

N° d'ordre : 01 / 2011– D/ MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMÉDIËNNE
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTORAT

EN: MATHÉMATIQUES

Spécialité: Analyse Complexe

Par: **Yacine ADJABI**

THÈME

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TROISIÈME ORDRE
DE CLASSE DE PAINLEVÉ

Soutenue publiquement, le 05 / 05 / 2011, devant le jury composé de:

M. R. BEBBOUCHI	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Président.
M. A. KESSI	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
M. K. BETINA	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Examineur.
M. A. MAKHLOUF	Professeur	à l'U.B.M. ANNABA	Examineur.
M. D. BEHLOUL	Maître de Conférences / A,	à l'U.S.T.H.B.	Examineur.

Remerciements

Je tiens avant toutes choses à remercier mon **directeur** de thèse, Professeur **Areski Kessi**. Il a passé énormément de temps à me transmettre une partie de ses connaissances sur ce très vaste domaine que représentent les équations différentielles ordinaires dans le plan complexe tout au long de l'évolution de mes travaux. J'ai également pu profiter de sa large connaissance du sujet, de son impressionnante intuition et de sa vision globale des applications possibles à travers les sujets qu'il m'a proposés : tous très riches, passionnants et pleins de perspectives. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

Je tiens aussi à le remercier pour sa disponibilité, sa gentillesse et sa patience.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus vifs à Monsieur **R. Bebbouchi**, Professeur à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie vivement Messieurs **K. Betina**, Professeur à l'U.S.T.H.B. et **D. Behloul**, Maître de Conférences/A à l'U.S.T.H.B. qui ont bien voulu faire partie du jury.

Je remercie Monsieur **A. Makhlouf**, Professeur à l'U.B.M. Annaba d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

*Je suis également très reconnaissant envers Monsieur **Jarad Fahd**, Professeur à l'U. Cançaya, Anakra pour ses nombreux conseils depuis que j'ai eu le plaisir de travailler avec lui il y a maintenant Cinq ans. Il a toujours été là pour me guider lorsque j'ai eu des choix à faire.*

*J'aimerais aussi remercier Monsieur **Ugurhan Mugan**, Professeur à l'U. Bilkent, Ankara pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée dans la seconde partie de ce travail et pour ses nombreuses remarques.*

*Merci également à Monsieur **S. Khelifati**, Maître de Conférences / A, à l'U. M. B. Boumerdes d'avoir accepté de relire des versions préliminaires de ma thèse.*

*Je remercie le département de mathématiques de l'université de Cançaya, Ankara, et plus particulièrement Monsieur **Jarad Fahd** et pour m'avoir accueilli avec autant de sympathie et de gentillesse pendant mon séjour à Turquie.*

*Je remercie Monsieur **Robert Conte** a répondu avec beaucoup de gentillesse à toutes mes questions en accompagnant ses réponses de commentaires toujours éclairants.*

*Je remercie Monsieur **A. V. Chichurin** pour ses multiples remarques et suggestions et pour m'avoir signalé les références [13, 15, 39].*

*Je tiens à remercier le Professeur **K. Baddari**, Doyen de la faculté des sciences, U. M. B. Boumerdes pour son aide lors de l'élaboration de ce travail.*

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Mes derniers et profonds remerciements vont à Monsieur Boussaha Tahar et Madame Adjabi Khadidja , pour leurs soutient et leurs confiance en moi, ainsi qu'au reste de la famille.

*Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier **mes parents, mes frères et mes soeurs** pour leurs soutient tout au long de mes études.*

Équations différentielles du troisième ordre de classe de Painlevé

Résumé

Une classification des équations différentielles dans le champ complexe, dont les intégrales générales sont des fonctions monovalentes, de troisième ordre de la forme

$$y''' = R(y'', y', y, x),$$

où le second membre est un polynôme en y'' , y' et y , a été faite par Chazy en 1911 et complétée par Cosgrove en 2000. Dans cette thèse on étudie deux classes d'équations du troisième ordre dont le second membre est une fonction rationnelle. On établit un ensemble de conditions nécessaires dont certaines sont suffisantes sur les coefficients des équations différentielles considérées, pour que leurs intégrales générales soient des fonctions monovalentes. À partir des conditions nécessaires obtenues on déduit les listes de toutes les équations de types considérés qui peuvent admettre des intégrales générales uniformes. Les conditions suffisantes nous ont permis de compléter l'étude de certaines équations figurant dans les listes obtenues afin d'établir un ensemble d'équations dont les intégrales générales sont uniformes. Parmi les équations établies dans cette thèse certaines ont été trouvées par différents auteurs en utilisant d'autres méthodes, alors que d'autres sont nouvelles.

Mots-clés: équations différentielles dans le champ complexe, fonctions monovalentes, intégrale uniforme, singularités mobiles, points critiques fixes, équation de Painlevé, propriété de Painlevé, test de Painlevé, indices de Fuchs.

Third order differential equations of Painleve class

Abstract

A classification of differential equations in the complex domain, which the general integrals single-valued functions of the third order of the form

$$y''' = R(y'', y', y, x),$$

where the second member is a polynom in y'' , y' and y , was done by Chazy in 1911 and completed by Cosgrove in 2000. In this thesis we study two classes of third order equations where the second member is a rational function. We establish a set of necessary conditions where some of them are sufficient on the considered differential equations coefficients, for the purpose that their general integrals be single-valued function. From the obtained necessary conditions, we deduce the lists of all equations of the considered types that can admit uniform general integrals. The sufficient conditions enable us to complete the study of some equations that are present in the obtained lists in order to establish a set of equations in which the general integrals are uniform. Between the established equations in this thesis, some was found by different authors, using an other methods, whereas other equations are new.

Keywords: Differential equations in the complex domain, single-valued functions, uniform integrals, movable singularities, fixed critical points, Painlevé equation, Painlevé property, Painlevé test, Fuchs indices.

Table des matières

Présentation du travail	1
1 Généralités sur les équations différentielles et leurs singularités	6
1.1 Équations différentielles dans le champ complexe	7
1.2 Singularités	8
1.2.1 Singularités des fonctions à variable complexe.	8
1.2.2 Singularités des équations différentielles ordinaires et de leurs solutions	9
1.2.3 Points critiques fixes et points critiques mobiles	10
1.3 La propriété “ de Painlevé ”	12
1.4 Transformation de Möbius	13
2 Équations différentielles sans point critique mobile	14
2.1 Équations différentielles linéaires	15
2.2 Équations différentielles du premier ordre	16
2.3 Transcendantes de Painlevé	17
2.3.1 Équations différentielles du deuxième ordre	17
2.3.2 Les six transcendantes de Painlevé - Gambier	19
2.4 Équations différentielles d'ordre quelconque	21
3 Recherche des conditions nécessaires pour qu'une équation différentielle ait ses points critiques fixes	22
3.1 Méthode de Painlevé	23
3.1.1 Lemme dû à Poincaré	23
3.1.2 Double méthode de Painlevé	23
3.2 Méthode de Frobenius	24
3.3 Méthode de Bureau	26

3.3.1	Théorème de Bureau	26
3.3.2	Principe de la méthode	28
3.4	Test de Painlevé	31
3.4.1	Recherche du comportement dominant	32
3.4.2	Recherche des indices de Fuchs	33
3.4.3	Détermination du nombre de constantes d'intégration	34
3.4.4	La méthode de perturbation de Painlevé	38
3.4.5	Application de la méthode aux équations du second ordre	41
4	Équations à points critiques fixes admettant comme équation <i>simplifiée</i>	
	l'équation $y'''y^2 = a_1yy'y'' + a_2y'^3$	45
4.1	Introduction	46
4.2	Conditions pour que l'équation <i>simplifiée</i> de (4.1.1) ait ses points critiques fixes	47
4.2.1	Détermination de toutes les équations (4.2.2) dont l'intégrale est à points critiques fixes.	47
4.2.2	Réduction de l'équation <i>simplifiée</i> (4.2.2) à des formes canoniques . .	49
4.3	Conditions pour que l'équation <i>réduite</i> de (4.1.1) ait ses points critiques fixes	50
4.3.1	Premier cas. $(p, q) = (-1, -6)$	51
4.3.2	Deuxième cas. $(p, q) = (-2, -9)$	64
4.3.3	Troisième cas. $(p, q) = (-3, -12)$	66
4.4	Conditions pour que l'équation <i>complète</i> de (4.1.1) ait ses points critiques fixes	68
4.4.1	Transformation de l'équation (4.1.1)	68
4.4.2	Premier cas. $(p, q) = (-1, -6)$	69
4.4.3	Deuxième cas. $(p, q) = (-2, -9)$	76
4.4.4	Troisième cas. $(p, q) = (-3, -12)$	78
4.4.5	Quatrième cas. p entier négatif quelconque	80
4.5	Questions et perspectives	84
5	Équations à points critiques fixes admettant comme équation <i>simplifiée</i>	
	l'équation $y'y''' = \beta y''^2$	85
5.1	Introduction	86
5.2	Conditions pour que l'équation <i>simplifiée</i> de (5.1.1) ait ses points critiques fixes	86

5.2.1	Détermination de toutes les équations (5.2.1) dont l'intégrale est à points critiques fixes	86
5.3	Conditions pour que l'équation <i>réduite</i> de (5.1.1) ait ses points critiques fixes	87
5.3.1	Premier Cas. $\beta = 0$	87
5.3.2	Deuxième cas. $\beta \neq 0$	88
5.4	Questions et perspectives	112
Conclusion générale et perspectives		113
	Conclusion générale	113
	Perspectives	113
Annexes		115
A.	Motivation de l'étude de l'équation (4.1.1)	115
B.	Équations de Riccati	121
B.1	Équation linéaire du second ordre	122
B.2	Résolvante schwarzienne du troisième ordre	123
C.	Fonctions et intégrales elliptiques	124
C.1	Fonctions de $\wp$ Weierstrass	125
C.2	Intégrales elliptiques	127
D.	Étude de l'équation P1 d'après Painlevé	129
Bibliographie		132
Index		138

Présentation du travail

La recherche des transcendentes uniformes définies par les équations différentielles algébriques est un problème qui s'est posé en fait depuis les travaux d'Abel et de Jacobi sur l'équation

$$y'^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2),$$

qui sont à l'origine de la théorie des fonctions elliptiques et (par extension) celle des fonctions uniformes.

Il s'agissait moins de trouver de nouvelles transcendentes que de découvrir des celles permettant d'intégrer les équations différentielles.

Le problème énoncé en 1900 par Paul Painlevé⁽¹⁾ est le suivant:

“ Déterminer toutes les équations différentielles algébriques du premier ordre, puis du second ordre, puis troisième ordre etc., dont l'intégrale générale est uniforme ”.

L'intégration des équations différentielles à une ou plusieurs variables est un problème très important en analyse; sa solution peut être regardée comme la voie la plus naturelle pour la définition des fonctions. De ce point de vue, les équations différentielles ordinaires, qu'il faut d'abord étudier, sont celles dont l'intégrale générale est uniforme, ou dont les points critiques sont indépendants des constantes d'intégrations; en d'autres termes, ce sont les équations telles que le domaine d'uniformité de leurs intégrales peut être fixé à *a priori*.

La théorie des équations différentielles à points critiques fixes a fait l'objet de nombreux travaux, dont les principaux sont dus à Briot et Bouquet [1855], Lazarus Fuchs [1884] et H. Poincaré [1885] pour le premier ordre et à E. Picard [1880 – 1895], P. Painlevé et B. Gambier [1893 – 1906] pour le second ordre.

Painlevé a mis au point un “ *test* ” connu sous le nom “ *Alpha* ” capable de vérifier la propriété de Painlevé pour une classe étendue d'équations différentielles sans avoir à résoudre celles-ci préalablement. Bien qu'extrêmement lourd à mettre en oeuvre (rappelons

⁽¹⁾Paul Painlevé né à Paris le 5 décembre 1863 et mort à Paris le 29 octobre 1933, est un mathématicien et homme politique français.

qu'à l'époque, les logiciels de calcul formel n'existaient pas !), Painlevé l'a pourtant utilisé avec succès pour démarrer un programme systématique de recherche des équations qui sont de type de Painlevé.

i. Ce programme part, dans un premier temps, à la recherche des équations d'ordre un qui définissent des solutions ne pouvant s'exprimer en termes de fonctions élémentaires. On ne trouve qu'une seule famille non élémentaire, celle des fonctions elliptiques dont l'équation différentielle qui les définit, d'ordre un et de degré 2, se ramène à la forme de Weierstrass:

$$y'^2 = 4y^3 - g_2y - g_3 \implies x = \int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}.$$

Il est à remarquer que les équations qui font intervenir un polynôme de degré supérieur à 3 n'introduisent pas de fonctions fondamentalement nouvelles. À l'ordre 4, l'intégrale demeure elliptique et aux ordres supérieurs, elle devient hyperelliptique (ou abélienne) mais les fonctions abéliennes peuvent s'écrire comme quotients de polynômes homogènes en la fonction thêta de Riemann, pour laquelle des algorithmes de calcul efficient sont connus.

ii. Le programme de Painlevé se poursuit à l'ordre deux, cherchant les équations dont les solutions ne peuvent s'exprimer ni en termes de fonctions élémentaires ni en terme des fonctions trouvées à la première étape et ainsi de suite, aux ordres successivement croissants. Etant donné que ce programme représente une tâche infinie, l'école de Painlevé a abordé le problème en se limitant aux équations différentielles d'une classe donnée (par exemple, polynomiale en la variable dépendante et ses dérivées et analytique en la variable indépendante, $P(y^{(n)}, \dots, y'', y', y, x)$).

À l'ordre deux et degré un, *six équations* ont été trouvées dont les solutions ne sont exprimables ni en termes de fonctions élémentaires ni en termes de fonctions elliptiques. Elles définissent donc bien de nouvelles fonctions que l'on nomme *transcendantes de Painlevé*. Plus précisément, P. Painlevé et B. Gambier ont obtenu toutes les équations de la forme

$$y'' = \mathcal{R}(y', y, x),$$

où le membre de droite est rationnel en y' et y et analytique en x , à points critiques fixes, c'est-à-dire qui satisfont ce qu'on appelle maintenant la *propriété de Painlevé*. Ils ont montré que la solution générale de ces équations est *univoque (uniforme)* au voisinage de chacune de ses singularités «*mobiles*». Ils ont mis en évidence *cinquante* classes de telles équations, et *six* d'entre elles se sont avérées irréductibles: leurs solutions générales ne peuvent être exprimée en termes de fonctions connues, comme les fonctions elliptiques, ou en termes de solutions d'équations linéaires.

Cent ans plus tard, les équations de Painlevé sont redevenues un objet majeur de recherches, tant en mathématiques qu'en physique, dans des domaines aussi variés que les variétés de Frobenius, théorie des champs, groupes quantiques, matrices aléatoires, feuilletages, la théorie de Galois, la géométrie symplectique, les solutions solitons, la théorie des systèmes intégrables, les solutions stables, les fonctions spéciales, l'application à la théorie de l'optique non linéaire et de la propagation des ondes dans les fluides.... Ces problèmes sont en général formulés à l'aide d'équations aux dérivées partielles intégrables et les transcendentes de Painlevé en sont des solutions spéciales.

L'analyse de Painlevé pour les équations différentielles est un outil efficace pour tester la structure des singularités de celles-ci. Grâce au *test de Painlevé*, on a pu découvrir beaucoup de concepts intéressants pour analyser les équations différentielles qui vérifient le test.

On peut concevoir que le perfectionnement des logiciels de calcul formel permettra d'envisager d'aller plus loin dans ce domaine.

Les résultats obtenus par Painlevé dans le cas du second ordre ont ouvert ainsi un domaine entièrement nouveau à la recherche: ils permettaient d'aborder l'étude des équations du troisième ordre et d'ordre supérieur dont les intégrales ont leurs points critiques fixes.

Aux ordres supérieurs, seule la classification des équations d'ordre trois et de degré un a été étudiée par Chazy⁽¹⁾. Ainsi, au tournant du siècle, l'immense majorité des équations différentielles restaient inexplorées.

Le sujet de la thèse concerne l'étude de certaines équations différentielles dans le champ complexe. Nous nous intéressons plus particulièrement aux équations différentielles du troisième ordre de la forme:

$$y''' = \mathcal{R}(y'', y', y, x) \quad (\text{E1})$$

où $\mathcal{R}$ désigne une fraction rationnelle en y'', y' et y , à coefficients analytiques en x . Ces équations ont été étudiées pour la première fois par Painlevé. Il a montré que l'équation (E1) peut être à points critiques fixes uniquement si:

1. $\mathcal{R}$ est un polynôme, du second degré au plus, en y'' , soit:

$$y''' = \mathcal{R} \equiv A(y', y, x) y''^2 + B(y', y, x) y'' + C(y', y, x), \quad (\text{E2})$$

où les fonctions A , B et C sont des fractions rationnelles en y' , dont les coefficients sont algébriques en y et analytiques en x .

⁽¹⁾Jean Chazy (né à Villefranche-sur-Saône le 15 août 1882 - mort à Paris le 9 mars 1955) est un mathématicien français spécialisé dans l'étude du mouvement des corps célestes.

2. A coïncide avec une des *onze* expressions suivantes:

$$0, \frac{1 - \frac{1}{\eta}}{y' + a_1}, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y' + a_1} + \frac{1}{y' + a_2} \right), \frac{1}{y' + a_1} + \frac{1}{2(y' + a_2)}, \frac{1}{2(y' + a_1)} + \frac{2}{3(y' + a_2)},$$

$$\frac{2}{3(y' + a_1)} + \frac{3}{4(y' + a_2)}, \frac{1}{2(y' + a_1)} + \frac{5}{6(y' + a_2)}, \frac{2}{3} \left(\frac{1}{y' + a_1} + \frac{1}{y' + a_2} \right),$$

$$\frac{2}{3(y' + a_1)} + \frac{5}{6(y' + a_2)}, \frac{3}{4} \left(\frac{1}{y' + a_1} + \frac{1}{y' + a_2} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y' + a_1} + \frac{1}{y' + a_2} + \frac{1}{y' + a_3} \right),$$

(a_1, a_2, a_3 sont des fonctions de y et x , et η est un entier différent de ± 1).

3. B et C , considérés comme fonctions de y' , n'ont d'autres pôles, $y' = g(y, x)$, que ceux de A , et ces pôles sont tous simples.

4. Posons: $A = \frac{Q}{D}$, $B = \frac{R}{D}$ et $C = \frac{S}{D}$, où D, Q, R, S désignent des polynômes en y' premiers entre eux. Les degrés de R et de S en y' surpassent le degré de D : le premier d'une unité, le second de trois unités au plus.

Ces théorèmes limitent le degré des fractions rationnelles A, B, C en y' . Les degrés respectifs de D, Q, R, S en y' sont au plus égaux à 3, 2, 4 et 6 (voir [56, 1900]). Toutes les équations que nous étudions à points critiques fixes rentrent dans un de ces types.

Lorsque l'équation (E1) est polynomiale, le problème a été complètement résolu par Cosgrove [22, 2000]. Dans le cas des équations (E2), le problème posé est beaucoup plus compliqué. Nous examineront quelques cas particuliers de ce problème. D'une manière précise, nous supposons que les équations complètes correspondantes aux équations du type (E2) que nous étudions, sont de la forme:

$$y''' = B(y', y, x) y'' + C(y', y, x) \quad (\text{E3})$$

ou bien

$$y''' = \frac{1 - \frac{1}{\eta}}{y' + a_1} y''^2 + B(y', y, x) y'' + C(y', y, x), \quad (\text{E4})$$

avec $a_1 = \alpha y^2$ où α est constant. On se propose de trouver des conditions nécessaires ou suffisantes sur les coefficients pour que l'intégrale générale soit à points critiques fixes. Ceci nous permet de prouver qu'il existe des équations du type (E1) dont l'intégrale générale est à points critiques fixes (l'intégrale générale est une fonction monovalente).

Le problème ainsi posé comprend comme cas particulier, celui que J. Chazy [13], puis R. Granier [27, 1912] ont résolu (équation *simplifiée*⁽¹⁾ de (E1)).

⁽¹⁾ c'est-à-dire l'équation obtenue en y remplaçant x par $x_0 + \varepsilon x$, ε désignant un paramètre arbitraire, et en faisant tendre ε vers zéro. La considération des équations simplifiées permet de classer les équations à points critiques fixes.

Pendant les quarante dernières années des résultats importants ont été obtenus dans l'étude des équations du type (E1) (Bureau [1964, 1972]; Lukashevich [1982]; Martynov [1982] et Cosgrove [1997, 2000, 2001]) voir par exemple dans [22, la bibliographie de cet article est très complète sur le sujet traité].

L'objet de ce travail est de reprendre systématiquement l'étude des équations (E3) et (E4). Nous obtenons ainsi les résultats de H. Exton dans [24, 1973], I. P. Martynov en 1985 dans [48, 49], Kozulin et Lukashevitch dans [39, 1988], U. Mugan et F. J. R. Ward en 2004 dans [54], ainsi que certains résultats nouveaux.

Ce travail est réparti sur cinq chapitres.

Avant d'entamer ces chapitres une brève introduction sur les équations différentielles dans le champ complexe en particulier l'analyse de Painlevé, a été introduite.

Dans le Chapitre 1 on rappelle des notions nécessaires à la compréhension des chapitres 4 et 5, en explicitant en détail la propriété de Painlevé. Le chapitre 2 est consacré aux différents résultats concernant les équations différentielles à points critiques fixes. Dans le chapitre 3 sont exposées les différentes méthodes de stabilité (absence de points critiques mobiles) qui sont utilisées dans la suite.

On démontre au Chapitre 4 que, pour être stable⁽¹⁾ (à points critiques fixes), toute équation différentielle du type (E3) doit être réductible à l'une des 14 formes canoniques écrites dans la section 2. On prouve que ces équations se ramènent à des équations linéaires ou à des équations d'ordres inférieurs dont les solutions sont connues. Certaines équations complètes obtenues dans la section 3 sont stables alors que d'autres sont à étudier ultérieurement.

Au Chapitre 5, on se propose de trouver des conditions nécessaires sur les coefficients de l'équation (E4) pour que les singularités mobiles soient des pôles. Pour établir ce résultat on choisit le test dû à Painlevé en s'inspirant de [1, 2] et [20], et on propose de continuer l'étude de certaines équations obtenues. Ces dernières équations ont été choisies parmi celles qui nous paraissaient les plus simples de manière à obtenir des résultats précis et complets.

Le mémoire de la thèse se termine par une annexe de quatre parties. Dans la première partie sont donnés des résultats sur l'équation (E3) ainsi qu'une motivation de son étude. Les trois dernières parties sont respectivement consacrées aux définitions et propriétés de l'équation de Riccati, des fonctions elliptiques et de la première équation de Painlevé.

⁽¹⁾ Une équation différentielle stable est une équation dont la solution générale est une fonction monovalente.

Chapitre 1

Généralités sur les équations différentielles et leurs singularités

Sommaire

1.1	Équations différentielles dans le champ complexe	7
1.2	Singularités	8
1.2.1	Singularités des fonctions à variable complexe.	8
1.2.2	Singularités des équations différentielles ordinaires et de leurs solutions	9
1.2.3	Points critiques fixes et points critiques mobiles	10
1.3	La propriété “ de Painlevé ”	12
1.4	Transformation de Möbius	13

Comme il est précisé dans le titre, dans ce chapitre on introduit des objets qui seront utilisés par la suite, le but est donc d'introduire quelques définitions et certains théorèmes relatifs à la théorie des équations différentielles dans le champ complexe, en se bornant, pour plus de précision, aux équations différentielles à points critiques fixes.

1.1 Équations différentielles dans le champ complexe

L'étude des équations différentielles algébriques a été assez développée au début du vingtième siècle par des mathématiciens comme Fuchs⁽¹⁾, Poincaré, Malmquist, Painlevé et d'autres: voir par exemple [32, 35], où on clarifie certains des travaux classiques et on fait un premier exposé assez complet sur le sujet.

La résolution des équations différentielles avait montré que les solutions dépendaient des constantes d'intégration et des conditions du problème (conditions de Cauchy par exemple). Une solution peut être définie dans un certain intervalle et cet intervalle d'existence dépend en général du problème posé. On se demande donc s'il existe des cas où les solutions admettent des *points singuliers fixes*, c'est-à-dire indépendants des conditions du problème en question.

La théorie des équations différentielles complexes est vaste; même la partie de la théorie qui concerne les équations *linéaires* est d'une grande richesse; plusieurs problèmes fondamentaux relatifs aux équations linéaires avec singularités isolées restent non résolus.

L'étude des équations différentielles *non linéaires* est bien moins simple. La raison essentielle est que dans le cas non linéaire, les solutions, outre qu'elles héritent éventuellement des singularités de l'équation mère, peuvent en présenter de nouvelles que, pour cette raison, certains auteurs appellent “ *singularités spontanées* ”.

On les nomme aussi “ *singularités mobiles* ” pour cette autre raison que leur localisation dépend habituellement des conditions initiales.

Comme il a été dit, la première difficulté qui se présente dans l'étude des solutions des équations différentielles est la présence des *singularités mobiles* (mobile signifie : qui dépend des conditions initiales). Cette difficulté n'existe pas dans le cas des équations linéaires, aussi leur étude a-t-elle été développée la première. En outre, ces équations se rencontrent dans de nombreuses applications voir par exemple [17, 37, 64].

⁽¹⁾Lazarus Immanuel Fuchs, allemand, 1833-1902. Élève de Weierstrass, ses travaux portant sur l'étude de solutions singulières (fonctions fuchsiennes) d'équations linéaires.

1.2 Singularités

Ce sont les singularités de l'intégrale qui compliquent si profondément l'étude des équations différentielles et arrêtent la convergence des développements.

1.2.1 Singularités des fonctions à variable complexe.

La pathologie des équations différentielles est liée au *nombre*, au *type* et à la *disposition* des singularités de leurs solutions dans le plan complexe.

Etant donnée une fonction d'une variable complexe x , on répartit les points du plan, $(\operatorname{Re}(x), \operatorname{Im}(x))$, en deux catégories, les points singuliers et les autres (non singuliers).

Définition 1.1. *Un point est dit singulier pour une fonction si celle-ci n'y est pas univoquement déterminée soit qu'elle y est infinie soit qu'elle est multivaluée en son voisinage immédiat.*

Précisons l'orsqu'on parcourt un circuit fermé quelconque entourant aussi étroitement que l'on veut un point du plan complexe, deux cas sont possibles.

- i. Soit la fonction reprend systématiquement sa valeur de départ et on dit qu'elle est *monovaluée*.
- ii. Soit elle subit une discontinuité qui l'en empêche et on dit qu'elle est *multivaluée*.

Dans le cas multivalué, on distingue encore celui où la fonction revient à sa valeur de départ après un nombre fixe de tours (multivaluation finie) et le cas où cela ne se produit jamais (multivaluation infinie).

Un point x_0 est singulier de *branchement* pour une fonction $y(x)$, si la fonction est multivaluée au voisinage de ce point. On distingue habituellement:

ii.a. les points de *branchements rationnels* (d'ordre s) au voisinage desquels la fonction reste développable en série de Puiseux,

$$y(x) = \frac{1}{(x - x_0)^{n/s}} \sum_{i=0}^{+\infty} c_i (x - x_0)^{i/s},$$

(s entier positif, n entier). La fonction est s fois multivaluée.

Exemple 1. La fonction $y(x) = \sqrt[3]{x}$ est trivaluée et à chaque valuation correspond une valeur de l'entier k (modulo 3) dans la formule

$$\sqrt[3]{x} = (\rho \exp(i(\theta + 2k\pi)))^{1/3} = (\rho \exp(i\theta))^{1/3} (\rho \exp(i2k\pi))^{1/3}.$$

ii.b. les points de branchements *irrationnels* (voire complexes) et *logarithmiques*.

Exemple 2. Les fonctions $y(x) = x^{\sqrt{2}}$ d'une part, et $y(x) = \ln x$ ou $y(x) = \arctg(x)$ d'autre part. Dans le cas d'un point de branchement irrationnel ou logarithmique, la fonction ne revient jamais à sa valeur de départ quel que soit le nombre de tours que l'on effectue autour du point de branchement: elle est infiniment multivaluée. Par exemple, si on parcourt un cercle de rayon ρ , centré sur l'origine, la partie imaginaire de la fonction logarithme augmente de 2π à chaque tour:

$$\ln x = \ln(\rho \exp(i(\theta + 2k\pi))) = \ln(\rho \exp(i\theta)) + 2k\pi i.$$

Remarque 1.1. Le nom de points de branchement (ou points critiques) est réservé exclusivement aux points singuliers (isolés ou non) autour desquels deux branches au moins de $y(x)$ se permutent.

Définition 1.2. Un point critique algébrique où la fonction prend une valeur finie sera appelé point critique régulier, tandis qu'un point critique où la fonction devient infinie sera appelé pôle critique.

1.2.2 Singularités des équations différentielles ordinaires et de leurs solutions

Peut-on, en toute généralité, prévoir les singularités des solutions d'une équation différentielle ordinaire rien qu'en lisant celle-ci? La réponse à cette question est positive si l'équation est linéaire et négative si elle ne l'est pas. Bien qu'elles entretiennent des rapports étroits, on se gardera de confondre les singularités qui affectent les équations différentielles et leurs solutions.

i. Singularités des équations

Un point est dit singulier pour une équation différentielle d'ordre n , s'il est point singulier d'une de ses solutions. Dans le cas où l'équation en question est linéaire ses points singuliers sont les points singuliers de ses coefficients.

Exemple 3. L'équation

$$x(x^2 + 1)y''' + x^2y' - y = 0 \iff y''' + \frac{x}{(x^2 + 1)}y' - \frac{1}{x(x^2 + 1)}y = 0,$$

est singulière en $x = 0$, et en $x = \pm i$.

ii. Singularités des solutions

Tout système différentiel d'ordre n possède une solution générale, à savoir une famille de fonctions dépendant de n paramètres constants reliés aux conditions initiales. Si le système est non linéaire, il se peut qu'il possède, en plus, des solutions singulières dépendant de moins de n paramètres, éventuellement zéro. Les points du plan complexe où la solution générale n'est pas univoquement définie sont ses singularités. De même pour la solution singulière.

1.2.3 Points critiques fixes et points critiques mobiles

Quand on approfondit les conditions nécessaires pour qu'une équation ait son intégrale uniforme, on se trouve amené par la nature même du problème à le décomposer en deux problèmes successifs, et cela de la manière suivante: étant donnée une équation différentielle, les points critiques d'une de ses intégrales sont les uns fixes (indépendants de l'intégrale considérée), les autres (variables avec l'intégrale considérée).

Alors une solution $y(x)$ a, en général, des singularités de deux types:

- i. *mobiles*, c'est-à-dire qui dépendent de la solution choisie, donc des conditions initiales.
- ii. *fixes*, qui ne dépendent pas des conditions initiales et qui sont en général des singularités pour presque toutes les solutions. Ces singularités peuvent se déterminer sur l'équation (équation linéaire).

Remarque 1.2. *Si un point singulier d'une solution ne coïncide pas avec un des points singuliers fixes, il est appelé mobile car sa position dépend de la solution.*

Exemple 4. *Rappelons quelques équations simples, déjà étudiées, en insistant sur le caractère mobile de leurs singularités spontanées:*

$$y' = y^2 \text{ et } y(x_0) = y_0 \implies y = \frac{y_0}{1 - (x - x_0)y_0}.$$

Solution monovaluée présentant un pôle mobile.

$$y' = y^3 \text{ et } y(x_0) = y_0 \implies y = \frac{y_0}{\sqrt{1 - 2(x - x_0)y_0^2}}.$$

Solution multivaluée présentant un point de branchement rationnel mobile d'ordre 2.

$$y' = \exp(y) \text{ et } y(x_0) = y_0 \implies y = y_0 - \ln(1 - (x - x_0)\exp(y_0)).$$

Solution multivaluée présentant un point de branchement logarithmique mobile.

Voici encore certains exemples que donne Painlevé dans sa première Leçon de Stockholm

$$y' + \frac{y^2}{x} = 0, \quad y' + \frac{y}{x^2} = 0, \quad y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x},$$

qui ont respectivement pour solution

$$y = \frac{1}{k + \ln x}, \quad y = k \exp\left(\frac{1}{x}\right), \quad y = \sin(k + \ln x).$$

Le point $x = 0$ (quelque soit k) est un point singulier transcendant pour chaque solution. C'est un point singulier fixe, critique transcendant de la première intégrale, essentiel de la seconde, un point à la fois essentiel et critique transcendant de la troisième. Les singularités mobiles sont au plus des pôles.

Si on dérive chacune de ces équations, et si on élimine x entre les deux équations, nous obtenons:

$$y'' + 2\frac{y'^2}{y} + \frac{1}{y^2} = 0, \quad \frac{yy''}{y'^2} = 1 + 2\frac{\sqrt{-y}}{y'}, \quad y'' + \frac{yy'^2}{1-y^2} = \frac{y'^2}{\sqrt{1-y^2}},$$

dont les solutions sont

$$y = \frac{1}{k_1 + \ln(x - k_2)}, \quad y = k_1 e^{\frac{1}{x-k_2}}, \quad y = \sin(k_1 + \ln(x - k_2)),$$

et on voit apparaître des points singuliers transendants mobile, où k_1 et k_2 représentant les deux constantes d'intégration.

Les équations du troisième ordre offrent la singularité plus curieuse encore de coupures essentielles variables avec les constantes d'intégration. Un exemple remarquable en est fourni par l'équation du troisième ordre que vérifie la fonction modulaire (voir [57])

$$\frac{y'''}{y'^3} - \frac{3y''^2}{2y'^4} = \frac{1}{2(y-1)^2} + \frac{4}{9} \frac{1}{y^2} - \frac{41}{72} \frac{1}{y(y-1)},$$

équation dont l'intégrale générale est $y = \varphi\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$, φ représentant la fonction modulaire. Cette intégrale est une fonction uniforme de x , qui (pour des valeurs quelconques des constantes a, b, c, d) admet une ligne singulière.

On est conduit ainsi à généraliser le problème primitif, et à introduire, comme équations intermédiaires, les équations dont l'intégrale a ses points critiques fixes; nous donnerons à ces équations, le nom d'équations différentielles à points critiques fixes.

Cette classe d'équations constitue une extension des équations linéaires, dont une propriété fondamentale est précisément d'avoir toutes leurs singularités fixes.

Définition 1.3. *Les points critiques sont dits mobiles ou fixes suivant qu'ils varient ou non avec les constantes d'intégration.*

Définition 1.4. *On dit qu'une équation différentielle a des points de branchement (respectivement des singularités essentielles) mobiles si ses solutions ont des points de branchement (respectivement des singularités essentielles) dont la position dépend des constantes d'intégration.*

1.3 La propriété “ de Painlevé ”

On dit qu'une équation différentielle a “ la propriété de Painlevé ” lorsque les seules singularités mobiles de ses solutions sont des pôles (c'est-à-dire elle n'a ni point de branchement mobile, ni singularité essentielle mobile). C'est une petite extension de la propriété utilisée par Kowalevski [37], la différence avec la propriété demandée par Painlevé [58], ce qu'elle a cherché, ce sont les où le mouvement du solide est défini par des fonctions *méromorphes* de t qui possèdent effectivement des *pôles*. Son procédé laisse échapper les cas où ces fonctions seraient uniformes sans avoir de pôles, soit qu'elles fussent *holomorphes*, soit que leurs singularités fussent *transcendantes*.

La propriété de Painlevé s'énonce de la façon suivante:

Définition 1.5. *Par définition, une équation différentielle possède la propriété de Painlevé si sa solution générale est monovaluée dans un domaine du plan complexe ou si elle peut y être rendue monovaluée par un système de coupures dans le plan complexe. Il revient au même de poser que sa solution générale ne possède aucun point de branchement mobile.*

Définition 1.6. *Les solutions d'une équation différentielle qui vérifie la propriété de Painlevé, n'ont de points critiques qu'en les singularités fixes de l'équation.*

Autrement dit, les solutions d'une telle équation différentielle, n'admettent que des pôles ou des singularités essentielles en ses singularités non fixes.

1.4 Transformation de Möbius

On définit la transformation suivante:

Définition 1.7. *On appelle transformation de Möbius en y , une transformation de type*

$$(x, y) \longrightarrow \left(X = \varphi(x), Y(x) = \frac{\lambda(x)y + \mu(x)}{\gamma(x)y + \delta(x)} \right),$$

avec $\lambda, \mu, \gamma, \delta$ et φ des fonctions analytiques telles que: $\lambda\delta - \mu\gamma \neq 0$.

Deux équations différentielles liées par une transformation de Möbius sont considérées comme équivalentes du point de vue de l'analyse de Painlevé.

Proposition 1.1. [18] *La propriété de Painlevé est invariante par transformation de Möbius.*

Dans la suite de ce travail, nous utiliserons des transformations de Möbius d'un type particulier qu'on notera $T(\lambda, \varphi, \mu)$ qui non seulement n'altèrent pas la propriété de Painlevé, mais également la forme de l'équation différentielle.

Chapitre 2

Équations différentielles sans point critique mobile

Sommaire

2.1	Équations différentielles linéaires	15
2.2	Équations différentielles du premier ordre	16
2.3	Transcendantes de Painlevé	17
2.3.1	Équations différentielles du deuxième ordre	17
2.3.2	Les six transcendantes de Painlevé - Gambier	19
2.4	Équations différentielles d'ordre quelconque	21

La plus part des résultats dont on aura besoin par la suite sont introduits dans ce chapitre. En effet nous rappelons dans ce chapitre des résultats sur les équations différentielles à points critiques fixes, sans en donner les démonstrations; les références que nous utilisons sont les ouvrages [18, 29, 32, 35].

2.1 Équations différentielles linéaires

Soit

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x) y = 0,$$

une équation linéaire homogène d'ordre n et soit x_0 un point du plan complexe au voisinage duquel les coefficients $p_k(x)$ sont holomorphes. On suppose que pour $x = x_0$, $y(x)$ ainsi que ses $n - 1$ dérivés vérifient des conditions initialement données; alors l'équation précédente admet une unique solution $y(x)$. Cette solution s'exprime en série de puissance de $x - x_0$ qui converge dans un disque de centre x_0 et dont le bord contient des points singuliers des coefficients p_k . Autrement dit les singularités ne peuvent être autre que les singularités des coefficients de l'équation, et par conséquent elle n'admet aucun point critique mobile.

Remarque 2.1. *Les équations différentielles linéaires n'admettent que des singularité fixes.*

Exemple 5. *Pour l'équation de Bessel*

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0,$$

$x = 0$ et $x = \infty$ sont des points singuliers fixes; tout les autres sont ordinaires.

Théorème 2.1. [12] *Les systèmes linéaires sont stables (i.e. le système est stable si toutes ses solutions sont stables⁽¹⁾. Il est instable dans le cas contraire).*

⁽¹⁾La composante $y_i(x)$ de la solution est *stable* si tous ses points critiques isolés (i.e. ils ne peuvent former ni une ligne continue, ni un ensemble parfait discontinu) éventuels sont *fixes*. Elle est instable si elle n'est pas stable. La solution $y(x)$ est stable si toutes ses composantes sont stables. Elle est instable dans le cas contraire.

2.2 Équations différentielles du premier ordre

Soit l'équation différentielle de la forme

$$F(y', y) = 0,$$

si l'on admet que F est polynomiale et que sa solution générale est uniforme, alors

1. (Hermite) le genre de la courbe algébrique $F = 0$ est zéro ou un.
2. (Briot et Bouquet) elle est de la forme:

$$F(y', y) = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{2m-2} a_{j,k} y^j y'^k = 0, \quad a_{0,m} = 1,$$

où m est un entier positif et les $a_{j,k}$ sont des constantes,

3. (Briot et Bouquet) la solution est, dans le cas du genre zéro, une fraction rationnelle de e^{ax} ou de x (a désignant une constante); et dans le cas du genre un, une fonction elliptique.

Remarque 2.2. Dans les deux cas, il existe un algorithme, implanté en Maple par Mark van Hoeij [46], qui donne l'expression explicite de la solution.

4. Dans ses Leçons de Stockholm Painlevé a montré les résultats suivants: on suppose que pour tout x fixé, la courbe algébrique

$$\mathcal{R}(y', y, x) = 0, \tag{2.2.1}$$

est irréductible de genre p et de degré m en y' .

4.i. Si $p > 1$, l'équation $\mathcal{R}(y', y, x) = 0$ s'intègre algébriquement au sens suivant: il n'existe qu'un nombre fini de transformations birationnelles entre les courbes

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(y', y, \bar{x}) &= 0, & (a) \\ \mathcal{R}(y'_0, y_0, x_0) &= 0, & (b) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

où $\bar{x}$ et x_0 fixes.

Une quelconque de ces transformations donne l'intégrale générale de l'équation. On obtient d'autres intégrales en composant cette transformation avec une quelconque des transformations birationnelles en nombre fini de la courbe (2.2.2.b) .

4.ii. Si $p = 1$, l'équation $\mathcal{R}(y', y, x) = 0$ se ramène algébriquement à

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2),$$

qui est l'équation vérifiée par les fonctions elliptiques.

4.iii. Si $p = 0$, l'équation $\mathcal{R}(y', y, x) = 0$ se ramène algébriquement à l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

2.3 Transcendantes de Painlevé

Les transcendantes de Painlevé ont été introduites au début du vingtième siècle, pour résoudre une certaine classe d'équations différentielles ordinaires non linéaires du second ordre.

2.3.1 Équations différentielles du deuxième ordre

Soit l'équation de second ordre de la forme:

$$y'' = \mathcal{R}(y', y, x), \tag{2.3.1}$$

où $\mathcal{R}(y', y, x)$ est une fonction rationnelle de y et y' dont les coefficients sont des fonctions analytiques en x .

Les équations de la forme (2.3.1) dont l'intégrale générale est à points critiques fixes ont été déterminées par P. Painlevé et B. Gambier; elles s'intègrent soit à l'aide des fonctions algébriques, soit à l'aide des fonctions définies par des équations différentielles linéaires, soit à l'aide des fonctions elliptiques ou enfin à l'aide des fonctions essentiellement nouvelles, non réductibles aux fonctions déjà introduites par les équations (2.2.1) du premier ordre dont l'intégrale générale est à points critiques fixes. Ces fonctions nouvelles sont définies par six équations canoniques.

Painlevé établit d'abord que l'équation (2.3.1) est de la forme

$$y'' = A(y, x)y'^2 + B(y, x)y' + C(y, x). \tag{2.3.2}$$

L'équation (2.3.2) doit avoir son intégrale générale uniforme: ce qui détermine aussitôt toutes les expressions possibles de la fraction rationnelle A en y .

$A(y, x)$ doit coïncider avec une des *neuf* expressions

$$\begin{aligned} &0, \frac{a}{ay+b} + \frac{c}{cy+d}, \frac{a\left(1+\frac{1}{\eta}\right)}{ay+b} + \frac{c\left(1-\frac{1}{\eta}\right)}{cy+d}, \frac{1}{2}\left(\frac{a}{ay+b} + \frac{c}{cy+d}\right) + \frac{e}{ey+f}, \\ &\frac{a}{ay+b}, \frac{2}{3}\left(\frac{a}{ay+b} + \frac{c}{cy+d} + \frac{e}{ey+f}\right), \frac{1}{2}\frac{a}{ay+b} + \frac{3}{4}\left(\frac{c}{cy+d} + \frac{e}{ey+f}\right), \\ &\frac{5}{6}\frac{a}{ay+b} + \frac{2}{3}\frac{c}{cy+d} + \frac{1}{2}\frac{e}{ey+f}, \frac{1}{2}\left(\frac{a}{ay+b} + \frac{c}{cy+d} + \frac{e}{ey+f} + \frac{g}{gy+h}\right), \end{aligned}$$

où $a, b, \dots, h$ désignent des fonctions de x qui peuvent être identiquement nulles ou se réduire à des constantes, η désigne un entier positif supérieur à un.

Chaque forme de l'équation réduite introduit une classe d'équations à points critiques fixes; il y a ainsi 50 classes d'équations⁽¹⁾, et *six* d'entre elles se sont avérées *irréductibles*: leurs solutions générales ne peuvent être exprimées en termes de fonctions connues, comme par exemple les fonctions elliptiques, ou en termes de solutions d'équations linéaires [35].

Remarque 2.3. *La question de l'irréductibilité d'une équation différentielle à été étudiée de manière approfondie par P. Painlevé depuis les Leçons de Stockholm. En 1904, P. Painlevé écrit ceci: " D'une manière générale, une équation différentielle irréductible devra être regardée comme intégrée si, par un procédé quelconque d'approximation indéfinie (série, fraction continue, intégrale définie, etc.) on arrive à représenter l'intégrale générale dans tout son domaine d'existence (réel ou complexe), avec une erreur aussi petite qu'on veut et dont on saura donner une limite, la représentation mettant en évidence les propriétés fondamentales de l'intégrale, permettant de tenir compte des conditions initiales, etc.". (une équation d'ordre n est dite réductible si on peut exprimer une solution rationnellement après avoir résolu successivement des équations différentielles linéaires, abéliennes (dont les solutions sont des fonctions abéliennes) ou d'ordre strictement plus petit que n).*

Remarque 2.4. *L'irréductibilité au sens de Painlevé est plus restreinte que celle qui a été énoncée par J. Drach.*

Chez Painlevé, la variable indépendante est donnée.

Dans la théorie de Galois, ou dans la théorie développée par Drach, les deux équations

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2) \text{ et } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

ne sont pas considérées comme distinctes, alors que chez Painlevé elles le sont. Donc chez Painlevé, on ne s'autorise pas à échanger le rôle de la fonction et de la variable.

Le résultat essentiel des recherches de Painlevé est le suivant:

⁽¹⁾ La détermination complète de ces équations se trouve dans [27,35].

2.3.2 Les six transcendentes de Painlevé - Gambier

La première transcendante de Painlevé est solution de l'équation

$$P_I \text{ (Painlevé)} : y'' = 6y^2 + x.$$

La deuxième transcendante de Painlevé est solution de l'équation (α est une constante complexe)

$$P_{II} \text{ (Painlevé)} : y'' = 2y^3 + xy + \alpha; \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

La troisième transcendante de Painlevé est solution de l'équation ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes complexes $\beta\delta \neq 0$)

$$P_{III} \text{ (Painlevé)} : y'' = \frac{1}{y}y'^2 - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}.$$

La quatrième transcendante de Painlevé est solution de l'équation (α, β sont des constantes complexes)

$$P_{IV} \text{ (Painlevé)} : y'' = \frac{1}{2y}y'^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}.$$

La cinquième transcendante de Painlevé est solution de l'équation ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes complexes $\beta\delta \neq 0$)

$$P_V \text{ (Gambier)} : y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)y'^2 - \frac{1}{x}y' + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \frac{\gamma}{x}y + \delta y\left(\frac{y+1}{y-1}\right).$$

La sixième transcendante de Painlevé⁽¹⁾ est solution de l'équation ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes complexes)

$$\begin{aligned} P_{VI} \text{ (R. Fuchs)} : y'' = & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right)y'^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right)y' \\ & + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[\alpha + \beta\frac{x}{y^2} + \frac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2} + \frac{\delta x(x-1)}{(y-x)^2}\right]. \end{aligned}$$

Remarque 2.5. Depuis l'article [26] de B. Gambier, cette équation est connue comme l'équation VI de Painlevé, dont les cinq autres équations de Painlevé peuvent se déduire.

Ces équations sont à points critiques fixes et les seules singularités mobiles sont des pôles.

⁽¹⁾ Rappelons à ce sujet que l'équation P_{VI} a été retrouvée par Richard Fuchs (1873–1945) dans l'étude des équations linéaires du second ordre dont le groupe est indépendant d'un paramètre: ce qui constitue une propriété des équations de Painlevé.

Les singularités fixes sont:

$$P_I : \infty, P_{II} : \infty, P_{III} : 0, \infty, P_{IV} : \infty, P_V : 0, \infty, P_{VI} : 0, 1, \infty.$$

Rappelons encore que d'après Painlevé.

i. Les intégrales de l'équation P_I ne sont pas réductibles aux transcendantes classiques et définissent des transcendantes essentiellement nouvelles;

ii. Il en est de même des intégrales des équations P_{II} à P_{VI} sauf éventuellement pour des valeurs particulières des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$;

iii. Les équations P_I à P_V sont des dégénérescences — ou mieux, des confluentes — de l'équation P_{VI} suivant le schéma

$$\begin{array}{ccccc} & & P_{IV} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ P_{VI} & \rightarrow & P_V & & P_{II} \rightarrow P_I \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & P_{III} & & \end{array}$$

Les équations P_I, P_{II}, P_{IV} sont à intégrales uniformes.

Remarque 2.6. [26] toutes les équations de Painlevé s'obtiennent à partir de l'équation P_{VI} par confluence de la manière suivante: Faisons dans P_{VI}

$$\delta = \frac{\delta_1}{\varepsilon^2}, \quad \gamma = -\frac{\delta_1}{\varepsilon^2} + \frac{\gamma_1}{\varepsilon^2}, \quad x = 1 + \varepsilon X, \quad y = Y,$$

d'où on obtient l'équation

$$Y'' = \left(\frac{1}{2Y} + \frac{1}{Y-1} \right) Y'^2 - \frac{1}{X} Y' + \frac{(Y-1)^2}{X^2} \left(\alpha Y + \frac{\beta}{Y} \right) + \frac{\gamma}{X} Y + \delta Y \left(\frac{Y+1}{Y-1} \right) + \varepsilon(\dots),$$

qui a ses points critiques fixes en même temps que P_{VI} pour toute valeur non nulle donnée à ε , et par suite pour $\varepsilon = 0$: or elle réduit à P_V pour $\varepsilon = 0$. L'application du même principe donne en faisant dans P_{III}

$$\gamma = -\delta = \frac{1}{4\varepsilon^6}, \quad \alpha = \frac{-1}{2\varepsilon^6}, \quad \beta = \frac{1}{2\varepsilon^6} (1 + 4\beta_1 \varepsilon^3), \quad x = 1 + \varepsilon^2 X, \quad y = 1 + 2\varepsilon Y,$$

la dégénérescence

$$Y'' = 2Y^3 + XY + \beta_1 \quad \text{ou } P_{II}.$$

Ces équations définissent en utilisant les termes de Painlevé des " transcendantes essentiellement nouvelles " c'est -à- dire irréductibles aux transcendantes classiques.

Théorème 2.2. [61] (*Trois fameuses équations différentielles*)

$$y' = P(x) y^2 + Q(x) y + R(x), \quad (a)$$

$$y'^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2), \quad (b)$$

$$y'' = 6y^2 + x. \quad (c)$$

où $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ sont des fonctions holomorphes dans le plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier. Ces équations différentielles jouissent de la propriété remarquable (mais bien connue) suivante: les solutions (maximales) d'une équation différentielle (a), (b) ou (c) sont des fonctions méromorphes dans le plan complexe - ces solutions sont donc en particulier des fonctions uniformes- (voir l'annexe).

2.4 Équations différentielles d'ordre quelconque

L'étude systématique des équations différentielles non linéaires du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est à points critiques fixes a été entreprise pour la première fois par Painlevé; elle a été continuée par B. Gambier, J. Chazy et R. Garnier.

Posons

$$y^{(m-3)} = z, \quad y^{(m-2)} = z', \quad y^{(m-1)} = z'', \quad y^{(m)} = z''', \quad (2.4.1)$$

et considérons d'abord une équation résolue par rapport à z''' , soit

$$z''' = \mathcal{R}(z'', z', z, y^{(m-4)}, \dots, y'', y', y, x), \quad (2.4.2)$$

où $\mathcal{R}$ est rationnel en z'' , z' , algébrique en z , $y^{(m-4)}, \dots, y'', y', y, x$.

Si l'équation (2.4.2) a ses points critiques fixes les conditions suivantes sont remplies:

1. $\mathcal{R}$ est un polynôme du second degré au plus en z'' ; soit donc:

$$z''' = z''^2 A(z') + z'' B(z') + C(z')$$

où A , B , C étant rationnels en z' ; algébriques en z , $y^{(m-4)}, \dots, y'', y', y, x$.

2. $A(z')$ coïncide avec une des expressions suivantes:

$$0, \quad \frac{1 - \frac{1}{n}}{z' + a}, \quad \frac{1}{z' + a}, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z' + a} + \frac{1}{z' + b} \right),$$

n entier positif ou $< 2 - m$, a et b fonctions algébriques de z , $y^{(m-4)}, \dots, y'', y', y, x$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(z' + a)} + \frac{2}{3(z' + b)} && \text{pour } m \leq 7, \\ & \frac{1}{2(z' + a)} + \frac{3}{4(z' + b)} && \text{pour } m \leq 5, \\ & \frac{1}{2(z' + a)} + \frac{5}{6(z' + b)}, \quad \frac{2}{3} \left(\frac{1}{z' + a} + \frac{1}{z' + b} \right) && \text{pour } m = 4. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Recherche des conditions nécessaires pour qu'une équation différentielle ait ses points critiques fixes

Sommaire

3.1	Méthode de Painlevé	23
3.1.1	Lemme dû à Poincaré	23
3.1.2	Double méthode de Painlevé	23
3.2	Méthode de Fröbenius	24
3.3	Méthode de Bureau	26
3.3.1	Théorème de Bureau	26
3.3.2	Principe de la méthode	28
3.4	Test de Painlevé	31
3.4.1	Recherche du comportement dominant	32
3.4.2	Recherche des indices de Fuchs	33
3.4.3	Détermination du nombre de constantes d'intégration	34
3.4.4	La méthode de perturbation de Painlevé	38
3.4.5	Application de la méthode aux équations du second ordre	41

On va rappeler tout d'abord la procédure de Painlevé. Ensuite on va illustrer la méthode de Fröbenius, puis la méthode de Bureau, et on termine par un exposé sur le test de Painlevé développé dans [1, 20] (Le livre de R. conte [18] donne une présentation détaillée des autres méthodes de calcul). Dans la dernière section (4) on donne des exemples illustratifs.

3.1 Méthode de Painlevé

La recherche des conditions nécessaires s'appuie sur un lemme qui affirme l'uniformité des coefficients d'un développement dont la somme est uniforme.

3.1.1 Lemme dû à Poincaré

Il s'énonce comme suit:

Supposons que les seconds membres H et G du système

$$\frac{dy}{dx} = H(y, z, x), \quad \frac{dz}{dx} = G(y, z, x), \quad (3.1.1)$$

dépendent analytiquement d'un paramètre ε et soient holomorphes pour $\varepsilon = 0$; si l'intégrale générale du système (3.1.1) a ses points critiques fixes (stable) quelque soit ε (sauf peut-être pour $\varepsilon = 0$), elle est stable encore pour $\varepsilon = 0$ et les développements de $y(x)$, $z(x)$ suivant les puissances de ε ont comme coefficients des fonctions de x à points critiques fixes (voir, par exemple Painlevé, [56, 1900]).

3.1.2 Double méthode de Painlevé

Painlevé a donné une méthode qui permet d'obtenir des équations différentielles algébriques du second ordre à intégrale uniforme ou à points critiques fixes et il a appliqué explicitement cette méthode aux équations *résolues* en y'' .

Cette méthode se décompose en deux parties distinctes.

1. Une partie qui fournit un certain ensemble de conditions *nécessaires* pour que l'équation ait ses points critiques fixes.

L'idée de son ingénieuse méthode est de transformer, au moyen de changements de variable et d'une fonction dépendant analytiquement d'un paramètre ε tels que

$$x = x_0 + \varepsilon^{n+1}X, \quad y = y_0 + \varepsilon^{n+1}Y,$$

l'équation $y'' = R(y', y, x)$ en une équation de la forme $Y'' = G(Y', Y, X, \varepsilon)$ de façon que pour une valeur particulière de ε , par exemple $\varepsilon_0 = 0$, l'équation puisse être intégrée explicitement. Si l'équation n'a ni point singulier essentiel mobile ni point de branchement mobile pour ε différent de ε_0 , on montre qu'il doit en être de même pour $\varepsilon = \varepsilon_0$. Comme on connaît la solution de l'équation pour ε_0 , cela fournit des conditions nécessaires pour que toute intégrale de l'équation initiale n'ait que des pôles mobiles. Par des applications répétées de ce procédé, Painlevé et Gambier parviennent à 50 types d'équations.

2. Une partie qui démontre que ces conditions sont *suffisantes*.

La première partie de la méthode (recherche des conditions nécessaires) est à la fois simple et élémentaire. Elle s'applique avec une extrême facilité à une équation différentielle d'ordre quelconque, ou plus généralement à tout système d'équations aux dérivées partielles dont l'intégrale ne dépend que d'un nombre fini de constantes. La deuxième partie de la méthode (recherche des conditions suffisantes) est d'un caractère plus subtil: elle peut être étendue aux équations du troisième ordre ou d'ordre supérieur; mais les complications qu'elle entraîne croissent avec l'ordre différentiel [32].

Remarque 3.1. [56, 1900] *Pour que l'intégrale d'une équation soit uniforme, il faut d'abord qu'elle ne présente pas de points critiques mobiles, ensuite qu'elle ne présente pas de points critiques fixes, et l'étude de ces deux conditions exige des méthodes toutes différentes.*

3.2 Méthode de Fröbenius

On considère une équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (3.2.1)$$

Dans cette section on présente la méthode de Fröbenius qui permet de décrire le comportement local des solutions de l'équation (3.2.1) au voisinage d'une singularité fuchsienne.

A l'aide d'un changement de variable la singularité peut être ramenée à $x = 0$, et on considère le cas où $x = 0$ est une telle singularité.

On suppose que les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions méromorphes. On commence par chercher des solutions formelles de l'équation (3.2.1) de la forme

$$y(x) = x^s \sum_{k=0}^{+\infty} y_k x^k, \quad y_0 = 1, \quad (3.2.2)$$

avec s un nombre complexe fixé à déterminer. En identifiant les coefficients de même puissance, on obtient

$$\forall k \geq 0 : P(s+k) y_k + R_k(y_1, \dots, y_{k-1}, s) = 0, \quad (3.2.3)$$

où la fonction P est le trinôme du second degré défini par

$$P(s) = s^2 + (a-1)s + b, \quad (3.2.4)$$

avec

$$a = \operatorname{Re} s(p(x), x=0) = \lim_{x \rightarrow 0} xp(x), \quad b = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x).$$

Définition 3.1. L'équation algébrique $P(s) = 0$ s'appelle *équation caractéristique de l'équation (3.2.1)* en la singularité $x = 0$. Ses racines s'appellent les *exposants* en $x = 0$.

On peut montrer que si le nombre complexe s vérifie $\forall k \geq 1, P(s+k) \neq 0$, et si on définit successivement les coefficients y_k ($k \in \mathbb{N}^*$) par (3.2.3) et $y_0 = 1$, alors la série

$$y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k x^k, \quad (3.2.5)$$

est convergente. La fonction

$$y(s, x) = x^s \sum_{k=0}^{+\infty} y_k x^k, \quad y_0 = 1, \quad (3.2.6)$$

définit donc une solution (multi-valuée) de l'équation (3.2.1).

Soient s_1 et s_2 les racines de l'équation caractéristique de l'équation (3.2.1) telles que $\operatorname{Re}(s_2) < \operatorname{Re}(s_1)$.

Alors la racine s_1 vérifie la condition (3.2.3), et la fonction $y(s_1, x)$ est une solution de l'équation (3.2.1). On construit une autre solution linéairement indépendante de $y(s_1, x)$. Il faut distinguer deux cas.

1. Si $s_1 - s_2$ n'est pas un entier naturel, alors la fonction $y(s_2, x)$ est également une solution de l'équation (3.2.1), linéairement indépendante de $y(s_1, x)$. Ceci reste vrai si $s_1 - s_2$ est un entier naturel m à la condition que R_m soit nul (on choisit alors le coefficient y_m arbitrairement). Dans ce cas, la singularité $x = 0$ est dite *non logarithmique*.

2. Les autres possibilités sont $s_1 = s_2$ ou $s_1 - s_2 = m$ est un entier naturel non nul et $R_m \neq 0$. On considère alors s comme un paramètre variant dans un domaine de $\mathbb{C}$ et dont dépendent les coefficients $y_k = y_k(s)$. On peut montrer que la fonction $y(s, x)$ est

holomorphe en s tant que s vérifie la condition (3.2.3). Lorsque $s_1 = s_2$, on vérifie que l'expression suivante

$$\frac{\partial y(s, x)}{\partial s} \Big|_{s=s_1} = y(s_1, x) \ln x + x^{s_1} \sum_{k=0}^{+\infty} y'_k(s_1) x^k, \quad (3.2.7)$$

est solution de l'équation (3.2.1). Lorsque $s_1 - s_2 = m$ est un entier naturel non nul et $R_m \neq 0$, on construit une fonction $y^*(s_2, x)$ par un choix arbitraire de y_m , et on peut montrer qu'une combinaison linéaire appropriée de $y^*(s_2, x)$ et de $\frac{\partial y(s, x)}{\partial s} \Big|_{s=s_1}$ est solution de l'équation (3.2.1). Dans ce cas, la singularité $x = 0$ est dite *logarithmique*.

De manière analogue on peut appliquer la méthode de Fröbenius aux équations d'ordre supérieur.

3.3 Méthode de Bureau

En général la partie nécessaire de la méthode de Painlevé requiert des calculs très compliqués (en particulier la première partie) et ces complications croissent avec l'ordre différentiel de l'équation. Florent J. Bureau en 1939 dans [9, 10] a constitué une méthode plus courte que nous avons employée. Cette méthode concerne une classe de systèmes différentiels auxquels certaines équations différentielles ordinaires peuvent être ramenées moyennant une substitution de la forme $y = sz^{-r}$, où r est un entier strictement positif et s désigne la racine de l'équation algébrique obtenue en identifiant les coefficients de plus petite puissance dans l'équation à étudier une fois y remplacé (qu'on a remplacé y). Dans ce qui suit, les $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^3f}{dx^3}$, et $\frac{d^qf}{dx^q}$ ($q > 3$) seront notées respectivement $\dot{f}$, $\ddot{f}$, $\ddot{\ddot{f}}$, et $f^{(q)}$.

3.3.1 Théorème de Bureau

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{z} = 1 + zP(x, z) + z^k u, & (a) \\ z^r \frac{d^r u}{dt^r} + c_1 z^{r-1} \frac{d^{r-1} u}{dt^{r-1}} + \dots + c_r u = h(x, z) + \frac{z}{\dot{z}} H(x, z, u, \dots, u^{(r-1)}) & (b) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

avec k un entier positif, $c_1, \dots, c_r$ des constantes, $P(x, z)$ un polynôme en z de degré $\leq k-2$ pour $k > 2$, identiquement nul pour $k \leq 2$, H un polynôme en $u, \dot{u}, \dots, u^{(r-1)}$, H et h sont des fonctions holomorphes de la variable z dans un certain voisinage de $z = 0$.

On suppose aussi que P, h, H sont analytiques par rapport à la variable x dans un domaine D . Alors, pour que le système (3.3.1) soit stable, il est nécessaire que les solutions

de l'équation indicieelle

$$\theta(\theta - 1) \dots (\theta - r + 1) + c_1\theta(\theta - 1) \dots (\theta - r + 2) + c_{r-1}\theta + c_r = 0, \quad (3.3.2)$$

soient des entiers distincts, positifs, négatifs ou nuls; si l'une de ces solutions est nulle, alors $h(x, 0) \equiv 0$.

Pour démontrer ce théorème on va utiliser la méthode de Painlevé (voir [9] pour les détails).

Preuve. Dans le système (3.3.1), on pose

$$\begin{cases} x = x_0 + \varepsilon t, \\ z = \varepsilon v, \end{cases} \quad (3.3.3)$$

où $x_0 \in D$ est une constante. On obtient

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = 1 + \varepsilon v P(x_0 + \varepsilon t, \varepsilon v) + \varepsilon^k v^k u, \\ v^r \frac{d^r u}{dt^r} + \dots + c_r u = h(x_0 + \varepsilon t, \varepsilon v) + \varepsilon v H_1(x_0 + \varepsilon t, \varepsilon v, \dots). \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Pour $\varepsilon = 0$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dv_0}{dt} = 1, & (a) \\ v_0^r \frac{d^r u_0}{dt^r} + \dots + c_r u_0 = h(x_0, 0). & (b) \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Donc

$$\begin{cases} v_0(t) = t - b, \quad b \text{ constant} \\ (t - b)^r \frac{d^r u_0}{dt^r} + \dots + c_r u_0 = h(x_0, 0). \end{cases} \quad (3.3.6)$$

La deuxième équation (3.3.5.b) est une équation d'Euler, elle peut être transformée en une équation linéaire à coefficients constants, on a les possibilités suivantes.

1. Si θ est une solution *simple* de l'équation indicieelle correspondant à (3.3.1.b), alors l'équation homogène associée à la deuxième équation (3.3.5.b) admet une solution de la forme $(t - b)^\theta$.
2. Si θ est *multiple* d'ordre m , alors l'équation homogène associée à la seconde équation (3.3.5.b) admet m solutions de la forme $(t - b)^\theta, (t - b)^\theta \ln(t - b), \dots, (t - b)^\theta (\ln(t - b))^{m-1}$.

Donc pour que le système (3.3.5) soit stable il faut que les solutions de l'équation (3.3.2) soient des entiers distincts.

3. Supposons que $\theta = 0$ est solution de l'équation (3.3.2), $c_{r-1} \neq 0$, alors $c_r = 0$ et

$$c = (-1)^{r-1} (r-1)! + (-1)^{r-2} c_1 (r-2)! + \dots + c_{r-1} \neq 0. \quad (3.3.7)$$

Dans ce cas la seconde équation de (3.3.5) admet comme solution particulière la fonction:

$$u(t) = \frac{1}{c} h(x_0, 0) \ln(t - b), \quad (3.3.8)$$

ensuite, pour que $u_0(t)$ soit stable, il faut que $h(x_0, 0) = 0$, et sachant que x_0 est arbitraire, on déduit que $h(x_0, 0) \equiv 0$.

Si maintenant $h(x, 0) \equiv 0$, le système différentiel (3.3.1) devient:

$$\begin{cases} \dot{z} = 1 + zP(x, z) + z^k u, \\ z^r \frac{d^r u}{dt^r} + c_1 z^{r-1} \frac{d^{r-1} u}{dt^{r-1}} + \dots + c_{r-1} \frac{du}{dt} + c_r u = \frac{z}{\dot{z}} H(x, z, u, \dot{u}, \dots, u^{(r-1)}), \end{cases} \quad (3.3.9)$$

qui est à points critiques fixes. ■

On va maintenant présenter la méthode de J. F. Bureau qui consiste à étudier la stabilité des équations différentielles.

3.3.2 Principe de la méthode

L'étude de la stabilité des équations du troisième ordre dépend de systèmes différentiels de la forme

$$\begin{cases} \dot{z} = 1 + uz, \\ z^2 \ddot{u} + c_1 z \dot{u} + c_2 u = h(x, z) + zH(x, zu), \end{cases} \quad (3.3.10)$$

et soient r, q les deux solutions de l'équation déterminante

$$\theta(\theta - 1) + c_1 \theta + c_2 = 0.$$

On suppose que $q > r \geq 0$ et on pose

$$\begin{cases} u = P_{r-1}(x, z) + z^r v, \\ P_{r-1}(x, z) = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i(x) z^i. \end{cases}$$

où v est une fonction inconnue, α_i des coefficients à déterminer plus tard.

En substituant dans (3.3.10), on obtient:

$$\dot{z} = 1 + zP + z^{r+1}v,$$

et par suite

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{P} + z^r \ddot{v} + rz^{r-1} \dot{v} + z^r q_1(x, z, v), \\ \ddot{u} = \ddot{P} + z^r \ddot{v} + 2rz^{r-1} \dot{v} + r(r-1)z^{r-2}v + r(2r-1)Pz^{r-1}v + z^r q_2(x, z, v), \end{cases}$$

où q_1 et q_2 sont deux fonctions admettant les mêmes propriétés que celles de H .

Nous avons donc:

$$\begin{aligned} z^r [z^2 \ddot{v} + (c_1 + 2r)z\dot{v}] &= -z^2 \ddot{P} - c_1 z \dot{P} - c_2 P + h(x, z) \\ &\quad + zH(x, z, P + z^r v) + z^{r+1} g_3(x, z, v). \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Le second membre de l'équation (3.3.11) s'écrit sous la forme:

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_r z^r - z^{r+1} H_2(x, z, v).$$

On choisit les coefficients α_i , $i = 0, \dots, r-1$, tels que

$$A_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r-1.$$

Dans ce cas le système (3.3.10) devient:

$$\begin{cases} \dot{z} = 1 + zP_{r-1}(x, z) + z^{r+1}v, \\ z^2 \ddot{v} + (c_1 + 2r)z\dot{v} = A_r(x) + zH_2(x, z, v), \end{cases}$$

par suite, d'après le corollaire précédent, on obtient une condition de stabilité donnée par

$$A_r(x) \equiv 0.$$

Soit de nouveau le système:

$$\begin{cases} \dot{z} = 1 + zP_{r-1}(x, z) + z^{r+1}v, \\ z^2 \ddot{v} + (c_1 + 2r)z\dot{v} = zH_2(x, z, v). \end{cases}$$

L'équation indicelle correspondante à ce système est:

$$\theta(\theta-1) + (c_1 + 2r)\theta = 0$$

dont ses solutions sont $\theta = 0$ et $\theta = q - r$.

En procédant avec le même raisonnement que précédemment et en posant:

$$\begin{cases} v = \lambda_{q-r-1}(x, z) + z^{q-r}w, \\ \lambda_{q-r-1}(x, z) = \alpha_r + \alpha_{r+1}z + \dots + \alpha_{q-1}z^{q-r-1}, \end{cases}$$

où w est une fonction inconnue, on obtient le polynôme

$$\sum_{i=0}^{q-r} B_i z^i,$$

analogue à

$$\sum_{i=0}^r A_i z^i.$$

Les coefficients α_i , $i = r + 1, \dots, q - r$ sont déterminés de telle manière à avoir:

$$B_0 = B_1 = \dots = B_{q-r-1} = 0,$$

et $B_{q-r}(x) \equiv 0$ devient une nouvelle condition pour la stabilité, où α_r est supposé arbitraire.

Exemple 6. *A titre d'exemple, considérons l'équation*

$$y'' = cy' + ey^2 + fy + 2g, \quad (3.19a)$$

où c, e, f, g sont des fonctions analytiques de x dans un certain domaine D . Par une transformation simple ne changeant pas la forme de cette équation, on peut faire en sorte que $e = 6, c = f = 0$. Posons $y = z^{-2}, \dot{z} = 1 + uz$; on obtient

$$z\dot{u} = 5u - gz^3 + 2zu^2.$$

Si l'on pose alors $u = \alpha z^3 + \beta z^4 + z^5 v$ et si l'on détermine α et β par $2\alpha = g, \beta = \dot{\alpha}$, on obtient la condition de stabilité $\dot{\beta} = 0$. Il en résulte $\ddot{g}(x) = 0$ et $g(x)$ est une fonction linéaire de x . Les équations stables de la forme (3.19a) sont donc réductibles à

$$y'' = 6y^2 + k_1 x + k_2,$$

où k_1 et k_2 sont des constantes.

Remarque 3.2. *Si on pose*

$$\begin{cases} u(x, z) &= P_q(x, z) + z^q v, \\ P_q(x, z) &= P_{r-1}(x, z) + z^r \lambda_{q-r-1}(x, z) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{q-1} z^{q-1}. \end{cases} \quad (3.3.12)$$

Dans P_q , le coefficient de z^r reste arbitraire et peut par conséquent être considéré comme un paramètre constant, et les coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{q-1}$ sont déterminés en fonctions de α_r .

Remarque 3.3. *Dans le cas où la seconde équation du système (3.3.10) est d'ordre quelconque, cette méthode peut être aussi appliquée.*

3.4 Test de Painlevé

La méthode *Alpha*, destinée à tester la propriété de Painlevé, est difficilement praticable: elle n'est, de ce fait, plus utilisée en dehors des cas simples résolus. La méthode de substitution que nous allons étudier est habituellement connue sous le nom abusif de “*Test de Painlevé*”. C'est une version moins sûre - ce que Painlevé critiquait ouvertement - mais plus facile à mettre en oeuvre. Elle ne fournit qu'une condition nécessaire (mais non suffisante) à la propriété de Painlevé.

On se gardera donc de confondre la propriété de Painlevé qui concerne la nature d'une solution d'être (rendue) monovaluée et le test de Painlevé qui n'est qu'une indication que cette possibilité peut être envisagée ou exclue. Le test de Painlevé vérifie la possibilité que la solution générale d'une équation différentielle d'ordre n , puisse s'écrire sous la forme d'une série de Laurent, au voisinage d'un pôle mobile x_0 ,

$$y = \sum_{j=0}^{+\infty} y_j (x - x_0)^{j+p}, \quad -p \in \mathbb{N}.$$

Il s'assure que les coefficients de cette série sont univoquement déterminés à n constantes d'intégration arbitraires près, dont x_0 .

La méthode de Bureau n'est pas concluante dans le cas où l'équation indicelle possède des solutions entières négatives et pour remédier à ce problème on va donner un procédé extrait de la méthode de perturbation de Painlevé basé sur une perturbation régulière et l'analyse des équations différentielles du type de Fuchs.

Pour une approche plus complète, ainsi que pour voir les démonstrations des résultats énoncés, on pourra se reporter principalement à [20] particulièrement pour la méthode de Painlevé d'une part et pour le test de Painlevé on pourra se référer à Ablowitz, Ramani et Segar [1] d'autre part.

Définition 3.2. *Etant donnés x , une application $y \mapsto E(x, y)$ et un certain point y_0 , on appelle différentielle de E au point y_0 l'application linéaire, notée $E'(x, y_0)$, définie par:*

$$\forall v : E'(x, y_0) v = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (E(x, y_0 + \lambda v) - E(x, y_0)).$$

Cette notion est connue sous divers noms : la dérivée au sens de Gâteaux, l'application linéarisée, l'application tangente, la matrice Jacobienne et parfois la dérivée de Fréchet.

Considérons l'équation différentielle d'ordre n :

$$E(y^{(n)}, \dots, y'', y', x) = 0. \quad (3.4.1)$$

Supposons que y a un comportement polaire en un certain point x_0 distinct des singularités des coefficients de l'équation.

On doit vérifier l'existence de toutes les séries de Laurent possibles avec une partie principale finie:

$$y = \sum_{j=0}^{+\infty} y_j (x - x_0)^{j+p}, \quad y_0 \neq 0, \quad (3.4.2)$$

dans laquelle $(-p)$ est l'ordre du pôle, qui doit être entier, et les coefficients y_j sont indépendants de x . Après insertion de cette série dans l'équation (3.4.1), qui est polynomiale en y et ses dérivées $(y^{(n)}, \dots, y'', y')$, on obtient:

$$E \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} E_j (x - x_0)^{j+q} = 0, \quad (3.4.3)$$

où l'entier négatif q désigne l'ordre de singularité du premier membre E de (3.4.3)

Dans ce qui va suivre, on présentera la méthode qui teste si pour une équation différentielle donnée, elle satisfait des conditions nécessaires de P -type (P : Painlevé).

La méthode consiste à exprimer les conditions de compatibilité pour que la série (3.4.3) soit identiquement nulle;

$$\forall j \in \mathbb{N} : E_j \equiv 0.$$

Remarque 3.4. *Pour l'étude du comportement local des solutions d'équations différentielles ordinaires dans le champs complexe, il faut en particulier les étudier aux voisinages de leurs points singuliers.*

3.4.1 Recherche du comportement dominant

Au voisinage du point singulier mobile x_0 , la fonction solution est équivalente à:

$$y \sim y_0 (x - x_0)^p, \quad \text{quand } x \longrightarrow x_0. \quad (3.4.4)$$

Dans cette étape, on détermine toutes les familles (p, y_0) qui correspondent aux singularités mobiles. Pour cela on injecte (3.4.4) dans (3.4.1) et pour certaines valeurs de p , au moins deux termes se simplifient entre eux et le reste va disparaître en faisant tendre $x \rightarrow x_0$. Alors pour chaque'un de ces choix possibles de p , les termes qui se simplifient s'appellent les *termes dominants* (ils ont la plus petite puissance), et l'équation formée par ces termes à partir de l'équation différentielle s'appelle l'équation *réduite*, après avoir trouvé la valeur de p , on la remplace dans l'équation réduite qui lui correspond, et on détermine y_0 , ainsi on obtient (p, y_0) .

On peut avoir plusieurs choix de p . Si un de ces choix possibles n'est pas entier et si (3.4.4) est asymptotique au voisinage de x_0 , alors ce dernier représente le comportement dominant d'un point de branchement mobile algébrique d'ordre p . L'existence d'un tel point signifie que l'équation différentielle n'est pas de type Painlevé.

Pour prouver que (3.4.4) est asymptotique, on définit une nouvelle variable

$$v = y^{\frac{1}{p}}, \quad (3.4.5)$$

et on réécrit l'équation différentielle en fonction de v . Par construction v disparaît en x_0 , et v' est finie. On doit montrer à partir de l'équation différentielle que $v(x)$ est analytique en x_0 , ensuite il vient de (3.4.5) que y a un point de branchement mobile d'ordre p en x_0 .

Exemple 7. *A titre d'exemple, considérons l'équation*

$$yy'' = \frac{3}{2}y'^2, \quad p = -\frac{2}{3}. \quad (3.4.6)$$

En faisant le changement de variable $y = v^{-\frac{2}{3}}$, on obtient $v'' = 0$, cette dernière étant linéaire auquel cas elle vérifie la propriété de Painlevé, ainsi l'équation (3.4.6) possède un point critique mobile d'ordre $\frac{2}{3}$.

Si tous les cas possibles de p sont entiers, alors (3.4.4) peut représenter le premier terme d'une série de Laurent, définie dans un voisinage épointé du pôle mobile x_0 , et dans ce cas, la solution de (3.4.2) est:

$$y(x) = (x - x_0)^p \sum_{j=0}^{\infty} y_j (x - x_0)^j, \quad 0 < |x - x_0| < R. \quad (3.4.7)$$

Ici x_0 est une constante arbitraire. Si $(n - 1)$ des coefficients y_j sont aussi arbitraires, alors ils constituent les constants d'intégration de l'équation différentielle, et (3.4.7) est la solution générale de l'équation différentielle dans un voisinage épointé de x_0 . Les puissances j pour lesquelles les y_j sont *arbitraires* s'appellent les *résonances* (ou aussi les indices de Fuchs).

3.4.2 Recherche des indices de Fuchs

Si tous les exposants p sont des nombres entiers, alors pour chaque (p, y_0) trouvé à l'étape 1, on cherche les résonances r qui correspondent aux constantes d'intégration arbitraires y_r dans la solution générale de l'équation différentielle. Pour cela on injecte

$$y \simeq y_0(x - x_0)^p + \dots + \hat{\beta}(x - x_0)^{p+r} + \dots \quad (3.4.8)$$

dans l'équation réduite, et on cherche le coefficient de $\hat{\beta}$ qu'on trouve sous la forme:

$$D(r, y_0)(x - x_0)^q = 0, \quad q \geq p + r - n. \quad (3.4.9)$$

Les racines de $D(r, y_0)$ sont appelées *résonances* de l'équation. On démontre que:

1. si le terme correspondant au plus haut degré de dérivation de l'équation initiale est parmi les termes dominants, alors $q = p + r - n$ et $D(r, y_0)$ est un polynôme en r de degré n . Sinon $q > p + r - n$, et le degré de $D(r, y_0)$ est égal à l'ordre de la plus grande dérivée parmi les termes dominants ($< n$);
2. (-1) est une racine pour $D(r, y_0)$ (l'indice de Fuchs (-1) ne représente qu'une translation de x_0 ;
3. si $D(0, y_0) = 0$ alors y_0 est arbitraire;
4. si $D(r, y_0)$ a une racine multiple, alors on a un point de branchement logarithmique mobile en $x = x_0$.

Proposition 3.1. *Si pour tous les choix possibles de (p, y_0) trouvés à l'étape 1, toutes les racines de $D(r, y_0)$ (à part $-1, 0$) sont réelles positives entières, alors on n'a pas de point de branchement algébrique.*

Dans ce cas on passe à l'étape suivante qui consiste à chercher les points logarithmiques.

Condition 1. *Pour représenter la solution générale d'une équation différentielle d'ordre n dans un voisinage d'un pôle mobile, $D(r, y_0)$ doit avoir $(n-1)$ racines positives et distinctes toutes réelles entières. Si pour les valeurs de (p, y_0) trouvées dans la première étape, $D(r, y_0)$ n'a pas $(n-1)$ racines, aucune solution locale n'est générale, cela signifie que (3.4.4) ne peut être partie principale de la solution générale.*

Remarque 3.5. *On ignore les racines de $D(r, y_0)$ avec $\text{Re}(r) < 0$, elles sont traitées indépendamment dans la deuxième partie de ce test.*

3.4.3 Détermination du nombre de constantes d'intégration

Pour chaque famille (p, y_0) trouvée à l'étape 1 soient : $r_1 < r_2 < \dots < r_s$ les racines entières positives de $D(r, y_0)$; ($s \leq n-1$). En substituant:

$$y = y_0(x - x_0)^p + \sum_{j=1}^{r_1} y_j(x - x_0)^{p+j}, \quad (3.4.10)$$

dans (3.4.1), on trouve le coefficient de $(x - x_0)^{p+j-n}$ qui vaut:

$$E_j \equiv D(j, y_0)y_j + Q_j(x_0, y_k : k < j) = 0, \quad (1 \leq j \leq r_1). \quad (3.4.11)$$

Pour $j < r_1$, l'équation (3.4.11) détermine y_j et pour $j = r_1$, (3.4.11) devient:

$$0 \times y_{r_1} + Q_{r_1}(x_0, y_0, \dots, y_{r_1-1}) = 0. \quad (3.4.12)$$

Si

$$Q_{r_1}(x_0, y_0, \dots, y_{r_1-1}) = 0, \quad (3.4.13)$$

dans ce cas y_{r_1} est arbitraire et on passe à l'étape suivante en posant:

$$y = y_0(x - x_0)^p + \sum_{j=1}^{r_2} y_j(x - x_0)^{p+j}. \quad (3.4.14a)$$

Dans cette nouvelle étape nous avons les valeurs des y_j , $1 \leq j \leq r_1$, il reste à déterminer les coefficients y_j , $r_1 + 1 \leq j \leq r_2$ et pour cela faisons le même travail qu'à l'étape précédente. En injectant (3.4.14a) dans (3.4.1), on trouve le coefficient de $(x - x_0)^{p+j-n}$ qui vaut:

$$E_j \equiv D(j, y_0)y_j + Q_j(x_0, y_0, \dots, y_j) = 0, \quad (r_1 < j \leq r_2). \quad (3.4.15)$$

Pour $j < r_2$, y_j est déterminé par (3.4.15) et pour $j = r_2$, (3.4.15) devient:

$$0 \times y_{r_2} + Q_{r_2}(x_0, y_0, \dots, y_{r_2-1}) = 0.$$

Si

$$Q_{r_2}(x_0, y_0, \dots, y_{r_2-1}) = 0,$$

dans ce cas y_{r_2} est arbitraire, on continue le processus jusqu'à arriver à la dernière étape où l'on pose:

$$y = y_0(x - x_0)^p + \sum_{j=1}^{r_s} y_j(x - x_0)^{p+j}, \quad (3.4.16)$$

et on fait le même travail. Si parmi ces étapes on trouve un r_i , $1 \leq i \leq s$, tel que y_{r_i} ne soit pas arbitraire, c'est à dire:

$$Q_{r_i}(x_0, y_0, \dots, y_{r_i-1}) \neq 0.$$

Pour avoir y_{r_i} arbitraire et $Q_{r_i} = 0$, on introduit un terme logarithmique dans la solution en remplaçant (3.4.16) par:

$$y = y_0(x - x_0)^p + \sum_{j=1}^{r_i-1} y_j(x - x_0)^{p+j} + [y_{r_i} + b_{r_i} \ln(x - x_0)](x - x_0)^{p+r_i}. \quad (3.4.17)$$

Dans ce cas le coefficient de $[(x - x_0)^{p+r_i-n} \ln(x - x_0)]$ est $D(r_i, y_0)y_{r_i} = 0$, et b_{r_i} est déterminé en annulant le coefficient de $(x - x_0)^{p+r_i-n}$. La solution générale au voisinage épointé de x_0 est représentée par (3.4.17). Elle admet un point de branchement logarithmique mobile en $x = x_0$. Ainsi l'équation différentielle n'est pas de type Painlevé.

Exemple 8. *Illustrons la méthode sur l'exemple de la première équation de Painlevé qui paraît être l'équation la plus simple, ni élémentaire ni elliptique, mais qui possède la propriété de Painlevé.*

L'équation s'écrit sous la forme

$$y'' = 6y^2 + x.$$

Si $y(x)$ possède un pôle mobile en $x = x_0$, elle se comporte asymptotiquement au voisinage de x_0 comme suit:

$$y \sim y_0 (x - x_0)^p, \quad -p \in \mathbb{N}.$$

Introduisons cette expression dans l'équation différentielle et ne retenons que les termes dominants. On trouve

$$y_0 p(p-1)(x - x_0)^{p-2} = 6y_0^2 (x - x_0)^{2p} \implies p = -2, \quad y_0 = 1.$$

Alors, il doit être possible d'écrire la solution générale sous la forme du développement de Laurent suivant:

$$y = (x - x_0)^{-2} + \sum_{j=-1}^{+\infty} y_j (x - x_0)^j.$$

Cette solution générale doit dépendre de deux constantes arbitraires, soit x_0 et plus une deuxième à découvrir. On fait l'hypothèse que la constante additionnelle est un des coefficients, y_i . Pour trouver l'indice de ce coefficient, on poursuit l'étude asymptotique en posant cette fois

$$y \simeq (x - x_0)^{-2} + \hat{\beta} (x - x_0)^{-2+r}, \quad r \in \mathbb{N},$$

et on cherche pour quelle(s) valeur(s) entière(s) de r , $\hat{\beta}$ peut être laissé arbitraire en toute généralité, on trouve cette valeur en introduisant l'expression de y dans l'équation différentielle et en ne retenant que les termes dominants, en fait ceux qui sont linéaires en $\hat{\beta}$. On ne trouve qu'une seule valeur puisqu'un seul coefficient arbitraire est attendu:

$$\hat{\beta}((r-2)(r-3) - 12) = 0 \implies r = -1 \text{ ou } r = 6.$$

Seule la valeur $r = 6$, dite *résonante*, nous intéresse. Elle indique que c'est le coefficient, $\hat{\beta} = y_{r-2} = y_4$, qui est arbitraire. On le vérifie en reprenant les calculs à zéro dans le détail. On commence par introduire le développement en série de Laurent dans l'équation différentielle puis on cherche la récurrence à laquelle les coefficients y_i , obéissent.

Ce travail laborieux est grandement facilité par l'appel à l'aide d'un logiciel de calcul formel. On trouve les premières relations récurrentes sous la forme:

Les étapes successives sont les suivantes:

- Les 5 premières équations fournissent, une à une et sans ambiguïté, les cinq premiers coefficients:

$$y_{-1} = y_0 = y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{-x_0}{10}, \quad y_3 = \frac{1}{6}, \quad \text{où } y_i \equiv c_i.$$

- La 6^{ème} équation, $-6y_1^2 - 12y_2y_0 - 12y_{-1}y_3 = 0$, dite résonante, n'introduit aucune nouvelle inconnue. Elle apparaît comme une condition de compatibilité et le test de Painlevé échoue si elle n'est pas satisfaite. Elle est trivialement vérifiée dans cet exemple donc on peut poursuivre l'investigation.

- La 7^{ème} équation fait apparaître deux inconnues y_4 et y_5 d'où il ressort que y_4 peut être quelconque: c'est la deuxième constante d'intégration cherchée (la première étant x_0).

- A partir de la 8^{ème} équation, les coefficients se calculent, un à un, sans ambiguïté ni incompatibilité.

Au bilan, la solution générale de la première équation de Painlevé s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned} y(x) = & (x - x_0)^{-2} - \frac{x_0}{10} (x - x_0)^2 - \frac{1}{6} (x - x_0)^3 + y_4 (x - x_0)^4 \\ & + \frac{x_0^2}{300} (x - x_0)^6 + \frac{x_0}{150} (x - x_0)^7 + \frac{5-36y_4x_0}{1320} (x - x_0)^8 + \dots \end{aligned}$$

Elle dépend, comme attendu, de deux constantes arbitraires: x_0 et le coefficient résonant y_4 . Il reste à s'assurer de la convergence de ce développement, ce qui est fait dans des exposés spécialisés.

Si aucun terme logarithmique n'est introduit en chaque résonance pour toutes les valeurs possibles de (p, y_0) trouvées à l'étape 1, on dit que l'équation vérifie les conditions nécessaires pour qu'elle soit de type Painlevé.

Définition 3.3. Une famille est représentée par le couple (p, y_0) avec p l'ordre du pôle, y_0 est le coefficient correspondant à cet ordre.

Définition 3.4. Une famille maximale d'une équation différentielle est une famille dont le nombre d'indices est égal à l'ordre de l'équation différentielle en question.

Définition 3.5. Une famille principale est une famille maximale dont tous les indices, à part (-1) , sont entiers positifs et simples.

Dans le cas où on n'a pas assez de coefficients arbitraires, le développement

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{p+j}, \quad z = x - x_0, \quad y_0 \neq 0,$$

qu'on appelle développement de Painlevé, représente une solution singulière; cela est dû à plusieurs raisons: soit la famille n'est pas maximale, soit on a un indice qui n'est pas entier, soit un indice négatif différent de (-1) . La méthode qu'on va présenter consiste à associer un coefficient arbitraire à chaque indice.

3.4.4 La méthode de perturbation de Painlevé

La méthode perturbée de Painlevé (ou l'Algorithme dû à Conte-Fordy-Pickering) consiste à chercher un développement de Laurent, pour n'importe quelle solution, proche de la solution obtenue par la méthode de Painlevé. Nous faisons ceci en considérant une expansion de la perturbation. Ainsi notre perturbation prolonge la solution singulière en une représentation de la solution générale.

Soit

$$y^{(0)} = \sum_{j=0}^{+\infty} y_j^{(0)} z^{p+j}, \quad z = x - x_0, \quad (3.4.18)$$

une solution de (3.4.1) avec p l'ordre du pôle. Supposons que nous avons une famille maximale non principale, ce qui nous permet d'appliquer la méthode de Painlevé. Cherchons dans ce cas la solution perturbée proche de $y^{(0)}$ et pour cela on va chercher la solution générale sous la forme:

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k y^{(k)}, \quad \varepsilon \text{ n'apparaît pas dans l'équation initiale,} \quad (3.4.19)$$

avec

$$y^{(k)} = \sum_{j=k\rho}^{+\infty} y_j^{(k)} z^{p+j}, \quad z = x - x_0, \quad (3.4.20)$$

où ρ est le plus petit indice de Fuchs.

En portant l'expression (3.4.19) dans l'équation initiale (3.4.1), E s'écrit sous la forme:

$$E(x, y) \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k E^{(k)} = 0, \quad (3.4.21)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \text{pour } k = 0 : \quad E^{(0)} &\equiv E(x, y^{(0)}) = 0, & (a) \\
 \text{pour } k = 1 : \quad E^{(1)} &\equiv \hat{E}'(x, y^{(0)})y^{(1)} = 0, & (b) \\
 \forall k \geq 2 : \quad E^{(k)} &\equiv \hat{E}'(x, y^{(0)})y^{(k)} - R^{(k)}(x, y^{(0)}, \dots, y^{(k-1)}) = 0 & (c)
 \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

où $\hat{E}'$ est l'opérateur défini par la formule:

$$\hat{E}'(x, y^{(0)})v = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left(\hat{E}(x, y^{(0)} + \lambda v) - \hat{E}(x, y^{(0)}) \right).$$

Ici $\hat{E}$ est la partie dominante de E , $R^{(k)}$ est un polynôme des termes précédents du développement et $R^{(1)}$ est identiquement égal à zéro. Notre objectif est de déterminer des conditions sous lesquelles l'équation différentielle soit de type Painlevé et pour cela on va utiliser le théorème de Poincaré qui exige que:

- la solution générale $y^{(0)}$ de (3.4.1) n'a aucun point critique mobile.
- la solution générale $y^{(k)}$ de (3.4.1) n'a aucun point critique mobile pour chaque $k \geq 1$.

1. À l'ordre zéro, la solution $y^{(0)}$ de l'équation (3.4.22.a), qui est non linéaire, ne doit pas avoir de points critiques mobiles: elle représente une solution singulière contenant un certain nombre de coefficients arbitraires égal au nombre d'indices de Fuchs positifs plus un indice négatif (-1) .
2. À l'ordre un, l'équation est équivalente à l'équation linéaire

$$E^{(1)} \equiv \hat{E}'(x, y^{(0)})y^{(1)} = 0,$$

avec

$$y^{(1)} = \sum_{j=\rho}^{+\infty} y_j^{(1)} z^{p+j}, \quad \rho \text{ est le plus petit indice de Fuchs,}$$

donc (3.4.22.b) peut se mettre sous la forme:

$$E^{(1)} \equiv \sum_{j=\rho}^{+\infty} E_j^{(1)} z^{p+j},$$

où

$$E_j^{(1)} \equiv D(j, y_0^{(0)})y_j^{(1)} + Q_j^{(1)} = 0.$$

À cette étape on détermine la série de Laurent $y^{(1)}$ en utilisant la Méthode de Frobenius, où $y^{(1)}$ représente la solution générale de (3.4.22.b) qui contient un nombre de coefficients arbitraires égal au nombre d'indices de Fuchs; de plus les indices de Fuchs de (3.4.22.b) sont $i + p$ où les i sont les indices de Fuchs trouvés auparavant de $E^{(0)}$ et on a un coefficient

arbitraire introduit à chaque indice de Fuchs (car l'équation différentielle est linéaire) qui doit vérifier la condition de stabilité:

$$Q_i^{(1)} = 0, \text{ } i \text{ indice de Fuchs.}$$

3. À l'ordre supérieur, on a

$$E^{(k)} \equiv \hat{E}'(x, y^{(0)})y^{(k)} + R^{(k)}(x, y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(k-1)}) = 0, \forall k \geq 2,$$

avec

$$y^{(k)} = \sum_{j=k\rho}^{+\infty} y_j^{(k)} z^{p+j}, \text{ } \rho \text{ est le plus petit indice de Fuchs.}$$

$E^{(k)}$ peut donc se mettre sous la forme:

$$E^{(k)} \equiv \sum_{j=k\rho}^{+\infty} E_j^{(k)} z^{p+j},$$

avec

$$E_j^{(k)} \equiv D(j, y_0^{(0)})y_j^{(k)} + Q_j^{(k)}(x, \{y_{j'}^{(k')}\}) = 0, \text{ } j \geq k\rho$$

où

$$k' \leq k, \text{ } j' - k'\rho \leq j - k\rho, \text{ } (k', j') \neq (k, j).$$

À cette étape on détermine la série de Laurent $y^{(k)}$, qui vérifie une équation linéaire non homogène, avec la même équation indicelle pour chaque $k \geq 1$ et $R^{(k)}$ différent pour chaque $k \geq 2$ et chaque indice de Fuchs doit vérifier la condition de compatibilité

$$\forall k \geq 0, \text{ } Q_i^{(k)} = 0, \text{ pour chaque } (i) \text{ indice de Fuchs.}$$

Ces conditions sont identiques à la condition d'absence de point logarithmique.

A chaque étape nous avons un nombre de conditions nécessaires pour la stabilité de l'équation différentielle et toutes ces conditions constituent une condition de stabilité et si une de ces conditions n'est pas vérifiée, alors l'équation différentielle n'est pas de type Painlevé.

Enfin, la solution y peut être réécrite comme série de Laurent en z

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \sum_{j=k\rho}^{+\infty} y_j^{(k)} z^{p+j} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} y_j z^{p+j}.$$

3.4.5 Application de la méthode aux équations du second ordre

Avant d'aborder l'étude des équations du troisième ordre, nous allons, pour se familiariser avec la méthode, considérer quelques équations différentielles d'ordre deux.

Exemple 9. On considère l'équation

$$y'''' = 27y''y^2 + 21y'y^3 - 9y^5, \quad q = p - 4 = 3p - 2 = 4p - 1 = 5p. \quad (3.4.23)$$

Par substitution

$$y \simeq (x - x_0)^{-1} + \hat{\beta}(x - x_0)^{r-1},$$

dans (3.4.23), on obtient l'équation indicelle

$$(r + 1)(r - 1)^2(r - 9) = 0.$$

Une approximation de la solution à l'indice de Fuchs ($r = 1$) est

$$y \simeq (x - x_0)^{-1} + c_1 + c_2 [22 \ln(x - x_0) + 27 (\ln(x - x_0))^2] + \dots,$$

où x_0, c_1, c_2 sont des constantes arbitraires. L'équation n'est pas à points critiques fixes.

Exemple 10. Afin de mieux faire comprendre la méthode, nous allons effectuer les calculs pour l'équation

$$E(x, y) \equiv -y'' + 6y^2 + g(x) = 0, \quad (3.4.24)$$

où g est une fonction analytique de x .

Pour étudier sous quelles conditions l'équation (3.4.24) peut être complètement intégrable⁽¹⁾, on pose

$$y = \sum_{j=0}^{+\infty} y_j z^{j+p}, \quad z = x - x_0, \quad y_0 \neq 0, \quad (3.4.25)$$

⁽¹⁾ Il semble difficile de trouver une définition précise de l'intégrabilité. En regardant la littérature il est possible de dégager certaines caractéristiques communes à tous les systèmes intégrables. Un système *complètement intégrable* classique peut se définir par un des critères suivants:

1. Propriétés solitoniques,
2. La propriété de Painlevé,
3. L'existence d'une infinité de symétries,
4. La présence d'une structure d'algèbre, affine sous-jacente,
5. L'existence d'équations de compatibilité d'un système linéaire,
6. L'existence d'une transformation de Backlund,
7. L'existence d'une infinité de lois de conservation.

C'est le deuxième point, la propriété de Painlevé, qui est utilisée dans cette thèse pour définir l'intégrabilité d'un système.

et alors on pourra déterminer de proche en proche les coefficients y_j en fonction du premier. Ainsi en dérivant l'équation (3.4.25) et en remplaçant ensuite dans l'équation (3.4.24), on trouve

$$\begin{aligned} E &= [p(p-1)y_0z^{p-2} + (p+1)py_1z^{p-1} + \dots] \\ &\quad + 6[y_0^2z^{2p} + 2y_0y_1z^{2p+1} + \dots] \\ &\quad + [g(x_0) + g'(x_0)z + \dots], \end{aligned}$$

d'où la liste des puissances de z est donnée par: $[p-2, p-1, 2p, 2p+1, \dots]$.

On choisira ensuite p de telle sorte qu'au moins deux éléments de la liste précédente soient égaux:

$$\begin{aligned} q &= p-2 = 2p && \text{et } q \leq 0, \\ q &= 2p && \text{et } q \leq p-2, \\ q &= p-2 && \text{et } q \leq 2p. \end{aligned}$$

Les cas possibles sont: $(p, q) = (-2, -4)$ ou $(p, q) = (2, 0)$.

En conséquence, les termes dominants sont y'' et y^2 . L'équation dominante associée à (3.4.24) devient

$$\hat{E} \equiv -y'' + 6y^2, \quad (3.4.26)$$

et y_0 doit satisfaire à l'équation

$$\begin{aligned} E_0 &\equiv \lim_{z \rightarrow 0} (z)^{-q} \hat{E}(x, y_0 z^p) \\ &= -6y_0 + 6y_0^2 = 0, \quad y_0 \neq 0 \end{aligned}$$

et il est clair que $y_0 = 1$.

Pour $j = 1, 2, \dots$, chaque équation successive $E_j = 0$ a alors la forme ci-dessous

$$\forall j \geq 1 : E_j \equiv D(j, y_0)y_j + Q_j(\{y_k, k < j\}) = 0.$$

L'équation indicielle associée à l'équation (3.4.26) est:

$$\begin{aligned} D(j, y_0) &\equiv \lim_{z \rightarrow 0} z^{-j-q} \hat{E}'(x, y_0 z^{-2}) z^{j+p} = 0, \\ &\equiv \lim_{z \rightarrow 0} z^{-j+4} (-\partial_x^2 + 12y_0 z^{-2}) z^{j-2} \\ &\equiv -(j-2)(j-3) + 12y_0 \\ &\equiv -(j+1)(j-6) = 0, \end{aligned}$$

où la différentielle $\hat{E}'(x, y)$ appliquée au point v est:

$$\forall v : \hat{E}'(x, y)v \equiv \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\hat{E}(x, y + \lambda v) - \hat{E}(x, y)}{\lambda}.$$

Dans ce cas, on obtient

$$\hat{E}'(x, y) \equiv -\partial_x^2 + 12y.$$

La différentielle $\hat{E}'(x, y)$ au point $y_0 z^{-2}$ est:

$$\forall v : \hat{E}'(x, y_0 z^{-2}) v \equiv (-\partial_x^2 + 12y_0 z^{-2}) v = 0.$$

En identifiant les coefficients de même puissance de z on trouve:

$$\begin{aligned} Q_1 &\equiv 0, \quad Q_2 \equiv 6y_1^2 = 0, \quad Q_3 \equiv 12y_1 y_2 = 0, \\ y_0 &= 1, \quad y_1 = y_2 = y_3 = 0, \quad y_4 = -\frac{g(x_0)}{10}, \quad y_5 = 0, \\ \forall j &\geq 4 : Q_j \equiv \frac{g^{(j-4)}(x_0)}{(j-4)!} + 6 \sum_{k=1}^{j-1} y_k y_{j-k} = 0, \end{aligned}$$

et on obtient la condition de stabilité

$$Q_6 \equiv \frac{g''(x_0)}{2} = 0.$$

Par suite $g(x) = k_1 x + k_2$, où k_1 et k_2 deux constantes arbitraires. Cette condition est donc une condition nécessaire de stabilité pour y .

Exemple 11. *Considérons l'équation*

$$E(x, y) \equiv y'' + 3y'y + y^3 = 0, \quad (3.4.27)$$

qui est un cas particulier d'une équation étudiée par Painlevé [56]. Elle possède une solution générale méromorphe

$$y = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b},$$

où a et b sont des constantes arbitraires.

L'équation (3.4.27) n'admet que deux familles de pôles comme singularités mobiles, de résidus 1 et 2:

$$\begin{aligned} F_1 : \quad & p = -1, \quad y_0^{(0)} = 1, \quad \text{indices } (-1, 1), \quad y = z^{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i c_1^{i+1} z^i. \\ F_2 : \quad & p = -1, \quad y_0^{(0)} = 2, \quad \text{indices } (-1, -2), \quad y = 2z^{-1} + 0. \end{aligned}$$

Alors l'intégrale générale possède deux familles: une principale et l'autre non principale correspondante à $y_0^{(0)} = 2$. Cherchons dans ce cas la solution perturbée proche de $y^{(0)}$, pour cela on va chercher la solution générale sous la forme:

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k y^{(k)},$$

avec

$$\hat{E}(x, y) \equiv y'' + 3y'y + y^3 = 0, \quad \hat{E}(x, y^{(0)}) \equiv 0.$$

L'opérateur $\hat{E}'$ est défini par la formule:

$$\hat{E}'(x, y) \equiv \partial_x^2 + 3y\partial_x + 3\partial_x + 3y^2.$$

Quelques premiers termes sont déterminés par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} y^{(1)} &: \hat{E}'(x, y^{(0)})y^{(1)} \equiv 0, \\ y^{(2)} &: \hat{E}'(x, y^{(0)})y^{(2)} \equiv -3y^{(1)}y_x^{(1)} - 3y^{(0)}(y^{(1)})^2, \\ y^{(3)} &: \hat{E}'(x, y^{(0)})y^{(3)} \equiv -3(y^{(1)}y^{(2)})_x - (y^{(1)})^3. \end{aligned}$$

Le calcul montre que le développpement en série de la solution (3.4.27) au voisinage du pôle de résidus 1 (c'est-à-dire la série correspondant à la première famille) est donnée par:

$$\begin{aligned} y &= \left(\varepsilon A_1 \sum_{j=-\infty}^{-2} (\varepsilon A_1)^{-j-2} z^j \right) + z^{-1} + C_1 \sum_{i=0}^{+\infty} (-C_1 z)^i \\ &= \frac{\varepsilon A_1 z^{-2}}{1 - \varepsilon A_1 z^{-1}} + z^{-1} + \frac{C_1}{1 + C_1 z} = \frac{1}{z - \varepsilon A_1} + \frac{C_1}{1 + C_1 z} \end{aligned}$$

où $C_1 = c_1 + \varepsilon A_1$, avec A_1 et B_2 sont des constantes arbitraires.

De façon analogue, la série correspondant à la deuxième famille s'écrit:

$$\begin{aligned} y &= 2z^{-2} + \varepsilon (A_1 z^{-3} + B_1 z^{-2}) + \varepsilon^2 \left(\frac{A_1^2}{2} z^{-5} + \frac{3A_1 B_1}{2} z^{-4} \right) \\ &\quad + \varepsilon^3 \left(\frac{A_1^3}{4} z^{-7} + \frac{5A_1^2 B_1}{4} z^{-6} + A_1 B_1^2 z^{-5} - \frac{1}{2} B_1^3 z^{-4} \right) + O(\varepsilon^4) \\ &= 2z^{-2} + \varepsilon B_1 z^{-2} + \varepsilon A_1 z^{-3} + \left(\frac{3}{2} \varepsilon^2 A_1 B_1 - \frac{1}{2} \varepsilon^3 B_1^3 \right) z^{-4} + O(\varepsilon^{-5}) \\ &= \frac{2z - \varepsilon B_1}{z^2 - \varepsilon B_1 z + \frac{1}{2}(-\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 B_1^2)} \end{aligned}$$

où A_1 et B_2 sont des constantes arbitraires.

Remarque 3.6. *Le test de Painlevé⁽¹⁾ fournit des conditions nécessaires pour que l'équation soit de type de Painlevé.*

⁽¹⁾Le calcul est facilité par le recours à un logiciel de calcul formel, tel Maple.

Chapitre 4

Équations à points critiques fixes admettant comme équation *simplifiée* l'équation $y'''y^2 = a_1yy'y'' + a_2y'^3$

Sommaire

4.1	Introduction	46
4.2	Conditions pour que l'équation <i>simplifiée</i> de (4.1.1) ait ses points critiques fixes	47
4.2.1	Détermination de toutes les équations (4.2.2) dont l'intégrale est à points critiques fixes.	47
4.2.2	Réduction de l'équation <i>simplifiée</i> (4.2.2) à des formes canoniques	49
4.3	Conditions pour que l'équation <i>réduite</i> de (4.1.1) ait ses points critiques fixes	50
4.3.1	Premier cas. $(p, q) = (-1, -6)$	51
4.3.2	Deuxième cas. $(p, q) = (-2, -9)$	64
4.3.3	Troisième cas. $(p, q) = (-3, -12)$	66
4.4	Conditions pour que l'équation <i>complète</i> de (4.1.1) ait ses points critiques fixes	68
4.4.1	Transformation de l'équation (4.1.1)	68
4.4.2	Premier cas. $(p, q) = (-1, -6)$	69
4.4.3	Deuxième cas. $(p, q) = (-2, -9)$	76
4.4.4	Troisième cas. $(p, q) = (-3, -12)$	78
4.4.5	Quatrième cas. p entier négatif quelconque	80
4.5	Questions et perspectives	84

4.1 Introduction

Ce chapitre constitue la partie la plus importante de la thèse. La partie en question est consacrée à l'étude des équations différentielles du troisième ordre de la forme:

$$y''' = a_1 \frac{y'' y'}{y} + a_2 \frac{y'^3}{y^2} + B(x, y) y'' + C(x, y) (y')^2 + D(x, y) y' + E(x, y), \quad (4.1.1)$$

où

$$B(x, y) = \sum_{i=-1}^1 b_i y^i, \quad C(x, y) = \sum_{i=-2}^0 c_i y^i, \quad D(x, y) = \sum_{i=-2}^2 d_i y^i, \quad E(x, y) = \sum_{i=-2}^4 e_i y^i,$$

avec b_i , c_i , d_i et e_i sont des fonctions analytiques de x dans un certain domaine. La motivation vient du fait que cette équation n'a été étudiée que dans certains cas particuliers voir [25, 24, 39, 48].

Dans [6, Thèse de Magister en 2003] nous avons déterminé les équations *réduites*⁽¹⁾ de (4.1.1) dont les intégrales peuvent être à points critiques fixes (ou stables). Pour compléter cette étude, il reste à déterminer les équations *complètes* de (4.1.1) dont les intégrales sont stables.

On montre que les équations *simplifiées* de (4.1.1), qui sont stables, se ramènent à l'aide de transformations homographiques à *cinq* équations canoniques données dans la première section, ces résultats sont comparés à ceux de Painlevé [57], Gambier dans [26], et Bureau dans [9].

On établit ensuite dans la deuxième section un résultat, en intégrant les équations *réduites* associées à (4.1.1), qui est le suivant: pour qu'une équation différentielle réduite du type (4.1.1) soit stable, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit ramenée à l'aide de changement de variable à l'une des *quatorze* équations données dans cette section. On prouve que ces *quatorze* équations se ramènent à des équations linéaires ou à des équations d'ordre inférieur dont les solutions sont connues.

Enfin dans la troisième section, on étudie l'équation *complète* (4.1.1). Nous retrouvons ainsi les résultats donnés dans [24], ainsi que d'autres nouveaux résultats.

Pour avoir ces résultats trois méthodes sont utilisées: la méthode introduite par Painlevé [56], la méthode de Bureau [9] et la méthode de perturbation de Painlevé développée par Conte, Fordy et Pickering dans [20].

⁽¹⁾ c'est-à-dire l'équation obtenue en remplaçant x , y par $x_0 + \varepsilon^i x$, $\varepsilon^j y$ et en faisant tendre ε vers zéro. La considération des équations réduites permet de classer les équations à points critiques fixes.

4.2 Conditions pour que l'équation simplifiée de (4.1.1) ait ses points critiques fixes

En substituant x par $x_0 + \varepsilon x$ dans l'équation (4.1.1) on obtient:

$$y'''y^2 = a_1yy'y'' + a_2y'^3 + \varepsilon(\dots). \quad (4.2.1)$$

Painlevé appelle *simplifiée* de l'équation (4.1.1) l'équation

$$y'''y^2 = a_1yy'y'' + a_2y'^3. \quad (4.2.2)$$

Cette équation simplifiée doit avoir son intégrale générale stable pour que l'équation (4.1.1) soit à points critiques fixes. Le problème préliminaire s'impose donc de déterminer toutes les équations de type (4.2.2) dont l'intégrale générale est à points critiques fixes.

4.2.1 Détermination de toutes les équations (4.2.2) dont l'intégrale est à points critiques fixes.

On vérifie aisément que (4.2.2) est équivalente au système

$$\begin{cases} y' = vy, & (a) \\ v'' = (a_1 - 3)vv' + (a_1 + a_2 - 1)v^3. & (b) \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Lemme 4.1. [62] *Pour que l'équation (4.2.2) vérifie la Propriété de Painlevé, il est nécessaire que les singularités mobiles de l'équation (4.2.3.b) soient des pôles simples dont les résidus sont entiers.*

Preuve. Supposons que v admet un point singulier (critique ou non critique) mobile qui n'est pas un pôle. La première relation du système (4.2.3) implique que ce même point n'est pas un pôle pour y .

Supposons maintenant que $x = x_0$ est un pôle d'ordre k pour v . Alors au voisinage de ce point, v s'écrit sous la forme:

$$v(x) = \frac{b_{-k}}{(x - x_0)^k} + \frac{b_{-k+1}}{(x - x_0)^{k-1}} + \dots + \frac{b_{-1}}{(x - x_0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x - x_0)^n. \quad (4.2.4)$$

En substituant (4.2.4) dans la deuxième équation du système (4.2.3) et en intégrant on obtient

$$y = C \exp \left[\int_{x_1}^x \left(\frac{b_{-k}}{(x - x_0)^k} + \frac{b_{-k+1}}{(x - x_0)^{k-1}} + \dots + \frac{b_{-1}}{(x - x_0)} + \dots \right) dx \right].$$

Quand $k > 1$, le point $x = x_0$ est un point essentiel de y .

Soit $k = 1$, le point $x = x_0$ est un pôle de y si et seulement si $b_{-1} = \text{Res}(v, x_0)$ est un entier.

Inversement, soit $x = x_0$ un pôle de y . La première relation du système (4.2.3) implique que x_0 est un pôle simple de v , de plus son résidu est égal à 1. ■

Ainsi, le problème revient à l'étude de la dernière équation du système (4.2.3).

Nous allons maintenant rechercher les conditions pour que l'intégrale générale de (4.2.3.b) n'ait pas de points critiques mobiles. A cet effet, posons

$$v = v_0 (x - x_0)^p + \dots + v_k (x - x_0)^k + \dots, \quad v_0 \equiv v(x_0) \neq 0, \quad (4.2.5)$$

où p désigne un nombre entier négatif, x_0 étant un point en lequel tous les coefficients de l'équation (4.2.3.b) sont holomorphes. En remplaçant v par sa valeur dans l'équation (4.2.3.b), on obtient, après regroupement des termes de même puissance, une équation algébrique:

$$E \equiv E_0 (x - x_0)^q + E_1 (x - x_0)^{1+q} + \dots + E_j (x - x_0)^{j+q} + \dots = 0. \quad (4.2.6)$$

Pour que v vérifie la deuxième équation (4.2.3), il est nécessaire que $(p, q) = (-1, -4)$ où $q = -4$ représente le degré de singularité du premier terme du développement de E et v_0 vérifie l'équation:

$$(a_1 + a_2 - 1) v_0^2 - (a_1 - 3) v_0 - 2 = 0. \quad (4.2.7)$$

Pour que l'équation (4.2.3.b) soit à points critiques fixes, il est nécessaire que, pour chaque valeur de v_0 , les solutions de l'équation indicelle $D(r, v_0) \equiv 0$ soient des nombres entiers distincts où l'opérateur $D(r, v_0)$ est défini par la formule suivante:

$$D(r, v_0) = \lim_{z \rightarrow 0} z^{-r-q} \hat{E}'(x, v_0 z^p) z^{p+r}, \quad \text{avec } z = x - x_0.$$

En effectuant les calculs, on trouve l'équation polynomiale suivante

$$D(r, v_0) \equiv (r+1) \left(-r^2 + ((a_1 - 3) v_0 + 3) r + 3(a_1 + a_2 - 1) v_0^2 - 2(a_1 - 3) v_0 - 2 \right) = 0, \quad (4.2.8)$$

dont une racine est toujours égale à -1 ; elle correspond à x_0 arbitraire. Le problème revient ainsi à trouver des conditions sur les coefficients (a_1, a_2) pour que les solutions de l'équation (4.2.8) soient entières.

Nous obtenons le *résultat* suivant: pour que l'équation (4.2.3.b) soit stable, il est nécessaire que les coefficients (a_1, a_2) vérifient la condition suivante:

$$(a_1, a_2) \in \left\{ \begin{array}{l} \left(3 \frac{n-1}{n}, -\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \right), \left(\frac{3n-1}{n}, -\frac{(n-1)(2n+1)}{n^2} \right), \\ \left(3, -2 \frac{n^2-1}{n^2} \right), (3, -2), \left(\frac{3n-2}{n}, -2 \frac{n-1}{n} \right) \end{array} \right\},$$

n étant un nombre entier différent de zéro. Pour les détails de cette étude voir [6].

4.2.2 Réduction de l'équation simplifiée (4.2.2) à des formes canoniques

Notre première démarche consiste à mettre les équations (4.2.3.b) sous la forme dite “ *canonique* ” qui est utile pour cette étude.

Transformation $(y, x) \longrightarrow (Y, X)$ **à trois jauge** $\lambda(x), \mu(x), \varphi(x)$

Une transformation *linéaire* de la fonction est un changement de variable définis par les équations

$$y = \lambda(x)Y + \mu(x), \quad X = \varphi(x),$$

λ, μ, φ désignent des fonctions analytiques de x , n'altèrent ni la forme de l'équation différentielle (4.2.3.b), ni la nature des points critiques, fixes ou mobiles, de l'intégrale.

On profite de l'indétermination de ces fonctions pour réduire les équations à points critiques fixes à des formes canoniques les plus simples possibles.

Remarque 4.1. *La mise sous forme canonique d'une équation permet de faire une étude plus simple. C'est sous cette forme que les résultats sont connus (déjà énoncés); pour obtenir cette forme canonique on utilise la transformation homographique $T(\lambda, \mu, \varphi)$.*

On sait que'on peut ramener les équations(4.2.3.b), dont l'intégrale générale est à points critiques fixes, à une forme canonique, en effectuant sur v une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$ (ou une transformation linéaire sur v et x), dans (4.2.3.b) :

$$v = \lambda(x)V, \quad t = \varphi(x), \tag{4.2.9}$$

où λ et φ sont des fonctions analytiques de x . En posant

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt}, \quad \ddot{V} = \frac{d^2V}{dt^2},$$

on obtient:

$$v' = \lambda\varphi'\dot{V} + \lambda'V, \quad v'' = \lambda\varphi'^2\ddot{V} + (2\lambda'\varphi + \lambda\varphi'')\dot{V} + \lambda''V.$$

En substituant dans l'équation(4.2.3.b), on obtient l'équation

$$\ddot{V} = AV\dot{V} + BV^3, \tag{4.2.10}$$

où A , et B vérifient les relations

$$\begin{cases} \varphi' A = (a_1 - 3) \lambda, \\ \varphi'^2 B = (a_1 + a_2 - 1) \lambda^2. \end{cases} \quad (4.2.11)$$

D'après les travaux de F.J. Bureau [9, 1964], pour que l'équation (4.2.10) soit stable, il est nécessaire et suffisant que les coefficients (A, B) vérifient la condition suivante:

$$(A, B) \in \{(-3, -1), (-2, 0), (-1, +1), (0, 2), (0, 0)\}.$$

En conclusion, moyennant une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$, on peut faire coïncider les coefficients a_1 et a_2 avec une des valeurs suivantes:

$$(a_1, a_2) \in \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (3, -2)\}.$$

Proposition 4.2. *Pour qu'une équation de type (4.1.1) vérifie la propriété de Painlevé, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit, ou se ramène par une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$ à l'une des cinq équations suivantes:*

$$\begin{cases} y''' = B(x, y) y'' + C(x, y) (y')^2 + D(x, y) y' + E(x, y), \\ yy''' = y''y' + B(x, y) y'' + C(x, y) (y')^2 + D(x, y) y' + E(x, y), \\ yy''' = 2y''y' + B(x, y) y'' + C(x, y) (y')^2 + D(x, y) y' + E(x, y), \\ yy''' = 3y''y' + B(x, y) y'' + C(x, y) (y')^2 + D(x, y) y' + E(x, y), \\ y^2y''' = 3y''y'y - 2y'^3 + B(x, y) y'' + C(x, y) (y')^2 + D(x, y) y' + E(x, y). \end{cases}$$

Pour $a_1 = 0$ et $a_2 = 0$, Chazy [13] a étudié l'équation (4.1.1) et dans ce cas, il a classifié les équations de type (4.1.1) à points critiques fixes sans montrer rigoureusement que les treize classes d'équations qu'il a obtenues sont à points critiques fixes. Bureau [9, 1964], a montré que certaines des équations de Chazy sont à points critiques fixes. Enfin Cosgrove [22] a complété l'étude des équations de type (4.1.1) en donnant des méthodes d'intégration pour chacune des treize équations de Chazy. Ce cas ne sera pas repris dans notre étude.

4.3 Conditions pour que l'équation *réduite* de (4.1.1) ait ses points critiques fixes

La recherche d'un comportement local algébrique au voisinage d'une singularité mobile x_0 ,

$$y \sim_{x \rightarrow x_0} y_0 z^p \quad \text{où } y_0 \neq 0, z = x - x_0 \text{ et } x_0 \text{ est un point arbitraire,} \quad (4.3.1)$$

conduit à l'étude d'une série de Laurent.

Remarque 4.2. Pour déterminer l'ordre des pôles mobiles, nous posons $y \sim y_0 (x - x_0)^p$ où x_0 est supposé point singulier algébrique d'une intégrale $y(x)$. La substitution de (4.3.1) dans l'équation (4.1.1) montre que pour certaines valeurs de p deux ou plusieurs termes dans l'équation, peuvent dépendre de y_0 , et le reste peut être négligé, quand $x \rightarrow x_0$.

En dérivant l'équation (4.3.1) et en remplaçant ensuite dans l'équation (4.1.1), on trouve la liste de toutes les puissances de $x - x_0$ qui est donnée par :

$$[3p - 3, 3p - 2, 4p - 2, 5p, 4p - 1, 4p, \dots].$$

On choisit ensuite p de telle sorte qu'au moins deux éléments de la liste précédente soient égaux:

$$\begin{cases} q = 3p - 3 = 4p - 2 = 5p - 1 = 6p, \\ q = 3p - 3 = 4p - 1, \\ q = 3p - 3 = 4p. \end{cases}$$

1. Pour $(p, q) = (-1, -6)$: les termes dominants de (4.1.1) sont $y^2 y'''$, $yy' y''$, y'^3 , $y^3 y''$, $y^2 y'^2$, $y^4 y'$, y^6 et correspondent aux termes en z^{3p-3} , z^{4p-2} , z^{5p-1} et z^{6p} .
2. Pour $(p, q) = (-2, -9)$: les termes dominants de (4.1.1) sont $y^2 y'''$, $yy' y''$, y'^3 , $y^3 y'$ et correspondent aux termes en z^{3p-3} , z^{4p-1} .
3. Pour $(p, q) = (-3, -12)$: les termes dominants de (4.1.1) sont $y^2 y'''$, $yy' y''$, y'^3 , y^4 et correspondent aux termes en z^{3p-3} et z^{4p} .

Nous allons examiner successivement ces trois cas qui s'étudient de la même façon.

4.3.1 Premier cas. $(p, q) = (-1, -6)$

Supposons maintenant que b_1 , c_0 , d_2 et e_4 ne sont pas tous nuls. Il reste à former la réduite relative à la valeur (-1) de p . En utilisant le changement de variable

$$x \rightarrow x_0 + \varepsilon x, \quad y \rightarrow \varepsilon^{-1} y, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

on obtient l'équation

$$y''' = a_1 \frac{y'' y'}{y} + a_2 \frac{y'^3}{y^2} + b_1 y y'' + c_0 (y')^2 + d_2 y^2 y' + e_4 y^4 + \varepsilon (\dots), \quad (4.3.2)$$

qui doit avoir ses points critiques fixes pour toute valeur numérique donnée à ε pour que (4.1.1) soit à points critiques fixes; en particulier pour $\varepsilon = 0$, on obtient que l'équation

$$y''' = a_1 \frac{y''y'}{y} + a_2 \frac{y'^3}{y^2} + b_1 yy'' + c_0 (y')^2 + d_2 y^2 y' + e_4 y^4, \quad (4.3.3)$$

doit être à points critiques fixes.

Des cas particuliers du (4.3.3) ont été considérés par H. Exton [24, 1973], Martynov [48, 1985], Kozulin et Lukashevich [39, 1988], Mugan et Jarad [54, 2004], Conte, Rogers et Schief dans [17, 2007].

L'étude générale se fera en deux parties: la première consiste à donner les résultats obtenus dans [5, 6] et la seconde partie est consacrée à l'intégration des équations obtenues pour en déduire si les conditions nécessaires sont suffisantes ou non.

Proposition 4.3. *Les seules équations différentielles de type (4.3.3) dont la solution générale est une fonction monovalente sont celles qui se ramènent à l'aide de changement de variables aux équations suivantes:*

1. cas où $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} yy''' = y'y''; \\ yy''' = y'y'' + y^3y'; \\ yy''' = y'y'' + y^2y'' - \frac{2}{9}y^3y'; \\ yy''' = y'y'' + y^2y'' + 2y^3y'; \\ yy''' = y'y'' + y^2y'' + 4y^3y' - 2y^5; \\ yy''' = y'y'' + y^2y'' + \frac{1}{4}y^3y' - \frac{1}{8}y^5. \end{array} \right.$$

2. cas où $a_1 = 2$ et $a_2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} yy''' = 2y'y''; \\ yy''' = 2y'y'' + y^3y'; \\ yy''' = 2y'y'' + y^2y'' - y^2y'^2; \\ yy''' = 2y'y'' + y^2y'' - yy'^2 + y^3y'; \\ yy''' = 2y'y'' + y^2y'' - \frac{3}{2}yy'^2 + 2y^3y' - \frac{1}{2}y^5; \\ yy''' = 2y'y'' + 2y^5; \\ yy''' = 2y'y'' + 2y^2y'' - 3yy'^2 + 2y^3y' - y^5. \end{array} \right.$$

3. cas où $a_1 = 3$ et $a_2 = 0$

$$\begin{cases} yy''' = 3y'y'' + y^2y'' - 2yy'^2; \\ yy''' = 3y'y''; \\ yy''' = 3y'y'' + (2-n)y^2y'' - 4yy'^2 + 2ny^3y'; \\ yy''' = 3y'y'' + (1-n)y^2y'' - 2yy'^2 + ny^3y' + ny^5; \\ yy''' = 3y'y'' + (3-n)y^2y'' - 6yy'^2 + 3ny^3y' - ny^5; \\ yy''' = 3y'y'' - ny^2y'' + 2ny^5. \end{cases}$$

4. cas où $a_1 = 3$ et $a_2 = -2$

$$\begin{cases} y'''y^2 = 3yy'y'' - 2y'^3; \\ y'''y^2 = 3yy'y'' - 2y'^3 + y^3y''. \end{cases}$$

Il reste à confirmer si l'intégrale générale des équations que nous venons de trouver est effectivement à points critiques fixes.

Intégration des équations réduites obtenues

i. Intégrale première de (4.3.3)

L'équation réduite (4.3.3) peut être remplacée par le système

$$\begin{cases} y' = vy^2, & (a) \\ v' = ty, & (b) \\ tt_v^* = Q(v)t + R(v), \quad (* \text{ dénotes } \frac{d}{dv}). & (c) \end{cases} \quad (4.3.4)$$

En éliminant v entre les équations (a) et (b), on obtient l'équation

$$y''y = 2y'^2 + ty^4. \quad (4.3.5)$$

Par substitution de la solution formelle

$$t = \sum_{j=0}^{+\infty} h_j v^j, \quad (4.3.6)$$

dans l'équation (4.3.5), on obtient:

$$y'' = 2\frac{y'^2}{y} + h_0y^3 + h_1yy' + h_2\frac{y'^2}{y} + h_3\left(\frac{y'}{y^2}\right)^3 + \dots + h_i\left(\frac{y'}{y^2}\right)^i + \dots \quad (4.3.7)$$

où h_i sont des constantes.

Théorème 4.4. [26] *Pour que l'équation $y'' = \mathcal{R}(y', y, x)$ ait ses points critiques fixes, il est nécessaire qu'elle soit de la forme*

$$y'' = A(y, x) + B(y, x)y' + C(y, x)y'^2,$$

où A, B, C sont des fractions rationnelles en y à coefficients holomorphes.

Pour que l'équation (4.3.7) soit à points critiques fixes, on doit donc avoir $h_j = 0$ où $j = 3, 4, 5, \dots$, par suite t est définie comme étant un polynôme en v de degré deux:

$$t(v) = h_2 v^2 + h_1 v + h_0. \quad (4.3.8)$$

Le théorème qui suit affirme que l'équation (4.3.7) est à point critique fixe si $h_2 \neq 0$.

On supposera que C_0 et C_1 sont deux constantes non nulles simultanément.

Théorème 4.5. *Pour que l'équation*

$$y'' = \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \frac{y'^2}{y} + C_0 \frac{y'}{y^k} + C_1 \frac{1}{y^{2k-1}}, \quad (4.3.9)$$

ait ses points critiques fixes, il est nécessaire que $k = 1$ et $\eta \neq 1$.

Preuve. [9] Dans notre cas $k = 1$ et $\eta = 1$.

Supposons $k = \eta = 1$, l'équation (4.3.9) est alors équivalente au système différentiel:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{u}, \\ yu' + C_0 u + C_1 u^2 = 0. \end{cases} \quad (4.3.10)$$

Soient $x = \varepsilon t$, $u = \varepsilon v$, où ε est un paramètre, le système (4.3.10) peut s'écrire alors sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{v}, \\ y \frac{dv}{dt} + \varepsilon v (C_0 + C_1 \varepsilon v) = 0. \end{cases}$$

Appliquons maintenant le théorème général de stabilité. Supposons que x_0 , y_0 et v_0 sont des constantes arbitraires, $y(t)$, $v(t)$ sont développables en séries de puissances ε ,

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{v_0} + O(\varepsilon),$$

et

$$\begin{cases} v = v_0 - \varepsilon C_0 v_0^2 \ln \left(y_0 + \frac{x - x_0}{v_0} \right) + O(\varepsilon^2) & \text{si } C_0 \neq 0, \\ v = v_0 - \varepsilon^2 C_1 v_0^3 \ln \left(y_0 + \frac{x - x_0}{v_0} \right) + O(\varepsilon^3) & \text{si } C_0 = 0. \end{cases}$$

Par suite, le système (4.3.10) et l'équation (4.3.9) sont instables, c'est à dire ayant des points critiques mobiles. ■

Le changement de variable $y = w^{-1}$ dans (4.3.7) permet d'obtenir:

$$w'' = h_2 \frac{w'^2}{w} + h_1 \frac{w'}{w} + h_0 \frac{1}{w}. \quad (4.3.11)$$

En vertu du théorème précédent, pour que (4.3.11) vérifie la propriété de Painlevé, il est nécessaire que les constantes h_0 , h_1 et h_2 soient toutes nulles ou bien $h_2 \neq 0$.

L'équation (4.3.7), devant avoir son intégrale générale stable, doit avoir comme second membre un polynôme du second degré au plus en y' ;

$$y''y = (h_2 + 2)y'^2 + h_1y'y' + h_0y^4. \quad (4.3.12)$$

Proposition 4.6. *L'équation (4.3.3) admet comme intégrale première l'équation (4.3.12).*

ii. Étude des équations obtenues

ii.1. Cas où $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$

ii.1.1. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} yy''' = y'y''; \\ y_0 = \text{arbitraire}, (r_1, r_2) = (0, 2). \end{cases}$$

L'équation précédente vérifie la propriété de Painlevé. En effet, cette équation a pour intégrale première l'équation

$$y'' = ky,$$

où k est une constante arbitraire. Cette dernière étant linéaire auquel cas elle vérifie la propriété de Painlevé.

ii.1.2. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} yy''' = y'y'' + y^3y'; \\ y_{01} = -1, y_{02} = 1, (r_{11}, r_{12}) = (2, 4), (r_{21}, r_{22}) = (2, 4). \end{cases}$$

Cette équation admet comme intégrale première l'équation:

$$y'' = \frac{1}{2}y^3 + ky$$

qui s'intègre par des fonctions elliptiques. En effet, l'intégrale première est

$$y'^2 = \frac{1}{4}y^4 + ky^2 + k_1.$$

ii.1.3. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} yy''' = y'y'' + y^2y'' - \frac{2}{9}y^3y'; \\ y_{01} = -3, y_{02} = -6, (r_{11}, r_{12}) = (1, 2), (r_{21}, r_{22}) = (-2, 2). \end{cases}$$

L'intégrale première de cette dernière est

$$y'' = yy' - \frac{1}{9}y^3 + ky.$$

Cette dernière n'est pas stable (voir [9]), ainsi y est à points critiques mobiles.

ii.1.4. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} yy''' = y'y'' + y^2y'' + 2y^3y'; \\ y_{01} = -1, y_{02} = 2, (r_{11}, r_{12}) = (2, 3), (r_{21}, r_{22}) = (2, 6). \end{cases}$$

Cette équation admet comme intégrale première l'équation

$$y'' = yy' + y^3 + ky$$

qui est stable (voir [9]), et par suite y est à points critiques fixes.

ii.1.5. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} yy''' = y'y'' + y^2y'' + 4y^3y' - 2y^5; \\ y_{01} = -1, y_{02} = 1, y_{03} = -2, \\ (r_{11}, r_{12}) = (1, 4), (r_{21}, r_{22}) = (3, 4), (r_{31}, r_{32}) = (-2, 6). \end{cases} \quad (4.3.13)$$

D'une part, l'intégrale première est

$$\left(\frac{y''}{y^2} - y'\right)^2 = 4\left(y' - \frac{1}{2}y^2\right)^2 + k,$$

et d'autre part, en posant $y = -\frac{u'}{u}$ dans (4.3.13), nous obtenons pour w l'équation

$$u''' = ku^2u'$$

qui doit être stable. En intégrant l'équation précédente, nous avons

$$u'' = \frac{k}{3}u^3 + k_1.$$

Cette équation du second ordre est du type $A(y, x) = 0$, ainsi u est à points critiques fixes [22], et par suite y est à points critiques fixes.

ii.1.6. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} yy''' = y'y'' + y^2y'' + \frac{1}{4}y^3y' - \frac{1}{8}y^5; \\ y_{01} = 4, y_{02} = -4, y_{03} = -2, \\ (r_{11}, r_{12}) = (4, 6), (r_{21}, r_{22}) = (-2, 4), (r_{31}, r_{32}) = (1, 3). \end{cases} \quad (4.3.14)$$

D'une part, l'intégrale première est

$$\left(\frac{y''}{y^2} - y'\right)^2 = \frac{1}{4}\left(y' - \frac{1}{2}y^2\right)^2 + k,$$

et d'autre part, en posant $y = -\frac{u'}{u}$ dans (4.3.14), nous obtenons une équation dont l'intégrale première est

$$u''' = ku u'.$$

En intégrant l'équation précédente, nous avons

$$u'' = \frac{k}{2}u^2 + k_1.$$

Cette équation du second ordre est du type $A(y, x) = 0$, ainsi u est à points critiques fixes [22], et par suite y est à points critiques fixes.

ii.2. Cas où $a_1 = 2$ et $a_2 = 0$

ii.2.1. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} yy''' = 2y'y''; \\ y_0 = \text{arbitraire}, (r_1, r_2) = (0, 3). \end{cases} \quad (4.3.15)$$

En intégrant l'équation (4.3.15) par rapport à x , on trouve

$$y'' = ky^2$$

qui s'intègre par des fonctions elliptiques.

ii.2.2. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} yy''' = 2y'y'' + y^3y'; \\ y_{01} = -1, y_{02} = 1, (r_{11}, r_{12}) = (1, 4), (r_{21}, r_{22}) = (1, 4). \end{cases} \quad (4.3.16)$$

En intégrant l'équation (4.3.16), on obtient

$$yy'' = \frac{3}{2}y'^2 + \frac{1}{4}y^4 + k,$$

et cette dernière équation est un cas particulier de l'équation transcendante P_{III} de Painlevé.

ii.2.3. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} yy''' = 2y'y'' + 2y^2y'' - 2yy'^2; \\ y_0 = -2, (r_1, r_2) = (1, 2). \end{cases} \quad (4.3.17)$$

L'équation (4.3.17) admet comme intégrale première l'équation

$$y'' = yy' + ky^2.$$

Cependant la condition de stabilité n'est pas vérifiée qui est

$$Q_2^{(0)} \equiv -4y_1^{(0)2} \neq 0$$

où $y_1^{(0)}$ constante complexe quelconque. Par conséquent la solution générale de l'équation (4.3.17) admet x_0 comme point singulier logarithmique et donc l'équation (4.3.17) n'est pas stable.

ii.2.4. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} yy''' = 2y'y'' + y^2y'' - yy'^2 + y^3y'; \\ y_{01} = -1, y_{02} = 2, (r_{11}, r_{12}) = (1, 3), (r_{21}, r_{22}) = (1, 6). \end{cases} \quad (4.3.18)$$

L'équation (4.3.18) admet comme intégrale première l'équation

$$y'' = yy' + y^3 + ky^2.$$

Cependant la condition de stabilité n'est pas vérifiée à savoir

$$Q_3^{(0)} \equiv -16y_1^{(0)3} \neq 0,$$

où $y_1^{(0)}$ est constante et donc l'équation (4.3.18) n'est pas stable.

ii.2.5. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} yy''' = 2y'y'' + y^2y'' - \frac{3}{2}yy'^2 + 2y^3y' - \frac{1}{2}y^5; \\ y_{01} = -4, y_{02} = 1, y_{03} = -1, \\ (r_{11}, r_{12}) = (-5, 6), (r_{21}, r_{22}) = (1, 5), (r_{31}, r_{32}) = (1, 3). \end{cases} \quad (4.3.19)$$

La condition de stabilité correspondante à l'indice $r_{12} = 6$ de l'équation (4.3.19) n'est pas vérifiée

$$Q_6^{(6)} \equiv -\frac{25488135689221697295007}{79330949271303634944000000} \left(y_{-5}^{(1)}\right)^6 \left(y_6^{(0)}\right)^6 \neq 0,$$

pour $y_{-5}^{(1)}$, $y_{-1}^{(1)}$ et $y_6^{(0)}$ constantes complexes quelconques et donc l'équation (4.3.19) n'est pas stable. Cependant, elle admet une intégrale première de la forme:

$$y''y = \frac{3}{2}y'^2 + \frac{1}{2}y^4. \quad (4.3.20)$$

ii.2.6. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} yy''' = 2y'y'' + 2y^5; \\ y_{01} = -1, y_{02} = \frac{-1+I\sqrt{3}}{2}, y_{03} = \frac{-1-I\sqrt{3}}{2}, \\ (r_{11}, r_{12}) = (2, 3), (r_{21}, r_{22}) = (2, 3), (r_{31}, r_{32}) = (2, 3). \end{cases} \quad (4.3.21)$$

Cette dernière admet comme intégrale première l'équation

$$y''^2 - 4y'y^4 + ky^4 = 0$$

qui est stable voir Cosgrove et Scoufis [21, 1993].

Considérons plus en détail l'équation précédente. Pour cela recherchons l'intégrale générale de l'équation (4.3.21) et vérifions qu'elle est stable. A cet effet, nous utilisons

la méthode classique de variations des constantes, fréquemment employée dans le Mémoire de Bureau (voir par exemple, [9, p.282]). En intégrant l'équation

$$yy''' = 2y'y'', \quad (4.3.22)$$

nous obtenons

$$y'' = wy^2,$$

où w est une constante. Supposons maintenant $w(x)$ une fonction de x que nous allons déterminer

$$y'' = 2w(x)y^2. \quad (4.3.23)$$

En substituant dans (4.3.22), il vient

$$w' = y^2. \quad (4.3.24)$$

De (4.3.23) et (4.3.24), nous déduisons

$$w'' = 2y'y \quad \text{et} \quad y' = w^2 + k, \quad (4.3.25)$$

où k est une constante arbitraire.

L'équation (4.3.22) et le système

$$\begin{cases} y' = w^2 + k, \\ w' = y^2, \end{cases} \quad (4.3.26)$$

sont équivalents et alors nous allons intégrer ce système.

Effectuons la transformation

$$y = -\beta y - v \quad \text{et} \quad w = \beta y - v, \quad \text{avec} \quad \beta^2 = -3,$$

le système (4.3.26) nous donne

$$\begin{cases} w' = 2wv - k_1, \quad \text{avec} \quad k_1 = \frac{k}{2\beta}, \\ v' = -\beta^2 y^2 - v^2 - \beta k_1. \end{cases}$$

En éliminant v , nous obtenons pour $w(x)$

$$w'' = \frac{1}{2}w'^2 - 2\beta^2 w^4 - 2\beta k_1 w^2 - \frac{k_1^2}{2}, \quad (4.3.27)$$

Ainsi $w(x)$ est une fonction elliptique et est stable [35], de même que $y(x)$ qui s'écrit sous la forme

$$y(x) = -\beta w(x) - \frac{w'(x) + k_1}{2w(x)}, \quad (4.3.28)$$

où $w(x)$ est l'intégrale générale de l'équation (4.3.27). L'équation différentielle (4.3.21) est stable.

Remarque 4.3. L'équation (4.3.21) est à points critiques fixes, contrairement à l'assertion de Exton voir [24].

ii.2.7. Étude de l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{l} yy''' = 2y'y'' + 2y^2y'' - 3yy'^2 + 2y^3y' - y^5; \\ y_{01} = -1, y_{02} = 1, y_{03} = -2, \\ (r_{11}, r_{12}) = (1, 2), (r_{21}, r_{22}) = (1, 6), (r_{31}, r_{32}) = (-2, 3). \end{array} \right. \quad (4.3.29)$$

L'équation (4.3.29) est stable. En effet, si on pose $y = \frac{u'}{u}$, la fonction u satisfait à l'équation différentielle du quatrième ordre

$$-\frac{u^{(4)}}{u'''} + 2\frac{u''}{u'} = 0.$$

L'intégration de cette dernière équation se ramène à celle d'une équation du troisième ordre

$$u''' = k_1 u'^2.$$

Si dans cette équation, on pose $u' = v$, on obtient une équation du second ordre en v :

$$v'' = k_1 v^2, \text{ où } k_1 \text{ est une constante.}$$

En effectuant la transformation $v \rightsquigarrow \lambda v$, avec $k_1 \lambda = -6$, on obtient l'équation

$$v'' + 6v^2 = 0, \quad v'^2 + 4v^3 = k, \text{ où } k \text{ est une constante arbitraire,}$$

dont les solutions sont $v = 0$ ou $v(x) = -(x - x_0)^{-2}$ si $k = 0$ et $v(x) = \wp(x - x_0, 0, k)$ si $k \neq 0$, où $\wp$ représente la fonction elliptique de Weierstrass.

ii.3. Cas où $a_1 = 3$ et $a_2 = 0$

ii.3.1. Étude de l'équation différentielle

$$yy''' = 3y'y'' + y^2y'' - 2yy'^2.$$

Les indices de Fuchs sont 0 et $(4 + y_0)$, mais l'indice doit être entier, ce qui correspond donc à y_0 entier sachant que y_0 est arbitraire, il ne peut être toujours entier. Nous déduisons alors que l'équation possède des solutions à points critiques mobiles.

ii.3.2. Étude de l'équation différentielle

$$yy''' = 3y'y'' \quad (4.3.30)$$

En intégrant l'équation (4.3.30), on obtient

$$y'' = ky^3, \text{ ou } yy'' = 2y'^2 + k$$

qui est stable (voir [26]).

ii.3.3. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} yy''' = 3y'y'' + (2-n)y^2y'' - 4yy'^2 + 2ny^3y', \\ y_{01} = -1, (r_{11}, r_{12}) = (2, n), \end{cases} \quad (4.3.31)$$

n étant un nombre entier différent de $-1, 0, 2$.

En particulier, pour $n = 4$, l'équation (4.3.31) admet l'intégrale première

$$yy'' = 2y'^2 - 2y^2y' + 2y^4 + k. \quad (4.3.32)$$

Montrons que l'intégrale générale de l'équation (4.3.31) ou (4.3.32) est à points critiques mobiles. A cet effet, rappelons un résultat connu [26]. Pour qu'une équation

$$y'' = A(\eta, y)y'^2 + \dots, \quad (4.3.33)$$

ait ses points critiques fixes, il faut que

$$A(\eta, y) = \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \frac{1}{y}, \quad \eta \neq 0, -1.$$

L'équation (4.3.32) n'est pas à points critiques fixes car le coefficient de $\frac{y'^2}{y}$ ne peut pas se mettre sous la forme $\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$ avec η entier.

Pour les autres valeurs de n , la condition de stabilité correspondante à $(r_{11} = 2, r_{12} = n)$ de l'équation (4.3.31) n'est pas vérifiée, par exemple

$$\begin{aligned} n &= +1 : Q_2^{(0)} \equiv -8y_1^{(0)2} \neq 0, \\ n &= -2 : Q_{-2}^{(2)} \equiv -48y_{-2}^{(1)2}y_2^{(0)} \neq 0, \\ n &= -3 : Q_{-1}^{(1)} \equiv 42y_{-3}^{(1)}y_2^{(0)} \neq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, y possède des points critiques mobiles.

ii.3.4. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} yy''' = 3y'y'' + (1-n)y^2y'' - 2yy'^2 + ny^3y' + ny^5; & n \neq -1, 0, \pm 3, \\ y_{01} = -1, y_{02} = 2, (r_{11}, r_{12}) = (3, n), (r_{21}, r_{22}) = (6, -2n). \end{cases} \quad (4.3.34)$$

Comme la condition d'indice ($r_{11} = 3$) de l'équation précédente

$$n = 1 : Q_3^{(0)} \equiv 128y_1^{(0)3} \neq 0,$$

n'est pas satisfaite, par suite l'équation associée à ces coefficients est à points critiques mobiles.

Pour les autres valeurs de n , la condition de stabilité correspondante à $(r_{11}, r_{12}) = (3, n)$ et $(r_{21}, r_{22}) = (6, -2n)$ de l'équation (4.3.34) n'est pas vérifiée, par exemple

$$\begin{aligned} n &= +4 : Q_{-8}^{(4)} \equiv y_{-8}^{(1)4} y_6^{(0)4} \neq 0, \\ n &= -4 : Q_{-1}^{(1)} \equiv 132y_{-4}^{(1)} y_3^{(0)} \neq 0, \\ n &= -6 : Q_{-1}^{(2)} \equiv \frac{50}{7} y_{-1}^{(1)} y_{-6}^{(1)} y_3^{(0)2} \neq 0. \end{aligned}$$

On déduit que l'équation de type (4.3.34) ne vérifie pas la propriété de Painlevé.

ii.3.5. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} yy''' = 3y'y'' + (3-n)y^2y'' - 6yy'^2 + 3ny^3y' - ny^5; & n \neq 0, \pm 1, \\ y_{01} = -1, y_{02} = -2, (r_{11}, r_{12}) = (1, n), (r_{21}, r_{22}) = (-2, 2n). \end{cases} \quad (4.3.35)$$

En faisant le changement $y = \frac{u'}{u}$, on obtiendra une équation du quatrième ordre

$$-u^{(4)}u^3u' + 3u'''u''u^3 + (n-2)u'''u^2u'^2 = 0.$$

En intégrant l'équation précédente par rapport à x , on trouve:

$$u''' = ku^3u^{n-2}. \quad (4.3.36)$$

En particulier, pour $n = 2$, par exemple, l'équation (4.3.36) devient

$$u''' = ku'^3, \quad (4.3.37)$$

où k est une constante d'intégration.

Si on effectue dans l'équation (4.3.37) la substitution $u' = v$, elle devient après cela

$$v'' = kv^3. \quad (4.3.38)$$

Par ailleurs, en effectuant la transformation $v \rightsquigarrow \lambda v$ avec $k\lambda = 2$, nous aboutirons à l'équation suivante:

$$v'' - 2v^3 = 0; \quad v'^2 - v^4 = k_1, \quad \text{où } k_1 \text{ est une constante arbitraire,}$$

et on sait que cette équation n'admet que deux familles de pôles simples comme singularités mobiles, de résidus ± 1 , donc les solutions de (4.3.38) sont $v = 0$, $v(x) = \pm (x - x_0)^{-1}$ et $v(x) = \wp(x)$, où $\wp$ désigne la fonction elliptique de Jacobi. Ainsi le développement des intégrales de l'équation (4.3.37) au voisinage de $x - x_0$ contient le logarithme, en raison du terme $\log(x - x_0)$ et à chaque solution (4.3.38) correspond un point critique logarithmique mobile de l'équation (4.3.37), d'où u et par suite y ne peut être stable.

On a aussi pour $n = 3$

$$n = 3 : \quad Q_6^{(3)} \equiv \frac{1248}{5} y_{-2}^{(1)3} y_6^{(0)2} \neq 0,$$

où $y_{-2}^{(1)}$ et $y_6^{(0)}$ sont des constantes complexes quelconques.

Le cas où $n > 2$, a été envisagé par Chazy dans [13].

Les conditions de stabilité des équations (4.3.35) sont:

$$n < -2 : \quad \begin{cases} Q_{-1}^{(1)} \equiv y_1^{(0)(-1-n)} y_n^{(1)} \neq 0; \\ Q_1^{(1)} \equiv y_1^{(0)(1-n)} y_n^{(1)} \neq 0; \\ Q_n^{(2)} \equiv y_1^{(0)(-n)} y_n^{(1)2} \neq 0, \end{cases}$$

avec $y_n^{(1)}$, $y_{-1}^{(1)}$ et $y_1^{(0)}$ des constantes complexes quelconques. Par suite, l'équation associée à ces coefficients est à points critiques mobiles. On déduit que l'équation de type (4.3.35) ne vérifie pas la propriété de Painlevé.

ii.3.6. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} yy''' = 3y'y'' - ny^2y'' + 2ny^5; \quad n \neq 0, \pm 1, \pm 4, \\ y_{01} = -1, y_{02} = 1, (r_{11}, r_{12}) = (4, n), (r_{21}, r_{22}) = (4, -n), \end{cases} \quad (4.3.39)$$

n étant un nombre entier.

Les conditions de stabilité des équations (4.3.39) sont:

$$\begin{aligned} n = \pm 1 : \quad & Q_4^{(0)} \equiv \pm 864 y_1^{(0)4} \neq 0; \\ n = \pm 2 : \quad & Q_4^{(0)} \equiv \pm 36 y_2^{(0)2} \neq 0; \\ n = \pm 3 : \quad & Q_{-1}^{(3)} \equiv -\frac{66675}{26} y_{-3}^{(1)} y_4^{(0)2} \neq 0; \\ n = \pm 5 : \quad & Q_{-1}^{(1)} \equiv 300 y_4^{(0)} y_{-5}^{(1)} \neq 0; \\ n = \pm 6 : \quad & Q_4^{(6)} \equiv y_4^{(0)10} y_{-6}^{(1)6} \neq 0; \\ n = \pm 7 : \quad & Q_{-1}^{(3)} \equiv \pm \frac{3509611875}{8704} y_4^{(0)5} y_{-7}^{(1)3} \neq 0; \\ n = \pm 8 : \quad & Q_4^{(4)} \equiv y_4^{(0)9} y_{-8}^{(1)4} \neq 0, \end{aligned}$$

avec $y_n^{(1)}$, $y_{-1}^{(1)}$ et $y_4^{(0)}$ des constantes complexes quelconques. Par suite, l'équation associée à ces coefficients est à points critiques mobiles. On déduit que l'équation de type (4.3.39) ne vérifie pas la propriété de Painlevé. Cependant elle admet une intégrale première de la forme:

$$y'' = 2y^3.$$

ii.4. Cas où $a_1 = 3$ et $a_2 = -2$

ii.4.1. Étude de l'équation différentielle:

$$y^2 y''' = 3yy'y'' - 2y'^3. \quad (4.3.40)$$

L'équation précédente admet pour intégrale première l'équation

$$yy'' = y'^2 + ky^2;$$

Cette dernière vérifie la propriété de Painlevé [26], et par conséquent, il en est de même pour l'équation (4.3.40).

ii.4.2. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y^2 y''' = 3yy'y'' - 2y'^3 + y^3 y'', \\ y_0 = -1, (r_1, r_2) = (1, 2). \end{cases} \quad (4.3.41)$$

L'équation (4.3.41) vérifie le test de Painlevé: elle possède une famille singulière $y \sim -z^{-1}$ avec les indices de Fuchs $(r_1, r_2) = (1, 2)$. Cette dernière admet pour intégrale première l'équation

$$yy'' = y'^2 + y^2 y' + ky^2$$

qui est stable [35].

4.3.2 Deuxième cas. $(p, q) = (-2, -9)$

En procédant comme on a fait pour le premier cas, on étudie le cas où

$$b_1 = c_0 = d_2 = e_4 = 0 \text{ et } d_1 \neq 0.$$

L'application du même principe donne en remplaçant x, y respectivement par $x_0 + \varepsilon x$, $\varepsilon^{-2}y$ et en prenant $\varepsilon = 0$, l'équation réduite

$$y'''y^2 = a_1 y''y'y + a_2 y'^3 + d_1 y^3 y'. \quad (4.3.42)$$

Supposons que la solution de l'équation (4.3.42) est de la forme:

$$y \simeq y_0 (x - x_0)^{(-2)} + \dots + \hat{\beta} (x - x_0)^{(r-2)} + \dots \quad (4.3.43)$$

En remplaçant y donnée par (4.3.43) dans l'équation (4.3.42) et en identifiant les coefficients de même puissance, nous obtenons:

$$(r+1)(r^2 + (2a_1 - 10)r - 12a_1 - 8a_2 + 24)(3a_1 + 2a_2 - 6)^2 = 0, \quad (4.3.44)$$

où y_0 satisfait l'équation

$$d_1 y_0 + 6a_1 + 4a_2 - 12 = 0. \quad (4.3.45)$$

Soient r_1, r_2 les deux racines de l'équation indicelle (4.3.44). En combinant (4.3.44) et (4.3.45), il vient

$$d_1 y_0 = -6(a_1 - 2), (r_1, r_2) = (6, 4 - 2a_1). \quad (4.3.46)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, on peut considérer $y_0 \neq 0$.

4.3.2.1. Cas où $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$

Les relations (4.3.46) entraînent: $d_1 y_0 = 6$, $r_1 = 6$ et $r_2 = 2$, et en intégrant l'équation (4.3.42) dans ce cas, on trouve

$$y'' = y^2 + ky, \text{ ou } y'' = \frac{y'^2}{y} + \frac{1}{3}y^2 + \frac{k}{y}$$

qui est stable [35].

4.3.2.2. Cas où $a_1 = 2$ et $a_2 = 0$

Les relations (4.3.46) entraînent: $d_1 y_0 = 0$, $r_1 = 6$ et $r_2 = 0$, mais $y_0 \neq 0$, alors $d_1 = 0$, en intégrant l'équation (4.3.42), dans ce cas, on obtient

$$y'' = \frac{3}{2} \frac{y'^2}{y} + \frac{1}{3} y^3 + k$$

qui est stable [35].

4.3.2.3. Cas où $a_1 = 3$ et $a_2 = 0$

Il est évident que les indices de Fuchs sont dans ce cas $r_1 = 6$ et $r_2 = -2$, et l'équation (4.3.42) a pour intégrale première l'équation

$$y'' = 2 \frac{y'^2}{y} + \frac{1}{3} y^2 + \frac{k}{y}.$$

L'équation précédente n'est pas à points critiques fixes car le coefficient de $\frac{y'^2}{y}$ ne peut pas se mettre sous la forme $\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$ avec η entier différent de $-1, 0$. D'autre part, comme la condition d'indice

$$Q_{-2}^{(4)} \equiv -\frac{104}{9} \left(y_{-2}^{(1)}\right)^4 \left(y_6^{(0)}\right) \neq 0 \text{ et } Q_{-1}^{(4)} \equiv -\frac{322}{9} \left(y_{-2}^{(1)}\right)^3 \left(y_{-1}^{(1)}\right) \left(y_6^{(0)}\right) \neq 0$$

où $y_6^{(0)}$, $y_{-1}^{(1)}$ et $y_{-2}^{(1)}$ sont arbitraires, n'est pas satisfaite, alors l'équation (4.3.42) est à points critiques mobiles.

4.3.2.4. Cas où $a_1 = 3$ et $a_2 = -2$

L'équation (4.3.44) admet le double indice $(r_1, r_2) = (2, 2)$, et par conséquent l'équation (4.3.42) est à points critiques mobiles.

4.3.3 Troisième cas. $(p, q) = (-3, -12)$

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas particulier de (4.1.1) où

$$b_1 = c_0 = d_2 = e_4 = d_1 = 0 \text{ et } e_2 \neq 0.$$

Dans (4.1.1) posons

$$x \rightarrow x_0 + \varepsilon x, \quad y \rightarrow \varepsilon^{-3} y.$$

Lorsque ε tend vers 0, nous obtenons l'équation réduite

$$y'''y^2 = a_1 y''y'y + a_2 y'^3 + e_2 y^4. \quad (4.3.47)$$

Pour déterminer les conditions de stabilité correspondantes pour que $y(x)$ admette des pôles mobiles, posons

$$y \simeq y_0 (x - x_0)^{(-3)} + \dots + \hat{\beta} (x - x_0)^{(r-3)} + \dots$$

où r est un nombre réel.

En vertu du théorème de J. F. Bureau, pour que (4.3.47) vérifie la propriété de Painlevé, il est nécessaire que les racines de l'équation indicelle

$$(r+1) \left(r^2 + (3a_1 - 13)r - 36a_1 - 27a_2 + 60\right) = 0 \quad (4.3.48)$$

soient entières et distinctes. y_0 est solution de l'équation

$$e_2 y_0 - 36a_1 - 27a_2 + 60 = 0. \quad (4.3.49)$$

4.3.3.1. Cas où $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$

L'équation correspondante est

$$\begin{cases} y'''y = y''y' + e_2y^3, \\ y_0e_2 = -24, (r_1, r_2) = (4, 6). \end{cases} \quad (4.3.50)$$

D'une part, l'équation (4.3.50) admet comme intégrale première l'équation

$$y''^2 + 4y'y^2 + ky^2 = 0, \quad e_2 = 2,$$

D'autre part, pour montrer que cette condition est suffisante, on effectue le changement de fonction $y = w'$ dans (4.3.50) et on aboutit à

$$w' (w'' = \frac{1}{2}w^2 + k_1w + k_2), \quad \text{avec } e_2 = 1. \quad (4.3.51)$$

En intégrant l'équation (4.3.51), on obtient

$$w'^2 = \frac{1}{3}w^3 + k_1w^2 + 2k_2w + 2k_3,$$

qui est stable et la solution $w(x)$ est une fonction elliptique [26], et par conséquent, l'équation (4.3.50) vérifie la propriété de Painlevé.

4.3.3.2. Cas où $a_1 = 0$, 2 ou 3 et $a_2 = 0$

L'équation (5.3.53) est à points critiques mobiles car les indices ne sont pas entiers.

Proposition 4.7. *Pour que l'équation (4.1.1) soit à points critiques fixes, il est nécessaire et suffisant qu'elle s'écrive sous une des formes suivantes:*

1. cas où $p = -1$

$$\begin{cases} yy''' = y'y'' + y^3y'; \\ yy''' = y'y'' + y^2y'' + 2y^3y'; \\ yy''' = y'y'' + y^2y'' + 4y^3y' - 2y^5; \\ yy''' = y'y'' + y^2y'' + \frac{1}{4}y^3y' - \frac{1}{8}y^5; \\ yy''' = 2y'y'' + 2y^5, \\ yy''' = 2y'y'' + y^3y'; \\ yy''' = 2y'y'' + 2y^2y'' - 3yy'^2 + 2y^3y' - y^5; \\ y^2y''' = 3yy'y'' - 2y'^3 + y^3y''. \end{cases}$$

2. cas où $p = -2$

$$y'''y = y''y' + 6y^3y'.$$

3. cas où $p = -3$

$$yy''' = y'y'' + y^3.$$

4. cas où p entier négatif quelconque

$$\begin{cases} yy''' = y'y'', \\ y'''y = 2y''y', \\ y'''y = 3y''y', \\ y^2y''' = 3yy'y'' - 2y'^3. \end{cases}$$

Remarque 4.4. Ces résultats sont appliqués à l'étude des systèmes "multi-ion electrodiffusion" (voir R. Conte, C. Rogers et W. K. Schief dans [17, 2007]).

4.4 Conditions pour que l'équation complète de (4.1.1) ait ses points critiques fixes

Dans la section précédente nous avons obtenu les différentes classes d'équations de type (4.1.1) qui peuvent être à points critiques fixes et dans cette section, nous donnons des équations complètes de type (4.1.1) (à l'aide d'une transformation homographique, il est toujours possible de ramener l'ensemble des termes complémentaires à un polynôme en y'' , y' et y), dont les solutions générales peuvent être des fonctions monovalentes. La preuve des résultats obtenus se fait en utilisant une méthode analogue à celle utilisée par Cosgrove [22].

4.4.1 Transformation de l'équation (4.1.1)

La substitution

$$y = w^{-1} \tag{4.4.1}$$

dans l'équation (4.1.1) conduit à l'équation

$$\begin{aligned} w''' = & (6 - a_1) \frac{w''w'}{w} + (2a_1 + a_2 - 6) \frac{w'^3}{w^2} + \sum_{i=-1}^1 b_i w^{-i} w'' \\ & - \left[2 \sum_{i=-1}^1 b_i w^{-1-i} + \sum_{i=-2}^0 c_i w^{-2-i} \right] (w')^2 - \sum_{i=-2}^2 d_i w^{-i} w' + \sum_{i=-2}^4 e_i w^{2-i} \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

Remarque 4.5. Les équations (4.1.1) et (4.4.2) sont simultanément stables ou instables: elles se transforment l'une en l'autre par la transformation (4.4.1).

Par la transformation (4.4.1), l'équation (4.1.1) se ramène à une équation du même type dont les coefficients se déduisent des coefficients de l'équation de départ à l'aide du tableau suivant:

y	a_2		b_{-1}		b_0	b_1	c_{-2}			c_{-1}			c_0	
w	$2a_1 + a_2 - 6$		b_1		b_0	b_{-1}	$-(c_0 + 2b_1)$			$-(c_{-1} + b_0)$			$-(c_{-2} + 2b_{-1})$	
y	a_1	d_{-2}	d_{-1}	d_0	d_1	d_2	e_{-2}	e_{-1}	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	
w	$6 - a_1$	d_2	d_1	d_0	d_{-1}	d_{-2}	$-e_4$	$-e_3$	$-e_2$	$-e_1$	$-e_0$	$-e_{-1}$	$-e_{-2}$	

Remarque 4.6. Les conditions de stabilité correspondantes aux zéros mobiles de l'équation (4.1.1) se déduisent directement des conditions de stabilité correspondantes aux pôles mobiles de l'équation (4.4.2) suivant le tableau ci-dessus.

Dans ce qui suit, on va appliquer la troisième étape de la méthode de Bureau ou le test de Painlevé aux classes d'équations obtenues pour déterminer les coefficients de l'équation complète (4.1.1). Nous allons étudier quelques-unes des équations précédentes, les autres résultats s'obtiennent de manière analogue.

4.4.2 Premier cas. $(p, q) = (-1, -6)$

I.1. Considérons par exemple l'équation différentielle, dont l'intégrale générale a une famille de zéros doubles et deux familles de pôles simples mobiles:

$$\begin{cases} yy''' = y'y'' + 4y^3y' + B(x, y)y'' + C(x, y)(y')^2 + D(x, y)y' + E(x, y); \\ y_{01} = -1, y_{02} = 1, (r_{11}, r_{12}) = (2, 4), (r_{21}, r_{22}) = (2, 4). \end{cases} \quad (4.4.3)$$

On peut obtenir des conditions de stabilité pour l'équation (4.4.3) en posant suivant la méthode de Bureau [9], $(y = y_0z^2, z' = 1 + uz)$. On trouve alors les conditions suivantes:

$$b_{-1} = c_{-2} = d_{-2} = e_{-2} = 0.$$

Dans un même but, en posant $(y = y_0z^{-1}, z' = 1 + uz)$, l'équation (4.4.3) devient

$$\begin{aligned} & [u(12 - 5a_1 - 3a_2 + 3y_0b_1 + 2y_0c_0 - y_0^2d_2) + (2b_0 + c_{-1} - d_{-1}y_0 + e_{-1}y_0^2)] \\ & + z[u'(-4 + a_1 - b_1y_0) + u^2(7 - 4a_1 - 3a_2 + b_1y_0 + y_0c_0) + u(3b_0 + 2c_{-1} \\ & - d_1y_0) + \left(\frac{c_{-2}}{y_0} - d_0 + e_2y_0\right)] + z^2[u'' + u'u(-3 + a_1) + u^3(1 - a_1 - a_2) \\ & - b_0u' + u^2(b_0 + c_{-1}) + u\left(3b_{-1} + \frac{2c_{-2}}{y_0} - d_0\right) + \left(e_1 - \frac{d_{-1}}{y_0}\right)] + z^3[-u'b_{-1} \\ & + u^2\left(b_{-1} + \frac{c_{-2}}{y_0}\right) - u\frac{d_{-1}}{y_0} + \left(\frac{e_0}{y_0} - \frac{d_{-2}}{y_0^2}\right)] + z^4\left[-u\frac{d_{-2}}{y_0^2} + \frac{e_{-1}}{y_0^2}\right] + z^5\frac{e_{-2}}{y_0^2} + O(z^6) = 0. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

La condition nécessaire de stabilité est $(2b_0 + c_{-1} - d_{-1}y_0 + e_{-1}y_0^2 = 0)$. En effectuant ensuite convenablement une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$, nous pouvons prendre.

I.1.i. Cas où $b_0 = c_{-1} = 0$

(a) Supposons d'abord $y_{01} = 1$, nous obtenons pour u , l'équation

$$3u + e_{-1} - d_{-1} + z(-3u' + 3u^2 - d_{-1}u + e_0 - 4) + z^2(u'' - 2u'u - d_0u + e_1 - d_1) + z^3(-d_1u + e_2) + O(z^4) = 0. \quad (4.4.5)$$

Nous désignons par $O(z - z_0)$ une fonction holomorphe au voisinage de $z = z_0$. En posant dans l'équation (4.4.5) $P = \alpha + \beta z + \gamma z^2$, où α et β désignent des constantes, nous obtenons d'après le théorème fondamental de stabilité

$$A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + O(z^4) = G(P), \quad (4.4.6)$$

où $G(u)$ désigne le premier membre de (4.4.6), on choisit les coefficients α, β, γ tels que $A_i = 0, i = 0...3$, où les coefficients A_i sont donnés par:

$$\begin{aligned} A_0 &= 3\alpha + e_{-1} - d_{-1}, \quad e_{-1} = d_{-1}, \quad \alpha = 0, \\ A_1 &= e_0 - d_0, \quad d_0 = e_0, \\ A_2 &= e_1 - d_1 - \gamma - d_{-1}\beta, \\ A_3 &= e_2 + \gamma' + d_0\beta - d_{-1}. \end{aligned}$$

De ces relations, on déduit

$$e_{-1} = d_{-1} = d_0 = e_0 = 0, \quad e_1 - d_1 = \gamma, \quad \gamma' = -e_2, \quad (4.4.7)$$

d'où, d'après (4.4.7)

$$e_2 = d_1' - e_1'. \quad (4.4.8)$$

(b) Supposons maintenant $y_{02} = -1$, l'équation en u est alors

$$3u + z(-3u' + 3u^2) + z^2(u'' - 2u'u + d_1) + z^3(d_1u - e_2) + O(z^4) = 0.$$

Soit $P = \alpha + \beta z + \gamma z^2$. En faisant le calcul, on obtient les conditions nécessaires de stabilité

$$\begin{aligned} A_0 &= 3\alpha, \quad \alpha = 0; \quad A_1 = 0, \\ A_2 &= e_1 + d_1 - \gamma, \quad \gamma = e_1 + d_1, \\ A_3 &= -e_2 + \gamma', \quad \gamma' = e_2. \end{aligned}$$

De ces relations, on obtient

$$e_2 = e'_1 + d'_1. \quad (4.4.9)$$

De (4.4.8) et (4.4.9), on déduit

$$e'_1 = d'_1 = 0, \quad e_1 = k_1, \quad d_1 = k_2.$$

Si maintenant on veut trouver les conditions de stabilité de l'équation (4.4.3) correspondantes aux zéros mobiles sans passer par l'équation (4.4.3) on procède comme suit: en posant $y = w^{-1}$ dans (4.4.3), on obtient

$$\begin{cases} w^2 w''' = 5ww'w'' - 4w'^3 - 2w^3w' + F(x, w), \\ y_{01} = 1, \quad (r_{11}, r_{12}) = (-2, 2). \end{cases} \quad (4.4.10)$$

On peut choisir encore une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$ telle que $b_0 = c_{-1} = 0$, de plus l'intégrale générale a deux familles de zéros simples mobiles, ce qui implique $e_{-2} = 0$.

L'équation que doit vérifier u est

$$(-6u' + e_0) + z(6u' - 6u^2 - 2d_0) + O(z^2) = 0.$$

Si on pose $P = \alpha + \beta z$, on obtient les conditions nécessaires de stabilité

$$\begin{aligned} A_0 &= -6\alpha + e_0, \quad \alpha = 0, \quad e_0 = 0, \\ A_1 &= -2d_0, \quad d_0 = 0. \end{aligned}$$

L'équation (4.4.3) s'écrit donc sous la forme

$$yy''' = y'y'' + 4y^3y' + k_1y^2 + k_2y'. \quad (4.4.11)$$

Pour montrer que les conditions de stabilité précédentes sont suffisantes, nous allons intégrer l'équation (4.4.11).

Si $k_1 = 0$, l'intégrale première de l'équation (4.4.11) est

$$y'' = 2y^3 + ky + k_2,$$

où k est une constante arbitraire; cette dernière admet une intégrale première et y s'exprime par des fonctions elliptiques.

Si $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, l'intégrale première de l'équation (4.4.11) est

$$y'' = 2y^3 + (k_1x + k)y - k_2. \quad (4.4.12)$$

Pour ramener l'équation (4.4.12) à une forme canonique, posons $y \rightsquigarrow y + \mu$. En choisissant μ convenablement, on obtient:

$$y'' = 2y^3 + xy + k_3,$$

et on est ainsi ramené à l'équation P_{II} de Painlevé et aux fonctions elliptiques.

Remarque 4.7. Pour $r_{ij} < 0$, on ne trouve, dans ce cas, aucune nouvelle condition nécessaire de stabilité en considérant des substitutions du type (4.4.10).

I.1.ii. Cas où $2b_0 + c_{-1} + e_{-1} = 0$

On peut encore raisonner d'une autre façon. En utilisant le test de Painlevé, on obtient avec la transformation (4.4.1), les conditions de stabilité correspondantes à $(r_{11}, r_{12}) = (2, 4)$

$$\begin{aligned} d_{-1} &= 0, & c_{-1}'' + c_{-1}'c_{-1}' &= 0, \\ b_0' + b_0^2 &= 0, & \text{si } c_{-1} &= 0, \\ b_0c_{-1} &= c_{-1}' - c_{-1}^2, & \text{si } c_{-1} &\neq 0. \end{aligned}$$

Nous distinguerons les cas suivants.

I.1.ii.a. Pour $b_0 = c_{-1} = 0$, on obtient l'équation

$$yy''' = y'y'' + 4y^3y' + k_1y^2y' + \left(-\frac{k_1k_2}{6}x + k_3\right)y' + k_2y^2 + \frac{k_1k_2}{6}. \quad (4.4.13)$$

Cette dernière admet comme intégrale première l'équation

$$y'' = 2y^3 + k_1y + (k_2x + k_4)y + \frac{k_1k_2}{6}x + k_3.$$

Pour ramener l'équation précédente à une forme canonique, posons $y \rightsquigarrow y - \frac{k_1}{6}$. On obtient

$$y'' = 2y^3 + \left(\hat{k}_1x + \hat{k}_2\right)y + \hat{k}_3,$$

et on est ainsi ramené à l'équation P_{II} de Painlevé.

I.1.ii.b. Pour $b_0 = \frac{1}{x}$ et $c_{-1} = 0$, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} yy''' &= y'y'' + 4y^3y' + \frac{1}{x}(yy'' - 2y^4) + \frac{k_1}{x}y^2y' - \frac{2k_1}{x^2}y^3 + \left(-\frac{k_1^2}{2x^3} + \frac{k_2}{x}\right)y^2 \\ &+ \left(\frac{k_1}{3x^3} + \frac{k_1k_2}{6x} - \frac{k_1^3}{108x^3} + k_3\right)y' + \left(\frac{4k_1}{3x^4} + \frac{k_1k_2}{3x^2} - \frac{k_1^3}{27x^4} + \frac{k_3}{x}\right)y. \end{aligned}$$

Cette dernière admet comme intégrale première l'équation

$$y'' = 2y^3 + \frac{k_1}{x}y^2 + \left(\frac{k_1^2}{6x^2} - k_2 + k_4x\right)y - \frac{k_1}{3x^3} - \frac{k_1k_2}{6x} + \frac{k_1^3}{108x^3} - k_3,$$

et on est ainsi ramené de nouveau à l'équation P_{II} de Painlevé.

I.1.ii.c. Pour $b_0 = -\frac{3}{x}$ et $c_{-1} = \frac{2}{x}$, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} yy''' &= y'y'' + 4y^3y' + \frac{1}{x}(-3yy'' + 2y'^2 + k_1x^2y^2y' + 4y^4 + \frac{8}{3}k_1xy^3) \\ &+ \left(-\frac{k_1^3}{144}x^3 - \frac{k_1k_2}{12}x + \frac{k_3}{x}\right)y' + \left(\frac{k_1^2}{2}x + \frac{k_2}{x}\right)y^2 + \left(\frac{k_1^3}{36}x^2 + \frac{k_1k_2}{6}\right)y. \end{aligned}$$

I.2. Étude de l'équation, dont l'intégrale générale a trois familles de pôles simples

$$\left\{ \begin{array}{l} yy''' = y'y'' + y^2y'' + 4y^3y' - 2y^5 + B(x, y)y'' + C(x, y)(y')^2 + D(x, y)y' + E(x, y), \\ y_{01} = -1, y_{02} = 1, y_{03} = -2, \\ (r_{11}, r_{12}) = (1, 4), (r_{21}, r_{22}) = (3, 4), (r_{31}, r_{32}) = (-2, 6). \end{array} \right. \quad (4.4.14)$$

La méthode de Bureau n'est pas *concluante* pour ce cas, à cause d'insuffisance d'indices positifs, alors on applique le test de Painlevé à l'équation (4.4.14) pour obtenir sous quelles conditions l'équation peut être stable.

(a) Cas où $y_{01} = -1$

Pour simplifier les calculs, en effectuant une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$, nous pouvons supposer les coefficients A et B dans $y_2^{(0)} = \left(y_1^{(0)}\right)^2 + Ay_1^{(0)} + B$ nuls. Par suite on obtient:

$$c_{-1} = 3e_3 + d_1, \quad e_2 = -c_{-2} - 2b_{-1} - d_0.$$

Les conditions de stabilité correspondantes à $(r_{11}, r_{12}) = (1, 4)$ s'écrivent sous la forme:

$$\begin{aligned} b_0 &= -d_1 - 2e_3, \quad d_1 = -3e_3, \quad b_0 = \frac{1}{2}e_3c_{-2} - 2d_{-1}, \\ d_0 &= -3b_{-1} - \frac{5}{2}c_{-2}, \quad b_1 = -\frac{1}{2}c_{-2}e_3^2 + d_{-1}e_3 - d_{-2}. \end{aligned}$$

(b) Cas où $y_{02} = 1$

En effectuant une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$, nous pouvons supposer $y_1^{(0)} = \frac{1}{2}e_3$ nul (i.e. $e_3 = 0$), les conditions de stabilité correspondantes à $(r_{21}, r_{22}) = (3, 4)$ s'écrivent donc sous la forme:

$$e_3 = 0, \quad d_{-1} = 0, \quad d_{-2} = -\frac{45}{8}c_{-2}^2 - 13b_{-1}c_{-2} - \frac{15}{2}b_{-1}^2.$$

(c) Cas où $y_{03} = -2$

De même $y \simeq -2z^{-2}$ conduit à la série de Laurent

$$y^{(0)} = -2z^{-1} + \dots + y_6^{(0)}z^4 + \dots,$$

avec deux constantes arbitraires. La troisième apparaît en perturbation [20]. Supposons la solution sous la forme:

$$y = y^{(0)} + \varepsilon y^{(1)} + \varepsilon^2 y^{(2)} + \dots,$$

où le petit paramètre ε ne figure pas dans l'équation (4.4.14). L'équation linéarisée en $y^{(1)}$ est

$$\hat{E}'(x, y^{(0)})y^{(1)} = 0, \text{ où } y^{(1)} = \sum_{j=-2}^{+\infty} y_j^{(1)} z^{-1+j}.$$

En effectuant une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$, nous pouvons supposer $y_0^{(1)} = -\frac{1}{8}c_{-2}y_{-2}^{(1)}$ nul, les conditions de stabilité correspondantes à $(r_{31}, r_{32}) = (-2, 6)$ s'écrivent sous la forme:

$$\begin{aligned} Q_6^{(1)} &\equiv -112b_{-1} \left(y_6^{(0)} \right) \left(y_{-2}^{(1)} \right) = 0, \\ Q_6^{(2)} &\equiv -\frac{1}{8}e_{-1}^2 \left(y_{-2}^{(1)} \right)^2 = 0, \\ Q_6^{(5)} &\equiv \frac{15}{32}e_{-2} \left(y_{-2}^{(1)} \right) \left(y_{-1}^{(1)} \right)^4 \left(y_6^{(0)} \right) = 0. \end{aligned}$$

On déduit immédiatement

$$b_{-1} = c_{-2} = e_{-1} = e_{-2} = 0.$$

Par conséquent, l'équation complète (4.4.14) à points critiques fixes est

$$yy''' = y'y'' - y^2y'' + 4y^3y' + 2y^5 + (2k_1x + k_2)y^3 + k_1(y^2 + y').$$

Cette dernière admet comme intégrale première l'équation :

$$y'' = 2y^3 + (2k_1x + k_2)y - k_1.$$

L'intégration de cette équation est connue: elle s'intègre à l'aide des fonctions elliptiques.

I.3. Considérons l'équation, dont l'intégrale générale a trois familles de pôles simples,

$$\left\{ \begin{array}{l} yy''' = y'y'' + y^2y'' + \frac{1}{4}y^3y' - \frac{1}{8}y^5 + B(x, y)y'' + C(x, y)(y')^2 + D(x, y)y' + E(x, y), \\ y_{01} = -2, y_{02} = 4, y_{03} = -4, \\ (r_{11}, r_{12}) = (1, 3), (r_{21}, r_{22}) = (4, 6), (r_{31}, r_{32}) = (-2, 4). \end{array} \right. \quad (4.4.15)$$

Raisonnons comme plus haut.

(a) Cas où $y_{01} = -2$

En effectuant une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$, nous pouvons supposer les coefficients A et B de $y_2^{(0)} = \frac{1}{2} \left(y_1^{(0)} \right)^2 + Ay_1^{(0)} + B$ nuls. Par suite, on obtient:

$$c_{-1} = 12e_3 + 2d_1, \quad c_{-2} = -4b_{-1} - 2b_{-1} - 2d_0.$$

Les conditions de stabilité correspondantes à $(r_{11}, r_{12}) = (1, 3)$ s'écrivent sous la forme:

$$b_0 = -8e_3 - 2d_1, \quad d_1 = -6e_3, \quad b_{-1} = -8e_3 - 2d_0, \quad d_{-1} = -2b_0.$$

(b) Cas où $y_{02} = 4$

En effectuant une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$, nous pouvons supposer $y_1^{(0)} \equiv \frac{32}{3}e_3 = 0$. Les conditions de stabilité correspondantes à $(r_{21}, r_{22}) = (4, 6)$ sont:

$$d_{-2} = 12d_0b_{-1} - 12b_{-1} - 3d_0^2 + 4b_1, \quad e_2 = 0, \quad e_{-2} = -\frac{27}{8}d_0^3 + 32b_0 + 3d_0b_1.$$

(c) Cas où $y_{03} = -4$

En effectuant une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$, nous pouvons supposer $y_1^{(0)} \equiv \frac{-1}{8}d_0 = 0$. Les conditions d'indices correspondantes à $(r_{31}, r_{32}) = (-2, 4)$ sont:

$$\begin{aligned} Q_4^{(1)} &\equiv 128b_0 \left(y_{-2}^{(1)} \right) = 0, \\ Q_4^{(2)} &\equiv b_1 \left(-290 \left(y_4^{(0)} \right) - \frac{52}{3}b_1 \right) \left(y_{-2}^{(1)} \right)^2 = 0, \\ Q_4^{(3)} &\equiv \frac{1}{128}e_{-1}^2 \left(y_{-2}^{(1)} \right)^3 = 0. \end{aligned}$$

On déduit que

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0 \quad \text{ou} \quad b_1 = \frac{-435}{26} \left(y_4^{(0)} \right) \equiv k, \quad e_{-1} = 0.$$

Par conséquent, l'équation complète (4.4.15) à points critiques fixes doit être sous une des formes suivantes:

$$yy''' = y'y'' + y^2y'' + \frac{1}{4}y^3y' - \frac{1}{8}y^5 + k \left(4\frac{y'}{y} + y \right).$$

Cette équation est difficile à intégrer afin d'obtenir les conditions suffisantes.

$$yy''' = y'y'' - 2y^2y'' + y^3y' + y^5 - \frac{12}{x^2}y^3 + \frac{24}{x^3}y' + \frac{72}{x^4}y. \quad (4.4.16)$$

Cette équation admet comme intégrale première l'équation:

$$y'' = -yy' + y^3 - \frac{12}{x^2}y - \frac{24}{x^3}.$$

$$yy''' = y'y'' - 2y^2y'' + y^3y' + y^5 + (k_1x + k_2)y^3 + 2k_1y' + k_1y^2. \quad (4.4.17)$$

Cette dernière admet comme intégrale première l'équation:

$$y'' = -3yy' - y^3 - (k_1x + k_2)y - 2k_1.$$

En procédant comme dans les exemples du paragraphe précédent, on peut alors énoncer le résultat suivant: pour que l'équation (4.1.1) soit à points critiques fixes, il est nécessaire

qu'elle s'écrive sous une des formes suivantes:

I.1. Cas où $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} yy''' = y'y'' + 2y^3 - y', \\ yy''' = y'y'' + y^3y' + k_1y^2 + k_2y'; \\ yy''' = y'y'' + 4y^3y' + k_1y^2y' + \left(-\frac{k_1k_2}{6}x + k_3\right)y' + k_2y^2 + \frac{k_1k_2}{6}; \\ yy''' = y'y'' + 4y^3y' + \frac{1}{x}(yy'' - 2y^4) + \frac{k_1}{x}y^2y' - \frac{2k_1}{x^2}y^3 + \left(-\frac{k_1^2}{2x^3} + \frac{k_2}{x}\right)y^2 \\ \quad + \left(\frac{k_1}{3x^3} + \frac{k_1k_2}{6x} - \frac{k_1^3}{108x^3} + k_3\right)y' + \left(\frac{4k_1}{3x^4} + \frac{k_1k_2}{3x^2} - \frac{k_1^3}{27x^4} + \frac{k_3}{x}\right)y; \\ yy''' = y'y'' + 4y^3y' + \frac{1}{x}(-3yy'' + 2y'^2 + k_1x^2y^2y' + 4y^4 + \frac{8}{3}k_1xy^3) \\ \quad + \left(-\frac{k_1^3}{144}x^3 - \frac{k_1k_2}{12}x + \frac{k_3}{x}\right)y' + \left(\frac{k_1^2}{2}x + \frac{k_2}{x}\right)y^2 + \left(\frac{k_1^3}{36}x^2 + \frac{k_1k_2}{6}\right)y. \\ yy''' = y'y'' + y^2y'' + 2y^3y' + ky' + \frac{k}{2}y^2; \\ yy''' = y'y'' + y^2y'' + 2y^3y' + ky' + \left(\frac{60}{x^3} + \frac{k}{2}\right)y^2; \\ yy''' = y'y'' + y^2y'' + 4y^3y' - 2y^5 + 4(k_1x + k_2)y^3 - 2k_1y^2 + 2k_1y'; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} yy''' = y'y'' - 2y^2y'' + y^3y' + y^5 - \frac{12}{x^2}y^3 + \frac{24}{x^3}y' + \frac{72}{x^4}y; \\ yy''' = y'y'' + y^2y'' + \frac{1}{4}y^3y' - \frac{1}{8}y^5 + k\left(4\frac{y'}{y} + y\right), \\ yy''' = y'y'' + y^2y'' + \frac{1}{4}y^3y' - \frac{1}{8}y^5 - 2(k_1x + k_2)y^3 - 2k_1y^2 - 4k_1y'; \\ yy''' = y'y'' + y^2y'' + \frac{1}{4}y^3y' - \frac{1}{8}y^5 - 2(k_1x + k_2)y^3 + k_1y^2 - k_1y'; \end{array} \right.$$

I.2. Cas où $a_1 = 2$ et $a_2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} yy''' = 2y'y'' - 3yy' + b_0(y'' - y), \\ yy''' = 2y'y'' + y^3y' + ky'; \\ yy''' = 2y'y'' + 2y^3y' + kyy'; \quad y'' = 2y^3 + k_1y^2 - \frac{k}{2} \\ yy''' = 2y'y'' + 2y^2y'' - 3yy'^2 + 2y^3y' - y^5 + ky; \end{array} \right.$$

I.3. Cas où $a_1 = 3$ et $a_2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} yy''' = 3y'y'' - (2k_1x - k_2)yy' + k_3y' + k_2y^2, \\ yy''' = 3y'y'' + k_1y' + k_2y. \end{array} \right.$$

I.4. Cas où $a_1 = 3$ et $a_2 = -2$

$$\begin{aligned} y^2y''' &= 3yy'y'' - 2y'^3 + y^3y'' + b_0(y^2y'' - 2yy'^2 - y^5) \\ &\quad + b_{-1}(yy'' - 2y'^2) + d_0(y^2y' + y^4) + (2(b_{-1})' - 3b_0b_{-1})yy' \\ &\quad + b_0y^3 - ((b_{-1})'' - b_0(b_{-1})' - d_0b_{-1})y^2 - b_0(b_{-1})^2y. \end{aligned}$$

4.4.3 Deuxième cas. $(p, q) = (-2, -9)$

Considérons maintenant l'équation complète suivante

$$yy''' = y'y'' + y^2y'' + 2y^3y' + F_2(x, y), \quad (4.4.18)$$

avec F_2 donnée par

$$F_2(x, y) = b_0 y^2 y'' + b_1 y y'' + c_{-1} y y'^2 + c_0 y'^2 + d_0 y^2 y' \\ + d_1 y y' + d_2 y' + e_1 y^3 + e_0 y^2 + e_{-1} y + e_{-2}.$$

Il y a deux familles de pôles doubles

$$y_{01} = -1, y_{02} = 2, (r_{11}, r_{12}) = (2, 3), (r_{21}, r_{22}) = (2, 6).$$

Par une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$, on peut supposer

$$d_1 = -e_3 - 2b_0 - c_{-1}, \quad b_0 = -\frac{3}{2}c_{-1}.$$

En utilisant la condition de stabilité correspondante à $r_{11} = 2$, on déduit que l'équation de type (4.4.18) peut vérifier la propriété de Painlevé uniquement si on a

$$d_0 = -2b_{-1} - b_{-1} - c_{-2}, \quad c_{-2} = -2b_{-1} - 2b_{-1}.$$

La condition de stabilité correspondante à $r_{12} = 3$ est

$$Q_3^{(0)} \equiv -3(c_{-1} - e_3)y_2^{(0)} - (b_0 + d_{-1}) = 0,$$

et la condition correspondante à $r_{22} = 6$ est une égalité polynomiale de degré deux en $y_2^{(0)}$ de la forme:

$$Q_6^{(0)} \equiv A \left(y_2^{(0)} \right)^2 + B y_2^{(0)} + C = 0, \quad A = B = C = 0.$$

De ces conditions, on déduit que:

$$e_3 = c_{-1}, \quad b_0 + d_{-1} = 0, \quad b_{-1} = -2b_{-1} - \frac{1}{4}c_{-1}^2, \\ b_1 = -\frac{1}{16}c_{-1}^4 - \frac{5}{8}b_{-1}c_{-1}^2 - \frac{1}{2}d_{-1}c_{-1} + d_{-2} + \frac{1}{2}b_{-1}, \\ e_{-2} = -\frac{1}{2}b_{-1} + \frac{3}{8}c_{-1}^2 b_{-1} - \frac{1}{2} \left(d_{-2} - \frac{3}{4}c_{-1}^4 + 2c_{-1}d_{-1} \right) b_{-1} + \frac{1}{32}c_{-1}^6 \\ + \frac{1}{4}d_{-1}c_{-1}^3 - \frac{1}{4}d_{-2}c_{-1}^2 - c_{-1}e_{-1} - 4d_{-1}^2.$$

Par suite, pour que l'équation (4.4.18) soit à points critiques fixes, il est nécessaire qu'elle s'écrive sous une des formes suivantes:

$$\begin{cases} y'''y = y''y' + 6y^2y' + k_1y', \\ y'''y = y''y' + 6y^2y' + (k_1z + k_2)y', \\ y'''y = y''y' + 6y^2y' + k_1y + (k_1x^2 + k_2x + k_3)y' + (k_1x + k_2)y. \end{cases}$$

4.4.4 Troisième cas. $(p, q) = (-3, -12)$

Considérons l'équation

$$\begin{cases} y'''y = y''y' + e_2y^3 + F_3(x, y), \\ y_0e_2 = -24, (r_1, r_2) = (4, 6), \end{cases} \quad (4.4.19)$$

avec F_3 donnée par

$$\begin{aligned} F_3(x, y) = & b_0y^2y'' + b_{-1}yy'' + c_{-1}yy'^2 + c_{-2}y'^2 + d_0y^2y' \\ & + d_{-1}yy' + d_{-2}y' + e_1y^3 + e_0y^2 + e_{-1}y + e_{-2}. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variables: $(y = y_0z^{-3}, z' = 1 + uz)$, l'équation (4.4.19) se ramène au système:

$$\begin{cases} z' = 1 + uz, \\ (45u + 12b_0 + 9c_{-1}) + z(-u' - 53u^2 + 21b_0u + 2c_{-1} - 3d_0) \\ \quad + z^2(u'' - 18u^3 - 3b_0u' + 9b_0u^2 + 9c_{-1}u^2 - 3d_0u + e_1) \\ \quad + z^3\left(\frac{12b_1}{y_0} + \frac{9c_0}{y_0}\right) + z^4\left(\frac{21b_1u}{y_0} + \frac{18c_0u}{y_0} - \frac{3d_1}{y_0}\right) \\ \quad + z^5\left(\frac{-3b_1u'}{y_0} + \frac{9b_1u^2}{y_0} + \frac{9c_0u^2}{y_0} - \frac{3d_1u}{y_0} + \frac{e_2}{y_0}\right) + O(z^6) = 0. \end{cases} \quad (4.4.20)$$

Par une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$, on peut supposer $12b_0 + 9c_{-1} = 0$.

La condition de stabilité correspondante à $r_{11} = 4$ est

$$c_{-2} = -2c_{-1}b_0 - \frac{9}{8}c_{-1}^2d_0 - \frac{3}{2}d_0^2 - \frac{4}{3}b_{-1}.$$

La condition de stabilité correspondante à $r_{12} = 6$ est une égalité polynomiale de degré un par rapport à $y_4^{(0)}$ de la forme:

$$Q_6^{(0)} \equiv Ay_4^{(0)} + B = 0, \quad A = B = 0.$$

Par suite, on déduit que:

$$d_0 = \frac{15}{4}c_{-1}^2, \quad b_{-1} = \frac{880875}{1024}c_{-1}^6 + \frac{4455}{16}b_0c_{-1}^3 + \frac{45}{16}b_{-1}c_{-1}^2 + \frac{45}{4}d_{-1}c_{-1} - 8b_0.$$

Pour simplifier les calculs posons $b_0 = c_{-1} = 0$, ce qui est possible en utilisant une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$. Enfin, on obtient:

$$b_1 = c_0 = d_{-2} = e_{-2} = e_3 = 0.$$

L'équation que doit vérifier u est alors:

$$\begin{aligned} 45u + z(-u' - 53u^2 - 3d_0) + z^2(u'' - 18u^3 - 3d_0u + e_1) - 3d_1z^4 \\ + z^5(-3d_1u + e_2) + O(z^6) = 0. \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

Posons $P = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4$ telles que α et δ soient des paramètres constants.

L'équation (4.4.21) devient

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + A_5 z^5 + O(z^6) = G(P). \quad (4.4.22)$$

avec $G(u)$ le premier membre de (4.4.22), en identifiant les coefficients on obtient:

$$\begin{aligned} A_0 &= 45\alpha, \quad \alpha = 0, \quad A_1 = 44\beta - 3d_0, \quad A_2 = \beta' + 45\gamma + e_1, \\ A_3 &= 3\delta + 3\gamma' + \beta'' - 52\beta^2 + 3d_0\beta, \\ A_4 &= 5\varepsilon + \gamma'' + 3\beta\beta' + 114\beta\gamma + 18\beta^2 - 3d_0\beta - 3d_1 \\ A_5 &= 7\varepsilon' + e_2 + 3d_0\gamma + 5\beta\gamma' + 4\beta'\gamma - 16\beta^3 - 45\gamma^2 + 18\beta\delta. \end{aligned}$$

Choisissons $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ telles que $A_i = 0$ ($i = 0, \dots, 5$).

$$\delta \text{ constant}, \quad A_3 = 0 \Rightarrow \delta = 0.$$

Pour obtenir d'autres conditions de stabilité, effectuons dans (4.4.19), la transformation $wy = 1$; il vient

$$\begin{aligned} w^2 w''' &= 5ww'w'' - 4w'^3 + d_{-1}w^3w' + F_3(x, w) \\ d_{-1}y_0 &= -2, \quad \theta = -3, \quad 1 \text{ ou } (r_1, r_2) = (-2, 2). \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

En effectuant une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$, nous pouvons supposer:

$$d_{-1} = -2, \quad b_0 = c_{-1} = 0.$$

L'équation donnant u est

$$(-6u + e_0) + z(6u' - 6u^2 - 2d_0) + O(z^2) = 0.$$

Si on remplace dans l'équation précédente P par $\alpha + \beta z$ où α et β sont deux constantes, les conditions nécessaires de stabilité du système (4.4.20) sont $A_0 = A_1 = 0$, et il vient

$$A_0 + A_1 z + O(z^2) = G(P),$$

comme on a

$$\begin{aligned} A_0 &= -6\alpha + e_0, \quad e_0 = 0, \quad \alpha = 0, \\ A_1 &= -2d_0, \quad d_0 = 0, \end{aligned}$$

nous obtenons la condition nécessaire de stabilité $e_2 = e_0 = 0$ et par suite

$$\begin{aligned} A_1 &= 44\beta - 3d_0 = 0 \implies \beta = 0, \\ A_2 &= 45\gamma + e_1, \quad A_3 = 3\gamma', \quad A_4 = 5\varepsilon - 3d_1, \\ A_5 &= 7\varepsilon' + e_2 + 3d_0\gamma + -45\gamma^2. \end{aligned} \tag{4.4.24}$$

On en déduit enfin

$$A_4 = 0 \implies 5\varepsilon = 3d_1,$$

d'où $d_1 = k$ (constante arbitraire), avec

$$A_5 = e_2 + 3d_0\gamma + -45\gamma^2.$$

Des relations (4.4.24) découle que $\gamma = e_1 = 0$.

Par suite, l'équation (4.4.19) s'écrit sous la forme:

$$yy''' = y'y'' - 24y^3 + ky'.$$

4.4.5 Quatrième cas. p entier négatif quelconque

Dans cette section, nous considérons le type de l'équation (4.1.1) où

$$b_1 = c_0 = d_1 = d_2 = e_2 = e_4 = 0.$$

L'équation complète correspondante est dans ce cas:

$$y^2y''' = a_1yy'y'' + a_2y'^3 + b_{-1}y^2y'' + c_{-2}yy'^2 + d_{-1}y^2y' + e_0y^3. \tag{4.4.25}$$

Pour obtenir les conditions de stabilité, posons $y' = vy$ dans (4.4.25), et alors nous obtenons

$$v'' = (a_1 - 3)vv' + (a_1 + a_2 - 1)v^3 + (b_{-1} + c_{-2})v^2 + b_{-1}v' + d_{-1}v + e_0. \tag{4.4.26}$$

Nous distinguons les cas suivants.

Si l'on pose $a_2 = 0$, l'équation (4.4.26) se réduit à

$$yy''' = a_1y'y'' + b_{-1}yy'' + c_{-2}y'^2 + d_{-1}yy' + e_0y^2. \tag{4.4.27}$$

qui représente un type d'équations considéré par Chazy [13].

IV.1. Cas où $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$

L'équation correspondante est

$$v'' = (b_{-1} - 2)vv' + (b_{-1} + c_{-2})v^2 + d_{-1}v + e_0, \quad (4.4.28)$$

elle doit avoir son intégrale générale stable.

On ramène cette équation à la forme canonique en posant $v = u + \mu(x)$:

$$u'' = -2u'u + (b_{-1} - 2\mu)u' + (b_{-1} + c_{-2})u^2 - (2\mu' - 2(b_{-1} + c_{-2})\mu - d_{-1})u - H(x),$$

avec

$$H(z) = \mu'' + 2\mu\mu' - b_{-1}\mu' - (b_{-1} + c_{-2})\mu^2 - d_{-1}\mu - e_0.$$

La condition de stabilité se déduit de

$$\begin{cases} 2\mu' - 2(b_{-1} + c_{-2})\mu - d_{-1} = 0; \\ b_{-1} - 2\mu = b_{-1} + c_{-2} \Rightarrow 2\mu = -c_{-2}, \end{cases}$$

où c_{-2} est la solution générale de

$$-(c_{-2})' + c_{-2}(b_{-1} + c_{-2}) - d_{-1} = 0.$$

Ce qui donne une relation entre les coefficients en choisissant μ .

IV.2. Cas où $a_1 = 2$ et $a_2 = 0$

L'équation correspondante est

$$v'' = (b_{-1} - 1)vv' + v^3 + (b_{-1} + c_{-2})v^2 + d_{-1}v + e_0. \quad (4.4.29)$$

Posons $v = u + \mu(x)$. En choisissant

$$\mu(x) = -\frac{2b_{-1} + 3c_{-2}}{10},$$

l'équation (4.4.29) s'écrit donc sous la forme:

$$u'' = -uu' + u^3 + P(x)(3u' + u^2) + R(x)u + S(x), \quad (4.4.30)$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned} P(x) &= -\frac{4b_{-1} + c_{-2}}{10}, \\ R(x) &= -\mu' + 3\mu^2 + 2(b_{-1} + c_{-2})\mu + d_{-1}\mu + e_0, \\ S(x) &= -\mu'' - (\mu - b_{-1})\mu' + \mu^3 + (b_{-1} + c_{-2})\mu^2 + d_{-1}\mu + e_0. \end{aligned}$$

A cet effet, rappelons un résultat connu [35, Ince]: pour qu'une équation de type (4.4.30) ait ses points critiques fixes, il faut et il suffit que

$$\begin{aligned}
 i) & : R(x) = P'(x) - 2P^2(x), S(x) = 0; \\
 ii) & : P(x) = \frac{q'(x)}{2q(x)}, R(x) = \frac{q''}{2q} - \frac{q'^2}{q^2} - q(x), S(x) = 0; \\
 iii) & : R(x) = P'(x) - 2P^2(x) - 12q^2(x), R(x) = \frac{q'}{q} + q(x), S(x) = -24q^3(x); \\
 iv) & : P(x) = -\frac{2q(x)}{q'(x)}, R(x) = -\frac{24x}{q(x)}, S(x) = \frac{12}{q(x)}, q(x) = 4x^3 - \zeta x^{-\eta}, \\
 v) & : P(x) = 0, R(x) = -12q(x), S(x) = 12q'(x), q''(x) = 6q^2 + x.
 \end{aligned}$$

En appliquant ce résultat, on obtient des conditions nécessaires pour que l'équation (4.4.25) soit à points critiques fixes.

IV.3. Cas où $a_1 = 3$ et $a_2 = 0$

Dans ce cas l'équation (4.4.26) devient:

$$v'' = b_{-1}vv' + 2v^3 + (b_{-1} + c_{-2})v^2 + d_{-1}v + e_0. \quad (4.4.31)$$

En effectuant une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$ qui s'écrit sous la forme:

$$v = \lambda(x)V(t) + \mu(x), \quad t = \varphi(x),$$

nous obtenons l'équation du second ordre suivante:

$$\begin{aligned}
 \ddot{V} &= \frac{\varphi'^2}{\lambda} \left(\frac{\lambda\varphi''}{\varphi'^3} - \frac{2\lambda'}{\varphi'^2} + b_{-1}\frac{\lambda}{\varphi'} \right) \dot{V} + 2\lambda^2\varphi'^2V^3 + \lambda\varphi'^2(6\mu + b_{-1} + c_{-2})V^2 \\
 &+ \left(-\frac{\lambda''}{\varphi'^2} + \frac{\lambda'\varphi''}{\varphi'^3} + b_{-1}\frac{\lambda'}{\varphi'} + 6\mu^2\lambda + 2(b_{-1} + c_{-2})\mu\lambda + d_{-1}\lambda \right) V \\
 &+ \frac{\varphi'^2}{\lambda} \left(\frac{\mu''}{\varphi'^2} + \frac{\mu'\varphi''}{\varphi'^3} + b_{-1}\frac{\mu'}{\varphi'} + 2\mu^3 + (b_{-1} + c_{-2})\mu^2 + d_{-1}\mu + e_0 \right),
 \end{aligned} \quad (4.4.32)$$

dont l'intégrale générale doit être à points critiques fixes. On sait que cette équation est à point critiques fixes [9, 35] si et seulement si elle se ramène à une équation de la forme:

$$\ddot{V} = 2V^3 + A(x)V + B(x). \quad (4.4.33)$$

En identifiant les coefficients de V , V^3 dans (4.4.32) et (4.4.33), on déduit que λ , μ et φ sont déterminés par les relations:

$$\lambda^2\varphi'^2 = 1, \quad \frac{\lambda\varphi''}{\varphi'^3} - \frac{2\lambda'}{\varphi'^2} + b_{-1}\frac{\lambda}{\varphi'} = 0, \quad \lambda\varphi'^2(6\mu + b_{-1} + c_{-2}) = 0. \quad (4.4.34)$$

Des équations (4.4.34), on déduit que:

$$\mu = -\frac{b_{-1} + c_{-2}}{6}, \quad \lambda = \frac{1}{3} \int b_{-1} dt, \quad \varphi = \pm \int \frac{1}{\lambda} dt,$$

ce qui revient à prendre $A(x)$ et $B(x)$

$$\begin{aligned} A(x) &\equiv \alpha x + \beta = -\frac{\lambda''}{\lambda} + \frac{\lambda' \varphi''}{\varphi'} + b_{-1} \frac{\lambda' \varphi'}{\lambda} + 6\mu^2 \varphi'^2 + 2(b_{-1} + c_{-2}) \mu \varphi'^2 + d_{-1} \varphi'^2, \\ B(x) &\equiv \gamma = \left(\mu'' + \frac{\mu' \varphi''}{\varphi'^3} + b_{-1} \frac{\mu'}{\varphi'} + 2\mu^3 \varphi'^2 + (b_{-1} + c_{-2}) \mu^2 \varphi'^2 + d_{-1} \mu \varphi'^2 + e_0 \varphi'^2 \right) \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

avec λ , μ et φ des fonctions données par les relations (4.4.34).

Par exemple si on prend:

i) $c_{-2} = \frac{6}{x}$, l'équation (4.4.25) s'écrit sous la forme

$$yy''' = 3y'y'' + 6\frac{y'^2}{x}, \quad (4.4.35)$$

et si l'on pose $w = \frac{y'}{y}$, l'équation (4.4.35) devient

$$w'' = 2w^3 + 6\frac{w^2}{x},$$

et ainsi, si w est à points critiques fixes, y l'est aussi. [35].

ii) $c_{-2} = \frac{3}{x}$, l'équation (4.4.25) s'écrit sous la forme:

$$yy''' = 3y'y'' + 3\frac{y'^2}{x}, \quad w'' = 2w^3 + 3\frac{w^2}{x},$$

iii) $c_{-2} = 0$, l'équation (4.4.25) devient

$$yy''' = 3y'y'' + d_0 yy'. \quad (4.4.36)$$

Cette équation se ramène au système

$$\begin{cases} q = \frac{y'}{y}, & (a) \\ q'' = 2q^3 + d_0(x)q. & (b) \end{cases} \quad (4.4.37)$$

D'après des résultats connus sur les équations du second ordre [35, p.266], pour que $d_0(x)$ n'admette pas de point logarithmique mobile, il faut que

$$d_0(x) = k_1 x + k_2,$$

où k_1 et k_2 sont constantes arbitraires. Cette condition est donc une condition nécessaire de stabilité pour y . Montrons qu'elle est suffisante:

Si $k_1 = 0$, q est une fonction elliptique. Si $k_1 \neq 0$, la dernière équation du système (4.4.37) peut se ramener à l'équation (P_{II}) de Painlevé voir [35, p.232]. On en déduit que $y = C \exp \left[\int q(u) du \right]$ est stable.

IV.4. Cas où $a_1 = 3$ et $a_2 = -2$

L'équation correspondante est

$$v'' = (b_{-1} + c_{-2}) v^2 + b_{-1} v' + d_{-1} v + e_0. \quad (4.4.38)$$

En appliquant une transformation de la forme: $v = u + \mu(x)$, l'équation (4.4.38) devient

$$u'' = (b_{-1} + c_{-2}) u^2 + b_{-1} u' + (2(b_{-1} + c_{-2}) \mu + d_{-1}) u - H(x), \quad (4.4.39)$$

avec

$$H(x) = \mu'' - b_{-1} \mu' - (b_{-1} + c_{-2}) \mu^2 - d_{-1} \mu - e_0.$$

Les conditions de stabilité de (4.4.39) sont

$$(2(b_{-1} + c_{-2}) \mu + d_{-1}) = 0, \quad b_{-1} + c_{-2} = 6, \quad b_{-1} = 0.$$

En tenant compte des conditions de stabilité déjà obtenues, l'équation (4.4.39) doit s'écrire sous la forme:

$$u'' = 6u^2 - H(x), \quad (4.4.40)$$

dont les indices de Fuchs sont $r_1 = -1$ et $r_2 = 6$, avec $u_0 = 1$.

L'équation (4.4.40) peut vérifier la propriété de Painlevé uniquement si:

$$Q_6 \equiv -\frac{H''(x)}{2} = 0.$$

Donc pour que l'équation (4.4.40) soit stable, il faut et il suffit que $H(x) = k_1 x + k_2$. Par exemple, on peut prendre comme équation à points critiques fixes l'équation:

$$y^2 y''' = 3yy''y' - 2y'^3 + b_0 (yyy'' - yy'^2) + d_0 y^2 y' + e_1 y^3,$$

Cette dernière équation se ramène (poser $y = e^v$) à l'équation linéaire

$$v''' = b_0 v'' + d_0 v' + e_1,$$

d'où l'on en déduit que y est stable.

4.5 Questions et perspectives

Pour terminer ce chapitre, signalons quelques problèmes qui ne sont pas encore résolus: il reste à examiner si les intégrales générales des équations trouvées dans la section 4 sont effectivement à points critiques fixes et donner les solutions générales de ces équations.

Chapitre 5

Équations à points critiques fixes admettant comme équation *simplifiée* l'équation $y'y''' = \beta y''^2$

Sommaire

5.1	Introduction	86
5.2	Conditions pour que l'équation <i>simplifiée</i> de (5.1.1) ait ses points critiques fixes	86
5.2.1	Détermination de toutes les équations (5.2.1) dont l'intégrale est à points critiques fixes	86
5.3	Conditions pour que l'équation <i>réduite</i> de (5.1.1) ait ses points critiques fixes	87
5.3.1	Premier Cas. $\beta = 0$	87
5.3.2	Deuxième cas. $\beta \neq 0$	88
5.4	Questions et perspectives	112

5.1 Introduction

Le présent chapitre, concerne l'étude de l'équation différentielle de la forme

$$\begin{cases} y''' (\delta y' + \alpha y^2) = \beta y''^2 + a_1 y'' y' y + a_2 y'' y^3 + a_3 y'^3 + a_4 y'^2 y^2 + a_5 y' y^4 \\ \quad + a_6 y^6 + a_7 y'' y^2 + a_8 y'^2 y + a_9 y^4 + a_{10} y' y^2 + a_{11} y^3 \end{cases} \quad (5.1.1)$$

où δ , α , β et a_i ($i = 1, \dots, 11$) désignent des constantes.

Nous donnons ci-dessous des conditions nécessaires de stabilité relatives à l'équation (5.1.1), ces conditions s'obtiennent par les mêmes méthodes que dans [9], nous ferons une étude complète pour certaines équations obtenues qui paraissent assez simples. La motivation vient de ce que certaines de ces équations ont déjà été rencontrées dans la littérature, notamment celles étudiées par I. P. Martynov en 1985 dans [48], P. A. Clarkson dans [15], D. Holm et A. Hone dans [33, 2003] et N. Kudryashov en 2005 dans [43].

5.2 Conditions pour que l'équation *simplifiée* de (5.1.1) ait ses points critiques fixes

Pour obtenir une condition de stabilité de l'équation (5.1.1), nous utilisons la méthode du petit paramètre ε . Dans (5.1.1) remplaçons x par $x_0 + \varepsilon x$, ε constant, et en posant $\varepsilon = 0$ dans le résultat, nous obtenons l'équation simplifiée

$$y''' = \beta \frac{y''^2}{y'}. \quad (5.2.1)$$

Pour que l'équation (5.1.1) ait ses points critiques fixes, il faut donc que l'équation (5.2.1) ait son intégrale générale stable.

5.2.1 Détermination de toutes les équations (5.2.1) dont l'intégrale est à points critiques fixes

Faisons le changement de fonction

$$y' = vy$$

dans (5.2.1), l'équation considérée devient

$$v'' = \beta \frac{v'^2}{v} + (2\beta - 3) vv' + (\beta - 1) v^3, \quad (5.2.2)$$

et ainsi, si y est à points critiques fixes, v l'est aussi.

Ce type d'équation a été étudié complètement dans [26, Gambier]. Pour que la fonction $v(x)$ ainsi définie soit stable, il faut donc que β soit égal à 1 ou $(\eta - 1)/\eta$, où η désignent un entier positif ou négatif ou infini, mais différent de 0, -1 .

Une étude particulière sera faite pour les valeurs de η suivantes:

$$\eta \in \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, \infty\}.$$

Remarque 5.1. [9] Si $\eta \notin \{1, -2\}$, on peut supposer $\eta > 1$. Le cas où η est négatif se ramène au cas précédent par la transformation $v = u^{-1}$.

On suppose que la solution générale de l'équation (5.1.1) dans un petit voisinage d'une singularité x_0 "mobile" est algébrique. Alors $y(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$y \sim y_0 (x - x_0)^p. \quad (5.2.3)$$

En dérivant l'équation (5.2.3) et en remplaçant ensuite dans l'équation (5.1.1), on trouve que la liste de toutes les puissances de $(x - x_0)$ est donnée par

$$[2p - 4, 3p - 3, 4p - 2, 5p - 1, 6p, 3p - 2, 4p, 3p - 1, 3p].$$

On choisira ensuite l'entier p de telle sorte qu'au moins deux éléments de la liste précédente soient égaux. On constate aussitôt que les seules valeurs de p qui vérifient cette condition sont : $p = -1, -2, -3$ et -4 . Nous allons étudier séparément chacun de ces cas.

5.3 Conditions pour que l'équation réduite de (5.1.1) ait ses points critiques fixes

On a deux cas à distinguer suivant que $\beta = 0$ ou $\beta \neq 0$.

5.3.1 Premier Cas. $\beta = 0$

Nous allons distinguer de nouveau les cas suivants:

I.1. Cas où $\delta = 0$ et $\alpha = 0$

Dans ce cas, l'équation (5.1.1) s'écrit nécessairement sous la forme:

$$y'' = R(y', y, x), \quad (5.3.1)$$

où $R(y', y, x)$ est une fonction rationnelle de y et y' dont les coefficients sont des fonctions analytiques en x . Les équations (5.3.1) dont l'intégrale générale est à points critiques fixes ont été déterminées par Painlevé et Gambier.

I.2. Cas où $\delta \neq 0$ et $\alpha = 0$

L'équation (5.1.1) est nécessairement de la forme:

$$y''' = P_3(x, y) y'' + P_2(y, x) y'^2 + P_1(y, x) y' + P_0(y, x).$$

Chazy dans [13] a considéré les équations différentielles polynomiales du troisième ordre où P_3 , P_2 , P_1 et P_0 sont des polynômes. Il a montré que pour qu'une équation de ce type vérifie la propriété de Painlevé, il est nécessaire que sa réduite ou sa simplifiée se ramène à l'une des treize équations (dites équations de Chazy).

Cet auteur dans son étude n'a pas pu prouver si parmi ces équations, il y en a qui définissent de nouvelles fonctions. Par la suite, Cosgrove [22] a complété l'intégration de toutes les équations de Chazy. Il s'avéra que les équations de Chazy ne définissent pas de nouvelles fonctions. Pour plus de détails, on peut consulter l'article de Cosgrove [22].

I.3. Cas où $\delta = 0$ et $\alpha \neq 0$

Sans perdre de généralité, on peut fixer $\alpha = 1$ et ainsi (5.1.1) devient

$$\begin{cases} y^2 y''' = a_1 y'' y' y + a_2 y'' y^3 + a_3 y'^3 + a_4 y'^2 y^2 + a_5 y' y^4 + a_6 y^6 \\ \quad + a_7 y'' y^2 + a_8 y'^2 y + a_9 y^4 + a_{10} y' y^2 + a_{11} y^3. \end{cases} \quad (5.3.2)$$

Cette équation a été étudiée dans le chapitre précédent.

I.4. Cas où $\delta \neq 0$ et $\alpha \neq 0$

L'équation (5.1.1) est nécessairement de la forme

$$y''' = P(y'', y', y, x),$$

où P désigne un polynôme en y'' , y' , y , à coefficients analytiques en x . Cette équation a été étudiée par Chazy dans [13] et Cosgrove dans [22].

5.3.2 Deuxième cas. $\beta \neq 0$

L'étude sera faite suivant les valeurs de (p, q) .

II.1. Cas où $(p, q) = (-1, -6)$

Supposons maintenant que a_i , ($i = 1, \dots, 6$), ne sont pas tous nuls. En faisant dans (5.1.1) le changement de variables

$$x \rightarrow x_0 + \varepsilon x, \quad y \rightarrow \varepsilon^{-1} y, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

(ε tendant vers zéro), nous obtenons l'équation réduite correspondante suivante

$$y''' (\delta y' + \alpha y^2) = \beta y''^2 + a_1 y'' y' y + a_2 y'' y^3 + a_3 y'^3 + a_4 y'^2 y^2 + a_5 y' y^4 + a_6 y^6, \quad (5.3.3)$$

qui doit être stable.

Pour déterminer les conditions de stabilité posons

$$y \simeq y_0 (x - x_0)^{(-1)} + \hat{\beta} (x - x_0)^{(r-1)} + \dots, \quad (5.3.4)$$

où r est un nombre réel.

En vertu du théorème de Bureau, pour que (5.3.12) vérifie la propriété de Painlevé, il est nécessaire que les racines de l'équation indiciale

$$(r + 1) ((\delta - \alpha y_0) r^2 + H(y_0) r + G(y_0)) = 0, \quad (5.3.5)$$

avec

$$\begin{cases} H(y_0) = a_2 y_0^2 + (7\alpha - a_1) y_0 + (4\beta - 7\delta), \\ G(y_0) = a_5 y_0^3 - 2(a_4 + 2a_2) y_0^2 - 3(6\alpha - 2a_1 - a_3) y_0 - 8(2\beta - 3\delta), \end{cases}$$

où y_0 est donné par

$$a_6 y_0^4 - a_5 y_0^3 + (a_4 + 2a_2) y_0^2 + (6\alpha - 2a_1 - a_3) y_0 + 2(2\beta - 3\delta) = 0, \quad (5.3.6)$$

soient entières et distinctes.

Dans la suite, nous allons étudier séparément les cas suivants:

1 : $a_6 = a_5 = 2a_2 + a_4 = 0$.

2 : $a_6 = a_5 = 0$ et $2a_2 + a_4 \neq 0$.

3 : $a_6 = 0$ et $a_5 \neq 0$.

4 : $a_6 \neq 0$.

Si par exemple $a_6 \neq 0$, notons par y_{01}, y_{02}, y_{03} , et y_{04} les solutions de l'équation (5.3.6) distinctes deux à deux. On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq 4} y_{0i} &= \frac{a_5}{a_6}, & \prod_{j=1}^4 y_{0j} &= \frac{2(2\beta - 3\delta)}{a_6}, \\ \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} y_{0i} y_{0j} y_{0k} &= -\frac{(6\alpha - 2a_1 - a_3)}{a_6}, & \sum_{1 \leq i < j \leq 4} y_{0i} y_{0j} &= \frac{(a_4 + 2a_2)}{a_6}. \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

D'après (5.3.5) et (5.3.7), le produit des indices correspondant à y_{0j} , $P(y_{0j})$ s'écrit sous la forme

$$P(y_{0j}) = a_5 y_{0j}^3 - 2(a_4 + 2a_2) y_{0j}^2 - 3(6\alpha - 2a_1 - a_3) y_{0j} - 8(2\beta - 3\delta), \quad j = 1, \dots, 4. \quad (5.3.8)$$

Condition 2. Pour que l'intégrale générale de l'équation (5.3.12) soit à points critiques fixes, il faut que les nombres $P(y_{01})$, $P(y_{02})$, $P(y_{03})$ et $P(y_{04})$ soient des entiers positifs, négatifs ou infinis et vérifient la relation

$$\sum_{j=1}^4 \frac{1}{P(y_{0j})} = -\frac{1}{2(2\beta-3)} \equiv \frac{1}{2} - \frac{1}{\eta+2}, \quad \eta \neq -2, -1, 0 \quad (5.3.9)$$

où les quantités y_{01} , y_{02} , y_{03} et y_{04} , désignent des constantes distinctes.

Cette équation a été utilisée pour la première fois par Chazy [13], puis par Bureau [9], Martynov [49], et Cosgrove dans [22].

Remarque 5.2. Dans le deuxième cas, la détermination des équations de la forme (5.3.9), dont l'intégrale générale est stable, se ramène à la résolution en nombres entiers de l'équation

$$\frac{1}{P(y_{01})} + \frac{1}{P(y_{02})} = -\frac{1}{2(2\beta-3)}.$$

Dans le troisième cas, la détermination des équations de la forme (5.3.9), dont l'intégrale générale est stable, est liée à la résolution en nombres entiers de l'équation

$$\frac{1}{P(y_{01})} + \frac{1}{P(y_{02})} + \frac{1}{P(y_{03})} = -\frac{1}{2(2\beta-3)}.$$

De même dans le quatrième cas, la détermination des équations de la forme (5.3.9), dont l'intégrale générale est stable, est liée à la résolution en nombres entiers de l'équation

$$\frac{1}{P(y_{01})} + \frac{1}{P(y_{02})} + \frac{1}{P(y_{03})} + \frac{1}{P(y_{04})} = -\frac{1}{2(2\beta-3)}.$$

Nous allons distinguer les cas suivants.

II.1.1. Cas où $\delta = 0$ et $\alpha = 0$

L'équation (5.3.3) est nécessairement de la forme

$$y''^2 = A(y', y, x)y'' + B(y', y, x), \quad (5.3.10)$$

où A et B sont des fonctions rationnelles de y et y' dont les coefficients sont des fonctions analytiques de x . Les conditions pour que l'intégrale générale de l'équation (5.3.10) soit à points critiques fixes ont été déterminées par Bureau [10], Mugan et Sakka [55], des résultats plus précis sont données par Cosgrove et Scoufis dans [21]. A titre d'exemple, pour que l'équation différentielle de degré deux soit à points critiques fixes, il faut qu'elle s'écrive sous la forme:

$$(y'' + E_0 y'^2 + E_1 y' + E_2)^2 = F_0 y'^4 + F_1 y'^3 + F_2 y'^2 + F_3 y' + F_4,$$

où (E_k, F_k) rationnelle en y à coefficients analytiques en x .

II.1.2. Cas où $\delta = 0$ et $\alpha \neq 0$

L'équation (5.3.3) peut se ramener à la forme:

$$y^2 y''' = \beta y''^2 + a_1 y'' y' y + a_2 y'' y^3 + a_3 y'^3 + a_4 y'^2 y^2 + a_5 y' y^4 + a_6 y^6. \quad (5.3.11)$$

Pour que l'équation précédente soit à points critiques fixes, il est nécessaire que le coefficient β soit nul (voir [13, 27]). Ainsi, l'équation de type (5.3.11) ne vérifie pas la propriété de Painlevé ($\beta \neq 0$).

II.1.3. Cas où $\delta \neq 0$ et $\alpha = 0$

On peut écrire l'équation (5.3.3) sous la forme:

$$y' y''' = \beta y''^2 + a_1 y'' y' y + a_2 y'' y^3 + a_3 y'^3 + a_4 y'^2 y^2 + a_5 y' y^4 + a_6 y^6. \quad (5.3.12)$$

Nous avons à considérer quatre cas:

II.1.3.1. Cas où $a_6 = a_5 = 2a_2 + a_4 = 0$

Dans ce cas, $y(x)$ possède une seule famille de pôles simples de résidu y_0 .

Pour que l'équation (5.3.12) soit à points critiques fixes, il est nécessaire qu'elle soit sous une des formes suivantes:

$$\begin{cases} y''' y' = \frac{3}{2} y''^2 + y'^3, \\ y''' y' = \frac{1}{2} y''^2 + 4y'^3, \quad y_0 = -1, (r_1, r_2) = (1, 4), \\ y''' y' = \frac{3}{4} y''^2 + 3y'^3, \quad y_0 = -1, (r_1, r_2) = (1, 3), \\ y''' y' = y''^2 + 2y'^3, \quad y_0 = -1, (r_1, r_2) = (1, 2). \end{cases}$$

Il reste à vérifier que ces équations ont leurs intégrales générales stables.

i. Étude de l'équation différentielle

$$y''' y' = \frac{3}{2} y''^2 + y'^3.$$

En posant

$$y' = w, \quad (5.3.13)$$

on obtient la formule

$$w w'' = \frac{3}{2} w'^2 + w^3, \quad (5.3.14)$$

qui est une équation du second ordre en w et du premier degré en w'' du type

$$A(w, x) \equiv 1 - \frac{1}{\eta} = \frac{3}{2} \text{ où } \eta = -2.$$

L'intégration de ces équations est connue, la solution générale $w(x)$ de (5.3.14) s'exprime par des fonctions elliptiques [35].

ii. Étude de l'équation différentielle

$$y'''y' = \frac{1}{2}y''^2 + 4y'^3, \quad y_0 = -1, \quad (r_1, r_2) = (1, 4). \quad (5.3.15)$$

En portant (5.3.13) dans (5.3.15), nous obtenons une équation d'ordre deux

$$ww'' = \frac{1}{2}w'^2 + 4w^3,$$

qui est stable, ainsi y est stable [35].

iii. Étude de l'équation différentielle

$$y'''y' = \frac{3}{4}y''^2 + 3y'^3, \quad y_0 = -1, \quad (r_1, r_2) = (1, 3). \quad (5.3.16)$$

En faisant le changement de variable (5.3.13) dans (5.3.16), nous aboutissons à l'équation

$$ww'' = \frac{3}{4}w'^2 + 3w^3,$$

qui est à points critiques fixes, y est aussi à points critiques fixes [35].

iv. Étude de l'équation différentielle

$$y'''y' = y''^2 + 2y'^3, \quad y_0 = -1, \quad (r_1, r_2) = (1, 2). \quad (5.3.17)$$

En dérivant (5.3.17) par rapport à x , il vient

$$y'''' = y'''y'' + 6y'^2y''.$$

Si on pose de nouveau $y' = w$, on trouve l'équation en w

$$w'''w = w'w'' + 6w^2w'.$$

Cette dernière équation s'intègre par des fonctions elliptiques, par suite y est stable [22].

II.1.3.2. Cas où $a_6 = a_5 = 0$ et $2a_2 + a_4 \neq 0$

Dans ce cas, il y a deux familles de pôles simples correspondant respectivement aux résidus y_{01} et y_{02} qui sont solutions de l'équation

$$(a_4 + 2a_2)y_0^2 - (2a_1 + a_3)y_0 + 2(2\beta - 3) = 0, \quad y_0 \neq 0. \quad (5.3.18)$$

Les équations indicelles de (5.3.12) sont:

$$\begin{cases} r_1^2 + H(y_{01})r_1 + P(y_{01}) = 0, \\ r_2^2 + H(y_{02})r_2 + P(y_{02}) = 0, \end{cases} \quad (5.3.19)$$

et les solutions de ses dernières équations $r_{j1}, r_{j2}, j = 1, 2$ doivent être entières.

On a alors, d'après (5.3.18),

$$2a_2 + a_4 = \frac{(4\beta - 6)}{y_{01}y_{02}}, \quad 2a_1 + a_3 = \frac{(4\beta - 6)(y_{01} + y_{02})}{y_{01}y_{02}},$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$P(y_{01}) = -(4\beta - 6) \left(1 - \frac{y_{01}}{y_{02}}\right), \quad P(y_{02}) = -(4\beta - 6) \left(1 - \frac{y_{02}}{y_{01}}\right). \quad (5.3.20)$$

Comme $P(y_{01})P(y_{02}) \neq 0$, car $y_{01} \neq y_{02}$, l'équation Diophantine correspondante (5.3.20) s'écrit sous la forme:

$$-(4\beta - 6)(P(y_{01}) + P(y_{02})) = P(y_{01})P(y_{02}). \quad (5.3.21)$$

Donc de (5.3.21), il découle:

$$\frac{1}{P(y_{01})} + \frac{1}{P(y_{02})} = -\frac{1}{2(2\beta - 3)}. \quad (5.3.22)$$

Notre but consiste à trouver toutes les valeurs de $P(y_{01})$ et $P(y_{02})$ entières pour lesquelles l'équation (5.3.22) soit vérifiée. Supposons connues de telles valeurs de $P(y_{01})$ et $P(y_{02})$. La substitution de celles-ci dans (5.3.20) donne la valeur de $\frac{y_{01}}{y_{02}}$, cette dernière valeur est prise en considération uniquement si elle vérifie les équations (5.3.20).

Pour chaque couple de valeurs de $P(y_{01})$ et $P(y_{02})$, on aura deux équations (5.3.19) dont les solutions (r_{11}, r_{12}) et (r_{21}, r_{22}) doivent être entières tout en vérifiant les égalités:

$$r_{11} \cdot r_{12} = P(y_{01}) \quad \text{et} \quad r_{21} \cdot r_{22} = P(y_{02}).$$

Ces dernières relations donnent un nombre fini de valeurs possibles pour (r_{11}, r_{12}) et (r_{21}, r_{22}) .

La résolution de ce problème nous donne: pour que l'équation (5.3.12) soit à points critiques fixes, il est nécessaire qu'elle soit sous une des formes suivantes.

Pour $\eta = 2$

$$\begin{cases} y'''y' = \frac{1}{2}y''^2 + \frac{3}{2}y''y'y + \frac{1}{2}y''y^3 + 3y'^3 - 3y'^2y^2, \\ y_{01} = -1, y_{02} = -2, (r_{11}, r_{12}) = (1, 2), (r_{21}, r_{22}) = (-2, 2), \\ y'''y' = \frac{1}{2}y''^2 - \frac{10}{3}y''y'y + \frac{8}{3}y''y^3 - \frac{40}{3}y'^3 - \frac{64}{3}y'^2y^2, \\ y_{01} = 1, y_{02} = \frac{1}{4}, (r_{11}, r_{12}) = (3, -4), (r_{21}, r_{22}) = (1, 3), \\ y'''y' = \frac{1}{2}y''^2 - 4y''y'y - 12y'^3 - 16y'^2y^2, \\ y_{01} = 1, y_{02} = \frac{1}{4}, (r_{11}, r_{12}) = (-3, 4), (r_{21}, r_{22}) = (1, 3), \\ y'''y' = \frac{1}{2}y''^2 + \frac{2}{3}y''y'y - \frac{4}{3}y''y^3 + \frac{8}{3}y'^3 + \frac{32}{3}y'^2y^2, \\ y_{01} = 1, y_{02} = \frac{-1}{2}, (r_{11}, r_{12}) = (3, 4), (r_{21}, r_{22}) = (2, 3). \end{cases}$$

Pour $\eta = 3$

$$\begin{cases} y'''y' = \frac{2}{3}y''^2 - \frac{10}{3}y''y'y - 30y'^3 - \frac{100}{3}y'^2y^2, \\ y_{01} = 1, y_{02} = \frac{1}{10}, (r_{11}, r_{12}) = (-5, 6), (r_{21}, r_{22}) = (1, 3). \end{cases}$$

Pour $\eta = 4$

$$\begin{cases} y'''y' = \frac{3}{4}y''^2 - y''y^3 + 5y'^2y^2, \\ y_{01} = 1, y_{02} = -1, (r_{11}, r_{12}) = (2, 3), (r_{21}, r_{22}) = (2, 3), \\ y'''y' = \frac{3}{4}y''^2 + 5y''y'y + 4y''y^3 - 10y'^3 - 5y'^2y^2, \\ y_{01} = 1, y_{02} = -1, (r_{11}, r_{12}) = (2, 3), (r_{21}, r_{22}) = (-2, -3), \\ y'''y' = \frac{3}{4}y''^2 + 9y''y^3 - 15y'^2y^2, \\ y_{01} = -1, y_{02} = 1, (r_{11}, r_{12}) = (-2, -3), (r_{21}, r_{22}) = (-2, -3), \\ y'''y' = \frac{3}{4}y''^2 - \frac{3}{2}y''y'y - \frac{9}{2}y''y^3 + 9y'^3 + 18y'^2y^2. \\ y_{01} = 1, y_{02} = -\frac{1}{3}, (r_{11}, r_{12}) = (3, 4), (r_{21}, r_{22}) = (1, 4). \end{cases}$$

Pour $\eta = 5, \infty$, les indices de Fuchs ne sont pas entiers et donc les équations obtenues sont à points critiques mobiles.

II.1.3.3. Cas où $a_6 = 0$ et $a_5 \neq 0$

L'intégrale générale a trois familles de pôles simples mobiles correspondant respectivement aux résidus y_{01} , y_{02} et y_{03} qui sont solutions, distinctes deux à deux, de l'équation:

$$-a_5y_0^3 + (a_4 + 2a_2)y_0^2 - (2a_1 + a_3)y_0 + 2(2\beta - 3) = 0, \quad y_0 \neq 0. \quad (5.3.23)$$

D'après (5.3.5) et (5.3.6), on tire

$$\sum_{j=1}^3 \frac{1}{P(y_{0j})} = -\frac{1}{2(2\beta - 3)}. \quad (5.3.24)$$

Notre problème est de déterminer toutes les solutions de l'équation de Diophantine (5.3.24). Notons par (r_{11}, r_{12}) , (r_{21}, r_{22}) et (r_{31}, r_{32}) les solutions des équations (5.3.5) correspondantes à y_{01} , y_{02} et y_{03} .

Il est nécessaire que $P(y_{0i}) \neq 0$ pour avoir $P(y_{01})P(y_{02})P(y_{03}) \neq 0$ et on la relation:

$$\prod_{i=1}^3 P(y_{0i}) = -\frac{(4\beta - 6)^3}{(y_{01}y_{02}y_{03})^2} ((y_{01} - y_{02})(y_{02} - y_{03})(y_{02} - y_{03}))^2.$$

Après calcul, on obtient les équations aux indices de Fuchs entiers suivantes.

Pour $\eta = 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''y' = \frac{1}{2}y''^2 - y''y'y - y''y^3 + y'^3 + 6y'^2y^2 + y'y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = -1, y_{03} = 4, (r_{11}, r_{12}) = (2, 3), \\ (r_{21}, r_{22}) = (2, 5), (r_{31}, r_{32}) = (-3, 20), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''y' = \frac{1}{2}y''^2 - \left(\frac{2-3\sqrt{2}}{7}\right)y''y'y + \left(\frac{5+3\sqrt{2}}{7}\right)y''y^3 - \left(\frac{30+5\sqrt{2}}{7}\right)y'^3 \\ - \left(\frac{15+4\sqrt{2}}{7}\right)y'^2y^2 + \left(\frac{1+\sqrt{2}}{7}\right)y'y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = 4 - \sqrt{2}, y_{03} = 4 - 6\sqrt{2}, (r_{11}, r_{12}) = (1, 3), \\ (r_{21}, r_{22}) = (-5, 2), (r_{31}, r_{32}) = (-3, -20), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''y' = \frac{1}{2}y''^2 + (16 - 12\sqrt{2})y''y'y + (17 - 12\sqrt{2})y''y^3 - (30 - 19\sqrt{2})y'^3 \\ - (21 - 14\sqrt{2})y'^2y^2 + (7 - 5\sqrt{2})y'y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = 4 + 3\sqrt{2}, y_{03} = 4 + 2\sqrt{2}, (r_{11}, r_{12}) = (1, 3), \\ (r_{21}, r_{22}) = (-2, -3), (r_{31}, r_{32}) = (-4, 1), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''y' = \frac{1}{2}y''^2 + (16 + 8\sqrt{3})y''y'y + (14 + 8\sqrt{3})y''y^3 - (29 + 13\sqrt{3})y'^3 \\ - (16 + 10\sqrt{3})y'^2y^2 + (5 + 3\sqrt{3})y'y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = -2 + 2\sqrt{3}, y_{03} = -2 + \sqrt{3}, (r_{11}, r_{12}) = (1, 6), \\ (r_{21}, r_{22}) = (1, -12), (r_{31}, r_{32}) = (-2, -3). \end{array} \right.$$

Pour $\eta = 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''y' = \frac{2}{3}y''^2 + \frac{10}{3}y''y'y + \frac{2}{3}y''y^3 - \frac{23}{3}y'^3 + \frac{2}{3}y'^2y^2 - \frac{1}{3}y'y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = -5, y_{03} = -2, (r_{11}, r_{12}) = (1, 6), \\ (r_{21}, r_{22}) = (1, -30), (r_{31}, r_{32}) = (-2, -3), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''y' = \frac{2}{3}y''^2 - \left(\frac{160-75\sqrt{2}}{861}\right)y''y'y + \left(\frac{127+75\sqrt{2}}{861}\right)y''y^3 - \left(\frac{2818+132\sqrt{2}}{861}\right)y'^3 \\ - \left(\frac{503+114\sqrt{2}}{861}\right)y'^2y^2 + \left(\frac{19+18\sqrt{2}}{861}\right)y'y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = 10 - 3\sqrt{2}, y_{03} = 10 - 15\sqrt{2}, (r_{11}, r_{12}) = (1, 3), \\ (r_{21}, r_{22}) = (3, -8), (r_{31}, r_{32}) = (-5, -24), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''y' = \frac{2}{3}y''^2 + \left(\frac{25-15\sqrt{3}}{3}\right)y''y'y + \left(\frac{26-15\sqrt{3}}{3}\right)y''y^3 - \left(\frac{103-49\sqrt{3}}{6}\right)y'^3 \\ - \left(\frac{34-19\sqrt{3}}{3}\right)y'^2y^2 + \left(\frac{19-11\sqrt{3}}{6}\right)y'y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = 10 + 5\sqrt{3}, y_{03} = 10 + 6\sqrt{3}, (r_{11}, r_{12}) = (1, 3), \\ (r_{21}, r_{22}) = (1, -5), (r_{31}, r_{32}) = (-2, -3). \end{array} \right.$$

Pour $\eta = 4$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''y' = \frac{3}{4}y''^2 + (6 - 2\sqrt{6})y''y'y + (5 - 2\sqrt{6})y''y^3 - \left(\frac{63-17\sqrt{6}}{5}\right)y'^3 \\ \quad - \left(\frac{31-14\sqrt{6}}{5}\right)y'^2y^2 + \left(\frac{7-3\sqrt{6}}{5}\right)y'y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = -3 - 2\sqrt{6}, y_{03} = -3 - \sqrt{6}, (r_{11}, r_{12}) = (1, 4), \\ (r_{21}, r_{22}) = (1, -12), (r_{31}, r_{32}) = (-2, -3), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''y' = \frac{3}{4}y''^2 + (6 + 2\sqrt{3})y''y'y + (4 + 2\sqrt{3})y''y^3 - \left(\frac{135+38\sqrt{3}}{11}\right)y'^3 \\ \quad - \left(\frac{50+32\sqrt{3}}{11}\right)y'^2y^2 + \left(\frac{8+6\sqrt{3}}{11}\right)y'y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = \frac{-3+5\sqrt{3}}{2}, y_{03} = \frac{-3+\sqrt{3}}{2}, (r_{11}, r_{12}) = (1, 5), \\ (r_{21}, r_{22}) = (1, -30), (r_{31}, r_{32}) = (-2, -3), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''y' = \frac{3}{4}y''^2 + (6 + 4\sqrt{3})y''y'y + (7 + 4\sqrt{3})y''y^3 + \left(\frac{-27-13\sqrt{3}}{2}\right)y'^3 \\ \quad - (10 + 5\sqrt{3})y'^2y^2 + \left(\frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right)y'y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = 3 - \sqrt{3}, y_{03} = 3 - 2\sqrt{3}, (r_{11}, r_{12}) = (1, 2), \\ (r_{21}, r_{22}) = (1, -3), (r_{31}, r_{32}) = (-2, -3). \end{array} \right.$$

Pour $\eta = 5$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''y' = \frac{4}{5}y''^2 - \left(\frac{18+10\sqrt{5}}{55}\right)y''y'y + \left(\frac{26-10\sqrt{5}}{55}\right)y''y^3 - \left(\frac{156-16\sqrt{5}}{55}\right)y'^3 \\ \quad - \left(\frac{84-12\sqrt{5}}{55}\right)y'^2y^2 + \left(\frac{6-4\sqrt{5}}{55}\right)y'y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = \frac{7+\sqrt{5}}{2}, y_{03} = \frac{7+7\sqrt{5}}{2}, (r_{11}, r_{12}) = (1, 2), \\ (r_{21}, r_{22}) = (2, -3), (r_{31}, r_{32}) = (-6, -7), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''y' = \frac{4}{5}y''^2 - \left(\frac{7+33\sqrt{105}}{1820}\right)y''y'y - \left(\frac{371+33\sqrt{105}}{1820}\right)y''y^3 - \left(\frac{9233-153\sqrt{105}}{3640}\right)y'^3 \\ \quad + \left(\frac{1309+87\sqrt{105}}{1820}\right)y'^2y^2 + \left(\frac{29+3\sqrt{105}}{520}\right)y'y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = -14 + \sqrt{105}, y_{03} = -14 + 2\sqrt{105}, (r_{11}, r_{12}) = (1, 3), \\ (r_{21}, r_{22}) = (3, 7), (r_{31}, r_{32}) = (-2, 21), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''y' = \frac{4}{5}y''^2 + \left(\frac{259}{2185} + \frac{27\sqrt{35}}{3059}\right)y''y'y - \left(\frac{178}{2185} + \frac{27\sqrt{35}}{3059}\right)y''y^3 - \left(\frac{651}{230} + \frac{31\sqrt{35}}{1610}\right)y'^3 \\ \quad + \left(\frac{822}{2185} - \frac{319\sqrt{35}}{15295}\right)y'^2y^2 + \left(\frac{29}{4370} - \frac{7\sqrt{35}}{4370}\right)y'y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = -14 - \sqrt{35}, y_{03} = -14 - 6\sqrt{35}, (r_{11}, r_{12}) = (1, 3), \\ (r_{21}, r_{22}) = (5, 7), (r_{31}, r_{32}) = (-3, 70), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''y' = \frac{4}{5}y''^2 - \frac{28}{5}y''y'y + \frac{16}{5}y''y^3 + \left(\frac{234+80\sqrt{5}}{5}\right)y'^3 + \left(\frac{336+160\sqrt{5}}{5}\right)y'^2y^2 \\ \quad + \left(\frac{176+80\sqrt{5}}{5}\right)y'y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = \frac{-7+7\sqrt{5}}{8}, y_{03} = \frac{-7+3\sqrt{5}}{8}, (r_{11}, r_{12}) = (-2, -3), \\ (r_{21}, r_{22}) = (1, -7), (r_{31}, r_{32}) = (1, 3). \end{array} \right.$$

Pour $\eta = \infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''y' = y''^2 + 2(1+i\sqrt{3})y''y'y - 2(1-i\sqrt{3})y''y^3 - 4(1+i\sqrt{3})y'^3 \\ \quad + 4(1-i\sqrt{3})y'^2y^2 - 2y'y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, y_{03} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, (r_{11}, r_{12}) = (1, 6), \\ \quad (r_{21}, r_{22}) = (-3, -2), (r_{31}, r_{32}) = (1, 6), \\ y'''y' = y''^2 - 2iy''y'y - 2(1+i)y''y^3 + \left(\frac{2+24i}{5}\right)y'^3 + \left(\frac{24+28i}{5}\right)y'^2y^2 - \left(\frac{8-4i}{5}\right)y'y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = \frac{-1+i}{2}, y_{03} = \frac{-1+3i}{2}, (r_{11}, r_{12}) = (2, 3), \\ \quad (r_{21}, r_{22}) = (1, 4), (r_{31}, r_{32}) = (-4, -3). \end{array} \right.$$

II.1.3.4. Cas où $a_6 \neq 0$

L'intégrale générale a quatre familles de pôles simples correspondant respectivement aux résidus y_{0j} ($j = 1, \dots, 4$).

En combinant (5.3.5) et (5.3.6), on obtient

$$\sum_{j=1}^4 \frac{1}{P(y_{0j})} = -\frac{1}{(4\beta - 6)}. \quad (5.3.25)$$

Le problème revient ainsi à trouver les solutions en nombres entiers de l'équation (5.3.25). Après calcul, on trouve le résultat suivant: pour que l'équation de type (5.3.12) vérifie la propriété de Painlevé, il est nécessaire qu'elle soit sous une des formes suivantes.

Pour $\eta = 2$

$$\begin{aligned} y'''y' &= \frac{1}{2}y''^2 + \frac{7}{10}y''y'y - \frac{3}{10}y''y^3 - \frac{793}{180}y'^3 + \frac{19}{12}y'^2y^2 - \frac{1}{60}y'y^4 - \frac{1}{180}y^6, \\ y'''y' &= \frac{1}{2}y''^2 - \frac{5}{3}y'^3 + \frac{5}{2}y'^2y^2 - \frac{1}{6}y^6, \\ y'''y' &= \frac{1}{2}y''^2 + 5y'^2y^2 - y^6. \end{aligned}$$

Pour $\eta = 3$, dans ce cas l'équation (5.3.12) est à points critiques mobiles car le problème posé précédemment n'admet pas de solution.

Pour $\eta = 4$

$$y'''y' = \frac{3}{4}y''^2 - 5y''y^3 + 12y'^2y^2 + y^6.$$

Pour $\eta = 5$

$$y'''y' = \frac{4}{5}y''^2 + \frac{3}{10}y''y'y + \frac{1}{10}y''y^3 - \frac{113}{36}y'^3 + \frac{7}{60}y'^2y^2 + \frac{1}{20}y'y^4 - \frac{1}{180}y^6.$$

Cette équation possède quatre familles

$$\begin{aligned} y_{01} = 1, y_{02} = 7, y_{03} = -8, y_{04} = -9, (r_{11}, r_{12}) &= (1, 3), \\ (r_{21}, r_{22}) &= (-7, 8), (r_{31}, r_{32}) = (-2, -3), (r_{41}, r_{42}) = (1, -8). \end{aligned}$$

Pour $\eta = \infty$

$$y'''y' = y''^2 - 3y''y^3 + \frac{15}{2}y'^2y^2 + \frac{1}{2}y^6.$$

Etudions les équations obtenues dans ce cas.

i. Étude de l'équation différentielle

$$y'''y' = \frac{1}{2}y''^2 + \frac{7}{10}y''y'y - \frac{3}{10}y''y^3 - \frac{793}{180}y'^3 + \frac{19}{12}y'^2y^2 - \frac{1}{60}y'y^4 - \frac{1}{180}y^6. \quad (5.3.26)$$

La solution générale de cette équation possède quatre familles de pôles simples qui sont

$$\begin{aligned} y_{01} = 1, y_{02} = -5, y_{03} = -9, y_{04} = 16, (r_{11}, r_{12}) = (1, 5), \\ (r_{21}, r_{22}) = (2, 7), (r_{31}, r_{32}) = (-2, 25), (r_{41}, r_{42}) = (-7, 100), \end{aligned}$$

et comme la condition d'indice correspondante à $r_{12} = 5$

$$Q_5^{(0)} \equiv -\frac{1111}{2250} \left(y_1^{(0)} \right)^5 \neq 0, \text{ avec } y_1^{(0)} \text{ arbitraire,}$$

n'est pas satisfaite, alors l'équation (5.3.26) est à points critiques mobiles.

ii. Étude de l'équation différentielle

$$y'''y' = \frac{1}{2}y''^2 - \frac{5}{3}y'^3 + \frac{5}{2}y'^2y^2 - \frac{1}{6}y^6. \quad (5.3.27)$$

Cette équation possède quatre familles

$$\begin{aligned} y_{01} = 1, y_{02} = -3, y_{03} = 4, y_{04} = -2, (r_{11}, r_{12}) = (2, 3), \\ (r_{21}, r_{22}) = (-2, 7), (r_{31}, r_{32}) = (12, -7), (r_{41}, r_{42}) = (2, 3), \end{aligned}$$

En dérivant (5.3.27), on trouve l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''' = -5y'y'' + 5y^2y'' + 5y'^2y - y^5, \\ y_{01} = 1, y_{02} = -3, y_{03} = 4, y_{04} = -2, (r_{11}, r_{12}) = (2, 3, 6), \\ (r_{21}, r_{22}, r_{23}) = (-2, 7, 6), (r_{31}, r_{32}, r_{33}) = (12, -7, 6), (r_{41}, r_{42}, r_{43}) = (2, 3, 6). \end{array} \right.$$

Cette équation n'a pas de points critiques mobiles voir [23], donc l'équation (5.3.27) est à point critiques fixes.

iii. Étude de l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''y' = \frac{1}{2}y''^2 + 5y'^2y^2 - y^6, \\ y_{01} = 1, y_{02} = -1, y_{03} = 2, y_{04} = -2, (r_{11}, r_{12}) = (2, 3), \\ (r_{21}, r_{22}) = (2, 3), (r_{31}, r_{32}) = (-3, 8), (r_{41}, r_{42}) = (-3, 8). \end{array} \right. \quad (5.3.28)$$

Par dérivation, nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''' = 10y^2y'' + 10y'^2y - 6y^5, \\ y_{01} = 1, y_{02} = -1, y_{03} = 2, y_{04} = -2, (r_{11}, r_{12}) = (2, 3, 6), \\ (r_{21}, r_{22}, r_{23}) = (2, 3, 6), (r_{31}, r_{32}, r_{33}) = (-3, 8, 6), (r_{41}, r_{42}, r_{43}) = (-3, 8, 6), \end{array} \right.$$

qui est stable (voir [9, 23, 49]). Par suite l'équation (5.3.27) est aussi stable.

iv. Étude de l'équation différentielle:

$$y'''y' = \frac{3}{4}y''^2 - 5y''y^3 + 12y'^2y^2 + y^6. \quad (5.3.29)$$

L'intégrale générale a quatre familles

$$\begin{aligned} y_{01} = 1, y_{02} = -1, y_{03} = i\sqrt{3}, y_{04} = -i\sqrt{3}, (r_{11}, r_{12}) = (1, 8), \\ (r_{21}, r_{22}) = (1, 8), (r_{31}, r_{32}) = (-3, -8), (r_{41}, r_{42}) = (-3, -8), \end{aligned}$$

et comme la condition de stabilité correspondante à l'indice $r_{22} = 8$

$$Q_8^{(0)} \equiv -\frac{190261071}{2000} \left(y_1^{(0)} \right)^8 \neq 0,$$

n'est pas satisfaite, alors l'équation (5.3.29) est à points critiques mobiles.

v. Étude de l'équation différentielle

$$y'''y' = y''^2 - 3y''y^3 + \frac{15}{2}y'^2y^2 + \frac{1}{2}y^6. \quad (5.3.30)$$

L'intégrale générale possède quatre familles

$$\begin{aligned} y_{01} = 1, y_{02} = -1, y_{03} = -2i, y_{04} = 2i, (r_{11}, r_{12}) = (1, 5), \\ (r_{21}, r_{22}) = (1, 5), (r_{31}, r_{32}) = (-4, -5), (r_{41}, r_{42}) = (-4, -5), \end{aligned}$$

et comme la condition de stabilité correspondante à l'indice $r_{22} = 5$

$$Q_5^{(0)} \equiv -768 \left(y_1^{(0)} \right)^5 \neq 0,$$

n'est pas satisfaite, alors l'équation de type (5.3.30) ne vérifie pas la propriété de Painlevé.

II.1.4. Cas où $\delta \neq 0$ et $\alpha \neq 0$

Sans perdre de généralité, on peut choisir $\delta = 1$. Par suite l'équation (5.3.3) prend la forme suivante:

$$y''' (y' + \alpha y^2) = \beta y''^2 + a_1 y'' y' y + a_2 y'' y^3 + a_3 y'^3 + a_4 y'^2 y^2 + a_5 y' y^4 + a_6 y^6. \quad (5.3.31)$$

Dans [48], Martynov a étudié le cas particulier où l'équation (5.3.31) est telle que y_0 soit racine double de l'équation (5.3.6).

L'équation indicelle associée à (5.3.31) est

$$(r + 1) \left((1 - \alpha y_0) r^2 + H(y_0) r + G(y_0) \right) = 0, \quad (5.3.32)$$

avec

$$\begin{cases} H(y_0) = a_2 y_0^2 + (7\alpha - a_1) y_0 + (4\beta - 7), \\ G(y_0) = a_5 y_0^3 - 2(a_4 + 2a_2) y_0^2 - 3(6\alpha - 2a_1 - a_3) y_0 - 8(2\beta - 3), \end{cases}$$

où y_0 est déterminé par l'équation

$$a_6 y_0^4 - a_5 y_0^3 + (a_4 + 2a_2) y_0^2 + (6\alpha - 2a_1 - a_3) y_0 + 2(2\beta - 3) = 0, \quad y_0 \neq 0. \quad (5.3.33)$$

A l'aide d'un changement de variable $t = \varphi(x)$, convenablement choisi, on peut supposer, sans perdre la généralité, que $y_0 = -1$; ainsi l'équation (5.3.32) est de la forme:

$$(r_1 + 1) \left((\alpha + 1) r_1^2 + M r_1 + N \right) = 0, \quad \text{et } y_0 = -1,$$

avec

$$M = a_2 + a_1 + 4\beta \quad \text{et} \quad N = a_5 + 2a_4 + 3a_3 + 4a_2 + 6a_1 + 16\beta - 6.$$

On a donc à distinguer deux cas: suivant que $(N, M) = (0, 0)$ ou $(N, M) \neq (0, 0)$.

II.1.4.1. Cas où $\alpha \neq 0$ et $(N, M) = (0, 0)$

Ce cas a été étudié par Martynov [48]. Plus exactement, il a étudié l'équation différentielle:

$$y''' = \beta \frac{(y'' - 2yy')^2}{y' - y^2} + a_1 y y'' + a_2 y'^2 + a_3 y^2 y' + a_4 y^4. \quad (5.3.34)$$

Mais il s'avère qu'il y a une erreur dans cette étude.

En effet, parmi toutes les équations trouvées figure l'équation:

$$y''' = \frac{(y'' - 2yy')^2}{y' - y^2} + 4yy'' - 2y'^2 \quad (5.3.35)$$

qui est à points critiques fixes alors que l'auteur affirme qu'elle est à points critiques mobiles.

Montrons que l'équation (5.3.35) est effectivement à points critiques fixes.

Lemme 5.1. [27] Soit l'équation

$$\frac{y'''}{y'} = \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 - \frac{1}{2} I(y) y'^2, \quad (5.3.36)$$

avec

$$I(y) = \frac{1 - n^2}{y^2} + \frac{1 - m^2}{(y - 1)^2} - \frac{1 + p^2 - m^2 - n^2}{y(y - 1)}$$

L'équation (5.3.36) est stable si et seulement si les nombres $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{p}$ sont des entiers, éventuellement nuls.

Faisons le changement de variable dans l'équation (5.3.35) :

$$2y = \frac{d}{dx} \left(\text{Log} \left(\frac{v'}{v(v-1)} \right) \right) = \frac{v''}{v'} - \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v-1} \right) v',$$

où $v(x)$ étant la solution générale de l'équation

$$v'v''' = \frac{3}{2}v''^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v^2} + \frac{1}{(v-1)^2} - \frac{1}{v(v-1)} \right) v'^4$$

ou de l'équation

$$- \left(\frac{v'''}{v'} - \frac{3}{2} \left(\frac{v''}{v'} \right)^2 \right) \frac{1}{v'^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v^2} + \frac{1}{(v-1)^2} - \frac{1}{v(v-1)} \right) \equiv \frac{1}{2} I(v), \quad (5.3.37)$$

où l'équation (5.3.37) est associée à une équation hypergéométrique.

A cet effet, prenons v comme variable indépendante au lieu de x et écrivons

$$v' = \frac{dv}{dx} \text{ et } x^* = \frac{dx}{dv}, \quad (*) = \frac{d}{dv},$$

l'équation (5.3.37) devient

$$\left(\frac{x^{***}}{x^*} - \frac{3}{2} \left(\frac{x^{**}}{x^*} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} I(v) \equiv \{x, v\}, \quad (5.3.38)$$

Pour intégrer l'équation différentielle (5.3.38), on fait le changement de variable

$$W(v) = \frac{x^{**}}{x^*},$$

et on obtient l'équation de Riccati

$$W^* = \frac{1}{2}W^2 + \frac{1}{2}I(v),$$

où le changement de variable

$$W(v) = \frac{-2w^*}{w}$$

conduit à l'équation linéaire du second ordre

$$w^{**} + \frac{1}{4}I(v)w = 0.$$

w est par suite déterminé par l'équation hypergéométrique

$$v(v-1)w^{**} + (2v-1)w^* + \frac{1}{4}w = 0, \quad (5.3.39)$$

(pour ce résultat voir Ince [35]). L'équation (5.3.39) possède la propriété de Painlevé, ainsi l'équation (5.3.35) possède aussi cette propriété.

II.1.4.2. Cas où $\alpha \neq 0$ et $(N, M) \neq (0, 0)$

Ce cas n'a pas été examiné dans [48]. Lorsque y_0 est racine simple de l'équation (5.3.33), alors on a en général quatre familles si $a_6 \neq 0$.

Remarque 5.3. L'équation (5.3.31) admet toujours une famille qui n'est pas maximale, alors on utilise cette famille pour trouver d'autres conditions nécessaires de stabilité.

Il est à rappeler qu'une famille maximale d'une équation différentielle est une famille dont le nombre d'indices est égal à l'ordre de l'équation différentielle en question.

Nous avons à considérer quatre cas:

1 : $a_6 = a_5 = 2a_2 + a_4 = 0$.

2 : $a_6 = a_5 = 0$ et $2a_2 + a_4 \neq 0$.

3 : $a_6 = 0$ et $a_5 \neq 0$.

4 : $a_6 \neq 0$.

II.1.4.2.1. Cas où $a_6 = a_5 = 2a_2 + a_4 = 0$

L'intégrale générale possède une seule famille non maximale de pôles simples de résidu y_0 . Pour que l'équation de type (5.3.31) vérifie la propriété de Painlevé, il est nécessaire qu'elle soit sous la forme suivante:

$$y''' (y' - y^2) = \frac{1}{2}y''^2 - 2y'^3, \quad y_{01} = -1 \text{ et } (r_1, r_2) = (-1, -2).$$

II.1.4.2.2. Cas où $a_6 = a_5 = 0$ et $2a_2 + a_4 \neq 0$

L'intégrale générale possède deux familles: une maximale et l'autre non maximale correspondante à $y_{01} = -1$. Pour que l'équation de type (5.3.31) vérifie la propriété de Painlevé, il est nécessaire qu'elle soit sous une des formes suivantes:

$$\begin{cases} y''' (y' - y^2) = \frac{1}{2}y''^2 - y''y'y + y''y^3 - 4y'^3 + 2y'^2y^2, \\ y_{01} = -1, y_{02} = 1, (r_{11}, r_{12}) = (-1, -4), (r_{21}, r_{22}) = (1, 4), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''' (y' - y^2) = y''^2 - 3y''y'y + y''y^3, \\ y_{01} = -1, y_{02} = 1, (r_{11}, r_{12}) = (-1, -2), (r_{21}, r_{22}) = (1, 2). \end{cases}$$

II.1.4.2.3. Cas où $a_6 = 0$ et $a_5 \neq 0$

Dans ce cas l'intégrale générale a trois familles de pôles simples mobiles (une non maximale correspondante à $y_{01} = -1$ et les autres maximales), les équations indicielles s'écrivent sous la forme:

$$(r_1 + 1) ((\alpha + 1)r_1^2 + Mr_1 + N) = 0, \quad \text{où } y_{01} = -1, \quad (5.3.40)$$

et

$$\begin{cases} (r_2 + 1) ((1 - \alpha y_{02}) r_2^2 + H(y_{02}) r_2 + G(y_{02})) = 0, & y_{02} \neq y_{01}, \\ (r_3 + 1) ((1 - \alpha y_{03}) r_3^2 + H(y_{03}) r_3 + G(y_{03})) = 0, & y_{03} \neq y_{01}, \end{cases} \quad (5.3.41)$$

où $y_{03} \neq y_{02} \neq y_{01}$. Nous avons d'après (5.3.33),

$$P(y_{02}) = \frac{G(y_{02})}{(1 - \alpha y_{02})}, \quad P(y_{03}) = \frac{G(y_{03})}{(1 - \alpha y_{03})},$$

d'où l'on en déduit que

$$\begin{cases} P(y_{02}) = -a_5 y_{02} (y_{02} - y_{03}), \\ P(y_{03}) = -a_5 y_{03} (y_{03} - y_{02}). \end{cases} \quad (5.3.42)$$

Ce qui nous donne la relation:

$$\frac{1}{P(y_{02})} + \frac{1}{P(y_{03})} = -\frac{1}{2(2\beta - 3)}. \quad (5.3.43)$$

Notre but consiste à trouver toutes les valeurs entières de $P(y_{02})$ et $P(y_{03})$ pour lesquelles l'équation (5.3.43) est vérifiée.

Après calcul, on trouve que pour que l'équation de type (5.3.31) vérifie la propriété de Painlevé, il est nécessaire qu'elle soit sous une des formes suivantes.

Pour $\eta = 2$

$$\begin{cases} y'''(y' - y^2) = \frac{1}{2}y''^2 - \frac{2}{3}y''y'y - \frac{8}{3}y''y^3 + \frac{10}{3}y'^3 + \frac{28}{3}y'^2y^2 - 8y'y^4, \\ y_{01} = -1, y_{02} = 1, y_{03} = -\frac{1}{2}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, -6), \\ (r_{21}, r_{22}) = (3, 4), (r_{31}, r_{32}) = (2, 3), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'''(y' - y^2) = \frac{1}{2}y''^2 - 2y''y'y - 4y''y^3 + 6y'^3 + 12y'^2y^2 - 8y'y^4, \\ y_{01} = -1, y_{02} = 1, y_{03} = -\frac{1}{2}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, -2), \\ (r_{21}, r_{22}) = (3, 4), (r_{31}, r_{32}) = (1, 6), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'''(y' - y^2) = \frac{1}{2}y''^2 - \frac{14}{3}y''y'y + \frac{28}{3}y''y^3 - \frac{38}{3}y'^3 - \frac{44}{3}y'^2y^2 + 16y'y^4, \\ y_{01} = -1, y_{02} = 1, y_{03} = \frac{1}{4}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, -6), \\ (r_{21}, r_{22}) = (3, -4), (r_{31}, r_{32}) = (1, 3), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'''(y' - y^2) = \frac{1}{2}y''^2 - \left(\frac{2n+3}{2n}\right)y''y'y + \left(\frac{6n+1}{2n^2}\right)y''y^3 - \frac{3}{n}y'^3 - \frac{3}{n^2}y'^2y^2 + \frac{2}{n^2}y'y^4, \\ y_{01} = -1, y_{02} = 2n, y_{03} = n, (r_{11}, r_{12}) = (-1, -4), \\ (r_{21}, r_{22}) = (-2, 2), (r_{31}, r_{32}) = (1, 2), \end{cases}$$

où n est un entier différent de zéro.

Pour $\eta = 3$, les indices de Fuchs ne sont pas entiers et les équations obtenues sont à points critiques mobiles.

Pour $\eta = 4$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''(y' - y^2) = \frac{3}{4}y''^2 - 6\frac{n-1}{n}y''y'y - 3\frac{2n-1}{n^2}y''y^3 + 3\frac{3n-4}{n}y'^3 + 3\frac{4n-1}{n^2}y'^2y^2 - \frac{3}{n^2}y'y^4, \\ y_{01} = -1, \ y_{02} = -n, \ y_{03} = n, \ (r_{11}, r_{12}) = (-1, 1), \\ (r_{21}, r_{22}) = (-3, -2), \ (r_{31}, r_{32}) = (1, 6), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''(y' - y^2) = \frac{3}{4}y''^2 - \frac{3(n+1)}{2n}y''y'y - 3\frac{(n+3)}{2n^2}y''y^3 + \frac{9}{n}y'^3 - 3\frac{(n-6)}{n^2}y'^2y^2 - \frac{9}{n^2}y'y^4, \\ y_{01} = -1, \ y_{02} = n, \ y_{03} = -\frac{1}{3}n, \ (r_{11}, r_{12}) = (-1, -2), \\ (r_{21}, r_{22}) = (3, 4), \ (r_{31}, r_{32}) = (1, 4), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''(y' - y^2) = \frac{3}{4}y''^2 - 2\frac{n+1}{n}y''y'y + 3\frac{2n+1}{n^2}y''y^3 + \frac{n-8}{n}y'^3 - \frac{15}{n^2}y'^2y^2 + \frac{9}{n^2}y'y^4, \\ y_{01} = -1, \ y_{02} = n, \ y_{03} = \frac{n}{3}, \ (r_{11}, r_{12}) = (-1, -3), \\ (r_{21}, r_{22}) = (-3, 2), \ (r_{31}, r_{32}) = (1, 2), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''(y' - y^2) = \frac{3}{4}y''^2 - 2y''y'y - \frac{1}{n^2}y''y^3 + y'^3 + \frac{5}{n^2}y'^2y^2 - \frac{3}{n^2}y'y^4, \\ y_{01} = -1, \ y_{02} = n, \ y_{03} = -n, \ (r_{11}, r_{12}) = (-1, -3), \\ (r_{21}, r_{22}) = (2, 3), \ (r_{31}, r_{32}) = (2, 3). \end{array} \right.$$

Pour $\eta = 5$, les indices de Fuchs ne sont pas entiers et les équations obtenues sont à points critiques mobiles.

Pour $\eta = \infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''(y' - y^2) = y''^2 - 7y'^3 + 12y'^2y^2 - 9y'y^4, \\ y_{01} = -1, \ y_{02} = -\frac{2}{3}, \ y_{03} = \frac{1}{3}, \ (r_{11}, r_{12}) = (-1, 1), \\ (r_{21}, r_{22}) = (-3, -2), \ (r_{31}, r_{32}) = (1, 3). \end{array} \right.$$

II.1.4.2.4. Cas où $a_6 \neq 0$

L'intégrale générale possède quatre familles, dont une est non maximale correspondante à $y_{01} = -1$ et les autres sont maximales, avec $y_{04} \neq y_{03} \neq y_{02} \neq y_{01}$. En utilisant la même méthode que ci-dessus, on obtient

$$(r_1 + 1)((\alpha + 1)r_1^2 + Mr_1 + N) = 0, \text{ où } y_{01} = -1, \quad (5.3.44)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} (r_2 + 1)((1 - \alpha y_{02})r_2^2 + H(y_{02})r_2 + G(y_{02})) = 0, \ y_{02} \neq y_{01}, \\ (r_3 + 1)((1 - \alpha y_{03})r_3^2 + H(y_{03})r_3 + G(y_{03})) = 0, \ y_{03} \neq y_{01}, \\ (r_4 + 1)((1 - \alpha y_{04})r_4^2 + H(y_{04})r_4 + G(y_{04})) = 0, \ y_{04} \neq y_{01}. \end{array} \right. \quad (5.3.45)$$

De l'équation (5.3.33), on déduit que:

$$P(y_{02}) = \frac{G(y_{02})}{(1 - \alpha y_{02})}, \ P(y_{03}) = \frac{G(y_{03})}{(1 - \alpha y_{03})}, \ P(y_{04}) = \frac{G(y_{04})}{(1 - \alpha y_{04})},$$

ce qu'on peut écrire aussi sous la forme

$$\begin{cases} P(y_{02}) = -a_6 y_{02} (y_{02} - y_{03}) (y_{02} - y_{04}), \\ P(y_{03}) = -a_6 y_{03} (y_{03} - y_{02}) (y_{03} - y_{04}), \\ P(y_{04}) = -a_6 y_{04} (y_{04} - y_{02}) (y_{04} - y_{03}). \end{cases}$$

De toutes ces équations, on obtient l'équation Diophantine suivante:

$$\frac{1}{P(y_{02})} + \frac{1}{P(y_{03})} + \frac{1}{P(y_{04})} = -\frac{1}{2(2\beta - 3)}. \quad (5.3.46)$$

Cette dernière équation permet de calculer $P(y_{0i})$, $i = 2, 3, 4$.

Après résolution de ce problème, on obtient que: pour que l'équation de type (5.3.31) vérifie la propriété de Painlevé, il est nécessaire qu'elle soit sous une des formes suivantes.

Pour $\eta = 2$

$$\begin{cases} y'''(y' - y^2) = \frac{1}{2}y''^2 + 15y''y'y - 32y''y^3 + \frac{736}{15}y'^3 - \frac{1536}{5}y'^2y^2 + \frac{2816}{5}y'y^4 - \frac{4096}{15}y^6, \\ y_{01} = -1, y_{02} = \frac{-1}{16}, y_{03} = \frac{-3}{8}, y_{04} = \frac{-5}{8}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, -4), \\ (r_{21}, r_{22}) = (1, 3), (r_{31}, r_{32}) = (-2, 4), (r_{41}, r_{42}) = (4, 6), \\ y'''(y' - y^2) = \frac{1}{2}y''^2 + 30y''y'y + 40y''y^3 - 51y'^3 - 51y'^2y^2 - 15y'y^4 - 25y^6, \\ y_{01} = -1, y_{02} = 1, y_{03} = \frac{4}{5}, y_{04} = \frac{-1}{5}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, 1), \\ (r_{21}, r_{22}) = (-2, 3), (r_{31}, r_{32}) = (1, 4), (r_{41}, r_{42}) = (-2, -3), \\ y'''(y' - y^2) = \frac{1}{2}y''^2 + \left(\frac{-39+33i}{5}\right)y''y'y + \left(\frac{28+24i}{5}\right)y''y^3 + \left(\frac{4+2i}{5}\right)y'^3 \\ + \left(\frac{24+12i}{5}\right)y'^2y^2 + \left(\frac{48-96i}{5}\right)y'y^4 - \left(\frac{64+32i}{5}\right)y^6, \\ y_{01} = -1, y_{02} = i, y_{03} = \frac{1+i}{4}, y_{04} = \frac{3+i}{4}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, 4), \\ (r_{21}, r_{22}) = (-2, 6), (r_{31}, r_{32}) = (1, 2), (r_{41}, r_{42}) = (-2, 3). \end{cases}$$

Pour $\eta = 3$

$$\begin{cases} y'''(y' - y^2) = \frac{2}{3}y''^2 + \frac{433}{60}y''y'y - \frac{13}{2}y''y^3 + \frac{1863}{20}y'^3 - \frac{1649}{4}y'^2y^2 + 540y'y^4 - 225y^6, \\ y_{01} = -1, y_{02} = \frac{-1}{30}, y_{03} = \frac{-8}{15}, y_{04} = \frac{-5}{6}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, 5), \\ (r_{21}, r_{22}) = (1, 3), (r_{31}, r_{32}) = (-6, 3), (r_{41}, r_{42}) = (-3, -15), \\ y'''(y' - y^2) = \frac{2}{3}y''^2 + \frac{511}{60}y''y'y - \frac{187}{30}y''y^3 + \frac{421}{4}y'^3 - \frac{6205}{12}y'^2y^2 + \frac{10982}{15}y'y^4 - \frac{4913}{15}y^6, \\ y_{01} = -1, y_{02} = \frac{-1}{34}, y_{03} = \frac{-8}{17}, y_{04} = \frac{-25}{34}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, 9), \\ (r_{21}, r_{22}) = (1, 3), (r_{31}, r_{32}) = (-6, 3), (r_{41}, r_{42}) = (-5, -9), \\ y'''(y' - y^2) = \frac{2}{3}y''^2 + \left(\frac{5+11\sqrt{3}}{13}\right)y''y'y - \left(\frac{23-9\sqrt{3}}{13}\right)y''y^3 - \left(\frac{35-21\sqrt{3}}{3}\right)y'^3 \\ + \left(\frac{321-181\sqrt{3}}{13}\right)y'^2y^2 - \left(\frac{219-123\sqrt{3}}{13}\right)y'y^4 + \left(\frac{51-29\sqrt{3}}{13}\right)y^6, \\ y_{01} = -1, y_{02} = \frac{3+4\sqrt{3}}{3}, y_{03} = \frac{-3-2\sqrt{3}}{3}, y_{04} = \frac{-15-5\sqrt{3}}{3}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, -2), \\ (r_{21}, r_{22}) = (3, 4), (r_{31}, r_{32}) = (1, 4), (r_{41}, r_{42}) = (-5, 6), \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''(y' - y^2) = \frac{2}{3}y''^2 - \left(\frac{26-3\sqrt{30}}{7}\right)y''y'y - \left(\frac{180+18\sqrt{30}}{7}\right)y''y^3 + \left(\frac{2350-1872\sqrt{30}}{399}\right)y'^3 \\ \quad + \left(\frac{14655+1644\sqrt{30}}{133}\right)y'^2y^2 + \left(\frac{2160+1035\sqrt{30}}{133}\right)y'y^4 - \left(\frac{10125+1485\sqrt{30}}{133}\right)y^6, \\ y_{01} = -1, y_{02} = \frac{3-\sqrt{30}}{9}, y_{03} = \frac{\sqrt{30}}{45}, y_{04} = \frac{12-\sqrt{30}}{9}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, -5), \\ (r_{21}, r_{22}) = (3, 5), (r_{31}, r_{32}) = (1, 4), (r_{41}, r_{42}) = (-3, 20). \end{array} \right.$$

Pour $\eta = 4$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''(y' - y^2) = \frac{3}{4}y''^2 + 9y''y'y + 18y''y^3 - \frac{39}{2}y'^3 - \frac{39}{2}y'^2y^2 - \frac{9}{2}y'y^4 - \frac{27}{2}y^6, \\ y_{01} = -1, y_{02} = 1, y_{03} = \frac{2}{3}, y_{04} = \frac{-1}{3}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, 1), \\ (r_{21}, r_{22}) = (-2, 3), (r_{31}, r_{32}) = (1, 3), (r_{41}, r_{42}) = (-2, -3), \\ y'''(y' - y^2) = \frac{3}{4}y''^2 + \left(\frac{38-57i}{13}\right)y''y'y - \left(\frac{18-144i}{13}\right)y''y^3 + \left(\frac{421-105i}{26}\right)y'^3 \\ \quad - \left(\frac{1479-1107i}{26}\right)y'^2y^2 + \left(\frac{873-2889i}{26}\right)y'y^4 + \left(\frac{27+1539i}{26}\right)y^6, \\ y_{01} = -1, y_{02} = \frac{-8+i}{15}, y_{03} = \frac{-1-3i}{5}, y_{04} = \frac{-2-i}{15}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, -3), \\ (r_{21}, r_{22}) = (-5, 2), (r_{31}, r_{32}) = (-5, 3), (r_{41}, r_{42}) = (1, 2), \\ y'''(y' - y^2) = \frac{3}{4}y''^2 + 4y''y'y - 12y''y^3 + \frac{71}{5}y'^3 - \frac{258}{5}y'^2y^2 + \frac{468}{5}y'y^4 - \frac{216}{5}y^6, \\ y_{01} = -1, y_{02} = \frac{-3-i\sqrt{5}}{6}, y_{03} = \frac{-3+i\sqrt{5}}{6}, y_{04} = \frac{-1}{6}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, -3), \\ (r_{21}, r_{22}) = (-4, 3), (r_{31}, r_{32}) = (-4, 3), (r_{41}, r_{42}) = (1, 2), \\ y'''(y' - y^2) = \frac{3}{4}y''^2 - 195y''y'y + 5472y''y^3 + \left(\frac{45819}{110}\right)y'^3 \\ \quad - \left(\frac{856197}{110}\right)y'^2y^2 - \left(\frac{5351103}{110}\right)y'y^4 + \left(\frac{5000211}{110}\right)y^6, \\ y_{01} = -1, y_{02} = \frac{-11}{171}, y_{03} = \frac{5}{171}, y_{04} = \frac{-2}{57}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, -8), \\ (r_{21}, r_{22}) = (-8, 1), (r_{31}, r_{32}) = (-4, -2), (r_{41}, r_{42}) = (1, 3). \end{array} \right.$$

Pour $\eta = 5$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''(y' - y^2) = \frac{4}{5}y''^2 - \frac{107}{145}y''y'y - \frac{2176}{145}y''y^3 - \frac{6298}{145}y'^3 + \frac{17312}{145}y'^2y^2 - \frac{11008}{145}y'y^4 + \frac{4096}{145}y^6, \\ y_{01} = -1, y_{02} = \frac{1}{16}, y_{03} = \frac{-14+i\sqrt{210}}{16}, y_{04} = \frac{-14-i\sqrt{210}}{16}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, 2), \\ (r_{21}, r_{22}) = (1, 3), (r_{31}, r_{32}) = (-14, -6), (r_{41}, r_{42}) = (-14, -6), \\ y'''(y' - y^2) = \frac{4}{5}y''^2 - \left(\frac{76-124\sqrt{5}}{55}\right)y''y'y + \left(\frac{464-412\sqrt{5}}{55}\right)y''y^3 + \left(\frac{142+426\sqrt{5}}{55}\right)y'^3 \\ \quad - \left(\frac{3202+454\sqrt{5}}{55}\right)y'^2y^2 + \left(\frac{536-30\sqrt{5}}{5}\right)y'y^4 - \left(\frac{3788-934\sqrt{5}}{55}\right)y^6, \\ y_{01} = -1, y_{02} = \frac{-119-21\sqrt{5}}{122}, y_{03} = \frac{-7-12\sqrt{5}}{61}, y_{04} = \frac{1-7\sqrt{5}}{122}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, 3), \\ (r_{21}, r_{22}) = (-7, -6), (r_{31}, r_{32}) = (-2, 3), (r_{41}, r_{42}) = (1, 2), \\ y'''(y' - y^2) = \frac{4}{5}y''^2 - \left(\frac{6737-1252\sqrt{35}}{2185}\right)y''y'y - \left(\frac{185962+22736\sqrt{35}}{2185}\right)y''y^3 - \left(\frac{32571+30812\sqrt{35}}{2185}\right)y'^3 \\ \quad + \left(\frac{858711+112868\sqrt{35}}{2185}\right)y'^2y^2 + \left(\frac{449652+100520\sqrt{35}}{2185}\right)y'y^4 - \left(\frac{897386+139608\sqrt{35}}{2185}\right)y^6, \\ y_{01} = -1, y_{02} = \frac{39-11\sqrt{35}}{118}, y_{03} = \frac{82-8\sqrt{35}}{59}, y_{04} = \frac{-7+5\sqrt{35}}{826}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, -7), \\ (r_{21}, r_{22}) = (5, 7), (r_{31}, r_{32}) = (-5, 42), (r_{41}, r_{42}) = (1, 3). \end{array} \right.$$

Pour $\eta = \infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''(y' - y^2) = y''^2 + (8 + 4i)y''y'y + (28 + 4i)y''y^3 - (21 + 11i)y'^3 \\ \quad + (-51 + 17i)y'^2y^2 + (75 - 25i)y'y^4 + (-79 + 3i)y^6, \\ y_{01} = -1, y_{02} = \frac{1+2i}{5}, y_{03} = \frac{-7+i}{25}, y_{04} = \frac{3-4i}{25}, (r_{11}, r_{12}) = (-1, 2), \\ (r_{21}, r_{22}) = (3, 4), (r_{31}, r_{32}) = (-2, -3), (r_{41}, r_{42}) = (1, 4), \\ y'''(y' - y^2) = y''^2 - \frac{5}{2}y''y'y - \frac{3}{4}y''y^3 + \frac{3}{2}y'^3 + \frac{3}{2}y'^2y^2 - \frac{5}{8}y'y^4 + \frac{1}{8}y^6, \\ y'''(y' - y^2) = y''^2 + 8y''y^3 - 6y'^3 - 6y'^2y^2 - 8y^6. \end{array} \right.$$

Etudions certaines de ces équations obtenues.

i. Étude de l'équation différentielle

$$y'''(y' - y^2) = y''^2 - \frac{5}{2}y''y'y - \frac{3}{4}y''y^3 + \frac{3}{2}y'^3 + \frac{3}{2}y'^2y^2 - \frac{5}{8}y'y^4 + \frac{1}{8}y^6. \quad (5.3.47)$$

L'intégrale générale a quatre familles de pôles simples mobiles

$$\begin{aligned} y_{01} = -1, y_{02} = -2, y_{03} = 2, y_{04} = -4, (r_{11}, r_{12}) &= \left(-1, \frac{-3}{2}\right), \\ (r_{21}, r_{22}) &= (1, 2), (r_{31}, r_{32}) = (2, 3), (r_{41}, r_{42}) = (-2, 3). \end{aligned}$$

L'équation (5.3.47) admet une famille non maximale dont l'indice est $r_{12} = \frac{-3}{2}$ non entier et donc (5.3.47) a nécessairement des points critiques mobiles. Il est à signaler que cette équation peut être ramenée à une forme plus simple en utilisant la changement de variable

$$y = \frac{w'}{w}.$$

Effectivement, après ce changement de variable, l'équation (5.3.47) devient

$$w''''(w''w + w'^2) - w'''(3w''w' + w''w) = 0,$$

et en intégrant, on obtient

$$w''' = k(w''w + w'^2),$$

où k est une constante arbitraire, pour k fixé cette dernière équation vérifie les conditions de stabilité indiquées dans [13].

ii. Étude de l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{l} y'''(y' - y^2) = y''^2 + 8y''y^3 - 6y'^3 - 6y'^2y^2 - 8y^6, \\ y_{01} = -1, y_{02} = 1, y_{03} = 2, y_{04} = -4, (r_{11}, r_{12}) = (-1, 1), \\ (r_{21}, r_{22}) = (1, 2), (r_{31}, r_{32}) = (2, 3), (r_{41}, r_{42}) = (-2, 3). \end{array} \right. \quad (5.3.48)$$

En effectuant de nouveau le changement de variable $y = \frac{w'}{w}$ dans (5.3.48), celle-ci se ramène alors à la forme

$$w''' = k(2w''w - 3w'^2), \quad (5.3.49)$$

où k est une constante arbitraire. L'équation (5.3.49) a été trouvée par Chazy pour k fixé, mais son étude n'a pas été achevée.

Remarque 5.4. En particulier, si $k = 1$ l'équation (5.3.49) devient

$$w''' = 2w''w - 3w'^2,$$

dont la solution générale de cette équation s'écrit sous la forme:

$$w = 3\frac{v''}{v'} - 2\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v-1}\right)v' = \frac{d}{dx} \ln\left(\frac{v'^3}{v^2(v-1)^2}\right),$$

où $v(x)$ est la solution générale de l'équation

$$w''' = \frac{3}{2}\frac{w''^2}{w'} - \frac{1}{2}\left[\frac{8}{9}\left(\frac{1}{w^2} + \frac{1}{(w-1)^2}\right) - \frac{7}{9}\frac{1}{w(w-1)}\right]w'^3.$$

II.2. Cas où $(p, q) = (-2, -9)$

Considérons l'équation (5.1.1) telle que son intégrale générale admette deux familles de pôles doubles mobiles. Nous allons appliquer la méthode expliquée au cas précédent à cette équation.

Supposons donc $a_i = 0, (i = 1, \dots, 6)$. En posant dans l'équation (5.1.1)

$$x = x_0 \rightarrow \varepsilon x, \quad y \rightarrow \varepsilon^{-2}y, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

on obtient

$$y'''y' = \beta y''^2 + a_7 y''y^2 + a_8 y'^2y + a_9 y^4 + \varepsilon(\dots). \quad (5.3.50)$$

Lorsque ε tend vers 0, nous obtenons l'équation réduite

$$y'''y' = \beta y''^2 + a_7 y''y^2 + a_8 y'^2y + a_9 y^4. \quad (5.3.51)$$

Posons

$$y \simeq y_0 (x - x_0)^{(-2)} + \hat{\beta} (x - x_0)^{(r-2)}. \quad (5.3.52)$$

En portant (5.3.52) dans (5.3.51), on obtient l'équation indicelle associée à l'équation (5.3.51):

$$(r+1)(2r^2 + (a_7 y_0 + 12\beta - 20)r - (6a_7 + 4a_8)y_0 + 96 - 72\beta) = 0,$$

où y_0 est solution de l'équation

$$a_9 y_0^2 + (6a_7 + 4a_8) y_0 - 48 + 36\beta = 0,$$

Nous avons à distinguer deux cas: suivant que $a_9 = 0$ ou $a_9 \neq 0$.

II.2.1. Cas où $a_9 = 0$

L'intégrale générale a une seule famille de pôles doubles mobiles. On obtient le résultat suivant:

Pour que l'équation (5.3.51) soit à points critiques fixes, il est nécessaire qu'elle s'écrive sous une des formes suivantes.

Pour $\eta = -2$

$$y'''y' = \frac{3}{2}y''^2 + 6y''y^2 - \frac{21}{2}y'^2y, \quad y_{01} = 1, \quad (r_1, r_2) = (-3, 1).$$

Pour $\eta = 2$

$$\begin{aligned} y'''y' &= \frac{1}{2}y''^2 - 18y''y^2 + \frac{69}{2}y'^2y, \quad y_{01} = 1, \quad (r_1, r_2) = (1, 15), \\ y'''y' &= \frac{1}{2}y''^2 - 2y''y^2 + \frac{21}{2}y'^2y, \quad y_{01} = 1, \quad (r_1, r_2) = (3, 5), \\ y'''y' &= \frac{1}{2}y''^2 + 30y''y^2 - \frac{75}{2}y'^2y, \quad y_{01} = 1, \quad (r_1, r_2) = (-5, -3). \end{aligned}$$

Pour $\eta = 3$

$$\begin{aligned} y'''y' &= \frac{2}{3}y''^2 - 14y''y^2 + 27y'^2y, \quad y_{01} = 1, \quad (r_1, r_2) = (1, 12), \\ y'''y' &= \frac{2}{3}y''^2 - 2y''y^2 + 9y'^2y, \quad y_{01} = 1, \quad (r_1, r_2) = (3, 4), \\ y'''y' &= \frac{2}{3}y''^2 - 36y''y^2 + 28y'^2y, \quad y_{01} = 1, \quad (r_1, r_2) = (-6, -2), \\ y'''y' &= \frac{2}{3}y''^2 + 26y''y^2 - 33y'^2y, \quad y_{01} = 1, \quad (r_1, r_2) = (-4, -3). \end{aligned}$$

Les équations obtenues pour les autres valeurs de $\eta = 4, 5$ et ∞ sont à points critiques mobiles, car les indices ne sont pas tous des entiers distincts.

II.2.2. Cas où $a_9 \neq 0$

L'intégrale générale a deux familles de pôles doubles mobiles. De même, on obtient le résultat suivant:

Pour que l'équation (5.3.51) soit à points critiques fixes, il est nécessaire qu'elle s'écrive sous une des formes suivantes

Pour $\eta = -2$

$$\begin{cases} y'''y' = \frac{3}{2}y''^2 + 2y''y^2 - 4y'^2y - 2y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = -3, (r_{11}, r_{12}) = (-2, 2), (r_{21}, r_{22}) = (-2, 6), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'''y' = \frac{3}{2}y''^2 + 12y''y^2 - 24y'^2y + 18y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = \frac{1}{3}, (r_{11}, r_{12}) = (-2, -3), (r_{21}, r_{22}) = (-2, 1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'''y' = \frac{3}{2}y''^2 - \frac{1}{6}y^4, \\ y_{01} = 6, y_{02} = -6, (r_{11}, r_{12}) = (-2, 3), (r_{21}, r_{22}) = (-2, 3). \end{cases}$$

Pour $\eta = 2$

$$\begin{cases} y'''y' = \frac{1}{2}y''^2 + 10y'^2y - 10y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = 3, (r_{11}, r_{12}) = (2, 5), (r_{21}, r_{22}) = (-3, 10), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'''y' = \frac{1}{2}y''^2 + 9y'^2y - 6y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = 5, (r_{11}, r_{12}) = (3, 4), (r_{21}, r_{22}) = (-5, 12), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'''y' = \frac{1}{2}y''^2 - 4y''y^2 + 14y'^2y - 2y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = 15, (r_{11}, r_{12}) = (2, 7), (r_{21}, r_{22}) = (-5, 42). \end{cases}$$

Pour $\eta = 3$

$$\begin{cases} y'''y' = \frac{2}{3}y''^2 + 2y''y^2 + 6y'^2y - 12y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = 2, (r_{11}, r_{12}) = (2, 3), (r_{21}, r_{22}) = (-2, 6). \end{cases}$$

Pour $\eta = 4$

$$\begin{cases} y'''y' = \frac{3}{4}y''^2 - 3y''y^2 + 10y'^2y - y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = 21, (r_{11}, r_{12}) = (2, 5), (r_{21}, r_{22}) = (-5, 42). \end{cases}$$

Pour $\eta = 5$

$$\begin{cases} y'''y' = \frac{4}{5}y''^2 - \frac{18}{5}y''y^2 + 10y'^2y + \frac{4}{5}y^4, \\ y_{01} = 1, y_{02} = -24, (r_{11}, r_{12}) = (2, 5), (r_{21}, r_{22}) = (-30, -8). \end{cases}$$

Pour $\eta = \infty$, l'équation obtenue est à points critiques mobiles, car les indices ne sont pas tous des entiers distincts.

Etudions l'équation suivante:

$$y'''y' = \frac{1}{2}y''^2 + 10y'^2y - 10y^4.$$

Par dérivation, nous obtenons

$$\begin{cases} y'''' = 20yy'' + 10y'^2 - 40y^3, \\ y_{01} = 1, y_{02} = 3, (r_{11}, r_{12}, r_{13}) = (2, 5, 8), (r_{21}, r_{22}, r_{23}) = (-3, 8, 10). \end{cases}$$

Cette équation est stable et la solution $y(x)$ est une fonction elliptique [9, 23].

II.3. Cas où $(p, q) = (-3, -12)$

Le raisonnement utilisé dans l'étude des cas $p = -1, -2$, s'étend au cas $p = -3$. Il y a une seule famille de pôles triples. Supposons $a_i = 0$, ($i = 1...9$) et $a_{10} \neq 0$. En remplaçant x, y respectivement par $x_0 + \varepsilon x, \varepsilon^{-3}y$ dans (5.1.1) et en faisant $\varepsilon = 0$, nous obtenons l'équation réduite

$$y'''y' = \beta y''^2 + a_{10}y'y^2. \quad (5.3.53)$$

En posant

$$y \simeq y_0 (x - x_0)^{(-3)} + \hat{\beta} (x - x_0)^{(r-3)} + \dots$$

dans l'équation (5.3.53), on obtient l'équation indicelle

$$(r+1)(r^2 + (8\beta - 13)r - 48\beta + 60)(\beta - \frac{5}{4}) = 0, \quad (5.3.54)$$

avec y_0 solution de l'équation

$$a_{10}y_0 - 48\beta + 60 = 0. \quad (5.3.55)$$

Des équations (5.3.54) et (5.3.55), on déduit que l'équation indicelle (5.3.54) admet deux solutions

$$y_0 = \frac{12(4\beta - 5)}{a_{10}}, \quad r_{1,2} = \frac{13 - 8\beta \pm \sqrt{64\beta^2 - 16\beta - 71}}{2},$$

qui doivent être entières. Par suite, pour que l'équation (5.3.53) soit à points critiques fixes, il est nécessaire que $\beta = \frac{5}{4}$ ou $\beta = \frac{3}{2}$.

Si $\beta = \frac{5}{4}$, i.e. $\eta = -4$, les indices de Fuchs entiers sont $r_1 = 0$ qui correspond à y_0 arbitraire et $r_2 = 3$. Nous déduisons alors que l'équation (5.3.53) possède des solutions à points critiques mobiles (β est fixé).

Si $\beta = \frac{3}{2}$, i.e. $\eta = -2$, l'équation différentielle à indices de Fuchs entiers est:

$$\begin{cases} y'''y' = \frac{3}{2}y''^2 + 12y'y^2, \\ y_0 = 1, (r_1, r_2) = (-3, 4). \end{cases}$$

II.4. Cas où $(p, q) = (-4, -15)$

IL reste donc à étudier le cas où l'on a $a_i = 0$, ($i = 1...10$) et $a_{11} \neq 0$.

En reprenant le même raisonnement que précédemment, donc en remplaçant x, y respectivement par $x_0 + \varepsilon x, \varepsilon^{-4}y$ dans (5.1.1) et en faisant $\varepsilon = 0$, nous obtenons l'équation réduite

$$y'''y' = \beta y''^2 + a_{11}y^3. \quad (5.3.56)$$

Posons

$$y \simeq y_0 (z - z_0)^{(-4)} + \hat{\beta} (z - z_0)^{(r-4)} + \dots$$

La substitution de cette valeur de y dans l'équation (5.3.56) montre que l'indice r doit être solution de

$$(r + 1) (r^2 + (10\beta - 16)r - 100\beta + 120) (\beta - \frac{6}{5}) = 0, \quad (5.3.57)$$

avec y_0 solution de l'équation

$$a_{11}y_0 + 400\beta - 480 = 0. \quad (5.3.58)$$

Des équations (5.3.57) et (5.3.58), on déduit que l'équation indicieille (5.3.57) admet deux solutions

$$y_0 = -\frac{80(5\beta - 6)}{a_{11}}, \quad r_{1,2} = 8 - 5\beta \pm \sqrt{25\beta^2 + 20\beta - 56}.$$

qui doivent être entières. Donc pour que l'équation (5.3.56) soit à points critiques fixes, il est nécessaire que $\beta = \frac{6}{5}$ ou $\beta = \frac{3}{2}$.

Si $\beta = \frac{6}{5}$, i.e. $\eta = -5$, les racines de l'équation indicieille (5.3.57) sont $r_1 = 0$ et $r_2 = 4$, l'indice zéro ne correspond donc pas à y_0 arbitraire, ainsi y possède des points critiques mobiles.

Si $\beta = \frac{3}{2}$, i.e. $\eta = -2$, l'équation différentielle à indices de Fuchs entiers est

$$\begin{cases} y'''y' = \frac{3}{2}y''^2 - 120y^3, \\ y_0 = 1, \quad (r_1, r_2) = (-5, 6). \end{cases}$$

On notera que l'intégrale générale de l'équation précédente a une seule famille de pôles mobiles d'ordre quatre.

Remarque 5.5. *Les résultats obtenus dans ce chapitre sont appliqués à l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires “ les équations du type de Korteweg – de Vries⁽¹⁾ (équation K. d. V)” (voir N. A. Kudryashov dans [40, 2010]).*

5.4 Questions et perspectives

Pour terminer ce chapitre, signalons quelques problèmes qui ne sont pas encore résolus. Il reste à prouver si les équations obtenues sont effectivement à points critiques fixes. On peut aussi étudier l'équation (5.1.1) complétée par un second membre.

⁽¹⁾C'est une équation d'évolution non-linéaire qui possède des solutions du type ondes solitaires (ondes de translation).

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

Nous nous sommes intéressés aux équations à points critiques fixes de types:

$$y''' = a_1 \frac{y''y'}{y} + a_2 \frac{y'^3}{y^2} + B(x, y) y'' + C(x, y) (y')^2 + D(x, y) y' + E(x, y), \quad (4.1.1)$$

et

$$\begin{aligned} y''' (\delta y' + \alpha y^2) = & \beta y''^2 + a_1 y'' y' y + a_2 y'' y^3 + a_3 y'^3 + a_4 y'^2 y^2 + a_5 y' y^4 \\ & + a_6 y^6 + a_7 y'' y^2 + a_8 y'^2 y + a_9 y^4 + a_{10} y' y^2 + a_{11} y^3. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Nous avons établi la liste de toutes les classes d'équations de types (4.1.1) ou (5.1.1) qui peuvent être à points critiques fixes. Parmi ces classes d'équations certaines ont déjà été étudiées par d'autres auteurs, alors que d'autres sont établies pour la première fois, elles ont fait l'objet de publications ou de communications citées dans la bibliographie. Il est à signaler que certaines équations obtenues ont été intégrées à l'aide des fonctions classiques ou des transcendentes de Painlevé; on ne rencontre donc aucune transcendente nouvelle; et cela confirme la conjecture de Chazy, suivant laquelle les équations de Painlevé du troisième ordre n'introduisent pas des transcendentes nouvelles. L'étude de ces équations en question est donc complète, alors que d'autres équations obtenues n'ont pas été complètement étudiées; leur étude constitue une de nos perspectives.

Perspectives

Nos perspectives dans la recherche sont:

1. Compléter l'étude des équations obtenues pour conclure si effectivement elles sont à points critiques fixes.
2. Etudier l'équation (5.1.1) dans un cas plus général, en prenant le coefficient de y''' égal à $\delta y' + \alpha y^2 + \rho y + \gamma$.
3. Etudier les équations de type (5.1.1) avec un second membre complété par d'autres termes de degrés ou d'ordres plus petits plus précisément (E4).
4. Compléter l'algorithme du test de Painlevé proposé par R. Conte, A. Fordy, et A. Pickering.

Annexe

Sommaire

A. Motivation de l'étude de l'équation (4.1.1)	115
B. Équations de Riccati	121
B.1 Équation linéaire du second ordre	122
B.2 Résolvante schwarziennne du troisième ordre	123
C. Fonctions et intégrales elliptiques	124
C.1 Fonctions de $\wp$ Weierstrass	125
C.2 Intégrales elliptiques	127
D. Étude de l'équation P_I d'après Painlevé	129

A. Motivation de l'étude de l'équation (4.1.1)

Dans cette première partie, nous exposons quelques objets qui motivent l'étude de l'équation (4.1.1).

1. Si $a_2 = 0$, l'équation (4.1.1) se réduit à l'équation (4.3.3) que l'on rencontre en physique (voir [18,2007]).
2. Martynov a obtenu plusieurs classes d'équations stables du troisième ordre de type (4.1.1), mais il n'a pas déterminé tous les coefficients de (4.1.1).
3. Pour chacune des cinq valeurs de a_1 , Kozulin et Lukashevitch [40,1988] ont trouvé une équation du type (4.3.3) sans points critiques mobiles.

Remarque A. Les études faites ci-dessous sont liées à celles du Mémoire [6].

Nous rappellerons tout d'abord les résultats suivants données explicitement dans mon Mémoire cité.

Proposition A. Pour que l'équation (4.1.1) soit à points critiques fixes, il est nécessaire qu'elle s'écrive sous une des formes suivantes.

1. cas où $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$

$$\begin{aligned}
 yy''' &= y'y''; \\
 yy''' &= y'y'' + y^2y'' - \frac{2}{9}y^3y'; \\
 yy''' &= y'y'' + y^2y'' + 2yy'^2; \\
 yy''' &= y'y'' + y^2y'' + 2y^3y'; \\
 yy''' &= y'y'' + y^3y'; \\
 yy''' &= y'y'' + y^2y'' + 4y^3y' - 2y^5; \\
 yy''' &= y'y'' + y^2y'' + \frac{1}{4}y^3y' - \frac{1}{8}y^5.
 \end{aligned}$$

2. cas où $a_1 = 2$ et $a_2 = 0$

$$\begin{aligned}
 yy''' &= 2y'y''; \\
 yy''' &= 2y'y'' + y^2y'' - yy'^2; \\
 yy''' &= 2y'y'' + y^2y'' - yy'^2 + y^3y'; \\
 yy''' &= 2y'y'' + y^3y'; \\
 yy''' &= 2y'y'' + 2y^2y'' - 3yy'^2 + 2y^3y' - y^5; \\
 yy''' &= 2y'y'' + y^2y'' - \frac{3}{2}yy'^2 + 2y^3y' - \frac{1}{2}y^5; \\
 yy''' &= 2y'y'' + 2y^5.
 \end{aligned}$$

3. cas où $a_1 = 3$ et $a_2 = 0$

$$\begin{aligned} yy''' &= 3y'y''; \\ yy''' &= 3y'y'' + (2-n)y^2y'' - 4yy'^2 + 2ny^3y'; \\ yy''' &= 3y'y'' - ny^2y'' + 2ny^5; \\ yy''' &= 3y'y'' + (3-n)y^2y'' - 6yy'^2 + 3ny^3y' - ny^5; \\ yy''' &= 3y'y'' + (1-n)y^2y'' - 2yy'^2 + ny^3y' + ny^5; \end{aligned}$$

4. cas où $a_1 = 3$ et $a_2 = -2$

$$\begin{aligned} y'''y^2 &= 3yy'y'' - 2y'^3; \\ y'''y^2 &= 3yy'y'' - 2y'^3 + y^3y''. \end{aligned}$$

5. cas où $a_1 = \frac{3n-2}{n}$ et $a_2 = -2\frac{n-1}{n}$

$$\begin{aligned} y'''y^2 &= \frac{3n-2}{n}yy'y'' - 2\frac{n-1}{n}y'^3; \\ y'''y^2 &= \frac{3n-2}{n}yy'y'' - 2\frac{n-1}{n}y'^3 + \frac{n+2}{n}y^3y'' - \frac{2}{n}y^4y'; \\ y'''y^2 &= 2yy'y'' - y'^3 + y^3y'' + y^2y'^2; \\ y'''y^2 &= 2yy'y'' - y'^3 + 3y^4y'; \\ y'''y^2 &= \frac{7}{3}yy'y'' - \frac{4}{3}y'^3 + \frac{2}{3}y^3y'' + y^2y'^2 + \frac{1}{3}y^4y'; \\ y'''y^2 &= 5yy'y'' - 4y'^3 + (1-n)y^3y'' + (n-2)y^2y'^2 + ny^4y'; \\ y'''y^2 &= 5yy'y'' - 4y'^3 - ny^3y'' + ny^2y'^2 + ny^6. \end{aligned}$$

6. cas où $a_1 = 3\frac{n-1}{n}$ et $a_2 = -\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$

$$\begin{aligned} y'''y^2 &= 3\frac{n-1}{n}yy'y'' - \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}y'^3; \\ y'''y^2 &= 3\frac{n-1}{n}yy'y'' - \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}y'^3 + \frac{n+3}{n}y^3y'' + \frac{3}{n^2}y^2y'^2 - 3\frac{(n+1)}{n^2}y^4y' + \frac{1}{n^2}y^6; \\ y'''y^2 &= \frac{12}{5}yy'y'' - \frac{36}{25}y'^3 + \frac{3}{5}y^3y'' + \frac{163}{150}y^2y'^2 + \frac{26}{75}y^4y' + \frac{1}{150}y^6; \\ y'''y^2 &= \frac{3}{2}yy'y'' - \frac{3}{4}y'^3 + \frac{3}{2}y^3y'' + \frac{3}{2}y^2y'^2 - \frac{3}{4}y^4y'; \\ y'''y^2 &= 6yy'y'' - 6y'^3 - ny^3y'' + 3\frac{n}{2}y^2y'^2 + \frac{n}{2}y^6. \end{aligned}$$

7. cas où $a_1 = \frac{3n-1}{n}$ et $a_2 = -\frac{(n-1)(2n+1)}{n^2}$

$$\begin{aligned} y'''y^2 &= \frac{3n-1}{n}yy'y'' - \frac{(n-1)(2n+1)}{n^2}y'^3; \\ y'''y^2 &= \frac{3n-1}{n}yy'y'' - \frac{(n-1)(2n+1)}{n^2}y'^3 + \frac{n+1}{n}y^3y'' - \frac{3}{n^2}y^2y'^2 - \frac{n-3}{n^2}y^4y' - \frac{1}{n^2}y^6; \\ y'''y^2 &= \frac{5}{2}yy'y'' - \frac{5}{4}y'^3 + \frac{1}{2}y^3y'' - \frac{1}{4}y^2y'^2 + \frac{9}{4}y^4y' - \frac{3}{4}y^6; \\ y'''y^2 &= \frac{14}{5}yy'y'' - \frac{44}{25}y'^3 + \frac{1}{5}y^3y'' + \frac{49}{50}y^2y'^2 + \frac{18}{25}y^4y' + \frac{3}{50}y^6; \\ y'''y^2 &= 4yy'y'' - 2y'^3 - ny^3y'' + \frac{n}{2}y^2y'^2 + \frac{3n}{2}y^6; \\ y'''y^2 &= 4yy'y'' - 2y'^3 + (2-n)y^3y'' + \left(\frac{n}{2} - 4\right)y^2y'^2 + 2ny^4y' - \frac{n}{2}y^6; \\ y'''y^2 &= 4yy'y'' - 2y'^3 + (2-n)y^3y'' + \left(\frac{n}{2} - 4\right)y^2y'^2 + ny^4y' + \frac{n}{2}y^6. \end{aligned}$$

8. cas où $a_1 = 3$ et $a_2 = -2\frac{n^2-1}{n^2}$

$$\begin{aligned} y'''y^2 &= 3yy'y'' - 2\frac{n^2-1}{n^2}y'^3; \\ y'''y^2 &= 3yy'y'' - 2\frac{n^2-1}{n^2}y'^3 + y^3y'' - \frac{6}{n^2}y^2y'^2 + \frac{6}{n^2}y^4y' - \frac{2}{n^2}y^6; \\ y'''y^2 &= 3yy'y'' - \frac{3}{2}y'^3 + \frac{3}{2}y^4y'; \\ y'''y^2 &= 3yy'y'' - \frac{3}{2}y'^3 + y^3y'' - y^2y'^2 + \frac{1}{2}y^4y'. \end{aligned}$$

Il est à signaler une contradiction apparente entre un résultat du Mémoire que nous avons cité et un résultat de Kozulin et Lukashevich. Dans [40, 1988]. Les auteurs ont donné toutes les valeurs que peuvent prendre les coefficients a_1 et a_2 pour que l'équation (4.3.3) soit à points critiques fixes; plus précisément, ils ont montré que: pour que l'équation de type (4.3.3) soit à points critiques fixes, il est nécessaire qu'elle s'écrive sous une des formes suivantes:

$$\begin{aligned} y^2y''' &= 3y''y'y - 2y'^3 + b_1y^3y'' + c_0y^2(y')^2 + d_2y^4y' + e_4y^6; \\ y^2y''' &= \frac{3n-2}{n}y''y'y - 2\frac{n-1}{n}y'^3 + b_1y^3y'' + c_0y^2(y')^2 + d_2y^4y' + e_4y^6; \\ y^2y''' &= 3\frac{n-1}{n}y''y'y - \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}y'^3 + b_1y^3y'' + c_0y^2(y')^2 + d_2y^4y' + e_4y^6; \quad (A.1) \\ y^2y''' &= \frac{3n-1}{n}y''y'y - \frac{(n-1)(2n+1)}{n^2}y'^3 + b_1y^3y'' + c_0y^2(y')^2 + d_2y^4y' + e_4y^6; \\ y^2y''' &= 3y''y'y - 2\frac{(n^2-1)}{n^2}y'^3 + b_1y^3y'' + c_0y^2(y')^2 + d_2y^4y' + e_4y^6; \end{aligned}$$

Ils ont affirmé aussi que: pour que les équations du type (A.1) soient à points critiques fixes, il *suffit* qu'elles s'écrivent sous une des formes suivantes:

$$\begin{aligned} y^2y''' &= 3yy'y'' - 2y'^3 + y^3y''; \\ y^2y''' &= \frac{3n-2}{n}yy'y'' - 2\frac{n-1}{n}y'^3 + \frac{n+2}{n}y^3y'' + -\frac{2}{n}y^4y'; \\ y'''y^2 &= 3\frac{n-1}{n}yy'y'' - \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}y'^3 + \frac{n+3}{n}y^3y'' + \frac{3}{n^2}y^2y'^2 - 3\frac{(n+1)}{n^2}y^4y' + \frac{1}{n^2}y^6; \quad (A.2) \\ y^2y''' &= \frac{3n-1}{n}yy'y'' - \frac{(n-1)(2n+1)}{n^2}y'^3 + \frac{n+1}{n}y^3y'' - \frac{3}{n^2}y^2y'^2 - \frac{n-3}{n^2}y^4y' - \frac{1}{n^2}y^6; \\ y^2y''' &= 3yy'y'' - 2\frac{(n^2-1)}{n^2}y'^3 + y^3y'' - \frac{6}{n^2}y^2y'^2 + \frac{6}{n^2}y^4y' - \frac{2}{n^2}y^6. \end{aligned}$$

où n est un nombre différent de 0. Mais il s'avère que pour certaines valeurs de n , certaines des équations précédentes sont à points critiques mobiles. Exemples: la deuxième équation est à points critiques mobiles si $n = -3$, la troisième équation est à points critiques mobiles si $n = -2$, la quatrième équation est à points critiques mobiles si $n = -4$ et la cinquième équation est à points critiques mobiles si $n = -5$ ou $n = 5$. Les équations énumérées admettent des indices de Fuchs doubles.

i. Étude de l'équation différentielle

$$y^2 y''' = 3 \frac{n-1}{n} y y' y'' - \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} y'^3 + \frac{n+3}{n} y^3 y'' + \frac{3}{n^2} y^2 y'^2 - 3 \frac{(n+1)}{n^2} y^4 y' + \frac{1}{n^2} y^6, \quad (A.3)$$

$$y_{01} = -1, \quad y_{02} = -1 - n, \quad y_{03} = -2n - 1, \quad (r_{11}, r_{12}) = (1, 2),$$

$$(r_{21}, r_{22}) = (1, -1 - n), \quad (r_{31}, r_{32}) = (-2, -2n - 1).$$

Concernant les autres valeurs de n , en effectuant dans l'équation (A.3) le changement de fonction $y = -\frac{u'}{u}$, on trouve

$$u'''' = 3 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{u''' u''}{u'} - \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \frac{u''^3}{u'^2}.$$

En posant par la suite

$$u' = v^n,$$

on aboutit à l'équation

$$v''' = 0.$$

Par intégration, on obtient

$$v = C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$

où les zéros x_0 de v sont des singularités de u' lorsque n est négative. Pour que u' ne contient pas le terme $\frac{1}{x-x_0}$, c'est-à-dire pour que u et par conséquent y soit de type de Painlevé, il faut et il suffit que $n > 0$.

On pouvait aussi remarquer que la condition d'indice en $r = -1 - n$ est

$$Q_{(-1-n)} \equiv C u_1^{-1-n} \neq 0, \quad \text{où } C \neq 0 \text{ et } n > 0,$$

on déduit donc que pour $n \neq 0$, l , avec $l \in \mathbb{N}$, l'équation (A.3) est à points critiques mobiles. ce qui est contraire à l'affirmation de Kozulin et Lukashevich [40, 1988].

ii. Étude de l'équation différentielle

$$y^2 y''' = \frac{3n-1}{n} y y' y'' - \frac{(n-1)(2n+1)}{n^2} y'^3 + \frac{n+1}{n} y^3 y'' - \frac{3}{n^2} y^2 y'^2 - \frac{n-3}{n^2} y^4 y' - \frac{1}{n^2} y^6, \quad (A.4)$$

$$y_{01} = -1, \quad y_{02} = -1 - n, \quad y_{03} = 2n - 1, \quad (r_{11}, r_{12}) = (1, 2),$$

$$(r_{21}, r_{22}) = (3, -1 - n), \quad (r_{31}, r_{32}) = (6, 2n - 1).$$

On verra, comme précédemment, pour que l'équation (A.4) soit à points critiques fixes il faut et il suffit que $n \neq -3l - 1$, 0 où $l \in \mathbb{N}$.

En effet, le changement de fonction $y = -\frac{u'}{u}$ transforme (A.4) en

$$u'''' = \frac{3n-1}{n} \frac{u'''u''}{u'} - \frac{(n-1)(2n+1)}{n^2} \frac{u''^3}{u'^2}.$$

Si l'on pose $u' = v^n$, l'équation (A.4) prend la forme

$$vv''' = 2v'v''.$$

D'où par intégration $v'' = C_1 v^2$. Par conséquent

$$v = C_2 x + C_3 \text{ si } C_1 = 0,$$

ou

$$v = b(x - x_0)^{-2} + \sum_{i=1}^{+\infty} b_{6i+4} (x - x_0)^{6i+4},$$

où b, x_0, b_4, C_1, C_2 et C_3 sont des constantes avec x_0 un pôle double de v . Donc $u' = v^n$ ne contient pas le terme en $\frac{1}{x-x_0}$, ce qui prouve que u et par conséquent y sont de type de Painlevé si et seulement si $n = -3l - 1, 0$ où $l \in \mathbb{N}$.

On pourrait arriver à ce résultat, d'une autre manière. En effet, la condition d'indice en $r = -1 - n$ est

$$Q_{(-1-n)} \equiv C u_3^m \neq 0, \text{ où } C \neq 0, m = \frac{-1-n}{3} \text{ et } m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}.$$

Par conséquent, si $n = -3m - 1, 0$, où $m = 0, 1, \dots$, l'équation (A.4) est à points critiques mobiles. ce qui est contraire à l'affirmation de Kozulin et Lukashevich [40, 1988].

iii. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} y^2 y''' &= 3y y' y'' - 2 \frac{(n^2-1)}{n^2} y'^3 + y^3 y'' - \frac{6}{n^2} y^2 y'^2 + \frac{6}{n^2} y^4 y' - \frac{2}{n^2} y^6, \\ y_{01} &= -1, y_{02} = -1 - n, y_{03} = n - 1, (r_{11}, r_{12}) = (1, 2), \\ (r_{21}, r_{22}) &= (4, -1 - n), (r_{31}, r_{32}) = (4, n - 1). \end{aligned} \tag{A.5}$$

En posant $y = -\frac{u'}{u}$, puis $u' = v^n$, on obtient

$$vv''' = 3v'v''.$$

Par intégration, on aboutit à l'équation

$$v'' = C_1 v^3.$$

Par conséquent $v = C_1x + C_2$ si $C_1 = 0$ ou

$$v = b(x - x_0)^{-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} b_{4i+3} (x - x_0)^{4i+3},$$

où b, x_0, b_3, C_1 et C_2 sont des constantes avec x_0 un pôle simple de v . Ainsi $u' = v^n$ ne contient pas le terme en $\frac{1}{x-x_0}$, c'est-à-dire, pour que u et par conséquent y soit de type de Painlevé, il faut et il suffit que $n \neq 0, \pm(4l+1), l \in \mathbb{N}$.

On pouvait aussi remarquer que la condition d'indice en $r = -1 - n$ est

$$Q_{4m} \equiv Cu_4^m \neq 0, \text{ où } m \geq 2 \text{ et } n = -1 - 4m.$$

alors, pour $n = 0, \pm(4m+1), m \in \mathbb{N}$, l'équation (A.5) est à points critiques mobiles, ce qui contredit l'affirmation de Kozulin et Lukashevich [40, 1988].

iv. Étude de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} y^2 y''' &= \frac{3n-2}{n} y y' y'' - 2 \frac{n-1}{n} y'^3 + \frac{n+2}{n} y^3 y'' + -\frac{2}{n} y^4 y', \\ y_{01} &= -1, y_{02} = -1 - n, (r_{11}, r_{12}) = (1, 2), (r_{21}, r_{22}) = (2, -1 - n). \end{aligned} \quad (A.6)$$

En intégrant l'équation précédente par rapport à x , on obtient

$$y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{y'^2}{y} + \left(1 + \frac{2}{n}\right) y y' - \frac{1}{n} y^3 + C y. \quad (A.7)$$

Les changements de fonctions successifs $y = -\frac{u'}{u}$, donnent

$$u'''' = \frac{3n-2}{n} \frac{u''' u''}{u'} - 2 \frac{n-1}{n} \frac{u''^3}{u'^2}.$$

Si l'on pose $u' = v^n$, l'équation précédente prend la forme

$$v v''' = v' v''. \quad (A.8)$$

En intégrant (A.8), on obtient $v'' = C v$, $v = C_1 x + C_2$ si $C = 0$, où les zéros de v peut être des singularités de u . Ainsi $u' = v^n$ ne contient pas le terme $\frac{1}{x-x_0}$, c'est-à-dire, pour que u et par conséquent y soit de type de Painlevé, il faut et il suffit que $n \neq 0, -2l-1$, avec $l \in \mathbb{N}$.

On peut le vérifier autrement en remarquant que la condition d'indice en $r = -1 - n$ est

$$Q_{(-1-n)} \equiv Cu_2^{\frac{-1-n}{2}} \neq 0, \text{ où } C \neq 0 \text{ et } n \text{ impaire.}$$

Par suite, pour $n = 0, -2l-1$, l'équation (A.6) est à points critiques mobiles, ce qui est contraire à l'affirmation de Kozulin et Lukashevich [40, 1988].

B. Équations de Riccati

Parmi les équations différentielles, l'équation de Riccati est l'une des plus remarquables car “ la simple connaissance d'une solution particulière permet son intégration complète ”. A côté de cela, on remarque qu'il est facile de la rattacher à l'équation linéaire homogène du second ordre et à la dérivée schwarzienne du troisième ordre.

Dans cette deuxième annexe, on établit ces deux propriétés sur les équations différentielles de type de Riccati⁽¹⁾ suivante:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x). \quad (B.1)$$

où P , Q et R sont trois fonctions de x .

On peut la voir comme une équation différentielle $y' = F(y, x)$ dont on aurait développée la fonction $F(y, x)$ en y à l'ordre deux.

Dans ce cas particulier, on pouvait reconnaître que les conditions nécessaires exprimées sont suffisantes et l'intégrale générale est la fonction

$$y = \frac{cf_1 + f_2}{c\varphi_1 + \varphi_2},$$

dont les seuls points critiques ou transcendants de $y(x)$ sont les points analogues de f_1 , f_2 , φ_1 , φ_2 , qui sont fixes. Si maintenant, nous voulons qu'il n'existe pas non plus de points critiques fixes, autrement dit si nous voulons que l'intégrale soit uniforme, nous avons à traiter une question d'une autre nature et qui est loin d'être résolue.

Par exemple, étant donnée une équation (B.1) quelconque, on sait qu'on la ramène à la forme:

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + Q_1y + R_1, \quad (B.2)$$

en changeant y en $\frac{-y}{P}$, puis à la forme

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + M(x) = 0, \quad (B.3)$$

en changeant y en $y + \frac{Q_1}{2}$.

Nous terminons cette partie en mettant (B.1) sous la forme linéaire du second ordre et sous la forme schwarzienne du troisième ordre.

⁽¹⁾les relations entre l'équation de Riccati, les équations linéaires du second ordre et les Schwarziennes, très utilisées dans l'uniformisation.

B.1 Équation linéaire du second ordre

Si l'on pose

$$y = \frac{z'}{z}, \quad (B.4)$$

l'équation (B.3) devient:

$$z'' + M(x)z = 0, \quad (B.5)$$

équation linéaire et homogène et à une solution de (B.5) correspond une solution de (B.3) d'après (B.4). Inversement, montrons qu'à trois solutions de (B.3) correspond algébriquement une solution de l'équation (B.5).

Soit z_1, z_2 deux solutions de (B.5), les expressions $y_1 = \frac{z'_1}{z_1}, y_2 = \frac{z'_2}{z_2}$ sont deux solutions de (B.3), et l'intégrale générale de (B.5) peut s'écrire, d'après (B.4),

$$y_3 = \frac{z'_1 + cz'_2}{z_1 + cz_2} = \frac{y_1 z_1 + c y_2 z_2}{z_1 + c z_2}. \quad (B.6)$$

D'autre part, z_1 et z_2 vérifient la relation

$$z_1 z_2'' - z_2 z_1'' = 0, \text{ ou bien } z_1 z_2' - z_2 z_1' = \alpha,$$

α désignant une constante, ce qui s'écrit encore:

$$z_1 z_2 = \frac{\alpha}{y_2 - y_1}. \quad (B.7)$$

Si on tire z_1 et z_2 des équations (B.6) et (B.7), il vient:

$$\frac{-1}{\alpha c} z_1^2 = \frac{y_2 - y_3}{(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}, \quad \frac{-c}{\alpha} z_2^2 = \frac{y_3 - y_1}{(y_2 - y_3)(y_2 - y_1)},$$

et comme $\frac{1}{\sqrt{-\alpha c}} z_1, \sqrt{\frac{-c}{\alpha}} z_2$ sont encore des intégrales de (B.5), on voit qu'à trois intégrales de (B.3), y_1, y_2, y_3 correspond l'intégrale z_1 de (B.5) :

$$z_1^2 = \frac{y_2 - y_3}{(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}. \quad (B.8)$$

Le rapport de deux intégrales de (B.5) peut se mettre sous la forme:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{y_2 - y_3}{y_3 - y_1}. \quad (B.9)$$

Ceci posé, partons d'une équation de Riccati quelconque (B.1). Si son intégrale générale est uniforme, il en est même des coefficients P, Q et R , comme on le voit aussitôt en éliminant c entre l'intégrale générale (B.2) et sa dérivée. Il suit de là que la transformée (B.3) a aussi son intégrale uniforme. Considérons seulement le cas où la fonction $M(x)$ est rationnelle.

Si l'équation (B.5) a son intégrale uniforme, il en est de même de l'équation (B.3), mais la réciproque n'est pas vraie; quand l'intégrale de (B.3) est uniforme, les égalités (B.8) et (B.9) nous montrent seulement que l'intégrale générale $z(x)$ de (B.5) est de la forme:

$$z = \sqrt{G(x)}(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2), \quad (B.10)$$

φ_1 et φ_2 étant ainsi que $G(x)$ des fonctions uniformes, α et β deux constantes. Inversement, si $z(x)$ est de la forme (B.10), l'intégrale de (B.3) est uniforme.

Par conséquent, la théorie de l'équation de Riccati est équivalente à la théorie des équations différentielles linéaires et homogènes du second ordre. Elle n'admet donc pas de points critiques mobiles.

B.2 Résolvante schwarziennne du troisième ordre

Utilisons la notation

$$f = -\frac{1}{2}\left(Q - \frac{P'}{P}\right), \quad z = Py + f.$$

Si maintenant, nous introduisons les fonctions ϕ et ψ déterminées par les égalités

$$\phi'Z^2 = 1, \quad \psi'F^2 = 1 \quad \text{où} \quad z = \frac{Z'}{Z}, \quad f = \frac{F'}{F}$$

avec

$$\psi' \exp\left(\int Q dx\right) = P,$$

nous obtenons l'équation différentielle du troisième ordre

$$\{\phi, x\} = \{\psi, x\} + 2PR, \quad (B.11)$$

dans laquelle le premier membre et le premier terme du second membre représentent symboliquement, selon la notation de F. Klein, les schwarziennes:

$$\frac{\phi'''}{\phi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\phi''}{\phi'}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\psi'''}{\psi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)^2,$$

des deux fonctions ϕ et ψ .

Nous dirons que l'équation (B.11) est la résolvante schwarziennne complète du troisième ordre de l'équation de Riccati (B.1).

C. Fonctions et intégrales elliptiques

A cause du fait que l'équation elliptique intervient dans les théories les plus diverses, les fonctions elliptiques occupent une place importante en analyse. Un des ouvrages les plus détaillés sur les fonctions elliptiques est de Briot et Bouquet [9].

Dans cette troisième annexe, nous allons présenter quelques définitions et certaines propriétés de la théorie des fonctions elliptiques.

Soient w_1 et w_2 deux nombres complexes, $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants (c'est-à-dire tels que w_2 n'est pas nulle et que le quotient $\frac{w_1}{w_2}$ ne soit pas réel ou ce qui revient au même que la partie imaginaire $\operatorname{Im}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)$ du rapport $\frac{w_1}{w_2}$ n'est pas nulle).

On considère le réseau

$$\Lambda = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2 = \{w \equiv mw_1 + nw_2, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\},$$

c'est un sous-groupe discret de $\mathbb{C}$ et il forme un ensemble de parallélogrammes.

Définition C.1. On appelle parallélogramme fondamental engendré par w_1 et w_2 tout parallélogramme Π de sommets d'affixes $x_0, x_0 + \alpha w_1, x_0 + \alpha w_2, x_0 + \alpha w_1 + \beta w_2$ avec $x_0 \in \mathbb{C}, 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Autrement dit, il est défini par le compact

$$\Pi = \{x_0 + \alpha w_1 + \beta w_2 : x_0 \in \mathbb{C}, \alpha, \beta \in [0, 1]\}.$$

Définition C.2. La fonction elliptique est une fonction méromorphe définie sur le plan complexe, uniforme, non-constante et doublement périodique (une période est réelle, l'autre imaginaire). Elle est définie à partir de l'inverse d'une intégrale elliptique et permet la résolution de nombreuses équations différentielles.

Proposition C.1. Il n'existe pas de fonction elliptique y non constante qui soit holomorphe sur $\mathbb{C}$. Autrement dit, toute fonction elliptique y n'ayant pas de pôles est une constante.

Remarque C.1. On déduit de la proposition précédente qu'une fonction elliptique non constante possède au moins un pôle dans le parallélogramme fondamental.

Proposition C.2. Toute fonction elliptique non constante a un nombre fini de pôles et un nombre fini de zéros dans un parallélogramme fondamental.

Remarque C.2. Comme remarque, notons que le nombre de zéros et de pôles d'une fonction elliptique non constante est dénombrable.

Proposition C.3. Soit y une fonction elliptique et désignons par $b_1, \dots, b_m$ les pôles de y (chaque pôle étant compté avec multiplicité), alors

$$\sum_{k=1}^m \operatorname{Rés}(y, b_k) = 0.$$

Remarque C.3. Notons que d'après la remarque (C.2) et la proposition précédente, il n'existe pas de fonction elliptique de premier ordre, i.e., une fonction elliptique ne peut pas avoir un pôle simple dans un parallélogramme fondamental. Elle doit avoir au moins deux pôles simples ou au moins un pôle non simple dans un parallélogramme fondamental.

Proposition C.4. Soit y une fonction elliptique non constante. Désignons par $a_1, \dots, a_l$ les zéros de y de multiplicité $n_1, \dots, n_l$ respectivement et par $b_1, \dots, b_m$ les pôles de y de multiplicité $p_1, \dots, p_m$ respectivement. Alors

$$\sum_{k=1}^l n_k = \sum_{k=1}^m p_k.$$

Autrement dit, le nombre de zéros d'une fonction elliptique non constante est égal au nombre de ses pôles dans le parallélogramme fondamental.

Proposition C.5. Soit y une fonction elliptique. Désignons par $a_1, \dots, a_l$ les zéros de y de multiplicité $n_1, \dots, n_l$ respectivement et par $b_1, \dots, b_m$ les pôles de y de multiplicité $p_1, \dots, p_m$ respectivement. Alors

$$\sum_{k=1}^l n_k a_k - \sum_{k=1}^m p_k b_k = \text{période}.$$

C.1 Fonctions de $\wp$ Weierstrass

La plus importante classe de fonctions elliptiques est celle des fonctions elliptiques de Weierstrass $\wp$ et toute fonction elliptique peut être exprimée à l'aide de celles-ci. Les fonctions de Weierstrass interviennent souvent lors de la résolution de problèmes théoriques.

La fonction $\wp$ de Weierstrass relative à Λ est définie par

$$\wp(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(x - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right). \quad (C.1)$$

La série (C.1) converge normalement sur tout compact ne rencontrant pas le réseau Λ , i.e., sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \Lambda$.

Proposition C.6. $\wp(x)$ est une fonction elliptique de périodes w_1 et w_2 . Elle est paire et admet des pôles doubles aux points $w \in \Lambda$, dont le résidu est nul. En outre, $\wp'(x)$ est une fonction doublement périodique et elle est impaire.

Proposition C.7. Le développement de $\wp(x)$ en série de Laurent au voisinage du point 0 est donné par

$$\wp(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (2k+1) G_{2k+2} x^{2k} \quad (C.2)$$

où

$$G_k \equiv G_k(\Lambda) = \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{\omega^k}, \quad k \geq 4$$

et $G_k = 0$ pour k impaire.

Définition C.3. Les deux nombres complexes g_2 et g_3 définis par les séries (dites d'Eisenstein):

$$\begin{aligned} g_2 &= 60 \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \\ g_3 &= 140 \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{\omega^6}, \end{aligned}$$

s'appellent invariants (de Weierstrass) de la fonction $\wp(x)$.

Proposition C.8. La fonction $\wp(x)$ est solution de l'équation différentielle:

$$(\wp'(x))^2 = 4(\wp(x))^3 - g_2\wp(x) - g_3, \quad (C.3)$$

où g_2 et g_3 sont les invariants de la fonction $\wp(x)$.

Définition C.4. [9] La fonction elliptique $\wp$ est définie par l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = g\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

dans laquelle g et k (module) sont deux paramètres arbitraires.

La fonction elliptique $\wp$ est une fonction impaire, ayant pour périodes

$$\omega = 4 \int_0^1 \frac{dy}{g\Delta y}, \quad \omega' = -2 \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{g\Delta y},$$

et pour abréger, nous représenterons le radical par Δy .

Dans la théorie des équations de type de Painlevé, la fonction elliptique joue un rôle important. Donc nous allons expliquer ses propriétés. Elle admet dans chaque parallélogramme deux zéros $x = 0$, $x = \frac{\omega}{2}$, et deux infinis simples $x = \frac{\omega'}{2}$, $x = \frac{\omega + \omega'}{2}$; elle passe deux fois par chaque valeur, et les deux valeurs de x , qui correspondent à une même valeur de la fonction, présentent une somme constante et égale à $\frac{\omega}{2}$. Elle jouit des propriétés suivantes:

$$\wp\left(\frac{\omega}{2} + x\right) = -\wp(x), \quad \wp\left(\frac{\omega'}{2} + x\right) = \frac{1}{k\wp(x)}.$$

On a d'ailleurs

$$\wp\left(\frac{\omega}{4}\right) = 1, \quad \wp\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k}.$$

Une solution particulière de

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3),$$

où $(g_2, g_3, e_k) \in \mathbb{C}^3$, admet un pôle à l'origine

$$\wp(x, g_2, g_3) = x^{-2} + \frac{g_2}{20}x^2 + \frac{g_3}{28}x^4 + O(x^6).$$

Remarque C.4. En posant $y = \wp(x)$, l'équation (C.3) s'écrit

$$(\wp'(x))^2 = 4(\wp(x))^3 - g_2\wp(x) - g_3,$$

Or $x \longrightarrow 0$ lorsque $y \longrightarrow \infty$, donc

$$x = \int_{\infty}^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}} \quad (C.4)$$

Autrement dit, la fonction $y = \wp(x)$ s'obtient par inversion de l'intégrale (C.4) (dite intégrale elliptique sous forme de Weierstrass). Réciproquement, si le polynôme $4y^3 - g_2y - g_3$ n'a pas de zéros multiples (i.e. son discriminant est non nul: $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$), alors l'inversion de l'intégrale (C.4) conduit à la fonction $\wp(x)$ de Weierstrass.

C.2 Intégrales elliptiques

On appelle en général intégrale elliptique, une intégrale de la forme

$$\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx, \quad (C.5)$$

où R est une fonction rationnelle à deux variables et $P(x)$ un polynôme de degré 3 ou 4 avec des racines simples. En général, cette intégrale ne s'exprime pas au moyen de fonctions élémentaires c'est-à-dire celles que l'on obtient en appliquant à la variable x les opérations algébriques (addition, soustraction, multiplication, division) en nombre fini, ainsi que les fonctions logarithmiques, trigonométriques et leurs inverses. Nous verrons que les fonctions inverses de ces intégrales elliptiques sont des fonctions elliptiques.

Définition C.5 Une intégrale elliptique est l'intégrale d'une fonction rationnelle $R(x, y)$ dans laquelle y^2 est un polynôme de degré 3 ou 4 en x . En général, une intégrale elliptique ne peut s'exprimer avec des fonctions élémentaires.

En particulier, on a

$$\wp'^2 = P(\wp), \quad (C.6)$$

avec P polynôme de degré 4 (ou seulement 3 si $\wp$ a un pôle double). On peut construire une telle fonction $\wp$ de deux manières:

1. ou bien comme une série (Liouville, Eisenstein). Par exemple la fonction

$$\frac{1}{x^2} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(x - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \quad (C.7)$$

où Λ est un sous-groupe discret de $\mathbb{C}$ engendré par deux nombres complexes indépendants. La série converge normalement sur tout compact du plan $\mathbb{C}$.

2. ou bien en résolvant l'équation différentielle (C.6). Par exemple Weierstrass définit la fonction $\wp(x)$ comme la solution de

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y^3 - g_2y - g_3, \text{ où } g_2, g_3 \text{ constantes.} \quad (C.8)$$

ayant un pôle pour $x = 0$; elle ne diffère que par une constante de la fonction (C.7).

La *réduction d'une intégrale elliptique* consiste:

– en premier lieu, à décomposer cette intégrale en la somme de diverses intégrales calculables par voie élémentaire et d'un certain nombre, aussi restreint que possible, d'*intégrales elliptiques types*;

– en second lieu, à ramener ces dernières intégrales, par des changements de variable appropriés, à des *formes canoniques* usuelles qui ont été étudiées systématiquement et pour lesquelles on possède notamment *des tables numériques*.

Considérons la fonction rationnelle $R(x, y)$, ramenée au quotient de deux polynômes entiers; nous pouvons remplacer au numérateur et au dénominateur y^2 par P , y^3 par Py , y^4 par P^2 , et ainsi de suite; la fonction rationnelle s'écrit alors

$$R(x, y) = \frac{A + By}{C + Dy},$$

A, B, C, D désignent quatre polynômes entiers en x . Si nous multiplions haut et bas par $C - Dy$ et remplaçons encore y^2 par $P(x)$, nous écrivons

$$R(x, y) = \frac{F + Gy}{H},$$

F, G, H désignent de nouveaux polynômes entiers en x . La fonction est rationnelle, donc intégrable par voie élémentaire; l'intégrale elliptique (C.5) se présente ainsi comme la somme de l'intégrale d'une fonction rationnelle de x , et de la nouvelle intégrale elliptique

$$\int \frac{Gy}{H} dx = \int \frac{Gy^2}{Hy} dx = \int \frac{M}{H\sqrt{P(x)}} dx.$$

Une première étape préliminaire est ainsi franchie dans la voie de la réduction (on renvoie à [7, 46, 63] pour plus de détail).

D. Étude de l'équation PI d'après Painlevé

L'équation traitée:

$$y'' = 6y^2 + x, \quad (P_I)$$

paraît la plus simple de celles qui sont dépourvues de points critiques mobiles.

Pour démontrer que la solution générale de l'équation différentielle (P_I) est méromorphe, Painlevé utilise la transformation

$$y = \frac{1}{z^2}, \quad y' = \frac{-1}{z^3} - \frac{xz}{2} - \frac{z^2}{2} + uz^3. \quad (D)$$

On a pour z et u les équations différentielles

$$\begin{cases} y' = 1 + \frac{xz^4}{4} + \frac{z^5}{4} - \frac{uz^6}{2}, \\ u' = \frac{x^2z}{8} + \frac{3xz^2}{8} + \frac{z^3}{4} - \left(\frac{5z^4}{4} + xz^3 \right) u + \frac{3}{2}u^2z^5. \end{cases}$$

Ce système différentiel admet une solution holomorphe telle que $z(a) = 0$, $u(a) = h$, a et h désignant des valeurs arbitraires. En portant cette solution dans la transformation (D) , on obtient la solution qui admet un pôle mobile a et dépend d'une autre arbitraire h .

La transformation est obtenue comme suit.

On détermine d'abord une série

$$y = \frac{c}{(x-a)^2} + c'(x-a)^{-1} + c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots,$$

qui satisfait formellement à l'équation (P_I) et on trouve

$$c = 1, \quad c' = c_0 = c_1 = 0, \quad c_2 = -a/10, \quad c_3 = -1/6, \quad c_4 = h, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = a^2/300, \quad \dots$$

On transforme la solution formelle en une série de puissances de $x-a$ dont les coefficients sont indépendants de a (mais dépendent naturellement de x). On obtient ainsi pour y et y' les séries formelles

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{(x-a)^2} - \frac{x}{10}(x-a)^2 + \frac{-1}{15}(x-a)^3 + h(x-a)^4 + \dots, \\ y' &= \frac{-2}{(x-a)^3} - \frac{1}{5}x(x-a) - \frac{3}{10}(x-a)^2 + 4h(x-a)^3 + \dots \end{aligned}$$

Eliminant $x-a$ entre ces deux relations, on obtient une relation formelle

$$y' = -\frac{2}{\varepsilon z^3} - \frac{x\varepsilon z}{2} - \frac{z^2}{2} + 7h\varepsilon z^3 + \dots, \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

où la variable z est liée à y par $y = z^{-2}$. La transformation est obtenue en supprimant du second membre les termes des degrés supérieurs à 3 et en prenant $\varepsilon = 1$, $h = u$.

On obtient ainsi pour u et z des équations différentielles dont les seconds membres sont des fonctions holomorphes pour $x = a$, $z = 0$, $u = h$. On en conclut la convergence de la solution formelle et l'existence du pôle mobile.

Communications

- Y. Adjabi, A. Kessi. “*Non polynomial third-order equations which pass the Painlevé test*”, International Conference SYD’02, 18 – 23, October 2008, Algiers, Boussaâda, Algeria.
- A. Kessi, Y. Adjabi. “*A class of nonlinear third-order ordinary differential equations which pass the Painlevé test*”, The Fifth International Conference on Differential and functional Differential Equations , DFDE.2008, Moscow, Russia, August 17–24, 2008. (<http://www.google.com, dfde2008.mi.ras.ru/out/program>).
- Y. Adjabi, A. Kessi. “*Non-polynomial Third Order Differential Equations which Pass the Painlevé Test*”, International Conference SYD, 23 – 25, November 2007, Annaba, Algeria.
- A. Kessi, Y. Adjabi. “*Third order differential Equations without movable critical points*”, International Conference, “Analytic Methods of Analysis and Differentials Equations”, (AMADE-2006), 13 – 19th of September 2006, Minsk, Belarus.
- A. Kessi, Y. Adjabi. “*Equations différentielles du 3ème Ordre à points critiques fixes*”, Colloque International, Systèmes Dynamiques: Passé, Présent, Avenir. U.S.T.H.B. 28 Septembre – 01 Octobre 2003, Alger, Algeria.
- A. Kessi, Y. Adjabi. “*Third order differential equations with fixed critical points*”, International Conference, “Analytic Methods of Analysis and Differentials Equations”, (AMADE-2003), 04 – 09th of September 2003, Minsk, Belarus.
- A. Kessi, Y. Adjabi. “*On non linear ordinary differentials equations with fixed critical points*”, Second International Congress of Non Linear Dynamic Analysis, 03 – 08th of Juin 2002, Moscow.

Bibliographie

- [1] M. J. Ablowitz, A. Ramani and H. Segur. “ *A Connection between Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of P-type I*”, J. Math. Phys., **21**(1980), 715 – 721.
- [2] M. J. Ablowitz, A. Ramani and H. Segur. “ *A Connection between Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of P-type II*”, J. Math. Phys., **21**(1980), 1006 – 1015.
- [3] Y. Adjabi and A. Kessi. “ *Non-polynomial Third Order Differential Equations which Pass the Painlevé Test* ”, Publication dans la Revue Sciences, Technologies et Développement R. S. T. D., vol. **01** (2010) Nr. **6**, 133 – 147..
- [4] Y. Adjabi, J. Frad , A. Kessi and U. Mugan. “ *Third order differential equations with fixed critical points* ”, Applied Mathematics and Computation. Edition ELSEVIER, vol. **208** (2009) , Issue: 1, 1 February, 238 – 248.
- [5] Y. Adjabi and A. Kessi. “ *THIRD ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH FIXED CRITICAL POINTS* ”, Annals: The proceeding of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (NASB). **12** (2004), Nr. 2, 12 – 17, [http://www. Google Scholar.com](http://www.Google Scholar.com).
- [6] Y. Adjabi. Thèse de Magister, “ *Equations différentielles du troisième ordre à points critiques fixes*”, soutenue le 07 Octobre 2003 à l’USTHB (Directeur: A. Kessi).
- [7] J.V. Armitage and W.F. Eberlein. “ *Elliptic Functions* ”, London Mathematical Society Student Texts vol. **67**, Cambridge University Press 2006.
- [8] P. Boutroux. “ *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*”. Gauthier-Villars Paris, 1908.

-
- [9] Briot et Bouquet. “ *Intégrations des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques*”, Journal de l'Ecole Polytechnique, Tom. *XXI*.
 - [10] F. J. Bureau., “ *Differential equations with fixed critical points*”, Annali di Matematica pura ed applicata **64**(1964)., 229 – 364; **66** (1964), 1 – 116.
 - [11] F. J. Bureau. “ *Equations Différentielles du Second Ordre en Y et du Second Degré en $\ddot{Y}$ dont l'intégrale générale est à points critiques fixes*”, Annali di Mat., **91**(1972), 163 – 281.
 - [12] F. J. Bureau, A.Garcet et J.Goffar. “ *Transformées algébriques des équations du second ordre dont l'intégrale générale est à points critiques fixes*”, Annali di Mat., (1971).
 - [13] C. Carton-Lebrun. “ *Conditions nécessaires pour que les solutions des certaines équations différentielles soient à points critiques isolés fixes. Bull.de la classe des Sciences de l'Ac. Royale de Belgique 5^e série*, **LV** (1969) , 52 – 536.
 - [14] J. Chazy. “ *Sur les équations différentielles du troisième et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale à ses points critiques fixés*”, Acta Math., **34**(1911), 317 – 385. Table des matières commentée avec index, R. Conte (1991), 6 pages.
 - [15] A.V. Chichurin. “ *About some equations of the third order with six poles*”, Buletinul acdemiei Tiinte republicii moldova mathematica, **42** (2003), Nr. 2, 59 – 68.
 - [16] P. A. Clarkson. “ *Painlevé Equations — Nonlinear Special Functions*”, J. Comp. Appl. Math. **153**(2003)., 127 – 140.
 - [17] R. Conte and M. Musette. “ *The Painlevé Handbook* ”, Springer, 2008.
 - [18] R. Conte, C. Rogers and W. K. Schief. “ *Painlevé structure of a multi-ion electrodiffusion system*”, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. vol. **40** (2007), Nr. 48, *F* 1031 – *F* 1040.
 - [19] R. Conte. (Editor), “ *The Painleve property, One century later (la propriété de Painlevé, un siècle après)*”, C.R.M. series in Mathematical Physics. Verlag, New York, Springer, 1999.
 - [20] R. Conte. “ *The Painleve approach to nonlinear ordinary differential equation*”, Springer, 1998.

-
- [21] R. Conte, A. Fordy and A. Pickering. “ *A perturbative Painlevé approach to nonlinear differential equations*”, Physica D, **69**(1993), 33 – 58.
 - [22] C. M. Cosgrove, G. Scoufis. “ *Painlevé Classification of a Class of Differential Equations of the Second Order and Second Degree*”, Stud. Appl. Math., vol.**88** (1993), 25 – 87.
 - [23] C.M.Cosgrove. “ *Chazy Classes IX – XII of Third-Order Differential Equations*”. Stud. Appl. Math. **104**(2000),Nr. 3, 171 – 228.
 - [24] C. M. Cosgrove. “ *Higher-Order Painlevé Equations in the polynomial class II. Bureau symbol P1* ”, Stud. Appl. Math. **116**(2006), 321 – 413.
 - [25] H. Exton. “ *On nonlinear ordinary differential equations with fixed critical points*”, Rendiconti di Matematica, **4**(1971), 385 – 448.
 - [26] H. Exton. “ *Third order differential systems with fixed critical points* ”, Funkcialaj Ekvacioj, vol. **19**(1976), 45 – 51.
 - [27] B. Gambier. “ *Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l’intégrale générale est à points critiques fixes*”, Acta. Math., **33**(1910), 1 – 55.
 - [28] R. Garnier. “ *Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l’intégrale générale est uniforme et sur une classe d’équations nouvelles d’ordre supérieur dont l’intégrale générale a ses points critiques fixes*”, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **29**(1912), 1 – 126.
 - [29] R. Garnier. “ *Sur la rationalisation des coefficients d’une équation différentielle algébrique*”, Bulletin de la S. M. F., **41**(1913), 146 – 148.
 - [30] V. I. Gromak, I. Laine and S. Shimomura. “ *Painleve differential equations in the complex plane*”, Walter de Gruyter, Berlin, 2002.
 - [31] V. I. Gromak and A. S. Zenchenko. “ *On the Theory of Higher-Order Painlevé Equations*”, Translated from Differentsial’nye Uravneniya, vol. **40** (2004), Nr. 5, 625 – 633.
 - [32] V. I. Gromak. “ *Theory of Painlevé equation*”, Translated from Differentsial’nye Uravneniya, vol. **11**(1975), 285 – 287.
 - [33] E. Hille. “ *Ordinary differential equations in the complex domain*”, Wiley, London, 1969.

-
- [34] D. D. Holm and A. N. W. Hone, “ *Nonintegrability of a fifth-order equation with integrable two-body dynamics*”. Theoretical and Mathematical Physics, **137** (2003) , Nr. 1, 1459 – 1471.
 - [35] M. Hukuhara. “ *Quelques remarques sur le mémoire de P. Painlevé: Sur les équations différentielles dont l’intégrale générale est uniforme*”, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A, vol. **3**(1967), Nr 1, 139 – 150.
 - [36] E. L. Ince. “ *Ordinary Differential Equations*”. Dover Publication, New York, 1956.
 - [37] F. Jrad, U. Mugan. “ *Non-polynomial fourth order equations which pass the Painlevé test*”, Z. Naturforsch. A, **60**(2005), 387 – 400.
 - [38] S. Kowalevski, “ *Sur le problème de la rotation d’ un corps solide autour d’un point fixe*”, Acta Mathematica, vol **12**(1889), Nr. 1, 177 – 232.
 - [39] A. V. Kozulin. “ *Third-order Differential Equation with a Special Particular Integral*”, Differents. Uravn., vol. **27** (1991) ,Nr. 10, 1699 – 1703.
 - [40] A. V. Kozulin and N. A. Lukashevitch. “ *Third-Order Differential Equation of a Special Form*”, V. I.Lenin Belorussian State University, Translated from Differentsial’nye Uravneniya, vol. **24** (1988) ., Nr. 12, 2064 – 2069.
 - [41] N. A. Kudryashov. “ *Soliton, rational and special solutions of the Korteweg-de Vries hierarchy*” Applied Mathematics and Computation, vol. **217** (2010) , Issue 4, 15 October, 1774 – 1779.
 - [42] N. A. Kudryashov. “ *Some fourth-order ordinary differential equations which pass the Painlevé test*”, J. Nonlin. Math. Phys.(2001), 8172 – 177.
 - [43] N. A. Kudryashov. “ *Fourth-order analogies to the Painlevé equations*”, J. Phys. A: Math. Gen., **35**(2002), 4617 – 4632.
 - [44] N.A.Kudryashov. “ *Painlevé property and the first integrals of nonlinear differential equations*”, arXiv:nonlin.SI/0408041, vol **123**(2004).
 - [45] N.A. Kudryashov. “ *Fuchs indices and the first integrals of nonlinear differential equations*”, Chaos, Solitons and Fractals, **26**(2005), 591 – 603.
 - [46] S. Lang. “ *Elliptic Functions* ”, Springer-Verlag, 2^eed. (1987).

-
- [47] N. A. Lukashevitch. “*Simplest-type Differential Equations of The Third Order*”, Differential equations, vol. **31** (1995), Nr. 6.
 - [48] M. V. Hoeij. “*algcures*”, Maple V <http://www.math.fsu.edu/~hoeij/algcures.html>. “*Rational Parametrizations of Algebraic Curves using a Canonical Divisor*”. J. Symb. Comput., **23**(1997)., 209 – 227.
 - [49] I. P. Martynov. “*Differential equations with stationary critical singularities*”, Translated from Differentsial’nye Uravneniya, vol. **9**(1973), 1780 – 1791.
 - [50] I. P. Martynov. “*Analytic properties of solutions of a third order equations*”, Translated from Differentsial’nye Uravneniya, vol. **21**(1985)., Nr. 5, 512 – 517.
 - [51] I. P. Martynov. “*Third order equations with no moving critical singularities*”, Translated from Differentsial’nye Uravneniya, vol. **21**(1985), Nr. 6, 937 – 946.
 - [52] I. P. Martynov, G. T. Mozhdzher. “*On First Integrals of a Fourth-Order Equation*”, Translated from Differentsial’nye Uravneniya, vol. **40**(2004), Nr. 12, 1701 – 1704.
 - [53] N. S. Berezkina, I. P. Martynov, and V. A. Pron’ko. “*On First Integrals of a Class of Third-Order Differential Equations*”, Differential Equations, vol. **45** (2009), Nr. 10, 1536 – 1538.
 - [54] U. Mugan, F. Jrad. “*Painlevé test and the first Painlevé Hierarchy*”, J. Phys. A, vol. **32** (1999), 7933 – 7952.
 - [55] U. Mugan, F. Jrad. “*Painlevé test and higher order differential equations*”, J. Nonlinear Math. Phys. **9**(2002), Nr. 3, 282 – 310.
 - [56] U. Mugan, F. Jrad. “*Non-polynomial third order equations which pass the Painlevé test*”, Z. Naturforsch. A, **59**(2004), 163 – 180.
 - [57] U. Mugan, A. Sakka. “*Second-order second-degree Painlevé equations related with Painlevé I-VI equations and Fuchsian-type transformations*”, J. Math. Phys., vol. **40** (1999), 3569 – 3587.
 - [58] P. Painlevé. “*Mémoire sur les équations différentielles dont l’intégrale générale est uniforme*”, Bulletin de la Société Mathématique de France **28**(1900), 201 – 261.

-
- [59] P. Painlevé. “ *Leçons sur la Théorie Analytique des Équations Différentielles*”, Professées a Stockholm. Hermann, Paris, Reprinted, Oeuvres de Paul Painlevé, vol. **1**, **2**, **3** (1895), (Editions du C.N.R.S., Paris, 1973).
- [60] P. Painlevé. “ *Démonstration de l’irréductibilité absolue de l’équation $y'' = 6y^2 + x$* ”, C.R. Acad. Sci. Paris, **135**(1902), 641 – 647.
- [61] P. Painlevé. “ *Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes*”, C. R. Acad. Sc. Paris, **143**(1906), 1111 – 1117.
- [62] P. Painlevé. “ *Sur les équations différentielles du second ordre et d’ordre supérieur dont l’intégrale générale est uniforme*”, Acta. Math. **25**(1902), 1 – 85.
- [63] V. Prasolov and Y. Sobolovyeu. “ *Elliptic Functions and Elliptic Integrals* ”, AMS Translations of mathematical monographs, **170**(1997).
- [64] G. Reeb. “ *Apropos de l’équation de Painlevé $y'' = 6y^2 + x$* ”. Lecture Notes in Mathematics Springer, vol. **392** (1974), 43 – 46.
- [65] N. Skolesnikova and N. A. Lukashevitch. “ *On a class of third order differential equations with fixed singularities*”, Translated from differentsial’nye uravneniya, vol. **8** (1972), Nr. 11.
- [66] G. Valiron. “ *Cours d’analyse mathématique*”, 2^{ième} éd. Masson, Paris, 1950.
- [67] J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevate. “ *The Painleve property for partial differential equations*”, J. Math. Phys. **24**(1983), Nr.3, 522 – 526.

Index

Les renvois sont faits aux numéros de pages

- Algorithme, 2, 16, 38
- Analyse, 1
 - de Painlevé, 3, 5
- Asymptotique, 33
- branchement
 - points de –, 12
- Champ
 - Équations différentielles dans le - complexe, 7
 - théorie des -s, 3
- Chazy, 3
- Comportement, 32
 - polaire, 32
- Conditions
 - de Cauchy, 7
 - de stabilité, 66, 68
 - initiales, 7, 10
- Courbe, 16
 - algébrique, 16
- Critiques, 9
- Dégénérescences, 20
- Développement, 39
 - de Laurent, 38
 - la convergence des –, 8
- Diophantine, 94
- Domaine, 1
 - d’uniformité, 1
- Dominants
 - termes –, 32
- Equation, 1
 - caractéristique, 25
 - de Riccati, 101, 120
 - Diophantine, 94
 - hypergéométrique, 101
 - réduite, 32, 46
- Famille, 38
 - maximale, 38, 102
 - principale, 38
- Fixes, 10
- Fonction, 1, 123
 - elliptique, 2, 16–18, 55, 57, 59, 60, 67, 71, 123
 - méromorphe, 123
 - multivaluée, 8
 - hyperelliptique, 2
 - modulaire, 11
 - uniforme, 21
 - Weierstrass, 124, 127
 - s élémentaires, 2
 - s à variables complexe, 8
 - s abéliennes, 2
 - elliptique, 1
- Fuchs, 7
- Genre, 16
- Indices, 33
 - de Fuchs, 33
- Intégrale
 - elliptique, 126
- Intégrale
 - uniforme, 10
- Intégration
 - constantes d’ –, 34
 - complète, 120
- Intégration, 1
- Irréductibilité, 18
- Irréductible, 16, 18
- Jacobi, 1, 63

-
- elliptique de $-$, 63
 - Lemme, 23
 - dû à Poincaré, 23
 - Méthode
 - Double – de Painlevé, 23
 - de Bureau, 26, 31
 - de Fröbenius, 24
 - de Painlevé, 23
 - de perturbation, 31, 38
 - de perturbation de Painlevé, 38
 - Maple, 16
 - Mobiles, 10
 - Monovaluée, 8
 - Multivaluée, 8
 - Pôles, 24
 - mobiles, 24, 51, 66
 - Painlevé, 1, 3
 - propriété de $-$, 1, 12, 13
 - test de $-$, 3
 - transcendantes de $-$, 2
 - Parallélogramme, 123
 - Perturbation, 31
 - expansion de la $-$, 38
 - régulière, 31
 - Points, 1
 - critiques, 9
 - critiques algébriques, 9
 - critiques fixes, 10, 11
 - critiques mobiles, 10, 14
 - de branchement rationnels, 8
 - singuliers fixes, 7
 - Résolvante
 - Schwarzienne, 122
 - Résonances, 33, 34
 - Riccati
 - équation de $-$, 120
 - Schwarzienne, 120, 122
 - Simplifiée, 4
 - équation $-$, 4
 - Singularités
 - des équations, 9
 - des solutions, 10
 - isolées, 7
 - mobiles, 7
 - spontanées, 7
 - Singulière
 - ligne $-$, 11
 - Singulier, 8
 - de branchement, 8
 - Stable, 5
 - Système, 10, 23, 47, 53
 - de coupures, 12
 - différentiel, 10
 - non linéaire, 10
 - stable, 23
 - Termes
 - dominants, 32
 - Test
 - de Painlevé, 31
 - Théorème
 - de Bureau, 26
 - Transcendantes
 - de Painlevé, 17, 19
 - Transformation, 13
 - birationnelle, 16
 - de Möbius, 13
 - Uniforme, 1
 - Weierstrass, 2, 60, 124