

N° d'ordre : 12/ 2011-M / MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI
BOUMEDIENE
FACULTE DE MATHEMATIQUES



Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

En : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle : Génie Mathématiques

Par : BELKHIR Amine

Sujet

**Combinatoire des Suites de Fibonacci et
Lucas généralisées par des pavages**

Soutenu publiquement le 30 Octobre 2011, devant le Jury composé de :

M ^{me} BOUCHEMAKH Isma	Professeure à l'USTHB	Présidente
M. BELBACHIR Hacène	Maitre de Conférences/A, à l'USTHB	Directeur de Mémoire
M. MIHOUBI Miloud	Maitre de Conférences/A, à l'USTHB	Examineur
M. HAMDY Fayçal	Maitre de Conférences/B, à l'USTHB	Invité

**Combinatoires des suites de Fibonacci et Lucas
généralisées par des pavages**

Mémoire de Magister en Mathématiques

Thème principal : Combinatoire énumérative

BELKHIR Amine

Table des matières

Table des matières	4
Remerciements	5
Introduction	6
1 Interprétation des nombres de Fibonacci par des pavages linéaires	8
1.1 Les nombres de Fibonacci	8
1.1.1 Quelques interprétations combinatoires	10
1.2 Interprétation par des pavages linéaires	12
1.2.1 Les nombres de Fibonacci	12
1.2.2 Les nombres q -Fibonacci	15
1.2.3 La suite multibonacci	17
1.3 Quelques identités combinatoires avec preuve bijective	18
1.3.1 Identités combinatoires relatives aux nombres de Fibonacci	18
1.3.2 Technique de permutation de pavages	26
1.3.3 Identités combinatoires relatives aux nombres q -Fibonacci	31
1.3.4 Identités combinatoires relatives aux nombres multibonacci	34
2 Interprétation des nombres de Lucas par des pavages circulaire	36
2.1 Les nombres de Lucas	36

2.1.1	Interprétation des nombres de Lucas par les pavages	37
2.2	Les nombres r-Lucas généralisés	40
2.2.1	Interprétation combinatoire	41
2.3	Identités combinatoires et preuves bijectives	42
2.3.1	Identités relatives au nombre de Lucas généralisé	42
2.3.2	Identités relatives aux nombres r-Lucas généralisés	46
3	La formule de Binet pour les suites de Fibonacci et de Lucas par les pavages aléatoires	48
3.1	La formule de Binet pour le nombre de Fibonacci	48
3.2	La formule de Binet pour les nombres de Lucas	51
	Conclusion	55
	Annexe A	56
	Annexe B	59
	Annexe C	62

Table des figures

1.1	Une chaîne a 10 sommets avec un ensemble indépendant $\{v_1, v_4, v_6, v_9\}$	11
1.2	un n -ruban.	12
1.3	La relation de récurrence par les pavages	13
1.4	Le nombre de façons possibles de paver un 4-ruban et un 5-ruban par des carrés et des tri-ominos correspond à $H_4^{(3)}$ et $H_5^{(3)}$	16
1.5	Le nombre de façons de paver un 3-ruban par des carrés, dominos et 3-ominos correspond à $\Phi_3^{(3)}$	18
1.6	$(n + 2)$ -ruban avec au moins un domino.	19
1.7	$(n + 4)$ -ruban avec aux moins deux dominos.	20
1.8	$(n+6)$ -ruban avec aux moins 3 dominos.	21
1.9	n -ruban avec au moins m dominos	22
1.10	Un $(2l + i)$ -ruban avec le $(2h + j)^{ième}$ carré occupe la cellule X	24
1.11	Un n -ruban où la dernière paire de dominos côte à côte occupe les cellules $k + 1, \dots, k + 4$	25
1.12	n -ruban avec deux carrés successive occupant les cellules $k + 1$ et $k + 2$	26
1.13	Un 10-ruban qui se coupe au niveau des cellules 1, 2, 4, 6, 7, 8, 10.	27
1.14	Deux 10-ruban avec des défauts au niveaux des cellules 1, 2, 5 et 7.	27
1.15	Après la permutation des deux portions des rubans on obtient un 11-ruban et un 9-ruban.	27

1.16	Si n est impair seulement les pavages qui contiennent des dominos sont sans défaut.	29
1.17	Si n est pair seulement les pavages qui contiennent des dominos sont sans défaut. . .	29
1.18	Une paire de ruban de longueur n dont les cellules sont numéroté de $1, \dots, n$ et $r + 1, \dots, n + r$	30
1.19	La paire de pavages (X', Y') de longueurs $n - r$ et $n + r$ obtenue après la permutation	31
1.20	Les paires de pavages de longueurs $n - r$ et $n + r$ qui ne possèdent pas des défauts	31
1.21	Un n -ruban avec au moins un q -omino.	32
1.22	$(n + 2q)$ -ruban avec au moins deux q -ominos.	33
1.23	n -ruban avec le dernier triomino qui occupe les cellules $k + 1, k + 2$ et $k + 3$. . .	35
1.24	n -ruban avec au moins un carré	35
2.1	Un 4-ruban circulaire.	38
2.2	Un 4-ruban circulaire avec les différents cas possibles de le paver.	38
2.3	Les trois façons possibles de paver la première cellule d'un ruban circulaire. . . .	38
2.4	Le n -bracelet de gauche est avec phase, et le n -bracelet de droite est sans phase.	39
2.5	Un n -bracelet avec phase correspond à un $(n - 2)$ -ruban et un n -bracelet sans phase correspond à un n -ruban.	40
2.6	Un n -bracelet avec au moins un domino.	43
2.7	La transformation d'un ruban en bracelet et ruban.	46
3.1	Un 7-pavage aléatoire peut être obtenu avec la probabilité de $\frac{1}{\phi^7}$	49

Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu au Directeur du mémoire Monsieur BELBACHIR Hacène pour m'avoir confié ce travail sur "Combinatoires des suites de Fibonacci et Lucas généralisées par des pavages". Je le remercie beaucoup de m'avoir soutenu par ses précieuses orientations, les nombreux conseils, sa disponibilité, ainsi que pour la confiance et la liberté qu'il m'a accordée durant la réalisation de ce mémoire.

Je remercie Madame BOUCHEMAKH Isma Professeur à l'USTHB pour avoir bien voulu me faire l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Mes sincères remerciement vont aussi à Monsieur MIHOUBI Miloud Maître de conférences à l'USTHB, et Monsieur HAMDI Fayçal Maître de conférences à l'USTHB pour avoir accepté d'être examinateurs de mon travail.

J'adresse également tous mes remerciements aux enseignants de la graduation et la post-graduation qui ont contribué à ma formation.

Je remercie aussi tous les collègues de la Faculté de Mathématiques. Nombre d'entre eux m'ont soutenu, soit par leurs actes, soit par leurs encouragements. Je leur exprime ici toute ma reconnaissance.

Introduction

Les suites récurrentes linéaires font un sujet d'étude si vaste et riche en résultats théoriques et pratiques qui font l'objet d'une littérature abondante. Parmi les suites récurrente linéaire les plus connues et sans doute la plus ancienne, on trouve la suite de Fibonacci. Elle doit son nom au mathématicien italien Leonardo de Pisa (1170 - 1250) connu sous le nom de Leonardo Fibonacci, qui dans un problème récréatif posé dans son ouvrage, le "Liber Abaci" publié en 1202, décrit la croissance d'une population de lapins (pour plus de détail on renvoi le lecteur au [15]), ce problème est à l'origine de la suite de Fibonacci. Au XIXe siècle le mathématicien français François Édouard Anatole Lucas (1842-1891) qui popularisa cette suite ainsi que son nom. Il a même proposé une généralisation de cette suite en changeant les valeurs des termes initiaux pour obtenir la suite connu par "La suite de Lucas".

Dans ce travail, nous nous intéressons à la combinatoire des suites de Fibonacci et Lucas généralisées et leurs extensions par des pavages linéaires et circulaires. Nous nous proposons d'établir de nouvelles identités combinatoires pour ces suites par des méthodes bijectives.

Notre travail est structuré en trois chapitres de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous commençons par quelques notions et préliminaires sur la suite de Fibonacci généralisée, la suite q -Fibonacci généralisée et la suite multibonacci. Nous passerons ensuite à l'interprétation combinatoires par les pavages linéaires de ces suites. Des preuves combinatoires associées à ces suites seront aussi présentée. Essentiellement les résultats que l'on présentera dans cette partie du chapitre sont dûs aux travaux de A. T. Benjamin, J. J. Quinn [9], [8] .

Enfin, la dernière partie de ce chapitre est consacrée aux identités issues de preuves bijectives. En premier lieu on généralise quelques identités liées à la suite de Fibonacci généralisée, on

présente aussi une technique développée par A. T. Benjamin, J. J. Quinn [9] pour fournir des preuves combinatoires pour une famille d'identités, on donnera aussi quelques identités relatives aux suites q -Fibonacci généralisée et la multibonacci.

Au deuxième chapitre, nous abordons une extension de l'interprétation combinatoire par des pavages pour interpréter les nombres de Lucas généralisée. En se basant sur cette interprétation, on donnera une interprétation combinatoire pour la suite r -Lucas généralisée ainsi qu'une preuve combinatoire pour l'expression explicite de cette dernière. Nous présentons aussi quelques identités bijectives liées aux suites de Lucas et r -Lucas généralisée, ainsi que des identités de type Fibonacci-Lucas où on exprime les nombres de Lucas généralisés en fonction des nombres de Fibonacci généralisés.

Le troisième chapitre est consacré aux formules de Binet liées aux nombres de Fibonacci et Lucas. Dans la première partie de ce chapitre on présente une preuve fournie par Benjamin et al [5] pour les nombres de Fibonacci. Cette preuve est basée sur un modèle de pavage aléatoire. Dans la deuxième partie nous proposons une preuve pour la formule de Binet pour les nombres de Lucas basée sur le modèle de pavage aléatoire combinée à un processus Markovien.

Notre travail se termine par trois annexes où on réécrit toutes les identités développé dans le premier et le deuxième chapitre pour les suites de : Fibonacci classique, Pell, Jacobsthal, ainsi que pour leurs suites compagnons.

Notons que, lorsqu'on ne cite pas l'auteur d'un résultat, il s'agit d'une modeste contribution.

Chapitre 1

Interprétation des nombres de Fibonacci par des pavages linéaires

Les nombres de Fibonacci sont étudiés par un grand nombre de Mathématiciens, on trouve dans la littérature une multitude d'articles concernant leurs interprétations combinatoires, on peut consulter Mathématiques Concrètes [19], The Golden ration and Fibonacci number [15].

Dans ce chapitre on utilise l'interprétation des nombres de Fibonacci par des pavages afin de développer des identités combinatoires.

1.1 Les nombres de Fibonacci

Les nombres de Fibonacci dont on présente dans le tableau ci-dessous les dix premiers termes, sont définis par la relation de récurrence suivante,

$$\begin{cases} F_0 = 0, & F_1 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & (n \geq 2), \end{cases} \quad (1.1)$$

où chaque nombre est la somme des deux nombres précédents.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Table 1.2 - Les dix premières valeurs de la suite de Fibonacci. SLOANE A000045

Définition 1 La suite de Fibonacci généralisés est définie pour tous entiers positifs a, b , par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_0 = 0, \mathcal{F}_1 = 1, \\ \mathcal{F}_n = a\mathcal{F}_{n-1} + b\mathcal{F}_{n-2} \quad (n \geq 2), \end{cases} \quad (1.2)$$

Les cas particulier de la suite de Fibonacci généralisée :

- Si $a = b = 1$, on obtient la suite de Fibonacci classique, Sloane A000045,

$$\begin{aligned} F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad \text{et} \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 2, \\ \{F_n\}_{n \geq 0} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

- Si $a = 2, b = 1$, on obtient la suite de Pell, Sloane A000129,

$$\begin{aligned} P_0 = 0, \quad P_1 = 1, \quad \text{et} \quad P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 2, \\ \{P_n\}_{n \geq 0} = \{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, \dots\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

- Si $a = 1, b = 2$, on obtient la suite de Jacobsthal, Sloane A001045,

$$\begin{aligned} J_0 = 0, \quad J_1 = 1, \quad \text{et} \quad J_{n+1} = J_n + 2J_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 2, \\ \{J_n\}_{n \geq 0} = \{0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, \dots\} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Les formes de Binet s'écrivent [2]

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \quad (n \geq 0) \\ P_n &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n \right), \quad (n \geq 0) \\ J_n &= \frac{1}{3} (2^n - (-1)^n), \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

Les formes explicites de ces suites [2] :

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}, \quad (n \geq 0) \\ P_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k}, \quad (n \geq 0) \\ J_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} 2^k, \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

Définition 2 Pour tout entier $q \geq 2$, soit $(F_n^{(q)})_{n \geq 0}$ la suite q -Fibonacci généralisée définie pour tous entiers positifs a et b , comme suit :

$$\begin{cases} F_0^{(q)} = 0, F_k^{(q)} = a^{k-1} & (1 \leq k \leq q-1), \\ F_n^{(q)} = aF_{n-1}^{(q)} + bF_{n-q}^{(q)} & (n \geq q). \end{cases} \quad (1.6)$$

Ce qui donne pour tout $n \geq 0$, (voir par exemple [2])

$$F_n^{(q)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{q} \rfloor} \binom{n - (q-1)k}{k} b^k a^{n-qk},$$

Notons que, pour $q = 2$, on obtient $F_n^{(2)} = \mathcal{F}_n$ la suite de Fibonacci généralisée, et pour $q = 3$, on obtient la suite Tribonacci généralisée. On présente dans le tableau ci-dessous les premières valeurs des suites q -Fibonacci ($q = 3, 4, 5$) où $a = b = 1$,

q		les valeurs initiales	les premières valeurs non nules
3	Tribonacci	0, 1, 1	1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, ...
4	Tetranacci	0, 1, 1, 1	1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, ...
5	Pentanacci	0, 1, 1, 1, 1	1, 1, 2, 4, 8, 16, 31, 61, 120, ...

Pour les premières valeurs des suites q -Fibonacci, ($q = 3, 4, 5, 6, 7, 8$) on peut consulter l'encyclopédie des suites numériques Sloane sous *A000073*, *A000078*, *A001591*, *A001592*, *A122189*, et *A079262*, respectivement.

La forme de Binet correspondante à la suite q -Fibonacci s'écrit comme suit :

$$F_n^{(q)} = \sum_{k=1}^q \frac{\alpha_k^n}{q\alpha_k - q},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ sont les racines distinctes de l'équation caractéristique : $x^q - ax^{q-1} - b = 0$.

1.1.1 Quelques interprétations combinatoires

Les nombres de Fibonacci ont plusieurs interprétations combinatoires, on présente dans ce paragraphe quelques interprétations tirées de l'article *Recounting Fibonacci and Lucas identities* [3].

- Soit a_n le nombre de chaînes binaires de longueur n avec des zéros non consécutifs, alors a_n satisfait la relation de récurrence $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, en effet, si la chaîne commence par

un 1 alors il y'a a_{n-1} façons d'étendre la chaine, ou bien si la chaine commence par un 0 qui sera suivie par un 1, d'où elle peut être étendue à a_{n-2} façons. de plus $a_0 = 1 = F_2$ et $a_1 = 2 = F_3$, ainsi on a $a_n = F_{n+2}$ pour tout $n \geq 0$.

- Soit c_n le nombre de chaines de 1 et de 2 tel que la somme est égale à n , alors $c_1 = 1$ et $c_2 = 2$ et pour tout $n \geq 2$, on a $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$, en effet, en distinguant les cas ou la chaine commence par un 1 ou bien par un 2 on a : c_{n-1} chaines dont la somme égale à $n - 1$ si la chaine commence par un 1, et c_{n-2} chaines dont la somme égale à $n - 2$ si la chaine commence par un 2. D'où on a $c_n = F_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.
- En théorie de graphes, les nombres de Fibonacci b_n comptent le nombre de façons de choisir un sous ensemble de sommets non adjacents (indépendant) dans une chaine de n sommets, figure 1.1 . Notons que b_{n-2} et b_{n-1} comptent le nombre de sous ensembles de sommets qui contiennent et ne contiennent pas le premier sommet de la chaine respectivement, et comme $b_0 = 1$, $b_1 = 2$ et pour tout $n \geq 0$ on a $b_n = F_{n+2}$ alors b_n satisfait aussi la relation de récurrence des suites de Fibonacci.

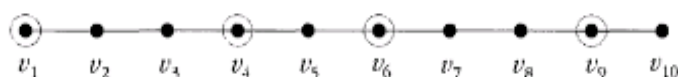


FIG. 1.1 – Une chaine a 10 sommets avec un ensemble independant $\{v_1, v_4, v_6, v_9\}$.

1	2	3	4	5	6
1	11	111	1111	11111	111111
	2	12	112	1112	11112
		21	121	1121	11121
			211	1211	11211
			221	2111	12111
				122	21111
				212	2211
				221	2121
					2112
					1221
					1212
					1122
					222

Table 1.1- a_n et les suites de 1 et 2 de la somme égale a n pour $n = 1, \dots, 6$.

1.2 Interprétation par des pavages linéaires

1.2.1 Les nombres de Fibonacci

Définition 3 Un n -ruban est la concaténation de n cellules carrées numérotées de 1 à n d'une manière linéaire, comme illustré dans la figure ci-dessous.



FIG. 1.2 – un n -ruban.

Définition 4 Un k -omino est un polymino linéaire qui couvre k cellules consécutives du ruban, pour $k = 1$ et $k = 2$, on a respectivement un carré et un domino.



Définition 5 On désigne par H_n le nombre de façons de couvrir un n -ruban avec des carrés et des dominos.

Exemple 6 Notons par $\mathcal{h}_n$ l'ensemble des pavages de longueur n et représentons un carré par c et un domino par d , alors on a

$H_2 = 2$, est le cardinale de $\mathcal{h}_2 = \{cc, d\}$

$H_3 = 3$, est le cardinale de $\mathcal{h}_3 = \{ccc, cd, dc\}$.

$H_4 = 5$, est le cardinale de $\mathcal{h}_4 = \{cccc, ccd, cdc, dcc, dd\}$.

Dans le tableau ci-dessous on donne les premières valeurs de H_n .

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	99

Table 1.3 - Les premières valeurs de H_n .

Théorème 7 [3] *La suite $(H_n)_{n \geq 0}$ vérifie la relation de récurrence suivante*

$$H_n = H_{n-1} + H_{n-2}, \quad n \geq 2, \text{ avec } H_0 = H_1 = 1. \quad (1.7)$$

Preuve. Si $n = 0$, on a une seule façon de paver un 0-ruban c'est de ne rien faire, par conséquent, $H_0 = 1$, pour $n = 1$, il n'y a évidemment qu'une seule façon de couvrir un 1-ruban est d'utiliser un carré, ainsi les conditions initiales sont vérifiées. Maintenant, pour $n \geq 2$, il y a deux façons possibles de paver l'extrémité du ruban, soit par un carré soit par un domino. Si on choisit un carré, alors il reste un ruban de longueur $n - 1$ qu'on peut paver de H_{n-1} façons. Dans l'autre cas, c'est-à-dire si on choisit un domino, le $(n - 2)$ -ruban peut être complétée de H_{n-2} façons. $\square$

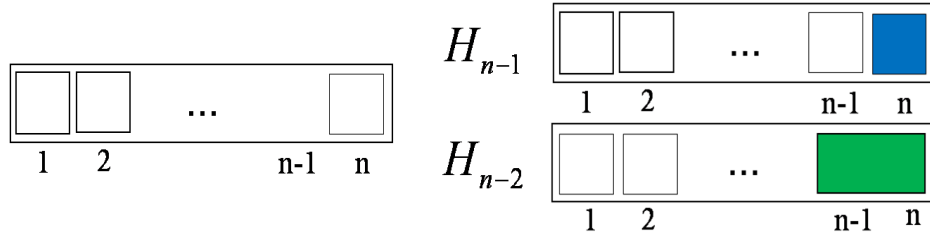


FIG. 1.3 – La relation de récurrence par les pavages

Théorème 8 [3] *Pour tout $n \geq 0$, $F_{n+1} = H_n$ compte le nombre de façons de couvrir un n -ruban par des carrés et des dominos.*

Maintenant, pour tous entiers positifs a et b , posons f_n le nombre de façons de paver un n -ruban par des carrés de a couleurs différentes, et des dominos de b couleurs différentes.

Par exemple, pour couvrir un 1-ruban on a a façons de choisir un carré coloré d'où $f_1 = a$, et pour un ruban de longueur 2 on a $f_2 = a^2 + b$ façons de le faire, en effet un 2-ruban peut être pavé soit par deux carrés colorés ou bien par un domino coloré. Similairement, pour couvrir un 3-ruban on peut le faire soit par trois carrés colorés, ou bien par un carré et un domino colorés avec possibilité de permutation, d'où on a $f_3 = a^3 + 2a^2b$.

Posons $f_0 = 1$, on a une seule façon de paver un 0-ruban, c'est de ne rien faire. Donc pour tout $n \geq 2$, f_n satisfait la relation de récurrence suivante,

$$f_n = af_{n-1} + bf_{n-2}.$$

Théorème 9 [9] *La formule de récurrence de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est définie pour tous entiers positifs a et b , par*

$$\begin{cases} f_0 = 1, f_1 = a, \\ f_n = af_{n-1} + bf_{n-2} \quad (n \geq 2). \end{cases} \quad (1.8)$$

Preuve. Cette relation de récurrence est obtenue du fait qu'on a deux façons possibles de paver l'extrémité du ruban, soit par un carré coloré et il reste un $(n-1)$ -ruban à paver de f_{n-1} façons possibles, ou bien si on utilise un domino coloré et dans ce cas il reste un $(n-2)$ -ruban à paver de f_{n-2} façons possibles. Ainsi on a af_{n-1} façons possibles de paver un n -ruban si on commence par un carré coloré et bf_{n-2} façons si on commence par un domino. $\square$

Si on pose $f_{-1} = 0$, on obtient une définition combinatoire des nombres de Fibonacci généralisés.

Théorème 10 [9] *Pour tout entier $n \geq 0$, $f_n = \mathcal{F}_{n+1}$ compte le nombre de façons de paver un n -ruban par des dominos de b couleurs différentes et des carrés de a couleurs différentes.*

Corollaire 11 *Pour (a, b) prenant respectivement les valeurs $(1, 1)$, $(2, 1)$ et $(1, 2)$ on obtient respectivement une interprétation combinatoire par les pavages des relations (1.3), (1.4) et (1.5).*

Théorème 12 *Le nombre de façons de couvrir un n -ruban en utilisant exactement k ($0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) dominos est*

$$f(n, k) = a^{n-2k} b^k \binom{n-k}{k}, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Preuve. Considérons les pavages qui contiennent exactement k ($0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) dominos, alors ces pavages contiennent nécessairement $n - 2k$ carrés, d'où au total il y'a $k + n - 2k = n - k$ pièces dans le pavage. Ainsi on a $\binom{n-k}{k} b^k a^{n-2k}$ façons de choisir k dominos colorés parmi les $(n - k)$ pièces. $\square$

Corollaire 13 *En utilisant le Théorème 12 on peut établir la formule explicite de f_n par la sommation sur toutes les valeurs de k , ainsi le nombre le façons de couvrir un n -ruban avec des carrés de a couleurs différentes et des dominos de b couleurs différentes est,*

$$f_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} a^{n-2k} b^k,$$

Preuve (par induction sur n). Pour $n = 2$, on a $f_2 = \sum_{k=0}^1 \binom{2-k}{k} b^k a^{2-2k} = \binom{2}{0} b^0 a^2 + \binom{1}{1} b^1 a^0 = a^2 + b$ ce qui est vrai par définition de f_2 .

Maintenant, supposons que la formule est vrai pour f_{n-1} et f_n . alors on a par définition de f_{n+1} : $f_{n+1} = af_n + bf_{n-1}$, donc par l'hypothèse d'induction on a,

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= a \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} a^{n-2k} b^k + b \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k} a^{n-1-2k} b^k \\ &= a^{n+1} + a \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} a^{n-2k} b^k + b \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k} a^{n-1-2k} b^k, \end{aligned}$$

Si on remplace dans le dernier terme de l'égalité k par $k-1$ on obtient :

$$f_{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} a^{n-2k+1} b^k + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k-1} a^{n+1-2k} b^k,$$

Or, on sait que $\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}$, d'où on obtient

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-k}{k} a^{n-2k+1} b^k, \\ f_{n+1} &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-k}{k} a^{n-2k+1} b^k. \end{aligned}$$

□

1.2.2 Les nombres q-Fibonacci

Le but de cette section est la généralisation des preuves précédentes aux nombres q -Fibonacci généralisés.

Définition 14 Soit $H_n^{(q)}$ le nombre de façons de couvrir un n -ruban en utilisant des carrés et des q -ominos (des polyminos de longueur q).

Dans la figure 1.4 on illustre toutes les façons possibles de paver un 4-ruban et un 5-ruban par des carrés et des tri-ominos, le nombre de pavages correspond à $H_4^{(3)}$ et $H_5^{(3)}$, respectivement.

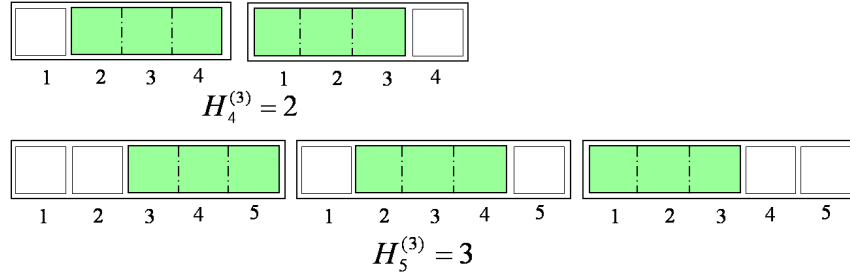


FIG. 1.4 – Le nombre de façons possibles de paver un 4-ruban et un 5-ruban par des carrés et des tri-ominos correspond à $H_4^{(3)}$ et $H_5^{(3)}$

Théorème 15 [21] La suite $(H_n^{(q)})_{n \geq 0}$ est donnée par la relation de récurrence suivante

$$\begin{cases} H_0^{(q)} = H_1^{(q)} = \dots = H_{q-1}^{(q)} = 1, \\ H_n^{(q)} = H_{n-1}^{(q)} + H_{n-q}^{(q)} \quad n \geq q. \end{cases}$$

Preuve. Pour $n = 0$, on a une seule façon de paver un n -ruban : ne rien faire, et pour $1 \leq n \leq q - 1$, on a une seule façon de paver un n -ruban en utilisant seulement des carrés. Maintenant, pour $n \geq q$, on a deux façons possibles de paver l'extrémité de n -ruban soit par un carré et dans ce cas il reste à paver $(n - 1)$ -ruban par $H_{n-1}^{(q)}$ façons possibles, ou bien si on choisi un q -omino est dans ce cas le $(n - q)$ -ruban peut être completé de $H_{n-q}^{(q)}$ façons possibles. $\square$

Théorème 16 [21] Pour tout $n \geq 0$, $F_{n+1}^{(q)} = H_n^{(q)}$ compte le nombre de façons de couvrir un n -ruban avec des carrés et des q -ominos.

Maintenant, on se met dans la situation où l'on dispose de carrés de a couleurs différentes et de q -ominos de b couleurs différentes.

Définition 17 Soit $f_n^{(q)}$ le nombre de façons de paver un n -ruban par des carrés de a couleurs différents et des q -ominos de b couleurs différentes.

Théorème 18 La suite $(f_n^{(q)})_{n \geq 0}$ est définie pour tous entiers positifs a, b par la relation suivantes,

$$\begin{cases} f_0^{(q)} = 1, f_k^{(q)} = a^k \quad (1 \leq k \leq q - 1), \\ f_n^{(q)} = a f_{n-1}^{(q)} + b f_{n-q}^{(q)} \quad (n \geq q). \end{cases} \quad (1.9)$$

Preuve. La preuve est analogue a celle du Théorème 9. $\square$

Théorème 19 *Le nombre de façons de couvrir un n -ruban en utilisant k q -ominos ($0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$) est*

$$f^{(q)}(n, k) = a^{n-qb} b^k \binom{n-k(q-1)}{k}, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor.$$

Preuve. La preuve est analogue à celle du Théorème 12. $\square$

Corollaire 20 *Le nombre de façons de couvrir un n -ruban avec des q -ominos de b couleurs différentes et des carrés de a couleurs différentes est :*

$$f_n^{(q)} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor} \binom{n-k(q-1)}{k} a^{n-qb} b^k.$$

Preuve. La preuve est déduite directement du Théorème 19, en sommant sur toutes les valeurs de k ($0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$). $\square$

1.2.3 La suite multibonacci

Dans cette sous section, on présente une interprétation combinatoire pour la suite multibonacci, ainsi qu'une preuve combinatoire de la formule explicite.

Définition 21 *Pour $r > 1$, et tous entiers positifs $c_1, c_2, \dots, c_r$, on définit la suite multibonacci par*

$$\begin{cases} \Phi_{-r}^{(r)} = \dots = \Phi_{-2}^{(r)} = \Phi_{-1}^{(r)} = 0, \\ \Phi_0^{(r)} = 1, \\ \Phi_n^{(r)} = c_1 \Phi_{n-1}^{(r)} + c_2 \Phi_{n-2}^{(r)} + \dots + c_r \Phi_{n-r}^{(r)} \quad (n \geq 1). \end{cases} \quad (1.10)$$

Dans [8], A. T. Benjamin, C. R. H. Hanusa, et F. E. Su, ont donné une interprétation combinatoire de $\Phi_n^{(r)}$, elle compte le nombre de façons de couvrir un n -ruban par des polyminos de longueur i ($1 \leq i \leq r$) où chaque pièce de longueur i on peut lui attribuer c_i couleurs différentes.

Dans la figure 1.5 on illustre toutes les façons possibles de paver un ruban de longueur 3 par des carrés, dominos et tri-ominos. Le nombre de pavages de longueur 3 par des carrés, dominos et tri-ominos (sans couleurs) correspond à $\Phi_3^{(3)}$ avec $c_1 = c_2 = c_3 = 1$.

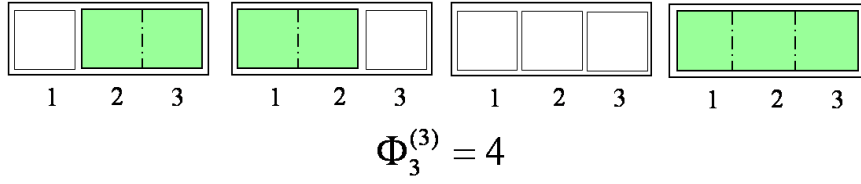


FIG. 1.5 – Le nombre de façons de paver un 3-ruban par des carrés, dominos et 3-ominos correspond à $\Phi_3^{(3)}$.

En 2006, H. Belbachir et F. Bencherif [1] ont exprimé le terme général de la suite donnée par (1.10) pour $c_1, c_2, \dots, c_r$ dans un anneaux commutatif unitaire. Pour des c_i ($1 \leq i \leq r$) entiers, Benjamin et al. [8] ont établi une preuve combinatoire :

Théorème 22 [8] Pour $n \geq 0$, on a

$$\Phi_n^{(r)} = \sum_{k_1+2k_2+\dots+rk_r=n} \binom{k_1+k_2+\dots+k_r}{k_1, k_2, \dots, k_r} c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots c_r^{k_r}.$$

Preuve. On compte le nombre de façons de couvrir un n -ruban par k_i polyminos de longueur i ($1 \leq i \leq r$), où chacun de ces k_i polyminos on peut lui attribue c_i couleurs tel que la somme des longueurs de polyminos doit être égale à n ($k_1 + 2k_2 + \dots + rk_r = n$). Le nombre de façons d'arranger ces $k_1 + k_2 + \dots + k_r$ polyminos est donné par le coefficient multinomial. $\square$

1.3 Quelques identités combinatoires avec preuve bijective

Dans cette section, nous allons présenter quelques identités liées aux nombres de Fibonacci généralisés, les nombres q -Fibonacci généralisés ainsi que la suite multibonacci. Les preuves des identités sont basées sur la combinatoire de pavages.

1.3.1 Identités combinatoires relatives aux nombres de Fibonacci

La preuve de l'identité suivante a été établi par Hanusa [21],

Identité 1.1. Pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^n f_k a^{n-k} = \frac{1}{b} (f_{n+2} - a^{n+2}). \quad (1.11)$$

Preuve . [21] Le nombre de façons de couvrir un $(n+2)$ -ruban en excluant le cas où on utilise que des carrés pour couvrir le $(n+2)$ -ruban correspond à $f_{n+2} - a^{n+2}$. D'autre part, comme il y a au moins un domino, raisonnons par rapport au domino le plus à droite, soient $k+1$ et $k+2$ ses positions pour $0 \leq k \leq n$.

Pour $0 \leq k \leq n$ on a f_k façons de couvrir les k premières cellules, et b façons possibles de choisir la couleur du domino couvrant les cellules $k+1$ et $k+2$, ainsi il reste à couvrir les cellules $k+3, \dots, n+2$ par des carrés de a^{n-k} façons. En sommant sur toutes les valeurs de k , on obtient $b \sum_{k=0}^n f_k a^{n-k}$ façons. $\square$

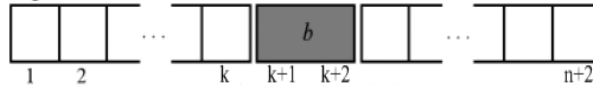


FIG. 1.6 – $(n+2)$ -ruban avec au moins un domino.

Pour $a = b = 1$, on retrouve l'identité bien connue, de E. Lucas [27],

$$\sum_{k=0}^n f_k = f_{n+2} - 1.$$

Maintenant, nous proposons une série d'extension de l'identité précédente.

Identité 1.2.

$$\sum_{k=0}^n f_{n-k} k a^{k-1} = \frac{1}{b^2} (f_{n+3} - a^{n+3} - b a^{n+1} (n+2)). \quad (1.12)$$

Preuve. L'identité (1.2) compte le nombre de façons de couvrir un $(n+4)$ -ruban avec au moins deux dominos. En effet, le nombre de façons de couvrir un $(n+4)$ -ruban est f_{n+4} , en excluant les cas où on utilise exactement 0 ou 1 domino on obtient $f_{n+4} - (a^{n+4} + b a^{n+2} (n+3))$.

Maintenant si on considère l'avant dernier domino, comme illustré dans la figure ci-dessous, soit $k+1, k+2$ ($0 \leq k \leq n$) sa position, alors on a f_k façons de couvrir les k premières cellules et $\binom{n-k+1}{1} b^2 a^{n-k}$ façons possibles de couvrir les cellules $k+1$ à $n+4$.

D'où on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n f_k b^2 a^{n-k} (n-k+1) &= f_{n+4} - a^{n+4} - b a^{n+2} (n+3), \\ \implies b^2 \sum_{k=0}^n f_{n-k} a^k (k+1) &= f_{n+4} - a^{n+4} - b a^{n+2} (n+3), \\ \implies b^2 \sum_{k=0}^n f_{n-k} a^k k + b^2 \sum_{k=0}^n f_{n-k} a^k &= f_{n+4} - a^{n+4} - b a^{n+2} (n+3), \end{aligned}$$

Or d'après l'identité (1.1) on a : $\sum_{k=0}^n f_{n-k}a^k = \frac{1}{b}(f_{n+2} - a^{n+2})$, alors

$$\begin{aligned} b^2 \sum_{k=0}^n f_{n-k}a^k k &= f_{n+4} - a^{n+4} - ba^{n+2}(n+3) - bf_{n+2} + ba^{n+2} \\ &= af_{n+3} + bf_{n+2} - bf_{n+2} - a^{n+4} - ba^{n+2}(n+2) \\ &= af_{n+3} - a^{n+4} - ba^{n+2}(n+2), \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b^2 \sum_{k=0}^n f_{n-k}a^{k-1}k = f_{n+3} - a^{n+3} - ba^{n+1}(n+2),$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n f_{n-k}a^{k-1}k = \frac{1}{b^2}(f_{n+3} - a^{n+3} - ba^{n+1}(n+2)).$$

□

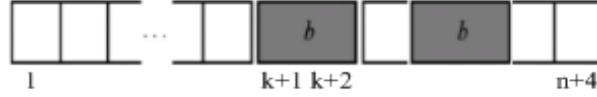


FIG. 1.7 – $(n+4)$ -ruban avec aux moins deux dominos.

Remarque 23 L'identité (1.2) compte aussi le nombre de façons de couvrir un $(n+3)$ -ruban avec au moins deux dominos.

Identité 1.3. Pour tout $n \geq 6$,

$$\frac{b^3}{2} \sum_{k=0}^n f_{n-k}a^k(k+2)(k+1) = f_{n+6} - a^{n+6} - ba^{n+4}(n+5) - b^2a^{n+2} \frac{(n+4)(n+3)}{2}. \quad (1.13)$$

Preuve. L'identité (1.3) compte le nombre de façons de couvrir un $(n+6)$ -ruban avec au moins 3 dominos. En effet, le nombre de façons de couvrir un $(n+6)$ -ruban, f_{n+6} , en soustrayant le nombre de façons de couvrir le $(n+6)$ -ruban avec exactement 0, 1 ou 2 dominos, $f_{n+6} - a^{n+6} - ba^{n+4}(n+5) - b^2a^{n+2} \frac{(n+4)(n+3)}{2}$, ainsi on obtient la partie droite de l'identité.

Maintenant, on montre que le terme gauche de l'identité compte le nombre de façons de couvrir un $(n+6)$ -ruban ou le troisième domino en partant de la droite du ruban occupe les cellules $k+1$ et $k+2$, pour tout $0 \leq k \leq n$ comme illustré dans la figure ci-dessous. Pour $0 \leq k \leq n$, on a f_k façons de couvrir les cellules de 1 à k , b façons pour le domino occupant les cellules

$k+1$ et $k+2$, et $b^2 a^{n-k} \binom{n-k+2}{2}$ façons pour couvrir les cellules de $k+3$ à $n+6$ avec des carrés et 2 dominos. ainsi on a au total $\frac{b^3}{2} \sum_{k=0}^n f_{n-k} a^k (k+2)(k+1)$ façons possibles de couvrir un $(n+6)$ -ruban avec au moins 3 dominos. $\square$



FIG. 1.8 – $(n+6)$ -ruban avec aux moins 3 dominos.

Définition 24 Pour $n \geq 0$, les nombres de Stirling de première espèce, noté $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$, sont définis par l'équation

$$X^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] X^k,$$

avec

$$X^{\bar{n}} = \begin{cases} 1, & \text{pour } n = 1, \\ X(X+1)(X+2)\dots(X+n-1), & \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Définition 25 (combinatoire) Pour $n \geq k \geq 0$, les nombres de Stirling de première espèce $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$, compte le nombre de permutations de n éléments en k cycles.

L'identité suivante liée les nombres de Fibonacci aux nombres de Stirling de première espèce.

Identité 1.4. Pour tous $m \geq 1$ et $n \geq 2m$

$$b^m \sum_{0 \leq j \leq k \leq n-2m} f_{n-k-2m} \frac{a^k}{k!} \left[\begin{smallmatrix} k \\ j \end{smallmatrix} \right] m^j = f_n - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-k}{k} b^k a^{n-2k}. \quad (1.14)$$

Preuve. La partie droite de l'identité, compte le nombre de façons de couvrir un n -ruban avec au moins m dominos. En effet, le nombre de façons de paver un n -ruban est par définition f_n . D'autre part, d'après le du Théorème (12), le nombre des pavages qui contiennent exactement k ($0 \leq k \leq m-1$) dominos est $\binom{n-k}{k} b^k a^{n-2k}$. D'où le nombre de pavages qui contiennent au moins m dominos est $f_n - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-k}{k} b^k a^{n-2k}$.

Nous montrons maintenant que la partie gauche de l'identité compte la même chose en considérant les m derniers dominos du pavage. Soient $k+1$ et $k+2$ ($0 \leq k \leq n-2m$) les positions

de $m^{\text{ième}}$ domino en partant de la droite du ruban comme illustré dans la figure 1.9. Alors pour couvrir les k premières cellules du n -ruban, on a f_k façons possibles, et $b^m a^{n-k-2m} \binom{n-k-m-1}{m-1}$ pour couvrir les cellules $k+1$ et $k+2$ avec un domino, et les cellules $k+3, \dots, n$ avec exactement $m-1$ dominos et des carrés. En sommant sur toutes les valeurs de k de 0 à $(n-2m)$ on obtient

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-2m} f_k b^m a^{n-k-2m} \binom{n-k-m-1}{m-1} &= b^m \sum_{k=0}^{n-2m} f_{n-k-2m} a^k \binom{k+m-1}{m-1} \\
 &= b^m \sum_{k=0}^{n-2m} f_{n-k-2m} a^k \frac{(m+k-1)\dots(m+1)m}{k!} \\
 &= b^m \sum_{k=0}^{n-2m} f_{n-k-2m} \frac{a^k}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} m^j \\
 &= b^m \sum_{0 \leq j \leq k \leq n-2m} f_{n-k-2m} \frac{a^k}{k!} \binom{k}{j} m^j.
 \end{aligned}$$

Ainsi l'identité est prouvée. $\square$

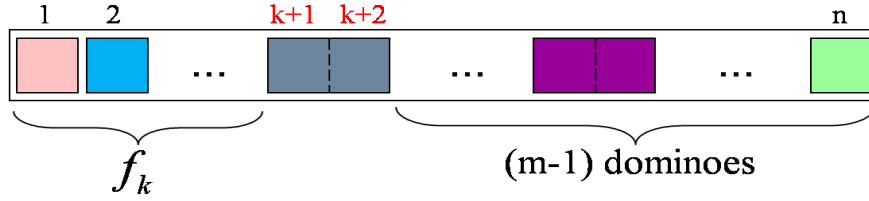


FIG. 1.9 – n -ruban avec au moins m dominos

Définition 26 On définit $\left(\binom{n}{k}\right)$ comme le nombre des k -combinaisons avec répétitions d'un ensemble N , tel que $|N| = n \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Cette notation est proposée dans le livre de Stanley, *Enumerative Combinatorics* [30].

Identité 1.5 Pour tous $m \geq 1$ et $n \geq m$,

$$f_n - \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \varepsilon}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} b^k a^{n-2k} = a^m \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} f_{n-m-2k} \left(\binom{m}{k}\right) b^k, \quad (1.15)$$

$$\text{où } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } n \pmod{2} \geq m \pmod{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. L'identité compte le nombre de pavages de longueur n qui contiennent au moins m carrés.

Posons $n = 2l + i$ et $m = 2h + j$ avec $(0 \leq i, j \leq 1)$.

La partie gauche de l'identité compte le nombre de façons de paver un n -ruban par des carrés et des dominos, en excluant les pavages qui contiennent exactement $2k + i$ carrés ($0 \leq k \leq h$, si $i < j$) et ($0 \leq k \leq h - 1$) sinon. Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}
& f_n - \left(a^i b^l \binom{2l+i-l}{l} + a^{2+i} b^{l-1} \binom{2l+i-(l-1)}{l-1} + \dots + a^{2(h-\varepsilon)+i} b^{l-h+\varepsilon} \binom{2l+i-(l-h+\varepsilon)}{l-h+\varepsilon} \right) \\
&= f_n - \sum_{k=0}^{h-\varepsilon} \binom{l+i+k}{l-k} b^k a^{l-k} \\
&= f_n - \sum_{k=l-h+\varepsilon}^l \binom{2l+i-k}{k} b^k a^{2l+i-2k} \\
&= f_n - \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \varepsilon}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} b^k a^{n-2k}.
\end{aligned}$$

Montrons que la partie droite de l'identité compte la même chose.

Posons X la position de $(2h + j)^{ième}$ carré en partant de la droite du $(2l + i)$ -ruban,

$$\text{Où } X = \begin{cases} 2k + 1, & (0 \leq k \leq l - h) \quad \text{si } i = j = 0, \\ 2k + 2, & (0 \leq k \leq l - h) \quad \text{si } i = 1 \text{ et } j = 0, \\ 2k, & (0 \leq k \leq l - h) \quad \text{si } i = 0 \text{ et } j = 1, \\ 2k + 1, & (0 \leq k \leq l - h) \quad \text{si } i = j = 1, \end{cases}$$

Ce qui nous amène à l'équation suivante

$$2l + i - (2h + j - 1) - X \equiv 0 \pmod{2},$$

D'où $X = 2k + i - j + 1$ avec $0 \leq k \leq l - h$.

Ainsi, pour tout $0 \leq k \leq l - h$, on a f_{2k+i-j} façons de couvrir les cellules $1, \dots, 2k + i - j$, et a façons de choisir la couleur du carré pour couvrir la cellule $2k + i - j + 1$, il reste à couvrir les cellules $2k + i - j + 2, \dots, n$ avec exactement $2h + j - 1$ carrés et des dominos ce qui correspond à $\binom{l+h+j-k-1}{l-k-h} b^{l-k-h} a^{2h+j-1}$ façons possibles. En sommant sur toutes les valeurs de k , on obtient

avec le changement de variable $k = l - h - k$

$$\begin{aligned}
 a^{2h+j} \sum_{k=0}^{l-h} f_{2k+i-j} \binom{l+h+j-k-1}{l-k-h} b^{l-k-h} &= a^{2h+j} \sum_{k=0}^{l-h} f_{2l+i-2h-j-2k} \binom{2h+j+k-1}{k} b^k \\
 &= a^{2h+j} \sum_{k=0}^{l-h} f_{(2l+i)-(2h+j)-2k} \left(\binom{2h+j}{k} \right) b^k \\
 &= a^m \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} f_{n-m-2k} \left(\binom{m}{k} \right) b^k.
 \end{aligned}$$

□

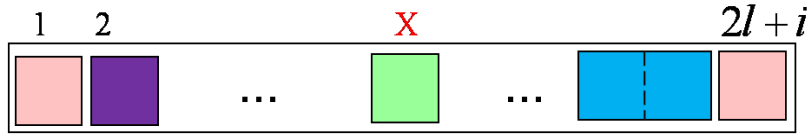


FIG. 1.10 – Un $(2l+i)$ -ruban avec le $(2h+j)^{ième}$ carré occupe la cellule X .

L'identité suivante compte le nombre de pavages qui contiennent au moins un carré entre chaque paire de dominos.

Identité 1.6. Pour $n \geq 4$, on a

$$f_n - b^2 \sum_{k=0}^{n-4} f_{n-4-k} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} \binom{k-2i}{i} b^i a^{k-2i} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n-2j}{j} b^j a^{n-2j} + b \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} \binom{n-2-2i}{i} b^i a^{n-2-2i}. \quad (1.16)$$

Preuve. La partie gauche de l'identité, compte le nombre de façons de paver un n -ruban, en excluant les pavages qui contiennent au moins deux dominos côte à côte (la figure 1.11 illustre le cas d'un pavage qui contient deux dominos côte à côte occupant les position $k+1, \dots, k+4$). En effet, le nombre de tous les pavages de longueurs n est par définition f_n , maintenant, pour calculer le nombre de pavages qui contiennent au moins deux dominos côte à côte, posons $k+1, \dots, k+4$ ($0 \leq k \leq n-4$) les positions des deux derniers dominos côte à côte, comme illustré dans la figure (1.11), alors on a f_k façons de paver les k premières cellules, b^2 façons de choisir les couleurs des deux dominos occupant les cellules $k+1, \dots, k+4$, ainsi il reste à paver les cellules $k+5, \dots, n$ de façon qu'on ait pas deux dominos côte à côte, pour cela on couvre cette partie du ruban par des carrés et des paires (*carré*, *domino*). En sommant sur toutes les valeurs de k on obtient ainsi,

$$b^2 \sum_{k=0}^{n-4} f_k \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-k-4}{3} \rfloor} \binom{n-k-4-2i}{i} b^i a^{n-4-k-2i} = b^2 \sum_{k=0}^{n-4} f_{n-4-k} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} \binom{k-2i}{i} b^i a^{k-2i}. \quad (1.17)$$

on a donc dénombré la partie gauche de l'identité, montrons que la partie droite compte la même chose.

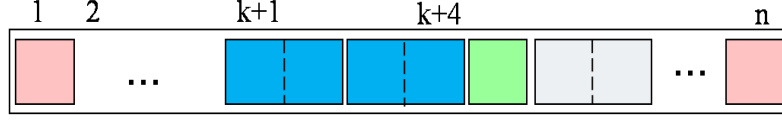


FIG. 1.11 – Un n -ruban ou la dernière paire de dominos côte à côte occupe les cellules $k + 1, \dots, k + 4$.

La partie droite de l'identité, compte le nombre de façons de couvrir un n -ruban par des carrés et des paires (*domino*, *carré*), en effet, afin d'éviter d'avoir deux dominos côte à côte, à chaque fois que l'on pose un domino, il sera suivi d'un carré, d'où on obtient,

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n-2j}{j} b^j a^{n-2j}, \quad (1.18)$$

Maintenant, étant donné qu'on ne peut pas avoir un domino qui couvre les cellules $n - 1$ et n en utilisant des carrés et des paires (*domino*, *carré*) pour paver le n -ruban, ce cas sera traité comme cas particulier, si on fixe un domino sur les cellules $n - 1$ et n , alors il reste à paver un $(n - 2)$ -ruban par des carrés et des paires (*domino*, *carré*), ce qui donne :

$$b \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} \binom{n-2-2i}{i} b^i a^{n-2-2i}. \quad (1.19)$$

En sommant (1.18) et (1.19) on obtient la partie droite de l'identité. $\square$

L'identité suivante compte le nombre de pavages qui contiennent au moins un domino entre chaque paire de carrés.

Identité 1.7. Pour tout $n \geq 2$,

$$f_n - a^2 \sum_{k=0}^{n-2} f_{n-k-2} \sum_{2i+3j=k} \binom{i+j}{i} b^{i+j} a^j = \sum_{2i+3j=n} \binom{i+j}{i} b^{i+j} a^j + \sum_{2i+3j=n-1} \binom{i+j}{i} b^{i+j} a^{j+1} \quad (1.20)$$

Preuve. La partie gauche de l'identité compte le nombre de façons de paver un n -ruban en excluant les cas où on a au moins deux carrés côte à côte. Le nombre de façons de paver un n -ruban est par définition égal à f_n . Maintenant on dénombre les pavages qui contiennent au moins deux carrés successifs, soient $k + 1$ et $k + 2$ les positions des deux derniers carrés successifs

sur le ruban (figure 1.12), alors on a f_k façons de paver les cellules 1 à k , et a^2 façons de choisir les couleurs des carrés occupant les cellules $k+1$ et $k+2$, et pour paver les cellules $k+3$ jusqu'à n tel que il n'existe pas deux carrés successifs on utilise des dominos et des paires de type (domino, carré) ainsi on a $\sum_{2i+3j=k} \binom{i+j}{i} b^{i+j} a^j$ façons possibles de paver les cellules $k+3, \dots, n$. D'où on a en tout $a^2 \sum_{k=0}^{n-2} f_k \sum_{2i+3j=n-k-2} \binom{i+j}{i} b^{i+j} a^j$ pavages qui contiennent au moins deux carrés successifs.

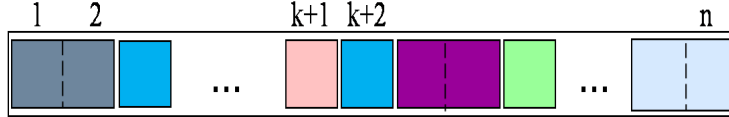


FIG. 1.12 – n -ruban avec deux carrés successive occupant les cellules $k+1$ et $k+2$

La partie droite de l'identité compte la même chose, en dénombrant les façons possibles de paver un n -ruban par des dominos et des paires de type (carré,domino), c'est-à-dire on compte le nombre de façons de paver un n -ruban par des carrés et des dominos tels que à chaque fois que l'on utilise un carré il sera suivi obligatoirement par un domino, ainsi on obtient :

$$\sum_{2i+3j=n} \binom{i+j}{i} b^{i+j} a^j. \quad (1.21)$$

Si on couvre la n -ième cellule du ruban par un carré, alors il reste à pavé le $(n-1)$ -ruban par des dominos et des paire (carré,domino) ce qui correspond à

$$\sum_{2i+3j=n-1} \binom{i+j}{i} b^{i+j} a^{j+1} \quad (1.22)$$

façons possibles. En sommant (1.21) et (1.22) on obtient la partie droite de l'identité. $\square$

1.3.2 Technique de permutation de pavages

Dans ce paragraphe, on présente une technique développée par A. T. Benjamin et J. J. Quinn [7] qui permet de fournir des preuves combinatoires pour une large famille d'identités.

Définition 27 On dit qu'un pavage se coupe à la n -ième cellule si on a une nouvelle pièce qui couvre la cellule $n+1$.

Exemple 28 Le 10-ruban de la figure (1.13), possède des coupes au niveau des cellules 1, 2, 4, 6, 7, 8, 10.

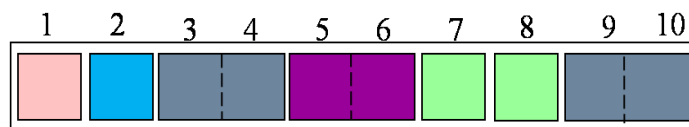


FIG. 1.13 – Un 10-ruban qui se coupe au niveau des cellules 1, 2, 4, 6, 7, 8, 10.

On considère deux rubans de longueur 10, comme illustré dans la figure 1.14, le premier 10-ruban a les cellules numéroté de 1 à 10, le deuxième 10-ruban a les cellules numéroté de 2 à 11. On dit qu'il y'a un défaut à la cellule numéro i ($2 \leq i \leq 10$) si les deux pavages ont une coupe à la $i^{ième}$ cellule. La paire de 10-ruban de la figure 1.14 ont des défauts au niveau des cellules 1, 2, 5 et 7. Observons que si on permute les portions des deux rubans après le dernier défaut on obtient un 11-ruban et un 9-ruban, figure 1.15.

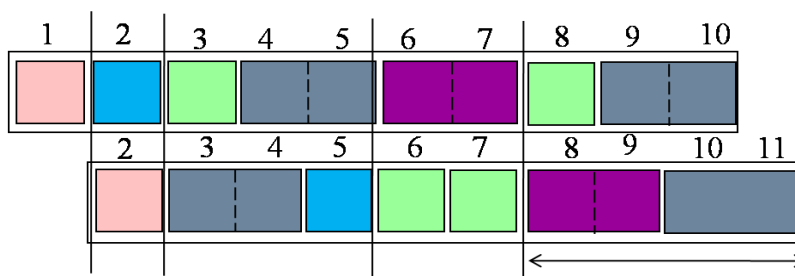


FIG. 1.14 – Deux 10-ruban avec des défauts au niveaux des cellules 1, 2, 5 et 7.

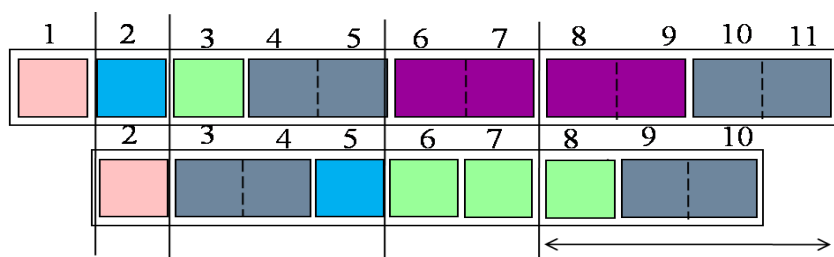


FIG. 1.15 – Après la permutation des deux portions des rubans on obtient un 11-ruban et un 9-ruban.

L'identité suivante est la généralisation de l'identité de l'astronome français Jean-Dominique Cassini publiée en 1680, c'est l'une des plus anciennes identités sur les nombres de Fibonacci. Benjamin et Quinn [7] ont utilisé la technique citée ci-dessus afin de fournir une nouvelle preuve combinatoire par les pavages pour l'établir.

Identité 1.8 (identité de Cassini)

$$f_n^2 = f_{n-1}f_{n+1} + (-1)^n b^n. \quad (1.23)$$

Preuve (par récurrence). L'identité (1.8) s'écrit aussi comme suit, $f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^n b^n$.

Vérifiant d'abord l'identité pour $n = 1$,

$$f_1^2 - f_0f_2 = a^2 - (a^2 + b) = -b.$$

Il est clair que l'identité est vraie pour $n = 1$. Maintenant supposons que l'identité est vraie pour $n = m$, ou $m \geq 1$. En utilisant la formule de récurrence de la suite de Fibonacci on obtient,

$$\begin{aligned} f_{m+1}^2 - f_m f_{m+2} &= f_{m+1}^2 - f_m (af_{m+1} + bf_m) \\ &= -bf_m^2 + f_{m+1}^2 - af_m f_{m+1} \\ &= -bf_m^2 + f_{m+1}(f_{m+1} - af_m) \\ &= -bf_m^2 + bf_{m+1}f_{m-1} \\ &= -b(f_m^2 - f_{m+1}f_{m-1}) \\ &= -b(-1)^m b^m = (-1)^{m+1} b^{m+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $f_{m+1}^2 - f_m f_{m+2} = (-1)^{m+1} b^{m+1}$. □

Preuve (combinatoire) . [7] Si on considère deux rubans de longueur n , alors le nombre de façons de paver ces deux n -ruban est par définition f_n^2 ce qui correspond à la partie gauche de l'identité.

Maintenant, supposons que n est impair, alors chacun des deux pavages doit avoir au moins un carré. Notons que si on a un carré qui couvre la cellule i alors ce carré génère un *défaut* soit au niveau de la cellule i ou bien au niveau de la cellule $i - 1$ ou bien les deux ensemble. Ainsi en permutant les deux portions des ruban comme indiqué ci-dessus produira un $(n + 1)$ -ruban et un $(n - 1)$ -ruban, remarquons que cette opération de permutation créera une 1-à-1 correspondance entre la paire de n -rubans et la paire de rubans de longueur $n - 1$ et $n + 1$, qui ont les même défauts sauf le cas où la paire de $(n + 1)$ -ruban et $(n - 1)$ -ruban contiennent seulement des dominos alors dans ce cas il n'existe pas un défaut dans cette paire (figure 1.16). Ainsi, lorsque n est impaire, on obtient $f_n^2 = f_{n-1}f_{n+1} - b^n$.

De la même façon, si n est pair la permutation des deux portions des rubans produira une 1-à-1 correspondance entre les paires de rubans, sauf si la paire de n -rubans continent seulement des dominos alors dans ce cas il n'existe pas un défaut dans cette pair (figure 1.17). d'où on a,

$f_n^2 = f_{n-1}f_{n+1} + b^n$. En considérant le cas où n est pair ou impair on obtiendra l'identité (1.8).
□

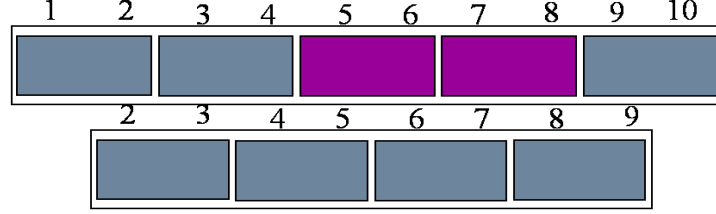


FIG. 1.16 – Si n est impair seulement les pavages qui contiennent des dominos sont sans défaut.

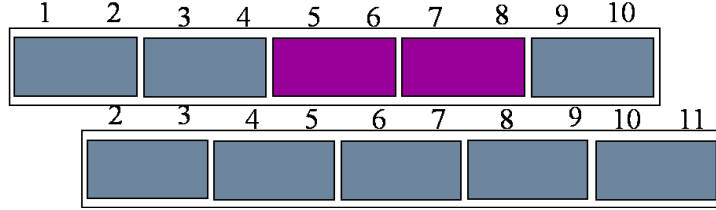


FIG. 1.17 – Si n est pair seulement les pavages qui contiennent des dominos sont sans défaut.

Corollaire 29 En remplaçant a et b par 1 dans l'identité (1.8) on obtient la fameuse identité de Cassini.

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^n \quad (1.24)$$

Maintenant on propose une preuve combinatoire pour l'identité de Catalan qui généralise l'identité de Cassini, la preuve est basée sur la technique de permutation.

Identité 1.9. (Catalan) Pour tous $0 \leq r \leq n-1$,

$$f_n^2 = f_{n-r}f_{n+r} + (-b)^{n-r+1}f_{r-1}^2 \quad (1.25)$$

Preuve. La partie gauche de l'identité compte le nombre de façons de paver une paire (X, Y) de rubans de longueur n . Ainsi il reste à montrer que la partie droite de l'identité compte aussi la même chose. Il est clair que la partie droite compte le nombre de façons de paver une paire de ruban (X', Y') de longueurs $n-r$ et $n+r$, respectivement. Maintenant nous produisons une bijection entre l'ensemble des paires de pavages (X, Y) et l'ensemble des paires de pavages (X', Y') .

On considère une paire de rubans (X, Y) de longueur n arrangées comme est indiqué sur la figure 1.18, ou les cellules de premier ruban sont numérotées de 1 à n et les cellules de deuxième ruban sont numérotées de $r + 1$ à $n + r$.

Premièrement, supposons que la partie commune est de longueur impaire ($n - r$ est impaire), alors les deux pavages X et Y possèdent au moins un carré. Notons que l'existence d'un carré à la i -ième cellule dans la partie commune nous assure l'existence d'un défaut à la cellule i ou à la cellule $(i - 1)$. Ainsi la permutation des deux parties des rubans après ce défaut produira une paire de rubans (X', Y') de longueurs $n - r$ et $n + r$, respectivement, (figure 1.19) ce qui produit une 1-à-1 correspondance entre toute paire de pavages (X, Y) de longueurs n et toute paire de pavages (X', Y') de longueurs $n - r$ et $n + r$. Cependant, si le pavage X' contient seulement des dominos de la cellule r jusqu'à la cellule n , ainsi que les cellules $r + 1$ à $n + 1$ du ruban Y (figure 20), alors cette paire de pavages ne possède pas un défaut. D'où toute paire de pavage de ce type ne pourra pas se transformé en paire de pavages de longueur $n - r$ et $n + r$.

$$f_n^2 = f_{n-r}f_{n+r} + (b)^{n-r+1} f_{r-1}^2 \quad (1.26)$$

Maintenant, pour $n - r$ pair on a une 1-à-1 correspondance entre toute paire de pavages (X, Y) de longueurs n et toute paire de pavages (X', Y') de longueurs $n - r$ et $n + r$. Excepter les paires de pavages de longueurs n qui contiennent seulement des dominos de la cellule r jusqu'à la cellule n pour le premier ruban et de la cellule $r + 1$ jusqu'à la cellule n pour le deuxième ruban (figure 1.21), ainsi on obtient

$$f_n^2 = f_{n-r}f_{n+r} - (b)^{n-r+1} f_{r-1}^2 \quad (1.27)$$

En considérant les cas ou $n - r$ est pair ou impaire on obtient notre identité. $\square$

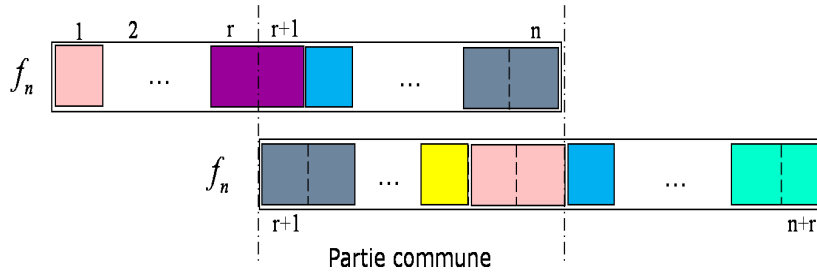


FIG. 1.18 – Une paire de ruban de longueur n dont les cellules sont numéroté de $1, \dots, n$ et $r + 1, \dots, n + r$

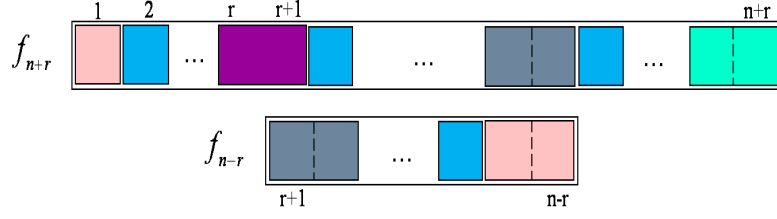


FIG. 1.19 – La paire de pavages (X', Y') de longueurs $n-r$ et $n+r$ obtenue après la permutation

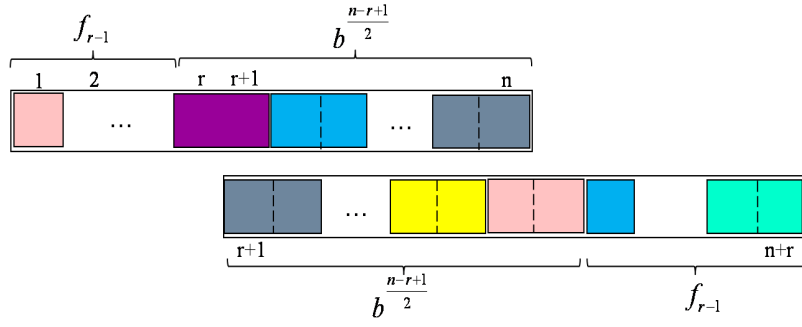
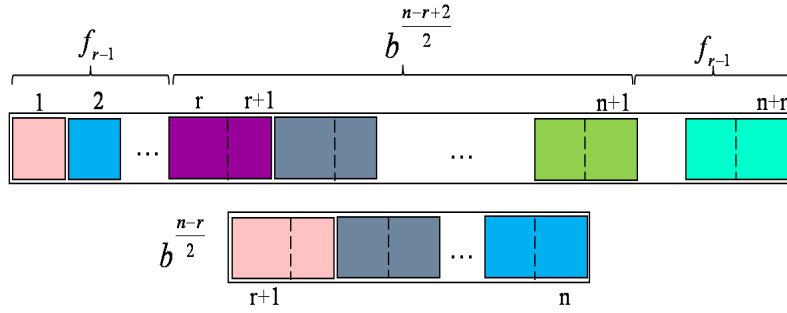


FIG. 1.20 – Les paires de pavages de longueurs $n-r$ et $n+r$ qui ne possèdent pas de défauts



Les paires de pavages de longueurs n qui ne possèdent pas de défauts

1.3.3 Identités combinatoires relatives aux nombres q -Fibonacci

Dans cette sous section on généralise les identités présentées dans la sous section précédente pour la suite q -Fibonacci généralisée $(f_n^{(q)})_{n \geq 0}$, définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} f_0^{(q)} = 1, f_k^{(q)} = a^k & (1 \leq k \leq q-1), \\ f_n^{(q)} = af_{n-1}^{(q)} + bf_{n-q}^{(q)} & (n \geq q). \end{cases} \quad (1.28)$$

On rappelle que $f_n^{(q)}$ s'interprète comme le nombre de façons de paver un n -ruban par des carrés de a couleurs différentes et des q -ominos de b couleurs différentes.

Identité 1.10. Pour $n \geq q$ et $q \geq 2$, on a

$$f_n^{(q)} - a^n = b \sum_{k=0}^{n-q} f_k^{(q)} a^{n-k-q}. \quad (1.29)$$

Preuve. La partie gauche de l'identité compte le nombre de pavages de contiennent au moins un q -omino, en effet, le nombre de façons de paver un n -ruban par des carrés et des q -ominos est par définition $f_n^{(q)}$, en excluant les pavages qui contiennent seulement des carrés, on obtient $f_n^{(q)} - a^n$ façons de couvrir un n -ruban avec au moins un q -omino. Montrons que la partie droite de l'identité compte la même chose.

Maintenant, si on considère $k+1, \dots, k+q$ ($0 \leq k \leq n-q$) la position de q -omino le plus à droite du ruban (figure 1.21), alors il y a $f_k^{(q)}$ façons possibles de couvrir les cellules $1, \dots, k$; b choix pour le dernier q -omino, et a^{n-k-q} pour couvrir le reste de ruban par des carrés, en sommant sur toutes les valeurs de k on obtient la partie gauche de l'identité. $\square$

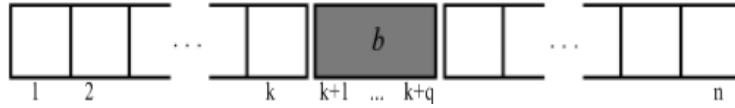


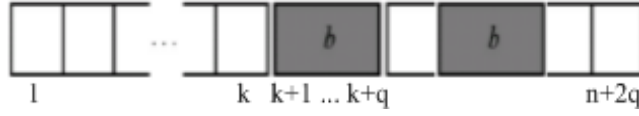
FIG. 1.21 – Un n -ruban avec au moins un q -omino.

Identité 1.11. Pour $n \geq 2q$ et $q \geq 2$, on a

$$b^2 \sum_{k=0}^n f_{n-k}^{(q)} a^k (k+1) = f_{n+2q}^{(q)} - a^{n+2q} - ba^{n+q}(n+q+1). \quad (1.30)$$

Preuve. $f_{n+2q}^{(q)} - a^{n+2q} - ba^{n+q}(n+q+1)$ compte le nombre de façons de couvrir un $(n+2q)$ -ruban en excluant les cas où on utilise 0 ou 1 q -omino.

Pour trouver la partie gauche de l'identité posons $k+1, \dots, k+q$ ($0 \leq k \leq n$) la position de l'avant dernier q -omino, figure 23, alors on a par définition $f_k^{(q)}$ façons de couvrir les cellules $1, \dots, k$, b façons de choisir l'avant dernier q -omino, et $ba^{n-k} \binom{n-k+1}{1}$ façons de couvrir le reste de ruban avec exactement un q -omino et des carrés. En sommant sur toutes les valeurs de k on obtient $b^2 \sum_{k=0}^n f_k^{(q)} a^{n-k} (n-k+1) = b^2 \sum_{k=0}^n f_{n-k}^{(q)} a^k (k+1)$. $\square$

FIG. 1.22 – $(n + 2q)$ -ruban avec au moins deux q -ominos.

Identité 1.12. Pour tous $q \geq 2$, $l \geq 1$, et $n \geq ql$, on a

$$b^l \sum_{0 \leq j \leq k \leq n-lq} f_{n-k-lq}^{(q)} \frac{a^k}{k!} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} l^j = f_n^{(q)} - \sum_{k=0}^{l-1} \binom{n-(q-1)k}{k} b^k a^{n-qk}. \quad (1.31)$$

Preuve. La partie droite : $f_n^{(q)} - \sum_{k=0}^{l-1} \binom{n-(q-1)k}{k} b^k a^{n-qk}$ compte le nombre de façons de couvrir un n -ruban en excluant le cas où on utilise $0, 1, \dots, l-1$ q -ominos.

La partie gauche : Si on considère $k+1, \dots, k+q$ ($0 \leq k \leq n-lq$) la position de l^{ieme} q -omino en partant de la droite du ruban, alors le nombre de façons de couvrir les k premières cellules est par définition $f_k^{(q)}$, et on a b façons de choisir le l^{ieme} q -omino, ainsi il reste $n-k-q$ cellules à couvrir avec exactement $(l-1)$ q -ominos et le reste par des carrés, ce qui correspond à $b^{l-1} a^{n-k-ql} \binom{n-k-lq+l-1}{l-1}$ façons possibles de le faire d'après le Lemme (18), en sommant sur les valeurs de k on obtient,

$$\begin{aligned} b^l \sum_{k=0}^{n-ql} f_k^{(q)} a^{n-k-ql} \binom{n-k-ql+l-1}{l-1} &= b^l \sum_{k=0}^n f_{n-k-ql}^{(q)} a^k \binom{k+l-1}{l-1} \\ &= b^l \sum_{k=0}^n f_{n-k-lq}^{(q)} a^k \frac{(l+k-1) \dots (l+1)l}{k!} \\ &= b^l \sum_{k=0}^n f_{n-k-lq}^{(q)} \frac{a^k}{k!} \sum_{j=0}^k \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} l^j \\ &= b^l \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} f_{n-k-lq}^{(q)} \frac{a^k}{k!} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} l^j. \end{aligned}$$

ainsi s'achève la preuve. □

Identité 1.13. Pour tous $n \geq 0$ et $m \geq 1$, on a

$$a^m \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{q} \right\rfloor} f_{n-m-qk}^{(q)} \binom{m-1+k}{k} b^k = f_n^{(q)} - \sum_{k=\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{q} \right\rfloor + \varepsilon}^{\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor} \binom{n-(q-1)k}{k} b^k a^{n-qk}. \quad (1.32)$$

$$\text{où } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } n \pmod{q} \geq m \pmod{q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Posons $n = ql + i$ et $m = qh + j$ avec $(0 \leq i, j \leq q - 1)$.

La partie droite de l'égalité correspond au nombre de façons de couvrir un ruban de longueur $ql + i$ ($0 \leq i \leq q - 1$) en excluant le cas où on utilise exactement $qk + i$ carrés avec ($0 \leq k \leq h$ si $i < j$ et $0 \leq k \leq h - 1$ sinon). Notons qu'un ruban de longueur $ql + i$ doit contenir au moins i carrés.

Procédons maintenant à prouver que la partie gauche de l'égalité compte la même chose. Posons X la position du $(qh + j)$ -ième carré en partant de la droite du $(ql + i)$ -ruban : X vérifie l'équation suivante

$$ql + i - (qh + j - 1) - X \equiv 0 \pmod{q}$$

d'où $X = qk + i - j + 1$ avec $0 \leq k \leq l - h$.

Pour tout $0 \leq k \leq l - h$, on a $f_{qk+i-j}^{(q)}$ façons de couvrir les cellules $1, \dots, qk + i - j$, et a façons de choisir le carré pour couvrir la cellule $qk + i - j + 1$, il reste à couvrir les cellules $qk + i - j + 2, \dots, n$ avec exactement $qh + j - 1$ carrés et le reste par des q -ominos ce qui correspond à $\binom{l+(q-1)h+j-k-1}{l-k-h} b^{l-k-h} a^{qh+j-1}$ façons de le faire. En sommant sur toutes les valeurs de k , on obtient

$$\sum_{k=0}^{l-h} f_{qk+i-j}^{(q)} \binom{l+(q-1)h+j-k-1}{l-k-h} b^{l-k-h} a^{qh+j} = a^{qh+j} \sum_{k=0}^{l-h} f_{ql+i-qh-j-qk}^{(q)} \binom{qh+j+k-1}{k} b^k.$$

D'où on a l'égalité souhaitée. $\square$

1.3.4 Identités combinatoires relatives aux nombres multibonacci

Dans ce paragraphe, on donne quelques identités relatives à la suite multibonacci, les preuves sont basées sur des pavages linéaires par des polyminos de longueurs 1, 2 et 3.

La première identité compte le nombre de pavages qui contiennent au moins un triomino.

Identité 1.15. Pour tout $n \geq 0$,

$$\Phi_n^{(3)} - f_n = c_3[\Phi_0^{(3)} f_{n-3} + \Phi_1^{(3)} f_{n-4} + \dots + \Phi_{n-3}^{(3)} f_0] \quad (1.33)$$

Preuve. Le nombre de façons de couvrir un n -ruban par des carrés, dominos et triominos est $\Phi_n^{(3)}$, en excluant le cas où on utilise seulement des carrés et des dominos donne $\Phi_n^{(3)} - f_n$ (f_n est

le $n^{ième}$ nombre de Fibonacci généralisé définit par la relation de récurrence $f_n = c_1 f_{n-1} + c_2 f_{n-2}$ avec $f_0 = 1$, $f_1 = c_1$), ainsi on obtient la partie gauche de l'identité. Maintenant montrons que la partie droite de l'identité compte la même chose.

Etant donné qu'on a au moins un triomino raisonnant par rapport au dernier triomino, soit $k+1, k+2$ et $k+3$ sa position, alors on a $\Phi_k^{(3)}$ façons de couvrir les k premières cellules, c_3 façons de choisir le dernier triomino, maintenant il reste à couvrir cellules $k+4, \dots, n$ par des carrés de c_1 couleurs et des dominos de c_2 couleurs et cela se fait par f_{n-k-3} façons possibles. En sommant sur toutes les valeurs de k de 0 à $n-3$ on obtient la partie droite de l'identité. $\square$

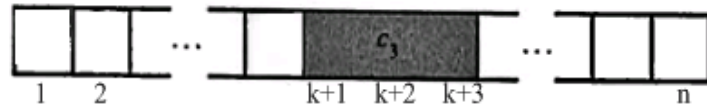


FIG. 1.23 – n -ruban avec le dernier triomino qui occupe les cellules $k+1, k+2$ et $k+3$

Identité 1.16. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Phi_n^{(3)} - \sum_{2i+3j=n} \binom{i+j}{i} c_2^i c_3^j = c_1 \sum_{k=1}^n \Phi_{k-1}^{(3)} \sum_{2i+3j=n-k} \binom{i+j}{i} c_2^i c_3^j \quad (1.34)$$

Preuve. La partie gauche de l'identité compte le nombre de façons de paver un n -ruban par des k -ominos ($1 \leq k \leq 3$), en excluant les pavages qui contiennent seulement des dominos et des triominos.

Maintenant, étant donné qu'on a au moins un carré, soit k ($1 \leq k \leq n$) la position du dernier carré sur le ruban alors on a $\Phi_{k-1}^{(3)}$ façons de paver les k premières cellules, c_1 possibilités de choisir la couleur de dernier carré, et on a $\sum_{2i+3j=n-k} \binom{i+j}{i} c_2^i c_3^j$ façons possibles de paver les cellules $k+1, \dots, n$ par des dominos et des triominos. En sommant sur toutes les valeurs de k , on obtient la partie droite de l'identité. $\square$

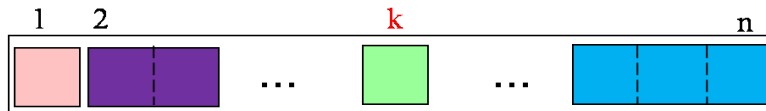


FIG. 1.24 – n -ruban avec au moins un carré

Chapitre 2

Interprétation des nombres de Lucas par des pavages circulaire

2.1 Les nombres de Lucas

Définition 30 Soit $(\mathcal{L}_n)_{n \geq 0}$ la suite de Lucas définis par

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 = 2, \mathcal{L}_1 = 1, \\ \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_{n-1} + \mathcal{L}_{n-2} \quad (n \geq 2). \end{cases} \quad (2.1)$$

Le tableau suivant présente les dix premières valeurs de la suite de Lucas,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{L}_n$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

Table 1.2 - Les dix premières valeurs de la suite de Lucas

Définition 31 Pour tous entiers positifs a et b , on définit la suite de Lucas généralisée par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} L_0 = 2, L_1 = a, \\ L_n = aL_{n-1} + bL_{n-2} \quad (n \geq 2). \end{cases} \quad (2.2)$$

- Si $a = 1$ et $b = 1$, on obtient la suite de *Lucas* classique

$$\mathcal{L}_0 = 2, \quad \mathcal{L}_1 = 1, \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{n+1} = \mathcal{L}_n + \mathcal{L}_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 2,$$

$$\{\mathcal{L}_n\}_{n \geq 0} = \{2, 1, 3, 4, 7, 11, \dots\}.$$

- Si $a = 2$ et $b = 1$, on obtient la suite de *Pell-Lucas*

$$Q_0 = 2, \quad Q_1 = 2, \quad \text{et} \quad Q_{n+1} = 2Q_n + Q_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 2,$$

$$\{Q_n\}_{n \geq 0} = \{2, 2, 6, 14, 34, 82, \dots\}.$$

- Si $a = 1$ et $b = 2$, on obtient la suite de *Jacobsthal-Lucas*

$$j_0 = 2, \quad j_1 = 1, \quad \text{et} \quad j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 2,$$

$$\{j_n\}_{n \geq 0} = \{2, 1, 5, 7, 17, 31, \dots\}.$$

Les formes explicites de termes général de ces suites s'écrivent comme suit :

$$\mathcal{L}_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mathcal{L}(n, k) \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}(n, k) = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}, \quad (2.3)$$

$$Q_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} Q(n, k) \quad \text{avec} \quad Q(n, k) = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k}, \quad (2.4)$$

$$j_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} j(n, k) \quad \text{avec} \quad j(n, k) = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^k, \quad (2.5)$$

2.1.1 Interprétation des nombres de Lucas par les pavages

Dans cette sous section on présente l'interprétation combinatoire par les pavages des nombres de Lucas généralisés, introduite par A. T. Benjamin, J. J. Quinn, Proof that really count [7], ainsi que des résultats préliminaires. Commençons par interpréter la relation de récurrence (2.2).

Définition 32 *Un n -ruban circulaire est la concaténation de n cellules numérotées de 1 à n d'une manière circulaire, La figure 2.1 illustre un 4-ruban circulaire.*

Définition 33 *Soit l_n le nombre de façons de couvrir un n -ruban circulaire avec des carrés de a couleurs différentes et des dominos de b couleurs différentes.*

Par exemple si on pose $a = b = 1$, alors $l_4 = 7$, les différents cas possibles de paver un 4-ruban circulaire avec des carrés et des dominos sont illustré dans la figure 2.2.

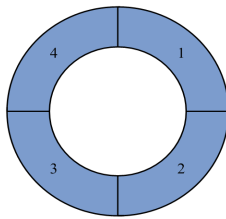


FIG. 2.1 – Un 4-ruban circulaire.

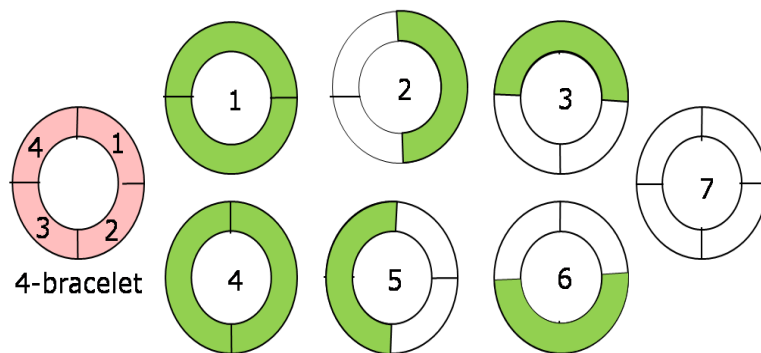


FIG. 2.2 – Un 4-ruban circulaire avec les différents cas possibles de le paver.

Définition 34 On définit un n -bracelet comme un n -ruban circulaire, on dit qu'un n -bracelet est sans phase si il y a un domino qui couvre les cellules n et 1, sinon on dit que le bracelet est avec phase.

Remarque 35 Notons que la première pièce dans un bracelet est celle qui couvre la cellule numéro 1, elle peut être soit un carré, un domino qui couvre les cellules 1 et 2, ou bien un domino qui couvre les cellules n et 1. La figure 2.3 illustre ces trois cas possibles.

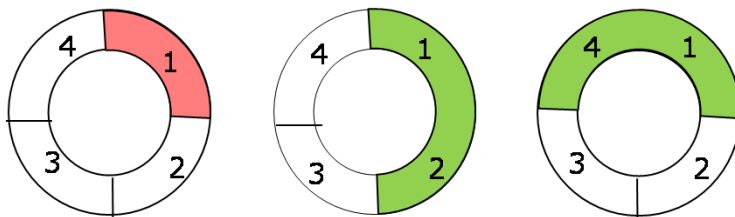


FIG. 2.3 – Les trois façons possibles de paver la première cellule d'un ruban circulaire.

De la définition de l_n on peut remarquer que $l_n \geq f_n$ (f_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Fibonacci généralisé) et cela vient de fait qu'un n -bracelet peut avoir un domino qui couvre les cellules

n et 1. Dans la figure 2.2 les pavages 2, 4, 5, 6, 7 sont avec phase et les pavages 1 et 3 sont sans phase.

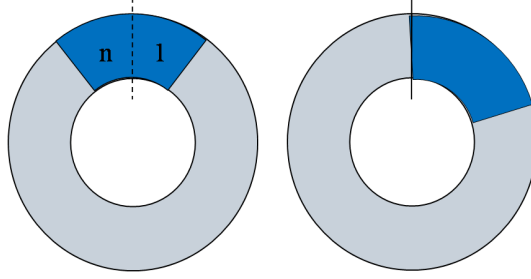


FIG. 2.4 – Le n -bracelet de gauche est avec phase, et le n -bracelet de droite est sans phase.

Notons que $l_0 = 2$, on peut interpréter ça par l'existence de deux 0-bracelets un avec phase, et l'autre est sans phase. $l_1 = a$, on a a façons de choisir un carré pour couvrir le 1-bracelet. Maintenant pour $n \geq 2$, on a

$$l_n = al_{n-1} + bl_{n-2},$$

En effet, on peut construire un n -bracelet à partir d'un $(n-1)$ -bracelet au quel on insère un carré à gauche de la première pièce de $(n-1)$ -bracelet, ou bien à partir d'un $(n-2)$ -bracelet au quel on adjoint un domino à gauche de la première pièce de $(n-2)$ -bracelet.

Comme $l_0 = L_0$ et $l_1 = L_1$ et pour tout $n \geq 2$, on a $l_n = L_n$,

Théorème 36 [9] *Pour tout $n \geq 0$, $L_n = l_n$ compte le nombre de façons de paver un n -bracelet par des carrés de a couleurs différentes et des dominos de b couleurs différentes.*

Lemme 37 [12] *Le nombre de façons de couvrir un n -bracelet avec exactement k ($0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) dominos est*

$$L(n, k) = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} b^k a^{n-2k}, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \quad (2.6)$$

Preuve. Premièrement, supposons que l'on a pas un dominos parmi les k dominos qui couvrent les cellules n et 1 (un n -bracelet avec phase), alors le nombre de façons de couvrir un n -bracelet avec phase par k dominos de b couleurs différentes et des carrés de a couleurs différentes correspond au nombre de façons de paver un n -ruban avec k dominos, $\binom{n-k}{k} b^k a^{n-2k}$. Voir figure 2.5 A.

Maintenant, si on a un domino occupant les cellules n et 1 (un n -bracelet sans phase), alors on a b façons de choisir la couleur de ce domino, et il reste à couvrir les cellules $2, \dots, n-1$ du n -bracelet par $k-1$ dominos de b couleurs différentes, ce qui correspond à couvrir un $(n-2)$ -ruban

avec $k - 1$ dominos de $\binom{n-k-1}{k-1} b^{k-1} a^{n-2k}$ façons possibles, ainsi on a $\binom{n-k-1}{k-1} b^k a^{n-2k}$ façons de couvrir un n -bracelet sans phase par k dominos, figure 2.5.B. Sommons les valeurs des deux cas possibles on obtient : $\binom{n-k}{k} b^k a^{n-2k} + \binom{n-k-1}{k-1} b^k a^{n-2k} = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} b^k a^{n-2k}$ façons de paver un n -bracelet avec k dominos. $\square$

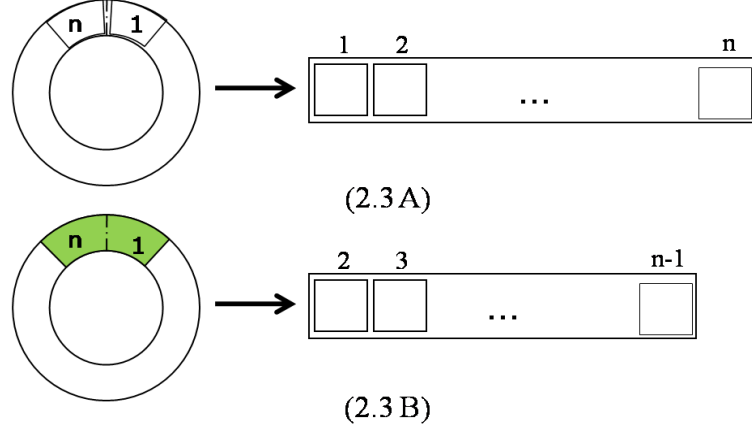


FIG. 2.5 – Un n -bracelet avec phase correspond à un $(n - 2)$ -ruban et un n -bracelet sans phase correspond à un n -ruban.

Le Lemme 36 permet d'établir la formule explicite des nombres de Lucas généralisés,

Théorème 38 [12] Pour $n \geq 1$,

$$L_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} b^k a^{n-2k}, \quad (2.7)$$

Preuve. La preuve est déduite de Lemme 36, en sommant sur toutes les valeurs de k ($0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$). $\square$

Corollaire 39 Pour (a, b) prenant respectivement les valeurs $(1, 1)$, $(2, 1)$ et $(1, 2)$ on obtient respectivement une interprétation combinatoire par les pavages des relations (2.3), (2.4) et (2.5).

2.2 Les nombres r -Lucas généralisés

L'objet de cette section est d'étendre l'interprétation combinatoire par les pavages circulaire pour les nombres r -Lucas généralisés.

Définition 40 Pour $r \geq 2$, soit $(L_n^{(r)})_{n \geq 0}$ la suite r -Lucas généralisée est définie par

$$\begin{cases} L_0^{(r)} = 2, & L_k^{(r)} = a^k, & (1 \leq k \leq r-1), \\ L_n^{(r)} = aL_{n-1}^{(r)} + bL_{n-r}^{(r)}, & (n \geq r). \end{cases}$$

2.2.1 Interprétation combinatoire

Définition 41 Soit $l_n^{(r)}$ le nombre de façons de paver un n -bracelet par des carrés de a différentes couleurs et des r -ominos de b différentes couleurs.

Théorème 42 La formule de récurrence de la suite $(l_n^{(r)})_{n \geq 0}$ est définie pour tous entiers positifs a et b , par

$$\begin{cases} l_0^{(r)} = 2, & l_k^{(r)} = a^k, & (1 \leq k \leq r-1), \\ l_n^{(r)} = al_{n-1}^{(r)} + bl_{n-r}^{(r)}, & (n \geq r). \end{cases}$$

Preuve. Le nombre de façons de paver un k -bracelet ($1 \leq k \leq r-1$) est égal a^k , en effet, un k -bracelet ($1 \leq k \leq r-1$) peut être pavé seulement par des carrés où on a a façons de choisir la couleur de chaque carré, d'autre part un 0-bracelet peut être avec phase ou sans phase, ainsi les conditions initiales sont satisfaites. Vérifiant maintenant la relation de récurrence, pour $n \geq r$ alors on peut construire un n -bracelet soit à partir d'un $(n-1)$ -bracelet au quel on adjoint un carré de a couleurs différentes ou bien à partir d'un $(n-r)$ -bracelet au quel on adjoint un r -omino de b couleurs différentes $\square$

Théorème 43 Pour tous entiers $n, r \geq 0$, $l_n^{(r)} = L_n^{(r)}$ compte le nombre de façons de paver un n -bracelet par des carrés de a différentes couleurs des r -ominos de b différentes couleurs.

Lemme 44 Le nombre de façons de paver un n -bracelet par exactement k ($0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{r+1} \right\rfloor$) $(r+1)$ -ominos de b couleurs différentes est :

$$l^{(r+1)}(n, k) = \frac{n - (r-1)k}{n - rk} \binom{n - rk}{k} b^k a^{n-(r+1)k}, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{r+1} \right\rfloor. \quad (2.8)$$

Preuve. Si le n -bracelet est avec phase, alors il reste à paver $n - (r+1)$ cellules par exactement $(k-1)$ $(r+1)$ -ominos colorés ce qui correspond à $\binom{n-1-rk}{k-1} b^{k-1} a^{n-(r+1)k}$ façons possibles. Maintenant, supposons que le n -bracelet est sans phase, alors le nombre de façons de le paver correspond au nombre de façons de paver un n -ruban, ce qui donne $\binom{n-rk}{k} b^k a^{n-(r+1)k}$ façons possibles, ainsi en sommant les valeurs des deux cas nous obtenons l'expression (2.8). $\square$

Le Lemme ci dessus permet d'établir la formule explicite des nombres $(r+1)$ -Lucas généralisés,

Théorème 45 Pour tout entier positif $n \geq 0$,

$$l_n^{(r+1)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{r+1} \rfloor} \frac{n - (r-1)k}{n - rk} \binom{n - rk}{k} b^k a^{n-2k},$$

Preuve. La preuve est déduite de Lemme 43, en sommant sur toutes les valeurs de k ($0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{r+1} \rfloor$). $\square$

2.3 Identités combinatoires et preuves bijectives

Dans cette section, on donne quelques identités bijectives liées aux nombres de Lucas généralisés et r -Lucas généralisés avec des preuves combinatoires.

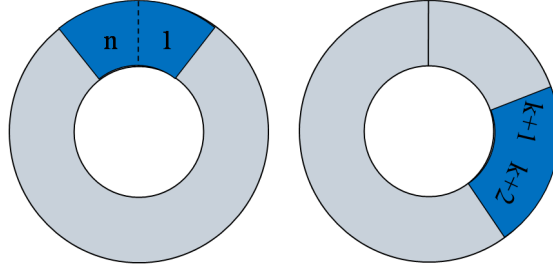
2.3.1 Identités relatives au nombre de Lucas généralisé

La première identité compte le nombre de façons de paver un ruban circulaire par au moins un domino.

Identité 2.1. Pour $n \geq 2$, on a

$$L_n - a^n = 2bf_{n-2} + b \sum_{k=1}^{n-2} f_{n-k-2} a^k. \quad (2.9)$$

Preuve. La partie gauche de l'identité compte le nombre de façons de paver un n -bracelet, en excluant les pavages circulaires qui possèdent seulement des carrés. Prouvons que la partie droite compte la même chose. Etant donné qu'on a au moins un domino sur le bracelet alors, si le domino occupe les cellules n et 1 , il reste à couvrir les cellules $2, \dots, n-1$ de f_{n-2} façons possibles (voir la figure 2.6), sinon soient $k+1$ et $k+2$ ($0 \leq k \leq n-2$) les positions du premier domino alors on a a^k façons de paver les k première cellules du n -bracelet, b façon de choisir le premier domino ainsi il reste à paver les cellules $k+3, \dots, n$ de f_{n-k-2} façons possibles. $\square$

FIG. 2.6 – Un n -bracelet avec au moins un domino.

Corollaire 46 Pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^n (L_k - f_k) = f_n$$

Preuve. Dans [22], Hoggat a démontré que

$$L_{n+2} - 1 = \sum_{k=0}^n L_k,$$

maintenant en posant $a = b = 1$ dans l'identité 2.1, on obtient :

$$L_{n+2} - 1 = f_n + \sum_{k=0}^n f_k,$$

d'où on déduit l'identité suivante

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n L_k &= f_n + \sum_{k=0}^n f_k, \\ \sum_{k=0}^n (L_k - f_k) &= f_n. \end{aligned}$$

□

L'identité suivante généralise l'identité 2.1, elle dénombre les pavages circulaire qui contiennent au moins m dominos.

Identité 2.2. Pour $m \geq 2$, et $n \geq 2m$,

$$L_n - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} b^k a^{n-2k} = b^m \sum_{k=0}^{n-2m} \sum_{j=0}^k f_{n-k-2m} \frac{a^k}{k!} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} (m^j + (m-1)^j). \quad (2.10)$$

Preuve. La partie gauche de l'identité compte le nombre de façons de paver un n -bracelet, en excluant les pavages qui contiennent $0, 1, \dots, m-1$ dominos. Prouvons que la partie droite compte la même chose.

Premièrement, supposons qu'on a un n -bracelet sans phase, alors on a un domino qui couvre les cellules n et 1, ainsi le nombre de façons de couvrir le reste du bracelet correspond au nombre de façons de paver un $(n - 2)$ -ruban par au moins $m - 1$ dominos. Maintenant le nombre de façons de paver un n -bracelet avec phase par au moins m dominos, correspond au nombre de façons de paver un n -ruban par au moins m dominos. En utilisant l'identité (1.4) on obtient :

$$\begin{aligned} & b^m \sum_{k=0}^{n-2-2(m-1)} \sum_{j=0}^k f_{n-2-k-2(m-1)} \frac{a^k}{k!} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} (m-1)^j + b^m \sum_{k=0}^{n-2m} \sum_{j=0}^k f_{n-k-2m} \frac{a^k}{k!} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} m^j \\ &= b^m \sum_{k=0}^{n-2m} \sum_{j=0}^k f_{n-k-2m} \frac{a^k}{k!} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} (m^j + (m-1)^j). \end{aligned}$$

□

Identité 2.3 Pour tous $m \geq 1$ et $n - 2 \geq m$,

$$\begin{aligned} L_n - \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \varepsilon}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right) b^k a^{n-2k} \\ = a^m \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\binom{m}{k} \right) b^k (f_{n-m-2k} + b f_{n-m-2k-2}), \end{aligned}$$

$$\text{où } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } n \pmod{2} \geq m \pmod{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{et } \binom{m}{k} = \binom{m+k-1}{k},$$

Preuve. Posons $n = 2l + i$ et $m = 2h + j$ avec $(0 \leq i, j \leq 1)$.

La partie gauche de l'identité compte le nombre de façons de paver un n -bracelet par des carrés et des dominos en excluant les pavages circulaires qui contiennent moins de m carrés, on obtient ainsi,

$$\begin{aligned} & L_n - \sum_{k=0}^{h-\varepsilon} b^{l-k} a^{2k+i} \binom{l+i+k}{l-k} - b \sum_{k=0}^{h-\varepsilon} b^{l-k-1} a^{2k+i} \binom{l+i+k-1}{l-k-1} \\ &= L_n - \sum_{k=l-h+\varepsilon}^l b^k a^{2l+i-2k} \binom{2l+i-k}{k} - \sum_{k=l-h+\varepsilon}^l b^k a^{2l+i-2k} \binom{2l+i-k-1}{k-1}. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que la partie droite de l'identité compte la même chose. Premièrement, supposons qu'on a un n -bracelet avec phase alors le nombre de façons de paver un n -bracelet avec phase avec au moins m carrés correspond au nombre de façons de paver un n -ruban par au

moins m carrés, en utilisant l'identité (1.5) on obtient,

$$a^m \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{k} b^k f_{n-m-2k}.$$

Maintenant si on a un n -bracelet sans phase, c'est-à-dire qu'on a un domino qui couvre les cellules n et 1 , alors le nombre de façons de couvrir un n -bracelet sans phase correspond au nombre de façons de paver un $(n-2)$ -ruban par au moins m carrés, d'où on a

$$a^m \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{k} b^{k+1} f_{n-m-2k-2},$$

en sommant les valeurs des premier et second cas, on obtient :

$$\begin{aligned} & a^m \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{k} b^k f_{n-m-2k} + a^m \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{k} b^{k+1} f_{n-m-2k-2} \\ = & a^m \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{k} b^k (f_{n-m-2k} + b f_{n-m-2k-2}), \end{aligned}$$

ainsi s'acheve la preuve. □

L'identité suivante a été proposé par S. Vajda (identité 16a, pp 26, [36]). En utilisant les pavages circulaire on fournira une nouvelle preuve combinatoire à cette identité.

Identité 2.4 [36] Pour tous $n \geq 1$ et $m \geq 1$,

$$2f_{n+m-1} = L_m f_{n-1} + L_n f_{m-1}. \quad (2.11)$$

Preuve. Considérant un ruban de longueur $n+m-1$, alors on a par définition f_{n+m-1} façons de le paver, maintenant si on considère la $m^{ième}$ cellule de ruban, comme illustrée dans la figure ci-dessous, alors on a deux cas :

- Cas 1 : Soit on a une coupe au niveau de cette cellule est dans ce cas le $(n+m-1)$ -ruban génère deux ruban (A, B) l'un est de longueur m et l'autre est de longueur $n-1$. Ainsi en collant la première cellule à la $m^{ième}$ cellule du ruban A , on construira un ruban circulaire avec phase .

-Cas 2 : Maintenant, si le ruban ne se coupe pas à la $m^{ième}$ cellule, c'est-à-dire les cellules m et $m+1$ sont couverte par un domino qu'on le note d , alors le ruban doit avoir une coupe à la cellule $m-1$, ainsi on a un $(m-1)$ -ruban produit par les $(m-1)$ premières cellules, et un n -bracelet sans phase produit par les cellules $m, m+1, \dots, n+m-1$ où la pièce du première bracelet et le domino d .

Notons par L'_m et L''_n le nombre de façons de paver un m -bracelet avec phase et n -bracelet sans phase, respectivement. En sommant tous les cas possibles, on obtient,

$$\begin{aligned} 2f_{n+m-1} &= L'_m f_{n-1} + L''_n f_{m-1} + L'_n f_{m-1} + L''_m f_{n-1} \\ &= f_{n-1}(L'_m + L''_m) + f_{m-1}(L'_n + L''_n), \end{aligned}$$

Par définition on a, $L'_m + L''_m = L_m$ et $L'_n + L''_n = L_n$.

D'ou,

$$2f_{n+m-1} = f_{n-1}L_m + f_{m-1}L_n,$$

ainsi s'acheve la preuve. □

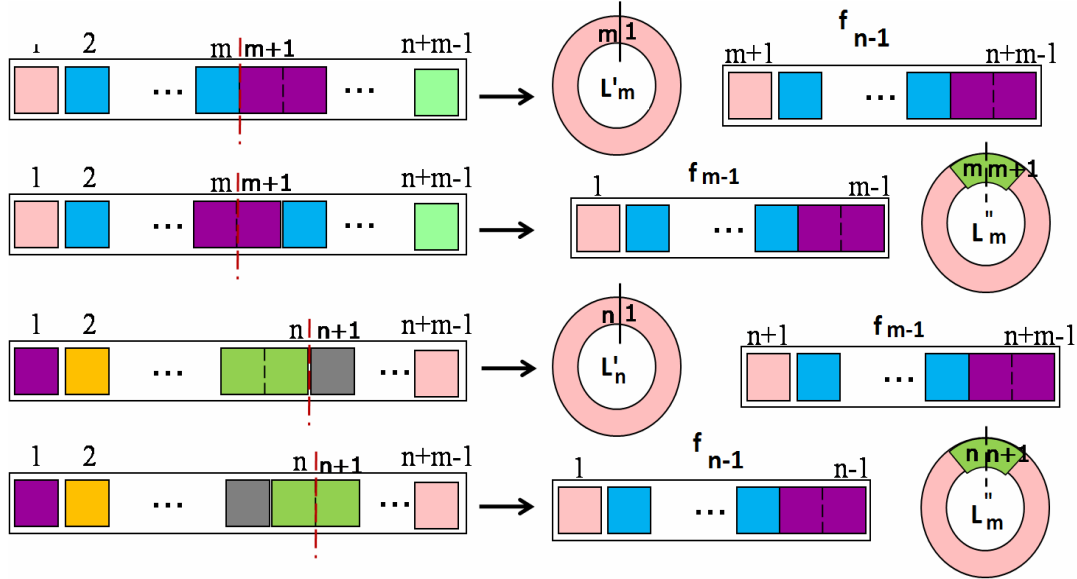


FIG. 2.7 – La transformation d'un ruban en bracelet et ruban.

2.3.2 Identités relatives aux nombres r -Lucas généralisés

Dans cette sous section on présente deux identités qui expriment les nombres de r -Lucas généralisés en fonction des r -Fibonacci généralisés.

L'identité 2.5 compte le nombre de pavages qui contiennent au moins un r -omino.

Identite 2.5 Pour $n \geq r$,

$$L_n^{(r)} - a^n = 2bf_{n-r}^{(r)} + b \sum_{k=1}^{n-r} f_{n-r-k}^{(r)} a^k. \quad (2.12)$$

Preuve. Le nombre de façons de paver un n -bracelet par des carrés et des r -ominos, en excluant le cas où on utilise seulement des carrés pour couvrir le n -bracelet correspond à $L_n^{(r)} - a^n$. Montrons maintenant que la partie droite de l'identité compte la même chose.

Cas 1 : supposons que le n -bracelet est sans phase, alors il reste à paver $n - r$ cellules par $f_{n-r}^{(r)}$,

Cas 2 : si le n -bracelet est avec phase dans ce cas on raisonne par rapport au dernier r -omino sur le bracelet, soit $k + 1, \dots, k + r$ ($0 \leq k \leq n - r$) sa position alors on a $f_k^{(r)}$ façons possibles de paver les premières cellules, b façons de choisir la couleur du dernier r -omino, et il reste à paver les cellules $k + r + 1, \dots, n$ par des carrés de a couleurs différentes ce qui correspond à a^{n-k-r} façons. En sommant sur toutes les valeurs de k , de 0 à $n - r$, on obtient le nombre de façons de paver un n -bracelet avec phase par au moins un r -omino.

En additionnant les valeurs du premier et du deuxième cas, on obtient notre identité. $\square$

Identite 2.6 Pour $m \geq 1$, et $n \geq mr$,

$$L_n^{(r)} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n - (r-2)k}{n - (r-1)k} \binom{n - (r-1)k}{k} b^k a^{n-2k} = b^m \sum_{k=0}^{n-2m} \sum_{j=0}^k f_{n-k-2m}^{(r)} \frac{a^k}{k!} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} (m^j + (m-1)^j). \quad (2.13)$$

Preuve. La partie gauche de l'identité compte le nombre de façons de paver un n -ruban circulaire, en excluant les pavages qui contiennent $1, 2, \dots, m-1$, r -ominos. Ainsi on obtient le nombre de façons de paver un n -ruban circulaire par au moins m r -ominos.

Maintenant, en considérant le cas où le n -bracelet est avec phase, il peut être transformé en ruban de longueur n , ainsi en utilisant l'identité (1.12) on obtient :

$$b^m \sum_{0 \leq j \leq k \leq n-mq} f_{n-k-mq}^{(r)} \frac{a^k}{k!} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} m^j, \quad (2.14)$$

façons possibles de paver un n -bracelet est avec phase par au moins m (r) -ominos. De la même façon, si on a un n -bracelet sans phase, alors dans ce cas il reste à paver un $(n - q)$ -ruban par au moins $m - 1$ (r) -ominos, d'où on a :

$$b^m \sum_{0 \leq j \leq k \leq n-mq} f_{n-k-mq}^{(r)} \frac{a^k}{k!} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} (m-1)^j, \quad (2.15)$$

façons possibles de paver un n -bracelet sans phase par au moins m r -ominos. En sommant (2.14) et (2.15) on obtient la partie droite de l'identité. $\square$

Chapitre 3

La formule de Binet pour les suites de Fibonacci et de Lucas par les pavages aléatoires

Jusqu'à maintenant les interprétations combinatoires des nombres de Fibonacci et Lucas par les pavages ont rapportés des preuves combinatoires à plusieurs identités. Nous montrons maintenant comment combiner ces interprétations avec un élément stochastique. Il nous permet de fournir des preuves combinatoires pour les formules de Binet liées aux nombres de Fibonacci et Lucas.

3.1 La formule de Binet pour les nombre de Fibonacci

Définition 47 *La formule de Binet pour les nombres de Fibonacci s'exprime comme suit :*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\phi^{n+1} - \left(\frac{-1}{\phi} \right)^{n+1} \right]. \quad (3.1)$$

où f_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Fibonacci défini par la relation de récurrence $f_0 = 1, f_1 = 1$, et pour tout $n \geq 2$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. et $\phi, \frac{-1}{\phi}$ sont les racines du polynôme caractéristique associé à la suite de Fibonacci, avec $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

Une preuve combinatoire pour cette formule peut être obtenue par une interprétation combinatoire de f_n comme le nombre de façons de paver un ruban par des carrés et des dominos.

Dans [3], Benjamin et al, ont proposé un modèle de pavage aléatoire pour obtenir une preuve combinatoire pour la formule de Binet pour les nombres de Fibonacci.

Définition 48 *Un pavage est dite aléatoire si les pièces (carrés, dominos) du pavage sont choisis d'une manière indépendante et aléatoire l'une après l'autre.*

Dans le modèle de pavage aléatoire proposé par Benjamin et al, les pièces du pavage sont choisies avec la probabilité de $\frac{1}{\phi}$ pour un carré et de $\frac{1}{\phi^2}$ pour un domino. Les raisons pour lesquelles Benjamin et al, ont choisi ces probabilités sont :

- Ces probabilités devaient assurer qu'à la $n^{ième}$ cellule la probabilité d'obtenir n'importe quel pavage est $\frac{1}{\phi^n}$.
- La probabilité de choisir une pièce à n'importe quel étape est $\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1$.

Dans l'exemple de la figure (3.1), la probabilité d'obtenir un tel pavage est : $\frac{1}{\phi} \times \frac{1}{\phi^2} \times \frac{1}{\phi} \times \frac{1}{\phi} \times \frac{1}{\phi^2} = \frac{1}{\phi^7}$.

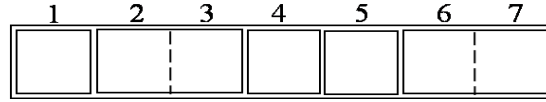


FIG. 3.1 – Un 7-pavage aléatoire peut être obtenu avec la probabilité de $\frac{1}{\phi^7}$.

Définition 49 *Soit q_n la probabilité qu'un pavage aléatoire se coupe à la $n^{ième}$ cellule du ruban, on dit qu'un pavage se coupe à la $n^{ième}$ cellule si la $(n+1)^{ième}$ cellule est couverte par une autre pièce.*

Soit f_n nombre de pavages de longueur n par des carrés et des dominos (sans couleur). Étant donné que chacun de ces pavages a la probabilité $\frac{1}{\phi^n}$ d'apparition, ainsi on déduit la relation suivante :

$$q_n = \frac{f_n}{\phi^n}, \quad (3.2)$$

Pour un pavage qui ne se coupe pas à la $n^{ième}$ cellule, il doit forcément avoir une coupe à la $(n-1)^{ième}$ et un domino qui couvre les cellules n et $n+1$. Ainsi pour tout $n \geq 1$, on a $1 - q_n = \frac{q_{n-1}}{\phi^2}$ ce qui est équivalent à,

$$q_n = 1 - \frac{q_{n-1}}{\phi^2}, \quad (3.3)$$

où $q_0 = f_0 = 1$.

Posons $q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$. Si on suppose que la limite de l'équation (3.3) existe, alors la limite q doit vérifier $q = 1 - \frac{q}{\phi^2}$. En résolvant cette équation par rapport à q on obtient $q = (1 + \frac{1}{\phi^2})^{-1} = \frac{\phi}{\sqrt{5}}$. En combinant avec l'équation (3.2), on obtient la forme asymptotique de Binet pour les nombre de Fibonacci,

$$f_n \approx \frac{\phi^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

Pour obtenir la formule exacte de Binet pour les nombre de Fibonacci, on développe l'équation (3.3) et on pose la condition initial $q_0 = 1$, on obtient :

$$q_n = 1 - \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^4} - \frac{1}{\phi^6} + \dots + \left(\frac{-1}{\phi^2}\right)^n, \quad (3.4)$$

d'où on a

$$q_n = \frac{\phi}{\sqrt{5}} \left[1 - \left(\frac{-1}{\phi^2}\right)^{n+1} \right], \quad (3.5)$$

Ainsi de l'équation (3.2), on déduit la formule exacte de Binet,

$$f_n = \phi^n q_n = \frac{\phi^{n+1}}{\sqrt{5}} \left[1 - \left(\frac{-1}{\phi^2}\right)^{n+1} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\phi^{n+1} - \left(\frac{-1}{\phi}\right)^{n+1} \right], \quad (3.6)$$

Corollaire 50 [5] Pour tous $n, m \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+m}}{f_n} = \phi^m.$$

Preuve. En examinant la limite de q_n on a pour tout $m \geq 0$,

$$\frac{\phi}{\sqrt{5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{\phi^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+m}}{\phi^{m+n}},$$

ainsi

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{f_{n+m}}{\phi^{m+n}}}{\frac{f_n}{\phi^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+m}}{f_n \phi^m}.$$

D'où, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+m}}{f_n} = \phi^m$. □

Corollaire 51 [5] Pour tout $n \geq 1$,

$$\phi^n = f_n + \frac{f_{n-1}}{\phi}.$$

Preuve. Ce résultat est obtenu directement en substituant l'équation (3.2) dans l'équation (3.3) et on multiplie par ϕ^n . □

3.2 La formule de Binet pour les nombres de Lucas

Le modèle de pavage aléatoire utilisée pour prouver la formule de Binet pour les nombres de Fibonacci peut être utilisée pour fournir la preuve de la formule de binet pour les nombres de Lucas.

La forme explicite de Binet pour les nombres de Lucas satisfait la relation suivante :

$$L_n = \phi^n + \left(\frac{-1}{\phi}\right)^n, \quad (3.7)$$

où L_n est le $n^{ième}$ nombre de Lucas défini par la relation de récurrence $L_0 = 2, L_1 = 1$, et pour tout $n \geq 2$, $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$.

En considérant un ruban de longueur infini, on commence de paver la première cellule de se ruban d'une manière aléatoire. Soient P_s et P_d les probabilités qu'un pavage commence par un carré ou bien par un domino, respectivement. Pour un pavage commençant par un domino on choisit sa position d'une manière aléatoire (avec phase ou sans phase), et pour paver le reste du ruban on choisi un carré avec la probabilité $\frac{1}{\phi}$ et un domino avec la probabilité $\frac{1}{\phi^2}$.

Maintenant étant donné que la probabilité de choisir à chaque étape une pièce est égale à 1, alors on a :

$$\begin{cases} P_s \frac{1}{\phi} = \frac{P_d}{2}, \\ 2P_d + P_s = 1. \end{cases}$$

d'où on déduit les probabilités P_s et P_d ,

$$P_d = \frac{1}{\phi\sqrt{5}} \text{ et } P_s = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Par conséquence, la probabilité d'apparition de chaque pavage de longueur n est $\frac{1}{\sqrt{5}\phi^{n-1}}$.

Si on pose r_n la probabilité que le pavage se coupe à la $n^{ième}$ cellule du ruban on obtient :

$$r_n = \frac{L_n}{\sqrt{5}\phi^{n-1}}. \quad (3.8)$$

On propose un modèle Markovien pour détermine l'expression de r_n , le processus pour placer aléatoirement une pièce peut être décrit par une chaine de Markov à deux états :

l'état B si le ruban se coupe à la cellule courante, et l'état U sinon.

La matrice de transition associée au pavage de la première cellule s'écrit comme suit

$$P_1 = \begin{matrix} & B & U \\ \begin{matrix} B \\ U \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}\phi} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

et la matrice de transition associée au reste du pavage est donnée par la matrice P :

$$P = \begin{matrix} & B & U \\ \begin{matrix} B \\ U \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{\phi} & \frac{1}{\phi^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

où p_{ij} est la probabilité de passage de l'état i à l'état j .

Ainsi la probabilité r_n que le ruban se coupe à la $n^{ième}$ cellule correspond à l'élément $(1, 1)$ de la matrice $P^* = P_1 * P^{n-1}$, où P^n est la puissance $n^{ième}$ de la matrice P .

La diagonalisation de la matrice P donne,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\phi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1}{\phi^2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\phi^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

ainsi on a,

$$P^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\phi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1}{\phi^2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\phi^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

d'où on a

$$P^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}\phi} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\phi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1}{\phi^2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\phi^2}{\phi^2+1} & \frac{1}{\phi^2+1} \\ \frac{1}{\phi^2+1} & \frac{-1}{\phi^2+1} \end{pmatrix}$$

En calculant le produit de ces matrices (à l'aide de logiciel Maple) on obtient la matrice P^* :

$$P^* = \begin{pmatrix} \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{\phi}\right)\phi^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}\phi}{5}\right)\left(\frac{-1}{\phi^2}\right)^{n-1}}{\frac{\phi^2+1}{\phi^2 + \left(\frac{-1}{\phi^2}\right)^{n-1}}} & \frac{\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5\phi} + \left(\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}\phi}{5}\right)\left(\frac{-1}{\phi^2}\right)^{n-1}}{\frac{\phi^2+1}{1 + \left(\frac{-1}{\phi^2}\right)^{n-1}}} \\ \frac{\phi^2+1}{\phi^2+1} & \frac{\phi^2+1}{\phi^2+1} \end{pmatrix}$$

l'expression de r_n correspond à l'élément $(1, 1)$ de la matrice P^*

$$r_n = \frac{1}{\phi^2 + 1} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}\phi} \right) \phi^2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{-1}{\phi^2} \right)^{n-1} - \frac{2\phi}{\sqrt{5}} \left(\frac{-1}{\phi^2} \right)^{n-1} \right),$$

En tenant que de la relation (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} L_n &= \sqrt{5}\phi^{n-1}r_n \\ &= \frac{\sqrt{5}\phi^{n-1}}{\phi^2 + 1} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}\phi} \right) \phi^2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{-1}{\phi^2} \right)^{n-1} - \frac{2\phi}{\sqrt{5}} \left(\frac{-1}{\phi^2} \right)^{n-1} \right), \end{aligned}$$

en utilisant les relations suivante $\phi^2 = \phi + 1$ et $\phi^2 + 1 = \sqrt{5}\phi$ on obtient,

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{\phi^{n-1}}{\sqrt{5}\phi} \left(\sqrt{5}\phi^2 - \sqrt{5} \left(\frac{-1}{\phi^2} \right)^{n-1} \right) \\ &= \phi^{n-2} \left(\phi^2 - \left(\frac{-1}{\phi^2} \right)^{n-1} \right) \\ &= \phi^n + \left(\frac{-1}{\phi} \right)^n. \end{aligned}$$

Théorème 52 (de Moivre) [5] Pour tout $n \geq 0$,

$$\phi^n = \frac{\sqrt{5}f_{n-1} + L_n}{2}, \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{-1}{\phi} \right)^n = \frac{L_n - \sqrt{5}f_{n-1}}{2}, \quad (3.10)$$

Preuve. La preuve de ce théorème est déduite directement des formes de Binet associés aux nombres de Fibonaaci et Lucas. En réécrivant la formule de Binet pour les nombres de Fibonacci de la manière suivante

$$\sqrt{5}f_{n-1} = \phi^n - \left(\frac{-1}{\phi} \right)^n, \quad (3.11)$$

et la formule de Binet pour les nombres de Lucas

$$L_n = \phi^n + \left(\frac{-1}{\phi} \right)^n, \quad (3.12)$$

En sommant les deux équations terme à terme on obtient,

$$\begin{aligned} 2\phi^n &= \sqrt{5}f_{n-1} + L_n \\ \phi^n &= \frac{\sqrt{5}f_{n-1} + L_n}{2}, \end{aligned}$$

et si on fait la difference entre les deux équations (3.12 - 3.11) on obtien :

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{-1}{\phi} \right)^n &= L_n - \sqrt{5}f_{n-1} \\ \left(\frac{-1}{\phi} \right)^n &= \frac{L_n - \sqrt{5}f_{n-1}}{2}. \end{aligned}$$



Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié la combinatoires des suites de Fibonacci et de Lucas généralisées ainsi que leurs extensions, se qui nous a permit d'établir de nouvelles identités combinatoires et bijectives relatives à ces suites.

Au premier chapitre, nous avons exploité les interprétations combinatoires des suites de Fibonacci généralisées, de q -Fibonacci généralisée, et la suite multibonacci par des pavages linéaires pour fournir des preuves combinatoires et bijectives pour certaines identités classiques, nous avons aussi proposé de nouvelles identités combinatoires et bijectives pour ces suites.

Au deuxième chapitre, nous avons proposé d'étendre l'interprétation combinatoire de la suite de Lucas par les pavages circulaires à la suite r -Lucas. Ce résultat nous a permit de fournir une nouvelle preuve combinatoire pour la formule explicite de la suite r -Lucas généralisée. Nous avons aussi établi des identités bijectives de type Fibonacci-Lucas ou on exprime les nombres de Lucas généralisés on fonction des nombres de Fibonacci généralisés.

Enfin, le dernier chapitre, nous donnons une preuve combinatoire pour la formule de Binet pour les nombres de Lucas. Cette preuve est basée sur les pavages aléatoires et les processus Markoviens.

Annexe A

Dans cette Annexe on établit toutes les identités présentés dans ce mémoire pour les suites de Fibonacci et de Lucas, définies respectivement par :

- Suite de Fibonacci classique :

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad \text{et } f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 2,$$

- Suite q -Fibonacci :

$$\begin{cases} f_k^{(q)} = 1 & (0 \leq k \leq q-1), \\ f_n^{(q)} = f_{n-1}^{(q)} + f_{n-q}^{(q)} & (n \geq q). \end{cases}$$

- *multibonacci*

$$\begin{cases} \Phi_{-r}^{(r)} = \dots = \Phi_{-2}^{(r)} = \Phi_{-1}^{(r)} = 0, \\ \Phi_0^{(r)} = 1, \\ \Phi_n^{(r)} = \Phi_{n-1}^{(r)} + \Phi_{n-2}^{(r)} + \dots + \Phi_{n-r}^{(r)} & (n \geq 1). \end{cases}$$

- Suite de Lucas :

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad \text{et } L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 2,$$

- Suite r -Lucas :

$$\begin{cases} L_0^{(r)} = 2, \quad L_k^{(r)} = 1, & (1 \leq k \leq r-1), \\ L_n^{(r)} = L_{n-1}^{(r)} + L_{n-r}^{(r)}, & (n \geq r). \end{cases}$$

Identité 1.1 (p. 18) Pour $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^n f_k = f_{n+2} - 1.$$

Identité 1.2. (p. 19) Pour $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^n k f_{n-k} = f_{n+3} - (n+3).$$

Identité 1.3. (p. 20) Pour $n \geq 0$,

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n f_{n-k} (k+2)(k+1) = f_{n+6} - (n+6) - \frac{(n+4)(n+3)}{2}.$$

Identité 1.4. (p. 21) Pour $m \geq 1$ et $n \geq 2m$,

$$\sum_{0 \leq j \leq k \leq n-2m} f_{n-k-2m} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} m^j = f_n - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-k}{k}$$

Identité 1.5. (p. 22) Pour $m \geq 1$ et $n \geq m$,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} f_{n-m-2k} \binom{m}{k} = f_n - \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \varepsilon}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}.$$

$$\text{où } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } n \pmod{2} \geq m \pmod{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Identité 1.6. (p. 24) Pour $n \geq 4$,

$$f_n - \sum_{k=0}^{n-4} f_{n-4-k} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} \binom{k-2i}{i} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n-2j}{j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} \binom{n-2-2i}{i}.$$

Identité 1.7. (p. 25) Pour tout $n \geq 2$,

$$f_n - \sum_{k=0}^{n-2} f_{n-k-2} \sum_{2i+3j=k} \binom{i+j}{i,j} = \sum_{2i+3j=n} \binom{i+j}{i,j} + \sum_{2i+3j=n-1} \binom{i+j}{i,j}.$$

Identité 1.8. (Cassini) (p. 27) Pour tout $n \geq 1$,

$$f_n^2 = f_{n-1} f_{n+1} + (-1)^n$$

Identité 1.9. (Catalan) (p. 29) Pour tous $0 \leq r \leq n-1$,

$$f_{n-1}^2 = f_{n-r-1} f_{n+r-1} + (-1)^{n-r} f_{r-1}^2$$

Identité 1.10. (p. 31) Pour $n \geq 2q$ et $q \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-q} f_k^{(q)} = f_n^{(q)} - 1.$$

Identité 1.11. (p. 32) Pour $n \geq 2q$ et $q \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^n f_{n-k}^{(q)}(k+1) = f_{n+2q}^{(q)} - (n+q+2).$$

Identité 1.12. (p. 32) Pour $q \geq 2$, $l \geq 1$, et $n \geq ql$,

$$\sum_{0 \leq j \leq k \leq n-lq} f_{n-k-lq}^{(q)} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} l^j = f_n^{(q)} - \sum_{k=0}^{l-1} \binom{n-(q-1)k}{k}.$$

Identité 1.13. (p. 33) Pour $n \geq 0$ et $m \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{q} \right\rfloor} f_{n-m-qk}^{(q)} \binom{m-1+k}{k} = f_n^{(q)} - \sum_{k=\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{q} \right\rfloor + \varepsilon}^{\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor} \binom{n-(q-1)k}{k}.$$

Identité 1.14. (p. 34) Pour tout $n \geq 0$,

$$\Phi_n^{(3)} - f_n = \Phi_0^{(3)} f_{n-3} + \Phi_1^{(3)} f_{n-4} + \dots + \Phi_{n-3}^{(3)} f_0$$

Identité 1.15. (p. 35) Pour $n \geq 1$,

$$\Phi_n^{(3)} - \sum_{2i+3j=n} \binom{i+j}{i, j} = \sum_{k=1}^n \sum_{2i+3j=n-k} \Phi_{k-1}^{(3)} \binom{i+j}{i, j}$$

Identité 2.1. (p. 42) Pour $n \geq 2$,

$$L_n - 1 = 2f_{n-2} + \sum_{k=1}^{n-2} f_{n-k-2}.$$

Identité. (p. 43) Pour $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^n (L_k - f_k) = f_n$$

Identité 2.2. (p. 43) Pour $m \geq 1$, $n \geq 2m$,

$$L_n - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{n-2m} \sum_{j=0}^k f_{n-k-2m} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} (m^j + (m-1)^j).$$

Identité 2.3 (p. 43) Pour $m \geq 1$ et $n - 2 \geq m$,

$$L_n - \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \varepsilon}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{k} (f_{n-m-2k} + f_{n-m-2k-2}).$$

$$\text{où } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } n \pmod{2} \geq m \pmod{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Identité 2.4. (S. Vajda) (p. 44) Pour tous $n \geq 1$, et $m \geq 1$,

$$2f_{n+m-1} = L_m f_{n-1} + L_n f_{m-1}$$

Identité 2.5 (p. 46) Pour tous $n \geq r \geq 0$,

$$L_n^{(r)} - 1 = 2f_{n-r}^{(r)} + \sum_{k=1}^{n-r} f_{n-r-k}^{(r)}.$$

Identité 2.6 (p. 46) Pour tous $m \geq 1$, et $n \geq mr$,

$$L_n^{(r)} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n - (r-2)k}{n - (r-1)k} \binom{n - (r-1)k}{k} = \sum_{k=0}^{n-2m} \sum_{j=0}^k f_{n-k-2m}^{(r)} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} (m^j + (m-1)^j).$$

Annexe B

Dans cette annexe, nous allons adapter les identités développées pour les suites de *Pell* et *Pell – Lucas* définies comme suit :

– La suite de *Pell*,

$$P_0 = 1, P_1 = 1, \text{ et } P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1} \text{ pour } n \geq 2,$$

– La suite de *Pell-Lucas*

$$Q_0 = 2, Q_1 = 2, \text{ et } Q_{n+1} = 2Q_n + Q_{n-1} \text{ pour } n \geq 2,$$

Identité 1.1. Pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^n 2^{n-k} P_k = P_{n+2} - 2^{n+2}.$$

Identité 1.2.

$$\sum_{k=0}^n 2^{k-1} k P_{n-k} = P_{n+3} - 2^{n+3} - 2^{n+1}(n+2).$$

Identité 1.3. Pour tout $n \geq 6$,

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n P_{n-k} 2^k (k+2)(k+1) = P_{n+6} - 2^{n+6} - 2^{n+4}(n+5) - 2^{n+2} \frac{(n+4)(n+3)}{2}.$$

Identité 1.4. Pour tous $m \geq 1$ et $n \geq 2m$

$$\sum_{0 \leq j \leq k \leq n-2m} P_{n-k-2m} \frac{2^k}{k!} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} m^j = P_n - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k}.$$

Identité 1.5 Pour tous $m \geq 1$ et $n \geq m$,

$$P_n - \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \varepsilon}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} = 2^m \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} P_{n-m-2k} \binom{m}{k}.$$

$$\text{où } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } n \pmod{2} \geq m \pmod{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Identité 1.6. Pour $n \geq 4$, on a

$$P_n - \sum_{k=0}^{n-4} P_{n-4-k} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} \binom{k-2i}{i} 2^{k-2i} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n-2j}{j} 2^{n-2j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} \binom{n-2-2i}{i} 2^{n-2-2i}.$$

Identité 1.7. Pour tout $n \geq 2$,

$$P_n - 2^2 \sum_{k=0}^{n-2} P_{n-k-2} \sum_{2i+3j=k} \binom{i+j}{i} 2^j = \sum_{2i+3j=n} \binom{i+j}{i} 2^j + \sum_{2i+3j=n-1} \binom{i+j}{i} 2^{j+1}.$$

Identité 1.8 (identité de Cassini)

$$P_n^2 = P_{n-1} P_{n+1} + (-1)^n.$$

Identité 1.9. (Catalan) Pour tous $0 \leq r \leq n-1$,

$$P_{n-1}^2 = P_{n-r-1} P_{n+r-1} + (-1)^{n-r} P_{r-1}^2$$

Identité 1.10. Pour $n \geq q$ et $q \geq 2$, on a

$$P_n^{(q)} - 2^n = \sum_{k=0}^{n-q} P_k^{(q)} 2^{n-k-q}.$$

Identité 2.1. Pour $n \geq 2$, on a

$$Q_n - 2^n = 2P_{n-2} + \sum_{k=1}^{n-2} 2^k P_{n-k-2}.$$

Identité 2.2. Pour $m \geq 2$, et $n \geq 2m$,

$$Q_n - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} = \sum_{k=0}^{n-2m} \sum_{j=0}^k P_{n-k-2m} \frac{2^k}{k!} \left[\begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right] (m^j + (m-1)^j).$$

Identité 2.3 Pour tous $m \geq 1$ et $n - 2 \geq m$,

$$Q_n - \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \varepsilon}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right) 2^{n-2k} = 2^m \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{k} (P_{n-m-2k} + P_{n-m-2k-2}).$$

$$\text{où } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } n \pmod{2} \geq m \pmod{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Identité 2.4 Pour tous $n \geq 1$ et $m \geq 1$,

$$2P_{n+m-1} = Q_m P_{n-1} + Q_n P_{m-1}.$$

Annexe C

Le but de cette annexe est de réécrire les identités dans le cas des suites de *Jacobsthal* et *Jacobsthal-Lucas* définies par les relations de récurrence suivantes :

– la suite de *Jacobsthal*,

$$J_0 = 1, \quad J_1 = 1, \quad \text{et} \quad J_{n+1} = J_n + 2J_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 2,$$

– la suite de *Jacobsthal-Lucas*

$$j_0 = 2, \quad j_1 = 1, \quad \text{et} \quad j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 2,$$

Identité 1.1. Pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^n J_k = \frac{1}{2}(J_{n+2} - 1).$$

Identité 1.2.

$$\sum_{k=0}^n kJ_{n-k} = \frac{1}{4}(J_{n+3} - (n+3)).$$

Identité 1.3. Pour tout $n \geq 6$,

$$4 \sum_{k=0}^n J_{n-k}(k+2)(k+1) = J_{n+6} - 1 - 2(n+5) - 2(n+4)(n+3).$$

Identité 1.4. Pour tous $m \geq 1$ et $n \geq 2m$

$$2^m \sum_{0 \leq j \leq k \leq n-2m} J_{n-k-2m} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} m^j = J_n - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-k}{k} 2^k.$$

Identité 1.5 Pour tous $m \geq 1$ et $n \geq m$,

$$J_n - \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \varepsilon}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} J_{n-m-2k} \binom{m}{k} 2^k.$$

$$\text{où } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } n \pmod{2} \geq m \pmod{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Identité 1.6. Pour $n \geq 4$, on a

$$J_n - \sum_{k=0}^{n-4} J_{n-4-k} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} \binom{k-2i}{i} 2^{i+2} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n-2j}{j} 2^j + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} \binom{n-2-2i}{i} 2^{i+1}.$$

Identité 1.7. Pour tout $n \geq 2$,

$$J_n - \sum_{k=0}^{n-2} J_{n-k-2} \sum_{2i+3j=k} \binom{i+j}{i} 2^{i+j} = \sum_{2i+3j=n} \binom{i+j}{i} 2^{i+j} + \sum_{2i+3j=n-1} \binom{i+j}{i} 2^{i+j}$$

Identité 1.8 (identité de Cassini)

$$J_n^2 = J_{n-1} J_{n+1} + (-2)^n.$$

Identité 1.9. (Catalan) Pour tous $0 \leq r \leq n-1$,

$$J_{n-1}^2 = J_{n-r-1} J_{n+r-1} + (-2)^{n-r} J_{r-1}^2$$

Identité 2.1. Pour $n \geq 2$, on a

$$j_n - 1 = 4J_{n-2} + 2 \sum_{k=1}^{n-2} J_{n-k-2}.$$

Identité 2.2. Pour $m \geq 2$, et $n \geq 2m$,

$$j_n - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^k = 2^m \sum_{k=0}^{n-2m} \sum_{j=0}^k J_{n-k-2m} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} (m^j + (m-1)^j).$$

Identité 2.3 Pour tous $m \geq 1$ et $n-2 \geq m$,

$$j_n - \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \varepsilon}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right) 2^k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{k} 2^k (J_{n-m-2k} + 2J_{n-m-2k-2}).$$

$$\text{où } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } n \pmod{2} \geq m \pmod{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Identité 2.4 Pour tous $n \geq 1$ et $m \geq 1$,

$$2J_{n+m-1} = j_m J_{n-1} + j_n J_{m-1}.$$

Bibliographie

- [1] H. Belbachir, F. Bencherif, Linear recurrent sequences and powers of a square matrix, *Integers*, A 12, 2006.
- [2] H. Belbachir, Unimodalité et propriétés combinatoires de suites numériques, *Thèse de Doctoral d'Etat en Mathématiques, USTHB, (décembre 2007)*.
- [3] A. T. Benjamin, J. J. Quinn, Recounting Fibonacci and Lucas identities, *The college mathematics journal*, Vol. 30, No. 5, 1999.
- [4] A. T. Benjamin, J. J. Quinn, Fibonacci and Lucas identities through colored tiling, *Utilitas mathematica*, 1999
- [5] A. T. Benjamin, G. M. Levin, K. Mahlborg, J. J. Quinn, Random approaches to Fibonacci identities, *Amer. Math. Monthly*, pp 511-516, 2000.
- [6] A. T. Benjamin, J. J. Quinn, F. E. Su, Generalized Fibonacci Identities through Phased Tilings, *The Fibonacci Quarterly*, pp 282-288, 2000.
- [7] A. T. Benjamin, J. J. Quinn, Proof that really count :The Art of Combinatorial Proof. *The Mathematical Association of America* , 2003.
- [8] A. T. Benjamin, C. R. H. Hanusa, F. E. Su, Linear recurrences through tilings and markov chains, *Utilitas Mathematica* , 64, pp 3-17, 2003.
- [9] A. T. Benjamin, J. J. Quinn, The Fibonacci numbers-exposed more discretely, *Mathematics magazine*, vol. 76,no. 3, june 2003.
- [10] A. T. Benjamin, T. A. Carnes, B. Cloitre, Recounting the sums of cubes of Fibonacci numbers, 2005.
- [11] A. T. Benjamin, A. K. Eustis, S. S. Plott, The 99 Fibonacci identity, *The electronic journal of combinatorics*, R34, 2008.

- [12] A. T. Benjamin, D. Walton, Counting on Chebyshev Polynomials, *Mathematics magazine* draft, vol. 82, NO. 2, 2009.
- [13] A. T. Benjamin, H. Derks, J. J. Quinn, The combinatorialization of linear recurrences, the *electronic journal of combinatorics*, 18(2), 2011
- [14] L. Debnath, A short history of the Fibonacci and golden numbers with their applications, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 42, No. 3, 337–367, 2011.
- [15] R. A. Dunlap, The Golden ration and Fibonacci number, World Scientific Press, 1997.
- [16] S. Falcon, A. Plaza, The k -Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle, *Chaos, Solitons & Fractals*, 38–49, 2007.
- [17] S. Falcon, On the k -Lucas numbers, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol. 6, 1039 - 1050, 2011.
- [18] D. Gerdemann, Combinatorial proofs of Zeckendorf family identities,
- [19] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, Mathématiques Concrètes, *International Thomson Publishing France*.
- [20] R. P. Grimaldi, Tilings, Compositions, and generalizations. *Journal of integer sequences*, vol 13, A. 10.6.5, 2010.
- [21] C. R. H. Hanusa, A Generalized Binet's formula for k^{th} order linear recurrences a morkov chain approch. *Thèse PhD, Harvey Mudd college, avril 2001*
- [22] V. E. Hoggatt Jr, D. A. Lind, Compositions and Fibonacci Numbers, *The Fibonacci Quarterly*, Vol. 7, No. 3, pp. 253-266, 1969.
- [23] M. Katz, C. Stenson, Tiling a $(2 \times n)$ -board with squares and dominoes, *Journal of integre sequences*, vol 12, A. 09.2.2, 2009.
- [24] S. T. Klien, Combinatorial represenation of generalized Fibonacci numbers, *The Fibonacci Quarterly*, 29, 124-131, 1991
- [25] E. Kilic, The Binet formula, sums and representations of generalized Fibonacci p-numbers, *European Journal of Combinatorics*, 29, 701–711, 2008.
- [26] E. Lindgren, M. A. Ngo, S. Segroves, Weighted and q-Fibonacci numbers, 2007.
- [27] E. Lucas, Théorie des Fonctions Numériques Simplement Périodiques, *American Journal of Mathematics*, vol 1, pages 184-240 and 289-321, 1878.
- [28] T. Koshy , Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Wiley-Interscience, 2001.

- [29] A. Plaza and S. Falcon, Identities for generalized Fibonacci numbers : a combinatorial approach, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39 : 4, 563 — 566, 2008.
- [30] R. Stanley , Enumerative Combinatorics, Cambridge University Press, (1999).
- [31] M. Shattuck, Tiling proofs of some Fibonacci-Lucas relations, *Electronic journal of combinatorial number theory. A18. 2008*.
- [32] M. Shattuck, A. Eustis, Combinatorial proofs of some identities for the Fibonacci and Lucas numbers, *Integers*, 2011.
- [33] B. Singh , P.Bhadouria, O.Sikhwai, Generalized Identities Involving Common Factors of Fibonacci and Lucas Numbers, *International Journal of Algebra*, Vol. 5, no. 13, 637 - 645, 2011.
- [34] A. Stakhov, B. Rozin, Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005
- [35] M. Thongmoon, New Identities for the Even and Odd Fibonacci and Lucas Numbers, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol. 4, no. 14, 671 - 676, 2009.
- [36] S. Vajda, Fibonacci and Lucas numbers, and the golden section : theory and applications, John Wiley and sons, 1989.
- [37] P. M. Wood, Bijective proofs for Fibonacci identities related to Zeckendorf's Theorem, 2006