

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE « HOUARI BOUMEDIENNE »
FACULTE DE PHYSIQUE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

EN : PHYSIQUE

Spécialité : Energétique et Mécanique des Fluides

Par : M^{elle} **IHDENE MALIKA**

SUJET

Transfert de matière dans des conduits rotatifs

Soutenu publiquement le 10 / 07 / 2007 à 13h, devant le jury composé de:

M ^r D. KALACHE	Professeur	USTHB	Président
M ^{me} R. OUTEMZABET	Maître de conférence	USTHB	Examinatrice
M ^r S. HANCHI	Professeur	E. M. P	Examineur
M ^r A. MAHAMDIA	Maître de conférence	USTHB	Examineur
M ^r A. GHEZAL	Chargé de cours	USTHB	Directeur de thèse

REMERCIEMENTS

J'exprime ma plus profonde reconnaissance à Monsieur A. GHÉZAL, de m'avoir accueillie dans son équipe et d'avoir dirigé ce travail. J'ai beaucoup apprécié sa disponibilité, ses qualités humaines et professionnelles qui m'ont beaucoup aidé à réaliser ce travail. Le grand mérite lui revient.

Je remercie Monsieur D. KALACHE, Professeur à l'USTHB pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence de ce jury.

À Madame R. EUTAMZABET, Maître de conférence à l'USTHB, je dis merci pour l'intérêt qu'elle a porté à mon travail et pour son acceptation à participer au jury.

À Monsieur S. HANCHI, Professeur à l'EMP pour avoir accepté de faire partie du jury, qu'il trouve là, l'expression de mes profonds sentiments, chargés de respects.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur A. MAHAMDIA, Maître de conférence à l'USTHB, de m'avoir fait l'honneur d'accepter de juger ce travail.

Je remercie profondément l'assistant professeur M^{er} GUY RAGUIN de l'université de Michigan State pour la collaboration fructueuse que j'ai pu avoir avec lui et qui a enrichi mes travaux.

Ma plus grande gratitude va à M^{er} R. HADJ-ALI qui m'a aidé tout au long de cette étude avec ses conseils et ses encouragements.

DEDICACES

Je dédie cette thèse

*À la personne que j'aurais tant aimé
voir assister à ma soutenance, mon regretté cher père.
Que Dieu le préserve au fond de son éden.*

*À ma très chère mère
À qui je dois tout simplement tout et qui m'a toujours entouré de sa
confiance, amour et encouragement, le long de ces années de thèse.*

À vec tout mon amour.

À ma soeur & À mes frères

À monsieur : Bandou

Sans son encouragement, cette thèse n'aurait pu voir le jour

*À tous les instituteurs, professeurs et enseignants qui ont contribué un jour à
mon éducation et à ma formation et qui m'ont permis, par leurs efforts,
d'atteindre ce niveau.*

À mes meilleures amies Pour leurs soutiens dans les moments difficiles

SOMMAIRE

	<i>Page</i>
Introduction générale	1
CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIE	
Etude bibliographique	3
CHAPITRE II : FORMULATION DU PROBLEME	
II-1. Présentation du phénomène	20
II-2. Hypothèses	20
II-3. Les équations de conservation	22
II-4. Les conditions initiales et aux limites	22
II-5. Analyse adimensionnelle	23
II-5.1- Les équations adimensionnelles	24
II-5.2- Conditions initiales et aux limites adimensionnelles	24
CHAPITRE III : RESOLUTION NUMERIQUE	
III.1. Introduction.....	26
III.2. Méthode de résolution	26
III.3. Discrétisation des dérivées partielles	27
III.4. Schéma de discrétisation	29
III.5. Traitement des opérateurs aux frontières	30
III.6. Hypothèse sur la vitesse de rotation de cylindre intérieur.....	33
III.7. Procédé itératif	34

CHAPITRE IV : RESULTATS ET DISCUSSION

Premier cas : sans rotation

IV.1. Problème dynamique

IV.1.1- Profils de vitesse	39
IV.1.2- Chute de pression	41
IV.1.3- Frottement pariétal adimensionnel	41
IV.1.4- Influence du rapport des rayons η	
IV.1.4.1 Influence de η sur les profils de vitesse	42
IV.1.4.2 Influence de η sur la longueur d'entrée	45
IV.1.4.3 Influence de η sur la chute de pression.....	46
IV.1.4.4 Influence de η sur le frottement pariétal.....	47
IV.1.5- Influence du nombre de Reynolds sur le frottement pariétal	47

IV. 2. Problème diffusionnel :

IV.2.1- Profils de la concentration $C(r)$	48
IV.2.2- Evolution du profil de la concentration	49
IV.2.3- Influence du nombre de Reynolds sur l'évolution de la concentration	52
IV.2.4- Coefficient de transfert de matière local	54
IV.2.5- Influence du rapport des rayons η sur K	55
IV.2.6- Influence du nombre de Schmidt	56
IV.2.7- Evolution de coefficient de transfert en fonction du nombre de Reynolds	57
IV.2.8- Influence du rapport d'aspect sur le nombre de Sherwood	57
Conclusion	58

Deuxième cas : avec rotation

IV.3. Problème dynamique:

IV.3.1- Evolution des profils de vitesse	59
IV.3.2- Variation axiale des profils de vitesse	62
IV.3.2.1 Profil radial de la vitesse axiale	62
IV.3.2.2 Profil de la vitesse tangentielle	63
IV.3.2.3 Profil de la composante radiale de la vitesse	64
IV.3.3- Influence du nombre de Reynolds sur les profils de vitesse	
IV.3.3.1 Influence sur les profils de la vitesse axiale.....	65
IV.3.3.2 Influence sur les profils de la composante tangentielle de la vitesse..	66
IV.3.3.3 Influence sur les profils de la composante de la vitesse Radiale.....	66
IV.3.4- Influence de la vitesse de rotation du cylindre sur les profils de vitesse	
IV.3.4.1 Profils de la composante de la vitesse axiale	70
IV.3.4.2 Profil de la composante de la vitesse tangentielle	71
IV.3.4.3 Profil de la composante de la vitesse radiale.....	73
IV.3.5- Influence de la rotation sur le champ de pression	
IV.3.5.1 Distribution axiale de la pression	74
IV.3.5.2 Distribution radiale de la pression	74
IV.3.6- Développement des tourbillons dans l'espace annulaire	
IV.3.6.1 Effet du débit axial sur le développement des tourbillons	76
IV.3.6.2 Effet de la rotation du cylindre intérieur sur le développement des tourbillons.....	77
IV.3.6.3 Evolution des tourbillons dans l'espace annulaire au cours du temps pour un Taylor critique.....	78

IV.4. Partie diffusionnelle

IV.4.1- Profils de la concentration	79
IV.4.2- Coefficient de transfert de matière local	80
IV.4.3- Influence du rapport des rayons η	80
IV.4.4- Influence de la rotation du cylindre intérieur sur le coefficient de transfert	81
IV.4.5- Influence de la Rotation du cylindre intérieur sur les lignes d'iso concentration.....	83
IV.4.6- Influence du nombre de Schmidt	86
IV.4.7- Influence du nombre de Schmidt sur les lignes d'iso concentrations	86
IV.4.8- Influence du nombre de Reynolds sur le K	87
Conclusion.....	90
CONCLUSION GENERALE	91
REFERENCES	92
ANNEXE	96

NOMENCLATURE

Lettres latines

C	Concentration du corps diffusant
C _o	Concentration initiale
d	Epaisseur de l'espace annulaire entre les deux cylindres ; $d=R_2-R_1$
f_1	Fréquence de rotation du cylindre intérieur (Hz)
D	Coefficient de diffusion (cm^2/s)
d _h	Diamètre hydraulique $d_h = 2(R_2-R_1)$
K	Gradient de concentration pariétal ; $K = (\partial C / \partial r)_p$
L	Longueur de l'espace annulaire
η	Rapport des rayons $\eta = R_1/R_2$
P	Pression
r	Coordonnée radiale
R ₁	Rayon du cylindre intérieur
R ₂	Rayon du cylindre extérieur
Re _a	Nombre de Reynolds axial défini par $Re_a = w_e (R_2 - R_1) / \nu$
Sc	Nombre de Schmidt ; $Sc = \nu / D$
Sh	Nombre de Sherwood $Sh = Kd / D$
t	temps
Ta	Nombre de Taylor défini par $Ta = R_1 \Omega_1 d / \nu$
$\overline{Ta}$	Nombre de Taylor (définition utilisé par Mizuchina)
Ta _c	Nombre de Taylor critique
U_a	Vitesse débitante axiale
V _o	Vitesse linéaire du cylindre intérieur
$\vec{V}$	Vecteur vitesse $\vec{V}(u, v, w)$
u	Composante radiale de la vitesse

v	Composante tangentielle de la vitesse
w	Composante axiale de la vitesse
w_e	Vitesse d'entrée du fluide dans l'espace annulaire.
z	Coordonnée axiale

Symboles Grecs:

γ	Rapport des nombres de Reynolds axial et de rotation $\gamma = Re_a / Re_w$
μ	Viscosité dynamique du fluide.
ν	Viscosité cinématique du fluide
Γ	Rapport de forme (Rapport d'aspect) ; $\Gamma = L/d$
Π	Perturbation de pression
θ	Coordonnée azimutale
α	L'angle d'inclinaison des cellules de Taylor
ρ	masse volumique
Ω_1	Vitesse de rotation du cylindre intérieur
ζ	Coordonnée radiale réduite $\zeta = (r - R_1) / (R_2 - R_1)$
ξ	Coordonnée axiale réduite $\xi = z/d$

Indices :

c	Valeur critique
e	Entrée de l'espace annulaire
i	Indice dans la direction longitudinale
j	Indice dans la direction radiale
p	Paroi

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

L'écoulement de Taylor-Couette entre deux cylindres coaxiaux, où un seul, où les deux sont animés d'un mouvement de rotation, a été largement étudié dans le passé. Ce problème remonte à la publication historique de G.I Taylor (1923) pour une structure stratifiée et ses diverses propriétés relatives aux transports de chaleur et de matière. Lorsque le cylindre extérieur est fixe et le cylindre intérieur tourne, on constate qu'au-delà d'une certaine vitesse critique de rotation, l'énergie transmise au fluide par la rotation du cylindre intérieur produit deux écoulements rotationnels : un mouvement global circonférentiel et la formation de tourbillons de Taylor répartis uniformément le long de l'axe des cylindres sous forme de tores. Chaque tourbillon est une cellule de Taylor et la longueur d'onde axiale est constituée de deux tourbillons adjacents tournant en sens inverse l'un de l'autre.

L'apport d'un débit axial sur un tel écoulement tourbillonnaire a un effet modificateur. En effet, si à faible débit axial les tourbillons se déplacent axialement sans se détruire, un accroissement de ce débit entraîne une destruction des tourbillons d'autant plus importante à vitesse de rotation donnée que le débit axial est plus grand. La recherche du lien entre la structure de cet écoulement et le transfert de matière ou de chaleur fluide-paroi demeure toujours d'actualité, sans doute en raison de la complexité du problème hydrodynamique de cet écoulement, connu sous le nom de Taylor Couette Poiseuille.

D'après les premières études effectuées par certains chercheurs (J. Kaye & E.C. Elgar, 1958), ce type d'écoulement possède en général quatre régimes caractéristiques:

1. Le régime laminaire
2. Le régime laminaire avec tourbillons de Taylor
3. Le régime turbulent
4. Le régime turbulent avec tourbillons de Taylor

Certains auteurs comme par exemple K.Kataoka, H.Doï et T.Komai 1977[3], signalent en plus l'existence des sous régimes tourbillonnaires caractérisés par la présence de tourbillons secondaires.

La détermination du transfert de matière ou de chaleur, dans une conduite annulaire, présente un intérêt pratique considérable. Parmi les différentes géométries étudiées, du point de

vu du transfert de matière, nous pouvons citer celles constituées par : deux plaques, D.J.Pickett (1979) et J.Qi and R.F.Savinell (1990), des sphères, H.D.Doan et al (2001), deux cylindres fixes, Ould Ruise (1989) ou un cylindre en rotation, J.Legrand et al (1982).

L'étendue de ses applications industrielles telles que :

Systèmes de refroidissement des machines électriques

Echangeurs de matière

Echangeurs de chaleur

Réacteur électrochimique

La modification de la structure des alliages.

Ce mémoire comprend quatre chapitres : Bibliographie, formulation du problème, méthode numérique utilisée, et en fin la discussions des résultats obtenus.

Dans la partie bibliographique, Nous allons énumérer les différents travaux effectués sur le transfert de matière pour différentes géométries au courant des années précédentes et regrouper les résultats trouvés.

Dans le chapitre II de ce mémoire, nous exposons le problème physique et les hypothèses retenues pour son étude et nous donnons le système d'équations régissant un tel écoulement.

Le chapitre III est consacré à la description de la méthode des différences finies utilisée et au procédé itératif de résolution.

Dans le chapitre IV les résultats numériques sont discutés et comparés à ceux obtenus dans la bibliographie.

En dernier, une conclusion sur le travail est présentée en citant les perspectives envisagées.

Chapitre .I

Etude bibliographique

I. Introduction :

Le transfert de matière ou de chaleur étant étroitement lié à la structure de l'écoulement, la connaissance préalable de l'aspect hydrodynamique de l'écoulement annulaire s'avère indispensable pour l'amélioration des performances de l'échangeur ou du réacteur.

I-1 la structure de l'écoulement:

Lorsque un fluide visqueux est placé dans un espace annulaire entre deux cylindres dont l'intérieur tourne avec un gradient de pression axial nul et quand la vitesse de rotation atteint une valeur supérieure à la valeur critique, l'écoulement résultant devient un écoulement stratifié avec la formation de tourbillons de Taylor contrarotatif toroïdale comme le montre la figure 1 :

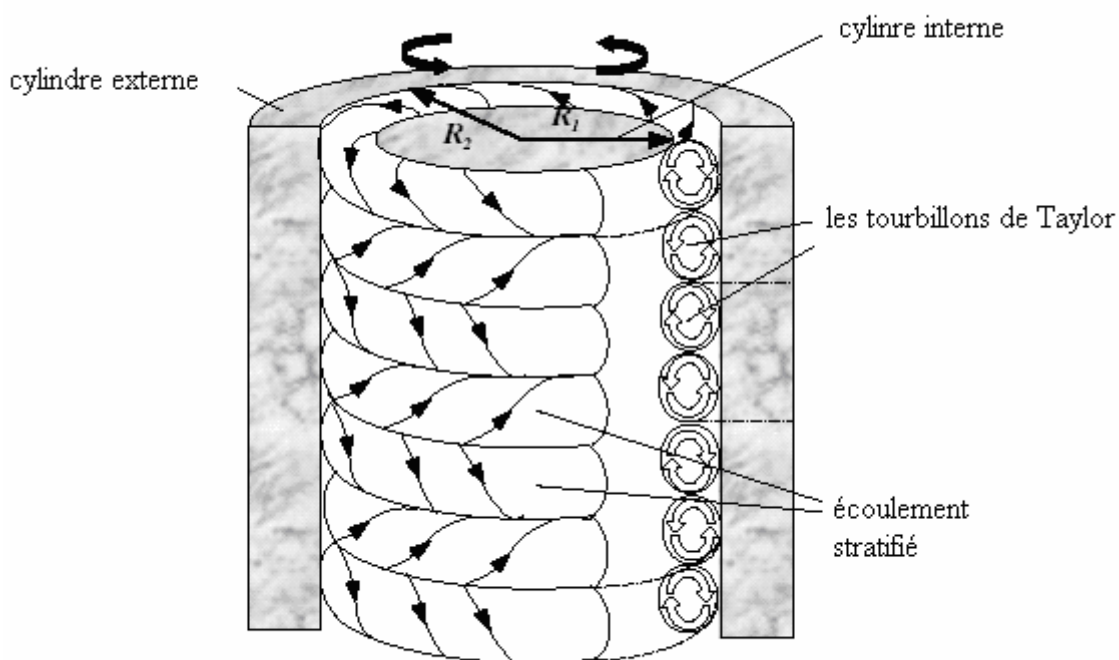


Fig1.Ecoulement de Taylor Couette

Cet écoulement connu sous le nom de Taylor Couette devient l'écoulement de Taylor Couette Poiseuille (Legrand et Coeuret, 1986) lorsque un écoulement axial lui est superposé. Parfois on se réfère à l'écoulement de Taylor –Gortler (Haim and Pismen), écoulement de Taylor-Poiseuille (Giordano et al.), ou écoulement spiral (Snyder, 1962), le nom est dû à la superposition des tourbillons de Taylor Couette et à l'écoulement fondamental stable.

Les différents paramètres adimensionnels caractérisant les écoulements de Couette Poiseuille sont définis dans la littérature comme suit :

Les paramètres géométriques tels que

1. le rapport des rayons $\eta = R_1/R_2$
2. le rapport d'aspect $\Gamma = L/d$, $d = R_2 - R_1$

Où : L : représente la longueur de l'espace annulaire

d : la largeur de l'espace annulaire

Les paramètres dynamiques caractérisant la vitesse de rotation du cylindre intérieur et l'écoulement axial imposé sont :

3. le nombre de Taylor, Ta : nombre sans dimension traduisant le rapport des forces d'inertie dues à la rotation du cylindre intérieur et des forces de

$$\text{dissipation visqueuse. } Ta = 4 \left(\frac{R_1 \Omega_1}{\nu} \right)^2 (R_2 - R_1)^2 \left(\frac{1-N}{1+N} \right) \quad (1)$$

4. le nombre de Reynolds axiale, Re_a défini par :

$$Re_a = \frac{2(R_2 - R_1)U_a}{\nu} = \frac{2dU_a}{\nu} \quad (2)$$

5. le nombre de Schmidt : $Sc = \frac{\nu}{D}$ (3)

Où Ω_1 est la vitesse angulaire du cylindre intérieur, U_a la vitesse moyenne axiale imposée à l'écoulement, et ν la viscosité cinématique du fluide. Ta et Re_a jouent un rôle important dans la détermination du régime de l'écoulement: les tourbillons de Taylor apparaissent dans l'écoulement spiral crée par la rotation du cylindre intérieur quand Ta dépasse la valeur critique Ta_c . Le rapport d'aspect Γ se rapporte à des effets de longueur et selon Snyder (1969), cet effet peut être négligé dans l'écoulement de Taylor Couette si Γ est plus grand que 10. Quant à l'influence du rapport des rayons, Coles (1965) trouve que si N est plus grand que 0.714 et que la vitesse de rotation est suffisamment élevée et si le gradient de pression axial imposé est nul, une seconde instabilité apparaît, l'écoulement devient turbulent sans passer par des régimes secondaires. Cette valeur de 0.714 a été déjà trouvée par l'analyse de Davey (1962). La nouvelle instabilité prend la forme des tourbillons onduleux de Taylor caractérisée par un modèle oscillatoire superposé aux tourbillons de Taylor dans la direction azimutale. Cependant si N est inférieur à 0.714, cette instabilité secondaire a tendance à disparaître, ce qui a été montré dans les travaux de Legrand et Coeuret (1982) et Gu et Fahidy (1986), bien que Lorenzen et al (1983) ont observé le régime des tourbillons oscillants de Taylor en utilisant une méthode de vélocimétrie laser par effet Doppler pour $N = 0.507$ et un rapport

d'aspect Γ variable. Dans ce type d'écoulement une seconde instabilité apparaît sous la forme d'une oscillation circonférentielle, ce qui rompt la symétrie axiale du problème et donne aux frontières entre tourbillons un certain mouvement oscillatoire. Ils montrent ainsi que ce mode de tourbillons oscillants apparaît pour Γ compris entre 14 et 17.

Puisque leur seul paramètre est Γ , ils ont attribué la présence de ce régime à des effets de bords. Dans son étude numérique de la transition vers ce régime de tourbillons oscillants de Taylor, Jones (1985) est parvenu quant à lui à obtenir ce régime dans une cavité annulaire infinie (où les effets de bords ne sont pas donc modélisés), avec N variant entre 0.5 et 0.8, en faisant varier arbitrairement la taille des tourbillons. Cette approche numérique du problème montre seulement que ce régime est l'une des solutions possibles au problème mais n'indique pas comment l'obtenir expérimentalement. Les effets de bords dans une cavité annulaire introduisent des conditions aux limites différentes et tendent à favoriser une solution plus qu'une autre, ce qui fait qu'expérimentalement le mode des tourbillons oscillants n'est pas forcément observé. Lorsqu'un écoulement axial de type Poiseuille est superposé à un écoulement de Taylor Couette, tant que le nombre de Reynolds Re_a reste faible ($Re_a < 48$) par rapport au nombre de Taylor, les tourbillons de Taylor se succèdent les uns à la suite des autres sans subir de déformations notables, J.Legrand (1986). Les courbes reliant les centres des tourbillons forment des cercles centrés sur l'axe des cylindres, qui se déplacent à vitesse constante dans la direction axiale. Pour ce régime, Gu et Fahidy, font état de résultats apparemment contradictoire : dans un article paru en 1985, leurs observations par traceur coloré montrent que les tourbillons sont inclinés d'un angle α , défini sur la fig.2, ce qui a été confirmé plus tard par Lueptow et al.(1992).

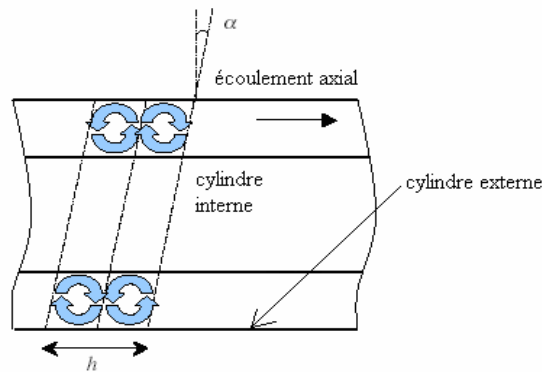


Fig.2, Définition de l'angle d'inclinaison α dans le mode spiral de l'écoulement de T.C.P

$$\alpha = A \tan \left(1 - \frac{h}{2d} \right) \quad (4)$$

L'angle α croît en fonction de la vitesse de rotation du cylindre intérieur, pour $N=0.714$, $\Gamma=31.5$, $0 < Ta < 1581$ et $0 < Re_a < 150$; dans un article portant sur l'influence des paramètres géométriques paru en 1986 Gu et Fahidy, notent que la direction de l'angle α change périodiquement pour :

$$\begin{aligned} 0.607 &\leq N \leq 0.714 \\ 22.92 &\leq \Gamma \leq 31.5, \\ 0 &\leq Ta \leq 1581 \\ 0 &\leq Re_a \leq 150. \end{aligned}$$

Ce phénomène d'oscillation peut être expliqué en se référant à la discussion sur le régime de tourbillons oscillants de Taylor obtenu en l'absence de circulation axiale : les observations précédentes correspondent au cas où le nombre d'onde de l'onde circonférentielle est exactement égale à 1. Ce mode peut être visualisé dans les expériences avec circulation axiale forcée, $N=0.5$, $\Gamma=16$.

Lorsque le débit imposé devient trop important ($Re_a > 48$), par rapport au nombre de Taylor, l'écoulement devient hélicoïdal, Chung et Astill, (1977), ($N=0.5$), et Takeuchi et Jankowski, (1981), ($N=0.5$, $\Gamma=138$). La ligne reliant les centres des tourbillons est alors une hélice qui à l'aspect d'une vis, qui tourne en avançant dans la direction axiale. Certains auteurs se basent sur Re_a pour déterminer la transition entre le mode cellulaire et le mode hélicoïdal, D.I.Takeuchi, D.F.Jankowski (1981).

D'autres utilisent le rapport $\gamma = Re_a / Re_w$ des nombres de Reynolds axial et de rotation (nombre de Rosby), Z.H.Gu, T.Z.Fahidy (1985) et A.Ghezal et al (1989). Ce rapport qui dépend du rayon et de la fréquence de rotation f_1 du cylindre intérieur de l'appareil ainsi que la vitesse débitante U_a est donné par:

$$Re_w = \frac{4\pi f_1 R_1 (R_2 - R_1)}{\nu} \text{ et } Re_a = \frac{2U_a d}{\nu} \quad (5)$$

$$\text{D'où} \quad \gamma = \frac{Re_a}{Re_w} = \frac{U_a}{2\pi f_1 R_1} \quad (6)$$

1.1.2 Le transfert de masse dans les écoulements de Taylor Couette Poiseuille :

La compréhension du phénomène du transfert de chaleur et de masse dans un espace annulaire a polarisé l'attention des chercheurs depuis longtemps et demeure d'actualité. Parmi ceux qui se sont intéressés au transfert de masse on cite :

Mizushina (1971) a quantifié la dispersion radiale pour l'écoulement de Taylor – Couette sans circulation axiale. Il a mesuré des coefficients de transport de matière à l'aide de la méthode électrochimique sous la forme du nombre de Sherwood, pour deux géométries différentes ($N=0.468$ et $N=0.617$). La corrélation obtenue montre que le nombre de Sherwood est proportionnel à la puissance $1/3$ du nombre de Schmidt, pour un nombre de Taylor modifié ($\overline{Ta} = \frac{2\pi f_1 R_1 d}{\nu} \sqrt{\frac{d}{R_1}}$).

La loi de variation du nombre de Sherwood obtenue est la suivante :

$$Sh = 0.74 \overline{Ta}^{1/2} Sc^{1/3} \quad (7)$$

La dépendance du nombre de Sherwood par rapport à la racine cubique du nombre de Schmidt a été confirmée par les résultats de Legrand et al. [1980].

D'après Kataoka et al. (1977), Legrand et al (1980), le coefficient de transfert de matière dans la direction radiale est défavorisé par l'accroissement du nombre de Reynolds dans la gamme $0 < Re_a < 25$.

En effet, la circulation axiale stabilise l'écoulement et atténue le transfert radial de matière causé par les tourbillons de Taylor. Ainsi, à nombres de Taylor égaux, le coefficient de transfert de matière dans la direction radiale, en l'absence du débit axial forcé, est supérieur à celui mesuré en présence d'une circulation axiale, Kataoka et al. (1977). Si le transfert de matière dans la direction radiale a été particulièrement étudié, les mécanismes intervenant dans la dispersion axiale restent à étudier.

Il a été cependant observé que lorsque la circulation axiale est augmentée, la taille des tourbillons augmente et reste uniforme le long des cylindres pour $Re_a < 50$, pour J. Legrand (1983), les tourbillons se déplacent dans la direction axiale, à la vitesse du débit axial sans échange de matière entre eux, J. Legrand (1986).

Takeuchi et Jankowski (1981), ont étudié la stabilité de l'écoulement hélicoïdal de Poiseuille et prévoient que les tourbillons de Taylor cessent d'exister pour former une hélice à partir de Re_a supérieur à 48, d'où l'apparition d'un angle d'inclinaison α qui correspond au pas de l'hélice.

J. Legrand et F. Coeuret (1982) sont parmi les chercheurs qui se sont intéressés le plus à l'étude du transfert de matière globale liquide-paroi dans l'écoulement laminaire tourbillonnaire en présence d'une circulation axiale forcée. Le dispositif expérimental est

constitué de deux cylindres coaxiaux. Le cylindre interne est de rayon R_1 maintenu constant ($2 R_1 = 35\text{mm}$) alors que le cylindre externe R_2 varie tel que l'espace annulaire $e = R_2 - R_1$ prend les valeurs suivantes : $e = 2.5\text{mm}$; 5.0mm ; 7.5mm , et les rapports R_2/R_1 de 1.14 ; 1.29 et 1.43. Les résultats expérimentaux ont permis de prouver l'existence de liens entre la structure de l'écoulement et le transfert de matière. Ils trouvent que, le nombre de Sherwood Sh croît avec le nombre de Taylor Ta , ceci quelle que soit la valeur de Re_a ; l'influence de Re_a à Ta fixé, est plus complexe :

$Re_a = 0$ l'introduction d'un faible débit axial sur l'écoulement de Couette entraîne une diminution du coefficient de transfert de matière.

$0 < Re_a < 25$ les expériences n'ont pas été possibles.

$25 < Re_a < 300$ le transfert de matière n'est pas influencé par Re_a .

Au-delà de $Re_a = 300$ le transfert de matière augmente avec Re_a

Les corrélations obtenues sont :

a) Pour $Re_a < 300$, deux corrélations qui diffèrent par le coefficient numérique multiplicatif ont été déduites suivant la valeur de l'espace annulaire :

$$\overline{Ta} = \frac{2\pi f_1 R_1 d}{\nu} \sqrt{\frac{d}{R_1}}$$

b) Pour $300 < Re_a < 800$ deux corrélations :

$$\text{Pour } \frac{R_2}{R_1} = 1.14 \text{ et } 1.29, Sh = 0.07 Sc^{1/3} Re_a^{1/3} Ta^{0.47}$$

$$\text{Pour } \frac{R_2}{R_1} = 1.43 \quad Sh = 0.10 Sc^{1/3} Re_a^{1/3} Ta^{0.47}$$

Ils ont étudié aussi l'influence du choix de la surface de transfert et du rapport des rayons N .

Les résultats sont :

- Pour les faibles valeurs de N , le transfert de matière au cylindre intérieur tournant est pratiquement de même importance que celui du cylindre extérieur fixe
- Le coefficient de transfert de matière liquide-paroi est plus important lorsque $d = 7.5\text{ mm}$ que dans les cas où $d = 2.5\text{mm}$, $d = 5\text{ mm}$

Pour $R_2/R_1 < 1.40$ et pour $d = 2.5, 5.0\text{ mm}$ les ondes ont été visualisées en injectant de la phénophtaléine dans le tourbillon.

Pour $R_2/R_1=1.43$ et pour $d=7\text{mm}$ le système se trouve juste à la limite de justification de l'apparition des ondes circonférentielles. Ceci peut expliquer pourquoi, à Ta donné, le transfert augmente « Sh » pour cette géométrie

- Le nombre de Reynolds axial de 300 a une certaine importance, car il semble définir la frontière entre un régime tourbillonnaire défini et un régime multi-tourbillonnaire.

Gu et Fahidy (1985) montrent qu'il existe un échange de matière entre les tourbillons dû à un chevauchement entre eux, ce qui fait diminuer leur hauteur. Ces résultats sont controversés dans des études faites par d'autres auteurs à l'instar de Takeuchi et al 1981. De plus, ils notent que les tourbillons sont inclinés d'un angle α lorsque le rapport γ est supérieur à 4.36%.

M-Ould-Rouis (1989) a réalisé une étude expérimentale et numérique sur le transfert de matière en écoulements non établis dans les conduites annulaires où les deux cylindres coaxiaux sont fixes, le cylindre interne est un rondin de diamètre 75 mm. Le cylindre externe est un tube de diamètre interne 104mm et externe 110mm. Dans l'étude expérimentale, elle a utilisé la méthode polarographique pour mesurer les transferts locaux de quantité de mouvement et de matière, à la surface d'échange solide liquide où la composition de la solution polarographique utilisée est la suivante :

- Soude 0.5N
- Ferricyannure de potassium $2 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l}$
- Ferricyannure de potassium $5 \cdot 10^{-2} \text{ mol/l}$
- Eau déminéralisée.

Les propriétés du fluide polarographique à 30°C :

- Viscosité cinématique $\nu = 8.725 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$
- Coefficient de l'ion ferricyannure au sein de l'électrolyte $D=6.95 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$
- Masse volumique $\rho= 1027.5 \text{ g/l}$

- Nombre de Schmidt $Sc= \nu/D = 1255$
- Concentration en ions ferricyannure $C_0= 2 \cdot 10^{-6} \text{ mol/cm}^3$

Les principaux résultats trouvés numériquement par la méthode de différences finies sont :

- le transfert de matière dans l'espace annulaire débute avec une valeur infinie au niveau de la section d'entrée et diminue rapidement au voisinage de cette dernière. Il continue à décroître progressivement lorsque la coordonnée axiale augmente.
- L'échange de matière apparaît légèrement plus important sur le cylindre intérieur que sur le cylindre externe.
- Le coefficient de transfert augmente avec le rapport de rayon N
- Le nombre de Sherwood diminue en fonction de N
- Le transfert de matière augmente en fonction du nombre de Schmidt

Dans son étude expérimentale : la méthode utilisée est la méthode électrochimique, les principaux résultats sont :

- Le transfert de matière augmente dans une section droite lorsque le débit augmente. La pente de la courbe logarithmique $K = f(\text{Re})$ vaut 0.34
- Pour un débit fixé, le transfert de matière diminue lorsque la coordonnée axiale z augmente. La pente de la courbe logarithmique $K = f(z)$ vaut -0.32

S. Wronski et M. Jastrzebski (1989) ont mené une étude expérimentale sur le taux de transfert de masse dans deux types d'écoulement spiral (T.C.P) ; laminaire et laminaire avec tourbillons dans la gamme de faibles nombres de Reynolds $\text{Re} < 200$ pour un liquide pseudo plastique. Les résultats montrent que les écoulements spirals des liquides pseudo plastiques (laminaire et laminaire avec tourbillons de Taylor) sont caractérisés par la variation de la viscosité dans le champ d'écoulement. Afin de corréler les résultats des mesures du transfert de masse sous une forme adimensionnelle, une valeur appropriée de la viscosité de référence devrait être définie. Ce qui est important dans le cas d'écoulement avec tourbillons.

Les résultats des mesures ont été corrélés avec la valeur moyenne de la viscosité, prise comme paramètre principal de l'écoulement. Dans le cas des liquides pseudo plastiques, l'application d'une valeur moyenne de viscosité apparente permet au taux de transfert de masse d'être décrit dans un écoulement spiral avec tourbillons par la corrélation formulée pour les écoulements des liquides newtoniens.

Dans le cas de l'écoulement avec tourbillons, le coefficient de transfert de masse augmente avec le Ta et il est pratiquement indépendant du nombre de Reynolds. Les résultats présentés sont en accord avec la corrélation expérimentale :

$$Sh = ATa^{1/2}Sc^{1/3} \quad \text{Où la constante } A \text{ dépend du rapport de Rayons}$$

Formulée pour les écoulements liquides newtoniens, la déviation moyenne des points expérimentaux de la corrélation est de 12% pour tous les espaces utilisés dans l'expérience. Dans la gamme des paramètres considérés dans ce travail les résultats montrent que même dans le cas de l'espace annulaire le plus large ($N=0.66$), les valeurs du coefficient de transfert de masse diffèrent légèrement de ceux prévus pour les liquides newtoniens; la différence est moins de 9%. Ils ont pu conclure que le coefficient de transfert de masse est indépendant du nombre de Taylor dans la gamme de l'écoulement spiral sans tourbillons. Aussi que le mouvement de rotation n'affecte pas le taux de transfert de masse.

M.Ould-Rouis et al [1995] se sont intéressés à l'étude numérique et expérimentale des transferts de matière et de quantité de mouvement dans un écoulement laminaire non établi dans la région d'entrée d'un espace annulaire cylindrique. La résolution numérique du problème a été faite par la méthode des différences finies en utilisant les hypothèses de la couche limite. Deux types de conditions aux limites ont été considérés à l'entrée de l'espace annulaire : vitesse axiale uniforme et vitesse axiale correspondant à celle à la sortie d'un milieu poreux, de manière à obéir aux conditions expérimentale. Les résultats trouvés sont les suivants :

- Lorsque la vitesse radiale est différente de zéro ; les coefficients de transfert sont beaucoup plus faibles que ceux déterminés en régime établi, ce qui est en désaccord avec les résultats expérimentaux obtenus par ailleurs.
- Lorsque la vitesse radiale est égale à zéro ; l'évolution du transfert de matière est a priori plus satisfaisante.
- Dans le cas de faibles valeurs de nombre de Schmidt $Sc=1$, la différence entre les résultats numériques calculés avec vitesse radiale égale à zéro ou différente de zéro est faible et pour ces deux conditions on obtient des coefficients de transfert supérieurs à ceux obtenus en régime établi Coney et El Shaarawi [1975]
- Dans le cas des valeurs élevées du nombre de Schmidt, la diminution importante du transfert de matière est due à l'influence excessive de la vitesse radiale.

P. Legentilhomme et J Legrand [1993]

- L'évolution du coefficient de transfert de matière obéit à la loi de puissance

- Lorsque le régime dynamique est supposé établi dès l'entrée de la conduite, l'intensité du transfert de matière est faible comparé au cas où le régime dynamique n'est pas établi.
- Pour augmenter l'intensité du transfert, il est intéressant de rechercher des systèmes d'entrée pour lesquels la longueur d'établissement du régime hydrodynamique est importante.

Desmet et al. (1996), ont avancé un modèle à deux zones : une zone interne contenant les particules de fluide au centre d'un tourbillon, et une zone externe constituée de particules aux bords du tourbillon, susceptibles de migrer dans un tourbillon voisin.

Les résultats déduits de leurs études sont les suivants :

- Deux coefficients ont été mis en évidence ; le premier coefficient de transfert de matière interne régit les échanges de matière entre les deux zones d'un même tourbillon, et un second coefficient de transport de matière gère le transfert de matière entre tourbillons adjacents, qui donne ainsi lieu à un modèle à deux paramètres.
- Les modèles précédents ont été invalidés car ils supposaient un mélange parfait à l'intérieur de chaque tourbillon, et aucun échange de matière entre tourbillons en l'absence de circulation axiale forcée ou pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds axial, J.Legrand, F.Coeurt, M.Billon (1983). Ces modèles laissent de côté le régime des tourbillons oscillants de Taylor dans lequel le transfert de matière entre tourbillons est non nul, N. Ohmura, K. Kataoka, Y. Shibata, T. Makino (1997). Desmet et al (1996) ont depuis montré grâce à leurs expériences où un traceur coloré est injecté à différents emplacements dans un tourbillon, que le transfert de matière entre tourbillons se fait uniquement par diffusion moléculaire lorsque le régime est laminaire.

Du fait que le coefficient de transfert entre tourbillons est largement supérieur au coefficient de transfert interne, le traceur coloré peut évoluer de tourbillon en tourbillon sans passer par leur zone centrale.

Il faut toutefois noter que l'étude de Desmet et al. a été menée pour les écoulement de Taylor Couette sans circulation axiale, et il est nécessaire de vérifier leurs résultats dans le cas où une circulation axiale est imposée. Physiquement, ceux-ci n'ont pas de raison de changer radicalement dans le mode cellulaire puisque la structure des tourbillons semble y être conservée.

S. R. DE FARIAS Neto et al (1997) ont consacré leur travail à une modélisation numérique de l'hydrodynamique et du transfert de matière lors de l'écoulement axial laminaire d'un fluide Newtonien incompressible dans la région d'entrée d'un espace annulaire cylindrique. La résolution des équations complètes de Navier –Stokes et de diffusion convection a été réalisée en utilisant le code aux éléments finis.

Le principal objectif de leur travail est d'analyser l'incidence de la diffusion longitudinale de la concentration $\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$, sur le transfert de masse entre le liquide et le cylindre intérieur de l'espace annulaire. Les principaux résultats sont :

- Le transfert de masse calculé en écoulement axial non établi en résolvant l'équation de diffusion convection complète est supérieur, dans la zone d'entrée, à celui obtenu en écoulement pleinement développé par Turitto en écoulement établi.
- L'intensité du transfert de matière sur le cylindre interne est proportionnelle au nombre de Schmidt élevé à la puissance 1/3.
- La résolution des équations complètes de Navier Stokes et du bilan de matière a montré l'influence de la diffusion longitudinale de la quantité de mouvement qui engendre des survitesses au voisinage des cylindres de l'espace annulaire. Ce comportement n'apparaît pas en utilisant les équations simplifiées de la théorie de la couche limite dans lesquelles la diffusion longitudinale est négligeable.
- Le terme de diffusion longitudinale revêt une importance particulière immédiatement à l'entrée de la cellule. Sa prise en compte dans l'équation de diffusion convection de la matière conduite à une prédiction du transfert local tout à fait acceptable par rapport aux résultats expérimentaux déjà trouvés dans une telle configuration.
- La diffusion longitudinale de la masse ne peut être négligée pour des nombres de Schmidt de l'ordre de 1000, contrairement à la diffusion longitudinale de la température, pour des nombres de Prandtl voisins de l'unité, dans un écoulement similaire.

Severino.R et al (1999) ont analysé et caractérisé le comportement fortement tridimensionnel de l'écoulement tourbillonnaire de l'écoulement annulaire induit par une entrée tangentielle. Ils ont évalué l'incidence de celui-ci sur le transfert de matière globale sur les deux cylindres de l'espace annulaire en présence de forts nombres de Schmidt. Ce phénomène a été mis en évidence par simulation numérique à l'aide du code de calcul aux éléments finis FIDAP. Ils ont trouvé que :

- Le transfert de matière pour trois valeurs du nombre de Schmidt (1, 100 et 1255) diminue en fonction du nombre de Reynolds. Cette diminution est une conséquence d'un épaissement, en valeur moyenne, de la couche limite diffusionnelle, laquelle a tendance à atteindre la même épaisseur que la couche limite hydrodynamique pour un nombre de Schmidt égal à 1. Ce qui permet de supposer que l'utilisation d'un maillage peu raffiné au voisinage du cylindre n'échantillonnerait pas correctement la couche limite diffusionnelle pour de faibles valeurs du nombre de Schmidt. Ce résultat a été aussi mis en évidence par Farias Neto (1997).
- Le transfert de matière pour des valeurs intermédiaires du nombre de Schmidt, comprises entre 1 et 1255, a été déterminé pour différents maillages diffusionnels.

Pour la génération de chacune des mailles il a été proposé une corrélation empirique faisant intervenir les distance l_1 et l_2 .

Où :

l_1 : Représente la distance entre le cylindre interne et une position radiale r_c

l_2 : Représente la distance entre le cylindre externe de la cellule annulaire et r_c

Ils sont liés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} l_2/l_1 = 0.12Sc^{1/3} + 1.21 \\ l_1 + l_2 = 0.70 \end{cases}$$

La position r_c délimite un maillage plus raffiné pour $r \leq r_c$ au voisinage du cylindre externe siège du transfert de masse.

- L'exposant c de la corrélation empirique $Sh = a Re^b Sc^c$ pour deux valeurs du nombre de Reynolds a été trouvé comme suit :

$$Re = 102 \quad c = 0.43$$

$$Re = 310 \quad c = 0.44$$

En utilisant la valeur de l'exposant c égale à 0.43, ils ont corrélé leurs résultats numériques par l'équation :

- Le transfert de matière en présence d'un écoulement tourbillonnaire induit par une entrée tangentielle non entretenue, est directement influencé par le nombre de Schmidt et que la valeur de l'exposant de celui-ci dans la relation empirique est de l'ordre de 0.4 et non 1/3.

L.Guy Raguin, Mark Shannon, John G.Georgiadis (2000) ont étudié les écoulements de Taylor –Couette et Poiseuille dans le mode cellulaire; tourbillons se déplaçant dans la direction axiale, avec $Re_a < 10$.

Les résultats obtenus de leurs expériences montrent que :

- L'écoulement de Taylor Couette participe au transport de matière dans la direction radiale lorsque les nombres de Sh sont de l'ordre de la centaine et des nombres de Ta de 100 à 400 fois supérieur à la valeur critique. Les résultats sont de même ordre de grandeur que ceux de Mizushima ; la différence de géométrie entre les deux expériences (le rapport de rayon N vaut 0.5 dans le cas de leur étude, 0.468 et 0.617 dans les travaux de Mizushima) et l'apparition des problèmes électriques dans leurs expériences sont l'explication probable aux écarts constatés.
- La forme des tourbillons est toujours toroïdale, l'inclinaison des tores est due probablement aux effets de bords. L'angle d'inclinaison reste constant, et ne change pas de direction. On note qu'aucun mode de tourbillons oscillants n'a été mis en évidence.
- Lorsque le rapport des nombres de Reynolds axial et de rotation augmente, la taille des tourbillons diminue et l'angle d'inclinaison augmente.
- Lorsqu'une faible circulation axiale est imposé ($Re_a < 10$), les tourbillons se mettent à se déplacer dans la direction axiale en s'inclinant, ce qui a été visualisé à l'aide de l'injection de colorant. Il a été montré que le débit axial conduisait à un rétrécissement et à une plus grande inclinaison des tourbillons sans changement de la direction d'inclinaison.
- La vitesse axiale des tourbillons est supérieure à la vitesse axiale correspondant au débit imposé, ce qui est en contradiction avec les travaux de Giordano et al.(1998) ($N=0.677$, $\Gamma=18.3$, $260 \leq Re \leq 1230$, $0.344 \leq Re_a \leq 1230$) et constitue un phénomène expérimental jusqu'ici peu mentionné (étude de la stabilité de l'écoulement par Snyder (1962) avec $N=0.95$, $\Gamma=285$, $0 \leq Re_a \leq 200$). Ce phénomène a cependant été prévu mais non étudié en détail dans les études numériques linéaires de la stabilité de l'écoulement par Takeuchi et Jankowski (1981), et Chung et Astill (1977) où la vitesse de propagation C_{rL} est supérieure à l'unité.

H.D.Doan et al en 2001 ont étudié le transfert de masse dans le cas d'une sphère en utilisant la méthode électrochimique. Après avoir déterminé la tension appropriée à

appliquer, des expériences ont été effectuées avec des concentrations divers de la solution ferricyanures de 0.01 à 0.03M. Les résultats de leurs expériences sont :

- Quand la concentration de la solution ferricyanure a été augmentée, le taux de transfert de masse a augmenté comme prévu. Cependant le coefficient de transfert de masse est resté relativement constant, ainsi que les nombres correspondants de Sherwood n'ont pas changé de manière significative comme c'est indiqué sur le tableau suivant :

Concentration de la solution ferricyanure	Densité de courant limite	Le nombre de Sherwood
0.0092	0.093	109
0.0205	0.208	109
0.0281	0.290	110
0.0305	0.318	112

- Aux premiers instants, après le début de l'expérience, le taux de transfert était très haut, puisque le gradient de concentration était en conséquence élevé. Puis il diminue à fur et à mesure que le gradient de concentration chute avec le temps. Après un temps de 200s la variation du taux de transfert et par conséquent, le nombre de Sherwood reste invariable.
- L'approche de l'état d'équilibre a été atteint à un temps sans dimension environ 20, et ils ont signalé qu'il y avait une augmentation anormale du nombre de Sherwood au début de l'expérience, cela est dû aux conditions initiales de l'expérience.

La corrélation utilisée pour estimer le nombre de Sherwood dans le cas d'une sphère a été celle donnée par Linton et Sutherland (1960).

$$Sh = 2 + 0.582 Re^{1/2} Sc^{1/3}$$

Chien-Chang Huang 2004 a étudié le transfert de chaleur et de masse dans un conduit rectangulaire vertical en considérant un écoulement uniforme tridimensionnel régulier d'un mélange eau, air en utilisant la méthode vorticité – vitesse d'un écoulement parabolique tridimensionnel, les principaux résultats sont :

- la couche limite diffusionnelle se développe plus rapidement que la couche limite thermique. Cela est dû simplement au fait que le nombre de Prandtl Pr est légèrement plus grand que le nombre de Schmidt Sc
- Les lignes des isothermes et les iso- concentrations se développent de la même manière, parce que l'équation de la concentration et celle de l'énergie sont semblables.
- Le transfert de chaleur et de masse est très important lorsque le rapport d'aspect est plus grand.

Helel Dalel et al 2005 ont étudié l'effet des couches limites dynamique, thermique et massique sur le mécanisme des transferts de chaleur et de masse au sein d'un milieu poreux soumis à une convection forcée laminaire. Le système d'étude est composé d'une plaque poreuse non saturée ayant les caractéristiques de la brique formée de trois phases solide, liquide et gazeuse. Les deux parois verticales de la plaque poreuse ainsi que la paroi inférieure sont assimilées à des parois adiabatiques et imperméables. La face haute de la plaque poreuse représente l'interface perméable. Ce système est exposé à un écoulement convectif forcé rentrant dans le canal dont les paramètres ambiants [P , T , C_v (concentration en vapeur)] sont contrôlés. Les parois basse et haute sont écartées d'une distance. Les trois autres faces sont adiabatiques et imperméables à la matière. Le système d'équation du fluide dans le canal est résolu numériquement par la méthode des différences finies. Les résultats trouvés sont :

- Les différentes grandeurs T et C_v varient sensiblement dans la zone de la couche limite.
- Concernant la concentration de la vapeur d'eau il y a apparition d'un phénomène de condensation et le temps de séchage est plus long vu l'importance de la concentration.
- Le facteur temps influe fortement sur la température ainsi que sur la concentration de milieu fluide.
- La concentration interfaciale en vapeur d'eau est maximale au voisinage du bord d'attaque puis décroît légèrement le long du canal.
- Le coefficient de transfert est important au voisinage du bord d'attaque et décroît légèrement en fonction de x et du temps. Cette augmentation est directement liée à la phase dans laquelle se situe le milieu poreux
- Les grandeurs physiques à l'intérieur du canal (température, concentration) varient légèrement dans la zone de la couche limite.

- La variabilité spatio-temporelle des coefficients d'échange thermique et massique affecte sensiblement les profils des grandeurs interfaciales.
- La variabilité des coefficients des transferts de chaleur et de masse, sous l'effet des conditions externes et des phénomènes de la couche limite, a un effet sur le processus et sur la cinétique de séchage.

Othmane Oulaid 2005 et al se sont intéressés à l'étude du phénomène de renversement dans un écoulement laminaire ascendant en présence du transfert couplé de chaleur et de masse et changement de phase dans un canal vertical formé de deux plaques planes parallèles distantes de $2h$. Ces plaques sont mouillées par un film d'eau de très faible épaisseur et soumises à une température uniforme T_w . L'air ambiant entre à une température T_0 , une humidité relative Φ_0 et un profil de vitesse uniforme. La méthode de résolution numérique est celle des volumes finis. Le couplage vitesse pression est traité par l'algorithme SIMPLER. Le maillage est non uniforme dans les deux directions avec une densité de nœud plus grande près de l'entrée et près des parois où les gradients de température et de concentration sont plus élevés

Les résultats trouvés sont :

- L'évolution du nombre de Sherwood n'est pas monotone.
- Sh présente un minimum correspondant à la valeur minimale de coefficient de frottement.
- A la sortie du canal et dans tous les cas étudiés, Sh tend vers la valeur asymptotique 7.5 qui correspond à un écoulement développé en convection forcée.

Sh diminue avec T_0 , ce qui est dû aux forces d'Archimède dont l'intensité augmente avec T_0 , ces forces décelèrent l'écoulement d'air ascendant près des parois du canal et induisent ainsi un renversement d'écoulement pour des températures d'air à l'entrée du canal assez élevées, ce qui conduit à une diminution du transfert de masse.

A la lumière de cette étude bibliographique, notre travail est alors axé sur la modélisation numérique de l'hydrodynamique et du transfert de matière en écoulement axial laminaire avec tourbillons dans un espace annulaire dans le cas d'un développement simultané des champs de vitesse et de concentration.

Chapitre .II

Formulation du problème

II-1 Présentation du Problème :

On s'intéresse à l'étude du transfert de matière dans un écoulement instationnaire d'un fluide compris entre deux cylindres concentriques, le cylindre intérieur de rayon R_1 tournant à une vitesse Ω_1 et le cylindre extérieur de rayon R_2 étant immobile. A l'instant initial, un fluide incompressible de viscosité cinématique ν , de coefficient de diffusion D est injecté suivant l'axe du cylindre au court du temps avec une vitesse d'injection w_e en mouvement axial, (figure II-1).

II-2 Hypothèses :

Le traitement du problème physique nécessite l'utilisation du principe de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et l'équation de la diffusion convection de la concentration. Ces équations régissent le phénomène physique étudié.

Dans notre étude nous avons considéré, les hypothèses simplificatrices suivantes :

- L'écoulement est supposé laminaire avec tourbillons, bidimensionnel et à symétrie axiale.
- Le fluide considéré est supposé newtonien, incompressible et à propriétés physiques constantes.
- Les forces extérieures (force de gravité) sont négligeables.

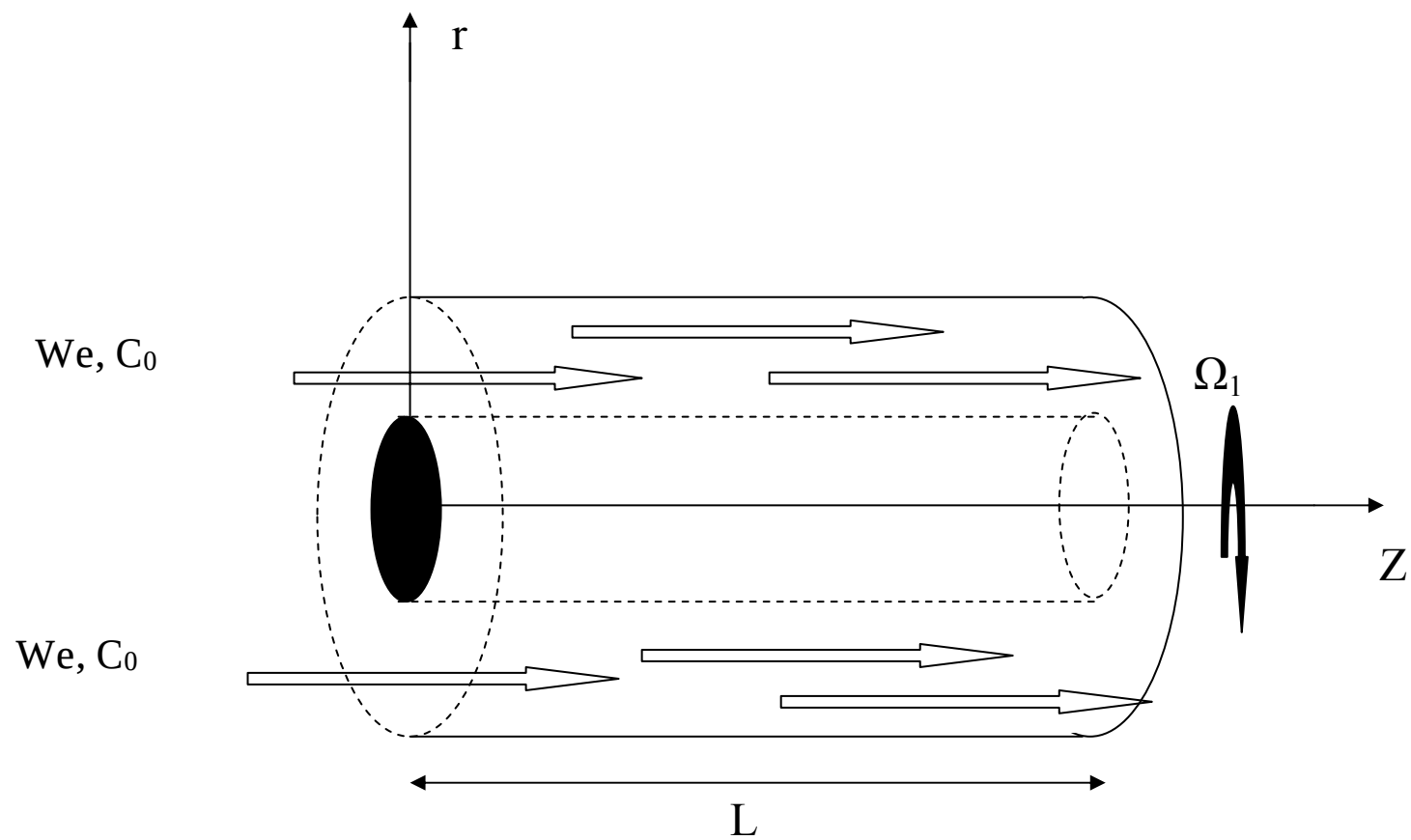


Figure II-1 : Géométrie du problème

Chapitre . III

Résolution numérique

III.1. Introduction :

L'analyse de tout phénomène physique, tel que l'écoulement d'un fluide ou le transfert de matière, a pour but de déterminer les valeurs des différentes variables qui le caractérisent, en fonction des paramètres établis. Cette analyse peut être effectuée par trois méthodes qui sont :

- La méthode expérimentale.
- La méthode analytique.
- La méthode numérique.

Cette dernière présente plusieurs avantages, entre autres, sa rapidité de prédiction, son coût non élevé, ses informations complètes et détaillées ainsi que sa capacité à simuler des conditions réelles.

La résolution consiste en la discrétisation en modèles élémentaires faciles à manipuler. Toutefois, la vérification expérimentale est nécessaire pour valider les informations obtenues par la méthode numérique ou analytique.

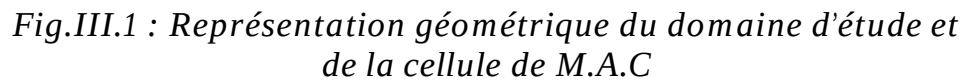
La méthode choisie dans notre travail fait suite à celle utilisée dans les travaux de A.GHEZAL & al. (1992), Z.OUCHIHA 1998, B.DADDA 2004, N.AIT MOUSSA 2004 ET R.HADJ-ALI (2005). Cette méthode est celle des différences finies qui est souvent appliquée pour la recherche des solutions des équations partiellement paraboliques. Elle procède par approximation des dérivées d'une fonction en terme de ses approchées aux points (nœuds) du maillage.

III.2. Méthode de résolution :

La méthode de résolution choisie est basée sur le remplacement du domaine de variation des variables r, z, t par un ensemble de valeurs discrètes de points, appelés « Nœud » du système, correspondant aux nœuds du maillage ainsi constitué.

Il est très intéressant de chercher le maillage convenable qui assure la convergence de la méthode du calcul, car il peut y avoir une certaine limite de la taille de la maille conduisant à la divergence du schéma. Par raison de symétrie du problème, l'étude a été limitée au domaine OMBA divisé en cellules de cotés $\Delta r = h_r$ et $\Delta z = h_z$.

Chaque cellule est repérée par les indices (i,j) , (Fig III-1). L'indice « i » indique la position du domaine sur l'axe (oz) et l'indice « j » sa position sur l'axe (or).



Si h est le pas spatial, k le pas de temps et n l'indice de temps ($t=nk$), les différentes variables sont définies comme suit :

$C_{i+1/2,j+1/2}^n$ La valeur de C au point : $z_{i+1/2} = (i+1/2)h$ et $r_{j+1/2} = (j+1/2)h$ à l'instant $t=nk$

III.3. Discrétisation des dérivées partielles :

Les équations de Navier –Stokes relatives à cette étude sont de type parabolique suivant le temps ; de ce fait le système d'équations est approximé en utilisant les opérateurs de différence par le système équivalent suivant :

Equations de mouvement :

Suivant la direction radiale :

$$\begin{aligned} \delta_t u \Big|_{i,j+1/2}^n + \left[\alpha \left(u \delta_r^0 u - \frac{\bar{v}}{r} + \bar{w} \delta_z^0 u \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(u \delta_r^0 u - \frac{\bar{v}}{r} + \bar{w} \delta_z^0 u \right)^n \right]_{i,j+1/2} = \\ -(\delta_r^+ \Pi)_{i,j}^{n+\alpha} + \frac{1-N}{\text{Re}_a} \left[\alpha \left(\delta_r^2 u + \frac{\delta_r^0 u}{r} - \frac{u}{r^2} + \delta_z^2 u \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\delta_r^2 u + \frac{\delta_r^0 u}{r} - \frac{u}{r^2} + \delta_z^2 u \right)^n \right]_{i,j+1/2} \end{aligned} \quad (III.1.a)$$

Suivant la direction tangentielle :

$$\begin{aligned} \delta_t v \Big|_{i+1/2,j+1/2}^n + \left[\alpha \left(\bar{u} \delta_r^0 v + \frac{\bar{u}v}{r} + \bar{w} \delta_z^0 v \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\bar{u} \delta_r^0 v + \frac{\bar{u}v}{r} + \bar{w} \delta_z^0 v \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} = \\ \frac{1-N}{\text{Re}_a} \left[\alpha \left(\delta_r^2 v + \frac{\delta_r^0 v}{r} - \frac{v}{r^2} + \delta_z^2 v \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\delta_r^2 v + \frac{\delta_r^0 v}{r} - \frac{v}{r^2} + \delta_z^2 v \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} \end{aligned} \quad (III.1.b)$$

Suivant la direction axiale :

$$\begin{aligned} \delta_t w \Big|_{i+1/2,j}^n + \left[\alpha \left(\tilde{u} \delta_r^0 w + w \delta_z^0 w \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\tilde{u} \delta_r^0 w + w \delta_z^0 w \right)^n \right]_{i+1/2,j} = -\delta_z^+ \Pi \Big|_{i,j}^{n+\alpha} \\ \frac{1-N}{\text{Re}_a} \left[\alpha \left(\delta_r^2 w + \frac{\delta_r^0 w}{r} + \delta_z^2 w \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\delta_r^2 w + \frac{\delta_r^0 w}{r} + \delta_z^2 w \right)^n \right]_{i+1/2,j} \end{aligned} \quad (III.1.c)$$

Discretisation de l'équation de diffusion convection :

$$\begin{aligned} \delta_t c \Big|_{i+1/2,j+1/2}^n + \left[\alpha \left(\bar{u} \delta_r^0 c + \bar{w} \delta_z^0 c \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\bar{u} \delta_r^0 c + \bar{w} \delta_z^0 c \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} = \\ \frac{1-N}{\text{Re}_a \text{Sc}} \left[\alpha \left(\delta_r^2 c + \frac{\delta_r^0 c}{r} + \delta_z^2 c \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\delta_r^2 c + \frac{\delta_r^0 c}{r} + \delta_z^2 c \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} \end{aligned} \quad (III.1.d)$$

$\bar{u}_{i+1/2,j+1/2}, \tilde{u}_{i+1/2,j}, \bar{v}_{i,j+1/2}, \bar{w}_{i,j+1/2}$ et $\bar{w}_{i+1/2,j+1/2}$ sont des valeurs moyennes définies comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{v}_{i,j+1/2} &= \frac{1}{2} (v_{i+1/2,j+1/2} + v_{i-1/2,j+1/2}) \\ \bar{u}_{i+1/2,j+1/2} &= \frac{1}{2} (u_{i+1,j+1/2} + u_{i,j+1/2}) \\ \bar{w}_{i+1/2,j+1/2} &= \frac{1}{2} (w_{i+1/2,j+1} + w_{i+1/2,j}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{w}_{i,j+1/2} &= \frac{1}{4} (w_{i+1/2,j+1} + w_{i-1/2,j+1} + w_{i+1/2,j} + w_{i-1/2,j}) \\ \tilde{u}_{i+1/2,j} &= \frac{1}{4} (u_{i+1,j+1/2} + u_{i+1,j-1/2} + u_{i,j+1/2} + u_{i,j-1/2})\end{aligned}$$

Equation de continuité :

L'équation de continuité entraîne des instabilités dans la résolution des équations de mouvement. Pour des conditions initiales incompatibles ou à cause d'une solution itérative incomplète avec un schéma aux méthodes implicites, l'opérateur $D_{i,j}$ est non nul.

Le terme de pression est dans ce cas là instable. Le processus itératif peut en effet causer une amplification de l'erreur de troncature si on considère $D_{i,j} = 0$. Pour éviter ces instabilités on impose une compressibilité artificielle avec un opérateur $D_{i,j}^{n+1}$.

$$\delta_r^- u \Big|_{i,j+1/2}^{n+1} + \frac{u}{r} \Big|_{i,j}^{n+1} + \delta_z^- w \Big|_{i+1/2,j}^{n+1} = 0 \quad (III.1.e)$$

III.4. Schéma de discrétisation:

Pour la résolution dans le temps des équations du problème, le schéma utilisé est plus proche de celui proposé par R. Peyret [1976]. Il consiste en une méthode aux différences finies semi implicite du type Crank-Nicolson. Cette technique correspondant à $\alpha = 1/2$, consiste à satisfaire les équations aux différences au milieu de l'intervalle séparant le plan en temps $(n+1)$ où la solution est cherchée, du plan (n) où elle est connue. Les équations se réécrivent dans ce cas là comme suit

Equation de continuité :

$$\delta_r^- u \Big|_{i,j+1/2}^{n+1} + \frac{u}{r} \Big|_{i,j}^{n+1} + \delta_z^- w \Big|_{i+1/2,j}^{n+1} = 0 \quad (III.2.a)$$

Equation de mouvement :

Suivant r :

$$\begin{aligned}\delta_t u \Big|_{i,j+1/2}^n + \frac{1}{2} \left[\left(u \delta_r^0 u - \frac{\bar{v}}{r} + \bar{w} \delta_z^0 u \right)^{n+1} + \left(u \delta_r^0 u - \frac{\bar{v}}{r} + \bar{w} \delta_z^0 u \right)^n \right] \Big|_{i,j+1/2} = \\ -(\delta_r^+ \Pi)_{i,j}^{n+\alpha} + \frac{1-N}{2 \text{Re}_a} \left[\left(\delta_r^2 u + \frac{\delta_r^0 u}{r} - \frac{u}{r^2} + \delta_z^2 u \right)^{n+1} + \left(\delta_r^2 u + \frac{\delta_r^0 u}{r} - \frac{u}{r^2} + \delta_z^2 u \right)^n \right] \Big|_{i,j+1/2}\end{aligned} \quad (III.2.b)$$

Suivant θ :

$$\delta_t v|_{i+1/2, j+1/2}^n + \frac{1}{2} \left[\left(\bar{u} \delta_r^0 v + \frac{\bar{u} v}{r} + \bar{w} \delta_z^0 v \right)^{n+1} + \left(\bar{u} \delta_r^0 v + \frac{\bar{u} v}{r} + \bar{w} \delta_z^0 v \right)^n \right]_{i+1/2, j+1/2} =$$

$$\frac{1-N}{2 \text{Re}_a} \left[\left(\delta_r^2 v + \frac{\delta_r^0 v}{r} - \frac{v}{r^2} + \delta_z^2 v \right)^{n+1} + \left(\delta_r^2 v + \frac{\delta_r^0 v}{r} - \frac{v}{r^2} + \delta_z^2 v \right)^n \right]_{i+1/2, j+1/2} \quad (III.2.c)$$

Suivant z :

$$\delta_t w|_{i+1/2, j}^n + \frac{1}{2} \left[\left(\tilde{u} \delta_r^0 w + w \delta_z^0 w \right)^{n+1} + \left(\tilde{u} \delta_r^0 w + w \delta_z^0 w \right)^n \right]_{i+1/2, j} = -\delta_z^+ \Pi|_{i, j}^{n+\alpha}$$

$$\frac{1-N}{2 \text{Re}_a} \left[\left(\delta_r^2 w + \frac{\delta_r^0 w}{r} + \delta_z^2 w \right)^{n+1} + \left(\delta_r^2 w + \frac{\delta_r^0 w}{r} + \delta_z^2 w \right)^n \right]_{i+1/2, j} \quad (III.2.d)$$

Equation de diffusion convection :

$$\delta_t c|_{i+1/2, j+1/2}^n + \frac{1}{2} \left[\left(\bar{u} \delta_r^0 c + \bar{w} \delta_z^0 c \right)^{n+1} + \left(\bar{u} \delta_r^0 c + \bar{w} \delta_z^0 c \right)^n \right]_{i+1/2, j+1/2} =$$

$$\frac{1-N}{2 \text{Re}_a \text{Sc}} \left[\left(\delta_r^2 c + \frac{\delta_r^0 c}{r} + \delta_z^2 c \right)^{n+1} + \left(\delta_r^2 c + \frac{\delta_r^0 c}{r} + \delta_z^2 c \right)^n \right]_{i+1/2, j+1/2} \quad (III.2.e)$$

III.5. Traitement des opérateurs aux frontières :

Les conditions aux limites sont traitées en utilisant les définitions données par Harlow et Welch 1965, qui considèrent que les parois solides sont confondues avec les bordures des cellules qui sont proches et appartenant au maillage. Une paroi horizontale passe alors à travers les nœuds de la maille portant les vitesses normales qui s'annulent quelquesoit le temps.

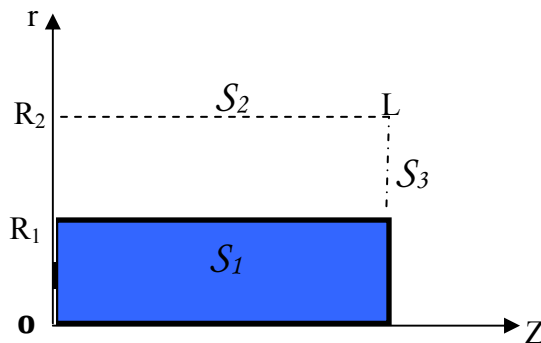


Fig.III.2 : Frontières délimitants le domaine d'étude

Il est donc utile de tenir compte de l'existence d'une maille fictive disposée, à l'extérieur de l'autre côté de la paroi solide pour définir une vitesse tangentielle symétrique permettant de lever l'indétermination et de vérifier la condition d'adhérence.

Sur la paroi S_2 , $r=R_2$:

1°) Le long de cette frontière, nous avons la condition d'adhérence $u = v = w = 0$

Au voisinage de (S_2) , le maillage se présente sous la forme suivante :

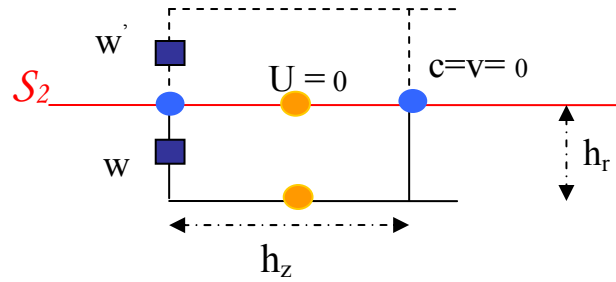


Fig.III.3 : Positionnement des nœuds au voisinage de la paroi S_2

Les composantes radiale et tangentielle u et v de la vitesse se trouvent sur la paroi, tandis que w se trouve à une distance de $h/2$ de cette même paroi, ce qui nous a conduit à l'approximation suivante pour le calcul de w aux points $(i, j_{\max})$:

$$w_{i+1/2, j_{\max}} = \frac{w_{i+1/2, j_{\max}+1/2} + w_{i+1/2, j_{\max}-1}}{3}$$

$$w_{i+1/2, j_{\max}+1/2} = 0$$

Ce qui donne :

$$w_{i+1/2, j_{\max}} = \frac{1}{3} w_{i+1/2, j_{\max}-1}$$

Les opérateurs L_u et L_v appliqués au point $(R-h, z, t)$ et ses dérivées par rapport à r ne débordent pas sur la frontière (S_2) .

La condition de réflexion pour la vitesse axiale tel que $w' = -w$ [le « ' » symbolise une cellule fictive située à l'extérieur de la paroi solide).

2°) Pour la concentration, on distingue deux cas :

a) S_2 paroi activée :

La concentration sur la paroi $\mathcal{S}_2$ est nulle

La concentration sur la paroi S_1 : $C=1$

b) S_1 paroi activée :

La concentration sur la paroi $\mathcal{S}_1$ est nulle

La concentration sur la paroi $\mathcal{S}_2$: $C=1$

Sur la paroi S_3 , $z=\mathcal{L}$:

A la section de sortie, le traitement des conditions aux limites ne diffère pas de celui utilisé pour les parois solides. Cependant l'absence des variations de différentes grandeurs dans la direction axiale oz , est prise en considération, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$

Pour les vitesses normales à la section $\mathcal{S}_3$ et la concentration, on utilise une approximation précise à l'ordre 2. Les opérateurs L_u, L_v, L_w, L_c et D appliqués aux nœuds respectifs, où sont définis chacun des paramètres, ne débordent pas sur cette frontière.

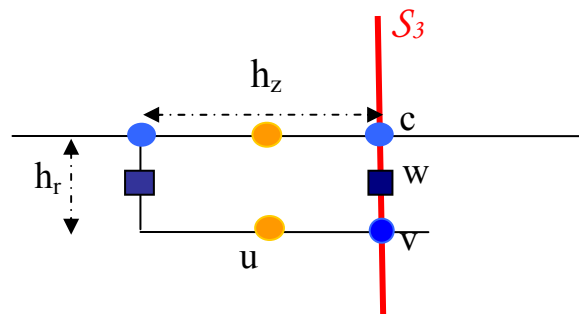


Fig.III.4 : Positionnement des nœuds au voisinage de la paroi S_3

Au voisinage des parois du cylindre intérieur : $r=R_1$

Le cylindre intérieur est disposé sur l'axe de symétrie de sorte que le traitement des variables sur ces parois nécessite des considérations particulières.

La paroi passe dans ce cas entre deux lignes du maillage définissant ainsi une demi maille, fig III.5. Cette dernière permet d'éviter le problème de réflexion de la vitesse tangentielle car elle ne peut pas se faire à l'intérieur du cylindre tournant.

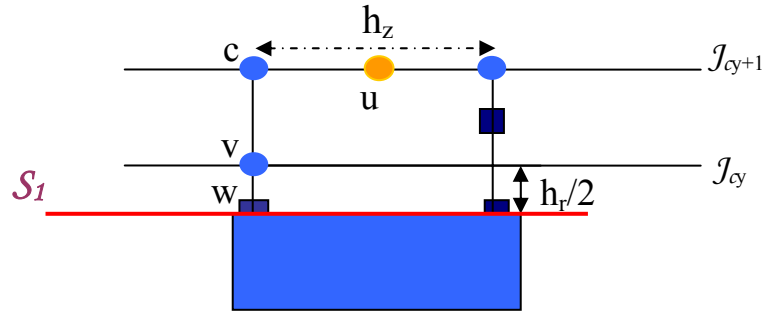


Fig.III.5: Positionnement des nœuds au voisinage de la paroi S_1

La valeur de v au point (i, j_{cy}) est donnée par l'approximation suivante

$$v_{i,j_{cy}} = \frac{1}{3} \left(v_{i,j_{cy+1}} + 2v_{rot} \right)$$

V_{rot} est la vitesse de rotation du cylindre intérieur.

III.6. Hypothèse sur la vitesse de rotation du cylindre intérieur :

Pour éviter la création des instabilités dues à la vitesse de rotation nous avons opté pour une variation linéaire évolutive de cette dernière depuis la valeur initiale, nulle, à la valeur imposée proposé par A.Ghezal & al [1992].

Des tests numériques effectués, ces auteurs ont conduit au choix de l'expression suivante qui donne l'évolution de la vitesse de rotation $v_{rot}(t)$ du cylindre intérieur en fonction du temps :

$$v_{rot}(t) = \begin{cases} \frac{t}{20} v_0 & \text{si } t < \frac{20}{64} \\ v_0 & \text{si } t > \frac{20}{64} \end{cases}$$

Où v_0 est la vitesse de rotation imposée.

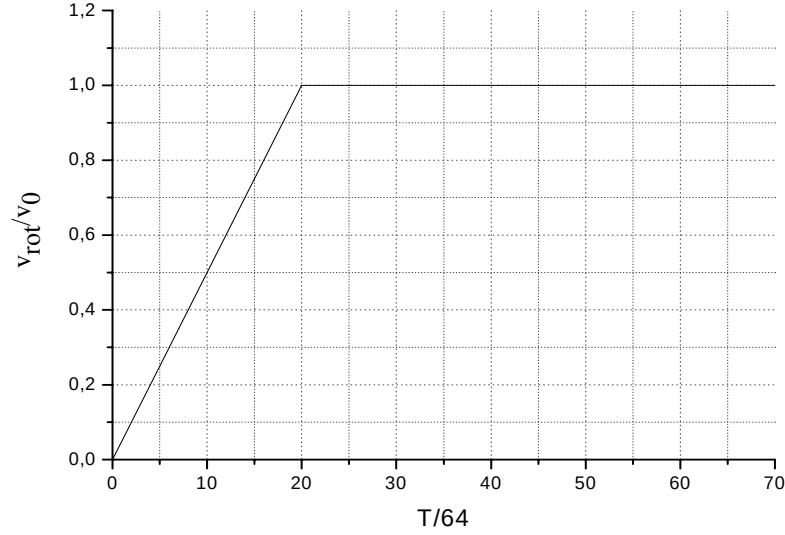


Fig.III.6 : Evolution de la vitesse de rotation au cours du temps

III.7.Procédé itératif

Après la discrétisation des dérivées temporelles des équations (III.2.a) et (III.2.e), on obtient, pour chaque pas de temps, un système algébrique d'équations non linéaires à résoudre en tout point de l'écoulement et dont les inconnues sont les cinq variables u, v, w, C et Π la pression.

On utilise les notations suivantes :

$$u_h = u_{i,j+1/2}^{n+1}, \quad v_h = v_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}, \quad w_h = w_{i+1/2,j}^{n+1}, \quad C_h = C_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} \text{ et } \Pi_h = \Pi_{i,j}^{n+1}$$

Les équations discrétisées s'écrivent alors symboliquement :

$$\left. \begin{aligned} L_u(u_h, v_h, w_h, \Pi_h) &= 0 \\ L_v(u_h, v_h, w_h) &= 0 \\ L_w(u_h, w_h, \Pi_h) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.3.a})$$

$$L_c(u_h, w_h) = 0 \quad (\text{III.3.b})$$

$$D(u_h, w_h) = 0 \quad (\text{III.3.c})$$

Ces équations sont appliquées sur tous les points de la maille MAC

En utilisant ces notations pour résoudre le système d'équations, on construit le schéma itératif basé sur les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_h^{v+1} - u_h^v + KL_u(u_h^v, v_h^v, w_h^v, \Pi_h^v) = 0 \\ v_h^{v+1} - v_h^v + KL_v(u_h^{v+1}, v_h^v, w_h^v) = 0 \\ w_h^{v+1} - w_h^v + KL_w(u_h^{v+1}, w_h^v, \Pi_h^v) = 0 \\ \Pi_h^{v+1} - \Pi_h^v + \omega D(u_h^{v+1}, w_h^{v+1}) = 0 \\ C_h^{v+1} - C_h^v + \chi L_c(u_h^{v+1}, w_h^{v+1}, C_h^v) = 0 \end{cases} \quad (III.4)$$

Dans ces relations v est l'indice d'itération

Les paramètres K, ω, χ sont les coefficients de sous relaxation assurant la convergence du système précédent, ils sont choisis tel que :

$$0 < K < 1$$

$$0 < \omega < 1$$

$$0 < \chi < 1$$

Pour chaque pas d'itération, on calcule les valeurs $u_h^{v+1}, v_h^{v+1}, w_h^{v+1}, \Pi_h^{v+1}$ et C_h^{v+1} à partir des valeurs connues (calculées au pas précédent) $u_h^v, v_h^v, w_h^v, \Pi_h^v$ et C_h^v et en prenant comme valeurs de départ $u_h^0, v_h^0, w_h^0, \Pi_h^0$ et C_h^0 .

Une fois les nouvelles valeurs calculées, on actualise les variables $u_h^v = u_h^{v+1}$ et on passe à l'itération suivante. C'est le principe de la méthode de Gauss-Seidel. On répète ce processus jusqu'à la convergence où $u_h^{v+1} = u_h^v, v_h^{v+1} = v_h^v$ etc. en tout point de l'écoulement avec une précision choisie. Les équations sont résolues pour les dernières vitesses, concentrations et pressions calculées.

Plus précisément, l'algorithme d'itération continue tant que les cinq conditions suivantes ne sont pas remplies :

$$\left| u_h^{v+1} - u_h^v \right| < \varepsilon ; \left| v_h^{v+1} - v_h^v \right| < \varepsilon ; \left| w_h^{v+1} - w_h^v \right| < \varepsilon ; \left| \Pi_h^{v+1} - \Pi_h^v \right| < \varepsilon ; \left| C_h^{v+1} - C_h^v \right| < \varepsilon$$

Où on choisit $\varepsilon \ll 1$.

Les conditions sur K, ω, χ assurant la convergence sont démontrées dans l'annexe A.

Aucun résultat théorique sur le choix des valeurs de K, ω, χ n'est déterminé de manière certaine donc l'optimisation ne doit se faire par des tests numériques.

A fin de limiter le nombre d'itérations et par conséquent le temps de calcul, on impose que la convergence du procédé itératif est obtenue quand :

$$\text{Max}(|L_u|, |L_v|, |L_w|, |L_c|, |D|) < \varepsilon$$

Dans notre cas, les erreurs de troncature sont estimées à $0(h^2, k^2)$ pour un pas de temps $k = 1/64$, les valeurs de ε sont de l'ordre de h^2 ($\varepsilon = 4.10^{-3}$).

Les étapes de la méthode de résolution de système algébrique (III-2) sont résumées par l'algorithme représenté sur la figure.III.7 où :

$Q_{\max}$ et $Q_{\min}$: délimitent le domaine où l'on cherche la valeur optimale de χ qui assure la bonne convergence.

NHH : représente le nombre maximum d'itération demandé.

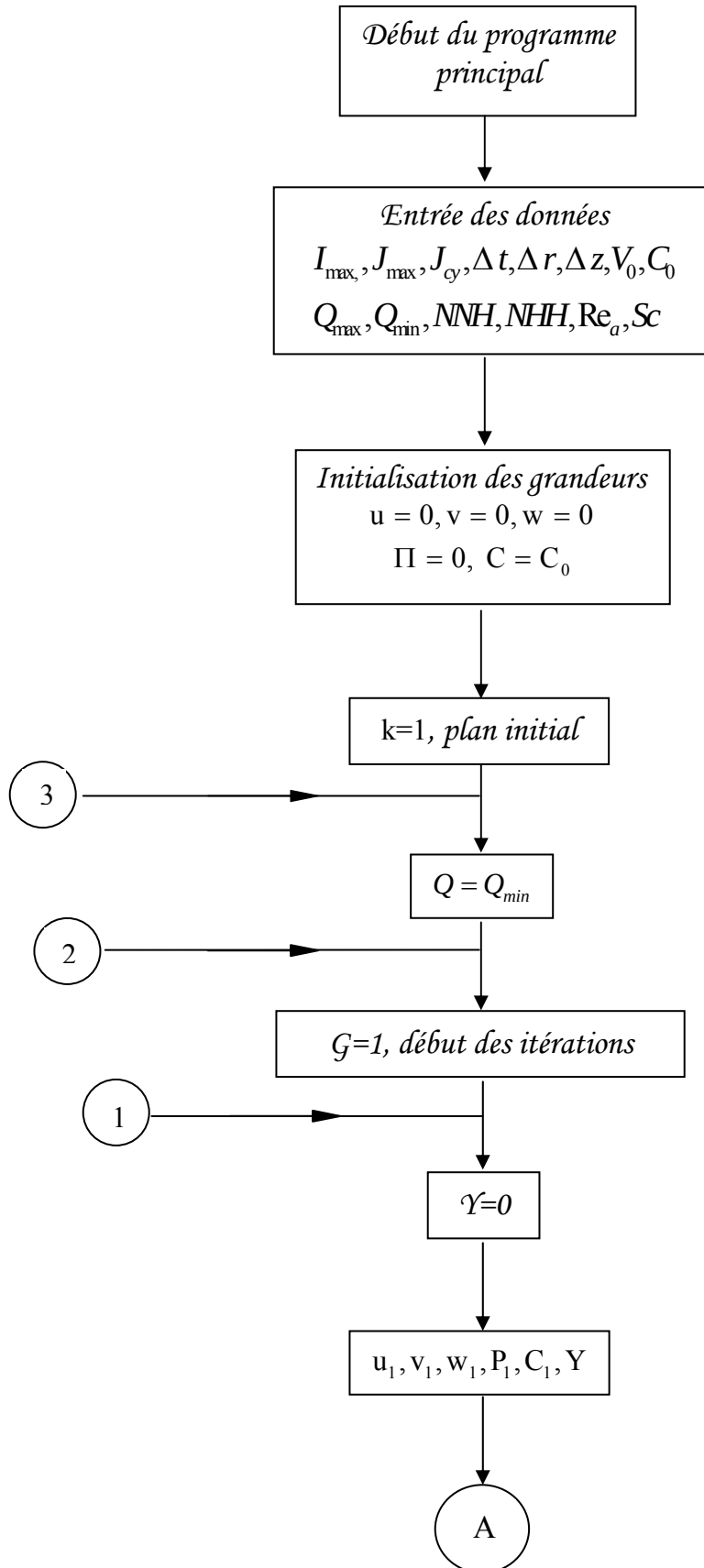
NNH : représente le nombre maximum de pas en temps demandé.

K : compteur des itérations effectuées dans le temps.

G : compteur des itérations effectuées pour la convergence.

Y : le maximum entre les opérateurs L_u, L_v, L_w, L_c, D .

L'instruction transfert est une simple affectation des éléments des matrices u_1, v_1, w_1, P_1 et C_1 respectivement dans les matrices u_0, v_0, w_0, P_0 et C_0 pour les remplir au prochain plan du temps.



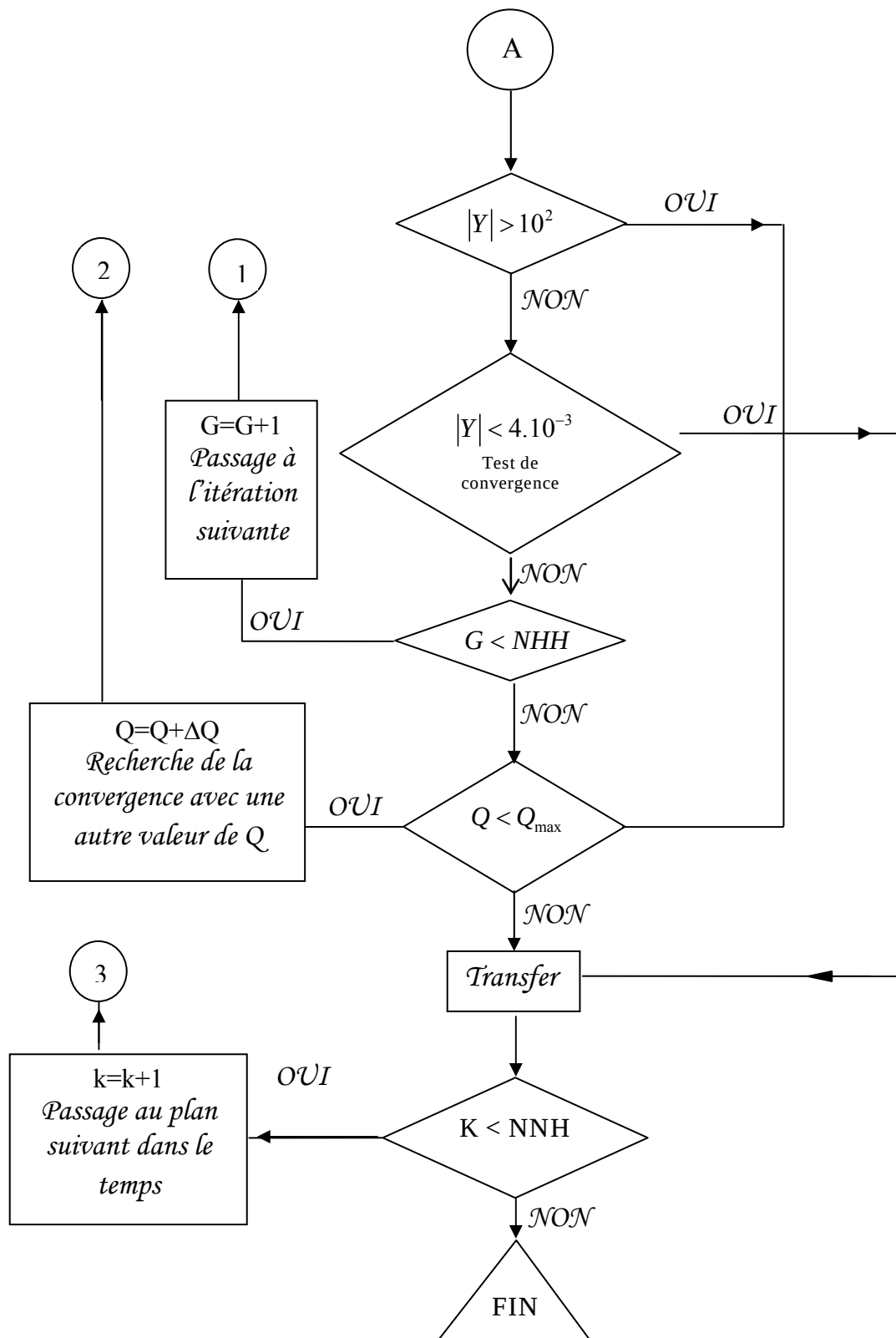


Figure .III.7: Organigramme du processus itératif

Chapitre IV

Résultats & Discussions

2^{ème} cas : Avec rotation

IV.3. Problème dynamique :

Les calculs ont été effectués dans un espace annulaire caractérisé par un rapport de rayon $\eta = 0.5$ et un rapport de forme $\Gamma=14$, en fonction de la coordonnée radiale réduite $\zeta = (r - R_1)/d$ et pour différentes côtes, $\xi = z/d$. Le nombre de Reynolds est compris entre 10 et 100 et le nombre de Taylor considéré prend de faibles valeurs correspondant au régime laminaire avec présence de tourbillons. L'influence de différents paramètres dynamiques régissant l'écoulement sur les profils de vitesse et de la pression est étudiée.

IV.3.1-Evolution des profils de vitesse:

Nous avons tracé sur les figures (IV.3.1.a) et (IV.3.1.b) l'évolution des profils radiaux des composantes axiale, radiale, et tangentielle de la vitesse, pour une vitesse de rotation du cylindre interne $V_0=0.2$, et pour deux valeurs du nombre de Reynolds, $Re=10, 100$.

On constate que le maximum de la vitesse axiale augmente au cours du temps jusqu'à atteindre une valeur limite qui demeure constante à partir de l'instant $t = 4$, ceci pour différentes côtes considérées. La même constatation est faite pour la vitesse radiale. En ce qui concerne la vitesse tangentielle, sa courbure diminue en aval et garde le même profil à partir de l'instant $t = 2$.

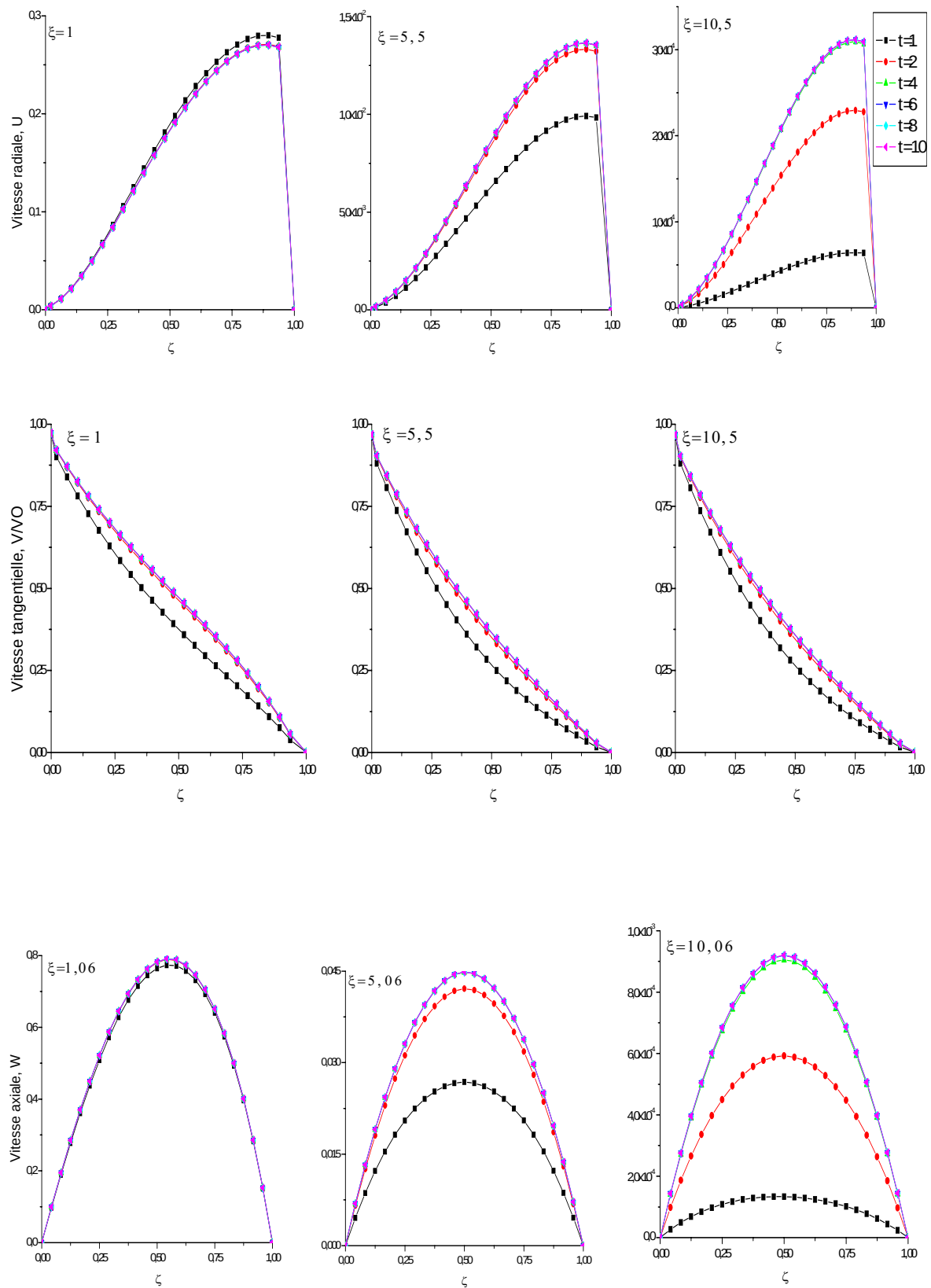


Fig (IV.3.1.a) : Evolution des profils de vitesse, pour $Re=10$ et $Ta=2$ pour différents ξ

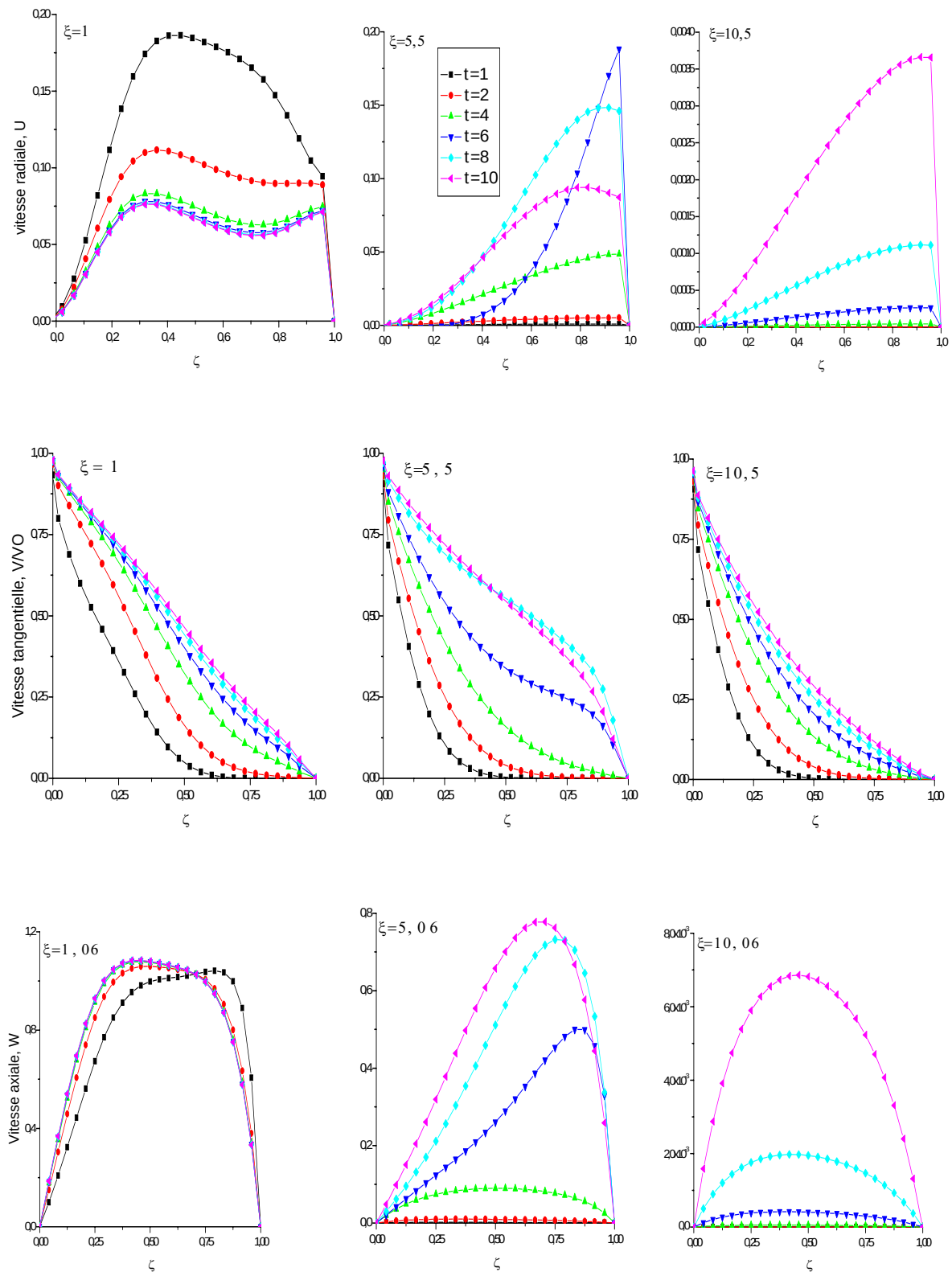


Fig (IV.3.1.b) : Evolution des profils de vitesse pour $Re=100$ et $Ta=2$ pour différents ξ

IV.3.2-Variation axiale des profils de vitesse :

Nous avons représenté les profils des composantes axiale, tangentielle et radiale de la vitesse pour un nombre de Taylor $Ta = 2$, à l'instant $t=10$ pour différentes valeurs du nombre de Reynolds $Re=10, 50, 100$.

IV.3.2.1) Profil radial de la vitesse axiale :

Pour les trois valeurs du nombre de Reynolds, on remarque que le maximum de la vitesse axiale est atteint à l'entrée de l'espace annulaire et il est supérieur à l'unité. En se déplaçant vers l'aval, la vitesse axiale diminue progressivement et tend vers la valeur zéro à la sortie. La vitesse axiale atteint sa valeur maximale dans la zone d'entrée, correspondant à la position $\xi = 0,3125$ pour $Re=10$ et $\xi=0,6875$ pour $Re=50$, ce qui indique que le gradient pariétal de la vitesse pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds, est plus important sur le cylindre interne que sur le cylindre externe. En aval, ce maximum se dirige vers le cylindre externe. Cela montre la dissymétrie du profil de la composante axiale dans l'espace annulaire. Cette vitesse est proche du zéro à la côte $\xi = 5,0625$ pour $Re=10$. Dans cette gamme du nombre de Reynolds les forces visqueuses sont dominantes par rapport à celles de l'inertie. En augmentant le débit axial, $Re=100$ le fluide s'accélère dans l'espace annulaire et le maximum de la composante axiale dépasse l'unité jusqu'à la position axiale $\xi = 2,0625$ où le profil tend asymptotiquement vers le profil de Poiseuille. Dans cette zone, les forces d'inertie sont dominantes. En aval de l'espace annulaire, on remarque une diminution progressive de la vitesse axiale à partir de la côte $\xi = 5,0625$, le maximum se déplace vers la paroi externe et tend vers zéro pour $\xi = 10,0625$. La dissymétrie est plus accentuée pour ce nombre de Reynolds que dans le cas précédent.

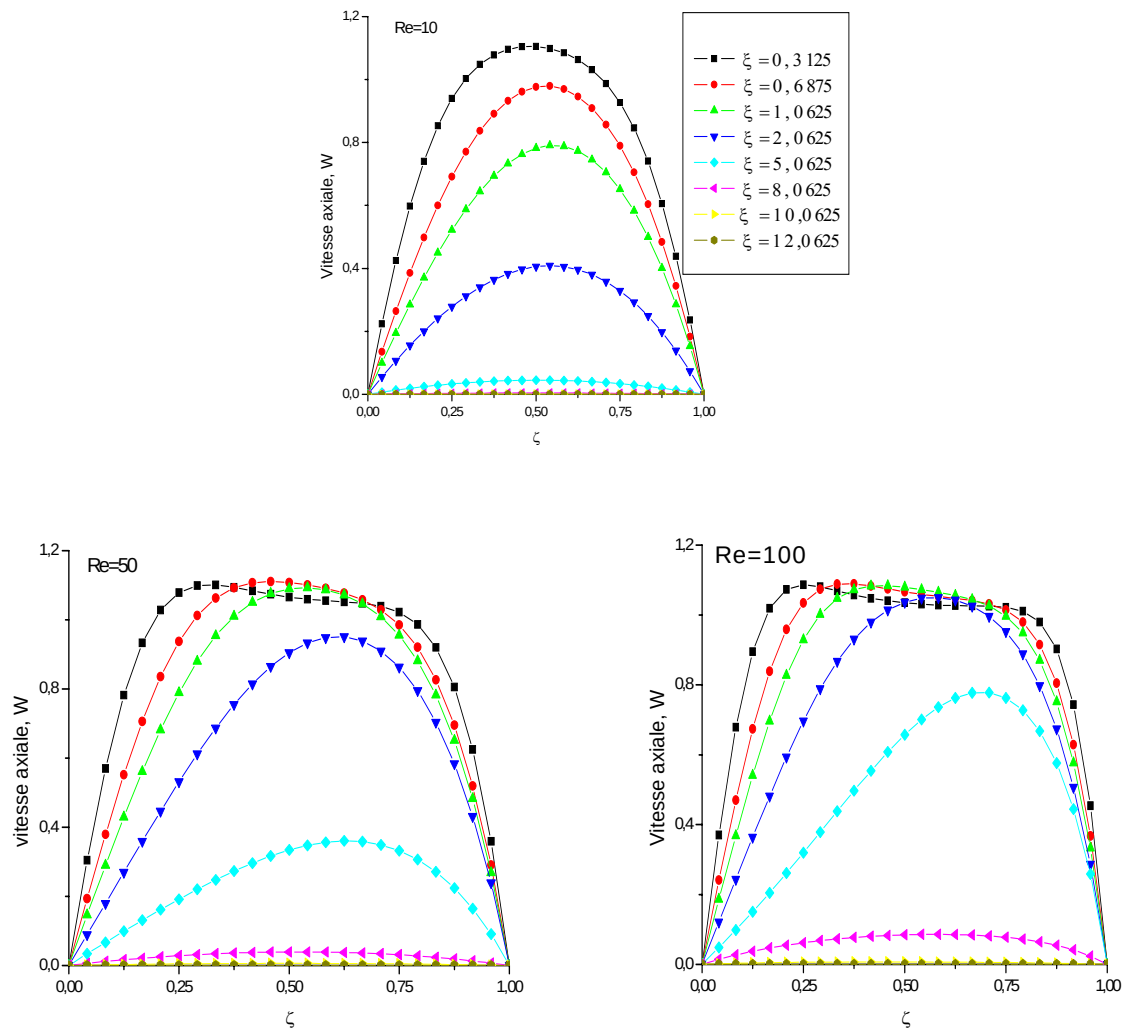


Fig.(IV.3.2.1) : Evolution axiale de la composante axiale de la vitesse, pour $Re=10, 50, 100$

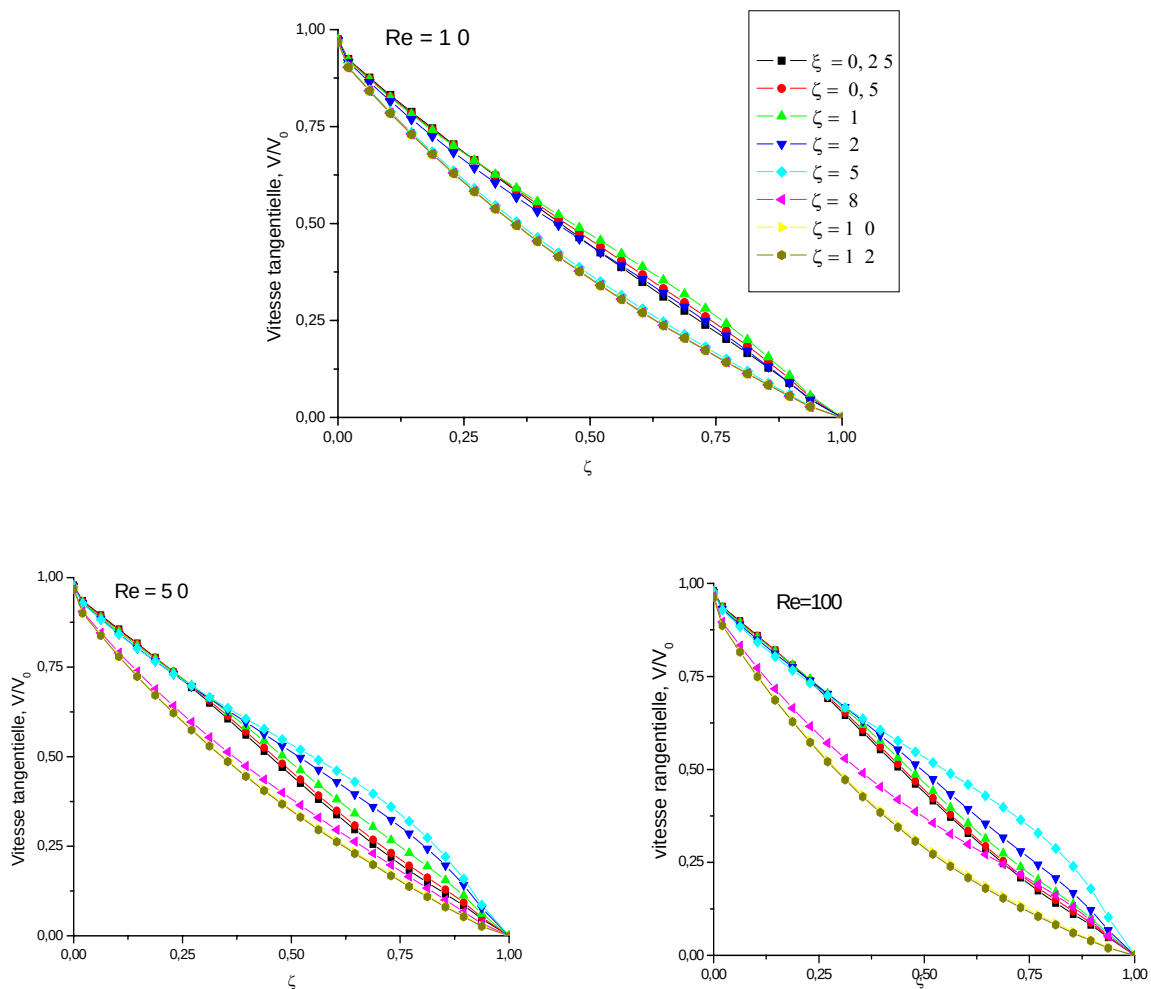
IV.3.2.2) Profil de la composante tangentielle de la vitesse:

Les figures (IV.3.2.2) représentent les profils radiaux de la composante de la vitesse tangentielle pour plusieurs positions axiales et pour différentes valeurs de nombre de Reynolds. Le profil de la vitesse tangentielle se déforme continuellement suivant ξ d'une position à l'autre et varie de sa valeur maximale (paroi tournante) jusqu'à la valeur zéro sur la paroi fixe.

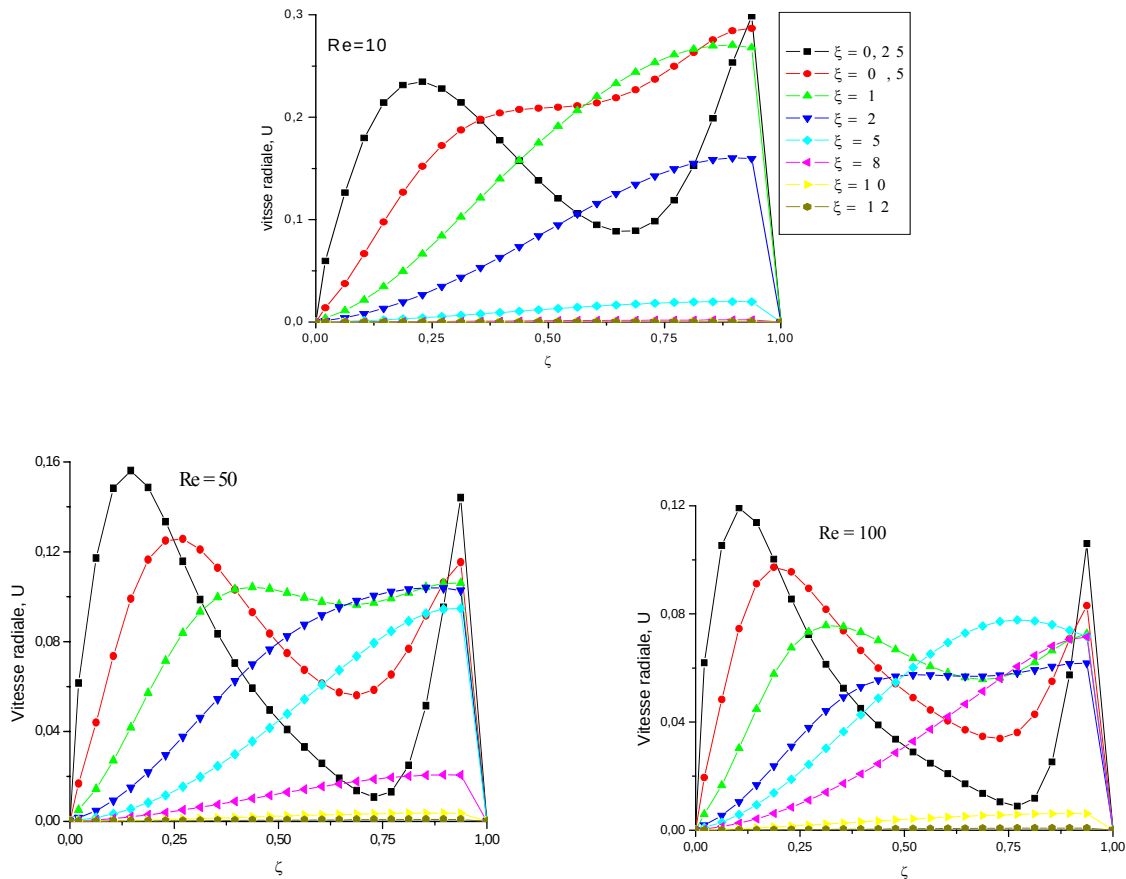
IV.3.2.3) Profil de la composante radiale de la vitesse :

Les profils de la composante de la vitesse radiale en fonction de la coordonnée radiale réduite pour différentes valeurs de nombre de Reynolds ($Re=10, 50, 100$) sont illustrés sur les figures (IV.3.2.3). Les résultats permettent les constatations suivantes:

A l'entrée de l'espace annulaire, la vitesse radiale, qui est nulle, ($U = 0, \forall \zeta \text{ à } \xi=0$), atteint une certaine valeur au voisinage de la paroi tournante ($\zeta < 0.5$), puis elle décroît et augmente de nouveau pour atteindre une deuxième fois une valeur maximale près de la paroi externe ($\zeta > 0.5$). Au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'entrée, le profil garde sa forme (le maximum se rapproche du cylindre externe) et tend vers zéro à la sortie.



FigIV.3.2.2): Evolution axiale du la composante tangentielle de la vitesse, pour $Re=10, 50, 100$



Fig(IV.3.2.3) : Variation en fonction de z de la composante radiale de la vitesse, Pour $Re = 10, 50, 100$

IV.3.3-Influence du nombre de Reynolds sur les profils de vitesse :

IV.3.3.1-L'influence sur les profils de la vitesse axiale :

A l'entrée de l'espace annulaire ($\xi=0.3125$), le profil de la vitesse axiale garde pratiquement le même aspect pour différentes valeurs du nombre de Reynolds ($Re=10, 20, 50, 100$). L'effet de ce dernier commence à se manifester à partir de la position $\xi=1.06$, la figure (IV.3.3.1) indique la limite de l'influence du nombre de Reynolds sur l'écoulement, dans le cas considéré. En augmentant le nombre de Reynolds, les profils se confondent davantage. Le maximum de la vitesse augmente et se situe pratiquement au milieu de l'espace annulaire pour les Reynolds croissants. A la sortie de l'espace annulaire ($\xi=12$), on remarque la présence des effets de bords sur les profils de vitesse axiale. Ces résultats sont en bon accord avec ceux trouvés dans la littérature, notamment ceux de M.Naimi et al.(1990)

IV.3.3.2-L'influence sur les profils de la composante de la vitesse tangentielle :

A l'entrée de l'espace annulaire ($\xi = 0.25$, $\xi = 1$) le profil de la vitesse tangentielle est presque inchangé pour toutes les différentes valeurs du nombre de Reynolds. On signale la présence d'un point d'inflexion qui se situe presque au milieu de l'espace annulaire dans la zone d'entrée ($\xi < 1/2$). Ce point d'inflexion a été signalé dans les travaux de Hirai et al. (1986), Simmers et Coney (1980) et Nouar (1986). On note aussi que la vitesse tangentielle a tendance à augmenter avec le débit axial.

IV.3.3.3-L'influence sur les profils de la composante de la vitesse Radiale :

Au voisinage de l'entrée de l'espace annulaire, le maximum de la vitesse radiale diminue sous l'effet du débit axial. En se déplaçant vers l'aval, ce maximum augmente avec le nombre de Reynolds, Fig (IV.3.3.3). On constate que l'écoulement axial défavorise la composante radiale de la vitesse à l'entrée, et la favorise à la sortie.

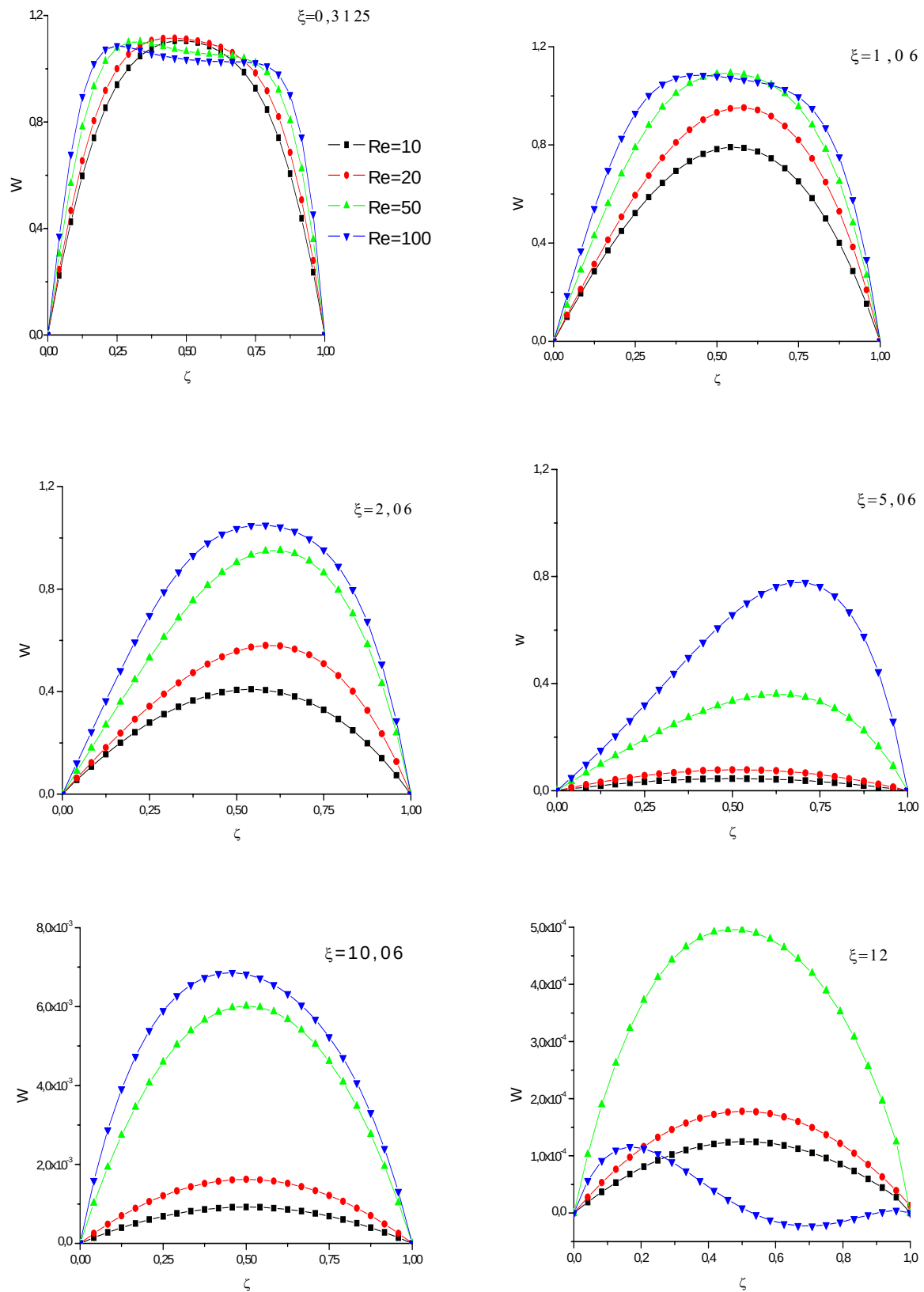


Figure (IV.3.3.1) : Influence du nombre de Reynolds axiale sur la composante axiale de la vitesse, pour différentes côtes.

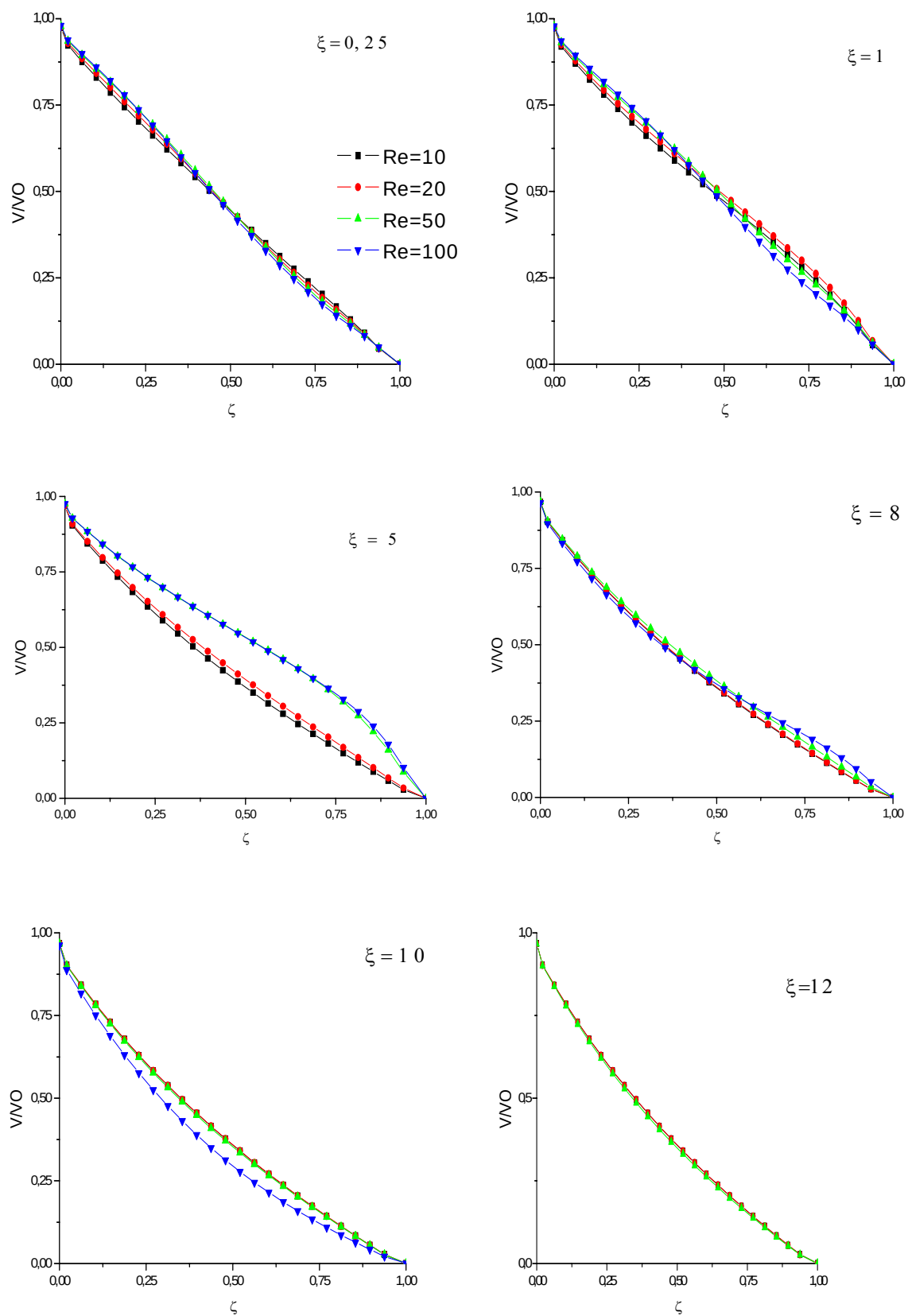


Figure (IV.3.3.2) : Influence du nombre de Reynolds axial sur la composante tangentielle de la vitesse, pour différentes côtes

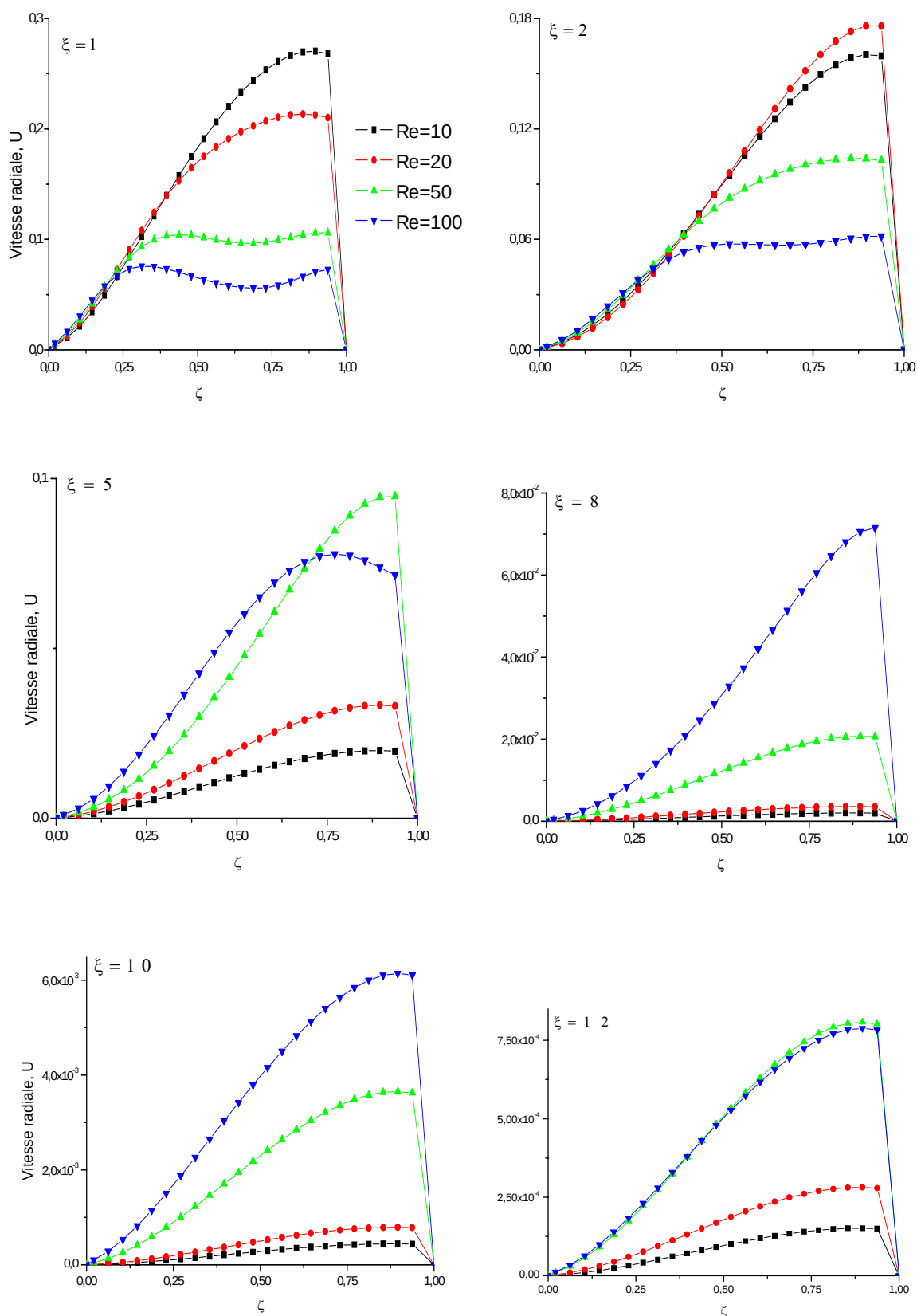


Figure (IV.3.3.3) : Influence du nombre de Reynolds axial sur la composante radiale de la vitesse, $Ta=2$ pour différentes côtes

IV.3.4-Influence de la vitesse de rotation du cylindre sur les profils de vitesse :

L'effet de la vitesse de rotation du cylindre intérieur sur les profils des composantes de la vitesse est illustré sur la figure (IV.3.4), pour un espace annulaire de dimensions ($N=0.5, \Gamma=14$) et un nombre de Reynolds $Re=10$. On considère trois vitesses de rotation correspondant à des nombres de Taylor tels que : $Ta \leq Ta_c$. Les résultats sont donnés à l'instant $t=10$.

1) Profils de la composante axiale de la vitesse:

Au voisinage de l'entrée de l'espace annulaire ($\xi = 2$), la vitesse axiale diminue avec le nombre de Taylor. Par contre en se dirigeant vers l'aval de l'espace annulaire la vitesse augmente au voisinage de la paroi tournante, où existe des valeurs élevées du taux de cisaillement, tel qu'il a été trouvé par Nouar(1986).et M.Naimi(1990) voir figure (IV.3.4.1-a).

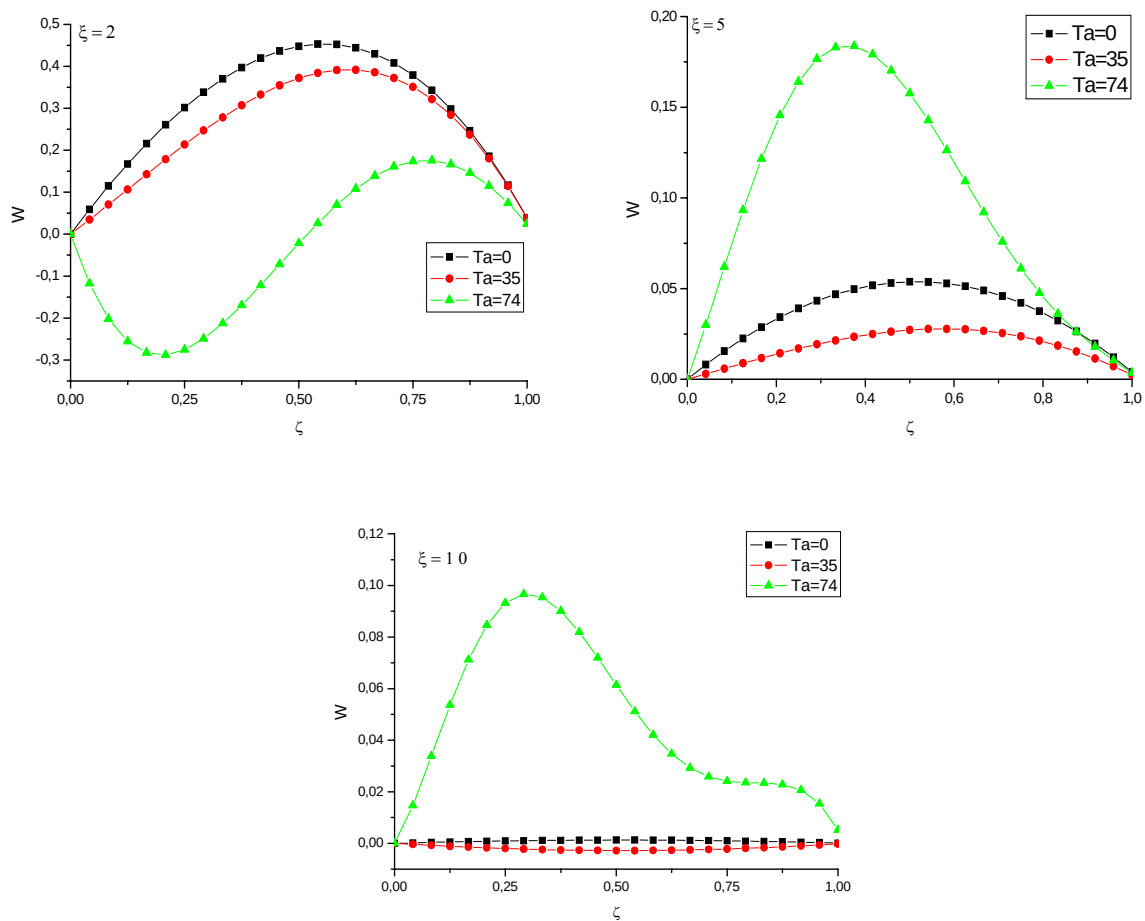


Fig. (IV.3.4.1) : Effet de la rotation sur le profil de la vitesse axiale, $Re=10$, $\eta=0.5$, $\Gamma=14$.

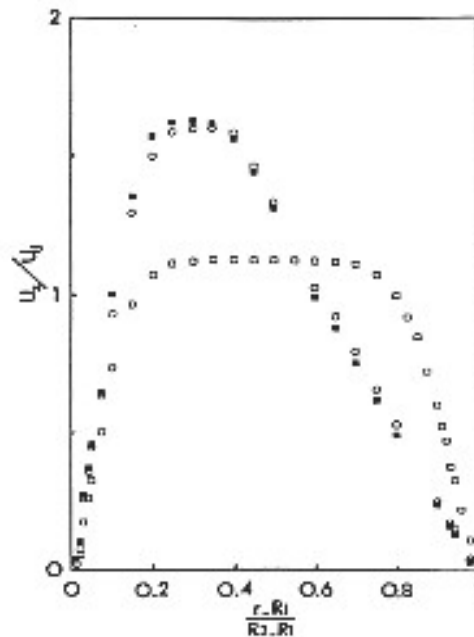


FIG. 7. Influence du nombre de Taylor généralisé sur le profil de vitesse axiale en régime tourbillonnaire. Cas de l'écoulement de Couette-Poiseuille: $\square$, $Ta_g = 0$, $Re_g = 0.68$; $\circ$, $Ta_g = 75.2$, $Re_g = 0.68$; $\blacksquare$, $Ta_g = 85.3$, $Re_g = 0.68$.

Fig (IV.3.4.1-a) Influence du nombre de Taylor sur le profil de la composante axiale de la vitesse

2) Profil de la composante tangentielle de la vitesse :

Pour des faibles vitesses de rotation, les courbes de la vitesse tangentielle en fonction de la coordonnée radiale sont représentées sur la fig (IV.3.4.2.a). Elles sont caractérisées essentiellement, à l'entrée de l'espace annulaire, par l'existence d'un point d'inflexion traduisant le mixage du fluide par les tourbillons. Cette inflexion est d'autant plus marquée que la vitesse de rotation est élevée et un débit axiale faible.

Ces résultats sont en bon accord avec ceux trouvés expérimentalement par M.Naimi (1990) voir figure (IV.3.4.2.b). Pour un débit axial fixé, la vitesse tangentielle diminue avec l'augmentation de la vitesse de rotation, ces résultats sont aussi trouvés par Coles et Cognet. Ils ont conclu que pour des valeurs modérées du nombre de Taylor Ta , le rapport de la vitesse tangentielle de déplacement du fluide à celle de la rotation du cylindre intérieur était de l'ordre de 0.5 ; ce rapport tendrait vers 1/3 pour des valeurs élevées de Ta .

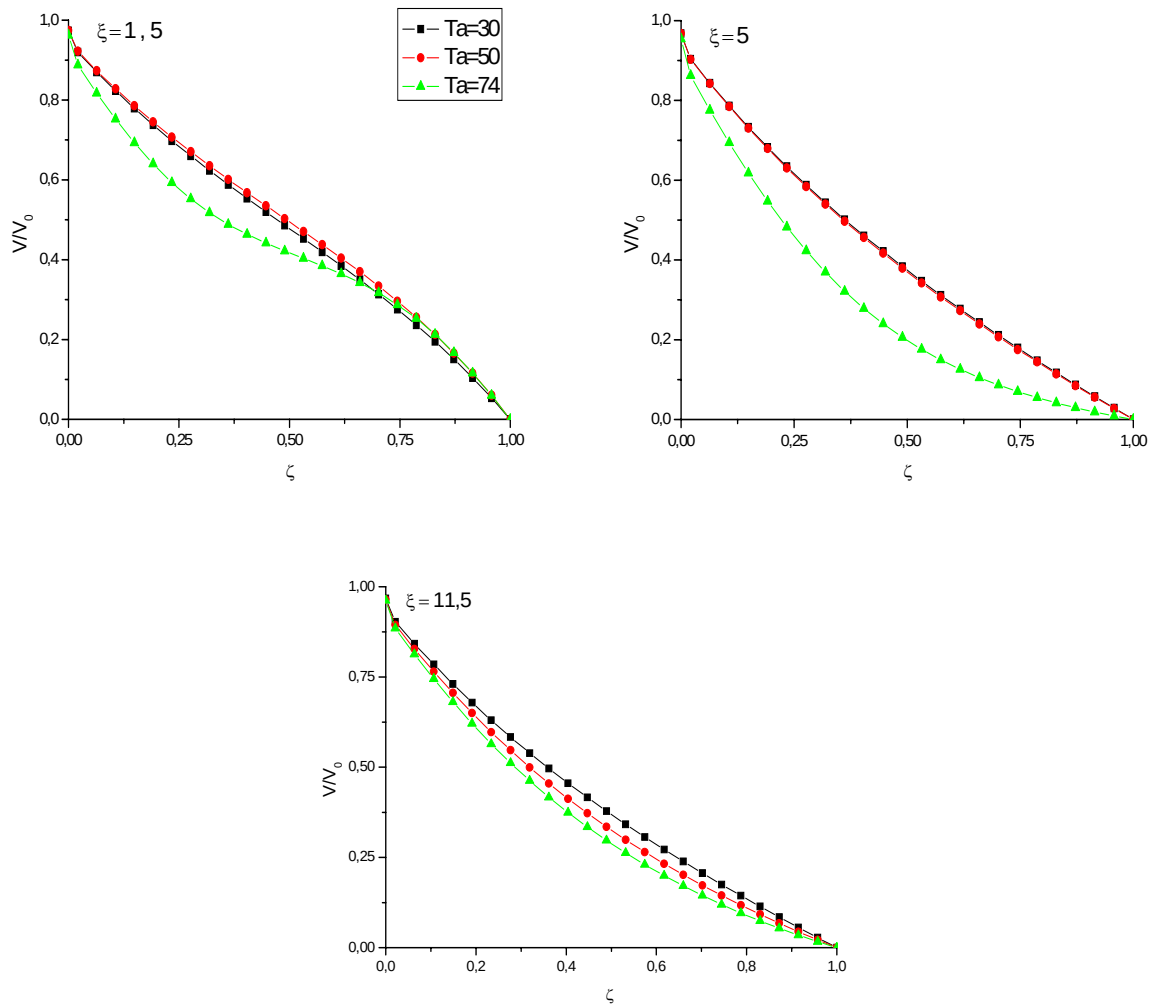


Figure (IV.3.4.2.a) Effet de la vitesse de rotation sur le profil de la composante tangentielle de la vitesse.

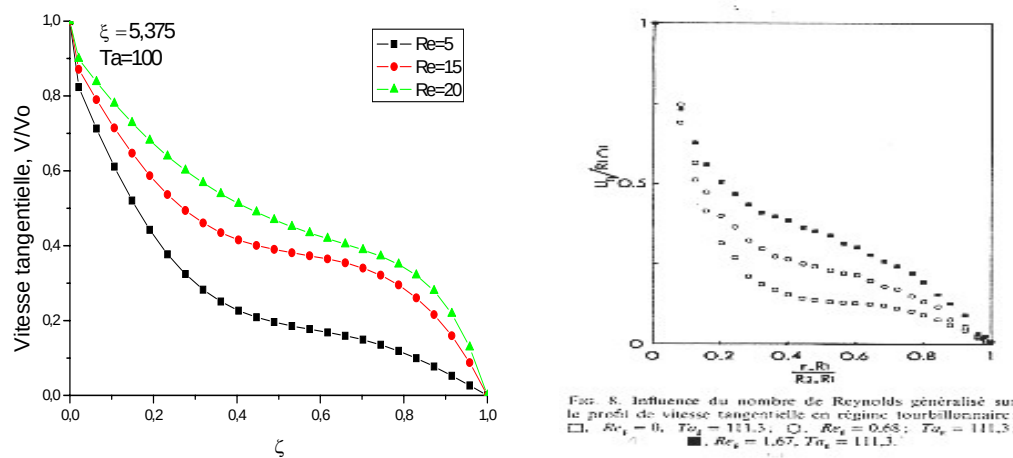


Figure (IV.3.4.2-b) Influence du nombre de Reynolds sur le profil de la composante tangentielle de la vitesse

3) Profil de la composante radiale de la vitesse :

L'effet de la vitesse de rotation sur le profil de la vitesse radiale est illustré sur la figure (IV.3.4.3). On constate que la vitesse radiale diminue lorsque le nombre de Taylor augmente, ceci est dû au mixage crée par les cellules de Taylor. Près de la paroi fixe la vitesse augmente avec l'augmentation du nombre de Taylor (Ta). Par contre à l'avale de l'espace annulaire, la vitesse radiale prend des valeurs faibles lorsque le nombre de Taylor augmente.

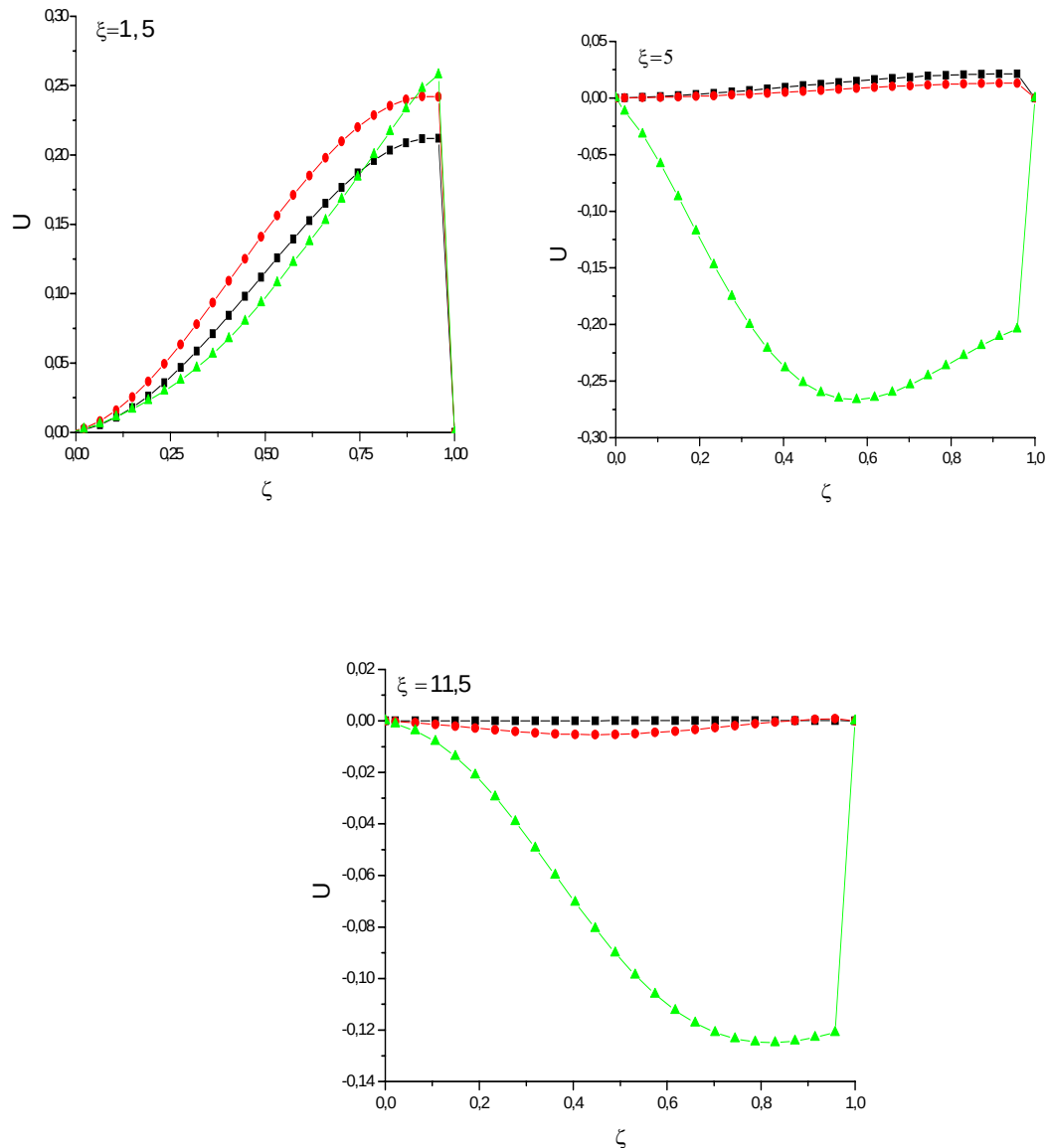


Figure (IV.3.4.3) : Effet de la vitesse de rotation du cylindre intérieur sur le profil de la composante radiale de la vitesse pour $Ta=0, 35, 74$

IV.3-5 Influence de la rotation sur le Champs de la pression

IV.3.5.1) Distribution axiale de la pression :

La figure (IV.3.5.1) montre la variation de la pression en fonction de z . On constate que pour les faibles nombre de Reynolds, elle prend des valeurs importantes à l'entrée de l'espace annulaire et chute rapidement en s'éloignant de cette dernière pour tendre vers une valeur quasiment nulle à la sortie de l'espace annulaire. On constate aussi que la pression décroît linéairement en fonction de z , indiquant l'existence du profil de Poiseuille dans l'espace annulaire. Lorsque le nombre de Reynolds augmente le gradient de pression diminue.

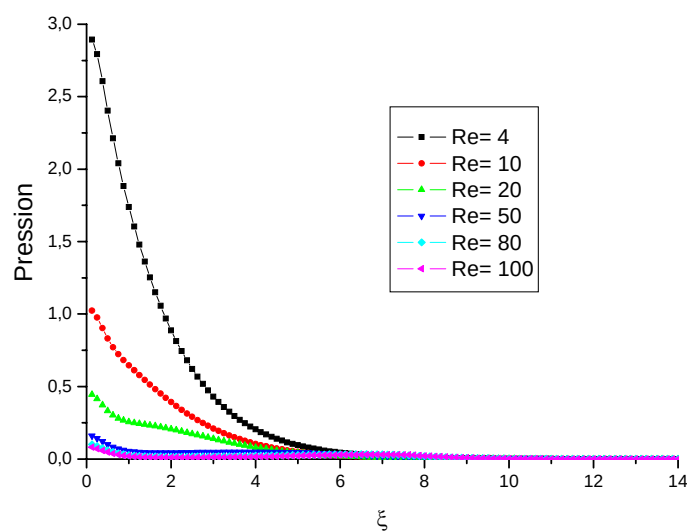
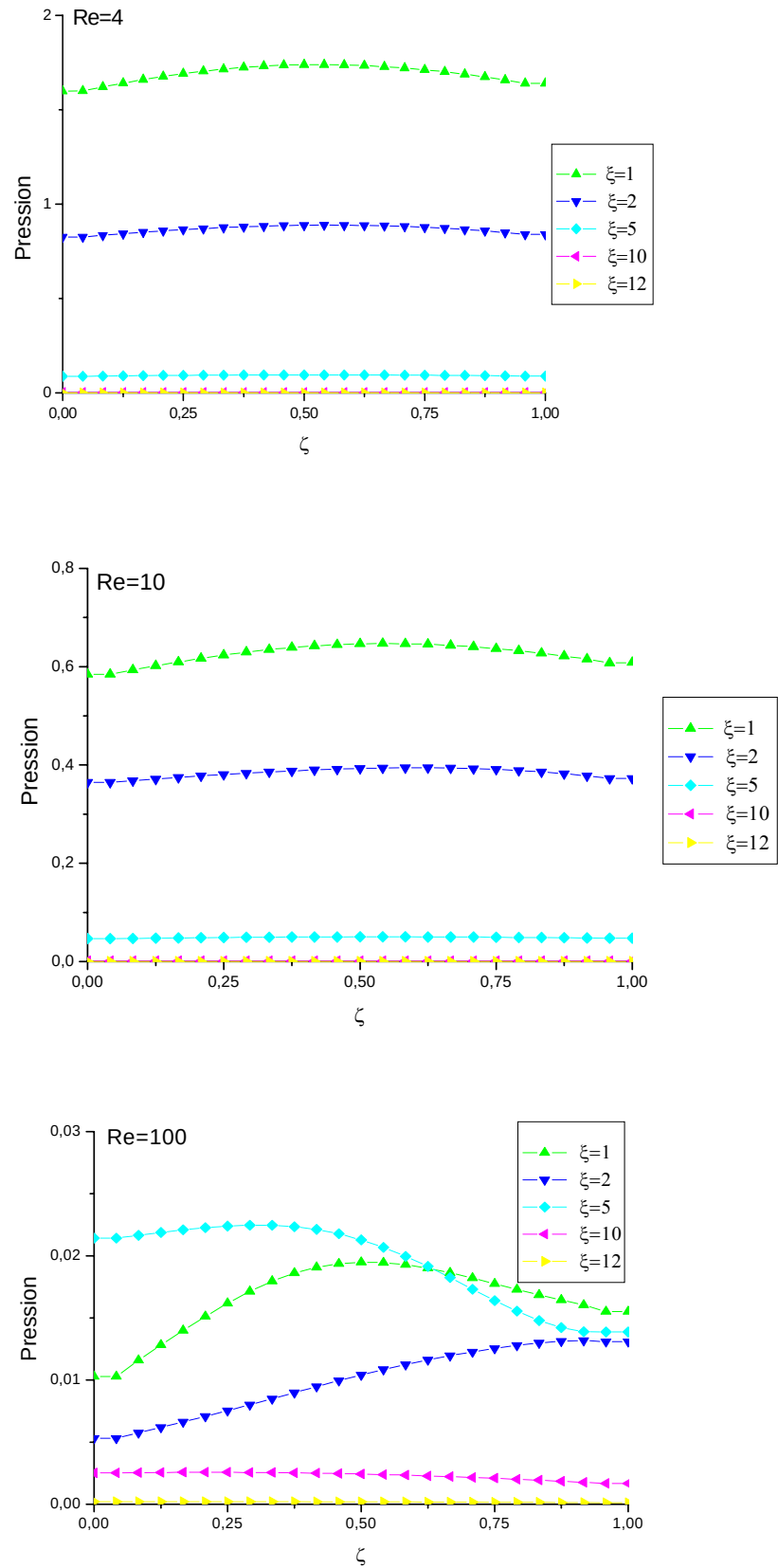


Figure (II.3.5.1) : Distribution axiale de la pression, $Ta=2$

IV.3.5.2) Distribution radiale de la pression :

La figure (IV.3.5.2) représente la distribution radiale de la pression à l'instant $t=10$ pour une vitesse de rotation faible ($Ta=2$) et pour différentes côtes. Nous avons considéré trois valeurs de nombres de Reynolds ($Re_a = 4, 10, 100$). Les résultats obtenus pour les trois valeurs du nombres de Reynolds permettent de constater que dans une section droite se trouvant loin de l'entrée, la pression est presque constante ; elle diminue au fur et à mesure que $ξ$ augmente pour s'annuler à la sortie de la conduite.

Figure (IV.3.5.2) : Distribution radiale de la pression, $Ta=2$

IV.3.6-Développement des tourbillons dans l'espace annuaire :

IV.3.6.1-Effet du débit axial sur le développement des tourbillons :

En fixant la vitesse de rotation, l'apport d'un débit axial sur un écoulement tourbillonnaire a un effet modificateur. Cela a été analysé pour deux valeurs du nombre de Taylor, $Ta = 40$ et $Ta = 100$ lorsque le nombre de Reynolds prend différentes valeurs, $Re_a = 10, 50, 80, 100$, fig (IV.3.6.1). En effet, à faible débit axial les tourbillons se déplacent axialement sans se détruire, ce qui a été trouvé dans les travaux de K.KATAOKA et al, un accroissement du débit entraîne une destruction des tourbillons d'autant plus importante à vitesse de rotation donnée, que le débit axial est plus grand. On constate aussi que le point d'apparition des tourbillons se déplace en aval avec l'écoulement axial. Cette propriété a été étudiée par A. BOUHADEF (1982) et NOUAR (1986).

Les tourbillons ont des tailles différentes, ce qui a été confirmé dans les résultats obtenus par J.LEGRAND (1983). La taille des tourbillons dépend de la vitesse de rotation du cylindre tournant et du débit axial. La vitesse de rotation a un effet contractive sur les tourbillons par contre la présence du débit axial a un effet prolongateur dans le cas des faibles nombre de Reynolds. En outre, les effets de bords provoquent la déformation des tourbillons.

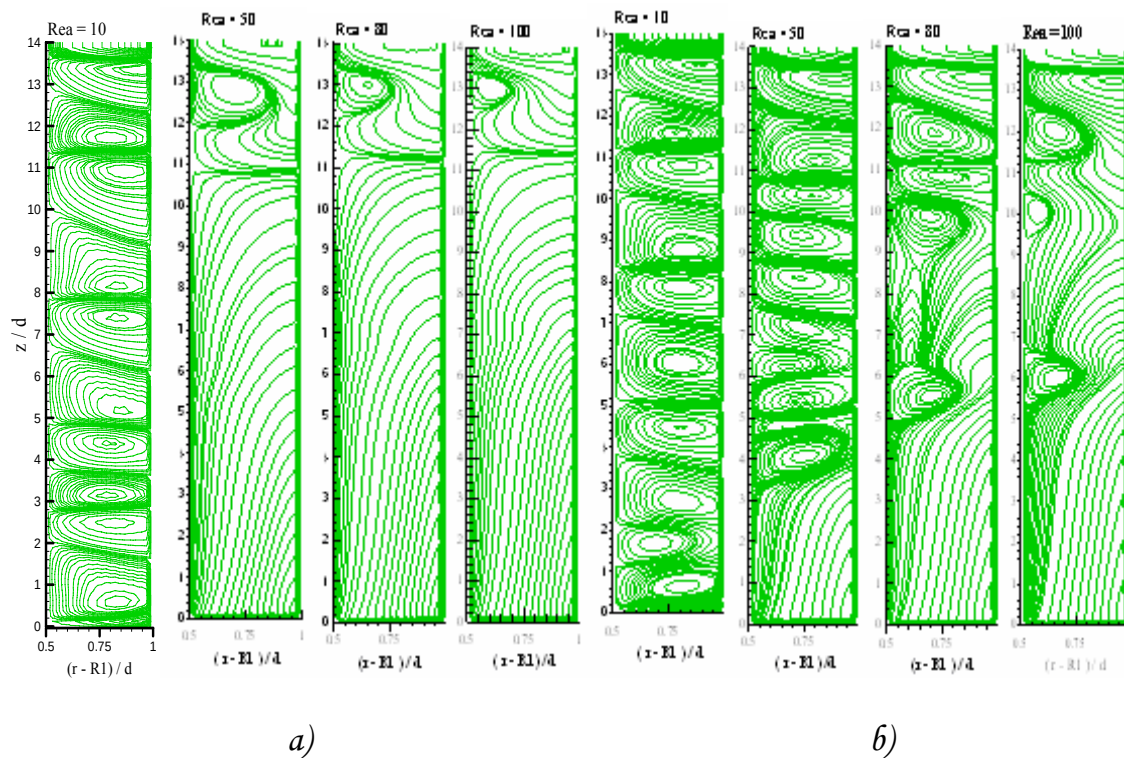


Figure (IV.3.6.1) : Effet du débit axial sur le développement des tourbillons pour a) $Ta=40$, b) $Ta=100$

IV.3.6.2-Effet de la rotation du cylindre intérieur sur le développement des tourbillons :

Sur la figure (IV.3.6.2) Nous avons présenté les lignes de courant pour un nombre de Reynolds axial $Re_a=20$, à l'instant $t=10$. Pour les faibles valeurs du nombre de Taylor, les lignes de courant se présentent sous forme des lignes parallèles à l'axe des cylindres. En augmentant la vitesse de rotation du cylindre intérieur, les tourbillons commencent à apparaître en aval, à l'extrémité de l'espace annulaire, et au voisinage du cylindre intérieur. En augmentant la vitesse de rotation la taille des tourbillons croît radialement jusqu'à atteindre le cylindre extérieur. Le premier tourbillon qui apparaît dans la zone d'entrée correspond à un nombre de Taylor $Ta = 0.3Ta_c$. Au-delà de cette valeur, les tourbillons envahissent l'espace annulaire d'une manière progressive pour occuper tout l'espace annulaire à la valeur critique, à cette valeur on remarque la formation de six paire de deux cellules contrarotatives. Ce développement de tourbillons dans l'espace annulaire a été observé expérimentalement par A. BOUHADEF (1982) ET .NOUAR (1986). On remarque également que la taille des tourbillons diffèrent, ce qui confirme les résultats obtenus par J. LEGRAND.

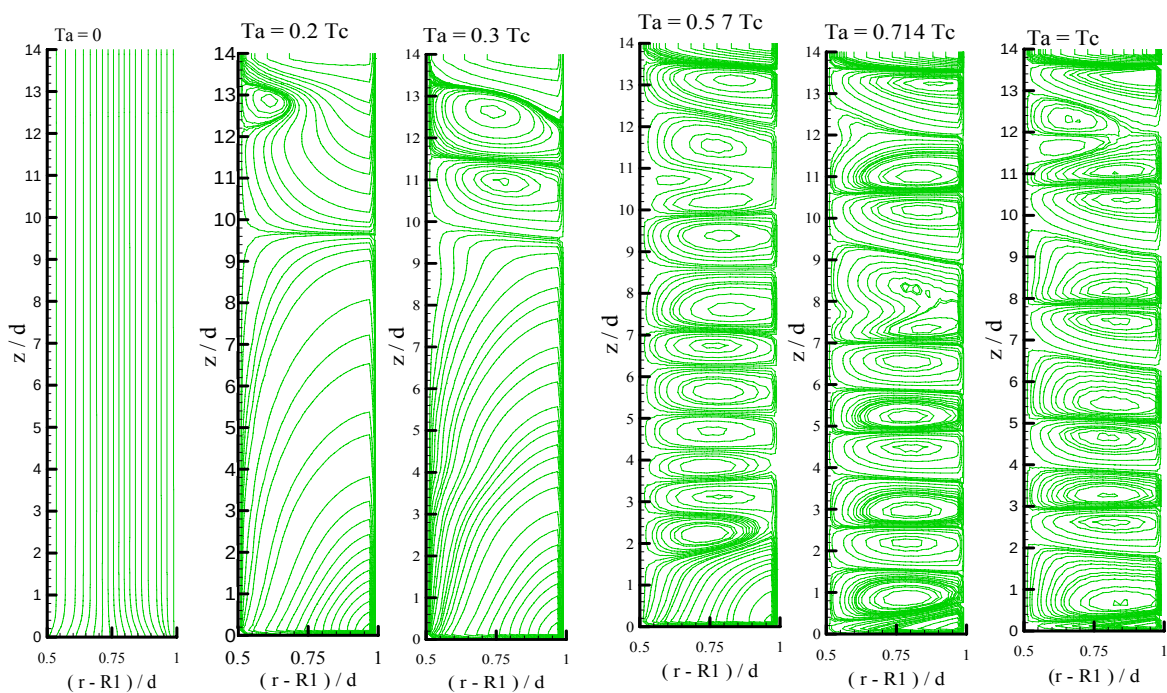


Figure (IV.3.6.2) : Effet de la rotation du cylindre intérieur sur le développement des tourbillons pour $Re_a=20$

IV.3.6.3- Evolution des tourbillons dans l'espace annulaire au cours du temps pour un Taylor critique :

Les figures (IV.3.6.3) montrent l'évolution des tourbillons dans un espace annulaire pour une valeur critique du nombre de Taylor $Ta_c = 140$; correspondant au nombre de Reynolds $Re_a = 20$ dans un espace annulaire $\eta=0.5$ et un rapport de forme $\Gamma=14$, pour différents instants allant de 10 à 100.

La première remarque constatée est que les tourbillons naissent au voisinage du cylindre tournant et se développent radialement au cours du temps, jusqu'à atteindre le cylindre fixe.

On remarque également que dans les premiers plans du temps, l'évolution des tourbillons commencent à l'amont et se propage vers l'aval de l'espace annulaire au cours du temps. Elles s'arrêtent à partir de $t=50$ elles gardent la forme globale identique pour les instants qui suivent ; $t= 70, 90, 100$; ce qui implique que le régime permanent est atteint.

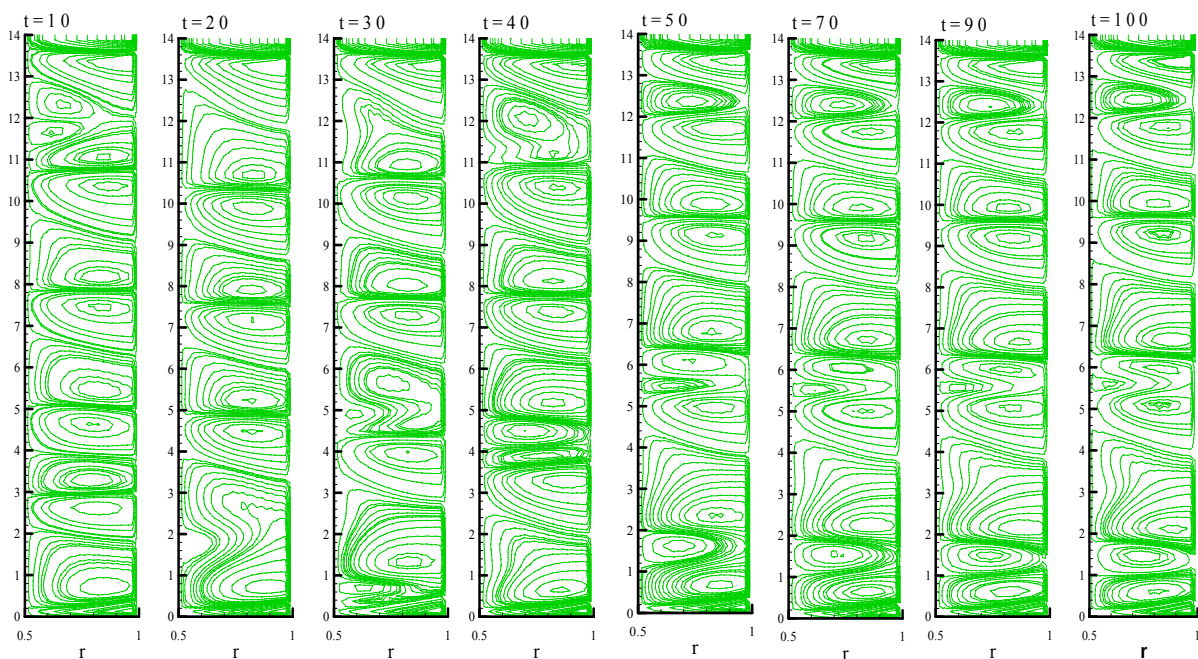


Fig (IV.3.6.3) : Formation progressive des tourbillons au cours du temps.

Conclusion générale

CONCLUSION GÉNÉRALE:

L'étude hydrodynamique d'un écoulement laminaire avec tourbillons d'un fluide newtonien, dans un espace annulaire cylindrique est d'une importance capitale pour le dimensionnement des échangeurs de chaleurs chimiques ou électrochimiques.

En effet le transfert de matière ou de chaleur étant étroitement lié à la structure de l'écoulement, la connaissance préalable de l'hydrodynamique de l'écoulement est indispensable pour l'amélioration des performances de l'échangeur ou du réacteur.

L'étude que nous avons entreprise concerne le comportement hydrodynamique et diffusionnel dans un espace annulaire où le cylindre intérieur est en rotation, et l'extérieur fixe en présence d'un débit axial. On présente une étude numérique pour analyser les effets engendrés par la structure de l'écoulement dus à la rotation du cylindre interne, ainsi que l'influence des paramètres géométriques et hydrodynamiques sur le transfert de matière, en particulier l'épaisseur intercylindres, qui joue un rôle déterminant notamment à travers l'existence de tourbillons ondulés qui réduisent l'importance de la composante normale de la vitesse à la surface du transfert et par conséquent le coefficient de transfert de matière.

Les résultats montrent que l'évolution du coefficient de transfert de matière obéit à une loi de puissance en fonction du débit dans le cas de l'écoulement sans rotation.

Nous avons également montré que le transfert de matière pourrait être d'autant plus amélioré en utilisant un liquide (grand nombre de Schmidt) au lieu d'un gaz (petit nombre de Schmidt).

Le coefficient du transfert de matière est plus intense lorsque l'épaisseur intercylindres est étroite.

En présence de la rotation, le transfert de matière est amélioré par cette dernière tant que les tourbillons n'envahissent pas complètement l'espace annulaire. Les résultats montrent que les valeurs du nombre de Taylor sont responsables de la structure de la concentration au sein de l'écoulement.

Une corrélation qui lie le coefficient de transfert de matière aux différents paramètres est donnée sous la forme :

$$K = 0.36Ta^{0.12}Sc^{0.07}Re^{0.13}$$

Perspectives :

L'étude pourrait être complétée par la considération de l'effet de la température sur le transfert de masse et du point de vue numérique, l'étude pourrait être menée avec d'autres méthodes numériques ; éléments finis et volume finis.

Références

AMOUKRANE BOUHADEF, (1982)

Contribution à l'étude de l'écoulement entre deux cylindres fixe et tournant en présence d'un débit axial.

Thèse de 3^{ème} cycle. I.N.P.L, Nancy, France.

ASTILL, (1976)

Momentum integral solution developing flow in an annulus with a rotating inner cylinder
Trans. ASME. J. Fluids Engng, 558-559

A.GHEZAL et al, (1992)

Modélisation du transfert de chaleur entre un obstacle en mouvement et un fluide visqueux en écoulement confiné

Int. J.Heat transfert, vol 35(2), pp. 329-341

B. DADDA, (2004)

Etude d'un écoulement ascendant en régime dynamique et thermique non établi en présence d'un cylindre chauffé avec effet de conductivité.

Thèse de magister

C. NOUAR, (1986)

Convection thermique pour un fluide pseudo plastique. Cas de l'écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille,

Thèse de 3^{ème} cycle I.N.P.L. Nancy, France.

C. NOUAR, et al (1995)

Developing laminar flow in the entrance region of annuli. Review and extension of standard resolution methods to hydrodynamic problem.

International Journal of Engineering Science., 33, 1517-1534.

C.C.HUANG et al (2005)

Laminar mixed convection heat and mass transfer in vertical rectangular ducts with film evaporation and condensation

Int. J.Heat transfert, 48, 1772-1784

D.COLES, (1965)

Transition in circular Couette flow.

J.Fluid.Mech.21, 385.

D. J.PICKETT, (1979)

Electrochemical Reactor Design pp3121-170.Elsevier, Amsterdam

D.A.SIMMERS AND J.E.R. CONEY, (1980)

Velocity distributions in Taylor vortex flow with imposed laminar axial flow and isothermal surface heat transfer, Int. J. Heat Fluid Flow 2(2), 85-91

D.HAIM, PISMEN, M. (1994)

Performance of a photochemical reactor in the regime of Taylor- Gortler vertical flow

Chem. Engng. Sci. 49,119-29.

F. COEURET, J.LEGRAND,(1980)

Mass transfer at the walls of a coquette-type cell with small gaps in the laminar vortex regime.

Journal of applied electrochemistry10 (1980) 785-788

G.COINET, (1971)

Utilisation de la polarographie pour l'étude de l'écoulement de Couette.

J.Mecanique J 10,1,65.

H.D.DOAN et al, (2001)

Measurement of local and overall mass-transfer coefficients to a sphere in a quiescent liquid using a limiting current technique.

Chemical Engineering journal 81,53-61

HARLOW ET WELCH (1965),

Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. The physics of fluids. Vol.8, N° 12.December, 1965.

J.QI AND R.F.SAVINELL, (1990)

Mass transfer in a laminar-flow parallel plate electrolytic cell with simultaneous development of velocity and concentration boundary layers.

J. Appl. Electrochem. 20, 885-892.

J.R. BODIA, J.F.OSTERELE, (1960)

Finite difference analysis of plane Poiseuille and Couette flow developments

Appl. Sci. Res, section A, vol. 10, 265-276

J. LEGRANT, (1983)

Mise en œuvre des écoulements de Taylor- Couette Poiseuille et de ruissellement plan dans des réacteurs électrochimique de conception nouvelle.

Thèse de doctorat d'état, Université de Rennes.

J. LEGRAND. ET F.COEURET (1982)

Transfert de matière global liquide paroi pour des écoulements associant tourbillons de Taylor et circulation axiale forcée.

Int. J. Heat. Mass transfer 25, 345-351

J. Kaye et E .C Elgar

Mode of adiabatic and diabatic fluid flow in an annulus with an inner rotating cylinder

Tran, ASME, 80, 753 (1958).

K. KATAOKA, H.DOI ET T. KOMAI, (1977)

Heat/Mass transfer in Taylor vortex flow with constant axial flow rates.

Int. J . Heat Mass transfer 20, 57

LANGHAAR (1942)

Steady flow in the transition length of a straight tube

J. Appl. Mech. 9, 455-458.

M. NAIMI , R.DEVIENNE ET M. LEBUCHE (1990)

Etude dynamique et thermique de l'écoulement de Couette-Taylor- Poiseuille cas d'un fluide présentant un seuil d'écoulement.

M. GUY RAGUIN (2000)

Expérimental study of mass transport and flow structures in Taylor –couette –poiseuille flows using MRI

M. OULD- ROUIS, (1989)

Transferts en écoulements non établis dans les conduits annulaires.
Thèse de magister

R. PEYRET (1976)

Unsteady evolution of a horizontal jet in a stratified fluid
J.Fluid Mech., Vol.28, part 4, pp 643-655.

R . B. Bird, et al (1960)

Transport Phenomen.
Willey International Edition.

R .C GIORDANO, et al (1998).

Analysis of a Taylor-Poiseuille vortex flow reactor
-I : Flow patterns and mass transfer characteristics.
Chem.Engng. Sci .53(20) , 3635-52.

S.HIRAI, et aL (1986)

Turbulent heat transfer to the flow in a concentric annulus with a rotating inner cylinder.
In Heat Transfer. Proc.
Eighth int. eat Transfer Conf., San Francisco, California, Vol.3, pp.895-900.

T.K. ROSS AND A.A WRAGG,(1965)

Electrochemical mass transfer studies in annuli.
Electrochim Acta10, 1093-1106.

V. T. TURITTO, (1975)

Mass transfer in annuli under conditions of laminar flow.
Chemical Engineering Science, 30, 503-509

Z. OUCHIHA, (1998)

Ecoulement d'un fluide réel dans une conduite vertical en présence d'un obstacle cylindrique chauffé.

Thèse de magister

Annexe

ETUDE DE LA STABILITE DU SCHEMA NUMERIQUE

Par l'introduction de variables adimensionnelles, le système d'équations gouvernantes s'écrit en coordonnées cartésiennes comme suit :

Equation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{1-N}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (\mathcal{A}-1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{1-N}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (\mathcal{A}-1b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + w \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1-N}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (\mathcal{A}-1c)$$

Equation de continuité

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (\mathcal{A}-1d)$$

Equation de diffusion

$$\frac{\partial c}{\partial t} + w \frac{\partial c}{\partial x} + u \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1-N}{\text{Sc Re}} \left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right] \quad (\mathcal{A}-1e)$$

Où Re est le nombre de Reynolds, Sc le nombre de Schmidt, N le rapport des rayons. Π et c sont respectivement la perturbation de pression et la concentration adimensionnelles.

Le schéma aux différences finies utilisé pour la résolution du système algébrique précédent est un schéma implicite du type Crank-Nicolson. Le système d'équations aux différences, correspondant au système d'équations (A-1), s'écrit de la façon suivante :

Equation de quantité du mouvement :

Suivant Ox :

$$L_w \equiv \delta_t \left[w^{n+1} - w^n \right]_{i+1/2,j} + \frac{1}{2} \left[\left(w \delta_x^\circ w \right)^{n+1} + \left(w \delta_x^\circ w \right)^n \right]_{i+1/2,j} + \frac{1}{2} \left[\left(\bar{u} \delta_y^\circ w \right)^{n+1} + \left(\bar{u} \delta_y^\circ w \right)^n \right]_{i+1/2,j} \quad (\mathcal{A}-2a)$$

$$+ \left(\delta_x^+ \Pi \right)_{i,j}^{n+1/2} - \frac{1-N}{2\text{Re}} \left[\delta_x^+ \delta_x^- \left(w^{n+1} + w^n \right) + \delta_y^+ \delta_y^- \left(w^{n+1} + w^n \right) \right]_{i+1/2,j} = 0$$

Suivant Oy :

$$L_u \equiv \delta_t \left[u^{n+1} - u^n \right]_{i,j+1/2} + \frac{1}{2} \left[\left(w \delta_x^o u \right)^{n+1} + \left(w \delta_x^o u \right)^n \right]_{i,j+1/2} + \frac{1}{2} \left[\left(\bar{u} \delta_y^o u \right)^{n+1} + \left(\bar{u} \delta_y^o u \right)^n \right]_{i,j+1/2} + \left(\delta_y^+ \Pi \right)_{i,j}^{n+1/2} \quad (\mathcal{A}-2b)$$

$$- \frac{1-N}{2\text{Re}} \left[\delta_x^+ \delta_x^- \left(u^{n+1} + u^n \right) + \delta_y^+ \delta_y^- \left(u^{n+1} + u^n \right) \right]_{i,j+1/2} = 0$$

Suivant Oz :

$$L_v \equiv \delta_t \left[v^{n+1} - v^n \right]_{i+1/2,j+1/2} + \frac{1}{2} \left[\left(w \delta_x^o v \right)^{n+1} + \left(w \delta_x^o v \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} + \frac{1}{2} \left[\left(\bar{u} \delta_y^o v \right)^{n+1} + \left(\bar{u} \delta_y^o v \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} \quad (\mathcal{A}-2c)$$

$$- \frac{1-N}{2\text{Re}} \left[\delta_x^+ \delta_x^- \left(v^{n+1} + v^n \right) + \delta_y^+ \delta_y^- \left(v^{n+1} + v^n \right) \right]_{i+1/2,j+1/2} = 0$$

Equation de continuité :

$$D \equiv \left(\delta_x^- w \right)_{i+1/2,j}^{n+1} + \left(\delta_y^- u \right)_{i,j+1/2}^{n+1} \quad (\mathcal{A}-2d)$$

Equation de diffusion :

$$L_c \equiv \delta_t \left[c^{n+1} - c^n \right]_{i+1/2,j+1/2} + \frac{1}{2} \left[\left(\bar{w} \delta_x^o c \right)^{n+1} + \left(\bar{w} \delta_x^o c \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} + \frac{1}{2} \left[\left(\bar{u} \delta_y^o c \right)^{n+1} + \left(\bar{u} \delta_y^o c \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} \quad (\mathcal{A}-2e)$$

$$- \frac{1-N}{Sc\text{Re}} \left[\delta_x^+ \delta_x^- \left(c^{n+1} + c^n \right) + \delta_y^+ \delta_y^- \left(c^{n+1} + c^n \right) \right]_{i+1/2,j+1/2} = 0$$

Le système (A-2) s'écrit alors sous la forme symbolique suivante :

$$L_w(w_h, u_h, \Pi_h) = 0 \quad (\mathcal{A}-3a)$$

$$L_u(w_h, u_h, \Pi_h) = 0 \quad (\mathcal{A}-3b)$$

$$L_v(w_h, u_h, v_h) = 0 \quad (\mathcal{A}-3c)$$

$$D(w_h, u_h) = 0 \quad (\mathcal{A}-3d)$$

$$L_c(w_h, u_h, c_h) = 0 \quad (\mathcal{A}-3e)$$

Où w_h, u_h, v_h, Π_h et c_h représentent les inconnues au plan $n+1$.

Ce système algébrique non linéaire est résolu par un procédé itératif, caractérisé par l'indice v et défini par les relations suivantes :

$$w_h^{v+1} - w_h^v + KL_w \left(w_h^v, u_h^v, \Pi_h^v \right) = 0 \quad (\mathcal{A}-4a)$$

$$u_h^{v+1} - u_h^v + KL_u \left(w_h^{v+1}, u_h^v, \Pi_h^v \right) = 0 \quad (\mathcal{A}-4b)$$

$$v_h^{\nu+1} - v_h^\nu + KL_\nu \left(w_h^{\nu+1}, u_h^{\nu+1}, v_h^\nu \right) = 0 \quad (\mathcal{A-4c})$$

$$\Pi_h^{\nu+1} - \Pi_h^\nu + \omega D \left(w_h^{\nu+1}, u_h^{\nu+1} \right) = 0 \quad (\mathcal{A-4d})$$

$$c_h^{\nu+1} - c_h^\nu + \chi L_C \left(w_h^{\nu+1}, u_h^{\nu+1}, c_h^\nu \right) = 0 \quad (\mathcal{A-4e})$$

Où les constantes K, χ, ω doivent être choisies de façon à assurer la convergence du système (A-4).

Les conditions nécessaires de convergence sont obtenues à partir de l'étude de la stabilité du schéma (A-4).

II. Etude de la stabilité du schéma (A-4)

L'étude de la stabilité consiste à savoir si, au cours d'un pas de calcul, il y a amplification ou non de l'erreur introduite initialement. Pour ce la, nous avons été amenés à étudier la matrice d'amplification du schéma considéré comme un système évolutif en temps (ν est assimilé à un indice de temps).

Dans le cas où les valeurs du nombre de Reynolds ne sont pas assez grandes, il est possible de négliger les termes de convection. Le système (A-4) peut donc ainsi être ramené à une forme linéarisée.

$$\text{Posons :} \quad Df(x, y, t) = \frac{f(x, y, t) - f(x, y, t-k)}{k} \quad (*)$$

Et

$$Af(x, y, t) = \left[\frac{f(x+h, y, t) - 2f(x, y, t) + f(x-h, y, t)}{h^2} \right] + \left[\frac{f(x, y+h, t) - 2f(x, y, t) + f(x, y-h, t)}{h^2} \right] \quad (**)$$

Où $f(x, y, t)$ désignant l'une des grandeurs $w(x, y, t)$, $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $C(x, y, t)$ ou $\Pi(x, y, t)$, définie en un point (x, y, t) arbitraire.

Le système précédent s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad w^{\nu+1}\left(x + \frac{h}{2}, y, t\right) &= w^\nu\left(x + \frac{h}{2}, y, t\right) - KDw^\nu\left(x + \frac{h}{2}, y, t\right) - \frac{K}{h} \left[\Pi^\nu\left(x+h, y, t-\frac{k}{2}\right) - \Pi^\nu\left(x, y, t-\frac{k}{2}\right) \right] \\ &+ \frac{(1-N)K}{2\mathcal{R}_\ell} \left[Aw^\nu\left(x + \frac{h}{2}, y, t\right) + Aw^\nu\left(x + \frac{h}{2}, y, t-k\right) \right] \end{aligned} \quad (\mathcal{A-5a})$$

$$\begin{aligned}
 u^{\nu+1}(x, y + \frac{h}{2}, t) &= u^{\nu}(x, y + \frac{h}{2}, t) - K D u^{\nu}(x, y + \frac{h}{2}, t) - \frac{K}{h} \left[\Pi^{\nu} \left(x, y + h, t - \frac{k}{2} \right) - \Pi^{\nu} \left(x, y, t - \frac{k}{2} \right) \right] \\
 &+ \frac{(1-N)K}{2\mathcal{R}_\ell} \left[A u^{\nu} \left(x, y + \frac{h}{2}, t \right) + A u^{\nu} \left(x, y + \frac{h}{2}, t - k \right) \right]
 \end{aligned} \tag{A-5b}$$

$$\begin{aligned}
 v^{\nu+1}(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}, t) &= v^{\nu}(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}, t) - K D v^{\nu}(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}, t) \\
 &+ \frac{(1-N)K}{2\mathcal{R}_\ell} \left[A v^{\nu} \left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}, t \right) + A v^{\nu} \left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}, t - k \right) \right]
 \end{aligned} \tag{A-5c}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi^{\nu+1}(x, y, t - \frac{k}{2}) &= \Pi^{\nu}(x, y, t - \frac{k}{2}) - \frac{\omega}{h} \left[w^{\nu+1} \left(x + \frac{h}{2}, y, t \right) - w^{\nu+1} \left(x - \frac{h}{2}, y, t \right) \right] \\
 &- \frac{w}{h} \left[u^{\nu+1} \left(x, y + \frac{h}{2}, t \right) - u^{\nu+1} \left(x, y - \frac{h}{2}, t \right) \right]
 \end{aligned} \tag{A-5d}$$

$$\begin{aligned}
 c^{\nu+1} \left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}, t \right) &= c^{\nu} \left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}, t \right) - \chi D c^{\nu} \left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}, t \right) \\
 &+ \chi \frac{1-N}{2\mathcal{S}_c \mathcal{R}_\ell} \left[A c^{\nu} \left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}, t \right) + A c^{\nu} \left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}, t - k \right) \right]
 \end{aligned} \tag{A-5e}$$

La fonction $f(x, y, t)$ étant bornée, nous introduisons, pour l'étude de la stabilité du schéma (A-5), sa transformée de Fourier définie par :

$$\hat{f}(\zeta, \eta, \tau) = \iiint f(x, y, t) e^{i\zeta x} e^{i\eta y} e^{i\tau t} dx dy dt$$

En remarquant que:

$$\hat{f}(\zeta, \eta, \tau)_{(x, y, t-k)} = e^{i\tau k} \hat{f}(\zeta, \eta, \tau)_{(x, y, t)}$$

L'équation (A-5a) devient

$$\begin{aligned}
 w^{\nu+1}(x + \frac{h}{2}, y, t) &= w^{\nu}(x + \frac{h}{2}, y, t) - K \left[\frac{w^{\nu}(x + \frac{h}{2}, y, t) - w^{\nu}(x + \frac{h}{2}, y, t - k)}{k} \right] - \frac{K}{h} \left[\Pi^{\nu} \left(x + h, y, t - \frac{k}{2} \right) - \Pi^{\nu} \left(x, y, t - \frac{k}{2} \right) \right] \\
 &+ \frac{(1-N)K}{2\mathcal{R}_\ell} \left[A w^{\nu} \left(x + \frac{h}{2}, y, t \right) + A w^{\nu} \left(x + \frac{h}{2}, y, t - k \right) \right]
 \end{aligned}$$

En utilisant la propriété de la transformée de Fourier l'équation devient :

$$w^{v+1}\left(x+\frac{h}{2}, y, t\right)=w^v\left(x+\frac{h}{2}, y, t\right)-\frac{K}{k}\left[w^v\left(x+\frac{h}{2}, y, t\right)-w^v\left(x+\frac{h}{2}, y, t\right)e^{i\tau k}\right]-\frac{K}{h}\left[\Pi^v\left(x+h, y, t\right)e^{i\tau\frac{k}{2}}-\Pi^v\left(x, y, t\right)e^{i\tau\frac{k}{2}}\right]$$

$$+\frac{(1-N)K}{2\text{Re}}\left[Aw^v\left(x+\frac{h}{2}, y, t\right)+Aw^v\left(x+\frac{h}{2}, y, t\right)e^{i\tau k}\right]$$

Qui s'exprime alors par :

$$w^{v+1}\left(x+\frac{h}{2}, y, t\right)=w^v\left(x+\frac{h}{2}, y, t\right)-\frac{K}{k}\left[1-e^{i\tau k}\right]w^v\left(x+\frac{h}{2}, y, t\right)-\frac{K}{h}\left[\Pi^v\left(x+h, y, t\right)-\Pi^v\left(x, y, t\right)\right]e^{i\tau\frac{k}{2}}$$

$$+\frac{(1-N)K}{2\text{Re}}\left[1+e^{i\tau k}\right]Aw^v\left(x+\frac{h}{2}, y, t\right)$$

L'expression de l'équation précédente est alors :

$$w^{v+1}\left(x+\frac{h}{2}, y, t\right)=w^v\left(x+\frac{h}{2}, y, t\right)-\frac{K}{k}\left[1-e^{i\tau k}\right]w^v\left(x+\frac{h}{2}, y, t\right)-\frac{K}{h}\left[\Pi^v\left(x+h, y, t\right)-\Pi^v\left(x, y, t\right)\right]e^{i\tau\frac{k}{2}}$$

$$+\frac{(1-N)K}{2\text{Re}}\left[1+e^{i\tau k}\right]\left\{\frac{w^v\left(x+\frac{3h}{2}, y, t\right)-2w^v\left(x+\frac{h}{2}, y, t\right)+w^v\left(x-\frac{h}{2}, y, t\right)}{h^2}\right\}+\left\{\frac{w^v\left(x+\frac{h}{2}, y+h, t\right)-2w^v\left(x+\frac{h}{2}, y, t\right)+w^v\left(x+\frac{h}{2}, y-h, t\right)}{h^2}\right\}$$

En utilisant la transformée de Fourier, cette équation devient :

$$w^{v+1}e^{i\zeta\left(x+\frac{h}{2}\right)}e^{i\eta y}e^{i\tau t}=w^ve^{i\zeta\left(x+\frac{h}{2}\right)}e^{i\eta y}e^{i\tau t}\left\{1-\frac{K}{k}\left[1-e^{i\tau k}\right]\right\}-\frac{K}{h}\left[\Pi^ve^{i\zeta\left(x+h\right)}e^{i\eta y}e^{i\tau t}-\Pi^ve^{i\zeta x}e^{i\eta y}e^{i\tau t}\right]e^{i\tau\frac{k}{2}}$$

$$+\frac{(1-N)K}{2\text{Re}h^2}\left[1+e^{i\tau k}\right]\left\{\left[\begin{array}{l} w^ve^{i\zeta\left(x+\frac{3h}{2}\right)}e^{i\eta y}e^{i\tau t}-2w^ve^{i\zeta\left(x+\frac{h}{2}\right)}e^{i\eta y}e^{i\tau t}+w^ve^{i\zeta\left(x-\frac{h}{2}\right)}e^{i\eta y}e^{i\tau t} \\ +\left[w^ve^{i\zeta\left(x+\frac{h}{2}\right)}e^{i\eta(y+h)}e^{i\tau t}-2w^ve^{i\zeta\left(x+\frac{h}{2}\right)}e^{i\eta y}e^{i\tau t}+w^ve^{i\zeta\left(x+\frac{h}{2}\right)}e^{i\eta(y-h)}e^{i\tau t} \end{array}\right]\right\}$$

Elle s'écrit sous les formes suivantes :

$$w^{v+1}e^{i\zeta\frac{h}{2}}=w^ve^{i\zeta\frac{h}{2}}\left\{1-\frac{K}{k}\left[1-e^{i\tau k}\right]\right\}-\frac{K}{h}\left[\Pi^ve^{i\zeta h}-\Pi\right]e^{i\tau\frac{k}{2}}$$

$$+\frac{(1-N)K}{2\text{Re}h^2}\left[1+e^{i\tau k}\right]\left\{\left[w^ve^{i\zeta\frac{3h}{2}}-2w^ve^{i\zeta\frac{h}{2}}+w^ve^{-i\zeta\frac{h}{2}}\right]+\left[w^ve^{i\zeta\frac{h}{2}}e^{i\eta h}-2w^ve^{i\zeta\frac{h}{2}}+w^ve^{i\zeta\frac{h}{2}}e^{-i\eta h}\right]\right\}$$

$$w^{v+1}=w^v\left\{1-\frac{K}{k}\left[1-e^{i\tau k}\right]\right\}-\frac{K}{h}\left[e^{i\zeta h}-1\right]\Pi^ve^{-i\zeta\frac{h}{2}}e^{i\tau\frac{k}{2}}+\frac{(1-N)K}{2\text{Re}h^2}w^v\left\{e^{i\zeta h}-2+e^{-i\zeta h}+e^{i\eta h}-2+e^{-i\eta h}\right\}\left[1+e^{i\tau k}\right]$$

$$w^{v+1} = w^v \left\{ 1 - \frac{K}{k} \left[1 - e^{i\tau k} \right] \right\} - \frac{K}{h} \left[e^{i\zeta h} - 1 \right] \Pi^v e^{-i\zeta \frac{h}{2}} e^{i\tau \frac{k}{2}} + \frac{(1-N)K}{2\text{Re}h^2} w^v \{ \cos \zeta h + i \sin \zeta h + \cos \zeta h - i \sin \zeta h - 4 + \cos \eta h + i \sin \eta h + \cos \eta h - i \sin \eta h \} \left[1 + e^{i\tau k} \right]$$

$$w^{v+1} = w^v \left\{ 1 - \frac{K}{k} \left[1 - e^{i\tau k} \right] \right\} - \frac{K}{h} \left[e^{i\zeta h} - 1 \right] \Pi^v e^{-i\zeta \frac{h}{2}} e^{i\tau \frac{k}{2}} + \frac{(1-N)K}{\text{Re}h^2} w^v (\cos \zeta h + \cos \eta h - 2) \left[1 + e^{i\tau k} \right]$$

$$w^{v+1} = w^v \left\{ 1 - \frac{K}{k} \left[1 - e^{i\tau k} \right] \right\} - \frac{K}{h} \left[e^{i\zeta \frac{h}{2}} - e^{-i\zeta \frac{h}{2}} \right] \Pi^v e^{i\tau \frac{k}{2}} + \frac{(1-N)K}{\text{Re}h^2} w^v (\cos \zeta h + \cos \eta h - 2) \left[1 + e^{i\tau k} \right]$$

$$w^{v+1} = w^v \left\{ 1 - \frac{K}{k} \left[1 - e^{i\tau k} \right] \right\} - \frac{K}{h} \left[2i \sin \zeta \frac{h}{2} \right] \Pi^v e^{i\tau \frac{k}{2}} + \frac{(1-N)K}{\text{Re}h^2} w^v (\cos \zeta h + \cos \eta h - 2) \left[1 + e^{i\tau k} \right]$$

L'expression finale de l'équation est alors:

$$\bar{w}^{v+1}(\zeta, \eta, \tau) = \left\{ 1 - \frac{K}{k} \left(1 - e^{i\tau k} \right) + \frac{(1-N)K}{\text{Re}h^2} \{ \cos \zeta h + \cos \eta h - 2 \} \left[1 + e^{i\tau k} \right] \right\} \bar{w}^v(\zeta, \eta, \tau) - 2 \frac{K}{h} i \sin \zeta \frac{h}{2} e^{i\tau \frac{k}{2}} \bullet \bar{H}(\zeta, \eta, \tau) \quad (\mathcal{A}-6a)$$

De la même manière on obtient les expressions des autres équations :

$$\hat{u}^{v+1}(\zeta, \eta, \tau) = \left\{ 1 - \frac{K}{k} \left(1 - e^{i\tau k} \right) + \frac{(1-N)K}{\text{Re}h^2} \{ \cos \zeta h + \cos \eta h - 2 \} \left[1 + e^{i\tau k} \right] \right\} \hat{u}^v(\zeta, \eta, \tau) - 2 \frac{K}{h} i \sin \eta \frac{h}{2} e^{i\tau \frac{k}{2}} \bullet \bar{H}(\zeta, \eta, \tau) \quad (\mathcal{A}-6b)$$

$$\hat{v}^{v+1}(\zeta, \eta, \tau) = \left\{ 1 - \frac{K}{k} \left(1 - e^{i\tau k} \right) + \frac{(1-N)K}{\text{Re}h^2} \{ \cos \zeta h + \cos \eta h - 2 \} \left[1 + e^{i\tau k} \right] \right\} \hat{v}^v(\zeta, \eta, \tau) \quad (\mathcal{A}-6c)$$

$$\bar{H}^{v+1}(\zeta, \eta, \tau) = \bar{H}^v(\zeta, \eta, \tau) - i \frac{2w}{h} \sin \left(\zeta \frac{h}{2} \right) e^{-i\tau \frac{k}{2}} \bar{w}^{v+1}(\zeta, \eta, \tau) - i \frac{2w}{h} \sin \left(\eta \frac{h}{2} \right) e^{-i\tau \frac{k}{2}} \hat{u}^{v+1}(\zeta, \eta, \tau) \quad (\mathcal{A}-6d)$$

$$\hat{c}^{v+1}(\zeta, \eta, \tau) = \left[1 - \frac{\chi}{k} \left(1 - e^{i\tau k} \right) + \frac{(1-N)\chi}{Sc \text{Re}h^2} (\cos \zeta h + \cos \eta h - 2) \left(1 + e^{i\tau k} \right) \right] \hat{c}^v(\zeta, \eta, \tau) \quad (\mathcal{A}-6e)$$

En posant :

$$F(\zeta, \eta) = \frac{1}{h^2} (\cos \zeta h + \cos \eta h - 2)$$

$$\alpha(\zeta) = -\frac{2i}{h} \sin \left(\zeta \frac{h}{2} \right)$$

$$\beta(\eta) = -\frac{2i}{h} \sin \left(\eta \frac{h}{2} \right)$$

$$a(\zeta, \eta, \tau) = 1 - \frac{K}{k} \left(1 - e^{i\tau k} \right) + \frac{(1-N)K}{\text{Re}} \cdot F(\zeta, \eta) \cdot \left(1 + e^{i\tau k} \right)$$

$$b(\zeta, \eta, \tau) = 1 - \frac{\chi}{k} \left(1 - e^{i\tau k} \right) + \frac{(1-N)\chi}{Sc \text{Re}} \cdot F(\zeta, \eta) \cdot \left(1 + e^{i\tau k} \right)$$

Le système (A-6) se simplifie et s'écrit de façon suivante:

$$w^{\nu+1}(\zeta, \eta, \tau) = a(\zeta, \eta, \tau) w^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) + K \alpha(\zeta) \cdot e^{i\tau \frac{k}{2}} \cdot \Pi^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) \quad (\mathcal{A}-7a)$$

$$u^{\nu+1}(\zeta, \eta, \tau) = a(\zeta, \eta, \tau) u^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) + K \beta(\eta) \cdot e^{i\tau \frac{k}{2}} \cdot \Pi^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) \quad (\mathcal{A}-7b)$$

$$v^{\nu+1}(\zeta, \eta, \tau) = a(\zeta, \eta, \tau) v^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) \quad (\mathcal{A}-7c)$$

$$\bar{H}^{\nu+1}(\zeta, \eta, \tau) = \bar{H}^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) + \omega \alpha(\zeta) e^{-i\tau \frac{k}{2}} \bar{w}^{\nu+1}(\zeta, \eta, \tau) + \omega \beta(\eta) e^{-i\tau \frac{k}{2}} \hat{u}^{\nu+1}(\zeta, \eta, \tau) \quad (\mathcal{A}-7d)$$

$$c^{\nu+1}(\zeta, \eta, \tau) = b(\zeta, \eta, \tau) \cdot c^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) \quad (\mathcal{A}-7e)$$

En remplaçant $w^{\nu+1}$ et $u^{\nu+1}$ par leurs expressions dans l'équation (A-7d), on obtient l'expression suivante

$$\begin{aligned} \bar{H}^{\nu+1}(\zeta, \eta, \tau) = \bar{H}^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) + \omega \alpha(\zeta) e^{-i\tau \frac{k}{2}} & \left(a(\zeta, \eta, \tau) w^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) + K \alpha(\zeta) e^{i\tau \frac{k}{2}} \Pi^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) \right) \\ & + \omega \beta(\eta) e^{-i\tau \frac{k}{2}} \left(a(\zeta, \eta, \tau) u^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) + K \beta(\eta) e^{i\tau \frac{k}{2}} \Pi^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) \right) \end{aligned}$$

Qui devient :

$$\begin{aligned} \bar{H}^{\nu+1}(\zeta, \eta, \tau) = \omega \alpha(\zeta) a(\zeta, \eta, \tau) e^{-i\tau \frac{k}{2}} w^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) + \omega \beta(\eta) a(\zeta, \eta, \tau) e^{-i\tau \frac{k}{2}} u^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) \\ + K w(\alpha^2(\zeta) + \beta^2(\eta)) \Pi^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) + \bar{H}^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) \end{aligned}$$

On remplace $\alpha(\zeta)$ et $\beta(\eta)$ par leurs expressions, on trouve:

$$\begin{aligned} \bar{H}^{\nu+1}(\zeta, \eta, \tau) = \omega \alpha(\zeta) a(\zeta, \eta, \tau) e^{-i\tau \frac{k}{2}} w^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) + \omega \beta(\eta) a(\zeta, \eta, \tau) e^{-i\tau \frac{k}{2}} u^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) \\ + K w \left(-\frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\zeta \frac{h}{2} \right) - \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\eta \frac{h}{2} \right) \right) \Pi^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) + \bar{H}^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) \end{aligned}$$

On utilise la relation: $\sin^2 A = 1/2 - 1/2 \cos 2A$

On trouve:

$$\begin{aligned} \bar{H}^{\nu+1}(\zeta, \eta, \tau) = +w \beta(\eta) a(\zeta, \eta, \tau) e^{-i\tau \frac{k}{2}} u^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) + w \alpha(\zeta) a(\zeta, \eta, \tau) e^{-i\tau \frac{k}{2}} v^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) \\ + (1 + 2K w F(\zeta, \eta)) \bar{H}^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) \end{aligned} \quad (\mathcal{A}-7d)$$

Pour des raisons de commodité d'écriture, nous avons omis le symbole " $\wedge$ "

Considérons un vecteur $U(\zeta, \eta, \tau)$ ayant pour composantes :

$u(\zeta, \eta, \tau), v(\zeta, \eta, \tau), w(\zeta, \eta, \tau), \Pi(\zeta, \eta, \tau)$ et $C(\zeta, \eta, \tau)$ et soit $G(\zeta, \eta, \tau, k)$ une matrice carrée d'ordre cinq. Le système (A-7) peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$U^{\nu+1}(\zeta, \eta, \tau) = G(\zeta, \eta, \tau, k) \cdot U^{\nu}(\zeta, \eta, \tau) \quad (\mathcal{A}-8)$$

D'où l'on déduit, pour toute valeur de ν :

$$U(\zeta, \eta, \tau) = [G(\zeta, \eta, \tau, k)] U^{\circ}(\zeta, \eta, \tau) \quad (\mathcal{A}-9)$$

Où G est une matrice définie par :

$$G = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & K\alpha(\zeta)e^{i\tau\frac{K}{2}} & 0 \\ 0 & a & 0 & K\beta(\eta)e^{i\tau\frac{K}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \omega\beta(\eta).a.e^{-i\tau\frac{K}{2}} & \omega\alpha(\zeta).a.e^{-i\tau\frac{K}{2}} & 0 & 1+2K.\omega F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

Elle est appelée matrice d'amplification puisqu'elle contrôle l'amplification de la condition initiale $U^{\circ}(\zeta, \eta, \tau)$ ainsi que celle des erreurs intervenant au cours du calcul.

Si $\rho(G)$ désigne le rayon spectral de la matrice d'amplification G , la condition nécessaire de stabilité (condition de Von Neuman) s'écrit:

$$\rho(G) \leq 1 \quad \text{ou} \quad \max_{j=1,5} |\sigma_j| \leq 1$$

Où les σ_j sont les valeurs propres de G qui vérifient l'équation: $\text{Det}(G - \sigma I) = 0$

$$\text{Det}(G - \sigma I) = \begin{bmatrix} a - \sigma & 0 & 0 & K\alpha(\zeta)e^{i\tau\frac{K}{2}} & 0 \\ 0 & a - \sigma & 0 & K\beta(\eta)e^{i\tau\frac{K}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & a - \sigma & 0 & 0 \\ \omega\beta(\eta).a.e^{-i\tau\frac{K}{2}} & \omega\alpha(\zeta).a.e^{-i\tau\frac{K}{2}} & 0 & (1+2K.\omega F) - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b - \sigma \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta = a - \sigma \begin{bmatrix} a - \sigma & 0 & K\beta(\eta)e^{\frac{i\tau K}{2}} & 0 \\ 0 & a - \sigma & 0 & 0 \\ w.\alpha(\zeta).a.e^{-\frac{i\tau K}{2}} & 0 & (1+2K.w.F) - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b - \sigma \end{bmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} K\alpha(\zeta)e^{\frac{i\tau K}{2}} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a - \sigma & 0 \\ w.\beta(\eta).a.e^{-\frac{i\tau K}{2}} & w.\alpha(\zeta).a.e^{-\frac{i\tau K}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b - \sigma \end{bmatrix}$$

$$\Delta = (a - \sigma)^3 [(1 + 2K.w.F) - \sigma](b - \sigma) - (a - \sigma)^2 (b - \sigma)(w.K.a.\alpha(\zeta).\beta(\eta)) - (a - \sigma)^2 (b - \sigma)(w.K.a.\alpha(\zeta).\beta(\eta))$$

$$\Delta = (a - \sigma)^2 (b - \sigma) \{ \sigma^2 - [a + (1 + 2K.w.F)]\sigma + a(1 + 2K.w.F) - 2w.K.a.\alpha(\zeta).\beta(\eta) \} \quad (\mathcal{A}-10)$$

Nous obtenons alors cinq valeurs propres complexes pour $\Delta = 0$ qui sont :

$\sigma_{1,2} = \pm a$, $\sigma_3 = b$ et σ_4, σ_5 vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_4 + \sigma_5 = a + (1 + 2K.w.F) \\ \sigma_4.\sigma_5 = a(1 + 2K.w.F) - 2w.K.a.\alpha(\zeta).\beta(\eta) \end{cases}$$

La condition $|\sigma_1| \leq 1$ et $|\sigma_2| \leq 1$ (même cas)

La 1^{er} condition $Max|\sigma_1| \leq 1$

$$\sigma_1 = a = 1 - \frac{K}{k}(1 - e^{i\tau k}) + \frac{(1-N)K}{Re} F(\zeta, \eta)(1 + e^{i\tau k})$$

$$\Rightarrow a = 1 - \frac{K}{k}(1 - \cos\tau k) + \frac{(1-N)K}{Re} F(\zeta, \eta)(1 + \cos\tau k) + i \left(\frac{K}{k} + \frac{(1-N)K}{Re} F(\zeta, \eta) \right) \sin\tau k$$

$$\Rightarrow |\sigma_1| = \left\{ \left[1 - \frac{K}{k}(1 - \cos\tau k) + \frac{(1-N)K}{Re} F(\zeta, \eta)(1 + \cos\tau k) \right]^2 + \left[\left(\frac{K}{k} + \frac{(1-N)K}{Re} F(\zeta, \eta) \right) \sin\tau k \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$Max|\sigma_1| \leq 1$$

$$Max \left\{ \left[1 - \frac{K}{k}(1 - \cos\tau k) + \frac{(1-N)K}{Re} F(\zeta, \eta)(1 + \cos\tau k) \right]^2 + \left[\left(\frac{K}{k} + \frac{(1-N)K}{Re} F(\zeta, \eta) \right) \sin\tau k \right]^2 \right\}^{1/2} \leq 1$$

$$\text{Max} \left\{ \left[1 - \frac{K}{k} (1 - \cos \tau k) + \frac{(1-N)K}{\text{Re}} F(\zeta, \eta) (1 + \cos \tau k) \right]^2 + \left[\left(\frac{K}{k} + \frac{(1-N)K}{\text{Re}} F(\zeta, \eta) \right) \sin \tau k \right]^2 \right\} \leq 1$$

$$\text{Avec } \max |F(\zeta, \eta)| = \frac{2}{h^2}$$

$$\text{Ce qui donne : } \begin{cases} 0 < \frac{K}{k} \leq 1 \end{cases} \quad (\mathcal{A}-11)$$

$$\begin{cases} 0 < \frac{(1-N)K}{\text{Re} h^2} \leq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (\mathcal{A}-12)$$

$$\text{De la relation } |\sigma_3| \leq 1 \text{ on tire : } \begin{cases} 0 < \frac{\chi}{k} \leq 1 \end{cases} \quad (\mathcal{A}-13)$$

$$\begin{cases} 0 < \frac{(1-N)\chi}{\text{Sc Re} h^2} \leq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (\mathcal{A}-14)$$

$$\text{Posons ensuite : } \sigma_4 = r e^{i\theta} \text{ et } \sigma_5 = r' e^{i\theta'}.$$

Les conditions $|\sigma_4| \leq 1$ et $|\sigma_5| \leq 1$, soit $0 < r \leq 1$ et $0 < r' \leq 1$, deviennent

$$\begin{cases} r r' = |a(1 + 2K\omega F) - 2\omega \cdot K \cdot a \cdot \alpha(\zeta) \cdot \beta(\eta)| \\ |\sigma_4 + \sigma_5| = |a + (1 + 2k\omega F)| \leq 2 \end{cases}$$

La condition $|\sigma_4 + \sigma_5| \leq 2$ se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{cases} 0 < \frac{K}{k} + 4 \frac{K\omega}{h^2} \leq 2 \end{cases} \quad (\mathcal{A}-15)$$

$$\begin{cases} 0 < \frac{K}{h^2} \left(\frac{1-N}{\text{Re}} + \omega \right) \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\mathcal{A}-16)$$

Conclusion :

En combinant entre (A-13) et (A-14) on obtient la relation suivante :

$$0 < \frac{2\chi}{h^2} \left(\frac{1-N}{\text{Sc Re}} + \frac{h^2}{4k} \right) \leq 1$$

En combinant entre (A-12) et (A-15) on obtient la relation suivante :

$$0 < \frac{2\chi}{h^2} \left(\frac{1-N}{\text{Re}} + \frac{h^2}{4k} + w \right) \leq \frac{3}{2}$$

Les conditions de convergence établies par R.Peyret sont : $\chi > 0$, $k > 0$, $\omega > 0$

$$\begin{cases} \frac{2\chi}{h^2} \left(\frac{1}{\text{Pr Re}} + \frac{h^2}{4k} \right) \leq 1 \\ \frac{2\chi}{h^2} \left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{h^2}{4k} + w \right) \leq 1 \end{cases}$$