

N° d'ordre : 05/2006-E/ MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENNE  
FACULTE DE : MATHEMATIQUES



# THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat d'Etat  
EN : MATHEMATIQUES  
Spécialité : ALGEBRE ET THEORIE DES NOMBRES  
PAR : **BEHLOUL DJILALI**

Sujet

**SOLUTIONS POLYNOMIALES ET SOLUTIONS  
RATIONNELLES DE CERTAINS SYSTEMES  
D' EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES**

Soutenue le 04/07/2006, devant le jury suivant

Mr. Benali BENZAGHOU, Professeur, USTHB	Président
Mr. Kamel BETINA, Professeur, USTHB	Directeur de thèse
Mr. Mohamed ZITOUNI, Professeur, USTHB	Examineur
Mr. Arezki KESSI, Professeur, USTHB	Examineur
Mr. M.Nacer BENKAFADAR, Professeur, U. Constantine	Examineur
Mme. Soraya BOUGHABA, Maître de Conférences, U. Constantine	Examineur

## *Remerciements*

Je remercie Mr.Pr. B.BENZAGHOU qui me fait l'honneur de présider ce jury.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Mr.Pr. K.BETINA qui a accepté de diriger le travail.

Je suis aussi redevable à Mr.Pr. M.ZITOUNI, Mr.Pr. A.KESSI, Mr.Pr. M.N.BENKAFADAR et à Mme.MC. S.BOUGHABA, qui ont examiné attentivement le travail.

<b>1</b>	<b>Chapitre 1 : GENERALITES</b>	<b>3</b>
1.1	Introduction générale . . . . .	3
1.2	Indice d'un opérateur . . . . .	4
1.2.1	Indice analytique . . . . .	4
1.2.2	Indice formel . . . . .	5
1.2.3	Régularité . . . . .	6
1.3	Solutions polynomiales . . . . .	7
1.4	Polygone de Newton . . . . .	10
1.4.1	Classification des singularités . . . . .	10
1.4.2	Nature des solutions . . . . .	10
1.4.3	Polygone de Newton . . . . .	12
1.4.4	Algorithme de Frobenius . . . . .	14
1.4.5	Algorithme de Newton . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Chapitre 2 : Solutions méromorphes d'une classe d'équations différen-</b>	
	<b>tielles non linéaires</b>	<b>28</b>
2.1	Introduction . . . . .	28
2.2	Solutions méromorphes . . . . .	29
2.3	Solutions rationnelles . . . . .	29
2.4	Solutions polynomiales . . . . .	31
2.5	Algorithme . . . . .	34

2.5.1	Etude du cas dégénéré . . . . .	38
2.6	Exemples . . . . .	46
2.7	Programme Maple . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Chapitre 3 : Systèmes d'équations aux dérivées partielles</b>	<b>54</b>
3.1	Introduction . . . . .	54
3.1.1	Définitions et notations . . . . .	54
3.2	Equations aux dérivées partielles . . . . .	55
3.2.1	Enoncé du Théorème fondamental . . . . .	55
3.2.2	Preuve du Théorème fondamental . . . . .	64
3.3	Systèmes d'équations aux dérivées partielles . . . . .	64
3.3.1	Premier ordre . . . . .	64
3.3.2	Ordres supérieurs . . . . .	66
	<b>Bibliographie</b>	<b>67</b>

# Chapitre 1 : GENERALITES

## 1.1 Introduction générale

Les thèmes de cette thèse, en deux parties, concernent l'aspect algébrique et analytique des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles.

Le chapitre (I) est consacré d'abord à présenter un aperçu sur la théorie de l'indice et de la régularité dans le cas d'une variable. On décrira ensuite l'algorithme d'Abramov, qui calcule toutes les solutions polynomiales de l'équation différentielle linéaire :

$$a_n(x)u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)u(x) = 0$$

où  $u^{(i)}$  désigne la dérivée d'ordre  $i$  par rapport à  $x$  et les  $a_i(x) \in \mathbb{C}[x]$ .

Le célèbre algorithme du polygone de Newton qui permet le calcul des solutions formelles de certaines classes d'équations différentielles fera ensuite l'objet d'une description détaillée.

Dans le chapitre (II), notre travail consiste à caractériser toutes les solutions méromorphes sur  $\mathbb{C}$ , de l'équation différentielle non linéaire :

$$by' = c_my^m + c_{m-1}y^{m-1} + \dots + c_1y + c_0 \quad (I)$$

où  $m$  est un entier,  $m \geq 3$ ,  $b, c_i \in \mathbb{C}[x]$ ,  $b \neq 0$ , et  $c_m \neq 0$ .

Notre étude, consiste en utilisant la théorie de Malmquist-Yosida, (voir [20]), à ramener le problème du calcul des solutions méromorphes sur  $\mathbb{C}$  de (I), à un problème de calcul de solutions polynomiales d'une équation différentielle associée à (I).

En suite, on s'inspire des méthodes de Newton et d'Abramov, et on propose un algorithme pour calculer toutes les solutions polynomiales de l'équation associée; et on établira que (I), admet un nombre fini de solutions méromorphes sur  $\mathbb{C}$ . La mise en oeuvre de notre algorithme est aussi illustrée au moyen d'un programme Maple.

Dans le chapitre (III), on introduit la notion de régularité pour les opérateurs aux dérivées partielles, ensuite on construit, en utilisant la théorie de W.Chow, (voir [7]), une classe régulière d'opérateurs aux dérivées partielles; enfin, on généralisera aux systèmes.

## 1.2 Indice d'un opérateur

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels et

$$L : E \rightarrow F$$

un homomorphisme. On dit que l'opérateur  $L$  est à indice si  $\dim_{\mathbb{C}} \ker L < +\infty$  et  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Co} \ker L < +\infty$  et dans ce cas on appelle indice de  $L$  le nombre

$$\chi(L, E, F) = \dim_{\mathbb{C}} \ker L - \dim_{\mathbb{C}} \text{Co} \ker L.$$

Si  $E = F$ , on écrit simplement  $\chi(L, E)$

### 1.2.1 Indice analytique

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ .

$H(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions holomorphes sur  $\Omega$ . Soit  $L = \sum_{i=0}^m a_i D^i$  un opéra-

teur différentiel où  $D = \frac{d}{dx}$ ,  $a_i \in H(\Omega)$ , ( $0 \leq i \leq m$ ). L'opérateur  $L$  définit un endomorphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} L : H(\Omega) &\rightarrow H(\Omega) \\ u &\rightarrow Lu = \sum_{i=0}^m a_i D^i u \end{aligned}$$

**Théorème 1** (voir[17])

Si le premier nombre de Betti  $b_1 = \dim_{\mathbb{C}} H^1(\Omega)$  est fini, et si le nombre de zéros  $v(a_m, \Omega)$  de  $a_m$  dans  $\Omega$  (comptés avec leur multiplicité) est fini alors l'opérateur  $L$  est à indice et on a

$$\chi(L, H(\Omega)) = m(1 - b_1) - v(a_m, \Omega)$$

**Corollaire 1**

Si  $a_m \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$  et  $\Omega = \mathbb{C}$  alors

$$\chi(L, H(\mathbb{C})) = m - \deg(a_m)$$

### 1.2.2 Indice formel

$\mathbb{C}[[x]]$  désigne l'anneau des séries formelles en l'indéterminée  $x$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .

Soit  $a = \sum_{i \geq 0} c_i x^i \in \mathbb{C}[[x]]$ , alors la valuation  $v(a)$  de  $a$  est donnée par  $v(a) = \inf\{k \in \mathbb{N} ; c_k \neq 0\}$  et  $v(0) = +\infty$ .

**Théorème 2** (voir[17])

L'opérateur différentiel

$$\begin{aligned} L : \mathbb{C}[[x]] &\rightarrow \mathbb{C}[[x]] \\ u &\rightarrow Lu = \sum_{i=0}^m a_i D^i u \end{aligned}$$

où  $a_i \in \mathbb{C}[[x]]$ , est à indice et on a

$$\chi(L, \mathbb{C}[[x]]) = \sup_{0 \leq i \leq m} (i - v(a_i))$$

### 1.2.3 Régularité

Soient  $L = \sum_{i=0}^m a_i D^i$ ,  $a_i \in \mathbb{C}[x]$ ,  $s \in \mathbb{C}[x]$ ,  $W = \{x \in \mathbb{C} ; s(x) = 0\}$ ,  $Y = \{x \in \mathbb{C} ; a_m(x) = 0\}$ , et  $U$  un disque ouvert non vide de  $\mathbb{C}$ . On suppose que  $a_m$  et  $s$  ne sont pas identiquement nuls.

Notons  $M(U)$  l'espace des fonctions méromorphes dans  $U$  et, pour  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $M_A(U)$  l'ensemble des fonctions analytiques dans  $U \setminus A$  et éventuellement méromorphes le long de  $A$  qu'on suppose fini,  $\theta(U)$  l'espace des fonctions analytiques dans  $U$  et pour  $f \in \theta(U)$  et  $x_0 \in U$ , on note  $v_{x_0}(f)$  la valuation de  $f$  en  $x_0$ , c'est-à-dire que si  $f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n (x - x_0)^n$  dans un voisinage de  $x_0$ , alors  $v_{x_0}(f) = \inf\{n \in \mathbb{N} ; c_n \neq 0\}$  et  $v_{x_0}(f) = +\infty$  si  $f$  est identiquement nulle dans un voisinage de  $x_0$ .

$\mathbb{C}[x]_q$  désigne l'anneau localisé en  $q \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$ .

Considérons l'équation différentielle

$$(E) \begin{cases} L(u) = g \\ u \in M(U), g \in \mathbb{C}[x]_s \end{cases}$$

Le théorème suivant donne la dimension du noyau de l'opérateur

$$L : \frac{M_W(U)}{\mathbb{C}[x]_s} \rightarrow \frac{M_W(U)}{\mathbb{C}[x]_s}$$

Notons  $d^0 a_i$  le degré de  $a_i$  et soit  $Z = W \setminus W \cap U$ .

**Théorème 3** (voir[5])

a) Si  $Y \not\subset U$  et  $W \subset U$ , alors

$$\dim \ker(L, \frac{M_W(U)}{\mathbb{C}[x]_s}) = m - \sum_{x \in U} v_x(a_m) - \inf_{0 \leq i \leq m} (i - d^0 a_i) > 0$$

b) Si  $Y \subset U$  et  $W \not\subset U$ , alors

$$\dim \ker(L, \frac{M_W(U)}{\mathbb{C}[x]_s}) = m - d^0 a_m - \inf_{0 \leq i \leq m} (i - d^0 a_i) + m \text{ Card } Z > 0$$

c) Si  $Y \not\subset U$  et  $W \not\subset U$ , alors

$$\dim \ker(L, \frac{M_W(U)}{\mathbb{C}[x]_s}) = m - \sum_{x \in U} v_x(a_m) - \inf_{0 \leq i \leq m} (i - d^0 a_i) + \sum_{x_i \in Z} \chi(L, \mathbb{C}[[x - x_i]]) > 0$$

d) Si  $Y \cup W \subset U$ , alors

$$\dim \ker(L, \frac{M_W(U)}{\mathbb{C}[x]_s}) = m - d^0 a_m - \inf_{0 \leq i \leq m} (i - d^0 a_i).$$

### Corollaire 2

Si  $m - d^0 a_m = \inf_{0 \leq i \leq m} (i - d^0 a_i)$  et si  $u \in M(\mathbb{C})$  et  $Lu = 0$  alors  $u \in \mathbb{C}[x]_{a_m}$ .

### Corollaire 3

Si  $Y \cup W \subset U$  et si  $m - d^0 a_m = \inf_{0 \leq i \leq m} (i - d^0 a_i)$  alors toute solution  $u$  de l'équation (E) est dans  $\mathbb{C}[x]_{sa_m}$ .

**Théorème 4** (voir[5])

Si  $m - d^0 a_m = \inf_{0 \leq i \leq m} (i - d^0 a_i)$  alors l'opérateur

$$L : \frac{M(\mathbb{C})}{\mathbb{C}(x)} \rightarrow \frac{M(\mathbb{C})}{\mathbb{C}(x)}$$

est injectif. Dans ce cas on dit que  $L$  est régulier.

## 1.3 Solutions polynomiales

Le calcul des solutions polynomiales d'équations différentielles homogènes à coefficients dans  $\mathbb{C}[x]$  a été étudié par Liouville, voir [16]. En 1995, Abramov, Bronstein et Petkovšek, (voir [1]), ont donné un algorithme performant du calcul de ces solutions.

Nous rappelons ici le principe de ce calcul en considérant le problème sous trois points de vue.

Soit

$$P(u(x)) = a_n(x)u^{(n)}(x) + \dots + a_0(x)u(x) = 0$$

une équation différentielle linéaire homogène à coefficients dans  $\mathbb{C}[x]$ .

Rechercher les solutions polynomiales de  $P(u(x)) = 0$  revient à résoudre des systèmes linéaires et aussi à rechercher des suites finies solutions de relations de récurrence.

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) Le polynôme  $z(x) = z_0 + \dots + z_d x^d$  est solution de l'équation  $P(u(x)) = 0$ .  
 2) La suite finie  $(z_0, z_1, \dots, z_d)$  satisfait une relation de récurrence du type :

$$\alpha_0(i)y_i + \dots + \alpha_b(i)y_{i+b} = 0 \quad (1)$$

avec  $\alpha_j(i) \in \mathbb{C}$  (par convention  $z_k$  est nul si  $k$  est dans  $\{-b, \dots, -1\}$ )

L'entier  $b$  est appelé alors ordre de la relation de récurrence.

Plus généralement, si  $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une base de polynômes de  $\mathbb{C}[x]$  telle que

$$Q_i \mid Q_{i+1} \text{ et } \deg(Q_i) = i \quad (2)$$

alors les coefficients  $u_i$  d'une série  $u(x) = \sum_i u_i Q_i(x)$ , vérifiant  $P(u(x)) = 0$ , satisfont une relation du type (1).

### Définition 1

Soit  $P$  un opérateur différentiel linéaire et  $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une base de polynômes du type (2).

On appelle relation de récurrence associée à  $(P, (Q_i)_{i \in \mathbb{N}})$  la relation de récurrence satisfaite par les coefficients d'une série  $\sum_i u_i Q_i(x)$  solution de  $P(u(x)) = 0$ .

- 3) Le vecteur  $Z = {}^t(z_0, z_1, \dots, z_d)$  est solution du système linéaire :

$$A_d Z = 0$$

où la matrice  $A_d$  est une matrice à coefficients dans  $\mathbb{C}$  ayant  $d + b + 1$  lignes et  $d + 1$  colonnes.

Le coefficient de la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne de la matrice  $A_d$  est défini comme suit :

$$\begin{cases} \alpha_{j-i+b}(i-b-1) & \text{si } 1 \leq i \leq d+b+1 \text{ et } \max(i-b, 1) \leq j \leq \min(i, d+1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La recherche des solutions polynomiales peut se diviser en deux étapes : recherche des degrés possibles puis résolution d'un système linéaire.

Si  $d$  est le degré d'une solution polynomiale, alors d'après (1) on a

$$\alpha_0(d)z_d + 0 + \dots + 0 = 0.$$

Comme, par définition du degré,  $z_d$  est non nul, nous obtenons  $\alpha_0(d) = 0$ .

### Définition 2

L'équation  $\alpha_0(i) = 0$  est appelé équation indicielle pour la relation de récurrence (1).

Les solutions dans  $\mathbb{N}$  de l'équation indicielle donnent les degrés possibles des solutions polynomiales recherchées.

Pour trouver les solutions polynomiales il suffit alors de chercher les solutions  $d$  de l'équation indicielle, puis de résoudre les systèmes linéaires

$$A_d Y = 0$$

### Remarque 1

La procédure Maple [polysols] calcule les solutions polynomiales d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels.

### Exemple 1

$$x^2 u'' - 3x u' + 3u = 0$$

```
> with(DEtools):  
> ode := x^2 * diff(u(x), x$2) - 3 * x * diff(u(x), x) + 3 * u(x) :  
> polysols(ode, u(x));
```

Réponse

$$[x^3, x]$$

## 1.4 Polygone de Newton

On décrira dans cette partie, une méthode de calcul des solutions séries formelles d'équations différentielles linéaires, utilisant la notion du polygone de Newton (voir [19]).

### 1.4.1 Classification des singularités

On considère des équations différentielles d'ordre  $n$  de la forme

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y(x) = 0 \quad (7)$$

où les  $p_i$  sont des fonctions rationnelles de la variable complexe  $x$ .

Il est bien connu depuis Fuchs, que les seules singularités possibles de (7) sont celles des coefficients  $p_i$ .

#### Définition 4

Un point  $x_0$  ( $x_0 \neq \infty$ ) est un point singulier régulier si toutes les fonctions  $(x-x_0)^{n-i}p_i$  sont analytiques au voisinage de  $x_0$ . Autrement, on dit que  $x_0$  est un point singulier irrégulier.

Et pour le point à l'infini, on utilise la transformation  $x = 1/t$  : la nature du point  $x_0 = \infty$  est donnée par celle du point  $t = 0$  pour l'équation transformée.

### 1.4.2 Nature des solutions

Considérons une équation différentielle la forme (7). Supposons qu'elle présente une singularité en 0 (on peut toujours se ramener à ce cas). La nature des solutions dépend de la nature des singularités.

Si  $x = 0$  est un point singulier régulier, il existe  $n$  solutions linéairement indépendantes de la forme :

$$y(x) = x^\mu \sum_{i=0}^{s-1} (\log x)^i \varphi_i(x) \quad (8)$$

où les  $\varphi_i$  sont des séries de Taylor, le rayon de convergence de ces séries est au moins égal à la distance de 0 à la plus proche singularité des coefficients  $p_i$ .

Ces solutions peuvent être calculées en utilisant l'algorithme de Frobenius.

Si  $x = 0$  est un point singulier irrégulier, les solutions sont d'une nature plus compliquée.

La théorie classique montre qu'il existe un système fondamental de solutions de la forme :

$$y(x) = x^\mu \sum_{i=0}^{s-1} (\log x)^i \psi_i(x) \quad (9)$$

où les  $\psi_i$  sont des séries de Laurent

$$\psi_i(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{ik} x^k$$

Mais il n'y a pas d'algorithme pour calculer les solutions sous la forme (9) ( il est pratiquement impossible de travailler avec les séries de Laurent ). Pour pouvoir effectivement calculer les solutions, on est obligé de passer par ce qu'on appelle les solutions formelles, que l'on sait calculer. Les solutions formelles décrivent parfaitement le comportement asymptotique des vraies solutions au voisinage de points singuliers.

La théorie classique nous donne un système fondamental de solutions formelles de la forme :

$$e^{Q(1/t)} t^\mu \sum_{i=0}^{s-1} \varphi_i(t) (\log t)^i \quad (10)$$

avec  $t^r = x$  pour un entier  $r$  convenable,  $Q \in \mathbb{C}[t]$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$ ,  $s \in \mathbb{N}^*$ , et les  $\varphi_i \in \mathbb{C}[[t]]$ ,  $\mathbb{C}[[t]]$  désignant l'anneau des séries formelles à une indéterminée sur  $\mathbb{C}$ .

Ces solutions sont dites formelles car les séries qui interviennent dans (10) divergent généralement.

On dispose d'un algorithme, dit algorithme de Newton, qui permet de calculer une

base de solutions formelles.

### 1.4.3 Polygone de Newton

Nous noterons  $\mathbb{C}((x))$  ( $=\mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ ) le corps des séries formelles méromorphes à une indéterminée sur  $\mathbb{C}$ .

Pour  $a = \sum \alpha_j x^j$ ,  $a \in \mathbb{C}((x))$ ,  $a \neq 0$ , on pose  $v(a) = \inf\{j/\alpha_j \neq 0\}$ . Et pour  $a = 0$  on pose  $v(a) = +\infty$ .

Nous considérons des opérateurs différentiels à coefficients dans  $\mathbb{C}((x))$  de la forme

$$L = \sum_{i=0}^n a_i \partial^i, \quad \partial = \frac{d}{dx}, \quad a_i = \sum_{j=v(a_i)}^{+\infty} \alpha_{i,j} x^j \in \mathbb{C}((x))$$

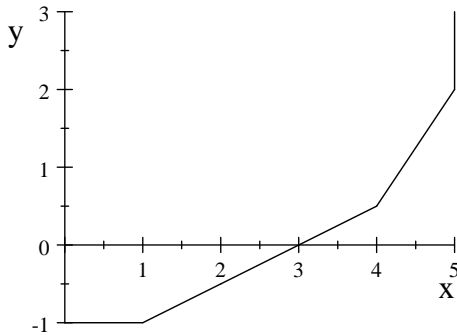
Le polygone de Newton de l'opérateur  $L$  est défini de la manière suivante :

On note  $Q^+(u, v) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq u, y \geq v\}$ , le deuxième quadrant de  $\mathbb{R}^2$  translaté en  $(u, v)$ .

On considère alors l'ensemble

$$M^+(L) = \bigcup_{\alpha_{i,j} \neq 0} Q^+(i, j - i).$$

Le polygone de Newton de  $L$  est l'enveloppe convexe inférieure de  $M^+(L)$ . Nous le noterons  $N(L)$ .



Le polygone  $N(L)$  peut être décrit par la suite de ses sommets :

$$S_0 = (u_0, v_0), S_1 = (u_1, v_1), \dots, S_p = (u_p, v_p).$$

où les  $u_k$  et  $v_k$  sont des entiers vérifiant

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_p = n \\ v_0 &\leq v_1 < v_2 < \dots < v_p. \end{aligned}$$

On associera à  $N(L)$  la suite strictement croissante des pentes

$$0 \leq \lambda_0 = \frac{v_1 - v_0}{u_1 - u_0} < \lambda_1 = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} < \dots < \lambda_{p-1} = \frac{v_p - v_{p-1}}{u_p - u_{p-1}},$$

des diverses arrêtes

$$A_0 = [S_0, S_1], \dots, A_{p-1} = [S_{p-1}, S_p]$$

On notera  $l(\lambda_j)$  la longueur de la projection sur l'axe des abscisses de l'arrête  $A_j$  de pente  $\lambda_j$ .

Pour les opérateurs différentiels à coefficients séries formelles méromorphes, on peut donner la définition suivante :

**Définition 5**

L'opérateur  $L$  est dit à singularité régulière (en  $x = 0$ ), si pour tout  $i$ ,  $v(a_i) - i \geq v(a_n) - n$ . Sinon  $L$  est dit à singularité irrégulière.

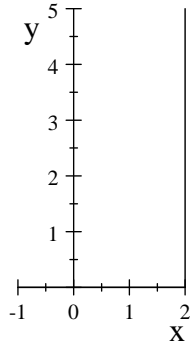
La nature régulière ou irrégulière de l'opérateur  $L$ , se lit directement sur son polygone de Newton  $N(L)$ .

En effet on a la caractérisation suivante :

L'opérateur  $L$  est à singularité régulière en zéro, si et seulement si son polygone de Newton  $N(L)$  n'a qu'une seule pente, égale à 0.

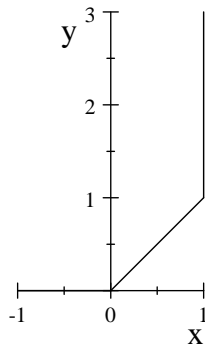
**Exemples 2**

a)  $L = x^2 \partial^2 + x \partial + x^2 - v^2$  (Bessel)



Dans cet exemple, l'opérateur  $L$  est à singularité régulière.

b)  $L = x^2\partial + 1$  (Euler)



Dans cet exemple, l'opérateur  $L$  est à singularité irrégulière.

#### 1.4.4 Algorithme de Frobenius

Nous décrirons l'algorithme seulement pour les équations différentielles d'ordre 2 et du type (7), la méthode se généralise pour les équations de degrés supérieurs.

Soit  $L$  un opérateur différentiel de degré 2. On suppose qu'il possède une singularité régulière en 0. Quitte à multiplier  $L$  par une puissance de  $x$  on peut écrire  $L$  sous la forme

$$L = x^2b_2(x)\partial^2 + xb_1(x)\partial + b_0(x)$$

où les  $b_i \in \mathbb{C}[x]$  avec  $b_2(0) \neq 0$ .

Première étape : Action de  $L$  sur  $x^\mu$ .

On forme

$$L(x^\mu) = \mu(\mu - 1)b_2(x)x^\mu + \mu x^\mu b_1(x) + b_0(x)x^\mu$$

que nous écrivons sous la forme

$$L(x^\mu) = x^\mu f(x, \mu)$$

$f(x, \mu)$  étant un polynôme qu'on peut écrire sous la forme

$$f(x, \mu) = f_0(\mu) + f_1(\mu)x + \dots + f_d(\mu)x^d$$

où  $d = \max\{\text{degré}(b_i), i = 0, 1, 2\}$

si l'on note

$$b_i(x) = \sum_{j=0}^d b_{i,j}x^j, \quad (i = 0, 1, 2)$$

il est facile de voir que

$$f_j(\mu) = b_{2,j}\mu(\mu - 1) + b_{1,j}\mu + b_{0,j}, \quad j = 0, 1, \dots, d.$$

Deuxième étape : Formation du développement des solutions :

L'algorithme de Frobenius consiste seulement à chercher des solutions formelles sous la forme

$$y(x, \mu) = x^\mu \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i, \quad (g_0 \neq 0) \quad (11)$$

On peut écrire formellement

$$L(y) = \sum_{i=0}^{+\infty} g_i L(x^{i+\mu})$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} x^{i+\mu} \sum_{v=0}^{+\infty} g_v f_{i-v}(\mu + v)$$

Donc  $y(x, \mu)$  satisfera l'équation  $L(y) = 0$  si les  $g_v$  vérifient les relations

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} g_0 f_0(\mu) = 0 \\ g_1 f_0(\mu + 1) + g_0 f_1(\mu) = 0 \\ \dots \\ g_v f_0(\mu + v) + g_{v-1} f_1(\mu + v - 1) + \dots + g_0 f_v(\mu) = 0 \end{array} \right.$$

avec  $f_j(\mu) = 0$ , pour  $j > d$ .

On en déduit que  $\mu$  doit être une racine de l'équation algébrique  $f_0(\mu) = 0$ . Cette équation est appelée l'équation indicielle.

D'une manière générale, étant donnés  $g_0 \neq 0$  et  $\mu$  quelconque, on peut chercher les  $g_v, v \geq 1$ , comme fractions rationnelles de  $\mu$  de telle sorte que  $y(x, \mu)$  soit solution de l'équation non homogène

$$L(y(x, \mu)) = g_0 f_0(\mu) x^\mu \quad (12)$$

En particulier, si  $\mu$  est tel que  $f_0(\mu + i) \neq 0$  pour tout  $i \geq 1$ , alors les  $g_v, v \geq 1$  peuvent être déterminés d'une manière unique par le système linéaire (S). On obtient ainsi une solution formelle de l'équation (12) sous la forme (11). Dans toute la suite  $y(x, \mu)$  désignera cette solution de l'équation non homogène (12)

Troisième étape : Description des solutions :

Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  les deux racines de l'équation indicielle  $f_0(\mu) = 0$ . Supposons que  $\text{Re}(\mu_1) \geq \text{Re}(\mu_2)$ , alors  $f_0(\mu_1 + i) \neq 0$  pour tout  $i \geq 1$ , donc  $y(x, \mu_1)$  est solution formelle de l'équation  $L(y) = 0$ .

Nous dirons que nous sommes dans le cas générique si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  ne diffèrent pas d'un entier.

Dans ce cas  $y_1(x) = y(x, \mu_1)$  et  $y_2(x) = y(x, \mu_2)$  sont deux solutions formelles linéairement indépendantes.

Et pour le cas non générique (i.e.  $(\mu_1 - \mu_2) \in \mathbb{N}$ ) :

Considérons d'abord le cas simple où  $\mu_1 = \mu_2$ . Dans ce cas nous avons naturellement

une première solution formelle  $y_1 = y(x, \mu_1)$

Pour obtenir une deuxième solution formelle, on dérive par rapport à  $\mu$  les deux membres de l'équation (12) :

$$L\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right) = x^\mu g_0 \frac{\partial f_0}{\partial \mu}(\mu) + x^\mu g_0 f_0(\mu) \log x$$

Comme

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mu}(\mu_1) = f_0(\mu_1) = 0$$

on en déduit que

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial \mu} y(x, \mu) \Big|_{\mu=\mu_1} = y(x, \mu_1) \log x + x^\mu \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\partial g_i}{\partial \mu}(\mu_1) x^i$$

est une solution formelle de  $L(y) = 0$ .

L'existence du terme logarithmique dans  $y_2(x)$  assure l'indépendance linéaire des deux solutions formelles  $y_1(x)$  et  $y_2(x)$ .

Supposons maintenant que  $(\mu_1 - \mu_2) = n \in \mathbb{N}$ . Dans ce cas nous avons une première solution formelle  $y_1 = y(x, \mu_1)$ .

$g_0$  étant arbitraire nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$g_0 = (\mu - \mu_2)C_0, (C_0 \neq 0)$$

Avec ce choix de  $g_0$  l'équation (12) s'écrit

$$L(y(x, \mu)) = (\mu - \mu_2)C_0 f_0(\mu) x^\mu$$

Remarquons que  $\mu_2$  est racine double de  $(\mu - \mu_2)f_0(\mu)$ , et donc si nous dérivons relativement à  $\mu$  les deux membres de l'équation précédente puis remplaçons  $\mu$  par  $\mu_2$ , nous aurons

$$L\left(\frac{\partial}{\partial \mu} y(x, \mu)\right)\Big|_{\mu=\mu_2} = 0$$

Nous obtenons ainsi une deuxième solution formelle qui s'écrit

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial \mu} y(x, \mu)\Big|_{\mu=\mu_2} = x^{\mu_2} (\log x) \sum_{v=0}^{+\infty} g_v(\mu_2) x^v + x^{\mu_2} \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \mu} g_v(\mu)\Big|_{\mu=\mu_2} x^v$$

et qui est indépendante de  $y_1(x)$  à cause du terme logarithmique.

Les séries qui interviennent dans ces solutions sont convergentes dans un voisinage de 0 (voir [13]).

### 1.4.5 Algorithme de Newton

Nous décrivons l'algorithme seulement pour les équations différentielles d'ordre 2 et du type (7), la méthode se généralise pour les équations de degrés supérieurs.

Reprenons l'opérateur

$$L = a_2(x)\partial^2 + a_1(x)\partial + a_0(x)$$

où les  $a_i \in \mathbb{C}[x]$ , et supposons qu'il possède une singularité irrégulière en 0.

#### Cas de deux pentes entières : Cas générique :

Nous allons d'abord étudier le cas, dit générique, où le polygone de Newton de  $L$  présente deux pentes distinctes. Ces deux pentes sont alors entières.

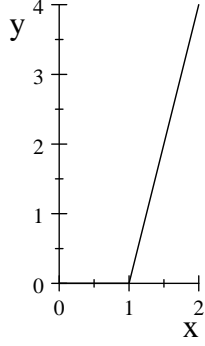
a) Calcul d'une solution formelle dans le cas d'une pente nulle :

Supposons tout d'abord que le polygone de Newton de  $L$  possède une pente nulle. Elle est forcément de longueur 1, sinon la singularité serait régulière. Dans ce cas l'opérateur  $L$  peut s'écrire sous la forme

$$L = x^{n+2}b_2(x)\partial^2 + xb_1(x)\partial + b_0(x)$$

avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $b_1(0)b_2(0) \neq 0$ .

L'autre pente du polygone de Newton de  $L$  a donc pour valeur  $n$ .



ici  $n = 4$

Comme dans le cas de singularité régulière, on cherche une solution formelle sous la forme

$$y(x, \mu) = x^\mu \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i, \quad (g_0 \neq 0)$$

On peut écrire formellement

$$L(y) = \sum_{i=0}^{+\infty} x^{i+\mu} \sum_{v=0}^{+\infty} g_v f_{i-v}(\mu + v)$$

où les  $f_i$  sont des polynômes en  $\mu$ .

On peut déterminer récursivement les  $g_v, v \geq 1$ , de telle sorte que  $y(x, \mu)$  soit solution de l'équation non homogène

$$L(y(x, \mu)) = g_0 f_0(\mu) x^\mu$$

où

$$f_0(\mu) = \mu b_1(0) + b_0(0)$$

l'équation  $f_0(\mu) = 0$ , s'appelle l'équation indicelle. C'est une équation en  $\mu$  de degré 1.

Pour obtenir une solution formelle, il suffit de prendre

$$\mu = -\frac{b_0(0)}{b_1(0)}$$

Nous obtenons ainsi une solution formelle régulière de l'équation différentielle

$$L(y) = 0$$

b) Calcul d'une solution formelle dans le cas de deux pentes strictement positives :

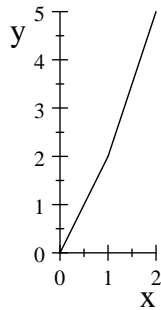
Supposons que  $N(L)$  possède deux pentes distinctes strictement positives. L'opérateur  $L$  peut s'écrire sous la forme

$$L = x^{n+2}b_2(x)\partial^2 + x^{m+1}b_1(x)\partial + b_0(x)$$

avec  $b_0(0)b_1(0)b_2(0) \neq 0$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  et  $n > 2m > 0$ .

La condition  $n > 2m$ , nous assure l'existence de deux pentes différentes :

$$\lambda_0 = m < \lambda_1 = n - m$$



ici  $m = 2$  et  $n = 5$ .

Considérons la plus petite pente  $\lambda_0 = m$ , et posons

$$y = e^{(-\frac{a}{mx^m})} z,$$

où  $a$  est un nombre complexe non nul. Alors

$$y' = e^{\left(-\frac{a}{mx^m}\right)} \left[ z' + \frac{a}{x^{m+1}} z \right],$$

$$y'' = e^{\left(-\frac{a}{mx^m}\right)} \left[ z'' + \frac{2a}{x^{m+1}} z' + \left( \frac{a^2}{x^{2(m+1)}} + \frac{-(m+1)a}{x^{m+2}} \right) z \right],$$

Si on remplace  $y$  dans l'équation  $L(y) = 0$ , on obtient une nouvelle équation différentielle en  $z$

$$L_{a,m}(z) = \{x^{n+2}b_2(x)\partial^2 + x^{m+1}C_1(x)\partial + C_0(x)\}(z)$$

où

$$C_1(x) = b_1(x) + 2ax^n b_2(x),$$

$$C_0(x) = b_0(x) + ab_1(x) + \{a^2x^{n-2m} - (m+1)ax^{n-m}\}b_2(x)$$

L'équation, dite équation caractéristique associée à la pente  $m$ , est

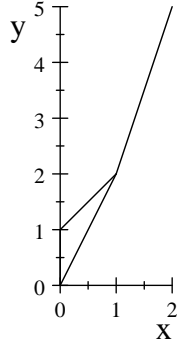
$$C_0(x) = b_0(x) + ab_1(x) = 0,$$

Cette équation est du premier ordre en  $a$ . Elle a une unique racine

$$a_m = -\frac{b_0(0)}{b_1(0)}.$$

Si  $a \neq a_m$ , le polygone de Newton de  $L_{a,m}$  coïncide avec celui de  $L$ .

Si  $a = a_m$ , le polygone de Newton de  $L_{a,m}$  a une pente entière  $p$  strictement inférieure à  $m$ , et une autre pente  $\lambda_1 = n - m$ . Il a la forme :



ici  $m = 2$  et  $n = 5$  et  $p = 1$

Ainsi, en choisissant  $a = a_m$ , on réduit la pente  $m$  à une pente plus petite.

Posons  $L^1 = L_{a_m, m}$ . L'étape suivante de l'algorithme consiste à faire, dans l'équation  $L^1(x) = 0$ , le changement de fonction inconnue

$$z = e^{\left(-\frac{a}{px^p}\right)} u,$$

former l'opérateur  $L_{a, p}^1$ , puis choisir  $a$  racine de l'équation caractéristique associée à la pente  $p$ . On itère le processus jusqu'à obtenir un opérateur dont le polygone de Newton possède un coté de pente nulle. On se retrouve alors dans le premier cas traité, on peut donc ainsi déterminer une première solution formelle de la forme :

$$y_1(x) = e^{\left[\frac{-a_m}{mx^m} + \frac{-a_{m-1}}{(m-1)x^{m-1}} + \dots + \frac{-a_1}{x}\right]} x^{\mu_1} \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i$$

c) Calcul de la deuxième solution formelle :

Pour obtenir la solution formelle associée à la deuxième pente  $n - m$ , on procède de la même façon : On forme l'opérateur  $L_{a, n-m}$ . L'équation caractéristique associée à la pente  $n - m$ , est

$$b_1(0) + ab_2(0) = 0$$

En choisit  $a = \alpha_{n-m} = -b_1(0)b_2(0)$ , le nouveau polygone de Newton a deux pentes  $p_0$  et  $p_1$  telles que :  $0 \leq p_0 < n - m = p_1$ . On recommence ces transformations sur la

pende la plus petite  $p_0$ , jusqu'à la rendre nulle. On obtient ainsi une deuxième solution formelle de la forme

$$y_2(x) = e^{\left[\frac{-\alpha_{n-m}}{(n-m)x^{n-m}} + \dots + \frac{-\alpha_1}{x}\right]} x^{\mu_2} \sum_{i=0}^{+\infty} h_i x^i$$

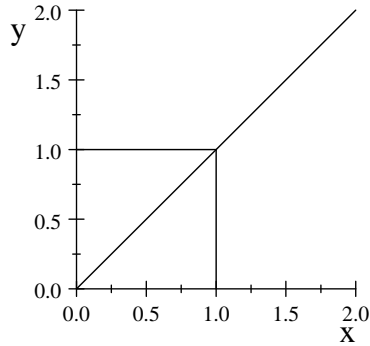
**Cas d'une unique pente non nulle : cas dégénéré.**

Nous allons supposer maintenant que le polygone de Newton de  $L$  possède une unique pente non nulle. Dans ce cas l'opérateur  $L$  s'écrit

$$L = x^{n+2}b_2(x)\partial^2 + x^{m+1}b_1(x)\partial + b_0(x)$$

avec  $b_0(0)b_2(0) \neq 0$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  et  $0 < n \leq 2m$ .

On peut remarquer que soit la pente est entière ( $n$  est pair), soit elle est rationnelle ( $n$  est impair).



ici  $n = 2$

Comme dans le cas générique on effectue le changement de fonction inconnue

$$y = e^{\left(-\frac{a}{(n/2)x^{n/2}}\right)} z,$$

L'opérateur  $L_{a,n/2}$  s'écrit

$$L_{a,n/2} = x^{n+2}b_2(x)\partial^2 + x^{n/2+1}C_1(x)\partial + C_0(x)$$

avec

$$C_1(x) = x^{m-n/2}b_1(x) + 2ax^n b_2(x)$$

$$C_0(x) = b_0(x) + ax^{m-n/2}b_1(x) + \{a^2 - (n/2 + 1)ax^{n/2}\}b_2(x)$$

L'équation caractéristique est alors

$$C_0(0) = b_0(0) + ab_1(0)[x^{m-n/2}]_{|x=0} + a^2b_2(0) = 0$$

C'est une équation du second degré en  $a$ .

Deux cas sont alors à considérer :

a) Le cas dégénéré simple :  $m \neq n/2$

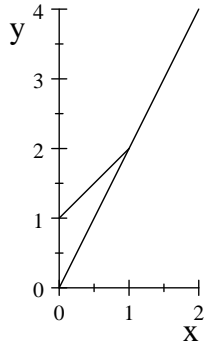
Dans ce cas l'équation caractéristique s'écrit

$$C_0(0) = b_0(0) + a^2b_2(0) = 0$$

Elle a deux racines distinctes. Il est alors essentiel de remarquer que

$$C_1(0) = 2ab_2(0) \neq 0$$

Soit  $a_1$  l'une des racines de l'équation caractéristique. Supposons d'abord que  $n$  est pair. Le polygone de Newton de l'opérateur  $L_{a_1, n/2}$  est alors de la forme



ici  $n = 4$  et  $p_0 = 1$

C'est à dire qu'il a une pente entière  $p_0$  strictement inférieure à  $n/2$ . Si la pente  $p_0$  n'est pas nulle alors on peut comme dans le cas générique la réduire à une pente nulle. On obtient ainsi une première solution formelle de la forme :

$$y(x) = e^{Q(1/x)} x^\mu \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i$$

avec  $\text{degré}(Q) = n/2$

Et avec la deuxième racine de l'équation caractéristique, on obtient de la même façon l'autre solution formelle.

Si  $n$  est impair, on effectue d'abord la ramification

$$\begin{aligned} x &= t^2 \\ x \frac{d}{dx} &= \frac{1}{2} t \frac{d}{dt} \\ x^2 \frac{d^2}{dx^2} &= \frac{1}{4} t^2 \frac{d^2}{dt^2} - \frac{1}{4} t \frac{d}{dt} \end{aligned}$$

L'opérateur  $L_{a_1, n/2}$  se transforme en un opérateur dont le polygone de Newton présente une pente entière inférieure strictement à  $n$  et une autre de valeur  $n$ . On est donc ramené au cas précédent. On peut alors construire une solution formelle de la forme

$$y(x) = e^{Q(1/t)} t^\mu \sum_{i=0}^{+\infty} g_i t^i$$

avec  $x = t^2$  et  $\text{degré}(Q) = n$ .

Et avec la deuxième racine de l'équation caractéristique, on obtient de la même façon l'autre solution formelle.

b) Le cas hyperdégénéré :  $m = n/2$  :

Dans ce cas l'équation caractéristique s'écrit :

$$C_0(0) = b_0(0) + ab_1(0) + a^2 b_2(0) = 0$$

Il est alors très important de remarquer que

$$\frac{\partial}{\partial a} C_0(0) = b_1(0) + 2ab_2(0) = C_1(0)$$

Nous avons alors deux possibilités :

b1) L'équation caractéristique a deux racines distinctes :

Les racines de l'équation caractéristique sont simples. Si  $a_1$  désigne l'une de ces racines alors, d'après la remarque précédente le coefficient  $C_1(0)$  est non nul et donc le polygone de Newton de l'opérateur  $L_{a_1, n/2}$  a une pente entière strictement inférieure à  $m$  et une autre pente entière égale à  $m$ . On se retrouve dans la cas générique. Nous avons donc deux solutions formelles de la forme :

$$y(x) = e^{Q(1/x)} x^\mu \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i$$

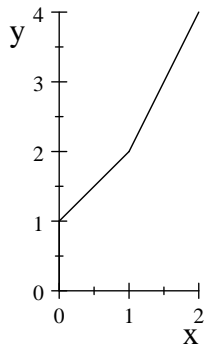
avec  $\text{degré}(Q) = m = n/2$

b2) L'équation caractéristique admet une racine double :

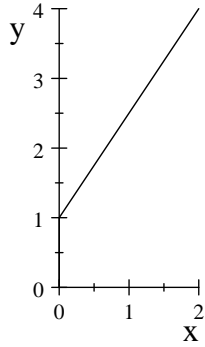
Soit  $a_1$  cette racine, on a

$$a_1 = -\frac{b_1(0)}{2b_2(0)}$$

Dans ce cas le coefficient  $C_1(0)$  est nul, le polygone de Newton de l'opérateur  $L_{a_1, n/2}$  a l'une des deux formes suivantes :



(1)



(2)

Dans le premier cas (cas (1)), la pente s'est cassée, on se retrouve dans un cas générique sans ramification et on a donc deux solutions formelles.

Dans le deuxième cas on a une unique pente  $\lambda' < m$ , et donc :

Soit il n'y a pas de point d'abscisse 1 sur la face du polygone et on se retrouve dans le cas dégénéré simple. Donc, après ramification éventuelle, on retombe sur le cas générique.

Soit la pente est entière et il y'a un point d'abscisse 1 sur la face du polygone et nous nous retrouvons donc dans le cas que nous sommes en train d'étudier. Mais il faut remarquer que d'une part on'a pas introduit de ramification et d'autre part la pente a diminué. Donc en itérant le processus nous tomberons (après au plus  $m$  itérations), dans le pire des cas, sur une pente nulle de longueur 2, dans ce cas l'algorithme de Frobenius nous fournira les parties régulières des solutions.

### **Remarque 2**

La procédure Maple [formal\_sol] calcule les solutions formelles d'équations différentielles linéaires homogènes.

# Chapitre 2 : Solutions méromorphes d'une classe d'équations différentielles non linéaires

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, notre travail consiste à caractériser toutes les solutions méromorphes sur  $\mathbb{C}$ , de l'équation différentielle :

$$by' = c_m y^m + c_{m-1} y^{m-1} + \dots + c_1 y + c_0 \quad (I)$$

où  $m$  est un entier,  $m \geq 3$ ,  $b, c_i \in \mathbb{C}[x]$ ,  $b \neq 0$ , et  $c_m \neq 0$ .

Notre étude, consiste en utilisant la théorie de Malmquist-Yosida, à ramèner le problème du calcul des solutions méromorphes sur  $\mathbb{C}$  de (I), à un problème de calcul de solutions polynomiales d'une équation différentielle non linéaire associée à (I), qu'on explicitera.

On s'inspire des méthodes de Newton et d'Abramov, et on développe un algorithme pour calculer toutes les solutions polynomiales de l'équation associée; et on montrera

aussi que (I), admet un nombre fini de solutions méromorphes sur  $\mathbb{C}$ . Enfin, on écrira notre algorithme dans le langage de programmation Maple6.

## 2.2 Solutions méromorphes

Un résultat classique dû à Malmquist, généralisé par Yosida, dit :

**Théorème 1** (voir [20])

*Soient  $R(x, y)$  une fonction rationnelle et  $r \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que l'équation différentielle :*

$$(y')^r = R(x, y)$$

*admet une solution méromorphe sur  $\mathbb{C}$  qui n'est pas rationnelle. Alors  $R(x, y)$  est polynomiale en  $y$  et  $d_y^0 R(x, y) \leq 2r$ .*

Une conséquence immédiate, (prendre  $r = 1$ ), du théorème précédent est le corollaire suivant :

**Corollaire 1**

*Toute solution méromorphe sur  $\mathbb{C}$  de (I) est rationnelle.*

## 2.3 Solutions rationnelles

Le théorème suivant permet de caractériser les solutions rationnelles de (I) :

**Théorème 2**

1. *Toute solution rationnelle de (I) est de la forme  $y = \frac{u}{c_m}$  où  $u$  est un polynôme.*
2. *L'équation (I) admet un nombre fini de solutions de cette forme, et on peut les déterminer par un algorithme.*

**Preuve du théorème 2**

Posons

$$by' = c_m y^m + c_{m-1} y^{m-1} + \dots + c_1 y + c_0 \equiv P(x, y) \quad (I)$$

Soit  $y$  une fraction rationnelle et  $\alpha$  un pôle de  $y$  d'ordre  $k$ . Si  $c_m(\alpha)$  est non nul, alors la valuation de  $P(x, y)$  en  $\alpha$  est exactement  $-mk$  alors que la valuation de  $by'$  est au moins  $-k - 1$ . Comme  $m \geq 3$ , l'égalité  $by' = P(x, y)$  n'est donc pas possible et donc nécessairement  $c_m(\alpha) = 0$ .

Posons  $y = \frac{u}{c_m}$  et  $u$  rationnel, de (I) on tire

$$b\left(\frac{u'c_m - uc'_m}{c_m^2}\right) = c_m\left(\frac{u}{c_m}\right)^m + \dots + c_1\frac{u}{c_m} + c_0,$$

équivalent à

$$bc_m^{m-2}u' = u^m + c_{m-1}u^{m-1} + \dots + (c_1c_m^{m-2} + bc_m^{m-3}c'_m)u + c_m^{m-1}c_0,$$

posons

$$\begin{aligned} A_m &= bc_m^{m-2} \\ A_{m-1} &= c_{m-1} \\ A_j &= c_m^{m-1-j}c_j, (j = 2, \dots, m-1), \\ A_1 &= c_1c_m^{m-2} + bc_m^{m-3}c'_m \\ A_0 &= c_m^{m-1}c_0, \end{aligned}$$

l'équation (I) devient

$$A_m u' = u^m + A_{m-1}u^{m-1} + \dots + A_0 \quad (II)$$

qu'on appellera l'équation réduite, d'après ce qui précède, toute solution rationnelle de l'équation (II) est un polynôme, donc  $u$  est un polynôme d'où la preuve de la partie 1) du théorème 1.

## 2.4 Solutions polynomiales

On considère l'équation réduite

$$A_m u' = u^m + A_{m-1} u^{m-1} + \dots + A_0 \quad (II)$$

où  $A_i \in \mathbb{C}[x]$ , ( $i = 0, \dots, m$ ),  $A_m \neq 0$  et  $m \geq 3$ .

Cherchons les solutions  $u$  de (II), de la forme

$$u(x) = u_n x^n + u_{n-1} x^{n-1} + \dots + u_1 x + u_0 \text{ où } u_i \in \mathbb{C}$$

Posons

$$\begin{aligned} A_i(x) &= A_{a_i}^{(i)} x^{a_i} + A_{a_i-1}^{(i)} x^{a_i-1} + \dots + A_1^{(i)} x + A_0^{(i)} \\ \text{où } a_i &= d^0 A_i \text{ et } A_j^{(i)} \in \mathbb{C}, (i = 0, \dots, m), (j = 0, \dots, a_i). \end{aligned}$$

Soient  $f_i$  les fonctions définies pour  $n \geq 1$ , par :

$$\begin{aligned} f_m(n) &= d^0(A_m u') = a_m + n - 1 \\ f_{m+1}(n) &= d^0(u^m) = mn \\ f_i(n) &= d^0(A_i u^i) = a_i + in, (i = 0, \dots, m-1). \end{aligned}$$

### Proposition 1

Soit

$$\Omega = \{k, k \in N^* / \exists (i, j) \in \Lambda^2, (i < j), \forall t \in \Lambda, f_i(k) = f_j(k) \geq f_t(k)\}$$

$$\text{où } \Lambda = \{0, 1, 2, \dots, m, m+1\}$$

1. Pour qu'un polynôme  $u$  non constant de degré  $n$ , soit solution de (II), il est nécessaire que  $n \in \Omega$ .

2.  $\Omega$  est fini.

L'ensemble  $\Omega \cup \{0\}$  s'appellera l'espace fondamental de (II).

**Preuve de la proposition 1**

(1) Soit  $u$  un polynôme de degré  $n \geq 1$ , tel que  $n \notin \Omega$ , donc

$$\forall (i, j) \in \Lambda^2, (i < j), \exists t \in \Lambda, f_i(n) \neq f_j(n) \text{ ou } f_i(n) = f_j(n) < f_t(n). \quad (*)$$

Soit  $\Delta = \{f_i(n), i \in \Lambda\}$ , comme  $\Delta$  est fini,  $\exists i_0 \in \Lambda$  tel que

$$f_{i_0}(n) = \max(\Delta). \quad (**)$$

Soit  $j \in \Lambda - \{i_0\}$ , de (\*) et (\*\*) on en déduit que,

$$f_{i_0}(n) > f_j(n).$$

et en remplaçant  $u$  dans (II), par

$$u_n x^n + u_{n-1} x^{n-1} + \dots + u_1 x + u_0$$

un terme de degré  $f_{i_0}(n)$  apparaît, dans (II), une et une seule fois, donc

$$u_n = 0.$$

(2) La résolution en  $x$  du système d'équations :

$$f_i(x) = f_j(x) \text{ où } (i, j) \in \Lambda^2 - \{(1, m)\} \text{ et } (i < j)$$

donne un nombre fini de solutions entières, mais l'équation

$$f_1(x) = f_m(x)$$

c'est à dire

$$a_1 + x = a_m + x - 1$$

n'a pas de solutions si

$$a_1 \neq a_m - 1,$$

sinon elle est vérifiée pour tout entier  $x$ , et si de plus

$$\forall t \in \Lambda, f_1(x) = f_m(x) \geq f_t(x)$$

alors  $x$  est dans  $\Omega$ , et en particulier pour :

$$t = m + 1$$

on trouve

$$a_1 + x = a_m + x - 1 \geq mx$$

équivalent à

$$x \leq \frac{a_m - 1}{m - 1}.$$

### Remarque 1

Pour que

$$u(x) = u_0 = \text{constante}$$

soit solution de

$$A_m u' = u^m + A_{m-1} u^{m-1} + \dots + A_1 u + A_0 \equiv P(x, y)$$

il est nécessaire et suffisant que le polynôme  $P(x, u_0)$  soit identiquement nul, et la

détermination de  $u_0$  revient à résoudre le système d'équations issu de

$$P(x, u_0) = 0$$

dont la première équation est

$$u_0^m + A_0^{(m-1)}u_0^2 + \dots + A_0^{(0)} = 0$$

donc si  $u_0$  existe il ne peut pas prendre plus que  $m$  valeurs.

## 2.5 Algorithme

Notre algorithme, en quatre étapes, consiste à déterminer une équation polynomiale notée  $(P_i)$ , pour chaque  $u_i$ , sauf dans le cas dégénéré, où notre algorithme donne tous les  $u_i$  à la fois.

1<sup>er</sup> étape Détermination de  $n$  et de  $u_n$ .

1<sup>er</sup> cas  $\Omega$  est vide.

L'équation (II), admet la solution constante  $u(x) = u_0$ , si et seulement si,  $\forall x \in \mathbb{C}$   
:  $P(x, u_0) = 0$

2<sup>ème</sup> cas  $\Omega$  est non vide.

On prend

$$n = \max(\Omega)$$

donc

$$\exists(i_0, j_0) \in \Lambda^2, i_0 < j_0, \forall t \in \Lambda, f_{i_0}(n) = f_{j_0}(n) \geq f_t(n)$$

on remplace  $u$  par

$$u_n x^n + u_{n-1} x^{n-1} + \dots + u_1 x + u_0$$

dans (II), et en identifiant les coefficients des termes de degré  $f_{i_0}(n)$ , on forme l'équation

$$p_n(u_n) = 0 \quad (\mathbf{P}_n)$$

où  $p_n \in \mathbb{C}[x]$  et  $d^0 p_n \leq m$ .

On distingue trois sous-cas du 2<sup>ème</sup> cas

1<sup>er</sup> sous-cas

$$d^0 p_n \geq 1$$

la résolution de  $(\mathbf{P}_n)$  donne les valeurs de  $u_n$ , et on passe à la 2<sup>ème</sup> étape.

2<sup>ème</sup> sous-cas

$p_n(x)$  est identiquement nul

qu'on appellera le cas dégénéré, et on passe à la 4<sup>ème</sup> étape.

3<sup>ème</sup> sous-cas

$$d^0 p_n = 0$$

$u_n$  n'existe pas, donc (II) est sans solutions.

2<sup>ème</sup> étape **Détermination de  $u_{n-1}, \dots, u_1$ .**

Posons

$$v^{(n-1)}(x) = u(x) - u_n x^n$$

de l'équation (II), on tire

$$A_m(v^{(n-1)} + u_n x^n)' = (v^{(n-1)} + u_n x^n)^m + \dots + A_1(v^{(n-1)} + u_n x^n) + A_0 \quad (II')$$

donc ils existent  $B_i^{(1)} \in \mathbb{C}[x]$ , ( $i = 0, \dots, m-1$ ), tels que (II') soit équivalente à

$$A_m[v^{(n-1)}]' = [v^{(n-1)}]^m + B_{m-1}^{(1)}[v^{(n-1)}]^{m-1} + \dots + B_1^{(1)}v^{(n-1)} + B_0^{(1)} \quad (a.1)$$

on remplace  $v^{(n-1)}$  par  $v_{n-1}x^{n-1} + \dots + v_0$  dans (a.1), et en identifiant les coefficients des termes du plus haut degré, on forme l'équation

$$p_{n-1}(v_{n-1}) = 0 \quad (\mathbf{P}_{n-1})$$

où  $p_{n-1} \in \mathbb{C}[x]$  et  $d^0 p_{n-1} \leq m$ .

Si  $p_{n-1}(x)$  est identiquement nul, alors on passe à la 4<sup>ème</sup> étape.

Si  $d^0 p_{n-1} = 0$ , alors  $v_{n-1}$  n'existe pas.

Si  $d^0 p_{n-1} \geq 1$ , alors la résolution de  $(\mathbf{P}_{n-1})$  donne les valeurs de  $v_{n-1}$ , donc de  $u_{n-1}$ , et pour chaque valeur de  $v_{n-1}$ , on pose

$$v^{(n-2)}(x) = v^{(n-1)}(x) - v_{n-1}x^{n-1}$$

de (a.1) on tire

$$A_m[v^{(n-2)} + v_{n-1}x^{n-1}]' = [v^{(n-2)} + v_{n-1}x^{n-1}]^m + \dots + B_1^{(1)}(v^{(n-2)} + v_{n-1}x^{n-1}) + B_0^{(1)} \quad (a.1')$$

donc ils existent  $B_i^{(2)} \in \mathbb{C}[x]$ , ( $i = 0, \dots, m-1$ ), tels que (a.1') soit équivalente à

$$A_m[v^{(n-2)}]' = [v^{(n-2)}]^m + B_{m-1}^{(2)}[v^{(n-2)}]^{m-1} + \dots + B_1^{(2)}v^{(n-2)} + B_0^{(2)} \quad (a.2)$$

on remplace  $v^{(n-2)}$  par

$$v_{n-2}x^{n-2} + \dots + v_0$$

dans (a.2), et en identifiant les coefficients des termes du plus haut degré, on forme

l'équation

$$p_{n-2}(v_{n-2}) = 0, \quad (\text{P}_{n-2})$$

où  $p_{n-2} \in \mathbb{C}[x]$  et  $d^0 p_{n-2} \leq m$ .

De proche en proche, on arrive à

$$A_m[v^{(1)}]' = [v^{(1)}]^m + B_{m-1}^{(n-1)}[v^{(1)}]^{m-1} + \dots + B_1^{(n-1)}v^{(1)} + B_0^{(n-1)} \quad (\text{a.n} - 1)$$

où

$$v^{(1)}(x) = v^{(2)}(x) - v_2x^2 \text{ et } B_i^{(n-1)} \in \mathbb{C}[x]$$

on remplace  $v^{(1)}$  par  $v_1x + v_0$  dans (a.n-1), et en identifiant les coefficients des termes du plus haut degré, on forme l'équation

$$p_1(v_1) = 0 \quad (\text{P}_1)$$

où  $p_1 \in \mathbb{C}[x]$  et  $d^0 p_1 \leq m$ .

Si  $p_1(x)$  est identiquement nul, alors on passe à la 4<sup>ème</sup> étape.

Si  $d^0 p_1 = 0$ , alors  $v_1$  n'existe pas.

Si  $d^0 p_1 \geq 1$ , alors la résolution de (P<sub>1</sub>) donne les valeurs de  $v_1$  donc de  $u_1$ .

### 3<sup>ème</sup> étape Détermination de $u_0$

Pour chaque valeur de  $v_1$ , on pose

$$v^{(0)}(x) = v^{(1)}(x) - v_1x, v^{(0)} = v_0 \in \mathbb{C}$$

ils existent  $B_i^{(n)} \in \mathbb{C}[x]$ , ( $i = 0, \dots, m - 1$ ), tels que (n-1) soit équivalente à

$$A_m[v^{(0)}]' = [v^{(0)}]^m + B_{m-1}^{(n)}[v^{(0)}]^{m-1} + \dots + B_1^{(n)}v^{(0)} + B_0^{(n)} \quad (\text{a.n})$$

par conséquent

$$v_0^m + B_{m-1}^{(n)}(x)v_0^{m-1} + \dots + B_1^{(n)}(x)v_0 + B_0^{(n)}(x) = 0, \quad (\text{a.n} + 1)$$

l'équation (a.n), admet la solution constante  $v^{(0)}$ , si et seulement si, le système d'équations issu de (a.n+1), admet la solution  $v_0$ .

#### 4<sup>ème</sup> étape

### 2.5.1 Etude du cas dégénéré

Le cas dégénéré, se pose dans la situation où l'un des  $p_j$ , ( $j = n, \dots, 1$ ), est identiquement nul, donc l'équation  $(P_j)$  correspondante, ne suffit pas pour déterminer les  $u_j$ .

En remplaçant  $v^{(j)}$  par  $v_j x^j + \dots + v_0$  dans l'équation

$$A_m [v^{(j)}]' = [v^{(j)}]^m + B_{m-1}^{(n-j)} [v^{(j)}]^{m-1} + \dots + B_1^{(n-j)} v^{(j)} + B_0^{(n-j)} \quad (\text{a.n} - j + 1)$$

et en identifiant les coefficients des termes du plus haut degré, on obtient l'équation

$$0v_j = 0 \quad (P_j)$$

#### Changement de notations

Pour simplifier les notations, on pose  $B_i^{(n-j)} = A_i$  pour  $i = 0, \dots, m-1$  et  $v^{(j)} = u$  et  $j = n$ , et on retrouve ainsi les notations de départ, c'est à dire

$$A_m u' = u^m + A_{m-1} u^{m-1} + \dots + A_1 u + A_0, \quad (II)$$

$$A_i(x) = A_{a_i}^{(i)} x^{a_i} + A_{a_i-1}^{(i)} x^{a_i-1} + \dots + A_1^{(i)} x + A_0^{(i)}, \quad (i = 0, \dots, m), (j = 0, \dots, a_i),$$

$$\text{où } a_i = d^o A_i \text{ et } A_j^{(i)} \in \mathbb{C}.$$

$$u(x) = u_n x^n + u_{n-1} x^{n-1} + \dots + u_1 x + u_0 \text{ où } u_i \in \mathbb{C}$$

$$f_m(n) = d^0(A_m u') = a_m + n - 1$$

$$f_{m+1}(n) = d^0(u^m) = mn$$

$$f_i(n) = d^0(A_i u^i) = a_i + in, \quad (i = 0, \dots, m-1)$$

Soit  $\Omega \cup \{0\}$  l'espace fondamental (II), (donc celui de (a.n-j+1), avant le changement de notations), on a vu que nécessairement  $n \in \Omega$ .

Donc

$$\exists(i, j) \in \Lambda^2, (i < j), \forall t \in \Lambda, f_i(n) = f_j(n) \geq f_t(n)$$

hormis le cas où

$$\begin{aligned} f_1(n) &= f_m(n) > f_t(n) \\ \forall t \in \Lambda - \{1, m\} \text{ et } nA_{a_m}^{(m)} &= A_{a_1}^{(1)} \end{aligned}$$

tous les autres cas donnent des  $p_n$  non identiquement nuls, il en résulte que

$$\begin{aligned} n &< \frac{a_m - 1}{m - 1} \\ \text{et } a_j &\leq a_m - (j - 1)n - 2, (j = 0, 2, 3, \dots, m - 1) \end{aligned}$$

### Théorème 3

Dans le cas dégénéré, la détermination des solutions polynomiales de (II) est possible.

### Preuve du théorème 3

de (II) on tire

$$\begin{aligned} (A_{a_m}^{(m)} x^{a_m} + \sum_{i=0}^{a_m-1} A_i^{(m)} x^i) (\sum_{i=1}^n i u_i x^{i-1}) &= (\sum_{i=0}^n u_i x^i)^m + (\sum_{i=0}^{a_m-1} A_i^{(m-1)} x^i) (\sum_{i=0}^n u_i x^i)^{m-1} + \dots \\ &+ (\sum_{i=0}^{a_2} A_i^{(2)} x^i) (\sum_{i=0}^n u_i x^i)^2 + (n A_{a_m}^{(m)} x^{a_m-1} + \sum_{i=0}^{a_m-2} A_i^{(1)} x^i) (\sum_{i=0}^n u_i x^i) + \sum_{i=0}^{a_0} A_i^{(0)} x^i, \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} (\sum_{i=0}^{n-1} (i - n) u_i A_{a_m}^{(m)} x^{a_m+i-1}) &= (\sum_{i=0}^n u_i x^i)^m + (\sum_{i=0}^{a_m-1} A_i^{(m-1)} x^i) (\sum_{i=0}^n u_i x^i)^{m-1} + \dots \\ &+ (\sum_{i=0}^{a_2} A_i^{(2)} x^i) (\sum_{i=0}^n u_i x^i)^2 + (\sum_{i=0}^{a_m-2} A_i^{(1)} x^i) (\sum_{i=0}^n u_i x^i) - (\sum_{i=0}^{a_m-1} A_i^{(m)} x^i) (\sum_{i=1}^n i u_i x^{i-1}) + \\ &\sum_{i=0}^{a_0} A_i^{(0)} x^i, \quad (\text{F}) \end{aligned}$$

on tire de (F) les coefficients de  $x^t$ , ( $t = n - 1, \dots, 0$ )

$$(T) \left\{ \begin{array}{ll} -A_{a_m}^{(m)} u_{n-1} = R_1(u_n, u_{n-1}, \dots, u_1, u_0) & (d.1) \\ -2A_{a_m}^{(m)} u_{n-2} = R_2(u_n, u_{n-1}, \dots, u_1, u_0) & (d.2) \\ \cdot & \\ -iA_{a_m}^{(m)} u_{n-i} = R_i(u_n, u_{n-1}, \dots, u_1, u_0) & (d.i) \\ \cdot & \\ -nA_{a_m}^{(m)} u_0 = R_n(u_n, u_{n-1}, \dots, u_1, u_0) & (d.n) \\ Q_1(u_n, u_{n-1}, \dots, u_1, u_0) = 0 & (d.n+1) \\ \cdot & \\ Q_{a_m-1}(u_n, u_{n-1}, \dots, u_1, u_0) = 0 & (d.a_m+n-1) \end{array} \right.$$

où  $R_i, Q_i \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$

### Proposition 2

Chaque  $R_i$  est indépendant de  $u_{n-i}, u_{n-i-1}, \dots, u_0$ , ( $i = 1, \dots, n$ ).

Pour démontrer la proposition 2, on aura besoin du lemme technique suivant :

### Lemme 1

Le terme du plus haut degré de  $(\sum_{i=0}^n u_i x^i)^j$  qui contient  $u_t \neq 0$  est  $j u_t u_n^{j-1} x^{n(j-1)+t}$  où  $t = 0, \dots, n-1$  et  $j \in \mathbb{N}^*$ .

### Preuve du la proposition 2

Supposons qu'il existe un entier  $t$ , ( $0 \leq t \leq n-i$ ), tel que  $R_i$  dépend de  $u_t$ ; quatre cas se présentent :

1<sup>er</sup> cas  $u_t$  provient de  $(\sum_{i=0}^n u_i x^i)^m$ .

D'après le lemme 1,  $m u_t u_n^{m-1} x^{n(m-1)+t}$  est le terme du plus haut degré de  $(\sum_{i=0}^n u_i x^i)^m$  qui contient  $u_t$ , mais l'équation (d.i) du système (T), provient des coefficients du terme  $x^{a_m+n-i-1}$  de l'équation (F), donc  $n(m-1) + t \geq a_m + n - i - 1$  or  $t \leq n - i$  donc  $n \geq \frac{a_m - 1}{m - 1}$ , ce qui est impossible.

2<sup>ème</sup> cas  $u_t$  provient d'un  $(\sum_{i=0}^{a_j} A_i^{(j)} x^i)(\sum_{i=0}^n u_i x^i)^j$ , ( $j = 2, 3, \dots, m-1$ ).

Du lemme 1,  $A_{a_j}^{(j)} j u_t u_n^{j-1} x^{a_j+n(j-1)+t}$  est le terme du plus haut degré de  $(\sum_{i=0}^{a_j} A_i^{(j)} x^i)(\sum_{i=0}^n u_i x^i)^j$ , qui peut contenir  $u_t$ , mais l'équation (d.i) du système (T) provient des coefficients du

terme  $x^{a_m+n-i-1}$  de l'équation (F), donc  $a_j + n(j-1) + t \geq a_m + n - i - 1$  or  $t \leq n - i$  donc  $a_j \geq a_m - (j-1)n - 1$ , ce qui est impossible.

3<sup>ème</sup> cas  $u_t$  provient de  $(\sum_{i=0}^{a_m-2} A_i^{(1)} x^i)(\sum_{i=0}^n u_i x^i)$ .

$A_{a_m-2}^{(1)} u_t x^{a_m-2+t}$  est le terme du plus degré de  $(\sum_{i=0}^{a_m-2} A_i^{(1)} x^i)(\sum_{i=0}^n u_i x^i)$  qui peut contenir  $u_t$ , mais l'équation (d.i) du système (T) provient des coefficients du terme  $x^{a_m+n-i-1}$  de l'équation (F), donc  $a_m - 2 + t \geq a_m + n - i - 1$  or  $t \leq n - i$  donc  $n - i - 1 \geq n - i$ , ce qui est impossible.

4<sup>ème</sup> cas  $u_t$  provient de  $(\sum_{i=0}^{a_m-1} A_i^{(m)} x^i)(\sum_{i=1}^n i u_i x^{i-1})$ .

$A_{a_m-1}^{(m)} t u_t x^{a_m+t-2}$  est le terme du plus degré de  $(\sum_{i=0}^{a_m-1} A_i^{(m)} x^i)(\sum_{i=1}^n i u_i x^{i-1})$  qui peut contenir  $u_t$ , mais l'équation (d.i) du système (T) provient des coefficients du terme  $x^{a_m+n-i-1}$  de l'équation (F), donc  $a_m + t - 2 \geq a_m + n - i - 1$  or  $t \leq n - i$  donc  $n - i - 1 \geq n - i$ , ce qui est impossible, d'où la preuve de la proposition 2.

### Preuve du lemme 1

La preuve est par récurrence sur  $j$ .

Pour  $j = 1$ , c'est évident.

Supposons que le terme du plus haut degré de  $(\sum_{i=0}^n u_i x^i)^j$  qui contient  $u_t$  est  $j u_t u_n^{j-1} x^{n(j-1)+t}$ .

Montrons le résultat à l'ordre  $j + 1$

$$\begin{aligned} (\sum_{i=0}^n u_i x^i)^{j+1} &= (\sum_{i=0}^n u_i x^i)^j (\sum_{i=0}^n u_i x^i) \\ &= [u_n^j x^{nj} + j u_t u_n^{j-1} x^{n(j-1)+t} + \theta(x)] [u_n x^n + u_t x^t + w(x)] \end{aligned}$$

$$\text{où } \theta(x) = (\sum_{i=0}^n u_i x^i)^j - (u_n^j x^{nj} + j u_t u_n^{j-1} x^{n(j-1)+t})$$

$$\text{et } w(x) = (\sum_{i=0}^n u_i x^i) - (u_n x^n + u_t x^t)$$

par conséquent

$$\begin{aligned} (\sum_{i=0}^n u_i x^i)^{j+1} &= u_n^j x^{nj} u_n x^n + u_n^j x^{nj} u_t x^t + u_n^j x^{nj} w(x) + j u_t u_n^{j-1} x^{n(j-1)+t} u_n x^n \\ &\quad + j u_t u_n^{j-1} x^{n(j-1)+t} u_t x^t + j u_t u_n^{j-1} x^{n(j-1)+t} w(x) + \theta(x) u_n x^n \\ &\quad + \theta(x) u_t x^t + \theta(x) w(x), \end{aligned}$$

on aura alors

$$(\sum_{i=0}^n u_i x^i)^{j+1} = u_n^{j+1} x^{n(j+1)} + (j+1) u_t u_n^j x^{n(j+1)+t} + u_n^j x^{nj} w(x)$$

$$+ju_t u_n^{j-1} x^{n(j-1)+t} w(x) + \theta(x) u_n x^n + \theta(x) u_t x^t + \theta(x) w(x), \quad (\text{G})$$

posons  $\delta = nj + t$ , et on regardons les termes de (G) contenant  $u_t$  on a

1)  $d^0(ju_t u_n^{j-1} x^{n(j-1)+t} w(x)) \leq nj + t - 1 < \delta$ ,

2) l'hypothèse de récurrence nous permet de conclure que le terme du plus haut degré de  $\theta(x)$  contenant  $u_t$ , a un degré au plus égal à  $n(j-1) + t - 1$ , et par conséquent :

a) le terme du plus haut degré de  $\theta(x) u_n x^n$  contenant  $u_t$ , a un degré au plus égal à  $n(j-1) + t - 1 + n = nj + t - 1 < \delta$ ,

b) le terme du plus haut degré de  $\theta(x) u_t x^t$  contenant  $u_t$ , a un degré au plus égal à  $n(j-1) + t - 1 + t = n(j-1) + 2t - 1 < \delta$ ,

c) le terme du plus haut degré de  $\theta(x) w(x)$  contenant  $u_t$ , a un degré au plus égal à  $n(j-1) + t - 1 + n - 1 = nj + t - 2 < \delta$ .

Les conditions 1), 2a), 2b) et 2c) entraînent que le terme du plus haut degré de  $(\sum_{i=0}^n u_i x^i)^{j+1}$  contenant  $u_t$  est  $(j+1)u_t u_n^j x^{nj+t}$ , d'où la preuve du lemme 1.

Le système (T) devient

$$\begin{cases}
 -A_{a_m}^{(m)} u_{n-1} = R_1(u_n) & (d.1) \\
 -2A_{a_m}^{(m)} u_{n-2} = R_2(u_n, u_{n-1}) & (d.2) \\
 \cdot \\
 -iA_{a_m}^{(m)} u_{n-i} = R_i(u_n, \dots, u_{n-i+1}) & (d.i) \\
 \cdot \\
 -nA_{a_m}^{(m)} u_0 = R_n(u_n, u_{n-1}, \dots, u_1) & (d.n) \\
 Q_1(u_n, u_{n-1}, \dots, u_1, u_0) = 0 & (d.n+1) \\
 \cdot \\
 Q_{a_m-1}(u_n, u_{n-1}, \dots, u_1, u_0) = 0 & (d.a_m+n-1)
 \end{cases}$$

où  $R_i \in \mathbb{C}[x_{n-i+1}, \dots, x_n]$  et  $Q_i \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$

### Résolution du système (S)

Puisque  $A_{a_m}^{(m)} \neq 0$ , deux étapes se présentent

1<sup>er</sup> étape Dans l'équation (d.2), on remplace  $u_{n-1}$  par sa valeur en fonction de  $u_n$

donnée par l'équation (d.1), on obtient alors l'équation (d.2'), qui donne  $u_{n-2}$  en fonction de  $u_n$ .

Dans l'équation (d.3), on remplace  $u_{n-1}$  et  $u_{n-2}$  par leur valeur en fonction de  $u_n$  données par les équations (d.1), et (d.2'), on obtient alors l'équation (d.3'), qui donne  $u_{n-3}$  en fonction de  $u_n$ .

De proche en proche on arrive à  $u_0$  en fonction de  $u_n$ .

Le système (S) devient

$$(L) \left\{ \begin{array}{ll} u_{n-1}=F_1(u_n) & (d.1) \\ u_{n-2}=F_2(u_n) & (d.2') \\ \cdot & \\ u_{n-i}=F_i(u_n) & (d.i') \\ \cdot & \\ u_0=F_n(u_n) & (d.n') \\ Q_1(u_n, u_{n-1}, \dots, u_1, u_0)=0 & (d.n+1) \\ Q_2(u_n, u_{n-1}, \dots, u_1, u_0)=0 & (d.n+2) \\ \cdot & \\ Q_{a_m-1}(u_n, u_{n-1}, \dots, u_1, u_0)=0 & (d.a_m+n-1) \end{array} \right.$$

où les  $F_i \in \mathbb{C}[x]$  et  $Q_i \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$

2<sup>ème</sup> étape On remplace les  $u_i$ , ( $i = 0, \dots, n-1$ ), par leur valeur en fonction de  $u_n$  dans les  $(a_m - 1)^{ème}$  dernières équations du système (L), et on pose

$$q_i(x) = Q_i(x, F_1(x), \dots, F_n(x)), (i = 1, \dots, a_m - 1), x \in \mathbb{C}$$

Deux cas se présentent

1<sup>er</sup> cas Il existe  $i_0$ , ( $1 \leq i_0 \leq a_m - 1$ ), tel que  $d^0 q_{i_0} = 0$ .

Le système (L) est impossible, et les  $u_i$  n'existent pas.

2<sup>ème</sup> cas Il existe  $i_0$ , ( $1 \leq i_0 \leq a_m - 1$ ), tel que  $d^0 q_{i_0} \geq 1$ , et pour tout  $i$ , ( $i = 1, \dots, a_m - 1$ ),  $d^0 q_i \neq 0$ .

Soit

$$\Phi(x) = PGCD(q_1(x), q_2(x), \dots, q_{a_m-1}(x)).$$

Trois sous-cas du 2<sup>ème</sup> cas se présentent

1<sup>er</sup> sous-cas  $d^0\Phi(x) = 0.$

Le système (L) est impossible, et les  $u_i$  n'existent pas.

2<sup>ème</sup> sous-cas  $d^0\Phi(x) > 0.$

La résolution de

$$\Phi(x) = 0$$

donne les valeurs de  $u_n$  et les  $F_i$ , ( $i=1, \dots, a_m - 1$ ), donnent les  $u_i$ , ( $i = 0, \dots, n - 1$ ).

3<sup>ème</sup> sous-cas Tous les  $q_i(x)$ , ( $i = 1, \dots, a_m - 1$ ), sont identiquement nuls.

Posons

$$u_n = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

et par suite

$$u_i = F_{n-i}(\lambda), \quad (i = 0, \dots, n - 1)$$

et par conséquent les solutions de (F) s'écrivent

$$u(x) = \lambda x^n + F_1(\lambda)x^{n-1} + \dots + F_n(\lambda), \lambda \in \mathbb{C}$$

**Proposition 3**

*Le cas où tous les  $q_i$  sont identiquement nuls n'existe pas. ( $i = 1, \dots, a_m - 1$ )*

**Preuve de la proposition 3**

L'idée consiste à travailler dans  $\mathbb{C}[\lambda]$ .

Posons

$$F_0(\lambda) = \lambda$$

donc

$$u(x) = F_0(\lambda)x^n + F_1(\lambda)x^{n-1} + \dots + F_n(\lambda)$$

Soient

$$h_i = d^0 F_i \text{ et } h = \max h_i, (h \geq 1 \text{ car } d^0 F_0 = 1).$$

Il existe  $x_0, x_0 \in \mathbb{C}$ , tel que

$$d^0 u(x_0) = h, (u(x_0) \in \mathbb{C}[\lambda]).$$

On tire de (F), pour  $x = x_0$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=0}^{n-1} (i-n)u_i A_{a_m}^{(m)} x_0^{a_m+i-1} \right) &= \left( \sum_{i=0}^n u_i x_0^i \right)^m + \left( \sum_{i=0}^{a_m-1} A_i^{(m-1)} x_0^i \right) \left( \sum_{i=0}^n u_i x_0^i \right)^{m-1} + \dots \\ &+ \left( \sum_{i=0}^{a_2} A_i^{(2)} x_0^i \right) \left( \sum_{i=0}^n u_i x_0^i \right)^2 + \left( \sum_{i=0}^{a_m-2} A_i^{(1)} x_0^i \right) \left( \sum_{i=0}^n u_i x_0^i \right) \\ &- \left( \sum_{i=0}^{a_m-1} A_i^{(m)} x_0^i \right) \left( \sum_{i=1}^n i u_i x_0^{i-1} \right) + \sum_{i=0}^{a_0} A_i^{(0)} x_0^i. \end{aligned} \quad (\text{F}')$$

L'égalité (F') est impossible dans  $\mathbb{C}[\lambda]$ , car

$$d^0 \left( \sum_{i=0}^n u_i x_0^i \right)^m = mh$$

mais que

$$d^0 \left( \sum_{i=0}^{n-1} (i-n)u_i A_{a_m}^{(m)} x_0^{a_m+i-1} \right) \leq h < mh,$$

$$d^0 \left[ \left( \sum_{i=0}^{a_j} A_i^{(j)} x_0^i \right) \left( \sum_{i=0}^n u_i x_0^i \right)^j \right] \leq jh < mh, (j = 2, 3, \dots, m-1)$$

$$d^0 \left[ \left( \sum_{i=0}^{a-2} C_i x_0^i \right) \left( \sum_{i=0}^n u_i x_0^i \right) \right] \leq h < mh$$

et

$$d^0 \left[ \left( \sum_{i=0}^{a_m-1} A_i^{(m)} x_0^i \right) \left( \sum_{i=1}^n i u_i x_0^{i-1} \right) \right] \leq h < mh$$

d'où la preuve de la proposition 3.

### Conclusion

Dans le cas dégénéré, l'étude précédente permet de déterminer toutes les solutions polynomiales, et de prouver qu'elles sont en nombre fini, d'où la preuve du théorème 2.

Vu que le degré des solutions polynomiales est inférieur ou égal à  $\max(\Omega)$ , qui est fini, on constate alors que dans tous les cas (dégénéré ou non dégénéré), l'équation (II) admet un nombre fini de solutions polynomiales  $u$ , (car les  $u_i$ , ne prennent à chaque fois qu'un nombre fini de valeurs), d'où la preuve de la partie 2) du théorème 1.

## 2.6 Exemples

### 1) Un cas dégénéré

Soit

$$(x^6 + 1)y' = y^3 - x^2y^2 + (2x^5 + x)y - x^3 + 2x \quad (I)$$

un calcul donne

$$\Omega = \{1, 2\} \text{ et } \max(\Omega) = 2$$

Cherchons les solutions polynomiales de la forme

$$y(x) = y_2x^2 + y_1x + y_0$$

On constate qu'on est dans le cas dégénéré, de (I) on tire

$$\begin{aligned} & (-y_2^2 + y_2^3 + y_1)x^6 + (2y_0 - 2y_1y_2 + 3y_1y_2^2)x^5 + \\ & (-y_1^2 + 3y_0y_2^2 + 3y_1^2y_2 - 2y_0y_2)x^4 + (-2y_0y_1 + 6y_0y_1y_2 - 1 + y_2 + y_1^3)x^3 \\ & + (3y_1^2y_0 + y_1 + 3y_2y_0^2 - y_0^2)x^2 + (3y_0^2y_1 + 2 - 2y_2 + y_0)x + y_0^3 - y_1 = 0 \end{aligned}$$

le système (S) est

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} -y_2^2 + y_2^3 + y_1 = 0 \quad (1) \\ 2y_0 - 2y_1y_2 + 3y_1y_2^2 = 0 \quad (2) \\ -y_1^2 + 3y_0y_2^2 + 3y_1^2y_2 - 2y_0y_2 = 0 \quad (3) \\ -2y_0y_1 + 6y_0y_1y_2 - 1 + y_2 + y_1^3 = 0 \quad (4) \\ 3y_1^2y_0 + y_1 + 3y_2y_0^2 - y_0^2 = 0 \quad (5) \\ 3y_0^2y_1 + 2 - 2y_2 + y_0 = 0 \quad (6) \\ y_0^3 - y_1 = 0 \quad (7) \end{array} \right.$$

On tire de (1),  $y_1$  en fonction de  $y_2$ , et on tire de (1) et (2),  $y_0$  en fonction de  $y_2$  et on les remplacent dans (3), (4), (5), (6) et (7), on trouve

$$(L) \left\{ \begin{array}{l} y_1 = (y_2^2 - y_2^3) \quad (1) \\ y_0 = \left(\frac{3}{2}y_2^5 - \frac{5}{2}y_2^4 + y_2^3\right) \quad (2) \\ q_1(y_2) = 0 \quad (3) \\ q_2(y_2) = 0 \quad (4) \\ q_3(y_2) = 0 \quad (5) \\ q_4(y_2) = 0 \quad (6) \\ q_5(y_2) = 0 \quad (7) \end{array} \right.$$

où

$$q_1(y_2) = -\frac{15}{2}y_2^7 + \frac{35}{2}y_2^6 - 13y_2^5 + 3y_2^4$$

$$q_2(y_2) = 10y_2^9 - 30y_2^8 + 32y_2^7 - 14y_2^6 + 2y_2^5 - y_2 + 1$$

$$q_3(y_2) = -\frac{45}{4}y_2^{11} + \frac{165}{4}y_2^{10} - \frac{231}{4}y_2^9 + \frac{151}{4}y_2^8 - 11y_2^7 + y_2^6 + y_2^3 - y_2^2$$

$$q_4(y_2) = \frac{27}{4}y_2^{13} - \frac{117}{4}y_2^{12} + \frac{201}{4}y_2^{11} - \frac{171}{4}y_2^{10} + 18y_2^9 - 3y_2^8 - \frac{3}{2}y_2^5 + \frac{5}{2}y_2^4 - y_2^3 + 2y_2 - 2$$

$$q_5(y_2) = -\frac{27}{8}y_2^{15} + \frac{135}{8}y_2^{14} - \frac{279}{8}y_2^{13} + \frac{305}{8}y_2^{12} - \frac{93}{4}y_2^{11} + \frac{15}{2}y_2^{10} - y_2^9 - y_2^3 + y_2^2,$$

par conséquent

$$\Phi(x) = PGCD(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = x - 1,$$

et par suite  $y_2 = 1$ ,  $y_1 = 0$  et  $y_0 = 0$

On en déduit que  $y(x) = x^2$  est l'unique solution méromorphe sur  $\mathbb{C}$  de (I).

## 2) Un cas non dégénéré

Soit

$$xy' = y^4 + 4x^3y^3 + (6x^6 + x)y^2 + (4x^9 + 2x^4)y + x^{12} + x^7 - 3x^3 - x - 1 \quad (I)$$

un calcul donne

$$\Omega = \{3\} \text{ et } \max(\Omega) = 3$$

Cherchons les solutions polynomiales de la forme

$$y(x) = y_3x^3 + y_2x^2 + y_1x + y_0$$

de (I) formons (P<sub>1</sub>)

$$y_3^4 + 4y_3^3 + 6y_3^2 + 4y_3 + 1 = 0 \quad (P_1)$$

équivalent à

$$(y_3 + 1)^4 = 0$$

donc

$$y_3 = -1,$$

posons

$$v(x) = y(x) + x^3$$

$$v(x) = v_2x^2 + v_1x + v_0$$

de (I) on tire

$$xv' = v^4 + xv^2 - x - 1 \quad (II)$$

de (II), formons (P<sub>2</sub>)

$$v_2^4 = 0 \quad (P_2)$$

donc

$$v_2 = 0$$

de (II), formons (P<sub>3</sub>)

$$v_1^4 = 0 \quad (P_3)$$

d'où

$$v_1 = 0$$

Cherchons  $v(x) = v_0 = \text{constante}$ , de (II) on tire

$$v_0^4 + xv_0^2 - x - 1 = 0$$

équivalent à

$$v_0^4 - 1 + x(v_0^2 - 1) = 0$$

donne  $v_0 = -1$  ou  $v_0 = 1$

On en déduit que  $-x^3 + 1$  et  $-x^3 - 1$ , sont les solutions méromorphes  $\mathbb{C}$  de (I).

3) **Un cas mixte.**(non dégénéré, dégénéré)

$$\begin{aligned} x^6 y' = y^5 + 10x^2 y^4 + (40x^4 - x^2) y^3 + (80x^6 - 6x^4 - 1) y^2 + \\ (80x^8 - 12x^6 + x^5 - 4x^2) y + 32x^{10} - 8x^8 - 2x^7 - 4x^4 + x^2 \end{aligned} \quad (I)$$

donc

$$\Omega = \{2\} \text{ et } \max(\Omega) = 2$$

$$y(x) = y_2 x^2 + y_1 x + y_0$$

de (I) formons (P<sub>1</sub>)

$$y_2^5 + 10y_2^4 + 40y_2^3 + 80y_2^2 + 80y_2 + 32 = 0 \quad (P_1)$$

équivalent à

$$(y_2 + 2)^5 = 0$$

donc

$$y_2 = 0$$

posons

$$v(x) = y(x) + 2x^2$$

de (I) on tire

$$x^6 v' = v^5 - x^2 v^3 - v^2 + x^5 v + x^2 \quad (II)$$

on est dans le cas dégénéré.

$$v(x) = v_1 x + v_0$$

et de (II), on tire

$$x^6 v_1 = (v_1 x + v_0)^5 - x^2 (v_1 x + v_0)^3 - (v_1 x + v_0)^2 + x^5 (v_1 x + v_0) + x^2$$

équivalent à

$$(v_1^5 - v_1^3 + v_0)x^5 + (5v_0 v_1^4 - 3v_0 v_1^2)x^4 + (10v_0^2 v_1^3 - 3v_0^2 v_1)x^3 + (-v_1^2 + 10v_0^3 v_1^2 + 1 - v_0^3)x^2 + (5v_0^4 v_1 - 2v_0 v_1)x + v_0^5 - v_0^2 = 0$$

le système (S) est

$$(S) \left\{ \begin{array}{ll} v_1^5 - v_1^3 + v_0 = 0 & (1) \\ 5v_0 v_1^4 - 3v_0 v_1^2 = 0 & (2) \\ 10v_0^2 v_1^3 - 3v_0^2 v_1 = 0 & (3) \\ -v_1^2 + 10v_0^3 v_1^2 + 1 - v_0^3 = 0 & (4) \\ 5v_0^4 v_1 - 2v_0 v_1 = 0 & (5) \\ v_0^5 - v_0^2 = 0 & (6) \end{array} \right.$$

de (1) on tire  $v_0$  en fonction de  $v_1$ , et on le remplace dans (2),..., (6)

$$(L) \left\{ \begin{array}{ll} v_0 = (v_1^3 - v_1^5) & (1) \\ q_1(v_1) = 0 & (2) \\ q_2(v_1) = 0 & (3) \\ q_3(v_1) = 0 & (4) \\ q_4(v_1) = 0 & (5) \\ q_5(v_1) = 0 & (6) \end{array} \right.$$

où

$$q_1(v_1) = -5v_1^9 + 8v_1^7 - 3v_1^5$$

$$q_2(v_1) = 10v_1^{13} - 23v_1^{11} + 16v_1^9 - 3v_1^7$$

$$q_3(v_1) = -10v_1^{17} + 31v_1^{15} - 33v_1^{13} + 13v_1^{11} - v_1^9 - v_1^2 + 1$$

$$q_4(v_1) = 5v_1^{21} - 20v_1^{19} + 30v_1^{17} - 20v_1^{15} + 5v_1^{13} + 2v_1^6 - 2v_1^4$$

$$q_5(v_1) = -v_1^{25} + 5v_1^{23} - 10v_1^{21} + 10v_1^{19} - 5v_1^{17} + v_1^{15} - v_1^{10} + 2v_1^8 - v_1^6$$

par conséquent

$$\Phi(x) = PGCD(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = x^2 - 1$$

d'où  $(v_1, v_0) = (1, 0)$  ou  $(v_1, v_0) = (-1, 0)$ .

Finalement,  $y(x) = -2x^2 + x$  et  $y(x) = -2x^2 - x$  sont les solutions méromorphes sur  $\mathbb{C}$  de (I).

## 2.7 Programme Maple

Considérons l'équation réduite

$$A_m(x)u' = u^m + A_{m-1}(x)u^{m-1} + \dots + A_1(x)u + A_0(x) \quad (II)$$

où  $m$  est un entier,  $m \geq 3$ ,  $P_i \in \mathbb{C}[x]$  et  $A_m \neq 0$ .

Le programme suivant, écrit en Maple6, permet de déterminer les solutions polynomiales de l'équation (II), ( $A[m]$  désigne le polynôme  $A_m$ ) :

> ode := A[m] \* diff(u(x), x) - (u(x)^m + sum('A[i] \* u(x)^i', i' = 0..m - 1)) :

```

for i from 0 to m do
a[i] := degree(A[i], x) : od :
A := [(seq(a[j]/(m - j), j = 0..m - 1)), (a[m] - 1)/(m - 1)] :
k := max(A[]) : J := trunc(k) + 1 :
G := [(seq(a[j] + j * (J - 1), j = 0..m - 1)), a[m] + (J - 1) - 1, m * (J - 1)] :
kappa(J - 1) := max(G[]) :
S := subs(u(x) = sum('u[i] * x^i', i' = 0..J - 1), ode);

```

```

for i from 0 to kappa(J - 1) do
E[i] := Coeff(S, x, i) : od :
solve({seq(E[i], i = 0..kappa(J - 1))});

```

Exemples

1) Soit

$$x^6 u' = u^5 + 10x^2 u^4 + (40x^4 - x^2) u^3 + (80x^6 - 6x^4 - 1) u^2 + (80x^8 - 12x^6 + x^5 - 4x^2) u + 32x^{10} - 8x^8 - 2x^7 - 4x^4 + x^2 \quad (\text{I})$$

On rajoute seulement les instructions suivantes au début du programme précédent :

```

> m := 5 :
A[0] : = 32 * x^10 - 8 * x^8 - 2 * x^7 - 4 * x^4 + x^2 :
A[1] : = 80 * x^8 - 12 * x^6 + x^5 - 4 * x^2 :
A[2] : = 80 * x^6 - 6 * x^4 - 1 :
A[3] : = 40 * x^4 - x^2 :
A[4] : = 10 * x^2 : A[5] := x^6 :

```

Réponse :

$$\{u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = -2\}, \{u_0 = 0, u_1 = -1, u_2 = -2\}$$

2) Pour l'équation

$$xu' = u^3 + xu^2 - x^{12} - x^9 + 4x^4,$$

Réponse

$$\{u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 1\}.$$

3) Pour l'équation

$$(x + 1)u' = u^6 - x^6u^4 + u^3 + 3u - x^9 + 3x^2,$$

Réponse

$$\{u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1\}$$

3) Pour l'équation

$$x^{40}u' = u^{20} + u^2 + 2x^{39}u - x^{40} - x^4,$$

Réponse

$$\{u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1\},$$

$$\{u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = -1\}.$$

# Chapitre 3 : Systèmes d'équations aux dérivées partielles

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, notre travail consiste à introduire d'abord la notion de régularité pour les opérateurs aux dérivées partielles, ensuite on explicitera, en utilisant la théorie de W.Chow, une classe régulière d'opérateurs aux dérivées partielles, agissant dans l'espace des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{C}^n$ . Enfin, on généralisera nos résultats à une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles.

### 3.1.1 Définitions et notations

On désigne par  $\mathbb{H}(\mathbb{C}^n)$  l'espace des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}^n$  et  $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$  l'espace des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{C}^n$ .

Soit :

$$\mathbf{X} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$$
$$f \rightarrow \sum_{|i|=0}^m a_i \partial^i f$$

avec  $\mathbb{L} = \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$  ou  $\mathbb{H}(\mathbb{C}^n)$ ,  $i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ ,  $|i| = i_1 + i_2 + \dots + i_n$ ,  $a_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

$$\text{et } \partial^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}.$$

$\mathbb{K}er(\mathbf{X}, \mathbb{L})$  est l'espace  $\{f \in \mathbb{L} / \mathbf{X}f = 0\}$ .

Soit  $\mathbb{T}$  est un sous espace de  $\mathbb{L}$ ,  $\mathbf{X}$  est dit  $\mathbb{T}$ -régulier sur  $\mathbb{L}$  si:  $\mathbb{K}er(\mathbf{X}, \frac{\mathbb{L}}{\mathbb{T}}) = (0)$ .

$$E = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ est l'opérateur classique d'Euler.}$$

Le symbole du binôme  $C_{|i|}^i = \frac{|i|!}{i_1! i_2! \dots i_n!}$ .

$$x^i = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}.$$

$$\underline{\mathbb{C}}[x_1, \dots, x_n] = \left\{ \frac{A}{q} / A \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], q \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}, \text{ et } q \text{ homogène} \right\}.$$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  l'espace projectif standard.

## 3.2 Equations aux dérivées partielles

### 3.2.1 Enoncé du Théorème fondamental

Le théorème suivant nous permet de construire des opérateurs réguliers de tout ordre.

#### Théorème 1

Soient  $b_0, b_1, \dots, b_m$ ,  $(m+1)$  nombres complexes non tous nuls. Si  $a_i = b_{|i|} C_{|i|}^i x^i$  pour tout  $i$ , alors l'opérateur  $\sum_{|i|=0}^m a_i \partial^i$  est  $\underline{\mathbb{C}}[x_1, \dots, x_n]$ -régulier sur  $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ .

#### Corollaire 1

L'opérateur précédent est  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ -régulier sur  $\mathbb{H}(\mathbb{C}^n)$ .

La preuve du théorème 1 est basée sur les trois lemmes suivants :

#### Lemme 1 (Chow, voir[7])

Toute fonction méromorphe sur  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  est rationnelle.

#### Lemme 2

Pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$  l'opérateur  $P(E)$  est  $\underline{\mathbb{C}}[x_1, \dots, x_n]$ -régulier sur  $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ .

#### Lemme 3

Soient  $b_0, b_1, \dots, b_m$ ,  $(m+1)$  nombres complexes non tous nuls, alors il existe un

polynôme  $P$  de  $\mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$ , tel que  $\sum_{|i|=0}^m a_i \partial^i = P(E)$  où  $a_i = b_{|i|} C_{|i|}^i x^i$  pour tout  $i$ . ( $0 \leq |i| \leq m$ ).

### Preuve du lemme 2

Comme  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos, on a :

$$P(E) = a(E - r_1) \dots (E - r_m)$$

où les  $r_i$  sont les racines de  $P(x)$  comptées avec leur multiplicité et  $a \in \mathbb{C}^*$ ; et pour que  $P(E)$  soit  $\underline{\mathbb{C}}[x_1, \dots, x_n]$ -régulier sur  $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$  il suffit que chaque  $(E - r_i)$  le soit.

-Un calcul direct donne :

$$E(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}) = (i_1 + i_2 + \dots + i_n) x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \quad (*)$$

-Soient  $q \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$  homogène de degré  $\lambda$  et  $u \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ , de (\*) on tire :

$$E(qu) = \lambda qu + qE(u) \quad (**)$$

Montrons maintenant que chaque  $(E - r)$  est  $\underline{\mathbb{C}}[x_1, \dots, x_n]$ -régulier sur  $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$

Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} E(u) - ru = \frac{A}{q} \\ \text{et} \\ u \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n) \end{array} \right.$$

où  $A \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  et  $q \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$  homogène de degré  $\lambda$ .

D'après (\*\*),

$$E(u) - ru = \frac{A}{q}$$

s'écrit

$$E(qu) - (\lambda + r)qu = A.$$

Posons  $v = qu$  et  $\alpha = \lambda + r$ , on aura :

$$E(v) - \alpha v = A \quad (1)$$

Etudions l'équation (1) suivant les valeurs de  $\alpha$ .

**1<sup>er</sup> cas:**  $\alpha \in \mathbb{N}$

En utilisant (\*), on voit que pour un  $B \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , on a

$$E(B) - \alpha B = A_2 \quad (2)$$

$A_2 = A - A_1$  où  $A_1$  est la somme de tous les termes de  $A$  de degré  $\alpha$ .

Posons  $w = v - B$ , de (1) et (2) on tire :

$$E(w) - \alpha w = A_1 \quad (3)$$

Changement de variables :

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{x_1} \text{ et } y_i = \frac{x_i}{x_1}, i \geq 2 \\ \text{et} \\ \theta(y_1, \dots, y_n) = w(x_1, \dots, x_n). \end{array} \right.$$

La fonction  $\theta$  est méromorphe sur :  $0 < |y_1|$ .

Pour  $y_1 \neq 0$ , en utilisant le changement de variables, on a :

$$E(\theta) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$$

et

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} &= x_1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \\ &= x_1 \frac{\partial \theta}{\partial y_1} \frac{(-1)}{x_1^2} + x_1 \sum_{i=2}^n \frac{\partial \theta}{\partial y_i} \frac{(-x_i)}{x_1^2} \end{aligned}$$

équivalent à

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} &= \frac{-1}{x_1} \frac{\partial \theta}{\partial y_1} - \frac{1}{x_1} \sum_{i=2}^n x_i \frac{\partial \theta}{\partial y_i} \\ &= -y_1 \frac{\partial \theta}{\partial y_1} - \sum_{i=2}^n y_i \frac{\partial \theta}{\partial y_i} \end{aligned}$$

et pour  $i \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} x_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} &= x_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial \theta}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \\ &= x_i \frac{1}{x_1} \frac{\partial \theta}{\partial y_i} = y_i \frac{\partial \theta}{\partial y_k} \end{aligned}$$

parce que

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = 0 \text{ si } i \neq k$$

d'où

$$\begin{aligned} E(\theta) - \alpha \theta &= -y_1 \frac{\partial \theta}{\partial y_1} - \sum_{i=2}^n y_i \frac{\partial \theta}{\partial y_i} + \sum_{i=2}^n y_i \frac{\partial \theta}{\partial y_i} - \alpha \theta \\ &= -y_1 \frac{\partial \theta}{\partial y_1} \end{aligned}$$

finalement de (3), on obtient

$$y_1 \frac{\partial \theta}{\partial y_1} + \alpha \theta = -y_1^{-\alpha} S$$

où  $S \in \mathbb{C}[y_2, \dots, y_n]$ .

Par suite

$$\theta(y_1, \dots, y_n) = -\frac{S \operatorname{Log}(y_1) + \varphi(y_2, \dots, y_n)}{y_1^\alpha}$$

où  $\varphi$  est une fonction arbitraire.

Mais sur tout voisinage pointé de l'origine de  $\mathbb{C}$  la fonction  $\operatorname{Log}$  n'est pas uniforme, voir[8],  $S$  est nécessairement nul.

Il reste

$$\theta(y_1, \dots, y_n) = -\frac{\varphi(y_2, \dots, y_n)}{y_1^\alpha}$$

Comme  $\alpha$  est entier,  $\theta$  est alors méromorphe le long de  $y_1 = 0$ , voir [12], la fonction

$$\Phi : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow -x_1^{-\alpha} w(x_1, \dots, x_n)$$

est méromorphe sur  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ , donc elle est rationnelle d'après le lemme de Chow,  $\Phi$  est homogène de degré 0, elle appartient à  $\underline{\mathbb{C}}[x_1, \dots, x_n]$ , on en déduit que  $u \in \underline{\mathbb{C}}[x_1, \dots, x_n]$ .

**2<sup>ème</sup> cas**  $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

En utilisant (\*), on voit que pour un  $B \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , on a :

$$E(B) - \alpha B = A \quad (4)$$

Posons  $w = v - B$ , de (1) et (4) on tire :

$$E(w) - \alpha w = 0 \quad (5)$$

Changement de variables :

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{x_1} \text{ et } y_i = \frac{x_i}{x_1}, i \geq 2 \\ \text{et} \\ \theta(y_1, \dots, y_n) = w(x_1, \dots, x_n). \end{array} \right.$$

La fonction  $\theta$  est méromorphe sur :  $0 < |y_1|$ .

Pour  $y_1 \neq 0$ , on tire de (5) :

$$y_1 \frac{\partial \theta}{\partial y_1} + \alpha \theta = 0$$

par suite :

$$\theta(y_1, \dots, y_n) = \varphi(y_2, \dots, y_n) y_1^{-\alpha}$$

où  $\varphi$  est une fonction arbitraire.

Comme  $(-\alpha)$  est entier,  $\theta$  est méromorphe le long de  $y_1 = 0$ , la fonction

$$\Phi : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_1^{-\alpha} w(x_1, \dots, x_n)$$

est alors méromorphe sur  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ , donc elle est rationnelle d'après le lemme de Chow,  $\Phi$  est homogène de degré 0, elle appartient à  $\underline{\mathbb{C}}[x_1, \dots, x_n]$ , on en déduit que  $u \in \underline{\mathbb{C}}[x_1, \dots, x_n]$ .

**3<sup>ème</sup> cas:**  $\alpha \notin \mathbb{Z}$

En utilisant (\*), on voit que pour un  $B \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , on a

$$E(B) - \alpha B = A \quad (6)$$

posons  $w = v - B$ , de (1) et (6) on tire :

$$E(w) - \alpha w = 0 \quad (7)$$

Changement de variables:

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{x_1} \text{ et } y_i = \frac{x_i}{x_1}, i \geq 2 \\ \text{et} \\ \theta(y_1, \dots, y_n) = w(x_1, \dots, x_n). \end{array} \right.$$

$\theta$  est méromorphe sur:  $0 < |y_1|$ .

pour  $y_1 \neq 0$ , on tire à partir de (7) :

$$y_1 \frac{\partial \theta}{\partial y_1} + \alpha \theta = 0.$$

par suite

$$\theta(y_1, \dots, y_n) = \varphi(y_2, \dots, y_n) y_1^{-\alpha}$$

où  $\varphi$  est une fonction arbitraire.

Mais sur tout voisinage pointé de l'origine la fonction :  $y_1 \rightsquigarrow y_1^{-\alpha}$  n'est pas uniforme, nécessairement

$$\theta(y_1, \dots, y_n) = 0$$

donc  $u \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ .

### Preuve du lemme 3

Notons  $E^{[k]} = \sum_{|i|=k} C_k^i x^i \partial^i$ .

Pour démontrer le lemme 3, on aura besoin du sous-lemme technique suivant :

#### Sous-lemme

$E(E^{[k]}) = E^{[k+1]} + kE^{[k]}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Du sous-lemme on obtient les relations :

$$E^0 = E^{[0]}.$$

$$E^1 = E^{[1]}.$$

$$E^2 = E^{[2]} + E^{[1]}.$$

$$E^3 = E^{[3]} + 3E^{[2]} + E^{[1]}.$$

⋮

$$E^k = E^{[k]} + d_{k,k-1}E^{[k-1]} + d_{k,k-2}E^{[k-2]} + \dots + d_{k,1}E^{[1]}, \text{ avec } d_{k,i} \in \mathbb{N},$$

Ces relations peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & d_{k,1} & d_{k,2} & d_{k,3} & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^{[0]} \\ E^{[1]} \\ E^{[2]} \\ E^{[3]} \\ \cdot \\ \cdot \\ E^{[k]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^0 \\ E^1 \\ E^2 \\ E^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ E^k \end{bmatrix} .$$

notre matrice est visiblement inversible, donc il existe des  $f_{k,i} \in \mathbb{Z}$ , tels que

$$E^{[k]} = E^k + f_{k,k-1}E^{k-1} + f_{k,k-2}E^{k-2} + \dots + f_{k,1}E,$$

d'où

$$b_k E^{[k]} = b_k (E^k + f_{k,k-1}E^{k-1} + f_{k,k-2}E^{k-2} + \dots + f_{k,1}E)$$

finalement

$$\sum_{k=0}^m b_k E^{[k]} = \sum_{k=0}^m b_k (E^k + f_{k,k-1}E^{k-1} + f_{k,k-2}E^{k-2} + \dots + f_{k,1}E) = P(E).$$

où  $P \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$ .

### Preuve du sous-lemme

On a

$$E^{[k]} = \sum_{|i|=k} C_k^i x^i \partial^i,$$

donc

$$E(E^{[k]}) = x_1 \frac{\partial(\sum_{|i|=k} C_k^i x^i \partial^i)}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial(\sum_{|i|=k} C_k^i x^i \partial^i)}{\partial x_n}.$$

mais

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\sum_{|i|=k} C_k^i x^i \partial^i)}{\partial x_1} = i_1 \left( \sum_{|i|=k} C_k^i x^i \partial^i \right) + \sum_{|i|=k} C_k^i x_1^{i_1+1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \frac{\partial^{|i|+1}}{\partial x_1^{i_1+1} \dots \partial x_n^{i_n}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial(\sum_{|i|=k} C_k^i x^i \partial^i)}{\partial x_n} = i_n \left( \sum_{|i|=k} C_k^i x^i \partial^i \right) + \sum_{|i|=k} C_k^i x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n+1} \frac{\partial^{|i|+1}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n+1}} \end{array} \right.$$

on a

$$\sum_{|i|=k} C_k^i x_1^{i_1+1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \frac{\partial^{|i|+1}}{\partial x_1^{i_1+1} \dots \partial x_n^{i_n}} = \sum_{|i'|=k+1} C_k^{i'_1-1, \dots, i'_n} x_1^{i'_1} x_2^{i'_2} \dots x_n^{i'_n} \frac{\partial^{|i'|}}{\partial x_1^{i'_1} \dots \partial x_n^{i'_n}}$$

où  $i'_1 = i_1 + 1$  et  $i' = (i'_1, i_2, \dots, i_n)$ , et en changeant les indices ( $i' = i$  et  $i'_1 = i_1$ ), on obtient :

$$\sum_{|i|=k} C_k^i x_1^{i_1+1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \frac{\partial^{|i|+1}}{\partial x_1^{i_1+1} \dots \partial x_n^{i_n}} = \sum_{|i|=k+1} C_k^{i_1-1, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$$

de même pour les autres indices, on aura ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\sum_{|i|=k} C_k^i x^i \partial^i)}{\partial x_1} = i_1 \left( \sum_{|i|=k} C_k^i x^i \partial^i \right) + \sum_{|i|=k+1} C_k^{i_1-1, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial(\sum_{|i|=k} C_k^i x^i \partial^i)}{\partial x_n} = i_n \left( \sum_{|i|=k} C_k^i x^i \partial^i \right) + \sum_{|i|=k+1} C_k^{i_1, \dots, i_n-1} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \end{array} \right.$$

il vient par addition

$$E(E^{[k]}) = (i_1 + \dots + i_n) \left( \sum_{|i|=k} C_k^i x^i \partial^i \right) + \sum_{|i|=k+1} C_{k+1}^i x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$$

car

$$C_k^{i_1-1, i_2, \dots, i_n} + C_k^{i_1, i_2-1, \dots, i_n} + \dots + C_k^{i_1, i_2, \dots, i_n-1} = C_{k+1}^{i_1, i_2, \dots, i_n}$$

(formule classique)

finalement

$$E(E^{[k]}) = kE^{[k]} + E^{[k+1]}.$$

### 3.2.2 Preuve du Théorème fondamental

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème 1. D'après le lemme 3 :

$$\sum_{|i|=0}^m b_{|i|} C_{|i|}^i x^i \partial^i = P(E)$$

pour un  $P \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$  et  $b_0, b_1, \dots, b_m$ ,  $m+1$  nombres complexes non tous nuls. Et d'après le lemme 2:  $P(E)$  est  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ -régulier sur  $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ , pour tout polynôme  $P$  de

$\mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$ , donc  $\sum_{|i|=0}^m b_{|i|} C_{|i|}^i x^i \partial^i$  est  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ -régulier sur  $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ .

## 3.3 Systèmes d'équations aux dérivées partielles

### 3.3.1 Premier ordre

Soit

$$P : (\mathbb{M}(\mathbb{C}^n))^m \rightarrow (\mathbb{M}(\mathbb{C}^n))^m$$

$$f = (f_1, \dots, f_m)^t \rightarrow Pf = (P_i f)_{1 \leq i \leq m} = \left( \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i^{(k)} f_i \right)_{1 \leq k \leq m}^t$$

où  $a_{ij}^{(k)}, b_i^{(k)} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ .

Le théorème suivant nous permet de construire des systèmes d'opérateurs réguliers d'ordre un.

### **Théorème 2**

Soient  $r^{(1)}, \dots, r^{(m)}$ ,  $m$  nombres complexes,  $c_i^{(k)}$ , ( $1 \leq i, k \leq m$ ),  $m^2$  polynômes homogènes de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , tels que pour chaque  $k$ ,  $\deg c_i^{(k)}$  soit indépendant de  $i$ . L'opérateur

$P$  est régulier, pourvu que

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k)} = x_j c_i^{(k)} \\ b_i^{(k)} = r^{(k)} c_i^{(k)} \\ \det((c_i^{(k)})_{(1 \leq i, k \leq m)}) \text{ non trivial} \end{cases}$$

pour tout  $i, j, k$ .

### **Preuve du Théorème 2**

Soit

$$(S) \begin{cases} P_k f = A_k \\ f \in (\mathbb{M}(\mathbb{C}^n))^m \\ 1 \leq k \leq m \end{cases}$$

où  $A_k \in \underline{\mathbb{C}}[x_1, \dots, x_n]$ .

Pour  $k = 1$ , on obtient du système (S)

$$\sum_{i=1}^m (c_i^{(1)} \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}) + r^{(1)} \sum_{i=1}^m c_i^{(1)} f_i = A_1 \quad (8)$$

soit  $n_1 = \deg c_i^{(1)}$

$$\text{mais } c_i^{(1)} \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = c_i^{(1)} E(f_i)$$

$$= E(c_i^{(1)} f_i) - n_1 c_i^{(1)} f_i \quad (\text{utiliser la relation (**)})$$

de (8), on a

$$E\left(\sum_{i=1}^m c_i^{(1)} f_i\right) + (r^{(1)} - n_1) \sum_{i=1}^m c_i^{(1)} f_i = A_1 \quad (9)$$

La fonction  $\sum_{i=1}^m c_i^{(1)} f_i$  est méromorphe sur  $\mathbb{C}^n$ , et grâce au lemme 2, l'opérateur  $E - (n_1 - r^{(1)})$  est régulier, et on en déduit que  $\sum_{i=1}^m c_i^{(1)} f_i \in \underline{\mathbb{C}}[x_1, \dots, x_n]$ .

Du système (S), on obtient :

$$(S') \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m c_i^{(k)} f_i = B_k \\ f_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n) \\ 1 \leq k \leq m \end{array} \right.$$

où  $B_k \in \underline{\mathbb{C}}[x_1, \dots, x_n]$ .

Mais  $\det((c_i^{(k)})_{(1 \leq i, k \leq m)})$  est non trivial, donc  $f_i \in \underline{\mathbb{C}}[x_1, \dots, x_n]$  pour tout  $i$ .

### 3.3.2 Ordres supérieurs

On peut obtenir, par composition, des systèmes réguliers de tout ordre :

**Proposition 1**

*L'opérateur  $Q = P \circ P \circ \dots \circ P$ , ( $s$  fois), où  $s \in \mathbb{N}^*$  est régulier d'ordre  $s$ , pourvu que  $P$  soit régulier et d'ordre un.*

## Bibliographie

- [1] S. A. Abramov, M. Bronstein and M. Petkovsek, On polynomial solutions of linear differential operators, Proceedings of the 1995 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation: ISSAC'95, 290-296
- [2] D. Behloul and S. S. Cheng, Computation of All Polynomial Solutions of a Class of Nonlinear Differential Equations, Computing, Springer-Verlag, to appear.
- [3] D.Behloul, Algebraic Methods in Partial Differential Operators. Journal of Partial Differential Equations, vol 18, 114-120, 2005.
- [4] K.Betina, Indices polynomiaux et solutions polynomiales de certains systèmes de Pfaff singuliers, Analysis 12, 195-216, 1992
- [5] K.Betina, Indices d'opérateurs différentiels et solutions rationnelles, Prépublication du département de Mathématiques de l'Université de Poitier, 1996.
- [6] E. S. Cheb-Terrab and A. D. Roche, An Abel ordinary differential equation class generalizing known integrable classes. European J. Appl. Math. 14 (2003), no. 2, 217–229.
- [7] Chow W L, On compact complex analytic varieties. Amer.J.of Math. 1949, VOL 71, 893-914.
- [8] Conway J B, Functions of one complex variable. Springer-Verlag, GTM11,1986.
- [9] P.Deligne, Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture notes in Math, 163, Springer-Verlag 1970.
- [10] J. Della Dora and F. Jung, About the Newton polygon algorithm for non linear ordinary differential equations, ISSAC'97, 1997.
- [11] H.B.Fine, On the functions defined by differential equations with an extension of the Puiseux polygon construction of these equations, Amer. J. Math, XI 317-328, 1889.
- [12] L.Hörmander L, An introduction to complex Analysis in several variables. North-Holland, 1973.
- [13] E.L.Ince, Ordinary differential equations, Dover publication, INC, New York, 1956.

- [14] H.Komatsu, On the index of differential operators, J.Fac.Sci.Tokyo, IA, 1971.
- [15] W. R. Li, S. S. Cheng and T. T. Lu, Closed form solutions of iterative functional differential equations, Appl. Math. E-Notes, 1(2001), 1-4.
- [16] J.Liouville, Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 425-456, 1834.
- [17] B.Malgrange, Sur les points singuliers des équations différentielles, L'enseignement Mathématiques, t.XX, 1974, 1-2
- [18] J.P.Ramis, Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires, Memoirs of the AMS, vol 296, 1984.
- [19] E.Tournier, Solutions formelles d'équations différentielles, thèse, université de Grenoble I, 1987.
- [20] K.Yosida, A generalisation of a Malmquist's theorem, Japan. J.Math, 9 (1933), 253-256.