N°d'ordre : 06/2008 - E/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE-ALGER
FACULTE DE MATHEMATIQUES

Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de **Docteur d'Etat**

en : **Mathématiques**

Spécialité : **Probabilités- Statistiques**

Par

Seddiki/Merad Djenat

Thème :

PROBLEMES DE CONVERGENCE EN LOI DANS LES SYSTEMES DE FILES D'ATTENTE

Soutenue le 16.12.2008 , devant le jury composé de :

M. Abdelkader Khelladi, Professeur, USTHB.	Président
M. Djamil Aissani, Professeur , Université A. Mira.	Directeur de thèse
M. Amar Aissani, Professeur, USTHB.	Examinateur
M. Kamel Boukhetala, Professeur, USTHB.	Examinateur
M. François Charlot, Maitre de Conférence, Université de Rouen.	Examinateur
M. Djamel Hamadouche, Professeur, Université M. Mammeri.	Examinateur
M. Khaled Khaldi, Professeur, Université de Boumerdes	Examinateur

Remerciements

Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à

Monsieur le Professeur Djamil.AISSANI

pour avoir accepté de diriger cette thèse, pour l'intérêt permanent qu'il a manifesté à mon travail, les nombreux conseils et encouragements qu'il m'a prodigué et pour le merveilleux séjour passé au laboratoire LAMOS.

Je remercie vivement Monsieur le Maitre Conférencier François.CHARLOT pour son accueil à l'université Blaise Pascal, pour tous les documents de recherches dont il m'a dotée, les nombreuses heures de travail qu'il m'a consacré et pour ses précieuses remarques.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur AbdelKader.KHELLADI pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur Amar.AISSANI, Monsieur le Professeur Kamel.BOUKHETALA notre Doyen de la faculté, Monsieur le Professeur Djamel.HAMADOUCHE, Monsieur le Professeur Khaled.KHALDI, pour m'avoir fait l'honneur de participer au jury.

Je remercie très fort les enseignants de mathématiques à l'USTHB, à l'ENS et à l'ENTP pour l'aide qu'ils m'ont apporté.

Le résumé

Cette thèse est composée des principaux thèmes nécessaires à l'étude de la convergence en loi des systèmes de files d'attente via la théorie du renouvellement.
Les modèles que nous considérons sont ceux décrits par un processus $X^x = (X_n^x)_n$ vérifiant l'équation $X_n^x = f(X_{n-1}^x, Y_n)$ où f est une fonction borélienne et $(Y_n)_n$ est une suite stationnaire de variables aléatoires.
Afin d'éviter les difficultés rencontrées généralement dans l'étude d'un régime transitoire, notre approche repose essentiellement sur l'existence d'un régime stationnaire qui après un temps fini se confond avec le régime transitoire.
Cette thèse comporte différentes méthodes de démonstration de la convergence en loi pour plusieurs types de files d'attente dans le cas stationnaire et le cas stationnairement périodique.

Mots clés : convergence en loi, convergence étroite, convergence vague, couplage de processus stochastiques, files d'attente, files d'attente stationnaires, files d'attente stationnairement périodiques , processus ponctuels, processus régénératifs, le théorème de Birkoff, la théorie du renouvellement, le théorème classique de renouvellement , le théorème de renouvellement de Smith.

Abbréviations

$\mathcal{L}(Z)$	la loi de la variable Z
PAPS	premier arrivé premier servi
PP	processus ponctuel
PPM	processus ponctuel marqué
p.p	presque partout
p.s	presque sûrement
SP	simple
ST	stationnaire
DI	doublement infini
VA	variable aléatoire
VAIE	variables aléatoires indépendantes équidistribuées

Abstract

This these is compound of main topics required study of the convergence of the distributions systems. Model that we consider are those described by the process $X^x = (X_n^x)_n$ verifying the equation $X_n^x = f(X_{n-1}^x, Y_n)$ where f is a measurable function and $(Y_n)_n$ is a stationary sequence of random variables.
In order to avoid difficulties encountered generally in enticipation of the transitory regime, our approach is based primarly on the existence of a stationary state that after a finite time to be confused with the transitory regime.
This these encludes different methods of demonstration of the convergence in terms of laws for several type of queues in the stationary case and in the stationarily periodic case.
Keywords : Convergence in distribution, tight convergence , vague convergence , coupling, queues, stationary queues, stationarily periodic queues, renewal theory, point processes, regeneratif processes, Birkoff theorem, the classical renewal theorem, the key renewal theorem.

Table des matières

Introduction

L'étude des files d'attente a été introduite par Erlang [39] au début du siècle dernier, juste après l'invention du téléphone et avant même que la théorie des probabilités ne soit complètement fondée.

Le progrès technologique, en particulier dans le domaine des télécommunications et dans la conception des systèmes informatiques où apparaissent différents types de réseaux, a entrainé l'extension des applications des files d'attente .

Le problème principal qui se pose en files d'attente est celui de la modélisation de l'évolution de l'état du système au cours du temps, le calcul de la loi transitoire et des caractéristiques du système(voir [58], [47], [78]).

Seulement, le calcul de la distribution dans le cas transitoire est difficile et dans la plupart des cas impossible. Une des solutions adoptée face à cette difficulté consiste à montrer qu'il existe un unique régime stationnaire(voir [11], [44], [66], [75]) vers lequel le système converge(voir aussi, [19], [23], [36] [50], [56], [82], [71], [90], [92], [101]).

Le cas stationnaire

Lindley [61] fût le premier à proposer une approche systématique au problème de convergence en loi, en posant la formule de récurrence suivante :

$$W_{n+1} = (W_n + B_{n+1} - A_{n+1})_+, \tag{1}$$

où $(B_n)_n$ est la suite des temps de service , $(A_n)_n$ est la suite des inter-arrivées , toutes deux supposées constituées de variables aléatoires indépendantes équidistribuées , et où W_n est le temps d'attente du *nième* client dans une file à un serveur. Il montre aussi que

$$W_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{en\ loi} W = Sup\{S_n, n \geq 1\} \quad \text{où} \ \ S_n = \sum_{i=0}^{n} (B_i - A_i). \tag{2}$$

Quelques années plus tard, Loynes [66] exploite la formule de récurrence définie par (1) pour montrer la stabilité de la file $G/G/1$ sous des hypothèses plus naturelles que celles citées ci dessus : pour une file à un serveur à flot d'entrée stationnaire défini sur un espace ergodique, il montre l'existence, la finitude et l'unicité du régime stationnaire.

Son résultat se généralise à tous les systèmes de files d'attente qui vérifient une formule de récurrence du type

$$W^e_{n+1} = f(W^e_n, X_{n+1}) \tag{3}$$

où f est une fonction strictement croissante par rapport à la première coordonnée et (X_n) est une suite stationnaire.

En parallele, Takacs[90] montre la convergence en loi du processus de la charge du serveur et du processus du temps d'attente pour une file $GI/GI/1$, et donne l'expression de la loi limite à partir du processus observé.
En 1972, Miller et al [71] ont établit la convergence en loi du processus de la longueur de la file dans le cas d'un système d'attente à une file avec plusieurs serveurs.
Charlot et al [21], [22], [23], ont traité la question de la convergence en loi pour différents types de files avec impatience, pour les files GI/GI/s et pour les files à plusieurs classes de clients.
La théorie du renouvellement est à la base des résultats de convergence en loi obtenus par [21], [22], [23], [90]. Cette théorie traite la situation suivante : une pièce est éclairée par une ampoule électrique, dès que l'ampoule brule celle ci est instantanément remplacée par une autre ampoule. Les ampoules sont appelées *individus* et les durées de fonctionnement des différentes ampoules sont appelées *durées de vie*. Ces dernières sont représentées par une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ supposées indépendantes équidistribuées, la suite constituée des sommes partielles $S = (S_n)_n($ où $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i)$ est appelée *suite de renouvellement* .
Le problèmes principal de la théorie du renouvellement est l'étude du comportement asymptotique du nombre moyen (que nous noterons $U(t)$), de sommes S_n se trouvant dans l'intervalle $[0, t]$. Ce problème a été posé et étudié en premier lieu par Erdos et al [38] dans le cas où la loi commune des X_i est latticielle, puis par Blackwell [15] dans le cas où la loi des X_i est non latticielle. La résolution de ce problème est exprimé dans le cas non latticielle par la limite suivante :

$$\lim_{t\to+\infty} (U(t+h) - U(t)) = \frac{h}{\mu}. \tag{4}$$

Cette limite est connue sous le nom du théorème classique de renouvellement ou le théorème de renouvellement de Blackwell.
Täcklind [89] a donné des estimations de $U(t)$ quand le *kième* moment de X_1 existe où $k \geq 2$ et la loi de X_1 est non latticielle, son résultat entraine le théorème de renouvellement de Blackwell.
Doob[34] a montré que le théorème de renouvellement de Blackwell est une conséquence de la loi des grands nombres. Nous montrons dans [68] que le théorème de renouvellement peut $\hat{e}$tre obtenu à partir d'une convergence étroite sur l'espace des mesures ponctuels muni de la topologie de la convergence vague.
Le théorème de renouvellement n'a pas cessé d'être l'objet d'intérêt de grands chercheurs :

Athreya [8] Iglhart[50] et Jacod [51] ont étudié le théorème de renouvellement dans le cadre des chaines de Markov, Blanchard [16] et Totoki[97] dans le cadre des systèmes dynamiques, Delasnerie [30] a donné une extension du théorème de renouvellement en supposant les variables $(X_i)_i$ équidistribuées définies sur un flot $\big(\Omega,\ \mathscr{A}, P, (\theta_x, x \in \mathbb{R})\big)$ vérifiant une propriété de mélange. Alsmeyer [3] a établit un théorème de renouvellement dans le cas de variables équidistribuées deux à deux indépendantes. Geluk [45] a amélioré les résultats de Täcklind.

Le développement de la théorie du renouvellement a entrainé la naissance de deux notions de processus régénératifs(voir définition 3.2.1). Un processus $Z = (Z(t))_t$ est dit régénératif, s'il existe une suite de renouvellement $S = (S_n)_n$ telle que pour tout n la loi du processus translaté $\theta_{S_n} \circ Z$ ne dépend pas de n.

Smith [86] a introduit une nouvelle classe δ de processus régénératifs dont la loi des durées de vie F , soit telle que $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que F^{*n} possède une partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Pour cette classe de processus régénératifs, il montre

que : $\forall F \in \delta$ et $0 < \mu < +\infty$ on a,

$$\lim_{t \to +\infty} P(Z(t) \in A) = \frac{1}{\mu} \int_A (1 - F(s))ds, \ , \ \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}. \tag{5}$$

D'autres auteurs se sont intéressés au théorème de renouvellement de Smith comme Lalley [59] qui a donné une généralisation de (5) dans le cas d'une suite de variables équidistribuées non nécessairement indépendantes définies sur un flot possédant une propriété de perte de mémoire.

Malgré les innombrables travaux effectués sur le renouvellement, cette théorie reste encore un champs de recherche fertile, récemment De Saporta [33] a montré (5) pour des processus vectoriels dont les composantes sont des processus régénératifs. La théorie du renouvellement ne résoud pas totalement le problème de convergence en loi puisqu'il existe des processus décrivant le régime transitoire de systèmes d'attente qui ne possèdent pas une structure régénérative. Dans ce cas l'application de la technique de couplage permet la résolution complète de notre problème .

L'idée de couplage revient à Doeblin [32], cette technique a connu un grand nombre d'applications(voir [46], [63], [64], [80], [81], [93], [94], [3], et d'autres). Pitman [81] a été le premier a appliqué cette technique pour établir des résultats sur les vitesses de convergence des transitions de probabilité d'une chaine de Markov vers la loi stationnaire. Si

$\mathbb{P}$ est la matrice de transition d'une chaine de Markov à espace d'états $\mathbb{X}$, pour toutes mesures de probabilité λ, μ définies sur $\mathbb{X}$, on a :

$$\| \lambda\mathbb{P}^n - \mu\mathbb{P}^n \| \leq 2\mathbb{P}(T > n) \text{ où pour toute mesure } \nu \text{ sur } \mathbb{X} \ \| \nu \| = \sum_j | \nu_j |$$

et T est l'instant de la première rencontre des chaînes $X = (X_k)$ et $X' = (X'_j)_j$ indépendantes de matrice de transition $\mathbb{P}$ et de lois initiales λ et μ respectivement.
La technique de couplage intervient aussi en théorie du renouvellement. En effet, elle fournit un moyen d'analyse du comportement asymptotique de la fonction de renouvellement et permet d'éviter le passage par l'équation du renouvellement. Grâce à cette technique, Lindvall [62] a donné la première démonstration purement probabiliste du théorème de renouvellement juste en bornant la différence entre la fonction de renouvellement et sa limite par le reste de la loi d'un instant de couplage convenablement choisi.

Le cas stationnairement périodique

Une hypothèse plus proche de la réalité est de supposer le flot d'entrée stationnairement périodique, Dans ce cas, la limite (5) n'existe pas en général. Cependant, s'il existe une suite de renouvellement à valeurs dans $d\mathbb{Z}$ par rapport à laquelle le processus qui décrit le système d'attente, noté $(Z(t))_t$ est régénératif, alors : pour tout t appartenant à un intervalle de longueur d le processus $(Z(t+d.n))_n$ converge en loi vers un état dit stationnairement périodique.
Harisson et al [48] ont étudié le problème de convergence en loi de la file $M_{\text{period}}/G/1$, où les temps de service constituent une suite notée $(B_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes équidistribuées de loi générale indépendante du processus des arrivées qui suit une loi de Poisson de paramètre une fonction du temps $\Lambda(t)$ définie par :

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du \text{ avec } \lambda(n+t) = \lambda(t), \forall t \in [0, t[.$$

Sous l'hypothèse $E(B_1)\Lambda(1) < 1$, les auteurs ont montré l'existence de deux suites de variables aléatoires $(\alpha_n)_n$, et $(\beta_n)_n$ telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z(s+n) \leq x) = \frac{1}{E(\alpha)} \int_\Omega P(d\omega) \sum_{j=0}^{\alpha(\omega)-1} 1_{\{Z(\omega,(s+j))\leq x\}} = H_s(x). \tag{6}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(W_n \leq x) = \frac{1}{E(\beta)} \int_\Omega P(d\omega) \sum_{j=0}^{\beta(\omega)-1} 1_{\{W_j(\omega)\leq x\}} = G(x). \tag{7}$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{Z^y(s)\leq x\}}ds \xrightarrow[t\longrightarrow+\infty]{P\ a.s} \int_0^1 H_s(x)ds. \tag{8}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{\{Z^y(s+k)\leq x\}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{P\ a.s} H_s(x). \tag{9}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{W_i^y\leq x\}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{P\ a.s} G(x). \tag{10}$$

Harisson et Lemoine ([48]) ont démontré les deux formules suivantes connues dans le cas stationnaire par la relation de Takàcs et la relation de Hooke reliant les deux lois limites :

$$\int_0^1 H_s(x)\,ds = 1-\rho+\rho G * \widehat{F}(x) \tag{11}$$

où $\widehat{F}(x) = \dfrac{1}{E(B)}\displaystyle\int_0^x P(B>t)\,dt$ et $\rho = E(B_1).\Lambda(1) < 1$.

$$\lambda G(x) = \int_0^1 H_s(x)\nu(ds) \tag{12}$$

Les travaux portant sur le cas stationnairement périodique se classent selon les deux approches suivantes : la théorie des chaines de Markov $\big(([9]),[95]\big)$, et la théorie des processus ponctuels $\big([14],[24],\big)$. Ils ont donné lieu à des résultats de convergence en loi pour différents types de files d'attente. Ces résultats restent dans le cas du processus de la charge du serveur des résultats d'existence de la loi limite et donc ne constituent pas la généralisation des résultats de Harrisson et Lemoine [48]. L'importance des résultats obtenus via la théorie du renouvellement réside dans le fait que la loi limite est calculée à partir de l'observation du processus au cours d'un cycle et les caractéristiques de la loi limite possèdent des estimateurs sans biais, d'où la nécessité de construire la structure régénérative de la file. Nous avons exploité cette lacune dans la littérature pour écrire notre deuxième article.

Apport.

Nos objectifs de recherches sont orientés principalement sur deux directions.

1. La première direction concerne l'apport de la théorie des processus ponctuels à la théorie du renouvellement.

2. La deuxième direction porte sur le problème de convergence en loi de la file à un serveur à flot d'entrée stationnairement périodique .

Notre premier résultat est inscrit dans la première direction, il consiste à montrer que le théorème classique de renouvellement peut être obtenu à partir d'une convergence étroite des processus ponctuels.

Dans [30], on trouve une généralisation du théorème de renouvellement, dont la formulation est la suivante :

pour toute mesure aléatoire N du second ordre d'intensité λ_N non nulle , definie sur le flot $\big(\Omega,\ \mathscr{A}, P,\ (\theta_x,\ x \in \mathbb{R})\big)$ tel que la probabilité P soit $N-$ mélangeante, on a

$$E_{\widehat{P}}(\tau_x \circ N(\cdot)) \xrightarrow[x \longrightarrow \pm\infty]{vaguement} \lambda_N^2 m_0(\cdot) \tag{13}$$

où $\widehat{P}$ est la mesure de Palm associée au flot $\big(\Omega,\ \mathscr{A}, P,\ (\theta_x,\ x \in \mathbb{R})\big)$ et N et m_0 est la mesure de Lebesgue et $E_{\widehat{P}}(.)$ est l'espérance sous $\widehat{P}$.

La convergence (13) signifie que pour tout $f \in C_K(\mathbb{R})$ on a :

$$\int_\Omega \widehat{P}(d\omega) \int_{\mathbb{R}} \mathbf{N}(\theta_x\omega, ds) f(s) \xrightarrow[x \longrightarrow \pm\infty]{} \lambda_N^2 \int_{\mathbb{R}} f(t) m_0(dt)$$

et donc pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tel que $m_0(A) = 0$, on a

$$\frac{1}{\lambda_N} \int_\Omega \widehat{P}(d\omega) \int_{\mathbb{R}} N(\omega, A + x) \xrightarrow[x \longrightarrow \pm\infty]{} \lambda_N m_0(A). \tag{14}$$

Soient $\widehat{\mathbb{P}}(\cdot) = \frac{1}{\lambda_N} \widehat{P}(\cdot)$ la probabilité de Palm et $E_P(\cdot)$ (resp , $E_{\widehat{\mathbb{P}}}(\cdot)$) l'espérance par rapport à la probabilité P (resp , $\widehat{\mathbb{P}}$).

Grâce à la théorie des processus ponctuels, la limite(13) devient

$$\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{P}}}(N(A + x)) \xrightarrow[x \longrightarrow \pm\infty]{} \quad E_P(N(A)). \tag{15}$$

Dalley et al [28] ont montré que le théorème énoncé ci-dessus contient bien le théorème classique de renouvellement(voir theoreme 12.V.5 et corollaire 12.IV.6 dans[28]). Dans le même article [30], on trouve un théorème de convergence étroite des mesures aléatoires formulé comme suit : pour toute mesure aléatoire sur $\mathbb{R}$, du second ordre, définie sur un flot $\big(\Omega,\ \mathscr{A}, P,\ (\theta_x,\ x \in \mathbb{R})\big)$ fortement $N-$mélangeant, alors :

$$\tau_x \circ (\widehat{\mathbb{P}})_N \xrightarrow[x \longrightarrow \pm\infty]{\text{étroitement}} (P)_N.$$

où $(\widehat{\mathbb{P}})_N($ resp, $(P)_N$ est la loi de N sous $\widehat{\mathbb{P}}$ (resp, sous P).

Cette limite signifie :

pour toute fonction F définie sur $\{\mu \ / \ \mu$ mesure sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, bornée, continue par rapport à la topologie de la convergence vague, on a

$$\int_\Omega F(N(\theta_x\omega)\widehat{\mathbb{P}}(d\omega) \xrightarrow[x \longrightarrow \pm\infty]{} \quad \int_\Omega F(N(\omega)) P(d\omega). \tag{16}$$

Certainement la convergence (13) implique la limite (16). Nous montrons que (16) entraine (15), en d'autres termes nous montrons que le théorème classique de Blacwell qui est un résultat de convergence dans L^1 est conséquence d'une convergence étroite des processus ponctuels

Notre deuxième apport qui se situe dans la seconde direction est la généralisation de tous les résultats publiés dans [48].

Dans le cas stationnairement périodique un processus $Z = (Z(t)_t)$ régénératif par rapport à une suite $(\alpha_n)_n$ ne vérifie pas nécessairement l'équation de renouvellement et donc la limite (5) n'est plus valable pour un tel processus. Cependant, si la suite $(\alpha_n)_n$ est à valeurs entières, les deux notions de processus régénératifs (voir déf 3.2.1 page 49, et déf 7.0.5 page 103) coincident et le processus satisfait le théorème de Smith.

Harrisson et al [48] ont démontré sous l'hypothèse $\mathbb{E}(B_1)\Lambda(1) < 1$ qui assure l'existence du régime stationnairement périodique pour une file à loi d'entrée Poissonienne périodique, que les temps entiers de retour du processus de la charge du serveur en zéro, représentés par la suite $(\alpha_n)_n$ sont finis. Dans le cas d'une file $G_{\text{période}}/G_{\text{période}}/1$, l'hypothèse d'existence du régime stationnairement périodique assure le passage de la file par zéro mais en des instants qui ne sont pas nécessairement entiers .

Nous avons émis les hypothèses nécessaires pour l'existence et la finitude des instants entiers de retour de la file $G_{\text{période}}/G_{\text{période}}/1$ en zéro.

Nous avons montré que les résultats (6), (7), ..., (11), établis dans [48] dans le cas de la file $M_{\text{période}}/G/1$, sont encore valables dans le cas d'une file $G_{\text{période}}/G_{\text{période}}/1$. De plus, nous avons donné l'expression des moments d'ordre $p, p \in \mathbb{N}$ associés aux lois limites et des estimateurs asymptotiquement sans biais des lois limites et du premier moment associé aux lois limites obtenues. Nous avons aussi écrit la formule de Takàcs et une extension de la formule de Little dans le cas stationnairement périodique.

Nous avons présenté aussi une analyse comparative entre les deux cas de files d'attente à flot d'entrée stationnaire et files d'attente stationnairement périodique.

Présentation de la thèse :

Cette thèse est composée de 7 chapitres.

Nous commençons par un chapitre où nous présentons le cadre approprié à notre étude qui est celui des flots et nous rappelons quelques propriétés des flots.

Le chapitre 2 est consacré à la théorie des processus ponctuels où on trouve les résultats fondamentaux de cette théorie, comme le théorème d'existence de la mesure de Palm, la construction d'un processus ponctuel simple double infini, l'espace de Palm indexé par un flot discret.

Le chapitre 3 contient différentes versions du théorème de renouvellement et quelques relations existant entres ces théorèmes.

Le chapitre 4 contient la description de quelques systèmes de files d'attente, la construction du régime stationnaire associé à ces systèmes et de leurs structures régénératives.

Au chapitre 5 nous présentons quelques notions liées à la technique de couplage, les démonstations détaillées de couplage dans les cas suivants : processus à temps discret, processus à temps continu. Nous citons les conditions suffisantes de couplage pour quelques files d'attente.

Le chapitre 6 est réservé aux différents résultats de convergence en loi des systèmes de files d'attentes décrits au chapitre 4 dans le cas stationnaire.

Au chapitre 7, nous traitons le problème de convergence en loi dans le cas des files stationnairement périodique.

Chapitre 1

Généralités

En introduisant les flots, Von Neuman a montré que le théorème ergodique de la moyenne est valable pour des systèmes dynamiques ne vérifiant pas nécessairement les fortes conditions de régularité imposées habituellement. Depuis, la théorie de la mesure et en particulier les flots constituent le cadre probabiliste pour l'étude des systèmes dynamiques. En outre, les marches aléatoires interviennent dans la représentation d'un système d'attente et les fonctions de vecteurs aléatoires indépendants équidistribués permettent la description des processus régénératifs. Pour ces raisons, nous commençons ce chapitre par présenter quelques notions liées aux flots et nous consacrons la deuxième section à quelques propriétés des marches aléatoires.

1.1 Flot mesurable

Dans toute la suite $(\Omega,\ \mathscr{A})$ représentera un espace probabilisable et $\mathbb{T}$ sera $\mathbb{R},$ ou $\mathbb{Z}$.

Définition 1.1.1

Un flot mesurable sur $(\Omega,\ \mathscr{A})$ est un goupe à un paramètre $(\theta_t,\ t \in \mathbb{T})$ de bijections bi-mesurables de Ω dans lui même tel que l'application $(t,\omega) \longrightarrow \theta_t(\omega)$ définie sur $\mathbb{T}\times\Omega$ à valeurs dans Ω soit mesurable pour les tribus $\mathcal{T}\bigotimes\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}$ respectivement ; $\mathcal{T}$ étant une tribu sur $\mathbb{T}$.

1. *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ le flot est dit réel.*
2. *Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ le flot est dit discret.*

Le quadriplet $\left(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_t,\ t \in \mathbb{T})\right)$ est aussi appelé flot, où P est une probabilité sur $(\mathscr{A}, \Omega)$.

1.1.1 Flot stationnaire

Définition 1.1.2
La probabilité P est dite stationnaire pour le flot $(\theta_t, t \in \mathbb{T})$ si la relation suivante $\int_\Omega f(\theta_t \omega) P(d\omega) = \int_\Omega f(\omega) P(d\omega)$ est vérifiée pour tout t dans $\mathbb{T}$ et toute fonction mesurable positive ou bornée f sur Ω. Dans ce cas on dit aussi que le flot est stationnaire.

1.1.2 Flot ergodique, flot mélangeant, K-système

Définition 1.1.3

1. *Un évènement $A \in \mathscr{A}$, est dit invariant si pour tout $t \in \mathbb{T}$, on a $\theta_t^{-1}(A) = A$ L'ensemble des évènements invariants forme une sous tribu $\mathcal{I}$ de $\mathscr{A}$.*
2. *Un flot stationnaire est dit ergodique si la tribu*

$$\mathcal{I} = \{A \in \mathscr{A} \,/ \theta_t^{-1}(A) = A,\ \forall\, t \in \mathbb{T}\} = \{\emptyset, \Omega\}\ P\ p.s$$

Définition 1.1.4
Soit $\left(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_t,\ t \in \mathbb{T})\right)$ un flot stationnaire, la probabilité P est dite mélangeante pour le flot $(\theta_t, t \in \mathbb{T})$ si $P\left(A \cap \theta_t^{-1}(B)\right) \to P(A)P(B)$ quand $t \to \pm\infty$ pour tous A et B dans $\mathscr{A}$, Une probabilité P mélangeante est à fortiriori ergodique pour le flot.
On dit dans ce cas que le flot $\left(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_t,\ t \in \mathbb{T})\right)$ est mélangeant.

Définition 1.1.5 *: Soit $\left(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_t,\ t \in \mathbb{T})\right)$ un flot sur $\mathbb{T}$.*
Tribu invariante : la tribu $\mathcal{G} \subset \mathscr{A}$ est dite invariante si $\theta_t^{-1}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.
Tribu filtrante : la tribu $\mathcal{F} \subset \mathscr{A}$ est dite filtrante si $\theta_t^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ pour tout $t \leq 0$.
Filtration du flot stationnaire $\left(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_t,\ t \in \mathbb{R})\right)$: soit $\mathcal{F} \subset \mathscr{A}$ une tribu filtrante et posons $\mathcal{F}_t = \theta_t^{-1}(\mathcal{F})$. Alors, la suite $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T})$ de sous tribus de $\mathscr{A}$ est appelée une filtration du flot.
Le flot $\left(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_t,\ t \in \mathbb{T})\right)$ est appelé un K-système s'il existe une sous tribu $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

1. *$\theta_t(\mathscr{B}) \subset \theta_s(\mathscr{B})$si $t < s$ on dit que $\mathscr{B}$ est croissante.*

2. *$\bigvee_{t\in\mathbb{R}} \theta_t(\mathscr{B}) = \mathscr{A}$, dans ce cas, on dit que $\mathscr{B}$ est génératrice.*

3. *$\bigcap_{t\in\mathbb{R}} \theta_t(\mathscr{B})$ est la tribu triviale.*

Exemples de K-systèmes :

1. Un schéma de Bernoulli.

   Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace probabilisable, ν une probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ posons

$$(\Omega, \mathscr{A}, P) = (E, \mathcal{E}, \nu)^{\bigotimes \mathbb{Z}^*} = (E^{\mathbb{Z}}, \mathcal{E}^{\bigotimes \mathbb{Z}}, \nu^{\bigotimes \mathbb{Z}}).$$

   Soit $(X_n)_n$ la famille des coordonnées de l'espace Ω, c'est à dire que si $\omega = (\omega_n)_n$, $X_n(\omega) = \omega_n$, $(X_n)_n$ est une suite de VAIE de loi ν.
   On pose $\mathscr{A}_n = \sigma\{X_i, i \le 1\}$, et $\theta : \Omega \longrightarrow \Omega$ application telle que $X_n \circ \theta = X_{n+1}$, θ est appelée le shift de Ω. On pose $\theta_0 = Id_\Omega$, $\theta_1 = \theta$, $\theta_n = \theta_{n-1} \circ \theta$.
   $(X_n)_n$ est la représentation canonique d'une suite de VAIE.
   Le flot $\big(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_n, n \in \mathbb{Z})\big)$ est appelé schéma de Bernoulli, c'est un K-système.

2. Flot sous une fonction.

   Le cas continu.

   Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}, \mu, (\sigma_n, n \in \mathbb{Z}))$ un flot stationnaire, et A_1 une variable aléatoire strictement positive d'espérance finie. Soit $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mathbf{P}}, (\widetilde{\sigma}_t, t \in \mathbb{R}))$ le flot sur $\mathbb{R}$ défini comme suit :
   $\widetilde{\Omega} = \{(x, s), x \in \mathbb{X} \; et \; 0 \le s < A_1\}$, $\widetilde{\mathscr{A}} = \mathcal{B}_{\mathbb{X}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}/\widetilde{\Omega}$, la probabilité $\widetilde{\mathbf{P}}$ est définie sur $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{A}})$ par

$$\int_{\widetilde{\Omega}} f(x, s)\, \widetilde{\mathbf{P}}(dx, ds) = \frac{1}{E_\mu(A_1)} \int_{\mathbb{X}} \mu(dx) \int_0^{A_1} f(x, s)\, ds$$

   où $E_\mu(A_1)$ est l'espérance de A_1 par rapport à la probabilité μ. On définit la suite de variables aléatoires $(\widetilde{T_n}, n \in \mathbb{Z})$ par

$$\widetilde{T}_n(x, s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} A_i(x) - s & \text{si } n \ge 0, \\ -s & \text{si } n = 0, \\ \displaystyle -\sum_{i=n}^{i=-1} A_i(x) - s & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Le flot $(\widetilde{\sigma}_t, t \in\in \mathbb{R})$ est défini sur l'espace mesurable $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{A}}\right)$ par
$\widetilde{\sigma}_t(x,s) = \left(\sigma_k(x), t - \widetilde{T}_k(x,s)\right)$ si $\widetilde{T}_k(x,s) \leq t < \widetilde{T}_{k+1}(x,s)$.
Alors $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{A}},\ \widetilde{\mathbf{P}}, (\widetilde{\sigma}_t, t \in \mathbb{R}))$ est stationnaire et est appelé flot bati sous la fonction A_1 au dessus du flot $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}, \mu, (\sigma_n, n \in \mathbb{Z}))$

Le cas discret.

Dans le cas où A_1 est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ le flot sous A_1 bati au dessus de $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}, \mu, (\sigma_n, n \in \mathbb{Z}))$ soit $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mathbf{P}}, (\widetilde{\sigma_n}, n \in \mathbb{Z})\right)$ est défini comme suit :
$\widetilde{\Omega} = \left\{(x,k)/x \in \mathbb{X},\ k \in [0, A_1[\right\}$ et $\widetilde{\mathscr{A}} = \mathcal{B}_{\mathbb{X}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}/\widetilde{\Omega}$. On garde la même définition pour $\widetilde{T_n}$ et pour les $\widetilde{\sigma_n}$ mais on remplace s par la variable k , et la probabilité $\widetilde{\mathbf{P}}$ est définie sur $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{A}})$ par

$$\int_{\widetilde{\Omega}} f(x,k)\widetilde{\mathbf{P}}(dx,k) = \frac{1}{E_\mu(A_1)} \int_{\mathbb{X}} \mu(dx) \sum_0^{A_1-1} f(x,k).$$

Théorème 1.1.6 [97] *Tout flot bati au dessus d'un schéma de Bernoulli sous une fonction de loi non latticielle est un K-système.*

Propriété de perte de la mémoire :
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité, χ un espace métrique complet séparable. $(X_n)_n$ une suite stationnaire ergodique définie sur $(\Omega,\ \mathscr{A}\ , P)$ à valeurs dans χ.
Notons $(X, \mathcal{B}_X, P) = \left(\chi^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}_X^{\otimes\mathbb{Z}}, (P_{X1})^{\otimes\mathbb{Z}}\right)$ l'espace canonique associé à la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et A_n la $n^{ième}$ projection définie par

$$\begin{array}{rcl} A_n : \chi^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \chi \\ (\omega_k, k \in \mathbb{Z}) & \longmapsto & A_n(\omega) = \omega_n \end{array}$$

Soit θ l'opérateur de translation vérifiant $A_n \circ \theta = A_{n+1}$. On pose $\theta_1 = \theta, \theta_n = \underbrace{\theta \circ ... \circ \theta}_{\text{n fois}}$, $\theta_{-1} = (\theta)^{-1}$. On définit deux suites de sous tribus de B_X par :

- $F_m^{+\infty} = \sigma\left\{A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, ...\right\}$ le futur à partir de l'instant m.
- $F_{-\infty}^m = \sigma\left\{A_m, A_{m-1}, A_{m-2}, ...\right\}$ le passé jusqu'à l'instant m.

Soit $\xi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $\xi > 0$, $0 < E(\xi) < +\infty$. On pose

$$\xi_n(\omega) = \xi(\theta_n\omega) \text{ et } S_n(\omega) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \xi_i & \text{si} \quad n > 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ -\sum_{i=n+1}^{-1} \xi_i & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

Définition 1.1.7 *On dit que la suite $(S_n, n \in \mathbb{Z})$ vérifie la propriété de perte de mémoire si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

- $\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} E\left(\sup\limits_{n \geq 1} |(S_{n+m} - S_m - E(S_{n+m} - S_m \mid F_1^{\infty}))|\right) = 0$
- $\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} E\left(\sup\limits_{n \geq 1} \left|(S_{-n-m} - S_{-m}) - E\left(S_{-n-m} - S_{-m} \mid F_{-\infty}^{0}\right)\right|\right) = 0$

Exemples :

1- $(X_n)_n$ VAIE

On pose $\xi_n = f(X_p, n-k \leq p \leq n)$

2- $(X_n)_n$ chaine de Markov ergodique.

3- $(X_n)_n$ est une suite stationnaire ergodique régénérative, ie il existe une suite d'entiers aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tel que les vecteurs aléatoire $(T_k - T_{k-1}, (X_i,\ \ T_{k-1} \leq i < T_k))$, soient indépendants équidistribués.

1.2 Marches aléatoires

Soient $\left(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_n, n \in \mathbb{N})\right)$ le schéma de Bernoulli défini par

$$(\Omega, \mathscr{A}, P) = (E, \mathcal{E}, \nu)^{\bigotimes \mathbb{N}^*} = (E^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{E}^{\bigotimes \mathbb{N}^*}, \nu^{\bigotimes \mathbb{N}^*}).$$

et $(X_n)_n$ la famille des coordonnées de l'espace Ω , $(\mathscr{A}_n)_n$ la filtration de $\mathscr{A}$ définie par $\mathscr{A}_n = \sigma\{X_1, X_2, ..., X_n\}$.

Lemme 1.2.1 *[25]*

1. $P \circ \theta^{-1} = P$
2. $\forall\, n \geq 1,\ \theta_n^{-1}(\mathscr{A}) = \sigma\{X_{n+j},\ j \geq 1\}$ *est une σ algèbre indépendante de $\mathscr{A}_n$.*

Soit T un temps d'arrêt par rapport à la filtraction $(\mathscr{A}_n)_{n \geq 1}$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
Sur l'évènement $\{T < +\infty\}$, on pose

$$\begin{cases} \big(X_T\big)(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega) \\ \big(\theta_T\big)(\omega) = \theta_{T(\omega)}(\omega) \\ \mathscr{A}_T = \{A/A \in \mathscr{A} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, A \cap \{T = n\} \in \mathscr{A}_n\} \end{cases}$$

Lemme 1.2.2

Soit T un temps d'arrêt tel que $P(T<+\infty)=1$. Alors

1. $P\circ\theta_T^{-1}=P$
2. $(\theta_T)^{-1}(\mathscr{A})=\sigma\{X_{T+n},\ n\geq 1\}$ *est une σ algèbre indépendante de $\mathscr{A}_T$.*
3. *La suite $\left(X_{T+n}\right)_{n\geq 1}$ est une suite de VAIE de loi ν indépendante de $\mathscr{A}_T$.*

On pose

$T_0=0$

$T_1=T$

$T_2=T_1+T\circ\theta_{T_1}$

$\vdots$

$T_n=T_1+T\circ\theta_{T_{n-1}}$

Lemme 1.2.3

Les $\left(T_n\right)_{n\geq 1}$ sont des temps d'arrêt ps finis et les variables Z_i définies par :

$Z_1=(T_1,\ X_1,\ldots,X_{T_1})$

$\vdots$

$Z_n=(T_n-T_{n-1},\ X_{T_{n-1}+1},\ldots,X_{T_n})$

sont indépendantes équidistribuées , vérifiant $Z_n=Z_1\circ\theta_{T_{n-1}}$

Lemme 1.2.4

Soit $\varphi:(E,\mathcal{E})\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ mesurable, alors les v a $\left(\displaystyle\sum_{i=T_{n-1}+1}^{i=T_n}\varphi(X_i)\right)_{n\geq 1}$ sont des VAIE.

Considérons dans la section précédente $E=\mathbb{R}$, $\mathcal{E}=\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $S_0=0$ et pour $n\geq 1$, $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$. $(S_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoires de loi ν.

Notons que $S_n\circ\theta_k=S_{n+k}-S_k$ et que pour tout temps d'arrêt T

$$S_n\circ\theta_T\cdot 1_{\{T<+\infty\}}=(S_{n+T}-S_T)\cdot 1_{\{T<+\infty\}}.$$

Soit $T_1=\inf\{n\geq 1,\ S_n>0\}$, $T_n=\inf\{k\ >T_{n-1},\ S_k-S_{T_{n-1}}>0\}$.

Soit $M_n=\max\limits_{0\leq i\leq n}S_i$ et $M=\sup\limits_{0\leq n\leq+\infty}(S_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}M_n$.

M_n et M sont des variables aléatoires positives.

Théorème 1.2.5 *[25]*

1. *Les assertions* (a), (b), (c) *sont équivalentes :*
   - (a) $P(T_1 < +\infty) = 1$
   - (b) $P(\overline{\lim}_n S_n = +\infty\}) = 1$
   - (c) $P(M = +\infty) = 1$
2. *Les assertions* (a'), (b'), (c') *sont équivalentes :*
   - (a') $P(T_1 < +\infty) < 1$
   - (b') $P(\lim_n S_n = -\infty\}) = 1$
   - (c') $P(M = +\infty) = 0$

Théorème 1.2.6 *[25]*

Pour une marche aléatoire sur $\mathbb{R}$*, il y a 4 possibilités mutuellement exclusives :*

1. $\forall\, n \geq 0,\ S_n = 0 \ \ P \ \ p.s$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty \ \ P \ \ p.s$.
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\infty \ \ P \ \ p.s$.
4. $\overline{\lim\limits_{n}}\, S_n = +\infty$ *et* $\underline{\lim}_n\, S_n = -\infty$.

Lemme 1.2.7 (Lemme de Wald)

Supposons que $E(X_1)$ *ait un sens (i.e.* $E(X^+) < +\infty$ *ou* $E(X^-) < +\infty$*) que* T *soit un temps d'arrêt p.s fini i.e.* $P(T < +\infty) = 1$ *et que* $E(T)$ *ait un sens. Alors* $E(S_T)$ *a un sens et on a* $E(S_T) = E(T)E(X_1)$

Définition 1.2.8 *Le support d'une mesure* μ *définie sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$*, noté* $S(\mu)$*, est le plus petit fermé* F *tel que* $\mu(F) = 1$.

$$S(\mu) = \{x \in \mathbb{R} / \forall \varepsilon \ > \ 0, \mu\left(]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\right) > 0\}$$

Définition 1.2.9 *: Soit* ν *une probabilité sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ *de fonction de répartition* F *et* $x \in \mathbb{R}$. x *est dit un point d'accroissement de* F *(différent du point de saut) si* $\forall \varepsilon > 0, F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0$. *Donc si* $\nu\left(]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\right) > 0$ *ssi* $x \in S(\nu)$

ν *est dite en treillis ou encore latticielle s'il existe* $a > 0$ *(a un réel) tel que :*

$\{$*points d'accroissement de* $F\} \subset a\mathbb{Z}$ *donc* $S(\nu) \subset a\mathbb{Z}$

Le plus grand nombre a qui vérifie ceci est appelé "pas de ν *".*

ν *est latticielle de pas a ssi* $G(\mu) = a\mathbb{Z}$ *où* $G(\mu)$ *est le sous groupe additif fermé engendré par* $S(\nu)$.

Conclusion : Les notions présentées dans ce chapitre sont indispensables pour l'étude des processus ponctuels l'objet du chapitre suivant et pour la construction du régime stationnaire l'objet du chapitre quatre.

Chapitre 2

La théorie des processus ponctuels

La théorie des processus ponctuels peut être considérée comme étant la généralisation de la théorie du renouvellement. En effet, un processus de renouvellement est un cas particulier de processus ponctuel, plus précisément la donnée d'un processus ponctuel de renouvellement du second ordre défini sur un $K-$ système équivaut à la donnée d'une suite de renouvellement à loi non arithmétique, de plus les principaux théorèmes de renouvellement trouvent leurs extensions dans la théorie des processus ponctuels.
La théorie des processus ponctuels fournit un moyen de représentation des systèmes de files d'attente plus puissant que les marches aléatoires et donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un flot non homogène soit ergodique. Notons que tous les résultats de ce chapitre sont tirés du cours de Neveu [74]

2.1 Mesure aléatoire, processus ponctuel

Soit $(\Omega,\ \mathscr{A},\ P)$ un espace de probabilité, E un espace localement compact à base dénombrable, $\mathcal{E}$ la tribu des boréliens de E, $\mathcal{E}_c$ la classe des boréliens de E relativement compacts, $\mathcal{M}_+(E)$ l'ensemble des mesures de Radon positives sur $(E,\ \mathcal{E})$. (Une mesure est dite de Radon si elle est finie sur tout compact de E).
$\mathcal{M}_+(E)$ la plus petite σ algèbre sur $M_+(E)$ rendant les applications $m \longmapsto m(f) = \displaystyle\int_E f(x)m(dx)$ mesurables, où $f \in C_K(E)$ ($C_K(E)$ est l'ensemble des fonctions définies sur E continues à support compact).

Définition 2.1.1 (Mesure aléatoire)
Une mesure aléatoire positive sur E définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$, soit N, est une application mesurable de $(\Omega, \mathscr{A})$ dans $(\ M_+(E), \mathcal{M}_+(E)\ )$.

Pour chaque $\omega \in \Omega$, $N(\omega,\ .)$ est une mesure de Radon sur $(E,\ \mathcal{E})$ positive, on notera par $N(\omega, F)$ ses valeurs (qui peuvent être infinies) sur les boréliens F de E.

Une mesure m dans $\mathcal{M}_+(E)$ est dite <u>entière</u> si pour tout borelien F de $\mathcal{E}$, $m(F) \in \overline{\mathbb{N}}$.

On note par $M_p(E)$ l'ensemble

$$M_p(E) = \{m,\ m \in M_+(E) \text{ et } m(F) \in \overline{\mathbb{N}},\ \forall\, F \in \mathcal{E}\}.$$

Toute mesure $m \in M_p(E)$ s'écrit comme une somme localement finie de masses de Dirac, c'est à dire $m = \sum_{i \in I} \delta_{x_i}$ où $(x_i)_{i\in I}$ est une suite de points de E non nécessairement distincts et telle que tout compact de E contient un nombre fini de ces points.

On appelle processus ponctuel (PP) sur E défini sur $(\Omega,\ \mathscr{A},\ P)$ toute VA mesurable de $(\Omega,\ \mathscr{A})$ dans $\big(M_p(E),\ \mathcal{M}_p(E)\big)$ où

$$\mathcal{M}_p(E) = \mathcal{M}_+(E) \cap M_p(E).$$

Le nombre $m\big(\{x_i\}\big)$ est appelé la multiplicité de x_i, m peut s'écrire comme suit

$$\sum_{\left\{x_i,\ m(\{x_i\})>0\right\}} m\big(\{x_i\}\big)\delta_{x_i}.$$

La mesure est dite <u>simple</u> si $\forall\, x_i$, l'inégalité $m\big(\{x_i\}\big) \leq 1$ est satisfaite.

De même, un PP est simple si $\forall\, \omega \in \Omega,\ N(\omega)$ est une mesure simple sur E.

Dans toute la suite, on prendra E un sous groupe fermé de $\mathbb{R}^d$. Donc on peut définir sur E le groupe des translations $\tau_t,\ t \in E$ où

$$\begin{array}{rrcl} \forall\, t \in E, & \tau_t : E & \longrightarrow & E \\ & s & \longmapsto & s - t \end{array}$$

application mesurable.
$(\tau_t,\ t \in E)$ est aussi un groupe d'automorphismes sur $(M_+(E), \mathcal{M}_+(E))$ qui vérifie la définition 1.1.1 et qui est défini par :

$$\begin{array}{rcl} \tau_t : \mathcal{M}_+(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_+(E) \\ m & \longmapsto & \tau_t \circ m \end{array}$$

application mesurable où
$\tau_t \circ m(F) = m(F + t),\ \ \forall F \in \mathcal{E}$ et $\ F + t = \{s + t,\ s \in F\}$
En particulier, nous avons $\tau_t \circ \delta_s = \delta_{s-t},\ \forall\, s,\ \forall\, t.$

Une mesure $m \in M_+(E)$ est dite invariante par translation si

$$\tau_t \circ m(F) = m(F), \quad \forall\, F \in \mathcal{E},\ \forall\, t \in E.$$

ou encore $\forall\, f : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable positive, nous avons

$$\int f(t+s)\ m(ds) = \int f(s)\ \tau_t \circ m(ds) = \int f(s)\ m(ds)$$

E étant un sous groupe fermé de $\mathbb{R}^d$, il existe sur E une mesure de Radon λ invariante par translation et unique à une constante multiplicative près appelée mesure de Haar.

Exemples :

- Si $E = \mathbb{R}$, λ est la mesure de Lebesgue, elle vérifie $\lambda\big(\{n\}\big) = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$.
- Si $E = \mathbb{Z}$, λ est la mesure de comptage, elle vérifie $\lambda\big(\{n\}\big) = 1,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Sur un espace produit, la mesure de Haar est le produit tensoriel des mesures de Haar définies sur chacun des espaces.

Notons que la mesure de Haar est invariante par symétrie i.e.

$$\int f(-t)\ \lambda(dt) = \int f(t)\ \lambda(dt)$$

pour toute fonction mesurable.

2.2 Mesure aléatoire stationnaire et mesure de Palm

2.2.1 Mesure aléatoire stationnaire

Soit E un sous groupe fermé de $\mathbb{R}^d$ localement compact.
$(\tau_t,\ t \in E)$ le groupe des translations sur E, défini ci dessus, soit λ la mesure de Haar sur E Dans toute la suite, les flots $(\theta_t,\ t \in E)$ considérés seront des flots qui préservent la mesure.

Définition 2.2.1
Une mesure aléatoire stationnaire N définie sur le flot stationnaire $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}, (\theta_t, t \in E)\big)$ est une application mesurable définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ à valeurs dans $\big(M_+(E), \mathcal{M}_+(E)\big)$ vérifiant la relation $N \circ \theta_t = \tau_t \circ N$, pour tout t dans E.

Théorème 2.2.2 ([*74*]),
Soient $\big(\Omega,\ \mathscr{A},\ P,(\theta_t, t\in E)\big)$ *un flot stationnaire et* N *une mesure aléatoire stationnaire sur* E *définie sur* $(\Omega,\mathscr{A},P)$. *Alors il existe* $\widehat{P}$ *mesure* σ *finie sur* $(\Omega,\mathscr{A})$ *appelée mesure de Palm définie par :*

$$\begin{aligned}&\theta\Big[P(d\omega)N(\omega,ds)\Big]=\widehat{P}(d\omega)\lambda(ds),\ \ o\grave{u}\\&\theta(\omega,s)=(\theta_s\omega,s)\ \ d'inverse\ \ \theta^{-1}(\omega,s)=(\theta_{-s}\omega,s)\end{aligned}$$

La formule 2.2.2 signifie que pour toute application $f:E\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}_+$ *mesurable positive, on a :*

$$\int_\Omega P(d\omega)\int_E N(\omega,ds)f(\theta_s(\omega),s)=\int_\Omega\widehat{P}(d\omega)\int_E\lambda(ds)f(\omega,s)$$

preuve

On pose

$$Q(B)=\int_\Omega P(d\omega)\int_E N(\omega,ds)1_B(\omega,s),\quad B\in\mathscr{A}\otimes\mathcal{E}.$$

Q est une mesure positive sur $\Omega\times E$.

$Q(d\omega,ds)=P(d\omega)N(\omega,ds)$.

Q est invariante par les transformations $\theta_t\otimes\tau_t$.

En effet, soit $f:\Omega\times E\longrightarrow\mathbb{R}_+$, pour tout $t\in E$ on doit démontrer que

$$\int Q(d\omega,ds)f\big(\theta_t(\omega),\tau_t(s)\big)=\int Q(d\omega,ds)f(\omega,s).$$

D'abord remarquons que

$$\begin{aligned}\int N(\omega,ds)f\big(\theta_t(\omega),\tau_t(s)\big)&=\int\tau_t\circ N(\omega,ds)f\big(\theta_t(\omega),s\big)\\&=\int N(\theta_t(\omega),ds)f\big(\theta_t(\omega),s\big).\end{aligned}$$

La première égalité est due à la définition même d'une mesure image : en réalité la définition démarre du deuxième membre et fait obtenir le premier.

La deuxième égalité est conséquence de la stationnarité de N.

$$\begin{aligned}\int Q(d\omega,ds)f\big(\theta_t(\omega),\tau_t(s)\big)&=\int_\Omega P(d\omega)\int_E N(\theta_t(\omega),ds)f\big(\theta_t(\omega),s\big)\\&=\int_\Omega\theta_t\circ P(d\omega)\int_E N(\omega,ds)f\big(\omega,s\big)\\&=\int Q(d\omega,ds)f(\omega,s).\end{aligned}$$

car $\theta_t\circ P=P$.

La transformation θ vérifie la relation suivante :

$$\theta \circ (\theta_t \otimes \tau_t) = (i_\Omega \otimes \tau_t) \circ \theta.$$

En effet, soit $(\omega, s) \in \Omega \times E$

$$\begin{aligned}
\theta \circ (\theta_t \otimes \tau_t)(\omega, s) &= \theta\big(\theta_t(\omega), \tau_t(s)\big) \\
&= \theta\big(\theta_t(\omega), s - t\big) \\
&= \Big(\theta_{s-t}\big(\theta_t(\omega)\big), s - t\Big) \\
&= \big(\theta_s(\omega), \tau_t(s)\big) \\
&= (i_\Omega \otimes \tau_t)\big(\theta(\omega, s)\big) \\
&= (i_\Omega \otimes \tau_t) \circ \theta(\omega, s)
\end{aligned}$$

La mesure Q est invariante par les transformations $\theta_t \otimes \tau_t,\ t \in E$ i.e. $\theta_t \otimes \tau_t \circ Q = Q$ donc

$$\begin{aligned}
\theta \circ Q &= \theta \circ \big(\theta_t \otimes \tau_t \circ Q\big) \\
&= \big(\theta \circ (\theta_t \otimes \tau_t)\big) \circ Q \\
&= (i_\Omega \otimes \tau_t) \circ \theta \circ Q
\end{aligned}$$

d'où $\theta \circ Q$ est invariante par les transformations $i_\Omega \otimes \tau_t$.

Soit $A \in \mathscr{A}$, $\theta \circ Q(A \times .)$ est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ invariante par les translations $(\tau_t,\ t \in E)$.

On montre l'existence d'une suite $(A_n)_{n \in, \mathbb{N}}$ telle que $A_n \nearrow \Omega$ et $\theta \circ Q(A_n \times .)$ soit une mesure de Radon sur E.

En effet, soit G un voisinage relativement compact arbitraire de 0 dans E.

Posons $A_n = \{\omega,\ N(\omega, G) \leq n\}$, $(A_n)_n \nearrow \Omega$ (évident) puisque $\forall\, \omega \in \Omega,\ N(\omega, G) \leq +\infty$ et $A_n \subset A_{n+1}$.

Montrons maintenant que sur A_n, $\theta \circ Q$ est une mesure de Radon.

G étant un voisinage relativement compact de 0, alors il existe $F \subset E$ non vide tel que $F - F \subset G$. En effet, l'application :

$$\begin{aligned}
h : E \times E &\longrightarrow E \\
(x, y) &\longmapsto x - y
\end{aligned}$$

est continue en $(0, 0)$ donc,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, (x, y) \in E \times E : \|(x, y)\| < \delta \Rightarrow |h(x, y)| < \varepsilon$$

si, pour tout voisinage G de 0, il existe $F \subset E$ tel que $F - F \subset G$, d'où

$$\theta \circ Q(A_n \times F) = \int_\Omega P(d\omega) \int_F N(\omega, ds)\ 1_{A_n}(\theta_s \omega)$$

or :

$$\begin{aligned} N(\omega,F) &= \tau_s \circ \tau_s^{-1} N(\omega,F) \\ &= \tau_s \circ N(\omega, F-s) \\ &= N(\theta_s\omega, F-s). \end{aligned}$$

Comme $F-F \subset G$, donc $F-s \subset G$ pour tout $s \in F$, donc

$$N(\omega,F) = N(\theta_s\omega, F-s) \leq N(\theta_s(\omega), G)$$

car N est une mesure, or $\theta_s(\omega) \in A_n$, donc $N(\theta_s\omega, G) \leq n$, d'où

$$\begin{aligned} \theta \circ Q(A_n \times F) &= \int_\Omega P(d\omega) \int_F N(\omega, ds)\ 1_{A_n}(\theta_s\omega) \\ &\leq \int_\Omega dP\ N(F)\ 1_{\left\{N(F)\leq n\right\}}(\omega) \\ &\leq n \int_\Omega dP \\ &= n. \end{aligned}$$

La mesure $\theta \circ Q(A_n \times .)$ est invariante par translation et est finie sur les compacts. Tout compact est recouvert par un nombre fini de translatés de F (F ouvert non vide).
$\theta \circ Q(A_n \times .)$ est finie sur F donc finie sur tout compact de E donc c'est une mesure de Radon sur E.
On en conclut que $\theta \circ Q(A \times .)$ est égale à un multiple de la mesure λ. Soit G_0 un ouvert relativement compact fixé, posons

$$\widehat{P}(B) = \frac{\theta \circ Q(B \times G_0)}{\lambda(G_0)}.$$

$\widehat{P}$ ainsi définie est une mesure positive sur $(\Omega, \mathscr{A})$, finie sur les $(A_n)_n \nearrow \Omega$ donc σ finie sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
De ce qui précède, il résulte que $\theta \circ Q = \widehat{P} \otimes \lambda$.

Corollaire 2.2.3 *[74]*
Pour toute fonction borélienne $u : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et pour tout $A \in \mathscr{A}$:

$$\int_E \lambda(ds)\ u(s)\big(\theta_{-s} \circ \widehat{P}(A)\big) = \int_A N(u)\, dP.$$

Cette formule signifie que la fonction positive

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ s &\longmapsto \theta_{-s} \circ \widehat{P}(A) \end{aligned}$$

est la densité de la mesure sur $(E,\mathcal{E})$ définie par

$$\begin{array}{rcl} (E,\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ F & \longmapsto & \displaystyle\int_A N(F)dP = \int_A N(\omega,F)P(d\omega) \end{array}$$

par rapport à la mesure λ.

Démonstration :

D'après la première formule du théorème sur l'existence de la mesure de Palm 2.2.2 :

$$\begin{aligned} \int_E \lambda(ds)\, u(s)\theta_{-s}\circ \widehat{P}(A) &= \int_{\Omega\times E} \widehat{P}(d\omega)\lambda(ds)\, u(s)\, 1_A(\theta_{-s}\,\omega) \\ &= \int_{\Omega\times E} P(d\omega)N(\omega,ds)\, u(s)\, 1_A(\omega) \\ &= \int_{\Omega\times E} P(d\omega)1_A(\omega)\int_E N(\omega,ds)\, u(s) \\ &= \int_A N(u)dP. \end{aligned}$$

Pour une mesure m et une fonction f on note $m(f)=\displaystyle\int f(x)\, m(dx)$.

Cas particulier :

Soit E est un sous groupe discret de $\mathbb{R}^d$. Prenons $u(s)=1_{\{0\}}(s)$, on a

$$\int_E \lambda(ds)\, u(s)\, \theta_{-s}\, \widehat{P}(A) = \int_{\{0\}} \lambda(ds)\, \theta_{-s}\circ \widehat{P}(A) = \widehat{P}(A). \tag{2.1}$$

Le deuxième membre vaut

$$\int_{\Omega\times E} P(d\omega)\, N(\omega,ds)1_{\{0\}}(s)1_A(\omega) = \int_\Omega P(d\omega)\, N\big(\omega,\{0\}\big)1_A(\omega)$$

Calcul explicite de $\widehat{P}$ lorsque E est discret.

Dans le cas où E est un sous groupe discret de $\mathbb{R}^d$, $\widehat{P}$ est reliée à P par la formule $\widehat{P}=N\big(\{0\}\big)\cdot P$.

Cas particulier du cas particulier :

Si de plus N est un processus ponctuel simple, donc $N\big(\{0\}\big)\in\{0,1\}$ donc

$$N\big(\omega,\{0\}\big) = 1_{\{N(\{0\})\neq 0\}}.$$

$$\begin{aligned} \widehat{P}(A) &= \int_\Omega P(d\omega)\, N\big(\omega,\{0\}\big)1_A(\omega) \\ &= \int P(d\omega)\, 1_{\{N(\{0\})\neq 0\}}\, 1_A(\omega) \\ &= P\Big(A\cap\big\{N(\{0\})\neq 0\big\}\Big) \\ &= P\Big(A/N(\{0\})\neq 0\Big)\cdot P\Big(\big\{N(\{0\})\neq 0\big\}\Big) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} E\Big(N\big(\{0\}\big)\Big) &= \int N\big(\{0\}\big)\, 1_{\big\{N(\{0\})\neq 0\big\}} P(d\omega) \\ &= P\Big(\big\{N(\{0\}) \neq 0\big\}\Big) \end{aligned}$$

car $N\big(\{0\}\big) \in \{0,1\}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} E\Big(N\big(\{0\}\big)\Big) &= \int_{\Omega\times E} P(d\omega)\, N(\omega, ds) 1_{\{0\}}(s) \quad \text{(d'après la } 1^{\text{ère}} \text{ formule du théorème)} \\ &= \int_{\Omega\times E} N(ds)\widehat{P}(d\omega) 1_{\{0\}}(s) \\ &= \widehat{P}(\Omega) \quad \text{ puisque } \int_E \lambda(ds)\, 1_{\{0\}}(s) = 1 \end{aligned}$$

<u>Conclusion</u> : La formule

$$\frac{1}{\widehat{P}(\Omega)} \widehat{P}(A) = P\Big(A/N(\{0\}) \neq 0\Big)$$

est vraie lorsque E est un sous groupe discret et N un pp simple.

Cas particulier où E est un sous groupe fermé de $\mathbb{R}^d$ qui n'est pas discret :

Lemme 2.2.4

1. *$\widehat{P}\Big(N\big(\{0\}\big) = 0\Big) = 0$ (sous $\widehat{P}$ N charge l'origine).*
2. *P et $\widehat{P}$ sont étrangères.*
3. *N est ps simple ssi $\widehat{P}\Big(N\big(\{0\}\big) \neq 1\Big) = 0$.*

Démonstration

Soit $u : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ borélienne positive λ intégrable d'intégrale égale à 1.

Soit k un entier positif

$$\begin{aligned} \widehat{P}\Big(N\big(\{0\}\big) = k\Big) &= \int_\Omega \widehat{P}(d\omega)\, 1_{\big\{N(\{0\})=k\big\}}(\omega) \\ &= \int_\Omega \widehat{P}(d\omega)\, 1_{\big\{N(\{0\})=k\big\}}(\omega) \cdot \int_E u(s)\, \lambda(ds) \\ &= \int_{\Omega\times E} \widehat{P}(d\omega)\, \lambda(ds)\, 1_{\big\{N(0)=k\big\}}(\omega)\, u(s) \\ &= \int P(d\omega)\, N(\omega, ds)\, 1_{\big\{N(0)=k\big\}}(\theta_s\omega)\, u(s) \\ &= \int P(d\omega) N(\omega, ds)\, 1_{\big\{N(s)=k\big\}}(\omega) \cdot u(s) \end{aligned}$$

$$1_{\{N(0)=k\}}(\theta_s\omega) \;=\; 1_{\{N(s)=k\}}(\omega) \qquad \text{car } \tau_s \circ N = N \circ \theta_s$$

$\displaystyle\int m(ds) 1_{\{m(\{s\})=k\}} = 0$ si $k = 0$ ou bien $k \geq 2$ avec m simple. D'où $\widehat{P}\Big(N\big(\{0\}\big) = 0\Big) = 0$.
Donc $\widehat{P}$ est portée par l'évènement $\Big\{N\big(\{0\}\big) \neq 0\Big\}$. Ce dernier est P négligeable (i.e. sous P, N ne charge pas l'origine).
Si $P\Big(N\big(\{0\}\big) \neq 0\Big) > 0$, alors $\forall\, s \in E,\ P\Big(N\big(\{s\}\big) \neq 0\Big) > 0$ car $\theta_s \circ P = P$, d'où

$$\begin{aligned} P\Big(N\big(\{0\}\big) \neq 0\Big) &= \theta_s \circ P\Big(N\big(\{0\}\big) \neq 0\Big) \\ &= P\Big(N\big(\{s\}\big) \neq 0\Big). \end{aligned}$$

Or si N chargeait tous les points de E, N ne serait plus une mesure de Radon sur E, i.e. perdrait la propriété de finitude sur les compacts.

Mesure aléatoire du premier ordre, la mesure intensité

Définition 2.2.5
À toute mesure aléatoire N sur E on associe une mesure μ sur E définie par la formule $\mu(F) = \int_\Omega P(d\omega)N(\omega, F)$ appelée la mesure intensité associée à N.
Dans le cas où N est stationnaire la mesure μ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue et vaut

$$\mu(F) = \begin{cases} \widehat{P}(\Omega)\lambda(F) & si \;\; \lambda(F) < +\infty \\ 0 & si \;\; \lambda(F) = +\infty \end{cases}$$

*La quantité $i_N = \widehat{P}(\Omega)$ est appelée l'***intensité de la mesure***; si l'intensité est finie on dit que la mesure est du premier ordre, dans ce cas la probabilité obtenue à partir de $\widehat{P}$ et définie par $\widehat{\mathbb{P}}(.) = \frac{1}{i_N}\widehat{P}(.)$ est appelée la probabilité de Palm associée à N pour P.*

Mesure aléatoire du second ordre, La mesure spectrale

Définition 2.2.6 *Une mesure aléatoire est dite de carré intégrable ou encore du second ordre si $E(N^2(F)) < +\infty$ pour tout $F \in \mathcal{E}$.*

Proposition 2.2.7 *[74] Une mesure aléatoire N est de carré intégrable si et seulement si sa mesure spectrale σ définie sur $(E, \mathcal{E})$ par $\sigma(F) = \int_\Omega \widehat{P}(d\omega)N(\omega, F)$est une mesure de Radon.*

2.2.2 La relation entre les mesures de Palm de deux processus ponctuels

Proposition 2.2.8 *[74]*
Soient N_1, et N_2 deux processus ponctuels sur E définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et stationnaires pour le flot $(\theta_t,\ t \in E)$. Les mesures de Palm $\widehat{P}_1$, $\widehat{P}_2$ de ces deux processus sont alors liées par la relation :

$$\widehat{P}_2(d\omega)N_1(\omega, ds) = \rho\Big[\widehat{P}_1(d\omega)N_2(\omega, ds)\Big]$$

où

$$\begin{array}{rcl} \rho : \Omega \times E & \longrightarrow & \Omega \times E \\ (\omega, s) & \longmapsto & (\theta_s\omega, -s) \end{array}$$

Démonstration
définissons sur $\Omega \times E^2$ une mesure positive notée $\overline{Q}$ par la relation suivante : pour $B \in \mathscr{A} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$

$$\overline{Q}(B) = \int_\Omega P(d\omega) \int_{E^2} N_1(\omega, ds)\ N_2(\omega, dt)\ 1_B(\omega, s, t).$$

Soit

$$\begin{array}{rcl} \bar{\theta} : \Omega \times E^2 & \longrightarrow & \Omega \times E^2 \\ (\omega, s, t) & \longmapsto & (\theta_t(\omega), \tau_t(s), t) \end{array}$$

On montre que

$$\bar{\theta} \circ \overline{Q} = \widehat{P}_2(d\omega)\, N_1(\omega, ds)\lambda(dt). \tag{2.2}$$

Soit $f : \Omega \times E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_E N_1(\omega, ds) f \circ \bar{\theta}(\omega, s, t) & = & \displaystyle\int N_1(\omega, ds) f(\theta_t\omega, \tau_t(s), t) \\ & = & \displaystyle\int \tau_t \circ N_1(\omega, ds) f(\theta_t\omega, s, t) \\ & = & \displaystyle\int N_1(\theta_t\omega, ds) f(\theta_t\omega, s, t) \end{array}$$

D'autre part,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\Omega\times E^2} f \circ \bar{\theta} d(\overline{Q}) & = & \displaystyle\int_\Omega P(d\omega) \int_{E^2} N_1(\omega, ds)\ N_2(\omega, dt)\ f \circ \bar{\theta}(\omega, s, t) \\ & = & \displaystyle\int_{\Omega\times E} P(d\omega) N_2(\omega, dt) \int_E N_1(\theta_t\omega, ds) f(\theta_t\omega, s, t) \\ & = & \displaystyle\int_{\Omega\times E} \widehat{P}_2(d\omega)\lambda(dt) \int_E N_1(\omega, ds) f(\omega, s, t) \end{array}$$

Soit

$$\begin{array}{rcl}\sigma : E \times E & \longrightarrow & E \times E \\ (s,t) & \longmapsto & \sigma(s,t) = (t,s)\end{array}$$

Montrons la relation suivante :

$$(i_\Omega \otimes \sigma) \circ \Big[P(d\omega)\ N_2(\omega, ds)\ N_1(\omega, dt) \Big] = P(d\omega)\ N_1(\omega, ds)\ N_2(\omega, dt) \tag{2.3}$$

$i_\Omega \otimes \sigma$, ce qui signifie que $i_\Omega \otimes \sigma$ échange les rôles de N_1 et N_2 dans $\overline{Q}$.
La transformation

$$\begin{array}{rcl}\bar{\theta} : \Omega \times E^2 & \longrightarrow & \Omega \times E^2 \\ (\omega, s, t) & \longmapsto & (\theta_t(\omega), \tau_t(s), t)\end{array}$$

est inversible et d'inverse $\bar{\theta}^{-1}(\omega, s, t) = (\theta_{-t}(\omega), \tau_{-t}(s), t)$.
Posons $\phi = \bar{\theta} \circ (i_\Omega \otimes \sigma) \circ \bar{\theta}^{-1}$.
Montrons la relation suivante :

$$\widehat{P}_2(d\omega) N_1(\omega, ds) \lambda(dt) = \phi \circ \Big[\widehat{P}_1(d\omega)\ N_2(\omega, ds)\ \lambda(dt) \Big].$$

$$\begin{aligned}\phi \circ \Big[\widehat{P}_1(d\omega)\ N_2(\omega, ds)\ \lambda(dt) \Big] &= \overline{\theta} \circ (i_\Omega \otimes \sigma) \circ \bar{\theta}^{-1} \big[\widehat{P}_1(d\omega)\ N_2(\omega, ds)\ \lambda(dt) \big] \\ &= \overline{\theta} \circ (i_\Omega \otimes \sigma) \big[P(d\omega)\ N_2(\omega, ds)\ N_1(\omega, dt) \big] \\ &= \overline{\theta} \Big[P(d\omega)\ N_1(\omega, ds)\ N_2(\omega, dt) \Big] \\ &= \widehat{P}_2(d\omega)\ N_1(\omega, ds)\ \lambda(dt)\end{aligned}$$

car

$$\bar{\theta}^{-1} \big[\widehat{P}_1(d\omega)\ N_2(\omega, ds)\ \lambda(dt) \big] = P(d\omega)\ N_2(\omega, ds)\ N_1(\omega, dt)$$

et

$$(i_\Omega \otimes \sigma)[P(d\omega)\ N_2(\omega, ds) N_1(\omega, dt)] = P(d\omega)\ N_1(\omega, ds)\ N_2(\omega, dt)$$

Montrons que

$$\widehat{P}_2(d\omega) N_1(\omega, ds) = \rho \circ (\widehat{P}_1(d\omega) N_2(\omega, ds)).$$

En effet, pour toute fonction mesurable $f : \Omega \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et toute fonction positive $g : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, λ intégrable avec $\displaystyle\int_E g d\lambda = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times E} \widehat{P}_1(d\omega)N_2(\omega,ds) f\circ\rho(\omega,s) &= \int_{\Omega\times E} \widehat{P}_1(d\omega)N_2(\omega,ds) f(\theta_s\omega,-s)\\
&= \int_{\Omega\times E^2} \widehat{P}_1(d\omega)\ N_2(\omega,ds)\ g(t)\ f(\theta_s\omega,-s)\lambda(dt)\\
&= \int_{\Omega\times E^2} \widehat{P}_1(d\omega)\ N_2(\omega,ds)\ \lambda(dt)\ f(\theta_s\omega,-s)\ g(t+s)\\
&= \int_{\Omega\times E^2} \widehat{P}_2(d\omega)\ N_1(\omega,ds)\ \lambda(dt)\ f(\omega,s)\ g(t) \text{car } \tau_s\circ\lambda = \lambda\\
&= \int_{\Omega\times E} \widehat{P}_2(d\omega)\ N_1(\omega,ds)\ f(\omega,s)\cdot \int_E g(t)\lambda(dt)\\
&= \int_{\Omega\times E} \widehat{P}_2(d\omega)\ N_1(\omega,ds)\ f(\omega,s)
\end{aligned}$$

Les égalités précédentes sont conséquence de l'invariance de la mesure λ par translation, de l'hypothèse $\displaystyle\int_E g d\lambda = 1$ et du fait que $\phi(\omega,s,t) = \bar{\theta}\circ(i_\Omega\otimes\sigma)\circ\bar{\theta}^{-1}(\omega,s,t) = (\theta_s\omega,-s,s+t)$.

Proposition 2.2.9 *[74]*
Soit $N : (\Omega,\mathscr{A}) \longrightarrow \big(M_p(E),\mathscr{M}_p(E)\big)$ une application mesurable stationnaire par le flot $(\theta_t,\ t\in E)$ définie sur Ω au sens où $N(\theta_t\omega,.) = \tau_t\circ N(\omega,.)$.

(I) *Pour toute probabilité P sur Ω invariante par le flot $(\theta_t,\ t\in E)$, la mesure de Palm $\widehat{P}$ de N relativement à P est portée par l'évènement $\big\{N(0)\neq 0\big\}$ et la mesure $\widehat{P}(d\omega)N(\omega,ds)$ sur $\Omega\times E$ qui lui est associée est invariante par l'involution $\rho(\omega,s) = (\theta_s\omega,-s)$ de $\Omega\times E$.*

(II) *Réciproquement, pour toute mesure positive σ finie $\widehat{P}$ sur Ω portée par $\big\{N(E)\neq 0\big\}$ telle que $\widehat{P}(d\omega)N(\omega,ds)$ sur $\Omega\times E$ soit invariante par ρ, il existe une probabilité P sur Ω portée par $\big\{N(E)\neq 0\big\}$ invariante par $(\theta_t,\ t\in E)$ telle que $\widehat{P}$ soit la mesure de Palm de N relativement à P.*

Démonstration de (II) :
Soit $a : \Omega\times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable strictement positive telle que

$$X(\omega) = \int_E N(\omega,dt)a(\omega,t) = 1 \ \text{ sur } \{N(.,E)\neq 0\}.$$

Donc, $X = 1$ presque partout pour $\theta_{-t}\circ\widehat{P}$ pour λ presque tout t.

Définissons une mesure positive P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ par la formule

$$P(A) = \int_{\Omega\times E} \widehat{P}(d\omega)\ \lambda(dt)\ 1_A(\theta_{-t}\omega)\ a(\theta_{-t}\omega, t), \quad A \in \mathscr{A} \ \text{ où } \theta(\omega, s) = (\theta_s, s).$$

<u>$1^{\text{ère}}$ *étape*</u> : Montrons que $\theta\big[P(d\omega)\, N(\omega, ds)\big] = \widehat{P}(d\omega)\, \lambda(ds)$.

Soit $f : \Omega \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times E} P(d\omega)\, N(\omega, ds) f\circ(\theta_s\omega, s) &= \int_E \lambda(dt) \int_\Omega \widehat{P}(d\omega) a(\theta_{-t}\omega, t) \int_E N(\theta_{-t}\omega, ds) f\circ\theta(\theta_{-t}\omega, s) \\
&= \int_{\Omega\times E} \widehat{P}(d\omega)\, \lambda(dt)\, a(\theta_{-t}\omega, t) \cdot \int_E \tau_{-t}\circ N(\omega, ds)\, f\circ\theta(\theta_{-t}\omega, s) \\
&= \int_{\Omega\times E^2} \widehat{P}(d\omega)\, \lambda(dt)\, N(\omega, ds)\, f\circ\theta(\theta_{-t}(\omega), s+t)\, a(\theta_{-t}\omega, t) \\
&= \int_E \lambda(dt) \int_{\Omega\times E} \widehat{P}(d\omega)\, N(\omega, ds)\, f(\theta_s\omega, s+t)\, a(\theta_{-t}\omega, t)
\end{aligned}$$

Posons $g(\omega, s, t) = a(\theta_{-t}\omega, t) f(\theta_s\omega, s+t)$

$$\begin{aligned}
&\int_E \lambda(dt) \int_{\Omega\times E} \widehat{P}(d\omega)\, N(\omega, ds)\, f(\theta_s\omega, s+t)\, a(\theta_{-t}\omega, t) \\
&= \int_E \lambda(dt) \int_{\Omega\times E} \widehat{P}(d\omega)\, N(\omega, ds) g(\rho\ (\omega, s), t) \\
&= \int_E \lambda(dt) \int_{\Omega\times E} \widehat{P}(d\omega)\, N(\omega, ds) g((\theta_s\omega, -s), t) \\
&= \int_E \lambda(dt) \int_{\Omega\times E} \widehat{P}(d\omega)\, N(\omega, ds) a(\theta_{-t}(\theta_s\omega), t) f(\theta_{-s}(\theta_s), -s+t) \\
&= \int_E \lambda(dt) \int_{\Omega\times E} \widehat{P}(d\omega)\, N(\omega, ds) a(\theta_{s-t}(\omega), t) f(\omega, -s+t) \\
&= \int_E \lambda(dt) \int_{\Omega\times E} \widehat{P}(d\omega)\, N(\omega, ds) a(\theta_{-t}\omega, t+s) f(\omega, t) \\
&= \textstyle\int_E \lambda(dt) \int_\Omega \widehat{P}(d\omega) f(\omega, t) \int_E N(\omega, ds) a(\theta_{-t}\omega, s+t) \\
&= \int_E \lambda(dt) \int_\Omega \widehat{P}(d\omega) f(\omega, t),
\end{aligned}$$

car

$$\int N(\omega, ds) a(\theta_{-t}\omega, t+s) = \int N(\theta_{-t}\omega, ds) a(\theta_{-t}\omega, s) = 1$$

Comme $\theta_t \otimes \tau_t = \theta^{-1} \circ i_\Omega \otimes \tau_s \circ \theta$, D'où

$$(\theta_t \otimes \tau_t) \circ [P(d\omega) N(\omega, ds)] = P(d\omega) N(\omega, ds)$$

montrons que P est invariante par le flot $(\theta_t)_t$.

Soit $t \in E$ et $a : \Omega \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, une fonction mesurable strictement positive telle que

$$\int N(\omega, ds) a(\omega, s) 1_{\{N(\omega, E)\neq 0\}} = 1, P\ p.s$$

Comme
$$\int N(\omega,ds)a(\theta_t\omega,\tau_t(s)) = \int N(\theta_t\omega,ds)a(\theta_t\omega,s) = 1, P\ p.s$$
Donc, pour toute fonction mesurable positive $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$, on a
$$\begin{aligned}\int P(d\omega)f(\theta_t\omega) = & \int P(d\omega)N(\omega,ds)f(\theta_t\omega)a(\theta_t\omega,\tau_t(s)) \\ & = \int P(d\omega)N(\omega,ds)f(\omega)a(\omega,s) \\ & = \int P(d\omega)f(\omega).\end{aligned}$$

2.2.3 La construction d'un processus ponctuel stationnaire simple sur $\mathbb{R}$ doublement infini

Lemme 2.2.10 *[74]*
Étant donné un flot réel $(\theta_t,\ t\in\mathbb{R})$ sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathscr{A},P)$, pour toute fonction mesurable positive $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ localement intégrable sur les trajectoires du flot, l'ensemble
$$I_f = \left\{\omega\in\Omega\ \ /\ \int_0^{+\infty} f(\theta_t\omega)\,dt = +\infty = \int_0^{+\infty} f(\theta_{-t}\omega)\,dt\right\}$$
est invariant par le flot et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\circ\theta_t\,dt = 0$ ps hors de I_f.

Démonstration :
Pour $a\in\mathbb{R}$, posons $f_a = \displaystyle\int_a^{+\infty} f\circ\theta_t\,dt : \Omega \longrightarrow [0,+\infty]$.
Dire que f est localement intégrable sur les trajectoires du flot équivaut à dire que pour tout ω, $f(\theta_t\omega)$ est localement intégrable en t donc $J_+ = \{\omega\in\Omega,\ f_a(\omega) < \infty\}$ est indépendant de a. Il est clair que $f_a\circ\theta_s = f_{a+s}$, donc $\theta_s^{-1}\Big(\{f_a < +\infty\}\Big) = \{f_{a+s} < +\infty\}$, i.e. $\theta_s^{-1}(J_+) = J_+$, d'où J_+ est invariant.
$\forall\,\varepsilon > 0, J_+\cap\{f_a \geq \varepsilon\} \searrow \emptyset$ quand $a \nearrow +\infty$ car $f_a \searrow 0$ quand $a \nearrow +\infty$. Donc $\{f_a\geq\varepsilon\}\searrow\emptyset$ quand $a\nearrow+\infty$ d'où $J_+\cap\{f_a\geq\varepsilon\}\searrow\emptyset$ quand $a\nearrow+\infty$.
Pour tout $s\in\mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}P\big(J_+\cap\{f_a\geq\varepsilon\}\big) &= \theta_s\circ P\big(J_+\cap\{f_a\geq\varepsilon\}\big) \quad \text{car } P \text{ est invariant sous } \theta_s \\ &= P\big(J_+\cap\{f_{a+s}\geq\varepsilon\}\big)\end{aligned}$$
quand $s\to+\infty$, $\{f_{a+s}\geq\varepsilon\}\searrow\emptyset$, d'après la propriété de continuité de monotonie séquentielle on a
$$P\big(J_0\cap\{f_{a+s}\geq\varepsilon\}\big)\searrow\emptyset \text{ d'où } \forall\,a,\ P\big(J_+\cap\{f_a\geq\varepsilon\}\big) = 0, \quad \forall\,\varepsilon>0.$$

En faisant tendre $a \to -\infty$ et $\varepsilon \to 0$, on trouve

$$P\left(\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f \circ \theta_t \, dt < +\infty\right\} \cap \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f \circ \theta_t \, dt \geq 0\right\}\right) = 0.$$

Donc sur J_+, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f \circ \theta_t \, dt = 0$. De la même manière on montre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f \circ \theta_t \, dt = 0$ sur J_-.

Posons $I_f = \big(J_+ \cup J_-\big)^c$. I_f est un évènement invariant de probabilité nulle. Sur I_f^c,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f \circ \theta_t \, dt = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int_{I_f^c} d\,P \int_{-\infty}^{+\infty} f \circ \theta_t \, dt = 0 \\
&\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{I_f^c} f \circ \theta_t \, d\,P = 0 \\
&\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{I_f^c} f \, d\,P = 0
\end{aligned}$$

n'a pas de sens que si $f = 0$ sur I_f^c.

Étant donné un processus ponctuel stationnaire N sur $\mathbb{R}$, soit

$$\begin{aligned}
f : \Omega \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}_+ \\
\omega \quad &\longmapsto \quad f(\omega) = N(\omega,]0, 1])
\end{aligned}$$

f est positive et localement intégrable car nous avons supposé que $N \in M_p(E)$ (N est une mesure de Radon), donc N est fini sur les compacts. En effet,

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{+a} N\big(\theta_t\omega,]0, 1]\big) \, dt \quad &= \quad \int_{-a}^{+a} N\big(\omega,]t, t+1]\big) \, dt \\
&\leq \quad \int_{-a}^{+a} N\big(\omega,]-a, a+1]\big) \, dt \\
&= \quad 2\,a\,N\big(]-a, a+1]\big) < +\infty
\end{aligned}$$

$$\int_{0}^{+\infty} f(\theta_t\omega) \, dt = \int_{0}^{+\infty} N\big(\omega,]t, t+1]\big) \, dt$$

$$N\big(]0, +\infty[\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} N\big(]n, n+1]\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} N\big(]0, 1] \circ \theta_n\big) = +\infty.$$

Donc sur I_f qui est un évènement de probabilité égale à 1, N est doublement infini.

Définition 2.2.11

Toute mesure ponctuelle m simple et doublement infinie sur $\mathbb{R}$ s'écrit sous la forme

$$m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_{t_n}$$

$(t_n, \; n \in \mathbb{Z})$ *est une suite de réels strictement croissante telle que* $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty$ *et* $\displaystyle\lim_{n \to -\infty} t_n = -\infty$.

Cette suite est unique si nous lui imposons la condition $t_0 \leq 0 \leq t_1$.

2.2.4 L'écriture d'un processus ponctuel stationnaire simple et doublement infini

Tout processus ponctuel simple doublement infini s'écrit sous la forme :
$N = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_{T_n}$, où $(T_n)_n$ une suite de VA vérifiant

$$\cdots T_{-1} < T_0 \leq 0 < T_1 < T_2 < \cdots$$
$$\lim_{n \to +\infty} T_n = +\infty$$
$$\lim_{n \to -\infty} T_n = -\infty$$

Les va $(T_n)_n$ sont mesurables grâce aux relations suivantes

$$\{T_n \leq t\} = \big\{N(]0,t]) \geq n\big\} \quad si \quad n > 0,\ t > 0$$
$$\{T_n \geq t\} = \big\{N(]t,0]) \geq n\big\} \quad si \quad n < 0,\ t < 0$$

Le processus ponctuel N vérifie :
Pour toute application mesurable $S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$\theta_S : \Omega \longrightarrow \Omega$ est mesurable (composée de deux applications mesurables).
$N(\theta_S(\omega), .) = \tau_{S(\omega)} \circ N(\omega) = \sum \varepsilon_{T_n(\omega) - S(\omega)}$.
Cas particulier :
$N(\theta_{T_0}(\omega), .)$ est la mesure ponctuelle obtenue en translatant l'origine au premier point qui soit à gauche de la mesure N.

$$\sum_{\mathbb{Z}} \varepsilon_{T_n(\omega)}(.) = N(\omega, .) = \tau_{-s} \circ N(\theta_s(\omega), .) = \sum_{\mathbb{Z}} \varepsilon_{s + T_n \circ \theta_s(\omega)}(.)$$

donc

$$s + T_n(\theta_s \omega) = T_{m+n}(\omega) \quad \text{ si } \quad T_m(\omega) \leq s < T_{m+1}(\omega).$$

$$T_m + T_n \circ \theta_{T_m} = T_{m+n}.$$

Identification d'une mesure de Palm $\widehat{P}$ et reconstruction de la mesure P à partir de $\widehat{P}$

Proposition 2.2.12 *[74] Processus ponctuel(**PP**) stationnaire (**ST**) simple (**SP**) doublement infini (**DI**)*
Soit $N = \sum_{\mathbb{Z}} \varepsilon_{T_n}$ *PP ST SP DI sur* $\mathbb{R}$. $\widehat{\Omega} = \{\omega,\ T_0 = 0\} = \Big\{\omega,\ N\big(\{0\}\big) \neq 0\Big\}$.

1. $\theta_{T_0} : \Omega \longrightarrow \widehat{\Omega}$ *surjection.*

2. $\theta_{T_0} \circ P = T_1 \cdot \widehat{P}$, *donc* $\widehat{P}$ *est portée par* $\widehat{\Omega}$.

Réciproquement, la probabilité P peut être récupérée à partir de la mesure de Palm $\widehat{P}$ par la formule

$$\int_\Omega P(d\omega)\, f(\omega) = \int_{\widehat{\Omega}} \widehat{P}(d\omega) \int_0^{T_1(\omega)} f(\theta_s\omega)\, ds, \quad f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+ \ \textit{mesurable.}$$

Démonstration :
Le support de $N(\theta_{T_0}, .)$ est la suite de points $\big(T_n(\omega) - T_0(\omega),\ n \in \mathbb{Z}\big)$. Donc $N(\theta_{T_0}, .)$ charge le point 0, donc $\theta_{T_0}(\omega) \in \widehat{\Omega}$.
Inversement, si $\omega \in \widehat{\Omega}$, alors $T_0(\omega) = 0$, donc $\theta_{T_0}(\omega) = \omega$. i.e. $\theta_{T_0/\widehat{\Omega}} = id_{\widehat{\Omega}}$.
$\theta_{T_0}(\Omega) \subset \widehat{\Omega}$ et $\widehat{\Omega} \subset \Omega$, $\widehat{\Omega} = \theta_{T_0}(\widehat{\Omega}) \subset \theta_{T_0}(\Omega)$, d'où : $\theta_{T_0}(\Omega) = \widehat{\Omega}$.

On montre la formule suivante : pour tout $g : \Omega \times \mathbb{R}_+$

$$\int_\Omega P(d\omega) g\big(\theta_{T_0}(\omega), -T_0(\omega)\big) = \int_{\widehat{\Omega}} \widehat{P}(d\omega) \int_0^{T_1(\omega)} g(\omega, s)\, ds.$$

On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} a_0 : \Omega \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (\omega, s) & \longmapsto & a_0(\omega, s) = 1_{\{T_0(\omega) \leq s < T_1(\omega)\}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} a_0(\theta_s\omega, -s) & = & 1_{\{T_0(\theta_s\omega) \leq -s < T_1(\theta_s\omega)\}} \\ & = & 1_{\{s + T_0(\omega) \leq 0 < s + T_1(\omega)\}} \end{array}$$

comme

$$T_0(\omega) \leq s < T_1(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad s + T_0(\theta_s\omega) \leq 0 < s + T_1(\theta_s\omega)$$

donc

$a_0(\theta_s\omega, -s) = a_0(\omega, s)$. On applique la formule du théorème 2.2.2 à la fonction

$$f(\omega, t) = g(\omega, -t) a_0(\omega, -t)$$

$\theta\Big[P(d\omega)N(\omega,ds)\Big] = \widehat{P}(d\omega)\cdot\lambda(ds).$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\times\mathbb{R}} P(d\omega)\,N(\omega,ds)\,f(\theta_s\omega,s)\\
&= \int_{\Omega\times\mathbb{R}} P(d\omega)\,N(\omega,ds)\,g(\theta_s\omega,-s)a_0(\omega,s)\\
&= \int_{\Omega\times\mathbb{R}} P(d\omega)\,N(\omega,ds)\,g(\theta_s\omega,-s)a_0(\theta_s\omega,-s)\\
&= \int \widehat{P}(d\omega)\,\lambda(ds)\,g(\omega,-s)\,a_0(\omega,-s)\lambda\\
&= \int \widehat{P}(d\omega)\,\lambda(ds)\,g(\omega,-s)1_{\{T_0(\omega)\le -s<T_1(\omega)\}}, \quad \text{car est invariante par symétrie}\\
&= \int \widehat{P}(d\omega)\,\lambda(ds)\,g(\omega,s)1_{\{T_0(\omega)\le s<T_1(\omega)\}}\\
&= \int \widehat{P}(d\omega)\int_0^{T_1(\omega)} g(\omega,s)\,\lambda(ds)
\end{aligned}$$

<u>Cas particuliers</u> :

1. On prend $g(\omega,t)=f(\omega)$.

$$\int P(d\omega)\,f\big(\theta_{T_0}(\omega)\big) = \int \widehat{P}(d\omega)T_1(\omega)f(\omega) \Leftrightarrow \theta_{T_0}\circ P = T_1\cdot\widehat{P}.$$

2. On prend $g(\omega,t)=f(\theta_t\omega)$.

$$\int_\Omega P(d\omega)\,f(\omega) = \int_{\widehat{\Omega}} \widehat{P}(d\omega)\int_0^{T_1(\omega)} f(\theta_s\omega)\,ds$$

   Cette formule donne exactement l'expression de P à partir de $\widehat{P}$.

Proposition 2.2.13 *[74]*
Soit $N_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{S_n}$, $\Big($ *resp,* $N_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{T_n}\Big)$ *un processus ponctuel stationnaire sur* $\mathbb{R}$ *SP DI de mesure de Palm* $\widehat{P}_1$ *(resp* $\widehat{P}_2$*). Alors les deux mesures* $\widehat{P}_1$, $\widehat{P}_2$ *sont reliées par la formule suivante :*

1. $$\int_{\widehat{\Omega}_2} f(\omega)\widehat{P}_2(d\omega) = \int_{\widehat{\Omega}_2}\Bigg[\sum_{n:\,0<T_n(\omega)\le S_1(\omega)} f\circ\theta_{T_n}(\omega)\Bigg]\widehat{P}_1(d\omega).$$

   Si $N_1\big([T_n,T_{n+1}[\big)=1$ *(les points des processus* N_1 *et* N_2 *alternent), alors* $\widehat{P}_2=\theta_{T_1}\circ\widehat{P}_1$*. En particulier, en considérant le cas où* $N_1=N_2$ *on obtient la formule suivante :* $\widehat{P}=\theta_{T_1}\circ\widehat{P}$.

2. $\theta_{S_0}\circ\widehat{P}_2 = N_2\big([0,S_1[\big)\cdot\widehat{P}_1$.

Démonstration :

On pose $a_0(\omega, s) = 1_{\{S_0(\omega)\leq s<S_1(\omega)\}}$, $a_0(\omega, s)$ vérifie $\int_{\mathbb{R}} N_1(\omega, ds)\, a_0(\omega, s) = 1$,

$\forall\omega \in \Omega$, et $\widehat{P}_2(d\omega)N_1(\omega, ds) = \rho\Big[\widehat{P}_1(d\omega)\, N_2(\omega, ds)\Big]$ où $\rho(\omega, s) = (\theta_s\omega, -s)$.

Il s'en suit que pour tout $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(\omega)\widehat{P}_2(d\omega) &= \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \widehat{P}_2(d\omega)N_1(\omega, ds)\, f(\omega)a_0(\omega, s) \\
&= \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \widehat{P}_1(d\omega)\, N_2(\omega, ds)\, f(\theta_s\omega)\, a_0(\theta_s\omega, -s) \\
&= \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \widehat{P}_1(d\omega)\, N_2(\omega, ds)\, f(\theta_s\omega)\, a_0(\omega, +s) \\
&= \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \widehat{P}_1(d\omega) \sum_{\mathbb{Z}} f\big(\theta_{T_n}(\omega)\big)\, 1_{\{0<T_n<S_1\}}
\end{aligned}$$

Si les deux processus N_1, N_2 alternent, la relation établie ci dessus entraine que $\widehat{P}_2 = \theta_{T_1} \circ \widehat{P}_1$

Remarque 2.2.14

Notons, que si $0 < T_n < S_1$, alors $T_n + S_0 \circ \theta_{T_n}$ est le premier point de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui se situe à gauche de T_n. Cette propriété s'exprime par : $T_n + S_0 \circ \theta_{T_n} = S_0$, comme $\theta_{S_0} \circ \theta_{T_n} = \theta_{T_n+S_0\circ\theta_{T_n}} = \theta_{S_0}$. Par conséquent, $\theta_{T_0} \circ \theta_{T_n} = \theta_{T_n+T_0\circ\theta_{T_n}} = \theta_{T_n}$, et $\theta_{S_0} \circ \theta_{T_n} = \theta_{S_0}$.

Pour obtenir la deuxième relation, posons $f = g \circ \theta_{S_0}$, alors

$$\begin{aligned}
\text{On obtient} \sum_{n:\, 0\leq T_n<S_1} f \circ \theta_{T_n} &= \sum_{0\leq T_n<S_1} g \circ \theta_{S_0} \circ \theta_{T_n} \\
&= \sum_{0\leq T_n<S_1} f \circ \theta_{S_0}. \\
&= g \circ \theta_{S_0} \cdot N_2\big([0, S_1[\big)
\end{aligned}$$

Conséquence : En considérant dans la proposition précédente $N_1 = N_2$, on obtient :

Proposition 2.2.15 *[74]*

Soit $N = \sum \varepsilon_{T_n}$ PP réel SP DI défini sur $(\Omega, \mathscr{A})$, stationnaire par le flot $\big(\theta_t, t \in \mathbb{R}\big)$ et $\widehat{\Omega} = \{T_0 = 0\} = \Big\{N(\{0\}) \neq 0\Big\}$. Posons $\widehat{\theta}_n = \theta_{T_n}|_{\widehat{\Omega}}$, alors

1. ▪ $\theta_{T_n} : \Omega \longrightarrow \widehat{\Omega}$ *est une surjection.*

▪ $(\widehat{\theta}_n,\ n \in \mathbb{Z})$ *est un groupe.*

2. *Pour toute probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ stationnaire, la mesure de Palm $\widehat{P}$ de N relativement à P est invariante par les transformations $(\widehat{\theta}_n,\ n \in \mathbb{Z})$.*
3. *Réciproquement, si $\widehat{P}$ est une mesure positive sur $\widehat{\Omega}$ telle que $\displaystyle\int_{\widehat{\Omega}} T_1\, d\widehat{P} = 1$ et si $\widehat{P}$ est invariant par $\widehat{\theta}_1$ il existe une et une seule probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ invariante par le flot $\big(\theta_t, t \in \mathbb{R}\big)$ telle que $\widehat{P}$ soit la mesure de Palm de N pour P. Elle est donnée par la formule*

$$\int_{\Omega} P(d\omega)\, f(\omega) = \int_{\widehat{\Omega}} \widehat{P}(d\omega) \int_0^{T_1(\omega)} f(\theta_s\omega)\, ds.$$

Démonstration :

(a) $\theta_{T_m}(m \in \mathbb{Z})$ applique Ω dans $\widehat{\Omega}$ car

$$N\big(\theta_{T_m}(\omega, \{0\})\big) = \sum \varepsilon_{T_n - T_m(\omega)}\big(\{0\}\big) = 1.$$

(b) $\theta_{T_n} \circ \theta_{T_m}(\omega) = \theta_{T_m + T_n \circ \theta_{T_m}} = \theta_{T_{m+n}}$ sur Ω.

(c) On a déjà vu que $\widehat{P} = \theta_{T_1} \circ \widehat{P}$, en particulier $\widehat{P} = \widehat{\theta}_n \circ \widehat{P}\,, \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $\widehat{P}$ est une mesure positive invariante sous les $(\widehat{\theta}_n,\ n \in \mathbb{Z})$, montrons que la mesure $\widehat{P}(d\omega)N(\omega, ds)$ est invariante par la transformation $\rho(\omega, s) = (\theta_s\omega, -s)$.

Soit $f : \widehat{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
\int \widehat{P}(d\omega)\, N(\omega, ds) f(\theta_s\omega, -s) &= \int \widehat{P}(d\omega) \sum_{\mathbb{Z}} f(\widehat{\theta}_n\omega, -T_n(\omega)) \\
&= \int \widehat{P}(d\omega) \sum_{\mathbb{Z}} f\Big(\omega, -T_n\big(\widehat{\theta}_n(\omega)\big)\Big)
\end{aligned}$$

Or $T_{-n} + T_n \circ \theta_{T_{-n}} = T_0 = 0$ sur $\widehat{\Omega}$, donc

$$\begin{aligned}
\int \widehat{P}(d\omega)\, N(\omega, ds) f(\theta_s\omega, -s) &= \int \widehat{P}(d\omega) \sum_{\mathbb{Z}} f(\omega, T_{-n}(\omega)) \\
&= \int \widehat{P}(d\omega)\, N(\omega, ds) f(\omega, s)
\end{aligned}$$

donc, il existe une probabilité P invariante sous $(\theta_t)_t$ telle que $\widehat{P}$ soit la mesure de Palm de P relativement à N.

Si $0 < \widehat{P}(\widehat{\Omega}) < +\infty$, alors

$$\widehat{\mathbb{P}}(.) = \frac{1}{\widehat{P}(\widehat{\Omega})} \widehat{P}(.)$$

est la probabilité de Palm, $\dfrac{1}{\widehat{P}(\widehat{\Omega})} = \widehat{\mathbb{E}}(T_1)$.
Au flot stationnaire $\big(\ \Omega,\ \mathscr{A},\ P,\ (\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}\ \big)$ indéxé par $\mathbb{R}$ on associe le flot stationnaire suivant $\big(\ \widehat{\Omega},\ \hat{\mathscr{A}},\ \widehat{P},\ (\widehat{\theta}_n)_{n\in\mathbb{Z}}\ \big)$. indéxé par $\mathbb{Z}$.

Conséquence

1. Le flot $\left(\widehat{\Omega}, \hat{\mathscr{A}}, \widehat{\mathbb{P}}, \left(\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{Z}\right)\right)$ est stationnaire, où $\widehat{\Omega} = \{T_0 = 0\}$, $\hat{\mathscr{A}} = \mathscr{A}|\widehat{\Omega}$, $\widehat{\mathbb{P}}\,(.) = \lambda_N^{-1} \times \widehat{P}\,(.)$ et $\widehat{\theta}_n = \theta_{T_n}|\widehat{\Omega}$.
2. Si le flot $(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_t, t \in \mathbb{R}))$ est ergodique, alors $\left(\widehat{\Omega}, \hat{\mathscr{A}}, \widehat{\mathbb{P}}, (\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{Z})\right)$ l'est aussi.

2.2.5 Processus ponctuel marqué stationnaire doublement infini (PPM ST DI)

Soit N un processus ponctuel sur $\mathbb{R}$ dont les points de base sont représentés par la suite $(T_n, n \in \mathbb{Z})$ vérifiant $T_0 \leq 0 < T_1$ et $\lim\limits_{n\to\pm\infty} T_n = \pm\infty$.
Soit $\big(Y_n,\ n\ \in\ \mathbb{Z}\big)$ une suite définie sur $\{\omega \in \Omega, N(\omega, .) \neq 0\}$ à valeurs dans un espace mesurable F telle que $Y_{n+1} = Y_n \circ \theta_{T_1}$. Le processus ponctuel

$$\overline{N}(\omega, .) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{T_n(\omega)} \otimes \delta_{Y_{n(\omega)}}$$

est stationnaire simple doublement infini sur $\mathbb{R}$ marqué à marques dans $\mathbf{F}$ et vérifie

$$\overline{N}(\theta_t(\omega), .) = \tau_t \otimes i_\Omega \circ \overline{N}(\omega, .) \ \text{ ce qui équivaut à } \overline{N}(\theta_t(\omega), .) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{T_n(\omega)-t} \otimes \delta_{Y_{n(\omega)}} \quad (2.4)$$

Si $\widehat{P}$ est la mesure de Palm de N associée à P, alors $\widehat{P}(.)\delta_{Y_0}(.)$ est la mesure de Palm de $\overline{N}$ associée à P.

2.2.6 Processus ponctuel de renouvellement

Définition 2.2.16 *Soit μ une mesure de probabilité définie sur $\mathbb{R}_+^*$ d'espérance finie. Un processus ponctuel réel simple stationnaire $N = \sum \delta_{T_n}$ défini sur $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$ est dit de renouvellement de loi μ si :*
$\lambda_N < +\infty$, et les variables $A_n = T_{n+1} - T_n, n \in \mathbb{Z}$ sont indépendantes et équidistribuées de loi μ pour la probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$ la probabilité de Palm de N pour la probabilité P.

2.3 Différentes notions de mélange

Etant donnée une mesure aléatoire N du second ordre définie sur le flot stationnaire $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$.

- La probabilité P est dite N-mélangeante si

$$\int N(\omega, f)\, N(\theta_x\omega, g)\, P(d\omega) \longrightarrow \lambda_N^2 \int f(t)\, dt \int g(u)\, du \text{ lorsque } \quad x \longrightarrow \pm\infty$$

  où $f, g \in C_K$.

  Si une probabilité est mélangeante, elle est à fortiriori, N-mélangeante pour toute mesure aléatoire du second ordre

- Soit N une mesure aléatoire du premier ordre, on dira que la probabilité P est fortement N-mélangeante, si

$$\int N(\omega, g)\, f(\theta_x\omega)\, P(d\omega) \longrightarrow \lambda_N \int g(t)\, dt \int f(\omega)\, P(d\omega) \quad \text{lorsque } x \longrightarrow \pm\infty.$$

Si une probabilité est mélangeante, elle est aussi fortement N-mélangeante pour toute mesure aléatoire du premier ordre. La probabilité P est fortement N-mélangeante pour une mesure alétoire du second ordre, elle est aussi N-mélangeante pour cette même mesure aléatoire N.

Conclusion : Les différents résultats que nous venons de voir constituent le cadre naturel pour la généralisation des résultats de la théorie du renouvellement, l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

La théorie du renouvellement

Introduction

Les principaux théorèmes de renouvellement qui possèdent une application dans le problème de convergence en loi sont cités, comme le théorème de renouvellement du à Smith théorème 3.2.2 qui assure la convergence en distribution des processus régénératifs et donne l'expression explicite de la loi limite. Le deuxième théorème de convergence en loi (théorème 3.5.11) concerne les processus définis à partir d'une fonction continue bornée définie sur $M(\mathbb{R} \times E)$ l'espace des mesures sur $\mathbb{R}$ marquées à marques dans un espace E métrisable séparable lorsque $M(\mathbb{R} \times E)$ est muni de la topologie de la convergence vague-étroite.

3.1 Suite de renouvellement et processus de renouvellement

L'exemple le plus simple de suite de renouvellement est celui d'une suite d'expériences de Bernoulli. Le temps d'attente jusqu'au premier succés est de loi géométrique. Après la réalisation du premier succés, les essais redémarrent à zéro et le nombre d'essais entre le r ième et le $(r+1)$ ième succés suit une loi géométrique. Le temps d'attente pour la réalisation du r ième succés est la somme de r variables aléatoires indépendantes équidistribuées.
De même si l'expérience consiste à observer l'évènement ES (un échec suivi d'un succés) alors les réalisations des événements ES constituent une suite de renouvellement.

Définition 3.1.1

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de VAIE strictement positives de fonction de répartition F avec $F(0) = 0$ et A_0 une variable indépendante de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de fonction de répartition F_1 .

Posons : $T_n = \sum_{1\leq k\leq n} A_k$ *et* $S_n = \sum_{0\leq k\leq n} A_k$,

$$N_T(t) = \max(n, T_n \leq t), \quad N_S(t) = \max(n, S_n \leq t) \quad et\, \nu(t) = E(N_S(t))$$

- *La suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est dite une suite de renouvellement de loi F et N_T est appelé processus de renouvellement.*

- *Lorsque F et F_1 sont distinctes, La suite $(S_n)_n$ est appelée suite de renouvellement retardée, N_S est appelé processus de renouvellement général, F est la loi du renouvellement et F_1 est la loi du premier renouvellement.*

- *$\nu(t)$ est appelé la fonction de renouvellement.*

  Elle calcule le nombre moyen de renouvellements dans $[0, t]$ et vérifie l'équation suivante :

  $$\nu(t) = F_1(t) + \int_0^t F(t-s)d\nu(s)$$

  appelée équation de renouvellement.
- *Si $\mu = \int_0^{+\infty} P(A_1 > s)ds < +\infty$ et $F_1(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t P(A_1 > s)ds$ alors $\nu(t) = \frac{t}{\mu}$ et le processus N_S est dit stationnaire.*
- *Si la loi F est du type suivant :*

  $$F(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k \delta_{t-k}([0, +\infty[) \ \ avec \ \ \sum_{k=0}^{\infty} b_k = 1, b_k \geq 0, b_0 = 0$$

  Le processus de renouvellement est dit discret, soit d le plus grand diviseur commun des k, tel que $b_k > 0$.

  1. *Si $d > 1$, le processus est dit périodique de période d.*
  2. *Si $d = 1$, le processus est dit apériodique.*

- *dans le cas discret, l'équation de renouvellement s'écrit :*

  $$c_k = b_k + \sum_{l=0}^{k} c_l b_{k-l} \quad où \quad c_k = \sum_{n\geq 1} b_k^{*n}$$

Définition 3.1.2

- *La suite $(T_n)_n$ définie ci-dessus est dite récurrente si $A_n < +\infty$ p.s, $\forall n$. Sinon la suite est dite transiente.*
- *La suite $(T_n)_n$ est dite périodique de période δ si les variables A_n prennent leurs valeurs dans l' ensemble discret $\{0, \delta, 2\delta, ..., k\delta, ...\}$. On dit aussi que la distribution des A_n est réticulée ou latticielle. Dans le cas particulier où $d = 1$ la suite est dite apériodique.*

Lemme 3.1.3 *[42] :*

La mesure U, définie sur $\left(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}\right)$ par $U(I) = E(N_T(I)) = \sum_{n\geq 1} F^{*n}(I)$ est telle que $U(I) < +\infty$ pour tout intervalle borné et fini de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$.

Preuve :

Il suffit de prendre $I =]0, x]$, comme $\{T_n \leq x\} = \{\sum_{i=1}^n A_i \leq x\} \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} \{A_i \leq x\}$, alors $P(T_n \leq x) \leq F^n(x)$

Si $F(x) < 1$, alors $U(x) < \frac{1}{1-F(x)} < +\infty$.

Si $F(x) = 1$, il existe sûrement un $k \in \mathbb{N}$ tel que$F^{*k}(x) < 1$ sinon si pour tout $n \in \mathbb{N}, F^{*n}(x) = F(x) = 1$ alors $T_n = A$, P p.s $\Longrightarrow \forall n \geq 2, A_n = 0$ P p.s, comme les $(A_n)_n$ sont équidistribuées et vérifient $P(A_n = 0) = 0$ on aboutit à une contradiction.

D'autre part $\{T_{n+1} \leq x\} \subset \{T_n \leq x\}$, donc $F^{*(n+1)}(x) \leq F^{*n}(x)$. Par conséquent, on a :

$$U(I) = \sum_{n=0}^{+\infty} F^{*n}(x) = \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k-1} F^{*(kl+j)}(x) \leq \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k-1} F^{*kl}(x) \quad = k\sum_{l=0}^{+\infty} F^{*kl}(x) \quad < \frac{k}{1-F^{*k}(x)}$$

3.1.1 L'équation de renouvellement.

Théorème 3.1.4 *:[42]*

Soit z une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R}_-$. Alors, $Z = \nu * z$ est l'unique solution bornée sur les compacts de l'équation

$$Z = z + F * Z \tag{3.1}$$

Preuve :

Montrons que $Z = \nu * z$ est solution de l'équation $Z = z + F * Z$

Comme $\nu\left(\, [0, x]\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} F^{*n}\left(x\right)$, et $F^{*0}\left(x\right) = P\left(A_0 = x\right) = \delta_0\left(x\right).$

$\nu * z\left(x\right) = \int_0^x z\left(x-y\right)\nu\left(dy\right) = \int_0^x z\left(x-y\right)F^{*0}\left(dy\right) + \int_0^x z\left(x-y\right)\sum_{n=1}^{+\infty} F^{*n}\left(dy\right)$

le premier terme est égal à $\int_0^x z\left(x-y\right)\delta_0\left(dy\right) = z\left(x\right)$

le deuxième terme vaut

$$\begin{aligned}
\int_0^x z\left(x-y\right)\sum_{n=1}^{+\infty} F^{*(n-1)} * F\left(dy\right) &= \int_0^x z\left(x-y\right)\nu * F\left(dy\right) \\
&= \int_0^x \int_0^{x-y} z\left(x-y-t\right)\nu\left(dt\right)F\left(dy\right) \\
&= \int_0^x Z\left(x-y\right)F\left(dy\right).
\end{aligned}$$

d'où

$$Z\left(x\right) = z\left(x\right) + \int_0^x Z\left(x-y\right)F\left(dy\right)$$

Supposons qu'il existe Z' une autre solution bornée de l'équation 3.1, alors $W = Z' - Z$ est solution de l'équation 3.1 $\left(\delta_x - F\right) * W = 0$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et qui est équivalente à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x \left(W(x-y)\right)F\left(dy\right) = W\left(x\right)$$

W est une fonction harmonique pour la marche $x - \sum_{i=1}^n A_i$, donc $W\left(x - \sum_{n=1}^n A_i\right)$ est une martingale bornée et donc converge vers

$$W(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} W\left(x - \sum_{i=1}^n A_i\right) = 0$$

3.1.2 Les différentes formulations du théorème de renouvellement

Théorème 3.1.5 *: **Le théorème de renouvellement élémentaire**.*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{E(N(t))}{t} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}, & si\;\; \mu < +\infty \\ 0, & si\;\; \mu = +\infty. \end{cases}$$

avec $\mu = \int_0^{+\infty} P(A_1 > t)dt.$

Preuve 1 *Posons* $f(s) = \int_0^{+\infty} \exp^{(-st)} dF(t), s \geq 0$ *et* $f_1(s) = \int_0^{+\infty} \exp^{(-st)} dF_1(t)$ *donc* $\int_0^{+\infty} \exp^{-st}(1-F(t))dt = \frac{1-f(s)}{s}, s > 0$ *donc* $\lim_{s\searrow 0}(\frac{1-f(s)}{s}) = \int_0^{+\infty}(1-F(t))dt = \mu$. $\lim_{s\searrow 0}(f(s)) = 1$ *et* $\mu(s) = \int_0^{+\infty} \exp^{(-st)} d\nu(t) = \frac{f_1(s)}{1-f(s)}, \Re(s) > 0 \Longrightarrow \lim_{s\searrow 0}\mu(s) \simeq \frac{\lim_{s\searrow 0} f(s)}{\lim_{s\searrow 0}(s.\frac{1-f(s)}{s})} \Longrightarrow \mu(s) \simeq \frac{1}{\mu s}$ *quand* $s \searrow 0$. *Comme* ν *est croissante, d'après un théorème du à* Tauber *pour les transformées de* Stieltjes *(voir appendice), on obtient :*
$\lim_{t\to+\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$ *si* $\mu < +\infty$.
Si $\mu = \infty$, *on considère le processus de renouvellement* $(\nu^{(1)}(t), t \geq 0)$ *dont la distribution de renouvellement est*

$$F^1(x) = \begin{cases} F(t) \ \ si \ \ t \leq\triangle \ . \\ 1 \quad \ si \ \ t >\triangle \end{cases}$$

où $\triangle$ *est une constante strictement positive.*
On a $\nu_t^{(1)} \geq \nu_t \quad P$ *p.s* $\forall t \geq 0$ *et donc* $m^{(1)}(t) \geq m(t), t \geq 0$.
De plus, $\frac{\nu^{(1)}(t)}{t} \geq \frac{m(t)}{t}, t > 0$. *Posons* $\mu^{(1)} = \int_0^{+\infty} tdF^{(1)}(t) < +\infty$, *il s'en suit*
$\lim_{t\to+\infty} \frac{m^{(1)}(t)}{t} = \frac{1}{\mu^{(1)}} \geq \lim_{t\to+\infty}(\frac{m(t)}{t}) \geq 0$.
En faisant tendre $\triangle$ *vers* $+\infty$, *on a* $(\mu^{(1)})^{-1} \to 0$ *ce qui entraine que* $\lim_{t\to+\infty} \frac{m(t)}{t} = 0$.

Théorème 3.1.6 *[42]*
A. ***Le théorème classique de renouvellement de Blackwell.****[15]*

Si la distribution F *est non latticielle, alors :*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\nu(t) - \nu(t-h)}{h} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}, \ \ si \ \ \mu < +\infty \\ 0, \ \ si \ \ \mu = +\infty. \end{cases}$$

B. ***Le théorème de renouvellement de P.Erdos, W.Feller, H.Pollard.****[38]*

Si le processus de renouvellement est discret de loi latticielle de période d, on a :

$$\lim_{k\to+\infty}(\nu(dk) - \nu(d(k-1))) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n\geq 1} b_{dk}^{*n} = \begin{cases} \dfrac{d}{\mu}, \ \ si \ \ \mu < +\infty \\ 0, \ \ si \ \ \mu = \ +\infty. \end{cases}$$

3.2 Processus régénératifs

Définition 3.2.1

Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ *une suite de renouvellement simple de loi* F *et* $(N(t))_t$ *le processus de renouvellement associé.*
Soit $Z = (Z(t), t \geq 0)$ *un processus stochastique à espace d'états* E.

Si le processus $(Z(t+S_n), t \geq 0)$ est indépendant de $(Z(t), 0 \leq t < S_n)$ et de même loi que $(Z(t), t \geq 0)$, le processus Z est dit un processus régénératif et les points du processus de renouvellement sont appelés les points de régenération du processus Z.

3.2.1 L'équation de renouvellement- théorème de renouvellement

Posons $K(t, A) = P(S_1 > t, Z_t \in A), t \geq 0$.
$f(t) = P(Z_t \in A), t \geq 0$. Grâce à la propriété de régénération au point S_1, on a : $P(Z_t \in A/S_1) = f(t - S_1)$ sur $\{S_1 \leq t\}$. Donc, f vérifie la relation :

$$f(t) = K(t, A) + \int_0^t f(t-s)dF(s)$$

qui est l'équation de renouvellement.

Théorème 3.2.2 *[86]* ***Le théorème de Smith(Key renewal theorem)***
Soit $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tel que $t \mapsto K(t, A)$ soit Riemann intégrable.

(a) *Si S est récurrent apériodique et $\mu < +\infty$ alors*

$$\lim_{t \to +\infty} P(Z_t \in A) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty K(s, A)ds.$$

(b) *Si S est récurrent périodique de période d et $\mu < +\infty$, alors*

$$\lim_{n \to +\infty} P(Z_{s+nd} \in A) = \frac{d}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} K(s + kd, A).$$

(c) *Si S est récurrent et $\mu = +\infty$ alors*

$$\lim_{t \to +\infty} P(Z_t \in A) = 0.$$

3.3 La démonstration probabiliste du théorème classique de renouvellement

Théorème 3.3.1 *[62]*
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité ergodique, $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de VAIE définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de loi F non latticielle et telle que :

$$F(0) = 0 \quad et \quad 0 < E(X_1) = \mu < +\infty.$$

On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad et \quad S_0 = 0, \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

$$N(B) = \sharp\{i, S_i \in B\}, \;\; U(B) = E(N(B)), \; \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}.$$

Alors,

$$\forall A > 0, \; \in \lim_{x\to+\infty} U([x, x+A]) = \frac{A}{\mu}$$

Preuve

Nous commençons d'abord par montrer que si $(X_i^{'})_{i\geq 1}$ est une suite de VAIE et indépendante de la suite $(X_i)_{i\geq 1}$de loi F, $X_0^{'}$ une va indépendante des X_i de loi G définie par : $dG(y) = \frac{1-F(y)}{\mu}dy$. En posant

$$S_n^{'} = X_0^{'} + \sum X_i^{'}, N^{'}(B) = \sharp\{i, S_i^{'} \in B\} \quad \text{et} \quad \nu^{'}(t) = \min\{j \geq 0, S_j^{'} \geq t\} = N^{'}([0, t[)$$

alors :$\forall A > 0$

1− $U^{'}([x, x+A]) = \frac{A}{\mu}$.

2− Le processus $(S_{\nu^{'}(t)}^{'} - t)_{t\geq 0}$ est stationnaire de loi G.

Preuve

Démontrons que pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $G(y) = P(S_{\nu^{'}(t)}^{'} - t \leq y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y (1 - F(t)dt$.

En effet,

$$\begin{aligned}
P(S_{\nu^{'}(t)}^{'} - t \leq y, \nu^{'}(t) \in \mathbb{N}) &= P(S_{\nu^{'}(t)}^{'} - t \leq y, \;\; \bigcup_n \{\nu^{'}(t) = n\}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_{\nu^{'}(t)}^{'} - t \leq y, \;\; \nu^{'}(t) = n) \\
&= P(X_0^{'} - t \leq y, X_0^{'} \geq t) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(S_n^{'} - t \leq y, \;\; S_{n-1}^{'} < t \leq S_n^{'}) \\
&= P(t \leq X_0^{'} \leq t+y) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_{n+1}^{'} < t+y, \;\; S_n^{'} < t \leq S_{n+1}^{'}) \\
&= P(t \leq X_0^{'} \leq t+y) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n^{'} < t, \;\; t \leq S_{n+1}^{'} < t+y) ...(1)
\end{aligned}$$

Le premier terme vaut $P(t \leq X_0^{'} \leq t+y) = G(t+y) - G(t)...(2)$ car G est une loi diffuse.
Le deuxième terme vaut

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n^{'} < t,\ \ t \leq S_{n+1}^{'} < t+y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n^{'} < t, t \leq S_n^{'} + X_{n+1}^{'} < t+y). \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t dG * F^{*n}(u).[F(y+t-u) - F(t-u)]du \\
&= \int_0^t dU^{'}(u).[F(y+t-u) - F(t-u)]du.
\end{aligned}$$

on a

- $\int_0^t dU^{'}(u)F(y+t-u)du$

  $= \int_0^{y+t} dU^{'}(u)F(y+t-u)du - \int_t^{y+t} dU^{'}(u)F(y+t-u)du...(3)$

- $\int_0^{y+t} dU^{'}(u)F(y+t-u)du = U^{'} * F(y+t) = -G(y+t) + U^{'}(y+t)...(4)$

- $\int_t^{y+t} dU^{'}(u)F(y+t-u)du = U^{'}(y) - G(y)$
  On obtient ce résultat en faisant deux changements de variables, d'abord en posant $s = t-u$ puis en posant $v = -s$, de plus on a :

- $\int_0^t dU^{'}(u).F(t-u) = U^{'}(t) - G(t)...(5)$
  d'où grâce à $(1),(2),(3),(4),(5)$ on obtient :

- $P(S_{\nu^{'}(t)}^{'} - t \leq y) = G(t+y) - G(t) - G(y+t) + U^{'}(y+t) - U^{'}(y) + G(y) - U^{'}(t) + G(t)$

  Comme $U^{'}(t) = \frac{t}{\mu}$ on trouve bien $P(S_{\nu^{'}(t)}^{'} - t \leq y) = G(y)$

La construction d'un couplage : dans la suite, on montre que les deux suites de renouvellement $(S_n)_n$ et $(S_n^{'})_n$ se confondent après un temps fini. Pour cela on mesure les écarts entre ces deux suites en construisant les variables Z_i définies comme suit :

$$Z_i = \min(S_j^{'} - S_i,\ S_j^{'} - S_i \geq 0) = S_{\nu^{'}(S_i)}^{'} - S_i$$

$(Z_i)_i$ représente la suite des écarts minimaux entre les deux processus (S_n) et $(S_n^{'})$.
$S_{\nu^{'}(S_i)}^{'}$ est le premier renouvellement associé à $(S^{'})$ succédant S_i, donc il n'existe aucun $k \neq \nu(S_i)$ tel que $S_i \leq S_k^{'} \leq S_{\nu(S_i)}^{'}$.
$(Z_i)_{i\geq 1}$ est une suite de VAE de loi G.

$$P(Z_i \in B_0,\ Z_{i+1} \in B_1,\ ...,\ Z_{i+n} \in B_n)$$
$$= P(S^{'}_{\nu'}(S_i) - S_i \in B_0,\ S^{'}_{\nu'}(S_{i+1}) - S_{i+1} \in B_1, ...,\ S^{'}_{\nu'}(S_{i+n}) - S_{i+n} \in B_n)$$
$$= P(S^{'}_{\nu'}(S_i) - S_i \in B_0,\ S^{'}_{\nu'}(S_i + X_{i+1}) - (S_i + X_{i+1}) \in B_1,$$
$$...,\ S^{'}_{\nu'}(S_i + \Sigma_{j=1}^{n} X_j - S_i + \Sigma_{j=1}^{n} X_j) \in B_n)$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+^*} P(S^{'}_{\nu'}(S_i) - S_i \in B_0,$$
$$...,\ S^{'}_{\nu'}(S_i + \Sigma_{j=1}^{n} X_j \in B_n / S_i = t) dF^{*i}(t)$$

En outre, la variable S_i est indépendante de $X_{i+1}, X_{i+2}, ..., X_{i+n}$, et sur $\{S_i = t\}$ on a $\{\nu(S_i) = \nu(t)\}$. De plus, sous P la variable X_j a même loi que $X_{i+j}\ \forall j \geq 1$, donc

$$P(Z_i \in B_0,\ Z_{i+1} \in B_1, ...,\ Z_{i+n} \in B_n)$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+^*} P(S^{'}_{\nu'(t)}(t) - t \in B_0,\ S^{'}_{\nu'(t)}(t + X_1) - (t + X_1) \in B_1, ...,$$
$$S^{'}_{\nu'(t)}(t + S_n) - (t + S_n) \in B_n) dF^{*i}(t).$$

Posons $N^{'}(\omega, .) = \sum_n \delta_{S^{'}_n(\omega)}(.)$ la suite $(S^{'}_n, n \in \mathbb{Z})$ est définie par

$$S_n = \begin{cases} S_n, & \text{si } n \geq 0 \\ 0, & \text{si } n = 0 \\ -S_n, & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Alors $\nu^{'}(\omega, t) = N^{'}(\omega, [0, t])$.

$N^{'}$ étant un processus ponctuel dont les points de base forment une suite de renouvellement, $N^{'}$ est stationnaire au sens suivant :

$$N^{'}(\theta_s \omega, A) = N^{'}(\omega, \tau_s^{-1}(A) = N^{'}(\omega, A + s)$$

et donc ses points de base vérifient la relation suivante

$$t + S^{'}_n \circ \theta_t = S^{'}_{n+N^{'}([0,t[)} \text{ si } t > 0$$

Par conséquent,

$$S'_{\nu'}(t+X_1)-(t+X_1)=S'_0\circ\theta_{t+X_1}$$

Comme $\theta_{X_1}\circ\theta_t=\theta_{t+X_1\circ\theta_t}$, et $\theta_t\circ\theta_{X_1}=\theta_{t+X_1}$ donc $S'_{\nu(t+X_1)}-(t+X_1)=S'_0\circ\theta_t\circ\theta_{X_1}$
Posons : $\widehat{\theta}_j=\theta_{S_j}$ pour $j\in\mathbb{Z}$
De la même manière, on montre que :

$$S'_{\nu(t+X_1+X_2})-(t+X_1+X_2)=S'_0\circ\theta_t\circ\theta_{S_2}$$

et

$$S'_{\nu(t+S_n)}-(t+S_n)=S'_0\circ\theta_t\circ\theta_{S_n}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&P(S'_{\nu(t)}-t\in B_0,\ S'_{\nu(t+X_1)}-(t+X_1)\in B_1,\ ...,\ S'_{\nu(t+S_n)}-(t+S_n)\in B_n)\\
&=P(Z_0\circ\theta_t\in B_0,\ Z_0\circ\theta_t\circ\widehat{\theta}_1\in B_1,...,Z_0\circ\theta_t\circ\widehat{\theta}_n\in B_n)\\
&=P(Z_0\circ\theta_t\in\widehat{\theta}_0^{-1}(B_0),\ Z_0\circ\theta_t\in\widehat{\theta}_1^{-1}\in B_1,...,\ Z_0\circ\theta_t\in\widehat{\theta}_n^{-1}\in B_n)\\
&=P(Z_0\circ\theta_t\in\bigcap_{k=0}^{n}\widehat{\theta}_k^{-1}(B_k))
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
P(Z_0\in B_0,\ Z_1\in B_1\ ,...,\ Z_n\in B_n) &= \int_{\mathbb{R}_+^*}P(Z_0\circ\theta_t\in\bigcap_{k=0}^{n}\widehat{\theta}_k^{-1}(B_k))dF^{*i}(t)dt\\
&= \int_{\mathbb{R}^*}(\int_{\bigcap_{j=0}^{n}\widehat{\theta}_j^{-1}(B_j)}dG(x))dF^{*i}(t)dt\\
&= \int_{\bigcap_{j=0}^{n}\widehat{\theta}_j^{-1}(B_j)}dG(x)
\end{aligned}$$

car $dF^{*i}(t)$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.
Nous venons de voir que pour tout n, la loi du vecteur $(Z_i,Z_{i+1},...,Z_{n+i})$ est indépendante de i , ce qui équivaut à dire que la suite $(Z_{n+i})_{n\geq 0}$ est stationnaire . Le résultat final montre aussi que la suite $(Z_k)_{k\geq 0}$ est une suite de VA équidistribuées de loi commune G.
Pour $i\geq 0$ et pour $\delta>0$ posons $A_i=\bigcup_{k\geq i}\{Z_k<\delta\}$.
$A_i=\{$ à partir du i ème renouvellement il existe un écart strictement inférieur à $\delta\}$.

$$A_\infty=\bigcap_k(A_k)=\limsup_k\{Z_k<\delta\}$$

Lemme 3.3.2 *:* $\forall\delta > 0, P(A_\infty) = P(\limsup_k\{Z_k < \delta\}) = 1$

Preuve $n \geq i \Longleftrightarrow \exists k \geq 0$ tel que $n = i + k$
$P(A_i) = P(\bigcup_{k\geq i}\{Z_k < \delta\}) = P(\bigcup_{k\geq 0}\{Z_{i+k} < \delta\}) = P(\bigcup_{k\geq 0}\{Z_k < \delta\}) = P(A_0)$

Définition 3.3.3 *Soit σ une permutation finie de $\mathbb{N}^*$ ie une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$ telle que : il existe N_σ, $\forall\, n \geq N_\sigma, \sigma(n) = n$. Soit $\mathcal{P}$ le groupe de ces permutations.*
Pour $\sigma \in \mathcal{P}$, et

$$\begin{array}{rcl} T_\sigma : \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ \omega & \longmapsto & (\omega_{\sigma(n)}, n \in \mathbb{N}^*) \end{array}$$

T_σ est mesurable et $P(T_\sigma(A)) = P(A)$. i.e la probabilité P est invariante sous T_σ. On pose $\mathcal{F}_{permutables} = \{A, A \in \mathscr{A}, \forall\sigma \in \mathcal{P}, T_\sigma(A) = A\}$ =la tribu des évènements permutables.

le théorème de Hewitt Savage.

Théorème 3.3.4 *Supposons l'espace $(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_n, n \in \mathbb{Z}))$ ergodique, alors*

$$\mathcal{F}_{permutables} = \{\emptyset, \Omega\} \;\; P\ p.s$$

$A_\infty = \limsup\{Z_k < \delta\}$ étant un évènement asymptotique, est invariant par le flot, défini sur un espace de probabilité ergodique, il est de probabilité 0 ou 1.
Si $P(A_\infty) > 0$, alors nécessairement $P(A_\infty) = 1$.
Comme, $P(A_\infty) = \int_{\mathbb{R}_+^*} P(A_\infty/X_1 = t).f_{X_1}(t)dt$, et $\{Z_1 < \delta\} \subset A_\infty$, on a bien $P(A_\infty/X_1 = t) \geq P(Z_1 < \delta/X_1 = t)$.
Or $Z_1 = S'_{\nu'(S_1)} - S_1 = S'_{\nu'(X_1)} - X_1$.

$$\begin{aligned} P(Z_1 < \delta/X_1 = t) &= P(S'_{\nu(t)} - t < \delta/\ X_1 = t) \\ &= P(S'_\nu(t) - t < \delta/X'_1 = t) \text{ car } X_1 \text{ et } X'_1 \text{ ont même loi.} \\ &= P(X'_1 < t + \delta/X'_1 = t) > 0, \end{aligned}$$

grâce au fait que la loi de X'_1 est non latticielle et $\{X'_1 = t\} = \{\nu'(t) = 1\}$. D'où

$$P(A_\infty/X'_0 = t) = 1$$

Posons $T = \min\{i, Z_i < \delta\}$, alors T représente le numéro de la 1 ère période qui soit de

longueur strictement inférieure à δ et est un temps d'arrêt par rapport à $\mathscr{A}_{n,\nu(s_n)}$ où
$\mathscr{A}_{n,m} = \sigma\{X_j^{'}, X_k^{'}, 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m\}$.
$\{T < +\infty\} = \bigcup_n \{T < n\}$, et $\{T < n\} \subset \{T < n+1\}$
donc la suite $(\{T < n\})_n \nearrow$.
$\{T < n\} =^c (\{T \geq n\}) =^c (\bigcap_1^{n-1} \{Z_i > \delta\}) = \bigcup_1^{n-1} \{Z_i \leq \delta\}$.
$P(T < +\infty) = P(\bigcup_n \bigcup_{i=1}^n \{Z_i \leq \delta\}) = P(\bigcup_n \{Z_i \leq \delta\}) = P(A_0) = P(A_\infty) = 1$ car
$\bigcup_n \{Z_n \leq \delta\} = A_0$.

Le calcul de $\lim E(N([x, x+A]))$.

$$N([x, x+A]) = N([x, x+A] \bigcap [0, S_T]) + N([x, x+A] \bigcap]S_T, +\infty[).$$

$$\begin{aligned} N([x, x+A] \bigcap]S_T, +\infty[) &= = N^{'}([x, x+A] \bigcap]S_{T^{'}}^{'} - Z_T, +\infty[) \text{ où } T^{'} = \nu(S_T) \\ &= N^{'}([x + Z_T, x + Z_T + A] \bigcap]S_{T^{'}}^{'}, +\infty[) \in \sigma\{S_T, X_{\nu(S_T)+n}^{'}, n \geq 1\} \\ &= \sum_n 1_{[x+Z_T,\, x+Z_T+A]}(S_{T^{'}}^{'} + \sum_{i=1}^n X_{i+T^{'}}^{'}) \text{ qui suit la même loi que} \end{aligned}$$

$\sum 1_{[x,x+A]}(S_T + \Sigma_i^n x_{i+T})$.
où

$$X_{\nu(S_T)+n}^{'} \text{ est } \mathscr{A}_{T,\nu(S_T)} \text{ mesurable}$$

En effet : $T^{'} = \nu(S_T) = \inf\{j / S_j^{'} \geq S_T\} \in \mathscr{A}_{T,\nu(S_T)}$ donc $\sum_{1 \leq i \leq n} X_{T^{'}+i}^{'}$ ont même loi .
En posant

$$N^{''}([x, x+A]) = N([x, x+A] \bigcap [0, S_T]) + N^{'}([x, Z_T, x + A + Z_T] \bigcap]S_{T^{'}}^{'}, +\infty[)$$

cette v.a possède la même loi que $N([x, x+A])$.

$$\begin{aligned} U([x, x+A]) &= E(N^{''}([x,\ x+A])) \\ &= E(N([x, x+A] \bigcap [0, S_T])) + E(N^{'}([x + Z_T, x + A + Z_T])) \\ &\quad - E(N^{'}([x + Z_T, x + A + Z_T] \bigcap [0, S_{\nu(S_T)}^{'}])) \end{aligned}$$

1. $\frac{A-\delta}{\mu} = E(N^{'}[x+\delta, x+A]) \leq E(N^{'}([x+Z_T, x+A+Z_T]) \leq E(N^{'}([x, x+A+\delta]) = \frac{A+\delta}{\mu}$
   car $Z_T < \delta$

2.

$$\begin{aligned} E(N([x, x+A] \bigcap [0, S_T]) &\leq E(N([x, x+A].1_{\{S_T \geq x\}}) \\ &\leq a.P(S_T \geq x) + E(N([x, x+A]))1_{\{N([x,x+A]) \geq a\}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
N([x,x+A]) &= \sum 1_{[x,x+A]}(S_{\nu(x)+n}) \\
&= \sum 1_{[0,A]}(S_{\nu(x)+n} - S_{\nu(x)}) \\
&= N([0,A] \circ \theta_{(x)} \\
&= N(\theta_{(x)}(\omega), [0,A])
\end{aligned}
$$

Donc $E(N([x,x+A] \bigcap [0,S_T]) \leq a.P(S_T \geq x) + E(N([0,A]) \circ \theta_x.1_{\{N[0,A] \circ \theta_x \geq a\}})$
$= aP(S_T \geq x) + E(N([0,A]))1_{\{N[0,A] \geq a\}}$
$\lim_{x \longrightarrow +\infty} P(S_T \geq x) = 0$ car $E(S_T) < +\infty$.
S_n et T sont des variables d'espérances finies, elles sont donc presque sûrement finies, par conséquent S_T est une variable finie, ce qui entraine que $P(S_T = +\infty) = 0$.
$P(\bigcap_n \{S_T \geq n\}) = \lim P(S_T \geq n)$ grâce à la propriété de continuité monotone séquentielle.
$E(S_T) = \int_{\{S_T < +\infty\}} dP + \int_{\{s_T = +\infty\}} (+\infty) dP.$
On ne peut donc avoir $E(S_T) < +\infty$ que si $P(S_T = +\infty) = 0$
De plus $\lim_{a \to +\infty} E(N([0,A].1_{N([0,A]) \geq a})) = 0$ car la mesure $\delta_N(A) = E(N([0,A]))$ est une mesure de Radon donc l'évènement $\{N([0,A]) = +\infty\}$ est négligeable.
D'où $\lim_{a \to +\infty} aP(S_T \geq a) + E(N([0,A]).1_{\{N([0,A]) \geq a\}}) = 0$, puisque $a.P(S_T \geq a) \leq E(S_T 1_{\{S_T > a\}})$ qui tend vers zéro quand x tend vers l'infini.

3.
$$
\begin{aligned}
0 &\leq E(N'[x+Z_T, x+Z_T+A] \bigcap [0, S'_{T'}]) \\
&\leq E(N'[x+\delta, x+\delta+A] \bigcap [0, S'_{T'}]) \\
&= E(N'[x+\delta, x+\delta+A].1_{\{S'_{T'} \geq x+\delta\}}) \\
&\leq aP(S'_{T'} \geq x+\delta) + E(N'[x+\delta, x+\delta+A].1_{\{N(') \geq a\}}) \to 0 \text{ quand } a \to +\infty.
\end{aligned}
$$

D'où $\lim_{x \to +\infty} E(N[x,x+A]) = \lim E(N'[x+Z_T, x+A+Z_T]) = \frac{A}{\mu}$.

3.4 Une généralisation du théorème 3.1.6

Théorème 3.4.1 ***Une généralisation du théorème de renouvellement*** *[30](due à J.Neveu)*
Soit N une mesure aléatoire du 2^{nd} ordre d'intensité λ_N. Alors, si la probabilité P est N mélangeante, $\tau_x \circ \sigma_N$ converge vaguement vers $\lambda_N^2 m_0$ lorsque $x \to \pm\infty$.

Preuve 2 *En utilisant la formule du théorème 2.2.2 puis le théorème de Fubini et enfin la définition de σ_N, on obtient :*

$$\int N(\omega,a)N(\theta_x\omega,b)P(d\omega)=\int N(\theta_{x+t}\omega,b)a(-t)dt\widehat{P}_N(d\omega)$$
$$=\int N(\theta_x\omega,b*\breve{a})\widehat{P}_N(d\omega)=\int b*\breve{a}(u)\tau_x\circ\sigma_N(du).$$

En désignant par $\breve{a}$ *la fonction* $: t\mapsto a(-t)$ *et par* $b*\breve{a}$ *la fonction* $t\mapsto\int b(u)\breve{a}(t-u)du$.
La propriété de N*- mélange donne* $\int b*\breve{a}(u)\tau_x\circ\sigma_N(du)\xrightarrow[x\longrightarrow\pm\infty]{}(\lambda_N^2).\int b*\breve{a}(u)du$ *pour toute fonction* $\breve{a}$ *et* $b\in C_K$*. Alors, on a la convergence* $\int a(t)\tau_x\circ\sigma_N(dt)\to\lambda_N^2\int a(t)dt$

Corollaire 3.4.2 *Le théorème précédent contient le théorème classique de* Blackwell*.*

Preuve 3 $U(x)=1+\widehat{\mathbb{E}}(N(]0,x])=1+\frac{\sigma_N(]0,x])}{\lambda_N}$

3.5 Convergence en loi

Transformation de Laplace sur $\mathbb{R}_+^d$

Définition 3.5.1 *La transformation de laplace d'une mesure positive et finie* m *sur* $\mathbb{R}_+^d$ *est la fonction continue et bornée de* $\mathbb{R}_+^d$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par l'intégrale*

$$\widetilde{m}(t)=\int_{\mathbb{R}_+^d}\exp(-\sum_{j=1}^{d}t_jx_j)m(dx)\quad t\in\mathbb{R}_+^d.$$

Définition 3.5.2 *Etant donné* E *un espace localement compact à base dénombrable. La transformée de Laplace d'une probabilité* Q *définie sur* $M_p(E)$ *des mesures ponctuelles sur* E *est définie par la formule*

$$\Psi(f)=\int_{M_p(E)}\exp(-\int_E f(t)m(dt))Q(dm),$$

où f *est une fonction borélienne positive de* E *dans* $\mathbb{R}$.
La fonctionnelle de Laplace d'un processus ponctuel N *définie sur l'espace de probabilité* $(\Omega,\mathscr{A},P)$ *est alors la transformée de Laplace de sa loi de probabilité, soit*

$$\Psi_N(f)=\int_\Omega\exp(-N(\omega,f))P(d\omega)$$

3.5.1 Critère de Convergence étroite

Une caractérisation de la convergence étroite sur $M_+(\mathbb{R})$.

Proposition 3.5.3 *[74]*
Pour qu'une suite $(P_n, n \in \mathbb{N})$ *de probabilité sur* $M_+(\mathbb{R})$ *converge étroitement vers* P_∞*, il faut et il suffit que leurs transformées de Laplace convergent sur* $C_N^+(E)$*, c'est à dire que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \psi_{P_n}(f) = \psi_P(f), \forall f \in C_K^+(E)$$

Preuve 4 *Puisque l'application* $m \mapsto exp(-m(f))$ *est continue et bornée sur* $M_+(E)$ *pour tout* $f \in C_K^+(E)$*, la condition nécessaire est vérifiée.*
Montrons la condition suffisante :
Soit $f_1, ..., f_d$ *appartenant à* $C_K^+(E)$ *et* $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *une fonction continue bornée.*
1ère étape :
Notons $P_n^{f_1,\dots,f_d}$ *l'image de* P_n *par l'application* $m \mapsto (m(f_1), ..., m(f_d))$ *de* $M_+(E)$ *dans* $\mathbb{R}^d$*. On a :* $\lim_{n\to+\infty} \int_{M_+(E)} \phi(m(f_1), ..., m(f_d))P_n(dm)$
$= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)P_n^{f_1,\dots,f_d}(dx)$ *par définition des* $P_n^{f_1,\dots,f_d}$
$= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\ P_\infty^{f_1,\dots,f_d}(dx)$ *par hypothèse*
$= \int_{M_+(E)} \phi(m(f_1), ..., m(f_d)P_\infty(dm)$ *puisque*

$$\int_{\mathbb{R}^d} exp(-\sum_{j=1}^{d} t_j x_j)P_n^{f_1,\dots,f_d}(dx) = \psi_{P_n}(\sum_{j=1}^{d} t_j f_j)\ \text{ et }\ \text{que} \sum_{j=1}^{d} t_j f_j \in C_K^+(E)$$

La famille A *de toutes les fonctions réelles sur* $M_+(E)$ *de la forme* $m \mapsto \phi(m(f_1), ..., m(f_d))$ *obtenue lorsque* $(f_1, ..., f_d)$ *parcourt les suites finies de* $C_K^+(E)$ *et lorsque* ϕ *parcourt les fonctions continues bornées sur* $\mathbb{R}^d$ *constitue une sous algèbre de l'algèbre* $C_b(M_+(E))$ *des fonctions continues bornées sur* $M_+(E)$*. De plus, cette sous algèbre sépare les points de* $M_+(E)$ *car si* m_1, m_2 *sont deux éléments distincts de* $M_+(E)$*, il existe au moins une fonction* $f \in C_K^+(E)$ *telle que* $m_1(f) \neq m_2(f)$ *et une fonction continue bornée* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $\phi(m_1(f) \neq \phi(m_2(f))$*. Le théorème de* Stone-Weierstrass*(voir appendice) montre alors pour tout compact* K *de* $M_+(E)$*, la sous algèbre de* $C(K)$ *formée par les restrictions à* K *des fonctions de* A *est dense pour la norme* sup *dans* $C(K)$*. Par conséquent,* K *étant fixé, pour toute fonction* $F \in C_b(M_+(E))$*, il existe une suite de fonctions* F_P $(p \in \mathbb{N})$ *dans* A *telle que en tronquant les fonctions* ϕ_P *intervenant dans la définition des* F_p *par* $\sup_{M_+(E)} \mid F(m) \mid$*, nous pouvons supposer que la suite* $(F_p, p \in \mathbb{N})$*, approchant* F

sur K *est telle que :* $\sup_{M_+(E)} \mid F_P(m) \mid \leq \sup_{M_+(E)} \mid F(m) \mid$. *En considérant*

$$K_\varepsilon = \{m \in M_+(E)/m(g_k) \leq a_k, k \in \mathbb{N}\}$$

où $(g_k)_k$ *est une suite dans* $C_K^+(E)$ *croissant vers* 1 *et* $(a_k)_k \subset \mathbb{R}_+$ *alors* $P_n(K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$ *cela permettra d'achever la démonstration puisque*

$\mid \int F dP_n - \int F dP_\infty \mid \leq \mid \int F_P dP_n - -F_p \mid dP_\infty \mid + \int \mid F - F_p \mid dP_n + \int \mid F - F_p \mid dP_\infty \leq \mid \int F_p dP_n - \int F_p dP_\infty \mid + 2\sup_{K_\varepsilon} \mid F(m) - F_p(m) \mid + 4\varepsilon \sup_{M_+(E)} \mid F(m) \mid$.

Théorème 3.5.4 *[30]*
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_t, t \in \mathbb{R}))$ *un flot stationnaire et* N *une mesure aléatoire du second ordre d'espace de Palm* $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{Q}, (\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{Z}))$. *Notons par* (P_N)*(resp,* $\widehat{Q}$*) la loi de* N *sous* P*(resp,* $\widehat{Q}$*). Alors, si la probabilité* P *est fortement* N*-mélangeante,* $\tau_x \circ (\widehat{Q}_N)$ *converge étroitement vers* $(P)_N$ *lorsque* $x \to \pm\infty$.

Preuve 5 *Il suffit de montrer que pour toute fonction positive* $b \in C_K(\mathbb{R})$*, on a :* $B(x) = \int \exp(-N(\theta_x\omega, b)\widehat{P}_N(d\omega)) \xrightarrow[x \longrightarrow \pm\infty]{} . \int \exp(-N(\omega, b))P(d\omega)$.
Pour toute fonction positive $a \in L^1(m_0)$*, telle que* $\int a dm_0 = 1$*, on a :*
$a * B(x) = \int a(-t)\exp(-N(\theta_{x+t}(\omega), b)dt\widehat{P}_N(d\omega)) = \int N(\omega, a)\exp(-N(\theta_x(\omega, b))P(d\omega)$
et par définition de la propriété de N*- mélangeant fort, on a :*
$a * B(x) \xrightarrow[x \longrightarrow \pm\infty]{} \lambda_N . \int \exp(-N(\omega, b))P(d\omega)$.
Il ne reste plus qu'à démontrer que la fonction B *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$*, pour déduire le résultat du théorème à partir de la dernière limite.*
$\mid B(x) - B(y) \mid \leq \int \mid \exp(-N(\theta_x\omega, b) - \exp(-N(\theta_y\omega, b \mid \widehat{P}_N(d\omega)$
$\leq \int \mid N(\theta_x\omega, b) - N(\theta_y(\omega), b) \mid \widehat{P}_N(d\omega)$
$\leq \int \mid b(t-x) - b(t-y) \mid \sigma_N(dt)$ *d'où* $\mid B(x) - B(y) \mid \leq 2\sup \sigma_N(t+K)\omega(b, \mid x-y \mid)$ *où* K *est le support de* b *et* $\omega(b, .)$ *est le module de continuité de* b.
Comme $\sup\{\sigma_N(t+K), t \in \mathbb{R}\} < +\infty$. *On a l'uniforme continuité de* B.

Convergence vague-étroite sur $M_+^b(\mathbb{R} \times F)$

Définition 3.5.5 *:*
La suite $(m_n)_n$ *de mesures marquées sur* $\mathbb{R} \times F$ *est dite converger* ***vaguement- étroitement*** *vers la mesure* m *ssi* $\forall f \in C_K^b(\mathbb{R} \times F)$ *ensemble des fonctions définies sur* $\mathbb{R} \times F$ *continues bornées et à support compact par rapport à la première coordonnée, on a* $\lim_{n \to +\infty} m_n(f) = m(f)$

Notons par $M_+(E\times F)$ l'espace des mesures de Radon positives définies sur E à marques dans F et $M_+^b(E\times F)$ l'espace des mesures de Radon sur $E\times F$, bornées sur F.

Lemme 3.5.6
Soient μ_k, des mesures de $M_+^b(E\times K)$, $\mu\in M_+^b(E\times K)$, alors
$\mu_n \longrightarrow \mu$ vaguement étroitement si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\mu_n \longrightarrow \mu$ *vaguement*

2. $\forall f\in C_K(E),\ \mu_k(f\otimes 1_F)\longrightarrow \mu(f\otimes 1_F)$

Théorème 3.5.7 *[23] : La généralisation du théorème 3.5.3 Soit $(P_k, k\in\mathbb{N})$ et P des probabilités sur $M_+(E\times F)$. Si $\forall f\in C_K^b(E\times F), f\geq 0, \lim_k\int_M P_k(d\mu)\exp(-\mu(f))$ $=\int_M P(d\mu)\exp(-\mu(f))$. Alors, quand $k\to+\infty$, $(P_k)_k$ converge étroitement vers P lorsque $M_+^b(E\times F)$ est muni de la topologie de la convergence vague-étroite.*

La démonstration de ce théorème nécessite les trois lemmes suivants :

Lemme 3.5.8 *:*
Soient $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. La suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si et seulement si de toute sous suite (X_{n_j}) on peut extraire une sous suite $(X_{n_{jk}})$ convergeant vers X.

Lemme 3.5.9
Soient $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires positives et intégrable et X une variable aléatoire positive et intégrable, si : $\underline{\lim}X_n\geq X$ P p.s et si $\lim_n E(X_n)=E(X)$
Alors : $\lim_n X_n = X$ dans L^1

Lemme 3.5.10 *Soient $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires positives et X une variable aléatoire positive. Si $\underline{\lim}X_n\geq X$ P p.s et(X_n) converge en loi vers X, alors (X_n) converge en probabilité vers X*

Preuve 6 *$M_+(E\times F)$ muni de la topologie de la convergence vague est un espace métrisable séparable et $(P_k)_k$ converge étroitement vers P pour cette topologie.*
D'après Pollard ([82]), il existe un espace $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et des variables $(X_k,k\in\mathbb{N})$ et X

à valeurs dans $M_+(E\times F)$ *telles que :* $X_k \xrightarrow{Pp.s} X$ *pour la topologie de la convergence vague,* X_k *étant de loi* P_k *et* X *de loi* P. *Donc :* $\exists \Omega' \in \mathscr{A}, P(\Omega') = 1, \forall \omega \in \Omega', \forall f \in C_K(E\times F) \lim_k X_k(\omega)(f) = X(\omega)(f)$. *Par hypothèse, pour tout* $f \in C_K^b(E\times F), f \geq 0$, $X_k(f)$ *converge en loi vers* $X(f)$, *puisque* $E(\exp^{-\lambda X_k(f)}) = \int P_k(dm)\exp^{-\lambda.m(f)} \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{} \int P(dm)\exp^{-\lambda m(f)} = E(\exp(-\lambda X(f)))$. *Si* $f \in C_K^b(E\times F), f\geq 0$ *et si* $g \in C_K(E\times F), 0 \leq g \leq f \leq 0$, *on a :* $X(g) = \lim X_k(g) \leq \lim_k \inf X_k(f)$ *donc,* $X(f) \leq \liminf X_k(f)$ *et donc grâce au lemme* 3.5.10, $X_k(f)$ *converge vers* $X(f)$ *en probabilité . On peut, par le procédé diagonal, choisir une suite d'entiers* $(n_j)_j$ *telle que, il existe* $\Omega'' \in \mathscr{A}, P(\Omega'') = 1$. $\forall f_p \in C_K(E)$ *tq* $f_p(x) = 1$ *si* $x \in L_p$ *où* $(L_p)_p \nearrow E$. $\forall \omega \in \Omega'', \forall p \in \mathbb{N}$, $(X_n)_j(\omega)(f_p\otimes 1_F) \to X(\omega)(f_p \otimes 1_F)$ *et donc grace au lemme 3.5.6* $\forall f \in C_K^b(E\times F), f\geq 0, X_{n_j}(\omega)(f) \xrightarrow[j\longrightarrow+\infty]{} X(\omega)(f)$. *De toute suite d'entiers, on peut extraire une sous suite possédant cette dernière propriété. Donc, si* $F : M \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue bornée pour la convergence vague-étroite, de toute sous suite de* $E(f(X_k))$, *on peut extraire une sous suite convergeant vers* $E(F(X))$ *et donc* $\lim_k E(F(X_k)) = E(F(X))$.

3.5.2 Généralisation du théorème 3.5.4

Théorème 3.5.11 *[23] Soit* N *une mesure aléatoire sur* $\mathbb{R}$ *à marques dans* F *stationnaire du second ordre définie sur un flot stationnaire réel* $(\Omega, \mathscr{A}, P\ ,(\theta_t, t\in\mathbb{R}))$, $\widehat{Q}$ *la probabilité de Palm,* $(P)_N$, $(\widehat{Q})_N$ *la loi de* N *respectivement sous* P *et sous* $\widehat{Q}$. *Si* (P,θ) *est mélangeant, alors* $\tau_x^{-1}\circ(\widehat{Q})_N$ *converge étroitement vers* $(P)_N$ *quand* $x\to\pm\infty$, $M_+^b(E\times F)$ *étant muni de la topologie de la convergence vague- étroite.*

3.5.3 Une conséquence de la convergence étroite des processus ponctuels

Soient

$$m_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b^n_{s^n_k}\delta_{t^n_{s^n_k}} \otimes \delta_{(s^n_{k+1}-s^n_k,((a^n_i,b^n_i),s^n_k<i\leq s^n_{k+1}))}$$

$$m = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_{s_k}\delta_{t_{s_k}} \otimes \delta_{(s_{k+1}-s_k,((a_i,b_i),s_k<i\leq s_{k+1}))}$$

Nous allons montrer que que si $m_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{vague-étroite} m$, alors :$\forall k \in \mathbb{Z}$

- $(s^n_{k+1}-s^n_k) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} (s_{k+1}-s_k)$.
- $b^n_{s^n_k} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} b_{s_k}$.
- $(a^n_i) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a_i$.

- $t^n_{s^n_k} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} t_{s_k}$.
- $b^n_i \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} b_i$.

Construction d'une fonction sur $\mathbb{R} \times \sum_{n=1}^{+\infty} \{n\} \times (\mathbb{R}^2_+)^n$ continue à support compact

Pour cela nous allons définir une fonction continue à support compact sur chaque composante de l'espace produit.

Soit ε un nombre positif non nul vérifiant : $\varepsilon < (t_{s_j} - t_{s_{j-1}}) \wedge (t_{s_{j+1}} - t_{s_j})$, $\forall j \in \mathbb{Z}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

1. Posons $g_{k,\varepsilon}(x) = \frac{1}{b_{s_k}} \left(1 - \frac{|x - t_{s_k}|}{\varepsilon}\right)_+$.
   $g_{k,\varepsilon}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue, à support compact et vérifie
   $$g_{k,\varepsilon}(t_{s_k}) = \frac{1}{b_{s_k}} \quad \text{et} \quad g_{k,\varepsilon}(t_{s_j}) = 0 \ , \ \ \forall j \neq k.$$
2. Soit $i_0 \in [s_k + 1, s_{k+1}]$ (resp., $j_0 \in [s_k + 1, s_{k+1}]$),
   $I_0 = \{i \in [s_k + 1, s_{k+1}]/a_i = a_{i_0}\}$ (resp., $J_0 = \{i \in [s_k + 1, s_{k+1}]/b_i = b_{i_0}\}$),
   i_1 , $i_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $a_{i_1} < a_{i_0} < a_{i_2}$, (resp., j_1 , $j_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $b_{j_1} < b_{j_0} < b_{j_2}$).
   On pose $\beta_{j_0} = \frac{b_{j_2} - b_{j_0}}{2} \wedge \frac{b_{j_1} - b_{j_0}}{2}$, (resp., $\delta_{i_0} = \frac{a_{i_2} - a_{i_0}}{2} \wedge \frac{a_{i_1} - a_{i_0}}{2}$)
   et $\beta = \inf_{i \in [s_k+1, s_{k+1}]} \{\beta_i\}$, $\delta = \inf_{i \in [s_k+1, s_{k+1}]} \{\delta_i\}$.
   On définit sur $(\mathbb{R}_+)^{s_{k+1}-s_k}$ deux fonctions comme suit :
   $$\begin{array}{lccc} R_{k,\delta} \ : & (\mathbb{R}_+)^{s_{k+1}-s_k} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x_{1+s_k}, \ldots, x_{s_{k+1}}) & \longmapsto & \displaystyle\prod_{i=1+s_k}^{s_{k+1}} \left(1 - \frac{|x_i - a_i|}{\delta}\right)_+ \end{array}$$
   $$\begin{array}{lccc} S_{k,\beta} \ : & (\mathbb{R}_+)^{s_{k+1}-s_k} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x_{1+s_k}, \ldots, x_{s_{k+1}}) & \longmapsto & \displaystyle\prod_{i=1+s_k}^{s_{k+1}} \left(1 - \frac{|x_i - b_i|}{\beta}\right)_+ \end{array}$$
   $R_{k,\delta}$ (resp., $S_{k,\beta}$) est continue à support compact égal à $\prod_{i=1+s_k}^{s_{k+1}} [a_i - \delta, a_i + \delta]$ (resp., $\prod_{i=1+s_k}^{s_{k+1}} [b_i - \beta, b_i + \beta]$).
3. Posons
   $$F = f_{k,\varepsilon,\delta,\beta} = g_{k,\varepsilon} \otimes \delta_{s_{k+1}-s_k} \otimes R_{k,\delta} \otimes S_{k,\beta}$$
   F est continue à support compact et vérifie :

(a) $F\Big(t_{s_j},\Big((s_{j+1}-s_j),\big((a_i,b_i),\ 1+s_j\le i\le s_{j+1}\big)\Big)\Big)=\begin{cases}\dfrac{1}{b_{s_k}} & si \quad j=k\\ 0 & si \quad j\neq k\end{cases}$

(b) $\displaystyle\int F\,dm_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int F\,dm.$

$$\begin{aligned}\int F\,dm &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_{s_j}\,F\Big(t_{s_j},\Big((s_{j+1}-s_j),\big((a_i,b_i),\ 1+s_j\le i\le s_{j+1}\big)\Big)\Big)\\ &= b_{s_k}\,F\Big(t_{s_k},\Big((s_{k+1}-s_k),\big((a_i,b_i),\ 1+s_k\le i\le s_{k+1}\big)\Big)\Big)=1\end{aligned}$$

<u>Conséquence de la convergence</u> : $\displaystyle\int F\,dm_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int F\,dm.$

(a)
- si $k\ge 1 : \exists\, N_k\in\mathbb{N},\ \forall\, n\ge N_k\ :\ t_{s_{k-1}} < t^{(n)}_{s_k(n)} \le t_{s_k}+\varepsilon$
- si $k\le 0 : \exists\, N_k\in\mathbb{N},\ \forall\, n\ge N_k\ :\ t_{s_k}-\varepsilon \le t^{(n)}_{s_k(n)} < t_{s_{k+1}}$
- sinon $t^{(n)}_{s_k(n)}\notin[t_{s_k}-\varepsilon,t_{s_k}+\varepsilon]$ et donc $g\left(t^{(n)}_{s_k(n)}\right)=0$, d'où $\displaystyle\int F\,dm_n=0$ et ne tendra pas vers 1.

(b) $\forall\, j\neq k$, $t^{(n)}_{s_k(n)}\in\big[t_{s_j}-\varepsilon,t_{s_j}+\varepsilon\big]$, or $\big[t_{s_j}-\varepsilon,t_{s_j}+\varepsilon\big]\cap[t_{s_k}-\varepsilon,t_{s_k}+\varepsilon]=\emptyset$, donc $\forall\, j\neq k$, $t^{(n)}_{s_j(n)}\notin[t_{s_k}-\varepsilon,t_{s_k}+\varepsilon]$ et donc $g\left(t^{(n)}_{s_k(n)}\right)=0,\ \forall\, n\ge N_k$.

(c)

$$\begin{aligned}\int F\,dm_n &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} b^{(n)}_{s_j(n)}\,F\Big(t^{(n)}_{s_j(n)},\Big((s^{(n)}_{j+1}-s^{(n)}_j),\big((a^{(n)}_i,b^{(n)}_i),\ 1+s^{(n)}_j\le i\le s^{(n)}_{j+1}\big)\Big)\Big)\\ &= b^{(n)}_{s_k(n)}g\left(t^{(n)}_{s_k(n)}\right)\delta_{s_{k+1}-s_k}\left(s^{(n)}_{k+1}-s^{(n)}_k\right)R_{k,\delta}\left(\vec{a}^{(n)}_i,1+s^{(n)}_k\le i\le s^{(n)}_{k+1}\right)S_{k,\beta}\left(\vec{b}^{(n)}_i\right)\end{aligned}$$

car $\forall\, j\neq k,\ g\left(t^{(n)}_{s_j(n)}\right)=0$.

I. $s^{(n)}_{k+1}-s^{(n)}_k \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} s_{k+1}-s_k$.

C'est à dire : $\exists\, N_1(k),\ \forall\, n\ge N_1\ :\ s^{(n)}_{k+1}-s^{(n)}_k \overset{(1)}{=} s_{k+1}-s_k$.

Supposons le contraire :

$\forall\, N\in\mathbb{Z},\ \exists\, n\ge N\ :\ s^{(n)}_{k+1}-s^{(n)}_k\neq s_{k+1}-s_k$.

Donc il n'existe qu'un nombre fini, soit N_0, de $s^{(n)}_{k+1}-s^{(n)}_k$ qui vérifie (1).

Soit $I=\{n_1,\dots,n_{N_0}\}$. alors : $\forall\, n\in I\ :\ s^{(n)}_{k+1}-s^{(n)}_k=s_{k+1}-s_k$. Donc $\forall\, n\ge n_{N_0}\vee N_k$,

$$\begin{aligned}\int F\,dm_n &= b^{(n)}_{s_k(n)}g\left(t^{(n)}_{s_j(n)}\right)\delta_{s_{k+1}-s_k}\left(s^{(n)}_{k+1}-s^{(n)}_k\right)R_{k,\delta}\left(\vec{a}^{(n)}_i,1+s^{(n)}_k\le i\le s^{(n)}_{k+1}\right)S_{k,\beta}\left(\vec{b}^{(n)}_i\right)\\ &=0\end{aligned}$$

or, $\displaystyle\int F\,dm_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 1$, ce qui est impossible.

Donc on a bien $s^{(n)}_{k+1}-s^{(n)}_k \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} s_{k+1}-s_k$.

II. Soit $i_0 \in [s_k+1, s_{k+1}]$, montrons que

$$a_{i_0}^{(n)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} a_{i_0} \quad \text{et} \quad b_{i_0}^{(n)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} b_{i_0}$$

Preuve :

Puisque $\forall\, n \geq n_{N_k} \displaystyle\int F\, dm_n = b_{s_k(n)}^{(n)} g\left(t_{s_k(n)}^{(n)}\right) \delta_{s_{k+1}-s_k}\left(s_{k+1}^{(n)} - s_k^{(n)}\right) R_{k,\delta}\left(\vec{a}_i^{(n)}\right) S_{k,\beta}\left(\vec{b}_i^{(n)}\right)$ et $\displaystyle\int F\, dm_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1$, nécessairement on a $\forall\, i_0 \in [s_k+1, s_{k+1}]$, $\exists\, N_{k,i_0}^1 \geq N_k$ (resp., $N_{k,i_0}^2 \geq N_k$) tel que $\forall\, n \geq N_{k,i_0}^1$, $a_{i_0} - \delta < a_{i_0}^{(n)} < a_{i_0} + \delta$, (resp., $\forall\, n \geq N_{k,i_0}^2$, $b_{i_0} < b_{i_0}^{(n)} < b_{i_0} + \beta$).

$\left(a_{i_0}^{(n)}\ ,\ n \in \mathbb{Z}\right)$, $\left(b_{i_0}^{(n)}\ ,\ n \in \mathbb{Z}\right)$ sont deux suites bornées.

De toute sous suite $\left(a_{i_0}^{(n')}\right)_{n'}$, on peut trouver une sous suite $\left(a_{i_0}^{(n'')}\right)_{n''}$ telle que $a_{i_0}^{(n'')} \xrightarrow[n'' \longrightarrow +\infty]{} \alpha_{i_0}$.

De même, $b_{i_0}^{(n'')} \xrightarrow[n'' \longrightarrow +\infty]{} \gamma_{i_0}$.

On a

$$a_{i_0} - \delta \leq \alpha_{i_0} \leq a_{i_0} + \delta \quad \text{et} \quad b_{i_0} - \beta \leq \alpha_{i_0} \leq b_{i_0} + \beta.$$

Posons : (je suppose $\alpha_{i_0} > a_{i_0}$ resp., $\gamma_{i_0} > b_{i_0}$).

$$\delta_{i_0}' = \frac{a_{i_0} + \delta - \alpha_{i_0}}{2} \wedge \frac{\alpha_{i_0} - a_{i_0}}{2} \quad \text{et} \quad \delta' = \inf_{i \neq i_0}\{\delta_i, \delta_{i_0}'\}.$$

resp.

$$\beta_{i_0}' = \frac{b_{i_0} + \beta - \gamma_{i_0}}{2} \wedge \frac{\gamma_{i_0} - b_{i_0}}{2} \quad \text{et} \quad \beta' = \inf_{i \neq i_0}\{\beta_i, \beta_{i_0}'\}.$$

On pose $F_1 = g_{k,\varepsilon} \otimes \delta_{s_{k+1}-s_k} \otimes R_{k,\delta'} \otimes D_{k,\beta}$.

$$\int F_1\, dm_{n''} \xrightarrow[n'' \longrightarrow +\infty]{} \int F_1\, dm = 0 \quad \text{puisque} \quad R_{k,\delta'}(\vec{a}_i) = 0.$$

Or : $\forall\, n \geq N_k$,

$$\begin{aligned}
\int F_1\, dm_{n''} &= b_{s_k(n'')}^{(n'')} \cdot g_{k,\varepsilon}\left(t_{s_k(n'')^{(n'')}}\right) \cdot R_{k,\delta'}\left(\vec{a}_i^{(n'')}\right) \cdot S_{k,\beta}\left(\vec{b}_i^{(n'')}\right) \cdot \delta_{s_{k+1}-s_k}\left(s_{k+1}^{(n'')} - s_k^{(n'')}\right) \\
&\geq \min_{x \in]t_{s_k}-\varepsilon, t_{s_k}+\varepsilon[}\left\{g(x)\right\} \cdot b_{s_k(n'')}^{(n'')} \cdot R_{k,\delta'}\left(\vec{a}_i^{(n'')}\right) \cdot S_{k,\beta}\left(\vec{b}_i^{(n'')}\right) \delta_{s_{k+1}-s_k}(s_{k+1}^{n''} - s_k^{n''}) \\
&\xrightarrow[n'' \longrightarrow +\infty]{} \gamma_{s_k} \cdot \inf_{x \in]t_{s_k}-\varepsilon, t_{s_k}+\varepsilon[}\left\{g(x)\right\} \neq 0
\end{aligned}$$

impossible, donc nécessairement $\alpha_{i_0} = a_{i_0}$.

De même, on montre que $\gamma_{i_0} = b_{i_0}$ en considérant $F_2 = g_{k,\varepsilon} \otimes \delta_{s_{k+1}-s_k} \otimes R_{k,\delta} \otimes D_{k,\beta'}$.

III. $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $t_{s_k(n)}^{(n)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} t_{s_k}$, à condition t_{s_0}

Puisque $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $\exists\, N_k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\forall\, n \geq N_k$ on a

$$\text{si} \quad k \leq 0 \quad : \quad t_{s_k} - \varepsilon \leq t^{(n)}_{s_k(n)} < t_{s_{k+1}} \quad et \quad t_{s_0} - \varepsilon \leq t^{(n)}_{s_0(n)} < 0$$

$$\text{si} \quad k \geq 0 \quad : \quad t_{s_{k-1}} < t^{(n)}_{s_k(n)} \leq t_{s_k} + \varepsilon \quad et \quad 0 < t^{(n)}_{s_1(n)} \leq t_{s_1} + \varepsilon$$

$\left(t^{(n)}_{s_k(n)}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite bornée donc de toute sous suite $\left(t^{(n')}_{s_k(n')}\right)_{n'\in\mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous suite $\left(t^{(n'')}_{s_k(n'')}\right)_{n''\in\mathbb{Z}}$ telle que : $t^{(n'')}_{s_k(n'')} \xrightarrow[n''\longrightarrow+\infty]{} \alpha_k$.

Nous avons : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, k \in \mathbb{Z},\ \forall\, n \geq N_k,\ \begin{cases} t^{(n)}_{s_k(n)} \leq t_{s_k} + \varepsilon & \text{si} \quad k > 0 \\ t^{(n)}_{s_{(-k)}(n)} \geq t_{s_{(-k)}} - \varepsilon & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}$

On en déduit que

1. $\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \alpha_k \leq \alpha_{k+1}$.
2. $\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \forall\, \varepsilon > 0 : \begin{cases} \alpha_k \leq t_{s_k} + \varepsilon & \text{si} \quad k > 0 \\ \alpha_(-k) \geq t_{s_{-k}} - \varepsilon \end{cases}$

   donc $\begin{cases} \alpha_k \leq t_{s_k} & \text{si} \quad k > 0 \\ \alpha_k \geq t_{s_{-k}} \end{cases}$

Montrons que $\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \alpha_k = \alpha_{s_k}$.

Supposons que $\alpha_k > t_{s_k}$. Soit $\varepsilon' = \dfrac{\alpha_k - t_{s_k}}{2} \wedge \dfrac{t_{s_{k+1}} - \alpha_k}{2}$ et

$g'_{\varepsilon,\alpha_k}(x) = \dfrac{1}{b_{s_k}}\left(1 - \dfrac{|x - \alpha_k|}{\varepsilon'}\right)_+$, on a bien $g'_{\varepsilon,\alpha_k}(\alpha_k) = 1$ et $g'_{\varepsilon,\alpha_k}(t_{s_j}) = 0$, $\forall\, j \in \mathbb{Z}$.

Posons $F' = g'_{\varepsilon,k} \otimes \delta_{s_{k+1}-s_k} \otimes R_{k,\delta} \otimes D_{k,\beta}$.

donc $\displaystyle\int F'\, dm = 0$.

F' est continue à support compact, donc $\displaystyle\int F'\, dm_{n''} \xrightarrow[n''\longrightarrow+\infty]{} \int F\, dm = 0$.

Or :

$$\begin{aligned} \int F'\, dm_{n''} \quad &\geq \quad b^{(n'')}_{s_k(n'')} \cdot g_{k,\varepsilon'}\left(t^{(n'')}_{s_k(n'')}\right) \cdot \delta_{s_{k+1}-s_k}\left(s^{(n'')}_{k+1} - s^{(n'')}_k\right) \cdot R_{k,\delta}\left(\vec{a}^{(n'')}_i\right) \cdot S_{k,\delta}\left(\vec{b}^{(n'')}_i\right) \\ &\xrightarrow[n''\longrightarrow+\infty]{} 1 \end{aligned}$$

Impossible, d'où : $\alpha_k = \alpha_{s_k},\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion : Les théorèmes classiques de la théorie du renouvellement sont :

- le théorème 3.1.6 dont la généralisation est donnée par le théorème 3.4.1, et le théorème de Smith qui correspond au théorème 3.2.2, qui est un théorème de convergence étroite des processus régénératifs, son extension est donnée par le théorème 3.5.4.

- Le théorème 3.5.11 est la plus puissante généralisation du théorème de Smith au sens où son application porte sur une large famille de processus comme on le verra au paragraphe 6.2 du chapitre six.

Chapitre 4

Existence, finitude et unicité du régime stationnaire de quelques files d'attente.

Introduction :

Ce chapitre est consacré aux constructions du régime stationnaire de quelques files. Nous présentons deux résultats permettant la construction du régime stationnaire des files d'attente l'un du à J.Neveu et l'autre plus générale du à Loynes 4.5.1. Nous commençons d'abord par énoncer le résultat de Neveu 4.0.12, nous donnons les conséquences de ce résultat puis dans la deuxième partie nous énonçons le résultat de Loynes et l'appliquons au cas des files à temps d'attente borné pour montrer l'existence du régime stationnaire.

la proposition de Neveu : hypothèses, énoncé, applications.

Soit $N = \sum_{n\in\mathbb{Z}} B_n\delta_{T_n}$ la mesure aléatoire sur $\mathbb{R}$ du premier ordre, définie sur le flot $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$ dont l'espace de Palm associé est $\Big(\widehat{\Omega}, \hat{\mathscr{A}}, \widehat{\mathbb{P}}, (\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{Z})\Big)$ et où $B_n : \widehat{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ représente le service réclamé par le n$^{i\grave{e}me}$ client arrivé à l'instant T_n, la suite $(\ T_n\ )_{n\in\mathbb{Z}}$ est choisie telle que $T_0 \leq 0 < T_1$ avec $\lim_{n\to+\infty} T_n = \pm\infty$

Le flot $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$ est supposé ergodique et la mesure N est supposée stationnaire d'intensité i_N finie non nulle. Soit $(D(t), t \in \mathbb{R})$ une fonction aléatoire réelle positive stationnaire par le flot.

Proposition 4.0.12 *[75]*

Si $i_N < E\left(D\left(.\right)\right)$, il existe sur $\big(\Omega, \mathscr{A}\big)$ une fonction aléatoire notée W cadlag, stationnaire *pour θ unique telle que :*

$$dW(t) + D(t)1_{\{W(t)>0\}}dt = dN(t), \ \ sur\, \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Si $i_N = E\left(D\left(.\right)\right)$ et s'il existe une solution W de 4.1, les fonctions aléatoires $W(.) + C$, où C est une constante, sont toutes des solutions de (4.1)*. Ce cas correspond à une situation de saturation du (resp, des) serveur (resp, serveurs).*
Si $i_N > E\left(D\left(.\right)\right)$ l'équation (4.1) *n'a pas de solutions.*

Dans la suite, on appliquera cette proposition pour construire le régime stationnaire des files suivantes :
file $G/G/1$, $G/G/q$ et un système à une seule file avec plusieurs classes de clients.

4.1 la file G/G/1

Dans le cas d'une file à un serveur, la fonction D est identiquement égale à 1. Soit $u \in \mathbb{R}$ et W_u la fonction aléatoire nulle sur $]-\infty, u[$ et solution de (4.9) sur $[u, +\infty[$, W_u vérifie :

$$W_u(t) = W_u(s) + N([s,t[) - \int_s^t 1_{\{W_u(\,\ell\,)>0\}}\, d\ell \text{ avec } u < s < t; \tag{4.2}$$
$$\text{et } \ W_u(t) = 0 \ \text{ si } \ t \leq u.$$

Si $(T_n^u)_n$ représente la suite des instants d'arrivée après l'instant u, pour tout $t \geq u$, il existe un entier n tel que $T_n^u \leq t < T_{n+1}^u$.
Le client arrivé à l'instant T_n^u quitte le système à l'instant $T_n^u + W_u(T_n^u - 0) + N(\left(\left[T_n^{(u)}, t\right[\right)\right)$.
Par conséquent la charge du serveur est strictement positive dans l'intervalle de temps $\left[T_n^{(u)},\ T_n^{(u)} + W_u\left(T_n^{(u)}\right) + N\left(\left[T_n^{(u)}, t\right[\right) \wedge t\right]$, puisqu'il y a au moins un client dans le système.
L' équation précédente devient :

$$\begin{aligned} W_u(t) &= W_u(s) + N([s,t[) - \int_{T_n^u}^{T_n^u + W_u(T_n^u - 0) + N([T_n^u, t[) \wedge t)} du \qquad (4.3) \\ &= (W_u(s) + N([s,t[) - (t - T_n^u)) \vee 0. \end{aligned}$$

Posons $W_n^u = W_u(T_n^u)$ et choisissons $t = T_{n+1}^u$

donc l'équation (4.3), s'écrit :

$$W_{n+1}^u = (W_n^u + N([T_n^u, T_{n+1}^u[) - (T_{n+1}^u - T_n^u))_+. \tag{4.4}$$

Cette formule étant valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en remplaçant dans l'équation (4.3), W_n^u par son expression en fonction de W_{n-1}^u , on obtient

$$W_n^u(t) = \left(W_{n-1}^u + N\left(\left[T_{n-1}^u, t\right[\right) - \left(t - T_{n-1}^u\right)\right) \vee \left(N\left([T_n^u, t[\right) - (t - T_n^u)\right) \vee 0$$

En réitérant ce procédé, on trouve :
$W_n^u(t) = \left(W_{n-k}^u + N\left(\left[T_{n-k}^{(u)}, t\right[\right) - \left(t - T_{n-k}^u\right)\right) \vee \max_{n-k \le j \le n} \left(N\left(\left[T_{j+1}^u, t\right[\right) - \left(t - T_{j+1}^u\right)\right),$
en choisissant $k = n - 1$ dans la dernière formule et vu que $W_1^u = 0$, on obtient :
$W_u(t) = \max_{0 \le j \le n} \left(N\left(\left[T_{j+1}^u, t\right[\right) - \left(t - T_{j+1}^u\right)\right)$,
nous remarquons que ce maximum peut être pris sur un ensemble plus grand, soit $\{N([s, t[) - (t - s)$, s parcourt $[u, t]\}$, car la mesure N est croissante et tout élément de l'intervalle $[u, t]$ est encadré par deux instants d'arrivée. Par conséquent

$$W_u(t) = \sup_{u \le s \le t} \{N([s, t[) - (t - s)\}.$$

La famille des fonctions aléatoires $(W_u(t))_u$ croit quand u décroit vers $-\infty$, de plus $W_u(t) = W_{u-t}(0) \circ \theta_t$ qui se montre grâce à la stationnarité de la mesure N.
Posons $W_\infty(t) = \lim\limits_{u \downarrow -\infty} W_u(t)$.
W_∞ est la plus petite solution de (4.1), à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, et qui vérifie :

$$W_\infty(t) = \sup_{s \le t} \{N([s, t[) - (t - s)\} \tag{4.5}$$

et satisfait la propriété de stationnarité $W_\infty(t) = W_\infty(0) \circ \theta_t$.
Montrons que $W_\infty(0) < +\infty$ $\mathbf{P}$ $p.s.$
W_∞ étant solution de (4.1) vérifie : $W_\infty(t) = (W_\infty(0) + N([0, t[) - t)_+$.
Comme N est une mesure de Radon, on a forcément :
$\{W_\infty(t) = +\infty\} = \{W_\infty(0) = +\infty\}$, d'où l'événement $\{W_\infty(0) = +\infty\}$ est invariant. Le flot étant supposé ergodique, tout évènement invariant par le flot est de probabilité 0 ou 1. D'autre part, en remplaçant dans (4.3) t par 1 et s par 0, on a :
$W_u(1) - W_u(0) = N([0, 1[) - \int_0^1 1_{\{W_u(s) > 0\}} ds$, comme $W_u(0) \le u$ et le flot est ergodique, on a $E(W_u(1)) = E(W_{u-1}(0) \circ \theta_1) = E(W_{u-1}(0)) \ge E(W_u(0))$, car $W_u(t)$ croit quand $u \downarrow -\infty$. Il en résulte que $\int_0^1 E(1_{\{W_u(s) > 0\}}) ds \ge \le E(N([0, 1[)) = i_N$; le passage à la limite sur u donne $\mathbf{P}(W_\infty(s) > 0) \le i_N$.
Si $W_\infty(0) = +\infty$ $\mathbf{P}$ $p.s$ alors $W_\infty(0) > 0$ $\mathbf{P}$ $p.s$, il s'en suit que $i_N \ge 1$.

Donc si $i_N < 1$, on a bien $W_\infty < +\infty$ $\mathbf{P}$ $p.s.$
Montrons l'unicité de la solution de (4.1) . Soit W une autre solution de (4.1) , comme W_∞ et W sont toutes deux solutions de (4.1), on a : $W_\infty \circ \theta = (W_\infty + B - A)_+$ et $W \circ \theta = (W + B - A)_+$, et grâce à l'inégalité suivante $\left|(x-y)_+ - (z-y)_+\right| \leq |(x-z)|$, on a bien $|W \circ \theta - W_\infty \circ \theta| = W \circ \theta - W_\infty \circ \theta \leq W - W_\infty$.
Sur un flot ergodique, les fonctions invariantes par le flot sont des fonctions presque sûrement constantes, donc $W = W_\infty + C$ avec $C \geq 0$. Supposons $C > 0$ alors $W(t) > 0$, donc $W(t) - W(0) = N(]0,t]) - t$, comme l'espérance de $W(t) - W(0)$ est nulle, on obtient $i_N = E(N(]0,t])) - t$=0, d'où $i_N = 1$ contradiction avec l'hypothèse de départ, d'où l'unicité.
Dans toute la suite, le régime stationnaire de la file $G/G/1$ sera noté W, il vérifie la relation suivante :
$W(t) = (W(T_n - 0) + B_n - (t - T_n))_+$ si $T_n \leq t < T_{n+1}$.
Posons $U_n = W(T_n - 0)$ sur $\hat{\Omega}$. La suite $(U_n)_n$ représente le processus des temps d'attente en régime stationnaire et vérifie la relation de récurrence suivante : $U_{n+1} = (U_n + B_n - A_{n+1})_+$

Théorème 4.1.1 *Sous la condition $E(N[0,1[) < 1$, la file $G/G/1$ possède un régime stationnaire unique.*

4.2 Une seule file avec plusieurs classes de clients.

(voir [75])

Si $N_1, ..., N_k$ sont k mesures alétoires définies par $N_j = \sum_{n\in\mathbb{Z}} B_n^j \delta_{T_n^j}$ représentant les demandes de service des clients appartenant aux différentes classes tel que B_n^j représente le service réclamé par le n^{ème} client de la j^{ème} classe. On suppose qu'un client de la classe j est prioritaire sur un client de la classe k si $j < k$.

La solution stationnaire W^1 correspondant à N_1 est solution de l'équation (4.1) lorsque $D \equiv 1$, donne à chaque instant la charge en régime stationnaire associée à la première classe, la variable W^1 existe et est unique lorsque $i_1 = E(N^1[0,1[) < 1$.
la solution stationnaire W^2 correspondant à N_2 est la solution de l'équation (4.1) lorsque

$D(t) = 1_{\{W^1\ (t)\ =\ 0\}}$ donne la charge en régime stationnaire associée à la deuxième classe lorsque $i_2 = E(N_2[0,1[) < E(D^2(t) = P(W^1(t) = 0) = 1 - i_1$. Pour que W^1 etW^2 existent il faut que $i_1 + i_2 < 1$.
À la jième étape, la solution W^jpour $D^j = 1_{\{W^1=0, W^2=0, \dots, W^{j-1}=0\}}$ et $N = N^j$ donne la charge stationnaire associée à la jième classe lorsque $i_j = E(N^j([0,1[)) < E(D^j(t)) = P(W^1(t) = 0, \dots, W^{j-1}(t) = 0) = 1 - (i_1 + i_2 + \dots i_{j-1})$

Théorème 4.2.1 *Un système d'attente à une seule file et plusieurs classes possède un unique régime stationnaire lorsque* $\sum_{k=1}^{n} i_k < 1$.

4.3 un système de files G/G/1 en cascade

Lemme 4.3.1 *Etant donné une mesure aléatoire N définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_t, t \in \mathbb{R}))$ d'espace de Palm $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{P}, (\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{Z}))$. Pour toute variable aléatoire réelle S définie sur $\widehat{\Omega}$ telle que $S \circ \widehat{\theta} - S$ soit $\widehat{P}$ intégrable, l'image $N_S(\omega, .)$ de $N(\omega, .)$ par l'application $t \longrightarrow t + S \circ \theta_t$ (S est prolongé de manière arbitraire à Ω), soit $N_s = \sum B_n \delta_{T_n + S \circ \theta_{T_n}}$ est une mesure aléatoire stationnaire par le flot $(\theta_t)_t$, de même intensité i_N que N, d'espace de Palm $\theta_S(\widehat{\Omega})$ et de mesure de Palm $\theta_S(\widehat{P})$.*

Lemme 4.3.2 *Si le flot $(\Omega, \mathscr{A}, \widehat{P}, (\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{Z}))$ est stationnaire, pour toute variable X positive telle que $X - X \circ \theta$ soit intégrable on a $E(X - X \circ \theta) = 0$.*

On suppose le système composé de q files en série, le client n°n arrive à l'instant T_n^1 et réclame dans les q files les services $B_n^1, B_n^2, \dots, B_n^q$. Posons $N^1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{T_n^1}$ et $N_1(\omega, ds) = B_0^1(\theta_s(\omega)) N^1(\omega, ds)$. Notons par i_1 l'intensité associée à N_1 si $i_1 < 1$, l'équation $dW(t) + 1_{\{W(t)>0\}} dt = dN_1^1(t)$ possède une solution unique stationnaire $\widehat{P} p.s$ finie soit W^1.
Posons $U_n^1 = W^1(T_n)$ sur $\{T_0^1 = 0\}$, et $N^2 = \sum \delta_{T_n^1 + U_n^1 + B_n^1}$, et
$N_2(\omega, ds) = B_0^2(\theta_s(\omega)) N^2(\omega, ds)$ d'intensité i_2. Si $i_2 < 1$, alors l'équation
$dW(t) + 1_{\{W(t)>0\}} dt = dN_2(t)$ possède une solution unique finie $\widehat{P} p.s$ stationnaire notée W^2. Posons $U_n^2 = W^2(T_n^2)$ où $T_n^2 = T_n^1 + U_n^1 + B_n^1$.
A la j^{ème} étape, l'instant d'entrée dans la j^{ème} file du client arrivé à l'instant T_n^1 au système est noté T_n^j et est égal à $T_n^1 + \sum_{l=1}^{j-1} U_n^l + B_n^l$. Posons $N^j = \sum \delta_{T_n^j}$ et $N_j(\omega, ds) = B_0^j(\theta_s(\omega)) N^j((\omega), ds)$, $i_j = E(N_j(]0,t]))$.
Si $i_j < 1$, alors l'équation $dW(t) + 1_{\{W(t)>0\}} dt = dN_j(t)$ admet une solution unique finie

$\widehat{P}p.s$ notée W^j.

Théorème 4.3.3
Si pour tout $j = \overline{1,q}$, on a $E(N_j([0,1[)) < 1$, alors le système d'attente à q files $G/G/1$ en série possède un unique régime stationnaire noté $\overrightarrow{W} = (W^1, ..., W^q)$ où pour tout $j = \overline{1,q}$, W^j est la solution de l'équation 4.1 pour $N = N_j$ et $D(t) = 1$.

4.4 Un système à une seule file et q serveurs identiques

(voir par exemple : [22], [75]). Dans ce cas $D(t)$ prend des valeurs entières et représente le nombre de serveurs disponibles à chaque instant lorsque le travail est constamment divisé entre les q serveurs.
On note $W = (W^i, 1 \leq i \leq q)$ le vecteur des charges des q serveurs juste avant l'instant 0 assurant la demande N. W vérifie $W^i \circ \hat{\theta} = (W^i + B.1_{A^i} - A)_+ , i \in \{1, ..., q\}$.
Sur l'évènement A^i , sous ensemble de $\widehat{\Omega}$, le serveur numéro i sert le client numéro 0 quand ce dernier arrive à l'instant $T_0 = 0$, pour tout $i \in \{1, ..., q\}$.
Les $(A^i)_{i=1}^q$ sont des événements inclus dans $\hat{\Omega}$ deux à deux disjoints.
Nous supposons la discipline PAPS donc chaque client se dirige vers le (ou l'un des) serveur (serveurs) le moins chargé à son instant d'arrivé, ce qui équivaut à $W^i = \min\limits_j W^j$ sur $A^i, i \in \{1, ..., q\}$

Problème : le système

$$\begin{cases} W^i \circ \hat{\theta} & = (W^i + B.1_{A^i} - A)_+ \quad \forall i \in [1, q] \\ W^i = & \min\limits_{1 \leq j \leq q} (W^j) \qquad\qquad \text{sur } \ A^i. \end{cases}$$

possède t-il des solutions ? Si oui, sont elles finies et y a t-il unicité de la solution ?
Définissons le vecteur ordonné des charges des q serveurs juste avant l'arrivée du client numéro 0 par $V = R(W)$ où $R : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$ Application $(x_1, ..., x_q) \mapsto \left(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_q}\right)$ tel que $x_{i_1} \leq ... \leq x_{i_q}$.
Le système précédent devient équivalent à l'équation

$$V \circ \hat{\theta} = R(\ (V^i + B\delta_{i_1} - A \ ))_+, i = \overline{1,q} \text{ sur } \ \hat{\Omega}. \tag{4.6}$$

Proposition 4.4.1

Si $\int Bd\hat{P} < q\int Ad\hat{P}$, *l'équation* (4.6) *possède une solution ps finie minimale de plus* $\hat{P}\left(V^1 = 0\right) \neq 0$ *et* $\hat{P}\left(V^q < V^1 + B\right) \neq 0$.

Preuve

Nous donnons d'abord le lemme technique suivant :

Lemme 4.4.2

- *L'application* R *est croissante.*
- $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^q)^2, \|R(x) - R(y)\| \leq \|x - y\|$.
- $\|x_+ - y_+\| \leq \|x - y\|$

Posons $V_n = V \circ \hat{\theta}_n$ et $M_n = W_n^0 \circ \hat{\theta}^{-n}$

la suite $(M_n)_n$ vérifie :

$M_0 = 0$

$$M_{n+1} \circ \hat{\theta}_1 = W_{n+1} \circ \widehat{\theta}^{-n-1} \circ \widehat{\theta} = R((W_n + B_{n+1}f_1 - A_{n+1}e_1)_+ \circ \widehat{\theta}^{-n})$$

$$= R(W_n \circ \widehat{\theta}^{-n} + B_1 f_1 - A_1 e_1)_+ = R(M_n + B_1 f_1 - A_1 e_1)_+$$

où $f_1 = (1, 0, ..., 0)$ et $e_1 = (1, ..., 1)$.

La suite $(M_n)_n$ est croissante et croit vers une variable $V_\infty = (V_\infty^1, ..., V_\infty^p)$ à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+^q$ qui est la solution minimale de (4.6).

Montrons que les événements $\{V_\infty^1 = +\infty\}$ et $\{V_\infty^q = +\infty\}$ sont invariants.

Nous avons $0 \leq V_\infty^1 \leq V_\infty^2 \leq ... \leq V_\infty^q$ et

$$V_\infty^1 \circ \theta = \left(V_\infty^1 + B_1 - A_1\right)_+ \wedge \left(V_\infty^2 - A_1\right)_+ \text{ et } V_\infty^q \circ \theta = \left(V_\infty^1 + B_1 - A_1\right)_+ \vee (V_\infty^q - A_1)_+,$$

donc $\{V_\infty^1 = +\infty\} = \{V_\infty^1 \circ \theta = +\infty\}$ et $\{V_\infty^q \circ \theta = +\infty\} = \{V_\infty^q = +\infty\}$ donc les événements $\{V_\infty^1 < +\infty\}$, et $\{V_\infty^q < +\infty\}$ sont de probabilité 0 ou 1.

Supposons $V_\infty^1 < +\infty$ $\widehat{P}$ p.s, et $V_\infty^q = +\infty$ $\widehat{P}$ p.s .

Comme

$$M_{n+1}^q \circ \hat{\theta} = (M_n^q - A_1)_+ \vee (M_n^1 + B - A_1)_+ \text{ et } M_n^q \leq M_{n+1}^q$$

on a :

$(M_n^1 - M_n^q + B_1 - A) \vee (-A_1) \geq 0$, et donc $(M_n^1 - M_n^q + B_1) \vee 0 \geq A_1$ ce qui implique que $\int A_1 \leq \int ((M_n^1 - M_n^q + B_1) \vee 0, \forall n$, en faisant tendre n vers l'infini on obtient

$$\int A_1 \leq \int ((V_\infty^1 - M_\infty^q + B_1) \vee 0 = 0, \tag{4.7}$$

impossible car $A_1 > 0$.

Supposons que $\widehat{P}(V_\infty^q < V_\infty^1 + B) = 0$, alors grâce à l'équation 4.7 on obtient $\int A \leq \int (A - V_\infty^q \circ \widehat{\theta}) \vee 0 d\widehat{P}$ ce qui est impossible.

$$\sum_{i=1}^{q} M_{n+1}^i \circ \widehat{\theta} = (M_n^1 + B_1 - A_1)_+ + (M_n^2 + -A_1) + (M_n^3 - A_1) + ... + (M_n^q - A_1)$$

D'où $\sum_j M_{n+1}^j \circ \hat{\theta} = \sum_j M_n^j + B - \sum_j (M_n^j + B\delta_{j1}) \wedge A_1$ la croissance des M_n entraine encore que $\int \sum_j (M_n^j + B\delta_{j1}) \wedge A_1 d\hat{P} \leq \int B d\hat{P}, \forall n$. En passant à la limite et si $V_\infty^1 = +\infty$ ps nécessairement $q \int A d\hat{P} \leq \int B d\hat{P}$.

On conclut que si $\int B d\hat{P} < q \int A_1 d\hat{P}$, alors $V_\infty^1 < +\infty$ et $\hat{P}(V_\infty^1 = 0) > 0$.

4.5 Files d'attente à temps d'attente borné.

4.5.1 Impatience portant sur le temps passé dans le système.

Proposition 4.5.1 ***La proposition de Loynes***

Soient $(E, \mathcal{E}), (D, \mathcal{D})$ deux espaces mesurables et $f : E \times D \longrightarrow E$ une fonction mesurable pour $\mathcal{E} \bigotimes \mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ repectivement, croissante et continue à gauche par rapport à la première coordonnée.

Soit $e \in E$, si la suite $(W_n^e)_n$ des temps d'attente vérifie la relation de récurrence $W_{n+1}^e = f(W_n^e, X_{n+1})$ où $(X_n)_n$ est une suite stationnaire alors la suite $W_n^e \circ \theta^{-n}$ est croissante et converge vers une variable $\mathcal{U}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ solution de l'équation $\mathcal{U} \circ \theta = f(\mathcal{U}, X_1)$

Notons par

A_n l'inter-arrivée entre le (n-1)ième client et le nième client.

B_{n+1} le temps de service réclamé par le nième client.

C_{n+1} le temps d'impatience du nième client.

$T_n = \sum_{i=1}^n$ l'instant d'arrivée du nième client.

W_n le temps d'attente du nième client.

La suite des temps d'attente vérifie la relation de récurrence suivante :

$$W_{n+1}^{e} = \left(W_{n}^{e} + B_{n+1} - A_{n+1}\right)_{+} \wedge \left(W_{n}^{e} \vee C_{n+1} - A_{n+1}\right)_{+}$$

On suppose que $W_0 = 0$ et que les vecteurs (A_n, B_n, C_n) sont indépendant équidistribués d'espace canonique l'espace de Palm $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{P}, (\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{Z}))$

Proposition 4.5.2 *[21]*
Si $\hat{E}\left(B_1.1_{\{C_1=+\infty\}}\right) < \hat{E}\left(A_1\right)$,
il existe $U < +\infty$ $\hat{P}$ *ps tel que* $U \circ \theta = \left(U + B_1 - A_1\right)_{+} \wedge \left(U \vee C_1 - A_1\right)_{+}$

Preuve :

$$W_{n+1}^{e} = \left(W_{n}^{e} + B_{n+1} - A_{n+1}\right)_{+} \wedge \left(W_{n}^{e} \vee C_{n+1} - A_{n+1}\right)_{+} \tag{4.8}$$

$\Longrightarrow W_{n+1}^{e} = W_{n}^{e} - W_{n}^{e} \wedge \left[\left(A_{n+1} - B_{n+1}\right)_{+} \vee \left(W_{n}^{e} - C_{n+1}\right) \wedge 0 + A_{n+1}\right]$.
Posons $M_n = W_n \circ \theta^{-n}$, on a :

$$M_{n+1} \circ \theta = M_n - M_n \wedge \left[(A_1 - B_1) \vee (M_n - C_1) \wedge 0 + A_1\right]$$

donc $\hat{E}\left(M_n \wedge \left[(A_1 - B_1) \vee (M_n - C_1) \wedge 0 + A_1\right]\right) \leq 0$.
La suite $M_n \wedge \left[(A_1 - B_1) \vee (M_n - C_1) \wedge 0 + A\right]$ est croissante majorée par A_1 et minorée par $-B_1$ donc converge vers
$U \wedge (A_1 - B_1) \vee (U - C_1) \wedge 0 + A_1$ avec $\hat{E}\left(U \wedge (A_1 - B_1) \vee (U - C_1) \wedge 0 + A_1\right) \leq 0$.
$(M_n)_n$ est une suite croissante vers U vérifiant :

$$U \circ \theta = \left(U + B_1 - A_1\right)_{+} \wedge \left(U \vee C_1 - A_1\right)_{+}. \tag{4.9}$$

Montrons que $U < +\infty$. L'équation (4.9) entraine que l'événement $\{U = +\infty\}$ est invariant et donc de probabilité 0 ou 1. D'autre part, nous avons

$$\hat{E}\left(U \wedge \left[(A_1 - B_1) \vee (U - C_1) \wedge 0 + A_1\right]\right) \leq 0 \tag{4.10}$$

Le premier membre de cette inégalité vaut
$\int_{\{C_1=+\infty\}} U \wedge (A_1 - B_1)\, d\hat{P} + \int_{\{C_1<+\infty\}} U \wedge (A_1 - B_1) \vee (A_1 + (U - C_1) \wedge 0)\, d\hat{P}$.
On en déduit que si $U = +\infty$ $\hat{P}$ $p.s$, alors $0 \geq \int_{\{C_1=+\infty\}} (A_1 - B_1)\, d\hat{P} + \int_{\{C_1<+\infty\}} A d\hat{P}$
donc $\hat{E}\left(A_1\right) - \hat{E}\left(B_1 1_{\{C_1=+\infty\}}\right) \leq 0$, contradiction avec l'hypothèse de la proposition ; donc $U < +\infty$ $\hat{P}$ $p.s.$

Non unicité du régime stationnaire

Supposons $C_1 < +\infty$ $\hat{P}$ $p.s$, alors notre hypothèse d'existence du régime stationnaire s'exprime par $\hat{E}(A_1) > 0$. Soit l une constante telle que $l \geq U \geq 0$, posons $A_1 = A \circ \hat{\theta}_1$, $B_1 = A$ et $C = cste > M$, dans ce cas l'équation (4.1) devient

$$W_{n+1}^e = (W_n^e + B_{n+1-}A_{n+1})_+ \text{ avec } \hat{E}(B_1) = \hat{E}(A_1) \tag{4.11}$$

donc $W = \lim_n \max_{-n \leq p \leq 0} \sum_{i=p+1}^0 (B_{i-}A_i)$ est solution de (4.1) et vérifie $W \circ \theta = W$. D'autre part : $\sum_{i=p+1}^0 B_{i-}A_i = A \circ \theta^{p-1} - A$

donc $W = \lim_n \max_{-n \leq p \leq 0} (A \circ \theta^{p-1} - A) = \sup_{p \leq 0} (A \circ \theta^{p-1} - A) = \sup_{p \leq 0} A \circ \theta^{p-1} - A = M - A$ où $M = \sup$ essentiel de A.

si $C_1 > M$ il existe $\alpha > 0$ tel que $C_1 = M + \alpha$ donc $M - A$ est un régime stationnaire. Soit $\beta < \alpha$ alors $M - A + \beta$ est aussi une solution de (4.8).

Les conditions d'unicité du régime stationnaire

Soit U^1 la plus petite solution et U^2 une autre solution, alors U^1 et U^2 vérifient la relation $U \circ \hat{\theta}_1 = f(U, A, B, C)$ avec f continue par rapport à la première coordonnée.

D'après le théorème des accroissements finis, nous avons $U_{n+1}^1 - U_{n+1}^2 \leq U_n^1 - U_n^2$ or $U_{n+1}^1 - U_{n+1}^2 = (U_n^1 - U_n^2) \circ \hat{\theta}_1$, le flot étant ergodique, il vient $(U_n^1 - U_n^2) \circ \hat{\theta}_1 = U_n^1 - U_n^2$, donc il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $U_n^1 - U_n^2 = c$. Pour que le régime stationnaire soit unique, il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées. La famille $(A_n, B_m, C_k, (n, m, , k) \in \mathbb{Z}^3)$ est formée de variables aléatoires indépendantes et telles que

$0 < a < +\infty$, $0 < a < b < +\infty.$, $0 < c < +\infty$,

où

$$a = \sup \text{ essentiel de } A, \quad b = \inf \text{ essentiel de } B, \quad c = \inf \text{ essentiel de } C.$$

Sous ces hypothèses on a $U_n^1 = U_n^2$.

4.6 Structure régénérative

4.6.1 La file à un serveur

Nous nous plaçons sous les hypothèses du paragraphe 4.1

Proposition 4.6.1

La suite $(U_n, n \in \mathbb{Z})$ *définie sur* $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\theta}, \widehat{\mathbb{P}}, \left(\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{Z}\right)\right)$ *récurre en zéro.*

Preuve :

Supposons $U_0 > 0$ $\widehat{P}$ps, donc $U_0 \circ \widehat{\theta}_1 = (B_0 - A_1) \wedge 0$ d'après le lemme de Neveu $\mathbb{E}\big((B_0 - A_1) \wedge 0\big) = 0$ donc $E(B_0 - A_1) \geq 0$, contradiction.

Par conséquent, la suite $(S_n,\ n \in \mathbb{Z})$ définie sur $\Big(\widehat{\Omega},\widehat{\theta},\widehat{\mathbb{P}},\Big(\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{Z}\Big)\Big)$ donnant les indices des clients trouvant le serveur libre est une suite de va p.s. finie strictement croissante et doublement infinie définies par :

$$S_n = \begin{cases} \inf\{k \geq S_{n-1} + 1\ ,\ U_k = 0\} & ;\quad n > 0 \\ \max\{k < 0\ ,\ U_k = 0\} & ;\quad n = 0 \\ \max\{k < S_{n+1} - 1\ ,\ U_k = 0\} & ;\quad n < 0 \end{cases}$$

La suite $(S_n)_n$ est stationnaire par rapport à $\Big(\widehat{P},\widehat{\theta}\Big)$ puisque :

$$\begin{aligned} \Big\{S_n\left(\widehat{\theta}_k(\omega),\ n \in \mathbb{Z}\right)\Big\} &= \Big\{n \in \mathbb{Z},\ U_n \circ \widehat{\theta}_k(\omega) = 0\Big\} \\ &= \Big\{n \in \mathbb{Z},\ U_{k+1}(\omega) = 0\Big\} \\ &= \Big\{S_n(\omega) - k, n \in \mathbb{Z}\Big\}. \end{aligned}$$

Posons $N_S = \sum \delta_{T_{S_n}}$, N_S est un processus simple, stationnaire doublement infini de mesure de Palm $\widehat{P}_{N_S}(\cdot) = \widehat{P}_N(\cdot)\,1_{\{U_0=0\}}$.

4.6.2 La File $GI/G/q$

(une seule file et q serveurs)

Hypothèses et ensemble de récurrence.

Les deux suites $(A_n)_n$ et $(B_n)_n$ sont indépendantes entre elles et chacune est formée de VAIE de moyenne finie de lois respectives α et β.

Posons $a = \sup ess A_0$, $b = \inf ess B_0$ et $j = \max\{k \in \mathbb{N},\ k\,a \leq b\} = \left[\dfrac{a}{b}\right]$.

Posons $f = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^q$, $e = 1_{\mathbb{R}^q}$, $S = \{s = (s^1, \ldots, s^q) \in \mathbb{R}^q\ ,\ 0 \leq s^1 \leq \cdots \leq s^q\}$, $x = (x^1, \ldots, x^q) \in \mathbb{R}^q$, $\|x\| = \max\Big(|x^i|,\ 1 \leq i \leq q\Big)$, $\bar{x} = \sum_{i=1}^q x^i$.

$$v = \begin{cases} \big(0, \ldots, 0, b - j, b - (j-1)a, \ldots, b - a\big) & si \quad 0 < j < q \\ (0, \ldots, 0) & si \quad j = 0 \\ \big((b-q)a, b - (q-1)a, \ldots, b - a\big) & si \quad j \geq q \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} \big(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1\big) \in \mathbb{R}_+^q & si \quad 0 < j < q \\ (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}_+^q & si \quad j = 0 \\ (1, \ldots, 1) & si \quad j \geq q \end{cases}$$

Soit V_δ le sous ensemble de S défini par $V_\delta = \{s \in S,\ v \leq s \leq v + \delta g\}$

Proposition 4.6.2
Si $0 \leq j < q$ alors $W = (W_n)_n$ récurre dans V_δ.

Preuve :

– Si $j = 0$ alors $b < a$, il existe c et d appartenant à $\mathbb{R}$ tels que $b < d < c < a$. Posons $H_i = \{A_i \geq c,\ B_i \leq d\}$, $H = \bigcap_{i=1}^{q} H_i$.
$\forall\, \omega \in H,\ W_{n_q}(\omega) \leq \big(u - n(qc-d)e\big)$, donc en prenant $n = \left[\frac{u}{qc-d}\right] + 1$ on a $W_{n_q} = 0_{R^q}$.

– Si $0 < j < q$ alors $ja \leq b \leq (j+1)$.

▪ <u>1^{er} cas</u> : $y < (q-1)(a-\varepsilon)$.

Posons $G_i = \{A_i \geq a - \varepsilon\ ,\ B_i \leq b + \varepsilon\}$.

$\forall \omega \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} G_i,$

$$W_k(e,\omega) \ \leq \ \Big(\overbrace{u - ka + (k\varepsilon), \ldots, u - ka - k\varepsilon}^{q-k\, termes}, \underbrace{u + b - ka + (k+1)\varepsilon, \ldots, u + b - ka + (k+1)\varepsilon}_{k\, termes}\Big)$$

Prenons $k = \left[\dfrac{a-\varepsilon}{u}\right]$ et $\varepsilon < \inf\left\{\dfrac{\delta}{j+1}, \dfrac{qa-b}{q+1}\right\}$, on a $\{W_{k+q} \in V_\delta\} \supset \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} G_i$.

▪ <u>$2^{ème}$ cas</u> : $u > (q-1)(a-\varepsilon)$

$$\bigcap_{i=1}^{k} G_i \subset \Big\{W_q(ue,\omega) \leq \big(a + b - qa + (q+1)\varepsilon\big)e\Big\}$$

Prenons $n = \left[\dfrac{u}{(q-1)(a-\varepsilon)}\right] + 1$ et $k = \left[\dfrac{u - n(b-qa) + (q+1)\varepsilon}{(q-1)(a-\varepsilon)}\right] + 1$, on a

$$\bigcap_{i=1}^{nq+k+q} G_i \subset \Big\{W_{nq+k+q}(ue,\omega) \leq \big(u + b - qa + (q+1)\varepsilon\big)e\Big\}$$

Notons par $(U_n)_n$ la suite des temps d'entrée du processus $(W_n)_n$ dans l'ensemble V_δ et $(S_n)_n$ la suite des temps de séjour du processus $(W_n)_n$ dans l'ensemble V_δ ; alors

· $U_1 = \inf\{p/p \geq 0 \text{ et } W_p \in V_\delta\}$.

· $S_1 = \inf\{p/p \geq 0 \text{ et } W_{U_1+p+1} \notin V_\delta\}$ et par récurrence pour $p \geq 1$:

· $U_{p+1} = \inf\{k/k > U_p + S_p + 1, W_k \in V_\delta\}$

· $S_{p+1} = \inf\{k/k \geq 0 \text{ et } W_{U_{p+1}+k+1} \notin V_\delta\}$

Notons que les variables $(S_k)_{k\geq 1}$ sont des VAIE géométriques de même loi que S de plus si $S_k \geq j$, pour $n \geq U_k + j$, la variable W_n est indépendante de W_{U_k}

$$\begin{aligned} \text{Posons} \quad & L = \inf\{k \geq 1\ ,\ S_k \geq j\} \\ & T = U_L + j \\ & Y_k = \Big(T_k - T_{k-1}, W_{T_{k-1}+1}, \dots, W_{T_k}\Big) \end{aligned}$$

La suite $(Y_k, k \geq 2)$ définie par :

$$Y_k = (T_k - T_{k-1}, W_{T_{k-1}+1}, W_{T_{k-1}+2}, ..., W_{T_k})$$

est une suite stationnaire de VA 2-dépendantes, c'est à dire que $\sigma\{Y_i, i \geq k+2\}$ $\forall k, k \geq 2$, est indépendante de $\sigma\{Y_2, Y_3, ..., Y_k\}$, Y_k étant distribuée sur $\{S \geq j\}$, pour $k \geq 2$ comme $Y_1 = (T_1 - j, W_{j+1}, \dots, W_{T_1})$.

4.6.3 Files avec impatience

Impatience sur le temps passé dans le système

$$W_{n+1} = (W_n + B_n - A_{n+1})_+ \wedge (W_n \vee C_{n+1} - A_{n+1})_+. \tag{4.12}$$

Posons $a = \sup ess A_1$, $b = \inf ess B_1$, $c = \inf ess C_1$.

On suppose que $0 < a < +\infty$.

- 1^{er} cas : $(b-a) \wedge (c-a) < 0$.

  Supposons que $(b-a) \wedge (c-a) = b - a$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(B_1 - A_1 < \varepsilon) > 0$.

  Posons $\overline{U}_{n+1} = (U_n + B_n - A_{n+1})_+$.

  comme $W_n \leq \overline{U}_n$ sur l'évènement $D = \bigcap_{i=1}^{n} \{B_i - A_i \leq -\varepsilon\}$, on a $W_n \leq \overline{U}_n \leq (U_0 - n\varepsilon)_+$. Comme $W < +\infty$ $\mathbb{P}$ p.s, il existe $u \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mathbb{P}(W < u) > 0$, donc sur $D \cap \{W < u\}$, on a $\overline{U}_n \leq (u - n\varepsilon)_+$ donc pour $n = \left[\dfrac{u}{\varepsilon}\right] + 1$, $W_n = 0$ avec une probabilité positive.

- $2^{ème}$ cas : $(b-a) \wedge (c-a) \geq 0$.

  Posons $\overline{W}_0 = W_0$, $\overline{C}'_n = C_n \cdot 1_{\{C_n < +\infty\}}$, $\overline{B}'_n = B_n \cdot 1_{\{B_n = +\infty\}}$.

$$\begin{aligned} \overline{W}^x_{n+1} &= \Big(\overline{W}_n \vee \overline{C}'_{n+1} + \overline{B}'_{n+1} - A_{n+1}\Big)_+ \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\overline{B}_i - A_i) + \sum_{i=1}^{n-2} \big(\overline{C}_{i+1} - \overline{W}_i\big)_+ + x \vee \overline{C}'\right)_+ \end{aligned}$$

  Si $\min(b-a, c-a) = \overline{v} \geq 0$ alors W récurre pour tout $\delta > 0$ dans l'intervalle $V_\delta = [\overline{v}, \overline{v} + \delta]$.

Soit $\left(S_k\right)_k$ (resp., $\left(U_k\right)_k$) les temps de persistance (resp., les temps d'entrée) dans l'ensemble V_δ, définis comme dans le paragraphe précédent.

En prenant $j = 1$

$$\begin{aligned}
K_1 &= \inf\{n \geq 1\ ,\ V_n \geq 1\}.\\
K_n &= \inf\{k > K_{n-1}\ ,\ S_k > 1\}.\\
L_1 &= U_{K_1} + 1\\
&\vdots\\
L_n &= U_{K_n} + 1
\end{aligned}$$

Les vecteurs

$$\begin{aligned}
X_1 &= (L_1, W_1, \ldots, W_{L_1}).\\
&\vdots\\
X_n &= (L_n - L_{n-1}, W_{L_{n-1}+1}, \ldots, W_{L_n}).
\end{aligned}$$

sont de même loi, 2 à 2 indépendants.

Conclusion : Nous avons exposé dans ce chapitre deux méthodes permettant la construction du régime stationnaire. Nous avons cité les conditions nécessaires pour l'existence du régime stationnaire et de la structure régénérative de ce régime.

Il nous reste à montrer que le processus transitoire rejoint le processus stationnaire après un temps fini et se confond avec lui. Dans ce cas, l'existence du régime stationnaire assure la convergence en loi du régime transitoire du système considéré vers une loi stationnaire. D'autre part, l'existence d'une structure régénérative du système d'attente nous permet d'appliquer un des théorèmes suivants $3.2.2, 3.5.11$ afin de montrer l'existence d'une loi stationnaire.

Chapitre 5

Couplage

La technique de couplage consiste à montrer que deux processus qui suivent deux lois distinctes se confondent à partir d'un instant aléatoire presque sûrement fini. Lorsque l'un des deux processus est stationnaire, l'existence d'un couplage permet d'établir une convergence en loi et fournit un moyen d'évaluation de la vitesse de convergence vers la loi stationnaire.
Dans la section 1, nous donnons les définitions et les résultats de base, dans la section 2 nous présentons les détails de la construction d'un couplage d'un processus avec un processus stationnaire dans les deux cas discret et continu, dans la section 3 nous donnons les conditions de couplage du processus de la charge du serveur ou du processus du temps d'attente en régime transitoire avec le régime stationnaire.

5.1 Couplage, instant de couplage, vitesse de convergence.

Définition 5.1.1

Couplage en temps discret.

Soit $Z = (Z_n)_n$, et $Z' = (Z'_n)_n$, deux chaines de Markov définies sur un espace de probabilité $\big(\Omega, \mathscr{A}, P\big)$ à espace d'état E. Supposons qu'il existe une variable aléatoire $T < +\infty$, $Pp.s$ à valeurs entières et un processus bivarié $Z'' = \big((\hat{Z}_n,\ \hat{Z}'_n)\big)_n$ à espace d'état E^2 vérifiant $\mathcal{L}(\hat{Z}) = \mathcal{L}(Z)$ et $\mathcal{L}(\hat{Z}') = \mathcal{L}(Z')$ tel que : pour tout $n \geq T$ le processus Z'' prend ses valeurs dans la diagonale de E^2.

Le processus Z'' est un couplage des deux processus Z et Z', et T est appelé l'instant de *couplage.*

Couplage en temps continu.

Soient $Z = (Z_t)_t$, $Z' = (Z'_t)_t$ *deux processus définis sur le même espace de probabilité* $\big(\Omega, \mathscr{A}, P\big)$ *à valeurs dans un espace* E, *et* T *une variable* P *p.s finie à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$; *soit* $Z'' = \big((\hat{Z}_t,\ \hat{Z}'_t)\big)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *le processus bivarié à valeurs dans* E^2 *vérifiant :*
$\mathcal{L}(\hat{Z}) = \mathcal{L}(Z)$ *et* $\mathcal{L}(\hat{Z}') = \mathcal{L}(Z')$ *et tel que pour tout* $t \geq T$ *le processus* Z'' *prend ses valeurs dans la diagonale de* E^2 . *Alors,* Z'' *est appelé un couplage et* T *est l'instant de couplage.*

Définition 5.1.2 *La norme de la variation totale.*

Soit $\big(\Omega, \mathscr{A}\big)$ *un espace mesurable,* $M(\mathbb{R})$ *l'ensemble des mesures signées bornées définies sur* $\big(\Omega, \mathscr{A}\big)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$. *La norme de la variation totale est définie sur* $M(\mathbb{R})$ *par :*

$$\| \nu \| = \sup_{A\in\mathscr{A}} \nu\big(A\big) - \inf_{A\in\mathscr{A}} \nu\big(A\big),\ \forall \nu \in M(\mathbb{R}).$$

En particulier, si ν_1 *et* ν_2 *sont deux mesures de probabilité sur* $\big(\Omega, \mathscr{A}\big)$ *alors*

$$\| \nu_1 - \nu_2 \| = 2\sup_{A\in\mathscr{A}}\big(\nu_1(A) - \nu_2(A)\big)$$

Lemme 5.1.3 *[81]*

Soient Z *et* Z' *deux processus définis sur l'espace de probabilité* $\big(\Omega, \mathscr{A}, P\big)$ *muni d'un flot* $\big(\theta_t, t \in \mathbb{T}\big)$, *où* $\mathbb{T}$ *est l'espace du temps dans lequel évoluent* Z *et* Z' . *Notons* T *l'instant de couplage de ces deux processus, alors*

$$\| \mathcal{L}(Z) \circ \theta_u - \mathcal{L}(Z') \circ \theta_u \| \leq 4.P\big(T > u\big)$$

avec $u \in \mathbb{T}$

Lemme 5.1.4 *[12]*

Soit $\phi : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *une fonction strictement croissante positive non nulle, telle que* $E\big(\phi(T)\big) < +\infty$, *alors*

$$\| \mathcal{L}(Z) \circ \theta_u - \mathcal{L}(Z') \circ \theta_u \| = \circ(\frac{1}{\phi(u)})$$

où $\circ(.)$ *est une fonction telle que* $\lim_{u\to 0} \frac{\circ(u)}{u} = 0$.

Preuve

On a $\phi(n)1_{\{T>n\}} \leq \phi(T)1_{\{T>n\}}$ et donc $\phi(n)P(\{T > n\}) \leq E(\phi(T)1_{\{T>n\}})$. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E(\phi(T)1_{\{T>n\}}) = 0$ et par conséquent : $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(n)P(\{T > n\}) = 0$, et comme

$$\parallel \mathcal{L}(Z) \circ \theta_u - \mathcal{L}(Z^{'}) \circ \theta_u \parallel \leq 4.P\big(T > u\big)$$

on a le résultat recherché.

5.2 Conditions de couplage de processus stochastiques.

5.2.1 Couplage de processus stochastiques à espace temps discret.

Soit $(Y_i)_{i\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs entières définies sur $\big(\Omega, \mathscr{A}, P\big)$ telle que la suite $(Y_i)_{i\geq 1}$ soit constituée de variables équidistribuées de loi commune notée $p = (p_i)_{i\geq 1}$ et à espérance notée $\mu = \sum_i ip_i$, on pose $\lambda = \frac{1}{\mu}$, λ est l'intensité du renouvellement. La loi de Y_0 est notée $a = (a_i)_{i\geq 1}$.

Soit le processus ponctuel N sur $\mathbb{R}_+$ défini sur $\big(\Omega, \mathscr{A}, P\big)$ par

$$N = \sum_{n\geq 0} \delta_{S_n} \text{ où } S_k = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k} Y_i & \text{si } k > 0 \\ Y_0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Notons $V_k = N(\{k\}) : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ et $v_k = E(V_k) = E(N\{k\})$.

Soit $S' = (S'_k)_{k\geq 0}$, le processus de renouvellement stationnaire associé à la loi $p = (p_i)_i$, donc $S'_k = \sum_{0\leq i\leq k} Y'_i$, où les $(Y'_i)_{i\geq 1}$ constituent une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées de loi commune $p = (p_i)_i$ indépendante de la suite $(Y_i)_{i\geq 1}$ définie ci-dessus, et (Y'_0) est une variable indépendante de la suite $(Y'_i)_{i\geq 1}$, de loi $a^{'}$ définie par $a^{'}_i = \lambda \sum_{j=i+1}^{+\infty} p_i$. Comme précédemment, on définit : $N' = \sum_n \delta_{S'_n}$, $V'_k = N'(\{k\})$, et $v'_k = E\left(N'\left(\{k\}\right)\right)$. Pour tout $\beta > 0$, on pose

$$m_\beta(a) = \sum_{0\leq i\leq\infty} i^\beta a_i,\ m_\beta(a^{'}) = \sum_{0\leq i\leq\infty} i^\beta a^{'}_i, \text{ et } m_\alpha(p) = \sum_{0\leq i\leq\infty} i^\alpha p_i\ ,$$

avec $\alpha = \beta + 1$.

Soit

$$T = \min\left\{i, V_i = V'_i = 1\right\},$$

alors T est la plus petite valeur commune aux deux processus S et S', c'est à dire si $N = \inf\left\{n, \exists j, S_n = S'_j\right\}$ alors $T = S_N$.

Proposition 5.2.1 *[63]*
Soit $\alpha \geq 1$, supposons $m_\beta(a)$, $m_\beta(a')$, et $m_\alpha(p)$ finis avec $\beta = \alpha - 1$, alors $E(T^\beta) < +\infty$.

Pour établir ce résultat, nous aurons besoin de montrer le lemme suivant :

Lemme 5.2.2 *[63].*
Soient β, et γ deux constantes strictement positives.

- *Supposons qu'il existe une constante $C(\beta, \gamma)$ vérifiant : pour tout τ temps d'arrêt par rapport à une suite croissante de $\sigma-$algèbres $\left(\mathcal{B}_i\right)_{i\geq 0}$ tel que*
  $P(\tau = i/\tau \geq i) \geq \gamma \;\; \forall\, i = 1, 2, ...$
- *Pour toute suite $\left(U_i\right)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires vérifiant*
  $E(U_i^\beta / \mathcal{B}_{i-1}) \leq K$ p.s $\forall i = 1, 2, .., K$ étant une constante.

Alors,

$$E\Big[(U_1 + U_2 + ... + U_\tau)^\beta\Big] \leq K.C(\beta, \gamma).$$

Preuve de la proposition.

soit $S'' = (S''_k)_{k\geq 0}$ un processus de renouvellement tel que $S''_0 = 0$. Posons $u_n = E\big(N''(\{n\})\big)$.
Grâce au théorème de renouvellement, l'assertion suivante est vérifiée :
$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a $u_n \geq \gamma$.
Dans la suite on construit une suite de variables aléatoires $(H_i)_i$ qui représentent des périodes incluses dans $\mathbb{R}_+$ et telles que durant chaque période il se réalise un et un seul des deux processus. Posons à :
la première étape

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ H_0 = Y'_0 \\ F_1 = F_0 + H_0 + n_0 \end{cases}$$

la deuxième étape,

$$\begin{cases} S_{\nu_1} = \inf\{S_i\ /S_i > F_1\}, \\ H_1 = S_{\nu_1} - F_1, \\ F_2 = F_1 + H_1 + n_0 = F_0 + H_0 + H_1 + 2n_0. \end{cases}$$

la troisième étape

$$\begin{cases} S'_{\nu_2} = \inf\{\ S'_i\ /\ S'_i >\ \ F_2\} \\ H_2 = S'_{\nu_2} - F_2\,; \\ F_2 = S_{\nu_1} + n_0 \end{cases}$$

la quatrième étape

$$\begin{cases} F_3 = F_2 + H_2 + n_0 = F_0 + H_0 + H_1 + H_2 + 3n_0 \\ S_{\nu_3} = \inf\{\ S_i\ /S_i >\ \ F_3\} \\ H_3 = S_{\nu_3} - F_3 \end{cases}$$

la cinquième étape

$$\begin{cases} F_4 = F_3 + H_3 + n_0 = \sum_{i=1}^{3} H_i + 4n_0 = S_{\nu_3} + n_0 \\ S'_{\nu_4} = \inf\{\ S'_i/\ S'_i >\ \ F_4\ \} \\ H_4 = S'_{\nu_4} - F_4 \end{cases}$$

....

l'étape numéro $2n-1$

$$\begin{cases} F_{2n} = F_{2n-1} + H_{2n-1} + n_0 = \sum_{i=1}^{2n-3} H_i + (2n-2)\,(n_0) \\ H_{2n} = S'_{\nu_{2n}} - F_{2n} \\ S'_{\nu_{2n}} = \inf\{\ S - i\ /S'_i > F_{2n}\} \end{cases}$$

l'étape numéro $2n$

$$\begin{cases} F_{2n+1} = S'_{\nu_{2n}} + n_0 \\ S_{\nu_{2n+1}} = \{\ S_i\ /S_i > F_{2n}\ \} \\ H_{2n+1} = S_{\nu_{2n+1}} - F_{2n+1} \end{cases}$$

Soit $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $H_{2j-1} = 0$, comme $H_{2j-1} = S_{\nu_{2j-1}} - F_{2j-1}$, on a sous cette hypothèse $S_{\nu_{2j-1}} = F_{2j-1}$, mais d'après ce qui a précédé on a aussi :

$$F_{2j-1} = S'_{\nu_{2j-2}} + n_0 \text{ et } \ F_{2j} = S_{\nu_{2j-1}} + n_0$$

Mais,

$$F_{2j} = \sum_{1}^{2j-1} H_i + 2j.n_0 = F_{2j-1} + n_0 = S'_{\nu_{2j-2}} + 2n_0$$

D'où $\{H_{2j-1} = 0\} \subset \{S'_{\nu_{2j-2}} + n_0 = S_{\nu_{2j-1}}\}$

$\bigcup_j \{H_{2j-1}\ =\ 0\} =$ l'ensemble des points de renouvellement communs aux deux processus

S et $S^{'}$, puisque $P(\underset{j}{\cup}\{S_j = n_0\}) \geq \gamma$ $\exists k \in \mathbb{N}^*, \exists \gamma_1$ tel que $P\big(S_k = n_0\big) \geq \gamma_1$.
τ est l'indice de la première période où les deux processus S' et S ont une rencontre, T représente le premier instant où les deux processus co$\ddot{i}$ncident, c'est aussi la plus petite valeur commune aux deux processus. D'aprés la parité de τ , S_{ν_τ} ou S'_{ν_τ} sera un point commun aux deux processus S et S' , mais la variable T est le premier renouvellement commun on a alors nécessairement $S_{\nu_\tau} \geq T$ ou bien $S'_{\nu_\tau} \geq T$.
Définissons la suite de variables aléatoires suivante :
$U_1 = S_{\nu_1} - S'_{\nu_0}$
$U_2 = S'_{\nu_2} - S_{\nu_1}$...etc $U_{2k+1} = S_{\nu_{2k+1}} - S'_{\nu_{2k}}$
$U_{2k+2} = S'_{\nu_{2k+2}} - S_{\nu_{2k+1}}$
d'où :

$$T \leq Y'_0 + \sum_{i=1}^{\tau} U_i, \qquad S_{\nu_{2k+1}} = \sum_{i=1}^{2k+1} U_i + Y'_0, \qquad S^{'}_{\nu_{2k}} = \sum_{i=1}^{2k} U_i + Y'_0.$$

Sous les hypothèses suivantes : $m_\beta(a) < +\infty$, $m_\beta(a^{'}) < +\infty$, et $m_\alpha(p) < +\infty$ finis, montrons que $E(T^\alpha) < +\infty$.
D'aprè le lemme, il suffit de montrer que $E(U_i^\beta/\mathcal{B}_{i-1}) \leq K$ p.s et $P(\tau = i/\tau \geq i) \geq \gamma$, où
$\mathcal{B}_i = \sigma\{Y_k, Y'_j, k \leq \nu_i, j \leq \nu_{i-1} + n_0\}$. Par construction $U_{2i+1} = S_{\nu_{2i+1}} - S'_{\nu_{2i}} = n_0 + H_{2i+1}$, donc $E(U_i^\beta/H_{i-1} = j) \leq n_0^\beta + E(H_i^\beta/H_{i-1} = j) \leq n_0^\beta \|Y_0\| + E(H_i^\beta/H_{i-1} = j)$.
Rappelons que le processus $X(t) = S_{N(t)} - t$, (resp $X^{'}(t) = S^{'}_{N^{'}(t)} - t$) est un processus stationnaire lorsque la loi de Y_0, (resp, $Y^{'}_0$) est $c = (c_n)_{n\geq 0}$ avec $c_n = \lambda \sum_{n+1}^{\infty} p_i$, donc de loi indépendante de t. Notons que

$$H_k = \begin{cases} X(F_k), & \text{si k est impair} \\ X^{'}(F_k), & \text{si k est pair} \end{cases}$$

Par conséquent, si Y_0, et $Y^{'}_0$ suivent toutes deux la loi c la suite $(H_k)_k$ est stationnaire.
De même, la suite $(W_k)_k$ est stationnaire de même loi que la suite $(H_k)_k$, où
$W_k = \inf\{S_j - k/S_j - k \geq 0\} = S_{N(k)} - k = X(k)$, avec $W_0 = 0$
Montrons que le moment d'ordre β de W_k est fini.
En effet :

$$\{W_k = i\} = \{S_{N(k)} - k = i\} = \bigcup_{k\geq 0}\{N(k) = l, S_l - k = i\}$$

$$= \bigcup_{k\geq 0}\{S_{l-1} < k \leq S_l, S_l - k = i\} = \bigcup_{k\geq 0}\{S_{l-1} < k, S_{l-1}+Y_l = k+i\} = \bigcup_{m=0}^{k-1}\bigcup_{l\geq 0}\{S_{l-1} = m, Y_l = k+i-m\}$$

$$P(W_k = i) = P(\bigcup_{m=0}^{k-1}\bigcup_{l\geq 0}\{S_{l-1} = m, Y_l = k+i-m\}) = \sum_{m=0}^{k-1} P(\bigcup_{l\geq 0}\{S_{l-1} = m\})P(Y_l = k+i-m\}),$$

car S_{l-1} est indépendant de Y_l et comme Y_l a même loi que Y_1, on a

$$P(W_k = i) = \sum_{m=1}^{k-1} P(\cup_{l\geq 1}\{S_{l-1} = m\})P(Y_1 = k + i - m) = \sum_{m=1}^{k-1} u_m p_{k+i-m} \leq \sum_{m=i}^{k+i} p_m$$

car $u_m \leq 1$. Donc

$$E(W_k^\beta) = \sum_{i=1} i^\beta P(W_k = i) \leq \sum_{i=1} i^\beta \sum_{m=i}^{k+i} p_m \leq C \leq +\infty$$

puisque par hypothèse $m_\alpha(p) < +\infty$. Comme H_i possède la même loi que W_k, on peut conclure que

$$E(H_i^\beta / H_{i-1} = j) < +\infty \text{ et par conséquent on a } ,: E(U_i^\beta / H_{i-1} = j) < +\infty$$

En outre, $P(\tau = i/\tau \geq i) \geq \gamma$, car $P(\tau = i/\tau \geq i) = \frac{P(\tau=i)}{P(\tau\geq i)} \geq P(\tau = i) \geq \gamma$.
Les conditions du lemme 4.2.2 étant satisfaites, on a bien

$$E(T^\beta) \leq C(E(Y_0'^\beta) + E[(\sum_{i=1}^{\tau} U_i)^\beta]) < +\infty$$

Proposition 5.2.3 *[63]*

Soit $\alpha \geq 1, m_\alpha(a), m_\alpha(a'), m_\alpha(p)$ finis alors $E(T^\alpha) < +\infty$

Preuve :
on suppose S et S' stationnaires c'est à dire Y_0 et, Y_0' suivent la loi c où $c = (c_n)_{n\geq 0}$ et $c_n = \lambda \sum_{n+1}^{\infty} p_i$.
On pose $V_k^* = V_k.V_k'$, $\{\ k/\ V_k^* = 1\ \} =$ l'ensemble des points de rencontre des deux processus .
$T = \inf\{i, V_i = V_i' = 1\} = Y_0^*$ où $V_k^* = N^*(k)$ où $N^* = \sum_k \delta_{S_k^*}$ et $Y_k^* = S_k^* - S_{k-1}^*, Y_0^* = S_0^*$.
D'après la proposition 5.2.1, on a : $E_{a,a'}(T^{(\alpha-1)}) < +\infty$ où a et a' sont des lois quelconques, donc vrai aussi pour $a = a' = c$, d'où $E_{c,c'}(Y_0^{*(\alpha-1)}) < +\infty$. On sait que si $E(Y_0^{*(\alpha-1)}) < +\infty$ alors $E_{0,0}(T^\alpha) < +\infty$ et que $E(Y_0^{\alpha-1}) < +\infty \iff \forall i, E(Y_i^\alpha) < +\infty$

et si $E_{0,0}(T^\alpha) < +\infty$ alors $\forall i,\ E_{0,i}(T^\alpha) < +\infty$

Dans la suite, on suppose $Y_0 \equiv 0$, et on montre que $E_{0,a'}(T^\alpha) < +\infty$. En effet : $E_{0,a'}(T^\alpha) = \sum_{i=1}^{n_0-1} E_{0,i}(T^\alpha)a'_i + \sum_{i\geq n_0} E_{0,i}(T^\alpha)a'_i$ où n_0 est tel que $u_n \geq \gamma < 0, \forall n \geq n_0$. Soit $i \geq n_0$, on définit le processus V^0 par $V^0 = (V_k^0)_{k=0}^{+\infty}$ où $V_k^0 = V_k.V'_{k+i}$.

$\{k \ /\ V_k^0 = 1\ \} = \{\ S_n/ \ \exists\ j_n, S'_{j_n} =\ S_n + i\ \}$ les points qui chargent V_0 sont des points du processus S qui précèdent S' par une durée de temps fixe de longueur égale à i. Comme $i \geq n_0$, on a la relation suivante vérifiée : $\{\ F_i \ /\ H_i = 0\} \subset \{\ k \ /\ V_k^0 = 1\}$. L'étape qui suit consiste à construire deux suites de variables de renouvellement associées aux mesures de renouvellement V^0 et V^{00}, en posant

$Y_0^0 = 0$, $Y_1^0 = \inf\{\ j > 0/ \ \exists\ l$ et $\exists\ l'$ tel que $, S_l = j, S'_{l'} = j + i\}$

$Y_2^0 = \inf\{\ j > \ Y_1^0/ \ \exists\ l$ et $\exists\ l'$ te que $S_l = j$ et $S'_{l'} = j + i\}$...etc.$Y_1^{00} = \sum_{j=1}^{i} Y_j^0$

$Y_1^{00} + Y_2^{00} = \sum_{j=1}^{2i} Y_j^0$...etc.

Les deux suites sont reliées par la relation suivante : $\sum_{k=1}^{n} Y_k^{00} = \sum_{j=1}^{n.ni} Y_j^0$, grâce à laquelle on peut écrire

$$(E_{0,i}((Y_j^{00})^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = E_{0,i}(\sum_{k=(j-1)i+1}^{ji} Y_k^0)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \sum_{k=(j-1)i+1}^{ji} (E_{0,i}(Y_k^0)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = i(E_{0,i}(Y_k^0)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

de part l'inégalité de Minkowski.

Grâce à la stationnarité de la suite $(Y_k)_k$ on peut écrire que

$E_{0,i}(Y_j^{00})^\alpha \leq i^\alpha E_{0,i}(Y_j^0)^\alpha) = ci^\alpha, \forall j \geq 1.$

$\tau = \min\{k/S$ possède un renouvellement en $\ i + \sum_{j=1}^{k-1} Y_j^{00}\}$

$i + \sum_{j=1}^{k-1} Y_j^{00}$ est un point du processus S qui vérifie : $\exists\ l,$ tel que $\ S'_l = i + \sum_{j=1}^{\tau-1} Y_j,$ car $\sum_{j=1}^{\tau-1}\sum_{l=(j-1)i-1}^{ji} Y_l^0 = \sum_{j=1}^{\tau-1} Y_l^0 = S_{\tau-1}^0 = S_{T_{\tau-1}}$, donc $i + S_{\tau-1} \in S'$ c'est à dire $\exists\ l,$ et $\ m$ tel que $\ , S_l = S'_m = i + S'_{\tau-i}$

Comme T est le premier point de rencontre de S avec $\ S'$, on a nécessairement :

$$T \leq i + S_{\tau-i}^0 \leq S_\tau^0$$

Remarque 5.2.4 *Par définition* $\tau_1 = \inf\{k, H_k = 0\}$ *si par exemple* τ_1 *est pair :* $S'_{\tau_1} = S_{\tau_1} + n_0$ *; le* τ *de la proposition (1) est un cas particulier du* τ *de la proposition (2).*

τ est un temps d'arrêt par rapport aux $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, ...$ où

$\mathcal{B}_j = \sigma\{Y_m,\ Y'_k,\ \sum_1^n Y_m \leq \sum_1^j Y_m^{00},\ \sum_1^k Y_m^1 \leq \sum_1^j Y_m^{00}\}.$

Comme $P_{0,i}(\tau = j/\tau \geq j) \geq \gamma, \forall j,$ et $\ E_{0,i}((Y_j^{00})^\alpha/\mathcal{B}_{j-1}) = E_{0,i}(Y_j^{00})^\alpha \leq c.i^\alpha$, d'après le lemme 5.2.2, on a : $E(\sum_{j=1}^{\tau} Y_j^{00}) \leq K.c(\beta, \gamma)$ car les $(Y_j^{00})_j$ sont des variables strictement positives, d'où $E(T^\alpha) < +\infty$

5.2.2 Couplage de processus à temps continu.

Soit $\widetilde{Y}' = (\widetilde{Y}_i')_{i\geq 0}$, et $\widetilde{Y} = (Y_i)_{i\geq 0}$ deux suites de variables aléatoires indépendantes telles que : $\widetilde{Y}_0$ suit la loi G_1 et $\widetilde{Y}_0'$ suit la loi G_2 et pour tout $i \geq 1$, $\widetilde{Y}_i, \widetilde{Y}_i'$, suivent la loi F. Soient $\widetilde{S}$ et $\widetilde{S}'$ les processus de renouvellement associés à $\widetilde{Y}$ resp ,$\widetilde{Y}'$.
On définit les suites de variables aléatoires $(V_i)_i$, $(V_i')_i$ et $(Z_i)_i$ comme suit :
On pose $V_0 = \widetilde{Y}_0$, $V_0' = \widetilde{Y}_0'$, $Z_0 = \max(V_0, V_0')$ l'intervalle $[0, Z_0]$ est le plus grand intervalle aléatoire contenant un point de renouvellement de chacun des deux processus S et$S$.

Lemme 5.2.5 *[64]*
Si F est non singulière alors, il existe A, c_1, $c_2 > 0$ tels que la loi de $V(t)$ possède une partie absolument continue de densité supérieure ou égale à c_1 sur l'intervalle $[0, c_2]$ pour tout $t \geq A$.

où $\widetilde{N}(t) = \min\left\{n, \widetilde{S}_n \geq t\right\}$, $\widetilde{N}'(t) = \min\left\{n, \widetilde{S}_n' \geq t\right\}$.

Preuve.
Posons

$$V(t) = \widetilde{S}_{\widetilde{N}(t)} - t, \quad N = \sum \delta_{S_n}, \quad U = \sum_{n\geq 0} F^{*n}$$

$$\mu_\alpha' = \int x^\alpha F(dx), \quad \mu_1 = E(Y_1), \quad \lambda = \frac{1}{\mu}.$$

F étant supposée non singulière, F s'écrit sous la forme

$$F(dx) = F_0(dx) + F_1(dx) = f_0(x)dx + F_1(x),$$

On ne restreint pas la généralité si on suppose f_0 bornée à support compact. La convolée f^{*2} est continue et la mesure $U = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n} \geq F_0^{*2} * U = U_0$, où U_0 est une mesure absolument continue de densité $U * f_0^{*2} = u_0$. Choisissons $c > 0$ et I un intervalle sur lequel $f_0^{*2}(x) > c$ et donc grâce au théorème de renouvellement $\exists A_1, \forall x > A_1, u_0(x) \geq c.U(x - I) > c$
D'autre part $P(V(t) \geq x) = \int_0^t F(t + x - s)U(ds)$, donc la loi de $V(t)$ possède une distribution supérieure à $\int_0^t f_0(t+x-s)u_0(s)ds \geq c\int_{A_1}^t f_0(t+x-s)$. En choisissant c_2 petit tel que $\int_{c_2}^{\infty} f_0(u)du > 0$, on obtient pour tout $0 \leq x \leq c_2$, $\exists c_1 > 0$ tel que $c.\int_{A_1}^t f_0(t + x - s)ds > c_1$, $\forall t \geq A_1, t$ suffisement grand.

Lemme 5.2.6 *[64]*
Soit H_1, H_2 deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}_+$, chacune possédant une partie absolument continue de densité $\geq C_1 > 0$ sur $[0, C_2]$. Alors il existe une mesure de probabilité H sur $(\mathbb{R}_+)^2$ dont les marginales sont H_1, H_2 et de masse totale égale à $\gamma > C_1.C_2$ sur la diagonale $\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ / \ x = y\}$.

Preuve

$$H(x) = \begin{cases} C_1.x \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq C_2 \\ C_1.C_2 = \gamma_1 \quad \text{si} \quad \ \ x > C_2. \end{cases}$$

Soit

$$H(x,y) = \Big(H_1(x) - H_3(x)\Big).\Big(H_2(y) - H_3(y)\Big)/(1-\gamma_1) + H_3(x) \wedge H_3(y).$$

H ainsi définie vérifie le lemme.

Lemme 5.2.7 *[64]*
Soit $\Big(V(t)\Big)_t$ le processus défini sur $\Big(\Omega, \ \mathscr{A}, \ P\Big)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ tel que $V(t)$ mesure l'âge du composant en fonctionnement dans un processus de renouvellement, supposons $\mu_\alpha < +\infty$ avec $\alpha \geq 1$. Alors

- *Il existe une contante C_3 tel que $E(V(t))^\alpha \leq C_3(1+t) \ \forall t \geq 0$.*
- $\forall \rho > 1, \ \exists C_4 = C_4(\rho)$ *tel que* $E(V(t))^\alpha \leq C_4 + \rho.t, \ \ \forall t \geq 0$

Preuve

$$\begin{aligned} E\Big(V(t)^\alpha\Big) &= \int x^\alpha P\Big(V(t) \in dx\Big) = \int_0^t U(ds) \int_0^\infty x^\alpha F(t - s + dx) \\ &\leq \int_0^t U(ds) \int_{t-s}^\infty x^\alpha F(dx) \leq \mu_\alpha.U\Big([0,t]\Big) \leq \mu_\alpha.c.(1+t) \leq c_3(1+t). \end{aligned}$$

Ces inégalités sont conséquence du fait que $\lim_{t \to +\infty} \frac{U(t)}{t}$ existe.
Pour obtenir la deuxième assertion, il suffit de remarquer que $\lim_{t \to +\infty} \frac{U(t)}{t} = \lambda$, donc pour tout $\rho > 1, \exists \, \varepsilon_0, t_0$ tel que $\mu_1.U([0,t]) \leq \mu(\lambda + \varepsilon_0) \leq \rho.t$ pour tout $t \geq t_0$.

Proposition 5.2.8 *[64]*
soit $T = \min\big\{S_i / \exists j, S_i = S'_j\big\}$, T est l'instant de couplage de S et S'.
Soit $\alpha > 1$. On pose $\mu_\alpha, m_\alpha(G_1), m_\alpha(G_2)$ finis où $\mu_\alpha, m_\alpha(G_1), m_\alpha(G_2)$ sont les moments d'ordre α des lois F, G_1, G_2 respectivement.
Alors $E(T^\alpha)$ est fini.

Preuve

Première étape

Nous allons construire deux processus $(\widetilde{V}_i, \widetilde{V'}_i)$ dont les composantes possèdent la même loi que les composantes du processus bivarié $(\widetilde{S}_i, \widetilde{S'}_i)$ et tel que la probabilité que le processus bivarié rejoigne la diagonale soit strictement positive.

Posons $L_1 = Z_0 + A$, sur cette longueur du temps les deux processus marginaux se sont rencontrés sur un espace sur lequel les densites des deux processus sont strictement positives.

Soit

$$\widetilde{V}_1 = \widetilde{S}_{\widetilde{N}_1}(L_1) - L_1 \quad \text{et notons} \quad H_1 \text{ la loi de } \widetilde{V}_1$$
$$\widetilde{V}'_1 = \widetilde{S'}_{\widetilde{N},}(L_1) - L_1 \quad \text{et notons} \quad H_2 \text{ la loi de } \widetilde{V'_1}$$

Soit H la loi définie à partir de H_1 et H_2. H vérifie

$$H\Big(\{(x,y)/x=y\}\Big) = \gamma \geq c_1.c_2 > 0$$

Soit (V_1, V'_1) le couple de loi H. Alors $P(V_1 = V'_1) = \gamma > 0$.

On pose

$$S_1 = L_1 + V_1 = Z_0 + A + V_1 = Y_0 + Y_1$$
$$S'_1 = L_1 + V'_1 = Z_0 + A + V'_1 = Y'_0 + Y'_1$$
$$S_0 = V_0 = Y_0$$
$$S'_1 = V'_0 = Y'_0$$
$$Z_1 = \max(V_1, V_2).$$

Deuxième étape

on pose $L_2 = L_1 + Z_1 + A$. Soit K_1 la loi de $\widetilde{S}_{\widetilde{N}_1}(L_2) - L_2$ et K_2 la loi de $\widetilde{S'}_{\widetilde{N'}}(L_2) - L_2$. Soit K la loi définie à partir de K_1 et K_2 suivant le lemme 3 et (V_2, V'_2) le couple de variables aléatoires de loi K, alors $P(V_2 = V'_2) = \gamma > 0$.

on pose

$$S_2 = L_2 + V_2 = L_1 + Z_1 + A + V_2 = Z_0 + Z_1 + 2A + V_2$$
$$S'_2 = L_2 + V'_2 = Z_0 + Z_1 + 2A + V'_2$$

alors $P(S_2 = S'_2) = \gamma > 0$.

n-ième étape :

Soit $n \geq 2$. Posons $Z_n = \max(V_n, V'_n)$, $L_{n+1} = L_n + Z_n + A$, u_1 la loi de $\widetilde{S}_{\widetilde{N}}(L_{n+1}) - L_{n+1}$ et U_2 la loi de $\widetilde{S'}_{\widetilde{N'}}(L_{n+1}) - L_{n+1}$ et U' la loi définie à partir de U_1 et U_2 comme dans le

lemme 5.2.6 3 et soit $\left(V_{n+1}, V'_{n+1}\right)$ le couple de VA de loi U'.
Posons

$$S_{n+1} = L_{n+1} + V_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} Z_i + (n+1)\, A + V_{n+1}$$

$$S'_{n+1} = L_{n+1} + V'_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} Z_i + (n+1)\, A + V'_{n+1}$$

nous avons $P\left(S_{n+1} = S'_{n+1}\right) > 0$.
Chaque L_i est le début d'une période qui contient un renouvellement de S et un autre de S' et où les deux processus coïncident avec une probabilité strictement positive. on pose $U_i = A + Z_i$.
Soit $\tau = \min\left(i, V_i = V'_i\right)$, τ est le numéro du premier renouvellement où coïncident les deux processus S et S' construits précédemment. Ce point de rencontre appartient à un intervalle de longueur supérieure ou égale à A. Noton $\mathcal{A}$ l'évènement suivant :

Il s'écoule un temps supérieur ou égal à A pour qu'il se produise une autre rencontre des deux processus.

L'évènement $\mathcal{A}$ défini ci dessus est réalisé avec une probabilité $\geq \gamma$ puisque

$$\forall i,\ P\left(V_i = V'_i\right) \geq \gamma.$$

La longueur du plus petit intervalle où la première rencontre des deux processus se produit est donnée par la variable aléatoire $Z_0 + \sum_{i=1}^{\tau} U_i = \sum_{i=0}^{\tau} Z_i + \tau.A$.
D'autre part, comme T est le premier point commun aux deux processus, on a l'inégalité suivante vérifiée

$$T \leq Z_0 + \sum_{i=1}^{\tau} U_i$$

comme $Z_0 = \max\left(V_0, V'_0\right)$, on a bien $Z_0 \leq V_0 + V'_0$, donc $\|Z_0\|_\alpha \leq \|V_0 + V'_0\|_\alpha = \|V'_0 + V_0\|_\alpha$, d'où $\|Z_0\|_\alpha^\alpha \leq \left(\|V_0\|_\alpha + \|V'_0\|_\alpha\right)^\alpha$.
D'après le lemme 5.2.7, il existe $c > 0$ tel que $E\left(V_0^\alpha\right) = E\left(V_0'^\alpha\right) < c$.
Par conséquent, il suffit de montrer que :

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^{\tau} U_i\right)^\alpha\right) < +\infty$$

En effet :

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^{\tau} U_i\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \sum_{1}^{+\infty} E\left(U_i^\alpha . 1_{\{\tau \geq i\}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Posons $\mathcal{B}_j = \sigma\left\{Y_k, Y'_k,\ k \leq j\right\}$, $\mathcal{B}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

$$\begin{aligned}E\left(U_i^\alpha.1_{\{\tau\geq i\}}\right) &= E\left(1_{\{\tau\geq i\}}\right)E\left(U_i^\alpha/\mathcal{B}_{i-1}\right)\\ E\left(U_i^\alpha/\mathcal{B}_{i-1}\right) &= E\left((A+Z_i)^\alpha/\mathcal{B}_{i-1}\right)\text{ d'après le lemme 3}\\ &\leq c\left(1+E\left(Z_i^\alpha/\mathcal{B}_{i-1}\right)\right)\end{aligned}$$

Mais $Z_i = V_iVV_i' \ \leq V_i + V_i'$, donc

$$E\left(Z_i^\alpha/\mathcal{B}_{i-1}\right) \overset{(1)}{\leq} c\left(E\left(V_i^\alpha/\mathcal{B}_{i-1}\right)+E\left(V_i'^\alpha/\mathcal{B}_{i-1}\right)\right)$$

car $V_i = V(A)$ où $V(t) = S_{N_{(t)}} - t$.

on a

$$V_i' = V'\left(A + Z_{i-1} - \min\left(V_{i-1}, V_{i-1}'\right)\right)\ (*)$$

où $V'(t) = S'_{N(t)'} - t$ tel que $S'_{L_{i-1}+Z_{i-1}} = 0$.
puisqu'on conditionne par rapport à $\mathcal{B}_{i-1}$ et comme $L_{i-1}+Z_{i-1}$ est $\mathcal{B}_{i-1}$ mesurable, on a d'après le lemme 5.2.7

$$E\left(V_i^\alpha/\mathcal{B}_{i-1}\right) \overset{(2)}{\leq} c_4(1+A)$$

car $V_i = V(A)$. De même

$$E\left(V_i'^\alpha/\mathcal{B}_{i-1}\right) \overset{(3)}{\leq} c_5(1+A)$$

car $V_i' = V'\left(A + Z_{i-1} - \min\left(V_{i-1}, V_{i-1}'\right)\right)$. Donc : grâce, à (1), (2) et (3), on a

$$E\left(Z_i/\mathcal{B}_{i-1}\right) \leq c(1+Z_{i-1}) \qquad (I)$$

$$\begin{aligned}E\left(Z_i^\alpha\right) &= E\left(E\left(Z_i^\alpha/\mathcal{B}_{i-1}\right)\right)\quad\text{d'après }(I)\\ &\leq c\left(1+E\left(Z_{i-1}\right)\right)\quad (II)\end{aligned}$$

fixons $\rho > 1$ petit tel que $\rho^{\frac{1}{\alpha}}\ (1-\gamma)^{\frac{1}{\alpha_1}} < 1$, où α_1 est un nombre vérifiant $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_1} = 1$.
D'autre part : $E\left(Z_{i-1}\right) = E\left(E\left(Z_{i-1}/\mathcal{B}_{i-2}\right)\right)$ et en procédant de la même manière que pour Z_i, on a :

$$E(Z_{i-1}) \leq c(1+E(Z_{i-2})) \leq c + c^2(1+E(Z_{i-3}))$$

en réitérant ce procédé, on obtient l'inégalité suivante :

$$E\left(Z_{i-1}\right) \leq \sum_{k=1}^{i-1} c^k + 2c \leq C + \rho^i,\ \forall\, i.$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} E\left(U_i^\alpha \cdot 1_{\{\tau \geq i\}}\right) &\leq E\left(1_{\{\tau \geq i\}}\left(c + cZ_{i-1}\right)\right) \\ &\leq c \cdot (1-\gamma)^i + c \cdot E\left(Z_{i-1} 1_{\{\tau \geq i\}}\right) \\ P(\tau \geq i) &= P(\tau \geq i, \tau \geq i-1) \\ &= P(\tau \geq i / \tau \geq i-1)\, P(\tau \geq i-1) \\ &\leq (1-\gamma)\, P(\tau \geq i-1) \leq (1-\gamma)^i, \end{aligned}$$

car $\{V_i = V_i'\} = \{\tau \leq i\}$, donc $P(\tau \leq i) = P(V_i = V_i') \geq \gamma$ ou encore $P(\tau \geq i) \leq 1 - \gamma$.
or $E\left(Z_{i-1} 1_{\{\tau \geq i\}}\right) \leq \left(E\left(Z_{i-1}^\alpha\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} . (1-\gamma)^{\frac{i}{\alpha_1}}$
et $E\left(U_i^\alpha . 1_{\{\tau \geq i\}}\right) \leq c. (1-\gamma)^i + c\rho^{\frac{i}{\alpha}} (1-\gamma)^{\frac{i}{\alpha_1}}$. Comme $E[(\sum_{i=1}^\tau U_i)^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} \leq \sum_{i \geq 1} E(U_i^\alpha . 1_{\{\tau \geq i\}})$, et $T \leq Z_0 + \sum_{i=1}^\tau$, on peut conclure que $E(T^\alpha) < +\infty$.

Proposition 5.2.9 *[64]*
Soit $0 < \beta < 1$, supposons $m_\beta(G_1) < +\infty$ et $m_\beta(G_2) < +\infty$, alors $E\left(T^\beta\right) < +\infty$.

preuve :
on sait que $\forall\, x_1, x_2 \geq 0, (x_1 + x_2)^\beta \leq x_1^\beta + x_2^\beta$,

$$E\left(T^\beta\right) \leq E\left(Y_0^\beta + Y_0'^\beta\right) + \sum E\left((1 + Z_i)^\beta\, 1_{\{\tau \geq i\}}\right)$$

$$\begin{aligned} E\left((A + Z_i)^\beta\, 1_{\{\tau \geq i\}}\right) &= E\left(E\left((A + Z_i)^\beta\, 1_{\{\tau \geq i\}}\right)\right) \\ &= E\left(E\,(A + Z_i)^\beta . 1_{\{\tau \geq i\}} / \sigma\left(\{Y_0, Y_0'\}\right)\right) \\ &\leq (E\,(A + Z_i) / \sigma\,\{Y_0, Y_0'\})^\beta . E\left(1_{\{\tau \geq i\}} / \sigma\,\{Y_0, Y_0'\}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}} \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Hölder, où α_2 est tel que $\beta + \frac{1}{\alpha_2} = 1$.
Mais

$$E\left(1_{\{\tau \geq i\}} / \sigma\,\{Y_0, Y_0'\}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}} = P(\tau \geq i) \leq (1-\gamma)^{\frac{1}{\alpha_2}}$$

$$E\left((A + Z_i) / \sigma\,\{Y_0, Y_0'\}\right)^\beta \leq c\rho^{i\beta} + cZ_0^\beta$$

Z_0^β s'écrit en fonction de Y_0^β et $Y_0'^\beta$ qui possèdent une espérance finie puisque par hypothèse $m_\beta(G_1) < +\infty$ et $m_\beta(G_2) < +\infty$, donc on a bien $E\left(T^\beta\right) < +\infty$.

5.3 Couplage en files d'attente.

Notons $W = (W^x(t))_t$ (resp, $(\mathcal{W} = \mathcal{W}(t))_t$) le processus virtuel en régime transitoire (resp, en régime stationnaire).

5.3.1 La file à un serveur.

Dans le cas de la file à un serveur les processus W et $\mathcal{W}$ satisfont les équations différentielles suivantes :

$$d\mathcal{W}(t) + 1_{\{\mathcal{W}(t)>0\}}dt = dN(t) \tag{5.1}$$

et

$$\begin{cases} dW^x(t) + 1_{\{W^x(t)>0\}}dt = dN(t), & \text{pour } \ t > 0 \\ W^x(0) = x, & \text{x} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Posons $S^x = \inf\{\ t > 0\ /\ W^x(t) = 0\}$ et $S = \inf\{\ t > 0\ /\ \mathcal{W}(t) = 0\}$,
S^x et S sont P p.s finis , de plus

$$\forall t \geq S^x \vee S, \text{ on a } \quad W^x(t) = \mathcal{W}(t)$$

De même le processus du temps d'attente en régime transitoire coïncident avec le processus du temps d'attente en régime stationnaire après un temps fini.

5.3.2 File avec plusieurs classes de clients.

Dans ce cas les processus W, et $\mathcal{W}$ vérifient

$$d\mathcal{W}(t) + 1_{\{\mathcal{W}(t)>0\}}dt = d(\sum_{i=1}^{p} N_i(t))$$

$$\begin{cases} dW^x(t) + 1_{\{W^x(t)>0\}}dt = d(\sum_{i=1}^{p} N_i(t))(t), & \text{pour } \ t > 0 \\ W^x(0) = x, & \text{x} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Posons $S^x = \inf\{\ t > 0\ /\ W^x(t) = 0\}$ et $S = \inf\{\ t > 0\ /\ \mathcal{W}(t) = 0\}$,
S^x et S sont P p.s finis , de plus

$$\forall t \geq S^x \vee S, \text{ on a } \quad W^x(t) = \mathcal{W}(t)$$

5.3.3 Deux files en série.

Dans ce cas $W^x = (W^{1x_1}, W^{1x_1,2x_2})$ avec $x = (x_1, x_2)$ et $\mathcal{W} = (\mathcal{W}^1, \mathcal{W}^2)$ Sous les hypothèses de la section 4.6.4, deux files en série passent une infinité de fois en zéro. Soit S_1 le premier instant où $W^{1x_1}(t) = \mathcal{W}^1(t)$, à partir de cet instant les deux processus $W^{1x_1,2x_2}, \mathcal{W}^2$ sont définis par les mêmes variables, par le même procédé que pour la première file on montre l'existence et la finitude d'une variable S_2 tel que $W^{1x_1,2x_2} = \mathcal{W}^2$.

5.3.4 La file G/G/q.

Dans ce cas $W^s = (W_1^s, W_2^s, ..., W_q^s)$ et $\mathcal{W} = (\mathcal{W}^1, \mathcal{W}2, ..., \mathcal{W}^q)$ tous deux verifiant l'équation 4.6 du paragraphe 4.4 Nous nous plaçons sous les hypothèses de la section 4.6.2, alors il existe une variable TP p.s finie tel que $\forall t \geq T$ on a $W^s(t) = \mathcal{W}(t)$.

5.3.5 File avec impatience.

On considère la file définie par l'équation 4.11 , sous les hypothèses de la section 4.3 cette file possède un couplage.

Conclusion : L'hypothèse la loi de la durée de vie est non latticielle est indispensable pour l'existence d'un couplage, dans le cas d'une chaine de Markov cette hypothèse est équivalente à l'apériodicité de la chaine et qui entraine l'irréductiblité de la chaine de Markov.

Chapitre 6

Convergence en loi des files d'attente stationnaires

Nous montrons comment les résultats de la théorie du renouvellement et la technique de couplage entrainent la convergence des files définies dans le chapitre précédent.

6.1 Application du théorème 3.1.6.

6.1.1 Convergence en loi du processus du temps d'attente d'une file GI/GI/1.

Le flot d'entrée est noté $((A_n, B_n), n \in \mathbb{N})$ tel que $(A_n)_n$ est la suite des inter-arrivées supposée constituée de variables indépendantes équididstribuées et indépendante de la suite $(B_n)_n$ des temps de service qui est aussi formée de variables indépendantes équidistribuées, sous l'hypothèse $E(B_1) < E(A_1)$ les variables définies ci-dessous sont finies P p.s :

- $\underline{\mathbf{p}}$ la période d'occupation du serveur.
- $\underline{\mathbf{c}}$ le cycle d'occupation.
- $\underline{\mathbf{i}}$ la période d'inoccupation du serveur.

. $\underline{\mathbf{n}}$ le nombre de clients servis pendant un cycle.

On suppose que le système démarre à l'instant $t = o$, par conséquent le temps d'attente du client numéro 1 est nul, dans ce cas on peut écrire $\underline{\mathbf{p}} = \sum_{k=1}^{\underline{\mathbf{n}}} A_k$, $\underline{\mathbf{c}} = \sum_{k=1}^{\underline{\mathbf{n}}} B_k$, $\underline{\mathbf{i}} = \underline{\mathbf{c}} - \underline{\mathbf{p}}$

On notera $(\underline{\mathbf{c}}_n)_n$ la suite des cycles d'occupation, $(\underline{\mathbf{n}}_n)_n$ la suite du nombre de clients servis durant les cycles.

Théorème 6.1.1 *[26]*

Si $E(\underline{\mathbf{n}}) < +\infty$ et si la loi de $\underline{\mathbf{n}}$ est apériodique, alors W_n converge en loi vers W_∞ de loi définie par

$$P(W_\infty < x) = \frac{1}{E(\underline{\mathbf{n}})} E(\sum_{k=1}^{\underline{\mathbf{n}}_1} 1_{\{W_k < x\}})$$

Preuve. Nous avons $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n E(e^{-\rho W_n}) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} r^n E(e^{-\rho W_n})$ et grâce au théorème de convergence monotone on a $\lim_{N \to +\infty} E(\sum_{n=1}^{N} r^n e^{-\rho W_n}) = E(\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-\rho W_n})$.

Comme le processus $(W_n)_n$ est régénératif par rapport à la suite de renouvellement $(\underline{\mathbf{n}}_n)_n$, on la relation suivante :

$$\begin{aligned}
&E(\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-\rho W_n}) \\
&= E(\sum_{n=1}^{\underline{\mathbf{n}}_1} r^n e^{-\rho W_n}) + E(\sum_{n=\underline{\mathbf{n}}_1+1}^{+\infty} r^n e^{-\rho W_n}) \\
&= E(\sum_{n=1}^{\underline{\mathbf{n}}_1} r^n e^{-\rho W_n}) + E(\sum_{m=1}^{+\infty} r^{m+\underline{\mathbf{n}}_1} e^{-\rho W_{m+\underline{\mathbf{n}}_1}}) \\
&= E(\sum_{n=1}^{\underline{\mathbf{n}}_1} r^n e^{-\rho W_n}) + E(r^{\underline{\mathbf{n}}_1}) E\big(\sum_{m=1}^{+\infty} r^m e^{-\rho W_{m+\underline{\mathbf{n}}_1}}\big) \\
&= E(\sum_{n=1}^{\underline{\mathbf{n}}_1} r^n e^{-\rho W_n}) + E(r^{\underline{\mathbf{n}}_1}) \sum_{m=1}^{+\infty} r^m E(e^{-\rho W_m})
\end{aligned}$$

Ces relations entrainent :

$$\sum_{n \geq 1} r^n E\big(e^{-\rho W_n}\big) = \frac{1}{1 - E(r^{\underline{\mathbf{n}}_1})} E\big(\sum_{n \geq 1} r^n e^{-\rho W_n} 1_{\{\underline{\mathbf{n}}_1 \geq n\}}\big). \tag{6.1}$$

Pour tout $-1 < r < +1$, on a

$$\frac{1}{1 - E(r^{\underline{\mathbf{n}}_1})} = \sum_{n \geq 0} r^n \sum_{k \geq 0} P(\underline{\mathbf{n}}_0 + ... + \underline{\mathbf{n}}_k = n). \tag{6.2}$$

En effet : notons C la loi commune des $\underline{\mathbf{n}}_i$, alors le deuxième membre de l'équation 6.2 vaut

$$\sum_{n\geq 0} r^n \sum_{k\geq 0} C^{*k}(n) = \sum_{k\geq 0}(\sum_{n\geq} r^n C^{*k}(n)) = \sum_{k\geq 0} E(r^{\underline{\mathbf{n}}_1+\underline{\mathbf{n}}_2+\ldots+\underline{\mathbf{n}}_k}) = \sum_{k\geq 0}\prod_{i=1}^{k} E(r^{\underline{\mathbf{n}}_i}),$$

le dernier terme vaut exactement $\dfrac{1}{1-E(r^{\underline{\mathbf{n}}_1})}$. De plus la relation 6.1 entraine que

$$E\big(e^{-\rho W_n}\big) = \sum_{m=0}^{n-1} E\big(e^{-\rho W_{n-m}} 1_{\{\underline{\mathbf{n}}_1 \geq \ n-m\}}\big) \sum_{k=0}^{+\infty} P(\underline{\mathbf{n}}_0 + \ldots + \underline{\mathbf{n}}_k = m). \tag{6.3}$$

La relation 6.3 est l'équation de renouvellement dans le cas discret. Les hypothèses de la partie A du théorème 3.1.6 étant satisfaites, on la conséquence suivante :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} E\big(e^{-\rho W_n}\big) = \frac{1}{E(\ \underline{\mathbf{n}}\ )}\sum_{k=1}^{\underline{\mathbf{n}}_1} E\big(e^{-\rho W_k}\big).$$

6.1.2 Convergence en loi du processus de la charge du serveur.

Lemme 6.1.2 *[26]*
Le processus $(W(t))_t$ est presque sûrement continu en tout point $t \in [0,+\infty[-D$, où $D \subset [0,+\infty[$ dénombrable.

Théorème 6.1.3 *[26]*
Si $E(\underline{\mathbf{c}}) < +\infty$ et si $\underline{\mathbf{c}}$ suit une loi non latticielle, alors $W(t)$ converge en loi vers une variable W_∞ dont la loi est donnée par :

$$P\big(W_\infty \leq \ x\big) = \frac{1}{E(\underline{\mathbf{c}})} E\Big(\int_0^{\underline{\mathbf{c}}} 1_{\{\ W(t)\leq\ x\}} dt\Big)$$

preuve

$$\int_0^\infty e^{-st} E(e^{-\rho W(t)}) dt$$

$$= E\Big(\int_0^\infty e^{-st-\rho W(t)} dt\Big)$$

$$= E\Big(\int_0^{\underline{\mathbf{c}}_1} e^{-st-\rho W(t)} dt\Big) + E\Big(\int_{\underline{\mathbf{c}}_1}^\infty e^{-st-\rho W(t)} dt\Big)$$

Comme le processus $\Big(W(t)\Big)_t$ est régénératif par rapport à la suite $\Big(\underline{\mathbf{c}}_n\Big)_n$, alors

$$E\Big(\int_{\underline{\mathbf{c}}_1}^\infty e^{-st-\rho W(t)} dt\Big)$$

$$= E\Big(\int_0^{\infty} e^{-s(t+\underline{\mathbf{c}}_1)-\rho W(t+\underline{\mathbf{c}}_1)}dt\Big)$$

$$= E\big(e^{-s\underline{\mathbf{c}}_1}\big)E\Big(\int_0^{\infty} e^{-st-\rho W(t)}dt\Big)$$

$$= E\big(e^{-s\underline{\mathbf{c}}_1}\big)\int_0^{\infty} e^{-st}E\Big(e^{-\rho W(t)}dt\Big)$$

Ce qui entraine la relation suivante :

$$\int_0^{\infty} e^{-st}E(e^{-\rho W(t)})dt = \frac{1}{1-E\big(e^{-s\underline{\mathbf{c}}_1}\big)}E\Big(\int_0^{\underline{\mathbf{c}}_1} e^{-st-\rho W(t)}dt\Big).$$

Notons que $\dfrac{1}{1-E\big(e^{-s\underline{\mathbf{c}}_1}\big)} = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}d\Big(\sum_{k\geq 0}P(\underline{\mathbf{c}}_0+...\underline{\mathbf{c}}_k < t)\Big)$

En effet : le deuxième membre de l'égalité précédente vaut aussi

$$\sum_{k\geq 0}E(e^{-st(\underline{\mathbf{c}}_1+\underline{\mathbf{c}}_2+...+\underline{\mathbf{c}}_k})=\sum_{k\geq 0}\prod_{i=1}^{k}(e^{-s\underline{\mathbf{c}}_i})=\sum_{k\geq 0}(E(e^{-s\underline{\mathbf{c}_1}}))^k$$

On peut conclure que $E\big(e^{-\rho W(t)}\big) = \displaystyle\int_0^t E\Big(e^{-\rho W(t-u)}1_{\{\underline{\mathbf{c}}_1\geq t-u\}}du\sum K^{*n}(u)\Big)$ où $K(.)$ est la loi de $\underline{\mathbf{c}}_1$.

6.2 Applications du théorème 3.5.11 dans le problème de convergence en loi.

6.2.1 Convergence en loi d'une file à un serveur, à loi d'arrivée et de service générales.

Le résultat suivant est du à Lajos Takàcs, nous donnons ici une démonstration en utilisant le théorème 3.5.11, et en supprimant l'hypothèse d'indépendance du processus des arrivées et le processus des services. La démonstration que nous proposons est valable dans les deux cas suivants :

. Un système qui démarre à l'instant $t = 0$ avec une charge nulle.

. Un système ayant commencé en $-\infty$ et tel que : à l'instant $t = 0$ une arrivée se produit avec une charge nulle.

On note ρ l'intensité du flot d'entrée,$(A_n^*)_n$, (resp , $(B_n^*)_n$) la suite des inter-arrivées (resp, des temps de service), $W = (W(t), t \in \mathbb{T})$ où $\mathbb{T}$ pouvant être $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}$, le processus de la charge du serveur

Proposition 6.2.1 *:*

Sous les hypothèses suivantes :

- *Les couples* (A_n^*, B_n^*) *sont indépendants de même loi,*
- *La loi de* A_1 *est non latticielle,*
- $\rho < 1$,

Alors le processus $(W(t))_t$ *converge en loi.*

Preuve

On définit le schéma de Bernoulli suivant :

$$\left(\left(\mathbb{R}_+^2\right)^{\mathbb{Z}}, \left(\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+^2}\right)^{\otimes\mathbb{Z}}, (\mu)^{\otimes\mathbb{Z}}, \left(\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{Z}\right)\right) = \left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{P}, \left(\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{Z}\right)\right)$$

où μ est la loi commune des couples (A_n^*, B_n^*), et $\left(\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{Z}\right)$ est le groupe des opérateurs shift définis par $(A_1, B_1) \circ \theta_n = (A_{n+1}, B_{n+1})$ où $((A_n, B_n))_n$ est la suite des coordonnées de l'espace $(\mathbb{R}_+^2)^{\mathbb{Z}}$. Soit

$$T_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} A_i \text{ si } n \geq 1 \\ 0 \text{ si } n = 0 \\ -\sum_{i=n}^{i=-1} A_i \text{ si } n \leq -1 \end{cases}$$

Le processus ponctuel $N = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{T_n}$ est la description de Palm d'un processus ponctuel stationnaire, c'est un processus ponctuel de renouvellement du second ordre, et $\left(M_p(\mathbb{R}), \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \left(\widehat{P}\right)_N, (\tau_t, t \in \mathbb{R})\right)$, l'espace canonique associé à N, est un flot stationnaire. Notons $\left(\widehat{P}\right)_N$ la distribution de N par rapport à $\widehat{P}$. Comme $\frac{\widehat{E}(B_1)}{\widehat{E}A_1} = \rho \leq 1$ la variable $\mathcal{U} = \max_{k\leq 0}\left(\sum_{j=k+1}^{j=0} B_j - Aj\right)$ est $\widehat{P}$ presque sûrement finie, et vérifie la relation suivante : $\mathcal{U} \circ \widehat{\theta}_1 = (\mathcal{U} + B_1 - A_1)_+$. Soit $\mathcal{U}_n = \mathcal{U} \circ \widehat{\theta}_1$ avec $n \in \mathbb{Z}$, nous avons donc $\mathcal{U}_n = (\mathcal{U}_{n-1} + B_n - A_n)_+$.

La suite $(\mathcal{U}_n, n \in \mathbb{Z})$ définie sur $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{P}, \left(\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{Z}\right)\right)$ est stationnaire et récurre en 0 puisque $\widehat{P}(\mathcal{U}_0 = 0) > 0$.

Par conséquent, il existe une suite strictement croissante $(S_n, n \in \mathbb{Z})$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $\widehat{P}$ presque sûrement finies telles que $\{n \in \mathbb{Z}, \mathcal{U}_n = 0\} = \{S_n, n \in \mathbb{Z}\}$ et $S_{n+1} - S_n = S_1 \circ \widehat{\theta}_{S_1}$.

Soit $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{P}, (\widetilde{\theta}_t, t \in \mathbb{R})\right)$, le flot bati au dessus de $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{P}, (\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{Z})\right)$ sous la fonction A_1, et $(\widetilde{T}_n)$ la suite strictement croissante de variables aléatoires définies sur $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{A}})$ par

$$\widetilde{T}_n(x, s) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} A_i(x) - s & \text{si } n \geq 0, \\ -s & \text{pour } n = 0, \\ -\sum_{i=n}^{i=-1} A_i(x) - s & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

On définit une application Δ de $\widehat{\Omega}_S = \{S=0\}$ dans $\mathbf{G} = \sum_{n\geq 1}\{n\}\times\mathbb{R}^n$ en posant

$$\Delta(\omega) = (S_1(\omega), ((T_i(\omega) - T_{i-1}(\omega)), 0 \leq i < S_1(\omega)))$$

Δ vérifie les deux relations suivantes :

$\cdot$ $\Delta\left(\widehat{\theta}_{S_n}(\omega)\right) = \left((S_{n+1}-S_n)(\omega), \left((T_i - T_{i-1})(\omega), S_n(\omega) \leq i < S_{n+1}(\omega)\right)\right)$

$\cdot$ $\Delta(\theta_x(\omega)) = \left((S_{n+1}-S_n)(\omega), \left((T_i - T_{i-1})(\omega), S_n(\omega) \leq i < S_{n+1}(\omega)\right)\right)$ si $T_{S_n}(\omega) \leq x < T_{S_{n+1}}(\omega)$.

Sur le flot $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{P}, (\widetilde{\theta}_t, t\in\mathbb{R})\right)$ on définit les trois processus ponctuels suivants :
$N_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{\widetilde{T}_n}$ de mesure de Palm $\widehat{P}_1 = \widehat{P}$, $N_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{\widetilde{T}_{S_n}}$ de mesure de Palm $\widehat{P}_2 = \widehat{P}1_{\{S_0=0\}}$, $N_3(\omega, dxds) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{\widetilde{T}_{S_n}(\omega)}(dx)\otimes\delta_{\Delta(\theta_x\omega)}(ds)$ de mesure de Palm sur $\Omega_S\otimes\mathbf{G}$ égale à $\widehat{P}_2(.)\delta_{\Delta(.)}$

et le processus stochastic $\widetilde{\mathcal{W}} = (\widetilde{\mathcal{W}}_t)_t$ défini par

- $\widetilde{\mathcal{W}}_0(\omega, s) = (\mathcal{U} + B_1 - s)_+$, stationnaire par le flot $(\widetilde{\theta}_t)_t$, puisque
- $\widetilde{\mathcal{W}}_0 \circ \widetilde{\theta}_t(\omega, s) = (\mathcal{U}\circ\theta_k + B_{k+1} - (t + s - T_k)(\omega)$ si $\widetilde{T}_k(\omega, s) \leq t < \widetilde{T}_{k+1}$.

Le processus $\widetilde{\mathcal{W}}$ défini sur $\widetilde{\Omega}$ est le processus de la charge du serveur.
D'autre part, notons que $\frac{\widehat{\widehat{E}}(B)}{\widehat{\widehat{E}}(A)} = \frac{\mathbb{E}(B)}{\mathbb{E}(A)} < 1$, par conséquent la variable $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ est $\widetilde{P}$ presque sûrement finie.
De plus $\widehat{\widehat{P}}(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{\widetilde{\mathcal{W}}(\widetilde{\omega}, \widetilde{T}_n(\widetilde{\omega}) - 0) = 0\}) = P(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{\ \{W(\ \omega, T_n(\omega) - 0) = 0)\}) > 0$
Sur l'espace canonique $\mathbf{M}^b_+(\mathbb{R}\times\mathbf{G})$ associé au processus ponctuel marqué $\overline{\widetilde{N}}_S = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{\widetilde{T}_{S_n}}\otimes\delta_{\Delta(\widehat{\theta}_{S_n})}$ est définie la fonction aléatoire W' par $W'\circ\overline{\widetilde{N}}_S = \widetilde{\mathcal{W}}$ qui est $(\widetilde{P})_{\widetilde{N}}$ presque sûrement continue, puisque $\widetilde{P}(\widetilde{T}_0 = 0) = \widetilde{P}(\{0\}\times\widehat{\Omega}) = 0$ car la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ ne charge pas les points.

Il en résulte que :

$$\int \exp\left(-\alpha W'(m)\right)\tau_x\circ\overline{\widetilde{N}}\circ\widehat{\widetilde{P}}_S(dm) \longrightarrow \int \exp\left(-\alpha W'(m)\right)\overline{\widetilde{N}}\circ\widetilde{P}(dm)$$

lorsque $x\longrightarrow+\infty$ Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}^*_+$, où $\widehat{\widetilde{P}}_S = \widehat{\widetilde{P}}1_{\{\widetilde{W}(0-0)=0\}}$ qui est la probabilité de Palm du processus $\widetilde{N}_S = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{\widetilde{T}_{S_n}}$. Comme $W'\circ\overline{\widetilde{N}} = \widetilde{\mathcal{W}}$ et $W'\circ\tau_x\circ\overline{\widetilde{N}} = \widetilde{\mathcal{W}}(x)$
Finallement, la convergence precédente est équivalente à :

$$\int_\Omega \exp\left(-\alpha W\left(\theta_x\omega\right)\right)1_{\{W(0-0)=0\}}\widehat{P}(d\omega) \longrightarrow \frac{1}{E\left(A_1\right)}\int_\Omega \widehat{P}(d\omega)\int_0^{A_1(\omega)} \exp\left(-\alpha\left(U_0 + B_0 - s\right)\right)ds$$

lorsque $x\longrightarrow+\infty$ Comme $(W(t))_t$ se confond avec le processus stationnaire $\mathcal{W}$ après un temps presque sûrement fini , on a le résultat annoncé par le théorème.

6.2.2 Une seule file avec plusieurs classes de clients.

Théorème 6.2.2

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}, (\theta_t, t \in \mathbb{R}))$ un flot mélangeant et $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k < 1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^p$ $\mathcal{L}\big(W^x(t) \;/\; \widehat{P}\big) \longrightarrow \mathcal{L}\big(\mathcal{W}(0) \;/\; P\big)$ quand $t \longrightarrow +\infty$.

6.2.3 Deux files en tandem.

Théorème 6.2.3

Si $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}, (\theta_t, t \in \mathbb{R}))$ est un flot mélangeant et $\widetilde{E}(B_1^i) < \widehat{E}(A_1), i = 1, 2$ et infess $(B_1^1) +$ infess $(B_1^2) <$ supess (A_1) et la famille $\big((A_n, B_m^1, B_k^2), (n, m, k) \in \mathbb{Z}^3\big)$ est constituée de vecteurs indépendants, alors : $\mathcal{L}\big(W^x(t) \;/ \widehat{P}\big) \longrightarrow \mathcal{L}\big(\mathcal{W}(0) \;/\; P\big)$, quand $t \longrightarrow +\infty$.

6.2.4 Convergence en loi de la file $G/G/q$.

Théorème 6.2.4

Supposons le flot $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}, (\theta_t, t \in \mathbb{R}))$ mélangeant, la suite de vecteurs aléatoires $((A_n, B_m), (n, m) \in \mathbb{Z})$ constituée de vecteurs indépendants et $\widehat{E}(B_1) < q.\widehat{E}(A_1)$, alors on a :

$$\frac{\widehat{E}(T_{S_1})}{\widehat{E}(T_1)} \int_\Omega \exp(-(\sum_{i=1}^{q} \beta_i W_i(t))) 1_{\{W(0) \in A\}} d\widehat{P} \longrightarrow \int \exp(-(\sum_{i=1}^{q} \beta_i \mathcal{W}_i(0))) dP \ ,$$

quand $t \longrightarrow +\infty$. où S_1 est le numéro de la première arrivée trouvant le système vide, et

$$A = \begin{cases} \{0_{\mathbb{R}^q}\}, & si\,;\ j = [\frac{b}{a}] = 0 \\ V_\delta, & si\; 0 < j < q. \end{cases}$$

Chapitre 7

Convergence en loi des files stationnairement périodiques

Nous consacrons ce chapitre à l'étude de la convergence en loi des files stationnairement périodiques.

Dans la première section, nous présentons les définitions de flot stationnairement périodique et de file stationnairement périodique, l'extension de la définition de processus régénératif. Dans la deuxième section on applique le théorème de Smith 3.2.2 à une file à un serveur à loi de service générale et à entrée Poissonienne non homogène. Dans la troisième section, on applique 3.5.11 pour établir des convergences en loi.

Définition 7.0.5 ***Une généralisation de la notion de processus régénératifs au cas stationnairement périodique.****[92]*
Soit $S = (S_n)_n$ une suite croissante de variables aléatoires strictement positives presque sûrement finies telles que $\lim_{n \longrightarrow \pm\infty} S_n = \pm\infty$.
$X = (X(t)_t)$ est un processus régénératif par rapport aux temps de régénération $(S_n)_n$ si et seulement si $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_(\mathbb{R})^{\infty}$, il existe une fonction mesurable $\overline{P}(A/.) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1]$ telle que :
$\forall\, n \ \geq\ 0,\ \ P((\theta_{S_n} \circ X), (S_{n+k} - S_n)_{k \geq 1} \in A/\ S_0, S_1, ..., S_n) = \overline{P}(A/S_n).$
Si $\overline{P}(./s) = \overline{P}(.)$ indépendante de $s \in \mathbb{R}_+$, dans ce cas X est homogène dans le temps et la définition se limite à la notion de processus régénératifs au sens de la définition 3.2.1

7.0.5 Processus ponctuels stationnairement périodiques, processus de Poisson stationnairement périodique

Flot stationnairement périodique.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité et $(\theta_t, t \in \mathbb{R})$ un groupe d'automorphismes tel que l'application $(t, \omega) \longrightarrow \theta_t(\omega)$ définie sur $(\mathbb{R} \times \Omega, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathscr{A})$ soit mesurable sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Définition 7.0.6

La probabilité P est dite stationnairement périodique pour le flot $(\theta_t, t \in \mathbb{R})$ si la relation suivante $\int_\Omega f(\theta_n \omega) P(d\omega) = \int_\Omega f(\omega) P(d\omega)$ est vérifiée pour tout n dans $\mathbb{Z}$ et toute fonction mesurable f sur Ω. Dans ce cas on dit aussi que le flot est stationnairement périodique.

Remarque

- Il suffit bien sûr que $\theta_1 \circ P = P$
- Pour $0 \leq t \leq 1$ soit $P_t = \theta_t \circ P$, on alors : $\forall n \in \mathbb{Z},\ \theta_n \circ P_t = P_t$

Définition 7.0.7 *Soit $\big(E, \mathcal{E}\big)$ un espace mesuré et N un processus ponctuel marqué à marque dans $\big(E, \mathcal{E}\big)$ défini sur $(\Omega, \mathscr{A})$ tel que $N(\theta_t(\omega), .) = \tau_t \otimes i_E \circ N(\omega, .)$ où $(\tau_t)_t$ est le flot des translations sur $\mathbb{R} \times E$. Si $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}, (\theta_t, t \in \mathbb{R}))$ est un flot stationnairement périodique, alors N est dit processus ponctuel marqué stationnairement périodique.*

Flot stationnaire associé à un flot stationnairement périodique.

La probabilité Q définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ reliée à la probabilité P par la formule

$$\int_\Omega f(\omega)\, Q(d\omega) = \int_\Omega P(d\omega) \int_0^1 f(\theta_x \omega)\, dx$$

est stationnaire pour le flot $(\theta_t, t \in \mathbb{R})$. La probabilité P est la mesure de Palm associée au processus ponctuel $N_U = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n-U}$, et au flot $(\Omega, \mathscr{A}, Q, (\theta_t, t \in \mathbb{R}))$ où U est une variable uniformément distribuée sur $[0, 1[$ par rapport à la probabilité Q. On note $\widehat{Q}$ $\big($ resp $\widehat{\mathbb{Q}}\big)$ la mesure de Palm(resp, la probabilité de Palm) du processus ponctuel $N = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{T_n}$ défini sur le flot $\big(\Omega, \mathscr{A}, Q, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$.

Proposition 7.0.8

Les assertions suivantes sont vraies :

1. *Le flot* $\big(\Omega, \mathscr{A}, Q, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$ *est stationnaire.*

2. $\big(\Omega, \mathscr{A}, Q, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$ *est ergodique si et seulement si le flot* $\big(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_n, n \in \mathbb{Z})\big)$ *est ergodique.*

3. *La probabilité* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *est reliée à la probabilité* P *par la formule suivante :*
$$\int f(\omega)\widehat{\mathbb{Q}}(d\omega) = \int_\Omega P(d\omega) \int_0^1 N(\omega, ds) f(\theta_s \omega).$$

7.0.6 Files d'attente stationnairement périodiques

La définition d'un flot stationnairement périodique a été présentée dans [24]. Notons $\big(T_n, X_n\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ les points de base du processus ponctuel marqué décrivant le flot d'entrée dans une file d'attente du type $G/G/1$ où les T_n sont les instants d'arrivées des clients à la file et les X_n les marques correspondantes. On suppose l'existence de deux variables A, X strictement positives et intégrables tel que $T_n - T_{n-1} = A \circ \theta_{T_n}$, et $X_n = X \circ \theta_{T_n}$. On note q_n le nombre d'arrivées durant l'intervalle de temps $[n-1, n[$ appelé la *nième* période, T_i^n la *ième* arrivée qui s'est produite durant la *nième* période , X_i^n la marque correspondante. Posons $U_i^n = T_i^n - (n-1)$, alors U_i^n est la partie décimale de T_i^n et la suite $U_i^1, U_i^2, ..., U_i^{q_n}$ est la suite des instants d'arrivée durant la *nième* période, elle satisfait $U_i^1 < U_i^2, ... < U_i^{q_n}$

Définition 7.0.9
La file $G/G/1$ *dont le flot d'entrée est défini par la suite* $\big((T_n, X_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big)$ *est dite périodiquement stationnaire si : le processus ponctuel marqué* $\overline{N} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{T_n} \otimes \delta_{X_n}$ *défini sur le flot* $\big(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$ *est stationnairement périodique.*

Proposition 7.0.10 *[24]*
Le processus $\overline{N} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{T_n} \otimes \delta_{X_n}$ *défini sur le flot* $\big(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}\big)$ *est stationnairement périodique si et seulement si la suite* $Y = (Y_n, n \in \mathbb{Z}) = \big((U_i^k, X_i^k), 1 \le i \le q_k)\big)_{k,k\in\mathbb{Z}}$ *definie sur le flot* $\big(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_n, n \in \mathbb{Z})\big)$*, associée à la suite* $\big((T_n, X_n), n \in \mathbb{Z}\big)$*, est stationnaire.*

Preuve
Posons
$$Q_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} q_i & \text{si } n \ge 1, \\ \sum_{i=n-1}^{0} q_i & \text{si } n \le 0. \end{cases}$$

Q_n, quand $n > 0$ représente le nombre d'arrivées durant l'intervalle de temps $[0, n[$. Alors $T_i^n = T_{i+Q_n}$ et $X_i^n = X_{i+Q_n}$, donc $X_i^n = X \circ \theta_{T_{i+Q_n}} = X_i^{n-1} \circ \theta_1$,
puisque $X_i^{n-1}(\theta_1 \omega) = X \circ \theta_{T_{i+Q_n(\omega)}}\big(\omega\big) = X_i^n(\omega)$ car,

- $\theta_S \circ \theta_T = \theta_{T+S\circ\theta_T}$
- $1 + T_j \circ \theta_1 = T_{j+q_1}$
- $Q_{n-1} \circ \theta_1 = Q_n - q_1$.
- $X(\theta_{S(\omega)}(\theta_1(\omega))) = X(\theta_{1+S(\omega)}(\omega))$ où $S(\omega) = T_{i+q_1+Q_n-q_1} - 1$

De même on montre que $A_i^{n-1} \circ \theta_1 = A_i^n$, de plus il est clair que sous l'hypothèse N stationnairement périodique on a $q_{n-1}\theta_1 = q_n$. D'où la condition necessaire est satisfaite.
Réciproquement, montrons que pour toute suite $Y = \big(Y_n\big)$ du type défini par la proposition stationnaire sous θ_1 on peut associer un flot $\big(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$ et un processus ponctuel marqué N tous deux stationnairement périodique.
En effet, soient $G = \{0\} + \sum_{k=1}^{+\infty}([0,1[\times E)^k$ et $\mathcal{G}$ sa tribu naturelle, $\Omega = G^{\otimes\mathbb{Z}}, \mathscr{A} = \mathcal{G}^{\otimes\mathbb{Z}}$, Y_n la *nième* projection de Ω et θ la transformation qui vérifie $Y_n \circ \theta = Y_{n+1}$. On note K_n le nombre de composantes de Y_n, si $K_n \neq 0$ alors $Y_n = \big((U_1^n, Z_i^n)\ 1 \leq K_n\big)$. Soit $\mathbb{P}$ la probabilité sur $\big(\Omega, \mathscr{A}\big)$ invariante par la transformation θ et telle que $U_i^1 < U_i^2, ... < U_i^k$, $\mathbb{P}$ $p.s$ sur $\{K_n = k\}$. Soient $(S_k, k \in \mathbb{Z}) = (k \in \mathbb{Z}, K_n > 0)$ choisie de manière à avoir $S_0 \leq S_1$ et $(T_j, j \in \mathbb{Z}) = \big((S_j - 1 + U_k^j, 1 \leq k \leq K_{S_j}), j \in \mathbb{Z})\big)$
Posons $N = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_{T_j} \otimes \delta_{X_j}$ où $X_j = Z_i^{S_n}$ quand $T_j = S_n - +U_i^{S_n}$. L'espace canonique associé à N soit $\Big(M_p(\mathbb{R} \times E), \mathcal{M}_p(\mathbb{R} \times E), (\mathbb{P})_N, (\tau_t, t \in \mathbb{R})\Big)$ est un flot stationnairement périodique de période 1 et le processus ponctuel identité défini par $I(\omega, dt \times ds) = \omega$ est stationnairement périodique.

Processus ponctuel de Poisson stationnairement périodique

Soit $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction périodique de période égale à 1. Soit N un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\lambda(t)$, c'est à dire tel que

$$P\big(N([a,b] = k)\big) = \exp\big(-\int_a^b \lambda(t)dt\big)\frac{\big(\int_a^b \lambda(t)dt\big)^k}{\prod_{j=1}^{j=k}(j)} \tag{7.1}$$

Posons $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$, alors le processus ponctuel $N([\Lambda^{-1}(a), \Lambda^{-1}(b)])$ est un processus ponctuel de Poisson homogène de paramètre egal à 1.
Le processus ponctuel N défini par 7.1 est stationnairement périodique de période egale

à 1.

Proposition 7.0.11
Notons $\left(q_n, n \in \mathbb{Z}\right)$ *la suite de nombres entiers où* q_n *représente le nombre de clients reçus par le système durant la nième période,* U_i^k *ets la partie décimale de* T_{i+Q_k}*, et* S_k *est le numéro de la kième période chargée. Alors,*

- *La suite* $(q_n)_n$ *est une suite de variables indépendantes équidistribuées de loi commune de de Poisson de paramètre* $\int_0^1 \lambda(t)dt$
- *La loi de la suite* $U_1^n, U_2^n, ..., U_k^n$ *sachant* $\{q_n = k\}$ *est la loi d'une suite ordonnée de k variables aléatoires indépendantes dont la loi est de densité* $\frac{\lambda(.)}{\int_0^1 \lambda(s)ds}$
- *Les variables* $S_k - S_{k-1}$ *sont des variables indépendantes géométrique de paramètre* $\exp(-\int_0^1 \lambda(s)ds)$.

7.0.7 Convergence en loi des files stationnairement périodiques

convergence en loi d'une file d'attente à un serveur à loi de service générale et à loi d'arrivée Poissonienne périodique.

Cette sous-section est constituée des résultats du célèbre article de Harisson et Lemoine [48] sur la file $M_{per}/G_{per}/1$.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité sur lequel sont définies les suites de variables aléatoires $(T_n)_n$, et $(B_n)_n$, où $(T_n)_n$ est la suite des instants d'arrivée à un système composé d'une file d'un guichet et d'un serveur, $(B_n)_n$ est la suite des temps de service. On supposera que la suite $\left(B_n\right)_n$ est constituée de variables aléatoires indépendantes équidistribuées de fonction de répartition F avec $F\left(0\right) = 0$, (on ne considère que les clients qui ont un temps de service non nul), indépendante du processus des arrivées. On pose

$$X^*\left(t\right) = \sum_{i=1}^{A^*(t)} B_i \quad \text{où } A^*\left(t\right) = \max\left(n, T_n \leq t\right),\ \mathcal{F}_t^* = \sigma\left\{X^s,\ 0 \leq s \leq t\right\}$$

X^* est un processus de sauts sur $\Omega \times \mathbb{R}$, fortement markovien.
On suppose que le processus A^* est un processus de Poisson de paramètre t et donc de taux 1.

L'hypothèse de stationnarité périodique Soit λ une fonction positive définie sur $\mathbb{R}$ périodique de période égale à 1, on pose $\int_0^1 \lambda(u)\,du = \lambda$, et $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du$ $\Lambda(.)$ est croissante , continue et vérifie $\Lambda(0) = 0, \Lambda(n+t) = n\lambda + \Lambda(t), \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+$. Posons

$$A(t) = A^*(\Lambda(t)), \quad \text{et } X(t) = X^*(\Lambda(t)), \ \mathcal{F}_t = \sigma\{X(s), s \leq t\} = \mathcal{F}^*_{\Lambda(t)}.$$

Pour tout T un $(\mathcal{F}^*_t)$ temps d'arrêt, $\Lambda(T)$ est un $\mathcal{F}^*_{\Lambda(t)} = \mathcal{F}_t$ temps d'arrêt. A est un processus de Poisson non homogène de paramètre $\Lambda(t)$ X est un processus de sauts sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ continu à droite, dont le nombre de sauts dans $[0,t]$ est donné par $A(t)$ et la longueur du saut est de fonction de répartition F. Posons

$$W_n = \max_{0 \leq p \leq}\left(\sum_{i=p+1}^{n-1} B_i - A_{i+1}\right) \ , Y(t) = X(t) - t$$

et

$$Z(t) = (W_{A(t)} + B_{A(t)} + T_{A(t)} - t)_t = Y(t) - \inf\{Y(s), 0 \leq s \leq t\}.$$

Où $\inf\{Y(s), 0 \leq s \leq t\}$ = au temps de repos du serveur durant $[0,t]$

L'hypothèse d'existence d'un régime stationnarairement périodique : On supposera aussi que $E(B_1).\Lambda(1) < 1$

But : Montrer les convergences suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z(s+n) \leq x) = \frac{1}{E_P(\alpha)} \int_\Omega P(d\omega) \sum_{j=0}^{\alpha(\omega)-1} 1_{\{Z(\omega,(s+j)) \leq x\}} .$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(W_n \leq x) = \frac{1}{E_P(\beta)} \int_\Omega P(d\omega) \sum_{j=0}^{\beta(\omega)-1} 1_{\{W_j(\omega) \leq x\}}.$$

Pour cela, on construit la structure régénérative de la file pour qu'on puisse appliquer le théorème de renouvellement du à Smith. La démarche consiste à montrer que le serveur passe une infinité de fois par des périodes de repos et de travail.

Comme

$$\begin{cases} \sup(Y(t), 0 \leq t < \infty) < +\infty, & \text{P p.s}; \\ \sup\{t, Z(t) = 0\} = +\infty, & \text{P p.s} \\ \sup\{t, Z(t) > 0\} = +\infty, & \text{P p.s} \end{cases}$$

$$Y(t) \longrightarrow -\infty \ \text{ quand } \ t \longrightarrow +\infty, \ \text{P p.s}; \sup(Y(t), 0 \leq t < \infty) < +\infty \ \text{ P p.s}. \quad (7.2)$$

Soient (ξ_n) les instants successifs du début d'une période de repos, $(\vartheta_n)_n$ les instants successifs du début d'une période de travail définis comme suit

- $\xi_1 = 0,\ \vartheta = \inf\{t\ > \xi_1, Z(t) > 0\}$
- $\vartheta_n = \inf\{t > \xi_n, Z(t) > 0\}$
- $\xi_{n+1} = 0, \vartheta = \inf\{t > \vartheta_n, Z(t) = 0\}$

Montrons que $\sup\{t, Z(t) = 0\} = +\infty$ P p.s

Supposons le contraire, c'est à dire $\sup\{t, Z(t) = 0\} < +\infty$, donc il va exister un rang fini à partir duquel la charge du serveur devient positive. On peut donc écrire que :
$\exists\ t_0, \forall\ t\ > t_0,\ Z(t) > 0$, par conséquent $\forall t\ > t_0,\ Z(t) = Y(t) -$ le temps qu'il s'est reposé (ce temps est borné).

Or $Y(t) = \sum_1^{A(t)} B_i - t$ et donc $\dfrac{Y(t)}{t} = \dfrac{A(t)}{t}.\dfrac{1}{A(t)}\displaystyle\sum_1^{A(t)} B_i - 1$.

Comme $\dfrac{1}{A(t)}\displaystyle\sum_1^{A(t)} B_i \underset{t\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} E(B_1)$

et $\dfrac{A(t)}{t} = \dfrac{[t]}{t}\dfrac{1}{[t]}\displaystyle\sum_1^{[t]}\left(A(n) - A(n-1) + \dfrac{A(t) - A([t])}{t}\right) \underset{t\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} E(A(1)) = \lambda$

donc $Y(t) \underset{t\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ quand $t \longrightarrow +\infty$ ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Conclusion : le processus de la charge du serveur revient une infinité de fois aux états de repos et de travail. Soit

$$\alpha = \begin{cases} \inf\{n \geq 1, Z(n) = 0\} \text{ si cet ensemble est non vide} \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

La variable α définit le premier instant entier où la charge du serveur est nulle, et $\gamma_n = (\inf\{k \geq 1, k \geq \xi_n\})$ la variable entière qui donne la valeur du premier entier qui suit ξ_n. γ_n est fini car ξ_n l'est. Soit $N = \inf\{n \geq 1, \gamma_n \leq \vartheta_n\}$ l'indice du premier élément de la suite $(\gamma_n)_n$ qui se trouve dans une période de repos, donc $\alpha = \gamma_N$. Comme les γ_n sont finis, il suffit de montrer que N est fini pour que α soit fini.

Proposition 7.0.12 $E(N) < +\infty$

Preuve 7 $E(N) = \sum_{n>0} P(N \geq n)$ *car N est une variable alétoire positive, d'autre part*

$$\{N \geq n+1\} = \{N \geq n\} \cap \{N \neq n\}$$

$$= \{\alpha \geq \xi_n\} \cap \{X(\gamma_n) - X(\xi_n) > 0\} \quad \textit{car } X \textit{ est croissante .}$$

De plus, si on pose $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{\xi_n}$ on a :

$$P(N \geq n+1) = E(E1_{\{\alpha>\xi_n\}}.1_{\{X(\gamma_n)-X(\xi_n)>0\}}/g_n)) = \int_{\{\alpha>\xi_n\}} P(X(\gamma_n) - X(\xi_n) > 0/g_n)dP,$$

et comme

$$P(X(\gamma_n) - X(\xi_n) > 0/\mathcal{G}_n)$$
$$\leq P(X(\xi_{n+1}) - X(\xi_n) > 0/\mathcal{G}_n) = 1 - P(X(\xi_{n+1}) - X(\xi_n) = 0/\mathcal{G}_n)$$
$$= 1 - e^{-(\Lambda_{(\xi_{n+1})} - \Lambda_{(\xi_n)})},$$

On obtient

$$P(N \geq n+1) \leq \int_{\{\alpha > \xi_n\}} (1 - e^{-\lambda}) dP = (1 - e^{-\lambda}) P(\alpha > \xi_n).$$

D'autre part, on a :$\{\alpha \geq \xi_n\} = \{N \geq n\}$*, et donc*

$$P(N \geq n+1) \leq \left(1 - e^{-\lambda}\right) P(N \geq n) \leq \left(1 - e^{-\lambda}\right)^n, \forall n \geq 1.$$

Par conséquent, on obtient :

$$E(N) = \sum_{n \geq 0} P(N \geq n) \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1 - \left(1 - e^{-\lambda}\right)^n}{1 - (1 - e^{-\lambda})} = e^{\lambda} < +\infty$$

Lemme 7.0.13

la suite $(\alpha_{n+1} - \alpha_n)_{n \geq 1}$ *est constituée de variables aléatoires indépendantes équidistribuées, de même loi que* α_1.

$\left(Y_{\alpha_{n+1}} - Y_{\alpha_n}\right)_n$ *sont des variables indépendantes équidistribuées de même loi que* $Y_{(\alpha_1)}$.

Preuve 8

$$P(\alpha_{n+1} - \alpha_n = k/\mathcal{F}_{\alpha_n})$$
$$= P(\cap_{j=1}^{k-1}\{Z(\alpha_n + j) > 0\} \cap \{\ Z\alpha_n + k = 0\ \}/\mathcal{F}_{\alpha_n})$$
$$= P(\cap_{j=1}^{k-1}(Z_j) > 0 \cap \{Z_k = 0\ \})$$
$$= P(\alpha_1 = k))$$

Proposition 7.0.14 $0 < E(\alpha) < +\infty$.

Posons $\beta_0 = 0, \beta_1 = \beta = A(\alpha), \beta_n = A(\alpha_n), \beta_n$ nombre d'arrivées dans $[0, \alpha_n]$

$$U_n(x) = \int_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n} 1_{\{Z(t) \leq x\}} dt \text{ avec } U(x) = U_1(x)$$

C'est la charge totale inférieure à x pendant la nième période de travail.

$$V_n(x) = \sum_{k=\beta_{n-1}^{+1}}^{\beta_n} 1\{W_{k \leq x}\} \text{ avec }, V(x) = V_1(x)$$

C'est le nombre de clients ayant un temps d'attente inférieur à x pendant la nième période de travail. Il est clair que $U(x) \leq \alpha$ et $V(x) \leq \beta$.

Proposition 7.0.15 *:*

pour chaque x fixé, les suites $(\beta_n - \beta_{n-1}, n \geq 1), (U_n(x), n \geq 1), (V_n(x), n \geq 1)$ *sont chacune formée de VAIE de moyenne finie.*

Pour chaque $t \in [0,1[$ et $x > 0$, on définit H_t et G par :

$$E(\alpha).H_t(x) = E\left(\sum_{k=0}^{\alpha-1} 1\{Z(k+t) \leq x\}\right), \text{ et } E(\beta)G(x) = E\left(\sum_{k=0}^{\beta-1} 1_{\{\ W_k\ \leq\ x\ \}}\right)$$

Proposition 7.0.16 *:* $\forall t \in [0,1[, \forall x \geq 0,$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} P(Z(n+t) \leq x) = H_t(x)$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} P(W_n \leq x) = G(x).$$

Preuve 9

$P(Z(n+t) \leq x) = P(\alpha < +\infty, Z(n+t) \leq x)$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} P(\alpha = k, Z(n+t) \leq x) + P(\alpha > n, Z(n+t) \leq x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(\alpha = k, Z(n-k+\alpha+t) \leq x) + P(\alpha > n, Z(n+t)) \leq x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(\alpha = k)P(Z(n-k+t) \leq x) + P(\alpha > n, +Z(n+t) \leq x).
\end{aligned}$$

Posons $v_n = P(Z(n+t) \leq x), b_n = P(\alpha > n, Z(n+t) \leq x), f_n = P(\alpha = n)$ $v_n = b_n + \sum_{k=1}^{n} f_k v_{n-k}$ *et* $f_1 = P(\alpha = 1) \geq P(A(1) = 0)$ *D'après le théorème de renouvellement dans le cas discret, on a :* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = \dfrac{\sum_{k=0}^{+\infty} b_k}{E(\alpha)}$

et $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{k} b_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} E\left(1_{\{\alpha > k\}} 1_{\{Z(k+t) \leq x\}}\right)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} b_k &= \lim_{k \longrightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{k} b_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} E(1_{\{\alpha > k\}} 1_{\{Z(k+t) \leq x\}}) \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} E(\sum_{k=0}^{n} 1_{\{\alpha > k\}}.1_{\{Z(k+t) \leq x\}}) \\
&= E(\sum_{k=0}^{+\infty} 1_{\{\alpha > k\}}.1_{\{Z(k+t) \leq x\}}) = E(\sum_{k=0}^{\alpha-1} 1_{\{Z(k+t) \leq x\}}).
\end{aligned}$$

Convergence en loi d'une file d'attente à un serveur stationnairement périodique

La généralisation des résultats 7.0.13, 7.0.14, 7.0.16 a été établie par l'auteur (dans, [69]), voir Lemme 1, propositions 3, 4, et 5.

7.0.8 Comparaison des différents résultats établis sur la file à un serveur stationnairement périodique dans [9], [14], [69]

La donnée d'un flot stationnairement périodique $\big(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$ et d'une mesure aléatoire stationnairement périodique N nous permet de définir ce qui suit :
$\big(\Omega, \mathscr{A}, Q, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$, où Q est une mesure de probabilité définie par :

$$\int_\Omega f(\omega)\, Q(d\omega) = \int_\Omega P(d\omega) \int_0^1 f(\theta_x \omega)\, dx.$$

Le flot $\big(\Omega, \mathscr{A}, Q, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$ est stationnaire.
On note par $\widehat{\mathbf{Q}}$ (respectivement $\widehat{\mathbb{Q}}$) la mesure de Palm (respectivement, la probabilité de Palm) associée au processus ponctuel N et à la probabilité $\mathbf{Q}$.
La relation entre $\widehat{\mathbb{Q}}$ et $\mathbf{P}$

$$\int X(\omega)\widehat{\mathbb{Q}}(d\omega) = \frac{1}{\mathbf{E}(N([0,1[))} \int \mathbf{P}(d\omega) \int_0^1 N(\omega, ds) X(\theta_s \omega).$$

Nous avons $\mathbf{Q}(\widehat{\Omega}) = \frac{1}{\mathbf{E}(N([0,1[)} = \int N(]0,1])\mathbf{Q}(d\omega)$.
Sur l'espace $\big(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}},\ \widehat{\mathbb{Q}}, (\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{Z})\big)$, on construit un flot à temps continu, soit $\big(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mathbb{Q}}, (\widetilde{\theta}_t, t \in \mathbb{R})\big)$ grâce aux formules suivantes :
$\widetilde{\Omega} = \{(\omega, s), \omega \in \widehat{\Omega} \text{ et } 0 \le s < A_1(\omega)\}, \widetilde{\mathscr{A}} = \widehat{\mathscr{A}} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R}/\widetilde{\Omega},\ \widetilde{\mathbb{Q}}$ defined on $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{A}})$ par

$$\int_{\widetilde{\Omega}} f(\omega, s)\, \widetilde{\mathbb{Q}}(d\omega, ds) = \frac{1}{E(A_1)} \int_{\widehat{\Omega}} \widehat{\mathbb{Q}}(d\omega) \int_0^{A_1} f(\omega, s)\, ds.$$

Sur cet espace on peut définir une suite de variables aléatoires $(\widetilde{T_n}, n \in \mathbb{Z})$ par

$$\widetilde{T}_n(\omega, s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} A_i(\omega) - s & \text{si } n \ge 0, \\ -s & \text{pour } n = 0, \\ \displaystyle -\sum_{i=n}^{i=-1} A_i(\omega) - s & \text{si } n < 0. \end{cases} \tag{7.3}$$

et un flot noté $(\widetilde{\theta}_t, t \in \mathbb{R})$ par
$\widetilde{\theta}_t(\omega, s) = (\widehat{\theta}_k(\omega), t - \widetilde{T}_k(\omega, s))$ si $\widetilde{T}_n(\omega, s) \leq t < \widetilde{T}_{n+1}(\omega, s)$
tel que le flot $\big(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mathbb{Q}}, (\widetilde{\theta}_t, t \in \mathbb{R})\big)$ soit stationnaire.

Bambos et Walrand [14] ont considéré la file stationnairement périodique à un seul serveur. Leur approche consiste à exploiter les résultats existants dans les cas stationnaire grâce au passage au flot stationnaire $\big(\Omega, \mathscr{A}, Q, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$ à partir du flot stationnairement périodique $\big(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$, ils montrent l'existence de la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} P(Z(n+t) \leq x)$ sans donner l'expression de cette loi limite (voir theorem 1 page 383, [14] et ils définissent un estimateur de cette loi (voir theoreme 2, page 384 [14]) ; theoreme 2 établit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_0^t 1_{\{Z(s) \in .\}} ds = \int_0^1 \lim\limits_{n \to +\infty} P(Z(n+t) \in .) ds$.
Ces résultats sont obtenus par passage au flot continu $\big(\Omega, \mathscr{A}, Q, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$, car le processus $(Z(t)_t)$ est stationnaire uniquement sur ce flot. Le problème rencontré par ces auteurs est le suivant : Le processus d'attente noté dans [14] par W_{S_n} (ce que nous appelons processus des temps d'attente et que nous notons par (W_n)) n'est pas stationnaire sur $\big(\Omega, \mathscr{A}, P, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$ ni sur $\big(\Omega, \mathscr{A}, Q, (\theta_t, t \in \mathbb{R})\big)$. De plus dans ce papier il n'y a aucun résultat montrant que : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(W_n \leq x)$ existe. Notons que les auteurs emploient le terme le temps d'attente de la file '**waiting time of the queue**' pour la charge du serveur (workload process). La terminologie employée peut entrainer une confusion.
Asmussen et Thorisson [9]ont exploité la théorie des chaines de Markov récurrentes au sens de Harris pour traiter le problème de convergence en loi de la file périodique. Le résultat le plus important dans ce travail est celui de la convergence en loi du processus des temps d'attente $(W_n)_n$. Les auteurs ont montré que $W_n \xrightarrow[t \longrightarrow +\infty]{P\ a.s} W^*$ grâce à l'hypothèse de finitude de l'instant de couplage avec le processus stationnairement périodique, les auteurs obtiennent la convergence en loi du processus des temps d'attente. Les auteurs eux même signalent que leurs résultats peuvent être amélioré (voir page 221, et page 224 [9]). Le seul espace sur lequel le processus $(W_n)_n$ est stationnaire est $\big(\Omega, \mathscr{A},\ \widehat{\mathbb{Q}}, (\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{Z})\big)$. Seulement sur cet espace, le processus de la charge du serveur (Z(t)) n'est pas stationnaire et donc ils ne pouvaient conclure que $\lim_{n \to +\infty} P(Z(n+t) \in .)$ car le flot $\big(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}},\ \widehat{\mathbb{Q}}, (\widehat{\theta}_n, n \in \mathbb{R})\big)$ est indexé par les numéros des clients alors que (Z(n+t))n est indexé par les instants entiers du temps réel.

Une comparaison entre les hypothèses de Asmussen et Thorisson [9] et nos hypothèses [69]
Les hypothèses I et II sont équvalentes à nos hypothèses $H_i, i = 1, ..., 6$ et donc impliquent

l'existence de points de récurrence . L'hypothèse III est plus forte que l'hypothèse I car sous l'hypothèse III, les points de récurrence sont entiers. Notre hypothèse H_7 est une condition suffisante pour que l'hypothèse III dans [9] soit satisfaite.
Tous les résultats obtenus par Charlot et Merad ([24]) sont des résultats d'existence de la loi limite ; en effet, theoreme 3.2[24] dit que :

$$\mathcal{L}(Z^x(n+t)) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \mathcal{L}(\mathcal{Z}(t))$$

et le théorème 4.1 [24] établit que :

$$\mathcal{L}(W_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \mathcal{L}(\mathcal{W})$$

Theoreme 3.2 [24] est identique au théorème 1 établi dans [14]. Theorem 4.1 assure l'existence de la loi limite. Nous généralisons tous ces résultats dans notre papier [69] et nous donnons l'expression des moments d'ordre p. Nous écrivons la formule de Takacs dans le cas périodique et aussi la formule de Little. Ces deux formules sont très utiles, elles nous permettent de réduire le nombre d'inconnus à estimer.

Conclusion

Nous avons présenté différentes études sur le comportement asymptotique de quelques files d'attente. L'approche considérée repose essentiellement sur l'existence d'un régime stationnaire possédant une structure régénérative. Grâce à la théorie du renouvellement, on peut non seulement donner l'expression de la loi limite et de ses caractéristiques dans le cas où les cycles sont de moyenne finie mais aussi obtenir des estimateurs de la loi limite et de ses caractéristiques. Une direction de recherche complétant le travail présenté dans cette thèse consistera à trouver d'autres estimateurs des lois limites obtenues et des premiers moments associés à ces lois limites plus puissants que la moyenne arithmétique et à définir les estimateurs des moments d'ordre $p, p > 1$, dans le but d'établir des théorèmes centraux limites et des théorèmes du logarithme itéré pour les files stationnairement périodiques.
Le théorème de renouvellement a été écrit pour une suite de renouvellement de VAIE de moyenne finie non nulle, pour une suite stationnaire définie sur un flot mélangeant, pour une suite de VAI 2 à 2 dépendantes. Le théorème de renouvellement de Smith 3.2.2 (Key renewal theorem) a été écrit dans le cas d'un processus régénératif dont le temps de survie suit une loi de densité possédant une partie absolument continue, il a aussi été établi pour un vecteur de processus régénératifs. Lalley a écrit le théorème de Smith dans le cas d'un processus issu d'une suite stationnaire de variables non indépendantes. Lalley a introduit une nouvelle notion d'indépendance appelée "perte de mémoire", plus forte que la propriété de mélange, il a exprimé la loi limite de l'âge du composant en fonctionnement lorsque les âges successifs de ce composant vérifient la propriété de perte de mémoire.
Exite t-il des liens entre ces différents résultats ? Ces résultats possèdent-ils des applications en files d'attente ?
Cette thèse a été écrite avec les outils de la théorie des processus ponctuels, un travail enrichissant serait de réécrire ce travail à l'aide de la théorie des chaines de Markov.

Bibliographie

[1] E. Adrian, J. R. Eckberg *: The single server queue with periodic arrivals process and deterministic service times.* IEEE transactions on communications, vol27, N^o **3**, 556 - 561, (1979).

[2] L. G. Afanas'eva *: On periodic distribution of waiting time process.* Lecture notes in maths, Springer-Verlag **1115**, 1- 20, (1984).

[3] G. Alsmeyer *: On the Markov renewal theorem.* S. P. A**50**, 37 - 56, (1994).

[4] G. Alsmeyer *: Blackwell's renewal theorem for certain linear submartingale and coupling* . Acta Applicandae Mathematica **34**, 135- 150, (1994).

[5] G. Alsmeyer *: Markov chains recurrence in the sens of Harris.* Wahrscheinlichkeitstheory verw. Gebiete 8, 41 - 48, (1994).

[6] W. Ambrose *: Representation of ergodic flows.* Annals of mathematics.II. vol 42, N^o **3**, 723 - 739, (1941).

[7] W. Ambrose, S. Kakutani *: Structure and continuity of measurable flows.* Duke math. J **9**, 25 - 42, (1942).

[8] K. K. Anderson, K. B. Athreya *: A strong renewal theorem for generalized renewal functions in the infinite mean case.* Prob. Th. Fields **77**, 471 - 479, (1988).

[9] S. Asmussen, H. Thorisson *: A markov chain approach to periodic queues.* J. App. Prob. **1,** 215 - 225, (1987) .

[10] S. Asmussen, P. Fuckerieder, M. Jobmann, H. P Schwefel *: Large déviations and fast simulation in the presence of boundaries* . S. P. A **102**, 1-23, (2002).

[11] F. Bacelli, C. A. Courcoubetis, M. I. Reiman *: Construction of the stationary regime of queues with locking.* S. P. A **26**, 257 - 265, (1987).

[12] F. Bacelli, P. Bremaud *: Elements of queueing theory.* Springer - Verlag - Berlin (1994).

[13] A.Baltrūnas, D. J. Daley, C. Klüppelberg *: Tail behaiviour of the busy period of a $GI/GI/1$ queue with subexponential service times .* S. P. A **111**, 237-258, (2004).

[14] N. Bambos, J. Warlrand *: On queues with periodic inputs.* J. App. Proba. **26**, 381-389, (1989) .

[15] D. Blackwell *: A renewal theorem.* Duke Math J **15**, 145 - 150, (1948).

[16] F. Blanchard *: K-flots et théorème de renouvellement.* Z. Wahrscheinlichkeits-theory verw. Gebiete **36**, 345 - 358, (1976) .

[17] G. D. Birkhoff *: Proof of the ergodig theorem.* P. N. A. S, Vol 18, p 650, (1932).

[18] A. Borovkov *: Stochastic processes in queueing theory.*Springer, (1976).

[19] A. Borovkov *: Limit theorems for queueing networks.* Theory. Probability. Appl. Vol 31, N^o**3**, 413 - 427, (1986).

[20] F. Charlot *: Intégrabilité des temps de renouvellement des files d'attente et applications* Institut de Math. U. S. T. H. B. Alger, (1981) .

[21] F. Charlot, G. Pujolle *: Recurrence in single server queue with impatient customers.* Ann inst Henri Poincarré, Vol. XIV, n^o **4**, 399 - 410, (1978) .

[22] F. Charlot, M. Ghidouche, M. Hamami *: Irréductibilité et récurrence au sens de Harris des temps d'attente des files G/G/q.* Z. Wahrscheinlichkeitstheory verw. Gebiete **43**, 187 - 203, (1978).

[23] F. Charlot, D. Merad *: Convergence en loi dans les systèmes de files d'attente.* Ann. Scien. de l' université Blaise Pascal, N^o **93**, 49 - 62, (1989).

[24] F. Charlot, D. Merad *: Processus ponctuels et files d' attente périodiques.* Ann. Scien. de l' université Blaise Pascal, N^o **93**, 63- 77, (1989) .

[25] K.L.Chung *: A cource in probability theory.* New York : Harcourt, Brace and World, second edition (1974).

[26] J. W. Cohen *: On regenerative processes in queuing theory.* Lecture notes in economics and mathematical systems 121, Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. New York.

[27] J. G. Dai *: On positive Harris recurrence of multiclass queueing networks : a unified approach via fluid limit models.* The annals of applied probvol5, N^o **1**, 49 - 77, (1995).

[28] D. J. Daley, D. Vere-Jones *: An Introduction to the Theory of Point Processes.* Springer-Verlag, (1988) .

[29] YU. A. Davydov *: Mixing conditions for Markov chains.* Theory of probability and its applications, vol. XVIII, N^O **2**, 312 - 328, (1973).

[30] M. Delasnerie *: Flot mélangeant et mesure de Palm.* Ann. Inst. Henri Poincarre. Vol. XIII, **4**, 357 - 369, (1977) .

[31] J.De Sam Lazaro, P. A. Meyer *: Questions de théorie des flots.* Lecture Notes in Math. Séminaire de probabilité IX, N^0 **465** , (1975).

[32] W .Doeblin *: Exposé de la théorie des chaines simples constantes de Markov à un nombre fini d'états* Rev. Math. de l'Union Interbalkanique **2**, 77-105, (1975).

[33] B. De Saporta *: Renewal theorem for a system of renewal equations .* Ann ; I. H. Poincaré **5**, 823- 838, (2003).

[34] J. L. Doob *: Renewal theory from the point of view of the theory of probability.* Trans. Amer. Math. Soc. **63**, 422 - 438, (1948).

[35] J.L.Doob *: One parameter families of transformations.* Duke.J, vol **4**, p752, (1938).

[36] J. L. Doob *: Asymptotic properties of markov transition probabilities.* Trans. Amer. math. Soc, Vol **63**, 293 - 321, (1948).

[37] V. Dumas *: Approche fluides pour la stabilité et l'instabilité de réseaux de files d'attente stochastiques à plusieurs classes de clients.* Thèse de Doctorat en Mathématiques appliquées, (1995).

[38] P. Erdos, W. Feller, H. Pollard *: A theorem on power series.* Bull. Ame. Math. Soc, **55**, 201 - 204, (1949) .

[39] A. K. Erlang *: Solutions of some problems in the theory of probabilities of significance in authomamatic telephone exchanges.* Electroteknikren Danish **13**, 5 - 13, (1917) .

[40] W. Feller *: On the integral equation of renewal theory.* Annals of mathematical statistics, Vol **2**, 243 - 267, (1941).

[41] W. Feller *: Fluctuation theory of recurrent events.* Trans. Amer. Math. Soc. **67**, 98 - 119, (1949) .

[42] W. Feller *: An Introduction to Probability Theory and its Applications.* Vol. 1, Wiley, New York, (1966).

[43] W. Feller : *An Introduction to Probability Theory and its Applications* vol 2, Wiley, New York, (1966).

[44] D. Flipo : *Steady state of loss systems.* Comptes rendus de l'académie des sciences, **297**, 6, Paris (1983).

[45] G. L. Geluk : *A renewal theorem in the finite mean case.* Proceeding of the american mathematical society Vol 125, N^o**11**, (1997) .

[46] D. Griffeat : *A maximal coupling for Markov chains.* Wahrscheinlichkeitstheory verw. Gebiete **31**, 95 - 106, (1975).

[47] D. Gross, C. M. Harris : *Fundamentals of queueuing theory.* , (1974) .

[48] J. M. Harrisson, A. J. Lemoine : *Limits theorems for periodic queues.* Ann. Proba **04**, 566 - 576, (1977).

[49] N. Haydn, Y. Lacroix, S. Vaieenti : *Hitting and return times in ergodic dynamical systems.* The annals of probability, vol.33, N^o **5**, 2043 - 2050, (2005) .

[50] D. L. Iglhart : *Functional limit theorems for the queue GI/G/1 in light traffic.* Adv. Appl. Prob. **3**, 269 - 281, (1971).

[51] J.Jacod : *Théorème de renouvellement et classification pour les chaînes semi-markoviennes.* Ann. Inst. Henri Poincarré, vol.VII, n^O **2**, p 83 - 129, (1971).

[52] B. Jamison, S. Orey : *Markov chains recurrence in the sens of Harris* Wahrscheinlichkeitstheory verw. Gebiete **8**, 41 - 48, (1967).

[53] A. Karlsson, F. Ledrappier : *On laws of large number for random walks.* The Annales of Probability, vol34, N^o **5**, 1693 - 1706, (2006).

[54] W. Kang, P. Shahabuddin, W. Whitt : *Exploiting the regenerative structure to estimate finite time averages via simulation* . ACM journal Name, Vol V, N^o **N**, Feb ,1 - 38, (2006).

[55] T. Kernane, A. Aissani : *Stability of retrial queues with versatile retrial policy.*J. A. M. S. A, **2b**, 1 - 16, (2006).

[56] H.Kesten, R. A. Maller : *Stability and other limit laws for exit times of random walks from a strip or a halfplane* . Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 35, **6**, 685- 734, (1999).

[57] J. F. C. Kingman : *The stochastic theory of regenerative events.* Wahrscheinlichkeitstheory verw. Gebiete **2**, 180 - 224, (1964).

[58] L. Kleinrock *: Queueing systems I, II.* John Wiley, New York, (1975, 1976).

[59] S. P. Lalley *: A renewal theorem for a class of stationary sequence.* Prob. Theo. Rela. Fields **72**, 195 - 213, (1986).

[60] J. Austin. Lemoine *: On queues with périodic Poisson input.* J. Appl. Prob **18**, 889 - 900, (1981).

[61] D. Lindley *: Theory of queues with a single server.* Pro. Camb. Phil. Soc. **48** , 227 - 289, (1952).

[62] T. lindvall *: A Probabilistic proof of Blacwell's renewal theorem.* The Annals of probability , vol.5, N^0 **3**, 482 - 485, (1977).

[63] T. lindvall *: On coupling of discrete renewal processes.* Z. Wahrscheinlichkeits-theory verw. Gebiete **48**, 57 - 70, (1979).

[64] T. lindvall) *: On coupling of continuous-time renewal processes.* J. Appl. Prob **19**, 82- 89, (1982).

[65] Y. Liu, Z. Hou *: Several types of ergodicity for M/G/1 type Markov chains and processes.* J. Appl. Prob **43**, 141 - 158, (2006).

[66] R. M. Loynes *: The stability of a queue with non independent inter-arrival and service times.* Proc. Camb. Philos. Soc. **58,** 494 -5, (1962).

[67] D. McDonald *: Renewal theorem and Markov chains.* Ann. Inst. Henri Poincarré, VolXI, n^O **2**,p, 187 - 197, (1975).

[68] D. Merad,D. Aissani *: The classical renewal theorem and point processes.* Far. East. J. Math 26 (**3**), 759 - 768, (2007).

[69] D. Merad *: The regenerative structure of the stationarily periodic one server queue and some of its consequences.* To appear in Journal of Applied Probability and Statistics, (2009).

[70] D. R. Miller *: Existence of limits in regenerative processes.* The Annals of math stat. Vol 43, N^o **4**, 1275 - 1282, (1972).

[71] D. R. Miller, F. Dennis Sentilles *: Translated renewal process and the existence of a limiting distribution for the queue GI/G/s queue.* The Annals of Probability, Vol. 3, 424 - 439, (1975).

[72] D. R. Miller *: Limit theorem for path-functionals of regenerative processes.* Stochastic Processes and their applications **2**, 141 - 161, (1974).

[73] G. Nappo, B. Torti *: Continuous time random walks and queues : Explicit forms and approximations of the conditionnal law with respect to local times* . S. P. A **116**, 585- 610, (2006).

[74] J. Neveu *: Processus Ponctuels.* École d'été de St Flour VI, Lecture Notes in Maths n^o **598**, Springer-Verlag,(1977).

[75] J. Neveu *: Construction de files d'attente stationnaires.* Lecture Notes on Control and Information Sciences **60**, Springer-Verlag, 31 - 41, (1983).

[76] S. Orey *: Recurrent Markov chains.* Pacific. J. Math.**9**, 805 - 827, (1959).

[77] S. Orey *: Change of time scale for Markov processes.* Trans. Ame. Math. Soc. **99**, 384– 390, (1959).

[78] P. R. Parthasarathy *: Atransient solution to an M/M/1 queue : a simple approach.* Adv. Appl. Prob, 997- 998 N^o**19**, (1987) .

[79] K. Petersen *: Ergodic theory.* Cambridge : Cambridge Univ. Press, (1983).

[80] P. Picard, C.Lefèvre *: ON the first meeting or crossing of two independently trajectories for some counting processes* . S. P. A **104**, 217 -242, (2003).

[81] J. W. Pitman *: Uniform rates of convergence for Markov chains transition probabilities.* Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **29**,193 - 227, (1974).

[82] D. Pollard *: Convergence of stochastic processes.* Springer-Verlag-New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, (1984).

[83] P. Robert *: Réseaux et files d'attente : méthodes probabilistes.* Springer, (2000).

[84] T. Rolski *: Approximation of periodic queues.* Adv. Appl. Proba. **19**, 691 - 707, (1987) .

[85] D. Root *: A counter example in renewal theory.* The annals of mathematical statistics. Vol 42, N^o **5**, 1763 - 1766, (1971).

[86] W. L. Smith *: Asymptotic renewal theorems.* Pro. RoySoc. Edinburg. Ser. A. 64 9- 48, (1954).

[87] W.L.Smith *: Regenerative stochastic processes* Pro. Roy. Soc. London Ser A **232**, 6 - 31, (1955).

[88] W. L. Smith *: Renewal theory and its ramifications.* J. Roy. Statist. Soc. Ser. B **20**, 243 - 302, (1958) .

[89] S. Täclind : *Fourieranalyische Behandlung vom Erneuengsproblem.* Skandinavisk Aktuarietidskrift vol. **28**, pp. 68 - 105, (1945).

[90] L. Takàcs : *The limiting distributionof the virtual waiting time and the queue size for a single-server queue with recurrent input and general service times*Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. **15**, 157 - 167, (1963).

[91] L. Takàcs : *A single-server queue with limited virtual waiting time.*Z. J. Appl. Prob. **11**, 612 - 617, (1974).

[92] H. Thorisson : *Backward limits.* The annals of probability, Vol 16, N^o **2**, 914 - 924, (1988).

[93] H. Thorisson : *Coupling, stationarity and regeneration.* Springer, (2000).

[94] H. Thorisson : *The coupling of regenerative processes.* Adv. Appl. Prob. **15**, 531 - 561, (1983).

[95] H. Thorisson : *On regenerative and ergodic properties of the k-server queue with non stationary Poisson arrivals.* J. Appl. Prob, **22**.893 - 902, (1985).

[96] H. Thorisson : *A complete coupling proof of Blackwell's renewal theorem.* Z. Wahrscheinlichkeitstheory verw. Gebiete **48**, 57 - 70, (1979).

[97] H. Totoki : *On a class of special flows.* Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **15**, 157 - 167, (1970).

[98] J. C. W. Van Ommeren : *Exponential expansion for the tail of the waiting time probability in the single server queue with batch arrivals.* Adv. Appl. Proba **20**, 880 -895, (1988).

[99] H. Wegman : *The capacity of an intersection with non stationary traffic.* J. App. Prob **13** 418 - 422, (1976).

[100] W. Whitt : *The continuity of queues* . Adv. Appl. Prob **6**, 175 - 183, (1974).

[101] W. Whitt : *Stochastic Process Limits* . Springer, (2002).

[102] H. Willie : *Periodic steady state of loss systems with periodic inputs.* Adv. Appl. Prob, **30**, 152 - 166, (1998).

Appendice

Théorèmes Taubérien

I-1-Fonction génératrice : Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels telle que :

· $\lim\limits_{x \longrightarrow 1-0}(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = a$

· $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} n(a_n - a_{n-1}) = 0$

Alors : $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n = a$

I-2-Transformées de Laplace :Soit $a(.)$ une fonction non décroissante de transformée de Laplace notée μ telle que $\lim\limits_{s \longrightarrow 0} s^{\gamma}\mu(s) = C$.
Alors : $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \frac{a(t)}{t^{\gamma}} \frac{C}{\Gamma(\gamma+1)}$

Théorèmes de convergence

II-1-**Théorème Helly Bray** : Soit g une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$. Si la suite de fonctions de répartition $(F_n)_n$ converge vers une fonction de répartition F en tout point de continuité de F, alors :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x)$$

II-2-Théorème de Cramer-Levy :Soit $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de répartition et $\Phi_n(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega x) dF_n(x)$ la fonction caractéristique de F_n.
La suite $(\Phi_n(\omega))$ converge vers une limite $\Phi(\omega)$ pour tout ω telle que Φ soit continue au point $\omega = 0$, si et seulement si la suite $F_n(x)$ converge vers une fonction de répartition en tout point de continuité de la fonction F. Φ est la fonction caractéristique de la distribution limite F.

Théorèmes Abéliens

III-1-**Fonctions génératrices** : Si la série de nombres réels $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$ converge uniformément pour tout $s \in [0,1]$ et $\lim\limits_{s \longrightarrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

III-2-Transformées de Laplace : Si $\int_0^{+\infty} a(t)dt$ converge, alors : $\int_0^{+\infty} e^{-st}a(t)dt$ converge uniformément pour $\mathcal{R}(s) > 0$ et $\lim\limits_{s\longrightarrow 1} \int_0^{+\infty} \exp(ist)a(t)dt = \int_0^{+\infty} a(t)dt, |\arg(s)| < \frac{\pi}{2}$.

Critère de convergence vague

Le théorème de Stone-Weierstrass : Soient $(\mu_n)_n$(resp, μ une suite de mesures sur $\mathbb{R}$ (resp, une mesure). Alors $\mu_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{vaguement} \mu$ si et seulement si $\forall f \in C_K(\mathbb{R})$: $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx)$.

La liste de quelques notations de base

x	variable
f	fonction
F	fonction de répartition
E	espace numérique
$\mathcal{E}$	la tribu sur E
$\mathcal{E}_c$	la classe des boréliens de $\mathcal{E}$ relativement compacts
Ω	espace fondamental
$\mathscr{A}, \mathcal{B}$	tribus sur Ω
$\mathscr{A}_T$	la tribu des évènements antérieures à T
$(\hat{\Omega}, \hat{\mathscr{A}})$	espace de Palm
P	probabilité
$\widetilde{P}$	mesure de Palm associée à P
$\hat{\mathbb{P}}$	probabilité de Palm associée à P
$(P)_N$	La loi de N sous P
N	processus ponctuel, mesure aléatoire
ν_N	la mesure intensité associée à N
i_N	l'intensité associée à N, l'intensité du flot d'arrivée
σ_N	la mesure spectrale associée à N
$M_+(\mathbb{R})$	l'ensemble des mesures positives sur $\mathbb{R}$ de Radon
$M_p(\mathbb{R})$	l'ensemble des mesures ponctuelles sur $\mathbb{R}$ de Radon
$C_K(E)$	l'ensemble des fonctions sur E continues à support compact
$C_K^b(E \times F)$	l'ensemble des fonctions continues bornées à support compact par rapport à la première composante
λ	la mesure de Lebesgue
θ	l'opérateur shift
θ_t	transformation mesurable sur $(\Omega, \mathscr{A})$
$m(f)$	$= \int f(x)m(dx)$
m	mesure
$\mu_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{vague} \mu$	la suite $(m_n)_n$ converge vaguement vers m
$\mu_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{étroite} \mu$	la suite $(m_n)_n$ converge étroitement vers m
$\mu_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{vague-étroite} \mu$	$(m_n)_n$ converge vaguement-étroitement vers m
τ_t	translation sur $\mathbb{R}$