

on applique le Lemme 5.1 qui garantit que

$$\left\| [B_\varepsilon(s)]^k e^{-tB_\varepsilon(s)} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq ct^{-k} \text{ pour } t > 0 , s \in J , \varepsilon > 0 , \text{ et } k \in \{0, 1\} .$$

**Remarque 5.5** *puisque'on a  $A \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0, k, \omega))$ , et d'après les propriétés de  $\mathcal{H}(E_1, E_0, k, \omega)$ , on obtient*

$$\omega \|\omega + A(s)\|_{\mathcal{L}(E_0)}^{-1} = \omega \|B_\varepsilon^{-1}(s)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq k , \quad s \in J ,$$

d'où

$$0 \in \rho(B_\varepsilon(s)) \quad \text{et} \quad B_\varepsilon^{-1}(s) = (I + \varepsilon B(s)) B^{-1}(s) , \quad s \in J , \quad \varepsilon > 0 ,$$

Ainsi  $[B_\varepsilon(s) - B_\varepsilon(t)] B_\varepsilon^{-1}(s)$  est bien défini pour  $s, t \in J$ ,  $\varepsilon > 0$ .

□

**Lemme 5.9** Soit  $s, t \in J$ , alors

$$\| [B_\varepsilon(s) - B_\varepsilon(t)] B_\varepsilon^{-1}(s) \|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq k^2 [A]_{\rho, J} |s - t|^\rho, \quad \varepsilon > 0.$$

**Preuve.** On remarque que  $\varepsilon B_\varepsilon = I - (I + \varepsilon B)^{-1}$  pour  $\varepsilon > 0$ , d'où

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(s) - B_\varepsilon(t) &= \varepsilon^{-1} [(I + \varepsilon B(t))^{-1} - (I + \varepsilon B(s))^{-1}] \\ &= \varepsilon^{-1} [(I + \varepsilon B(t))^{-1} (\varepsilon B(s) - \varepsilon B(t)) (I + \varepsilon B(s))^{-1}] \\ &= (I + \varepsilon B(t))^{-1} (B(s) - B(t)) (I + \varepsilon B(s))^{-1} \\ &= (I + \varepsilon B(t))^{-1} [A(s) - A(t)] (I + \varepsilon B(s))^{-1}. \end{aligned}$$

Puisqu'on a déjà vu que

$$\| (\lambda + B(s))^{-1} \|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq \frac{k}{|\lambda|}, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \quad s \in J,$$

Alors on obtient

$$\| (I + \varepsilon B(t))^{-1} \|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq k, \quad \varepsilon > 0, \quad t \in J,$$

en outre, grâce aux propriétés de  $\mathcal{H}(E_1, E_0, k, \omega)$  et sachant que  $B \in \mathcal{H}(E_1, E_0, k, 0)$ , on a

$$\| B^{-1}(t) \|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq k,$$

ainsi

$$\| (I + \varepsilon B(t))^{-1} \|_{\mathcal{L}(E_0)} \vee \| B^{-1}(t) \|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq k,$$

revenons maintenant à l'égalité

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(s) - B_\varepsilon(t) &= (I + \varepsilon B(t))^{-1} [A(s) - A(t)] (I + \varepsilon B(s))^{-1}, \text{ c.à.d} \\ \| [B_\varepsilon(s) - B_\varepsilon(t)] B_\varepsilon^{-1}(s) \|_{\mathcal{L}(E_0)} &= \| (I + \varepsilon B(t))^{-1} [A(s) - A(t)] B^{-1}(s) \|_{\mathcal{L}(E_0)} \\ &\leq \| (I + \varepsilon B(t))^{-1} \|_{\mathcal{L}(E_0)} \| A(s) - A(t) \|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \| B^{-1}(s) \|_{\mathcal{L}(E_0)}, \end{aligned}$$

d'où

$$\| [B_\varepsilon(s) - B_\varepsilon(t)] B_\varepsilon^{-1}(s) \|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq k^2 [A]_\rho |s - t|^\rho.$$

□

Le lemme suivant donne une estimation uniforme pour l'opérateur d'évolution parabolique  $U_{B_\varepsilon}$ .

**Lemme 5.10** On suppose que  $[A]_\rho \leq \eta$ . Alors il existe deux constantes positives  $c := c(k, \omega, \eta)$ , et  $\mu := \mu(k, \omega, \eta)$ , tel que

$$\| U_{B_\varepsilon}(t, s) \|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq ce^{\mu(t-s)}, \quad (t, s) \in J_\Delta, \quad \varepsilon > 0.$$

**Preuve.** D'après le Lemme 5.8, il existe une constante ( $c_0 := c_0(k, \omega)$ ) tel que

$$a_{B_\varepsilon} \in K(E_0, 0), \text{ et } \|a_{B_\varepsilon}(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq c_0, \quad (t, s) \in J_\Delta, \varepsilon > 0,$$

on rappelle que

$$a_{B_\varepsilon}(t, s) := e^{-(t-s)B_\varepsilon(s)}, \text{ et que } k_{B_\varepsilon}(t, s) := -[B_\varepsilon(t) - B_\varepsilon(s)] B_\varepsilon^{-1}(s) B_\varepsilon(s) e^{-(t-s)B_\varepsilon(s)},$$

Ainsi les Lemmes 5.8 et 5.9 garantissent que

$$\begin{aligned} k_{B_\varepsilon} &\in K(E_0, 1 - \rho), \\ \text{et } (t - s)^{1-\rho} \|k_{B_\varepsilon}(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_0)} &\leq c, \quad (t, s) \in J_\Delta^*, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Maintenant on pose  $\mu_0 := (\Gamma(\rho) c_0 \eta)^{1/\rho}$ . D'après le lemme 5.3 on a

$$w_{B_\varepsilon} \in K(E_0, 1 - \rho) \text{ et } (t - s)^{1-\rho} \|w_{B_\varepsilon}(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq ce^{\mu(t-s)}, \quad (t, s) \in J_\Delta^*, \quad \varepsilon > 0,$$

où  $\mu := \mu_0 + 1$ . Ainsi

$$a_{B_\varepsilon} * w_{B_\varepsilon} \in K(E_0, -\rho), \text{ et } (t - s)^{-\rho} \|a_{B_\varepsilon} * w_{B_\varepsilon}(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq ce^{\mu(t-s)}, \quad (t, s) \in J_\Delta^*, \quad \varepsilon > 0,$$

puisque

$$\|a_{B_\varepsilon} * w_{B_\varepsilon}\|_{(-\rho, T)} \leq \|a_{B_\varepsilon}\|_{(0, T)} \|w_{B_\varepsilon}\|_{(1-\rho, T)}, \quad T \in J.$$

Finalement on a

$$U_{B_\varepsilon} = a_{B_\varepsilon} + a_{B_\varepsilon} * w_{B_\varepsilon},$$

ainsi la preuve du Théorème 5.4 garantit que

$$\|U_{B_\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq ce^{\mu(t-s)}, \quad (t, s) \in J_\Delta, \quad \varepsilon > 0.$$

□

**Théorème 5.10** Soit  $(t, s) \in J_\Delta$ , alors

$$U_{(\omega+A)_\varepsilon - \omega}(t, s) \longrightarrow U_A(t, s), \quad \text{dans } \mathcal{L}_s(E_0) \text{ qd } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

**Preuve.** D'après la remarque 5.2 (d), on a

$$\begin{aligned} U_{B_\varepsilon - \omega}(t, s) &: = e^{\omega t} U_{B_\varepsilon}(t, s) e^{-\omega t}, \quad (t, s) \in J_\Delta \\ \text{et } U_{B - \omega}(t, s) &: = e^{\omega t} U_B(t, s) e^{-\omega s}, \quad (t, s) \in J_\Delta \end{aligned}$$

c.à.d pour montrer que

$$U_{B_\varepsilon - \omega}(t, s) = U_{(\omega+A)_\varepsilon - \omega}(t, s) \longrightarrow U_A(t, s) = U_{B - \omega}(t, s), \quad \text{dans } \mathcal{L}_s(E_0) \text{ qd } \varepsilon \longrightarrow 0$$

il suffit de montrer que

$$U_{B_\varepsilon}(t, s) \longrightarrow U_B(t, s), \quad \text{dans } \mathcal{L}_s(E_0) \text{ qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

de plus, on suppose que  $(t, s) \in J_\Delta^*$ , et que  $J$  est remplacé par  $[0, t]$ , c.à.d  $J$  compact. En utilisant les propriétés des opérateurs d'évolution parabolique, on trouve

$$\partial_\tau [U_{B_\varepsilon}(t, \tau) U_B(\tau, s)] = U_{B_\varepsilon}(t, \tau) [B_\varepsilon(\tau) - B(\tau)] U_B(\tau, s), \quad s < \tau < t,$$

en intégrant cette égalité sur  $[s, t]$ , on trouve

$$U_{B_\varepsilon}(t, s)x - U_B(t, s)x = - \int_s^t U_{B_\varepsilon}(t, \tau) [B_\varepsilon(\tau) - B(\tau)] U_B(\tau, s)x d\tau, \quad \text{pour } x \in E_0.$$

D'après le Théorème 5.4 on a

$$\begin{aligned} \|[B_\varepsilon(\tau) - B(\tau)] U_B(\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} &= \|[ (I + \varepsilon B(\tau))^{-1} - I ] B(\tau) U_B(\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \\ &\leq \|[(I + \varepsilon B(\tau))^{-1} - I] B(\tau)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \|U_B(\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E_1)} \\ &\leq \|(I + \varepsilon B(\tau))^{-1} - I\|_{\mathcal{L}(E_0)} \|B(\tau)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \|U_B(\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E_1)} \\ &\leq (k+1) \|B(\tau)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} c e^{\mu(t-s)}, \quad s \leq \tau \leq t \\ &\leq (k+1) \|B\|_{C(J, \mathcal{L}(E_1, E_0))}, \quad s \leq \tau \leq t \end{aligned}$$

Ainsi, et d'après le lemme 5.10, on remarque que la norme de l'intégrant

$$\|U_{B_\varepsilon}(t, \tau) [B_\varepsilon(\tau) - B(\tau)] U_B(\tau, s)x\|_{E_0},$$

est uniformément bornée par rapport à  $\varepsilon \in (0, 1/\omega)$ , pourvu que  $x \in E_1$ , on a

$$U_{B_\varepsilon}(t, s)x \longrightarrow U_B(t, s)x, \quad \text{dans } E_0 \quad \text{qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

et ceci en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Grâce aux propriétés de l'approximation de Yosida on a

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} B_\varepsilon(\tau)x = B(\tau)x, \quad x \in E_1.$$

Finalement, puisque  $E_1$  est dense dans  $E_0$  le lemme 5.10 garantit que

$$\|U_{B_\varepsilon}(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq c e^{\mu(t-s)}, \quad (t, s) \in J_\Delta, \quad \varepsilon > 0,$$

alors

$$U_{B_\varepsilon}(t, s) \longrightarrow U_B(t, s), \quad \text{dans } \mathcal{L}_s(E_0) \quad \text{qd } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

□

## 5.6.2 Invariance

Dans cette partie on va donner des conditions garantissant le résultat suivant

$$U_A(t, s)(X) \subset X, \quad (t, s) \in J_\Delta$$

où  $X$  est un sous ensemble convexe fermé de  $E_0$ .

**Lemme 5.11** Soient  $\Omega$  un ensemble non vide,  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\Omega$  et  $X$  un sous ensemble convexe fermé non vide de  $E$  (espace de Banach).

Si  $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, E)$  et  $f(\omega) \in X$  pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , alors

$$\int_{\Omega} f d\mu \in X.$$

**Preuve.** Soient  $e' \in E'$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tels que  $X \subset [\operatorname{Re}\langle e', x \rangle \leq \alpha]$ , alors

$$\operatorname{Re}\langle e', \int_{\Omega} f d\mu \rangle = \int_{\Omega} \operatorname{Re}\langle e', f \rangle d\mu \leq \alpha,$$

$$\text{c.à.d. } \int_{\Omega} f d\mu \in [\operatorname{Re}\langle e', x \rangle \leq \alpha],$$

en outre le Théorème de Hahn-Banach implique que  $X$  est l'intersection de tous les demi espaces  $[\operatorname{Re}\langle e', x \rangle \leq \alpha]$ , d'où alors

$$\int_{\Omega} f d\mu \in X.$$

□

**Théorème 5.11** Supposons que  $A \in \mathcal{G}(E, M, \sigma)$ .

Alors

$$[e^{-tA}(X) \subset X, \quad t \geq 0] \quad \text{ssi} \quad \left[ (I + \varepsilon A)^{-1}(X) \subset X, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{\sigma^+} \right].$$

**Preuve.** D'après la théorie des semi groupes on a

$$(I + \varepsilon A)^{-1} x = \int_0^{\infty} e^{-i} e^{-\varepsilon A t} x dt, \quad x \in X, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{\sigma^+},$$

en outre, et puisqu'on a  $e^{-tA}(X) \subset X$ ,  $t \geq 0$ , alors en prenant  $\mu := e^{-t} dt$  sur  $\Omega := \mathbb{R}^+$ , le lemme 5.11 implique

$$\int_0^{\infty} e^{-i} e^{-\varepsilon A t} x dt := \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon A t} x d\mu \in X, \quad \forall x \in X,$$

ainsi  $(I + \varepsilon A)^{-1}(X) \subset X, \forall x \in X$ . D'autre part

$$e^{-tA} x = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( I + \frac{t}{k} A \right)^{-k} x, \quad t \geq 0, \quad x \in E,$$

sachant que  $(I + \frac{t}{k}A)^{-k} x \in X$ ,  $\forall x \in X$ ,  $\forall k/0 < \frac{t}{k} < \frac{1}{\sigma^+}$ , et puisque  $X$  est fermé alors

$$\begin{aligned} e^{-tA}(x) &\in X, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \geq 0, \text{ c.à.d} \\ \text{c.à.d } e^{-tA}(X) &\subset X, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

en fait le résultat  $(I + \frac{t}{k}A)^{-k} x \in X$ ,  $\forall x \in X$ ,  $\forall k/0 < \frac{t}{k} < \frac{1}{\sigma^+}$ , est obtenu de la manière suivante,

puisque'on sait que  $(I + \frac{t}{k}A)^{-1} x \in X$ ,  $\forall x \in X$ ,  $\forall k/0 < \frac{t}{k} < \frac{1}{\sigma^+}$ , alors

$$(I + \frac{t}{k}A)^{-2} x = (I + \frac{t}{k}A)^{-1} \left[ (I + \frac{t}{k}A)^{-1} x \right] \in X, \text{ car } x' = (I + \frac{t}{k}A)^{-1} x \in X,$$

et ainsi de suite on trouve

$$\left( I + \frac{t}{k}A \right)^{-k} x \in X, \quad \forall x \in X, \quad \forall k/0 < \frac{t}{k} < \frac{1}{\sigma^+}.$$

□

Dans ce qui suit, on suppose que  $E_0, E_1$  sont deux espaces de Banach tels que  $E_1 \hookrightarrow E_0$ ,  $J$  un sous intervalle parfait de  $\mathbb{R}^+$  contenant 0 et  $X$  un sous ensemble non vide convexe fermé de  $E_0$ , on note par  $s(-A)$  la borne spectrale de  $A \in \mathcal{C}(E_0)$ .

Le résultat suivant, est en fait une extension du Théorème précédent pour les opérateurs d'évolution paraboliques.

**Théorème 5.12** *On suppose que*

$$\exists \rho \in (0, 1); \quad A \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0)) \text{ et que } s(-A(t)) \leq -\sigma < 0, \quad t \in J.$$

Alors

$$[(I + \varepsilon A(t))^{-1}(X) \subset X, \quad t \in J, \quad \varepsilon > 0] \implies [U_A(t, s)(X) \subset X, \quad (t, s) \in J_\Delta]$$

**Preuve.** On fixe  $(t_1, s) \in J_\Delta^*$ , et on remplace  $J$  par  $[0, t_1]$  noté encore par  $J$ . Alors  $A(J)$  est compact dans  $\mathcal{H}(E_1, E_0)$ , ainsi [[2]Corollaire I.1.3.2] garantit l'existence de  $k \geq 0$ ,  $\omega_0 > 0$ , tel que

$$A \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0, k, \omega_0)).$$

Posons maintenant  $\omega := \sigma/2$ , alors pour un  $t \in J$  fixé, [[2] proposition I.1.4.2] garantit l'existence de  $k_t = 1$ , et d'un voisinage  $V_t$  de  $A(t)$  dans  $\mathcal{L}(E_1, E_0)$  tel que

$$-\omega + V_t \subset \mathcal{H}(E_1, E_0, k_t, \omega),$$

puisque  $A(J)$  est compact et  $\{V_t, \quad t \in J\}$  est un recouvrement de  $A(J)$ , alors on peut extraire un sous recouvrement fini, c.à.d il existe  $t_0, \dots, t_n \in J$ , tel que

$$A(J) \subset \bigcup_{j=0}^n V_{t_j},$$

ainsi en posant  $k := \max k_{t_j}$ , on trouve

$$\tilde{A}(t) = -\omega + A(t) \in \mathcal{H}(E_1, E_0, k, \omega), t \in J,$$

le théorème 5.10 et la remarque 5.2(d) impliquent que

$$U_{A_\varepsilon}(t, s) = U_{(\omega + \tilde{A})_\varepsilon}(t, s) \longrightarrow U_{\omega + \tilde{A}}(t, s) = U_A(t, s), \text{ dans } \mathcal{L}_s(E_0) \text{ qd } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

alors il suffit de montrer que

$$[(I + \varepsilon A(t))^{-1}(X) \subset X, t \in J, \varepsilon > 0] \implies [U_{A_\varepsilon}(t, s)(X) \subset X, (t, s) \in J_\Delta, \varepsilon > 0],$$

pour cela posons  $u(., x) := U_{A_\varepsilon}(., s)x$ , alors on remarque que  $u(., x)$  est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\dot{u} + A_\varepsilon(t)u = 0, \quad s < t \leq t_1, \quad u(s) = x,$$

et puisque  $A_\varepsilon = \varepsilon^{-1}(I - (I + \varepsilon A)^{-1})$ , alors on déduit que  $u(., x)$  resoud le problème

$$\dot{u} + \varepsilon^{-1}u = \varepsilon^{-1}(I - (I + \varepsilon A(t))^{-1})u, \quad s < t \leq t_1, u(s) = x,$$

d'où  $u(., x)$  est donné par la formule de la variation des constantes pour le semi groupe  $\{e^{-t/\varepsilon}I_{E_0}; t \geq 0\}$ , c.à.d

$$u(t, x) = e^{-(t-s)/\varepsilon}x + \varepsilon^{-1} \int_s^t e^{-(t-\tau)/\varepsilon} (I + \varepsilon A(\tau))^{-1} u(\tau, x) d\tau, \quad s \leq t \leq t_1.$$

Posons  $v(t) := e^{-(t-s)/\varepsilon}x$ , pour  $t \in I := [s, t_1]$ , et on note par  $K$ , l'opérateur intégral de Volterra dans  $C(I, E_0)$  avec le noyau

$$k(t, \tau) := \varepsilon^{-1}e^{-(t-\tau)/\varepsilon} (I + \varepsilon A(\tau))^{-1}, \quad (t, \tau) \in I_\Delta,$$

puisque  $\|k(t, \tau)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq k/\varepsilon$  pour  $(t, \tau) \in I_\Delta$ , et puisqu'on a

$$\|k * k * \dots * k(t, \tau)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq \frac{[\Gamma(1-\alpha) \|k\|_{(\alpha, T)}]^n}{\Gamma(n(1-\alpha))} (t-\tau)^{n(1-\alpha)-1},$$

pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $(t, \tau) \in I_\Delta$ ,

alors  $K$  est quasi-nilpotent. D'où  $(I - K)^{-1}$  existe et est donné par la serie de Neumann, ainsi

$$u(., x) = (I - K)^{-1}v = \sum_{n=0}^{\infty} K^n v.$$

En posant

$$f(w) := v + Kw, \quad w \in C(I, E_0),$$

on en déduit que

$$u(., x) = \lim u_k, \quad \text{dans } C(I, E_0),$$

où  $u_0 = v$ ,  $u_{k+1} = f(u_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Notons que

$$f(w) = \alpha x + (1 - \alpha) Mw,$$

où

$$\alpha(t) := \alpha(t, s) := e^{-(t-s)/\varepsilon}, \text{ et } Mw(t) := \int_s^t \varphi(t, \tau) (I + \varepsilon A(\tau))^{-1} w(\tau) d\tau, \text{ avec}$$

$$\varphi(t, \tau) := [1 - \alpha(t)]^{-1} \varepsilon^{-1} e^{-(t-\tau)/\varepsilon}, \quad s \leq \tau \leq t.$$

D'où en posant  $\mu_t := \varphi(t, \cdot) d\tau$  sur  $\Omega := [s, t]$  pour  $t \in I$ , sachant que  $(I + \varepsilon A(t))^{-1}(X) \subset X$ , et en utilisant le lemme 5.11, on trouve  $Mw(t) \in X$  pour  $t \in I$ , pourvu que  $w \in C(I, X)$ , ainsi

$$f(C(I, X)) \subset C(I, X), \text{ si } x \in X,$$

par conséquent

$$u(., x) = \lim u_k \in X, \text{ pour } t \in I, \text{ si } x \in X,$$

et puisque cette propriété est vraie pour  $t \in [s, t_1]$ ,  $\forall (t_1, s) \in J_\Delta^*$ , d'où alors

$$U_{A_\varepsilon}(t, s)x \in X, \text{ pour } (t, s) \in J_\Delta, \text{ si } x \in X, \text{ ainsi}$$

$$U_A(t, s)(X) \subset X, \text{ pour } (t, s) \in J_\Delta.$$

□

**Définition 5.4** Un ensemble non vide  $C$  d'un espace vectoriel est dit cône si  $\mathbb{R}^+ C \subset C$ , Ainsi chaque cône contient 0. Si en outre  $C \cap (-C) = \{0\}$ , on dit que le cône est propre.

**Théorème 5.13** On suppose que  $A \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0))$  pour un certain  $\rho \in (0, 1)$ . Si  $X$  est un cône, alors

$$[e^{-tA(s)}(X) \subset X, \quad t \geq 0, \quad s \in J] \implies [U_A(t, s)(X) \subset X, \quad (t, s) \in J_\Delta.]$$

**Preuve.** Si on fixe  $(t_1, s) \in J_\Delta$ , on peut supposer que  $J$  est compact ( $J := [0, t]$ ), alors  $A(J)$  est compact dans  $\mathcal{H}(E_1, E_0)$ , ainsi le [[2]corollaire I.1.3.2]garantit l'existence de  $k \geq 1, \omega > 0$  tel que  $A \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0; k, \omega))$   
Puisque  $s(-A) < \omega$ , on obtient  $s(-(2\omega + A(t))) = -2\omega + s(-A(t)) \leq -\omega, \quad t \in J$ ,  
posons maintenant  $B := 2\omega + A$ , puisque  $e^{-tB(s)} = e^{-2\omega} e^{-tA(t)}$ , sachant que  $X$  est un cône et que  $e^{-tA(s)}(X) \subset X, \quad t \geq 0, \quad s \in J$ , on obtient

$$e^{-tB(s)}(X) \subset X, \quad t \geq 0, \quad s \in J$$

ainsi le Théorème 5.11 garantit que

$$(I + \varepsilon B(t))^{-1}(X) \subset X, \quad t \in J, \quad \varepsilon > 0,$$

et le théorème 5.12 garantit que

$$U_B(t, s)(X) \subset X, \quad (t, s) \in J_\Delta.$$

Ainsi, puisque

$$\begin{aligned} U_B(t, s) &= e^{-2\omega} U_A(t, s) e^{2\omega}, \quad (t, s) \in J_\Delta, \text{ c.à.d} \\ U_A(t, s) &= e^{2\omega} U_B(t, s) e^{-2\omega}, \quad (t, s) \in J_\Delta, \quad (t, s) \in J_\Delta \end{aligned}$$

sachant que  $\mathbb{R}^+ X \subset X$ , d'où alors

$$U_A(t, s)(X) \subset X, \quad (t, s) \in J_\Delta,$$

et puisque ceci est valide  $\forall t_1 \in J$ , alors

$$U_A(t, s)(X) \subset X, \quad (t, s) \in J_\Delta.$$

□

# Chapitre 6

## Problème de Coagulation-Fragmentation avec diffusion

Le présent chapitre est le but de notre mémoire et concerne l'étude du processus de coagulation fragmentation avec diffusion. Il s'agit essentiellement de trouver une fonction distribution

$$u = u(t, x, y) : [0, T) \times \mathbb{R}^n \times Y \longrightarrow \mathbb{R}; \quad T \in (0, \infty], Y = ]0, +\infty[ \quad (\text{cas continu}),$$

solution du problème de Cauchy suivant

$$(6.1) \quad \begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla u + \vec{a} u) + \vec{b} \cdot \nabla u + a_0 u = C_\gamma(u, u)(y) + f_\varphi(u)(y) + h \\ u(0, \cdot, y) = u^0(\cdot, y), \quad y \in Y, \end{cases}$$

pour  $n = 1, 2, 3$ ,

avec

- terme de coagulation :

$$C_\gamma(v, w)(y) := 1/2 \int_0^y \gamma(y - y', y') v(y - y') w(y') dy' - v(y) \int_0^\infty \gamma(y, y') w(y') dy',$$

pour  $\gamma \in K_{coag}, v, w \in \mathbb{F}$ , avec

$$\mathbb{F} := L_1(Y, (1 + y) dy),$$

$$K_{coag} := \{ \gamma \in L_\infty(Y^2, d^2 y) / \gamma(y, y') = \gamma(y', y), p.p \ y, y' \in Y \},$$

$K_{coag}$  étant un sous espace linéaire fermé de  $L_\infty(Y^2, d^2 y)$ ;

- terme de fragmentation :

$$f_\varphi(v)(y) := \int_y^\infty \varphi(y', y)v(y')dy' - \phi_\varphi(y)v(y), \quad v \in \mathbb{F} \text{ p.p } y \in Y, \text{ pour } \varphi \in K_{frag}$$

où

$$\phi_\varphi(y) = 1/y \int_0^y \varphi(y, y')y'dy', \quad \text{p.p } y \in Y, \text{ et } \phi_\varphi(0) = 0,$$

vérifie  $(\varphi \longrightarrow \phi_\varphi) \in \mathcal{L}(L_\infty(Y_\Delta^2, d^2y), L_{1,loc}(Y, dy))$ ,

avec  $Y_\Delta^2 = \{(y, y') \in Y^2 / 0 \leq y' \leq y\}$ ,

et

$$K_{frag} := \{\varphi \in L_\infty(Y_\Delta^2) / \phi_\varphi \in L_\infty(Y, dy)\},$$

$K_{frag}$  étant un espace de Banach muni de la norme

$$\varphi \rightarrow \|\varphi\|_\infty + \|\phi_\varphi\|_\infty.$$

Notons que  $Y$  est le support du paramètre  $y$  qui caractérise le volume des regroupements (ou des faisceaux) de particules obtenus soit par coagulation soit par fragmentation. Dans le cas continu, celui que nous envisageons ici,  $Y = \mathbb{R}^+$  (dans le cas discret  $Y = \mathbb{N}^+$ )

- $h$ , enfin, est un terme source

On énonce maintenant le résultat principal :

## 6.1 Enoncé du théorème principal

**Théorème 6.1** *Supposons que les applications*

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times Y \longrightarrow \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}, & \vec{a} &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^n, & \vec{b} &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ a_0 &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times Y \longrightarrow \mathbb{R}, & \varphi &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times Y^2 \longrightarrow \mathbb{R}, & \gamma &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times Y_\Delta^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

sont des fonctions suffisamment régulières par rapport à  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ , mesurables par rapport à  $y \in Y$ . De plus :

(i) la matrice de diffusion  $\mathbf{a}$  est définie positive uniformément par rapport à  $(x, t, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times Y$ , telle que

$$\mathbf{a}(x, t, y) \xi \cdot \xi \geq \underline{\alpha} |\xi|^2, \quad (x, t, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times Y, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

(ii) les taux de coalescence  $\gamma$  et de fragmentation  $\varphi$  vérifient

$$\exists \beta > 0; \left\{ \begin{array}{l} 1) 0 \leq \gamma(x, t, y, y') = \gamma(x, t, y, y') \leq \beta, \quad (x, t, y, y') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times Y^2 \\ 2) 0 \leq \varphi(x, t, y, y') \leq \beta, \quad (x, t, y, y') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times Y_\Delta^2 \\ 3) 1/y \int_0^y \varphi(y, y')y'dy' \leq \beta, \quad (x, t, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times Y. \end{array} \right.$$

Concernant le terme source on suppose

(iii)  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ , est une fonction suffisamment régulière par rapport à  $t$ , mesurable par rapport à  $y \in Y$ , vérifiant

$$h(x, t, y) \geq 0, \quad y \in Y.$$

Alors :

pour  $u^0 \in W_1^\sigma[\mathbb{F}] := W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ , le problème 6.1 possède sur l'intervalle maximal de temps  $J = [0, T)$  une solution unique  $u$  telle que

$$u(., u^0) \in C(J(u^0), W_1^\sigma[\mathbb{F}]) \cap C(J(u^0), W_1^{s+2}[\mathbb{F}]) \cap C^1(J(u^0), W_1^s[\mathbb{F}]),$$

vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_Y u(x, t, y) (1 + y) dy dx < \infty, \quad t \in [0, T).$$

avec

$$\begin{cases} (s^+ + n)/2 < \sigma < n \wedge (s + 2), & s < n \\ s < \sigma < s + 2, & s > n, \\ \sigma \notin \mathbb{N}. \end{cases} .$$

En plus on a (positivité)

$$(u^0 \geq 0) \implies (u(., u^0) \geq 0),$$

Si de plus  $\vec{b} = 0$ , alors on a (conservation de la masse) :

(1)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_Y u(x, t, y) y dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y u^0(x, y) y dy dx, \quad 0 \leq t < T,$$

pourvu que  $a_0 = h = 0$ .

(2)  $T = \infty$ , (c.à.d  $u$  est une solution globale) si  $n = 1$ , ou bien  $\mathbf{a}$  ne dépend pas de  $y$ , ou encore si  $\gamma = 0$  (i.e. dans le cas où il n'y a pas de coagulation)

La preuve du théorème précédent s'appuie essentiellement sur la transformation du système 6.1 en un problème de Cauchy semi-linéaire parabolique abstrait de la forme

$$\dot{u} + A(t)u = R(t, u), \quad t > 0, u(0) = u^0 \text{ sur } W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$$

Pour cela on suivra les étapes suivantes :

### 6.1.1 Préliminaires

Posons

$$\mathbb{F} := L_1(Y, (1 + y) dy),$$

notons par  $K_{coag}$  le sous espace linéaire fermé de  $L_\infty(Y^2, d^2y)$  suivant

$$K_{coag} := \{\gamma \in L_\infty(Y^2, d^2y) / \gamma(y, y') = \gamma(y', y), \text{ pp } y, y' \in Y\},$$

pour  $\gamma \in K_{coag}$ ,  $v, w \in \mathbb{F}$ , on pose

$$C_\gamma(v, w)(y) := 1/2 \int_0^y \gamma(y-y', y') v(y-y') w(y') dy' - v(y) \int_0^\infty \gamma(y, y') w(y') dy'$$

vérifiant

$$((\gamma, v, w) \mapsto C_\gamma(v, w)) \in \mathcal{L}(K_{coag}, \mathbb{F}, \mathbb{F}; \mathbb{F}),$$

en plus on a

$$\int_Y C_\gamma(v, v) y dy = 0, \text{ pour } v \in \mathbb{F}.$$

Soit

$$Y_\Delta^2 = \{(y, y') \in Y^2 / 0 \leq y' \leq y\},$$

on définit l'application

$$(\varphi \rightarrow \phi_\varphi) \in \mathcal{L}(L_\infty(Y_\Delta^2, d^2y), L_{1,loc}(Y, dy)),$$

par

$$\phi_\varphi(y) = 1/y \int_0^y \varphi(y, y') y' dy', \text{ p.p } y \in Y, \text{ et } \phi_\varphi(0) = 0,$$

on définit :

$$K_{frag} := \{\varphi \in L_\infty(Y_\Delta^2, d^2y) / \phi_\varphi \in L_\infty(Y, dy)\}$$

$K_{frag}$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\varphi \rightarrow \|\varphi\|_\infty + \|\phi_\varphi\|_\infty.$$

Posons pour  $\varphi \in K_{frag}$

$$f_\varphi(v)(y) := \int_y^\infty \varphi(y', y) v(y') dy' - \phi_\varphi(y) v(y), \text{ } v \in \mathbb{F} \text{ p.p } y \in Y,$$

On a alors :

$$((\varphi, v) \mapsto f_\varphi(v)) \in \mathcal{L}(K_{frag}, \mathbb{F}; \mathbb{F}) \text{ et } \int_Y f_\varphi(v) y dy = 0, \text{ pour } \varphi \in K_{frag} \text{ et } v \in \mathbb{F}.$$

**Définition 6.1 .**

(1) Soient  $E, E_0, E_1, \dots, E_m$  des espaces de Banach. On considère  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; E_0)$  l'espace des applications multilinéaires continues :

$$E_1 \times \dots \times E_m \mapsto E_0 \quad ; \quad (e_1, e_2, \dots, e_m) \mapsto e_1 \cdot e_2 \cdot \dots \cdot e_m \quad (*).$$

Si  $m \geq 2$  les éléments de  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; E_0)$  sont appelés multiplications.

(2) Si  $u_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E_j)$  on définit :  $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_m \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E_0)$  comme étant le produit point par point induit par la multiplication (\*) :

$$u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_m(x) = u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \dots \cdot u_m(x)$$

(3)  $C_b^{1-}(E_1, E_0)$  est l'espace suivant :  
 $\{f : E_1 \longrightarrow E_0$  uniformément lipshitzienne sur les sous-ensembles bornés de  $E_1\}$ ,  
 muni de la famille de semi normes  
 $\left\{ f \longrightarrow \sup_{x \in B} \|f(x)\|_0 + \sup_{x, y \in B / x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|_0}{\|x - y\|_1}; \quad B \text{ borné dans } E_1 \right\}$ ,  
 (c'est un espace localement convexe).

**Lemme 6.1** Soit  $p : 1 \leq p < \infty$ , on a :

1) l'application :  $BUC^s(\mathbb{R}^n, E_1) \times W_p^t(\mathbb{R}^n, E_2) \longrightarrow W_p^t(\mathbb{R}^n, E_0)$  ,  $(u_1, u_2) \longmapsto u_1 \cdot u_2$ ,  
 $0 \leq t < s < \infty$ , est une multiplication point par point.

2) l'application :  $BUC^r(\mathbb{R}^n, E_1) \times W_p^s(\mathbb{R}^n, E_2) \times W_p^s(\mathbb{R}^n, E_3) \longrightarrow W_p^t(\mathbb{R}^n, E_0)$  ,  $(u_1, u_2, u_3) \longmapsto u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ , est une multiplication point par point,  
 pourvu que  $n \leq t + n < 2s < 2n$  et  $t < r$  ,  
 tandis que pour  $n < s < r$

3) l'application  $BUC^r(\mathbb{R}^n, E_1) \times W_p^s(\mathbb{R}^n, E_2) \times W_p^s(\mathbb{R}^n, E_3) \longrightarrow W_p^s(\mathbb{R}^n, E_0)$  ,  $(u_1, u_2, u_3) \longmapsto u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ , est aussi une multiplication.

## 6.2 Termes de coagulation et de fragmentation

**Lemme 6.2** On a

(i) Si

$$0 \leq \tau < r < n, \quad \tau + n < 2\sigma < 2n$$

alors

$$((\gamma, u, v) \longmapsto c_\gamma(u, v)) \in \mathcal{L}(BUC^r(\mathbb{R}^n, K_{coag}), W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}); W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})),$$

et si

$$n < \tau < r < \infty,$$

alors

$$((\gamma, u, v) \longmapsto c_\gamma(u, v)) \in \mathcal{L}(BUC^r(\mathbb{R}^n, K_{coag}), W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}); W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})).$$

(ii) Supposons que

$$0 \leq \tau < r < \infty,$$

alors

$$((\varphi, u) \longmapsto f_\varphi(u)) \in \mathcal{L}(BUC^r(\mathbb{R}^n, K_{frag}), W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}); W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})).$$

**Preuve.** On vérifie facilement que

$$\begin{aligned} ((\gamma, u, v) &\longmapsto c_\gamma(u, v)) \in \mathcal{L}(K_{coag}, \mathbb{F}, \mathbb{F}; \mathbb{F}), \\ ((\varphi, u) &\longmapsto f_\varphi(u)) \in \mathcal{L}(K_{frag}, \mathbb{F}; \mathbb{F}), \end{aligned}$$

D'autre part en adoptant la notation suivante

$$c_\gamma(u, v)(x) := c_{\gamma(x)}(u(x), v(x)), \text{ pour } (\gamma, u, v) : \mathbb{R}^n \longrightarrow K_{coag} \times \mathbb{F} \times \mathbb{F}.$$

et

$$f_\varphi(u)(x) := f_{\varphi(x)}(u(x)), \text{ pour } (\varphi, u) : \mathbb{R}^n \longrightarrow K_{frag} \times \mathbb{F}$$

on vérifie que

$$(\gamma, u, v) \longmapsto c_\gamma(u, v), \text{ et } (\varphi, u) \longmapsto f_\varphi(u)$$

sont des multiplications induites respectivement par

$$\begin{aligned} ((\gamma, u, v) &\longmapsto c_\gamma(u, v)) \in \mathcal{L}(K_{coag}, \mathbb{F}, \mathbb{F}; \mathbb{F}), \text{ et} \\ ((\varphi, u) &\longmapsto f_\varphi(u)) \in \mathcal{L}(K_{frag}, \mathbb{F}; \mathbb{F}), \end{aligned}$$

On achève la démonstration par application du lemme 6.1. □

**Corollaire 6.2** *Supposons que*

$$\tau \in (-1, r) \setminus \mathbb{N} \text{ avec } r > 0$$

*et que*

$$\tau^+ + n < 2\sigma < 2n \text{ si } \tau < n, \tau := \sigma \text{ si } n < \tau.$$

*Supposons encore que*

$$t \longmapsto (\gamma(t), \varphi(t)) \in C^\rho(J, BUC^r(\mathbb{R}^n, K_{coag} \times K_{frag}))$$

*pour un certain  $\rho \in \mathbb{R}^+$ . Alors*

$$(t \longmapsto (c_{\gamma(t)}, f_{\varphi(t)})) \in C^\rho(J, \mathcal{L}^2(W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})) \times \mathcal{L}(W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}))).$$

**Preuve.** D'après le lemme 6.2 on a pour  $t$  fixé dans  $J$

si  $\tau < n$  :

$$((\gamma(t), u, v) \longmapsto c_{\gamma(t)}(u, v)) \in \mathcal{L}(BUC^r(\mathbb{R}^n, K_{coag}), W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}); W_1^{\tau^+}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})),$$

et si  $n < \tau$  :

$$((\gamma(t), u, v) \longmapsto c_{\gamma(t)}(u, v)) \in \mathcal{L}(BUC^r(\mathbb{R}^n, K_{coag}), W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}); W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})),$$

De plus

$$((\varphi(t), u) \longmapsto f_{\varphi(t)}(u)) \in \mathcal{L}(BUC^r(\mathbb{R}^n, K_{frag}), W_1^{\tau^+}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}); W_1^{\tau^+}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})),$$

Sachant que  $\tau^+ + n < 2\sigma < 2n$ , alors

$$(\tau^+ + n < 2\sigma < 2n \text{ et } \sigma < n) \implies (\tau^+ + n < \sigma + \sigma < \sigma + n) \implies (\tau^+ < \sigma).$$

Donc on a

$$W_1^{\tau^+}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \hookrightarrow W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), \text{ et } W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \hookrightarrow W_1^{\tau^+}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}).$$

D'où alors

$$((\varphi(t), u) \longmapsto f_{\varphi(t)}(u)) \in \mathcal{L}(BUC^r(\mathbb{R}^n, K_{frag}), W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}); W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})),$$

Or, par hypothèse :

$$(t \longmapsto (\gamma(t), \varphi(t))) \in C^\rho(J, BUC^r(\mathbb{R}^n, K_{coag} \times K_{frag})),$$

on obtient finalement

$$(t \longmapsto (c_{\gamma(t)}, f_{\varphi(t)})) \in C^\rho(J, \mathcal{L}^2(W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})) \times \mathcal{L}(W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}))).$$

□

Dans la suite on pose :  $\chi(x, t) := \chi(t)(x)$ ,  $\chi(x, t, y, y') := \chi(x, t)(y, y')$ , pour  $\chi \in \{\gamma, \varphi\}$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times J$ , et  $(y, y') \in Y \times Y$ ,

On pose également  $c(x, t, y, u) := c_{\gamma(x, t)}(u, u)(y)$ ,  $f((x, t, y, u)) := f_{\varphi(x, t)}(u)(y)$ , pour  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times J$ ,  $y \in Y$  et  $u \in \mathbb{F}$ .

Finalement on dénote par  $C(t, \cdot), F(t, \cdot)$  les opérateurs de Nemytskii induits respectivement par  $c(\cdot, t, \cdot, \cdot), f(\cdot, t, \cdot, \cdot)$ , définis par :

$C(t, u)(x) := c(x, t, \cdot, u(x))$ ,  $F(t, u)(x) := f(x, t, \cdot, u(x))$ , pour  $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{F}$  et  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times J$ .

Alors, sous les hypothèses du corollaire 6.2, on a

$$(t \longmapsto (C(t, \cdot) + F(t, \cdot))) \in C^\rho(J, C_b^\infty(W_1^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^\tau(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}))).$$

## 6.3 Opérateur de diffusion convection

On note par  $\mathbb{E}^\sigma, \sigma \geq 0$ , l'espace suivant

$$\mathbb{E}^\sigma := BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, L_{\infty, sym}^{n \times n}) \times BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, L_\infty^n) \times BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, L_\infty^n) \times BUC^{(\sigma-1)^+}(\mathbb{R}^n, L_\infty^1),$$

on note également  $e := (\mathbf{a}, \vec{a}, \vec{b}, a_0) \in \mathbb{E}^\sigma$  concrètement, et :  $e(x, y) := e(x)(y)$  pour  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $y \in Y$ .

Concernant l'opérateur de diffusion-convection, on adoptera la notation suivante :

$$A[e]u := -\nabla \cdot (\mathbf{a}\nabla u + \vec{a}u) + \vec{b} \cdot \nabla u + a_0u.$$

### 6.3.1 Cas de la diffusion constante

Pour fixer les idées il sera commode de considérer d'abord le cas où le terme de diffusion :  $\mathbf{a} \in \mathcal{L}(E^n)$  et  $\vec{a} = 0$ . Dans ce cas l'opérateur de diffusion convection s'écrit :

$$A_{\mathbf{a}} := -\operatorname{div} \circ \mathbf{a} \circ \operatorname{grad} = - \sum_{i,j} \mathbf{a}_{ij} \partial_{ij}^2.$$

Le but est alors de trouver des conditions sur  $\mathbf{a}$  afin que

$$A_{\mathbf{a}} \in \mathcal{H}(B_{p,q}^{s+2}, B_{p,q}^s) \text{ pour } p, q \in [1, \infty] \text{ et } s \in \mathbb{R}$$

On aura besoin d'introduire les notations suivantes

**Définition 6.2** (1) Pour  $M \geq 1$  fixé on pose

$$\mathcal{E}ll(E; M) = \mathcal{E}ll(M) := \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} \in \mathcal{L}(E^n) \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda \geq 0\} \subset \rho(-S_{\mathbf{a}}(\xi)), \\ (1 + |\lambda|) \|(\lambda + S_{\mathbf{a}}(\xi))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M, \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \xi \in S^{n-1} \end{array} \right\},$$

où  $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ , et

$$S_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(E), \xi \longmapsto \xi \cdot \mathbf{a} \xi = \sum \xi_i \xi_j \mathbf{a}_{ij},$$

est le symbole de  $\mathbf{a}$ .

(2) Pour  $\mathbf{a} \in \mathbf{L}_{\infty}(Y, \mathbb{R}_{sym}^{n \times n})$  on a

$$\begin{aligned} ell(a_0) &:= \{ \mathbf{a} \in \mathbf{L}_{\infty}(Y, \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}); \exists a_0 > 0 / \underline{\mathbf{a}}(y) := \min \{ \xi \cdot \mathbf{a}(y) \xi; \xi \in S^{n-1} \} \geq a_0; \\ & a_0 \geq 0 \text{ pp } y \in Y \} \end{aligned}$$

On a alors

**Proposition 8** Pour  $a_0 > 1$ , il existe  $M = M(a_0)$  tel que pour  $E := L_1(Y; (1+y) dy)$

$$ell(a_0) \leftrightarrow \mathcal{E}ll(E; M).$$

**Preuve.** Supposons que  $\mathbf{a} \in ell(a_0)$ , c.à.d

$$\min \{ \xi \cdot \mathbf{a}(y) \xi; \xi \in S^{n-1} \} \geq a_0 \text{ pp } y \in Y,$$

ainsi

$$\begin{aligned} |\lambda + \xi \cdot \mathbf{a}(y) \xi| &\geq c(|\lambda| + \xi \cdot \mathbf{a}(y) \xi) \geq c(a_0 + |\lambda|) \\ &\geq M(a_0)(1 + |\lambda|), \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \xi \in S^{n-1}, \end{aligned}$$

ce qui prouve d'une part que

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda \geq 0\} \subset \rho(-S_{\mathbf{a}}(\xi)), \xi \in S^{n-1},$$

et d'autre part

$$(1 + |\lambda|) \|(\lambda + S_{\mathbf{a}}(\xi))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M'(a_0), \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \xi \in S^{n-1},$$

en plus on a  $\|\mathbf{a}\|_{\mathcal{L}(E^n)} \leq \|\mathbf{a}\|_{L_{\infty}(Y, \mathbb{R}_{sym}^{n \times n})}$

d'où alors le résultat recherché.  $\square$

**Proposition 9** *Supposons qu'il existe  $M \geq 1$  tel que*

$$\mathbf{a} \in \mathcal{E}ll(E; M), \text{ et } \|\mathbf{a}\|_{\mathcal{L}(E^n)} \leq M.$$

*Alors pour  $\omega > 0$ , il existe  $k = k(M, \omega)$  tel que*

$$A_{\mathbf{a}} = -\text{div} \circ \mathbf{a} \circ \text{grad} \in \mathcal{H}(B_{p,q}^{s+2}, B_{p,q}^s; k, \omega), \text{ pour } p, q \in [1, \infty) \text{ et } s \in \mathbb{R}.$$

**Preuve.** Puisque le symbole  $S_{\mathbf{a}} : \xi \mapsto S_{\mathbf{a}}(\xi)$  est un polynôme homogène de degré deux, alors il vérifie

$$\|\partial^\nu S_{\mathbf{a}}(\xi)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq c(1 + |\xi|)^{2-|\nu|}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

signifiant que  $S_{\mathbf{a}} \in S^2(\mathbb{R}^n, E)$ . D'autre part on a  $\mathbf{a} \in \mathcal{E}ll(E; M)$ , ainsi on a

$$(1 + |\lambda|) \|(\lambda + S_{\mathbf{a}}(\xi))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M, \quad \text{Re} \lambda \geq 0, \quad \xi \in S^{n-1},$$

si on pose  $\xi' = \xi / |\xi|$  alors on obtient

$$\begin{aligned} \|(\lambda + S_{\mathbf{a}}(\xi))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} &= |\xi|^{-2} \left\| (\lambda |\xi|^{-2} + S_{\mathbf{a}}(\xi'))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \\ &\leq M (|\xi|^2 + |\lambda|)^{-1}, \quad \text{Re} \lambda \geq 0, \quad \xi \in (\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Ainsi pour  $\omega > 0$  fixé,  $\exists c(\omega) = 1 + \frac{1}{\omega} > 0$  tel que

$$(1 + |\lambda| + |\xi|^2) \|(\lambda + S_{\mathbf{a}}(\xi))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq c(\omega) M, \quad \text{Re} \lambda \geq \omega, \quad \xi \in (\mathbb{R}^n),$$

d'où  $\exists k \geq 1$  tel que

$$(1 + |\xi|)^2 \|(\lambda + S_{\mathbf{a}}(\xi))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} + (1 + |\lambda|) \|(\lambda + S_{\mathbf{a}}(\xi))^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq k, \quad \text{pour } \text{Re} \lambda \geq \omega, \quad \xi \in (\mathbb{R}^n),$$

c.à.d  $\lambda \in \omega + S_{\vartheta}$ .

Ce qui nous permet d'appliquer le théorème 4.9 sur le symbole  $S_{\mathbf{a}}$ , assurant que ce symbole est un multiplicateur de Fourier, et puis

$$A_{\mathbf{a}} = \mathcal{F}^{-1} S_{\mathbf{a}} \mathcal{F} = S_{\mathbf{a}}(D) \in \mathcal{H}(B_{p,q}^{s+2}, B_{p,q}^s; k, \omega).$$

□

Les résultats suivants sont bien connus pour les générateurs des semi groupes analytiques

**Lemme 6.3** (1) *Supposons que  $G \in \mathcal{H}(E_1, E_0; k, \omega)$  et  $B \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$  vérifiant*

$$\|Bu\|_{E_0} \leq \varepsilon \|u\|_{E_1} + c \|u\|_{E_0}, \quad u \in E_1,$$

*pour un certain  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{k})$ ,  $c \geq 0$ . Alors*

$$G + B \in \mathcal{H}(E_1, E_0; k^*, \omega^*),$$

*avec  $\omega^* := \omega \vee (\frac{c}{\varepsilon})$ , et  $k^* := \frac{k}{1 - k\varepsilon}$*

(2) *Si  $A \in \mathcal{H}(E_1, E_0)$  et s'il existe  $\theta \in [0, 1)$  tel que  $B \in \mathcal{L}(E_{\theta}, E_0)$ , alors  $A + B \in \mathcal{H}(E_1, E_0)$ .*

### 6.3.2 Cas particulier de la diffusion variable

Nous allons étendre le résultat précédent au cas variable, plus précisément on suppose :  $\mathbf{a} \in BUC^{1+t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}ll(M))$  et  $\vec{a} = 0$ .

Pour cela on a

**Théorème 6.3** *Pour  $M \geq 1$  fixé, il existe  $k \geq 1$  et  $\omega > 0$  tel que*

$$[\mathbf{a} \longmapsto A_{\mathbf{a}}] \in C^{1-} (BUC^{1+t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}ll(M)), \mathcal{H}(B_{p,q}^{s+2}, B_{p,q}^s; k, \omega)),$$

avec  $p, q \in [1, \infty)$ ,  $t \in (-1, 1]$  et  $s \in (-1, t)$ .

**Preuve.** On suivra plusieurs étapes

On commence par construire un recouvrement ouvert de  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} U &= \{U_j; j \in \mathbb{N}\} := \{R_j + \varepsilon Q, R_j \in \varepsilon \mathbb{Z}^n\}, \varepsilon \in (0, 1] \\ \text{où } Q &= \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < \sqrt{n}\}. \end{aligned}$$

Posons

$$\varphi_j : U_j \longrightarrow Q, x \longmapsto (x - R_j) / \varepsilon, j \in \mathbb{N}$$

notons que

$$\exists k = k(n) / \text{card}\{j \in \mathbb{N}; x \in U_j\} \leq k, x \in \mathbb{R}^n.$$

Soit  $\pi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ ,  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  tel que

$\text{supp}(\pi) \subset\subset Q$ ,  $\pi = 1$  sur  $Q/2$ , et  $\text{supp}(\chi) \subset\subset Q$  et  $\chi = 1$  sur  $\text{supp}(\pi)$ .

On définit les suites

$$\begin{aligned} \pi_j &: = \pi \circ \varphi_j \left[ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\pi \circ \varphi_i)^2 \right]^{-1/2}; \\ \pi_j &\in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1]), \text{supp}(\pi_j) \subset\subset U_j, j \in \mathbb{N} \text{ et } \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_j(x)^2 = 1, x \in \mathbb{R}^n, \\ \chi_j &: = \chi \circ \varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1]) \\ &\text{avec } \text{supp}(\chi_j) \subset\subset U_j, \chi_j = 1 \text{ sur } \text{supp}(\pi_j), \pi_j \leq \chi_j \leq 1, j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Alors l'application suivante

$$r : (W_p^s)^\mathbb{N} \longrightarrow W_p^s, (u_j) \longmapsto \sum_{j \in \mathbb{N}} \pi_j u_j$$

est une rétraction dans  $\mathcal{L}(l_p(W_p^s), W_p^s)$ ,

de corétraction :

$$r^c : W_p^s \longrightarrow (W_p^s)^\mathbb{N}, u \longmapsto (\pi_j u),$$

$r^c \in \mathcal{L}(W_p^s, l_p(W_p^s))$ , avec :  $r \circ r^c = id_{W_p^s}$ ,

d'autre part

$$[u \longmapsto (\chi_j u)] \in \mathcal{L}(W_p^s, l_p(W_p^s)), \text{ et } \left[ (u_j) \longmapsto \sum_{j \in \mathbb{N}} \chi_j u_j \right] \in \mathcal{L}(l_p(W_p^s), W_p^s),$$

pour  $p \in [1, \infty)$ ,  $s \in [-1, \infty)$ . On aura besoin des définitions suivantes.  
Soit  $\rho \in BUC^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  avec

$$\rho(x) \begin{cases} x & \text{si } x \in \text{supp}(\pi) \subset\subset Q \\ x/|x| & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus Q \end{cases} ;$$

on définit

$$\begin{aligned} \rho_j &: \mathbb{R}^n \longrightarrow U_j, x \longmapsto R_j + \varepsilon \rho(\varphi_j(x)), \\ \rho_j^0 &: x \longmapsto \rho_j(R_j) = R_j \end{aligned}$$

On pose en outre

$$\{\mathbf{a} \longmapsto \overline{A_{\mathbf{a}}} := [v \longmapsto \mathbf{a} \cdot v := [x \longmapsto \mathbf{a}(x)v(x)]]\} \in \mathcal{L}(BUC^t(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E^n)), \mathcal{L}(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E^n))),$$

$s \in (0, t)$ ,

et

$$\tilde{A}_{\mathbf{a}} v := \left[ x \longmapsto \sum_{i,j=1}^n \mathbf{a}_{ij}(x) \cdot v_{ij}(x) \right], \quad \hat{A}_{\beta} w := \left[ x \longmapsto \sum_{j=1}^n \beta_j(x) \cdot w_j(x) \right],$$

pour  $\mathbf{a}_{ij}, \beta_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(E)$  et  $v_{ij}, w_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ . Alors on a

$$\begin{aligned} [\mathbf{a} \longmapsto \tilde{A}_{\mathbf{a}}] &\in \mathcal{L}(BUC^t(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E^n)), \mathcal{L}(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E^{n \times n}), B_{p,q}^s)), \\ [\beta \longmapsto \hat{A}_{\beta}] &\in \mathcal{L}(BUC^t(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E^n, E)), \mathcal{L}(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, E^n), B_{p,q}^s)), \quad p, q \in [1, \infty], s \in (0, t). \end{aligned}$$

On peut alors réécrire l'opérateur  $A_{\mathbf{a}}$  de la manière suivante

$$A_{\mathbf{a}} = -\tilde{A}_{\mathbf{a}} \circ D^2 - \hat{A}_{div \mathbf{a}} \circ grad$$

avec

$$D^2 u := (\partial_{ij}^2 u), \quad div \mathbf{a} := \left( \sum_{j=1}^n \partial_i \mathbf{a}_{ij} \right),$$

On remarque que

$$(6.2) \quad \begin{aligned} [\mathbf{a} \longmapsto \tilde{A}_{\mathbf{a}} \circ D^2] &\in \mathcal{L}(BUC^t(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E^n)), \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+2}, B_{p,q}^s)), \\ [\mathbf{a} \longmapsto \hat{A}_{div \mathbf{a}} \circ grad] &\in \mathcal{L}(BUC^{t+1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E^n)), \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+1}, B_{p,q}^s)), \quad \text{pour } s \in (0, t), \end{aligned}$$

de plus

$$[\mathbf{a} \longmapsto A_{\mathbf{a}} = -div \circ \overline{A_{\mathbf{a}}} \circ grad] \in \mathcal{L}(BUC^{t+1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E^n)), \mathcal{L}(B_{p,q}^{s+2}, B_{p,q}^s)),$$

pour  $p, q \in [1, \infty]$ ,  $t \in (-1, \infty)$  et  $s \in (-1, t)$ .

D'abord, grâce à la proposition 9, on a pour  $\mathbf{a}_j^0 := \mathbf{a} \circ \rho_j^0$ , et  $\mathbf{a}_j := \mathbf{a} \circ \rho_j$

$$A_{\mathbf{a}_j^0} \in \mathcal{H}(B_{p,q}^{s+2}, B_{p,q}^s; k_0, \omega_0), \quad j \in \mathbb{N},$$

et puisqu'on a

$$A_{\mathbf{a}_j} = A_{\mathbf{a}_j^0} + A_{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_j^0}.$$

il suffira d'étudier le dernier opérateur dans l'égalité ci-dessus. Pour  $r := 1 \wedge (1 + t)$ , et  $r_0 \in (0, r)$  fixé, on a

$$\|(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_j^0)(x)\|_{\mathcal{L}(E^n)} \leq c |\rho_j(x) - R_j|^r = c\varepsilon^r |\rho(\varphi_j(x))|^r \leq c\varepsilon^r,$$

et pour  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $j \in \mathbb{N}$  on a

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_j^0)(x) - (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_j^0)(y)\|_{\mathcal{L}(E^n)} &\leq c |\rho_j(x) - \rho_j(y)|^r \\ &\leq c\varepsilon^r |\rho(\varphi_j(x)) - \rho(\varphi_j(y))|^{r_0} \\ &\quad (|\rho(\varphi_j(x))| + |\rho(\varphi_j(y))|)^{r-r_0} \\ &\leq c\varepsilon^r |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)|^{r_0} = c\varepsilon^{r-r_0} |x - y|^{r_0}, \end{aligned}$$

d'où alors

$$\|\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_j^0\|_{BUC^{r_0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E^n))} \leq c\varepsilon^{r-r_0}, \quad j \in \mathbb{N},$$

Maintenant on peut estimer  $A_{\mathbf{a}_j} - A_{\mathbf{a}_j^0}$  comme suit.

Dans le cas où  $t \in (0, 1]$ , on sait que

$$A_{\mathbf{a}_j} - A_{\mathbf{a}_j^0} = A_{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_j^0} = -\tilde{A}_{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_j^0} \circ D^2 - \hat{A}_{\text{div} \mathbf{a}_j} \circ \text{grad},$$

ainsi, si on fixe  $t_0 \in (s, t)$  avec  $0 < t_0$ , d'après 6.2 et le résultat d'interpolation suivant :  $(B_{p,q}^s, B_{p,q}^{s+2})_{\frac{1}{2}, q} = B_{p,q}^{s+1}$  on aura

$$\begin{aligned} \|A_{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_j^0} u\|_{B_{p,q}^s} &\leq c \|\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_j^0\|_{BUC^{t_0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E^n))} \|u\|_{B_{p,q}^{s+2}} + c \|\mathbf{a}_j\|_{BUC^{t+1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E^n))} \|u\|_{B_{p,q}^{s+1}} \\ &\leq c\varepsilon^{t-t_0} \|u\|_{B_{p,q}^{s+2}} + c(\varepsilon) \|u\|_{B_{p,q}^{s+1}} \leq c\varepsilon^{t-t_0} \|u\|_{B_{p,q}^{s+2}} + c(\varepsilon) \|u\|_{B_{p,q}^s}, \\ &\quad u \in B_{p,q}^{s+2}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Dans le cas :  $t \in (-1, 0]$ , on écrit que

$$A_{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_j^0} = -\text{div} \circ \bar{A}_{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_j^0} \circ \text{grad},$$

et on conclut de la même que l'étape précédente.

Ainsi si on fixe  $\varepsilon < 1/k_0$ , le lemme 6.3 assure l'existence de  $k_*$  et  $\omega_*$  tel que

$$A_{\mathbf{a}_j} = A_{\mathbf{a}_j^0} + A_{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_j^0} \in \mathcal{H}(B_{p,q}^{s+2}, B_{p,q}^s; k_*, \omega_*), \quad j \in \mathbb{N},$$

par suite

$$\left[ \mathbb{A} : (W_p^{s+2})^{\mathbb{N}} \longrightarrow (W_p^s)^{\mathbb{N}}, (u_j) \longmapsto (A_{\mathbf{a}_j} u_j) \right] \in \mathcal{H}(l_p(W_p^{s+2}), l_p(W_p^s); k_*, \omega_*).$$

Maintenant on construit un inverse à droite et un inverse à gauche pour  $\lambda + A_{\mathbf{a}}$ , respectivement dans les cas :  $\lambda \geq \omega_d$  et  $\lambda \geq \omega_g$ . Pour cela soit

$$B : W_p^{s+2} \longrightarrow (W_p^s)^{\mathbb{N}}, u \longmapsto B_j u := (\pi_j A_{\mathbf{a}} u - A_{\mathbf{a}_j}(\pi_j u)),$$

notons que

$$B_j u := (\operatorname{div} \circ \bar{A}_{\mathbf{a}_j}) (u \operatorname{grad} \pi_j) + \operatorname{grad} \pi_j \cdot [(\bar{A}_{\mathbf{a}} \circ \operatorname{grad}) u], \quad j \in \mathbb{N},$$

vérifie  $B \in \mathcal{L}(W_p^{s+1}, l_p(W_p^s))$ .

Ainsi le lemme 6.3 assure l'existence de  $k_g \geq 1$  et  $\omega_g > 0$ , tel que  $\mathbb{A} + B \circ r \in \mathcal{H}(l_p(W_p^{s+2}), l_p(W_p^s); k_g, \omega_g)$ , en particulier on a

$$\lambda + \mathbb{A} + B \circ r \in \mathcal{L}is(l_p(W_p^{s+2}), l_p(W_p^s)), \quad \operatorname{Re} \lambda \geq \omega_g,$$

ainsi l'opérateur  $G_\lambda := r \circ (\lambda + \mathbb{A} + B \circ r)^{-1} \circ r^c$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega_g$  est l'inverse à gauche recherché pour  $\lambda + A_{\mathbf{a}}$ .

Maintenant on pose

$$C : (W_p^{s+2})^{\mathbb{N}} \longrightarrow W_p^s, \quad (u_j) \longmapsto \sum_{j \in \mathbb{N}} C_j u_j := \sum_{j \in \mathbb{N}} (A_{\mathbf{a}}(\pi_j u_j) - \pi_j A_{\mathbf{a}_j} u_j),$$

notons que

$$C_j u := -(\operatorname{div} \circ \bar{A}_{\mathbf{a}}) (u \operatorname{grad} \pi_j) - \operatorname{grad} \pi_j \cdot [(\bar{A}_{\mathbf{a}_j} \circ \operatorname{grad}) u], \quad j \in \mathbb{N},$$

sachant que  $C \in \mathcal{L}(l_p(W_p^{s+1}), W_p^s)$ , et puisque  $(l_p(W_p^s), l_p(W_p^{s+2}))_{\frac{1}{2}, p} = l_p(W_p^{s+1})$ , on déduit du lemme 6.3 qu'il existe  $k_d \geq 1$  et  $\omega_d > 0$  tel que

$$\mathbb{A} + r^c \circ C \in \mathcal{H}(l_p(W_p^{s+2}), l_p(W_p^s); k_d, \omega_d),$$

ainsi l'inverse à droite pour  $\lambda + A_{\mathbf{a}}$  recherché est

$$D_\lambda := r \circ (\lambda + \mathbb{A} + r^c \circ C)^{-1} \circ r^c, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq \omega_d.$$

remarquons que  $G_\lambda = D_\lambda = (\lambda + A_{\mathbf{a}})^{-1}$ , alors on obtient que

$$\lambda + A_{\mathbf{a}} \in \mathcal{L}is(W_p^{s+2}, W_p^s), \quad \operatorname{Re} \lambda \geq \omega := \omega_g \vee \omega_d,$$

de plus on a l'estimation

$$\begin{aligned} |\lambda| \|(\lambda + A_{\mathbf{a}})^{-1} u\|_{W_p^s} &= |\lambda| \| [r \circ (\lambda + \mathbb{A} + B \circ r)^{-1} \circ r^c] u \|_{W_p^s} \\ &\leq c k_g \|r^c u\|_{l_p(W_p^s)} \leq c \|u\|_{W_p^s}, \quad u \in W_p^s, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq \omega, \end{aligned}$$

Notons que si  $\exists k \geq 1, \omega > 0$  tel que  $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ , et  $\omega + A \in \mathcal{L}is(E_1, E_0)$  satisfaisant l'une des conditions suivantes

$$|\lambda| \|u\|_{E_0} \leq k \|(\lambda + A) u\|_{E_0}, \quad \|u\|_{E_1} \leq k \|(\lambda + A) u\|_{E_0}, \quad u \in E_1, \operatorname{Re} \lambda \geq \omega.$$

on aura

$$A \in \mathcal{H}(E_1, E_0),$$

ainsi

$$A_{\mathbf{a}} \in \mathcal{H}(W_p^{s+2}, W_p^s),$$

pourvu que  $s \in (-1, t)$ ,  
ainsi on a pour  $(t - s) \wedge (s + 1) > \delta > 0$ ,

$$A_{\mathbf{a}} \in \mathcal{H}(W_p^{s+\delta+2}, W_p^{s+\delta}), \text{ et } A_{\mathbf{a}} \in \mathcal{H}(W_p^{s-\delta+2}, W_p^{s-\delta}),$$

et par interpolation

$$(W_p^{s-\delta}, W_p^{s+\delta})_{\frac{1}{2}, q} = B_{p,q}^s, \quad p, q \in [1, \infty), \quad s \in \mathbb{R},$$

D'où l'on déduit finalement que :

$$A_{\mathbf{a}} \in \mathcal{H}(B_{p,q}^{s+2}, B_{p,q}^s).$$

□

### 6.3.3 Diffusion-convection : le cas général

On généralise dans cette partie l'étude précédente au cas de l'opérateur de diffusion-convection :

$$A[e]u := -\nabla \cdot (\mathbf{a}\nabla u + \vec{a}u) + \vec{b} \cdot \nabla u + a_0 u.$$

où  
 $e := (\mathbf{a}, \vec{a}, \vec{b}, a_0) \in \mathbb{E}^\sigma$

**Lemme 6.4** *Si  $-1 \leq s < \sigma - 1 < \infty$ , alors*

$$(e \mapsto A[e]) \in \mathcal{L}(\mathbb{E}^\sigma, \mathcal{L}(W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}))).$$

**Preuve.** Notons d'abord que l'application suivante est une multiplication

$$L_\infty(Y, dy) \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}, \quad (a, u) \longmapsto au; \quad au(y) := a(y)u(y),$$

Sachant que  $\nabla \in \mathcal{L}(W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), (W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}))^n)$ , et d'après les hypothèses on a  $0 \leq s + 1 < \sigma < \infty$ ,

on déduit alors du lemme 6.1 que

$$((\mathbf{a}, \nabla u) \longmapsto \mathbf{a}\nabla u) \in \mathcal{L}(BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, L_{\infty, sym}^{n \times n}), W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}^n)); W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}^n),$$

ainsi que

$$((\vec{a}, u) \longmapsto \vec{a}u) \in \mathcal{L}(BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, L_\infty^n), W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})); W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}),$$

et puisque on sait que  $W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \stackrel{d}{\hookrightarrow} W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ , alors on obtient

$$((\vec{a}, u) \longmapsto \vec{a}u) \in \mathcal{L}(BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, L_\infty^n), W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})); W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}),$$

Idem pour

$$\left( (\vec{b}, \nabla u) \mapsto \vec{b} \cdot \nabla u \right) \in \mathcal{L} \left( BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, L_\infty^n), W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}^n) \right); W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}),$$

D'autre part, concernant l'application  $(a_0, u) \mapsto a_0 u$ , on note que  $0 \leq s^+ < (\sigma - 1)^+ < \infty$ , si  $(\sigma - 1) \not\geq 0$ , c.à.d  $0 \leq s^+ < \sigma - 1 < \infty$ , d'après le lemme 6.1 on a

$$\left( (a_0, u) \mapsto a_0 u \right) \in \mathcal{L} \left( BUC^{(\sigma-1)^+}(\mathbb{R}^n, L_\infty^1), W_1^{s^+}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \right); W_1^{s^+}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}),$$

et compte tenu de

$$(s \geq -1) \implies (s + 2 \geq 1 \not\geq 0) \implies (s + 2 \not\geq s^+ \geq s),$$

on obtient

$$W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \xhookrightarrow{d} W_1^{s^+}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \xhookrightarrow{d} W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}),$$

d'où alors

$$\left( (a_0, u) \mapsto a_0 u \right) \in \mathcal{L} \left( BUC^{(\sigma-1)^+}(\mathbb{R}^n, L_\infty^1), W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \right); W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}),$$

tandis que si  $(\sigma - 1) \leq 0$ , on refait les démarches précédentes, d'où finalement

$$(e \mapsto A[e]) \in \mathcal{L} \left( \mathbb{E}^\sigma, \mathcal{L} \left( W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \right) \right).$$

□

Le théorème suivant précise les conditions pour qu'un opérateur soit générateur d'un semigroupe analytique et il est fondamental pour la méthode suivie dans ce mémoire.

**Théorème 6.4** *Supposons que  $s \in (-1, \sigma - 1) \setminus \mathbb{N}$ , et  $\underline{\alpha}, M \not\geq 0$ . Alors il existe  $k \geq 1$  et  $\omega > 0$  tels que*

$$A[e] \in \mathcal{H} \left( W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}); k, \omega \right),$$

*pourvu que  $e := (\mathbf{a}, \vec{a}, \vec{b}, a_0) \in \mathbb{E}^\sigma$  vérifie  $\|e\|_{\mathbb{E}^\sigma} \leq M$  et*

$$\mathbf{a}(x, y) \xi \cdot \xi \geq \underline{\alpha} |\xi|^2, (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad p.p \ y \in Y.$$

**Preuve.** On remarque que pour  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  fixé on a  $\mathbf{a}(x) \in L_\infty(Y, dy; \mathbb{R}_{sym}^{n \times n})$  et vérifie  $\mathbf{a}(x, y) \xi \cdot \xi \geq \underline{\alpha} |\xi|^2$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , *pp*  $y \in Y$ , si  $\xi \in \mathbb{R}^n / |\xi| = 1$ , on a  $\mathbf{a}(x, y) \xi \cdot \xi \geq \underline{\alpha}$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}^n / |\xi| = 1$ , d'où alors :  $\min \{ \mathbf{a}(x, y) \xi \cdot \xi; |\xi| = 1 \} \geq \underline{\alpha} \not\geq 0$ , ce qui prouve que  $\mathbf{a}(x) \in ell(\underline{\alpha}, 0)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  sachant que

$$ell(\underline{\alpha}, 0) \hookrightarrow \mathcal{E}ll(\mathbb{F}; M(\underline{\alpha}, 0))$$

on déduit que

$$\mathbf{a}(x) \in \mathcal{E}ll(\mathbb{F}; M(\underline{\alpha}, 0)), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

D'après les propriétés des espaces de Besov on a

$$BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, ell(\underline{\alpha}, 0)) \hookrightarrow BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}ll(\mathbb{F}, M(\underline{\alpha}, 0))),$$

et compte tenu des hypothèses on a  $\mathbf{a} \in BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, L_{\infty, sym}^{n \times n})$ ,  
en fait(d'après ce qui précède ) on a  $\mathbf{a} \in BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}ll(\mathbb{F}, M(\underline{\alpha}, 0)))$ .

On peut alors appliquer le théorème 6.3 et donc il existe :  $\bar{\omega} \geq 0$  et  $\bar{k} \geq 1$ , tels que

$$-div \circ \mathbf{a} \circ grad \in \mathcal{H}(W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}); \bar{k}, \bar{\omega}).$$

Maintenant pour montrer que  $A[e] \in \mathcal{H}(W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}); k, \omega)$   
il suffit de montrer, d'après le lemme 6.3, que l'application

$$\begin{aligned} B & : BUC^\sigma \times BUC^\sigma \times BUC^{(\sigma-1)^+} \longrightarrow \mathcal{L}(W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})), \\ (\vec{a}, \vec{b}, a_0) & \longmapsto -\nabla \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \nabla + a_0, \end{aligned}$$

vérifie les deux conditions suivantes :

1/

$$B(\vec{a}, \vec{b}, a_0) \in \mathcal{L}(W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}))$$

2/

$$\|B(\vec{a}, \vec{b}, a_0)u\|_{W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})} \leq \varepsilon \|u\|_{W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})} + c \|u\|_{W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})}, \quad u \in W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$$

pour un certain  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{k})$  et  $c \geq 0$ .

La première condition est vérifiée grâce au lemme 6.4

Pour la deuxième condition on suit les étapes suivantes :

on pose  $B = B_1 + B_2 + B_3$  avec

$$B_1(\vec{a}) := -\nabla \cdot \vec{a}u, \quad B_2(\vec{b})u = \vec{b} \cdot \nabla u \quad \text{et} \quad B_3(a_0) := a_0u, \quad u \in W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}).$$

Tout d'abord, concernant  $B_1$ , on a d'après le Lemme 6.1 :

$$((\vec{a}, u) \longmapsto \vec{a}u) \in \mathcal{L}(BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, L_\infty^n) \times W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}); W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}^n)),$$

et sachant que  $W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \hookrightarrow W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ , ainsi que  $-\nabla \cdot \in \mathcal{L}(W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}^n), W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}))$   
on obtient

$$B_1 \in \mathcal{L}(BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, L_\infty^n) \mathcal{L}(W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})); W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})),$$

plus précisément on a

$$\|-\nabla \cdot \vec{a}u\|_{W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})} := \|B_1(\vec{a})u\|_{W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})} \leq c_1 \|\vec{a}\|_{BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, L_\infty^n)} \|u\|_{W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})}.$$

Concernant  $B_2$  :

pour  $u \in W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$  on a  $\nabla u \in W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}^n)$  et d'après le lemme 6.1 :

$$(\vec{b}, \nabla u) \longmapsto \vec{b} \cdot \nabla u \in \mathcal{L}(BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, L_\infty^n) \times W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}^n), W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})),$$

et sachant que  $W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, F) \hookrightarrow W_1^s(\mathbb{R}^n, F)$ , on en déduit que

$$B_2 \in \mathcal{L} \left( BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, L_\infty^n) \times W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}); W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \right),$$

de plus on a

$$\left\| \vec{b} \cdot \nabla u \right\|_{W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})} := \left\| B_2 \left( \vec{b} \right) u \right\|_{W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})} \leq c_2 \left\| \vec{b} \right\|_{BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, L_\infty^n)} \cdot \|u\|_{W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})}.$$

Finalement pour  $B_3$  on a

$$B_3 \in \mathcal{L} \left( BUC^{(\sigma-1)^+}(\mathbb{R}^n, L_\infty^1), \mathcal{L} \left( W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}) \right) \right),$$

d'où alors :

$$\|a_0 u\|_{W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})} = \|B_3(a_0) u\|_{W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})} \leq c_3 \|a_0\|_{BUC^{(\sigma-1)^+}(\mathbb{R}^n, L_\infty^1)} \times \|u\|_{W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})}.$$

On déduit alors de ce qui précède :

pour  $u \in W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$

$$\begin{aligned} \left\| B \left( \vec{a}, \vec{b}, a_0 \right) u \right\|_{W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})} &\leq \left\| B_1 \left( \vec{a} \right) u \right\|_{W_1^s} + \left\| B_2 \left( \vec{b} \right) u \right\|_{W_1^s} + \|B_3(a_0) u\|_{W_1^s} \\ &\leq c_1 \left\| \vec{a} \right\|_{BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, L_\infty^n)} \|u\|_{W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})} \\ &\quad + c_2 \left\| \vec{b} \right\|_{BUC^\sigma(\mathbb{R}^n, L_\infty^n)} \times \|u\|_{W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})} \\ &\quad + c_3 \|a_0\|_{BUC^{(\sigma-1)^+}(\mathbb{R}^n, L_\infty^1)} \|u\|_{W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})}, \end{aligned}$$

Or :  $(W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}))_{1/2,1} \doteq W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$  et  $\|e\|_{\mathbb{E}^\sigma} \leq M$ ,

par suite on a

$$\begin{aligned} c_1 \left\| \vec{a} \right\|_{BUC^\sigma} \|u\|_{W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})} &\leq c_1 \cdot M \|u\|_{W_1^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})} \\ &\leq M_1 \|u\|_{W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})}^{1/2} \|u\|_{W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})}^{1/2} \\ &\leq \varepsilon \|u\|_{W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})} + M_1(\varepsilon) \|u\|_{W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})}, \end{aligned}$$

(l'avant dernière inégalité est celle de l'interpolation, et la dernière résulte de l'inégalité de Young). D'où

$$\left\| B \left( \vec{a}, \vec{b}, a_0 \right) u \right\|_{W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})} \leq \varepsilon \|u\|_{W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})} + c \|u\|_{W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})}, \quad u \in W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$$

ainsi on peut appliquer le Lemme 6.3 c.à.d  $\exists k \geq 1$  et  $\omega \geq 0$ , tels que

$$A[e] := -div \circ \mathbf{a} \circ grad + B \left( \vec{a}, \vec{b}, a_0 \right) \in \mathcal{H} \left( W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}); k, \omega \right).$$

□

Considérons maintenant l'application  $t \mapsto e(t) : J \mapsto \mathbb{E}^\sigma$ ,  
on pose

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \vec{a}, \vec{b}, a_0)(x, t) &: = e(t)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in J, \text{ et} \\ A(t) &: = A[e(t)], \quad t \in J. \end{aligned}$$

Le théorème suivant est fondamental pour notre étude

**Théorème 6.5** Soit  $s \in (-1, r) \setminus \mathbb{N}$ , avec  $r \geq 0$   
et supposons que  $t \mapsto e(t) \in C^\rho(J, \mathbb{E}^{1+r})$ ,  
pour un certain  $\rho \in \mathbb{R}^+$ ,  
ainsi que l'existence de  $\underline{\alpha} \geq 0$  tel que

$$\mathbf{a}(x, t, y) \xi \cdot \xi \geq \underline{\alpha} |\xi|^2, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times J, \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ ppy } \in Y$$

On a :

$$(t \mapsto A(t)) \in C^\rho(J, \mathcal{H}(W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}))).$$

*Preuve.* D'après le théorème 6.4, on a

$$A(t) \in \mathcal{H}(W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})), \quad \forall t \in J,$$

et puisque le Lemme 6.4 assure la propriété

$$(e(t) \mapsto A(t)) \in \mathcal{L}(\mathbb{E}^{1+r}, \mathcal{L}(W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}))), \quad \forall t \in J,$$

alors la propriété

$$(t \mapsto e(t)) \in C^\rho(J, \mathbb{E}^{1+r}),$$

implique

$$(t \mapsto A(t)) \in C^\rho(J, \mathcal{H}(W_1^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}), W_1^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}))).$$

□

## 6.4 Existence, unicité et régularité de la solution

Pour l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité de la solution, on aura besoin du théorème fondamental suivant (voir : Amann [2])

**Théorème 6.6** Supposons qu'il existe  $\rho \in (0, 1)$  tel que

$$(x, (A, f)) \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0) \times E_0).$$

Alors le problème de Cauchy

$$\dot{u}(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad \forall t \in J \setminus \{s\}, \quad u(s) = x$$

possède une solution unique  $u := u(\cdot, s, x, A, f)$  telle que

$$u \in C^\rho(J \setminus \{s\}, E_1) \cap C^{1+\rho}(J \setminus \{s\}, E_0).$$

**Remarque 6.1** Supposons que  $0 \leq \beta \leq \alpha < 1$ . Si  $u^0 \in E_\alpha$  et  $f \in L_{\infty,loc}(J, E_0)$  alors la solution du problème de Cauchy

$$\dot{u} + A(t)u = f(t), \quad t \in J, \quad u(0) = u^0,$$

verifie

$$u := u(\cdot, u^0, A, f) \in C^{\alpha-\beta}(J, E_\beta),$$

c.à.d

$$\|u(t) - u(s)\|_\beta \leq c(t-s)^{\alpha-\beta} e^{\nu t} \left( \|u^0\|_\alpha + \|f\|_{L_{\infty}((0,t), E_0)} \right)$$

pour  $t \in J$ ,  $t \geq 0$  et  $(u^0, A, f) \in E_\alpha \times \mathcal{A} \times L_{\infty,loc}(J, E_0)$ ,  $\nu$  étant une constante convenablement choisie.

On adapte maintenant le théorème précédent au cas d'un second membre dépendant de la solution. Pour cela on a :

**Théorème 6.7** Supposons que  $E_1 \xrightarrow{d} E_0$ , que  $0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ , et que  $(\cdot, \cdot)_\theta$  sont des foncteurs d'interpolation admissibles pour  $\theta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ , posons

$$E_\theta := (E_0, E_1)_\theta,$$

et supposons encore que pour  $\rho$  fixé dans  $(0, 1)$

$$(t \longmapsto (A(t), g(t, \cdot))) \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0) \times C_b^{1-\rho}(E_\beta, E_\gamma)).$$

Alors pour  $u_0 \in E_\alpha$  donné, le problème de Cauchy

$$\dot{u} + A(t)u = g(t, u), \quad t \in J, \quad u(0) = u^0,$$

admet une solution maximale unique

$$u(\cdot, u^0) := u(\cdot, u^0, A, g) \in C(J(u^0), E_\alpha) \cap C(J(u^0), E_1) \cap C^1(J(u^0), E_0).$$

L'intervalle maximal d'existence  $J(u^0) := J(u^0, A, g)$ , est ouvert dans  $J$ . Si en plus

$$\sup_{t \in J(u^0) \cap [0, T]} \|u(t, u^0)\|_{E_\alpha} \leq \infty, \quad \forall T \in J,$$

Alors  $u(\cdot, u^0)$  est une solution globale, c.à.d  $J(u^0) = J$ .

**Preuve.** soient

$$\delta := \rho \wedge (\alpha - \beta) \quad \text{et} \quad T_0 \in J \text{ fixé}$$

On définit la fonction  $g_v$  par

$$g_v(t) := g(t, v(t)), \quad 0 \leq t \leq T_0, \quad \text{pour } v \in C^\delta([0, T_0], E_\beta)$$

D'une part on a

$$g_v(t) := g(t, v(t)), 0 \leq t \leq T_0$$

et

$$g_v(\cdot) \in C^\rho(J, E_\gamma),$$

puisque

$$g(\cdot, \cdot) \in C^\rho(J, C_b^{1-}(E_\beta, E_\gamma)),$$

$$g_v(t) := g(t, v(t)), \text{ si } v \in C^\delta([0, T_0], E_\beta) \text{ avec } \delta = \min(\rho, \alpha - \beta),$$

en outre

$$t \longmapsto g(t, \cdot) \in C^\rho(J, C_b^{1-}(E_\beta, E_\gamma)) \hookrightarrow C^\delta(J, C_b^{1-}(E_\beta, E_\gamma)),$$

d'où alors

$$g_v(\cdot) \in C^\delta(J, E_\gamma),$$

alors le théorème 6.6 d'existence et d'unicité, montre qu'il existe une solution unique

$$u(\cdot, v) \in C^1((0, T_0], E_0) \cap C((0, T_0], E_1),$$

en plus le Remarque 6.1 assure que

$$u(\cdot, v) \in C^{\alpha-\alpha}([0, T_0], E_\alpha) \doteq C([0, T_0], E_\alpha),$$

d'où

$$u(\cdot, v) \in C([0, T_0], E_\alpha) \cap C((0, T_0], E_1) \cap C^1((0, T_0], E_0)$$

où  $u(\cdot, v)$ , est la solution du problème

$$\dot{u} + A(t)u = g_v(t), 0 \leq t \leq T_0, u(0) = u^0.$$

Maintenant pour montrer que le problème de Cauchy

$$\dot{u} + A(t)u = g(t, u), \quad 0 \leq t \leq T_0, u(0) = u^0$$

admet une solution unique

$$u(\cdot, u^0) \in C([0, T_0], E_\alpha) \cap C((0, T_0], E_1) \cap C^1((0, T_0], E_0),$$

il suffit de montrer que l'application

$$X \doteq C([0, T_0], E_\beta) \xrightarrow{S} C([0, T_0], E_\beta), \quad v \longmapsto u(\cdot; v),$$

admet un point fixe, et pour cela il faut montrer que  $S$  est une contraction stricte, c.à.d

$$\exists k \leq 1; \|S(v) - S(w)\|_X \leq k \|v - w\|_X, \quad \forall (v, w) \in X,$$

ainsi

$$\|S(v) - S(w)\|_X = \|u(\cdot; v) - u(\cdot; w)\|_{C([0, T_1], E_\beta)},$$

puisqu'on a d'après la remarque 6.1

$$\|u(t, v) - u(t, w)\|_{E_\beta} \leq CT_0^{1-\beta} \|v - w\|_{C([0, T_0], E_\beta)}, 0 \leq t \leq T_0$$

où  $C$  est indépendant de  $v$  et  $w$  dans le cas où  $v$  ( $[0, T_0]$ ) et  $w$  ( $[0, T_0]$ ) restent dans un sous ensemble borné de  $E_\beta$ , si on prend  $T_0$  suffisamment petit pour que  $CT_0^{1-\beta} \ll 1$ , alors le théorème du point fixe implique l'existence d'un point fixe unique

$$\bar{u} \in C([0, T_0], E_\beta)$$

pour l'application  $S$ . D'après la remarque 6.1 on trouve que

$$\bar{u} \in C([0, T_0], E_\alpha) \cap C^{\alpha-\beta}([0, T_0], E_\beta)$$

et puisque

$$C^{\alpha-\beta}([0, T_0], E_\beta) \hookrightarrow C^\delta([0, T_0], E_\beta) \quad (\delta \leq \alpha - \beta),$$

alors on obtient

$$\bar{u} \in C([0, T_0], E_\alpha) \cap C^\delta([0, T_0], E_\beta).$$

D'où  $\bar{u} = u(\cdot; \bar{u})$ , et d'après ce qui précède :

$$u(\cdot; \bar{u}) \in C([0, T_0], E_\alpha) \cap C((0, T_0], E_1) \cap C^1((0, T_0], E_0)$$

(puisque  $\bar{u} \in C^\delta([0, T_0], E_\beta)$ , comme on a déjà vu pour  $v$ ), d'où alors  $\bar{u}$  est la solution unique du problème

$$\dot{u} + A(t)u = g(t, u), t \in (0, T_0], u(0) = u^0, \text{ sur } [0, T_0],$$

ce qui assure l'existence locale de la solution.

Maintenant pour obtenir une solution maximale on suit la procédure suivante :

puisqu'on a vu que  $u \in C([0, T_0], E_\alpha)$ , alors  $u(T_0)$  existe et elle est dans  $E_\alpha$ . Soit  $T_1 \geq T_0$ , et posons le problème

$$\dot{u} + A(t)u = g(t, u), \quad T_0 \leq t \leq T_1, u(T_0) = u^1,$$

la procédure qu'on a suivi avant, nous assure l'existence d'une solution unique

$$u_1(\cdot, u^1) \in C([T_0, T_1], E_\alpha) \cap C((T_0, T_1), E_1) \cap C^1((T_0, T_1], E_0),$$

ainsi le problème

$$\dot{u} + A(t)u = g(t, u), \quad 0 \leq t \leq T_1, u(0) = u^0,$$

admet une solution unique

$$\tilde{u} = \begin{cases} u_0, & 0 \leq t \leq T_0 \\ u_1, & T_0 \leq t \leq T_1 \end{cases},$$

en répétant la même démarche autant de fois qu'il le faut, jusqu'à ce que l'intervalle d'existence soit maximal dans  $J$ ,  
on prouve finalement que le problème

$$\dot{u} + A(t)u = g(t, u), t \in J, u(0) = u^0,$$

admet une solution maximale unique

$$u(\cdot, u^0) \in C(J(u^0), E_\alpha) \cap C(J(u^0), E_1) \cap C^1(J(u^0), E_0).$$

Maintenant on montre que l'intervalle maximal d'existence  $J(u^0)$ , est ouvert.  
Supposons que  $J(u^0)$  soit fermé, c.à.d

$$J(u^0) = [0, T],$$

d'après ce qui précède  $u(T)$  existe, et elle est dans  $E_\alpha$   
de plus,  $\exists \tilde{T} \gneq T$  tel que la solution du problème

$$\dot{u} + A(t)u = g(t, u), t \in J, u(0) = u^0$$

existe sur  $[0, \tilde{T}]$ , ce qui contredit le fait que  $u$  est une solution maximale, ainsi l'intervalle maximal d'existence,  $J(u^0)$  est ouvert..

Supposons maintenant que la condition

$$\sup_{t \in J(u^0) \cap [0, T]} \|u(t, u^0)\|_{E_\alpha} \gneq \infty, \quad \forall T \in J$$

soit vérifiée, et que  $J(u^0) \neq J$ ,

alors prendant  $t^*$  tel que,  $|b_j - t^*| \gneq \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  suffisamment petit, où  $b_j$  est la borne droite de l'intervalle  $J(u^0)$ , alors l'assertion

$$\sup_{t \in J(u^0) \cap [0, T]} \|u(t, u^0)\|_{E_\alpha} \gneq \infty, \quad \forall T \in J,$$

implique l'existence de la solution du problème de Cauchy avec la condition initiale  $u(t^*, u^0)$ , ce qui permet une extension de la solution sur un intervalle strictement plus grand que  $J(u^0)$  et cela contredit le fait que  $J(u^0)$  est l'intervalle maximal d'existence, d'où finalement

$$J(u^0) = J.$$

□

Le résultat suivant (voir Aman [2]) affirme la dépendance continue des solutions par rapport aux données initiales

**Théorème 6.8** Soit  $u(\cdot, u^0)$  la solution du problème de Cauchy

$$\dot{u} + A(t)u = g(t, u), t \in J, u(0) = u^0.$$

Alors  $\forall T \in J(u^0)$ , il existe dans l'espace

$$E_\alpha \times C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0)) \times C^\rho(J, C_b^{1-}(E_B, E_\gamma)),$$

un voisinage  $V$  de  $(u^0, A, g)$ , tel que

$$[0, T] \subset J(\tilde{u}^0, \tilde{A}, \tilde{g}), \forall (\tilde{u}^0, \tilde{A}, \tilde{g}) \in V,$$

et si

$$\left( (\tilde{u}^0, \tilde{A}, \tilde{g}) \xrightarrow{cv} (u^0, A, g) \text{ dans } V \right) \implies \left( u(\cdot, \tilde{u}^0, \tilde{A}, \tilde{g}) \xrightarrow{cv} u(\cdot, u^0, A, g) \text{ dans } C([0, T], E_\alpha) \right).$$

Maintenant on peut énoncer le résultat principal concernant la résolution du problème de coagulation-fragmentation. On a le :

**Théorème 6.9** On suppose que  $r, \rho \geq 0$ , et  $(-2 + \frac{n}{2}) \vee (-1) \leq s \leq r, s \notin \mathbb{N}$ , de plus

$$(t \longmapsto (e, (\gamma, \varphi), h)(t) \in C^\rho(J, \mathbb{E}^{1+r} \times BUC^r[K_{coag} \times K_{frag}] \times W_1^r[\mathbb{F}]))$$

pour un certain  $(r \geq \tau \geq s)$ , tel que pour un certain  $\underline{\alpha} \geq 0$ , on a

$$\mathbf{a}(x, t, y) \xi \cdot \xi \geq \underline{\alpha} |\xi|^2, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times J, \quad p.p \ y \in Y, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

supposons encore que

$$\begin{cases} (s^+ + n)/2 \leq \sigma \leq n \wedge (s + 2), & \text{pour } s \leq n \\ s \leq \sigma \leq s + 2, & \text{pour } s \geq n, \sigma \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Alors pour  $u^0 \in W_1^\sigma[\mathbb{F}]$  fixé, le problème de coagulation fragmentation

$$\begin{aligned} \dot{u} + A(t)u &= R(t, u), \quad t \in J, \quad u(0) = u^0, \text{ tel que} \\ R(t, u) &= C(t, u) + F(t, u) + h(t), \end{aligned}$$

admet une solution maximale unique

$$u(\cdot, u^0) \in C(J(u^0), W_1^\sigma[\mathbb{F}]) \cap C(J(u^0), W_1^{s+2}[\mathbb{F}]) \cap C^1(J(u^0), W_1^s[\mathbb{F}])$$

où l'intervalle maximal d'existence est ouvert dans  $J$ .

Cette solution, notée :

$$u(\cdot, u^0, \mathbf{e}, \gamma, \varphi, h) := u(\cdot, u^0)$$

vérifie la propriété de continuité par rapport aux données initiales, c-à-d. :

$\forall T \in J(u^0)$ , il existe un voisinage  $V$  de  $(u^0, (\mathbf{e}, (\gamma, \varphi), h))$  dans

$$W_1^\sigma[\mathbb{F}] \times BUC^\rho(J, \mathbb{E}^{1+r} \times BUC^r[k_{coag} \times K_{frag}] \times W_1^r[\mathbb{F}])$$

tel que :  $u(\cdot, u^0, \tilde{u}^0, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\gamma}, \tilde{\varphi}, \tilde{h})$  existe sur  $[0, T]$  et

$$\left( (\tilde{u}^0, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\gamma}, \tilde{\varphi}, \tilde{h}) \xrightarrow{cv} (u^0, \mathbf{e}, \gamma, \varphi, h) \text{ ds } V \right) \implies \left( u(\cdot, \tilde{u}^0, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\gamma}, \tilde{\varphi}, \tilde{h}) \xrightarrow{cv} u(\cdot, u^0, \mathbf{e}, \gamma, \varphi, h), \text{ ds } C([0, T], W_1^\sigma[\mathbb{F}]) \right)$$

**Preuve.** Notons que dans les hypothèses de ce théorème  $s$  vérifie

$$\left(-2 + \frac{n}{2}\right) \vee (-1) \leq s \text{ avec } s \notin \mathbb{N}$$

c.à.d

$$s \geq -1 \text{ si } n = 1, 2 \text{ et } s \geq -\frac{1}{2} \text{ si } n = 3,$$

qui assure l'existence de  $\sigma$  vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tau^+ + n)/2 \leq \sigma \leq n \wedge (s + 2), \text{ si } s \leq n \text{ et } \\ s \leq \sigma \leq s + 2, \text{ si } s \geq n \end{array} \right. , \text{ avec } \sigma \notin \mathbb{N},$$

donc les conditions précédentes ne sont pas vides de sens,  
de plus :

$$(\tau^+ + 2)/2 \leq \sigma \leq n \wedge (s + 2) \text{ si } s \leq n, \text{ et } \tau \leq \sigma \text{ si } s \geq n,$$

est vérifiée si  $\tau$  est choisi convenablement (suffisamment petit, si nécessaire),  
on remarque encore que la condition précédente c.à.d.

$$\begin{aligned} (\tau^+ + n)/2 \leq \sigma \leq n \wedge (s + 2) \text{ si } s \leq n \text{ et} \\ \tau \leq \sigma \text{ si } s \geq n, \end{aligned}$$

garantit l'existence de  $\sigma_1$  tel que

$$(\tau^+ + n)/2 = \tau \vee (\tau^+ + n)/2 \leq \sigma_1 \leq \sigma \leq n \wedge (s + 2) \text{ si } s \leq n, \text{ } z \leq n$$

(car  $\tau$  est suffisamment petit) et

$$s \leq \tau \leq \sigma_1 \leq \sigma, \text{ } s \geq n$$

On peut supposer encore que  $\tau, \sigma_1 \notin \mathbb{N}$ ,  $\tau \geq s \geq -1$ .

Maintenant en posant

$$E_0 := W_1^s[\mathbb{F}] \text{ et } E_1 := W_1^{s+2}[\mathbb{F}],$$

alors la théorie d'interpolation étudiée dans le premier chapitre implique que

$$E_\theta := (E_0, E_1)_{\theta, 1} \doteq W_1^{s+2\theta}[\mathbb{F}], \text{ } s + 2\theta \notin \mathbb{Z}.$$

Or on a vu que  $s \in (-1, r) \setminus \mathbb{N}$ , avec  $r \geq 0$ , de plus d'après les hypothèses on a

$$\begin{aligned} \exists \rho \geq 0; (t \mapsto e(t)) \in C^\rho(J, \mathbb{E}^{1+r}), \\ \exists \underline{\alpha} \geq 0; \mathbf{a}(x, t, y) \xi \cdot \xi \geq \underline{\alpha} |\xi|^2, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times J, \text{ } p, p, y \in Y, \text{ } \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

ce qui montre que les hypothèses du théorème 6.5 sont vérifiées, d'où par application de ce dernier

$$(t \mapsto A(t)) \in C^\rho(J, \mathcal{H}(W_1^{s+2}[\mathbb{F}], W_1^s[\mathbb{F}])).$$

D'autre part on a vu que pour  $\bar{\tau} \in (-1, \bar{r}) \setminus \mathbb{N}$ ,  $r \not\leq 0$ , et pour

$$\begin{cases} \bar{\tau}^+ + n \not\leq 2\bar{\sigma} \not\leq 2n, \text{ si } \bar{\tau} \not\leq n, \\ \bar{\sigma} := \bar{\tau}, \text{ si } \bar{\tau} \not\leq n, \end{cases},$$

avec

$$\begin{aligned} (t \longmapsto (\gamma(t), \varphi(t))) &\in C^\rho(J, W_1^{\bar{\tau}}[\mathbb{F}]), \\ \text{et } (t \longmapsto h(t)) &\in C^\rho(J, W_1^{\bar{\tau}}) \end{aligned}$$

alors on a

$$(t \longmapsto R(t, \cdot)) \in C^\rho(J, C_b^\infty(W_1^{\bar{\sigma}}[\mathbb{F}], W_1^{\bar{\tau}}[\mathbb{F}]))$$

et puisque on a

$$C_b^1(E_1, E_0) \hookrightarrow C_b^{1-}(E_1, E_0),$$

on en déduit que

$$(t \longmapsto R(t, \cdot)) \in C^\rho(J, C_b^{1-}(W_1^{\bar{\sigma}}[\mathbb{F}], W_1^{\bar{\tau}}[\mathbb{F}])).$$

En appliquant ce résultat pour  $\bar{\sigma} = \sigma_1$  et  $\bar{\tau} = \tau$ ,  $\bar{r} = r$ , qui vérifient les hypothèses de ce résultat avec le fait que  $\tau \not\leq n$ , alors on trouve

$$(t \longmapsto R(t, \cdot)) \in C^\rho(J, C_b^{1-}(W_1^{\sigma_1}[\mathbb{F}], W_1^\tau[\mathbb{F}]))$$

par suite les hypothèses du théorème 6.7 et 6.8 sont vérifiées avec

$$\alpha := (\sigma - s)/2, \quad \beta := (\sigma_1 - s)/2, \quad \text{et } \gamma := (\tau - s)/2$$

et cela achève la preuve du théorème .

□

On montre dans la proposition suivante que la solution  $u(t, u^0)$  est indépendante du choix de  $\sigma$  et  $s$  à  $t \not\leq 0$ . Autrement dit on établit un effet régularisant

**Proposition 10** *On suppose que les hypothèses du théorème 6.9 sont vérifiées et on fixe  $\bar{\sigma}$  dans  $(\frac{n}{2}, n \wedge 2)$ . Alors pour  $u^0 \in W_1^{\bar{\sigma}}[\mathbb{F}]$ , le problème*

$$\dot{u} + A(t)u = R(t, u), \quad t \in \dot{J}, \quad u(0) = u^0$$

admet une solution maximale unique

$$u(\cdot, u^0) \in C(J(u^0), W_1^{\bar{\sigma}}[\mathbb{F}]) \cap C(\dot{J}(u^0), W_1^{s+2}[\mathbb{F}]) \cap C^1(\dot{J}(u^0), W_1^s[\mathbb{F}])$$

et  $J(u^0)$  est indépendant de  $s$  vérifiant

$$(-2 + n/2) \vee (-1) \not\leq s \not\leq r, \quad s \notin \mathbb{N}.$$

**Preuve.** On fixe  $\bar{s} \in (-\frac{1}{2}, 0)$  tel que  $\bar{\sigma} \leq n \wedge (\bar{s} + 2)$ , alors puisque  $\bar{s} \leq 0$ , ( $\bar{s}^+ = 0$ ), c.à.d.  $\bar{s} \leq n$ , on aura

$$\frac{n}{2} = \frac{\bar{s}^+ + n}{2} \leq \bar{\sigma} \leq n \wedge (\bar{s} + 2), \text{ et } \left(-2 + \frac{n}{2}\right) \vee (-1) \leq -\frac{1}{2} \leq \bar{s} \leq r,$$

par suite  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{s}$  vérifient les hypothèses du théorème 6.9. D'où l'existence d'une solution unique

$$u(\cdot, u^0) \in C(J(u^0), W_1^{\bar{\sigma}}[\mathbb{F}]) \cap C(\dot{J}(u^0), W_1^{\bar{s}+2}[\mathbb{F}]) \cap C^1(\dot{J}(u^0), W_1^{\bar{s}}[\mathbb{F}]),$$

D'autre part si  $\bar{s} \leq s$ , alors on fixe  $t^* \in \dot{J}(u^0)$  et posons

$$u^* := u(t^*, u^0).$$

On considère  $\sigma := \bar{s} + 2 - 2\delta$ , pour un certain  $\delta \in (0, \rho)$  suffisamment petit et on choisit  $s_1 \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ , tel que

$$\begin{aligned} (s_1^+ + n) / 2 \leq \sigma \leq n \wedge (s_1 + 2) \quad \text{si } s_1 \leq n \\ \text{ou } s_1 \leq \sigma \leq s_1 + 2 \quad \text{si } s_1 \geq n. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} J^* &:= \{t \in \mathbb{R}^+, t + t^* \in J(u^0)\}, A^*(t) = A(t, t^*), \text{ avec } t \in J^*, \text{ et} \\ R^*(t) &:= R(t + t^*, u(t + t^*, u^0)), \text{ avec } t \in J^*, \end{aligned}$$

et considérons le problème de Cauchy

$$\dot{v} + A^*(t)v = R^*(t), t \in J^*, v(0) = u^*.$$

Sachant que  $E_\theta \doteq W^{s+2\theta}$ ,  $s + 2\theta \notin \mathbb{Z}$ , et puisqu'on a

$$(t \mapsto u(t + t^*, u^0)) \in C(J^*, W_1^{\bar{s}+2}[\mathbb{F}]) \cap C^1(J^*, W_1^{\bar{s}}[\mathbb{F}]),$$

d'après [[2], proposition, II.1.1.2], on a

$$(t \mapsto u(t + t^*, u^0)) \in C(J^*, W_1^{\bar{s}+2}[\mathbb{F}]) \cap C^1(J^*, W_1^{\bar{s}}[\mathbb{F}]) \hookrightarrow C^{1-\theta}(J^*, W_1^{\bar{s}+2\theta}[\mathbb{F}]),$$

donc si on prend  $\theta = 1 - \delta$  on aura

$$(t \mapsto u(t + t^*, u^0)) \in C^\delta(J^*, W_1^\sigma[\mathbb{F}]),$$

de plus, puisqu'on a

$$\begin{cases} (s_1^+ + n) / 2 \leq \sigma \leq n & \text{pour } s_1 \leq n \\ s_1 \leq \sigma \leq s_1 + 2 & \text{pour } s_1 \geq n \end{cases}$$

c.à.d. : les hypothèses du Corollaire 6.2 avec  $\tau$  remplacé par  $s_1$ . Par suite on a :

$$(t \mapsto R(t, \cdot)) \in C^\rho(J, C_b^\sigma(W_1^\sigma[\mathbb{F}], W_1^1[\mathbb{F}])),$$

de plus  $(C_b^1(E_1, E_0) \hookrightarrow C_b^{1-}(E_1, E_0))$ , c.à.d

$$(t \mapsto R(t, \cdot)) \in C^\delta(J, C_b^{1-}(W_1^\sigma[\mathbb{F}], W_1^{s_1}[\mathbb{F}])) \text{ puisque } \delta \in (0, \rho),$$

de plus on a vu que

$$(t \mapsto u(t + t^*, u^0)) \in C^\delta(J^*, W_1^\sigma[\mathbb{F}]),$$

donc on obtient

$$(t \mapsto R^*(t)) \in C^\delta(J^*, W_1^{s_1}[\mathbb{F}]),$$

ainsi et d'après le théorème 6.6 on constate que le problème semi linéaire

$$\dot{v} + A^*(t)v = R^*(t), t \in J^*, v(0) = u^*,$$

admet une solution unique

$$v \in C(J^*, W_1^{s_1}[\mathbb{F}]) \cap C\left(\left(\dot{J}\right)^*, W_1^{s_1+2}[\mathbb{F}]\right) \cap C^1\left(\left(\dot{J}\right)^*, W_1^{s_1}[\mathbb{F}]\right).$$

En outre on remarque que  $\bar{s}$  vérifie l'hypothèse

$$(\bar{s}_1^+ + n) / 2 \leq \sigma \leq n \wedge (\bar{s} + 2), \bar{s} \leq 0 \leq n,$$

puisque  $s_1 \geq 0 \leq \bar{s}$ ,  $\sigma := \bar{s} + 2 - 2\delta$  et  $\begin{cases} (s_1^+ + n) / 2 \leq \sigma \leq n \wedge (s_1 + 2), \text{ si } s_1 \leq n \\ s_1 \leq \sigma \leq s_1 + 2, \text{ si } s_1 \geq n, \end{cases}$

c.à.d

$$\frac{(\bar{s}_1^+ + n)}{2} = \frac{n}{2} \leq (s_1^+ + n) / 2 \leq \sigma \leq n \wedge (\bar{s} + 2) \text{ pour } s_1 \leq n,$$

et si  $s_1 \geq n$ , on a

$$\sigma \geq s_1 \geq n \geq \frac{n}{2} = \frac{(\bar{s}_1^+ + n)}{2},$$

d'où  $\frac{\bar{s}_1^+ + n}{2} \leq \sigma \leq n \wedge (\bar{s} + 2)$ . Donc, par application de ce qui précède à la résolution du problème :

$$\dot{v} + A^*(t)v = R^*(t), t \in J^*, v(0) = u^*$$

on trouve, en remplaçant  $s_1$  par  $\bar{s}$  et d'après le théorème 6.6 que

$$v \in C(J^*, W_1^{\bar{s}}[\mathbb{F}]) \cap C\left(\dot{J}^*, W_1^{\bar{s}+2}[\mathbb{F}]\right) \cap C^1\left(\dot{J}^*, W_1^{\bar{s}}[\mathbb{F}]\right).$$

Or, la solution  $u(t, u^0)$  vérifie :

$$t \mapsto u(t + t^*, u^0) \in C^\delta(J^*, W_1^{s_1}(\mathbb{F})),$$

d'où alors par unicité de la solution

$$v(t) = u(t + t^*, u^0), t \in J^*,$$

par conséquent  $(t \mapsto u(t + t^*, u^\circ))$  possède la propriété d'effet régularisant suivant

$$(t \mapsto u(t + t^*, u^\circ)) \in C(J^*, W_1^{s_1}[\mathbb{F}]) \cap C\left(\dot{J}^*, W_1^{s_1+2}[\mathbb{F}]\right) \cap C^1\left(\dot{J}^*, W_1^{s_1}[\mathbb{F}]\right), \quad s_1 \geq \bar{s}.$$

Par ailleurs dans le cas où :  $s_1 < s$ , on répète le procédé précédent de "bootstrapping" un nombre fini de fois jusqu'à  $s$ , c.à.d. jusqu'à ce qu'on ait

$$(t \mapsto u(t + t^*, u^\circ)) \in C(J^*, W_1^s[\mathbb{F}]) \cap C\left(\dot{J}^*, W_1^{s+2}[\mathbb{F}]\right) \cap C^1\left(\dot{J}^*, W_1^s[\mathbb{F}]\right)$$

□

**Corollaire 6.10** *On suppose que  $\rho \geq 0$  et*

$$(t \mapsto (e, (\gamma, \varphi), h)(t)) \in C^\rho(J, E^\infty \times BUC^\infty[K_{coag} \times K_{frag}] \times W_1^\infty[\mathbb{F}]),$$

*On suppose également qu'il existe  $\underline{\alpha} > 0$  vérifiant*

$$\mathbf{a}(x, t, y) \xi \cdot \xi \geq \underline{\alpha} |\xi|^2, \quad (x, t) \in R^n \times J, \quad p.p. y \in Y, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

*Alors, si  $u^0 \in W_1^\sigma[\mathbb{F}]$  pour un certain  $\sigma \in (\frac{n}{2}, n \wedge 2)$ , la solution maximal du problème*

$$\dot{u} + A(t)u = R(t, u(t)), \quad t \in J, \quad u(0) = u^0$$

*vérifie*

$$u(\cdot, u^0) \in C^1\left(\dot{J}(u^0), C_0^\infty[\mathbb{F}]\right).$$

**Preuve.** *On a*

$$\begin{aligned} E^\infty & : = \bigcap_{m \geq 0} E^m, \quad BUC^\infty := \bigcap_{m \geq 0} BUC^m[\mathbb{F}] \\ W_1^\infty[\mathbb{F}] & : = \bigcap_{m \geq 0} W_1^m[\mathbb{F}], \quad C_0^\infty[\mathbb{F}] := \bigcap_{m \geq 0} C_0^m[\mathbb{F}], \end{aligned}$$

*et*

$$(t \mapsto (e, (\gamma, \varphi), h)(t)) \in C^\rho(J, E^\infty \times BUC^\infty[K_{coag} \times K_{frag}] \times W_1^\infty[\mathbb{F}])$$

*alors*

$$(t \mapsto (e, (\gamma, \varphi), h)(t)) \in C^\rho(J, E^{1+r} \times BUC^r[K_{coag} \times K_{frag}] \times W_1^\tau[\mathbb{F}]), \quad r \geq 0, \quad \tau \geq 0,$$

*par application de la proposition 10 on obtient que*

$$u(\cdot, u^0) \in C(J(u^0), W_1^\sigma[\mathbb{F}]) \cap C\left(\dot{J}(u^0), W_1^{s+2}[\mathbb{F}]\right) \cap C^1\left(\dot{J}(u^0), W_1^s[\mathbb{F}]\right)$$

pour tout  $s$  vérifiant

$$s > \left(-2 + \frac{n}{2}\right) \vee (-1), \quad s \notin \mathbb{N}$$

D'autre part on a

$$W_1^s [\mathbb{F}] \xrightarrow{d} C_0^m [\mathbb{F}], \quad s > m + n, m \in \mathbb{N},$$

donc

$$u(\cdot, u^0) \in C^1 \left( \dot{J}(u^0), C_0^m [\mathbb{F}] \right), \quad \text{pour } s > m + n, m \in \mathbb{N},$$

tant que

$$u(\cdot, u^0) \in C^1 \left( \dot{J}(u^0), W_1^s [\mathbb{F}] \right),$$

et puisqu'on a

$$u(\cdot, u^0) \in C^1 \left( \dot{J}(u^0), W_1^s [\mathbb{F}] \right), \quad s > 0,$$

alors

$$u(\cdot, u^0) \in C^1 \left( \dot{J}(u^0), C_0^m [\mathbb{F}] \right), \quad m \geq 0$$

Or pour tout  $m \geq 0$  il existe  $s > 0$  tel que  $m + n < s$ , c à d : il existe  $s > 0$ , tel que

$$W_1^s [F] \xrightarrow{d} C_0^m [\mathbb{F}]$$

d'où alors

$$u(\cdot, u^0) \in C^1 \left( \dot{J}(u^0), C_0^\infty [\mathbb{F}] \right).$$

□

**Remarque 6.2** Les équations de type parabolique possèdent la propriété d'effet régularisant. Plus précisément la solution du problème de Cauchy associée est plus régulière que la donnée initiale

## 6.5 Positivité des solutions

Le but de cette partie consiste à montrer que la solution du problème de coagulation fragmentation avec diffusion  $u(t, u^0)$  reste positive pour  $t \in J$ , si la donnée initiale  $u^0$  est positive. Avant cela on donne quelques définitions concernant les espaces ordonnés.

**Définition 6.3** (cône)

Un ensemble non vide  $C$  d'un espace vectoriel est dit cône si  $\mathbb{R}^+ C \subset C$ . Ainsi chaque cône contient  $\{0\}$ . En outre un cône est dit propre si  $C \cap (-C) = \{0\}$ .

**Définition 6.4** (espace vectoriel ordonné)

Soit  $E$  un espace vectoriel réel et  $C$  un cône convexe dans  $E$ . On définit la relation d'ordre partielle notée  $(\leq)$ , par

$$x \leq y \text{ si et seulement si } x - y \in C$$

$C$  est une relation linéaire, c.à.d

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z, \text{ et } \alpha x \leq \alpha y \text{ pour } z \in E, \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Réciproquement, soit une relation d'ordre partielle dans  $E$ , on pose

$$C := \{x \in E; x \geq 0\}.$$

Alors  $C$  est un cône convexe dans  $E$ , dit cône positif de  $E$ .

Une relation d'ordre partielle et d'ordre total si elle est antisymétrique c.à.d  $x \leq y, y \leq x \implies x = y$ ,

si et seulement si le cône positif associé est propre.

Un espace ordonné  $(E, \leq)$ , est un espace vectoriel réel  $E$  muni d'une relation d'ordre totale linéaire  $(\leq)$ . On note  $(E, P)$  à la place de  $(E, \leq)$ , ou  $P$  est le cône positif propre de  $E$ .

On note par  $x \geq y$  la relation  $y \leq x$  et on écrit

$$(x < y) \Leftrightarrow (x \leq y, x \neq y).$$

**Définition 6.5** (espaces vectoriels topologiques ordonnés)

Soit  $E := (E, C)$  un espace vectoriel ordonné. On suppose également que  $E$  est un espace topologique.

$E$  est dit un espace vectoriel topologique ordonné si son cône positif est fermé.

Si  $E$  est d'une part un espace vectoriel topologique ordonné et d'autre part un espace localement convexe (respectivement espace de Fréchet, espace de Banach) muni de sa topologie usuelle, alors  $E$  est dit espace localement convexe ordonné (respectivement espace de Fréchet ordonné, espace de Banach ordonné)

**Définition 6.6** (application positive)

Soient  $(E, C)$  et  $(F, D)$  deux espaces vectoriels ordonnés par une relation d'ordre partielle. L'application  $T : E \longrightarrow F$  est dite positive, notée  $T \geq 0$ , si  $T(C) \subset D$  c.à.d  $Tx \geq 0$  si  $x \geq 0$ .

Si  $(E, C)$  et  $(F, D)$  sont deux espaces vectoriels topologiques ordonnés, on a

$$\mathcal{L}^+(E, F) := \{T \in \mathcal{L}(E, F); T \geq 0\}$$

c'est un cône fermé de  $\mathcal{L}(E, F)$  induit par la relation d'ordre partielle dans  $\mathcal{L}(E, F)$  et c'est un cône propre si  $C$  est total c.à.d  $\overline{C - C} = E$ .

On note  $\mathcal{L}^+(E) := \mathcal{L}^+(E, E)$ .

Soit  $E$  un espace localement convexe ordonné, alors  $C' := \mathcal{L}^+(E, \mathbb{R})$  est le cône dual de  $E'$ . Ainsi  $(E', C')$  est un espace localement convexe ordonné si et seulement si  $C$  est total.

Soit  $A \in \mathcal{G}(E)$  (i.e.  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semigroupe sur l'espace  $E$ ). Si  $E$  est un espace de Banach ordonné partiellement par son cône convexe fermé, alors le semi groupe  $\{e^{-tA}; t \geq 0\}$  est dit positif si  $e^{-tA} \geq 0$  pour  $t \geq 0$ .

On dira aussi qu'un opérateur linéaire  $A$  dans  $E$  est résolvant positif si  $(\omega, \infty) \subset \rho(-A)$  pour un certain  $\omega > 0$ , et

$$(I + \varepsilon A)^{-1} \geq 0, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{\omega}.$$

En fait ces deux dernières notions sont les mêmes comme on va le voir dans les deux théorèmes suivants.

**Théorème 6.11** Soit  $E$  un espace de Banach ordonné partiellement par un cône convexe fermé et  $A \in \mathcal{G}(E)$ . Alors le semi groupe  $\{e^{-tA}; t \geq 0\}$  est positif si et seulement si  $A$  est résolvant positif.

**Preuve.** c'est une conséquence du théorème 5.11 du chapitre précédent.  $\square$

**Théorème 6.12** Soient  $E_0, E_1$  deux espaces de Banach tel que  $E_1 \hookrightarrow E_0$  et  $E_0$  ordonné partiellement par un cône convexe fermé,  $J$  un sous intervalle parfait de  $\mathbb{R}^+$  contenant 0. On suppose que  $\exists \rho \in (0, 1)$  tel que

$$A \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0)).$$

Alors l'opérateur d'évolution  $U_A$  associé à  $A$  est positif pourvu que les semi groupes  $\{e^{-tA}; t \geq 0\}$  le soient.

**Preuve.** c'est une conséquence du théorème 5.13 du chapitre précédent.  $\square$

On déduit de ce qui précède que les espaces  $L_p(M, \mu; E)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , et  $BUC^s[E], W_1^s[E]$ ,  $s \in \mathbb{R}^+$

sont des espaces de Banach ordonnés pourvu que  $E$  soit ordonné.

En particulier  $\mathbb{F}$  est un espace de Banach ordonné, avec son cône positif  $\mathbb{F}^+ = L_1^+(Y, (1+y)dy)$ .

Le Lemme suivant est utile pour l'approximation des cône positifs.

**Lemme 6.5**  $D^+(\mathbb{R}^n) \otimes C_c^+(Y)$  est dense dans  $W_1^s[\mathbb{F}]^+$  pour  $s \in \mathbb{R}^+$ .

**Preuve.** On peut réduire la démonstration au cas où  $s \in \mathbb{N}$ , du fait que  $W_1^s[\mathbb{F}] \xrightarrow{d} W_1^t[\mathbb{F}]$  pour  $-\infty < t \leq s < \infty$ .

Sachant d'une part que  $D(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{F}$  est séquentiellement dense dans  $D(\mathbb{F})$  et d'autre part  $D^+[F]$  est dense dans  $W_1^s[\mathbb{F}]^+$ , on voit que  $D^+(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{F}^+$  est dense dans  $D^+[\mathbb{F}]$  qui lui même dans  $W_1^s[\mathbb{F}]^+$ .

en outre  $C_c^+(Y)$  est dense dans  $\mathbb{F}^+$ . Donc

$D^+(\mathbb{R}^n) \otimes C_c^+(Y)$  est dense dans  $W_1^s[\mathbb{F}]^+$ , pour  $s \in \mathbb{R}^+$ .  $\square$

**Proposition 11** On suppose que  $s \in (0, r) \setminus \mathbb{N}$  et  $e := (\mathbf{a}, \vec{a}, \vec{b}, a_0) \in \mathbb{E}^{1+r}$  avec  $\mathbf{a}(x, y) \xi \cdot \xi \geq \underline{\alpha} |\xi|^2, x \in \mathbb{R}^n, p.p y \in Y, \xi \in \mathbb{R}^n$  et  $\underline{\alpha} > 0$  fixé. Alors  $A[e]$  est résolvant positif sur  $W_1^s[\mathbb{F}]$ .

**Preuve.** Par application du théorème 6.4 avec  $\sigma = r + 1$  on déduit qu'il existe  $k \geq 1$  et  $\omega > 0$  tels que

$$A[e] \in \mathcal{H}(W_1^{s+2}[\mathbb{F}], W_1^s[\mathbb{F}]; k, \omega),$$

Ainsi  $A[e]$  est un opérateur linéaire fermé dans  $W_1^s[\mathbb{F}]$  avec  $[\omega, \infty) \subset \rho(-A[e])$ .

(i) Supposons que  $s > n$  et posons  $\mathbb{F}_\infty := L_\infty(Y, dy)$ . D'après la preuve du théorème 6.4, on trouve

$$A := A[e] \in \mathcal{H}(W_1^{s+2}[\mathbb{F}_\infty], W_1^s[\mathbb{F}_\infty]),$$

c à d  $\exists k_\infty \geq 0, \omega_\infty > 0$  tels que

$$A \in \mathcal{H}(W_1^{s+2}[\mathbb{F}_\infty], W_1^s[\mathbb{F}_\infty]; k_\infty, \omega_\infty).$$

Par suite  $[\omega_\infty, \infty) \subset \rho(-A_\infty)$ , où  $A_\infty$  est l'opérateur  $A$  considéré sur  $W_1^s[\mathbb{F}_\infty]$ . Posons

$$\lambda_0 := \omega \vee \omega_\infty \vee \left( \|a_0\|_{BUC[L_\infty^1]} + \|\nabla \cdot \vec{a}\|_{BUC[L_\infty^1]} \right),$$

on considère :  $\lambda \geq \lambda_0$  et  $v \in D^+(\mathbb{R}^n) \otimes C_c^+(Y)$ . On pose :  $u := (\lambda + A_\infty)^{-1} v$ , comme on a  $\lambda \geq \omega_\infty$ , et  $A \in \mathcal{H}(W_1^{s+2}[\mathbb{F}_\infty], W_1^s[\mathbb{F}_\infty])$ , alors  $u \in W_1^{s+2}[\mathbb{F}_\infty]$  et  $(\lambda + A(x, y))u(x, y) = v(x, y), x \in \mathbb{R}^n, p.p y \in Y$

Sachant que  $(s > n) \implies (s + 2 > n + 2)$  et puisqu'on a

$$W_1^\sigma[E] \xrightarrow{d} C_0^m[E], \text{ pour } \sigma > m + n, m \in \mathbb{N},$$

alors en prenant  $\sigma = s + 2$  et  $m = 2$  on trouve

$$W_1^{s+2}[\mathbb{F}_\infty] \xrightarrow{d} C_0^2[\mathbb{F}_\infty],$$

ainsi  $u \in C_0^2[\mathbb{F}_\infty]$ ,

ce qui montre que  $u(\cdot, y) \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  pour presque tout  $y \in Y$  et de plus  $u(\cdot, u^0)$  vérifie l'inéquation différentielle elliptique

$$v(\cdot, y) = -a(\cdot, y) : \nabla^2 u(\cdot, y) + \vec{c}(\cdot, y) \cdot \nabla u(\cdot, y) + d(\cdot, y) u(\cdot, y) \geq 0 \text{ p.p } y \in Y$$

sur  $\mathbb{R}^n$ , où  $d = \lambda + a_0 - \nabla \cdot \vec{a} \geq 0$ .

Dans cette inéquation  $\nabla^2 w$  représente le Hessien de  $w$ ,  $A : B$  est la trace du produit de matrices  $AB^T$  et enfin  $\vec{c} := \vec{b} - \vec{a} - \nabla \cdot a$ .

Comme par hypothèse

$$e := (\mathbf{a}, \vec{a}, \vec{b}, a_0) \in E^{1+r} := BUC^{1+r}[L_{\infty, sym}^{n \times n}] \times BUC^{1+r}[L_\infty^n] \times BUC^{1+r}[L_\infty^n] \times BUC^r[L_\infty^1],$$

alors les coefficients de l'inéquation différentielle précédente sont uniformément bornés sur  $\mathbb{R}^n$ .

De plus  $u(., y)$  s'annule à l'infini, p.p  $y \in Y$ . Par application du principe du maximum classique on voit que  $u(., y)$  n'est pas négative pour presque tout  $y \in Y$  et donc  $u \in W_1^{s+2}[F_\infty]^+$ .

Sachant que

$$D^+(\mathbb{R}^n) \otimes C_c^+(Y) \subset W_1^s[\mathbb{F}]^+$$

alors  $v \in W_1^s[F]^+$ . On en déduit, avec le fait que  $\lambda \geq \lambda_0 \geq \omega$  et grâce au théorème 6.4 que  $u \in W_1^{s+2}[F]$ .

Par conséquent

$$(\lambda + A)^{-1}(D^+(\mathbb{R}^n) \otimes C_c^+(Y)) \subset W_1^s[\mathbb{F}]^+, \quad \lambda \geq \lambda_0,$$

De plus le Lemme 6.5 montre que

$$D^+(\mathbb{R}^n) \otimes C_c^+(Y) \stackrel{d}{\hookrightarrow} W_1^s[\mathbb{F}]^+,$$

Par suite en utilisant le fait que  $(\lambda + A)^{-1}$  est continu sur  $W_1^s[\mathbb{F}]$  et que  $W_1^s[\mathbb{F}]^+$  est fermé dans  $W_1^s[\mathbb{F}]$ , on déduit que

$$(\lambda + A)^{-1}(W_1^s[\mathbb{F}]^+) \subset W_1^s[\mathbb{F}]^+$$

c à d  $A[e]$  est résolvant positif sur  $W_1^s[\mathbb{F}]$ .

(ii) Maintenant on suppose que  $s < n$ .

Soient  $t \in (n, r_1)$  avec  $r_1 < \infty$  et  $t \notin \mathbb{N}$ , avec  $r_1 < r$ . Alors  $e \in E^{1+r} \hookrightarrow E^{1+r_1}$  et l'étape (i) montre que  $A$  est résolvant positif sur  $W_1^t[\mathbb{F}]$ .

le Lemme 6.5 montre que

$$D^+(\mathbb{R}^n) \otimes C_c^+(Y) \stackrel{d}{\hookrightarrow} W_1^s[\mathbb{F}]^+, \text{ et } D^+(\mathbb{R}^n) \otimes C_c^+(Y) \stackrel{d}{\hookrightarrow} W_1^t[\mathbb{F}]^+$$

en outre on a  $t > s$ ,

par suite

$$W_1^t[\mathbb{F}]^+ \hookrightarrow W_1^s[\mathbb{F}]^+,$$

d'où alors

$$W_1^t[\mathbb{F}]^+ \stackrel{d}{\hookrightarrow} W_1^s[\mathbb{F}]^+.$$

Puisqu'on a déjà vu que  $(\lambda + A)^{-1}$  existe et est continu sur  $W_1^s[\mathbb{F}]$  pour  $\lambda \geq \omega$ , alors d'après le théorème 6.4  $\exists \bar{\omega} > 0, \bar{k} \geq 1$  tel que

$$A \in \mathcal{H}(W_1^{t+2}[\mathbb{F}], W_1^t[\mathbb{F}]; \bar{k}, \bar{\omega})$$

c à d  $(\lambda + A)^{-1}$  existe et est continu sur  $W_1^t[\mathbb{F}]$  pour  $\lambda \geq \bar{\omega}$ .

Si on prend  $\omega_0 = \max(\omega, \bar{\omega})$ , alors  $(\lambda + A)^{-1}$  est continu sur  $W_1^t[\mathbb{F}]$  et  $W_1^s[\mathbb{F}]$  pour  $\lambda \geq \omega_0$ ,

Comme

$$(\lambda + A)^{-1}(W_1^t[\mathbb{F}]^+) \subset W_1^t[\mathbb{F}]^+$$

et

$$W_1^t[\mathbb{F}]^+ \stackrel{d}{\hookrightarrow} W_1^s[\mathbb{F}]^+$$

alors on obtient

$$(\lambda + A)^{-1} (W_1^s [\mathbb{F}]^+) \subset W_1^s [\mathbb{F}]^+,$$

ce qui montre que  $A$  est résolvant positif sur  $W_1^s [\mathbb{F}]$ .

Maintenant dans le cas où  $r_1 > r$ , on fixe  $r_0 \in (s, r)$ , ainsi

$$e \in E^{1+r} \hookrightarrow E^{1+r_0},$$

alors il existe une suite  $(e_j) \subset E^{1+r_1}$  qui converge dans  $E^{1+r_0}$  vers  $e$ , en outre le Lemme 6.4 montre que

$$(e \longmapsto A[e]) \in \mathcal{L} (E^{1+r}, \mathcal{L} (W_1^{s+2} [\mathbb{F}], W_1^s [\mathbb{F}])) ,$$

cette propriété avec la continuité de l'application inverse  $B \longrightarrow B^{-1}$  montre que pour  $\lambda \geq \lambda_0$  suffisamment grand on a

$$(\lambda + A[e_j])^{-1} \longrightarrow (\lambda + A)^{-1},$$

quand  $j \longrightarrow \infty$  dans  $\mathcal{L} (W_1^s [F])$ , dans la mesure où l'on peut supposer que  $e_j$  vérifie pour tout  $j \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{a}_j(x, y) \xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad p.p \ y \in Y, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

avec  $\alpha > 0$  suffisamment petit.

D'où alors d'après l'étape (ii)

$$(\lambda + A[e_j])^{-1} (W_1^s [\mathbb{F}]^+) \subset W_1^s [\mathbb{F}]^+, \quad \lambda \geq \lambda_0$$

ainsi

$$(\lambda + A)^{-1} (W_1^s [\mathbb{F}]^+) \subset W_1^s [\mathbb{F}]^+, \quad \lambda \geq \lambda_0$$

ce qui montre que  $A$  est résolvant positif dans ce cas aussi.  $\square$

Après cette préparation on peut prouver le résultat principal de cette partie, celui de la positivité de la solution  $u(\cdot, u_0)$  du problème

$$\dot{u} + A(t)u = R(t; u), \quad t \in J, \quad u(0) = u^0$$

pourvu que  $u^0 \geq 0$  et  $(\gamma, \varphi)$  et  $h \geq 0$ .

**Théorème 6.13** *On fait les hypothèses du théorème 6.9, c-à-d :*

$$(1) \quad r, \rho > 0 \quad \text{et} \quad (-2 + \frac{n}{2}) \vee (-1) \leq s \leq r, \quad s \notin \mathbb{N}$$

$$(2) \quad (t \longmapsto (e, (\gamma, \varphi) h)(t)) \in C^\rho (J, E^{1+r} \times BUC^r [K_{coag}^+ \times K_{frag}^+] \times W_1^r [F]^+)$$

pour un certain  $r > \tau > s$ , tel que  $\exists \underline{\alpha} > 0$  vérifiant

$$a(x, t, y) \xi \cdot \xi \geq \underline{\alpha} |\xi|^2, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times J, \quad p.p \ y \in Y, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$(3) \quad \frac{(s+n)}{2} \leq \sigma \leq n \wedge (s+2), \quad \text{pour} \quad s \leq n, \quad \text{et} \quad s \leq \sigma \leq s+2, \quad \text{pour} \quad s > n, \quad \text{avec} \quad \sigma \notin \mathbb{N}.$$

de plus on suppose :

$$(4) \quad (\gamma, \varphi) \geq 0 \quad \text{et} \quad h \geq 0.$$

Alors

$$u^0 \geq 0 \implies u(\cdot, u^0) \geq 0.$$

**Preuve.** (i) Supposons que  $s > n$ , ainsi ( $n < s < \sigma$ ), et puisqu'on a vu que

$$W_1^{\bar{s}}[E] \xrightarrow{d} C_0^m[E], \quad \bar{s} > m + n, \quad m \in \mathbb{N}$$

alors en prenant  $\bar{s} = \sigma$  et ( $m = 0$ ) on voit que

$$W_1^\sigma[E] \xrightarrow{d} C_0[E]$$

De plus le théorème 6.9 garantit que

$$u := u(\cdot, u^0) \in C(J(u^0), W_1^\sigma[\mathbb{F}]),$$

ainsi

$$u(\cdot, u^0) \in C(J(u^0), C_0[\mathbb{F}]).$$

Soit  $T \in J(u^0)$  fixé, posons  $\omega_0 := \|\gamma\|_\infty \mathop{Max}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{C_0[\mathbb{F}]}$ . Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty \gamma(x, t, y, y') u(x, t, y') dy' \right| &\leq \|\gamma\|_\infty \int_0^\infty |u(x, t, y')| dy' \\ &\leq \|\gamma\|_\infty \mathop{Sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \int_0^\infty |u(x, t, y')| dy' \\ &\leq \|\gamma\|_\infty \mathop{Max}_{0 \leq t \leq T} \mathop{Sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \int_0^\infty |u(x, t, y')| dy', \quad 0 \leq t \leq T \\ &\leq \|\gamma\|_\infty \mathop{Max}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{C_0[\mathbb{F}]}, \end{aligned}$$

car on a

$$(t \mapsto \gamma(t)) \in C^\rho(J, BUC^r(\mathbb{R}^n, K_{coag})),$$

et  $K_{coag}$  est un sous espace linéaire fermé de  $L_\infty(Y^2, d^2y)$ , plus précisément  $\gamma$  est borné par rapport à  $x$  car l'application

$$(x \mapsto \gamma(x)) \in BUC^r(\mathbb{R}^n, K_{coag}),$$

de plus elle est bornée par rapport à  $t$  sur  $[0, T]$  car

$$(t \mapsto \gamma(t)) \in C^\rho(J, BUC^r(\mathbb{R}^n, K_{coag}))$$

c à d localement bornée par rapport à  $t$  et donc bornée sur un compact, de plus  $C_0[\mathbb{F}]$  est pris comme un sous espace fermé de  $BUC[\mathbb{F}]$ , c.à.d

$$\mathop{Max}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{C_0[\mathbb{F}]} := \mathop{Max}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{BUC[\mathbb{F}]} := \mathop{Sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \mathop{Max}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{\mathbb{F}}$$

Ainsi on a trouvé que

$$\left| \int_0^\infty \gamma(x, t, y, y') u(x, t, y') dy' \right| \leq \omega_0$$

pour  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$  et p.p  $y \in Y$ . Posons

$$P_\gamma(v, w)(y) := \frac{1}{2} \int_0^y \gamma(y - y', y') v(y - y') w(y') dy'$$

et

$$q_\gamma(v, w)(y) := v(y) \int_0^\infty \gamma(y, y') w(y') dy'$$

pour  $y \in Y$  et  $v, w \in \mathbb{F}$ . On remarque que si on pose  $\omega := \omega_0 + \|\phi_\varphi\|_\infty$  et

$$G(t, v) := P_{\gamma(t)}(v, v) - q_{\gamma(t)}(v, u) + \omega v + F(t, v) + h(t)$$

pour  $0 \leq t \leq T$  et  $v \in \mathbb{F}$ , on trouve

$$G(t, u(t)) = R(t, u(t)) + \omega u(t), 0 \leq t \leq T,$$

on remarque alors que si on prend  $v \in C([0, T], C^+[\mathbb{F}])$ , et en utilisant l'inégalité

$$\int_0^\infty \gamma(x, t, y, y') u(x, t, y') dy' \leq \left| \int_0^\infty \gamma(x, t, y, y') u(x, t, y') dy' \right| \leq \omega_0,$$

on trouve

$$\begin{aligned} G(t, v(t)) &: = P_{\gamma(t)}(v(t), v(t)) - q_{\gamma(t)}(v(t), u(t)) + \omega v(t) + F(t, v(t)) + h(t) \\ &\geq P_{\gamma(t)}(v(t), v(t)) - \omega_0 v(t) + (\omega_0 + \|\phi_\varphi\|_\infty) v(t) + F(t, v(t)) + h(t) \\ &\geq P_{\gamma(t)}(v(t), v(t)) + \|\phi_\varphi\|_\infty v(t) + F(t, v(t)) + h(t) \end{aligned}$$

et puisqu'on a

$$F(t, v(t)) = \int_Y \int_0^y \left(1 - \frac{y'}{y}\right) \varphi(y, y') dy' v(t) dy \geq 0$$

puisque  $1 \geq 1 - \frac{y'}{y} \geq 0$  sur  $[0, y]$ , en outre du fait que  $\varphi \geq 0$ ,  $v \geq 0$ , sachant que  $\gamma \geq 0$ ,  $h \geq 0$ , on en déduit alors que

$$G(t, v(t)) \geq 0,$$

pour  $v \in C([0, T], C^+[\mathbb{F}])$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

Si on pose  $A_\omega := \omega + A$ , on remarque que  $u$  est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\dot{v} + A_\omega(t) v = G(t, v), \quad 0 \leq t \leq T, \quad v(0) = u^0$$

dans  $W_1^s[\mathbb{F}]$ .

Le Corollaire 5.5 du chapitre précédent montre que  $A_\omega$  admet un opérateur d'évolution parabolique unique  $U$ . Posons pour  $(v \in W_1^\sigma[\mathbb{F}])$

$$V(v)(t) := \int_0^t U(t, \tau) G(\tau, v(\tau)) d\tau, 0 \leq t \leq T,$$

puisque  $u$  est la solution du problème

$$\dot{v} + A_\omega(t)v = G(t, v), \quad 0 \leq t \leq T, \quad v(0) = u^0$$

sur  $W_1^s[\mathbb{F}]$ , alors  $u$  résoud l'équation de Volterra non linéaire

$$u = U(\cdot, 0)u^0 + V(u)$$

dans  $W_1^\sigma[\mathbb{F}]$ . Cette équation peut être résolu par la méthode des approximation successives si  $T$  est suffisamment petit, c.à.d si on considère la suite

$$u_{n+1} := U(\cdot, 0)u^0 + V(u_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad u_0 := u^0,$$

on trouve que cette suite converge vers  $u$  dans  $C([0, T], W_1^\sigma[\mathbb{F}])$ . Puisque la proposition 11 montre que  $A_\omega$  est résolvant positif, alors en appliquant les Théorèmes 5.11, 5.12 du chapitre précédent on peut montrer que  $U$  est positif.

Puisqu'on a  $\sigma > s > n$ , alors l'injection

$$W_1^{\bar{s}}[E] \hookrightarrow C_0^m[E], \quad \bar{s} > m + n, m \in \mathbb{N}$$

montre que

$$W_1^\sigma[\mathbb{F}] \hookrightarrow C_0[\mathbb{F}],$$

et puisqu'on a

$$u_{n+1} := U(\cdot, 0)u^0 + V(u_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

en outre on a pour  $v \in W_1^\sigma[\mathbb{F}]$

$$V(v)(t) := \int_0^t U(t, \tau) G(\tau, v(\tau)) d\tau, 0 \leq t \leq T,$$

avec  $G(t, v(t)) \geq 0$ , puisque

$$v \in C([0, T], C^+[\mathbb{F}]), \quad 0 \leq t \leq T.$$

d'où alors

$$u_1 := U(\cdot, 0)u^0 + V(u_0) \geq 0$$

car

$$u_0 = u^0 \in C([0, T], C_0^+[\mathbb{F}])$$

c à d

$$u_1 \in C([0, T], C_0^+[\mathbb{F}]),$$

ce qui implique

$$u_2 := U(., 0)u^0 + V(u_1) \geq 0$$

et ainsi de suite, ce qui montre que  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par conséquent  $u \geq 0$ .

Ainsi on a montré que

$$\exists T \in \dot{J}; (u^0 \geq 0) \implies (u(t, u^0) \geq 0),$$

pour  $0 \leq t \leq T$ . Posons

$$T^* := \text{Max} \left\{ T \in \dot{J}(u^0); u(t, u^0) \geq 0, \text{ sur } [0, T] \right\}.$$

Pour montrer que  $T^* = \text{Sup}J(u^0)$ , on suppose le contraire et on montre que c'est absurde. Si  $T^* < \text{sup}(J(u^0))$  alors on refait le raisonnement précédent sur le problème

$$\begin{aligned} \dot{v} + A(t + T^*)v &= R(t + T^*, v), t \in J(u^0) \setminus \{T^*\}, \\ v(0) &= u(T^*, u^0) \end{aligned}$$

pour aboutir à  $u(t, u^0) \geq 0$ , sur  $[0, T^* + T^{**}]$  pour un certain  $T^{**} \geq 0$ , ce qui contredit

le fait que  $T^* := \text{Max} \left\{ T \in \dot{J}(u^0); u(t, u^0) \geq 0, \text{ sur } [0, T] \right\}$ ,

d'où alors  $T^* = \text{Sup}J(u^0)$ , ainsi  $u(t, u^0) \geq 0$  dans  $W_1^\sigma[\mathbb{F}]$ .

(ii) Maintenant on suppose que  $s < n$  et  $r = \infty$ . Fixons  $\sigma_1, s_1$  vérifiant

$$n < s_1 < \sigma_1 < s_1 + 2, \quad \tau_1 > s_1$$

(1) si

$$\tau_1 < \tau \implies W_1^\tau[\mathbb{F}]^+ \xrightarrow{d} W_1^{\tau_1}[\mathbb{F}]^+,$$

alors

$$h \in C^\rho(J, W_1^\tau[\mathbb{F}]^+) \leftrightarrow C^\rho(J, W_1^{\tau_1}[\mathbb{F}]^+),$$

$\sigma < \sigma_1$  car  $\sigma < n$ . D'après les hypothèses, si on suppose que  $u^0 \in W_1^{\sigma_1}[\mathbb{F}]^+$ , alors l'étape (i) implique que  $u(t, u^0) \geq 0$  dans  $W_1^{\sigma_1}[\mathbb{F}]$ . De plus, puisque

$$W_1^{\sigma_1}[\mathbb{F}]^+ \xrightarrow{d} W_1^\sigma[\mathbb{F}]^+$$

comme on l'a montré dans la preuve de la proposition 11,

ainsi si on prend  $u^0 \in W_1^\sigma[\mathbb{F}]^+$ , alors

il existe  $(u_n^0) \in W_1^{\sigma_1}[\mathbb{F}]^+$  tel que  $u_n^0 \longrightarrow u^0$  dans  $W_1^\sigma[\mathbb{F}]$ , avec  $u(t, u^0) \geq 0$ , sur  $W_1^\sigma[\mathbb{F}]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

en outre le théorème 6.9 garantit que  $u(., u^0)$  dépend continûment de  $(u^0, h)$  dans  $W_1^\sigma[\mathbb{F}]$

,  
par conséquent

$$0 \leq u(\cdot, u_n^0) \longrightarrow u(\cdot, u^0)$$

dans  $W_1^\sigma[\mathbb{F}]$ , d'où  $u(\cdot, u^0) \geq 0$  sur  $W_1^\sigma[\mathbb{F}]$  pour  $u^0 \in W_1^\sigma[\mathbb{F}]^+$ .

(2) Maintenant on étudie le cas où  $\tau_1 > \tau$ . Supposons que

$$h \in C^\rho(J, W_1^{\tau_1}[\mathbb{F}]^+),$$

l'étape précédente montre que  $u(\cdot, u^0, h) \geq 0$  sur  $W_1^\sigma[F]$ , pour  $(u^0, h) \in W_1^\sigma[\mathbb{F}]^+ \times C^\rho(J, W_1^{\tau_1}[\mathbb{F}]^+)$ .

Sachant que

$$W_1^{\tau_1}[\mathbb{F}]^+ \xrightarrow{d} W_1^\tau[\mathbb{F}]$$

on en déduit que

$$C^\rho(J, W_1^{\tau_1}[\mathbb{F}]^+) \xrightarrow{d} C^\rho(J, W_1^\tau[\mathbb{F}]^+).$$

Soit  $h \in C^\rho(J, W_1^\tau[\mathbb{F}]^+)$  alors il existe  $(h_n) \subset C^\rho(J, W_1^{\tau_1}[\mathbb{F}]^+)$  tel que  $h_n \longrightarrow h$  dans  $C^\rho(J, W_1^\tau[\mathbb{F}]^+)$ .

Ainsi et puisque  $u(\cdot, u^0, h_n) \geq 0$  sur  $W_1^\sigma[\mathbb{F}]$  (car  $(u^0, h_n) \in W_1^\sigma[\mathbb{F}]^+ \times C^\rho(J, W_1^{\tau_1}[\mathbb{F}]^+)$ ) le résultat de dépendance continue de  $u$  par rapport à  $h$  nous permet de conclure que

$$0 \leq u(\cdot, u^0, h_n) \longrightarrow u(\cdot, u^0, h)$$

dans  $W_1^\sigma[\mathbb{F}]$ , c à d  $u(\cdot, u^0, h) \geq 0$  sur  $W_1^\sigma[\mathbb{F}]$  pour  $(u^0, h) \in W_1^\sigma[\mathbb{F}]^+ \times C^\rho(J, W_1^\tau[\mathbb{F}]^+)$ .

(iii) Finalement on suppose que  $s < n$  et  $r > s$

on remarque que  $s < n$  et  $s < r < r_1 = \infty$ . Par application de l'étape (ii) à  $s < n$ ,  $r_1 = \infty$ , on obtient

$$u(u^0, e, \gamma, \varphi, h) \geq 0$$

sur  $W_1^\sigma[\mathbb{F}]$ , pour

$(u^0, (e, (\gamma, \varphi), h)) \in W_1^\sigma[\mathbb{F}]^+ \times C^\rho(J, \mathbb{E}^\infty \times BUC^\infty[K_{coag} \times K_{frag}] \times W_1^\tau[\mathbb{F}])$ , sachant que  $\mathbb{E}^\infty := \bigcap_{m \geq 0} \mathbb{E}^m$ ,  $BUC^\infty := \bigcap_{m \geq 0} BUC^m$ , c à d  $\exists m_1$  tel que

$$\mathbb{E}^\infty \hookrightarrow \mathbb{E}^{m_1}, \quad m_1 > r + 1, \quad \text{et} \quad BUC^\infty \hookrightarrow BUC^{m_1-1},$$

Autrement dit on a

$u(u^0, e, \gamma, \varphi, h) \geq 0$  sur  $W_1^\sigma[\mathbb{F}]$ ,

pour  $(u^0, (e, (\gamma, \varphi), h)) \in W_1^\sigma[\mathbb{F}]^+ \times C^\rho(J, \mathbb{E}^{m_1} \times BUC^{m_1-1}[K_{coag}^+ \times K_{frag}^+] \times W_1^\tau[\mathbb{F}]^+)$ ,

ainsi si on prend

$$(u^0, (e, (\gamma, \varphi), h)) \in W_1^\sigma[\mathbb{F}]^+ \times C^\rho(J, \mathbb{E}^{1+r} \times BUC^r[K_{coag}^+ \times K_{frag}^+] \times W_1^\tau[\mathbb{F}]^+),$$

il existe une suite

$$(u^0, (e_n, (\gamma_n, \varphi_n), h)) \subset W_1^\sigma[\mathbb{F}]^+ \times C^\rho(J, \mathbb{E}^{m_1} \times BUC^{m_1-1}[K_{coag}^+ \times K_{frag}^+] \times W_1^\tau[\mathbb{F}]^+),$$

telle que

$$(u^0, (e_n, (\gamma_n, \varphi_n), h)) \xrightarrow{cv} (u^0, (e, (\gamma, \varphi), h)),$$

dans  $W_1^\sigma [\mathbb{F}]^+ \times C^\rho (J, E^{1+r} \times BUC^r [K_{coag}^+ \times K_{frag}^+] \times W_1^\tau [\mathbb{F}]^+)$ ,  
par conséquent la dépendance continue de  $u(u^0, (e, (\gamma, \varphi), h))$  pour  $(u^0, (e, (\gamma, \varphi), h))$   
garantit par le théorème 6.9, nous permet de conclure que

$$0 \leq u(u^0, (e_n, (\gamma_n, \varphi_n), h)) \longrightarrow u(u^0, (e, (\gamma, \varphi), h)),$$

d'où finalement

$$u(u^0, (e, (\gamma, \varphi), h)) \geq 0$$

sur  $W_1^\sigma [\mathbb{F}]$ ,

$$\text{pour } (u^0, (e, (\gamma, \varphi), h)) \in W_1^\sigma [\mathbb{F}]^+ \times C^\rho (J, \mathbb{E}^{1+r} \times BUC^r [K_{coag}^+ \times K_{frag}^+] \times W_1^\tau [\mathbb{F}]^+)$$

c à d si  $s \leq n$ ,  $s \leq r$ , on a

$$u(., u^0) \geq 0$$

sur  $W_1^\sigma [\mathbb{F}]$  si  $(u^0 \in W_1^\sigma [\mathbb{F}]^+)$ . □

## 6.6 Conservation du volume global

Supposons que

$$(Y) \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad r, \rho, \tau \geq 0, \text{ et } (t \mapsto (e, (\gamma, \varphi), h)(t)) \\ \quad \in C^\rho (J, \mathbb{E}^{1+r} \times BUC^r [K_{coag}^+ \times K_{frag}^+] \times W_1^\tau [\mathbb{F}]^+) \\ 2) \quad \exists \bar{\alpha} \geq 0; \mathbf{a}(x, t, y) \xi \cdot \xi \geq \bar{\alpha} |\xi|^2, \\ \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times J, ppy \in Y, \xi \in \mathbb{R}^n \\ 3) \quad \vec{b} = 0, \quad \frac{n}{2} \leq \sigma \leq n, u^0 \in W_1^\sigma [\mathbb{F}]^+, \end{array} \right. ,$$

Fixons  $s \in (0, \tau \wedge (2\sigma - n) \wedge r)$ , avec  $\sigma \leq s + 2$ ,

on remarque que  $(s \leq \tau, s \leq r, \text{ et } s \leq 2\sigma - n)$ ,

c.à.d

$$s \leq \tau, s \leq r, \text{ et } \sigma \geq \frac{s+n}{2} = \frac{s^+ + n}{2}, (s \geq 0), \text{ et } \\ 2n - s \geq 2\sigma - s \geq n \Rightarrow s \leq n, (\sigma \leq n),$$

ce qui donne

$$(-2 + n/2) \vee (-1) \leq 0 \leq s \leq r, \tau \geq s \\ \text{ et } (s^+ + n)/2 \leq \sigma \leq n \wedge (s + 2), s \leq n,$$

ce qui montre que les hypothèses du théorème 6.9 sont vérifiées, ainsi

$$\dot{u} + A(t)u = R(t, u), \quad t \in J, \quad u(0) = u^0$$

admet une solution maximale unique

$$u(., u^0) \in C(J(u^0), W_1^\sigma[\mathbb{F}]) \cap C(J(u^0), W_1^{s+2}[\mathbb{F}]) \cap C^1(J(u^0), W_1^s[\mathbb{F}]).$$

Sachant que

$$W_1^s[\mathbb{F}] \xrightarrow{d} W_1^t[\mathbb{F}], -\infty \leq t \leq s \leq \infty,$$

on déduit que

$$u \in C(J(u^0), W_1^2[\mathbb{F}]) \cap C^1(J(u^0), L_1[\mathbb{F}]),$$

et le théorème 6.13 garantit que  $u \geq 0$ .

**Lemme 6.6** Si  $v \in W_1^2[\mathbb{F}]$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_Y A(t) v y^j dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y a_0 v y^j dy dx, \text{ pour } t \in J, j \in \{0, 1\}.$$

**Preuve.** Soit  $\chi \in D(\mathbb{R}^n)$ , avec  $\chi(x) = 1$ , si  $|x| \leq 1$ , et posons

$$\chi_\varepsilon(x) = \chi(\varepsilon x), \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n. \text{ et } \varepsilon \geq 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y \nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla v + \vec{a} v) y^j dy \chi_\varepsilon dx = \int_{|x| \geq \frac{1}{\varepsilon}} \int_Y (\mathbf{a} \nabla v + \vec{a} v) y^j dy \cdot \nabla \chi_\varepsilon dx \\ & \leq \|\nabla \chi_\varepsilon\|_\infty \int_{|x| \geq \frac{1}{\varepsilon}} \int_Y (\mathbf{a} \nabla v + \vec{a} v) y^j dy dx \leq \varepsilon \|\nabla \chi\|_\infty \int_{|x| \geq \frac{1}{\varepsilon}} \int_Y (\mathbf{a} \nabla v + \vec{a} v) y^j dy dx, \end{aligned}$$

d'où alors

$$- \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y \nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla v + \vec{a} v) y^j dy dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y \nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla v + \vec{a} v) y^j dy \chi_\varepsilon dx = 0,$$

par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_Y A(t) v y^j dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y a_0 v y^j dy dx, \text{ , } j = 0, 1.$$

□

Dans le théorème suivant on aura besoin des notations suivantes

$$V(t) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y u(t) y dy dx, t \in J(u^0),$$

qui est le volume total des particules à l'instant t,

$$A_0(t) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y a_0(t) u(t) y dy dx$$

volume total des particules absorbées à l'instant  $t$ , et

$$H(t) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y h(t) y dy dx$$

volume total des particules venant de l'extérieur.

**Théorème 6.14** *On a*

$$v(t) = v(0) + \int_0^t (H(\tau) - A_0(\tau)) d\tau, t \in J(u^0)$$

Cela signifie que le volume total des particules est conservé s'il n'y a pas de particules absorbées ni de particules venant de l'extérieur.

**Preuve.** On a

$$\dot{u}(t) + A(t)u(t) = R(t, u(t)), t \geq 0$$

en intégrant cette équation sur  $\mathbb{R}^n \times Y$ , muni de la mesure  $dx \otimes ydy$  on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_Y \dot{u}(t) y dy dx + \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y A(t)u(t) y dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y R(t, u(t)) y dy dx,$$

sachant que

$$\int_Y f_\varphi(u) y dy = \int_Y C_\gamma(u, u) y dy = 0,$$

et en appliquant le lemme 6.6, puisque  $u \in C(J(u^0), W^2[\mathbb{F}]) \cap C^1(J(u^0), L_1[\mathbb{F}])$ , on trouve

$$\dot{v}(t) = H(t) - A_0(t),$$

ainsi

$$\int_{t_0}^t \dot{v}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t H(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t A_0(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t_0 \leq t, t \in J(u^0)$$

et en faisant tendre  $t_0$  vers 0 on trouve

$$v(t) = v(0) + \int_0^t (H(\tau) - A_0(\tau)) d\tau; t \in J(u^0).$$

□

**Corollaire 6.15** Posons  $\alpha^\pm := \|a_0^\pm\|_\infty$ . Alors

$$\bar{e}^{\alpha^+ t} v(0) + \int_0^t \bar{e}^{\alpha^+(t-\tau)} H(\tau) d\tau \leq v(t) \leq e^{\alpha^- t} v(0) + \int_0^t e^{\alpha^-(t-\tau)} H(\tau) d\tau$$

*Preuve.* Observons que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_Y a_0^-(t) u(t) y dy dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y a_0(t) u(t) y dy dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y a_0^+(t) u(t) y dy dx,$$

et puisqu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_Y a_0^+(t) u(t) y dy dx \leq \|a_0^+\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y u(t) y dy dx,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_Y a_0^-(t) u(t) y dy dx \geq -\|a_0^-\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y u(t) y dy dx,$$

c.à.d

$$-\alpha^- v(t) \leq A_0(t) \leq \alpha^+ v(t),$$

en outre grâce au fait que :

$$\dot{v}(t) = H(t) - A_0(t), t \in J(u^0),$$

on a

$$H(t) - \alpha^+ v(t) \leq \dot{v}(t) \leq H(t) + \alpha^- v(t); t \in J(u^0),$$

par conséquent

$$v(0) + \int_0^t H(\tau) d\tau - \int_0^t \alpha^+ v(\tau) d\tau \leq v(t) \leq v(0) + \int_0^t H(\tau) d\tau + \int_0^t \alpha^- v(\tau) d\tau,$$

Par application du lemme de Gronwall, on obtient

$$\bar{e}^{\alpha^+ t} v(0) + \int_0^t e^{-\alpha^+(t-\tau)} H(\tau) d\tau \leq v(t) \leq e^{\alpha^- t} v(0) + \int_0^t e^{\alpha^-(t-\tau)} H(\tau) d\tau.$$

□

## 6.7 Existence globale.

Dans le théorème qui suit on donnera trois cas pour lesquels l'existence de la solution maximale du problème de coagulation fragmentation est en fait globale c.à.d, les cas où  $J(u^0) = J$ .

**Théorème 6.16** *On suppose que l'hypothèse (Y) est valide. Alors la solution  $u(., u^0)$  du problème de coagulation fragmentation*

$$\dot{u} + A(t) u(t) = R(t), \quad t \in J, \quad u(0) = u^0,$$

est globale dans les trois cas suivants

- ( i ) le processus de coagulation n'existe pas : c.à.d.  $\gamma = 0$ ,
- ( ii )  $n = 1$ ,
- ( iii )  $A$  est indépendant de  $y \in Y$ .

**Preuve.** ( i ) dans le cas ou  $\gamma = 0$ , l'équation

$$\dot{u} + A(t) u(t) = R(t, u(t)), \quad t \in J$$

se réduit à une équation d'évolution parabolique linéaire et admet une solution globale

( ii ) Posons  $\mathbb{F}_j := L_1(Y, y^j dy)$ , pour  $j=0,1$ .  
par intégration de l'équation

$$\dot{u}(t) + A(t) u(t) = R(t, u(t))$$

sur  $\mathbb{R} \times Y$ , on trouve

$$\int_{\mathbb{R}} \int_Y \dot{u}(t) dy dx = \int_{\mathbb{R}} \int_Y A(t) u(t) dy dx + \int_{\mathbb{R}} \int_Y R(t, u(t)) dy dx,$$

et puisque  $u(t) \geq 0$ , d'après le théorème 6.6, on a

$$\|u(t)\|_{L_1[\mathbb{F}_0]} = \int_{\mathbb{R}} \int_Y \dot{u}(t) dy dx,$$

de plus, d'après le lemme 6.6

$$- \int_{\mathbb{R}} \int_Y A(t) u(t) dy dx = - \int_{\mathbb{R}} \int_Y a_0 u(t) dy dx,$$

ainsi

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} \int_Y A(t) u(t) dy dx \right\| \leq \|a_0\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_Y u(t) dy dx = \|a_0\|_{\infty} \|u(t)\|_{L_1[\mathbb{F}_0]},$$

en outre

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_Y R(t, u(t)) dy dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_{Y^2} -\frac{1}{2} \gamma u(t) \otimes u(t) d^2 y + \int_{\mathbb{R}} \int_Y \int_0^Y (1 - y'/y) \varphi(y, y') dy' u(t) dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \int_Y h(t) dy dx, \end{aligned}$$

ceci résulte du fait que

$$R(t, u(t)) = C_\gamma(u(t), u(t)) + f_\varphi(u(t)) + h(t),$$

avec

$$\int_Y C_\gamma(u(t), u(t)) dy = -\frac{1}{2} \int_{Y^2} \gamma u(t) \otimes u(t) d^2y,$$

et

$$\int_Y f_\varphi(u(t)) dy = \int_Y \int_0^y (1 - y'/y) \varphi(y; y') dy' u(t) dy,$$

ainsi, puisqu'on a

$$\gamma \geq 0, u \geq 0; \text{ alors : } - \int_{Y^2} \gamma u(t) \otimes u(t) d^2y \leq 0,$$

et que

$$\begin{aligned} \int_Y f_\varphi(u(t)) dy &= \int_Y \int_0^y (1 - y'/y) \varphi(y, y') dy' u(t) dy \leq \|\varphi\|_\infty \int_Y \int_0^y (1 - y'/y) dy' u(t) dy \\ &= \|\varphi\|_\infty \int_Y \frac{1}{2} y u(t) dy \leq \frac{1}{2} \|\varphi\|_\infty \vee(t), \end{aligned}$$

on en déduit l'inégalité

$$\|u(t)\|_{L_1[\mathbb{F}_0]}^\bullet \leq \|a_0\|_\infty \|u(t)\|_{L_1[\mathbb{F}_0]} + \frac{\|\varphi\|_\infty}{2} \vee(t) + \|h(t)\|_{L_1[\mathbb{F}_0]}, t \in J(u^0),$$

En appliquant le corollaire 6.15, on trouve pour  $t \in J(u^0)$ ,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L_1[\mathbb{F}_0]}^\bullet &\leq \|a_0\|_\infty \|u(t)\|_{L_1[\mathbb{F}_0]} + \frac{\|\varphi\|_\infty}{2} \left[ e^{\|a_0^-\|_\infty t} \vee(0) + \int_0^t e^{\|a_0^-\|_\infty(t-\tau)} H(\tau) d\tau \right] \\ &\quad + \|h(t)\|_{L_1[\mathbb{F}_0]}, \end{aligned}$$

où

$$\|a_0\|_\infty = \alpha, \text{ et, } \frac{\|\varphi\|_\infty}{2} \left[ e^{\|a_0^-\|_\infty t} \vee(0) + \int_0^t e^{\|a_0^-\|_\infty(t-\tau)} H(\tau) d\tau \right] + \|h(t)\|_{L_1[\mathbb{F}_0]} = \beta(t),$$

on remarque que  $\alpha \geq 0, \beta \in C^+(J)$ , et  $\|u(\cdot)\|_{L_1[\mathbb{F}_0]}$  vérifie l'inégalité différentielle

$$\|u(\cdot)\|_{L_1[\mathbb{F}_0]}^\bullet \leq \alpha \|u(\cdot)\|_{L_1[\mathbb{F}_0]} + \beta(t) . t \in J(u^0) .$$

et puisque

$$u \in C^1 \left( \dot{J}(u^0), L_1[\mathbb{F}] \right) \cap C \left( J(u^0), L_1[\mathbb{F}] \right),$$

alors

$$\|u(\cdot)\|_{L_1[\mathbb{F}_0]} \in C \left( J(u^0) \right) \cap C^1 \left( \dot{J}(u^0) \right),$$

ainsi on trouve

$$\|u(t)\|_{L_1[\mathbb{F}_0]} \leq C(T), t \in J(u^0) \cap [0, T], \quad T \in J.$$

De plus, en posant

$$v(t) = \|u(t)\|_{L_1[\mathbb{F}_1]}$$

et en appliquant le corollaire 6.15 on trouve

$$\|u(t)\|_{L_1[\mathbb{F}_1]} \leq c(T), t \in J(u^0) \cap [0, T], \quad T \in J,$$

ainsi on a

$$\|u(t)\|_{L_1[\mathbb{F}]} \leq C(T), t \in J(u^0) \cap [0, T], \quad T \in J.$$

Or on sait déjà que

$$\begin{aligned} ((\gamma, u, u) \mapsto C_\gamma(u, u)) &\in \mathcal{L}(K_{coaag}, \mathbb{F}, \mathbb{F}; \mathbb{F}), \\ \text{et } ((\varphi, u) \mapsto f_\varphi(u)) &\in \mathcal{L}(K_{frag}, \mathbb{F}, \mathbb{F}), \end{aligned}$$

et que

$$C(t, u) := C_\gamma(u, u), \quad F(t, u) := f_\varphi(u)$$

on obtient alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|C(t, u(t))\|_{\mathbb{F}} dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \|u(t)\|_{\mathbb{F}} \cdot \|u(t)\|_{\mathbb{F}} dx,$$

et puisqu'on a  $u \in C \left( \dot{J}(u^0), W_1^2[\mathbb{F}] \right)$ , alors grâce aux injections de Sobolev, on a

$$W_p^k[\mathbb{F}] \hookrightarrow W_q^\ell[\mathbb{F}] \text{ si, } \frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{k-\ell}{n},$$

avec  $k=2, \ell=0, p=1, q=\infty$  et  $n=1$ , d'où

$$W_1^2[\mathbb{F}] \hookrightarrow W_\infty^0[\mathbb{F}],$$

ainsi

$$u \in C \left( \dot{J}(u^0), W_\infty^0[\mathbb{F}] \right),$$

Par application de ce résultat à l'inégalité précédente, on trouve

$$\|C(t, u(t))\|_{L_1[\mathbb{F}]} = \int_{\mathbb{R}^n} \|C(t, u(t))\|_{\mathbb{F}} dx \leq \|u(t)\|_{L_\infty[\mathbb{F}]} \cdot \|u(t)\|_{L_1[\mathbb{F}]}, t \in J(u^0),$$

en outre

$$\|F(t, u(t))\|_{L_1[\mathbb{F}]} = \int_{\mathbb{R}^n} \|F(t, u(t))\|_{\mathbb{F}} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \|u(t)\|_{\mathbb{F}} dx = C \|u(t)\|_{L_1[\mathbb{F}]}, t \in J(u^0).$$

Ainsi en appliquant le résultat suivant

$$\|u(t)\|_{L_1[\mathbb{F}]} \leq C(T), t \in J(u^0) \cap [0, T],$$

on trouve

$$\begin{aligned} \|R(t, u(t))\|_{L_1[\mathbb{F}]} &\leq \|C(t, u(t))\|_{L_1[\mathbb{F}]} + \|F(t, u(t))\|_{L_1[\mathbb{F}]} + \|h(t)\|_{L_1[\mathbb{F}]} \\ &\leq c(T) \left( \|u(t)\|_{L_\infty[\mathbb{F}]} + 1 \right) + \bar{C}(T), t \in J(u^0) \cap [0, T], T \geq 0 \\ &\leq C(T) \left( \|u(t)\|_{L_\infty[\mathbb{F}]} + 2 \right), \end{aligned}$$

où  $C(T) = \max \{c(T), \bar{C}(T)\}$ .

En fixant  $\bar{s} \in (-1, 0)$  et  $\bar{\sigma} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} / 1 \leq \bar{\sigma} \leq \bar{s} + 2$ , alors on a

$$L_1[\mathbb{F}] \hookrightarrow W_1^{\bar{s}}[\mathbb{F}],$$

soit donc

$$\|R(t, u(t))\|_{W_1^{\bar{s}}[\mathbb{F}]} \leq \|R(t, u(t))\|_{L_1[\mathbb{F}]} \leq C(T) \left( \|u(t)\|_{L_\infty[\mathbb{F}]} + 2 \right),$$

de plus, sachant que

$$W_1^{\bar{s}}[\mathbb{F}] \xrightarrow{d} C_0^m[\mathbb{F}], \bar{s} \geq m + n; m \in \mathbb{N},$$

et en prenant  $\bar{s} = \bar{\sigma}$ , donc  $\bar{\sigma} \geq 1 = 0 + n = 1$ , on a

$$W_1^{\bar{\sigma}}[\mathbb{F}] \xrightarrow{d} C_0[\mathbb{F}] \hookrightarrow L_\infty[\mathbb{F}],$$

ainsi on trouve

$$\|R(t, u(t))\|_{W_1^{\bar{\sigma}}[\mathbb{F}]} \leq C(T) \left( \|u(t)\|_{W_1^{\bar{\sigma}}[\mathbb{F}]} + 2 \right), t \in J(u^0) \cap [0, T], T \in J.$$

Considérons le problème de Cauchy linéaire suivant

$$\dot{v} + A(t)v = R(t, u(t)), t \in J(u^0), v(0) = u^0,$$

où  $R(\cdot, u(\cdot)) \in C(J(u^0), W_1^{\bar{\sigma}}[\mathbb{F}])$  avec  $0 \leq \bar{\sigma} \leq \bar{s}$ ;

alors le théorème 6.9, montre que  $u$  est une solution pour ce problème sur  $J(u^0)$ , avec

$$u \in C(J(u^0), W_1^{\sigma}[\mathbb{F}]) \cap C(J(u^0), W_1^{\bar{s}+2}[\mathbb{F}]) \cap C^1(J(u^0), W_1^{\bar{s}}[\mathbb{F}]),$$

par conséquent  $u$  satisfait sur  $W_1^{\bar{s}}[\mathbb{F}]$  l'équation intégrale

$$u(t) = U_A(t, 0)u^0 + \int_0^t U_A(t, \tau)R(\tau, u(\tau))d\tau, t \in J(u^0).$$

D'où, et d'après le Lemme 5.6

$$\|u(t)\|_{\bar{\sigma},1} \leq t^{\sigma-\bar{\sigma}} \|u^0\|_{W_1^\sigma[\mathbb{F}]} + C(T) \int_0^t (t-\tau)^{\frac{\bar{\sigma}-\sigma}{2}} \left( \|u(\tau)\|_{W_1^{\bar{\sigma}}[\mathbb{F}]} + 2 \right) d\tau, t \in J(u^0) \cap [0, T],$$

ainsi d'après le lemme de Gronwall on a pour  $t_0 \in J(u^0)$ , sachant que  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 \leq \bar{\sigma}$ ,

$$\|u(t)\|_{W_1^\sigma[\mathbb{F}]} \leq C \|u(t)\|_{W_1^{\bar{\sigma}}[\mathbb{F}]} \leq C(T), \quad t \in J(u^0) \cap [t_0, T], \quad \forall T \in J; \quad T \geq t_0,$$

Dans le théorème 6.7 on a montré que si  $\sup_{t \in J(u^0) \cap [0, T]} \|u(t, u^0)\|_{E_\alpha} \leq \infty, \forall T \in J$ , alors

$u(., u^0)$  est une solution globale et d'après le théorème 6.9 on a pris  $E_\alpha := W_1^\sigma[\mathbb{F}]$ , d'où alors  $u(., u^0)$  est une solution globale.

iii) On revient à l'équation

$$\dot{u}(t) + A(t)u(t) = R(t, u(t)),$$

en intégrant cette équation sur  $Y$  muni de la mesure  $dy$ , on trouve

$$\int_Y \dot{u}(t) dy + \int_Y A(t)u(t) dy = \int_Y R(t, u(t)) dy,$$

puisque on a  $A$  indépendante de  $y$  alors

$$\int_Y \dot{u}(t) dy + A(t) \int_Y u(t) dy \leq \int_Y h(t) dy + \frac{1}{2} \|\varphi\|_\infty \int_Y u(t) y dy,$$

puisque

$$\int_Y C(t, u(t)) dy = -\frac{1}{2} \int_{Y^2} \gamma(t) u(t) \otimes u(t) d^2y \leq 0,$$

du fait que  $u(t) \geq 0$ , et,  $\gamma(t) \geq 0$ , de plus on a

$$\begin{aligned} \int_Y F(t, u(t)) dy &= \int_Y \int_0^y \left(1 - \frac{y'}{y}\right) \varphi(y, y') dy' u(t) dy \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \int_Y \int_0^y \left(1 - \frac{y'}{y}\right) dy' u(t) dy = \frac{1}{2} \|\varphi\|_\infty \int_Y u(t) y dy, \end{aligned}$$

ainsi  $\bar{u} := \int_Y u dy$ , vérifie l'inéquation différentielle parabolique

$$\partial_t \bar{u} + A(t) \bar{u} \leq \bar{h}(t) + \frac{1}{2} \|\varphi\|_\infty \int_Y u(t) y dy, \quad t \in J(u^0), \quad \bar{u}(0) = \int_Y u^0 dy$$

sur  $\mathbb{R}^n$ , où  $\bar{h}(t) := \int_Y h(t) dy$ . Dans le cas où  $\bar{u} \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ , le principe du maximum implique et le corollaire 6.15,

$$\|u(t)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}_0)} = \|\bar{u}(t)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(T), t \in J(u^0) \cap [0, T],$$

tandis que dans le cas général, on utilise un argument d'approximation comme celui utilisé dans la preuve du théorème 6.6, pour obtenir cette estimation. Ainsi on a d'une part

$$\|u(t)\|_{L_\infty[\mathbb{F}_0]} \leq C(T), t \in J(u^0) \cap [0, T],$$

d'autre part, si on pose  $V(t) = \|u(t)\|_{L_1[\mathbb{F}]}$ , et en appliquant le corollaire 6.15, on trouve

$$\|u(t)\|_{L_\infty[\mathbb{F}_1]} \leq C(T), t \in J(u^0) \cap [0, T], T \in J,$$

où la première inégalité résulte du fait que  $u(t) \geq 0$ , et puisqu'on a

$$\|R(t, u(t))\|_{L_1[\mathbb{F}]} \leq C(T) (\|u(t)\|_{L_\infty[\mathbb{F}]} + 2), t \in J(u^0) \cap [0, T], T \geq 0,$$

d'où

$$\|R(t, u(t))\|_{W_1^{\bar{\sigma}}[\mathbb{F}]} \leq C(T), t \in J(u^0) \cap [0, T], T \in J.$$

D'où alors

$$\|u(t)\|_{W_1^{\bar{\sigma}}[\mathbb{F}]} \leq t^{\sigma - \bar{\sigma}} \|u^0\|_{W_1^{\bar{\sigma}}[\mathbb{F}]} + \int_0^t (t - \tau)^{\left(\frac{\bar{\sigma} - \sigma}{2}\right)} C(T) d\tau,$$

ainsi

$$\|u(t)\|_{W_1^{\bar{\sigma}}[\mathbb{F}]} \leq \|u(t)\|_{W_1^{\bar{\sigma}}[\mathbb{F}]} \leq C(T), t \in J(u^0) \cap [t_0, T], \forall T \in J; T \geq t_0,$$

enfin et comme dans la partie (ii) on déduit du théorème 6.6 que  $u(., u^0)$  est une solution globale.  $\square$



# Bibliographie

- [1] H. Amann. Multiplication in Sobolev and Besov spaces. In non linear analysis, pp. 27-50. Quaderni. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1991.
- [2] H. Amann, Linear and quasilinear Parabolic Problems. Volum I :Abstract Linear Theory. Birkhauser. Basel. 1995.
- [3] H. Amann, Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and application. Math. Nachr. 186 (1997), 5-56.
- [4] H. Amann, F. Weber, On a quasilinear coagulation fragmentation model with diffusion, Adv.Math. Sci. Appl. 11 (2001), 227-363
- [5] M.V. Smoluchowski, Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetik kolloidaler Losungen, Z. Phys. Chem. 92 (1917), 129-168.
- [6] H. Triebel, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, North-Holland Publishing Company, 1978.
- [7] Christophe Walker, On diffusive and non diffusive coalescence and breakage proces, Doctoral Thesis, Zurich, (2003)
- [8] M. Aizenman and T. A. Bak, Convergence to equilibrium in a system of reacting polymers, Comm. Math. Phys. 65 (1979), no. 3, 2003-230.
- [9] PH. Bénilan & D. Wrzosek. On an infinite system of reaction-diffusion equations. Adv. Math. Sci. Appl. 7 (1997), 351-366.
- [10] I. Stewart, A global existence theorem for the general coagulation fragmentation equation with unbounded kernels. Mth. Methods Appl. Sci. 11 (1989), no. 5, 627-648.
- [11] I. Stewart, Density conservation for a coagulation equation, Z. Angew. Math. Phys. 42 (1991), no. 5, 746-756.
- [12] D. Wrzosek, Existence of solution for the discrete coagulation-fragmentation model with diffusion, Topol. Methods Nonlinear Anal. 9 (1997), no. 2, 279-296.