

N° d'ORDRE: 28/2012-M/MT

REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
Faculté de Mathématiques



THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de MAGISTER
EN: MATHÉMATIQUES

Spécialité: EDP et Applications

Par: **FERHANI Nadia**

Existence de solutions pour un système d'EDP non linéaires posé en piézoélectricité

Soutenue publiquement le 11/03/2012, devant le jury composé de:

| | | |
|------------------------------|--------------------------------|---------------------|
| M. Djamel TENIOU | Professeur à l'USTHB | Président |
| Mme Djamila HAMROUN | Professeur à l'USTHB | Directrice de thèse |
| Mme Assia BENABDALLAH | Professeur, LATP/CMI Marseille | Examinatrice |
| M. Keddour LEMRABET | Professeur à l'USTHB | Examineur |

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude à Assia Benaddallah pour ses bienveillants encouragements à préparer ce magister et sans qui ce travail n'aurait jamais débuté. Je la remercie également de l'intérêt qu'elle lui porte en acceptant d'en être examinatrice et membre du jury de soutenance.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à Djamila Hamroun pour m'avoir dirigée, pour sa disponibilité, son aide et ses encouragements tout au long de mon travail où j'ai pu apprécier sa personnalité exceptionnelle comme ses qualités scientifiques et humaines, son exigence permanente de rigueur.

Je suis très honorée que Djamel Teniou ait accepté d'examiner ce mémoire et de présider le jury de soutenance.

Je remercie également Keddour Lemrabet d'avoir accepté d'être examinateur et de participer à ce jury.

Table des matières

1 Introduction et énoncé du théorème principal

| | |
|--|---|
| 1.1 Présentation du contexte physique | 1 |
| 1.1.1 Généralités sur la piézoélectricité | 1 |
| 1.1.2 Les équations constitutives de la piézoélectricité | 1 |
| 1.1.3 Retournement de domaines en piézoélectricité | 2 |
| 1.2 Le modèle mathématique | 3 |
| 1.3 Le plan du mémoire | 4 |

2 Quelques rappels d'analyse

| | |
|---|----|
| 2.1 Les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ | 6 |
| 2.2 Espaces abstraits contenant le temps | 7 |
| 2.2.1 Espaces contenant le temps à valeurs dans un espace de Banach | 7 |
| 2.2.2 Espaces contenant le temps à valeurs dans un espace de Hilbert..... | 9 |
| 2.3 Convergence faible *..... | 10 |
| 2.4 Quelques inégalités utiles..... | 11 |
| 2.4.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz..... | 11 |
| 2.4.2 Inégalité de Young..... | 11 |
| 2.4.3 Inégalité de Gronwall..... | 11 |

3 Equation du type de la chaleur

| | |
|---|----|
| 3.1 Enoncé du résultat..... | 12 |
| 3.2 Résolution de l'équation de la chaleur..... | 12 |
| 3.3 Estimations uniformes..... | 13 |

4 Equation des ondes avec viscosité artificielle

| | |
|--|----|
| 4.1 Enoncé du résultat et outils de démonstration..... | 18 |
| 4.2 Solution variationnelle..... | 22 |
| 4.2.1 Cadre fonctionnel..... | 22 |
| 4.2.2 Continuité de B et de L | 23 |
| 4.2.3 Coercivité de B | 25 |
| 4.3 Retour au problème (4.7)..... | 28 |

| | |
|--|----|
| 4.3.1 Existence..... | 28 |
| 4.3.2 Les conditions initiales..... | 30 |
| 4.4 Unicité de la solution..... | 32 |
| 5 Problème couplé avec viscosité artificielle | |
| 5.1 Le problème approché..... | 35 |
| 5.2 Le schéma itératif..... | 36 |
| 5.3 Convergence du schéma itératif..... | 38 |
| 5.4 Solution du problème approché..... | 43 |
| 5.4.1 Existence..... | 43 |
| 5.4.2 Unicité..... | 45 |
| 6 Solution du problème initial | |
| 6.1 Convergence des solutions approchées..... | 47 |
| 6.2 Signe de f et de $\partial_t f$ | 48 |
| 6.3 Les conditions initiales..... | 49 |
| Conclusion | 53 |
| Bibliographie | |

Chapitre 1

Introduction et énoncé du théorème principal

Ce mémoire a pour objet l'étude d'un article intitulé "Local solutions to a model of piezoelectric materials" de K. Hamdache et D. Hamroun [1].

1.1 Présentation du contexte physique

1.1.1 Généralités sur la piézoélectricité

La piézoélectricité est la propriété physique que possèdent certains matériaux de se polariser électriquement lorsqu'ils sont soumis à une contrainte mécanique (effet direct) et de se déformer mécaniquement lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique (effet inverse). Cet effet combiné peut être observé sur de nombreux matériaux; parmi les plus classiques, citons les milieux cristallins (quartz, titane de baryum, oxyde de zinc, monocristaux PZN-PT (Niobate de Plomb et Zinc-Titanate de Plomb)), les céramiques PZT (Titano-Zirconate de Plomb) et les polymères PVDF (Polyfluorure de vinylidène).

Tous les matériaux piézoélectriques ont une structure cristalline qui ne possède pas de centre de symétrie. Dans certains cas, cette absence de symétrie crée un déséquilibre de charges dans la maille élémentaire et entraîne l'apparition d'une polarisation électrique spontanée. Les cristaux correspondants sont dits polaires. Si cette polarisation varie avec la température, ces cristaux sont pyroélectriques, de plus, si cette polarisation peut être inversée sous l'action d'un champ électrique externe, ils sont ferroélectriques.

Depuis leur découverte, il y a un siècle, le nombre d'applications de ces matériaux a été en continuelle augmentation. On les trouve dans l'industrie informatique (mémoire non volatile), dans l'industrie médicale (biocapteurs), dans les MEMS (Microelectromechanical System), dans de nombreux capteurs (vapeur, température, humidité, pression). Mais le secteur des télécommunications est le plus gros consommateur de circuits piézoélectriques hautes fréquences: filtres, duplexeurs,

1.1.2 Les équations constitutives de la piézoélectricité linéaire [7]

Les matériaux piézoélectriques étant anisotropes, leurs propriétés seront représentées par des tenseurs. Les équations de la piézoélectricité relient les variables mécaniques (déformation S ou contrainte T) aux variables électriques (induction électrique D ou champ électrique E). L'état de contrainte est décrit par le tenseur symétrique T_{ij} et il s'exprime comme le rapport d'une force sur une surface (on utilise la convention de sommation sur les indices répétés)

$$T_{ij} = \frac{F_i}{s_j}.$$

De manière générale, le tenseur des déformations s'écrit

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)$$

où u représente le déplacement. Dans l'hypothèse de petites déformations, on pourra négliger $\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ devant les termes linéaires. Le tenseur des déformations est alors réduit à sa partie linéaire

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = S_{lk}$$

La relation entre contrainte et déformation est donnée par la loi de Hooke généralisée et s'écrit

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl}$$

où les coefficients c_{ijkl} sont les composantes d'un tenseur d'ordre 4 appelé tenseur de rigidité élastique. Cette loi met en évidence la linéarité (proportionnalité des contraintes et des déformations) et l'élasticité des solides soumis à de petites déformations. En fonction des déplacements mécaniques, on a

$$T_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}$$

Les solides piézoélectriques ayant la capacité de coupler le champ électrique et la déformation mécanique, leur comportement peut être modélisé par un terme de couplage électrique-mécanique introduit dans les équations de Maxwell qui régissent les phénomènes électromagnétiques et dans la loi de Hooke qui régit les phénomènes mécaniques. Ce terme, appelé tenseur piézoélectrique (d'ordre 3), caractérise la linéarité entre la déformation élastique et le champ électrique dans toutes les directions du repère. Ce couplage conduit aux équations suivantes, appelées équations constitutives de la piézoélectricité linéaire

$$\begin{cases} T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_j = e_{jkl} S_{kl} + \varepsilon_{jk}^S E_k \end{cases}$$

où D désigne l'induction électrique, E le champ électrique et c_{ijkl} , e_{kij} , ε_{jk} représentent respectivement les tenseurs de rigidité, de piézoélectricité et de permittivité électrique; l'exposant E veut dire "déterminé sous champ électrique constant" et l'exposant S veut dire "déterminé à pression constante". Ce type de système d'équations couplées via le tenseur de piézoélectricité est difficilement soluble sans approximation.

1.1.3 Retournement de domaines en piézoélectricité

Ce phénomène de retournement de domaines est observé dans certains matériaux piézoélectriques dits ferroélectriques tels que les céramiques polycristallines.

Dans les céramiques polycristallines, chaque grain est composé de domaines séparés les uns des autres par des parois. Chaque domaine peut avoir son axe de polarisation différemment orienté par rapport au domaine qui lui est adjacent, donc, comme la répartition des domaines est aléatoire, le matériau est globalement non polaire.

La ferroélectricité est définie par la mobilité de l'axe polaire de la structure sous l'action d'un

champ électrique extérieur appliqué et l'existence d'une polarisation macroscopique à champ nul. L'application d'un champ électrique sur des matériaux ferroélectriques conduit à une réorientation de la direction de la polarisation spontanée dans les domaines ferroélectriques, appelée retournement de domaines et responsable de la dépolarisation des céramiques et donc de la variation des propriétés macroscopiques. Le changement dans la direction de la polarisation spontanée de ces matériaux peut également induire un comportement non linéaire.

Ce comportement a fait l'objet d'investigations expérimentales et a conduit au développement de modèles théoriques pour décrire les observations et établir des relations entre les grandeurs macroscopiques (polarisation et déformation) et les paramètres microscopiques (pourcentage de domaines ayant basculé), en particulier dans le cas où un champ électrique est appliqué dans la direction de la polarisation macroscopique.

1.2 Le modèle mathématique

Dans ce travail, on s'intéresse à un modèle 1-D de matériaux piézoélectriques avec retournement de domaines proposé par F. Davì dans [2], en considérant un domaine filiforme.

La modélisation mathématique conduit à un système non linéaire couplé composé d'une équation de diffusion décrivant la dynamique du nombre f de dipôles électriques alignés et d'une équation des ondes modélisant la dynamique du champ des déplacements u , (le déplacement électrique étant alors donné par $\partial_x u$, suivant [2]). Ces deux équations sont complétées par des conditions initiales pour obtenir le système

$$\begin{cases} \partial_t f - \partial_x^2 f = -\partial_x u & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ f(0, x) = f_0(x) & \text{dans } \mathbb{R} \\ \partial_t^2 u - \partial_x [(1 + f) \partial_x u] = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x), \partial_t u(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.1)$$

où $t \geq 0$ est la variable de temps et $x \in \mathbb{R}$ est la variable d'espace (toutes les constantes physiques ont été prises égales à 1, pour simplifier). On fera observer que ce couplage fait que, dans l'équation des ondes, la vitesse dépend du temps et de la solution de l'équation de la chaleur.

On fera aussi remarquer que cette dernière peut être résolue et que le problème (1.1) peut alors être réécrit sous la forme suivante, obtenue en remplaçant la solution f de l'équation de la chaleur par son expression (voir chapitre 3)

$$\partial_t^2 u - \partial_x \left[\left(1 + (H(t, \cdot) * f_0)(x) + \int_0^t H(t-s, x-\cdot) * \partial_x u(s, \cdot) ds \right) \partial_x u \right] = 0$$

L'énergie associée à l'équation des ondes est donnée par

$$E(t) = (|\partial_t u|_2^2 + |(1+f)^{\frac{1}{2}} \partial_x u|_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

et elle vérifie

$$\frac{dE^2(t)}{dt} = \int_{\mathbb{R}} \partial_t f |\partial_x u|^2 dx$$

de sorte qu'il n'y a pas de conservation de l'énergie.

Cette difficulté, ajoutée au fait que l'opérateur de l'équation des ondes dépend du temps et n'est pas linéaire, ne permet pas de donner un résultat général du problème (1.1). Néanmoins l'énergie est décroissante si $\partial_t f(t, x) \leq 0$ p.p. et la vitesse des ondes est positive si $f(t, x) \geq 0$ p.p. Le signe de $\partial_x u$ n'étant pas fixé, la solution f de l'équation de la chaleur est alors telle que $f(t, x) \geq 0$ et $\partial_t f(t, x) \leq 0$ pour un temps fini dépendant de $E^2(0)$ lorsqu'on suppose la condition initiale $f(0, x) \geq F_0 > 0$ et $\partial_t f(0, x) \leq -F_0 < 0$ p.p.

On cherchera une solution u d'énergie finie c'est-à-dire $E(t)$ finie; par conséquent on cherchera une solution f bornée ainsi que sa dérivée en temps. On montre le résultat d'existence locale énoncé dans le théorème suivant:

Théorème 1 *Sous les hypothèses,*

$$\begin{cases} f_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}), f_0^{(2)}(x) \text{ existe p.p. dans } \mathbb{R} \\ u_0 \in H^1(\mathbb{R}), u_1 \in L^2(\mathbb{R}), f_1 = f_0^{(2)} - u_0' \in L^\infty(\mathbb{R}), \\ f_0(x) \geq F_0 > 0, f_1(x) \leq -F_0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.2)$$

il existe $T > 0$ dépendant uniquement des données f_0, u_0, u_1, F_0 tel que (1.1) admette une solution faible définie sur $(0, T)$ dans le sens suivant :

$$\begin{aligned} f &\in W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R}) \quad , \quad \partial_x^2 f \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R})) \\ u &\in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R})) \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R})), \quad \partial_t^2 u \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\mathbb{R})) \\ f(0, x) &= f_0(x) \quad , \quad u(0, x) = u_0(x) \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R} \\ \partial_t f - \partial_x^2 f &= -\partial_x u \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ -\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_t u \partial_t \phi dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1+f) \partial_x u \partial_x \phi dx dt &= \int_{\mathbb{R}} u_1(x) \phi(0, x) dx, \quad \forall \phi \in D([0, T[\times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

En particulier l'équation $\partial_t^2 u - \partial_x [(1+f) \partial_x u] = 0$ est vérifiée dans $D'((0, T) \times \mathbb{R})$.

De plus, on a

$$f \geq 0 \text{ et } \partial_t f \leq 0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}$$

Pour montrer ce théorème, nous introduisons un problème approché obtenu en ajoutant le terme $-\varepsilon \partial_x^2(\partial_t u)$ à l'équation des ondes satisfaite par u , le paramètre $\varepsilon > 0$ étant destiné à tendre vers 0. Ce nouveau problème est résolu en utilisant un schéma itératif qui découple le système, ce qui nous amène à résoudre séparément une équation du type de la chaleur dont le terme source est connu et une équation des ondes "visqueuse" dont la vitesse des ondes est connue.

1.3 Le plan du mémoire

Il est composé de six chapitres.

Le chapitre 2 rassemble quelques rappels d'analyse et les inégalités utilisées.

Dans le **chapitre 3**, on considère l'équation du type de la chaleur satisfaite par f issue du problème (1.1). Après avoir donné explicitement la solution, on établit ses principales propriétés, notamment la régularité et le principe du maximum.

Le **chapitre 4** est consacré à l'équation des ondes provenant du problème (1.1) dans laquelle on introduit le terme $-\varepsilon \partial_x^2 [\partial_t u]$ qui représente une viscosité artificielle, ε étant positif. En utilisant la méthode variationnelle, on montre l'existence d'une solution puis son unicité, après avoir établi une estimation d'énergie.

Dans le **chapitre 5**, on définit le problème approché du système couplé (1.1) en introduisant le terme de viscosité $-\varepsilon \partial_x^2 [\partial_t u]$ dans l'équation des ondes comme indiqué ci-dessus. Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on démontre l'existence d'une solution de ce problème en utilisant un schéma itératif dont la convergence est prouvée au moyen des résultats établis dans les chapitres 3 et 4. Les solutions $(f^\varepsilon, u^\varepsilon)$ ainsi obtenues sont toutes définies sur un intervalle $[0, T]$ indépendant de ε .

Le **sixième et dernier chapitre** achève la preuve du théorème 1. En utilisant les estimations uniformes sur $(f^\varepsilon, u^\varepsilon)$ et des résultats de compacité, on établit l'existence d'une solution locale du problème (1.1) par passage à la limite lorsque ε tend vers 0.

Nous terminons cette introduction en précisant les notations utilisées tout le long de ce mémoire.

1.4 Notations

| | |
|---|--|
| E' | espace dual de E |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | produit dans la dualité E', E |
| ∂_t, ∂_x | dérivées partielles par rapport à t et à x |
| $\partial_t^2, \partial_x^2, \partial_{tx}^2$ | dérivées partielles secondes |
| $f', f^{(2)}$ | dérivée première et seconde d'une fonction $f : x \mapsto f(x), x \in \mathbb{R}$ |
| $p.p.$ | presque partout |
| $ \cdot _p$ | norme des espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$ ou $L^p((0, T) \times \mathbb{R})$ |
| $f * g$ | produit de convolution |
| \hookrightarrow | injection continue |
| \rightharpoonup | convergence faible |
| $\ \cdot\ $ | norme de l'espace $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ |

Chapitre 2

Quelques rappels d'analyse

Ce chapitre a pour but de rappeler un certain nombre de définitions et d'outils d'analyse qui seront utilisés. Ils sont développés dans [3], [4] et [5].

2.1 Les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}, \text{ si } p \in [1, +\infty[$$

et $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ mesurable et } \exists C > 0 \text{ telle que } |u(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$

On note

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \|u\|_\infty = \inf \{C; |u(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\} = \sup_{\Omega} \text{ess} |u|.$$

$\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_\infty$ représentent les normes usuelles de $L^p(\Omega)$ et de $L^\infty(\Omega)$ respectivement.

Définition 2.1.1 Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

où la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est à prendre au sens des distributions.

On désigne en particulier par $H^1(\Omega)$ l'espace $W^{1,2}(\Omega)$.

$W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \begin{cases} \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{i=n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < +\infty) \\ \|u\|_\infty + \sum_{i=1}^{i=n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_\infty & (p = +\infty) \end{cases}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_2 + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_2$$

($(\cdot, \cdot)_2$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$) et de la norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 2.1.2 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$; $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$ et séparable pour $1 \leq p < +\infty$. L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.*

Remarque 2.1.1

Les espaces de Sobolev sont aussi des espaces de Banach, ils possèdent donc toutes les propriétés issues des théorèmes de Banach telles que le théorème de prolongement des formes linéaires (de Hahn-Banach), le théorème de l'application ouverte et son corollaire: le théorème d'isomorphisme de Banach.

Remarque 2.1.2

Compte tenu de la structure hilbertienne de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, on pourra lui appliquer tous les théorèmes fondamentaux de l'analyse hilbertienne dont:

Théorème 2.1.3 (de représentation de Riesz-Fréchet)

Soit H un espace de Hilbert, H' son dual. Etant donné $\phi \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H'H} = (f, v) \quad , \quad \forall v \in H$$

De plus, on a

$$\|f\|_H = \|\phi\|_{H'}$$

Théorème 2.1.4 (de Lax-Milgram)

Soit a une forme bilinéaire sur H , continue et coercive. Alors pour tout $\phi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u, v) = \langle \phi, v \rangle_{H'H} \quad , \quad \forall v \in H$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \phi, u \rangle_{H'H} = \underset{v \in H}{\text{Min}} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \phi, v \rangle_{H'H} \right\}$$

2.2 Espaces abstraits contenant le temps

2.2.1 Espaces contenant le temps à valeurs dans un espace de Banach

Soient $T > 0$ et X un espace de Banach réel de norme $\|\cdot\|_X$; dt désignera la mesure de Lebesgue sur $]0, T[$.

Définition 2.2.1

a) On désigne par $L^p(0, T; X)$, ($1 \leq p < \infty$) l'espace des (classes de) fonctions $t \in]0, T[\mapsto u(t) \in X$ telles que u est mesurable pour dt et $\|u\|_p = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

b) On désigne par $L^\infty(0, T; X)$ l'espace des (classes de) fonctions u de $]0, T[$ dans X vérifiant u mesurable pour dt et bornée presque partout sur $(0, T)$.

On pose $\|u\|_\infty = \inf \{M > 0, \|u(t)\|_X \leq M \text{ p.p. sur } (0, T)\}$.

Proposition 2.2.2

Pour $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(0, T; X)$, muni de la norme $\|\cdot\|_p$, est un espace de Banach.

Définition 2.2.3

On désigne par $C([0, T]; X)$ l'espace des fonctions continues $u : [0, T] \rightarrow X$ avec

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X < \infty$$

dite norme de la convergence uniforme.

Définissons, à présent, la notion de dérivée au sens faible.

$D'([0, T]; X)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de $D([0, T])$ dans X .

Soit $u \in L^p(0, T; X)$, l'application F_u définie pour tout $\phi \in D([0, T])$ par

$$F_u(\phi) = - \int_0^T u(t) \frac{d\phi}{dt} dt$$

est linéaire continue de $D([0, T])$ dans X , autrement dit $F_u \in D'([0, T]; X)$.

Définition 2.2.4 On dit que F_u est la dérivée de u (au sens des distributions) et on note $F_u = u' = \frac{du}{dt}$.

Définition 2.2.5 Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ est défini par

$$W^{1,p}(0, T; X) = \{u \in L^p(0, T; X); u' \in L^p(0, T; X)\}$$

On pose

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T (\|u(t)\|_X^p + \|u'(t)\|_X^p) dt \right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty) \\ \sup_{t \in [0, T]} \text{ess} (\|u(t)\|_X + \|u'(t)\|_X) & (p = \infty) \end{cases}$$

Proposition 2.2.6

Pour $1 \leq p \leq \infty$, $W^{1,p}(0, T; X)$, muni de la norme $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$, est un espace de Banach.

Proposition 2.2.7 *Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a*

i) $W^{1,p}(0, T; X)$ s'injecte continûment dans $C([0, T]; X)$, l'espace $C([0, T]; X)$ étant muni de la norme de la convergence uniforme

ii) Pour tout $u \in W^{1,p}(0, T; X)$, $u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau) d\tau$, $0 \leq s \leq t \leq T$

2.2.2 Espaces contenant le temps à valeurs dans un espace de Hilbert

Soient $T > 0$ et H un espace de Hilbert; on notera (\cdot, \cdot) son produit scalaire et $\|\cdot\|_H$ la norme associée.

On désigne par $D(]0, T[; H)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $]0, T[$ à valeurs dans H et à support compact contenu dans $]0, T[$ et par $L^2(0, T; H)$ l'espace des (classes de) fonctions défini par

$$L^2(0, T; H) = \{u :]0, T[\rightarrow H \text{ mesurable} / t \mapsto \|u(t)\|_H \text{ est dans } L^2(]0, T[)\}$$

Proposition 2.2.8 *Muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T (u(t), v(t))_H dt$$

l'espace $L^2(0, T; H)$ est un espace de Hilbert.

Du fait de sa structure hilbertienne, $L^2(0, T; H)$ est concerné par la remarque 2.1.2.

On considère à présent deux espaces de Hilbert réels H et V . On note $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ et $\|\cdot\|_*$ les normes respectives dans V , H et V' , (\cdot, \cdot) le produit scalaire dans H et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité entre V et V' .

En outre, on suppose que V est dense dans H si bien qu'en identifiant H et son dual H' , on a

$$V \underset{\text{densité}}{\hookrightarrow} H \underset{\text{densité}}{\hookrightarrow} V'.$$

Proposition 2.2.9 *Soit $W = \{u \in L^2(0, T; V); u' = \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V')\}$ alors*

1) W est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|u\|_W = \left(\int_0^T (\|u(t)\|^2 + \|u'(t)\|_*^2) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

2) $D([0, T]; V)$ est dense dans W

3) W s'injecte continûment dans $C([0, T]; H)$

4) l'application $t \mapsto |u(t)|^2$ est absolument continue et

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2\langle u'(t), u(t) \rangle$$

5) pour $u, v \in W$, on a

$$\int_0^T (\langle u'(t), v(t) \rangle + \langle v'(t), u(t) \rangle) dt = (u(T), v(T)) - (u(0), v(0))$$

Une propriété très utile est donnée par la

Proposition 2.2.10 Pour $u \in W$, $v \in V$, on a

$$\langle u'(\cdot), v \rangle = \frac{d}{dt} (u(\cdot), v) \quad \text{dans } D'([0, T])$$

2.3 Convergences faibles

Définition 2.3.1 (convergence faible)

Soient E un espace de Banach, E' son dual et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité entre E' et E . On dit que la suite $(u_n)_n$ d'éléments de E converge vers $u \in E$, dans E muni de la topologie faible, lorsque $n \rightarrow +\infty$, si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle L, u_n \rangle = \langle L, u \rangle, \quad \forall L \in E'.$$

Définition 2.3.2 (convergence faible *)

Soient E un espace de Banach, E' son dual et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité entre E' et E . On dit que la suite $(L_n)_n$ d'éléments de E' converge vers $L \in E'$, dans E' muni de la topologie faible *, lorsque $n \rightarrow +\infty$, si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle L_n, u \rangle = \langle L, u \rangle, \quad \forall u \in E.$$

On remarquera que, si E est un espace de Banach réflexif, les topologies faible et faible * coïncident.

Précisons, en particulier, les convergences faibles * suivantes:

- dans $L^\infty(\Omega)$, Ω étant un ouvert quelconque de \mathbb{R}^N :

soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $L^\infty(\Omega)$; dire que $(u_n)_n$ converge faiblement * vers u dans $L^\infty(\Omega)$ signifie que

$$\int_{\Omega} u_n v dx dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u v dx dt, \quad \forall v \in L^1(\Omega)$$

- dans $W^{1,\infty}(\Omega)$:

Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $W^{1,\infty}(\Omega)$; $(u_n)_n$ converge faiblement * vers u dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ si la suite $(u_n)_n$ converge faiblement * vers u dans $L^\infty(\Omega)$ et les suites $\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)_n$, $i = 1, \dots, N$ convergent faiblement * dans $L^\infty(\Omega)$ vers $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ respectivement.

Rappelons un résultat de compacité faible * très utile lorsqu'on travaille dans les espaces de Banach $L^\infty(0, T; V)$ et $L^\infty(0, T; H)$; ces espaces n'étant pas réflexifs.

Proposition 2.3.2

Soit E un espace de Banach séparable. Soit $(L_n)_n$ une suite bornée d'éléments de E' . Alors, on peut extraire de $(L_n)_n$ une sous-suite (L_{n_k}) qui converge faiblement * dans E' .

2.4 Quelques inégalités utiles

2.4.1 - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un K -espace vectoriel et $(\cdot, \cdot)_E$ un produit scalaire sur E . On a alors

$$|(u, v)_E| \leq ((u, u)_E)^{\frac{1}{2}} ((v, v)_E)^{\frac{1}{2}}$$

2.4.2 - Inégalité de Young

Soient $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q} \quad (a, b > 0)$$

On a aussi

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q \quad (a, b > 0, \varepsilon > 0)$$

où $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$, appelée inégalité de Young avec ε .

2.4.3 - Inégalité de Gronwall

Première forme: Soit η une fonction positive, absolument continue sur $[0, T]$ telle que

$$\eta'(t) \leq \alpha(t) \eta(t) + \beta(t) \text{ p.p. } t \in [0, T]$$

où α et β sont des fonctions positives intégrables sur $[0, T]$. Alors

$$\eta(t) \leq \left(\eta(0) + \int_0^t \beta(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t \alpha(s) ds \right)$$

Deuxième forme: Soit η une fonction positive, intégrable sur $[0, T]$ telle que

$$\eta(t) \leq a + b \int_0^t \eta(s) ds \text{ p.p. } t \in [0, T]$$

avec $a, b \geq 0$. Alors

$$\eta(t) \leq a \exp \left(b \int_0^t b(s) ds \right)$$

Chapitre 3

Equation du type de la chaleur

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'équation de la chaleur du système (1.1) dans le but de montrer que, pour certaines données initiales, la solution correspondante f satisfait $f(t, x) \geq 0$ et $\partial_t f(t, x) \leq 0$. Le premier résultat permet d'obtenir la positivité de la vitesse dans l'équation des ondes et le second d'obtenir la dissipation de l'énergie du système à travers l'inégalité $\int_{\mathbb{R}} \partial_t f |\partial_x u|^2 \leq 0$.

Un principe du maximum pour f et ses dérivées est également établi.

3.1 Enoncé du résultat

Pour $T > 0$ fixé, on considère:

$$\begin{cases} \partial_t f - \partial_x^2 f = -\partial_x v & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ f(0, x) = f_0(x) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.1)$$

où v est une fonction donnée. Le résultat principal du chapitre 3 est la

Proposition 1 *Soit v dans $W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R})) \cap L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ telle que $\partial_{tx}^2 v \in L^2((0, T) \times \mathbb{R})$ et $v(0, \cdot) = u_0$. Alors, sous les hypothèses du théorème 1 (donné en page 4), il existe une unique solution $f \in W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R})$ du problème (3.1). En outre, il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ indépendantes des données et telles que les estimations suivantes soient réalisées*

$$f(t, x) \geq F_0 - C_1 T^{\frac{3}{4}} \|\partial_x v\| \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R} \quad (3.2)$$

$$\partial_t f(t, x) \leq -F_0 + C_2 T^{\frac{1}{4}} \|\partial_t v\| \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R} \quad (3.3)$$

$$|f|_\infty \leq |f_0|_\infty + C_1 T^{\frac{3}{4}} \|\partial_x v\| \quad (3.4)$$

$$|\partial_x f|_\infty \leq |f'_0|_\infty + C_2 T^{\frac{1}{4}} \|\partial_x v\| \quad (3.5)$$

$$|\partial_t f|_\infty \leq |f_1|_\infty + C_2 T^{\frac{1}{4}} \|\partial_t v\| \quad (3.6)$$

3.2 Résolution de l'équation de la chaleur

On considère l'équation générale :

$$\begin{cases} \partial_t q - \partial_x^2 q = p & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ q(0, x) = q_0(x) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

Pour résoudre cette équation écrite sur l'espace entier, on fait habituellement appel à la transformée de Fourier (TF). On désigne par $\widehat{q}(t)$ la transformée de Fourier, pour t fixé, de $q(t, \cdot)$.

Pour des données $q_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $p(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\forall t > 0$, par TF partielle par rapport à x , on obtient le système suivant équivalent au système ci-dessus:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \widehat{q}(t) + 4\pi^2 \xi^2 \widehat{q}(t) = \widehat{p}(t) \\ \widehat{q}(0) = q_0 \end{cases}$$

dont la solution est donnée par :

$$\widehat{q}(t, x) = \widehat{q}_0(\xi) \exp(-4\pi^2 \xi^2 t) + \int_0^t \exp(-4\pi^2 \xi^2 (t-s)) \widehat{p}(s) ds$$

On obtient alors par la TF inverse

$$q(t, x) = H(t, \cdot) * q_0(x) + \int_0^t H(t-s, x) * p(s, x) ds$$

où $H(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ est le noyau de la chaleur et $*$ désigne le produit de convolution (en la variable d'espace).

3.3 Estimations uniformes

Dans cette section, on établit, successivement, les estimations L^∞ de la solution f et de ses dérivées.

Estimation (3.2):

La solution de (3.1) est donnée par :

$$f(t, x) = H(t, \cdot) * f_0(x) - \int_0^t H(t-s, \cdot) * \partial_x v(s, \cdot)(x) ds, \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} \quad (3.7)$$

Comme $f_0(x) \geq F_0$ p.p. dans \mathbb{R} alors

$$H(t, \cdot) * f_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t, y) f_0(x-y) dy \geq F_0 \int_{-\infty}^{+\infty} H(t, y) dy$$

Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ ($\alpha > 0$), on en déduit que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{y^2}{4t}} dy = 1$$

D'où :

$$H(t, \cdot) * f_0(x) \geq F_0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}$$

$$H(t-s, \cdot) * \partial_x v(s, \cdot)(x) = \int_{\mathbb{R}} H(t-s, x-y) \partial_x v(s, y) dy$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |H(t-s, x-y) \partial_x v(s, y)| dy &\leq \|H(t-s, \cdot)\|_2 \|\partial_x v(s, \cdot)\|_2 \\ &\leq \|H(t-s, \cdot)\|_2 \|\partial_x v\| \end{aligned}$$

Comme $\|H(t, \cdot)\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}}$ il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_0^t |H(t-s, \cdot) * \partial_x v(s, \cdot)(x)| ds &\leq \|\partial_x v\| \int_0^t \|H(t-s, \cdot)\|_2 ds \\ &\leq \|\partial_x v\| \int_0^t \frac{1}{(8\pi)^{\frac{1}{4}}} (t-s)^{-\frac{1}{4}} ds \\ &\leq \|\partial_x v\| \frac{1}{(8\pi)^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{4}{3} T^{\frac{3}{4}} \right), \quad t \in (0, T) \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$f(t, x) \geq F_0 - C_1 T^{\frac{3}{4}} \|\partial_x v\|, \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}$$

$$\text{où } C_1 = \frac{4}{3(8\pi)^{\frac{1}{4}}}$$

Estimation (3.4):

$$|f(t, x)| \leq |H(t, \cdot) * f_0(x)| + \left| \int_0^t H(t-s, \cdot) * \partial_x v(s, \cdot)(x) ds \right|$$

$$\text{or } |(H(\cdot, \cdot) * f_0)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} H(t, y) f_0(x-y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |H(t, y)| |f_0(x-y)| dy \leq |f_0|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} |H(t, y)| dy$$

D'où :

$$|H(t) * f_0| \leq |f_0|_{\infty} \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}.$$

Comme on a montré que $\left| \int_0^t H(t-s, \cdot) * \partial_x v(s, \cdot)(x) ds \right| \leq C_1 T^{\frac{3}{4}} \|\partial_x v\|$, on déduit que

$$|f(t, x)| \leq |f_0|_{\infty} + C_1 T^{\frac{3}{4}} \|\partial_x v\| \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}$$

de sorte que

$$|f|_{\infty} \leq |f_0|_{\infty} + C_1 T^{\frac{3}{4}} \|\partial_x v\|.$$

Estimation (3.3):

Considérons à nouveau l'équation générale

$$\begin{cases} \partial_t q - \partial_x^2 q = p & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ q(0, x) = q_0(x) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

qui admet l'unique solution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ donnée par

$$q(t, x) = q_0(x) * H(t, x) + \int_0^t H(t-s, x) * p(s, x) ds$$

puis le problème

$$\begin{cases} \partial_t z - \partial_x^2 z = \partial_t p & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ z(0, x) = q_0^{(2)}(x) + p(0, x) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

qui admet également une unique solution dans \mathcal{S}' .

On pose

$$\tilde{q}(t, x) = q_0(x) + \int_0^t z(s, x) ds$$

alors on a $\partial_t \tilde{q} = z$ et \tilde{q} vérifie l'équation générale la chaleur.

En effet:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \tilde{q}(x) &= q_0^{(2)}(x) + \int_0^t \partial_x^2 z(s, x) ds \\ &= q_0^{(2)}(x) + \int_0^t (\partial_t z - \partial_t p)(s, x) ds \\ &= q_0^{(2)}(x) + z(t, x) - z(0, x) - p(t, x) + p(0, x) \\ &= z(t, x) - p(t, x) \end{aligned}$$

d'où

$$\partial_t \tilde{q} - \partial_x^2 \tilde{q} = z - (z - p) = p \quad \text{et} \quad \tilde{q}(0, x) = q_0(x)$$

Ainsi $\tilde{q} = q$ et $\partial_t q$ vérifie le second problème.

On peut donc affirmer que, pour f solution de (3.1), $\partial_t f$ est une solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t (\partial_t f) - \partial_x^2 (\partial_t f) = -\partial_{tx}^2 v & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ \partial_t f(0, x) = f_1(x) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

où $f_1(x) = f_0^{(2)}(x) - u_0'(x)$ p.p. dans \mathbb{R} .

Par conséquent, $\partial_t f$ est donnée par

$$\partial_t f(t, x) = H(t, \cdot) * f_1(x) - \int_0^t H(t-s, \cdot) * \partial_{tx}^2 v(s, \cdot)(x) ds, \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}$$

Comme $H(t-s, \cdot) * \partial_{tx}^2 v(s, \cdot)(x) = \partial_x H(t-s, \cdot) * \partial_t v(s, \cdot)(x)$ alors

$$\partial_t f(t, x) = H(t, \cdot) * f_1(\cdot)(x) - \int_0^t \partial_x H(t-s, \cdot) * \partial_t v(s, \cdot)(x) ds$$

Comme, par hypothèse, $f_1 \leq -F_0$ p.p. dans \mathbb{R} alors

$H(t, \cdot) * f_1(\cdot)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t, y) f_1(x - y) dy \leq -F_0 \int_{-\infty}^{+\infty} H(t, y) dy$, donc

$$H(t, \cdot) * f_1(\cdot)(x) \leq -F_0 \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}$$

D'autre part, par l'inégalité de Cauchy-schwarz, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} \partial_x H(t - s, y) \partial_t v(s, x - y) dy \right| &\leq |\partial_x H(t - s, \cdot)|_2 |\partial_t v(s, \cdot)|_2 \\ &\leq |\partial_x H(t - s, \cdot)|_2 \|\partial_t v\| \end{aligned}$$

et $|\partial_x H(t, \cdot)|_2^2 = \frac{1}{16\pi t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{t} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$

Une intégration par parties donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{t} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \left[-x e^{-\frac{x^2}{2t}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \sqrt{2\pi t}$$

D'où : $|\partial_x H(t, \cdot)|_2^2 = \frac{1}{16\pi t^2} \sqrt{2\pi t}$ et

$$\int_0^t |\partial_x H(t - s, \cdot)|_2 ds = \frac{1}{(2^7 \pi)^{\frac{1}{4}}} \int_0^t (t - s)^{-\frac{3}{4}} ds = \frac{1}{(2^7 \pi)^{\frac{1}{4}}} 4t^{\frac{1}{4}} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} T^{\frac{1}{4}}, t \in (0, T)$$

Il s'ensuit

$$\left| \int_0^t \partial_x H(t - s, \cdot) * \partial_t v(s, \cdot)(x) ds \right| \leq C_2 T^{\frac{1}{4}} \|\partial_t v\| \quad \text{où } C_2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$$

où $C_2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$, ce qui implique (3.3).

Estimation (3.6):

$$|\partial_t f(t, x)| \leq |H(t, \cdot) * f_1(x)| + \left| \int_0^t \partial_x H(t - s, \cdot) * \partial_t v(s, \cdot)(x) ds \right|$$

Comme

$$\begin{aligned} |H(t, \cdot) * f_1(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} H(t, y) f_1(x - y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |H(t, y)| |f_1(x - y)| dy \\ &\leq |f_1|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} |H(t, y)| dy = |f_1|_{\infty} \end{aligned}$$

et

$$\left| \int_0^t \partial_x H(t - s, \cdot) * \partial_t v(s, \cdot)(x) ds \right| \leq C_2 T^{\frac{1}{4}} \|\partial_t v\|$$

alors

$$\begin{aligned} |\partial_t f(t, x)| &\leq |f_1|_{\infty} + C_2 T^{\frac{1}{4}} \|\partial_t v\| \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ |\partial_t f|_{\infty} &\leq |f_1|_{\infty} + C_2 T^{\frac{1}{4}} \|\partial_t v\|. \end{aligned}$$

Estimation (3.5):

On revient à (3.7).

Par dérivation par rapport à x , il vient :

$$\partial_x f(t, x) = H(t, \cdot) * f'_0(x) - \int_0^t \partial_x H(t-s, \cdot) * \partial_x v(s, \cdot)(x) ds$$

On obtient comme pour (3.6)

$$|\partial_x f|_\infty \leq |f'_0|_\infty + C_2 T^{\frac{1}{4}} \|\partial_x v\|$$

ce qui termine la preuve de la proposition 1.

Chapitre 4

Equation des ondes avec une viscosité artificielle

Ce chapitre est consacré à la résolution de l'edp des ondes, comportant un terme de viscosité artificielle, en utilisant la méthode variationnelle. La démarche est la suivante: dans la section 4.1, après avoir énoncé le résultat principal de ce chapitre, on met au point les outils nécessaires à sa démonstration; dans la section 4.2 on commence par établir une formulation variationnelle de l'edp des ondes puis on démontre l'existence d'une solution variationnelle; on prouve que cette dernière vérifie bien le problème étudié (4.1) dans la section 4.3 et on termine avec la preuve de l'unicité après avoir établi une estimation d'énergie.

4.1 Enoncé du résultat et outils de démonstration

Soit $g(t, x)$ une fonction fixée. On considère le problème de Cauchy pour l'équation des ondes avec une viscosité artificielle :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x [(1 + g) \partial_x u] - \varepsilon \partial_x^2 [\partial_t u] = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x), \partial_t u(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.1)$$

Pour $T > 0$ et $\varepsilon > 0$ fixés, on a le résultat suivant :

Proposition 2 Soient u_0, u_1, f_0, f_1 définis comme dans le théorème 1 (voir page 4) et soit $g \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\mathbb{R}))$ tel que $g(0, x) = f_0(x)$, $g \geq 0$, $\partial_t g \leq 0$ p.p. dans $(0, T) \times \mathbb{R}$. Alors le problème (4.1) admet une solution unique $u \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$ telle que $u \in C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap H^1(0, T; H^1(\mathbb{R}))$, $\partial_t^2 u \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$. De plus, pour chaque $t \in [0, T]$, l'énergie vérifie l'inégalité suivante:

$$E^2(t) + 2\varepsilon \int_0^t |\partial_{tx}^2 u(s)|_2^2 ds \leq E_0^2 \quad (4.2)$$

$$\text{où } E^2(t) = |\partial_t u(t)|_2^2 + |\sqrt{1+g} \partial_x u(t)|_2^2 \text{ et } E_0 = E(0)$$

La preuve de l'existence d'une solution est basée sur un théorème de J. L. Lions qui est rappelé ci-après [8].

Théorème 2 Soit H un espace de Hilbert muni d'une norme $|\cdot|$ et d'un produit scalaire (\cdot, \cdot) . Soit V un sous-espace de H muni d'une norme préhilbertienne $\|\cdot\|$ telle que l'injection $V \subset H$ soit continue. On considère une forme bilinéaire B

$$B : H \times V \ni (U, \phi) \mapsto B(U, \phi) \in \mathbb{R}$$

telle que $B(\cdot, \phi)$ soit continue sur H pour chaque ϕ fixé dans V et

$$B(\phi, \phi) \geq \alpha \|\phi\|^2, \quad \forall \phi \in V$$

avec $\alpha > 0$. Etant donnée une forme linéaire L dans V' , il existe alors une solution U dans H du problème

$$B(U, \phi) = L(\phi), \quad \forall \phi \in V$$

On notera que ce théorème ne donne pas l'unicité de la solution.

On a également besoin du lemme suivant dont la preuve est donnée ci-après.

Lemme 1 Pour $k > 0$ et sous les hypothèses de la proposition 2, l'opérateur $(-\partial_x [(1+g)\partial_x] + kI)$ réalise un isomorphisme de $L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ dans $L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$ et de $H^1(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ dans $H^1(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$.

Démonstration du lemme 1: elle est basée sur l'utilisation du théorème de Lax-Milgram.

Soit $V = L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ muni de la norme définie par $\|u\|_V = \left(\int_0^T \|u(t, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ et V' son dual. On considère la forme bilinéaire sur V :

$$b(u, v) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} ((1+g)(\partial_x u)(\partial_x v) + kuv) dx dt \quad (4.3)$$

Montrons que b est continue et coercive sur $V \times V$.

Soit $(u, v) \in V \times V$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |1+g| |\partial_x u| |\partial_x v| dx \leq (1+|g|_{\infty}) \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u| |\partial_x v| dx \quad \text{pour p.p. } t \in (0, T)$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |1+g| |\partial_x u| |\partial_x v| dx dt \leq (1+|g|_{\infty}) \int_0^T \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \|v(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} dt$$

En appliquant une deuxième fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \|v(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} dt &\leq \left(\int_0^T \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|v(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u\|_V \|v\|_V \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |1+g| |\partial_x u| |\partial_x v| dx dt \leq C_1 \|u\|_V \|v\|_V$$

avec $C_1 = 1 + |g|_{\infty}$.

De la même manière, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |u| |v| dx dt &\leq \int_0^T \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \|v(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} dt \\ &\leq \|u\|_V \|v\|_V \end{aligned}$$

D'où :

$$|b(u, v)| \leq (C_1 + k) \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$$

b est donc continue sur $V \times V$.

$$\text{Soit } u \in V, \quad b(u, u) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} ((1+g)(\partial_x u)^2 + ku^2) dx dt$$

$$\text{Comme } g \geq 0 \text{ alors } (1+g)(\partial_x u)^2 + ku^2 \geq \min(1, k) ((\partial_x u)^2 + u^2)$$

Il s'ensuit:

$$\begin{aligned} b(u, u) &\geq \min(1, k) \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} (|\partial_x u(t, x)|^2 + |u(t, x)|^2) dx \right) dt \\ &\geq \min(1, k) \|u\|_V^2 \end{aligned}$$

b est donc coercive sur $V \times V$.

Par conséquent, d'après le théorème de Lax-Milgram, pour tout $L \in V'$, il existe une unique solution u de l'équation variationnelle:

$$b(u, v) = \langle L, v \rangle_{V'V}, \quad \forall v \in V \quad (4.4)$$

Montrons alors que u est bien l'unique solution dans V de l'équation :

$$-\partial_x [(1+g)\partial_x u] + ku = L \quad (4.5)$$

Soient $D = D(]0; T[\times \mathbb{R})$, D' son dual et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D'D}$ la dualité entre D et D' , $D(]0, T[\times \mathbb{R})$ étant l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $]0, T[\times \mathbb{R}$. Soit $v \in V$. D étant inclus dans V , on peut alors écrire:

$$\begin{aligned} b(u, v) &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} ((1+g)(\partial_x u)(\partial_x v) + kuv) dx dt \\ &= \langle (1+g)\partial_x u, \partial_x v \rangle_{D'D} + k \langle u, v \rangle_{D'D} \\ &= -\langle \partial_x [(1+g)\partial_x u], v \rangle_{D'D} + k \langle u, v \rangle_{D'D} \\ &= \langle -\partial_x [(1+g)\partial_x u] + ku, v \rangle_{D'D} \end{aligned}$$

Par ailleurs:

$$\langle L, v \rangle_{V'V} = \int_0^T \langle L(t), v(t) \rangle_{H^{-1}H^1} dt = \int_0^T \langle L(t), v(t) \rangle_{D'(\mathbb{R})D(\mathbb{R})} dt = \langle L, v \rangle_{D'D}$$

(4.4) implique

$$\langle -\partial_x [(1+g)\partial_x u] + ku, v \rangle_{D'D} = \langle L, v \rangle_{D'D}, \quad \forall v \in D$$

c'est-à-dire

$$-\partial_x [(1+g)\partial_x u] + ku = L \quad \text{dans } D'.$$

Comme $L \in V'$ alors l'égalité ci-dessus a lieu dans V' . Réciproquement, toute solution u de l'équation (4.5) vérifie l'équation variationnelle (4.4) donc l'opérateur $P = -\partial_x [(1+g)\partial_x] + kI$ est bijectif de V dans V' . Vérifions la continuité.

Soient $u \in V$ et $L \in V'$ tels que $L = Pu$. On a

$$\langle L, u \rangle_{V'V} = b(u, u)$$

Or $b(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$ et $\langle L, u \rangle_{V'V} \leq \|L\|_{V'} \|u\|_V$

Il s'ensuit: $\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{V'}$, ou encore $\|P^{-1}L\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{V'}$

Ainsi l'opérateur P est linéaire, bijectif de V dans V' et d'inverse continu; c'est donc un isomorphisme de $L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ dans $L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$, d'après le théorème d'isomorphisme de Banach.

On passe, à présent, à la deuxième partie du lemme 1 pour montrer que l'opérateur P est un isomorphisme de $H^1(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ dans $H^1(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$.

Soit $L \in H^1(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$ et $u \in V$ vérifiant (4.5). En dérivant (au sens des distributions) par rapport au temps dans (4.5), on obtient:

$$-\partial_x [(1+g)\partial_x(\partial_t u)] + k\partial_t u = \partial_t L + \partial_x [(\partial_t g)(\partial_x u)] \quad (4.6)$$

Vérifions que $\partial_t L + \partial_x [(\partial_t g)(\partial_x u)] \in V$.

Comme $g \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\mathbb{R}))$ et $u \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ alors $\partial_t g \in L^\infty((0, T) \times \mathbb{R})$ et $(\partial_x u) \in L^2((0, T) \times \mathbb{R})$. D'où $(\partial_t g)(\partial_x u) \in L^2((0, T) \times \mathbb{R})$ ou encore $L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))$.

On en déduit que $\partial_x [(\partial_t g)(\partial_x u)] \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$. De plus $\partial_t L \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$ car $L \in H^1(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$; donc $\partial_t L + \partial_x [(\partial_t g)(\partial_x u)] \in V'$ et d'après la première partie du lemme 1, on conclut que $\partial_t u \in V$.

On a ainsi $u \in V$ et $\partial_t u \in V$; par conséquent $u \in H^1(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ est l'unique solution de l'équation (4.5) avec L donnée dans $H^1(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$.

Montrons à présent la continuité de P de $H^1(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ dans $H^1(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$.

Soient $f \in H^1(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$ et $u \in H^1(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ tels que $Pu = L$, on a alors:

$$\|Pu\|_{H^1(0,T;H^{-1})} = \|Pu\|_{V'} + \|\partial_t(Pu)\|_{V'} = \|L\|_{V'} + \|\partial_t L\|_{V'}$$

La continuité de P de V dans V' implique que

$$\|Pu\|_{V'} \leq C \|u\|_V$$

avec $C > 0$.

On a, par ailleurs, l'égalité (4.6) que l'on peut réécrire sous la forme:

$$\partial_t L = P\partial_t u - \partial_x [(\partial_t g)(\partial_x u)]$$

Dans cette dernière égalité, on a, d'une part

$$\|P\partial_t u\|_{V'} \leq C \|\partial_t u\|_V$$

et d'autre part, $\forall v \in V$

$$\begin{aligned} |\langle -\partial_x [(\partial_t g) (\partial_x u)], v \rangle_{V'V}| &= \left| \int_0^T ((\partial_t g) (\partial_x u), \partial_x v)_{L^2} dt \right| \\ &\leq |\partial_t g|_\infty \int_0^T |\partial_x u|_2 |\partial_x v|_2 dt \\ &\leq |\partial_t g|_\infty \|u\|_V \|v\|_V \end{aligned}$$

d'où

$$\|-\partial_x [(\partial_t g) (\partial_x u)]\|_{V'} \leq |\partial_t g|_\infty \|u\|_V .$$

On obtient ainsi:

$$\begin{aligned} \|Pu\|_{H^1(0,T;H^{-1})} &\leq (C + |\partial_t g|_\infty) \|u\|_V + C \|\partial_t u\|_V \\ &\leq K \|u\|_{H^1(0,T;H^1)} \end{aligned}$$

avec $K > 0$. On conclut, comme précédemment, en utilisant le théorème d'isomorphisme de Banach.

4.2 Solution variationnelle

4.2.1 Cadre fonctionnel

Considérons le problème (4.1) et posons $\partial_t u = v$ et $(\tilde{u}, \tilde{v}) = e^{-kt} (u, v)$ où $k > 0$ est une constante que l'on précisera plus loin. (4.1) est alors équivalent au système:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} + k\tilde{u} - \tilde{v} = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ \partial_t \tilde{v} - \partial_x [(1+g) \partial_x \tilde{u}] - \varepsilon \partial_x^2 \tilde{v} + k\tilde{v} = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ \tilde{u}(0, x) = u_0(x) ; \tilde{v}(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.7)$$

Avec les notations précédentes, on considère l'espace de Hilbert $\mathbf{H} = V \times V$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{H}}$ définie pour tout $U = (u, v) \in \mathbf{H}$ par:

$$\|U\|_{\mathbf{H}}^2 = \|u\|_V^2 + \|v\|_V^2 \quad (4.8)$$

où

$$\|u\|_V^2 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} [(1+g) |\partial_x u|^2 + k|u|^2] dx dt \quad (4.9)$$

Comme $g \in L^\infty((0, T) \times \mathbb{R})$ et $g \geq 0$ p.p., cette norme est équivalente à la norme usuelle de V .

On définit à présent $\mathbf{V} = (D([0, T[\times\mathbb{R}]))^2$ où $D([0, T[\times\mathbb{R}))$ est l'espace des fonctions qui sont les restrictions à $[0, T[\times\mathbb{R}$ des fonctions de $D(\cdot - a, T[\times\mathbb{R})$, $a > 0$. \mathbf{V} est muni de la norme suivante: $\forall \Phi = (\phi, \psi) \in \mathbf{V}$,

$$\|\Phi\|_{\mathbf{V}}^2 = \|\Phi\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} ((1+g(0, x)) |\partial_x \phi(0, x)|^2 + k|\phi(0, x)|^2) dx + |\psi(0)|_2^2 \right) \quad (4.10)$$

Pour cette norme, l'injection $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ est continue.

On introduit une forme bilinéaire B sur $\mathbf{H} \times \mathbf{V}$ et une forme linéaire L sur \mathbf{V} définies par :

$$\begin{aligned} B(U, \Phi) &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(-(1+g) \partial_x u \partial_{tx}^2 \phi - ku \partial_t \phi - (\partial_t g) (\partial_x u) (\partial_x \phi) \right) dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left((1+g) (\partial_x (ku - v)) (\partial_x \phi) + k (ku - v) \phi \right) dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(-v \partial_t \psi + (1+g) (\partial_x u) (\partial_x \psi) + \varepsilon (\partial_x v) (\partial_x \psi) + kv \psi \right) dx dt \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$L(\Phi) = \int_{\mathbb{R}} \left[(1+g(0, x)) \partial_x u_0(x) \partial_x \phi(0, x) + ku_0(x) \phi(0, x) + u_1(x) \psi(0, x) \right] dx \quad (4.12)$$

où $U = (u, v)$, $\Phi = (\phi, \psi)$.

4.2.2 - Continuité de B et de L

Montrons que $B(\cdot, \Phi)$ est continue sur \mathbf{H} pour chaque $\Phi = (\phi, \psi)$ fixé dans \mathbf{V} .

On désignera par K une constante positive qui ne dépend que de Φ, g, T et k et qu'on utilisera pour majorer tous les termes dans la preuve de la continuité de B .

Soit $U = (u, v) \in \mathbf{H}$

$$\begin{aligned} |B(U, \Phi)| &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[(1+g) |\partial_x u| |\partial_{tx}^2 \phi| + k |u| |\partial_t \phi| + |\partial_t g| |\partial_x u| |\partial_x \phi| \right] dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[(1+g) |\partial_x (ku - v)| |\partial_x \phi| + k |ku - v| |\phi| \right] dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[|v| |\partial_t \psi| + (1+g) |\partial_x u| |\partial_x \psi| + \varepsilon |\partial_x v| |\partial_x \psi| + k |v| |\psi| \right] dx dt \end{aligned}$$

On a successivement, par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1+g) |\partial_x u| |\partial_{tx}^2 \phi| dx dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\sqrt{1+g} |\partial_x u|) (\sqrt{1+g} |\partial_{tx}^2 \phi|) dx dt \\ &\leq \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1+g) |\partial_x u|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1+g) |\partial_{tx}^2 \phi|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \| |u| \|_{\mathbf{V}} (1 + |g|_{\infty})^{\frac{1}{2}} |\partial_{tx}^2 \phi|_2 \\ &\leq K \|U\|_{\mathbf{H}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} k |u| |\partial_t \phi| dx dt &\leq \sqrt{k} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} k |u|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_t \phi|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{k} \| |u| \|_{\mathbf{V}} |\partial_t \phi|_2 \\ &\leq K \|U\|_{\mathbf{H}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_t g| |\partial_x u| |\partial_x \phi| dx dt &\leq |\partial_t g|_{\infty} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x \phi|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |\partial_t g|_{\infty} \left(\int_0^T (1+g) |\partial_x u|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} |\partial_x \phi|_2 \\
&\leq |\partial_t g|_{\infty} |\partial_x \phi|_2 \|u\|_{\mathbf{V}} \\
&\leq K \|U\|_{\mathbf{H}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1+g) |\partial_x (ku - v)| |\partial_x \phi| dx dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1+g) k |\partial_x u| |\partial_x \phi| dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1+g) |\partial_x v| |\partial_x \phi| dx dt \\
&\leq k (1+|g|_{\infty})^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1+g) |\partial_x u|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x \phi|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + (1+|g|_{\infty}) \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x v|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x \phi|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq k (1+|g|_{\infty})^{\frac{1}{2}} |\partial_x \phi|_2 \|u\|_{\mathbf{V}} + (1+|g|_{\infty}) |\partial_x \phi|_2 \|v\|_{\mathbf{V}} \\
&\leq K \|U\|_{\mathbf{H}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}} k |ku - v| |\phi| dx dt &\leq k^2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |u| |\phi| dx dt + k \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |v| |\phi| dx dt \\
&\leq k^2 \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\phi|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + k \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |v|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\phi|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq k^{\frac{3}{2}} |\phi|_2 \|u\|_{\mathbf{V}} + k |\phi|_2 \|v\|_{\mathbf{V}} \\
&\leq K \|U\|_{\mathbf{H}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (|v| |\partial_t \psi| + (1+g) |\partial_x u| |\partial_x \psi| + \varepsilon |\partial_x v| |\partial_x \psi| + k |v| |\psi|) dx dt \\
&\leq |v|_2 |\partial_t \psi|_2 + (1+|g|_{\infty})^{\frac{1}{2}} |\sqrt{1+g} \partial_x u|_2 |\partial_x \psi|_2 + \varepsilon |\partial_x v|_2 |\partial_x \psi|_2 + k |v|_2 |\psi|_2 \\
&\leq |\partial_t \psi|_2 \|v\|_{\mathbf{V}} + (1+|g|_{\infty})^{\frac{1}{2}} |\partial_x \psi|_2 \|u\|_{\mathbf{V}} + \varepsilon |\partial_x \psi|_2 \|v\|_{\mathbf{V}} + k |\psi|_2 \|v\|_{\mathbf{V}} \\
&\leq K \|U\|_{\mathbf{H}}
\end{aligned}$$

En sommant les six inégalités ci-dessus établies, on obtient

$$|B(U, \Phi)| \leq K \|U\|_{\mathbf{H}}, \forall U \in \mathbf{H}$$

pour tout Φ fixé dans \mathbf{V} donc $B(\cdot, \Phi)$ est continue sur \mathbf{H} .

Montrons maintenant que L est continue sur \mathbf{V} . Dans les calculs qui suivent, on désignera par C une constante positive qui ne dépend que de g, u_0, u_1 et k . Soit $\Phi = (\phi, \psi) \in \mathbf{V}$,

$$|L(\Phi)| \leq \int_{\mathbb{R}} [(1 + g(0, x)) |\partial_x u_0(x)| |\partial_x \phi(0, x)| + k |u_0(x)| |\phi(0, x)| + |u_1(x)| |\psi(0, x)|] dx$$

Sachant que $g(0, x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} (1 + g(0, x)) |\partial_x u_0(x)| |\partial_x \phi(0, x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{1 + g(0, x)} |\partial_x u_0(x)| \sqrt{1 + g(0, x)} |\partial_x \phi(0, x)| dx \\ &\leq (1 + |g(0)|_\infty)^{\frac{1}{2}} |\partial_x u_0|_2 \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + g(0, x)) |\partial_x \phi(0, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C |\Phi|_{\mathbf{V}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} k |u_0(x)| |\phi(0, x)| dx &\leq \sqrt{k} \left(\int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} k |\phi(0, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C |\Phi|_{\mathbf{V}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u_1(x)| |\psi(0, x)| dx &\leq |u_1|_2 |\psi(0)|_2 \\ &\leq C |\Phi|_{\mathbf{V}} \end{aligned}$$

Par sommation des 3 inégalités obtenues ci-dessus, il vient :

$$|L(\Phi)| \leq C |\Phi|_{\mathbf{V}},$$

L est donc continue sur \mathbf{V} .

4.2.3 - Coercivité de B

Montrons que B est coercive sur l'espace $\mathbf{V} = (D([0, T[\times \mathbb{R}))^2$. Pour $(U, \Phi) \in \mathbf{H} \times \mathbf{V}$, on définit:

$$B_1(U, \Phi) = - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} ((1 + g) \partial_x u \partial_{tx}^2 \phi + k u \partial_t \phi + (\partial_t g) (\partial_x u) (\partial_x \phi) + v \partial_t \psi) dx dt \quad (4.13)$$

Démontrons alors que, pour tout $(U, \Phi) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$, on a:

$$\begin{aligned} B_1(U, \Phi) &= -B_1(\Phi, U) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\partial_t g) (\partial_x u) (\partial_x \phi) dx dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} [(1 + g(0, x)) \partial_x u(0, x) \partial_x \phi(0, x) + ku(0, x) \phi(0, x) + v(0, x) \psi(0, x)] dx \end{aligned} \quad (4.14)$$

Partant de (4.13), on intègre par parties chacun des termes:

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 + g) \partial_x u \partial_{tx}^2 \phi dx dt &= - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T (1 + g) \partial_x u \partial_{tx}^2 \phi dt \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1 + g(0, x)) \partial_x u(0, x) \partial_x \phi(0, x) dx \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 + g) \partial_{tx}^2 u \partial_x \phi dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\partial_t g) (\partial_x u) (\partial_x \phi) dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} -ku \partial_t \phi dx dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T -ku \partial_t \phi dt \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} ku(0, x) \phi(0, x) dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} k \partial_t u \phi dx dt \end{aligned}$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} -v \partial_t \psi dx dt = \int_{\mathbb{R}} v(0, x) \psi(0, x) dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_t v \psi dx dt$$

D'où :

$$\begin{aligned} B_1(U, \Phi) &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 + g) \partial_{tx}^2 u \partial_x \phi dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\partial_t g) (\partial_x u) (\partial_x \phi) dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} k \partial_t u \phi dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_t v \psi dx dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\partial_t g) (\partial_x u) (\partial_x \phi) dx dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} (1 + g(0, x)) \partial_x u(0, x) \partial_x \phi(0, x) dx + \int_{\mathbb{R}} ku(0, x) \phi(0, x) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} v(0, x) \psi(0, x) dx \end{aligned}$$

On obtient bien (4.14).

En particulier, pour $U = \Phi \in \mathbf{V}$, on a :

$$\begin{aligned} B_1(\Phi, \Phi) &= -B_1(\Phi, \Phi) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\partial_t g) |\partial_x \phi|^2 dx dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} [(1 + g(0, x)) |\partial_x \phi(0, x)|^2 + k|\phi(0, x)|^2 + |\psi(0, x)|^2] dx \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
B_1(\Phi, \Phi) &= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\partial_t g) |\partial_x \phi|^2 dx dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [(1 + g(0, x)) |\partial_x \phi(0, x)|^2 + k|\phi(0, x)|^2 + |\psi(0, x)|^2] dx \\
&\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [(1 + g(0, x)) |\partial_x \phi(0, x)|^2 + k|\phi(0, x)|^2 + |\psi(0, x)|^2] dx \quad (4.15)
\end{aligned}$$

car $\partial_t g \leq 0$ p.p. Posons alors: $B_2(U, \Phi) = B(U, \Phi) - B_1(U, \Phi)$, $(U, \Phi) \in \mathbf{H} \times \mathbf{V}$

Pour $\Phi \in \mathbf{V}$, on a

$$\begin{aligned}
B_2(\Phi, \Phi) &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} [k(1 + g) |\partial_x \phi|^2 - (1 + g) (\partial_x \psi) (\partial_x \phi) + k^2 |\phi|^2 - k\psi\phi] dx dt \\
&\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} [(1 + g) (\partial_x \phi) (\partial_x \psi) + \varepsilon |\partial_x \psi|^2 + k|\psi|^2] dx dt \\
&= k \int_0^T \int_{\mathbb{R}} [(1 + g) |\partial_x \phi|^2 + k|\phi|^2] dx dt - k \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi\psi dx dt \\
&\quad + \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x \psi|^2 dx dt + k \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx dt
\end{aligned}$$

Or $\phi\psi \leq \frac{1}{2}(\phi^2 + \psi^2)$ ou encore $-\phi\psi \geq -\frac{1}{2}(\phi^2 + \psi^2)$, d'où:

$$\begin{aligned}
B_2(\Phi, \Phi) &\geq k \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 + g) |\partial_x \phi|^2 dx dt - \frac{k}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (|\phi|^2 + |\psi|^2) dx dt \\
&\quad + k^2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\phi|^2 dx dt + \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x \psi|^2 dx dt + k \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx dt \\
B_2(\Phi, \Phi) &\geq k \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 + g) |\partial_x \phi|^2 dx dt + \left(k^2 - \frac{k}{2}\right) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\phi|^2 dx dt \\
&\quad + \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x \psi|^2 dx dt + \frac{k}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx dt \\
&\geq \frac{k}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 + g) |\partial_x \phi|^2 dx dt + \left(k - \frac{1}{2}\right) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} k|\phi|^2 dx dt \\
&\quad + \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x \psi|^2 dx dt + \frac{k}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx dt \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Par conséquent, en choisissant $k > 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
B(\Phi, \Phi) &= B_1(\Phi, \Phi) + B_2(\Phi, \Phi) \\
&\geq \frac{k}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 + g) |\partial_x \phi|^2 dx dt + \frac{k}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} k|\phi|^2 dx dt \\
&\quad + \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x \psi|^2 dx dt + \frac{k}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} ((1 + g(0, x)) |\partial_x \phi(0, x)|^2 + k|\phi(0, x)|^2 + |\psi(0, x)|^2) dx
\end{aligned}$$

Posons $\alpha = \min(\varepsilon; \frac{k}{2}; 1)$. On obtient alors :

$$B(\Phi, \Phi) \geq \alpha |\Phi|_{\mathbf{V}}^2, \quad \forall \Phi \in \mathbf{V} \quad (4.17)$$

d'où la coercivité de B sur \mathbf{V} .

4.2.4 Conclusion

Les hypothèses du théorème 2 étant vérifiées, il existe donc une solution $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ dans \mathbf{H} de l'équation variationnelle

$$B(\tilde{U}, \Phi) = L(\Phi), \quad \forall \Phi \in \mathbf{V}. \quad (4.18)$$

4.3 Retour au problème (4.7)

4.3.1 Les équations

Soit $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathbf{H}$ solution de (4.18). On applique (4.18) avec $\Phi = (\phi, 0)$, $\phi \in D(]0, T[\times \mathbb{R})$, on obtient alors:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(-(1+g) (\partial_x \tilde{u}) \partial_{tx}^2 \phi - k \tilde{u} \partial_t \phi - (\partial_t g) (\partial_x \tilde{u}) (\partial_x \phi) \right) dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left((1+g) \partial_x (k \tilde{u} - \tilde{v}) (\partial_x \phi) + k (k \tilde{u} - \tilde{v}) \phi \right) dx dt = 0 \end{aligned}$$

On a successivement:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} -(1+g) (\partial_x \tilde{u}) (\partial_{tx}^2 \phi) dx dt &= \langle -(1+g) \partial_x \tilde{u}, \partial_{tx}^2 \phi \rangle_{D'D} \\ &= - \langle \partial_x [(\partial_t g) (\partial_x \tilde{u}) + (1+g) (\partial_{tx}^2 \tilde{u})], \phi \rangle_{D'D} \end{aligned}$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} -k \tilde{u} \partial_t \phi dx dt = \langle -k \tilde{u}, \partial_t \phi \rangle_{D'D} = \langle k \partial_t \tilde{u}, \phi \rangle_{D'D}$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} -(\partial_t g) (\partial_x \tilde{u}) \partial_x \phi dx dt = \langle -(\partial_t g) (\partial_x \tilde{u}), \partial_x \phi \rangle_{D'D} = \langle \partial_x [(\partial_t g) (\partial_x \tilde{u})], \phi \rangle_{D'D}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1+g) (\partial_x (k \tilde{u} - \tilde{v})) (\partial_x \phi) dx dt &= \langle (1+g) \partial_x (k \tilde{u} - \tilde{v}), \partial_x \phi \rangle_{D'D} \\ &= - \langle \partial_x [(1+g) \partial_x (k \tilde{u} - \tilde{v})], \phi \rangle_{D'D} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \langle -\partial_x [(\partial_t g) (\partial_x \tilde{u})] - \partial_x [(1+g) (\partial_{tx}^2 \tilde{u})] + k \partial_t \tilde{u} \\ & + \partial_x [(\partial_t g) (\partial_x \tilde{u})] - \partial_x [(1+g) \partial_x (k \tilde{u} - \tilde{v})] + k (k \tilde{u} - \tilde{v}), \phi \rangle_{D'D} = 0 \end{aligned}$$

ou encore :

$$\langle -\partial_x [(1+g) \partial_x (\partial_t \tilde{u} + k\tilde{u} - \tilde{v})] + k (\partial_t \tilde{u} + k\tilde{u} - \tilde{v}), \phi \rangle_{D'D} = 0, \quad \forall \phi \in D(]0, T[\times \mathbb{R}).$$

On en déduit que:

$$-\partial_x [(1+g) \partial_x (\partial_t \tilde{u} + k\tilde{u} - \tilde{v})] + k (\partial_t \tilde{u} + k\tilde{u} - \tilde{v}) = 0 \quad \text{dans } D'(]0, T[\times \mathbb{R}). \quad (4.19)$$

A présent pour $\Phi = (0, \psi)$, $\psi \in D(]0, T[\times \mathbb{R})$, (4.18) s'écrit:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (-\tilde{v} \partial_t \psi + (1+g) (\partial_x \tilde{u}) (\partial_x \psi) + \varepsilon (\partial_x \tilde{v}) (\partial_x \psi) + k \tilde{v} \psi) dx dt = 0$$

ce qui se traduit dans la dualité $D'D$ par

$$\langle \partial_t \tilde{v} - \partial_x [(1+g) (\partial_x \tilde{u})] - \varepsilon \partial_x^2 \tilde{v} + k \tilde{v}, \psi \rangle_{D'D} = 0, \quad \forall \psi \in D(]0, T \times \mathbb{R})$$

D'où :

$$\partial_t \tilde{v} - \partial_x [(1+g) (\partial_x \tilde{u})] - \varepsilon \partial_x^2 \tilde{v} + k \tilde{v} = 0, \quad \text{dans } D'(]0, T[\times \mathbb{R}) \quad (4.20)$$

On reconsidère (4.19) que l'on réécrit de la manière suivante:

$$-\partial_x [\partial_t [(1+g) (\partial_x \tilde{u})] - (\partial_t g) (\partial_x \tilde{u})] - \partial_x [(1+g) \partial_x (k\tilde{u} - \tilde{v})] + k \partial_t \tilde{u} + k (k\tilde{u} - \tilde{v}) = 0$$

ou encore

$$\partial_t [-\partial_x [(1+g) (\partial_x \tilde{u})] + k\tilde{u}] = \partial_x [(1+g) \partial_x (k\tilde{u} - \tilde{v})] + k (k\tilde{u} - \tilde{v}) + \partial_x [(\partial_t g) (\partial_x \tilde{u})]$$

Comme $\tilde{u} \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ et $g \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\mathbb{R}))$ alors $(\partial_t g) (\partial_x \tilde{u}) \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ et par suite $\partial_x [(\partial_t g) (\partial_x \tilde{u})] \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$.

Par ailleurs $k\tilde{u} - \tilde{v} \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ donc $(1+g) \partial_x (k\tilde{u} - \tilde{v}) \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ et par suite $\partial_x [(1+g) \partial_x (k\tilde{u} - \tilde{v})] \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$, de sorte que $\partial_t [-\partial_x [(1+g) (\partial_x \tilde{u})] + k\tilde{u}] \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$.

Comme de plus $-\partial_x [(1+g) (\partial_x \tilde{u})] + k\tilde{u} \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$, il s'ensuit que $-\partial_x [(1+g) (\partial_x \tilde{u})] + k\tilde{u} \in H^1(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$. D'après le lemme 1, on conclut que $\tilde{u} \in H^1(0, T; H^1(\mathbb{R}))$.

On en déduit que $\partial_t \tilde{u} \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ et par suite que $\partial_t \tilde{u} + k\tilde{u} - \tilde{v} \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$. L'opérateur $-\partial_x [(1+g) \partial_x] + kI$ étant aussi un isomorphisme de $L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ dans $L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$, de (4.19) on conclut que :

$$\partial_t \tilde{u} + k\tilde{u} - \tilde{v} = 0 \quad \text{dans } L^2(0, T; H^1(\mathbb{R})) \quad (4.21)$$

Considérons à présent (4.20) qui s'écrit sous la forme

$$\partial_t \tilde{v} = \partial_x [(1+g) (\partial_x \tilde{u})] + \varepsilon \partial_x^2 \tilde{v} - k \tilde{v}$$

On a $\partial_x [(1+g) \partial_x \tilde{u}] \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$ et $\partial_x^2 \tilde{v} \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$, par suite $\partial_t \tilde{v} \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$.

Ainsi $\partial_t (\tilde{u}, \tilde{v}) \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R})) \times L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$.

4.3.2 Les conditions initiales

On s'intéresse à présent aux traces $\tilde{u}(0, \cdot)$ et $\tilde{v}(0, \cdot)$ pour montrer, dans un premier temps, qu'elles sont bien définies dans $H^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ respectivement.

Tenant compte du fait que $\tilde{v} \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ et $\partial_t \tilde{v} \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$, on peut appliquer la proposition 2.2.9 pour déduire que l'espace $\mathbf{W} = \{v \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R})); \partial_t v \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))\}$ s'injecte continûment dans $\mathbf{C}([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$. Donc $\tilde{v}(0)$ est bien défini et $\tilde{v}(0) \in L^2(\mathbb{R})$.

Concernant \tilde{u} , $\tilde{u} \in H^1(0, T; H^1(\mathbb{R}))$; on peut donc appliquer la proposition 2.2.7 qui donne que $H^1(0, T; H^1(\mathbb{R})) \hookrightarrow \mathbf{C}([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$ donc $\tilde{u}(0)$ est bien défini et $\tilde{u}(0) \in H^1(\mathbb{R})$.

Il s'agit maintenant de prouver que :

$$\tilde{u}(0, x) = u_0(x) \quad \text{et} \quad \tilde{v}(0, x) = u_1(x) \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R} \quad (4.22)$$

Pour cela, on considère (4.19) que l'on rappelle ci-dessous

$$-\partial_x [(1+g) \partial_x (\partial_t \tilde{u} + k\tilde{u} - \tilde{v})] + k((\partial_t \tilde{u} + k\tilde{u} - \tilde{v})) = 0 \quad \text{dans } D'([0, T] \times \mathbb{R}).$$

Posons $F = (1+g) \partial_x (\partial_t \tilde{u} + k\tilde{u} - \tilde{v})$ et $G = \partial_t \tilde{u} + k\tilde{u} - \tilde{v}$. $F \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ et $\partial_x F \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$.

On multiplie à présent (4.19) par une fonction $\phi \in D([0, T] \times \mathbb{R})$ dans la dualité $V'V$, (noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$) où $V = L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$.

On a donc

$$\langle -\partial_x F + kG, \phi \rangle_{V'V} = 0$$

Or

$$\langle -\partial_x F + kG, \phi \rangle_{V'V} = (F, \partial_x \phi)_{L^2} + k(G, \phi)_{L^2}.$$

Comme

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1+g) \partial_x (\partial_t \tilde{u}) \partial_x \phi dx dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T (\partial_t [\partial_x \tilde{u}] (1+g) \partial_x \phi) dt \right) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} (1+g(0)) \partial_x \tilde{u}(0) \partial_x \phi(0) dx \\ &\quad - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} [(\partial_x \tilde{u}) (1+g) \partial_{tx}^2 \phi + (\partial_x \tilde{u}) (\partial_t g) (\partial_x \phi)] dx dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\partial_t \tilde{u}, \phi)_{L^2} &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_t \tilde{u} \phi dx dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(0) \phi(0) dx - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \tilde{u} \partial_t \phi dx dt \end{aligned}$$

On obtient alors l'égalité suivante pour tout $\phi \in D([0, T[\times \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}} (1 + g(0)) \partial_x \tilde{u}(0) \partial_x \phi(0) dx - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} [(\partial_x \tilde{u})(1 + g) \partial_{tx}^2 \phi + (\partial_x \tilde{u})(\partial_t g)(\partial_x \phi)] dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 + g) \partial_x (k\tilde{u} - \tilde{v}) \bar{\partial}_x \phi dx dt - \int_{\mathbb{R}} k\tilde{u}(0) \phi(0) dx - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} k\tilde{u} \partial_t \phi dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} k(k\tilde{u} - \tilde{v}) \phi dx dt = 0 \end{aligned}$$

On considère à présent l'identité (4.20)

$$\partial_t \tilde{v} - \partial_x [(1 + g)(\partial_x \tilde{u})] - \varepsilon \partial_x^2 \tilde{v} + k\tilde{v} = 0, \quad \text{dans } D'([0, T[\times \mathbb{R})$$

dans laquelle $\tilde{v} \in V$ et $\partial_t \tilde{v} \in V'$, puis le produit de (4.20) par une fonction $\psi \in D([0, T[\times \mathbb{R})$ dans la dualité $V'V$. Alors:

$$\langle \partial_t \tilde{v} - \partial_x [(1 + g)(\partial_x \tilde{u})] - \varepsilon \partial_x^2 \tilde{v} + k\tilde{v}, \psi \rangle_{V'V} = 0$$

La proposition 2.2.9 nous permet de poursuivre les calculs

$$\begin{aligned} \langle \partial_t \tilde{v}, \psi \rangle_{V'V} &= (\tilde{v}(T), \psi(T))_{L^2} - (\tilde{v}(0), \psi(0))_{L^2} - \langle \partial_t \psi, \tilde{v} \rangle_{V'V} \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \tilde{v}(0) \psi(0) dx - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \tilde{v} \partial_t \psi dx dt \\ \langle -[\partial_x (1 + g)(\partial_x \tilde{u})], \psi \rangle_{V'V} &= ((1 + g)(\partial_x \tilde{u}), \partial_x \psi)_{L^2} = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 + g)(\partial_x \tilde{u}) \partial_x \psi dx dt \\ \langle -\varepsilon \partial_x^2 \tilde{v}, \psi \rangle_{V'V} &= \varepsilon (\partial_x \tilde{v}, \partial_x \psi)_{L^2} = \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_x \tilde{v} \partial_x \psi dx dt \end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}} \tilde{v}(0) \psi(0) dx - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \tilde{v} \partial_t \psi dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 + g)(\partial_x \tilde{u}) \partial_x \psi dx dt \\ & + \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_x \tilde{v} \partial_x \psi dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} k\tilde{v} \psi dx dt = 0, \quad \forall \psi \in D([0, T[\times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Par sommation des égalités ci-dessus établies, on obtient : $\forall (\phi, \psi) \in \mathbf{V} = (D([0, T[\times \mathbb{R}))^2$,

$$B((\tilde{u}, \tilde{v}), (\phi, \psi)) = \int_{\mathbb{R}} [(1 + g(0)) \partial_x \tilde{u}(0) \partial_x \phi(0) + k\tilde{u}(0) \phi(0) + \tilde{v}(0) \psi(0)] dx$$

Or, d'après (4.18), on a:

$$B((\tilde{u}, \tilde{v}), (\phi, \psi)) = L(\phi, \psi),$$

par conséquent

$$L(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} [(1 + g(0)) \partial_x \tilde{u}(0) \partial_x \phi(0) + k \tilde{u}(0) \phi(0) + \tilde{v}(0) \psi(0)] dx, \forall (\phi, \psi) \in \mathbf{V}.$$

On en déduit que: $\forall (\phi, \psi) \in \mathbf{V}$

$$\int_{\mathbb{R}} [(1 + g(0)) (\partial_x \tilde{u}(0) - \partial_x u_0) \partial_x \phi(0) + k(\tilde{u}(0) - u_0) \phi(0) + (\tilde{v}(0) - u_1) \psi(0)] dx = 0.$$

On prend tour à tour $\psi = 0$ puis $\phi = 0$ dans l'égalité précédente pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}} [(1 + g(0)) (\partial_x \tilde{u}(0) - \partial_x u_0) \partial_x \phi(0) + k(\tilde{u}(0) - u_0) \phi(0)] dx = 0, \forall \phi \in D([0, T[\times \mathbb{R})$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} (\tilde{v}(0) - u_1) \psi(0) dx = 0, \forall \psi \in D([0, T[\times \mathbb{R})$$

En prenant à présent $\phi = \phi_2 \otimes \phi_1$ avec $\phi_2 \in D([0, T[)$, $\phi_1 \in D(\mathbb{R})$ et $\phi_2(0) \neq 0$ ($\phi = \phi_2 \otimes \phi_1$ étant définie par $\phi(t, x) = \phi_2(t) \phi_1(x)$), on obtient:

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + g(0)) (\partial_x \tilde{u}(0) - \partial_x u_0) \partial_x \phi_1 + k(\tilde{u}(0) - u_0) \phi_1] dx = 0, \forall \phi_1 \in D(\mathbb{R})$$

puis par densité pour tout $\phi_1 \in H^1(\mathbb{R})$. Cette dernière égalité s'écrit sous la forme:

$$b_0(\tilde{u}(0), \phi_1) = b_0(u_0, \phi_1), \forall \phi_1 \in H^1(\mathbb{R})$$

où b_0 est la forme bilinéaire définie sur $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ par:

$$b_0(u, v) = \int_{\mathbb{R}} [(1 + g(0)) \partial_x u \partial_x v + kuv] dx$$

Comme b_0 est continue et coercive sur $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$, l'équation précédente admet une unique solution dans $H^1(\mathbb{R})$, d'après le théorème de Lax-Milgram, d'où on conclut que $\tilde{u}(0) = u_0$ dans $H^1(\mathbb{R})$.

De même, en considérant $\psi = \psi_2 \otimes \psi_1$ avec $\psi_2 \in D([0, T[)$, $\psi_1 \in D(\mathbb{R})$ et $\psi_2(0) \neq 0$, on obtient:

$$\int_{\mathbb{R}} (\tilde{v}(0) - u_1) \psi_1 dx = 0, \forall \psi_1 \in D(\mathbb{R})$$

d'où $\tilde{v}(0) - u_1 = 0$ ou encore $\tilde{v}(0) = u_1$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

En conclusion, (\tilde{u}, \tilde{v}) est une solution du problème (4.7) et $u = e^{kt} \tilde{u}$ est une solution de (4.1) satisfaisant les propriétés de la proposition 2.

4.4 Unicité de la solution

On commence par établir l'estimation d'énergie (4.2).

Pour cela, on multiplie l'équation (4.1) par $\partial_t u$ dans la dualité $H^{-1}(\mathbb{R}), H^1(\mathbb{R})$ (on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cette dualité) :

$$\langle \partial_t^2 u, \partial_t u \rangle + \langle -\partial_x [(1+g) \partial_x u], \partial_t u \rangle + \langle -\varepsilon \partial_x^2 [\partial_t u], \partial_t u \rangle = 0$$

D'après la proposition 2.2.9, on a successivement:

$$\begin{aligned} \langle \partial_t^2 u, \partial_t u \rangle &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\partial_t u|_2^2 \\ \langle -\partial_x [(1+g) \partial_x u], \partial_t u \rangle &= ((1+g) \partial_x u, \partial_x (\partial_t u))_{L^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (1+g) \partial_t [(\partial_x u)^2] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t [(1+g) (\partial_x u)^2] - (\partial_t g) (\partial_x u)^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\sqrt{1+g} (\partial_x u)|_2^2 - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t g) (\partial_x u)^2 dx \\ \langle -\varepsilon \partial_x^2 [\partial_t u], \partial_t u \rangle &= \varepsilon (\partial_x (\partial_t u), \partial_x (\partial_t u))_{L^2} = \varepsilon |\partial_{tx}^2 u|_2^2 \end{aligned}$$

Finalement on obtient:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\partial_t u|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\sqrt{1+g} (\partial_x u)|_2^2 - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t g) (\partial_x u)^2 dx + \varepsilon |\partial_{tx}^2 u|_2^2 = 0$$

ou encore:

$$\frac{d}{dt} [|\partial_t u|_2^2 + |\sqrt{1+g} (\partial_x u)|_2^2] + 2\varepsilon |\partial_{tx}^2 u|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} (\partial_t g) (\partial_x u)^2 dx \quad (4.23)$$

Posons $E^2(t) = |\partial_t u(t)|_2^2 + |\sqrt{1+g} \partial_x u(t)|_2^2$.

Comme $\partial_t g \leq 0$ p.p. dans $(0, T) \times \mathbb{R}$ alors de (4.23) on déduit que

$$\frac{d}{dt} \left[E^2(t) + 2\varepsilon \int_0^t |\partial_{tx}^2 u(s)|_2^2 ds \right] \leq 0.$$

Il en résulte l'estimation d'énergie (4.2)

$$E^2(t) + 2\varepsilon \int_0^t |\partial_{tx}^2 u(s)|_2^2 ds \leq E_0^2, \quad \forall t \in [0, T]$$

Montrons à présent le résultat d'unicité.

Soient v_1 et v_2 deux solutions de (4.1) possédant la régularité donnée dans la proposition 2.

Comme le problème est linéaire alors on a:

$$\partial_t^2 (v_1 - v_2) - \partial_x [(1+g) \partial_x (v_1 - v_2)] - \varepsilon \partial_x^2 [\partial_t (v_1 - v_2)] = 0$$

$$(v_1 - v_2)(0, x) = 0, \quad (\partial_t (v_1 - v_2))(0, x) = 0$$

On en déduit qu'il est suffisant de montrer que si $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$ dans (4.1) alors $u = 0$. Pour cela, on utilise l'inégalité (4.2)

$$|\partial_t u(t)|_2^2 + |\sqrt{1+g}\partial_x u(t)|_2^2 + 2\varepsilon \int_0^t |\partial_{tx}^2 u(s)|_2^2 ds \leq |u_1|_2^2 + |\sqrt{1+g}u'_0|^2, \forall t \in [0, T]$$

Si $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$ alors:

$$|\partial_t u(t)|_2^2 + |\sqrt{1+g}\partial_x u(t)|_2^2 + 2\varepsilon \int_0^t |\partial_{tx}^2 u(s)|_2^2 ds \leq 0, \forall t \in [0, T]$$

En conséquence, il vient : $\partial_t u(t) = 0$ et $\partial_x u(t) = 0, \forall t \in [0, T],$ p.p. $x \in \mathbb{R}$; u est donc constante sur $[0, T] \times \mathbb{R}$. Comme $u(0, x) = 0$ alors $u = 0$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.

Ce qui conclut la preuve de la proposition 2.

Chapitre 5

Le Problème couplé avec une viscosité artificielle

Dans cette partie, on considère une approximation du problème (1.1) construite en introduisant, dans l'edp des ondes, le terme de viscosité artificielle $-\varepsilon \partial_x^2 [\partial_t u]$ où $\varepsilon > 0$. Un théorème d'existence et d'unicité d'une solution faible du problème approché est énoncé dans la section 5.1.

La preuve de ce théorème est basée sur un schéma itératif décrit dans la section 5.2. Dans la section suivante, on prouve, en utilisant les résultats des chapitres 3 et 4, la convergence du schéma itératif vers une limite $(f^\varepsilon, u^\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé. Dans la dernière section, on vérifie que $(f^\varepsilon, u^\varepsilon)$ est bien une solution faible du problème approché, on établit des estimations uniformes (indépendantes de ε) sur la solution et on termine avec un résultat d'unicité.

5.1 Le problème approché

On définit un problème approché de (1.1) comme suit:

$$\begin{cases} \partial_t f - \partial_x^2 f = -\partial_x u & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ f(0, x) = f_0(x) & \text{dans } \mathbb{R} \\ \partial_t^2 u - \partial_x[(1+f)\partial_x u] - \varepsilon \partial_x^2 [\partial_t u] = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x), \partial_t u(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.1)$$

où $\varepsilon > 0$ est fixé. On a alors:

Théorème 3 *Sous les hypothèses du théorème 1 (voir page 4), il existe $T > 0$ indépendant de ε et vérifiant*

$$F_0 - C_1 T^{\frac{3}{4}} E_0 \geq 0, \quad F_0 - C_2 T^{\frac{1}{4}} E_0 \geq 0 \quad (5.2)$$

(où $E_0 = (|u_1|_2^2 + |\sqrt{1+f_0}u'_0|_2^2)^{\frac{1}{2}}$ et C_1, C_2 sont les constantes positives données dans la proposition 1 du chapitre 3) tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, le problème (5.1) admette une unique solution faible $(f^\varepsilon, u^\varepsilon)$ définie sur l'intervalle de temps $[0, T]$. Cette solution satisfait

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\in C([0, T]; H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap H^1(0, T; H^1(\mathbb{R})) \\ f^\varepsilon &\in W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R}) \\ f^\varepsilon &\geq 0, \quad \partial_t f^\varepsilon \leq 0, \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5.3)$$

De plus, on a les bornes uniformes indépendantes de ε suivantes:

$$|f^\varepsilon|_\infty \leq |f_0|_\infty + F_0, \quad |\partial_x f^\varepsilon|_\infty \leq |f'_0|_\infty + F_0, \quad |\partial_t f^\varepsilon|_\infty \leq |f_1|_\infty + F_0 \quad (5.4)$$

$$\|u^\varepsilon\|^2 \leq (|u_0|_2^2 + E_0^2 T) \exp T \quad (5.5)$$

$$|\partial_t u^\varepsilon(t)|_2^2 + |\partial_x u^\varepsilon(t)|_2^2 \leq E_0^2, \quad \forall t \in [0, T] \quad (5.6)$$

La démonstration sera faite en plusieurs étapes. On prouve d'abord l'existence d'une solution en utilisant le schéma itératif suivant.

5.2 Le schéma itératif

On pose $u^0 = 0$ et $f^0 = 0$. En supposant u^n et f^n connus à l'itération n , $n \in \mathbb{N}$, on définit f^{n+1} comme étant la solution de l'équation linéaire du type de la chaleur

$$\partial_t f^{n+1} - \partial_x^2 f^{n+1} = -\partial_x u^n \quad \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}, \quad f^{n+1}(0, x) = f_0(x) \quad \text{dans } \mathbb{R} \quad (5.7)$$

puis on définit u^{n+1} comme la solution de l'équation des ondes

$$\begin{cases} \partial_t^2 u^{n+1} - \partial_x [(1 + f^{n+1}) \partial_x u^{n+1}] - \varepsilon \partial_x^2 [\partial_t u^{n+1}] = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ u^{n+1}(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u^{n+1}(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.8)$$

Ce découplage du problème (5.1) permet d'obtenir à chaque itération deux problèmes linéaires qui ont été étudiés dans les chapitres précédents. Les résultats qui suivent donnent des estimations uniformes de la suite des solutions $(f^n, u^n)_n$.

Proposition 3 *Sous les hypothèses du théorème 1, soit $T > 0$ défini par (5.2). Alors la suite des solutions $(f^n, u^n)_n$ est bien définie sur $[0, T]$ et on a pour tout n ,*

$$f^n \in W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R}), u^n \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap H^1(0, T; H^1(\mathbb{R}))$$

$$f_n(t, x) \geq 0, \quad \partial_t f^n(t, x) \leq 0 \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R} \quad \text{pour tout } n$$

et les bornes uniformes suivantes indépendantes de n et de ε , sont réalisées:

$$|f^n|_\infty \leq |f_0|_\infty + F_0, \quad |\partial_x f^n|_\infty \leq |f'_0|_\infty + F_0, \quad |\partial_t f^n|_\infty \leq |f_1|_\infty + F_0 \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \|u^n\|^2 &\leq (|u_0|_2^2 + E_0^2 T) \exp T, \quad |\partial_t u^n(t)|_2^2 + \left| \sqrt{1 + f^{n+1}}(t) \partial_x u^n(t) \right|_2^2 \\ &\quad + 2\varepsilon \int_0^t |\partial_{tx}^2 u^n(s)|^2 ds \leq E_0^2, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Preuve:

La preuve de la proposition 3 est réalisée par récurrence sur n .

1- Pour $n = 0$ on a $(u^0, f^0) = (0, 0)$ satisfait les résultats de la proposition 3.

2- Supposons, à présent, que les résultats de la proposition 3 sont vérifiés par (f^n, u^n) . Alors u^n satisfait les hypothèses de la proposition 1 (voir page 12), on peut donc appliquer la proposition 1 à l'équation (5.7) pour déduire que f^{n+1} est bien définie, que $f^{n+1} \in W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R})$ et qu'elle vérifie les estimations (3.2) à (3.6) de la proposition 1. Ainsi

$$f^{n+1}(t, x) \geq F_0 - C_1 T^{\frac{3}{4}} \|\partial_x u^n\|$$

et

$$\partial_t f^{n+1}(t, x) \leq -F_0 + C_2 T^{\frac{1}{4}} \|\partial_x u^n\|$$

p.p. dans $(0, T) \times \mathbb{R}$. Or (5.10) (à l'ordre n) implique que $\|\partial_x u^n\| \leq E_0$, d'où

$$f^{n+1}(t, x) \geq F_0 - C_1 T^{\frac{3}{4}} E_0 \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}$$

Par ailleurs, d'après (5.2), T vérifie $F_0 - C_1 T^{\frac{3}{4}} E_0 \geq 0$ donc

$$f^{n+1}(t, x) \geq 0 \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}$$

De la même manière, on établit :

$$\partial_t f^{n+1}(t, x) \leq -F_0 + C_2 T^{\frac{1}{4}} E_0 \quad \text{et} \quad \partial_t f^{n+1}(t, x) \leq 0 \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}$$

Toujours d'après la proposition 1 et (5.2), on a successivement :

$$\begin{aligned} |f^{n+1}|_\infty &\leq |f_0|_\infty + C_1 T^{\frac{3}{4}} \|\partial_x u^n\| \leq |f_0|_\infty + C_1 T^{\frac{3}{4}} E_0 \leq |f_0|_\infty + F_0 \\ |\partial_x f^{n+1}|_\infty &\leq |f'_0|_\infty + C_2 T^{\frac{1}{4}} \|\partial_x u^n\| \leq |f'_0|_\infty + C_2 T^{\frac{1}{4}} E_0 \leq |f'_0|_\infty + F_0 \\ |\partial_t f^{n+1}|_\infty &\leq |f_1|_\infty + C_2 T^{\frac{1}{4}} \|\partial_t u^n\| \leq |f_1|_\infty + C_2 T^{\frac{1}{4}} E_0 \leq |f_1|_\infty + F_0 \end{aligned}$$

Donc f^{n+1} vérifie (5.9).

Montrons maintenant que u^{n+1} vérifie les résultats de la proposition 3. Sachant que f^{n+1} satisfait les hypothèses de la proposition 2 (voir page 18), on conclut que le problème (5.8) admet une solution unique u^{n+1} vérifiant:

$$u^{n+1} \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap H^1(0, T; H^1(\mathbb{R})); \partial_t^2 u^{n+1} \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$$

et

$$E_{n+1}^2(t) + 2\varepsilon \int_0^t |\partial_{sx}^2 u^{n+1}(s)|_2^2 ds \leq E_0^2 \quad \text{pour tout } t \in [0, T]$$

où $E_{n+1}^2(t) = |\partial_t u^{n+1}(t)|_2^2 + |\sqrt{1 + f^{n+1}} \partial_x u^{n+1}(t)|_2^2$, ce qui donne la 2^{ième} inégalité de (5.10).

Il reste à montrer que la 1^{ère} inégalité de (5.10) est vérifiée par u^{n+1} . On utilise le fait que

$$(u^{n+1}(t, x))^2 = (u^{n+1}(0, x))^2 + 2 \int_0^t u^{n+1}(s, x) \partial_t u^{n+1}(s, x) ds$$

d'où :

$$\int_{\mathbb{R}} |u^{n+1}(t, x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 dx + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u^{n+1}(s, x) \partial_t u^{n+1}(s, x) dx ds$$

or $2u^{n+1}(s, x)\partial_t u^{n+1}(s, x) \leq (u^{n+1}(s, x))^2 + (\partial_t u^{n+1}(s, x))^2$, d'où

$$\int_{\mathbb{R}} |u^{n+1}(t, x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |u^{n+1}(s, x)|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\partial_t u^{n+1}(s, x)|^2 dx ds$$

ou encore

$$|u^{n+1}(t)|_2^2 \leq |u_0|_2^2 + \int_0^t |u^{n+1}(s)|_2^2 ds + E_0^2 t \quad (5.11)$$

obtenue en utilisant (5.10). En posant $\eta(t) = |u^{n+1}(t)|_2^2$, (5.11) implique

$$\eta(t) \leq |u_0|_2^2 + TE_0^2 + \int_0^t \eta(s) ds, \quad t \in [0, T]$$

qui s'écrit aussi $\eta(t) \leq K + \int_0^t \eta(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$ avec $K = |u_0|_2^2 + TE_0^2$. En utilisant l'inégalité de Gronwall, on obtient $\eta(t) \leq K \exp(\int_0^t ds) \leq K \exp T$ ou encore

$$|u^{n+1}(t)|_2^2 \leq (|u_0|_2^2 + TE_0^2) \exp T, \quad \forall t \in [0, T]$$

d'où

$$\|u^{n+1}\|^2 \leq (|u_0|_2^2 + TE_0^2) \exp T,$$

ce qui achève la preuve de la proposition 3.

5.3 Convergence du schéma itératif

On introduit l'espace de Banach \mathcal{E} défini par:

$$\mathcal{E} = C([0, T]; H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap H^1(0, T; H^1(\mathbb{R})), \text{ muni de la norme}$$

$$\|u\|_{\mathcal{E}}^2 = \|u\|^2 + \|\partial_x u\|^2 + \|\partial_t u\|^2 + \int_0^T |\partial_{tx}^2 u|_2^2 dt$$

Nous allons montrer que $(f^n)_n$ et $(u^n)_n$ sont des suites de Cauchy dans $W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R})$ et \mathcal{E} respectivement. Dans ce but, on pose

$$g^n = f^{n+1} - f^n \text{ et } v^n = u^{n+1} - u^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors pour tout n , g^n vérifie l'équation du type de la chaleur

$$\partial_t g^n - \partial_x^2 g^n = -\partial_x v^n \quad \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}, \quad g^n(0, x) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \quad (5.12)$$

et v^n l'équation des ondes avec second membre

$$\begin{cases} \partial_t^2 v^n - \partial_x[(1 + f^{n+1})\partial_x v^n] - \varepsilon \partial_x^2[\partial_t v^n] = \partial_x[g^n \partial_x u^n] & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ v^n(0, x) = 0, \quad \partial_t v^n(0, x) = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.13)$$

Tenant compte du fait que $\partial_t v^n \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ et que tous les autres termes de l'edp sont

dans $L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$, on peut multiplier (5.13) par $\partial_t v^n$ dans la dualité $H^{-1}(\mathbb{R})$, $H^1(\mathbb{R})$ notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\langle \partial_t^2 v^n, \partial_t v^n \rangle - \langle \partial_x[(1 + f^{n+1})\partial_x v^n], \partial_t v^n \rangle - \langle \varepsilon \partial_x^2[\partial_t v^n], \partial_t v^n \rangle = \langle \partial_x[g^n \partial_x u^n], \partial_t v^n \rangle$$

Comme, d'après la proposition 2.2.9, on a $\langle \partial_t^2 v^n(t), \partial_t v^n(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\partial_t v^n(t)|_2^2$ alors:

$$\begin{aligned} \langle -\partial_x[(1 + f^{n+1})\partial_x v^n], \partial_t v^n \rangle &= ((1 + f^{n+1})\partial_x v^n, \partial_{tx}^2 v^n)_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (1 + f^{n+1}) \partial_t (\partial_x v^n)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |\sqrt{1 + f^{n+1}} \partial_x v^n|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_t f^{n+1} (\partial_x v^n)^2 dx \end{aligned}$$

D'un autre côté, on a

$$\langle -\varepsilon \partial_x^2[\partial_t v^n], \partial_t v^n \rangle = (\varepsilon \partial_x[\partial_t v^n], \partial_x(\partial_t v^n))_{L^2(\mathbb{R})} = \varepsilon |\partial_{tx}^2 v^n|_2^2$$

et

$$\langle \partial_x[g^n(\partial_x u^n)], \partial_t v^n \rangle = -(g^n(\partial_x u^n), \partial_x(\partial_t v^n))_{L^2(\mathbb{R})} = - \int_{\mathbb{R}} g^n(\partial_x u^n) \partial_{tx}^2 v^n dx$$

On obtient finalement:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|\partial_t v^n(t)|_2^2 + |\sqrt{1 + f^{n+1}} \partial_x v^n(t)|_2^2] + \varepsilon |\partial_{tx}^2 v^n(t)|_2^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_t f^{n+1} |\partial_x v^n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}} g^n(\partial_x u^n) \partial_{tx}^2 v^n dx.$$

Comme $\partial_t f^{n+1} \leq 0$ p.p. dans $(0, T) \times \mathbb{R}$, alors:

$$\frac{d}{dt} [|\partial_t v^n(t)|_2^2 + |\sqrt{1 + f^{n+1}} \partial_x v^n(t)|_2^2] + 2\varepsilon |\partial_{tx}^2 v^n(t)|_2^2 \leq - \int_{\mathbb{R}} 2g^n(\partial_x u^n) \partial_{tx}^2 v^n dx.$$

On applique à présent l'inégalité de Young avec ε aux fonctions $|-2g^n(\partial_x u^n)|$ et $|\partial_{tx}^2 v^n|$ et on obtient

$$|2g^n(\partial_x u^n)| |\partial_{tx}^2 v^n| \leq \frac{1}{\varepsilon} |g^n(\partial_x u^n)|^2 + \varepsilon |\partial_{tx}^2 v^n|^2$$

D'où:

$$\frac{d}{dt} [|\partial_t v^n(t)|_2^2 + |\sqrt{1 + f^{n+1}} \partial_x v^n(t)|_2^2] + \varepsilon |\partial_{tx}^2 v^n(t)|_2^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |g^n(\partial_x u^n)|^2 dx$$

puis, tenant compte du fait que $v^n(0) = \partial_t v^n(0) = 0$,

$$|\partial_t v^n(t)|_2^2 + |\sqrt{1 + f^{n+1}} \partial_x v^n(t)|_2^2 + \varepsilon \int_0^t |\partial_{tx}^2 v^n(s)|_2^2 ds \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t |g^n \partial_x u^n(s)|_2^2 ds.$$

Par ailleurs, en utilisant (5.10):

$$|g^n(s) \partial_x u^n(s)|_2^2 \leq |g^n(s)|_\infty^2 |\partial_x u^n(s)|_2^2 \leq |g^n(s)|_\infty^2 E_0^2$$

On obtient ainsi:

$$|\partial_t v^n(t)|_2^2 + |\sqrt{1 + f^{n+1}} \partial_x v^n(t)|_2^2 + \varepsilon \int_0^t |\partial_{tx}^2 v^n(s)|_2^2 ds \leq \frac{1}{\varepsilon} E_0^2 \int_0^t |g^n(s)|_\infty^2 ds$$

Considérons l'équation (5.12) dont la solution (voir chapitre 3) est donnée par:

$$g^n(t, x) = - \int_0^t H(t-s, \cdot) * \partial_x v^{n-1}(s, \cdot)(x) ds.$$

On procède alors comme dans le chapitre 3 pour obtenir le même type d'estimations. On montre que

$$|g^n(t, x)| \leq C_3 T^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^t |\partial_x v^{n-1}(s)|_2^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}$$

où $C_3 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}}$. D'où finalement

$$|g^n(t)|_\infty \leq C_3 T^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^t |\partial_x v^{n-1}(s)|_2^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in [0, T], \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (5.14)$$

Tenant compte du fait que $f^{n+1} \geq 0$, en utilisant (5.14), on obtient:

$$\begin{aligned} |\partial_t v^n(t)|_2^2 + |\partial_x v^n(t)|_2^2 + \varepsilon \int_0^t |\partial_{tx}^2 v^n(s)|_2^2 ds &\leq \frac{1}{\varepsilon} E_0^2 \int_0^t [C_3^2 T^{\frac{1}{2}} \int_0^s |\partial_x v^{n-1}(\tau)|_2^2 d\tau] ds \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} E_0^2 C_3^2 T^{\frac{1}{2}} \int_0^t |\partial_x v^{n-1}(s)|_2^2 ds \int_0^t ds \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} E_0^2 C_3^2 T^{\frac{3}{2}} \int_0^t |\partial_x v^{n-1}(s)|_2^2 ds \end{aligned} \quad (5.15)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in [0, T]$. En particulier:

$$|\partial_x v^n(t)|_2^2 \leq \frac{C_3^2 T^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} E_0^2 \int_0^t |\partial_x v^{n-1}(s)|_2^2 ds, \quad \forall t \in [0, T], \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (5.16)$$

Posons $V^n(t) = |\partial_x v^n(t)|_2^2$ et $C_\varepsilon = \frac{C_3^2 T^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} E_0^2$. (5.16) devient:

$$V^n(t) \leq C_\varepsilon \int_0^t V^{n-1}(s) ds, \quad \forall t \in [0, T], \forall n \in \mathbb{N}^*$$

On a ainsi successivement:

$$\begin{aligned} V^1(t) &\leq C_\varepsilon \int_0^t V^0(s) ds, \quad t \in [0, T] \\ V^2(t) &\leq C_\varepsilon \int_0^t V^1(s) ds \\ V^2(t) &\leq C_\varepsilon^2 t \int_0^t V^0(s) ds \end{aligned}$$

On vérifie alors, par récurrence sur n , que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, V^n(t) \leq C_\varepsilon \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^t V^0(s) ds, \forall t \in [0, T]. \quad (5.17)$$

Par ailleurs:

$$V^0(s) = |\partial_x(u^1 - u^0)(s)|_2^2 = |\partial_x u^1(s)|_2^2 \leq E_0^2,$$

d'après (5.10). D'où $\int_0^t V^0(s) ds \leq TE_0^2$ et

$$V^n(t) \leq C_\varepsilon \frac{T^n}{(n-1)!} E_0^2, \quad t \in [0, T]$$

et finalement

$$\|\partial_x u^{n+1} - \partial_x u^n\|^2 \leq C_\varepsilon T E_0^2 \frac{(C_\varepsilon T)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On pose $w_n = \partial_x u^{n+1}$, $K = C_\varepsilon T E_0^2$ et $a = C_\varepsilon T$. Alors l'inégalité précédente s'écrit

$$\|w_n - w_{n-1}\| \leq \sqrt{K} \left(\frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui implique que (w_n) est une suite de Cauchy dans $C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$. En effet, pour $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $p > q$, on a:

$$\begin{aligned} \|w_p - w_q\| &\leq \|w_{q+1} - w_q\| + \|w_{q+2} - w_{q+1}\| + \dots + \|w_p - w_{p-1}\| \\ &\leq \sqrt{K} \left(\left(\frac{a^q}{q!} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a^{q+1}}{(q+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} + \dots + \left(\frac{a^{p-1}}{(p-1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq \sqrt{K} (S_p - S_q) \end{aligned}$$

où $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{a^{k-1}}{(k-1)!} \right)^{\frac{1}{2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ est le terme général de la suite des sommes partielles

associées à la série convergente $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \right)^{\frac{1}{2}}$. $(S_n)_n$ est donc une suite de Cauchy et par suite $(w_n)_n$ l'est aussi.

De (5.15), on déduit que:

$$\begin{aligned} |\partial_t v^n(t)|_2^2 &\leq \frac{C_3^2 T^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} E_0^2 \int_0^t |\partial_x v^{n-1}(s)|_2^2 ds, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &\leq C_\varepsilon T \|\partial_x v^{n-1}\|^2, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

d'où

$$\|\partial_t u^{n+1} - \partial_t u^n\|^2 \leq C_\varepsilon T \|\partial_x u^n - \partial_x u^{n-1}\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Comme la suite $(\partial_x u^n)_n$ est une suite de Cauchy dans $C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$ alors on déduit que $(\partial_t u^n)$ est une suite de Cauchy dans $C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$.

De (5.15), on déduit aussi que: $\forall t \in [0, T], \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \int_0^t |\partial_{tx}^2 v^n(s)|_2^2 ds &\leq \frac{C_3^2 T^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon^2} E_0^2 \int_0^t |\partial_x v^{n-1}(s)|_2^2 ds, \forall t \in [0, T], \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &\leq \frac{C_\varepsilon T}{\varepsilon} \|\partial_x u^n - \partial_x u^{n-1}\|^2 \end{aligned}$$

En particulier:

$$\int_0^T |\partial_{tx}^2 v^n(s)|_2^2 ds \leq \frac{C_\varepsilon T}{\varepsilon} \|\partial_x u^n - \partial_x u^{n-1}\|^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

de sorte que la suite $(\partial_{tx}^2 u^n)_n$ est de Cauchy dans $L^2((0, T) \times \mathbb{R})$. En utilisant la même démarche que pour montrer (5.10), on établit l'inégalité

$$\|v^n\|^2 \leq T \exp T \|\partial_t v^n\|^2, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (5.18)$$

c'est-à-dire

$$\|u^{n+1} - u^n\|^2 \leq T \exp T \|\partial_t u^{n+1} - \partial_t u^n\|^2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On peut alors conclure que $(u^n)_n$ est une suite de Cauchy dans \mathcal{E} .

On s'intéresse maintenant à la suite $(f^n)_n$. Il vient de (5.14) que

$$|g^n(t)|_\infty \leq C_3 T^{\frac{1}{4}} T^{\frac{1}{2}} \|\partial_x v^{n-1}\|, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, T]$$

D'où:

$$|g^n|_\infty \leq C_3 T^{\frac{3}{4}} \|\partial_x u^n - \partial_x u^{n-1}\|, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Par ailleurs, $v^n = u^n - u^{n-1}$ vérifie les hypothèses de la proposition 1 (voir page 12), on peut donc appliquer à g^n les résultats (3.5) et (3.6) de cette proposition avec $u_0 = f_0 = f_1 = 0$. On a ainsi:

$$|\partial_x g^n|_\infty \leq C_2 T^{\frac{1}{4}} \|\partial_x v^{n-1}\|, |\partial_t g^n|_\infty \leq C_2 T^{\frac{1}{4}} \|\partial_t v^{n-1}\|, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On obtient finalement:

$$\|g^n\|_{W^{1,\infty}((0,T) \times \mathbb{R})} \leq C_3 T^{\frac{3}{4}} \|\partial_x v^{n-1}\| + C_2 T^{\frac{1}{4}} \|\partial_x v^{n-1}\| + C_2 T^{\frac{1}{4}} \|\partial_t v^{n-1}\|, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

ou encore

$$\|f^{n+1} - f^n\|_{W^{1,\infty}} \leq (C_3 T^{\frac{3}{4}} + C_2 T^{\frac{1}{4}}) \|\partial_x u^n - \partial_x u^{n-1}\| + C_2 T^{\frac{1}{4}} \|\partial_t u^n - \partial_t u^{n-1}\|$$

d'où on conclut que $(f^n)_n$ est une de Cauchy dans $W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R})$.

\mathcal{E} et $W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R})$ munis de leurs normes respectives étant des espaces de Banach, il s'ensuit

que les suites de Cauchy $(u^n)_n$ et $(f^n)_n$ convergent fortement respectivement dans \mathcal{E} et dans $W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R})$ vers des limites notées u^ε et f^ε , pour tout $\varepsilon > 0$ fixé.

On a donc $u^\varepsilon \in \mathcal{E}$ et $f^\varepsilon \in W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R})$, pour tout ε positif

5.4 Solution du problème approché

5.4.1 Existence

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Nous allons à présent prouver que $(f^\varepsilon, u^\varepsilon)$ est une solution faible du problème (5.1). On revient aux problèmes (5.7) et (5.8) où l'on effectue un passage à la limite lorsque n tend vers l'infini. Rappelons l'équation (5.7)

$$\partial_t f^{n+1} - \partial_x^2 f^{n+1} = -\partial_x u^n \text{ dans } (0, T) \times \mathbb{R}, \quad f^{n+1}(0, x) = f_0(x) \text{ dans } \mathbb{R}$$

La convergence forte de (f^{n+1}) vers f^ε dans $W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R})$ implique que: quand $n \rightarrow +\infty$, $\partial_t f^{n+1} \rightarrow \partial_t f^\varepsilon$ et $\partial_x f^{n+1} \rightarrow \partial_x f^\varepsilon$ fortement dans $L^\infty((0, T) \times \mathbb{R})$. De plus, comme $W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\mathbb{R})) \hookrightarrow C([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}))$ alors, en particulier, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{n+1}(0, x) = f^\varepsilon(0, x) \text{ p.p. dans } \mathbb{R},$$

d'où

$$f^\varepsilon(0, x) = f_0(x) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}$$

De même $u^n \rightarrow u^\varepsilon$ dans \mathcal{E} fort implique $\partial_x u^n \rightarrow \partial_x u^\varepsilon$ dans $C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$ fort.

Par ailleurs, $\partial_x^2 f^{n+1} \in D'([0, T] \times \mathbb{R})$ et la convergence de f^{n+1} dans $L^\infty((0, T) \times \mathbb{R})$ entraînant la convergence dans $D'([0, T] \times \mathbb{R})$, on en déduit que $\partial_x^2 f^{n+1} \rightarrow \partial_x^2 f^\varepsilon$ dans $D'([0, T] \times \mathbb{R})$.

Ainsi, le passage à la limite dans (5.7) donne:

$$\partial_t f^\varepsilon - \partial_x^2 f^\varepsilon = -\partial_x u^\varepsilon \text{ dans } D'([0, T] \times \mathbb{R}) \text{ et } f^\varepsilon(0, x) = f_0(x) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}.$$

On s'intéresse à présent au problème (5.8) rappelé ci-dessous

$$\begin{cases} \partial_t^2 u^{n+1} - \partial_x[(1 + f^{n+1})\partial_x u^{n+1}] - \varepsilon \partial_x^2[\partial_t u^{n+1}] = 0 & \text{dans } D'([0, T] \times \mathbb{R}) \\ u^{n+1}(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u^{n+1}(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

La convergence forte de $(u^n)_n$ vers u^ε dans \mathcal{E} implique que

$$\begin{aligned} \partial_x u^{n+1} &\rightarrow \partial_x u^\varepsilon \text{ dans } C([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \text{ et dans } L^2((0, T) \times \mathbb{R}) \text{ fort} \\ \partial_{tx}^2 u^{n+1} &\rightarrow \partial_{tx}^2 u^\varepsilon \text{ dans } L^2((0, T) \times \mathbb{R}) \text{ fort} \end{aligned}$$

on en déduit la convergence suivante dans $D'([0, T] \times \mathbb{R})$

$$\partial_x^2[\partial_t u^{n+1}] \rightarrow \partial_x^2[\partial_t u^\varepsilon]$$

De plus comme $(f^n)_n$ converge vers f^ε fortement dans $L^\infty((0, T) \times \mathbb{R})$, on obtient que

$$(1 + f^{n+1}) \partial_x u^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (1 + f^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon \text{ dans } L^2((0, T) \times \mathbb{R}) \text{ fort}$$

En effet, on a:

$$(1 + f^{n+1}) \partial_x u^{n+1} - (1 + f^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon = (1 + f^{n+1}) (\partial_x u^{n+1} - \partial_x u^\varepsilon) + \partial_x u^\varepsilon (f^{n+1} - f^\varepsilon)$$

d'où:

$$|(1 + f^{n+1}) \partial_x u^{n+1} - (1 + f^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon|_2 \leq |1 + f^{n+1}|_\infty |\partial_x u^{n+1} - \partial_x u^\varepsilon|_2 + |\partial_x u^\varepsilon|_2 |f^{n+1} - f^\varepsilon|_\infty$$

d'où le résultat. Par conséquent

$$\partial_x [(1 + f^{n+1}) \partial_x u^{n+1}] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \partial_x [(1 + f^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon] \text{ dans } D'([0, T] \times \mathbb{R})$$

et on a:

$$\partial_t^2 u^\varepsilon - \partial_x [(1 + f^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon] - \varepsilon \partial_x^2 [\partial_t u^\varepsilon] = 0 \text{ dans } D'([0, T] \times \mathbb{R})$$

Par ailleurs, la convergence forte de u^{n+1} vers u^ε dans $C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$ entraîne que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u^{n+1}(0, x) = u^\varepsilon(0, x) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \partial_t u^{n+1}(0, x) = \partial_t u^\varepsilon(0, x) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}$$

d'où

$$u^\varepsilon(0, x) = u_0(x) \text{ et } \partial_t u^\varepsilon(0, x) = u_1(x) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}$$

Ainsi, par passage à la limite dans (5.8), on obtient

$$\begin{cases} \partial_t^2 u^\varepsilon - \partial_x [(1 + f^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon] - \varepsilon \partial_x^2 [\partial_t u^\varepsilon] = 0 & \text{dans } D'([0, T] \times \mathbb{R}) \\ u^\varepsilon(0, x) = u_0(x), \partial_t u^\varepsilon(0, x) = u_1(x) & \text{p.p. dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

Montrons maintenant que $(f^\varepsilon, u^\varepsilon)$ vérifie les assertions (5.3) à (5.6). La convergence forte de $(f^n)_n$ et de $(u^n)_n$ respectivement dans $W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R})$ et dans \mathcal{E} vers f^ε et u^ε permet d'affirmer:

$$\begin{aligned} f^n \geq 0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} & \text{ implique } f^\varepsilon \geq 0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ \partial_t f^n \leq 0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} & \text{ implique } \partial_t f^\varepsilon \leq 0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la continuité de la norme $|\cdot|_\infty$ permet le passage à la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, dans (5.9) et on obtient alors les inégalités:

$$|f^\varepsilon|_\infty \leq |f_0|_\infty + F_0, |\partial_x f^\varepsilon|_\infty \leq |f'_0|_\infty + F_0, |\partial_t f^\varepsilon|_\infty \leq |f_1|_\infty + F_0$$

De même, après passage à la limite dans (5.10), on obtient:

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon\|^2 &\leq \exp T (|u_0|_2^2 + E_0^2 T) \\ |\partial_t u^\varepsilon(t)|_2^2 + |\partial_x u^\varepsilon(t)|_2^2 &\leq E_0^2, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

5.4.2 - Unicité

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Considérons $(f^\varepsilon, u^\varepsilon)$ et $(h^\varepsilon, w^\varepsilon)$ deux solutions du problème (5.1) satisfaisant les propriétés données dans le théorème 3 et posons $g^\varepsilon = f^\varepsilon - h^\varepsilon$ et $v^\varepsilon = u^\varepsilon - w^\varepsilon$. Il s'ensuit que g^ε vérifie l'équation du type de la chaleur:

$$\begin{cases} \partial_t g^\varepsilon - \partial_x^2 g^\varepsilon = -\partial_x v^\varepsilon & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ g^\varepsilon(0, x) = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

et v^ε l'équation des ondes avec second membre

$$\begin{cases} \partial_t^2 v^\varepsilon - \partial_x [(1 + f^\varepsilon) \partial_x v^\varepsilon] - \varepsilon \partial_x^2 [\partial_t v^\varepsilon] = \partial_x [g^\varepsilon \partial_x w^\varepsilon] & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ v^\varepsilon(0, x) = 0, \quad \partial_t v^\varepsilon(0, x) = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

Rappelons qu'alors

$$g^\varepsilon(t, x) = - \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} H(t-s, x-y) \partial_x v^\varepsilon(s, y) dy \right) ds,$$

et on a

$$|g^\varepsilon(t)|_\infty^2 \leq C_3^2 T^{\frac{1}{2}} \int_0^t |\partial_x v^\varepsilon(s)|_2^2 ds, \quad \forall t \in [0, T] \quad (5.19)$$

que l'on obtient comme dans la preuve de (5.14).

En utilisant la même démarche que dans la preuve de (5.15), on établit l'inégalité suivante:

$$|\partial_t v^\varepsilon(t)|_2^2 + |\partial_x v^\varepsilon(t)|_2^2 + \varepsilon \int_0^t |\partial_{tx}^2 v^\varepsilon(s)|_2^2 ds \leq \frac{1}{\varepsilon} E_0^2 C_3^2 T^{\frac{3}{2}} \int_0^t |\partial_x v^\varepsilon(s)|_2^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

d'où les deux inégalités suivantes

$$|\partial_x v^\varepsilon(t)|_2^2 \leq \frac{C_3^2 T^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} E_0^2 \int_0^t |\partial_x v^\varepsilon(s)|_2^2 ds, \quad \forall t \in [0, T] \quad (5.20)$$

$$|\partial_t v^\varepsilon(t)|_2^2 \leq \frac{C_3^2 T^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} E_0^2 \int_0^t |\partial_x v^\varepsilon(s)|_2^2 ds, \quad \forall t \in [0, T] \quad (5.21)$$

Il s'ensuit, d'après l'inégalité de Gronwall appliquée à (5.20), que:

$$|\partial_x v^\varepsilon(t)|_2^2 = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Revenant à (5.21), on déduit que

$$|\partial_t v^\varepsilon(t)|_2 = 0, \forall t \in [0, T]$$

ce qui permet de conclure, puisque $v^\varepsilon(0, x) = 0$ dans \mathbb{R} , que

$$v^\varepsilon = 0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}.$$

L'inégalité (5.19) permet alors de déduire que

$$g^\varepsilon = 0 \text{ p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}.$$

La solution du problème (5.1) est donc unique ; ce qui conclut la preuve du théorème 3.

Chapitre 6

Solution du problème initial

On dispose à présent de tous les outils indispensables pour achever la preuve du théorème 1.

Dans la première section, en exploitant les bornes uniformes sur les solutions approchées $(f^\varepsilon, u^\varepsilon)$ et des résultats de compacité, on prouve, par passage à la limite lorsque ε tend vers 0, l'existence d'une solution faible du problème initial. Des résultats de trace ainsi que des propriétés de la solution sont établis dans les sections suivantes.

Signalons que par abus de terminologie, on appellera "suite" une famille de fonctions indexées par un paramètre $\varepsilon > 0$, destiné à tendre vers 0.

6.1 Convergence des solutions approchées

Soit $(f^\varepsilon, u^\varepsilon)$ la solution de (5.1) donnée par le théorème 3 (voir page 35), pour tout $\varepsilon > 0$. On rappelle que

$$\begin{aligned} f^\varepsilon &\in W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R}) \text{ et} \\ u^\varepsilon &\in C([0, T]; H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap H^1(0, T; H^1(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

On considère l'espace de Banach

$$\mathcal{F} = W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R}) \times (L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R})) \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}))).$$

Les estimations (5.4) à (5.6) données par le théorème 3 nous permettent d'établir que:

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon\|_{W^{1,\infty}((0,T)\times\mathbb{R})} &= |f^\varepsilon|_\infty + |\partial_x f^\varepsilon|_\infty + |\partial_t f^\varepsilon|_\infty \leq |f_0|_\infty + |f'_0|_\infty + |f_1|_\infty + 3F_0 \\ \|u^\varepsilon\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^2)\cap L^\infty(0,T;H^1)}^2 &= \|u^\varepsilon\|^2 + \|\partial_t u^\varepsilon\|^2 + \|\partial_x u^\varepsilon\|^2 \leq \exp T (|u_0|_2^2 + TE_0^2) + E_0^2 \end{aligned}$$

En conséquence la suite $(f^\varepsilon, u^\varepsilon)_\varepsilon$ est uniformément bornée dans \mathcal{F} . D'après la proposition 2.3.1, il existe une sous-suite de $(f^\varepsilon)_\varepsilon$ (notée encore f^ε) convergeant faiblement * dans $W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R})$ vers une limite f .

De la même manière, il existe une sous-suite de $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ (notée encore u^ε) convergeant faiblement* vers u dans $L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R})) \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}))$.

On obtient ainsi une suite extraite de $(f^\varepsilon, u^\varepsilon)_\varepsilon$ qui converge faiblement * dans \mathcal{F} vers (f, u) . Par ailleurs, $(f^\varepsilon, u^\varepsilon)$ étant une solution du problème couplé (5.1), il vérifie:

$$\begin{cases} \partial_t f^\varepsilon - \partial_x^2 f^\varepsilon = -\partial_x u^\varepsilon & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ f^\varepsilon(0, x) = f_0(x) & \text{dans } \mathbb{R} \\ \partial_t^2 u^\varepsilon - \partial_x [(1 + f^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon] - \varepsilon \partial_x^2 [\partial_t u^\varepsilon] = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R} \\ u^\varepsilon(0, x) = u_0(x), \partial_t u^\varepsilon(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

La convergence faible * dans \mathcal{F} de $(f^\varepsilon, u^\varepsilon)$ vers (f, u) entraîne la convergence dans $D'((0, T) \times \mathbb{R})$

de f^ε vers f et de u^ε vers u . Ainsi, par passage à la limite quand ε tend vers 0 dans la première edp de (5.1), on obtient:

$$\partial_t f - \partial_x^2 f = -\partial_x u \quad \text{dans } D'((0, T) \times \mathbb{R})$$

Dans la deuxième edp de (5.1), le passage à la limite dans le terme non linéaire $(1 + f^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon$ est rendu possible grâce à l'injection compacte de $W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R})$ dans $L^\infty_{loc}((0, T) \times \mathbb{R})$. A ce titre, comme $F^\varepsilon = 1 + f^\varepsilon$ converge fortement vers $F = 1 + f$ dans $L^\infty_{loc}((0, T) \times \mathbb{R})$ et $G^\varepsilon = \partial_x u^\varepsilon$ converge faiblement * vers $G = \partial_x u$ dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ alors

$$F^\varepsilon G^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} FG \quad \text{dans } D'((0, T) \times \mathbb{R}).$$

En effet, pour tout $\phi \in D((0, T) \times \mathbb{R})$:

$$\int_{\Omega_T} (F^\varepsilon G^\varepsilon - FG) \phi dxdt = \int_{\Omega_T} (F^\varepsilon - F) G^\varepsilon \phi dxdt + \int_{\Omega_T} F (G^\varepsilon - G) \phi dxdt$$

où $\Omega_T = (0, T) \times \mathbb{R}$. Soit K compact, $K \subset \Omega_T$ tel que $\text{supp } \phi \subset K$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_T} (F^\varepsilon - F) G^\varepsilon \phi dxdt \right| &= \left| \int_K (F^\varepsilon - F) G^\varepsilon \phi dxdt \right| \\ &\leq \|F^\varepsilon - F\|_{L^\infty(K)} \|G^\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}))} \|\phi\|_{L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}))} \end{aligned}$$

comme $\|F^\varepsilon - F\|_{L^\infty(K)}$ tend vers 0 quand ε tend vers 0 et $\left(\|G^\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}))}\right)_\varepsilon$ est bornée alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} (F^\varepsilon - F) G^\varepsilon \phi dxdt = 0, \forall \phi \in D((0, T) \times \mathbb{R}).$$

D'autre part,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} (G^\varepsilon - G) F \phi dxdt = 0$$

car $F\phi \in L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}))$, d'où la conclusion.

Ainsi $(1 + f^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + f) \partial_x u$ dans $D'((0, T) \times \mathbb{R})$

On obtient finalement, après passage à la limite:

$$\partial_t^2 u - \partial_x [(1 + f) \partial_x u] = 0 \quad \text{dans } D'((0, T) \times \mathbb{R})$$

En conséquence, (f, u) vérifie:

$$\begin{cases} \partial_t f - \partial_x^2 f = -\partial_x u & \text{dans } D'((0, T) \times \mathbb{R}) \\ \partial_t^2 u - \partial_x [(1 + f) \partial_x u] = 0 & \text{dans } D'((0, T) \times \mathbb{R}) \end{cases} \quad (6.1)$$

6.2 Signes de f et de $\partial_t f$

Concernant f , il reste à prouver que $f \geq 0$ et que $\partial_t f \leq 0$ p.p. dans $(0, T) \times \mathbb{R}$. La

convergence forte de $(f^\varepsilon)_\varepsilon$ vers f dans $L_{loc}^\infty((0, T) \times \mathbb{R})$ entraînant la convergence p.p. dans $(0, T) \times \mathbb{R}$, il s'ensuit que, par passage à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, dans l'inégalité $f^\varepsilon \geq 0$, on obtient:

$$f \geq 0 \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R} \quad (6.2)$$

Nous allons maintenant montrer que $\partial_t f \leq 0$ p.p. dans $(0, T) \times \mathbb{R}$. Nous savons que $(\partial_t f^\varepsilon)_\varepsilon$ converge faiblement * vers $\partial_t f$ dans $L^\infty(\Omega_T)$ où $\Omega_T = (0, T) \times \mathbb{R}$ c'est-à-dire

$$\int_{\Omega_T} \partial_t f^\varepsilon \phi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} \partial_t f \phi dx dt, \forall \phi \in L^1(\Omega_T)$$

Or $\partial_t f^\varepsilon \leq 0$ p.p. dans $(0, T) \times \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ donc pour $\phi \geq 0$, $\int_{\Omega_T} \partial_t f^\varepsilon \phi \leq 0$, $\forall \varepsilon > 0$. D'où, par passage à la limite

$$\int_{\Omega_T} \partial_t f \phi dx dt \leq 0, \forall \phi \in L^1(\Omega_T) \text{ avec } \phi \geq 0 \text{ p.p. sur } \Omega_T$$

On pose $F = \partial_t f$ et pour tout compact K de Ω_T , on considère $\phi = F^+ 1_K$, F^+ étant la partie positive de F i.e. $F^+ = \max(F, 0)$. Alors $\phi \in L^1(\Omega_T)$ et donc $\int_{\Omega_T} F F^+ 1_K dx dt \leq 0$. Or $\int_{\Omega_T} F F^+ 1_K = \int_K F F^+ = \int_K |F^+|^2$. Ainsi

$$0 \geq \int_{\Omega_T} F F^+ 1_K dx dt = \int_K |F^+|^2 dx dt,$$

d'où $F^+ = 0$ p.p. dans K et comme K est arbitraire, il s'ensuit que $F^+ = 0$ p.p. dans Ω_T et par conséquent

$$\partial_t f \leq 0 \quad \text{p.p. dans } (0, T) \times \mathbb{R}. \quad (6.3)$$

6.3 Les conditions initiales

L'injection continue de $W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R})$ dans $C([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}))$ permet de déduire que $f(0, \cdot)$ est bien définie dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Montrons à présent que $f(0, x) = f_0(x)$. Comme $f^\varepsilon \in W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R})$ alors pour tout $\phi \in D([0, T[\times \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_t f^\varepsilon \phi dx dt &= \int_{\mathbb{R}} \left([f^\varepsilon \phi]_0^T - \int_0^T f^\varepsilon \partial_t \phi dt \right) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} f^\varepsilon(0, x) \phi(0, x) dx - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f^\varepsilon \partial_t \phi dx dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} f_0(x) \phi(0, x) dx - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f^\varepsilon \partial_t \phi dx dt, \forall \phi \in D([0, T[\times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

On a également

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_t f \phi dx dt = - \int_{\mathbb{R}} f(0, x) \phi(0, x) dx - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f \partial_t \phi dx dt, \forall \phi \in D([0, T[\times \mathbb{R})$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} (f(0, x) - f_0(x)) \phi(0, x) dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\partial_t f^\varepsilon - \partial_t f) \phi dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (f^\varepsilon - f) \partial_t \phi dx dt.$$

Comme

$$\begin{aligned} \partial_t f^\varepsilon &\rightharpoonup \partial_t f \quad \text{dans } L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}) \text{ faible } * \\ f^\varepsilon &\rightharpoonup f \quad \text{dans } L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}) \text{ faible } * \end{aligned}$$

et $D([0, T[\times \mathbb{R}) \subset L^1((0, T) \times \mathbb{R})$ alors:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (f^\varepsilon - f) \partial_t \phi dx dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\partial_t f^\varepsilon - \partial_t f) \phi dx dt$$

Ainsi, par passage à la limite, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, dans l'égalité ci dessus, on obtient:

$$\int_{\mathbb{R}} f(0, x) \phi(0, x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_0(x) \phi(0, x) dx, \quad \forall \phi \in D([0, T[\times \mathbb{R})$$

D'où $f(0, x) = f_0(x)$ dans $D'(\mathbb{R})$ et comme $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ alors:

$$f(0, x) = f_0(x) \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}) \quad (6.4)$$

Concernant la trace de u à $t = 0$, l'injection continue de $W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ dans $C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$ permet d'affirmer que $u(0, \cdot)$ est bien définie dans $L^2(\mathbb{R})$. Pour prouver que $u(0, x) = u_0(x)$ dans $L^2(\mathbb{R})$, on procède comme précédemment pour obtenir

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}).$$

On considère, à présent, la deuxième équation de (5.1):

$$\partial_t^2 u^\varepsilon - \partial_x [(1 + f^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon] - \varepsilon \partial_x^2 [\partial_t u^\varepsilon] = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}$$

où $u^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T]; H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap H^1(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ et $f^\varepsilon \in W^{1,\infty}((0, T) \times \mathbb{R})$.

On déduit que

$\partial_x [\partial_{tx}^2 u^\varepsilon]$ et $\partial_x [(1 + f^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon]$ sont dans $L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$ et donc $\partial_t^2 u^\varepsilon \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$.

On peut alors multiplier l'équation par $\phi \in D([0, T[\times \mathbb{R})$ dans la dualité $L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$, $L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ pour obtenir pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t^2 u^\varepsilon, \phi \rangle_{H^{-1}H^1} dt &= \int_0^T \langle \partial_t (\partial_t u^\varepsilon), \phi \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R})H^1(\mathbb{R})} dt \\ &= - \int_0^T \langle \partial_t \phi, \partial_t u^\varepsilon \rangle_{H^{-1}H^1} dt - (\partial_t u^\varepsilon(0), \phi(0))_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_t u^\varepsilon \partial_t \phi dx dt - \int_{\mathbb{R}} u_1 \phi(0) dx, \quad \forall \phi \in D([0, T[\times \mathbb{R}), \end{aligned}$$

on a également:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle -\partial_x [(1 + f^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon] - \varepsilon \partial_x^2 [\partial_t u^\varepsilon], \phi \rangle_{H^{-1}H^1} dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} ((1 + f^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon \partial_x \phi + \varepsilon \partial_{tx}^2 u^\varepsilon \partial_x \phi) dx dt, \quad \forall \phi \in D([0, T[\times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_t u^\varepsilon \partial_t \phi dx dt - \int_{\mathbb{R}} u_1 \phi(0) dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 + f^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon \partial_x \phi dx dt \\ & \quad + \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_{tx}^2 u^\varepsilon \partial_x \phi dx dt = 0, \quad \forall \phi \in D([0, T[\times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

On procède maintenant au passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$. La convergence faible * de u^ε vers u dans $L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R})) \cap W^{1, \infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ entraîne

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_t u^\varepsilon \partial_t \phi dx dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_t u \partial_t \phi dx dt.$$

Ainsi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \langle \partial_t^2 u^\varepsilon, \phi \rangle_{H^{-1}H^1} dt = - \int_0^T \langle \partial_t \phi, \partial_t u \rangle dt - (u_1, \phi(0))_{L^2}$$

La preuve de la page 48 montre qu'on a aussi:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 + f^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon \partial_x \phi dx dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 + f) \partial_x u \partial_x \phi dx dt, \quad \forall \phi \in D([0, T[\times \mathbb{R})$$

Pour le dernier terme, on écrit:

$$\varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_{tx}^2 u^\varepsilon \partial_x \phi dx dt = \sqrt{\varepsilon} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\varepsilon} \partial_{tx}^2 u^\varepsilon \partial_x \phi dx dt$$

et comme $\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\varepsilon} \partial_{tx}^2 u^\varepsilon \partial_x \phi dx dt \right| \leq \sqrt{\varepsilon} |\partial_{tx}^2 u^\varepsilon|_2 |\partial_x \phi|_2$ et que $(\sqrt{\varepsilon} |\partial_{tx}^2 u^\varepsilon|_2)_\varepsilon$ est bornée, alors on déduit que

$$\varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_{tx}^2 u^\varepsilon \partial_x \phi dx dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad \forall \phi \in D([0, T[\times \mathbb{R}).$$

On conclut alors que:

$$- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_t u \partial_t \phi dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 + f) \partial_x u \partial_x \phi dx dt = \int_{\mathbb{R}} u_1 \phi(0) dx, \quad \forall \phi \in D([0, T[\times \mathbb{R}). \quad (6.5)$$

Remarque:

Revenons à (6.1) dans lequel on a:

$$\partial_t^2 u - \partial_x [(1 + f) \partial_x u] = 0 \quad \text{dans } D'((0, T) \times \mathbb{R})$$

où $\partial_x u \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ et $(1 + f) \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}))$ et par suite,

$$(1 + f) \partial_x u \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R})).$$

Ainsi $\partial_x [(1 + f) \partial_x u] \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$, ce qui permet de déduire que $\partial_t^2 u \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$. On a ainsi $\partial_t u \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ et $\partial_t^2 u \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$, c'est-à-dire $\partial_t u \in H^1(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}))$. Or, d'après la proposition 2.2.7, on a $H^1(0, T; H^{-1}(\mathbb{R})) \hookrightarrow C([0, T]; H^{-1}(\mathbb{R}))$, donc $\partial_t u(0, \cdot)$ est bien définie dans $H^{-1}(\mathbb{R})$ et la relation (6.5) définit la condition initiale

$$\partial_t u(0) = u_1, \quad \text{dans un sens faible.}$$

Ce qui termine la preuve du théorème 1.

Conclusion

Nous avons vu au cours de cette étude de l'article [1] que l'énergie du système couplé d'équations aux dérivées partielles non linéaires (1.1) n'était pas conservée du fait de la dépendance de la vitesse des ondes du temps et de la solution de l'équation de la chaleur. Pour des données initiales assurant la décroissance de l'énergie et la positivité de la vitesse des ondes, mais uniquement pour un temps fini, un résultat d'existence locale de solutions du problème (1.1) a pu être établi.

Cependant on ne sait rien de l'unicité de ces solutions. Par ailleurs, comme il existe des solutions locales en temps, on pourrait se demander si celles-ci peuvent être prolongées en des solutions globales.

Ainsi la question de l'unicité et celle de l'existence de solutions globales en temps de ce problème peuvent être présentées comme d'éventuels développements des travaux de cet article.

Nous avons précisé, dans l'introduction, que le système (1.1) concernait un modèle 1-D de matériaux piézoélectriques avec retournement de domaines proposé par F. Davì [2]. Pour certaines applications, par exemple la conception de résonateurs piézoélectriques, les modèles 1-D sont insuffisants car ils ne permettent pas de rendre compte de certains comportements électriques et acoustiques. La simulation 3-D par la méthode des éléments finis constitue alors un complément nécessaire des techniques 1-D.

Bibliographie

- [1] K. Hamdache et D. Hamroun : Local solutions to a model of piezoelectric materials, *Math. Meth. Appl. Sci.* 2004; **27**:1657-1670 (DOI: 10.1002/mma.519).
- [2] F. Davì : One dimensional non linear dynamics of piezoelectric bodies with domain switching, proceedings PACAM VI, Rio de Janeiro, Brazil 1999.
- [3] H. Brézis : *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris 1983.
- [4] L. C. Evans : *Partial differential equations, Graduate Studies in Mathematics, Vol 19*, American Mathematical Society : Providence, RI, 1998.
- [5] J. L. Lions, R. Dautray : *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Vol. 8; Evolution: semi groupe, variationnel*, Masson, Paris 1988.
- [6] L. Schwartz : *Théorie des distributions*, Hermann (nouvelle édition 1973).
- [7] M. Brissaud, L. Eyraud : Théories et relations fondamentales de la piézoélectricité, chapitre III dans *Matériaux piézoélectriques, pyroélectriques, électrostrictifs et applications*, Lyon: INSA de Lyon-CAST, 1996, pp.1-40.
- [8] J.L. Lions : *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*, Springer, Berlin, 1961.