

N° d'ORDRE :09/2008-E/MT.

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE**  
**LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE**  
**HOUARI BOUMEDIEN**

**FACULTE DE MATHEMATIQUES**



**THESE**

**Présentée pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT D'ETAT**

**EN : MATHEMATIQUES**

**Spécialité : Analyse Systèmes Dynamiques**

**Par : Zoubir DAHMANI**

**Sujet**

**CONTRIBUTION AUX EQUATIONS D'EVOLUTION NON LINEAIRES**

**Soutenu le 23/12/2008, devant le jury composé de :**

Mr- A. KESSI, Professeur, USTHB.

Mr- R. BEBBOUCHI, Professeur, USTHB.

Mr- M. KIRANE, Professeur, Univ. LA ROCHELLE.

Mr- B. BENDOUKHA, Professeur, Univ. MOSTAGANEM.

Mr- M. MEDJDEN, Maître de Conférence, USTHB.

Mr- B. HEBRI, Maître de Conférence, USTHB.

Mr- A. KADEM, Maître de Conférence, Univ. SETIF.

Président

Directeur de Thèse

Co-Directeur de Thèse

Examineur

Examineur

Examineur

Examineur

---

## Remerciements

Avant tout, je remercie **DIEU** le Tout Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toute ces années de recherche et que grace à Lui ce travail de thèse a pu être réalisé. **Je Lui doit tout.**

Je tiens à exprimer ma gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué à l'accomplissement de cette thèse tout particulièrement :

Mon co-directeur de thèse Monsieur Mokhtar KIRANE dont le bon déroulement de ce travail lui est en grande partie imputable. Je le remercie du fond du coeur tout aussi pour avoir dirigé mes travaux avec talent que pour m'avoir accompagné amicalement dans son cheminement durant mon séjour à l'université de La Rochelle.

L'énergie du Professeur KIRANE, ses compétences et sa constante disponibilité sont autant de qualités que j'ai apprécié en lui et qui m'ont beaucoup aidé à mener à bien ma thèse.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Rachid BEBBOUCHI pour avoir guidé mes premiers pas dans le monde de l'analyse non standard et la théorie des perturbations singulières. Un tout grand merci pour vous, Mr Bebbouchi pour votre disponibilité et votre aide.

Je remercie le Professeur Arezki KESSI d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse et je remercie également les professeurs Belkhaled HEBRI, Berrabeh BENDOUKHA, Abelouahab KADEM et Mohamed MEJDEN pour avoir accepté de juger ce travail.

Toute thèse ayant un point de départ, Je profite de l'occasion pour exprimer ma reconnaissance au Professeur T. Sari, directeur du laboratoire MIA de l'université de Mulhouse pour son aide.

Je remercie E. Benoit, Professeur de l'université de La Rochelle, pour m'avoir accueilli, pour une longue durée, au laboratoire MIA.

Je n'oublierai pas de remercier le corps enseignant et administratif du Laboratoire LMA de l'Université de La Rochelle pour leur accueil et leur aide et en particulier N. Sari, F. Vincent et G. Wallet.

Je remercie également A. Anbar, A. Benchehida, M. Benbachir, A. Dahmani, A. El farissi, A. Kaouaz, Z. Latroch et A. Touahri pour leur disponibilité. Je n'oublie pas bien sur Abdelkader de Lille Flandre et sa grande soeur Yamina.

Je voudrais faire, maintenant, **une place toute particulière à mes parents**. Je profite de cette occasion pour leur exprimer mon attachement très profond et ma **très très** grande reconnaissance. Je remercie également mes soeurs, mes frères et mes filles Maria, Safaa et Maroua. Enfin, je termine par celle que je ne pourrai jamais remercier par des mots, je pense à ma femme Linda, ses encouragements et son soutien m'ont été précieux.

## Résumé

Cette thèse est une contribution aux équations d'évolution non linéaires. Elle est composée de cinq sections :

La première section présente une introduction aux modèles présentés dans la thèse. Elle consiste à situer nos résultats et faciliter leur compréhension globale.

La seconde section, intitulée : "Absence de solutions positives pour une classe de systèmes elliptiques" est une contribution dans le domaine des équations et systèmes d'équations elliptiques. Dans cette section, on étudie trois systèmes contenant des opérateurs non locaux s'écrivant comme des puissances fractionnaires du Laplacien. Nous montrons sous certaines conditions que les seules solutions positives pour ces systèmes sont les solutions nulles.

Dans la troisième section, on étudie un système de réaction-diffusion avec des non-linéarités de type gradient. On présente notre étude dans le cas d'un domaine infini puis dans le cas d'un domaine fini avec des conditions au bord de type Neumann. Pour ce système, on démontre un théorème d'existence et d'unicité de solutions globales. Puis, on donne un résultat sur le comportement asymptotique de ces solutions lorsque la variable temporelle tend vers l'infini.

La section quatre est composée de trois parties : la première partie est consacrée aux solutions "ondes progressives" du système étudié dans la troisième section. On donne un résultat d'existence de solutions. Ensuite, avec la méthode Tanh due à Malflet, on détermine explicitement ces fronts d'ondes pour certaines équations d'évolution tirées de la mécanique des fluides et la dynamique des populations.

La dernière partie de cette section est consacrée à un autre problème d'évolution tiré de la mécanique des fluides ; nous appliquons la méthode décompositionnelle d'Adomian à l'équation de "foam drainage" avec dérivée fractionnaire. Nous traitons deux cas différents : le premier cas est celui de l'équation du drainage avec dérivée fractionnaire par rapport à la variable temporelle et le deuxième cas est celui de l'équation du drainage avec dérivée fractionnaire par rapport à la variable spatiale.

On termine cette thèse par l'étude d'une famille à un paramètre d'équations différentielles perturbées singulièrement dont le problème réduit n'a pas unicité de solutions ; les solutions du problème perturbé qui arrivent près de l'axe des  $t$  (ensemble des points de non unicité) ont la possibilité de suivre cet axe (on dira qu'elles perdent du temps) ou d'avoir plusieurs directions possibles. En utilisant l'analyse non standard, on démontre que pour certaines valeurs du paramètre, les solutions "lentes" du problème perturbé passent près de l'axe des  $t$  sans perdre du temps et pour d'autres valeurs du paramètre, elles y restent indéfiniment.

**Mots-clé** : Comportement asymptotique, dérivée fractionnaire, équation d'évolution non linéaire, existence globale, méthode d'Adomian, méthode Tanh, non unicité, onde voyageuse, réaction-diffusion, perturbation singulière, principe du maximum, puissance fractionnaire d'opérateur.

---

## Abstract

This thesis is a contribution to the study of non linear evolution equations. It is composed of five sections :

The first section presents an introduction to the models presented in the thesis. It is to situate our results and facilitate their overall understanding.

In the second section, we consider the question of nonexistence of non trivial solutions for nonlinear elliptic systems involving fractional diffusion operators. Using a weak formulation approach, we derive sufficient conditions in terms of space dimension and systems parameters, we presented three main results associated to three different classes of systems.

In the third section, we are concerned with a non linear gradient dependant system with a balance law. Results on the existence and large time behavior of the solutions are presented.

The fourth section is composed of three parts : The first part is devoted to travelling wave solutions of the system studied in the third section. We give an existence result of solutions for this system. Then, we use the Tanh method to formally derive travelling wave solutions of some evolution equations having applications to fluid mechanics and population dynamics.

The last part of this section is devoted to another problem of evolution equation having applications to fluid mechanics, we apply the Adomian decomposition method to the foam drainage with time and space fractional derivative. As a results numerical solutions are obtained in a form of rapidly convergent series with easily computable components.

In the last section, we are concerned with a singularly perturbed problem such that the reduced problem has not uniqueness of solutions in several points. For this problem, the usual approximation techniques ( Tikonov Theorem, Short Shadow Lemma ) can not occur and we have to find other arguments to study the problem; that is the behavior of the solutions of the perturbed problem in the neighborhood of the points of non-uniqueness.

**Key-words** : Adomian Method, asymptotic behavior, fractional derivative, fractional diffusion operators, global existence, maximum principle, reaction-diffusion system, non-uniqueness, singular perturbation, Tanh method, travelling wave solutions.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>6</b>
1.1	Exemples d'équations d'évolution non linéaires . . . . .	6
1.1.1	Modèle MRCM . . . . .	6
1.1.2	Modèle de génétique des populations . . . . .	6
1.1.3	Modèle de l'optique non linéaire . . . . .	7
1.2	Objectifs de ce travail . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Absence de solutions positives pour une classe de systèmes elliptiques</b>	<b>9</b>
2.1	<b>Introduction</b> . . . . .	9
2.2	<b>Résultats préliminaires</b> . . . . .	11
2.3	<b>Résultats principaux</b> . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Un système de réaction-diffusion avec nonlinéarité dépendant du gradient</b>	<b>18</b>
3.1	Introduction . . . . .	18
3.2	Existence globale des solutions classiques . . . . .	20
3.2.1	Problème de Cauchy . . . . .	21
3.2.2	Problème de Neumann . . . . .	25
3.3	Comportement asymptotique . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Ondes voyageuses et Dérivées fractionnaires</b>	<b>31</b>
4.1	Introduction . . . . .	31
4.2	Résultats préliminaires . . . . .	32
4.3	Ondes progressives . . . . .	33
4.4	La Méthode Tanh . . . . .	38
4.5	Applications . . . . .	39
4.5.1	Equation 1 . . . . .	39
4.5.2	Equation 2 . . . . .	41
4.5.3	Equation 3 . . . . .	45
4.5.4	Equation 4 . . . . .	47
4.6	Calcul fractionnaire . . . . .	49
4.7	La Méthode ADM . . . . .	50
4.8	L'équation du drainage avec dérivée fractionnaire spatio-temporelle . . . . .	51
4.9	Résolution numérique de l'équation du drainage avec dérivée fractionnaire temporelle . . . . .	54
4.10	Résolution numérique de l'équation du drainage avec dérivée fractionnaire spatiale . . . . .	56

---

<b>5</b>	<b>Un problème de perturbation singulière</b>	<b>59</b>
5.1	Introduction . . . . .	59
5.2	Rappel de l'analyse non standard . . . . .	59
5.3	Plan de phases . . . . .	60
5.4	Résultats principaux . . . . .	60
	<b>Bibliographie</b>	<b>69</b>

# Chapitre 1

## Introduction générale

Les équations d'évolution interviennent dans de nombreux domaines de recherche tels que : la physico-chimie, la biologie, l'écologie, la mécanique des fluides, etc,...

Dans cette thèse nous nous intéressons à l'étude de quelques équations d'évolution non linéaires ainsi qu'à leurs applications en physico-chimie, en mécanique des fluides et en dynamique des populations.

### 1.1 Exemples d'équations d'évolution non linéaires

#### 1.1.1 Modèle MRCM

A la suite des travaux de R. H. Kraichnan sur la turbulence [56], U. Frish et M. Lesieur [34] ont introduit un modèle de turbulence dit modèle MRCM ( Markovian Random Coupling Model ). Ce modèle est applicable à l'équation de Burgers ( qui admet des solutions ondes progressives), à l'équation de "foam drainage" et à d'autres équations de la physique.

Le modèle MRCM associée à l'équation de Burgers est remarquablement simple sans toutefois être standard : la fonction  $u(t, x)$  qui joue le rôle d'une covariance est solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u(t, 0) - u(t, x))^2 = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

où  $\nu \geq 0$  est un paramètre de viscosité.

#### 1.1.2 Modèle de génétique des populations

L'équation

$$u_t - u_{xx} = f(u) \quad (1.2)$$

a été introduite à la fin des années 30 par Fisher [33] comme modèle de génétique des populations ( $f(u) = u(1 - u)$ ) et par Zelodovich et Frank-Kamenskii [100] en combustion. L'inconnue  $u$  représente une densité de gène dominant dans le premier cas et la température dans le second. Cette équation est considérée comme l'équation type de la théorie des ondes progressives. Elle a donné lieu au travail pionnier de Kolmogorov, Pitrovsky et Piskunov qui ont posé les bases de la théorie de la réaction-diffusion.

### 1.1.3 Modèle de l'optique non linéaire

L'équation de Schroedinger non-linéaire

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0 \quad (1.3)$$

s'obtient naturellement comme équation d'évolution de l'amplitude complexe  $u$  d'un paquet d'ondes dans un environnement faiblement non-linéaire comme un plasma, un milieu optique ou hydrodynamique.

Cette équation admet des solutions ondes voyageuses. Ces solutions "particulières" suscitent beaucoup d'intérêt pour les télécommunications à base de fibre optique.

## 1.2 Objectifs de ce travail

Cette thèse est organisée en quatre parties essentielles :

Le chapitre *II* intitulé : "Absence de solutions positives pour une classe de systèmes elliptiques" est une contribution dans le domaine des équations et systèmes d'équations elliptiques. On étudie une classe de systèmes elliptiques contenant des opérateurs s'écrivant comme des puissances fractionnaires du Laplacien [27]. Le premier système s'écrit :

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} u = |v|^q \\ (-\Delta)^{\frac{\nu}{2}} v = |u|^p; x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

On étudie aussi les systèmes :

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} u - \Delta v = |v|^q \\ (-\Delta)^{\frac{\nu}{2}} v - \Delta u = |u|^p, x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{\mu_1}{2}} |u| + (-\Delta)^{\frac{\mu_2}{2}} |v| = |v|^q \\ (-\Delta)^{\frac{\nu_1}{2}} |v| + (-\Delta)^{\frac{\nu_2}{2}} |u| = |u|^p, x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

On donne des conditions suffisantes sur  $N, \mu, \nu, \mu_i, \nu_i, p$  et  $q$  pour que ces systèmes n'admettent que des solutions triviales [27].

Dans le chapitre *III*, on s'intéresse à l'étude du système de réaction-diffusion :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = -u^n |\nabla v|^p \\ v_t - d\Delta v = u^n |\nabla v|^p \end{cases}$$

posé sur  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ , sous les hypothèses  $n > 0, d > 0, 1 \leq p \leq 2$ , avec les conditions initiales :  $u(0, x) = u_0(x) \geq 0, v(0, x) = v_0(x) \geq 0; x \in \Omega$  et les conditions aux bord :  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ .

---

Dans cette étude, on généralise des résultats antérieurs de M. Pierre [4], N. Alaa [2] et N. Boudiba [3, 4] : on démontre un théorème d'existence et d'unicité de solutions globales dans le cas d'un domaine  $\Omega$  infini puis dans le cas où  $\Omega$  est fini. Enfin, on étudie le comportement asymptotique en temps de ces solutions.

Dans le chapitre *IV*, on s'intéresse dans un premier temps aux solutions ondes progressives du système de réaction-diffusion étudié dans le chapitre précédent. Au niveau théorique, on présente un résultat d'existence de solutions à l'aide d'un théorème de V.V. Gudkov [36]. Puis on présente une étude numérique pour déterminer les solutions ondes voyageuses pour certaines équations d'évolution non linéaires tirées de la mécanique des fluides [3, 91] et la dynamique des populations [36]. L'outil fondamental utilisé est la Méthode "Tanh", voir ([63, 64, 93, 94]).

Les équations qu'on étudie sont de la forme :

$$u_t - Du_{xx} = (B_0 + B_1u)u_x + P(u),$$

où  $B_0, B_1$  sont dans  $\mathbb{R}$  et  $P(u)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Le reste de ce chapitre est consacré à l'étude numérique de l'équation de "foam drainage" avec dérivée fractionnaire spatio-temporelle [29].

Dans le dernier chapitre de cette thèse, on étudie une famille à un paramètre d'équations différentielles perturbées singulièrement dont le problème réduit n'a pas unicité de solutions en plusieurs points.

# Chapitre 2

## Absence de solutions positives pour une classe de systèmes elliptiques

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie la question de non-existence des solutions positives pour une classe de systèmes elliptiques contenant des opérateurs s'écrivant comme des puissances fractionnaires du Laplacien.

Le premier système s'écrit

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} u = |v|^q \\ (-\Delta)^{\frac{\nu}{2}} v = |u|^p, \quad \text{sur } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $p$  et  $q$  sont des nombres positifs,  $p > 1$ ,  $q > 1$ ,  $0 < \mu \leq 2$  et  $0 < \nu \leq 2$ .

La puissance fractionnaire du Laplacien  $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ ;  $0 < \alpha \leq 2$  intervient dans la modélisation des phénomènes dans des milieux avec impuretés. Cet opérateur est défini de la manière suivante :

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} v(x) = F^{-1} [|\xi|^\alpha F(v)(\xi)](x),$$

où  $F$  désigne la transformée de Fourier et  $F^{-1}$  est son inverse.

On adopte la définition suivante :

**Définition 2.1** *On dit que  $(u, v)$  est une solution faible positive du système (2.1) si*

$$(u, v) \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^N) \times L_{loc}^q(\mathbb{R}^N),$$

et

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} u (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} \Psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \Psi dx \\ \int_{\mathbb{R}^N} v (-\Delta)^{\frac{\nu}{2}} \Psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \Psi dx, \end{cases}$$

pour toute fonction test positive  $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ .

Le système (2.1) est "formellement" équivalent, sur  $\mathbb{R}^N$ , au système d'équations intégrales :

$$\begin{cases} u(x) = c_\mu \int_{\mathbb{R}^N} |x-y|^{\mu-N} v^q(y) dy \\ v(x) = c_\nu \int_{\mathbb{R}^N} |x-y|^{\nu-N} u^p(y) dy, \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $c_\mu$  et  $c_\nu$  sont deux constantes de normalisation.

Dans le cas où  $\mu = \nu = 2$ , le problème (2.1) s'appelle le système de Lane-Emden. On note ici l'apparition de deux valeurs critiques pour chacun des paramètres  $p$  et  $q$ . Ces valeurs sont  $\frac{N+2}{N-2}$  et  $\frac{N}{N-2}$  (appelées nombres de Serrin).

Dans le cas d'une seule équation

$$\Delta u + |u|^p = 0; \quad u \geq 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^N, \quad (2.3)$$

L.A. Caffarelli, B. Giddas et J. Spruck [16, 35] ont montré que lorsque  $0 < p < \frac{N+2}{N-2}$ , la seule solution classique de (2.3) est la solution nulle. Puis, D. G. De Figueiredo, P. L. Felmer, M. A. Souto, J. Serrin, H. Zou ont généralisé le résultat de L. A. Caffarelli, B. Giddas et J. Spruck à un système d'équations du type : [30, 78, 80]

$$\begin{cases} \Delta u + |v|^q = 0 \\ \Delta v + |u|^p = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Ils ont montré que si  $0 < p < \frac{N+2}{N-2}$  et  $0 < q < \frac{N+2}{N-2}$ , alors ce système n'admet pas de solutions positives.

Lorsque  $N \geq 2$ ,  $0 < \mu = \nu < N$ ,  $\frac{N}{N-\mu} < p < \frac{N+\mu}{N-\mu}$  et  $\frac{N}{N-\mu} < q < \frac{N+\mu}{N-\mu}$ , en utilisant une nouvelle méthode du plan mobile introduite par Chen- Li- Ou [19], D. Chen et L. Ma [20] ont généralisé le résultat de D. G. De Figueiredo et P. L. Felmer [30], mais leur résultat ne couvre pas le cas : " $1 < p < \frac{N}{N-\mu}$ ,  $1 < q < \frac{N}{N-\mu}$ ".

Dans [27], on donne des conditions suffisantes sur  $N, \mu, \nu, p$  et  $q$  pour que le système (2.1) n'admette que des solutions triviales.

En s'inspirant des travaux de Mitidieri et Pohosaev [67, 68], on présente aussi des résultats en utilisant une approche différente de celles adoptées précédemment.

On étudie aussi le système :

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} u - \Delta v = |v|^q \\ (-\Delta)^{\frac{\nu}{2}} v - \Delta u = |u|^p, \quad \text{sur } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (2.4)$$

Motivé par le travail de M. Kirane et M. Qafsaoui [54], on étudie la question de non existence des solutions faibles positives et on donne des conditions suffisantes pour lesquelles le système (2.4) n'admet que des solutions triviales [27].

Le dernier problème de ce chapitre est de la forme :

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{\mu_1}{2}} |u| + (-\Delta)^{\frac{\mu_2}{2}} |v| = |v|^q \\ (-\Delta)^{\frac{\nu_1}{2}} |v| + (-\Delta)^{\frac{\nu_2}{2}} |u| = |u|^p, \quad \text{sur } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $0 < \mu_i \leq 2$  et  $0 < \nu_i \leq 2$  sont des constantes ( $i = 1, 2$ ).

En utilisant les mêmes techniques que précédemment, on démontre que : si  $N < \max(\gamma, \theta)$  ;  $\gamma = \min \left\{ \frac{\nu_2 p}{p-1}, \nu_1 + \frac{\mu_2}{q-1}, \left( \frac{\mu_1}{q} + \nu_1 \right) \frac{pq}{pq-1} \right\}$  et  $\theta = \min \left\{ \frac{\mu_2 q}{q-1}, \mu_1 + \frac{\nu_2}{p-1}, \left( \frac{\nu_1}{p} + \mu_1 \right) \frac{pq}{pq-1} \right\}$ , alors toute solution  $(u, v)$  du système (2.5) est triviale [27].

## 2.2 Résultats préliminaires

**Proposition 2.1** [45] *Supposons que  $\delta \in [0, 2]$ ,  $\beta + 1 \geq 0$  et  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  ;  $\theta \geq 0$ .*

Alors, on a

$$[\theta(x)]^{\beta+1} (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \theta(x) \geq \frac{1}{\beta+2} (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} [\theta(x)]^{\beta+2}.$$

**Lemme 2.1** [54] *Soient  $X, Y, \Gamma_1, \Gamma_2, F_1, F_2$  des fonctions positives et soient  $\alpha_i$  et  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) des nombres réels positifs tels que  $\alpha_2 < \alpha_1$ ,  $\theta_2 < \theta_1$ ,  $\theta_1, \theta_3 \geq 1$  et  $\alpha_3 \theta_3 < \theta_1 \alpha_1$ . Si*

$$\begin{cases} X^{\alpha_1} \leq \Gamma_1 X^{\alpha_2} + F_1 Y^{\theta_3} \\ Y^{\theta_1} \leq F_2 X^{\alpha_3} + \Gamma_2 Y^{\theta_2}, \end{cases}$$

alors il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$X^{\theta_1 \alpha_1} \leq C \left[ \Gamma_1^{\frac{\theta_1 \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}} + \Gamma_2^{\frac{\theta_1 \theta_3}{\theta_1 - \theta_2}} F_1^{\theta_1} + (F_1^{\theta_1} F_2^{\theta_3})^{\frac{\theta_1 \alpha_1}{\theta_1 \alpha_1 - \theta_3 \alpha_3}} \right].$$

## 2.3 Résultats principaux

**Théorème 2.1** [27] *Soit  $(u, v)$  une solution faible positive du système (2.1). Si*

$$N < \max \left\{ \left( \nu + \frac{\mu}{q} \right) \frac{pq}{pq-1}, \left( \mu + \frac{\nu}{p} \right) \frac{pq}{pq-1} \right\}, \quad (2.6)$$

alors  $(u, v)$  est triviale.

**Remarque 2.1** (i) Dans le cas où  $\mu = \nu$ , la condition (2.6) s'écrit  $p < \frac{N+\mu}{\frac{N}{q}+\mu}$  ou  $q < \frac{N+\mu}{\frac{N}{p}+\mu}$ ; il suffit de voir que l'inégalité  $p < \frac{N+\mu}{\frac{N}{q}+\mu}$  est équivalente à  $N \left(1 - \frac{1}{pq}\right) < \mu + \frac{\mu}{q}$  et l'inégalité  $q < \frac{N+\mu}{\frac{N}{p}+\mu}$  est équivalente à  $N \left(1 - \frac{1}{pq}\right) < \mu + \frac{\mu}{p}$ .

Si  $1 < p < \frac{N}{N-\mu}$  et  $1 < q < \frac{N}{N-\mu}$ , alors la condition (2.6) est vérifiée. Pour démontrer ça, on peut supposer que  $q < p$ ; alors on a  $N - \mu < \frac{N}{q}$  et donc  $N < \frac{N}{q} + \mu$  d'où  $q < p < \frac{N}{N-\mu} < \frac{\frac{N}{q}+\mu}{N-\mu}$ .

(ii) Si  $\mu = \nu$  et  $p = q$ , la condition (2.6) s'écrit  $p < \frac{N}{N-\mu}$ .

(iii) Pour la démonstration de nos résultats, on introduit la fonction de troncature standard  $\Psi_0$  i.e.  $\Psi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  est une fonction décroissante telle que  $0 \leq \Psi_0 \leq 1$ ,  $r |\Psi_0'(r)| < C$ , pour tout  $r > 0$  et :

$$\Psi_0(r) = \begin{cases} 1; & \text{si } r \leq 1 \\ 0; & \text{si } r \geq 2. \end{cases}$$

### Démonstration du Théorème 2.1

De la définition, on a

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} u (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} \Psi^\beta dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \Psi^\beta dx \\ \int_{\mathbb{R}^N} v (-\Delta)^{\frac{\nu}{2}} \Psi^\beta dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \Psi^\beta dx, \end{cases} \quad (2.7)$$

pour toute fonction test positive  $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $\beta > \max(p, q)$ . En tenant compte de la proposition 2.1, on a

$$(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \Psi^\beta \leq \beta \Psi^{\beta-1} (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \Psi. \quad (2.8)$$

En utilisant (2.8) et l'inégalité de Holder, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} \Psi^\beta dx &\leq \beta \int_K u \Psi^{\frac{\beta}{p}} \Psi^{\beta-1} \Psi^{-\frac{\beta}{p}} (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} \Psi dx \\ &\leq \beta \left( \int_K |u|^p \Psi^\beta du \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_K \Psi^{(\beta-1)p' - \beta \frac{p'}{p}} \left| (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} \Psi \right|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \end{aligned}$$

où  $K := \text{supp} \Psi$  et  $p + p' = pp'$ .

De la même manière, on estime la deuxième intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^N} v (-\Delta)^{\frac{\nu}{2}} \Psi^\beta dx \leq \beta \int_K v \Psi^{\frac{\beta}{q}} \Psi^{\beta-1} \Psi^{-\frac{\beta}{q}} (-\Delta)^{\frac{\nu}{2}} \Psi dx$$

$$\leq \beta \left( \int_K |v|^q \Psi^\beta du \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_K \Psi^{(\beta-1)q' - \beta \frac{q'}{q}} \left| (-\Delta)^{\frac{\nu}{2}} \Psi \right|^{q'} dx \right)^{\frac{1}{q'}} < \infty.$$

Si on pose  $A_\beta(r, \delta) := \beta \left( \int_{\mathbb{R}^N} \Psi^{(\beta-1)r' - \beta \frac{r'}{r}} \left| (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \Psi \right|^{r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}}$ ,

alors, on peut écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \Psi^\beta dx \leq A_\beta(q, \nu) \left( \int_K |v|^q \Psi^\beta dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.9)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \Psi^\beta dx \leq A_\beta(p, \mu) \left( \int_K |u|^p \Psi^\beta dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'où

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \Psi^\beta dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \int_K |u|^p \Psi^\beta dx \right)^{\frac{1}{pq}} (A_\beta(p, \mu))^{\frac{1}{q}}. \quad (2.10)$$

De (2.9) et (2.10), on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \Psi^\beta dx \leq \left( \int_K |u|^p \Psi^\beta dx \right)^{\frac{1}{pq}} (A_\beta(q, \nu)) (A_\beta(p, \mu))^{\frac{1}{q}}.$$

Par conséquent,

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \Psi^\beta dx \right)^{1 - \frac{1}{pq}} \leq (A_\beta(q, \nu)) (A_\beta(p, \mu))^{\frac{1}{q}}.$$

Avec un raisonnement similaire, on obtient :

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \Psi^\beta dx \right)^{1 - \frac{1}{pq}} \leq (A_\beta(p, \mu)) (A_\beta(q, \nu))^{\frac{1}{q}}.$$

Maintenant, on pose  $\Psi(x) = \Psi_0(|y|^2)$  avec  $y = \frac{x}{R}$ ,  $R > 0$ .

Alors, on obtient :

$$(-\Delta_x)^{\frac{\mu}{2}} \Psi(x) = R^{-\mu} (-\Delta_y)^{\frac{\mu}{2}} \Psi_0(|y|^2).$$

Et donc on a :

$$A_\beta(p, \mu) = \beta \left( \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_0^{(\beta-1)p' - \beta \frac{p'}{p}} R^{-\mu p' + N} \left| (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} \Psi_0 \right|^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \leq CR^{-\mu + \frac{N}{p'}}, \quad (2.11)$$

tel que

$$C = \beta \left( \int_{1 \leq |y| \leq 2} \Psi_0^{(\beta-1)p' - \beta \frac{p'}{p}} (|y|^2) \left| (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} \Psi_0 (|y|^2) \right|^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Par conséquent,

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \Psi^\beta dx \right)^{1 - \frac{1}{pq}} \leq CR^\gamma$$

et

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \Psi^\beta dx \right)^{1 - \frac{1}{pq}} \leq CR^\theta,$$

où

$$\begin{cases} \gamma = -\nu + \frac{N}{q'} - \frac{\mu}{q} + \frac{N}{p'q}, \\ \theta = -\mu + \frac{N}{p'} - \frac{\nu}{p} + \frac{N}{q'p}. \end{cases}$$

Maintenant, en utilisant (2.6), on peut voir que si  $\gamma < 0$  ou  $\theta < 0$ , alors on a :

$$\begin{cases} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \Psi^\beta dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 0 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \Psi^\beta dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q dx = 0, \end{cases}$$

d'où  $(u, v)$  est triviale.

**Remarque 2.2** *Dans le cas d'une seule équation*

$$(-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} u = |u|^p; \quad u \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N,$$

en utilisant les mêmes techniques que celles du théorème 2.1, on peut démontrer que si  $p < \frac{N}{N-\mu}$ , alors  $u$  est triviale.

Le deuxième résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant :

**Théorème 2.2** [27] *Soit  $(u, v)$  une solution faible positive du système (2.4). Si*

$$N < \max \{ \gamma, \theta \}, \quad (2.12)$$

$$\text{où } \gamma = \min \left\{ \frac{2p}{p-1}, \nu + \frac{2}{q-1}, \left( \frac{\mu}{q} + \nu \right) \frac{pq}{pq-1} \right\}$$

et

$$\theta = \min \left\{ \frac{2q}{q-1}, \mu + \frac{2}{p-1}, \left( \frac{\nu}{p} + \mu \right) \frac{pq}{pq-1} \right\},$$

alors  $(u, v)$  est triviale.

### Démonstration du Théorème 2.2

Supposons que  $(u, v)$  soit une solution faible positive du système (2.4).

On a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} \Psi^\beta dx - \int_{\mathbb{R}^N} v \Delta \Psi^\beta dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \Psi^\beta dx$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} v (-\Delta)^{\frac{\nu}{2}} \Psi^\beta dx - \int_{\mathbb{R}^N} u \Delta \Psi^\beta dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \Psi^\beta dx,$$

où  $0 \leq \Psi^\beta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ , avec  $\beta > \max\{p', q'\}$ .

Avec le même raisonnement que précédemment, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \Psi^\beta dx \leq A_\beta(q, \nu) \left( \int_K |v|^q \Psi^\beta dx \right)^{\frac{1}{q}} + A_\beta(p, 2) \left( \int_K |u|^p \Psi^\beta dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \Psi^\beta dx \leq A_\beta(p, \mu) \left( \int_K |u|^p \Psi^\beta dx \right)^{\frac{1}{p}} + A_\beta(q, 2) \left( \int_K |v|^q \Psi^\beta dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Maintenant, on pose :

$$\begin{cases} X := \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \Psi^\beta dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ Y := \left( \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \Psi^\beta dx \right)^{\frac{1}{q}}, \end{cases}$$

et donc les deux dernières inégalités s'écrivent :

$$\begin{cases} X^p \leq A_\beta(p, 2) X + A_\beta(q, \nu) Y \\ Y^q \leq A_\beta(p, \mu) X + A_\beta(q, 2) Y. \end{cases}$$

En utilisant le lemme 2.1, on obtient :

$$X^{pq} \leq C \left\{ (A_\beta(p, 2))^{\frac{pq}{p-1}} + (A_\beta(q, \nu))^q (A_\beta(q, 2))^{\frac{q}{q-1}} + (A_\beta(q, \nu))^q (A_\beta(p, \mu))^{\frac{pq}{pq-1}} \right\}$$

et

$$Y^{pq} \leq C \left\{ (A_\beta(q, 2))^{\frac{pq}{p-1}} + (A_\beta(p, \mu))^p (A_\beta(p, 2))^{\frac{p}{p-1}} + (A_\beta(p, \mu))^p (A_\beta(q, \nu))^{\frac{pq}{pq-1}} \right\}.$$

Maintenant en utilisant l'inégalité (2.11), on déduit que

$$X^{pq} \leq C (R^{\gamma_1} + R^{\gamma_2} + R^{\gamma_3}),$$

où

$$\begin{cases} \gamma_1 = \left(-2 + \frac{N}{p'}\right) \frac{pq}{p-1}, \\ \gamma_2 = \left(-\nu + \frac{N}{q'}\right) q + \left(-2 + \frac{N}{q'}\right) \frac{q}{q-1}, \\ \gamma_3 = \left[ \left(-\nu + \frac{N}{q'}\right) q + \left(-\mu + \frac{N}{p'}\right) \right] \frac{pq}{pq-1}, \end{cases}$$

et

$$Y^{pq} \leq C (R^{\theta_1} + R^{\theta_2} + R^{\theta_3}),$$

avec

$$\begin{cases} \theta_1 = \left(-2 + \frac{N}{q'}\right) \frac{pq}{q-1}, \\ \theta_2 = \left(-\mu + \frac{N}{p'}\right) p + \left(-2 + \frac{N}{p'}\right) \frac{p}{p-1}, \\ \theta_3 = \left[ \left(-\mu + \frac{N}{p'}\right) p + \left(-\nu + \frac{N}{q'}\right) \right] \frac{pq}{pq-1}. \end{cases}$$

En utilisant la condition (2.12), on voit que si  $\max\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} < 0$  ou  $\max\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\} < 0$ , et par passage à la limite lorsque  $R$  tend vers  $+\infty$ , on conclut que  $(u, v)$  est triviale.

Le dernier résultat de ce chapitre est le théorème suivant :

**Théorème 2.3** [27] *Etant donné une solution faible positive  $(u, v)$  du système (2.5). Si*

$$N < \max\{\gamma, \theta\}, \tag{2.13}$$

$$\text{où } \gamma = \min \left\{ \frac{\nu_2 p}{p-1}, \nu_1 + \frac{\mu_2}{q-1}, \left( \frac{\mu_1}{q} + \nu_1 \right) \frac{pq}{pq-1} \right\}$$

et

$$\theta = \min \left\{ \frac{\mu_2 q}{q-1}, \mu_1 + \frac{\nu_2}{p-1}, \left( \frac{\nu_1}{p} + \mu_1 \right) \frac{pq}{pq-1} \right\},$$

alors  $(u, v)$  est triviale.

### Démonstration du Théorème 2.3

Soit  $(u, v)$  une solution faible positive du système (2.5). Avec la même méthode que celle utilisée dans la démonstration du Théorème 2.2, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \Psi^\beta dx \leq A_\beta(q, \nu_1) \left( \int_K |v|^q \Psi^\beta dx \right)^{\frac{1}{q}} + A_\beta(p, \nu_2) \left( \int_K |u|^p \Psi^\beta dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \Psi^\beta dx \leq A_\beta(p, \mu_1) \left( \int_K |u|^p \Psi^\beta dx \right)^{\frac{1}{p}} + A_\beta(q, \mu_2) \left( \int_K |v|^q \Psi^\beta dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Il s'ensuit que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \Psi^\beta dx \right)^{pq} \leq C \left\{ (A_\beta(p, \nu_2))^{\frac{pq}{p-1}} + (A_\beta(q, \nu_1))^q (A_\beta(q, \mu_2))^{\frac{q}{q-1}} + (A_\beta(q, \nu_1))^q (A_\beta(p, \mu_1))^{\frac{pq}{pq-1}} \right\},$$

et

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \Psi^\beta dx \right)^{pq} \leq C \left\{ (A_\beta(q, \mu_2))^{\frac{pq}{q-1}} + (A_\beta(p, \mu_1))^p (A_\beta(p, \nu_2))^{\frac{p}{p-1}} + (A_\beta(p, \mu_1))^p (A_\beta(q, \nu_1))^{\frac{pq}{pq-1}} \right\}.$$

Avec les même arguments que ceux du Théorème 2.2 ( en particulier le lemme 2.1), on obtient

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \Psi^\beta dx \right)^{pq} \leq C \left( R^{\gamma'_1} + R^{\gamma'_2} + R^{\gamma'_3} \right),$$

où

$$\begin{cases} \gamma'_1 = \left( -\nu_2 + \frac{N}{p'} \right) \frac{pq}{p-1}, \\ \gamma'_2 = \left( -\nu_1 + \frac{N}{q'} \right) q + \left( -\mu_2 + \frac{N}{q'} \right) \frac{q}{q-1}, \\ \gamma'_3 = \left[ \left( -\nu_1 + \frac{N}{q'} \right) q + \left( -\mu_1 + \frac{N}{p'} \right) \right] \frac{pq}{pq-1}, \end{cases}$$

et

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \Psi^\beta dx \right)^{pq} \leq C \left( R^{\theta'_1} + R^{\theta'_2} + R^{\theta'_3} \right),$$

où

$$\begin{cases} \theta'_1 = \left( -\mu_2 + \frac{N}{q'} \right) \frac{pq}{q-1}, \\ \theta'_2 = \left( -\mu_1 + \frac{N}{p'} \right) p + \left( -\nu_2 + \frac{N}{p'} \right) \frac{p}{p-1}, \\ \theta'_3 = \left[ \left( -\mu_1 + \frac{N}{p'} \right) p + \left( -\nu_1 + \frac{N}{q'} \right) \right] \frac{pq}{pq-1}. \end{cases}$$

Prenons  $\max \{\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3\} < 0$  ou  $\max \{\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3\} < 0$ , alors lorsque on fait tendre  $R$  vers  $+\infty$ , on conclut que  $u = v = 0$ .

# Chapitre 3

## Un système de réaction-diffusion avec nonlinéarité dépendant du gradient

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un système de réaction-diffusion du type

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = f(u, v) \\ v_t - d\Delta v = g(u, v), \end{cases} \quad (*)$$

où les non-linéarités  $f$  et  $g$  dépendent du gradient  $\nabla v$ .

Les systèmes du type  $(*)$  ont été largement étudiés dans la littérature, voir par exemple [12, 15, 18, 23, 37, 43, 46, 47, 48, 52, 55, 65, 72] et autres.

Sur un domaine borné  $\Omega$  et  $g(u, v) = -f(u, v) = uv^m$ , avec  $m \geq 1$ , dans le cas des conditions homogènes de Dirichlet ou de Neumann, les solutions de  $(*)$  sont globales, et lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , la solution  $(u(t, x), v(t, x))$  converge uniformément dans  $\bar{\Omega}$  vers un vecteur constant  $(k_1, k_2)$  vérifiant  $k_1 \geq 0$ ,  $k_2 \geq 0$  et  $k_1 k_2 = 0$ , voir K. Masuda [66].

Aussi, sur un domaine borné  $\Omega$ , le système (à matrice de diffusion triangulaire) :

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = f(u, v) \\ v_t - b\Delta u - d\Delta v = g(u, v), \end{cases} \quad (K1)$$

avec les conditions au bord de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \quad (K2)$$

tels que  $u_0(x) = u(0, x)$ ,  $v_0(x) = v(0, x)$ ,  $b \geq 0$ ,  $a > d$ ,  $v_0 > \frac{b}{a-d}u_0 \geq 0$ ,  $g(u, v) = -f(u, v) = uh(v)$  et  $h(s)$  est une fonction différentiable positive ou nulle sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+h(s))}{s} = 0$ , a été étudié par M. Kirane. Il a démontré l'existence globale des solutions de  $(K_1) - (K_2)$ . Aussi, il a démontré que les solutions convergent uniformément dans  $\bar{\Omega}$  vers un vecteur constant  $(k_1, k_2)$  vérifiant  $k_1 \geq 0$ ,  $k_2 \geq 0$  et  $k_1 h(k_2) = 0$ , voir [51].

J. I. Kanel et M. Kirane [47] ont étudié le système  $(K_1) - (K_2)$  avec les conditions suivantes :  $d - a > b$ ,  $d > a$ ,  $0 \leq u(0, x) \leq M$ ,  $0 \leq v(0, x) \leq M$ ,  $g(u, v) = -f(u, v) \leq 0$ ,  $f(0, v) = 0$ ,  $f(u, v) \leq K\Phi(u)e^{\sigma v}$ ;  $K, \sigma \in \mathbb{R}$  et  $\Phi(s)$  est une fonction continue positive ou nulle et localement lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ . Ils ont démontré l'existence globale des solutions de  $(K_1) - (K_2)$ . Ils ont aussi démontré que les solutions convergent uniformément dans  $\bar{\Omega}$  vers un vecteur constant  $(0, k_2)$  tel que  $f(0, k_2) = 0$ . (Voir aussi [46] pour le cas :  $a > d$ ,  $f(u, v) = h(u)g(v)$ ) ■

L. Berlyand et J. Xin [12] ont étudié le système  $(*)$  pour une classe étroite des données initiales.

J. Bricomt, A. Kupiainen et J. Xin dans [15] ont étudié le système  $(*)$  avec  $g(u, v) = -f(u, v) = uv^2$  sur l'axe réel. Ils ont montré, pour des données initiales  $u_0, v_0$  positives décroissant spatialement vers zéro avec une vitesse suffisamment grande, que les solutions  $(u, v)$  de  $(*)$  convergent, pour  $t \rightarrow +\infty$ , vers la solution du système réduit

$$\begin{cases} u_t = -uv^2 \\ v_t = uv^2. \end{cases}$$

Dans le cas  $g(u, v) = -f(u, v) = uv^m$ , P. Collet et J. Xin [23] ont démontré l'existence globale de la solution du système

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = -uv^m, x \in \mathbb{R}^n \\ v_t - d\Delta v = uv^m, x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

sous les conditions initiales :

$$u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x); x \in \mathbb{R}^n,$$

où  $a > 0, d > 0, n \geq 1, m \geq 0$  est un entier naturel,  $u_0$  et  $v_0$  sont positives, bornées et uniformément continues sur  $\mathbb{R}^n$ .

Dans le cas de la réaction d'Arrhenius ( $g = -f = ue^{-Ev}$ ;  $E > 0$ ), il ya beaucoup de travaux sur les solutions globales et la bornitude uniforme de  $v$ , voir J. Avrin [8], S. Badraoui [10], B. Larrourou [59].

Dans le cas où les non-linéarités  $f$  et  $g$  dépendent des gradients, N. Boudiba [13, 14] a étudié le problème

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = f(x, t, u, v, \nabla u, \nabla v); \text{ sur } Q_T \\ v_t - d_2\Delta v = g(x, t, u, v, \nabla u, \nabla v) \\ u(x, 0) = u_0, v(x, 0) = v_0(x); \text{ sur } \Omega \\ u = v = 0; \text{ sur } \Sigma_T, \end{cases}$$

avec les conditions suivantes :

a)  $\Omega$  est borné dans  $\mathbb{R}^N$ .

b)  $(f + g)(x, t, u, v, r, s) \leq L_1(u + v + 1)$ ,  $\forall u, v \geq 0$ ,  $\forall r, s \in \mathbb{R}^N$ ,  $(x, t) \in Q_T$  et  $L_1$  est un réel positif ou nul.

- c)  $f(x, t, u, v, r, s) \leq L_2(u + v + 1)$ ,  $\forall u, v \geq 0$ ,  $\forall r, s \in \mathbb{R}^N$  et  $L_2$  est un réel positif ou nul.  
d)  $(|f| + |g|)(x, t, u, v, \nabla u, \nabla v) \leq C(|u|, |v|)[1 + |\nabla u|^m + |\nabla v|^m]$ ,  $1 \leq m < 2$  et  
 $C : [0, \infty[ \times [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  est une fonction vérifiant :  $C(y', z') - C(y, z') \geq C(y', z) - C(y, z)$   
pour tout  $y' \geq 0, z' \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, y' \geq y$  et  $z' \geq z$ .

Elle a démontré l'existence des solutions faibles dans le cas où  $u_0$  et  $v_0$  sont  $L^1$ .

Dans le cas d'une seule équation ( $d_1 = d_2, f = g$ ), des résultats d'existence ont été démontrés pour le cas elliptique, voir [7] et [11]. L'équation parabolique correspondante a été étudiée par beaucoup d'auteurs, voir par exemples [6, 13, 58].

Notre travail traite un système de réaction-diffusion donné sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  où  $f$  et  $g$  dépendent de  $\nabla v$ .

Le système est le suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = -u^n |\nabla v|^p \\ v_t - d\Delta v = u^n |\nabla v|^p, \end{cases} \quad (3.1)$$

avec les conditions initiales

$$u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.2)$$

et les conditions au bord ( dans le cas où  $\Omega$  est borné de  $\mathbb{R}^N$  )

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \quad (3.3)$$

sous les hypothèses :

$n > 0, d > 0, 1 \leq p \leq 2$ ,  $u_0$  et  $v_0$  sont positives et bornées.

L'étude de ce système est délicate car elle nécessite des estimations a priori sur  $u$  et  $v$  ainsi que sur  $|\nabla u|$  et  $|\nabla v|$ .

On va s'intéresser, dans un premier temps, à l'existence globale des solutions classiques de ce système dans le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . Puis, on démontre l'existence globale des solutions dans le cas où  $\Omega$  est borné dans  $\mathbb{R}^N$ . Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, on étudie le comportement asymptotique en temps de ces solutions.

## 3.2 Existence globale des solutions classiques

Dans ce paragraphe, on établit l'existence globale de la solution classique pour le système (3.1).

L'existence locale des solutions classiques et positives sur un intervalle maximal  $(0, T_{\max})$  est standard, voir par exemple [40, 72]. Pour montrer l'existence globale, il suffit de montrer que les solutions et leurs gradients restent bornées sur  $(0, T_{\max})$ .

**Remarque 3.1** *Par solution classique, nous entendons une solution  $(u, v)$  appartenant à*

*$C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, T_{\max}[) \times C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, T_{\max}[)$  et vérifiant (3.1) – (3.2).*

### 3.2.1 Problème de Cauchy

#### Positivité de la solution

**Théorème 3.1** [26] *Sous les hypothèses  $u_0(x) \geq 0, v_0(x) \geq 0; x \in \mathbb{R}^N$ , la positivité de la solution classique  $(u, v)$  du problème (3.1) – (3.2) est préservée au cours du temps. Plus précisément, nous avons :*

$$u(t, x) \geq 0, \quad v(t, x) \geq 0; \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^N.$$

#### Démonstration

Comme  $u_0(x) \geq 0, v_0(x) \geq 0, f(0, v) = 0, f(u, 0) = 0; x \in \mathbb{R}^N$ , on a alors  $u(t, x) \geq 0$ , et  $v(t, x) \geq 0; t > 0, x \in \mathbb{R}^N$ .

#### Majoration de la solution

**Théorème 3.2** [26] *Soit  $p = 2$  et soit  $(u, v)$  la solution classique du problème (3.1) – (3.2) telle que*

$$i) \quad u_0(x) \geq 0, \quad v_0(x) \geq 0,$$

*et*

$$ii) \quad u_0(x), v_0(x) \text{ sont bornées sur } \mathbb{R}^N, \text{ telles que } C_1 := \sup_{\mathbb{R}^N} u_0(x), \quad C_2 := \sup_{\mathbb{R}^N} v_0(x).$$

*Alors sous la condition  $4\pi C_1^n C_2 \Gamma^2 \left(\frac{N+1}{2}\right) \leq \Gamma^2 \left(\frac{N}{2}\right) d$ , la solution  $(u, v)$  est globale.*

#### Démonstration

On va chercher des estimations a priori sur  $u$  et  $v$  ainsi que sur  $|\nabla u|$  et  $|\nabla v|$ .

On considère le problème auxiliaire suivant :

$$L_\lambda w \quad : \quad = w_t - \lambda \Delta w = b \nabla w; \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^N \tag{3.4}$$

$$w(0, x) \quad = \quad w_0(x) \in L^\infty, \tag{3.5}$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel à choisir convenablement par la suite,

$b^T = (b_1(t, x), b_2(t, x), \dots, b_N(t, x)); b_i(t, x)$  sont continues pour  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$  et  $w$  est une solution classique de (3.4).

**Lemme 3.1** [79] *On suppose que :  $w_t, \nabla w, w_{x_i x_i}; i = 1 \dots N$ , sont continues, telles que*

$$L_\lambda(w) \leq 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$$

et  $w(t, x)$  satisfait (3.5).

Alors, on a

$$w(t, x) \leq C := \sup_{\mathbb{R}^N} w_0(x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N.$$

Maintenant, on considère le problème (3.1) – (3.2). D'après le principe du maximum [74, 79], on a

$$u \leq C_1 = \sup_{\mathbb{R}^N} u_0(x).$$

Donc  $u$  est bornée uniformément.

Passons maintenant à la recherche d'une estimation sur  $v$ .

On pose

$$w = e^{\lambda v} - 1.$$

Alors, on a :

$$w_t = \lambda e^{\lambda v} v_t,$$

$$w_{x_i} = \lambda e^{\lambda v} v_{x_i},$$

$$w_{x_i x_i} = \lambda^2 e^{\lambda v} |v_{x_i}|^2 + \lambda e^{\lambda v} v_{x_i x_i},$$

et donc

$$\Delta w = \lambda^2 e^{\lambda v} |\nabla v|^2 + \lambda e^{\lambda v} \Delta v,$$

d'où

$$\begin{aligned} w_t - d\Delta w &= \lambda e^{\lambda v} v_t - d\lambda^2 e^{\lambda v} |\nabla v|^2 - d\lambda e^{\lambda v} \Delta v \\ &= \lambda e^{\lambda v} (v_t - d\Delta v) - \lambda^2 d e^{\lambda v} |\nabla v|^2 \\ &= \lambda e^{\lambda v} [u^n |\nabla v|^2 - d\lambda |\nabla v|^2]. \end{aligned}$$

En choisissant  $\lambda$  tel que  $d\lambda > C_1^n$ , alors d'après le lemme 3.1, on a

$$w(t, x) \leq C = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} e^{\lambda v_0(x)} - 1, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N.$$

D'où l'estimation de  $v$ .

Cherchons maintenant une estimation a priori pour  $|\nabla v|$ .

On réécrit la deuxième équation de (3.1) sous la forme

$$L_d v + kv = kv + u^n |\nabla v|^2. \quad (3.6)$$

On pose  $w = e^{kt}v$ , on a alors

$$w_t = ke^{kt}v + e^{kt}v_t,$$

et

$$\Delta w = e^{kt}\Delta v.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} L_d w &= w_t - d\Delta w \\ &= e^{kt}(kv + v_t - d\Delta v) \\ &= e^{kt}(kv + L_d v) \\ &= e^{kt}(kv + u^n |\nabla v|^2); \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

De plus,

$$w(0, x) = e^{k \cdot 0}v(0, x) = v_0(x).$$

Soit maintenant

$$G_\lambda := G_\lambda(t - \tau, x - z) = \frac{1}{(4\pi\lambda(t - \tau))^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x-z|^2}{4\lambda(t-\tau)}} \quad (3.7)$$

la solution fondamentale de  $L_\lambda$ .

On a alors

$$w(t, x) = e^{kt}v(t, x) = v^0(t, x) + \int_{Q_t} G_d(t - \tau, x - z) e^{k\tau} (kv + u^n |\nabla v|^2) d\tau dz. \quad (3.8)$$

Cette formule est équivalente à

$$v(t, x) = e^{-kt}v^0(t, x) + \int_{Q_t} e^{-k(t-\tau)} G_d(t - \tau, x - z) (kv + u^n |\nabla v|^2) d\tau dz, \quad (3.9)$$

où  $Q_t = (0, t) \times \mathbb{R}^N$  et  $v^0(t, x)$  est la solution du problème homogène

$$\begin{cases} L_d v^0 = 0 \\ v^0(0, x) = v_0(x). \end{cases}$$

De (3.9), on obtient

$$\nabla v = e^{-kt} \nabla v^0 + \int_{Q_t} e^{-k(t-\tau)} \nabla_x G_d(t-\tau, x-z) (kv + u^n |\nabla v|^2) d\tau dz. \quad (3.10)$$

Maintenant, on pose  $v_1 = \sup |\nabla v|$  et  $v_1^0 = \sup |\nabla v^0|$ , sur  $Q_t$ .

De (3.10), on obtient

$$v_1 \leq v_1^0 + (kC_2 + C_1^n v_1^2) \int_0^t e^{-k(t-\tau)} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_x G_d(t-\tau, x-z)| dz \right) d\tau. \quad (3.11)$$

Comme

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_x G_d(t-\tau, x-z)| dz = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x-z|}{2d(t-\tau)} |G_d(t-\tau, x-z)| dz, \quad (3.12)$$

alors, si on pose  $r = |x-z| = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \dots + (x_N - z_N)^2}$ , on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_x G_d| dz = \int_0^\infty \frac{r w_N}{2d(t-\tau)} \frac{1}{(4\pi d(t-\tau))^{N/2}} e^{-\frac{r^2}{4d(t-\tau)}} r^{N-1} dr; \quad w_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}.$$

Maintenant on pose  $\frac{r}{2\sqrt{d(t-\tau)}} = \rho$ .

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_x G_d| dz &= \int_0^\infty \frac{w_N \rho^N}{\pi^{N/2} \sqrt{d(t-\tau)}} e^{-\rho^2} d\rho \\ &= \frac{w_N}{\pi^{N/2} \sqrt{d(t-\tau)}} \int_0^\infty \rho^N e^{-\rho^2} d\rho \\ &= \frac{w_N \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{2\pi^{N/2} \sqrt{d(t-\tau)}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$v_1 \leq v_1^0 + (kC_2 + C_1^n v_1^2) \frac{\chi}{\sqrt{d}} \int_0^t \frac{e^{-k(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad \text{où } \chi = \frac{\Gamma(\frac{N+1}{2})}{\Gamma(\frac{N}{2})}.$$

On sait que

$$\int_0^t \frac{e^{-k(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \leq \sqrt{\frac{\pi}{k}}. \quad (3.13)$$

Alors, si on pose  $\sqrt{k} = s$ , on aboutit à :

$$v_1 \leq v_1^0 + \left( sC_2 + \frac{C_1^n v_1^2}{s} \right) \chi \sqrt{\frac{\pi}{d}}. \quad (3.14)$$

Maintenant, on minimise le second membre de (3.14) par rapport à  $s$ . On obtient

$$v_1 \leq v_1^0 + 2\chi \sqrt{\frac{\pi}{d}} (C_2 C_1^n v_1^2)^{1/2}. \quad (3.15)$$

Par hypothèse, on a :

$$4C_2 C_1^n \leq d\pi^{-1} \chi^{-2}. \quad (3.16)$$

D'où l'estimation de  $|\nabla v|$ .

Avec le même raisonnement, on obtient de la première équation de (3.1) que

$$u_1 := \sup_{Q_t} |\nabla u| \leq C_1 + 2C_1 \chi \sqrt{\frac{\pi}{d}} v_1 \leq K, \quad \text{où } K \text{ est une constante.} \quad (3.17)$$

Les estimations sont indépendantes de  $t$ , donc  $T_{Max} = +\infty$ .

### 3.2.2 Problème de Neumann

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au problème :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = -u^n |\nabla v|^2 \\ v_t - d\Delta v = u^n |\nabla v|^2, \end{cases} \quad (3.18)$$

posé sur  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ , où  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ , avec :

- les conditions au bord de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0; \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \quad (3.19)$$

- et les conditions initiales

$$u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x); x \in \Omega. \quad (3.20)$$

On suppose, que  $u_0, v_0$  sont dans l'espace de Holder  $C^{2,\alpha}(\Omega)$ .

**Théorème 3.3** [26] *Soient  $(u_0, v_0)$  dans  $C^{2,\varepsilon}(\Omega) \times C^{2,\varepsilon}(\Omega)$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ . Alors le système (3.18) – (3.20) admet une solution globale.*

**Remarque 3.2** *Pour démontrer ce théorème, il suffit de borner uniformément  $u$  et  $v$  ainsi que  $|\nabla v|$  et  $|\nabla u|$ .*

**Lemme 3.2** [26] *Pour tout  $t \in ]0, T_{Max}[$ , on a*

$$0 \leq u(t, x) \leq M; x \in \Omega,$$

et

$$0 \leq v(t, x) \leq M; x \in \Omega.$$

### Démonstration

Comme  $u_0(x) \geq 0$  et  $f(0, v) = 0$ , on a alors  $u \geq 0$ .

On a aussi  $v \geq 0$ , du fait que  $v_0(x) \geq 0$  et  $f(u, 0) = 0$ .

De plus, on a  $u_t - \Delta u < 0$ , alors d'après le principe du maximum, on conclut que

$$u(t, x) \leq M, \text{ sur } Q_T.$$

Posons maintenant  $w = e^{\lambda v} - 1$ , avec  $d\lambda \geq M_1^n$ ;  $M_1 := \text{Max}_{x \in \Omega} u_0(x)$  et  $w_0(x) = e^{\lambda v_0(x)} - 1$

Alors, on obtient :

$$\begin{cases} w_t - d\Delta w = \lambda |\nabla v|^2 (u^n - d\lambda) e^{\lambda v}, \text{ sur } Q_T \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \text{ sur } ]0, T[ \times \partial\Omega. \end{cases}$$

Comme  $d\lambda > M_1^n$ , alors d'après le principe de maximum, on a

$$0 \leq w(t, x) \leq |w_0|_\infty.$$

D'où

$$v(t, x) \leq \frac{1}{\lambda} \ln(|w_0|_\infty + 1) \leq Cste. < \infty.$$

Pour obtenir des estimations sur  $|\nabla v|$ , on utilise les techniques de Tomi [82] et von Wahl [86].

**Lemme 3.3** [26] *Soit  $(u, v)$  une solution du problème (3.18) – (3.20) sur son intervalle maximal d'existence  $[0, T_{Max}[$ . Alors il existe une constante  $C$  telle que*

$$\|u\|_{L^\infty([0, T[, W^{2, q}(\Omega))} \leq C$$

et

$$\|v\|_{L^\infty([0, T[, W^{2, q}(\Omega))} \leq C.$$

### Démonstration

On introduit la fonction

$$f_{\sigma, \varepsilon}(t, x, u, \nabla v) = \sigma u^n(t, x) \frac{\varepsilon + |\nabla v|^2}{1 + \varepsilon |\nabla v|^2}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad 0 < \sigma < 1.$$

Il est clair que

$$|f_{\sigma, \varepsilon}(t, x, u, \nabla v)| \leq C(1 + |\nabla v|^2),$$

et le problème

$$v_t - d\Delta v = f_{\sigma, \varepsilon}(t, x, u, \nabla v)$$

admet une solution globale  $v_{\sigma, \varepsilon}$  différentiable par rapport à  $\sigma$ , de plus, lorsque  $\sigma$  tend vers 1 et  $\varepsilon$  tend vers 0,  $v_{\sigma, \varepsilon}$  tend vers la solution  $v$  uniformément sur tout compact de l'intervalle  $[0, T_{Max}[$ , voir [58].

La fonction  $w_\sigma := \frac{\partial v_{\sigma, \varepsilon}}{\partial \sigma}$  vérifie l'équation

$$\partial_t w_\sigma - d\Delta w_\sigma = u^n(t, x) \frac{\varepsilon + |\nabla v_\sigma|^2}{1 + \varepsilon |\nabla v_\sigma|^2} - 2\sigma u^n \frac{(\varepsilon^2 - 1) \nabla v_\sigma \cdot \nabla w_\sigma}{(1 + \varepsilon |\nabla v_\sigma|^2)^2}.$$

De plus, on a

$$\|w_\sigma\|_{L^\infty([0, T[, W^{2, p}(\Omega))} \leq C \left(1 + \|v_\sigma\|_{W^{2, p}(\Omega)}\right).$$

Par application de l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\|v_\sigma\|_{L^\infty([0,T],W^{2,p}(\Omega))} \leq Ce^{c\sigma}.$$

Par passage à la limite ( $\sigma \rightarrow 1$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), on obtient

$$\|v\|_{L^\infty([0,T],W^{2,p}(\Omega))} \leq C.$$

D'autre part, le théorème d'injection de Sobolev implique que  $v \in C^{1,\alpha}(\Omega)$  et donc  $|\nabla v| \in L^\infty(\Omega)$ .

De la même manière, on peut borner uniformément  $|\nabla u|$ .

En conclusion, la solution  $(u, v)$  du problème (3.18) – (3.20) est globale ;  $T_{Max} = +\infty$ .

### 3.3 Comportement asymptotique

Dans ce paragraphe, on étudie le comportement asymptotique en  $t$  de la solution globale du problème (3.18) – (3.20). On a

**Théorème 3.4** [26] *Sous les hypothèses du théorème 3.3, la solution  $(u, v)$  converge uniformément en  $x$  vers un vecteur constant  $(k_1, k_2)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , et*

$$k_1 + k_2 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} [u_0(x) + v_0(x)] dx.$$

#### Démonstration du Théorème 3.4

Remarquons d'abord que

$$(i) \int_{Q_T} |\nabla u|^2 dxdt < \infty,$$

et

$$(ii) \int_{Q_T} |\nabla v|^2 dxdt < \infty.$$

Pour démontrer (i), il suffit d'intégrer la 1<sup>ère</sup> équation de (3.1) sur  $Q_T$  pour obtenir

$$\int_{Q_T} u^n |\nabla v|^2 dxdt < \infty.$$

Multiplions cette 1<sup>ère</sup> équation par  $u$  et intégrons sur  $Q_T$ , on obtient

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{Q_T} |\nabla u|^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_0^2 dx,$$

et donc

$$\int_{Q_T} |\nabla u|^2 dx dt < \infty.$$

(ii) Même raisonnement.

Remarquons aussi que

$$\int_{\Omega} (u(T, x) + v(T, x)) dx = \int_{\Omega} (u_0(x) + v_0(x)) dx; \quad T > 0. \quad (3.21)$$

Pour obtenir (3.21), on additionne les deux équations du système (3.1), on intègre sur  $Q_T$ , et on utilise le théorème de Gauss pour transformer les termes  $\Delta u$  et  $\Delta(v)$  à la lumière de la condition de Neumann (3.3).

On intègre la première équation du système (3.1) sur  $\Omega$ , on constate que la fonction :

$$t \rightarrow \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(t, x) dx \text{ est décroissante.}$$

Comme cette fonction est bornée, donc elle admet une limite :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(t, x) dx = k_1. \quad (3.22)$$

La fonction  $t \rightarrow \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v(t, x) dx$  est croissante et bornée.

Donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v(t, x) dx = k_2 \text{ existe.} \quad (3.23)$$

D'autre part,  $\bigcup_{t \geq \delta} \{(u(t), v(t))\}$  sont relativement compactes dans  $C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$ , (voir [10]); donc, il existe une suite  $(t_n)_{n \geq 0}$ , telle que, pour  $t_n \rightarrow \infty$ , on ait :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(t_n) = u_s \text{ dans } C(\overline{\Omega}), \quad (3.24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(t_n) = v_s \text{ dans } C(\overline{\Omega}). \quad (3.25)$$

On a  $w^+(u_0, v_0) = (u_s, v_s)$  où  $w^+(u_0, v_0)$  est l'ensemble  $w$ -limite de  $(u_0, v_0)$ . Donc  $(u_s, v_s)$  est la solution stationnaire du système (3.18) – (3.20). ( Voir [51, 53]).

On sait que la solution  $(u_s, v_s)$  satisfait au système elliptique :

$$-\Delta u_s = -u_s^n |\nabla v_s|^2; \text{ sur } \Omega, \quad (3.26)$$

$$-d\Delta v_s = u_s^n |\nabla v_s|^2; \text{ sur } \Omega, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial \nu} = \frac{\partial v_s}{\partial \nu} = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \quad (3.28)$$

on multiplie donc l'équation (3.26) par  $u_s$  et on intègre sur  $\Omega$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} |\nabla u_s|^2 dx = - \int_{\Omega} u_s^{n+1} |\nabla v_s|^2 dx,$$

et donc :

$$|\nabla u_s| = |\nabla v_s| = 0,$$

ce qui implique que  $u_s = k_1$  et  $v_s = k_2$ .

Comme (3.21) est vérifiée, on a alors

$$k_1 + k_2 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} [u_0(x) + v_0(x)] dx.$$

# Chapitre 4

## Ondes voyageuses et Dérivées fractionnaires

### 4.1 Introduction

Ce chapitre est composé de trois parties : la première partie est consacrée à une classe spéciale de solutions des équations d'évolution non linéaires ; ce sont les ondes progressives. On s'intéresse, dans un premier temps, à l'existence de ces solutions pour le système de réaction-diffusion (3.1). Ensuite, avec la méthode Tanh [63, 64, 94], on détermine explicitement ces fronts d'ondes pour les équations d'évolution suivantes [28] :

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = B_0u_x + A_3u^3 + A_1u; \\ A_1 > 0, D > 0, A_3 < 0, B_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = B_0u_x + A_2u^2 + A_1u + A_0; \\ D > 0, A_1^2 - 4A_0A_2 \geq 0, A_2 \neq 0, B_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = (B_0 + B_1u)u_x + A_2u^2 + A_1u + A_0; \\ D > 0, A_1^2 - 4A_0A_2 \geq 0, A_2 \neq 0, B_1 \neq 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

et

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = (B_0 + B_1u)u_x + A_3u^3 + A_2u^2; \\ D > 0, B_1^2 - 8A_3D \geq 0, B_1 \neq 0, A_3 \neq 0, B_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Ces équations sont tirées de la dynamique des fluides [3, 91] et la dynamique des populations [96]. Elles incluent en particulier l'équation de Newell-Whitehead [70] (*Eq.1* :  $B_0 = 0, A_3 = -1, A_1 = -1$ ), l'équation de Fisher [96] (*Eq.1* :  $B_0 = A_0 = 0, A_2 = -1, A_1 = -1$ ) et l'équation de Fisher-Burgers [94] (*Eq.3* :  $B_0 = A_0 = 0, B_1 = A_1 = -A_2 = -1$ ).

La troisième partie de ce chapitre est consacrée à un autre problème d'évolution tiré de la mécanique des fluides ; nous appliquons la méthode décompositionnelle d'Adomian à l'équation de "foam drainage" avec dérivée fractionnaire spatio-temporelle [29]. Nous traitons deux cas différents :

- (1) l'équation du drainage avec dérivée fractionnaire par rapport à la variable temporelle.
- (2) l'équation du drainage avec dérivée fractionnaire par rapport à la variable spatiale.

## 4.2 Résultats préliminaires

On considère le problème

$$x'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m'' \end{pmatrix} = F(t, x, x') = \begin{pmatrix} F_1(t, x, x') \\ F_2(t, x, x') \\ \cdot \\ \cdot \\ F_m(t, x, x') \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}, x(-\infty) = A, x(+\infty) = B, \quad (4.5)$$

et on suppose que

- 1)  $A, B \in \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}^*$ .
- 2)  $F_i \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2m})$ , pour  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Soient maintenant  $\alpha, \beta, y$  des fonctions réelles.

Pour  $\alpha < \beta$ , on pose :

$$\delta(\alpha, \beta, y) = \begin{cases} \alpha; & y < \alpha \\ y; & \alpha \leq y \leq \beta \\ \beta; & \beta < y. \end{cases}$$

Lorsque  $\alpha, \beta, y$  sont des fonctions  $m$ -dimensionnelles, on note par  $\delta(\alpha, \beta, y)$  la fonction :

$$\delta(\alpha, \beta, y) := \begin{cases} \delta(\alpha_1, \beta_1, y_1) \\ \delta(\alpha_2, \beta_2, y_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta(\alpha_m, \beta_m, y_m). \end{cases}$$

**Théorème 4.1** [36] *Soient  $\alpha, \beta, \varphi$  et  $\psi$  des fonctions  $m$ -dimensionnelles bornées vérifiant  $\alpha_i, \beta_i \in C^2(\mathbb{R})$  et  $\varphi_i, \psi_i \in C(\mathbb{R})$  et telles qu'on ait :*

(C1) :  $\alpha \leq \beta$ ,  $\varphi \leq \alpha' \leq \psi$ ,  $\varphi \leq \beta' \leq \psi$ , sur  $\mathbb{R}$ , et les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}\alpha''_i &\geq F_i(t, x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha_i, x_{i+1}, \dots, x_m, y_1, \dots, \alpha'_i, \dots, y_m) \\ \beta''_i &\leq F_i(t, x_1, \dots, x_{i-1}, \beta_i, x_{i+1}, \dots, x_m, y_1, \dots, \beta'_i, \dots, y_m)\end{aligned}$$

sont vérifiées pour  $\alpha_k \leq x_k \leq \beta_k$ ,  $\varphi_k \leq y_k \leq \psi_k$ ,  $k \neq i$ ,  $i = 1, \dots, m$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

(C2) : Si une fonction  $x$  vérifie :

$$\alpha \leq x \leq \beta \text{ et } x'' = F(t, x, \delta(\varphi, x', \psi)), \text{ pour } t \in \mathbb{R},$$

alors  $\varphi \leq x' \leq \psi$ , sur  $\mathbb{R}$ .

(C3) : Les inégalités

$$\alpha \leq A \leq \beta \text{ et } \alpha \leq B \leq \beta$$

sont vérifiées sur  $\mathbb{R}$ .

Alors les conditions (C1), (C2) et (C3) sont nécessaires et suffisantes pour que le problème (4.5) admette une solution.

De plus, sous ces conditions, on a

$$\alpha \leq x \leq \beta \text{ et } \varphi \leq x' \leq \psi, \text{ sur } \mathbb{R}.$$

### 4.3 Ondes progressives

Les ondes progressives du système (3.1) sont les solutions particulières qui s'expriment sous la forme

$$\begin{cases} u(t, x) = \hat{u}(z); & z = x - ct, c > 0 \\ v(t, x) = \hat{v}(z), \end{cases}$$

où  $\hat{u}, \hat{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions régulières admettant des limites finies à l'infini :

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow +\infty} \hat{u}(z) &= u_+, & \lim_{z \rightarrow +\infty} \hat{v}(z) &= v_+, \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \hat{u}(z) &= u_-, & \lim_{z \rightarrow -\infty} \hat{v}(z) &= v_-. \end{aligned}$$

Une solution onde progressive correspond à la propagation d'un front d'onde  $(\hat{u}, \hat{v})$  suivant la direction  $x$  à la vitesse constante  $c$ . Le système d'équations différentielles vérifié par le profil  $(\hat{u}, \hat{v})$  est alors

$$\begin{cases} -cu' = u'' - u^n v'^2 \\ -cv' = dv'' + u^n v'^2. \end{cases} \quad (4.6)$$

où  $' = \frac{d}{dz}$  désigne la dérivée par rapport à la nouvelle variable  $z = x - ct$  et où on a omis les chapeaux ( $\hat{\phantom{x}}$ ).

Il est clair que  $(u, v) = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  sont des solutions pour le système (4.6); donc par onde progressive du système (3.1) nous entendons une solution  $(u, v)$  non constante de (4.6).

**Lemme 4.1** *Soit  $(u, v)$  une solution du système (4.6). On a alors*

$$(a) \quad u'(z) > 0; \text{ pour tout } z \in \mathbb{R}, \lim_{|z| \rightarrow \infty} u(z) \text{ existe et } \lim_{|z| \rightarrow \infty} u'(z) = 0.$$

$$(b) \quad v'(z) < 0; \text{ pour tout } z \in \mathbb{R}, \lim_{|z| \rightarrow \infty} v(z) \text{ existe et } \lim_{|z| \rightarrow \infty} v'(z) = 0.$$

$$(c) \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} u''(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} v''(z) = 0.$$

**Démonstration**

(a) On réécrit la première équation du système (4.6) sous la forme

$$\left( u'(z) e^{cz} \right)' = u^n v'^2 e^{cz}. \quad (4.7)$$

Comme le second membre de (4.7) est positif, donc par une intégration entre  $-\infty$  et  $z$ , on obtient :

$$u'(z) e^{cz} = \int_{-\infty}^z u^n v'^2 e^{cz} dz \geq 0, \quad (4.8)$$

et donc  $u'(z) \geq 0$ .

On a  $u'(z) > 0$ , pour  $z \in \mathbb{R}$ ; car sinon, supposons qu'il existe un certain  $z_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $u'(z_0) = 0$ . Alors par une intégration entre  $-\infty$  et  $z_0$ , on a

$$u'(z_0) e^{cz_0} = \int_{-\infty}^{z_0} u^n v'^2 e^{cz} dz = 0.$$

Donc  $u^n v'^2 = 0$ , pour  $z \in ]-\infty, z_0]$ . Mais, comme  $u$  n'est pas une solution triviale, il existe donc  $z_1; z_1 < z_0$  tel que  $v'(z) = 0$  sur  $]-\infty, z_1]$ . Donc  $v$  est constante, ce qui est absurde.

La démonstration de l'existence de  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} u(z)$  est évidente car par définition, l'onde voyageuse admet des limites finies à l'infini.

Pour démontrer que  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} u'(z) = 0$ , il suffit d'utiliser la définition des points stationnaires du système différentielle (4.6).

(b) On réécrit la deuxième équation de (4.6) sous la forme :

$$\left( e^{cd^{-1}z} v'(z) \right)' = -d^{-1} u^n v'^2 e^{cd^{-1}z}. \quad (4.9)$$

Le second membre de (4.9) est négatif. Par une intégration entre  $-\infty$  et  $z$ , on obtient :

$$\int_{-\infty}^z -d^{-1} u^n v'^2 e^{cd^{-1}z} dz = e^{cd^{-1}z} v'(z) \leq 0,$$

et donc  $v'(z) \leq 0$ .

Avec le même raisonnement que celui de (a), on montre que  $v'(z) < 0$ .

**Lemme 4.2** Soit  $(u, v)$  une solution du système (4.6). Alors il existe  $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que

- (a)  $-M_1 \leq v'(z) < 0$  ; pour  $z \in \mathbb{R}$ .  
 (b)  $0 < u'(z) \leq M_2$  ; pour  $z \in \mathbb{R}$ .

### Démonstration

La deuxième équation du système (4.6) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{-cd^{-1}}{u'} = \frac{v''}{v'^2} + d^{-1} u^n. \quad (4.10)$$

Avec le changement de variable  $w = \frac{1}{v'}$ , on obtient :

$$-cd^{-1}w + w' = d^{-1}u^n. \quad (4.11)$$

L'équation (4.11) est équivalente à

$$\left( we^{-cd^{-1}z} \right)' = d^{-1}u^n e^{-cd^{-1}z}. \quad (4.12)$$

Une intégration entre  $z_1$  et  $z_2$ , tel que  $z_1 < z_2$ , donne :

$$\frac{u^n}{-c} \left( e^{-cd^{-1}z_2} - e^{-cd^{-1}z_1} \right) \leq w(z_2) e^{-cd^{-1}z_2} - w(z_1) e^{-cd^{-1}z_1} \leq \frac{u^n}{-c} \left( e^{-cd^{-1}z_2} - e^{-cd^{-1}z_1} \right).$$

On a donc :

$$\frac{u_+^n}{c} \left( e^{-cd^{-1}(z_2-z_1)} - 1 \right) \leq w(z_1) - w(z_2) e^{-cd^{-1}(z_2-z_1)} \leq \frac{u_-^n}{c} \left( e^{-cd^{-1}(z_2-z_1)} - 1 \right).$$

Par conséquent,

$$\frac{u_+^n}{c} \left( e^{-cd^{-1}(z_2-z_1)} - 1 \right) + w(z_2) e^{-cd^{-1}(z_2-z_1)} \leq w(z_1) \leq \frac{u_-^n}{c} \left( e^{-cd^{-1}(z_2-z_1)} - 1 \right) + w(z_2) e^{-cd^{-1}(z_2-z_1)}. \quad \blacksquare$$

La quantité  $w(z_2) e^{-cd^{-1}(z_2-z_1)}$  est négative. Alors on a :

$$w(z_1) \leq \frac{u_-^n}{c} \left( e^{-cd^{-1}(z_2-z_1)} - 1 \right). \quad (4.13)$$

Quand  $z_2 \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$w(z_1) \leq \frac{-u_-^n}{c} < 0. \quad (4.14)$$

D'où

$$\frac{-c}{u_-^n} \leq v'(z) < 0.$$

La partie (a) est démontrée.

(b) Maintenant, on démontre qu'il existe  $M_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $0 < u'(z) \leq M_2$  :

La formule (4.7) implique que :

$$\left( u'(z) e^{cz} \right)' \leq u_+^n v'^2 e^{cz}. \quad (4.15)$$

En utilisant (a), on peut avoir :

$$\left( u'(z) e^{cz} \right)' \leq u_+^n \frac{c^2}{u_-^{2n}} e^{cz}. \quad (4.16)$$

Par une intégration entre  $-\infty$  et  $z$ , on obtient :

$$0 < u'(z) \leq c^2 \left( \frac{u_+}{u_-^2} \right)^n. \quad (4.17)$$

D'où la démonstration du lemme 4.2.

**Proposition 4.1** *Le système (4.6), avec les conditions*

$$\begin{aligned} u(-\infty) &= u_- \neq 0, & u(+\infty) &= u_+, \\ v(-\infty) &= v_-, & v(+\infty) &= v_+ \neq 0, \end{aligned}$$

*admet une solution onde voyageuse  $(u, v)$  vérifiant*

$$u_- \leq u(z) \leq u_+, \quad 0 < u' < c^2 \left( \frac{u_+}{u_-} \right)^n$$

et

$$v_+ \leq v(z) \leq v_-, \quad \frac{-c}{u_-^n} < v' < 0.$$

**Démonstration**

On pose

$$x = \begin{pmatrix} x_1(z) = u(z) \\ x_2(z) = v(z) \end{pmatrix},$$

le système (4.6) s'écrit alors sous la forme

$$x'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(t, x_1, x_2, x_1', x_2') \\ F_2(t, x_1, x_2, x_1', x_2') \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

où

$$\begin{aligned} F_1(t, x_1, x_2, x_1', x_2') &= -cx_1' + x_1^n x_2'^2, \\ F_2(t, x_1, x_2, x_1', x_2') &= -cd^{-1}x_2' - d^{-1}x_1^n x_2'^2. \end{aligned}$$

On pose :

$$x(-\infty) = A = \begin{pmatrix} u_- \\ v_- \end{pmatrix}, \quad x(+\infty) = \begin{pmatrix} u_+ \\ v_+ \end{pmatrix},$$

et on prend

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} u_+ \\ v_- \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-c}{u_-^n} \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \varphi_2^2 u_+^n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que

$$\alpha \leq \beta, \quad \varphi \leq \alpha' \leq \psi, \quad \varphi \leq \beta' \leq \psi, \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

De plus, les inégalités

$$\alpha_1'' \geq -c\alpha_1' + \alpha_1^n y_2^2; \quad \frac{-c}{u_-^n} \leq y_2 \leq 0,$$

$$\alpha_2'' \geq -cd^{-1}\alpha_2' - d^{-1}x_1^n \alpha_2'^2; \quad 0 \leq x_1 \leq u_+,$$

$$\beta_1'' \leq -c\beta_1' + \beta_1^n y_2^2; \quad \frac{-c}{u_-^n} \leq y_2 \leq 0,$$

$$\beta_2'' \leq -cd^{-1}\beta_2' - d^{-1}x_1^n \beta_2'^2; \quad 0 \leq x_1 \leq u_+,$$

sont vérifiées sur  $\mathbb{R}$ .

Donc la condition (C1) du théorème 4.1 est vérifiée.

La condition (C2) est assurée par les lemmes 4.1 et 4.2, et La condition (C3) est triviale.

D'où la démonstration de la Proposition 4.1.

## 4.4 La Méthode Tanh

La recherche des solutions pour les équations d'évolution a longtemps été un thème central pour les mathématiques et la physique.

Pour un traitement numérique fiable des équations d'évolution non linéaires, W. Malfiet a introduit la méthode Tanh [63, 64]. Cette méthode a été largement utilisée dans de nombreux travaux comme dans [92, 95]. Plus tard, une extension de cette méthode a été développée par Wazwaz [93, 94]. Elle se résume en ceci :

Soit l'équation d'évolution suivante

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0. \quad (4.19)$$

où  $P$  est un polynome.

Avec le changement de variable  $z = x - ct$ , l'équation (4.19) s'écrit sous la forme

$$Q(u, u', u'', \dots) = 0. \quad (4.20)$$

Le but est de trouver des solutions exactes sous forme de tangente hyperbolique. Introduisons donc la nouvelle variable

$$Y = \tanh(\mu z), \mu \in \mathbb{R}. \quad (4.21)$$

On a alors

$$\frac{d}{dz} = \mu (1 - Y^2) \frac{d}{dY}, \quad (4.22)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} = \mu^2 (1 - Y^2) \left( -2Y \frac{d}{dY} + (1 - Y^2) \frac{d^2}{dY^2} \right). \quad (4.23)$$

On pose

$$U(z) = S(Y) = \sum_0^m a_k Y^k + \sum_1^m b_k Y^{-k}; \quad m \in \mathbb{N}^*, \quad (4.24)$$

où  $m$  est un entier naturel. En substituant (4.24) dans l'équation (4.20), on aboutit à un système d'équations algébriques. En résolvant ce système algébrique, on détermine ainsi les paramètres  $a_k; 0 \leq k \leq m$ ,  $b_k; 1 \leq k \leq m$ ,  $\mu$  et  $c$ , puis la solution  $u(x, t)$  en découle.

## 4.5 Applications

### 4.5.1 Equation 1

Le changement de variable  $z = x - ct$  transforme l'équation (4.1) en

$$DU'' + cU' + B_0U' + A_3U^3 + A_1U = 0. \quad (4.25)$$

En comparant le degré du terme linéaire dominant  $U''$  avec celui du terme non linéaire  $U^3$ , ( remarquer que  $U$  dépend de  $Y$  ), on obtient alors  $m = 1$ .

Puis on pose :

$$U(z) = a_0 + a_1Y + b_1Y^{-1}. \quad (4.26)$$

En remplaçant (4.26) dans (4.25), on obtient un système d'équations algébriques en fonction de  $a_0, a_1, b_1, c$  et  $\mu$ . On résout ce système, on obtient les ensembles de solutions suivants (voir [28]) :

i) Le 1<sup>er</sup> ensemble :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \mp \sqrt{\frac{-A_1}{A_3}}, \quad b_1 = 0, \quad c = -B_0, \quad \mu = \sqrt{\frac{A_1}{2D}}.$$

ii) Le 2<sup>eme</sup> ensemble :

$$a_0 = \pm \frac{\sqrt{\frac{A_1}{2D}} \frac{4B_0 \pm \sqrt{72A_1D}}{4}}{3A_3 \sqrt{\frac{-A_1}{A_3}}}, \quad a_1 = \mp \sqrt{\frac{-A_1}{A_3}}, \quad b_1 = 0, \quad c = \frac{4B_0 \pm \sqrt{72A_1D}}{4}, \quad \mu = \pm \sqrt{\frac{A_1}{2D}}.$$

iii) Le 3<sup>eme</sup> ensemble :

$$a_0 = a_1 = 0, \quad b_1 = \mp \sqrt{\frac{-A_1}{A_3}}, \quad c = -B_0, \quad \mu = \sqrt{\frac{A_1}{2D}}.$$

iv) Le 4<sup>eme</sup> ensemble :

$$a_0 = \pm \frac{\sqrt{\frac{A_1}{2D}} \sqrt{72A_1D}}{3A_3 \sqrt{\frac{-A_1}{A_3}}}, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = \pm 0.5 \sqrt{\frac{-A_1}{A_3}},$$

$$c = \frac{4B_0 \pm \sqrt{72A_1D}}{4}, \quad \mu = \pm 0.5 \sqrt{\frac{A_1}{2D}}.$$

v) Le 5<sup>eme</sup> ensemble :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \pm 0.5 \left( \frac{-A_1}{A_3} \right)^{-1/2} \sqrt{\frac{-A_1}{2A_3}},$$

$$b_1 = \pm 0.5 \sqrt{\frac{-A_1}{A_3}}, \quad c = -B_0, \quad \mu = \sqrt{\frac{A_1}{2D}}.$$

vi) Le 6<sup>eme</sup> ensemble :

$$a_0 = \pm \frac{\sqrt{\frac{A_1}{2D}} \sqrt{72A_1D}}{3A_3 \sqrt{\frac{-A_1}{A_3}}}, \quad a_1 = \pm 0.5 \left( \frac{-A_1}{A_3} \right)^{-1/2} \sqrt{\frac{-A_1}{2A_3}},$$

$$b_1 = \pm 0.5 \sqrt{\frac{-A_1}{A_3}}, \quad c = -B_0, \quad \mu = \pm 0.5 \sqrt{\frac{A_1}{2D}}.$$

D'où les solutions ondes voyageuses suivantes :

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= \pm \sqrt{\frac{A_1}{-A_3}} \tanh \left[ \sqrt{\frac{A_1}{2D}} (x + B_0 t) \right], \\
u_2(x, t) &= \pm \frac{\sqrt{\frac{A_1}{2D}} \frac{4B_0 \pm \sqrt{72A_1 D}}{4}}{3A_3 \sqrt{\frac{-A_1}{A_3}}} \pm \sqrt{\frac{A_1}{-A_3}} \tanh \left[ \pm 0.5 \sqrt{\frac{A_1}{2D}} \left( x - \frac{4B_0 \pm \sqrt{72A_1 D}}{4} t \right) \right], \\
u_3(x, t) &= \pm \sqrt{\frac{A_1}{-A_3}} \coth \left[ \sqrt{\frac{A_1}{2D}} (x + B_0 t) \right], \\
u_4(x, t) &= \pm \frac{\sqrt{\frac{A_1}{2D}} \frac{4B_0 \pm \sqrt{72A_1 D}}{4}}{3A_3 \sqrt{\frac{-A_1}{A_3}}} \pm \sqrt{\frac{A_1}{-A_3}} \coth \left[ \pm 0.5 \sqrt{\frac{A_1}{2D}} \left( x - \frac{4B_0 \pm \sqrt{72A_1 D}}{4} t \right) \right], \\
u_5(x, t) &= \pm 0.5 \left( \frac{-A_1}{A_3} \right)^{-1/2} \sqrt{\frac{-A_1}{2A_3}} \tanh \left[ \sqrt{\frac{A_1}{2D}} (x + B_0 t) \right] \pm \sqrt{\frac{A_1}{-A_3}} \coth \left[ \sqrt{\frac{A_1}{2D}} (x + B_0 t) \right], \\
u_6(x, t) &= \pm \frac{\sqrt{\frac{A_1}{2D}} \frac{4B_0 \pm \sqrt{72A_1 D}}{4}}{3A_3 \sqrt{\frac{-A_1}{A_3}}} \pm 0.5 \left( \frac{-A_1}{A_3} \right)^{-1/2} \sqrt{\frac{-A_1}{2A_3}} \tanh \left[ \sqrt{\frac{A_1}{2D}} (x + B_0 t) \right] \pm \sqrt{\frac{A_1}{-A_3}} \\
&\quad \coth \left[ \sqrt{\frac{A_1}{2D}} (x + B_0 t) \right],
\end{aligned}$$

## 4.5.2 Equation 2

Le changement de variable  $z = x - ct$  transforme l'équation (4.2) en

$$DU'' + cU' + B_0U' + A_2U^2 + A_1U + A_0 = 0. \quad (4.27)$$

En utilisant la même technique que précédemment, on obtient  $m = 2$ .

On pose alors

$$U(z) = a_0 + a_1Y + a_2Y^2 + b_1Y^{-1} + b_2Y^{-2}. \quad (4.28)$$

En remplaçant (4.28) dans (4.27), on obtient un système d'équations algébriques en fonction de  $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c$  et  $\mu$ . On résout ce système, on obtient les ensembles de solutions suivants (voir [28]) :

i) Le 1<sup>er</sup> ensemble :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - A_1}{2A_2}, \quad c = -B_0, \\ a_2 &= -\frac{\sqrt[3]{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_2}, \quad \mu = 0.5\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}}, \quad b_1 = b_2 = a_1 = 0. \end{aligned}$$

ii) Le 2<sup>eme</sup> ensemble :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - A_1}{2A_2}, \quad c = -B_0 + 0.5D\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}, \\ a_2 &= -\frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4A_2}, \quad \mu = 0.5\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}, \quad a_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_2}, \quad b_1 = b_2 = 0 \end{aligned}$$

iii) Le 3<sup>eme</sup> ensemble :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - A_1}{2A_2}, \quad b_1 = b_2 = 0, \quad c = -B_0 - 5D\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}, \\ a_2 &= -\frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4A_2}, \quad \mu = 0.5\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}, \quad a_1 = -\frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_2}. \end{aligned}$$

iv) Le 4<sup>eme</sup> ensemble :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - A_1}{2A_2}, \quad b_1 = a_1 = a_2 = 0, \\ b_2 &= -\frac{3\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_2}, \quad \mu = 0.5\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}}, \quad c = -B_0 \end{aligned}$$

v) Le 5<sup>eme</sup> ensemble :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - A_1}{2A_2}, \quad c = -B_0 - 5D\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}, \\ b_1 &= \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_2}, \quad b_2 = -\frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4A_2}, \quad \mu = 0.5\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}, \quad a_1 = a_2 = 0. \end{aligned}$$

vi) Le 6<sup>eme</sup> ensemble :

$$a_0 = \frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - A_1}{2A_2}, \quad c = -B_0 - 5D\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}},$$

$$b_1 = -\frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_2} = 2b_2, \quad \mu = 0.5\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}, \quad a_1 = a_2 = 0.$$

vii) Le 7<sup>eme</sup> ensemble :

$$a_0 = \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - 2A_1}{4A_2}, \quad a_1 = b_1 = 0, \quad c = -B_0,$$

$$a_2 = b_2 = -\frac{3\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{8A_2}, \quad \mu = 0.25\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}}.$$

viii) Le 8<sup>eme</sup> ensemble :

$$a_0 = \frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - 2A_1}{4A_2}, \quad a_1 = b_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4A_2},$$

$$c = -B_0 - 5D\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}, \quad a_2 = b_2 = -\frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{8A_2}, \quad \mu = 0.25\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}.$$

ix) Le 9<sup>eme</sup> ensemble :

$$a_0 = \frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - 2A_1}{4A_2}, \quad a_1 = b_1 = -\frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4A_2},$$

$$c = -B_0 - 5D\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}, \quad a_2 = b_2 = -\frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{8A_2}, \quad \mu = 0.25\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}.$$

D'où les solutions ondes voyageuses suivantes :

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= \frac{2\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - A_1}{2A_2} - \frac{3\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_2} \tanh^2 \left[ 0.5 \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} (x + B_0t) \right], \\
u_2(x, t) &= \frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - A_1}{2A_2} + \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_2} \\
&\quad \tanh \left[ 0.5 \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} \left( x + B_0 - 5D \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}} t \right) \right] - \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4A_2} \\
&\quad \tanh^2 \left[ 0.5 \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} \left( x + B_0 - 5D \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}} t \right) \right], \\
u_3(x, t) &= \frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - A_1}{2A_2} - \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_2} \\
&\quad \tanh \left[ 0.5 \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} \left( x - B_0 - 5D \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}} t \right) \right] - \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4A_2} \\
&\quad \tanh^2 \left[ 0.5 \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} \left( x - B_0 + 5D \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}} t \right) \right], \\
u_4(x, t) &= \frac{2\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - A_1}{2A_2} - \frac{3\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_2} \coth^2 \left[ 0.5 \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} (x + B_0t) \right], \\
u_5(x, t) &= \frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - A_1}{2A_2} + \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_2} \\
&\quad \coth \left[ 0.5 \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} \left( x + B_0 + 5D \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}} t \right) \right] - \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4A_2} \\
&\quad \coth^2 \left[ 0.5 \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} \left( x + B_0 + 5D \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}} t \right) \right], \\
u_6(x, t) &= \frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - A_1}{2A_2} - \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_2} \\
&\quad \coth \left[ 0.5 \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} \left( x + B_0 - 5D \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}} t \right) \right] - \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4A_2} \\
&\quad \coth^2 \left[ 0.5 \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} \left( x + B_0 - 5D \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}} t \right) \right], \\
u_7(x, t) &= \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - 2A_1}{4A_2} - \frac{3\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{8A_2} \\
&\quad \tanh^2 \left[ 0.5 \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} (x + B_0t) \right] - \frac{3\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{8A_2} \\
&\quad \coth^2 \left[ 0.5 \sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} (x + B_0t) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_8(x, t) = & \frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - 2A_1}{4A_2} + \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4A_2} \\
& \tanh \left[ 0.5\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} \left( x + B_0 - 5D\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}t \right) \right] - \frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{8A_2} \\
& \tanh^2 \left[ 0.5\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} \left( x + B_0 - 5D\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}t \right) \right] + \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{8A_2} \\
& \coth \left[ 0.5\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} \left( x + B_0 - 5D\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}t \right) \right] - \frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{8A_2} \\
& \coth^2 \left[ 0.5\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} \left( x + B_0 - 5D\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}t \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_9(x, t) = & \frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2} - 2A_1}{4A_2} - \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4A_2} \\
& \tanh \left[ 0.5\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} \left( x + B_0 + 5D\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}t \right) \right] - \frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{8A_2} \\
& \tanh^2 \left[ 0.5\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} \left( x + B_0 + 5D\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}t \right) \right] - \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{8A_2} \\
& \coth \left[ 0.5\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} \left( x + B_0 + 5D\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}t \right) \right] - \frac{0.5\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{8A_2} \\
& \coth^2 \left[ 0.5\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{D^2}} \left( x + B_0 + 5D\sqrt[4]{\frac{A_1^2 - 4A_0A_2}{36D^2}}t \right) \right],
\end{aligned}$$

### 4.5.3 Equation 3

Le changement de variable  $z = x - ct$  transforme l'équation (4.3) en

$$DU'' + cU' + (B_0 + B_1U)U' + A_2U^2 + A_1U + A_0 = 0. \quad (4.29)$$

En utilisant la même technique que celle utilisée dans le paragraphe 4.5.1, on obtient  $m = 1$ . On pose alors

$$U(z) = a_0 + a_1Y + b_1Y^{-1}. \quad (4.30)$$

En remplaçant (4.30) dans (4.29), on obtient un système d'équations algébriques en fonction de  $a_0, a_1, b_1, c$  et  $\mu$ . On résout ce système, on obtient les ensembles de solutions suivants (voir [28]) :

i) Le 1<sup>er</sup> ensemble :

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{A_1}{2A_2}, \quad a_1 = \pm \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_2}, \quad b_1 = 0, \\ c &= \frac{4DA_2^2 + B_1^2A_1 - 2B_0B_1A_2}{2B_1A_2}, \quad \mu = \pm B_1 \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4DA_2}. \end{aligned}$$

ii) Le 2<sup>eme</sup> ensemble :

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{A_1}{2A_2}, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = \pm \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_2}, \\ c &= \frac{4DA_2^2 + B_1^2A_1 - 2B_0B_1A_2}{2B_1A_2}, \quad \mu = \pm B_1 \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4DA_2}. \end{aligned}$$

iii) Le 3<sup>eme</sup> ensemble :

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{A_1}{2A_2}, \quad a_1 = b_1 = \pm \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4A_2}, \\ c &= \frac{4DA_2^2 + B_1^2A_1 - 2B_0B_1A_2}{2B_1A_2}, \quad \mu = \pm B_1 \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{8DA_2}. \end{aligned}$$

D'où les solutions ondes voyageuses suivantes :

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= -\frac{A_1}{2A_2} \pm \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4A_2} \tanh \left[ \pm B_1 \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{8DA_2} \left( x - \frac{4DA_2^2 + B_1^2A_1 - 2B_0B_1A_2}{2B_1A_2} t \right) \right], \\ u_2(x, t) &= -\frac{A_1}{2A_2} \pm \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4A_2} \coth \left[ \pm B_1 \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{8DA_2} \left( x - \frac{4DA_2^2 + B_1^2A_1 - 2B_0B_1A_2}{2B_1A_2} t \right) \right], \\ u_3(x, t) &= -\frac{A_1}{2A_2} \pm \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4A_2} \tanh \left[ \pm B_1 \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{8DA_2} \left( x - \frac{4DA_2^2 + B_1^2A_1 - 2B_0B_1A_2}{2B_1A_2} t \right) \right] \\ &\quad \pm \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{4A_2} \coth \left[ \pm B_1 \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{8DA_2} \left( x - \frac{4DA_2^2 + B_1^2A_1 - 2B_0B_1A_2}{2B_1A_2} t \right) \right], \end{aligned}$$

#### 4.5.4 Equation 4

Le changement de variable  $z = x - ct$  transforme l'équation (4.4) en

$$DU'' + cU' + (B_0 + B_1U)U' + A_3U^3 + A_2U^2 = 0. \quad (4.31)$$

Cette fois ci, on obtient  $m = 1$ .

On pose alors

$$U(z) = a_0 + a_1Y + b_1Y^{-1}. \quad (4.32)$$

En remplaçant (4.32) dans (4.31), on obtient un système d'équations algébriques en fonction de  $a_0, a_1, b_1, c$  et  $\mu$ . On résout ce système et on pose

$$R_{\pm} = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 8A_3D}}{4DA_3}, Z_{\pm} = \frac{B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 8A_3D}}{4DA_3},$$

on obtient les ensembles de solutions suivants (voir [28]) :

i) Le 1<sup>er</sup> ensemble :

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{A_2}{2A_3}, \quad a_1 = \frac{A_2(1 + 2DA_3R_{\pm}^2)}{2A_3B_1R_{\pm}}, \quad b_1 = 0, \\ c &= \frac{(-B_0 + DA_2B_1R_{\pm}^2) - 2B_0DA_3R_{\pm}^2}{1 + 2DA_3R_{\pm}^2}, \quad \mu = \frac{A_2R_{\pm}}{2}. \end{aligned}$$

ii) Le 2<sup>eme</sup> ensemble :

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{A_2}{2A_3}, \quad a_1 = \frac{A_2(1 + 2DA_3Z_{\pm}^2)}{2A_3B_1Z_{\pm}}, \quad b_1 = 0, \\ c &= \frac{(-B_0 + DA_2B_1Z_{\pm}^2) - 2B_0DA_3Z_{\pm}^2}{1 + 2DA_3Z_{\pm}^2}, \quad \mu = \frac{A_2Z_{\pm}}{2}. \end{aligned}$$

iii) Le 3<sup>eme</sup> ensemble :

$$a_0 = -\frac{A_2}{2A_3}, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = \frac{A_2(1 + 2DA_3R_{\pm}^2)}{2A_3B_1R_{\pm}},$$

$$c = \frac{(-B_0 + DA_2B_1R_{\pm}^2) - 2B_0DA_3R_{\pm}^2}{1 + 2DA_3R_{\pm}^2}, \quad \mu = \frac{A_2R_{\pm}}{2}.$$

iv) Le 4<sup>eme</sup> ensemble :

$$a_0 = -\frac{A_2}{2A_3}, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = \frac{A_2(1 + 2DA_3Z_{\pm}^2)}{2A_3B_1Z_{\pm}},$$

$$c = \frac{(-B_0 + DA_2B_1Z_{\pm}^2) - 2B_0DA_3Z_{\pm}^2}{1 + 2DA_3Z_{\pm}^2}, \quad \mu = \frac{A_2Z_{\pm}}{2}.$$

v) Le 5<sup>eme</sup> ensemble :

$$a_0 = 2a_1 = 2b_1 = -\frac{A_2}{2A_3}, \quad c = \frac{A_2 - 2B_0A_3R_{\pm} + A_2B_1R_{\pm}}{2A_3R_{\pm}}, \quad \mu = \frac{A_2R_{\pm}}{2}.$$

vi) Le 6<sup>eme</sup> ensemble :

$$a_0 = -2a_1 = -2b_1 = -\frac{A_2}{2A_3}, \quad c = \frac{A_2 - 2B_0A_3Z_{\pm} + A_2B_1Z_{\pm}}{2A_3Z_{\pm}}, \quad \mu = \frac{A_2Z_{\pm}}{2}.$$

D'où les solutions ondes voyageuses suivantes :

$$u_1(x, t) = -\frac{A_2}{2A_3} + \frac{A_2(1 + 2DA_3R_{\pm}^2)}{2A_3B_1R_{\pm}} \tanh \left[ \frac{A_2R_{\pm}}{2} \left( x - \frac{(-B_0 + DA_2B_1R_{\pm}^2) - 2B_0DA_3R_{\pm}^2}{1 + 2DA_3R_{\pm}^2} t \right) \right],$$

$$u_2(x, t) = -\frac{A_2}{2A_3} + \frac{A_2(1 + 2DA_3Z_{\pm}^2)}{2A_3B_1Z_{\pm}} \tanh \left[ \frac{A_2Z_{\pm}}{2} \left( x - \frac{(-B_0 + DA_2B_1Z_{\pm}^2) - 2B_0DA_3Z_{\pm}^2}{1 + 2DA_3Z_{\pm}^2} t \right) \right],$$

$$u_3(x, t) = -\frac{A_2}{2A_3} + \frac{A_2(1 + 2DA_3R_{\pm}^2)}{2A_3B_1R_{\pm}} \coth \left[ \frac{A_2R_{\pm}}{2} \left( x - \frac{(-B_0 + DA_2B_1R_{\pm}^2) - 2B_0DA_3R_{\pm}^2}{1 + 2DA_3R_{\pm}^2} t \right) \right],$$

$$u_4(x, t) = -\frac{A_2}{2A_3} + \frac{A_2(1 + 2DA_3Z_{\pm}^2)}{2A_3B_1Z_{\pm}} \coth \left[ \frac{A_2Z_{\pm}}{2} \left( x - \frac{(-B_0 + DA_2B_1Z_{\pm}^2) - 2B_0DA_3Z_{\pm}^2}{1 + 2DA_3Z_{\pm}^2} t \right) \right],$$

## 4.6 Calcul fractionnaire

Il existe plusieurs définitions mathématiques sur les dérivées fractionnaires. [73], [77]. Ici, nous adoptons la définition au sens de Caputo. Pour plus de détails, on se réfère à [61, 73].

**Définition 4.1** Soit une fonction  $f(x), x > 0$ . On dit que  $f$  est dans l'espace  $C_\mu, \mu \in \mathbb{R}$ , s'il existe un nombre réel  $p > \mu$  tel que  $f(x) = x^p f_1(x)$  où  $f_1(x) \in C([0, \infty))$ .

**Définition 4.2** Soit une fonction  $f(x), x > 0$ . On dit que  $f$  est dans l'espace  $C_\mu^n, n \in \mathbb{N}$ , si  $f^{(n)} \in C_\mu$ .

**Définition 4.3** Soit  $f$  dans  $C_\mu$ . On définit l'opérateur de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville par la formule

$$\begin{aligned} J^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt; \quad \alpha > 0, x > 0 \\ J^0 f(x) &= f(x). \end{aligned} \quad (4.33)$$

**Propriétés :**

$$(1) \quad J^\alpha J^\beta f(x) = J^{\alpha+\beta} f(x). \quad (4.34)$$

$$(2) \quad J^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}. \quad (4.35)$$

**Définition 4.4** Soit  $f \in C_{-1}^n$ . On définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction  $f$  comme suit :

$$D^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau; & n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^* \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t); & \alpha = n. \end{cases} \quad (4.36)$$

**Propriétés :**

$$(1) \quad D^\alpha K = 0, \quad K \text{ est une constante.} \quad (4.37)$$

$$(2) \quad D^\alpha t^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\beta-\alpha}; & \beta > \alpha - 1 \\ 0; & \beta \leq \alpha - 1. \end{cases} \quad (4.38)$$

## 4.7 La Méthode ADM

La méthode de décomposition d'Adomian (ADM) a été introduite par Adomian [4, 5] au début des années 1980. Elle a été largement utilisée pour résoudre les équations différentielles tirées de la physique, ( voir par exemple [4], [5],[9], [25], [49], [87], [89], [90], [91], [96]). Avec cette méthode, on peut facilement obtenir la solution sous forme d'une série qui converge rapidement [1, 2, 22].

Soit le problème

$$Fu = g \quad (4.39)$$

où  $F$  représente un opérateur différentiel non linéaire.

La méthode ADM consiste à décomposer la partie linéaire de  $F$  en  $L + R$ , où  $L$  est un opérateur "facilement" inversible et  $R$  est la partie restante.

Si on désigne par  $N$ , le terme non linéaire, alors l'équation (4.39), dans sa forme simple, s'écrit :

$$Lu + Ru + Nu = g. \quad (4.40)$$

Si on note par  $L^{-1}$ , l'inverse de  $L$ , on obtient l'équation équivalente suivante :

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \quad (4.41)$$

On pose  $L^{-1}Lu = u$ . On obtient :

$$u = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \quad (4.42)$$

On cherche maintenant la solution  $u$  sous la forme suivante :

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i, \quad (4.43)$$

avec  $u_0 = f + L^{-1}g$ , où  $f$  est la condition initiale.

Ensuite, on décompose l'opérateur  $N$  comme suit :

$$Nu = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(u_0, u_1, \dots, u_i), \quad (4.44)$$

où les  $A_i$  sont les polynômes d'Adomian [4, 5] (ils dépendent de  $u_0, u_1, \dots, u_i$ ).

En remplaçant (4.43) et (4.44) dans (4.42), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i = L^{-1} \left[ g - R \sum_{i=0}^{\infty} u_i - \sum_{i=0}^{\infty} A_i \right] \quad (4.45)$$

On choisit  $u_i$ ; ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = f + L^{-1}g, \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0, \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1, \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n = -L^{-1}Ru_{n-1} - L^{-1}A_{n-1}, \end{cases} \quad (4.46)$$

Pour calculer les polynômes d'Adomian, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.3** [5]

*Les polynômes d'Adomian, pour  $N = Nu$ , se déterminent par la formule*

$$A_i = \frac{1}{i!} \left[ \frac{d^i}{d\lambda^i} N \left( \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4.47)$$

**Remarque 4.1** *Généralement, la convergence de la méthode ADM est très rapide.*

Pour plus de détail, on se réfère à [1, 2, 22, 42].

## 4.8 L'équation du drainage avec dérivée fractionnaire spatio-temporelle

Au cours des dix dernières années, les équations d'évolution avec dérivée fractionnaire ont attiré beaucoup d'attention et elles étaient largement utilisées dans les domaines de la physique et de l'ingénierie [38, 44, 60, 62, 73, 77]. A l'aide des dérivées fractionnaires, des phénomènes en électromagnétisme, en électrochimie et en science des matériaux peuvent être bien décrits [38, 73, 77, 99].

Dans ce paragraphe, on considère l'équation de drainage d'une mousse avec dérivée fractionnaire spatio-temporelle :

$$D_t^\alpha u - \frac{u}{2} u_{xx} + 2u^2 D_x^\beta u - (D_x^\beta u)^2 = 0; \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1, \quad 0 < t, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.48)$$

où  $D_t^\alpha$  et  $D_x^\beta$  désignent les dérivées fractionnaires et ils sont définis par (4.36). Pour  $\alpha = \beta = 1$ , l'équation (4.48) se réduit à l'équation suivante :

$$u_t - \frac{u}{2}u_{xx} + 2u^2u_x - (u_x)^2 = 0. \quad (4.49)$$

Cette dernière équation modélise l'écoulement du liquide dans un bord de Plateau ( cas du bord rigide) en tenant compte des différentes forces intervenant dans ce problème ( force de dissipation visqueuse, force de gravité et force de capillarité ) [97]. Elle a été étudiée par plusieurs auteurs [39, 41, 60, 84, 85, 98]. Par contre dans notre cas [29], l'étude de l'équation (4.48) n'a pas encore été abordée.

Pour résoudre le problème (4.48), avec la méthode ADM, on la réécrit sous la forme

$$D_t^\alpha u = \frac{u}{2}u_{xx} - 2u^2 D_x^\beta u + (D_x^\beta u)^2, \quad (4.50)$$

et on prend comme condition initiale

$$u(x, 0) = f(x). \quad (4.51)$$

On applique  $J^\alpha$ , l'opérateur inverse de  $D^\alpha$ , à l'équation (4.50) et en tenant compte de (4.51), on obtient

$$u(x, t) = f(x) - 2J^\alpha \phi_1(u(x, t)) + \frac{1}{2}J^\alpha \phi_2(u(x, t)) + J^\alpha \phi_3(u(x, t)), \quad (4.52)$$

où  $\phi_1(u) = u^2 D_x^\beta u$ ,  $\phi_2(u) = uu_{xx}$  et  $\phi_3(u) = (D_x^\beta u)^2$ .

Avec la méthode d'Adomian, la solution  $u(x, t)$  s'écrit sous la forme de la série (4.43). On décompose ensuite les opérateurs  $\phi_1(u)$ ,  $\phi_2(u)$  et  $\phi_3(u)$  comme suit :

$$\phi_1(u) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i, \quad (4.53)$$

$$\phi_2(u) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i, \quad (4.54)$$

$$\phi_3(u) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i. \quad (4.55)$$

D'après le lemme 4.3, on a

$$A_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{d\lambda^i} \left[ \phi_1 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{d\lambda^i} \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right)^2 D_x^\beta \left( \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad (4.56)$$

$$B_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{d\lambda^i} \left[ \phi_2 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{d\lambda^i} \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_{kxx} \right) \right]_{\lambda=0}, \quad (4.57)$$

$$C_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{d\lambda^i} \left[ \phi_3 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{d\lambda^i} \left[ \left( D_x^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right)^2 \right]_{\lambda=0}. \quad (4.58)$$

En effet, on peut facilement calculer ces polynomes. En voici quelques un :

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0^2 D_x^\beta u_0, \\ A_1 &= 2u_0 u_1 D_x^\beta u_0 + u_0^2 D_x^\beta u_1, \\ A_2 &= u_1^2 D_x^\beta u_0 + 2u_0 u_2 D_x^\beta u_0 + 2u_0 u_1 D_x^\beta u_1 + u_0^2 D_x^\beta u_2, \\ A_3 &= u_1^2 D_x^\beta u_1 + 2u_1 u_2 D_x^\beta u_0 + 2u_0 u_2 D_x^\beta u_1 + 2u_0 u_1 D_x^\beta u_2 \\ &\quad + 2u_0 u_3 D_x^\beta u_0 + u_0^2 D_x^\beta u_0^2 + D_x^\beta u_3. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Les quatre premiers termes de  $B_n$  sont :

$$\begin{aligned} B_0 &= u_0 u_{0xx}, \\ B_1 &= u_0 u_{1xx} + u_1 u_{0xx}, \\ B_2 &= u_2 u_{0xx} + u_0 u_{2xx} + u_1 u_{1xx}, \\ B_3 &= u_3 u_{0xx} + u_0 u_{3xx} + u_2 u_{1xx} + u_1 u_{2xx}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

et ceux de  $C_n$  sont donnés par

$$\begin{aligned} C_0 &= (D_x^\beta u_0)^2, \\ C_1 &= 2D_x^\beta u_0 D_x^\beta u_1, \\ C_2 &= (D_x^\beta u_1)^2 + 2D_x^\beta u_0 D_x^\beta u_2, \\ C_3 &= 2D_x^\beta u_1 D_x^\beta u_2 + 2D_x^\beta u_0 D_x^\beta u_3. \end{aligned} \quad (4.61)$$

On substitue (4.53 – 4.55) et (4.43) dans (4.52), on obtient la formule de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= f(x) \\ u_{n+1}(x, t) &= -2J^\alpha(A_n) + \frac{1}{2}J^\alpha(B_n) + J^\alpha(C_n); n \geq 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

## 4.9 Résolution numérique de l'équation du drainage avec dérivée fractionnaire temporelle

On considère l'équation du drainage avec dérivée fractionnaire en  $t$  (voir [29]) :

$$D_t^\alpha u = \frac{1}{2}uu_{xx} - 2u^2u_x + (u_x)^2; 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.63)$$

avec la condition initiale

$$u_0(x, 0) = f(x) = -\sqrt{c} \tanh(\sqrt{c}x), \quad (4.64)$$

où  $c$  est la vitesse du front d'onde [39].

La solution exacte de l'équation (4.63), pour le cas  $\alpha = \beta = 1$ , s'écrit sous la forme

$$u(x, t) = \begin{cases} -\sqrt{c} \tanh(\sqrt{c}(x - ct)); & x \leq ct \\ 0; & x > ct. \end{cases} \quad (4.65)$$

Pour obtenir des solutions numériques de l'équation (4.63), on substitue la condition initiale (4.64) et les polynômes d'Adomian (4.56) – (4.57) – (4.58) dans l'expression (4.63). On obtient

$$\begin{aligned} u_0 &= f(x), \\ u_1 &= -2J^\alpha(A_0) + \frac{1}{2}J^\alpha(B_0) + J^\alpha(C_0) \\ &= -2J^\alpha(u_0^2u_{0x}) + \frac{1}{2}J^\alpha(u_0u_{0xx}) + J^\alpha(u_{0x}^2) \\ &= f_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \\ u_2 &= -2J^\alpha(A_1) + \frac{1}{2}J^\alpha(B_1) + J^\alpha(C_1) \\ &= -2J^\alpha(2u_0u_1u_{0x} + u_0^2u_{1x}) + \frac{1}{2}J^\alpha(u_0u_{1xx} + u_1u_{0xx}) + J^\alpha(2u_{0x}u_{1x}) \\ &= f_2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

où

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\sqrt{c} \tanh(\sqrt{c}x), \\
f_1(x) &= -2f^2 f_x + \frac{1}{2} f f_{xx} + f_x^2, \\
f_2(x) &= -2(2f f_x f_1 + f^2 f_{1x}) + \frac{1}{2} f f_{1xx} + \frac{1}{2} f_1 f_{xx} + 2f_x f_{1x}, \\
f_3(x) &= -2f_x f_1^2 \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)} - 4f f_x f_2 - 4f f_1 f_{1x} \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)} \\
&\quad - 2f^2 f_{2x} + \frac{1}{2} f_{xx} f_2 + \frac{1}{2} f f_{2xx} + \frac{1}{2} f_1 f_{1xx} \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)} \\
&\quad + f_{1x}^2 \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)} + 2f_x f_{2x}.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

La solution numérique de l'équation (4.63) s'écrit alors :

$$u(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + f_3(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \tag{4.68}$$

### Simulation

Pour montrer l'efficacité de la méthode d'Adomian, nous traçons la solution numérique pour l'équation (4.63) avec  $\alpha = \frac{1}{2}$  ainsi que la solution exacte (4.65) lorsque  $\alpha = \beta = 1$ . La Figure1 représente la solution numérique de l'équation (4.63) vérifiant la condition initiale (4.64). La Figure2 représente la solution exacte (4.65). On voit clairement que le comportement est fort similaire.

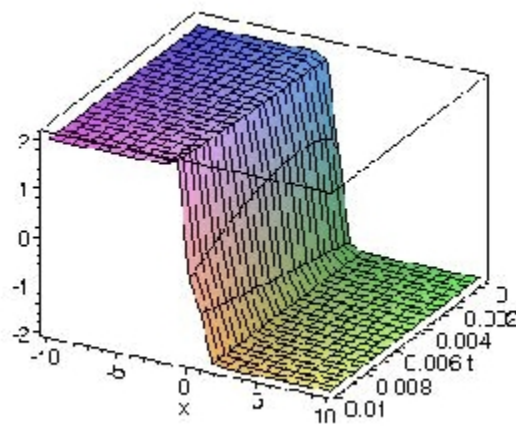


Figure 1

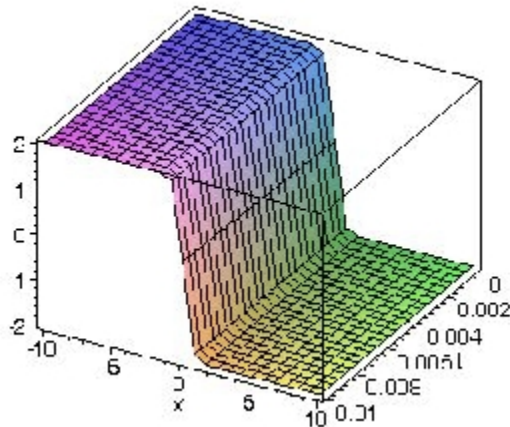


Figure 2

## 4.10 Résolution numérique de l'équation du drainage avec dérivée fractionnaire spatiale

On considère l'équation du drainage avec dérivée fractionnaire en  $x$  (voir [29]) :

$$u_t = \frac{1}{2}uu_{xx} - 2u^2D_x^\beta u + (D_x^\beta u)^2; 0 < \beta \leq 1. \quad (4.69)$$

Pour simplifier les calculs, on prend comme condition initiale :

$$u(x, 0) = f(x) = x^2. \quad (4.70)$$

Pour estimer la solution numérique de l'équation (4.69), on substitue (4.53 – 4.55) et la condition initiale (4.70) dans l'expression (4.52).

Les trois premiers termes de la série (4.62) sont donnés par :

$$\begin{aligned}
u_0 &= x^2, \\
u_1 &= -2J(A_0) + \frac{1}{2}J(B_0) + J(C_0) \\
&= -2J(u_0^2 D_x^\beta u_0) + \frac{1}{2}J(u_0 u_{0xx}) + J(D_x^\beta u_0)^2 \\
&= (f_1 x^{6-\beta} + x^2 + f_2 x^{4-2\beta}) t, \\
u_2 &= -2J(A_1) + \frac{1}{2}J(B_1) + J(C_1) \tag{4.71} \\
&= -2J(2u_0 u_1 D_x^\beta u_0 + u_0^2 D_x^\beta u_1) + \frac{1}{2}J(u_0 u_{1xx} + u_1 u_{0xx}) + J(2D_x^\beta u_0 D_x^\beta u_1) \\
&= (f_3 x^{10-2\beta} + f_4 x^{8-3\beta} + f_5 x^{6-\beta} + f_6 x^{6-4\beta} + f_7 x^{4-2\beta} + x^2) \frac{t^2}{2},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2, \quad f_1 = -2 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\beta)}, \quad f_2 = \left[ \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\beta)} \right]^2, \\
f_3 &= \left[ \frac{\Gamma(7-\beta)}{\Gamma(7-2\beta)} - 4 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\beta)} \right] f_1, \\
f_4 &= \left( \frac{\Gamma(5-2\beta)}{\Gamma(5-3\beta)} - 4 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\beta)} \right) f_2 + 2 \left( \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\beta)} \frac{\Gamma(7-\beta)}{\Gamma(7-2\beta)} \right) f_1, \\
f_5 &= ((6-\beta)(5-\beta) + 2) \frac{f_1}{2} - 3 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\beta)}, \\
f_6 &= 2 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\beta)} \frac{\Gamma(5-2\beta)}{\Gamma(5-3\beta)} f_2, \\
f_7 &= ((4-2\beta)(3-2\beta) + 6) \frac{f_2}{2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la solution de l'équation (4.69), vérifiant la condition (4.70) est donnée par la formule :

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= x^2 + (f_1 x^{6-\beta} + x^2 + f_2 x^{4-2\beta}) t + (f_3 x^{10-2\beta} + f_4 x^{8-3\beta} + \\
&\quad + f_5 x^{6-\beta} + f_6 x^{6-4\beta} + f_7 x^{4-2\beta} + x^2) \frac{t^2}{2} + \dots \tag{4.72}
\end{aligned}$$

### Simulation

La Figure3 représente la solution numérique (4.72) de l'équation (4.69) avec  $\beta = \frac{1}{2}$  et la Figure4 représente la solution (4.72) avec  $\beta = 1$ . On remarque que le comportement est fort similaire.

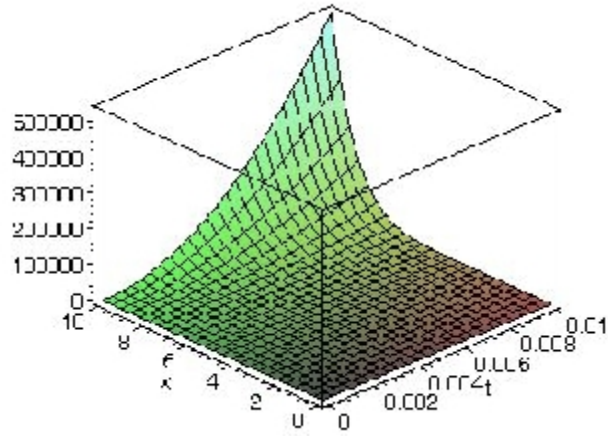


Figure 3

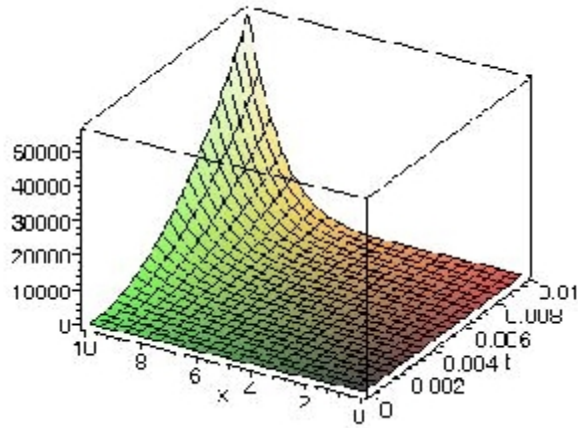


Figure 4

# Chapitre 5

## Un problème de perturbation singulière

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude du problème de perturbation singulière suivant :

$$\varepsilon y'' = y^2 - y^3 + a, \quad (5.1)$$

tel que  $a \simeq 0, \varepsilon \simeq 0$ .

L'équation réduite s'écrit :

$$y' = y^{\frac{2}{3}}. \quad (5.2)$$

Elle n'a pas unicité de solutions sur tout l'axe des  $t$ .

La comparaison des solutions de (5.1) avec celles de (5.2) est l'un des points importants dans ce type d'étude. A cause du défaut d'unicité, les techniques d'approximation usuelles (théorème de Tikonov [81], lemme de l'ombre courte [31]) sont insuffisantes pour répondre au problème posé, à savoir le comportement des solutions du problème perturbé près de l'axe des  $t$ .

Dans ce travail, en utilisant l'Axiomatique de Nelson [69] et les méthodes qui en découlent, on démontre que pour certaines valeurs du paramètre  $a$ , la solution "lente" du problème (5.1) passe près de l'axe des  $t$  sans perte de temps et pour d'autres valeurs de  $a$ , elle y reste indéfiniment.

### 5.2 Rappel de l'analyse non standard

#### Notations

1 : le symbole  $\varepsilon$  désigne un nombre infinitésimal strictement positif fixé.

2 : Le symbole  $\infty$  désigne un nombre réel infiniment grand (*i.g.*) positif.

3 : Le symbole  $\mathcal{L}$  désigne un nombre réel limité positif.

On note de même :

4 :  $\emptyset$  un nombre infiniment petit.

5 :  $\textcircled{\ast}$  un nombre appréciable.

6 :  $x \simeq y$  signifie  $x - y$  est infiniment petit " ou encore  $x - y \simeq 0$ .

7 :  $x \simeq \infty$  signifie  $x$  est infiniment grand.

8 :  $x \lesssim y$  signifie  $x$  est appréciablement inférieur à  $y$  ; ainsi  $1 \lesssim 2$ .

9 : Pour  $x$  limité,  ${}^0x$  désigne l'ombre de  $x$ . C'est l'unique nombre réel standard infiniment proche de  $x$ .

### Champ de vecteurs lent-rapide :

Soit le champ de vecteurs suivant :

$$\begin{cases} y' = f(y, u) \\ \varepsilon u' = g(y, u), \end{cases}$$

où  $0 < \varepsilon$ ,  $\varepsilon \simeq 0$  et  $f$  et  $g$  sont supposées de classe  $C^1$ .

La terminologie du champ lent-rapide s'explique par les deux observations suivantes ; appelons variété lente ( ou courbe lente) la courbe  $(C)$  d'équation :  $g(y, u) = 0$ .

1. *En dehors du halo de la courbe  $(C)$  :* la vitesse  $u' = \frac{g(y,u)}{\varepsilon}$  est non limitée ; notons aussi que  $\frac{du}{dy} = \frac{g}{\varepsilon f}$ . Ceci montre que les trajectoires du champ ci-dessus sont quasi-verticales et sont parcourues à vitesse grande.

2. *Dans le halo de la courbe  $(C)$  :* lorsqu'une solution est rentrée dans un voisinage infiniment petit de la courbe  $(C)$ , elle y reste jusqu'à avoir atteint les points "critiques". Le mouvement en  $y$  est lié à celui de  $u$  par la relation  $g(y, u) = 0$ . Or pour  $(y, u)$  limité,  $y' = f(y, u)$  est limité : le mouvement est dit *lent*.

## 5.3 Plan de phases

Dans le plan de phases  $(y, u = y')$ , le problème (5.1) est équivalent à

$$\begin{cases} y' = u \\ \varepsilon u' = y^2 - u^3 + a. \end{cases} \quad (5.3)$$

C'est un champ lent-rapide presque vertical sauf au voisinage de la courbe lente

$$y^2 - u^3 = 0, \quad (5.4)$$

qui est attractive et singulière à l'origine.

**Définition 5.1** On appelle *trajectoire lente*  $(y(t), u(t))$  toute solution issue d'un point  $(y_0, u_0)$  limité tel que  $y_0 \lesssim 0$  et  $y_0^2 \simeq u_0^3$ .

**Définition 5.2** On dit qu'une trajectoire  $(y(t), u(t))$  perd du temps à l'origine s'il existe  $t_1$  et  $t_2$  tels que  $t_1 \approx t_2$  et  $y(t_1) \simeq y(t_2)$ .

## 5.4 Résultats principaux

**Théorème 5.1** Pour  $a\varepsilon^{-\frac{6}{5}} = +\infty$ , les trajectoires lentes du système (5.3) ne perdent pas de temps au voisinage de  $(0, 0)$ .

**Remarque 5.1** Pour démontrer ce théorème, on a besoin des lemmes suivants :

**Lemme 5.1** Si  $a\varepsilon^{-\frac{6}{5}} = +\infty$ , alors pour toute trajectoire lente  $(y(t), u(t))$ ,  $u(t)$  présente un minimum  $d = Ka^{\frac{1}{3}}$ ;  $K \simeq 1$ .

**Lemme 5.2** Si  $a\varepsilon^{-\frac{6}{5}} = +\infty$ , alors pour toute trajectoire lente  $(y(t), u(t))$ , on a  $u(y)y^{-\frac{2}{3}} \simeq 1$ , pour tout  $y$ ;  $y_0 \lesssim y < 0$  et tel que  $a^{\frac{1}{2}}y$  soit i.g.

### Démonstration du lemme 5.1

Soit  $(y_0, u_0)$  un point limité tel que  $y_0 \lesssim 0$  et  $u_0 \geq 0$ . On veut étudier la trajectoire  $(\gamma)$  issue de ce point.

Soit le changement de variable de paramètre  $\beta$  suivant :

$$y = \beta^{\frac{3}{2}}Y, \quad u = \beta U, \quad t = \beta^{\frac{1}{2}}T; \quad \beta \in ]0, 1[. \quad (5.5)$$

Le système (5.3) s'écrit alors :

$$\begin{cases} Y' = U \\ U' = \frac{\beta^{\frac{5}{2}}}{\varepsilon} (Y^2 - U^3 + a\beta^{-3}). \end{cases} \quad (5.6)$$

Comme  $a > 0$ , alors l'axe  $u = 0$  est une barrière inférieure [71] et on a  $u(t) > 0$ , pour tout  $t$ .

On note  $d := \inf u(t)$  réalisé au point  $M$  de coordonnées  $(Y_M, U_M)$ . On a

$$y_M^2 - u_M^3 + a = 0,$$

ou encore

$$y_M^2 - d^3 + a = 0.$$

Il est utile de préciser que si la distance à l'échelle initiale entre le point  $M$  et l'axe horizontal est  $d$ , elle devient  $d\beta^{-1}$  sous l'effet du changement de variable (5.5).

Maintenant, on prend  $\beta = d$ . On a alors

$$Y_M^2 - 1 + ad^{-3} = 0, \quad U_M = 1.$$

D'où

$$Y_M^2 = 1 - ad^{-3} < 1.$$

Donc, avec le changement de variable du paramètre  $d$ , le point  $M$  se transforme en un point d'ordonnée égale à 1 et d'abscisse limitée. Le système (5.3) devient :

$$\begin{cases} Y' = U \\ U' = \frac{d^{\frac{5}{2}}}{\varepsilon} (Y^2 - U^3 + ad^{-3}). \end{cases} \quad (5.7)$$

Il est équivalent à :

$$\begin{cases} Y' = U \\ U' = \left(\frac{d^3}{a}\right)^{\frac{5}{6}} \left(\frac{a}{\varepsilon^{\frac{5}{6}}}\right)^{\frac{5}{6}} (Y^2 - U^3 + ad^{-3}). \end{cases} \quad (5.8)$$

Comme  $ad^{-3}$  est limité et  $a\varepsilon^{-\frac{6}{5}}$  est supposé égal à  $+\infty$ , alors le système ci-dessus est toujours lent-rapide. Sa variété lente s'écrit :

$$Y^2 - U^3 + ad^{-3} = 0. \quad (5.9)$$

On suppose ( par l'absurde) que  $ad^{-3}$  n'est pas proche de 1. Il s'ensuit que la demi droite  $(\Delta)$  d'équation  $U = 1 - Y; Y < 0$  est un piège [71]. En effet, le champ en un point de  $(\Delta)$  s'écrit :

$$\begin{cases} Y' = 1 - Y \\ U' = \frac{d^{\frac{5}{2}}}{\varepsilon} (Y^2 - (1 - Y)^3 + ad^{-3}). \end{cases} \quad (5.10)$$

Donc, on a :

$$\frac{U'}{Y'} = \frac{d^{\frac{5}{2}}}{\varepsilon} \frac{Y^2 - (1 - Y)^3 + ad^{-3}}{1 - Y}, \quad (5.11)$$

soit

$$\frac{U'}{Y'} = \frac{d^{\frac{5}{2}}}{\varepsilon} \left( \frac{Y(Y - 1)^2 + 2}{1 - Y} - 1 + ad^{-3} \right). \quad (5.12)$$

On a deux cas :

\* Si  $Y$  est limité, alors le rapport  $\frac{U'}{Y'}$  est un *i.g.* négatif, il est donc inférieur à  $-1$ ; la demi-droite est donc un piège; ce qui est absurde.

\*\* Si  $Y$  est un *i.g.*, alors avec des calculs simples, on montre aussi que,  $\frac{U'}{Y'}$  est un *i.g.* négatif, il est donc inférieur à  $-1$ ; la demi-droite est donc un piège. Ce cas est aussi absurde.

Donc on a  $ad^{-3} \simeq 1$ .

### Démonstration du lemme 5.2

Reprenons notre trajectoire  $(\gamma)$  issue du point  $(y_0, u_0)$  limité tel que  $y_0 \lesssim 0, u_0 > 0$ .

Comme, sur l'axe  $u = 0$ , la composante  $u' = y^2 + a$  est strictement positive ( car  $a > 0$ ), alors cet axe est une barrière inférieure et on est sûr que  $(\gamma)$  vérifie partout  $u > 0$ . Par conséquent, la composante  $y$  est strictement croissante et la trajectoire  $(\gamma)$  peut s'écrire comme le graphe d'une fonction  $\tilde{u}(y)$ . On veut démontrer que  $\tilde{u}(y)y^{\frac{-2}{3}} \simeq 1$ , pour toute valeur de  $y$  vérifiant  $y_0 \lesssim y < 0$  et  $a^{\frac{-1}{2}}y$  est *i.g.*

### Calcul préliminaire

Soit  $\eta$  un réel positif. Le changement de variable :

$$y = \eta^3 Y, \quad u = \eta^2 U, \quad t = \eta T \quad (5.13)$$

transforme le système (5.1) en

$$\begin{cases} Y' = U \\ \varepsilon \eta^{-5} U' = Y^2 - U^3 + a \eta^{-6}. \end{cases} \quad (5.14)$$

De plus, avec ces notations, on a :

$$\tilde{U}(Y)Y^{\frac{2}{3}} = \tilde{u}(y)y^{\frac{2}{3}}. \quad (5.15)$$

Soit  $k$  un réel positif tel que  $(k+1)^3 < 2$ . On définit l'ensemble :

$$E_k = \left\{ y; \quad y_0 \leq 2y \leq 0 \quad \text{et} \quad \left| \tilde{u}(y)y^{\frac{-2}{3}} - 1 \right| \geq k \right\}.$$

On choisit  $\eta = \max \left\{ a^{\frac{1}{6}}, (-\min E_k)^{\frac{1}{3}} \right\}$  :

\* Si  $\eta = a^{\frac{1}{6}}$ , on a alors

$$\varepsilon\eta^{-5} = \left( \frac{a}{\varepsilon^{\frac{6}{5}}} \right)^{\frac{-5}{6}} \simeq 0.$$

Dans ce cas, le système (5.14) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} Y' = U \\ \varepsilon\eta^{-5}U' = Y^2 - U^3 + 1. \end{cases} \quad (5.16)$$

C'est donc un champ lent-rapide.

La variété lente s'écrit :

$$Y^2 - U^3 + 1 = 0. \quad (5.17)$$

Pour  $Y = -1$ , on a  $y = -\eta^3$ . Mais, comme  $\eta \geq (-\min E_k)^{\frac{1}{3}}$ , donc on a  $y = -\eta^3 \leq \min E_k$ .

Il s'ensuit que :

$$\left| \tilde{U}(-1) - 1 \right| < k. \quad (5.18)$$

Alors le point  $(Y = -1, U = \tilde{U}(-1))$  est un point limité du plan  $(Y, U)$  et il appartient à notre trajectoire.

Mais l'étude du champ lent-rapide montre que  $(Y = -1, U = \tilde{U}(-1))$  appartient au halo de la courbe lente (5.17) et donc on a  $\tilde{U}(-1) \simeq 2^{\frac{2}{3}}$ , d'où une contradiction.

Donc le seul cas qui reste est  $\eta = (-\min E_k)^{\frac{1}{3}}$  :

comme  $a^{\frac{1}{6}} < \eta$ , alors  $\left( a^{\frac{1}{6}}\eta^{-1} \right)^5$  est un *i.p.* et donc la valeur :

$$\varepsilon\eta^{-5} = (a\varepsilon^{\frac{-6}{5}})^{\frac{-5}{6}} \left( a^{\frac{1}{6}}\eta^{-1} \right)^5 \text{ est un } i.p.$$

Dans ce cas, le système (5.14) est un système lent-rapide. Sa courbe lente prend la forme :

$$Y^2 - U^3 +^0 (a\eta^{-6}) = 0. \quad (5.19)$$

Avec le même raisonnement que ci-dessus, on montre que la trajectoire  $(\gamma)$  longe cette courbe et donc au point  $(Y = -1, U = \tilde{U}(-1))$ , on a à la fois :

$$\left| \tilde{U}(-1) - 1 \right| < k$$

et

$$\tilde{U}(-1) \simeq (1 + a\eta^{-6})^{\frac{1}{3}}.$$

Ceci ne peut se produire que si :

$$\tilde{U}(-1) \simeq (1 + a\eta^{-6})^{\frac{1}{3}},$$

c'est à dire :

$$a\eta^{-6} \simeq (k + 1)^3 - 1.$$

Donc on a :

$$\eta^3 = -\min E_k = a^{\frac{1}{2}} [k(3 + 3k + k^2)]^{\frac{-1}{2}} (1 + \mathcal{O}), \quad (5.20)$$

où  $\mathcal{O}$  est un réel *i.p.*

D'où la démonstration du lemme 5.2.

### Démonstration du théorème 5.1

Soit  $[c_1, c_2]$  un intervalle de  $y$  tel que  $c_1 \simeq 0, c_2 \simeq 0$ , et  $c_1 < 0 < c_2$ .

On va évaluer le temps perdu par la trajectoire  $(\gamma)$  dans  $[c_1, c_2]$ .

On choisit, comme point de découpage, un point  $\tilde{c}$  tel que  $\tilde{c}$  s'écrive sous la forme :

$$\tilde{c} = a^r; \quad \frac{1}{3} \lesssim r \lesssim \frac{1}{2}, \quad (5.21)$$

et on suppose que :

$$c_1 < -\tilde{c} < \tilde{c} < c_2.$$

$t_1$  étant fixé,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{c_1}^{c_2} \frac{dy}{u(y)} = \int_{c_1}^{-\tilde{c}} \frac{dy}{u(y)} + \int_{-\tilde{c}}^{\tilde{c}} \frac{dy}{u(y)} + \int_{\tilde{c}}^{c_2} \frac{dy}{u(y)}. \quad (5.22)$$

On calcule d'abord  $B_1 = \int_{-\tilde{c}}^{\tilde{c}} \frac{dy}{u(y)}$ .

D'après le lemme 5.1, on a  $u(y) > d = Ka^{\frac{1}{3}}$ . Alors  $B_1 \leq \frac{2\tilde{c}}{Ka^{\frac{1}{3}}} \simeq 0$ .

On calcule maintenant  $A_1 = \int_{c_1}^{-\tilde{c}} \frac{dy}{u(y)}$ .

D'après le lemme 5.2, on a

$$A_1 \simeq \int_{c_1}^{-\tilde{c}} \frac{dy}{u(y)} \simeq \int_{c_1}^{-\tilde{c}} \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = 3 \left( -\tilde{c}^{\frac{1}{3}} - c_1^{\frac{1}{3}} \right) \simeq 0.$$

De la même manière, on calcule l'intégrale  $C_1 = \int_{\tilde{c}}^{c_2} \frac{dy}{u(y)}$ .

La valeur  $t_2 - t_1$  est donc proche de 0.

D'où la démonstration du théorème 5.1.

**Théorème 5.2** Pour  $a\varepsilon^{-\frac{6}{5}}$  limité positif, les trajectoires lentes du système (5.3) ne perdent pas de temps au voisinage de  $(0, 0)$ .

Pour démontrer ce théorème, on a besoin des lemmes suivants :

**Lemme 5.3** Soit  $a = b\varepsilon^{\frac{6}{5}}$  tel que  $b$  soit un réel limité positif. Alors on a  $u(y)y^{-\frac{2}{3}} \simeq 1$ , pour tout  $y$  vérifiant  $\varepsilon^{-\frac{3}{5}}|y|$  i.g.

**Lemme 5.4** Si  $a\varepsilon^{-\frac{6}{5}}$  est limité, alors pour toute trajectoire lente  $(y(t), u(t))$ ,  $u(t)$  présente un minimum  $d = K\varepsilon^{\frac{2}{5}}$ ;  $K \simeq 1$ .

### Démonstration du lemme 5.3

Soit  $y_1$  fixé tel que  $y_1$  s'écrive sous la forme :  $y_1 = -\varkappa\varepsilon^{\frac{3}{5}}$ , où  $\varkappa$  désigne un i.g. positif.

Le changement de variable :

$$y = \varepsilon^{3\alpha}Y, \quad u = \varepsilon^{2\alpha}U, \quad t = \varepsilon^\alpha T \quad (5.23)$$

transforme le système (5.3) en

$$\begin{cases} Y' = U \\ \varepsilon^{1-5\alpha}U' = Y^2 - U^3 + a\varepsilon^{-6\alpha}. \end{cases} \quad (5.24)$$

On choisit le paramètre  $\alpha$  tel que  $Y_1 = \varepsilon^{-3\alpha}y_1$  soit égal à  $-1$ .

Autrement dit :

$$-\varkappa\varepsilon^{\frac{3}{5}-3\alpha} = -1.$$

On a alors

$$(\varepsilon^{\frac{1}{5}-\alpha})^3 = \frac{1}{\varkappa}.$$

Cette valeur est infinitésimale, et donc  $\frac{1}{5} - \alpha$  est positif.

De plus, par hypothèse, on a

$$a\varepsilon^{-6\alpha} = b\varepsilon^{\frac{6}{5}-6\alpha} \simeq 0.$$

Dans ce cas, le système (5.24) est un système lent-rapide. Il admet comme variété lente la courbe d'équation :

$$Y^2 - U^3 = 0.$$

Ce qui veut dire que, pour  $y$  nettement supérieur à la valeur initiale  $y_0$  ( $y_0 < 0$ ) et  $y \leq y_1$ ,  $y^{\frac{2}{3}}$  est une bonne approximation de  $u$ . D'où la démonstration du lemme 5.3

### Démonstration du lemme 5.4

Même raisonnement que celui du lemme 5.1.

### Démonstration du théorème 5.2

On considère  $[\delta_1, \delta_2]$  un intervalle de  $y$  tel que  $\delta_1 \simeq 0$ ,  $\delta_2 \simeq 0$ , et  $\delta_1 < 0 < \delta_2$  et on évalue le temps perdu par la trajectoire  $(\gamma)$  dans  $[\delta_1, \delta_2]$ .

Cette fois-ci, on choisit, comme point de découpage, un point  $\tilde{\delta}$  tel que  $\tilde{\delta}$  s'écrive sous la forme :

$$\tilde{\delta} = \varkappa \varepsilon^{\frac{3}{5}}; \text{ avec } \varkappa \text{ est un } i.g. \text{ positif,}$$

et on suppose que :

$$\delta_1 < -\tilde{\delta} < \tilde{\delta} < \delta_1.$$

$t_1$  étant fixé,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{dy}{u(y)} = \int_{\delta_1}^{-\tilde{\delta}} \frac{dy}{u(y)} + \int_{-\tilde{\delta}}^{\tilde{\delta}} \frac{dy}{u(y)} + \int_{\tilde{\delta}}^{\delta_2} \frac{dy}{u(y)}. \quad (5.25)$$

On calcule d'abord  $B_2 = \int_{-\tilde{\delta}}^{\tilde{\delta}} \frac{dy}{u(y)}$ .

D'après le lemme 5.4, on a  $u(y) > d = K\varepsilon^{\frac{2}{5}}$ , et donc  $B_2 \leq \frac{2\tilde{\delta}}{K\varepsilon^{\frac{2}{5}}} \simeq 0$ .

On calcule maintenant  $C_2 = \int_{\tilde{\delta}}^{\delta_2} \frac{dy}{u(y)}$ .

Comme  $y\varepsilon^{\frac{-3}{5}} \geq \tilde{\delta}\varepsilon^{\frac{-3}{5}}$ , donc  $y\varepsilon^{\frac{-3}{5}}$  est *i.g.*

Alors, d'après le lemme 5.3, on a

$$C_2 \simeq \int_{\tilde{\delta}}^{\delta_2} \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \left( \delta_2^{\frac{1}{3}} - \tilde{\delta}^{\frac{1}{3}} \right) \simeq 0.$$

De la même manière, on calcule  $A_2 = \int_{\delta_1}^{-\tilde{\delta}} \frac{dy}{u(y)}$ .

D'où la démonstration du théorème 5.2.

**Remarque 5.2** Pour  $b \simeq 0$ ,  $b > 0$ , on a le même résultat que celui du théorème 5.2.

**Théorème 5.3** Pour  $a = -\varkappa \varepsilon^{\frac{6}{5}}$ , alors les trajectoires lentes de (5.3) restent indéfiniment au voisinage de  $(0, 0)$ .

**Remarque 5.3** Pour démontrer ce théorème, on a besoin des lemmes suivants :

**Lemme 5.5** Si  $a\varepsilon^{-\frac{6}{5}} = -\varkappa$ , alors la trajectoire lente vérifie  $u(t)y^{\frac{-2}{3}}(t) \simeq 1$ , pour tout  $y$ ;  $y_0 \lesssim y < 0$  et tel que  $(-a)^{\frac{-1}{2}}y$  soit *i.g.*

**Lemme 5.6** Il existe un  $\bar{y}$ ;  $\bar{y} = -\@(-a)^{\frac{1}{2}}$  tel qu'on ait  $\frac{1}{2} < \frac{\bar{u}^3(t)}{\bar{y}^2(t)} < \frac{3}{2}$ .

### Démonstration du Lemme 5.5

On utilise les mêmes techniques que celles du lemme 5.3, la seule différence c'est que  $u$  n'est plus fonction de  $y$ .

### Démonstration du Lemme 5.6

D'après le lemme 5.5, on a :

$\frac{u^3(t)}{y^2(t)} \simeq 1$ , pourvu que  $\frac{y(t)}{(-a)^{\frac{1}{2}}}$  soit un *i.g.* négatif.

On a alors  $\left| \frac{u^3(t)}{y^2(t)} - 1 \right| \simeq 0$ ; pour  $y(t) = -\varkappa (-a)^{\frac{1}{2}}$ .

Donc pour  $\frac{y(t)}{(-a)^{\frac{1}{2}}} = -\varkappa$ , on a  $\left| \frac{u^3(t)}{y^2(t)} - 1 \right| < \frac{1}{2}$ .

Par le principe de permanence [69], cette inégalité reste vraie pour un certain  $\bar{y} = -\textcircled{a}(-a)^{\frac{1}{2}}$ , avec  $\textcircled{a}$  est un nombre appréciable positif.

D'où la démonstration du lemme 5.6.

### Démonstration du Théorème 5.3

On reprend le changement de variables (5.13) et on choisit  $\alpha = \frac{\ln(-a)}{6 \ln \varepsilon}$ .

D'après le lemme 5.6, on sait qu'il existe un  $\bar{y}$ ;  $\bar{y} = -\textcircled{a}(-a)^{\frac{1}{2}}$  tel qu'on ait  $\frac{1}{2} < \frac{\bar{u}^3(t)}{\bar{y}^2(t)} < \frac{3}{2}$ .

On cherche maintenant à démontrer que la trajectoire lente reste indéfiniment au voisinage de  $(0, 0)$ .

On a :

*i)* le point  $(\bar{Y}, \bar{U})$  est un point limité dans le plan  $(Y = \varepsilon^{-3\alpha}y, U = \varepsilon^{-2\alpha}u)$ . En effet, d'une part on a :

$$\bar{Y} = \varepsilon^{-3\alpha}\bar{y} = \bar{y} \left( \frac{-1}{a} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est une valeur appréciable (donc limitée).

D'autre part, on a

$$\frac{\bar{U}^3}{\bar{Y}^2} = \frac{\bar{u}^3(t)}{\bar{y}^2(t)} < \frac{3}{2}.$$

La valeur de  $\bar{U}$  est donc limitée.

*ii)* Le système

$$\begin{cases} Y' = U \\ \varepsilon^{1-5\alpha}U' = Y^2 - U^3 - 1 \end{cases} \quad (5.26)$$

est lent-rapide (grâce au choix de  $\alpha$ ).

De *i)* et *ii)*, on déduit qu'à l'échelle  $Y = \varepsilon^{-3\alpha}y, U = \varepsilon^{-2\alpha}u$ , la trajectoire étudiée rentre dans la région limitée du plan  $(Y, U)$  et elle sera donc attirée par le foyer stable  $(-1, 0)$  où elle reste indéfiniment. D'où la démonstration du Théorème 5.3.

## Conclusions et Perspectives

Dans ce travail de thèse, on a étudié des systèmes elliptiques contenant des opérateurs non locaux s'écrivant comme des puissances fractionnaires du Laplacien.

Comme poursuite de ce travail, il est intéressant d'étudier le problème :

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{\mu_1}{2}} |u| + (-\Delta)^{\frac{\mu_2}{2}} |v| = f(x, u) |v|^q + F(x, u) \\ (-\Delta)^{\frac{\nu_1}{2}} |v| + (-\Delta)^{\frac{\nu_2}{2}} |u| = g(x, v) |u|^p + G(x, v). \end{cases}$$

Peut-on avoir des conditions sur  $f, F, g, G, N, \mu, \nu, p$  et  $q$  pour que ce système n'admette que des solutions triviales ?

On a aussi étudié un système de réaction-diffusion avec la non linéarité  $u^n |\nabla v|^2$ . Nous avons résolu le problème d'existence et d'unicité de solutions globales à l'aide des estimations sur  $u$  et  $v$  ainsi que sur  $|\nabla u|$  et  $|\nabla v|$ .

Parmi les points nécessitant un travail complémentaire, on peut envisager, dans un premier temps, d'étudier le système (3.1)-(3.3) avec une linéarité du type  $u^n |\nabla v|^p$ ,  $p > 2$ . Puis dans un second temps, l'étude pourrait être approfondie en passant à l'étude des ondes voyageuses pour ces systèmes.

Et en ce qui concerne le problème de perturbation singulière du chapitre IV, il est maintenant clair, par valeurs intermédiaires, qu'il existe une valeur du paramètre  $a$  telle que la solution lente de (5.1) reste un temps appréciable au voisinage de l'axe des  $t$  puis en sort. Pour calculer le temps  $t(a)$ , ce cas reste un problème ouvert. Une piste d'amélioration de ce résultat serait de relier le temps perdu, par la trajectoire lente avec la distance (notée  $d(a)$ ) entre la séparatrice du col et le fleuve. L'étude numérique de ce cas donne la valeur  $a^* = -0.2597084\varepsilon$ . Pour cette valeur, le fleuve coïncide avec la séparatrice du col au point associé. Il est à noter que : " pour que le temps perdu soit appréciable, il faut que cette distance soit exponentiellement petit ". On peut commencer par démontrer que la fonction  $d(a)$  est de classe  $C^1$  ou au moins Lypchitziennes ( pour pouvoir relier le temps à la valeur  $a - a^*$ ). On peut aussi s'intéresser à l'unicité de la valeur pour laquelle le fleuve coïncide avec la séparatrice du col ; c'est à dire on démontre que l'équation  $d(a) = 0$  admet une solution unique. En rassemblant ces ingrédients, on pourra conclure que :

Pour  $a = -A\varepsilon^{\frac{-6}{5}}$ , tel que  $A$  soit un réel appréciable négatif, alors les trajectoires lentes de (8) restent un temps appréciable au voisinage de  $(0, 0)$  puis en sortent.

Le calcul de Melnikov permettra de calculer le temps perdu ( en fonction de  $\varepsilon, a$  et des valeurs propres).

On peut aussi s'intéresser à un problème plus général. On considère par exemple le système :

$$\begin{cases} y = \varepsilon u \\ \varepsilon u = y^2 - u^3 + a + P(y, u, \varepsilon) \\ \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Comme hypothèse, une condition sur "le poids" du polynome  $P$  suffit. Une vision dans  $\mathbb{R}^3$  des variétés centrales et des plans invariants est indispensable et une discussion sur les paramètre est nécessaire pour achever cette étude.

# Bibliographie

- [1] K. Abbaoui, Y. Cherruault, Convergence of Adomian's method applied to differential equations. *Comput. Math. Appl.* 28(5) (1994), 103-109.
- [2] K. Abbaoui, Y. Cherruault, New ideas for proving convergence of decomposition method. *Comput. Math. Appl.* 29 (1995), 103-108.
- [3] M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge University Press, New York, 1991.
- [4] G. Adomian, *Nonlinear Stochastic Systems : Theory and Applications to Physics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.
- [5] G. Adomian, *Solving frontier problems of physics : The Decomposition Method*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1994.
- [6] N. Alaa, Solutions faibles d'équations paraboliques quasi-linéaires avec données initiales mesurées. *Ann. Math. Blaise Pascal* 3 (1996), 1-15.
- [7] N. Alaa, M. Pierre, Weak solutions for some quasilinear elliptic equations with data measures. *SIAM J. Math. Anal.* 24 (1993), 23-25.
- [8] J. D. Avrin, Qualitative theory for a model of laminar flames with arbitrary nonnegative initial data. *J. Diff. Eqs.* 84 (1990), 209-308.
- [9] E. Babolian, A. Davari, Numerical implementation of Adomian decomposition method for linear Volterra integral equation of the second kind. *Appl. Math. Comput.* 165 (2005), 223-227.
- [10] S. Badraoui, Existence globale et comportement asymptotique pour quelques systèmes de réaction-diffusion. Thèse de Doctorat d'Etat, université de Annaba, 2004.
- [11] A. Bensoussan, L. Bocardo, F. Murat, On a nonlinear P.D.E having natural growth terms and unbounded solutions. *Ann Ins. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire* 5 (1988), 347-364.
- [12] L. Berlyand and J. Xin, Large time asymptotic of solutions to a model combustion system with critical nonlinearity. *Nonlinearity* 8 (1995), 161-178.
- [13] N. Boudiba, existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion paraboliques quasi-linéaires. thèse de 3ème cycle, USTHB 1995.
- [14] N. Boudiba, M. Pierre, S. Moulay, Global existence for gradient-dependant system with balance law. *Proceedings of the Second International conference on Differential Equations in Marakech*, juin 1995.
- [15] J. Bricomt, A. Kupiainen, J. Xin, Global large time self-similarity of a thermal-diffusive combustion system with critical nonlinearity. *J. Diff. Eqs*, Vol. 130, No. 1 (1996), 9-35.

- 
- [16] L. A. Caffarelli, B. Gidas, J. Spruck, Asymptotic symmetry and local behavior of semi-linear elliptic equations with critical Sobolev growth. *Comm. Pure. Appl. Math.* 42 (1989), 271-297.
- [17] P. Cartier, Perturbation singulière des équations différentielles ordinaires et analyse non-standard. *Séminaire Bourbaki* n° 580.
- [18] Chen Caisheng, Global Existence and Asymptotic Behavior of Solutions for a Strongly Coupled Parabolic System. *Journal of Mathematical Research & Exposition*, Vol. 14, No. 2, 1994.
- [19] W. Chen, C. Li, and B. Ou, Classification of solutions for a system of integral equations, *Communications in Partial differential Equations*, 30 (2005), 59-65.
- [20] D. Chen, L. Ma, A Liouville type theorem for an integral system. *Commun. Pure. Appl. Math.* (2006), 855-859.
- [21] Y. Chen, Y.Z. Yan, Weierstrass semi rational expansion method and new doubly periodic solutions of the generalized Hirota-Satsuma coupled KdV system. *Appl. Math. Comput.* 177 (2006), 85-91.
- [22] Y. Cherruault, Convergence of Adomian's method. *Kybernetes* 18 (1989), 31-38.
- [23] P. Collet and J. Xin, Global existence and large time asymptotic bounds of  $L^\infty$  solutions of thermal diffusive combustion system on  $\mathbb{R}^n$ . *Ann. Scuola Norm. Sup.* 23 (1996), 625-642.
- [24] A. Cordoba, D. Cordoba, A pointwise estimate for fractionary derivatives with applications to partial differential equations. *PNAS*. vol 100 no. 26 (2003).
- [25] V. Daftardar-Gejji, H. Jafari, Adomian decomposition : a tool for solving a system of fractional differential equations. *J. Math. Anal. Appl.* 301 (2005), 508-518.
- [26] Z. Dahmani, S. Kerbal, Solution to nonlinear gradient dependent systems with a balance law. *E.J.D.E.*, Vol 2007, No. 158 (2007), 1-7.
- [27] Z. Dahmani, F. Karami, S. Kerbal, Nonexistence of positive solutions to nonlinear nonlocal elliptic systems. *J. Math. Anal. Appl.* Vol 346, Issue 1, 1 (2008), 22-29.
- [28] Z. Dahmani, M. M. Mesmoudi, R. Bebbouchi, The Extended Tanh method for solving some evolution equations. *Accepté dans I.J.N.S Juin* (2008).
- [29] Z. Dahmani, M. M. Mesmoudi, R. Bebbouchi, The foam-drainage equation with time and space fractional derivative solved by the ADM method. *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, No. 30. (2008), 1-10.
- [30] D. G. De Figueiredo, P. L. Felmer, A Liouville-type theorem for elliptic systems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Series IV, XXI* (1994), 387-397.
- [31] M. Diener, C. Lobry, *Analyse non standard et représentation du réel*. O. P. U. Alger, 1985.
- [32] E. Fan , Extended tanh function method and its applications to nonlinear equations, *Phys. Lett.* A277 (2000), 212-218.
- [33] R. Fisher, The advance of advantageous genes. *Ann. Eugenics*, 7 (1937), 335-369.
- [34] U. Frisch, M. Lesieur, A. Brissaud, Qualitative problems in fully developed turbulence ; a solution model. *J. of Fluid Mech.*, 65 (1974), 145-147.

- 
- [35] B. Gidas, J. Spruck, Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 34 (1981), 525-598.
- [36] V. V. Gudkov, Existence of a travelling wave solution for multicomponent systems. *Differents. Uravn.*, 31, N°.1 (1995), 23-29.
- [37] A. Haraux et M. Kirane, Estimations  $C^1$  pour des problèmes paraboliques semi-linéaires. *Ann. Fac. Sci. Toulouse* 5 (1983), 265-280.
- [38] J. H. He, Some applications of nonlinear fractional differential equations and their approximations. *Bull. Sci. Techno.* 15(2) (1999), 86-90.
- [39] M. A. Helal, M. S. Mehanna, The tanh method and Adomian decomposition method for solving the foam drainage equation. *Appl. Math. Comput.* 190 (2007), 599-609
- [40] D. Henry, Geometric theory of semilinear parabolic equations. *Lecture Notes in Math.* 840, Springer, New York, 1981.
- [41] S. Hilgenfeldt, S. A. Koehler, H. A. Stone, Dynamics of coarsening foams : accelerated and self-limiting drainage. *Phys. Rev. Lett.* 20 (2001), 4704-7407.
- [42] N. Himoun, K. Abbaoui, Y. Cherruault, New results of convergence of Adomian's method. *Kybernetes* 28(4-5) (1999), 423-429.
- [43] S. L. Hollis, R. H. Martin, and M. Pierre, Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems. *SIAM J. Math. Anal.* 18 (1987), 744-761.
- [44] H. Jafari, V. Daftardar-Gejji, Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomian decomposition. *J. Comput. Appl. Math.* 196 (2006), 644-651.
- [45] N. Ju , The Maximum Principle and the Global Attractor for the Dissipative 2D Quasi-Geostrophic Equations. *Comm. Pure. Appl. Ana.* (2005), 161-181.
- [46] J. I. Kanel and M. Kirane, Global existence and large time behavior for positive solutions to a reaction-diffusion system. *Differential and Integral Equations*, 13 (1-3), (2000), 255-264.
- [47] J. I. Kanel and M. Kirane, Global solutions of reaction-diffusion systems with a balance law and nonlinearities of exponential growth. *J. Differential Equations* 165, No 1, (2000), 24-41.
- [48] J. I. Kanel, On global initial boundary value problems for reaction-diffusion systems with balance conditions. *Nonlinear Analysis*, 37 (1999), 971-995.
- [49] D. Kaya, S. M. El Sayad , A numerical implementation of the decomposition method for the Lienard equation. *Appl. Math. Comput.* 171 (2005), 1095-1103.
- [50] S. Kemple, H. Beyer, Global and causal solutions of fractional differential equations in : Transform Method and Special Functions. *Varna 96, Proceeding of the 2nd International Workshop (SCTP)*, Singapore, 1997.
- [51] M. Kirane, Global bounds and asymptotics for a system of reaction-diffusion systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 138 (1989), 328-342.
- [52] M. Kirane and A. Youkana, A reaction-diffusion system modelling the post irradiation oxydation of an isotactic polypropylene. *Demonstr. Math.* 23 (1999), 309-321.
- [53] M. Kirane, S. Kouachi, Global solutions to a system of strongly coupled reaction-diffusion equations. *Nonlin. Anal. Theo. Methods and Appl.*, 26 (1996), 1387-1396.

- 
- [54] M. Kirane, M. Qafsaoui, Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear reaction-diffusion systems. *J. Math. Anal. Appl.* 268 (2002), 217-243.
- [55] S. Kouachi, Existence of global solution to reaction-diffusion systems via a Lyapunov functional. *E.J.D.E*, Vol. 2001, No. 68 (2001), 1-10.
- [56] R. H. Kraichnan, Dynamic of nonlinear stochastic system. *J. Math. Phys.* 2 (1961), 124-148.
- [57] S. N. Kruzhkov, The Cauchy problem of some classes of quasi-linear parabolic equations. *Mathematischeskies Zametki*, 6. (1979), 295-300.
- [58] O. Ladyzhenskaya, V. Solonnikov and N. Ural'ceva, Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Amer. Math. Soc, Providence, RI, 1968 (reprinted with corrections in 1988).
- [59] B. Larrouturou, The equations of one-dimentional unsteady flames propagation : existence and uniqueness. *SIAM J. Math. Anal.* 19 (1988), 32-59.
- [60] R. A. Leonard, R. Lemlich, A study of interstitial liquid flow in foam. *A.I.Ch.E.J.* 11 (1965), 18-25.
- [61] Y. Lucko, R. Gorenflo, The initial value problem for some fractional differential equations with the Caputo derivative. Preprint Series A 08-98, Fachbereich Mathematik und Informatik, Freie Universitat Berlin, 1998.
- [62] Y. Lucko, H. M. Srivastava, The exact solutions of certain differential equations of fractional order by using operational calculus. *Comput. Math. Appl.* 29 (1995), 73-85.
- [63] W. Malfiet, Solitary wave solutions of nonlinear equations. *Am. J. Phys.* 60 (1992), 650-654.
- [64] W. Malfiet, W. Hereman, The tanh method : Exact solutions of nonlinear and wave equations. *Phys. Scr.* 54 (1996), 563-568.
- [65] R. Martin and M. Pierre, Nonlinear reaction-diffusion systems. In " Nonlinear Equations in the Applied Sciences" Academic Press, Boston, 1992.
- [66] K. Masuda, On the global existence and asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations. *Hokkaido Math. J.* 12 (1983), 360-370.
- [67] E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, Absence of global positive solutions of quasilinear elliptic inequalities. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk* 359, no.4 (1998), 456-460.
- [68] E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, Existence of positive solutions for a systems of quasilinear alliptic equations and inequalities in  $IR^N$ . *Dokl. Math.* 59, no. 3 (1999), 351-355.
- [69] E. Nelson, Internal set theory a new approach to non standard analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.* 83 (1977), 1165-1197.
- [70] A. C. Newel, Whitehead, J.A. Finite bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid. Mech.* 38 (279) (1969).
- [71] R. E. O'Malley, Introduction to singular perturbations. Acad. Press , N.Y., 1974.
- [72] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer , New York, 1983.
- [73] I. Podlubny, Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, 1999.
- [74] M. H. Protter and H. F. Weinberger, Mximum principles in differential equations. Springer , New York, 1984.

- 
- [75] R. Rendlinger, Pontwise a priori bounds for strongly coupled semilinear problems. *Indiana Univ. Math. Journ.*, 36 (1987), 441-454.
- [76] F. F. Rothe, Global solutions of reaction-diffusion. *Lecture Notes in Math.* 1072, Springer Berlin, 1984.
- [77] G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional Integral and Derivative : Theory and Applications*. Gordon and Breach, Yverdon, 1993.
- [78] J. Serrin, H. Zou, Non-existence of positive solutions of semilinear elliptic systems, Preprint, 1994.
- [79] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*. Springer Verlag, Berlin, New York 1983.
- [80] M. A. Souto, A priori estimates and existence of positive solutions of nonlinear cooperative elliptic systems. *Diff. Int. Equations*. 8 (1995), 1245-1258.
- [81] A. N. Tikhonov, Systems of differential equations containing small parameters multiplying the derivatives. *Math. Sborn.* 31 (1952), 575-586.
- [82] F. Tomi, Uber semilineare elliptische differentialgleichungen zweiter ordnung. *Math. Z.*, 11 (1969), 350-366.
- [83] A. Troesch, E. Urlacher, *Perturbations singulières et analyse non-standard : Ck-convergence et crépitement des solutions*. Publications IRMA , Strasbourg , 1977.
- [84] G. Verbist, D. Weuire , *Europhys. Lett.* 26 (1994).
- [85] G. Verbist, D. Weuire, A.M. Kraynik, The foam drainage equation. *J. Phys. Condens. Matter* 8 (1996), 3715-3731.
- [86] W. von Wahl, A-priori schranken fur semilineare und quasilineare parabolische differentialgleichungen in der ebene. *Math. Z.*, 128 (1972), 93-108.
- [87] Q. Wang, Numerical solutions for fractional KdV-Burgers equation by Adomian decomposition method. *Appl. Math. Comput.* 182 (2006), 1049-1055.
- [88] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. Robert E Kriger Publishing Company, New York, (1977).
- [89] A.M. Wazwaz, A new approach to the nonlinear advection problem. *Appl. Math. Comput.* 72 (1995), 175-181.
- [90] A.M. Wazwaz, A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators. *Appl. Math. Comput.* 111 (2000), 53-69.
- [91] A.M. Wazwaz , *Partial Differential Equations : Methods and Applications*. Balkema Publishers. The Netherlands, 2002.
- [92] A. M. Wazwaz, New solitary wave solutions for modified forms of Degasperis-Procesi and Camassa-Holm equations. *Physics Letter A* 352 (2006), 500-504.
- [93] A. M. Wazwaz, The extended tanh method for new solitons solutions for many forms of the fifth order KdV equations. *Applied Mathematics and Computations*. 184 (2) (2007), 1002-1014.
- [94] A. M. Wazwaz, Analytic study on Burgers, Fisher, Huxely equations and combined forms of the equations. *Appl. Math. Comput.* In press.
- [95] A. M. Wazwaz, Travelling wave solutions of generalized forms of Burgers, Burgers KdV and Burgers-Huxely equations. *Appl. Math. Comput.* 169 (2005), 639-656.

- [96] A. M. Wazwaz, A. Georguis, An analytic study of Fisher's equations by using Adomian decomposition method. *Appl. Math. Comput.* 154 (2004), 609-620.
- [97] D. Weaire, S. Hutzler, *The Physics of Foams*, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [98] D. Weaire, S. Hutzler, S. Cox, M.D. Alonso, D. Drenckhan, The fluid dynamics of foams. *J. Phys. Condens. Matter* 15 (2003), S65-S73
- [99] B. J. West, M. Bologna, P. Grigolini, *Physics of Fractal Operators*. Springer, New York, 2003.
- [100] J. Zeldovich, D. Frank- Kamenteskii, A theory of thermal propagation of flame. *Acta Physiochimica*, URSS, 9 (1939), 341-350.