N$^{\underline{o}}$ d'ordre : 06/2014 - D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLGIE
« HOUARI BOUMEDIEN »
FACULTE DE MATHEMATIQUES

THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTORAT EN SCIENCES

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse : Equations aux Dérivées Partielles

par : BELGHAZI ABDELHAKIM TARIK

Sujet

Autour de quelques problèmes de contrôle de systèmes paraboliques posés dans un domaine singulier : inégalités de Carleman, inégalité spectrale et inégalité d'observabilité.

soutenue publiquement le 25 novembre 2014, devant le jury composé de :

M. T.Aliziane,	**Professeur**	**, à l'USTHB**	**Président**
M. D.Teniou,	**Professeur**	**, à l'USTHB**	**Directeur de thèse**
Mme. A.Benabdallah,	**Professeur**	**, à l'Univ. Aix-Marseille**	**co-directrice de thèse**
M. Y.Dermenjian,	**Professeur**	**, à l'Univ. Aix-Marseille**	**Examinateur**
M. M.Moussaoui,	**Professeur**	**, à l'ENS Kouba**	**Examinateur**

Remerciements

Mes tous premiers remerciements vont en direction de mes deux directeurs de thèse, les Professeurs Assia Benabdallah et Djamel Eddine Teniou. Je leur en suis profondément et infiniment reconnaissant d'avoir accepté de me prendre en charge et de mener à terme cette thèse. J'estime beaucoup leur qualité et leur disponibilité malgré leur charge de travail et de responsabilité. Je tiens aussi à leur exprimer ma gratitude pour leur patience et leur indulgence face à mes questions qui manquent parfois de fondement et à mes hésitations.

Je ne remercierai jamais assez Mr Teniou pour ses conseils de rédaction et pour avoir passé au peigne fin ma thèse. Les remarques et suggestions dont il a fourni m'ont aidé de façon considérable à améliorer la qualité de la présentation de mes résultats.

Durant la préparation de cette thèse, grâce aux maintes invitations de ma co-directrice de thèse, Assia Benabdallah au sein du laboratoire (à Marseille) dont elle fait partie, j'ai eu l'occasion d'y faire des stages scientifiques et d'entretenir des discussions scientifiques intéressantes avec les membres de son équipe de recherche. Je pense essentiellement à : Yves Dermenjian, Olivier Poisson, Patricia Gaitan, Michel Cristofol et Jérôme Le Rousseau. Je les remercie énormément un par un pour leur collaboration. Je tiens aussi à mettre en valeur la disponibilité du Professeur Dermenjian et à le remercier pour la peine qu'il se donne à chaque fois que ces stages rentraient dans le cadre du projet français Arcus. Je le remercie également pour les suggestions et les corrections qu'il a proposé afin d'améliorer la qualité de la rédaction de cette thèse.

Je tiens aussi à mettre en valeur les efforts et la contribution de Nawel Zaidi, Ferroudja Smadhi et de Ouahiba Zair pour l'aboutissement de ce travail. En fait, une grande partie des résultats obtenus dans ce mémoire a été réalisée suite à une coordination avec ce groupe de chercheurs.

Je profite de l'occasion pour remercier le professeur Mohand Moussaoui pour ses remarques constructives et les éclaircissements qu'il a apporté sur certains points liés au bon fondement de nos résultats. Je le remercie aussi de m'avoir consacré de son temps et pour les discussions fructueuses qu'on a eues à l'école normale supérieure de Kouba.

Je n'oublie pas également à citer dans mes remerciements les plus sincères les membres du jury d'avoir accepté de juger ce travail, notamment le président du jury, le professeur Tarik Aliziane. C'est un honneur pour moi qu'ils constituent le jury de ma thèse.

Je termine mes remerciements par un grand merci pour toutes les personnes qui m'ont aidé et soutenu de loin ou de près. Je pense essentiellement à chaque membre de ma petite famille, mes chers parents et les collègues de travail.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le présent travail se place dans le cadre des problèmes de contrôlabilité des systèmes d'évolution décrits en termes d'équations aux dérivées partielles de type parabolique. Pour un intervalle de temps donné $0 < t < T$, ces problèmes consistent, pour un état initial et un état final connus, en la détermination d'un contrôle approprié agissant sur le second membre du système (ou sur les conditions au bord dans d'autres cas) et qui est chargé d'amener le système d'évolution de l'état initial donné à l'état final voulu au temps T.
Nous nous intéresserons, plus particulièrement, à la contrôlabilité à zéro de ces systèmes. Autrement dit, est-il possible d'atteindre l'état zéro à partir de n'importe quelle donnée initiale au temps T. Comme le système est linéaire, cela revient à montrer la contrôlabilité aux trajectoires (voir l'annexe), puisque si nous savons amener le système à zéro à partir d'un état initial quelconque au temps T, nous savons l'amener aussi à l'état final d'une trajectoire libre du système sans second membre. A cause de l'effet régularisant de certains systèmes paraboliques, cette contrôlabilité aux trajectoires n'est pas toujours possible.

En pratique, il est bien connu qu'établir un résultat de contrôlabilité à zéro n'est pas toujours évident à réaliser. Cependant, il existe différents moyens pour y arriver, l'inégalité d'observabilité en est un, elle se démontre généralement de nos jours par le biais des inégalités de Carleman.
Les systèmes paraboliques linéaires sur lesquels portera notre intérêt et auxquels nous montrerons la contrôlabilité à zéro sont :

Problème 1 L'équation de la chaleur considérée dans un domaine borné bidimensionnel avec un contrôle interne.

Problème 2 Un problème parabolique tridimensionnel à coefficients de diffusion qui sont à variation bornée dans une seule direction. Le contrôle aussi est interne.

Pour ce qui est du domaine où sont posés ces problèmes, nous supposerons que sa frontière présente des singularités. Cette singularité se caractérise, en dimension deux, par la présence soit d'un coin non convexe droit (ou plusieurs coins) soit d'une fissure rectiligne avec une seule pointe qui débouche sur le bord du domaine. En dimension trois, cette frontière est polyhédrale ou présente une fissure plane qui se prolonge dans la direction latérale du domaine. Ce qui veut dire que nous aurons affaire à un cylindre dont la section tranversale forme un domaine singulier du même type qu'en dimension deux.

Concernant les estimations de Carleman, il est utile de savoir qu'elles représentent ces dernières années un outil très utilisé et occupent une place importante dans l'étude notamment des problèmes de prolongement unique, de contrôle ou des problèmes inverses pour la détermination des termes source ou de coefficients. Ce genre d'estimations fera l'objet de notre analyse, nous les démontrerons pour deux types de problèmes, à savoir : l'équation de la chaleur avec un contrôle interne dans la cas bidimensionnel et puis l'équation elliptique ou l'équation de Poisson en dimension trois. Nous mettrons en évidence une certaine fonction poids indispensable dans les estimations de Carleman et dont son existence est montrée dans [14] dans le cas où le domaine est à frontière assez régulière, contrairement à notre cas.
Par ailleurs, en théorie du contrôle, il y a différentes méthodes permettant de justifier l'inégalité d'observabilité et de construire ce contrôle avec un meilleur coût possible. Parmi ces méthodes, nous peuvons citer :

1. La méthode de A.Fursikov et O.Imanuvilov [14], qui consiste à établir cette inégalité d'observabilité à partir d'une certaine inégalité de Carleman pour le problème adjoint associé à l'équation parabolique considérée.
2. La méthode de Lebeau-Robbiano, qui est basée sur la décomposition spectrale de la solution, et à partir d'une certaine inégalité spectrale portant sur les combinaisons linéaires finies des fonctions propres de l'opérateur Laplace-Dirichlet, le contrôle est construit sur des intervalles de temps de plus en plus proche du temps final et permettant ainsi d'obtenir d'une certaine façon la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur.
3. La méthode introduite par J.-L. Lions dite " The Hilbert Uniqueness Method" (HUM). Elle est fondée sur quelques arguments d'analyse fonctionnelle (Théorème de représentation de Riesz) et de l'inégalité d'observabilité évoquée précédemment.

Dans ce présent travail, nous ferons appel aux deux premières méthodes afin d'atteindre notre objectif. Pour une meilleure présentation de nos résultats, nous allons suivre le plan suivant :

§ Le chapitre 1 comporte des rappels de quelques propriétés des espaces de Sobolev considérés dans des domaines à frontière non régulière.

§ Les chapitres 2 et 3 sont consacrés aux aspects théoriques de l'étude des singularités du problème parabolique et du problème elliptique. Nous avons apporté quelques retouches sur la façon de décomposer la solution de problème de Dirichlet pour le Laplacien sous forme d'une somme d'une partie régulière et d'une partie singulière explicite. En introduisant cette décomposition lorsqu'il est question d'établir une estimation de Carleman pour les problèmes considérés, nous pourrons surmonter la difficulté d'avoir une solution peu régulière.

§ Dans le chapitre 4, nous rappellerons les grandes lignes de l'établissement des estimations de Carleman pour un problème parabolique considéré dans un domaine assez régulier. Nous verrons aussi le rôle que peuvent jouer ces estimations concernant les problèmes de contrôlabilité à zéro.

§ Au chapitre 5, on justifie la validité des estimations de Carleman globales pour le **problème 1** dans des domaines singuliers tels qu'on les a énoncés plus haut. On abordera aussi la question de la fonction poids tout en indiquant la façon de la construire dans ce genre de domaine à frontière qui n'est pas de classe C^2.

§ Concernant le chapitre 6, nous le réservons pour la deuxième méthode permettant de montrer la contrôlabilité à zéro du **problème 2** à savoir la méthode de Lebeau-Robbiano. Ce qui nous demandera de donner un aperçu sur les grandes lignes de cette méthode. Le raisonnement que nous avons adopté tient compte des résultats obtenus dans [7] pour des systèmes paraboliques considérés dans un milieu stratifié. Nous verrons comment, en combinant tous ces résultats, nous atteignons cette contrôlabilité à zéro.

§ Pour ce qui est du chapitre 7, nous généraliserons les résultats obtenus pour les deux problèmes à des domaines avec plusieurs coins ou qui contiennent plusieurs fissures à condition qu'elles ne se coupent pas.

Les résultats établis dans cette thèse ont fait l'objet de trois publications [4, 5, 6].

Chapitre 2

Généralités sur les espaces de Sobolev dans des domaines singuliers

1 Définitions

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement quelques propriétés des espaces de Sobolev dans des domaines non réguliers. Il est bien connu que dans de tels espaces les définitions qui peuvent être données dépendent fortement de la frontière du domaine considéré localement comme le graphe d'une certaine fonction, qui peut être, par exemple, lipchitzienne, continue, différentiable et ainsi de suite, ce qui caractérisera les propriétés de cette frontière. C'est ce qui nous a motivé pour donner ces définitions. Nous omettons de donner la preuve des résultats qu'on énoncera dans ce qui suit ; en revanche nous renvoyons à chaque fois à une référence bibliographique contenant les démonstrations.

Définition 2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que Ω est à frontière Γ Lipchtzienne si pour tout $x \in \Gamma$, il existe un voisinage V de x dans $\mathbb{R}^n$ et un système de coordonnées $\{y_1, ..., y_n\}$ tels que*

1. *$V = \{(y_1, ..., y_n)/ - a_i < y_i < a_i, 1 \leq i \leq n\}$ est un hypercube dans ce système de coordonnées, avec $a_i > 0, 1 \leq i \leq n$;*
2. *il existe une fonction φ Lipchtzienne définie sur $W = \{(y_1, ..., y_{n-1})| - a_i < y_i < a_i, 1 \leq i \leq n-1\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$|\varphi(y')| \leq \tfrac{a_n}{2}, \text{ pour tout } y' = (y_1, ..., y_{n-1}) \in W,$$
$$\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V | y_n \leq \varphi(y')\} \text{ et}$$
$$\Gamma \cap V = \{y = (y', y_n) \in V | y_n = \varphi(y')\}.$$

Définition 2.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que Ω possède la propriété du cône uniforme si pour tout $x \in \Gamma$, il existe un voisinage V de x dans $\mathbb{R}^n$ et un nouveau système de coordonnées $\{y_1, ..., y_n\}$ tels que*

1. *$V = \{(y_1, ..., y_n); -a_i < y_i < a_i, 1 \leq i \leq n\}$ est un hypercube dans le nouveau système de coordonnées, avec $a_i > 0, 1 \leq i \leq n$;*

2. *$y - z \in \Omega$ lorsque $y \in \overline{\Omega} \cap V$ et $z \in C$, où $C = \{z = (z', z_n) | (cotg\theta)|z'| < z_n < h\}$, pour un certain $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et un certain $h > 0$, est un cône ouvert.*

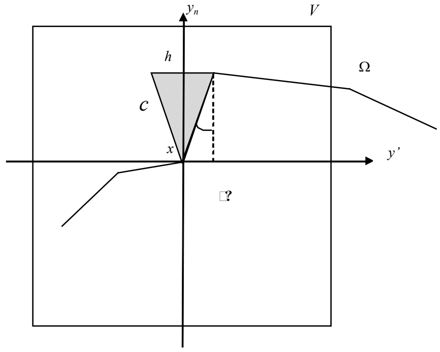

FIGURE 2.1 – Géométrie d'un domaine vérifiant la propriété d'un cône uniforme.

Remarque 2.3 1. *Afin de mieux comprendre la définition 2.1, on peut se placer en dimension deux pour voir que, par rapport au voisinage V de $x \in \Gamma$ donné dans la définition 2.1, $\Omega \cap V$ est au-dessous du graphe de φ et $\Gamma \cap V$ est exactement le graphe de φ (voir Figure 2.2) ;*

2. *La définition 2.2 peut être traduite par l'existence d'un cône C de sommet x tel que $C \setminus \{x\}$ soit dans $\overline{\Omega}$ (voir figure 2.1)*
3. *Les domaines polygonaux et les polyèdres sont à frontière Lipchtzienne et vérifient la propriété du cône uniforme. Par contre, les domaines fissurés et les domaines à frontière possédant un point de rebroussement ne vérifient pas les définitions 2.1 et 2.2.*

Exemple 2.4 1. *Dans le plan si nous considérons les deux domaines suivants :*

$$\begin{array}{rl} \Omega_1 & = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, -1 < x_1 < 1, \; -1 < x_2 < -|x_1|^{1/2}\} \text{ et} \\ \Omega_2 = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, -1 < x_1 \leq 0, \; -1 < x_2 < -x_1^2\} \cup \\ & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 \leq x_1 < 1, \; -1 < x_2 < -x_1\} \end{array}$$

Nous pouvons montrer que le premier domaine Ω_1 n'est pas à frontière Lipschitzienne, par contre Ω_2 est un domaine qui a cette propriété.

2. *L'empilement de deux cubes croisés forme un polyhèdre à frontière non Lipschitzienne.*

Nous rappelons brièvement dans ce qui suit quelques définitions et propriétés basiques des espaces de Sobolev dans des domaines non réguliers comme les nôtres. Il est connu que les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels bien appropriés et adaptés pour une description qualitative des solutions d'équations paraboliques et elliptiques auxquelles on va s'intéresser. Nous omettons de donner les démonstrations des résultats donnés dans les rappels ci-après, nous renvoyons au livre de Necǎs [27] pour plus de détails.

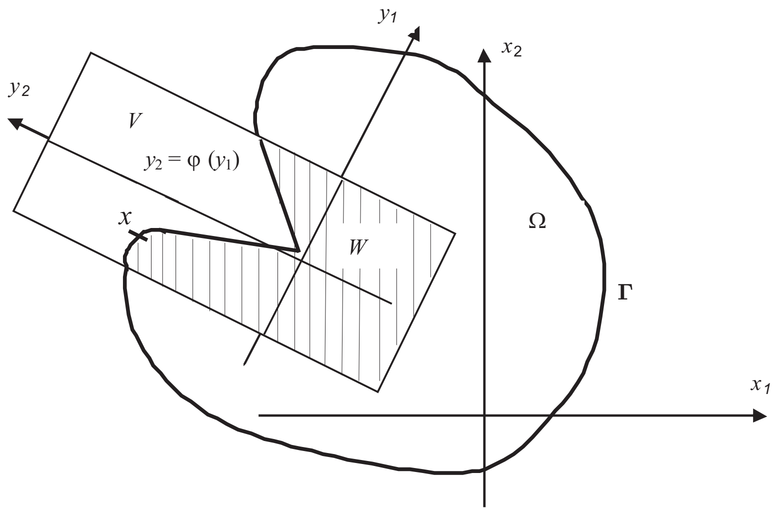

FIGURE 2.2 – Forme géométrique du domaine Ω.

2 Espace de Sobolev dans une domaine singulier

Les espaces de Sobolev définis dans des domaines réguliers ont été étudiés de façon approfondie. Ils ont été définis de manières différentes mais équivalentes. Par contre dans le cas de domaines peu réguliers, il s'avère que ces propriétés ne sont pas toutes valables. Ce qui nous a donc motivé à donner ces brefs rappels.
Considérons un ouvert quelconque Ω de $\mathbb{R}^n$. Pour $s \in \mathbb{R}$

Définition 2.5 *On note $H^s(\Omega)$ l'espace des distributions u dans Ω telles que*

1. *$D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$ lorsque $s = m$ est un entier positif :*
2. *$u \in H^m(\Omega)$ et*
$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\sigma}} dxdy < +\infty \tag{2.1}$$
pour $|\alpha| = m$ lorsque $s = m + \sigma$ est non entier et positif avec m entier et $0 < \sigma < 1$.

$H^s(\Omega)$ est muni de la norme naturelle

$$\|u\|_S = (\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx)^{1/2} \text{ si } s \text{ est entier}$$

$$\|u\|_S = \left(\|u\|_m^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\sigma}} dxdy \right)^{1/2} \quad \text{si } s \text{ est non entier.}$$

Définition 2.6 *$H_0^s(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$, où $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ dans Ω à support compact.*

Définition 2.7 *Si $s < 0$, $H^s(\Omega)$ est le dual de $H_0^{-s}(\Omega)$.*

Dans ce qui suit, on donnera quelques théorèmes d'injection et de densité importants. Ils ne sont établis que dans le cas d'un domaine à frontière Lipschitzienne, les domaines contenant une fissure se traiteront dans une autre section.

Théorème 2.8 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitzienne, et soit k un entier tel que $2k > n$. Alors*

$$H^k(\Omega) \hookrightarrow C^\mu(\overline{\Omega}),\ \text{où}\ \mu \begin{cases} = k - (\frac{n}{2}) & si\ k - (\frac{n}{2}) < 1, \\ < 1 & si\ k - (\frac{n}{2}) = 1, \\ = 1 & si\ k - (\frac{n}{2}) > 1. \end{cases}$$

Nous rappelons que $C^\mu(\overline{\Omega})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions μ-holdériennes dans $\overline{\Omega}$.

Théorème 2.9 *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipchitzienne, alors $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^s(\Omega)$ pour tout $s \in [0, 1/2]$, autrement dit $H^s(\Omega) = H^s_0(\Omega)$.*

Du théorème de densité suivant, nous pouvons déduire la densité de $H^2(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$ pour tout $s \in]0, 2[$.

Théorème 2.10 *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitzienne, alors $C^\infty_c(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^s(\Omega)$ pour tout $s > 0$.*
$C^\infty_c(\overline{\Omega})$ désigne l'espace de fonctions définies sur Ω qui sont des restrictions de fonctions de classe C^∞ et à support compact dans $\mathbb{R}^n$.

3 Géométrie de domaines polygonaux

Dans ce paragraphe, nous abordons quelques notions sur les domaines de $\mathbb{R}^2$ ayant une frontière polygonale, appelés aussi "polygones du plan". Si on note Γ la frontière du polygone, alors cette frontière est constituée de segments $\Gamma_i, i = 1, ..., m$ n'ayant leur extrémités que comme points d'intersection. Notons M_i le sommet entre les côtés Γ_i et Γ_{i+1} dont ω_i est l'angle formé vers l'intérieur de Ω. Les notations η_i et τ_i désignent respectivement la normale unitaire sortante à Γ_i et la tangente dans le sens direct (voir la figure 2.3)
Au voisinage de chaque sommet M_i, on peut introduire des coordonnées polaires locales de tout point M par rapport à M_i. On note r_i la distance entre M_i à M et θ_i l'angle formé entre Γ_{i+1} et $\overline{M_iM}$. En coordonnées cartésiennes, si on suppose que l'axe des abscisses est supporté par Γ_{i+1} alors les coordonnées du point M sont définies par

$$x = r_i \cos\theta_i \text{ et } y = r_i \sin\theta_i$$

4 Quelques résultats de traces sur un domaine polygonal

Selon la définition 2.5, on peut introduire de la même manière l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ comme l'espace des fonctions $f \in L^2(\Gamma)$ telles que

$$\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^2} ds(x)ds(y) < +\infty,$$

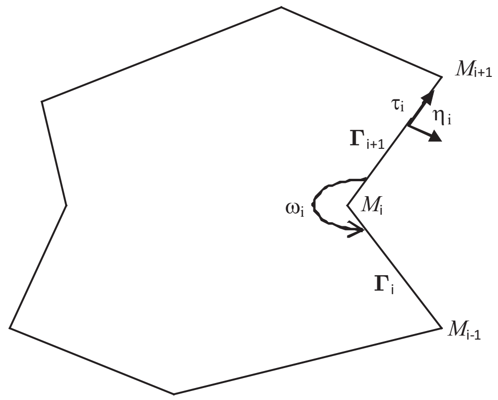

FIGURE 2.3 – Forme géométrique du domaine Ω.

où ds dénote la mesure de longueur sur Γ. En fait, l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est l'espace des restrictions à Γ des fonctions de $H^1(\Omega)$.
Pour mieux caractériser l'espace des traces $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on restreint chaque élément f de $H^1(\Omega)$ à chaque côté Γ_i. Si on dénote f_i cette restriction, alors f_i sera un élément de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$ au sens de la définition 2.5. Inversement, les conditions de raccord au voisinage de chaque sommet précisées dans la proposition suivante nous garantissent l'autre sens.

Proposition 2.11 *Pour que f appartienne à $H^{1/2}(\Gamma)$ il faut et il suffit que f_i soit dans $H^{1/2}(\Gamma_i)$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et qu'en plus, pour ε assez petit*

$$\int_0^{\varepsilon} |f_i(x_i(-\delta)) - f_{i+1}(x_i(+\delta))|^2 \frac{d\delta}{\delta} < +\infty,\ 1 \leq i \leq m, \tag{2.2}$$

$(x_i(+\delta)$ (resp. $x_i(-\delta))$ désigne le point de Γ_{i+1} (resp. Γ_i) à distance δ du sommet M_i.

Remarque 2.12 *La condition (2.2) peut être traduite comme une condition de raccord entre les fonctions f_i et f_{i+1} au point M_i en un sens faible. On utilisera la notation suivante*

$$f_i \equiv f_{i+1} \text{ en } M_i,$$

pour exprimer autrement cette condition de raccord.

Les notions précédentes peuvent être étendues à $H^s(\Gamma)$, avec $1/2 \leq s \leq 1$. Par ailleurs, un autre problème qui nous obligera à passer par cette restriction sur Γ_i est l'impossibilité d'affirmer comme dans le cas d'un domaine régulier, que l'image de $H^1(\Omega)$ et de $H^2(\Omega)$ est $H^{1/2}(\Gamma)$ par les applications

$$u \mapsto u_{|\Gamma} \text{ et } u \mapsto \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma}$$

respectivement. Le théorème suivant tient compte de ces considérations.

Théorème 2.13 *Pour $1 \leq i \leq m$, l'image de $H^2(\Omega)$ par l'application*

$$u \mapsto (g_i, h_i)_{i=1}^{i=m},$$

où $g_i = u_{|\Gamma_i}$ et $h_j = \frac{\partial u}{\partial \eta_i}\big|_{\Gamma_i}$, est le sous-espace

$$\prod_{i=1}^{i=m} H^{3/2}(\Gamma_i) \times H^{1/2}(\Gamma_i)$$

tel que

$$\begin{array}{ll} g_i(M_i) & = g_{i+1}(M_i), \\ g_i'(M_i) & \equiv -\cos(\omega_i) g_{i+1}'(M_i) + \sin(\omega_i) h_{i+1}(M_i), \\ h_i(M_i) & \equiv -\cos(\omega_i) h_{i+1}(M_i) - \sin(\omega_i) g_{i+1}'(M_i), \end{array} \tag{2.3}$$

pour tout $1 \leq i \leq m$.

La preuve de ce théorème peut être trouvée dans [23] (Théorèmes 1.4.6 et 1.4.9). A titre indicatif, les relations (2.3) sont les conditions de raccord en chaque coin M_i. Pour les justifier, il est important de tenir compte du changement de repère (η, τ) sur chaque côté Γ_i.

5 Formule de Green sur un domaine polygonal

Dans cette section, nous rappelons quelques formules de Green usuelles qui sont valables aussi dans le cas de domaines à frontière lipschitzienne, ce qui inclut les domaines polygonaux (voir [27]). Nous indiquerons aussi la façon de les appliquer au cas de domaines avec fissure où la frontière n'est pas lipschitzienne. Ces formules nous serviront par la suite lorsqu'il sera question de justifier certaines intégrations par parties.

Considérons donc un domaine borné lipschitzien Ω de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ. Et notons η_i la iéme composante du vecteur normal unitaire η sortant à Γ. Alors

Théorème 2.14 *1. Pour u et $v \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \int_\Gamma uv\eta_j d\sigma - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j} dx; \tag{2.4}$$

2. Pour $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in H^2(\Omega)$, on a ce qu'on appelle la formule de Green partielle

$$\int_\Omega u \Delta v dx = \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma - \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx; \tag{2.5}$$

3. Pour u et $v \in H^2(\Omega)$, on a aussi la formule complète de Green

$$\int_\Omega u \Delta v dx - \int_\Omega v \Delta u dx = \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma - \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma. \tag{2.6}$$

Remarque 2.15 1. *La formule de Green (2.5) énoncée dans la théorème ci-dessus peut être affaiblie dans un certain sens. En fait, elle reste encore valable pour $v \in H^s(\Omega)$, où $3/2 < s \leq 2$. Pour le justifier, on peut revenir au résultat de densité donné dans le théorème 2.10 pour déduire d'une part des injections continues suivantes*

$$C_c^\infty(\overline{\Omega}) \hookrightarrow H^2(\Omega) \hookrightarrow H^s(\Omega)$$

que $H^2(\Omega)$ est dense dans $H^s(\Omega)$. D'autre part, si on fixe u dans $H^1(\Omega)$, alors le terme gauche de l'identité (2.5) doit être considéré comme crochet de dualité entre

$$H^{s-2}(\Omega)$$

et

$$H^{2-s}(\Omega) = H_0^{2-s}(\Omega),$$

puisque $1 > 2 - s$ et $0 < 2 - s < 1/2$. Les termes droits de l'égalité (2.5) dépend continument de v dans l'espace $H^s(\Omega)$. Ce qui nous permet de passer, par densité, de $v \in H^2(\Omega)$ à $v \in H^s(\Omega)$;

2. *Moyennant des conditions sur les traces de v et de $\dfrac{\partial v}{\partial \eta_i}$ sur chaque Γ_i, pour $1 \leq i \leq m$, il est aussi possible de donner un sens à la formule 2.5 soit pour une fonction*

$$v \in D(\Delta, L^2(\Omega)) = \{v \in L^2(\Omega) | \Delta v \in L^2(\Omega)\},$$

ou bien pour

$$v \in E(\Delta, L^2(\Omega)) = \{v \in H^1(\Omega) | \Delta v \in L^2(\Omega)\}$$

Cela se fait par dualité comme dans la première remarque et en tenant compte de la densité de $H^2(\Omega)$ dans $D(\Delta, L^2(\Omega))$ et dans $E(\Delta, L^2(\Omega))$(cf. [21], [23]).

3. *Lorsque la frontière de Ω contient une fissure, pour pouvoir appliquer les formules de Green précédentes, généralement on contourne la pointe de la fissure. En d'autres termes, on va considérer un sous-domaine $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash B(S, \varepsilon)$ de Ω, où $\varepsilon > 0$ et $B(S, \varepsilon)$ est la boule ouverte de rayon $\varepsilon > 0$ et de centre la pointe de cette fissure. On remarque que si on divise Ω_ε au niveau de cette fissure en deux morceaux Ω_ε^+ et Ω_ε^-, alors ces domaines sont à frontière lipschitzienne et qu'il est possible d'appliquer sur chaque sous-domaine les formules de Green du théorème précédent. Par passage à la limite sur ε, on peut revenir d'une certaine façon à Ω et qu'on verra en détail dans les chapitres suivants.*

Chapitre 3

Equation de Laplace dans un domaine singulier

1 Singularités de la solution du problème elliptique

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou $n = 3$) de frontière Γ non régulière. On s'intéressera essentiellement au deux cas suivants

Cas 1. - Ω est un domaine bidimensionnel présentant premièrement un coin rentrant polygonal (ou non convexe) de sommet le point M_{S} de Γ. On suppose que ω est la mesure de l'angle intérieur du coin, avec $\pi < \omega < 2\pi$. Deuxièmement, Ω est supposé comporter une fissure rectiligne σ avec une seule pointe S qui débouche sur le bord $\Gamma_1 = \Gamma \backslash \sigma$ au point M'_{S}. On supposera pour les deux cas que $\Gamma \backslash V(M_{\mathrm{S}})$ est (resp. $\Gamma \backslash V(\sigma)$) régulière, où $V(M_{\mathrm{S}})$ (resp. $V(\sigma)$) est un voisinage arbitraire de M_{S} (resp. de σ) assez petit.

Cas 2. - Ω est un domaine tridimensionnel cylindrique présentant soit un seul dièdre ou bien une fissure qui se propage le long du cylindre. En d'autres termes, $\Omega = (0, H) \times \Omega'$, où $H > 0$ et Ω' est un ouvert borné du même type que le cas 1.

Dans ce qui suit, on abordera la régularité maximale de la solution du problème elliptique avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes. Rappelons que dans des domaines à frontière assez régulière, au moins de classe C^2, la solution de ce type de problème (avec un second membre dans $H^2(\Omega)$) est dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Ceci reste valable si le domaine est polygonal et convexe (cf. [24]). Pour ce qui est des domaines contenant soit un coin rentrant (Cas1) ou d'une fissure rectiligne débouchant sur la frontière du domaine (Cas 2), on verra dans ce qui va venir que la solution appartient à $H^s(\Omega)$, pour tout $s < 1 + \dfrac{\pi}{\omega} < 2$. En plus, cette solution se décompose en somme d'une partie régulière qui est dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et une partie singulière. Par ailleurs, il est connu qu'en dehors des singularités de la frontière du domaine, la solution atteint la régularité H^2 (voir [23]), Théorème 2.1.3. et 2.1.4., p. 40).

1.1 Cas d'un domaine plan

Posons $\alpha = \dfrac{\pi}{\omega}$ et choisissons un repère orthonormé (x_1Ox_2) de centre M_S le sommet du coin (resp. la pointe de la fissure) (voir figure 3.1). Notons Γ_1 le côté supérieur du coin de longueur $l_1 > 0$ et Γ_2 son côté inférieur de longueur $l_2 > 0$. On suppose aussi que l'axe des abscisses (Ox_1) coïncide avec Γ_1 (resp. avec la fissure Λ). En coordonnées locales (r, θ), on définit la fonction

$$S(x, y) = r^{\alpha}\eta(r)\sin(\alpha\theta), \tag{3.1}$$

qu'on appelle fonction singulière, où $\eta \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est une fonction de troncature égale à 1 au voisinage $V(M_S)$ du sommet M_S (resp. de la pointe de la fissure Λ) tel que :

- le voisinage $V(M_S)$ soit inclus dans une boule $B(M_S, \varepsilon_0)$ de centre M_S et de rayon $\varepsilon_0 > 0$ avec
$$\varepsilon_0 \leq min(l_1, l_2);$$
- en plus $0 \leq \eta \leq 1$ dans $\overline{\Omega}$.

Considérons le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \text{ dans } \Omega, \\ \quad u &= 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

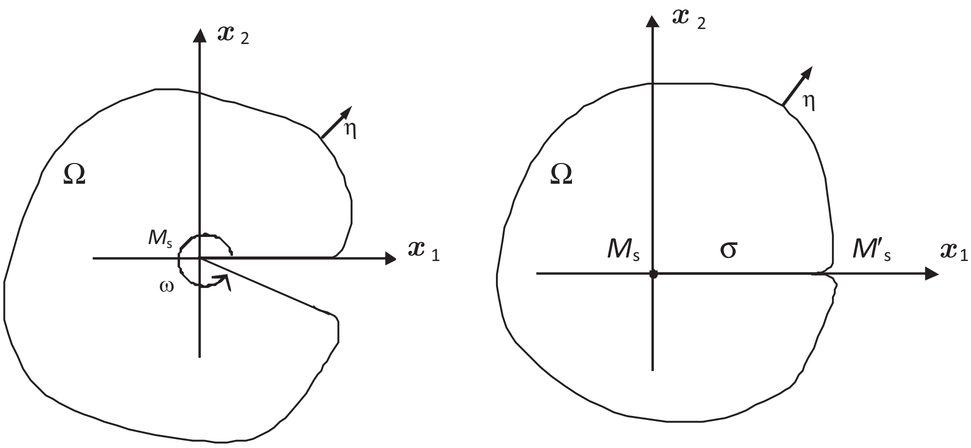

FIGURE 3.1 – Forme géométrique du domaine Ω.

Dans la proposition suivante, on se propose de rappeler quelques propriétés de la solution du problème (3.2). D'une part, on verra que le domaine de l'opérateur elliptique $-\triangle$ (avec les conditions aux limites homogènes de Dirichlet)

$$D(-\Delta) = \{u \in H_0^1(\Omega)\,;\; -\Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

est plus grand que $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, et d'autre part, la solution du problème (3.2) s'écrit comme une somme d'une partie régulière $u_R \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et d'une partie singulière $u_S(x, y) = cS(x, y)$.

Proposition 3.1 *Le problème (3.2) admet une unique solution variationnelle* $u \in H_0^1(\Omega)$. *De plus,*

$$D(-\Delta) = Vect\{H^2(\Omega); S\} \cap H_0^1(\Omega).$$

En d'autres termes, il existe une fonction $u_R \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *et une constante* $c \in \mathbb{R}$ *telles que*

$$u(x,y) = u_R(x,y) + cS(x,y) \text{ pour tout } (x,y) \in \Omega. \tag{3.3}$$

Preuve de la proposition 3.1 Avant d'entamer la justification de l'existence et de l'unicité de la solution du problème (3.2), on rappelle d'abord que l'inégalité de Poincaré est valable dans des domaines bornés assez généraux en particulier dans des domaines comme les nôtres. Par la méthode variationnelle, on peut déduire donc du théorème de Lax-Milgram l'existence unique d'une solution variationnelle $u \in H_0^1(\Omega)$.
Pour ce qui est de la régularité maximale de la solution du problème (3.2) et de sa forme explicite énoncée dans (3.3). On commence avant tout par énoncer le lemme suivant dans lequel on retrouve une propriété importante de l'opérateur de Laplace considéré dans le domaine $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Cette propriété nous servira par la suite à la preuve de la proposition.

Lemme 3.2 *Il existe une constante* $C = C(\Omega) > 0$ *telle que*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)},\ \forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Pour les détails de la preuve de ce lemme, on renvoie à [23] (Théorème 2.2.3, p.45). Comme conséquence de ce lemme, l'opérateur de Laplace défini sur $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est injectif et son image $R(-\Delta)$ est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$. Cela étant, la suite de la preuve consiste à identifier l'orthogonal

$$\mathcal{N} = \{v \in L^2(\Omega)\,;\ < v, \Delta u >_{L^2(\Omega)} = 0,\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\}$$

de $R(-\Delta)$. Nous donnerons, dans ce qui va suivre, l'idée principale pour y arriver. En fait, tenant compte de la démarche suivie dans [23], il est à noter que l'espace $\mathcal{N}$ contient les solutions du problème homogène adjoint suivant

$$\begin{cases} \Delta v &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ v &= 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3.4}$$

Plus précisément, on montrera, par la suite, que $\mathcal{N}$ est engendré par un seul élément qui lui appartient. Pour le montrer, on se place dans un voisinage du coin (resp. au voisinage de la fissure)

$$D(M_S, R) = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) | 0 < r < R,\ 0 < \theta < \omega\},$$

pour un certain $R > 0$ tel que $R < \min(l_1, l_2)$, puis on passe en coordonnées polaires. On remarquera alors que la solution v du problème (3.4) vérifie

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)v = 0 \tag{3.5}$$

avec les conditions au bord

$$v(r,0) = v(r,\omega) = 0,\ 0 < r < R.$$

Comme l'opérateur $L = -\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ (avec les conditions de Dirichlet homogènes) est auto-adjoint positif à résolvante compacte dans l'espace $L^2(]0,\omega[)$, son spectre est discret et est formé par une suite croissante de valeurs propres notées $(\lambda_m^2)_{m\geq 1}$. De plus, de l'ensemble de ses fonctions propres, notées $(\varphi_m)_{m\geq 1}$, associées à ces valeurs propres, on peut former une base que l'on peut choisir orthonormale dans $L^2(]0,\omega[)$.
Après calcul, on aura $\lambda_m = \dfrac{m\pi}{\omega}$ et $\varphi_m = \sqrt{\dfrac{2}{\omega}}\sin(\lambda_m\theta)$. La décomposition de la solution v du problème (3.4) sur cette base nous fait parvenir à l'écriture suivante :

$$v(r,\theta) = \sum_{m\geq 1} v_m(r)\varphi_m(\theta) \text{ où } v_m = \int_0^\omega v(r,\theta)\varphi_m(\theta)d\theta.$$

En remplaçant dans (3.5), les v_m seront solutions de l'équation différentielle

$$v_m'' + r^{-1}v_m' - r^{-2}v_m = 0,\ 0 < r < R,$$

dont les solutions respectives sont données par

$$v_m = \alpha_m r^{\lambda_m} + \beta_m r^{-\lambda_m},\ \forall m \geq 1.$$

Comme $v \in L^2(D_R)$, alors on peut déduire immédiatement que $\beta_m = 0$ dès que $m \geq 2$. Ce qui entraîne l'écriture suivante de v

$$v(r,\theta) = \beta_1 r^{-\frac{\pi}{\omega}}\sin(\frac{\pi\theta}{\omega}) + v_1(r,\theta),$$

où $v_1 \in H^1(\Omega \cap D(M_S, R'))$, $\forall R' < R$ ($D(M_S,R')$ est le disque de centre M_S et de rayon R'). Afin de revenir à tout le domaine Ω, on introduit la fonction de troncature η définie dans (3.1) ainsi que la fonction

$$w(r,\theta) = \beta_1\eta(r)r^{-\frac{\pi}{\omega}}\sin(\frac{\pi\theta}{\omega}) + \eta(r)v_1(r,\theta),$$

qui est définie sur Ω. Remarquons que cette fonction n'est pas harmonique, mais elle coïncide avec un élément de $\mathcal{N}$ à une fonction de classe H^1 près. Pour le montrer, on réécrit w comme suit

$$w = \beta_1\sigma_1 + \sigma_2, \tag{3.6}$$

puis, on considère la solution variationnelle $\sigma_3 \in H_0^1(\Omega)$ du problème

$$\begin{cases} -\Delta u &= \Delta\sigma_1 \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad\quad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

En l'introduisant dans l'expression (3.6), cela nous permettra d'avoir l'écriture suivante

$$w = \beta_1 w_1 + w_2,$$

avec $w_1 = \sigma_1 + \sigma_3 \in \mathcal{N}$ et $w_2 = \sigma_2 - \beta_1 \sigma_3 \in H_0^1(\Omega)$.
Par ailleurs, il ne faut pas oublier que, dans $D(M_S, R')$, v et w coïncident et que la fonction

$$w_3 = v - \beta_1 w_1 \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{N},$$

car $v \in \mathcal{N}$. De plus, w_3 est nulle sur Γ et est alors solution du problème variationnel

$$\begin{cases} -\Delta u &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Comme ce problème admet comme unique solution variationnelle $u = 0$, alors w_3 est identiquement nulle dans Ω.
Par conséquent, on a montré que $\mathcal{N}$ est engendré par un seul élément qui est $\{w_1\}$. Par ailleurs, $S \in H_0^1(\Omega)$ est la solution variationnelle du problème (où S est la fonction définie dans (3.1))

$$\begin{cases} -\Delta u &= F \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

avec un second membre F qui appartient à $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et qui n'est pas orthogonal à $\mathcal{N}$ (car $S \notin H^2(\Omega)$), donc a une composante non nulle sur $\mathcal{N}$.
Finalement, on aboutit au résultat voulu, à savoir, $L^2(\Omega)$ est bien la somme directe entre $\Delta(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ et de $Vect\{\Delta S\}$. Puis, de l'injectivité de l'opérateur de Laplace de $H_0^1(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$, on en déduit la décomposition (3.3).

Remarque 3.3 *Le même travail peut être repris pour montrer que, dans le cas d'un domaine Ω polygonal quelconque, l'orthogonal $\mathcal{N}$ de $\Delta(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ est de cardinal égal au nombre de coins d'angle intérieur $\omega_i > \pi$. Par ailleurs, on montre aussi que la solution du problème (3.2) se décompose comme suit*

$$u = u_R + \sum_{\omega_j > \pi} c_j S_j,$$

où c_j sont des constantes réelles et ω_j est l'angle intérieur à Ω de chaque coin, $1 \leq j \leq m$, tel que $\omega_j > \pi$. On désigne par S_j les fonctions singulières définies comme suit

$$S_j(r_j, \theta_j) = \eta_j(r_j) r_j^{\frac{\pi}{\omega_j}} \sin(\frac{\pi \theta_j}{\omega_j}),$$

où η_j sont des fonctions de troncature de même type que (3.1), à supports disjoints deux à deux et telles que $\eta_j \equiv 1$ au voisinage du sommet M_j de chaque coin et $0 \leq \eta_j \leq 1$ dans $\overline{\Omega}$. Notons ici que (r_j, θ_j) désigne les coordonnées polaires locales par rapport au sommet M_j.

1.2 Cas d'un domaine polyhédral

Nous examinons maintenant le cas qui comprend un domaine polyhédral $\Omega = (0,H)\times\Omega'$, où $H > 0$ et Ω' est un ouvert plan de même géométrie que celle considérée dans le cas 1. Pour $s \in (0,H)$ et $x' \in \Omega'$, on note $\Delta_{s,x'}$ et $\nabla_{s,x'}$ respectivement le Laplacien et le gradient par rapport aux variables s et x'. Pour une donnée $f \in L^2(\Omega)$, on considère le problème elliptique suivant avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} -(\partial_{\mathrm{S}}^2 + \Delta_{x'})u = f & \text{dans } \Omega = (0,H)\times\Omega', \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.7}$$

Rappelons que si la frontière Γ de Ω' était assez régulière, alors le domaine $D(A)$ de l'opérateur $A = -\Delta_{s,x'} = -\partial_{\mathrm{S}}^2 - \Delta_{x'}$ (avec les conditions aux limites homogènes de Dirichlet) ne serait autre que $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Concernant notre cas, en argumentant comme [21] et [23], on montre que

Proposition 3.4 *Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, le problème (3.7) admet une unique solution variationnelle u dans $D(A)$ satisfaisant*

- ***(1)*** *La fonction $u \in H^l(\Omega)$ pour tout $l < 1 + \dfrac{\pi}{\omega}$;*
- ***(2)*** *La fonction u peut être écrite comme une somme d'une partie régulière $u_R \in H^2(\Omega)$ et une partie singulière*

$$u_{\mathrm{S}}(s,r,\theta) = C(s,r)\rho(r)r^{\pi/\omega}\sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right),$$

((r,θ) sont les coordonnées polaires locales par rapport à M_{S}) où $C \in H^{1-\frac{\pi}{\omega}}((0,H)\times(0,1))$ tel que

$$C(s,r) = (K *_{\mathrm{S}} \phi)(s,r).$$

avec $K(s,r) = \dfrac{r}{\pi(r^2+s^2)}$ et $\phi \in H^{1-\frac{\pi}{\omega}}(\mathbb{R})$ ($*_{\mathrm{S}}$ désigne la convolution par rapport à s). On suppose que $\rho \in \mathcal{D}(\overline{\Omega'})$ est une fonction de troncature du même type que (3.1) et telle que $\rho(r) = 1$ au voisinage $V(M_{\mathrm{S}})$ du point M_{S} et $0 \leq \rho \leq 1$ dans $\overline{\Omega}$.

Remarque 3.5 *Avant d'entamer la preuve de cette proposition, on rappelle qu'il existe une autre façon de décomposer la solution du problème (3.7) en partie régulière et partie singulière autre que celle donnée dans la proposition 3.4. Compte tenu de [24] (voir, Theorem 8.2.1.2, section 8.2), on a la décomposition suivante :*

$$u(s,x') = u_R(s,x') + h(s)u_{\mathrm{S}}(x'),$$

où $u_R \in L^2(0,H;H^2(\Omega'))$ et $h \in H^{1-\frac{\pi}{\omega}}(0,H)$. En dépit de la mauvaise régularité de la function h, cette dernière décomposition correspond mieux avec la classe de fonctions considérée dans notre approche, et que l'on verra dans les prochains paragraphes.

Preuve de la proposition 3.4 Pour la preuve de **(1)**, on s'inspirera de quelques résultats établis dans [22] et [23] dans le cas bidimensionnel. La transformée de Fourier partielle par rapport à s est un moyen pour y arriver. Seulement, on doit prolonger notre domaine Ω à un cylindre infini $\mathbb{R} \times \Omega'$ pour pouvoir l'appliquer.
Pour cela, on introduit premièrement les fonctions $\widetilde{u}$ and $\widetilde{f}$ définies sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega'$ par

$$\widetilde{u}(s,x') = \begin{cases} u(s,x') & \text{si } 0 < s < H, \\ 0 & \text{si } s \geq H, \end{cases} \quad \text{et } \widetilde{f}(s,x') = \begin{cases} f(s,x') & \text{si } 0 < s < H, \\ 0 & \text{si } s \geq H. \end{cases}$$

Deuxièmement, on considère la fonction $\delta \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \delta \leq 1$ and

$$\delta(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s < \frac{H}{4}, \\ 0 & \text{si } s > \frac{3H}{4}. \end{cases}$$

En raisonnant comme dans [2] (Théorème VIII.5, page 126), on écrit

$$u = \delta u + (1-\delta)u \text{ et } f = \delta f + (1-\delta)f,$$

puis on prolonge δu et δf à $\mathbb{R}^+ \times \Omega'$ par $u_1 = \delta\widetilde{u}$ et $f_1 = \delta\widetilde{f}$ respectivement. Remarquons que $u_1 \in H_0^1(\mathbb{R}^+ \times \Omega')$ et $f_1 \in L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega')$. Faisons maintenant un prolongement par réflexion antisymétrique de u_1 et f_1 à travers $\{0\} \times \Omega'$ en posant

$$\begin{cases} \widetilde{u_1}(s,x') = u_1(s,x') & \text{si } s > 0, \\ \widetilde{u_1}(s,x') = -u_1(-s,x') & \text{si } s < 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \widetilde{f_1}(s,x') = f_1(s,x') & \text{si } s > 0, \\ \widetilde{f_1}(s,x') = f_1(-s,x') & \text{si } s < 0. \end{cases}$$

Pour le prolongement de $(1-\delta)u$ et $(1-\delta)f$ à $\mathbb{R} \times \Omega'$, on procède de la même manière que précédemment. Tout d'abord, on prolonge $(1-\delta)u$ et $(1-\delta)f$ sur $]-\infty, H[\times\Omega'$ par

$$(1-\delta)\widehat{u}(s,x') = \begin{cases} (1-\delta)u(s,x') & \text{si } 0 < s < H, \\ 0 & \text{si } s \leq 0, \end{cases}$$

et

$$(1-\delta)\widehat{f}(s,x') = \begin{cases} (1-\delta)f(s,x') & \text{si } 0 < s < H, \\ 0 & \text{si } s \leq 0 \end{cases}$$

respectivement. Puis, on prolonge sur $\mathbb{R}\times\Omega'$ par réflexion antisymétrique à travers $\{H\}\times\Omega'$. Ce qui donnera les deux fonctions $\widetilde{u_2}$ et $\widetilde{f_2}$ définies par

$$\begin{cases} \widetilde{u_2}(s,x') = (1-\delta)\widehat{u}(s,x') & \text{si } s < H, \\ \widetilde{u_2}(s,x') = -(1-\delta)\widehat{u}(2H-s,x') & \text{si } s > H, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \widetilde{f_2}(s,x') = (1-\delta)\widehat{f}(s,x') & \text{si } s < H, \\ \widetilde{f_2}(s,x') = -(1-\delta)\widehat{f}(2H-s,x') & \text{si } s > H. \end{cases}$$

A partir des constructions, on déduit deux fonctions

$$w = \widetilde{u_1} + \widetilde{u_2} \text{ and } g = \widetilde{f_1} + \widetilde{f_2},$$

qui appartiennent à $H_0^1(\mathbb{R}\times\Omega')$ et à $L^2(\mathbb{R}\times\Omega')$ respectivement. De plus, w est solution au sens des distributions du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta_{s,x'}w &= g \quad \text{dans } \mathbb{R}\times\Omega', \\ w &= 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}\times\partial\Omega'. \end{cases} \tag{3.8}$$

En effet, si on prend $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}\times\Omega')$, alors l'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} <\Delta_{s,x'}w,\varphi>_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= -\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega'} \nabla_{s,x'}w.\nabla_{s,x'}\varphi dx'ds \\ &= -\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\Omega'} \nabla_{s,x'}(\delta\widetilde{u})(s).\nabla_{s,x'}\varphi dx'ds \\ &+ \int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{\Omega'} (\partial_{\mathrm{S}}((-\delta\widetilde{u})(-s))\partial_{\mathrm{S}}\varphi - \nabla_{x'}(-\delta\widetilde{u})(-s).\nabla_{x'}\varphi)dx'ds \\ &- \int\limits_{-\infty}^{H}\int\limits_{\Omega'} \nabla_{s,x'}((1-\delta)\widehat{u})(s).\nabla_{s,x'}\varphi dx'ds \\ &+ \int\limits_{H}^{+\infty}\int\limits_{\Omega'} (\partial_{\mathrm{S}}((-(1-\delta)\widehat{u})(2H-s))\partial_{\mathrm{S}}\varphi \\ &-\nabla_{x'}(-(1-\delta)\widehat{u})(2H-s).\nabla_{x'}\varphi)\,dx'ds. \end{aligned}$$

Après un simple calcul, on obtient

$$\begin{aligned} <\Delta_{s,x'}w,\varphi>_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= -\int\limits_0^{H}\int\limits_{\Omega'} \nabla_{s,x'}u(s,x').\nabla_{s,x'}\varphi dx'ds \\ &+ \int\limits_{-H}^{0}\int\limits_{\Omega'} (\partial_{\mathrm{S}}(-u)(-s,x')\partial_{\mathrm{S}}\varphi - \nabla_{x'}(-u)(-s,x').\nabla_{x'}\varphi)dx'ds. \end{aligned}$$

On intègre encore une fois par parties, on trouve

$$\begin{aligned} <\Delta_{s,x'}w,\varphi>_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= \int_0^H\int\limits_{\Omega'} \Delta_{s,x'}u(s,x')\varphi dx'ds + \int\limits_{-H}^{0}\int\limits_{\Omega'} \Delta_{s,x'}(-u)(-s,x')\varphi dx'ds \\ &= \int\limits_0^{H}\int\limits_{\Omega'} f(s,x')\varphi dx'ds + \int\limits_{-H}^{0}\int\limits_{\Omega'} f(-s,x')\varphi dx'ds. \end{aligned}$$

Finalement, la réintroduction de la fonction δ nous fera parvenir à la propriété voulue, à savoir

$$\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega'} \Delta w\varphi dsdx' = \int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega'} g\varphi dsdx'.$$

L'étape suivante consiste à appliquer la transformée de Fourier partielle par rapport à s au problème (3.8). Il vient que

$$\begin{cases} \Delta_{x'}\widehat{w} - \xi^2\widehat{w} &= \widehat{g} \quad \text{dans } \Omega', \\ \widehat{w} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega', \end{cases} \tag{3.9}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. D'après [23], on sait que la solution du problème bidimensionnel (3.9) appartient à

$$H^l(\Omega') \text{ pour tout } l < 1 + \frac{\pi}{\omega}.$$

Grâce aux propriétés suivantes de la résolvante de l'opérateur Laplace-Dirichlet

$$\begin{array}{l} \|(-\Delta_{x'} + \xi^2 I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega'),H^l(\Omega'))} = O(1); \\ \|(-\Delta_{x'} + \xi^2 I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega'))} = O(\frac{1}{\xi^2}) \end{array}$$

on en déduit que

$$\widehat{w} \in L^2(\mathbb{R}; H^l(\Omega')) \cap H^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega')),$$

ainsi que $w \in H^l(\mathbb{R} \times \Omega')$ (voir [20] concernant les propriétés des espaces de Sobolev dont il est question). Ce qui nous permet de dire que la solution de (3.7) appartient à $H^l(\Omega)$ pour tout $l < 1 + \dfrac{\pi}{\omega}$. D'où la preuve de **(1)**.

Concernant la justification de **(2)**, comme première étape, on procède de la même manière que **(1)** ; à savoir l'étape qui consistait à passer d'un cylindre fini à un cylindre infini puis, par la transformée de Fourier partielle, on aboutit au problème bidimensionnel du même type que (3.9). Ce qui nous amène à considérer le problème elliptique suivant, et la suite de notre raisonnement tient compte des démarches suivies par [21]

$$\begin{cases} -\Delta_{x'}v + \lambda v &= G \quad \text{dans } \Omega', \\ v &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega', \end{cases} \tag{3.10}$$

où $\lambda = \xi^2 \geq 0$, $v = \widehat{w} \in H_0^1(\Omega')$ et $G = \widehat{g} \in L^2(\Omega')$. Par ailleurs, on sait que la solution de $-\Delta v = G - \lambda v$, où $v \in H_0^1(\Omega')$, se décompose comme suit

$$v = v_R + c(\lambda)\rho S, \tag{3.11}$$

où $S(r,\theta) = r^{\pi/\omega}\sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right)$, $v_R \in H^2(\Omega')$ et $c(\lambda) \in \mathbb{R}$. La fonction v_R est la partie régulière de la solution .

Partant du fait que la transformée de Fourier partielle par rapport à la variable s de la fonction K introduite dans cette proposition, est égale à :

$$\widehat{K}(\xi, r) = e^{(-r|\xi|)}, \text{ pour } \xi \in \mathbb{R},$$

et que $\rho S - e^{-r\sqrt{\lambda}}\rho S \in H^2(\Omega)$, alors en introduisant $e^{-r\sqrt{\lambda}}\rho S$ dans (3.11) on peut réécrire v de la même forme que (3.11) où la partie régulière est toujours notée v_R. Donc, on aura

$$v = v_R + c(\lambda)e^{-r\sqrt{\lambda}}\rho S. \tag{3.12}$$

La suite de la preuve est basée sur les deux points suivants
(**i**) Grâce au Théorème 2.5.2 prouvé dans ([21], page 62), il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v_R\|_{H^2(\Omega')} + \sqrt{\lambda}\|v_R\|_{H^1(\Omega')} + \lambda\|v_R\|_{L^2(\Omega')} \leq C\|G\|_{L^2(\Omega')}$$

$$(1+\lambda)^{(1-\frac{\pi}{\omega})}|c(\lambda)| \leq C\|G\|_{L^2(\Omega')};$$

(**ii**) Choisir une fonction ϕ de telle sorte que $\widehat{\phi}(\xi) = c(\xi^2)$.
Finalement, l'application à (3.12) de l'inverse de la transformée de Fourier partielle par rapport toujours à la variable s nous fera parvenir à **(2)**.

Chapitre 4

Inégalités de Carleman pour les équations paraboliques dans le cas d'un domaine régulier

1 Généralités

Les estimations de Carleman ont été introduites pour la première fois par T.Carleman [10] afin de prouver un résultat d'unicité pour certaines équations aux dérivées partielles (EDP) de type elliptique à coefficients assez réguliers dans des domaines bidimensionnels. Par la suite, le champ d'application de ces estimations s'est élargi à d'autres domaines et ont donné des résultats remarquables. On peut citer parmi d'autres, l'étude des problèmes inverses qui consiste à déterminer soit les coefficients ou le terme source (ou bien le second membre) ou peut être les deux d'une équation parabolique. On peut citer aussi les résultats concernant la théorie du contrôle pour les EDP, grâce toujours à ces estimations, on peut établir une inégalité d'observabilité qui nous assurera la contrôlabilité à zéro des équations paraboliques considérées. Comme remarque, ce qui a été dit sur l'étude des équations paraboliques par les estimations de Carleman est aussi valable pour les équations hyperboliques. En pratique, il existe deux versions pour les estimations de Carleman ; une version locale dont on donnera quelques aperçus et une version globale à la façon de Fursikov-Imanuvilov [14]. Cette dernière version dominera la majorité de notre étude.

1.1 Version locale

Pour bien comprendre les estimations de Carleman locales, prenons un type simple d'EDP, qui est l'équation de la chaleur suivante :

$$\partial_t u - \Delta u = f \text{ pour } x \in \Omega,\, t > 0, \tag{4.1}$$

où f est le terme source contenant le contrôle introduit dans le système, u est l'inconnue de cette équation et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné à frontière Γ assez régulière. Remarquons au passage qu'en pratique, f est généralement supposé à support dans $\omega \times (0, T)$, où $\omega \subset\subset \Omega$, puisqu'on veut contrôler le système en agissant que sur une zone assez petite de Ω.

Pour $D \subset \Omega\times(0,T)$ et pour un paramètre s assez large, établir une estimation de Carleman consiste à trouver une fonction poids adéquate φ telle que : il existe une constante $C > 0$ et $s_0 > 0$ tels que

$$\int_D s(|\nabla u(x,t)|^2 + |u(x,t)|^2)e^{2s\varphi(x,t)}dxdt \le C\int_D |f(x,t)|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dxdt, \qquad (4.2)$$

pour tout $s > s_0$ et tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(D)$.

Remarque 4.1 *Dans la pratique, les estimations de Carleman du type (4.2) se déduisent généralement par une suite d'intégrations par parties. Le paramètre s joue un rôle important dans le regroupement des termes obtenus après ces intégrations. Pour ce qui de la fonction poids φ, son introduction dans les calculs permet de régler les conditions géométriques imposées dans le problème, notamment quand il est question de traiter les intégrales de bord.*

Donnons, à présent, les étapes à franchir pour arriver à l'inégalité (4.2). Supposons qu'on puisse trouver une fonction poids φ vérifiant certaines propriétés que l'on précisera par la suite. Dans la première étape, on introduit une nouvelle fonction :

$$w(x,t) = e^{s\varphi(x,t)}u(x,t)$$

et l'opérateur

$$Pw(x,t) = e^{s\varphi(x,t)}(\partial_t - \Delta)e^{-s\varphi(x,t)}w(x,t).$$

Puis, on introduit ces nouvelles données dans l'équation (4.1), on aura après avoir intégré sur D

$$\int_D |f(x,t)|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dxdt = \int_D |Pw(x,t)|^2 dxdt = \|Pw\|^2,$$

où $Pw = \partial_t w - \Delta w + 2s\nabla\varphi.\nabla w + (-s\partial_t\varphi - s^2|\nabla\varphi|^2 + s\Delta\varphi)w$. De l'expression de P, on définit une partie symétrique P^+ et une partie antisymétrique P^- de P par

$$\begin{aligned} P^+ &= \tfrac{1}{2}(P + P^\star) = -\Delta w - (s^2|\nabla\varphi|^2 + s\partial_t\varphi)w, \\ P^- &= \tfrac{1}{2}(P - P^\star) = \partial_t w + 2s\nabla\varphi.\nabla w + s(\Delta\varphi)w, \end{aligned}$$

où $P^\star$ est l'opérateur adjoint de P. Ce qui donne

$$\begin{aligned} \iint_D |Pw(x,t)|^2 dxdt &= \|P^+w\|^2_{L^2(D)} + \|P^-w\|^2_{L^2(D)} + 2 < P^+w, P^-w >_{L^2(D)} \\ &\ge 2 < P^+w, P^-w >_{L^2(D)} . \end{aligned}$$

Dans l'étape suivante, des estimations sont faites sur le membre droit de l'inégalité précédente. En appliquant la formule de Green pour réaliser des intégrations par parties, des intégrales volumiques contenant $|\nabla u(x,t)|^2$ ou $|u(x,t)|^2$ apparaissent dans les calculs avec des puissances différentes du paramétre s. Afin de les regrouper et de ne garder que ceux qui nous intéressent, nous faisons intervenir la fonction poids φ tout en choisissant un paramétre

s assez grand. Ce qui nous permettra d'absorber des termes qui se ressemblent et de ne garder que ceux qui nous conviennent. En fait cette fonction poids φ est choisie de telle sorte que

$$\text{la matrice } (\partial_i \partial_j \varphi)_{1 \leq i,j \leq n} \text{ soit définie positive.}$$

et

$$\text{qu'il existe une constante } d_1 > 0 \text{ telle que } \nabla(|\nabla\varphi|^2).\nabla\varphi \geq d_1 \text{ sur } \overline{D}.$$

Dans la pratique, il existe plusieurs choix d'une telle fonction qui dépend du type de l'équation aux dérivées partielles. On peut prendre à titre d'exemple

$$\varphi(x,t) = |x - x_0|^2 - d(t - t_0)^2,$$

où $x_0 \in \Omega$ est choisi tel que $|x - x_0| \neq 0$ pour tout $(x,t) \in D$, et $d > 0$ et $t_0 \in (0,T)$ sont fixés de façon arbitraire.
Remarquons au passage que l'estimation (4.2) ne comporte pas de termes surfaciques, cela est dû au fait que $u \in \mathcal{C}_0^\infty(D)$.

1.2 Version globale

Nous avons introduit dans la section précédente les estimations de Carleman locales pour un problème parabolique très simplifié. Nous allons passer dans cette section à un cadre plus général d'équations paraboliques à coefficients non constants. L'objectif de cette partie consiste à rappeller ce qui se fait dans les estimations de Carleman globales pour de telles équations en utilisant la méthode de Fursikov-Imanuvilov [14].
Nous considérons donc un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^n$ à frontière Γ assez régulière et un sous-domaine $\omega \subset\subset \Omega$. On s'intéresse au problème aux limites suivant :

$$Lu(x,t) = \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_i\partial_j u - \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\partial_i u - c(x,t)u = f \text{ dans } Q_T = \Omega \times (0,T), \tag{4.3}$$

avec les conditions au bord suivantes

$$l_1(x)\frac{\partial u}{\partial \eta_A} + l_2(x)u = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0,T), \tag{4.4}$$

où la matrice A de coefficients $a_{ij}, 1 \leq i,j \leq n$, vérifie les propriétés suivantes :

1. $a_{ij} \in C^1(\overline{Q_T})$, $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i,j \leq n$;
2. Il existe une constante $\delta_1 > 0$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\zeta_i\zeta_j \geq \delta_1|\zeta|^2, \text{ pour } \zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \text{ et } (x,t) \in \overline{Q}_T.$$

(condition d'ellipticité uniforme)

Notons ici que les fonctions l_1 et l_2 sont choisies dans $C^2(\Gamma)$ et que soit $l_1 > 0$ et $l_1.l_2 \geq 0$ ou $l_1 = 0$ et $l_2 = 1$ sur Γ. Dans les conditions au bord (4.4), $\dfrac{\partial u}{\partial \eta_A} = (A\nabla u).\eta$ représente ce qu'on appelle la dérivée conormale par rapport à A. On supposera aussi dans ce qui va suivre que

$$b_i, c \in L^\infty(Q_T),\ 1 \leq i \leq n.$$

Un outil clé et important dans les estimations de Carleman globale se trouve dans l'introduction d'une fonction poids particulière vérifiant les propriétés citées dans le lemme suivant

Lemme 4.2 *Soit ω_0 un sous-domaine ouvert quelconque non vide de Ω tel que $\overline{\omega}_0 \subset \omega$. Alors, il existe une fonction $\beta \in C^2(\Omega)$ telle que*

$$\beta(x) > 0\ \forall x \in \Omega,\ \beta|_\Gamma = 0,\ |\nabla\beta(x)| > 0\ \forall x \in \overline{\Omega\backslash\omega_0}. \tag{4.5}$$

Pour la preuve de l'existence d'une telle fonction, on peut se référer à [14] (Lemme 1.1, p.4). Nous signalons que généralement la construction d'une telle fonction poids se fait dans des domaines à frontière au moins de classe C^2. Ce qui n'est pas le cas pour les domaines qu'on a considéré. D'où, la motivation de considérer la section où il faut mettre en évidence cette fonction poids dans des domaines singuliers à frontière Lipschitzienne. Considérons, à présent, les deux fonctions suivantes :

$$\xi(x,t) = \frac{e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)} \quad \text{et} \quad \alpha(x,t) = \frac{e^{\lambda\beta(x)} - e^{2\lambda\|\beta\|_{C(\overline{\Omega})}}}{t(T-t)}. \tag{4.6}$$

Le théorème ci-dessous établit une estimation de Carleman globale.

Théorème 4.3 *Il existe trois constantes $\lambda_1 > 0$, $s_1 > 0$ et $C = C(\Omega, \omega) > 0$ telles que, pour tout $\lambda \geq \lambda_1$ et $s > s_1$, on ait*

$$\begin{aligned} s^{-1}\iint_{Q_T} \xi^{-1}e^{2s\alpha}(|\partial_t u|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |\partial_j\partial_i u|^2)dxdt + s\lambda^2 \iint_{Q_T} \xi e^{2s\alpha}|\nabla u|^2 dxdt \\ +s^3\lambda^4 \iint_{Q_T} \xi^3 e^{2s\alpha}|u|^2 dxdt \leq C(\iint_{Q_T} |Lu|^2 e^{2s\alpha}dxdt + s^3\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^3 e^{2s\alpha}|u|^2 dxdt), \end{aligned} \tag{4.7}$$

pour tout $u \in H^{1,2}(Q_T)$ [1] vérifiant (4.4).

Pour éviter de rentrer dans des détails de calculs assez longs et techniques, nous nous contentons de donner les points essentiels qui marquent la preuve du théorème 4.3. Mais avant cela, faisons quelques commentaires sur l'estimation (4.7)

1. Notons que l'inégalité de Carleman (4.7) ne contient pas d'intégrales en $t = 0$ ou en $t = T$ bien que u n'est pas à support compact dans Q_T. En fait, tous ces termes sont absorbés par $e^{2s\alpha}$ puisque

$$\lim_{t\to 0} \xi^k(x,t)e^{2s\alpha(x,t)} = \lim_{t\to T} \xi^k(x,t)e^{2s\alpha(x,t)} = 0,$$

1. $H^{1,2}(Q_T)$ est l'espace des fonctions $u \in L^2(Q_T)$ telles que $\partial_t u, \partial_i u, \partial_j\partial_i u \in L^2(Q_T)$

pour tout $k \geq 0$. Les autres intégrales surfaciques sur la frontière latérale $\Gamma \times (0, T)$, on les retrouve généralement dans le membre gauche des inégalités obtenues après calcul. Grâce aux propriétés vérifiées par la fonction poids β et les coefficients a_{ij}, ces termes au bord sont soit nuls ou positifs, ce qui nous permettra de les éliminer ;

2. Dans les conditions au bord (4.4), on peut retrouver séparemment soit la condition de Dirichlet ($l_1 = 0$ et $l_2 = 1$) ou la condition de Neumann, et il suffit d'en avoir une pour établir une estimation de Carleman du type (4.7) ;
3. Afin de faciliter et de simplifier les calculs permettant d'établir l'estimation de Carleman (4.3), on écrit le problème (4.3) sous la forme

$$\begin{gathered} L_0 u = g \text{ dans } Q_T \text{ , où} \\ L_0 = \partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_i\partial_j \text{ et} \\ g = f + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\partial_i u + c(x,t)u \end{gathered}$$

étant donné que

$$\begin{aligned} \iint\limits_{Q_T} |L_0 u|^2 e^{2s\alpha} dxdt \leq \; & 2 \iint\limits_{Q_T} |Lu|^2 e^{2s\alpha} dxdt + 4 \iint\limits_{Q_T} (\sum_{i=1}^{n} \|b_i\|^2_{L^\infty(Q_T)} |\nabla u|^2 + \\ & \|c\|^2_{L^\infty(Q_T)} |u|^2) e^{2s\alpha} dxdt. \end{aligned}$$

En choisissant $s > 0$ assez grand, le deuxième terme du membre droit de l'inégalité précédente peut étre absorbé par des termes de la même forme du premier membre de (4.7) mais avec une puissance de s plus grande.

Preuve du Théorème 4.3
Rappelons d'abord qu'il est bien connu que l'établissement des estimations de Carleman se fait généralement par des intégrations par parties. Donc des intégrales surfaciques apparaîssent dans les calculs obtenus, et afin de les absorber dans les inégalités finales obtenues, nous introduisons les fonctions suivantes :

$$\widetilde{\xi}(x,t) = \frac{e^{-\lambda\beta(x)}}{t(T-t)} \quad \text{et} \quad \widetilde{\alpha}(x,t) = \frac{e^{-\lambda\beta(x)} - e^{2\lambda\|\beta\|_{C(\overline{\Omega})}}}{t(T-t)}. \tag{4.8}$$

Puis, nous faisons le changement de fonctions

$$w(x,t) = e^{s\alpha} u \quad \text{et} \quad \widetilde{w}(x,t) = e^{s\widetilde{\alpha}} u. \tag{4.9}$$

En tenant compte de (4.6), ces nouvelles fonctions vérifient :

$$w(T,.) = \widetilde{w}(T,.) = w(0,.) = \widetilde{w}(0,.).$$

En remplaçant ces nouvelles fonctions dans l'équations $L_0 u = g$, nous trouvons

$$Pw = e^{s\alpha} L_0 e^{-s\alpha} w = e^{s\alpha} g \text{ dans } Q_T. \tag{4.10}$$

$$\widetilde{P}\widetilde{w} = e^{s\widetilde{\alpha}} L_0 e^{-s\widetilde{\alpha}} \widetilde{w} = e^{s\widetilde{\alpha}} g \text{ dans } Q_T, \tag{4.11}$$

où P et $\widetilde{P}$ sont des opérateurs définis par

$$\begin{aligned} Pw = \ & \frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + 2s\lambda\xi \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + s\lambda^2 \xi \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \frac{\partial \beta}{\partial x_j} w \\ & - s^2\lambda^2\xi^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \frac{\partial \beta}{\partial x_j} w + s\lambda\xi w \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \partial x_j} - s\frac{\partial \alpha}{\partial t} w \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widetilde{P}\widetilde{w} = \ & \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 \widetilde{w}}{\partial x_i \partial x_j} - 2s\lambda\widetilde{\xi} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x_j} + s\lambda^2 \widetilde{\xi} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \frac{\partial \beta}{\partial x_j} \widetilde{w} \\ & - s^2\lambda^2\widetilde{\xi}^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \frac{\partial \beta}{\partial x_j} \widetilde{w} - s\lambda\widetilde{\xi} w \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \partial x_j} - s\frac{\partial \widetilde{\alpha}}{\partial t} \widetilde{w}. \end{aligned}$$

Pour alléger les écritures longues, nous adoptons par la suite la notation suivante

$$a(x,t,\zeta,\zeta') = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\zeta_i\zeta'_j \quad \text{pour } \zeta,\zeta' \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad (x,t) \in Q_T.$$

Dans l'étape suivante, tel que c'est connu, on décompose l'opérateur P en deux parties P_1 et P_2, où P_1 contient des dérivées de w d'ordre deux et zéro par rapport à x et P_2 des dérivées de w d'ordre un par rapport à x et à t. Cependant et pour des raisons techniques, on placera le terme $2s\lambda^2\xi a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)w$ dans la partie P_2. On aura donc

$$\begin{aligned} P_1 w = \ & -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} - s^2\lambda^2\xi^2 a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)w - s\frac{\partial \alpha}{\partial t} w, \\ P_2 w = \ & \frac{\partial w}{\partial t} + 2s\lambda\xi \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + 2s\lambda^2\xi a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)w. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Ce qui permet de transformer (4.10) en

$$P_1 w + P_2 w = f_{s,\lambda}. \tag{4.13}$$

où $f_{s,\lambda} = e^{s\alpha}g - s\lambda\xi w \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \partial x_j} + s\lambda^2\xi a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)w$. En passant à la norme $L^2(Q_T)$ dans (4.13), on trouve :

$$\|f_{s,\lambda}\|^2_{L^2(Q_T)} = \|P_1 w\|^2_{L^2(Q_T)} + \|P_2 w\|^2_{L^2(Q_T)} + 2\int_{Q_T} P_1 w P_2 w \, dxdt. \tag{4.14}$$

En effectuant des intégrations par parties dans les intégrales qui découlent du terme $\int\limits_{Q_T} P_1wP_2wdxdt$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Q_T} P_1wP_2wdxdt \; &= \int\limits_{Q_T}(s^3\lambda^4\xi^3a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)^2w^2 + s\lambda^2\xi a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)a(x,t,\nabla w,\nabla w))dxdt \\
&+ \int\limits_{Q_T} P_2w\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}dxdt + 2\int\limits_{Q_T} s\lambda^2\xi a(x,t,\nabla\beta,\nabla w)^2dxdt \\
&+ \iint\limits_{\Gamma\times(0,T)}(2s^3\lambda^3\xi^3w^2|\nabla\beta|a(x,t,\eta,\nabla\beta)^2 + 2s\lambda\xi|\nabla\beta|l_3^2(x)w^2)d\sigma dt \\
&+ \iint\limits_{\Gamma\times(0,T)} 2s^2\lambda^2\xi^2l_3(x)|\nabla\beta|^2a(x,t,\eta,\eta)w^2d\sigma dt \\
&- \iint\limits_{\Gamma\times(0,T)} s\lambda\xi|\nabla\beta|e^{2s\alpha}(a(x,t,\nabla u,\nabla u) + s^2\lambda^2\xi^2a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)u^2)d\sigma dt \\
&- \iint\limits_{\Gamma\times(0,T)}(\frac{\partial w}{\partial t} + 2s\lambda^2\xi a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)w)(s\lambda\xi a(x,t,\eta,\nabla\beta) - l_3(x))wd\sigma dt \\
&- \iint\limits_{\Gamma\times(0,T)}(s^3\lambda^3\xi^3a(t,x,\nabla\beta,\nabla\beta) + s^2\lambda\alpha_t\xi)w^2a(x,t,\eta,\nabla\beta)d\sigma dt + X_1,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

où

$$\begin{aligned}
X_1 \; &= \int\limits_{Q_T}(2s\lambda^2w\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)) + \frac{s\alpha_{tt}}{2}w^2)dxdt \\
&+ \int\limits_{Q_T}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(s^2\lambda^2\xi^2a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta))w^2dxdt + \int\limits_{Q_T} 2s\lambda\xi\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial(a_{kl}\beta_{x_k})}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_l}dxdt \\
&- \int\limits_{Q_T} s\lambda\xi\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}\beta_{x_k}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}dxdt - \int\limits_{Q_T} a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)s\lambda\xi\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_l}(a_{kl}\beta_{x_k})dxdt \\
&- \iint\limits_{Q_T}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}dxdt + \iint\limits_{Q_T} s^3\lambda^3\xi^3w^3\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\beta_{x_j}a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta))dxdt \\
&- \iint\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{s^2\lambda^2\alpha_t\xi}{2}a_{ij}\frac{\partial\beta}{\partial x_i}\right)w^2dxdt.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

et

$$l_3(x,t) = \frac{l_2(x,t)}{l_1(x,t)}.$$

En choisissant $s > 1$ et $\lambda > 1$, alors il existera une constante $C_1 = C_1(\Omega,\omega) > 0$ indépendante de s et de λ telle que

$$|X_1| \leq C_1\iint\limits_{Q_T}((s^3\lambda^3\xi^3 + s^2\lambda^4\xi^3)w^2 + (s\lambda\xi+1)|\nabla w|^2)dxdt. \tag{4.17}$$

De façon similaire, on refait le même travail pour l'opérateur $\widetilde{P}$, à savoir la décomposition (4.13) puis le passage à la norme $L^2(Q)$ pour obtenir une expression semblable à (4.14) dans laquelle il faut remplacer α, ξ et w par $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\xi}$ et $\widetilde{w}$. Ce qui donne après avoir traité le terme $\displaystyle\int_{Q_T} \widetilde{P}_1\widetilde{w}\widetilde{P}_2\widetilde{w}dxdt$:

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} \widetilde{P}_1\widetilde{w}\widetilde{P}_2\widetilde{w}dxdt \; &= \int_{Q_T} (s^3\lambda^4\widetilde{\xi}^3 a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)^2\widetilde{w}^2 + s\lambda^2\widetilde{\xi}a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)a(x,t,\nabla\widetilde{w},\nabla\widetilde{w}))dxdt \\ &\quad + \int_{Q_T} P_2\widetilde{w}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x_i}dxdt + \int_{Q_T} s\lambda^2\widetilde{\xi}a(x,t,\nabla\beta,\nabla\widetilde{w})^2dxdt \\ &\quad - \iint_{\Gamma\times(0,T)} (2s^3\lambda^3\widetilde{\xi}^3\widetilde{w}^2|\nabla\beta|a(x,t,\eta,\nabla\beta)^2 + 2s\lambda\widetilde{\xi}|\nabla\beta|l_3^2(x)\widetilde{w}^2)d\sigma dt \\ &\quad + \iint_{\Gamma\times(0,T)} 2s^2\lambda^2\widetilde{\xi}^2 l_3(x)|\nabla\beta|^2 a(x,t,\eta,\eta)\widetilde{w}^2 d\sigma dt \\ &\quad - \iint_{\Gamma\times(0,T)} s\lambda\widetilde{\xi}|\nabla\beta|e^{2s\alpha}(a(x,t,\nabla u,\nabla u) + s^2\lambda^2\widetilde{\xi}^2 a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)u^2)d\sigma dt \\ &\quad + \iint_{\Gamma\times(0,T)} (\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial t} + 2s\lambda^2\widetilde{\xi}a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)\widetilde{w})(s\lambda\widetilde{\xi}a(x,t,\eta,\nabla\beta) - l_3(x))\widetilde{w}d\sigma dt \\ &\quad + \iint_{\Gamma\times(0,T)} (s^3\lambda^3\widetilde{\xi}^3 a(t,x,\nabla\beta,\nabla\beta) + s^2\lambda\widetilde{\alpha}_t\widetilde{\xi})w^2 a(x,t,\eta,\nabla\beta)d\sigma dt + X_2,\end{aligned} \tag{4.18}$$

où X_2 s'exprime de la même façon que X_1. De plus, X_2 satisfait l'estimation suivante

$$|X_2| \leq C_2\int_{Q_T}((s^3\lambda^3\widetilde{\xi}^3 + s^2\lambda^4\widetilde{\xi}^3)\widetilde{w}^2 + (s\lambda\widetilde{\xi}+1)|\nabla\widetilde{w}|^2)dxdt \;, \forall s \geq 1, \lambda \geq 1, \tag{4.19}$$

où $C_2 = C_2(\Omega,\omega) > 0$ est une constante indépendante de s et de λ.
En regroupant (4.14), (4.15) et (4.18), il découle des estimations (4.17) et (4.19) l'estimation

suivante

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{L}_1\widetilde{w}\|^2_{L^2(Q)} + \|L_1 w\|^2_{L^2(Q)} + \tfrac{1}{2}\|\widetilde{L}_2\widetilde{w}\|^2_{L^2(Q)} + \tfrac{1}{2}\|L_2 w\|^2_{L^2(Q_T)} \\
&+2\int_{Q_T}(s^3\lambda^4\xi^3 a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)^2 w^2 + s^3\lambda^4\widetilde{\xi}^3 a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)^2\widetilde{w}^2)dxdt \\
&+\int_{Q_T}(s\lambda^2\xi a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)a(x,t,\nabla w,\nabla w) + s\lambda^2\widetilde{\xi}a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)a(x,t,\nabla\widetilde{w},\nabla\widetilde{w}))dxdt \\
&-4\int_{Q_T}((\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i})^2 + (\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x_i})^2)dxdt + X_1 + X_2 \\
&+\iint_{\Gamma\times(0,T)}(8s^2\lambda^2\xi^2 l_3(x)|\nabla\beta|^2 a(x,t,\eta,\eta) + 8s\lambda^2\xi l_3(x)a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta))w^2 d\sigma dt \\
&\leq \|f\mathrm{s}\|^2_{L^2(Q_T)} + \|\widetilde{f}\mathrm{s}\|^2_{L^2(Q)}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Remarque 4.4 *Remarquons que, dans le cas de conditions de Dirichlet homogènes au bord ($l_1 = 0$ et $l_2 = 1$), les termes surfaciques dans (4.20) contenant $l_3(x)$ sont nuls.*

Introduisons, à présent, la propriété suivante de la fonction poids β donnée par le lemme 4.2.

$$|\nabla\beta(x)| > \beta_0 > 0 \ \forall x \in \overline{\Omega\backslash\omega_0}.$$

Il vient de (4.17), (4.19), (4.20) et du fait que $l_3(x) \geq 0$ qu'il existe un $s_0 \geq 1$ et un $\lambda_0 \geq 1$ tels que

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{L}_1\widetilde{w}\|^2_{L^2(Q)} + \|L_1 w\|^2_{L^2(Q_T)} + \frac{1}{2}\|\widetilde{L}_2\widetilde{w}\|^2_{L^2(Q_T)} + \frac{1}{2}\|L_2 w\|^2_{L^2(Q_T)} \\
&+\int_{Q_T}\left(s^3\lambda^4\xi^3 w^2 + s^3\lambda^4\widetilde{\xi}^3\widetilde{w}^2\right)dxdt + \int_{Q_T}\left(s\lambda^2\xi|\nabla w|^2 + s\lambda^2\widetilde{\xi}|\nabla\widetilde{w}|^2\right)dxdt \\
&\leq C(\int_{\omega_0\times(0,T)}(s^3\lambda^4\xi^3 w^2 + s^3\lambda^4\widetilde{\xi}^3\widetilde{w}^2 + s\lambda^2\xi|\nabla w|^2 + s\lambda^2\widetilde{\xi}|\nabla\widetilde{w}|^2)dxdt \\
&\qquad + \|ge^{s\alpha}\|^2_{L^2(Q_T)} + \|ge^{s\widetilde{\alpha}}\|^2_{L^2(Q_T)}),
\end{aligned} \tag{4.21}$$

pour tout $s \geq s_0$ et $\lambda \geq \lambda_0$.

A titre indicatif, l'apparition dans le membre de gauche de (4.21) d'intégrales sur $\omega_0\times(0,T)$ résulte du fait que :

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T} s^3\lambda^4\xi^3 a(x,t,\nabla\beta,\nabla\beta)^2 w^2 dxdt &\geq \delta_1^2\int_{Q_T} s^3\lambda^4\xi^3|\nabla\beta|^4 w^2 dxdt \\
&\geq \delta_1^2\int_{\Omega\backslash\omega_0\times(0,T)} s^3\lambda^4\xi^3|\nabla\beta|^4 w^2 dxdt \\
&\geq \delta_1^2\beta_0^4(\int_{\Omega\times(0,T)} s^3\lambda^4\xi^3 w^2 dxdt - \int_{\omega_0\times(0,T)} s^3\lambda^4\xi^3 w^2 dxdt).
\end{aligned}$$

Remarquons que les termes de bord dans (4.20) sont tous positifs, on les élimine donc dans (4.22). En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on déduit des expressions (4.12) tout en remplaçant w et $\widetilde{w}$ par $e^{s\alpha}z$ et $e^{s\widetilde{\alpha}}z$ respectivement :

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T}\Big(\frac{1}{s\xi}(\frac{\partial u}{\partial t})^2+\frac{1}{s\xi}\sum_{i,j=1}^{n}(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j})^2+s\lambda^2\xi|\nabla u|^2+s^3\lambda^4\xi^3u^2\Big)e^{2s\alpha}dxdt\\
&+\int_{Q_T}\Big(\frac{1}{s\widetilde{\xi}}(\frac{\partial u}{\partial t})^2+\frac{1}{s\widetilde{\xi}}\sum_{i,j=1}^{n}(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j})^2+s\lambda^2\widetilde{\xi}|\nabla u|^2+s^3\lambda^4\widetilde{\xi}^3u^2\Big)e^{2s\widetilde{\alpha}}dxdt\\
&\leq C\Big(\int_{\omega_0\times(0,T)}(s^3\lambda^4\xi^3u^2e^{2s\alpha}+s^3\lambda^4\widetilde{\xi}^3u^2e^{2s\widetilde{\alpha}}+s\lambda^2\xi|\nabla u|^2e^{2s\alpha}+s\lambda^2\widetilde{\xi}|\nabla u|^2e^{2s\widetilde{\alpha}})dxdt\\
&+\|ge^{s\alpha}\|^2_{L^2(Q)}+\|ge^{s\widetilde{\alpha}}\|^2_{L^2(Q_T)}\Big).
\end{aligned}\tag{4.22}$$

Il faut maintenant se débarrasser des termes contenant $|\nabla u|^2$ qu'on retrouve dans le membre droit de l'inégalité (4.22). Pour cela, on considère la fonction de troncature :

$$\rho\in\mathcal{C}_0^\infty(\omega),\ \rho(x)\equiv 1 \text{ dans } \omega_0 \text{ et } 0\leq\rho(x)\leq 1 \text{ dans } \omega,$$

dont son introduction permet d'avoir

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_0\times(0,T)}(s\lambda^2\xi|\nabla u|^2e^{2s\alpha}+s\lambda^2\widetilde{\xi}|\nabla u|^2e^{2s\widetilde{\alpha}})dxdt \ &\leq \int_{\omega\times(0,T)}s\lambda^2\rho(x)\xi e^{2s\alpha}\nabla u.\nabla u dxdt\\
&+\int_{\omega\times(0,T)}s\lambda^2\rho(x)\widetilde{\xi}e^{2s\widetilde{\alpha}}\nabla u.\nabla u dxdt.
\end{aligned}$$

En intégrant par parties le second membre de l'inégalité précédente et en utilisant l'inégalité de Young, il va exister une constante $C=C(\Omega,\omega)>0$ telle que, pour un $\varepsilon>0$ assez petit, on ait

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_0\times(0,T)}(s\lambda^2\xi|\nabla u|^2e^{2s\alpha}+s\lambda^2\widetilde{\xi}|\nabla u|^2e^{2s\widetilde{\alpha}})dxdt \ &\leq \int_{\omega\times(0,T)}(\varepsilon s^{-1}\xi^{-1}|\Delta u|^2e^{2s\alpha}\\
&+\varepsilon s^{-1}\widetilde{\xi}^{-1}|\Delta u|^2e^{2s\widetilde{\alpha}})dxdt\\
&+C\int_{\omega\times(0,T)}(s^3\lambda^4\xi^3|u|^2e^{2s\alpha}\\
&+s^3\lambda^4\widetilde{\xi}^3|u|^2e^{2s\widetilde{\alpha}})dxdt.
\end{aligned}\tag{4.23}$$

De (4.22) et (4.23), on déduit qu'il existe un autre $s_0\geq 1$ et un autre $\lambda_0\geq 1$ tels que

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T}\Big(\frac{1}{s\xi}(\frac{\partial u}{\partial t})^2+\frac{1}{s\xi}\sum_{i,j=1}^{n}(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j})^2+s\lambda^2\xi|\nabla u|^2+s^3\lambda^4\xi^3u^2\Big)e^{2s\alpha}dxdt\\
&+\int_{Q_T}\Big(\frac{1}{s\widetilde{\xi}}(\frac{\partial u}{\partial t})^2+\frac{1}{s\widetilde{\xi}}\sum_{i,j=1}^{n}(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j})^2+s\lambda^2\widetilde{\xi}|\nabla u|^2+s^3\lambda^4\widetilde{\xi}^3u^2\Big)e^{2s\widetilde{\alpha}}dxdt\\
&\leq C\Big(\int_{\omega_0\times(0,T)}(s^3\lambda^4\xi^3u^2e^{2s\alpha}+s^3\lambda^4\widetilde{\xi}^3u^2e^{2s\widetilde{\alpha}})dxdt+\|ge^{s\alpha}\|^2_{L^2(Q_T)}+\|ge^{s\widetilde{\alpha}}\|^2_{L^2(Q_T)}\Big),
\end{aligned}\tag{4.24}$$

pour tout $s \geq s_0$ et $\lambda \geq \lambda_0$.
La dernière étape à franchir consiste à utiliser les propriétés des fonctions ξ et $\widetilde{\xi}$. Par construction, il existe deux constantes $C = C(\lambda) > 0$ et $C' = C'(\lambda) > 0$ telles que

$$C\xi(x,t) \leq \widetilde{\xi}(x,t) \leq C'\xi(x,t). \tag{4.25}$$

Par combinaison entre (4.24) et (4.25), on obtient finalement l'estimation de Carleman (4.7).

2 Application au contrôle

Pour commencer cette section, nous rappelons toujours que l'inégalité de Carleman démontrée dans les sections précédentes nous servira à mettre en évidence la contrôlabilité à zéro au temps T de l'équation parabolique suivante :

$$\begin{cases} Lu(x,t) &= \chi_\omega v & \text{dans } Q_T = \Omega \times (0,T), \\ u(x) &= 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.26}$$

où $v \in L^2(Q_T)$ est un contrôle interne et χ est la fonction caractéristique de ω. Cette contrôlabilité consiste à montrer que, pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, il existe un contrôle $v \in L^2(Q_T)$ tel que $u(T) = 0$. De plus, il existe une constante $C(\Omega, \omega, T) > 0$, telle que :

$$\|v\|_{L^2(Q_T)} \leq c\|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

La meilleure constante $C > 0$ réalisant cette inégalité est appelée le coût du contrôle.
Par ailleurs, il est connu en théorie du contrôle (voir [11]) que la contrôlabilité à zéro du système (4.26) est équivalente à l'observabilité au temps T du système adjoint (ou rétrograde) suivant :

$$\begin{cases} L^\star\varphi(x,t) &= 0 & \text{dans } Q_T = \Omega \times (0,T) \\ \varphi(x) &= 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ \varphi(x,T) &= \varphi_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.27}$$

où $L^\star = -\partial_t - \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_i\partial_j - \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{b}_i(x,t)\partial_i - \widetilde{c}(x,t)$ est l'opérateur adjoint de L, et :

- $\widetilde{b}_i(x,t) = 2\sum\limits_{j=1}^{n} \partial_j a_{ij}(x,t) - b_i(x,t)$;
- $\widetilde{c}(x,t) = c(x,t) - \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i b_i(x,t) + \sum\limits_{i,j=1}^{n} \partial_i\partial_j a_{ij}(x,t)$.

Il faut donc montrer l'inégalité d'observabilité qui est, par définition :

$$\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\varphi(x,t)|^2 dxdt, \tag{4.28}$$

où $\varphi \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ est l'unique solution faible du système (4.27).

Comme remarque, cette notion d'observabilité dit que nous pouvons connaître l'énergie ou l'état de notre système en temps $t=0$ (et par conséquent en tout temps) en l'observant seulement sur une partie du domaine. En pratique, pour montrer la contrôlabilité à zéro du système (4.26), il est d'usage de l'établir à partir de l'inégalité d'observabilité (4.28).

Nous allons nous intéresser, à présent à la justification de l'inégalité (4.28). Pour cela, nous commencons par établir une inégalité de Carleman pour le problème (4.27) et ceci de la même manière que celle qui nous a permis d'avoir l'inégalité (4.7) du théorème 4.3. On aura donc

$$\begin{aligned} s^{-1}\iint_{Q_T}\xi^{-1}e^{2s\alpha}(|\partial_t\varphi|^2+\sum_{i,j=1}^{n}|\partial_j\partial_i\varphi|^2)dxdt+s\lambda^2\iint_{Q_T}\xi e^{2s\alpha}|\nabla\varphi|^2dxdt \\ +s^3\lambda^4\iint_{Q_T}\xi^3e^{2s\alpha}|\varphi|^2dxdt \le Cs^3\lambda^4\iint_{\omega\times(0,T)}\xi^3e^{2s\alpha}|\varphi|^2dxdt. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Pour tout $\lambda \geq \lambda_1$ et $s \geq s_1$. Par la suite, on ne garde que le quatrième terme du côté gauche de cette inégalité et on trouve pour $\lambda=\lambda_1$

$$\iint_{Q_T} t^{-3}(T-t)^{-3}e^{2s\alpha}|\varphi|^2dxdt \le C\iint_{\omega\times(0,T)} t^{-3}(T-t)^{-3}e^{2s\alpha}|\varphi|^2dxdt,$$

pour tout $s\geq s_1$. Compte tenu des inégalités suivantes

$$\begin{aligned} &\frac{16}{9T^2}\le\frac{1}{t\,(T-t)}\le\frac{16}{T^2}\text{ for }t\in(T/4,3T/4)\,,\\ &\frac{1}{t\,(T-t)}\ge\frac{1}{2T^2}\text{ for }t\in\,]0,T[\end{aligned}$$

ainsi que les propriétés vérifiées par les fonctions β et α, on peut trouver une constante $C=C(\Omega,\omega,T)>0$ pour laquelle :

$$\int_{(T/4,3T/4)\times\Omega}|\varphi|^2\,dt\,dx \le C\int_{(0.T)\times\omega}|\varphi|^2\,dt\,dx. \tag{4.30}$$

Par ailleurs, si on considère la fonction $\rho_0\in C^1[0,1]$ telle que :

$$0\le\rho_0\le1,\ \rho_0=1\text{ sur }[0,\frac{1}{4}]\text{ et }\rho_0=0\text{ sur }[\frac{3}{4},1],$$

puis la fonction $\rho(t)=\rho_0(\frac{t}{T})$, alors en écrivant $\rho\varphi$ pour le système (4.27), on trouve que :

$$\begin{cases} L^\star(\rho\varphi) &= -\varphi\partial_t\rho \quad \text{dans }\Omega\times(0,\frac{3T}{4}),\\ \rho\varphi &=0 \qquad\quad \text{sur }\Gamma\times(0,\frac{3T}{4}),\\ \rho\varphi(x,\frac{3T}{4}) &=0 \qquad\quad \text{dans }\Omega. \end{cases}$$

En multipliant la première équation du système précédent par $\rho\varphi$, puis en intégrant sur Ω, on aura après un simple calcul basé sur des intégrations par parties :

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}|\rho\varphi|^2dx + \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\partial_j a_{ij}\partial_i(\rho\varphi)\rho\varphi dx + \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}a_{ij}\partial_j(\rho\varphi)\partial_i(\rho\varphi)dx$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}b_i\partial_i(\rho\varphi)(\rho\varphi)dx = -\int\limits_{\Omega}\rho\partial_t\rho|\varphi|^2dx + \int\limits_{\Omega}c|\rho\varphi|^2dx.$$

En vertu de la condition d'ellipticité uniforme vérifiée par les coefficients (a_{ij}), on déduit que :

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}|\rho\varphi|^2dx + \delta_1\int\limits_{\Omega}|\nabla(\rho\varphi)|^2dx \leq (\sum_{i,j=1}^{n}\|\partial_j a_{ij}\|^2_{L^\infty(Q)} + \sum_{i=1}^{n}\|b_i\|^2_{L^\infty(Q)})\int\limits_{\Omega}|\nabla(\rho\varphi)|^2dx$$
$$+(n^2+n+\|c\|_{L^\infty(Q)})\int\limits_{\Omega}|\rho\varphi|^2dx + \int\limits_{\Omega}\rho\partial_t\rho|\varphi|^2dx.$$

En choisisssant $\delta_1 \geq \sum_{i,j=1}^{n}\|\partial_j a_{ij}\|^2_{L^\infty(Q)} + \sum_{i=1}^{n}\|b_i\|^2_{L^\infty(Q)}$, il découlera de l'inégalité précédente que :

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}|\rho\varphi|^2dx \leq 2(n^2+n+\|c\|_{L^\infty(Q)})\int\limits_{\Omega}|\rho\varphi|^2dx + 2\int\limits_{\Omega}\rho\partial_t\rho|\varphi|^2dx.$$

et que

$$-\frac{d}{dt}(exp(2t(n^2+n+\|c\|_{L^\infty(Q)}))\int\limits_{\Omega}|\rho\varphi|^2dx) \leq 2exp(2t(n^2+n+\|c\|_{L^\infty(Q)}))\int\limits_{\Omega}\rho\partial_t\rho|\varphi|^2dx,$$

pour tout $t \geq 0$. Finalement, l'intégration de l'inégalité précédente sur $[0,t]$ avec $t \in [\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}]$ implique que :

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}|\varphi(x,0)|^2dx \leq\ & 2\int\limits_{0}^{t}exp(2s(n^2+n+\|c\|_{L^\infty(Q)}))\int\limits_{\Omega}\rho\partial_s\rho|\varphi|^2dxds \\ \leq\ & \tfrac{C}{T}exp(\tfrac{3T}{2}(n^2+n+\|c\|_{L^\infty(Q)}))\iint\limits_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})}|\varphi|^2dxdt.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Comme indication, pour arriver à la dernière inégalité de (4.31), on a utilisé le fait que :

$$\rho \leq 1 \text{ et que } |\partial_t\rho(t)| = |\partial_t\rho_0(t/T)|/T \leq \frac{C}{T}.$$

Finalement, l'inégalité d'observabilité (4.28) découle de la combinaison entre (4.30) et (4.31).

Chapitre 5

Inégalité de Carleman pour un problème parabolique posé dans un domaine singulier

Comme on l'a déjà annoncé dans l'introduction, on s'intéresse à établir un résultat de nulle contrôlabilité pour **le problème 1** et **le problème 2** définis dans des domaines présentant des singularités sur leur frontière. L'outil principal dans notre raisonnement se trouve dans les estimations de Carleman tel que c'est expliqué dans le chapitre précédent. A travers ces estimations, on déduit une inégalité d'observabilité pour le problème adjoint associé au problème 1. Concernant le problème 2, la contrôlabilité recherchée se ramène, d'après [7], à mettre en évidence une certaine inégalité spectrale (voir chapitre 6) qui découle d'une estimation de Carleman appliquée à un problème elliptique intermédiaire. On y reviendra en détail dans le chapitre suivant.
Dans cette partie de notre travail, on mettra en évidence ce qu'on a apporté de nouveau pour l'étude d'un tel problème. En fait, notre contribution se situe dans l'établissement d'une estimation de Carleman dans des domaines irréguliers. On verra plus loin que la régularité de la solution des problèmes considérés n'est pas suffisante pour réaliser certaines intégrations par parties inévitables dans ce genre d'estimations (voir le chapitre 3). Par ailleurs, à cause de la singularité de notre domaine, il nous a fallu construire à la main une fonction poids liée aux estimations de Carleman et satisfaisant certaines propriétés qu'on précisera par la suite. En fait, on rappelle toujours que lorsque le domaine est à frontière au moins de classe C^2, l'existence de cette fonction poids est acquise. Ceci n'est pas le cas dans notre situation, puisque la frontière est au plus lipschtzienne.

1 Cas de l'équation de la chaleur dans un domaine bidimensionnel

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ. On note ν le vecteur normal sortant à Γ. Soit $\mathcal{O}$ un autre ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathcal{O} \subset\subset \Omega$. Pour $T > 0$, on pose $Q_T = (0, T) \times \Omega$ et $\Sigma_T = (0, T) \times \Gamma$.

Considérons le problème de Cauchy-Dirichlet suivant :

$$\left\{\begin{array}{rll} u_t - \Delta u = & \chi_{\mathcal{O}} v & \text{dans } Q_T \\ u = & 0 & \text{sur } \Sigma_T \\ u(0) = & u_0 & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{5.1}$$

L'inégalité d'observabilité de type Carleman à laquelle on veut aboutir concerne les deux cas suivants.

Case 1 Ω possède un coin polygonal rentrant de sommet S ($S \in \Gamma$) et d'angle intérieur de mesure ω, $\pi < \omega < 2\pi$. $\Gamma \backslash V(S)$ est supposé régulier, où $V(S)$ est un voisinage arbitraire u sommet S.

Case 2 Ω contient une fissure rectiligne Λ débouchant au point S' de la frontière $\partial\Omega$. On désigne par S sa pointe et par Γ_1 la partie $\Gamma \setminus \Lambda$. Comme dans le cas 1, on suppose que $\Gamma \backslash V(\Lambda)$ est suffisamment régulière, où $V(\Lambda)$ est un voisinage arbitraire de la fissure Λ.

Comme cas limite, on remarque que si on prend $\omega = 2\pi$ dans le cas 1, on retombe exactement sur le cas 2.

Dans le paragraphe suivant, nous aborderons la question de l'existence et de la régularité de la solution du problème 5.1 et du problème adjoint associé.

1.1 Existence et régularité

Considérons le problème

$$\left\{\begin{array}{rll} u_t - \Delta u & = f & \text{dans } Q_T, \\ u & = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ u(0) & = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{5.2}$$

où $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(Q_T)$. La proposition ci-après précise la régularité de la solution du problème (5.2).

Proposition 5.1 *Pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(Q_T)$, le problème (5.2) admet une unique solution u dans $C^0([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$.*

Preuve : Avant d'entamer la preuve de cette proposition, faisons le rappel suivant : Pour un opérateur A de domaine $D(A)$ maximal monotone dans un espace de Hilbert H, le problème de Cauchy abstrait suivant

$$\left\{\begin{array}{rll} u_t + Au & = f & \text{dans } Q_T, \\ u(0) & = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{5.3}$$

admet, pour tout $u_0 \in H$ et $f \in L^1(0,T;H)$, une unique solution dans $C^0([0,T];H)$ (voir [29]). De plus cette solution s'écrit sous la forme

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

où $S(.)$ est un C^0 semi-groupe de générateur infinitésimal A. Par ailleurs, on peut vérifier que lorsque A est auto-adjoint, la solution u du problème (5.3) appartient à $L^2(0,T,D(A^{1/2}))$, où $D(A^{1/2})$ est muni de la norme du graphe. En effet, en multipliant l'équation $u_t+Au=f$ par u puis en intégrant sur $(0,T)$, on trouve (sans perte de généralité, on peut supposer que $u_0=0$) après intégration par parties

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2+\int_0^T \|A^{1/2}u(t)\|_H^2dt &= \int_0^T f(t)u(t)dt\\ &\leq \|f\|_{L^1(0,T;H)}\|u\|_{C^0([0,T];H)}.\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\int_0^T \|A^{1/2}u(t)\|_H^2dt<+\infty$.

Revenons, à présent, à l'opérateur de Laplace-Dirichlet. En posant $A=-\Delta$ et $H=L^2(\Omega)$, on déduit donc les résultats de notre proposition.

Remarque 5.2 *(voir [26]) Pour $u_0\in H_0^1(\Omega)$, la solution de (5.2) s'écrit sous la forme*

$$u(t,x)=u_R(t,x)+u_S(t,x)=u_R(t,x)+\tau(t)\,y_S(x)$$

telle que $u_R\in L^2(0,T,H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\tau\in H^l(0,T)$, où

$$0<l<\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\omega}<\frac{1}{4}.$$

De plus

$$u\in L^2\left(0,T,H^s(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\cap H^1\left(0,T,L^2(\Omega)\right),\ \text{pour tout } s \text{ tel que } s<\frac{\pi}{\omega}+1.$$

Considérons maintenant le problème adjoint homogène associé à (5.2)

$$\begin{cases} q_t+\Delta q &=0 \quad \text{dans } Q_T,\\ q &=0 \quad \text{sur } \Sigma_T,\\ q(T) &=q_0 \quad \text{dans } \Omega.\end{cases} \tag{5.4}$$

La proposition suivante donne la régularité de la solution du problème (5.4).

Proposition 5.3 *Pour tout $q_0\in L^2(\Omega)$, le problème adjoint (5.4) admet une unique solution q dans $C^0([0,T];L^2(\Omega))\cap C^0([0\ ,T\ [\,;D(A))\cap C^1([0\ ,T\ [\,;L^2(\Omega))$. De plus, on a*

$$\frac{1}{2}\mid q(0)\mid_{L^2(\Omega)}^2+\int_0^T \|\ \nabla q(t)\ \|_{L^2(\Omega)}^2=\frac{1}{2}\ \|\ q(T)\ \|_{L^2(\Omega)}^2\ .$$

Preuve : En changeant t en $T-t$, on obtient un autre problème où les hypothèses du Théorème X.1 de [2] sont satisfaites.

Remarque 5.4 *(voir [2] Théorème 7.5 p.111) Si $q_0\in D(A^k)$, pour $k\geq 2$, alors la solution vérifie*

$$q\in C^{k-j}([0,T];D\left(A^j\right)),\ \text{pour } j=0,...,k.$$

1.2 Construction de la fonction poids

Dans ce paragraphe, nous aborderons la question relative à la construction d'une fonction poids β satisfaisant les propriétés suivantes

$$\beta > 0 \text{ in } \Omega,\ \beta = 0 \text{ on } \Gamma,\ |\nabla\beta| \geq C > 0 \text{ in } \overline{\Omega\backslash\mathcal{O}_0}, \tag{5.5}$$

où $\mathcal{O}_0 \subset\subset \Omega$ est un ouvert non vide. Il est bien connu que dans le cas de domaine de classe C^2, A.Fursikov and O.Imanuvilov (voir [14]) ont prouvé l'existence d'une telle fonction qui est de plus dans $C^2(\overline{\Omega})$. La construction d'une fonction poids ayant ces propriétés reste un problème crucial dans notre cas. En revanche, on a pu exploiter une autre piste qui nous a assuré l'existence de cette fonction poids vérifiant les propriétés (5.5), mais de régularité inférieure à C^2. Cette régularité qu'on précisera par la suite est suffisante pour établir une estimation de Carleman du type (4.7). Les propositions ci-après tiennent compte de toutes ces considérations.

Proposition 5.5 ***(Cas 1)*** *: Soit $\mathcal{O}_0 \subset\subset \Omega$ un ouvert non vide, il existe une fonction $\beta \in C^1\left(\bar{\Omega}\right) \cap W^{2,\infty}\left(\Omega\right)$ telle que*

$$\beta > 0 \text{ dans } \Omega,\ |\nabla\beta| > 0 \text{ dans } \overline{\Omega\backslash\mathcal{O}_0} \text{ et } \frac{\partial\beta}{\partial\nu} < 0 \text{ sur } \Gamma\backslash\{S\}.$$

Proposition 5.6 ***(Cas 2)*** *: Soit $\mathcal{O}_0 \subset\subset \Omega$ un ouvert non vide, il existe une fonction $\beta \in C^1\left(\bar{\Omega}\right) \cap W^{2,\infty}\left(\Omega\right)$ telle que*

$$\beta > 0 \text{ dans } \Omega,\ |\nabla\beta| > 0 \text{ dans } \overline{\Omega\backslash\mathcal{O}_0},\ \frac{\partial\beta}{\partial\nu} < 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } \frac{\partial\beta}{\partial\nu_\pm} = 0 \text{ sur } \Lambda\backslash\{S\},$$

ν_+ et ν_- désignent les normales unitaires sortantes (opposées) à la fissure Λ.

Comme remarque, entre les propriétés (5.5) et celles données par les propositions 5.5 et 5.6, il y a une différence. En fait, la condition $\beta = 0$ sur Γ n'est pas nécessaire dans notre raisonnement. Nous avons imposé la condition que $\dfrac{\partial\beta}{\partial\nu} \leq 0$ sur Γ. Cela nous convient parfaitement lorsqu'il est question d'établir une estimation de Carleman globale pour le problème d'évolution parapolique (5.1).

Preuve de la proposition 5.5
L'idée de base pour construire une telle fonction ressemble à celle conçue par [14] ou par [12]. Elle consiste à trouver une fonction qui vérifie les propriétés (5.5) au voisinage du bord, puis d'utiliser les fonctions de Morse pour en trouver une qui est égale sur ce voisinage à cette première fonction. Finalement en la composant avec le difféomorphisme construit dans [14], les points critiques seront transportés dans le sous-domaine $\mathcal{O}_0$. Pour notre cas, à cause du domaine qui n'est pas de classe C^2, on contourne d'abord le coin ou la fissure, puis on supposera que notre fonction est affine au voisinage du coin et vérifie les propriétés énoncées dans la proposition. Essentiellement, on aura besoin qu'elle soit de gradient non nul sur tout $\overline{\Omega\backslash\omega}$. En prolongeant de la même manière que [14] ou par [12], on obtiendra la fonction voulue. Voici donc les détails de notre démarche.

Considérons le système de coordonnées cartesiennes (Ox_1x_2) de centre S (i.e. l'origine O de notre repère est le sommet S) tel que l'axe (Ox_1) soit sortant et coincide avec la bissectrice de l'angle ω (voir figure 5.1)

Etape 1 : Décomposons d'abord la frontière Γ en deux parties, partie singulière Γ_S qui

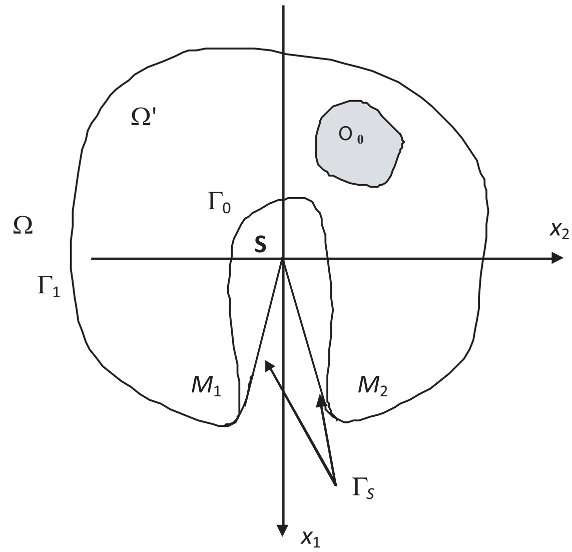

FIGURE 5.1 – Case 1

contient le coin et la partie régulière $\Gamma' = \Gamma \backslash \Gamma_S$. Ensuite, on supposera que l'intersection entre Γ_S et Γ' a lieu aux points $M_1(a_1, b_1)$ et $M_2(a_2, b_2)$ de Γ (see Figure 5.1).
Comme première étape pour la construction de cette fonction poids, on considère la fonction β_S définie comme suit

$$\beta_S(x_1, x_2) = -x_1 + c \tag{5.6}$$

où $c > 0$ est une constante assez grande. On peut aisément vérifier que

$$\beta_S \in C^2\left(\overline{\Omega}\right), \ \beta_S > 0 \text{ dans } \overline{\Omega}, \ \frac{\partial \beta_S}{\partial \nu} < 0 \text{ sur } \Gamma_S \text{ et } |\nabla \beta_S| > 0 \text{ dans } \overline{\Omega}.$$

Etape 2 : Soit Ω' un sous-domaine de Ω à frontière de classe C^3 et tel que $\partial\Omega' = \Gamma_0 \cup \Gamma'$ et $\Gamma = \Gamma_S \cup \Gamma'$ (voir Figure 5.1).
Et soit

$$\begin{array}{rcl} k : [b_1, b_2] & \to & \Gamma_0 \\ x_2 & \to & (k(x_2), x_2). \end{array}$$

une paramétrisation de Γ_0 où k est une fonction de classe C^3 vérifiant

$$k(b_1) = a_1 = \alpha b_1, k(b_2) = a_2 = -\alpha b_2, k'(b_1) = \alpha, k'(b_2) = -\alpha$$
$$, k''(b_1) = k''(b_2) = 0 \text{ et } k^{(3)}(b_1) = k^{(3)}(b_2) = 0.$$

Remarquons que la normale unitaire sortante à $\Omega^{'}$ en chaque point $M(x_1,x_2)$ de Γ_0 est $\overrightarrow{\nu}=\frac{1}{\sqrt{k'^2(x_2)+1}}\begin{pmatrix}1\\-k'(x_2)\end{pmatrix}$. Par un simple calcul, on vérifie que

$$\frac{\partial\beta_{\mathrm{S}}}{\partial\nu}=\frac{-1}{\sqrt{k'^2(x_2)+1}}<0.$$

Etape 3 : Introduisons les deux fonctions g_0 et h_0 telles que $g_0=\beta_{\mathrm{S}}$ et $h_0=\dfrac{\partial\beta_{\mathrm{S}}}{\partial\nu}$ sur Γ_0. Ensuite, on prolonge g_0 (resp.h_0) à $\partial\Omega'$ par une fonction g (resp.h) tel que $g>0$ et $h<0$ sur $\partial\Omega'$.
Soit maintenant $\widetilde{g}$ une relèvement de classe C^2 de g sur tout le domaine Ω' tel que $\dfrac{\partial\widetilde{g}}{\partial\nu}=h$ sur $\partial\Omega'$ et $\widetilde{g}>0$ dans Ω'.
Parallèlement à ce qu'on a dit au début de la preuve, la suite de notre justification s'inspire de [12] et [14]. Pour $\varepsilon>0$, on pose $U_\varepsilon=\{X\in\Omega',dist\,(X,\partial\Omega')<\varepsilon\}$, comme $\dfrac{\partial\widetilde{g}}{\partial\nu}=h<0$ sur $\partial\Omega'$, alors on peut trouver un $\varepsilon>0$ suffisamment petit pour que $|\nabla\widetilde{g}|\neq0$ dans $\overline{U_\varepsilon}$.
En d'autres termes, $\widetilde{g}$ vérifie

$$\widetilde{g}\in C^2\left(\overline{U_\varepsilon}\right),\quad \widetilde{g}>0 \text{ dans } \overline{U_\varepsilon} \text{ et } |\nabla\widetilde{g}|\neq0 \text{ dans } \overline{U_\varepsilon}.$$

Etape 4 : Tel qu'on l'a construit, le domaine Ω' est à frontière de classe C^3. Grâce au théorème de Morse (voir [1]), il existe une suite de fonctions de Morse $(\theta_k)_{k\geq1}$ (de points critiques isolés) telles que

$$\theta_k\to\widetilde{g} \text{ quand } k\to+\infty \text{ dans } C^2\left(\overline{\Omega'}\right). \tag{5.7}$$

Comme θ_k est proche de $\widetilde{g}$, les points critiques de θ_k ne sont pas dans $\overline{U_\varepsilon}$. De plus, on peut supposer que, pour un certain $\delta>0$, on a

$$|\nabla\widetilde{g}|\geq\delta>0 \quad \text{dans } \overline{U_\varepsilon}. \tag{5.8}$$

Construisons une fonction de Morse $\mu\in C^2\left(\overline{\Omega'}\right)$ vérifiant

$$\begin{cases}\mu=g & \text{sur } \partial\Omega',\\ \mu>0 & \text{dans } \Omega',\\ \nabla\mu\neq0 & \text{dans } \overline{U_\varepsilon}.\end{cases} \tag{5.9}$$

Soit $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty\left(\overline{U_\varepsilon}\right)$ tel que $\varphi=1$ sur $\overline{U}_{\varepsilon_0}$, $supp(\varphi)\subset U_{\varepsilon_0}$ où $0<\varepsilon_0<\varepsilon$.

Posons $\mu_k\left(x\right)=\theta_k\left(x\right)+\varphi\left(x\right)\left(\widetilde{g}\left(x\right)-\theta_k\left(x\right)\right)$. On remarque alors que

$$\mu_k\left(x\right)=\widetilde{g}\left(x\right), \text{ pour } x\in\overline{U}_{\varepsilon_0}. \tag{5.10}$$

De plus, μ_k vérifie

$$\begin{aligned}&\nabla\mu_k=\nabla\theta_k \text{ dans } \overline{\Omega'\setminus U_\varepsilon},\\ &\nabla\mu_k=\nabla\theta_k+\varphi\left(\nabla\widetilde{g}-\nabla\theta_k\right)+\nabla\varphi\left(\widetilde{g}-\theta_k\right) \quad \text{dans } \overline{U_\varepsilon}.\end{aligned} \tag{5.11}$$

De (5.7), (5.8) et (5.11), on déduit l'inégalité

$$|\nabla \mu_k| \geq |\nabla \theta_k| - 2\,\|\varphi\|_{C^1}\,\|\widetilde{g} - \theta_k\|_{C^1} \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{dans } \Omega' \cap U_\varepsilon, \text{ pour } k > k_0 = k_0\,(\delta)\,.$$

Choisissons un $k_1 \geq k_0$ et posons $\mu = \mu_{k_1}$. μ est une fonction de Morse positive et son gradient s'annule là où le gradient de θ_{k_1} est nul. On déduit donc les propriétés (5.9).

Etape 5 :

Par un argument similaire à celui adopté par [14], on peut déduire qu'il existe un difféomorphisme $F : \Omega' \to \Omega'$ qui laisse invariant $\overline{U_\varepsilon}$ et transporte les points critiques de μ vers $\mathcal{O}_0$.

En posant $\beta'(x) = (\mu \circ F)(x)$, alors la fonction β' vérifiera les propriétés

$$\beta' \in C^2\left(\overline{\Omega'}\right), \beta' > 0 \ \text{ dans } \Omega', \ |\nabla \beta'| \neq 0 \ \text{ dans } \overline{\Omega' \backslash \mathcal{O}_0} \text{ et } \beta' = g \text{ sur } \partial\Omega'.$$

Etape 6 :

En somme, la fonction β que l'on voulait construire peut être définie comme suit :

$$\beta = \begin{cases} \beta_S & \text{dans } \overline{\Omega \backslash \Omega'}, \\ \beta' & \text{dans } \overline{\Omega'}. \end{cases}$$

Et cette fonction vérifie bien : $\beta \in C^1\left(\bar{\Omega}\right) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$, $|\nabla \beta| \neq 0$ dans $\overline{\Omega \backslash \mathcal{O}_0}$, $\beta > 0$ dans Ω et $\dfrac{\partial \beta}{\partial \nu} < 0$ sur $\Gamma \backslash \{S\}$.

Preuve de la Proposition 5.6 :

Rappelons d'abord que $\Gamma = \Lambda \cup \Gamma_1$ où σ désigne la fissure telle que $\Lambda = [S, S']$, où $S' \in \Gamma_1$. Considérons deux points M_1, M_2 de Γ_1 assez proches de S'.

Notons Γ'' la partie $\overset{\frown}{M_1 M_2}$ de Γ_1 contenant S' and posons $\Gamma_1 = \Gamma' \cup \Gamma''$.

Considérons le système de coordonnées cartésiennes (Ox_1x_2) d'origine S (i.e. $S = O$) et l'axe (Ox_1) coïncide avec la fissure Λ (voir la figure 5.2). La construction de la fonction

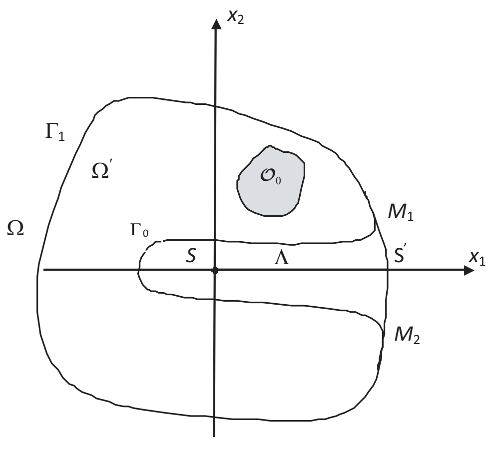

FIGURE 5.2 – Case 2

poids se fait de la même manière que pour le cas 1, on commence par considérer la même fonction affine β_{S} introduite dans (5.6), c'est-à-dire

$$\beta_{\mathrm{S}}(x_1, x_2) = -x_1 + c$$

où $c > 0$ une constante assez grande. On peut montrer aisément que β_{S} vérifie

$$\beta_{\mathrm{S}} \in C^2(\overline{\Omega}),\ \beta_{\mathrm{S}} > 0 \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial \beta_{\mathrm{S}}}{\partial \nu_{\pm}} = 0 \text{ sur } \Lambda \backslash \{S\} \text{ et } \frac{\partial \beta_S}{\partial \nu} < 0 \text{ sur } \Gamma" \backslash \{S'\}.$$

Soit Ω' un sous-domaine de Ω à frontière de classe C^3 tel que $\partial\Omega' = \Gamma' \cup \Gamma_0$, et $\dfrac{\partial \beta_S}{\partial \nu} < 0$ dans Γ_0.
La suite de la preuve est identique au cas 1.

1.3 Estimations de Carleman

Il est question dans cette section d'établir une estimation de Carleman globale du type (4.7) seulement pour l'opérateur parabolique $L = \partial_t - \Delta$. Nous allons, dans ce qui suit, apporter plus de précisions sur les détails non abordés dans le chapitre 4. Cela concerne essentiellement la façon de regrouper des termes qui découlent des intégrations par parties pour n'en garder que les plus importants. Une autre question à laquelle on s'intéressera dans ce paragraphe concerne la régularité insuffisante de la solution du problème (5.4) afin d'effectuer des calculs du même genre que ceux réalisés dans le chapitre 4. Nous proposons ici une démarche permettant de surmonter cette difficulté.
Soit ω un ouvert borné non vide satisfaisant $\omega \subset\subset \mathcal{O}$. Comme dans le chapitre 4, pour $(t, x) \in Q_T$ et $m > 1$, nous définissons les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} \alpha\,(t,x) = \dfrac{e^{2\lambda m \|\beta\|_\infty} - e^{\lambda\left(m\|\beta\|_\infty + \beta(x)\right)}}{t\,(T-t)}, \\ \xi\,(t,x) = \dfrac{e^{\lambda\left(m\|\beta\|_\infty + \beta(x)\right)}}{t\,(T-t)}, \end{cases} \tag{5.12}$$

où β est la fonction poids construite dans les Propositions 5.5 and 5.6.
Posons $V = C^0\left([0,T]; L^2\left(\Omega\right)\right) \cap C^0\left([0,T[; D(A)\right) \cap C^1\left([0,T[; L^2(\Omega)\right)$, on énonce dans le théorème ci-après l'estimation de Carleman recherchée.

Théorème 5.7 *Il existe trois constantes positives $\lambda_1 = \lambda_1\left(\Omega, \mathcal{O}\right) \geq 1, s_1 = s_1\left(\Omega, \mathcal{O}\right)\left(T + T^2\right)$ et $C\left(\Omega, \mathcal{O}\right)$, telles que pour tout $\lambda \geq \lambda_1$ et $s \geq s_1$, on ait*

$$\begin{aligned} & s^{-1} \int_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^{-1} \left(|q_t|^2 + |\Delta q|^2\right) dt\,dx + s\lambda^2 \int_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi \left|\nabla q\right|^2 dt\,dx \\ & + s^3 \lambda^4 \int_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^3 \left|q\right|^2 dt\,dx \leq C s^3 \lambda^4 \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 \left|q\right|^2 dt\,dx, \end{aligned} \tag{5.13}$$

pour tout $q \in V$ solution de (5.4).

Dans ce qui va suivre $C(\mathcal{O},\Omega)$ ou simplement C désignera une constante générique qui dépend seulement de $\mathcal{O}$ et de Ω.

Preuve de Théorème 5.7 Pour prouver l'estimation de Carleman (5.13), on décompose la démonstration en quatre étapes.
Etape 1 : Comme dans le chapitre 4, pour $q \in V$, on introduit le changement de fonctions $\psi = e^{-s\alpha}q$. Par construction, on a $\psi_{|\Sigma} = 0$, $\psi(0,x) = \psi(T,x) = 0$ et

$$M_1\psi + M_2\psi = g_{s,\lambda} \tag{5.14}$$

où

$$\begin{cases} M_1\psi = -2s\lambda^2 \left|\nabla\beta\right|^2 \xi\psi - 2s\lambda\xi\nabla\beta.\nabla\psi + \psi_t \\ \\ M_2\psi = s^2\lambda^2 \left|\nabla\beta\right|^2 \xi^2\psi + \Delta\psi + s\alpha_t\psi \\ \\ g_{s,\lambda} = s\lambda(\Delta\beta)\xi\psi - s\lambda^2 \left|\nabla\beta\right|^2 \xi\psi \end{cases}$$

Pour $1 \leq i,j \leq 3$, on note

$$I_{ij} =< (M_1\psi)_i \,, (M_2\psi)_j >_{L^2(Q_T)},$$

où $(M_1\psi)_i \,, (M_2\psi)_j$ sont respectivement le i-iéme et le j-ième terme de $M_1\psi$ et de $M_2\psi$.
En passant à la norme $L^2(Q_T)$ dans (5.14), on obtient

$$\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + 2\sum_{i,j=1}^{3} < (M_1\psi)_i \,, (M_2\psi)_j >_{L^2(Q_T)} = \|g_{s,\lambda}\|^2_{L^2(Q_T)}. \tag{5.15}$$

Etape 2 : Afin de pouvoir réaliser des intégrations par parties dans certaines intégrales I_{ij} $(1 \leq i,j \leq 3)$, on est contraint d'avoir plus de régularité de la solution q du problème (5.4). Pour cela, on approche q par une suite de fonctions $(q_n)_n$ plus régulières. Cette suite est construite comme suit :
On sait que $D(A^2)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ puisque A est maximal et monotone ; donc pour $q_0 \in L^2(\Omega)$, il existe une suite (q_n^0) dans $D(A^2)$ convergeant vers q_0 dans $L^2(\Omega)$. Considérons, maintenant, le problème suivant associé à la donnée initiale $q_n^0 \in D(A^2)$:

$$\begin{cases} \partial_t q_n + \Delta q_n &= 0 \quad \text{in } Q_T, \\ q_n &= 0 \quad \text{on } \Sigma_T, \\ q_n(T) &= q_n^0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{5.16}$$

qui admet, d'après la remarque 5.4, une unique solution q_n dans $C^2([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];D(A))$.
La suite de notre preuve s'appuiera sur la démarche suivante : on établira une estimation de Carleman pour le problème (5.16), puis à travers le lemme suivant

Lemme 5.8 *Nous avons les propriétés suivantes :*

(i) $(q_n)_n$ *converge vers* q *dans* $L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$.

(ii) $(\Delta\psi_n)_n$ *converge vers* $\Delta\psi$ *dans* $L^2(Q_T)$, *où* $\psi_n = e^{-s\alpha}q_n$.

on en déduira, par densité, l'estimation de Carleman souhaitée (i.e. pour le problème (5.4)).
Preuve du Lemme 5.8

(i) Soit la suite de fonctions $v_n = q_n - q$. Par un simple calcul, on montre que v_n vérifie

$$\begin{cases} \partial_t v_n + \Delta v_n &= 0 & \text{dans } Q_T, \\ v_n &= 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ v_n(T) &= v_n^0 = q_n^0 - q_0 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{5.17}$$

Comme $v_n^0 \in L^2(\Omega)$ alors $v_n \in C^0([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^0([0,T[; D(A)) \cap C^1([0,T[; L^2(\Omega))$ (voir Proposition 5.3) et on a

$$\frac{1}{2} \mid v_n(0) \mid_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \parallel \nabla v_n(t) \parallel_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \parallel v_n(T) \parallel_{L^2(\Omega)}^2,$$

ce qui implique que

$$\int_0^T \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt\, dx \leq \frac{1}{2} \left\|v_n^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

ainsi que la convergence de la suite $(v_n)_n$ vers 0 dans $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$.

(ii) Pour ce qui est de ce cas, on montre d'abord que la suite $(\Delta\psi_n)$ est de Cauchy. Pour cela, pour $p, q \in \mathbb{N}$, on pose $\phi_{p,q} = \psi_p - \psi_q$. On peut vérifier que

$$\partial_t \phi_{p,q} + \Delta\phi_{p,q} = g_{p,q}, \tag{5.18}$$

où

$$g_{p,q} = (-s\alpha_t - s\Delta\alpha - s^2|\nabla\alpha|^2)\phi_{p,q} - 2s\nabla\alpha.\nabla\phi_{p,q}$$

En multipliant (5.18) par $\Delta\phi_{p,q}$ et en intégrant sur Q_T, on obtient

$$\parallel \Delta\phi_{p,q} \parallel_{L^2(Q_T)}^2 = \int_{Q_T} g_{p,q}\Delta\phi_{p,q} \, dt\, dx,$$

Comme $\beta \in W^{2,\infty}(\Omega)$, alors grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz il existe une constante $C > 0$ dépendant de s telle que

$$\begin{aligned} \parallel \Delta\phi_{p,q} \parallel_{L^2(Q_T)} &\leq \parallel g_{p,q} \parallel_{L^2(Q_T)} \\ &\leq C \parallel \phi_{p,q} \parallel_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2 . \end{aligned}$$

Tenant compte de (i) et des propriétés de l'opérateur Δ, on déduit de l'inégalité précédente que $(\Delta\psi_n)_n$ converge vers $\Delta\psi$ dans $L^2(Q_T)$ et, par conséquent, $(\partial_t\psi_n)$ converge aussi vers $(\partial_t\psi)$ dans $L^2(Q_T)$.

Remarque 5.9 *Avant de passer à l'étape 3, il est utile de remarquer que* ψ *(respectivement* ψ_n*) est au moins aussi régulière que* q *(respectivement* q_n*). Cela est dû au fait que* $\beta \in W^{2,\infty}(\Omega)$ *et que* Ω *est borné.*

Etape 3 : Pour $1 \leq i, j \leq 3$, on pose $I_{ij}^n = < (M_1\psi_n)_i, (M_2\psi_n)_j >_{L^2(Q_T)}$. D'après le lemme 5.8, (I_{ij}^n) converge vers I_{ij}.
Dans le même esprit par rapport à ce qui se fait dans les estimations de Carleman, on effectue des calculs sur le termes (I_{ij}^n), et afin d'alléger les notations, on évitera d'utiliser l'indice n dans nos expressions en écrivant I_{ij} à la place de I_{ij}^n.
Pour distinguer le cas 1 et le cas 2, on traitera les intégrales I_{ij} de manière séparée.

Cas 1 :
Tout d'abord mentionnons quelques propriétés dont jouissent les fonctions ξ et α définies dans (5.12) :

$$\begin{cases} |\alpha_t| \leq CT\xi^2 \\ |\xi_t| \leq CT\xi^2 \\ |\nabla\alpha_t| \leq C\lambda T\xi^2 \\ |\alpha_{tt}| \leq CT^2\xi^3 \\ \nabla\xi = \lambda\xi\nabla\beta \\ \nabla\alpha = -\lambda\xi\nabla\beta \\ \xi \geq \dfrac{4}{T^2}, \end{cases}$$

où C est une constante qui dépend de Ω et de $\mathcal{O}$.
Grâce aux rappels donnés dans le chapitre 1, les intégrations par parties par rapport aux variables espace et temps qu'on appliquera sur les intégrales I_{ij} sont complètement justifiées pour les intégrales ne contenant pas $\Delta\psi$ puisque Ω est un domaine à frontière lipschtzienne. Pour les autres intégrales, à cause de la présence du $\Delta\psi$, on doit trouver un autre moyen pour justifier nos calculs.
On a

$$\mathbf{I}_{11} = -2s^3\lambda^4 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^4 \xi^3 |\psi|^2 \; dt\, dx. \tag{5.19}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{21} &= -2s^3\lambda^3 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \xi^3 (\nabla\beta.\nabla\psi)\, \psi \, dt\, dx \\ &= -s^3\lambda^3 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \xi^3 \nabla\beta.\nabla (\psi)^2 \; dt\, dx. \end{aligned}$$

Après intégration par parties et quelques transformations, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{21} &= s^3\lambda^3 \int\limits_{Q_T} div(|\nabla\beta|^2 \xi^3 \nabla\beta)\psi^2 \, dt\, dx \\ &= 3s^3\lambda^4 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^4 \xi^3\psi^2 \, dt\, dx + s^3\lambda^3 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \xi^3.\Delta\beta.\psi^2 \, dt\, dx \\ &+2s^3\lambda^3 \int\limits_{Q_T} \sum_{1\leq i,j\leq 2} \psi^2\xi^3 \frac{\partial\beta}{\partial x_i} \frac{\partial^2\beta}{\partial x_i \partial xj} \frac{\partial\beta}{\partial x_j} \, dt\, dx \\ &= I_{21}^1 + I_{21}^2 + I_{21}^3. \end{aligned}$$

Remarquons que $\mathbf{I}_{11} + I_{21}^1 \geq 0$. De plus, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que $|\nabla\beta| \geq c_1$ dans $\Omega \backslash \mathcal{O}_0$, ce qui donne

$$\int\limits_{Q_T} \xi^3\psi^2 \, dt \, dx \leq \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}_0} \xi^3\psi^2 \, dt \, dx + \frac{1}{c_1^4} \int\limits_{(0,T)\times\Omega\backslash\mathcal{O}_0} |\nabla\beta|^4 \, \xi^3\psi^2 \, dt \, dx.$$

ainsi que

$$\mathbf{I}_{11} + I_{21}^1 \geq C\,(B - D)\,, \text{ où } C = C\,(\Omega, \mathcal{O}) \text{ et}$$

$$\begin{cases} B &= s^3\lambda^4 \displaystyle\int\limits_{Q_T} \xi^3\psi^2 \, dt \, dx \\ \\ D &= s^3\lambda^4 \displaystyle\int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}_0} \xi^3\psi^2 dt \, dx \end{cases} \tag{5.20}$$

Comme $\beta \in W^{2,\infty}(\Omega)$ alors en choisissant $\lambda \geq C$ où $C = C(\Omega, \mathcal{O}) > 0$, on déduit que

$$\mathbf{I}_{11} + \mathbf{I}_{21} \geq C\,(B - D)\,. \tag{5.21}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{31} &= s^2\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \, \xi^2\psi_t\psi \, dt \, dx \\ &= \frac{1}{2} s^2\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \, \xi^2 \left(\psi^2\right)_t \, dt \, dx \end{aligned}$$

qui donne après intégration par parties

$$\mathbf{I}_{31} = -s^2\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \, \xi_t\xi\psi^2 \, dt \, dx.$$

On sait que $|\xi_t| = |\frac{2t-T}{t^2(t-T)^2} e^{\lambda\left(m\|\beta\|_\infty + \beta(x)\right)}| \leq T\xi^2$, alors

$$\mathbf{I}_{31} \geq -CTs^2\lambda^2 \int\limits_{Q_T} \xi^3\psi^2 \, dt \, dx. \tag{5.22}$$

De (5.19), (5.21) et (5.22), on déduit que pour $s \geq 1$ et $\lambda \geq TC\,(\Omega, \mathcal{O})$

$$\begin{aligned} < M_1\psi, (M_2\psi)_1 >_{L^2(Q_T)} &= \mathbf{I}_{11} + \mathbf{I}_{21} + \mathbf{I}_{31} \\ &\geq Cs^3\lambda^4 \int\limits_{Q_T} \xi^3\psi^2 \, dt \, dx \\ &\quad -C's^3\lambda^4 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}_0} \xi^3\psi^2 \, dt \, dx. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Pour le traitement des trois intégrales $\mathbf{I}_{ij}$ qui vont suivre et qui contiennent le $\Delta\psi$, nous utiliserons le même argument du Lemme 3.3 énoncé dans [21] ainsi que la densité de $H^2(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$. Ce qui nous permettra de justifier les intégrations par parties.
On a

$$\mathbf{I}_{12} = -2s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \xi \Delta\psi.\psi \, dt\, dx.$$

L'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{12} &= 2s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} \nabla\left(|\nabla\beta|^2 \xi\psi\right).\nabla\psi \, dt\, dx \\
&= 2s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \xi \, |\nabla\psi|^2 \; dt\, dx + 4s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} \psi\xi \sum_{1\le i,j\le 2} \frac{\partial\beta}{\partial x_i} \frac{\partial^2\beta}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \, dt\, dx \\
&+ 2s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \left(\nabla\xi.\nabla\psi\right)\psi \, dt\, dx \\
&= I_{12}^1 + I_{12}^2 + I_{12}^3
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que

$$\begin{aligned}
\lambda^2\xi \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\psi &= (\sqrt{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x_j})\left(\lambda^2\sqrt{\xi}\psi\right) \\
&\le \frac{1}{2}(\xi(\frac{\partial\psi}{\partial x_j})^2 + \lambda^4\xi\psi^2)
\end{aligned}$$

et

$$s\lambda^2\xi\left(\nabla\psi.\nabla\xi\right)\psi \le C(s^2\lambda^4\xi^2\psi^2 + |\nabla\psi|^2\lambda^2)$$

D'où les inégalités suivantes

$$I_{12}^2 \le Cs \int\limits_{Q_T} \xi\, |\nabla\psi|^2 \; dt\, dx + Cs\lambda^4 \int\limits_{Q_T} \xi\psi^2 \, dt\, dx,$$

$$I_{12}^3 \le Cs^2\lambda^4 \int\limits_{Q_T} \xi^2\psi^2 \, dt\, dx + C\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\psi|^2 \; dt\, dx.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{12} = I_{12}^1 + I_{12}^2 + I_{12}^3 \quad & \geq 2s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx \\ & -Cs\lambda^4 \int\limits_{Q_T} \xi\psi^2 \, dt\, dx - Cs \int\limits_{Q_T} \xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx \\ & -Cs^2\lambda^4 \int\limits_{Q_T} \xi^2\psi^2 \, dt\, dx - C\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx \\ & \geq 2s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx - s^2\lambda^4 \int\limits_{Q_T} (\frac{C}{s\xi} + C)\xi^2\psi^2 \, dt\, dx \\ & -C \int\limits_{Q_T} (s\xi + \lambda^2) |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx.\end{aligned}$$

En choisissant $s > CT^2$, on trouve

$$\mathbf{I}_{12} \geq 2s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx - Cs^2\lambda^4 \int\limits_{Q_T} \xi^2\psi^2 \, dt\, dx - C \int\limits_{Q_T} (s\xi + \lambda^2) |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx. \quad (5.24)$$

On a aussi

$$\mathbf{I}_{22} = -2s\lambda \int\limits_{Q_T} \xi \, (\nabla\beta.\nabla\psi) \, \Delta\psi \, dt\, dx.$$

Après intégration par parties, on obtient

$$\mathbf{I}_{22} = -2s\lambda \int\limits_{\Sigma_T} \xi \, (\nabla\beta.\nabla\psi) \, \frac{\partial\psi}{\partial\nu} \, dt\, d\sigma + 2s\lambda \int\limits_{Q_T} \nabla \left(\xi \, (\nabla\beta.\nabla\psi)\right) .\nabla\psi \, dt\, dx$$

Comme $\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau} = 0$ sur Σ ($\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau} = \nabla\psi.\tau$ est le gradient tangentiel de ψ) et $\nabla\beta.\nabla\psi = \dfrac{\partial\beta}{\partial\nu}\dfrac{\partial\psi}{\partial\nu}$, alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{22} \quad & = -2s\lambda \int\limits_{\Sigma} \xi \frac{\partial\beta}{\partial\nu} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right)^2 dt d\sigma + 2s\lambda \sum_{1\leq i,j\leq 2} \int\limits_{Q_T} \xi (\frac{\partial^2\beta}{\partial x_i \partial xj} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \\ & + \frac{\partial\beta}{\partial x_i} \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial xj}) \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \, dt\, dx + 2s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} \xi . |\nabla\beta.\nabla\psi|^2 \, dt\, dx,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{22} &= -2s\lambda \int\limits_{\Sigma} \xi \frac{\partial \beta}{\partial \nu} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 dt d\sigma + 2s\lambda \sum_{1 \leq i,j \leq 2} \int\limits_{Q_T} \xi \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \partial xj} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\, dt\, dx \\
&+2s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} \xi \left| \nabla \beta . \nabla \psi \right|^2 \, dt\, dx + s\lambda \int\limits_{Q_T} \xi \nabla \beta . \nabla (|\nabla \psi|^2)\, dt\, dx. \\
&= I_{22}^1 + I_{22}^2 + I_{22}^3 + I_{22}^4.
\end{aligned}$$

Dans les expressions précédentes, on remarque que $I_{22}^3 \geq 0$ et $|I_{22}^2| \leq Cs\lambda \int\limits_{Q_T} \xi \left| \nabla \psi \right|^2 \, dt\, dx.$

En appliquant une intégration par parties sur I_{22}^4, on aura

$$\begin{aligned}
I_{22}^4 &= s\lambda \int\limits_{\Sigma} \xi \left| \nabla \psi \right|^2 (\nabla \beta . \nu)\, dt d\sigma - s\lambda \int\limits_{Q_T} \left| \nabla \psi \right|^2 div\, (\xi . \nabla \beta)\, dt\, dx \\
&= s\lambda \int\limits_{\Sigma} \xi \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 \frac{\partial \beta}{\partial \nu} dt d\sigma - s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} \left| \nabla \beta \right|^2 \xi \left| \nabla \psi \right|^2 \, dt\, dx \\
&-s\lambda \int\limits_{Q_T} (\Delta \beta) \xi \left| \nabla \psi \right|^2 \, dt\, dx \\
&= I_{22}^{41} + I_{22}^{42} + I_{22}^{43}.
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\partial \beta}{\partial \nu} < 0$ sur Σ_T et $\beta \in W^{2,\infty}(\Omega)$, alors

$$I_{22}^1 + I_{22}^{41} \geq 0$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| I_{22}^{43} \right| \leq Cs\lambda \int_{Q_T} \xi \left| \nabla \psi \right|^2 \, dt\, dx.$$

En somme, on a

$$\mathbf{I}_{22} \geq I_{22}^2 + I_{22}^{42} + I_{22}^{43} \geq -Cs\lambda \int_{Q_T} \xi \left| \nabla \psi \right|^2 \, dt\, dx - s\lambda^2 \int_{Q_T} \left| \nabla \beta \right|^2 \xi \left| \nabla \psi \right|^2 \, dt\, dx. \tag{5.25}$$

Considérons maintenant le terme $\mathbf{I}_{32} = \int_{Q_T} \psi_t \Delta \psi dt\, dx$. Après un simple calcul, on trouve

$$\mathbf{I}_{32} = -\int_{Q_T} \nabla (\psi_t) . \nabla \psi dt\, dx = -\frac{1}{2} \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left(|\nabla \psi|^2 \right) \, dt\, dx = 0,$$

d'après la remarque 5.4, $\nabla\psi_t \in L^2(Q_T)$ et puisque $\lim\limits_{t\to 0} \nabla\psi(t\,\cdot) = \lim\limits_{t\to T} \nabla\psi(t,\cdot) = 0$.
En regroupant les estimations (5.24) et (5.25), on obtient

$$\begin{aligned}
< M_1\psi, (M_2\psi)_2 >_{L^2(Q_T)} &= \mathbf{I}_{12} + \mathbf{I}_{22} + \mathbf{I}_{32} \\
&\geq s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx - Cs^2\lambda^4 \int\limits_{Q_T} \xi^2\psi^2 \, dt\, dx \\
&-C' \int\limits_{Q_T} \left(s\xi + \lambda^2\right) |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx - C''s\lambda \int\limits_{Q_T} \xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx \\
&\geq s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx - Cs^2\lambda^4 \int\limits_{Q_T} \xi^2\psi^2 \, dt\, dx \\
&-C' \int\limits_{Q_T} \left(s\xi + \lambda^2\right) |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx \\
&\geq C_1 s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} \xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx - C_1 s\lambda^2 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}_0} \xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx \\
&-Cs^2\lambda^4 \int\limits_{Q_T} \xi^2\psi^2 \, dt\, dx - C' \int\limits_{Q_T} \left(s\lambda\xi + \lambda^2\right) |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx.
\end{aligned}$$

Et pour $s \geq CT^2$ et λ assez grand, on aura aussi

$$\begin{aligned}
< M_1\psi, (M_2\psi)_2 >_{L^2(Q_T)} &\geq C_2 s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} \xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx - Cs^2\lambda^4 \int\limits_{Q_T} \xi^2\psi^2 \, dt\, dx \\
&-C_1 s\lambda^2 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}_0} \xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Passons maintenant au terme $\mathbf{I}_{13}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{13} &= -2s^2\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \alpha_t \xi |\psi|^2 \, dt\, dx \\
&\leq Cs^2\lambda^2 \int\limits_{Q_T} \xi^3 |\psi|^2 \, dt\, dx.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Ce dernier terme est absorbé par l'intégrale B de la formule (5.20) en prenant $\lambda \geq 1$ et $s \geq CT$.
Par ailleurs, on a

$$\mathbf{I}_{23} = -2s^2\lambda \int\limits_{Q_T} \alpha_t \xi \left(\nabla\beta.\nabla\psi\right) \psi \, dt\, dx.$$

En écrivant $\alpha_t\xi\left(\nabla\beta.\nabla\psi\right)\psi = \frac{1}{2}\left(\alpha_t\xi\nabla\beta\right).\nabla\left(\psi\right)^2$ et en intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{23} &= s^2\lambda\int\limits_{Q_T}\psi^2 div\left(\alpha_t\xi\nabla\beta\right)dt\,dx\\ &= s^2\lambda^2\int\limits_{Q_T}\alpha_t\left|\nabla\beta\right|^2\xi\psi^2\,dt\,dx + s^2\lambda\int\limits_{Q_T}\xi\psi^2\nabla\alpha_t.\nabla\beta\,dt\,dx\\ &+ s^2\lambda\int\limits_{Q_T}\xi\psi^2\alpha_t\Delta\beta\,dt\,dx.\end{aligned}$$

Comme $\alpha_t \leq C\xi^2T$ et $|\nabla\alpha_t| \leq C\lambda T\xi^2$, alors pour $\lambda \geq 1$

$$|\mathbf{I}_{23}| \leq Cs^2\lambda^2T\int\limits_{Q_T}\xi^3\psi^2\,dt\,dx.$$

et

$$\mathbf{I}_{23} \geq -Cs^2\lambda^2T\int\limits_{Q_T}\xi^3\psi^2\,dt\,dx. \tag{5.28}$$

Concernant $\mathbf{I}_{33}$, on a

$$\mathbf{I}_{33} = s\int\limits_{Q_T}\alpha_t\psi_t\psi\,dt\,dx = -\frac{1}{2}s\int\limits_{Q_T}\alpha_{tt}\psi^2\,dt\,dx.$$

Comme $\alpha_{tt} \leq C\xi^3T^2$, alors

$$|\mathbf{I}_{33}| \leq CsT^2\int\limits_{Q_T}\xi^3\psi^2\,dt\,dx. \tag{5.29}$$

De (5.27), (5.28) et (5.29), on déduit que

$$\begin{aligned}< M_1\psi, (M_2\psi)_3 >_{L^2(Q_T)} &= \mathbf{I}_{13} + \mathbf{I}_{23} + \mathbf{I}_{33}\\ &\geq -Cs^2\lambda^2\int\limits_{Q_T}\xi^3\psi^2\,dt\,dx \quad \text{pour } s \geq CT \text{ et } \lambda \geq C.\end{aligned} \tag{5.30}$$

Cas 2 :
Si on reprend les mêmes calculs que dans le cas 1, on a

$$\mathbf{I}_{11} = -2s^3\lambda^4\int\limits_{Q_T}\left|\nabla\beta\right|^4\xi^3\left|\psi\right|^2\,dt\,dx. \tag{5.31}$$

Afin de surmonter la difficulté d'avoir une solution q peu régulière, nous aurons à utiliser le résultat de densité suivant que l'on peut retrouver dans [21].

Lemme 5.10 *L'espace $D(A) \cap (C^1(\overline{\Omega}) \oplus \{q_{\mathrm{S}}\})$ est dense dans $D(A)$, où q_{S} est la fonction singulière définie dans (3.1) du chapitre 3 avec $\alpha = \frac{1}{2}$.*

Cette proposition signifie qu'on peut approcher toute fonction $q \in D(A)$ par des fonctions de la forme

$$q = q_R + c q_{\mathrm{S}} \text{ où } q_R \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{5.32}$$

Et ceci implique que pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$q_R = O(1), |\nabla q_R| = O(1) \text{ dans } \overline{\Omega}. \tag{5.33}$$

Par ailleurs, comme

$$q_{\mathrm{S}} = O(\sqrt{r}),\ |\nabla q_{\mathrm{S}}| = O(\frac{1}{\sqrt{r}}). \tag{5.34}$$

alors, il découle de (5.32) et (5.33) que pour tout $t \in [0, T]$

$$q = O(1),\ |\nabla q| = O(\frac{1}{\sqrt{r}}) \text{ in } \overline{\Omega}. \tag{5.35}$$

Rappelons que $\partial\Omega$ est une frontière non lipschitzienne, donc il nous est impossible de refaire les intégrations par parties effectuées dans le cas 1 dans Ω. Pour pallier à ce problème, on considère, pour $\varepsilon > 0$, un sous-domaine $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash B\,(S, \varepsilon)$, où $B\,(S, \varepsilon)$ est la boule ouverte de rayon ε et de centre S. Notons Q_ε le sous-domaine $(0, T) \times \Omega_\varepsilon$. Pour simplifier nos expressions, on considérera les notation suivantes : $C_\varepsilon = \partial B\,(S, \varepsilon)$ et $\partial\Omega_\varepsilon = C_\varepsilon \cup \Lambda_\varepsilon \cup \Gamma_1$ où $\Lambda_\varepsilon = \Lambda \backslash [S; S_\varepsilon]$ et $\{S_\varepsilon\} = C_\varepsilon \cap \Lambda$.
En tenant compte de la remarque 2.15 du chapitre 2, il en résulte que les intégrations par parties dans Ω_ε sont donc justifiées comme dans le cas 1 (voir [22]). Nous nous servirons du lemme 5.10 comme référence pour expliquer certains passages.
On a

$$\mathbf{I}_{21} = -2s^3\lambda^3 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2\, \xi^3\, (\nabla\beta.\nabla\psi)\, \psi\, dt\, dx = -s^3\lambda^3 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2\, \xi^3 (\nabla\beta.\nabla\, (\psi)^2)\, dt\, dx.$$

On pose

$$\mathbf{I}_{21} = -s^3\lambda^3 \int_0^T \mathbf{J}_{21}(t) dt,$$

où

$$\mathbf{J}_{21}(t) = \int\limits_{\Omega} |\nabla\beta|^2\, \xi^3 (\nabla\beta.\nabla\, (\psi)^2) dx.$$

Soit

$$\mathbf{J}_{21}^{\varepsilon} = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\beta|^2\, \xi^3 (\nabla\beta.\nabla\, (\psi)^2) dx.$$

Comme $\beta \in W^{2,\infty}\,(\Omega)$, $e^{-s\alpha}\xi \in W^{2,\infty}\,(Q_T)$ et $q \in H^1\,(Q_T)$, alors en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{J}_{21}^{\varepsilon} = \mathbf{J}_{21}.$$

Dans la suite, à chaque fois qu'il faut justifier le passage à la limite sur les intégrales dans Ω_ε, on utilisera le même argument.
L'intégration par parties nous donne

$$\mathbf{J}_{21}^{\varepsilon} = \int_{C_\varepsilon} |\nabla\beta|^2 \xi^3 \psi^2 \frac{\partial\beta}{\partial\nu} d\sigma - \int_{\Omega_\varepsilon} div(|\nabla\beta|^2 \xi^3 \nabla\beta)\psi^2 dx.$$

Il est clair que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} div(|\nabla\beta|^2 \xi^3 \nabla\beta)\psi^2 dx = \int\limits_{\Omega} div(|\nabla\beta|^2 \xi^3 \nabla\beta)\psi^2 dx.$$

En utilisant les coordonnées polaires locales, on aura

$$\int\limits_{C_\varepsilon} |\nabla\beta|^2 \xi^3 \psi^2 \frac{\partial\beta}{\partial\nu} d\sigma = -\int\limits_0^{2\pi} \varepsilon\, |\nabla\beta|^2 \xi^3 \psi^2 \frac{\partial\beta}{\partial r} d\theta.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{C_\varepsilon} |\nabla\beta|^2 \xi^3 \psi^2 \frac{\partial\beta}{\partial\nu} d\sigma = 0$$

ce qui finalement nous donne

$$\mathbf{I}_{21} = s^3\lambda^3 \iint\limits_{(0,T)\times\Omega} div(|\nabla\beta|^2 \xi^3 \nabla\beta)\psi^2 \, dt\, dx.$$

Comme dans le cas 1, on obtient premièrement

$$\mathbf{I}_{11} + \mathbf{I}_{21} \geq C\,(B - D)\,, \tag{5.36}$$

où B et D sont données par les formules (5.20), et deuxièmement

$$\mathbf{I}_{31} \geq -CTs^2\lambda^2 \int\limits_{Q_T} \xi^3\psi^2 \, dt\, dx. \tag{5.37}$$

De (5.36) et (5.37), il vient que, pour tout $s \geq 1$ et $\lambda \geq TC\,(\Omega, \mathcal{O})$:

$$\begin{aligned} < M_1\psi, (M_2\psi)_1 >_{L^2(Q_T)} &= \mathbf{I}_{11} + \mathbf{I}_{21} + \mathbf{I}_{31} \\ &\geq Cs^3\lambda^4 \int\limits_{Q_T} \xi^3\psi^2 \, dt\, dx - C's^3\lambda^4 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}_0} \xi^3\psi^2 \, dt\, dx. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Considérons, à présent, le terme

$$\mathbf{I}_{23} = -2s^2\lambda \int\limits_{Q_T} \alpha_t\xi\,(\nabla\beta.\nabla\psi)\,\psi \, dt\, dx = -s^2\lambda \int\limits_{Q_T} \alpha_t\xi\,\left(\nabla\beta.\nabla(\psi^2)\right)\, dt\, dx.$$

Posons

$$\mathbf{I}_{23} = -s^2\lambda \int_0^T J_{23}(t)dt,$$

où

$$J_{23}(t) = \int_\Omega \alpha_t\xi \left(\nabla\beta.\nabla(\psi^2)\right) dx.$$

De même que précédemment, on utilise le lemme 5.10 et on intègre J_{23} pour q de la forme (5.32). Soit

$$J_{23}^\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \alpha_t\xi \left(\nabla\beta.\nabla(\psi^2)\right) dx.$$

Tenant compte des propriétés suivantes : $\beta \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $e^{-s\alpha}\xi$, $e^{-s\alpha}\alpha \in W^{2,\infty}(Q_T)$ et $q \in H^1(Q_T)$, alors

$$J_{23} = \lim_{\varepsilon\to 0} J_{23}^\varepsilon$$

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue.
L'intégration par parties appliquée à J_{23}^ε, implique que

$$J_{23}^\varepsilon = \int_{C_\varepsilon} \psi^2\alpha_t\xi\frac{\partial\beta}{\partial\nu}d\sigma - \int_{\Omega_\varepsilon} \psi^2 div\left(\alpha_t\xi\nabla\beta\right) dx.$$

Encore une fois, le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous assure que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} \psi^2 div\left(\alpha_t\xi\nabla\beta\right) dx = \int_\Omega \psi^2 div\left(\alpha_t\xi\nabla\beta\right) dx,$$

et puis de (5.35), on déduit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} \psi^2\alpha_t\xi\frac{\partial\beta}{\partial\nu}d\sigma = 0.$$

Ce qui montre que

$$\mathbf{I}_{23} = s^2\lambda \int_{Q_T} \psi^2 div\left(\alpha_t\xi\nabla\beta\right)\, dt\, dx.$$

De la même manière que dans le cas 1, on aura

$$\mathbf{I}_{23} \geq -Cs^2\lambda^2 T \int_{Q_T} \xi^3\psi^2\, dt\, dx. \tag{5.39}$$

Concernant l'intégrale $\mathbf{I}_{13} = -2s^2\lambda^2 \int_{Q_T} |\nabla\beta|^2\alpha_t\xi\,|\psi|^2\, dt\, dx$, on a

$$|\mathbf{I}_{13}| \leq CTs^2\lambda^2 \int_{Q_T} \xi^3\,|\psi|^2\, dt\, dx, \tag{5.40}$$

qui est absorbée par B en prenant $\lambda \geq 1$ et $s \geq CT$.
Par ailleurs, on a $\mathbf{I}_{33} = s \int\limits_{Q_T} \alpha_t \psi_t \psi \, dt \, dx$ et après calcul, on trouve que

$$\mathbf{I}_{33} = -\frac{1}{2} s \int\limits_{Q_T} \alpha_{tt} \psi^2 \, dt \, dx.$$

En utilisant le fait que $|\alpha_{tt}| \leq C\xi^3 T^2$, alors

$$|\mathbf{I}_{33}| \leq CsT^2 \int\limits_{Q_T} \xi^3 \psi^2 \, dt \, dx. \tag{5.41}$$

De (5.39), (5.40) et (5.41), on déduit que

$$\begin{aligned} < M_1\psi, (M_2\psi)_3 >_{L^2(Q_T)} &= \mathbf{I}_{13} + \mathbf{I}_{23} + \mathbf{I}_{33} \\ &\geq -Cs^3\lambda^2 \int\limits_{Q_T} \xi^3 \psi^2 \, dt \, dx, \text{ pour } \quad s \geq CT, \, \lambda \geq C. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Les trois intégrales restantes demandent plus d'attention pour les traiter. Nous utiliserons pour cela la densité de $H^2(\Omega_\varepsilon)$ dans $H^s(\Omega_\varepsilon)$ où $s < \dfrac{\pi}{\omega} + 1$ (voir [23]). Ce qui nous permettra de justifier le passage à la limite sur ε.
Donc pour la première intégrale, on a

$$\mathbf{I}_{12} = -2s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \, \xi \Delta\psi\psi \, dt \, dx.$$

Soit

$$\mathbf{I}_{12} = -2s\lambda^2 \int\limits_0^T J_{12}(t) dt,$$

avec

$$J_{12}(t) = \int\limits_{\Omega} |\nabla\beta|^2 \, \xi \Delta\psi\psi dx.$$

où $\psi = e^{-s\alpha} q$ et q vérifie (5.32). Soit

$$J_{12}^{\varepsilon} = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\beta|^2 \, \xi \Delta\psi\psi dx.$$

En utilisant (5.35) et le fait que $\Delta q \in L^2(Q_T)$, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que :

$$J_{12} = \lim_{\varepsilon \to 0} J_{12}^{\varepsilon}.$$

Pour traiter J_{12}^{ε} ainsi que les autres intégrales contenant $\Delta\psi$, nous nous inspirons du Lemme 3.3 démontré dans [21] ainsi que de la densité de $H^2(\Omega_\varepsilon)$ dans $H^s(\Omega_\varepsilon)$. On obtient de l'intégration par parties dans Ω_ε

$$J_{12}^{\varepsilon} = \int\limits_{C_\varepsilon} |\nabla\beta|^2 \xi\psi \frac{\partial\psi}{\partial\nu} d\sigma - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla\left(|\nabla\beta|^2 \xi\psi\right).\nabla\psi\, dx.$$

Pour la même raison qu'avant, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla\left(|\nabla\beta|^2 \xi\psi\right).\nabla\psi dx = \int\limits_{\Omega} \nabla\left(|\nabla\beta|^2 \xi\psi\right).\nabla\psi\, dx.$$

De (5.35), on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{C_\varepsilon} |\nabla\beta|^2 \xi\psi \frac{\partial\psi}{\partial\nu} d\sigma = 0,$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{12} &= 2s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} \nabla\left(|\nabla\beta|^2 \xi\psi\right).\nabla\psi\, dt\, dx \\
&= 2s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \xi |\nabla\psi|^2\, dt\, dx + 4s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} \sum_{1\le i,j\le 2} \psi\xi \frac{\partial\beta}{\partial x_i} \frac{\partial^2\beta}{\partial x_i \partial xj} \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\, dt\, dx \\
&+2s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 (\nabla\xi.\nabla\psi)\,\psi\, dt\, dx.
\end{aligned}$$

En prenant $s > CT^2$, on obtient

$$\mathbf{I}_{12} \ge 2s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} |\nabla\beta|^2 \xi |\nabla\psi|^2\, dt\, dx - Cs^2\lambda^4 \int\limits_{Q_T} \xi^2\psi^2\, dt\, dx - C \int\limits_{Q_T} (s\xi + \lambda^2) |\nabla\psi|^2\, dt\, dx.$$

Pour ce qui est de

$$\mathbf{I}_{32} = \iint\limits_{Q_T} \Delta\psi\psi_t\, dt\, dx,$$

on pose

$$\mathbf{I}_{32} = \int_0^T J_{32}(t) dt,$$

où

$$J_{32}(t) = \int\limits_{\Omega} \Delta\psi\, \psi_t\, dx.$$

Comme ψ et ψ_t sont dans $D(A)$, on peut, pour tout $t \in [0,T]$, utiliser le lemme 5.10 pour approcher la fonction ψ (resp ψ_t) par une fonction notée toujours par ψ (resp v) dans $D(A) \cap (C^1(\overline{\Omega}) \oplus \{q_S\})$.
En argumentant comme pour J_{12}^{ε}, on intègre par parties $J_{32}^{\varepsilon} = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \Delta\psi v\, dx$ et on trouve

$$J_{32}^{\varepsilon} = \int\limits_{C_\varepsilon} \frac{\partial\psi}{\partial\nu} v d\sigma - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla\psi.\nabla v\, dx.$$

Comme $\dfrac{\partial\psi}{\partial\nu} = O(\frac{1}{\sqrt{r}})$ et $v = O(1)$ dans $\overline{\Omega}$, alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{C_\varepsilon} \frac{\partial\psi}{\partial\nu} v\, d\sigma = 0.$$

Appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il vient que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla\psi.\nabla v\, dx = \int\limits_{\Omega} \nabla\psi.\nabla v\, dx,$$

et, par conséquent,

$$J_{32} = \int\limits_{\Omega} \nabla\psi.\nabla v\, dx$$

Par densité, on conclut que

$$J_{32} = \int\limits_{\Omega} \nabla\psi.\nabla\psi_t dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \frac{d}{dt} |\nabla\psi|^2\, dt\, dx = 0.$$

Considérons, à présent, l'intégrale

$$\mathbf{I}_{22} = -2s\lambda \int\limits_{Q_T} \xi\, (\nabla\beta.\nabla\psi)\, \Delta\psi\, dt\, dx.$$

Posons

$$\mathbf{I}_{22} = s\lambda \int\limits_0^T J_{22}(t) dt,$$

où

$$J_{22}(t) = -2 \int\limits_{\Omega} \xi\, (\nabla\beta.\nabla\psi)\, \Delta\psi dx.$$

Toujours par le lemme 5.10, on intègre J_{22} pour q de la forme (5.32). Posons

$$J_{22}^{\varepsilon} = -2 \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \xi\, (\nabla\beta.\nabla\psi)\, \Delta\psi\, dx.$$

En utilisant de nouveau l'expression (5.32) et le fait $\Delta q \in L^2(Q_T)$, on déduit aussi grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$J_{22} = \lim_{\varepsilon \to 0} J_{22}^{\varepsilon}.$$

La première intégration par parties dans J_{22}^{ε} donne

$$\begin{aligned}
J_{22}^{\varepsilon} &= -2 \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \xi \left(\nabla\beta.\nabla\psi\right) \frac{\partial\psi}{\partial\nu} d\sigma + 2 \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(\xi\nabla\beta.\nabla\psi).\nabla\psi dx \\
&= -2 \int_{C_\varepsilon} \xi (\frac{\partial\beta}{\partial\nu}(\frac{\partial\psi}{\partial\nu})^2 + \frac{\partial\beta}{\partial\tau}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}) d\sigma - 2 \int_{\Gamma_1} \xi \frac{\partial\beta}{\partial\nu}(\frac{\partial\psi}{\partial\nu})^2 d\sigma \\
&+2 \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(\xi\nabla\beta.\nabla\psi).\nabla\psi dx
\end{aligned}$$

Dans les caluls prévédents, on a tenu compte du fait que la dérivée normale $\dfrac{\partial\beta}{\partial\nu}$ de β est nulle sur le fissure Λ et que le gradient tangentiel $\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau}$ de ψ est nul sur Γ.
Par ailleurs, en développant le dernier terme de l'égalité précédente, on trouve

$$\begin{aligned}
J_{22}^{\varepsilon} &= -2 \int_{C_\varepsilon} \xi (\frac{\partial\beta}{\partial\nu}(\frac{\partial\psi}{\partial\nu})^2 + \frac{\partial\beta}{\partial\tau}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}) d\sigma - 2 \int_{\Gamma_1} \xi \frac{\partial\beta}{\partial\nu}(\frac{\partial\psi}{\partial\nu})^2 d\sigma \\
&+2 \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \xi \partial_{ij}\beta \partial_i\psi \partial_j\psi dx + 2\lambda \int_{\Omega_\varepsilon} \xi \left|\nabla\beta.\nabla\psi\right|^2 dx \\
&+ \int_{\Omega_\varepsilon} \xi \nabla\beta.\nabla \left|\nabla\psi\right|^2 dx \\
&= T_1^{\varepsilon} + D_1^{\varepsilon} + D_2^{\varepsilon} + D_3^{\varepsilon} + D_4^{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

On remarque que $D_3^{\varepsilon} > 0$ et $|D_2^{\varepsilon}| \leq C \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \xi \left|\nabla\psi\right|^2 dx$.

De plus, en intégrant par parties sur D_4^{ε}, on obtient

$$\begin{aligned}
D_4^{\varepsilon} &= \int_{C_\varepsilon} \xi \frac{\partial\beta}{\partial\nu} (\left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right|^2) d\sigma + \int_{\Gamma_1} \xi \frac{\partial\beta}{\partial\nu} \left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma \\
&-\lambda \int_{\Omega_\varepsilon} \xi \left|\nabla\beta\right|^2 \left|\nabla\psi\right|^2 dx - \int_{\Omega_\varepsilon} \xi \Delta\beta \left|\nabla\psi\right|^2 dx \\
&= T_4^{\varepsilon} + D_{41}^{\varepsilon} + D_{42}^{\varepsilon} + D_{43}^{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\partial\beta}{\partial\nu} \leq 0$ sur Γ, alors $D_1^{\varepsilon} + D_{41}^{\varepsilon} \geq 0$, d'où

$$J_{22}^{\varepsilon} \geq T_1^{\varepsilon} + T_4^{\varepsilon} + D_2^{\varepsilon} + D_{42}^{\varepsilon} + D_{43}^{\varepsilon}.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} D_2^\varepsilon &= D_2 &&= 2\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega \xi\,\partial_{ij}\,\beta\,\partial_i\,\psi\,\partial_j\psi\,dx,\\
\lim_{\varepsilon\to 0} D_{42}^\varepsilon &= D_{42} &&= -\lambda\int_\Omega \xi\,|\nabla\beta|^2\,|\nabla\psi|^2\,dx,\\
\lim_{\varepsilon\to 0} D_{43}^\varepsilon &= D_{43} &&= -\int_\Omega \xi\Delta\beta\,|\nabla\psi|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Posons $T^\varepsilon = T_1^\varepsilon + T_4^\varepsilon$, alors

$$\begin{aligned}
T^\varepsilon &= -2\int_{C_\varepsilon}\xi(\frac{\partial\beta}{\partial\nu}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2+\frac{\partial\beta}{\partial\tau}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\frac{\partial\psi}{\partial\tau})d\sigma\\
&+\int_{C_\varepsilon}\xi\frac{\partial\beta}{\partial\nu}((\frac{\partial\psi}{\partial\tau})^2+(\frac{\partial\psi}{\partial\nu})^2)d\sigma\\
&=\int_{C_\varepsilon}\left(\xi\frac{\partial\beta}{\partial\nu}((\frac{\partial\psi}{\partial\tau})^2-(\frac{\partial\psi}{\partial\nu})^2)-2\xi\frac{\partial\beta}{\partial\tau}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)d\sigma\\
&= L_\varepsilon(\psi,\psi)\,.
\end{aligned}$$

On remplace ψ par $\psi_R + c\psi_{\mathrm{S}}$, il s'en suit que :

$$L_\varepsilon(\psi,\psi) = L_\varepsilon(\psi_R,\psi_R) + 2cL_\varepsilon(\psi_R,\psi_{\mathrm{S}}) + c^2L_\varepsilon(\psi_{\mathrm{S}},\psi_{\mathrm{S}})\,.$$

En utilisant (5.33) et (5.34), on vérifie

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon(\psi_R,\psi_R) = \liminf_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon(\psi_R,\psi_{\mathrm{S}}) = 0.$$

Lemme 5.11 *On a*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon(\psi,\psi) \geq 0.$$

Preuve :
En faisant appel à (5.35), on vérifie que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon(\psi_{\mathrm{S}},\psi_{\mathrm{S}}) = \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} e^{-2s\alpha}\xi[(\nabla\beta.\nu)((\frac{\partial q_{\mathrm{S}}}{\partial\tau})^2-(\frac{\partial q_{\mathrm{S}}}{\partial\nu})^2)-2\nabla\beta.\tau\frac{\partial q_{\mathrm{S}}}{\partial\tau}\frac{\partial q_{\mathrm{S}}}{\partial\nu}]d\sigma.$$

Posons $m = e^{-2s\alpha}\xi\nabla\beta$ et $Q = m.\nu[(\frac{\partial q_{\mathrm{S}}}{\partial\tau})^2-(\frac{\partial q_{\mathrm{S}}}{\partial\nu})^2]-2m.\tau\frac{\partial q_{\mathrm{S}}}{\partial\tau}\frac{\partial q_{\mathrm{S}}}{\partial\nu}$.
Rappelons que pour ε assez petit, la fonction poids β est définie sur Ω_ε par (voir la section 1.2)

$$\beta(x,y) = -x_1 + c.$$

Ce qui impliquera que $\nabla\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $m = \begin{pmatrix} -e^{-2s\alpha}\xi \\ 0 \end{pmatrix}$.
Les coordonnées radiale and angulaire de m sont alors

$$\begin{cases} m_r &= -e^{-2s\alpha}\xi \cos\theta + 0.\sin\theta, \\ \\ m_\theta &= e^{-2s\alpha}\xi \sin\theta + 0.\cos\theta. \end{cases}$$

De plus,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_S}{\partial r} &= \dfrac{1}{2\sqrt{r}}\sin\theta/2, \\ \\ r^{-1}\dfrac{\partial q_S}{\partial \theta} &= \dfrac{1}{2\sqrt{r}}\cos\theta/2, \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} Q &= \frac{-m_r}{4r}(\cos^2\theta/2 - \sin^2\theta/2) + \frac{m_\theta}{2r}\sin\theta/2.\cos\theta/2 \\ &= \frac{1}{4r}(-m_r\cos\theta + m_\theta\sin\theta) \\ &= \frac{1}{4r}e^{-2s\alpha}\xi. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon(\psi,\psi) \geq 0.$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 5.11.

Grâce au Lemme 5.11, nous aurons alors

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathbf{J}_{22}^\varepsilon \geq \liminf_{\varepsilon\to 0}(D_2^\varepsilon + D_{42}^\varepsilon + D_{43}^\varepsilon),$$

i.e

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{J}_{22}^\varepsilon \geq \lim_{\varepsilon\to 0}(D_2^\varepsilon + D_{42}^\varepsilon + D_{43}^\varepsilon),$$

ainsi que

$$\mathbf{J}_{22} \geq D_2 + D_{42} + D_{43}$$

et

$$\mathbf{I}_{22} \geq -Cs\lambda \int_{Q_T} \xi\left|\nabla\psi\right|^2\,dt\,dx - s\lambda^2 \int_{Q_T} \left|\nabla\beta\right|^2 \xi\left|\nabla\psi\right|^2\,dt\,dx.$$

Finalement, pour $s \geq CT^2$ et λ assez grand, on montre que

$$\begin{aligned} < M_1\psi, (M_2\psi)_2 >_{L^2(Q_T)} &\geq Cs\lambda^2 \int_{Q_T} \xi\left|\nabla\psi\right|^2\,dt\,dx - C's^2\lambda^4 \int_{Q_T} \xi^2\psi^2\,dt\,dx \\ &\quad -C''s\lambda^2 \int_{(0,T)\times\mathcal{O}_0} \xi\left|\nabla\psi\right|^2\,dt\,dx. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Remarque 5.12 ***(i)*** *Notons que, dans notre raisonnement, on a utilisé l'injection $H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ pour traiter les intégrales J^ε_{21}, J^ε_{31} et J^ε_{23}, donc la proposition 5.10 n'était pas nécessaire pour justifier le passage à la limite sur ε. Pour les autres intégrales J^ε_{12}, J^ε_{22} et J^ϵ_{32} qui contiennent $\Delta\psi$, cette injection n'était pas suffisante pour prouver le passage à la limite sur ε. C'est la raison pour laquelle on a utilisé le lemme 5.10.*

(ii) *Dans (5.35), O dépend de l'approximation due à la densité donnée dans le lemme 5.10, mais cette dépendence n'influe pas sur le passage à la limite qui se fait premièrement sur ε.*

Etape 4 : Revenons à l'égalité (5.15), en regroupant les inégalités (5.23), (5.26) et (5.30) du cas 1 et les inégalités (5.38), (5.42) et (5.43) du cas 2, on déduit que

$$\begin{aligned}\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + Cs^3\lambda^4 \int_{Q_T} \xi^3\psi^2\,dt\,dx - Cs^3\lambda^2 \int_{Q_T} \xi^3\psi^2\,dt\,dx \\ -Cs^2\lambda^4 \int_{Q_T} \xi^2\psi^2\,dt\,dx + Cs\lambda^2 \int_{Q_T} \xi\,|\nabla\psi|^2\,dt\,dx \le \|g_{s,\lambda}\|^2_{L^2(Q_T)} \\ +Cs^3\lambda^4 \int_{(0,T)\times\mathcal{O}_0} \xi^3\psi^2\,dt\,dx + Cs\lambda^2 \int_{(0,T)\times\mathcal{O}_0} \xi\,|\nabla\psi|^2\,dt\,dx.\end{aligned}$$

En prenant $s \geq CT^2$ et $s \geq C$, on aura

$$\begin{aligned}\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + s^3\lambda^4 \int_{Q_T} \xi^3\psi^2\,dt\,dx \\ +s\lambda^2 \int_{Q_T} \xi\,|\nabla\psi|^2\,dt\,dx \le C(\|g_{s,\lambda}\|^2_{L^2(Q_T)} + s^3\lambda^4 \int_{(0,T)\times\mathcal{O}_0} \xi^3\psi^2\,dt\,dx \\ +s\lambda^2 \int_{(0,T)\times\mathcal{O}_0} \xi\,|\nabla\psi|^2\,dt\,dx).\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\|g_{s,\lambda}\|^2_{L^2(Q_T)} &\le 2(s^2\lambda^2\,\|\Delta\beta.\xi.\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + s^2\lambda^4\,\left\||\nabla\beta|^2.\xi.\psi\right\|^2_{L^2(Q_T)}) \\ &\le Cs^2\lambda^4 \int_{Q_T} \xi^2\psi^2\,dt\,dx, \quad \text{pour } \lambda > 1 \text{ et } s > 1.\end{aligned}$$

Comme $\xi \geq \dfrac{4}{T^2}$, alors pour $\lambda > C(\Omega, \mathcal{O})$ et $s > C(\Omega, \mathcal{O})(T + T^2)$

$$\begin{aligned}\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + s^3\lambda^4 \int_{Q_T} \xi^3\psi^2\,dt\,dx + s\lambda^2 \int_{Q_T} \xi\,|\nabla\psi|^2\,dt\,dx \\ \le C(s^3\lambda^4 \int_{(0,T)\times\mathcal{O}_0} \xi^3\psi^2\,dt\,dx + s\lambda^2 \int_{(0,T)\times\mathcal{O}_0} \xi\,|\nabla\psi|^2\,dt\,dx).\end{aligned} \tag{5.44}$$

La suite de la preuve s'inspire de [13]. On doit éliminer les termes $\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q_T)}$ et $\|M_2\psi\|^2_{L^2(Q_T)}$ dans l'inégalité précédente.
Pour cela, on écrit

$$\left\{\begin{array}{ll}\psi_t & = M_1\psi + 2s\lambda^2 \left|\nabla\beta\right|^2 \xi\psi + 2s\lambda\xi\left(\nabla\beta.\nabla\psi\right), \\ \\ \Delta\psi & = M_2\psi - s^2\lambda^2\left|\nabla\beta\right|^2 \xi^2\psi - 2s\alpha_t\psi.\end{array}\right.$$

En passant à l'intégrale sur Q_T et en tenant compte du fait que $\|s^{-1}\xi^{-1}\|_\infty \leq 1$ pour $s \geq CT^2$, on déduira alors que

$$\left\{\begin{array}{ll}s^{-1}\displaystyle\int_{Q_T}\xi^{-1}\left|\psi_t\right|^2 dt\,dx & \leq C(\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + s\lambda^2\displaystyle\int_{Q_T}\xi\left|\nabla\psi\right|^2 dt\,dx \\ & \quad + s\lambda^4\displaystyle\int_{Q_T}\xi\psi^2\,dt\,dx), \\ s^{-1}\displaystyle\int_{Q_T}\xi^{-1}\left|\Delta\psi\right|^2 dt\,dx & \leq C(\|M_2\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + s^3\lambda^4\displaystyle\int_{Q_T}\xi^3\psi^2\,dt\,dx \\ & \quad + sT^2\displaystyle\int_{Q_T}\xi^3\psi^2\,dt\,dx).\end{array}\right.$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{ll}s^{-1}\displaystyle\int_{Q_T}\xi^{-1}\left|\psi_t\right|^2 dt\,dx & \leq C(\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + s\lambda^2\displaystyle\int_{Q_T}\xi\left|\nabla\psi\right|^2 dt\,dx \\ & \quad + s^3\lambda^4\displaystyle\int_{Q_T}\xi^3\psi^2\,dt\,dx), \\ s^{-1}\displaystyle\int_{Q_T}\xi^{-1}\left|\Delta\psi\right|^2 dt\,dx & \leq C(\|M_2\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + s\lambda^2\displaystyle\int_{Q_T}\xi\left|\nabla\psi\right|^2 dt\,dx \\ & \quad + s^3\lambda^4\displaystyle\int_{Q_T}\xi^3\psi^2\,dt\,dx).\end{array}\right. \tag{5.45}$$

pour $\lambda > C(\Omega, \mathcal{O})$ et $s > C(\Omega, \mathcal{O})\left(T + T^2\right)$.
La combinaison entre (5.45) et (5.44) implique

$$\begin{gathered}\int_{Q_T} s^{-1}\xi^{-1}\left|\psi_t\right|^2 dt\,dx + s^{-1}\int_{Q_T}\xi^{-1}\left|\Delta\psi\right|^2 dt\,dx + s^3\lambda^4\int_{Q_T}\xi^3\psi^2\,dt\,dx \\ + s\lambda^2\int_{Q_T}\xi\left|\nabla\psi\right|^2 dt\,dx \leq C(s\lambda^2\int_{(0,T)\times\mathcal{O}_0}\xi\left|\nabla\psi\right|^2 dt\,dx + s^3\lambda^4\int_{(0,T)\times\mathcal{O}_0}\xi^3\psi^2\,dt\,dx),\end{gathered} \tag{5.46}$$

pour $\lambda > C(\Omega, \mathcal{O})$ et $s > C(\Omega, \mathcal{O})\left(T + T^2\right)$.
Eliminons, maintenant, la première intégrale du membre de droite de l'inégalité (5.46).

Afin d'y arriver, on introduit une fonction θ vérifiant

$$\theta \in C_c^2(\mathcal{O}), \theta \equiv 1 \text{ dans } \mathcal{O}_0 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 1.$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$s\lambda^2 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}_0} \xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx \leq s\lambda^2 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}} \theta\xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}_0} \xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx \leq -s\lambda^2 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}} \theta\xi\Delta\psi\psi \, dt\, dx - s\lambda^2 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}} \xi (\nabla\theta.\nabla\psi)\psi \, dt\, dx \\ -s\lambda^3 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}} \theta\xi (\nabla\beta.\nabla\psi)\psi \, dt\, dx. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Notons ici que l'intégration par parties effectuée est entièrement justifiée, car on a $\mathcal{O} \subset\subset \Omega$, ce qui suppose que $\mathcal{O}$ est loin de S.
Grâce à l'inégalité de Young, on aura pour $\varepsilon = \varepsilon(\Omega, \mathcal{O}) > 0$ et $\lambda \geq 1$

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}} \theta\xi\Delta\psi\psi \, dt\, dx &\leq \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}} (\frac{\varepsilon}{2} s^{-1}\xi^{-1} |\Delta\psi|^2 \, dt\, dx + C_1 s^3\lambda^4\xi^3 |\psi|^2) \, dt\, dx, \\ s\lambda^2 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}} \xi (\nabla\theta.\nabla\psi)\psi \, dt\, dx &\leq \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}} (\frac{\varepsilon}{2} s\lambda^2\xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx + C_2 s\lambda^2\xi |\psi|^2) \, dt\, dx, \\ s\lambda^3 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}} \theta\xi (\nabla\beta.\nabla\psi)\psi \, dt\, dx &\leq \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}} (\frac{\varepsilon}{2} s\lambda^2\xi |\nabla\psi|^2 + C_2 s\lambda^4\xi |\psi|^2) \, dt\, dx, \end{aligned} \tag{5.48}$$

où $C_1 = C_1(\varepsilon, \Omega, \mathcal{O}) > 0$ et $C_2 = C_2(\varepsilon, \Omega, \mathcal{O}) > 0$ sont deux constantes. La combinaison entre les inégalités (5.48) et l'inégalité (5.47) implique que

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}_0} \xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.s^{-1} \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}} \xi^{-1} |\Delta\psi|^2 \, dt\, dx + \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}} \varepsilon s\lambda^2\xi |\nabla\psi|^2 \, dt\, dx \\ +C_1 s^3\lambda^4 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}} \xi^3 |\psi|^2 \, dt\, dx + C_2 s\lambda^4 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}} \xi |\psi|^2 \, dt\, dx. \end{aligned} \tag{5.49}$$

En choisissant $\varepsilon < 1$ suffisamment petit et par transitivité entre (5.49) et (5.46), on montre que :

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_T} s^{-1}\xi^{-1}\left(|\psi_t|^2 + |\Delta\psi|^2\right) dt\,dx + s^3\lambda^4 \int\limits_{Q_T} \xi^3\psi^2\,dt\,dx + s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} \xi\,|\nabla\psi|^2\,dt\,dx \\ \le C(s^3\lambda^4 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}} \xi^3\psi^2\,dt\,dx),\end{aligned} \tag{5.50}$$

pour $\lambda > C(\Omega, \mathcal{O})$ et $s > C(\Omega, \mathcal{O})(T + T^2)$.
Comme remarque, pour arriver à l'inégalité (5.50), on a absorbé le deuxième terme (resp. le quatrième terme) de droite de (5.49) par le quatrième terme (resp. le troisième terme) de gauche de (5.46).
Grâce au Lemme 5.8, par passage à la limite sur n, l'inégalité (5.50) reste valable pour $\psi \in V$.
Il nous reste une dernière étape à franchir, il faut revenir à la fonction $q = e^{s\alpha}\psi$.
On sait que

$$\left\{\begin{array}{ll} q_t & = e^{s\alpha}\left(\psi_t + s\alpha_t\psi\right), \\ \nabla q & = e^{s\alpha}\left(\nabla\psi - s\lambda\nabla\beta.\xi.\psi\right) \\ \Delta\psi & = e^{-s\alpha}(\Delta q - s\lambda\Delta\beta.\xi.q + s\lambda^2\,|\nabla\beta|^2\,\xi q + 2s\lambda\xi\left(\nabla\beta.\nabla q\right) \\ & \quad +s^2\lambda^2\,|\nabla\beta|^2\,\xi^2 q) \end{array}\right. \tag{5.51}$$

Ces égalités entraînent que

$$s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} e^{-2s\alpha}\xi\,|\nabla q|^2\,dt\,dx \le Cs\lambda^2 \int\limits_{Q_T} \xi\,|\nabla\psi|^2\,dt\,dx + Cs^3\lambda^4 \int\limits_{Q_T} e^{-2s\alpha}\xi^3 q^2\,dt\,dx.$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_T} s^{-1}\xi^{-1}\left(|\psi_t|^2 + |\Delta\psi|^2\right) dt\,dx + s^3\lambda^4 \int\limits_{Q_T} e^{-2s\alpha}\xi^3 q^2\,dt\,dx \\ +s\lambda^2 \int\limits_{Q_T} e^{-2s\alpha}\xi\,|\nabla q|^2\,dt\,dx \le C(s^3\lambda^4 \int\limits_{(0,T)\times\mathcal{O}} e^{-2s\alpha}\xi^3 q^2\,dt\,dx),\end{aligned} \tag{5.52}$$

On a aussi de (5.51)

$$
\begin{aligned}
& s^{-1} \int_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^{-1} |\Delta q|^2 \, dt\, dx \leq C(\int_{Q_T} (s^{-1} \xi^{-1} |\Delta \psi|^2 + s\lambda^2 e^{-2s\alpha} \xi |q|^2) \, dt\, dx + \\
& \int_{Q_T} (s\lambda^4 e^{-2s\alpha} \xi |q|^2 + s\lambda^2 e^{-2s\alpha} \xi |\nabla q|^2 + s^3 \lambda^4 e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2) \, dt\, dx) \\
& \leq C(\int_{Q_T} (s^{-1} \xi^{-1} |\Delta \psi|^2 + s\lambda^2 e^{-2s\alpha} \xi |\nabla q|^2 + s^3 \lambda^4 e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2) \, dt\, dx).
\end{aligned} \tag{5.53}
$$

pour $\lambda \geq 1$ et $s \geq CT$.
De (5.51), on déduit l'inégalité

$$
\begin{aligned}
s^{-1} \int_{Q_T} \xi^{-1} e^{-2s\alpha} |q_t|^2 \, dt\, dx \quad & \leq C(\int_{Q_T} (s^{-1} \xi^{-1} |\psi_t|^2 + sT^2 e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2) \, dt\, dx) \\
& \leq C(\int_{Q_T} (s^{-1} \xi^{-1} |\psi_t|^2 + s^3 \lambda^4 e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2) \, dt\, dx),
\end{aligned} \tag{5.54}
$$

pour $\lambda \geq 1$ et $s \geq C.T^2$.
En introduisant les inégalités (5.53) et (5.54) dans (5.52), pour $\lambda > C(\Omega, \mathcal{O})$ et $s > C(\Omega, \mathcal{O})(T + T^2)$, on déduira finalement l'estimation de Carleman (5.13).

2 Cas de l'équation de Laplace dans un domaine tridimensionel cylindrique

Nous considérons un ouvert borné $\Omega = \Omega' \times (0, H) \subset \mathbb{R}^3$, où $H > 0$. Nous supposons que Ω' est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ. On s'intéressera aux deux cas suivants :

Cas 1. - Ω' possède un coin polygonal rentrant au point S de Γ d'angle ω, $\pi < \omega < 2\pi$. $\Gamma \backslash V(S)$ est supposé être la partie régulière de la frontière Γ, où $V(S)$ est un voisinage arbitraire du sommet S.

Cas 2. - Ω' contient une fissure rectiligne Λ débouchant sur la frontière Γ au point S'. On dénotera par S la pointe de cette fissure et par Γ_1 la partie $\Gamma \backslash \Lambda$. De même que le cas 1, nous supposerons que $\Gamma \backslash V(\Lambda)$ est suffisamment règulière, où $V(\Lambda)$ est un voisinage arbitraire de la fissure Λ.

Pour simplifier les expressions utilisées dans la suite, nous introduisons la notation et définition suivantes :

1. Soient v un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, et f une fonction telle que $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Nous dénotons par $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ le produit scalaire $v.\nabla f$;

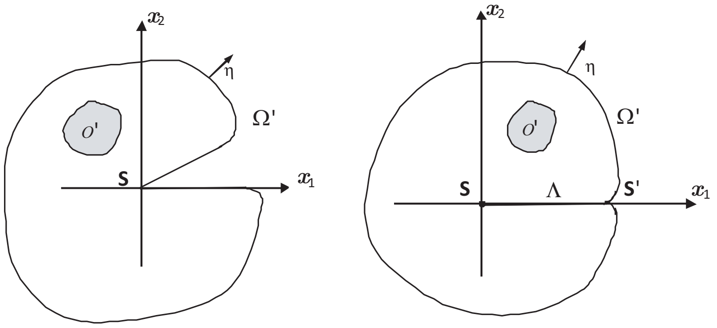

FIGURE 5.3 – Forme géométrique du domaine Ω' dans les deux cas.

2. **Définition 5.13** *On dit que l'ouvert borné Ω' de $\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{H}$ s'il satisfait les propriétés précédentes du cas 1 ou du cas 2.*

Pour $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, considérons le problème de Cauchy suivant associé à l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla_x (B \nabla_x u) & = \chi_{\mathcal{O}} v \quad \text{dans } Q_T = (0,T) \times \Omega \\ u(t,x) & = 0 \quad \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0,x) & = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{5.55}$$

où $v \in L^2(Q_T)$ est un contrôle interne, $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \times \mathcal{O}_3$ est un sous-domaine ouvert de Ω tel que $\mathcal{O}' \subset\subset \Omega'$. Ici $\chi_{\mathcal{O}}$ représente la fonction caractéristique de $\mathcal{O}$ et $B(x)$ est une matrice diagonale dans $M_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\text{Pour } x = (x', x_3) \in \Omega, B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a(x_3) \end{pmatrix}.$$

où : $a \in BV(0,H)$ et $0 < a_{\min} \leq a(x_3) \leq a_{\max}$, presque partout dans $(0,H)$.
Rappelons que l'opérateur $A' = -\Delta_{x'}$ de domaine

$$D(A') = \left\{ u \in H_0^1(\Omega'), \ -\Delta_{x'} u \in L^2(\Omega') \right\}$$

est positif auto-adjoint à résolvante compacte, et donc admet, d'après [2] et [23], des valeurs propres de multiplicité finie satisfaisant

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_k \leq ... \text{ avec } \lim_{k \to +\infty} \mu_k = +\infty,$$

De plus, avec les fonctions propres associées à ces valeurs propres, on peut construire une base orthonormale de $L^2(\Omega')$ qu'on dénote $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

2.1 Résultat principal

Nous rappelons que la deuxième partie de ce travail consiste à montrer la contrôlabilité à zéro du système (5.55) en passant par la méthode de Lebeau-Robbiano [16] et en tenant compte des résultats obtenus dans [7]. Cela nous amène donc à établir, une inégalité spectrale, énoncée dans le théorème ci-dessous, pour les fonctions propres $\phi_k, k \in \mathbb{N}$ de l'opérateur de Laplace-Dirichlet $A' = -\Delta_{x'}$. Nous aborderons cette question dans le chapitre 6 avec plus de détails.

Théorème 5.14 *Soient Ω' un ouvert de classe $\mathcal{H}$ et $\mathcal{O}'$ est un ouvert non vide de Ω'. Il existe une constante positive $C = C(\Omega', \mathcal{O}') > 0$ telle que, pour tout $\mu > 0$ et toute suite réelle $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$*

$$\sum_{\mu_j<\mu} |b_j|^2 \leq Ce^{C\sqrt{\mu}} \int_{\mathcal{O}'} | \sum_{\mu_j<\mu} b_j\phi_j(x) |^2 \, dx, \tag{5.56}$$

où (μ_j, ϕ_j) sont les éléments spectraux de l'opérateur $(A', D(A'))$.

Notons que l'inégalité (5.56) indique une perte d'orthogonalité des fonctions ϕ_k lorsque celles-ci sont restreintes à $\mathcal{O}'$. La preuve de ce théorème sera donnée dans le chapitre qui va suivre, elle est basée essentiellement sur une estimation de Carleman pour la solution du problème elliptique (avec les conditions de Dirichlet homogènes au bord) suivant :

$$\begin{cases} -\partial_S^2 p - \Delta_{x'} p = f & \text{dans } Z = (0, S_1) \times \Omega' \\ \qquad\qquad p = 0 & \text{sur } \partial Z \end{cases} \tag{5.57}$$

où $f \in L^2(Z)$ et $S_1 > 0$. D'après la Proposition 3.4 du chapitre 3, on sait que le problème (5.57) admet une unique solution variationnelle $p \in H_0^1(Z) \cap H^l(Z)$, avec $l < 1 + \dfrac{\pi}{\omega}$.

2.2 Construction de la fonction poids

Avant de se lancer dans la question de la fonction poids, il est utile de noter que nous avons besoin d'une observation de la solution du problème (5.57) sur $\{S_0\} \times \Omega'$, avec $S_0 < S_1$. L'estimation de Carleman permettant d'avoir cette observation sera prouvée sur le domaine $(0, S_0) \times \Omega'$. Afin d'y arriver, nous avons besoin d'une fonction poids satisfaisant certaines propriétés énoncées dans le lemme suivant.

Lemme 5.15 *Soient $\mathcal{O}' \subset\subset \Omega'$ et $Z' = (0, S_0) \times \Omega'$. Il existe une fonction β définie sur $\overline{Z'}$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

(H1) $\beta \in C^1(\overline{Z'}) \cap W^{2,\infty}(Z'), |\nabla\beta| \geq c_1 > 0$ *et* $\beta > 0$ *dans* Z'.

(H2) $\dfrac{\partial\beta}{\partial\eta}(s, x') \leq 0$ *sur* $(0, S_0) \times \Gamma$.

(H3) $\partial_S\beta \geq c_2 > 0$ *sur* $\{0\} \times \Omega' \setminus \mathcal{O}'$.

(H4) $\nabla_{x'}\beta = 0$ *et* $\partial_S\beta \leq -c_3 < 0$ *sur* $\{S_0\} \times \Omega'$,

où c_1, c_2 et c_3 sont trois constantes positives qui dépendent de Z' et de $\mathcal{O}'$, η désignant la normale unitaire sortante à Γ.

La preuve de ce lemme est liée à la fonction poids construite dans les Proposition 5.5 et 5.6.

Preuve du Lemme 5.15 L'idée principale de la construction d'une telle fonction poids

repose sur [9, 12, 18]. En fait, il suffit de trouver une fonction telle que son gradient soit non nul dans un voisinage du bord de notre domaine. Puis en utilisant les fonctions de Morse et le difféomorphisme donné par [14], nous pouvons étendre cette fonction sur tout le domaine tout en isolant ses points critiques en dehors de $\overline{Z'}$.
Considérons premièrement la fonction

$$\beta_* (s, x') = \beta_1 (s) \beta_2 (x') \text{ dans } Z', \text{ où} \tag{5.58}$$

1. $\beta_1 (s) = \sin(s\frac{\pi}{S_0})$. Notons que cette fonction satisfait les propriétés suivantes :

$$\beta_1 \in C^2 (0, S_0), \ \beta_1 (0) = \beta_1 (S_0) = 0, \ \partial_S \beta_1 (S_0) = -\frac{\pi}{S_0} < 0,$$
$$\partial_S \beta_1 (0) = \frac{\pi}{S_0} > 0 \text{ and } \beta_1 (s) > 0 \text{ si } s \in (0, S_0).$$

2. β_2 est donnée par la Proposition 5.5.

Comme $\beta_2 \in C^1(\overline{\Omega'})$, alors nous pouvons trouver un voisinage V de $\partial\Omega'$ tel que

$$V \cap \mathcal{O}' = \emptyset \text{ et } |\nabla\beta_*| > 0 \text{ sur } (0, S_0) \times V,$$

La fonction β_* ainsi construite, il est clair qu'elle satisfait bien les propriétés voulues à l'exception de la propriété **(H1)**, qui est partiellement vérifiée. En effet, on a

$$\beta_* \in C^1(\overline{Z'}) \cap W^{2,\infty} (Z'), |\nabla\beta_*| \geq c_1 > 0 \text{ et } \beta_* > 0 \text{ dans } (0, S_0) \times V. \tag{5.59}$$

où c_1 est une constante telle que $c_1 = c_1(\Omega', \mathcal{O}') > 0$. Afin d'obtenir entièrement **(H1)**, on prolonge la fonction β_* sur tout Z' de la manière suivante : Considérons d'abord les deux ouverts Z'' et $\widetilde{Z}''$ de frontière de classe C^2 tels que :

1. $Z'' \subset Z'$ et $Z' \setminus Z'' \subset (0, S_0) \times V$.
2. $\widetilde{Z}''$ soit un prolongement de Z'' dans $\mathbb{R}^3$ à travers $\{0\} \times \mathcal{O}'$ tel que $\widetilde{Z}'' = Z'' \cup \widetilde{Z}$ et $\overline{Z''} \cap \overline{\widetilde{Z}} = \{0\} \times \mathcal{O}'$.

Puis, on prolonge la fonction β_* sur $\widetilde{Z}''$ par le même argument que celui adapté pour montrer la Proposition 5.5 ou 5.6. Cet argument consiste à trouver une fonction de Morse vérifiant les mêmes propriétés que (5.59) et qui est égale à β_* (à une constante positive et additive près) sur un voisinage V' de $\partial\widetilde{Z}''$. Si on note $\widetilde{\beta}_*$ cette fonction de Morse, d'après [14], on sait qu'il existe un difféomorphisme F sur $\widetilde{Z}''$ qui laisse invariant V' et transporte les points critiques de $\widetilde{\beta}_*$ à l'intérieur de $\widetilde{Z}''\setminus Z''$. En composant $\widetilde{\beta}_*$ avec ce difféomorphisme, on déduit la fonction poids β souhaitée qui vérifie les propriétés $(H1) - (H4)$.

Remarque 5.16 *Compte tenu de la façon dont on a construit la fonction poids β dans la preuve de Lemme 5.15, il est clair qu'on peut toujours fixer un $\varepsilon > 0$ assez petit pour lequel il existe une constante $c_4 > 0$ telle que :*

1. $\dfrac{\partial\beta}{\partial\eta} (s, x') \leq -c_4$ *sur* $(\varepsilon, S_0 - \varepsilon) \times \Gamma$ *lorqu'il est question du* ***cas 1****.*
2. $\dfrac{\partial\beta}{\partial\eta} (s, x') \leq -c_4$ *sur* $(\varepsilon, S_0 - \varepsilon) \times \Gamma_1$ *concernant le* ***cas 2****.*

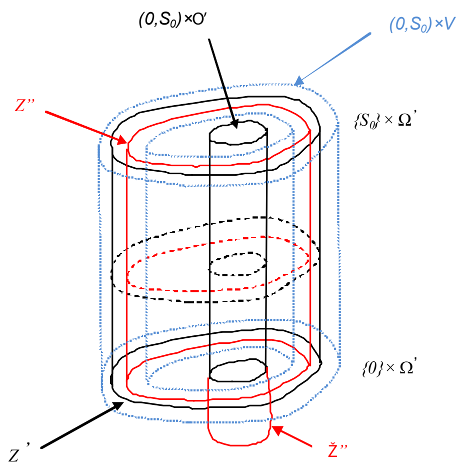

FIGURE 5.4 – Forme géométrique du domaine $\widetilde{Z}''$.

2.3 Preuve du résultat principal

Le lemme çi-après nous montre une inégalité de Carleman pour le problème (5.57) posé dans le domaine $Z' = (0, S_0) \times \Omega'$, valable pour les deux cas 1 et 2. L'argument dont on se servira pour prouver ce lemme est basé sur quelques résultats établis dans [9].
Afin de simplifier les notations, on pose

$$\gamma_1 = \|\beta\|_{W^{2,\infty}(Z')} \text{ et } \gamma_2 = \max\Big(\sup_{(s,x')\in\overline{Z'}} |\nabla\beta(s,x')|^2, \sup_{(s,x')\in\overline{Z'}} |\nabla\beta(s,x')|\Big).$$

Lemme 5.17 *Il existe trois constantes* $C(c_1, c_2, c_3, \gamma_1, \gamma_2, \Omega', \mathcal{O}') > 0$, $\lambda_1 = \lambda_1(c_1, \gamma_1, \gamma_2, \Omega', \mathcal{O}') \geq 1$ *et* $\tau_1 = \tau_1(c_1, c_3, \gamma_1, \gamma_2, \Omega', \mathcal{O}') \geq 1$ *telles que, pour tout* $\tau \geq \tau_1$ *et tout* $\lambda \geq \lambda_1$*, l'inégalité suivante*

$$\begin{gathered}
\tau^3\lambda^4 \iint_{Z'} e^{2\tau\varphi}\varphi^3 |p|^2 \, dx'ds + \tau\lambda^2 \iint_{Z'} e^{2\tau\varphi}\varphi \, |\nabla p|^2 \, dx'ds \\
+\tau\lambda \int_{\Omega'\setminus\mathcal{O}'} (e^{2\tau\varphi}\varphi)(0,x') \, |\partial_S p(0,x')|^2 \, dx' + \tau\lambda \int_{\Omega'} (e^{2\tau\varphi}\varphi)(S_0,x') \, |\partial_S p(S_0,x')|^2 \, dx' \\
+\tau^3\lambda^3 \int_{\Omega'} (e^{2\tau\varphi}\varphi^3)(S_0,x') \, |p(S_0,x')|^2 \, dx' \leq C \Bigg[\int_{Z'} e^{2\tau\varphi} \, |Ap|^2 \, dx'ds \\
+\tau\lambda \int_{\Omega'} (e^{2\tau\varphi}\varphi)(S_0) \, |\nabla_{x'} p(S_0)|^2 \, dx' + \tau\lambda \int_{\mathcal{O}'} (e^{2\tau\varphi}\varphi)(0) \, |\partial_S p(0)|^2 \, dx' \Bigg]
\end{gathered} \tag{5.60}$$

est vérifiée pour tout p *dans* $D(A)$ *dans le* ***cas 1*** *et pour tout* $p \in C^2[0, S_0] \bigotimes D(A')$ *(où* $S_0 < S_1$, $A = -\partial_S^2 - \triangle_{x'}$ *et* $A' = -\triangle_{x'}$*). Ici* $\varphi = e^{\lambda\beta}$ *et* β *est la fonction poids construite dans le lemme 5.15.*

Notons que $p \in C^2[0, S_0] \bigotimes D(A')$ est l'espace des combinaisons linéaires finies de fonctions de la forme $f(s)g(x')$ avec $(f, g) \in C^2[0, S_0] \times D(A')$. Afin de simplifier nos expressions dans ce qui va suivre, nous utiliserons la notation $C(c_1, c_2, c_3, \gamma_1, \gamma_2, \Omega', \mathcal{O}')$ ou simplement C pour la constante générique qui dépend seulement de $c_1, c_2, c_3, \gamma_1, \gamma_2, \Omega'$ et $\mathcal{O}'$.

Remarque 5.18 *1. En prenant p dans $C^2[0, S_0] \bigotimes D(A')$ dans le **cas 2**, cela nous permet de définir le second terme du membre droit de inégalité (5.60). Le choix de cet espace est complétement approprié avec notre situation, puisque l'inégalité spectrale (5.56) sera démontrée via l'estimation de Carleman (5.60) appliquée dans $C^2[0, S_0] \bigotimes D(A')$;*

*2. Tenant compte de la Remarque 5.16, on peut rajouter dans l'estimation (5.60) une autre observation, qui est l'intégrale de bord $\tau\lambda \int\limits_{\varepsilon}^{S_0-\varepsilon} \int\limits_{\Gamma} (e^{2\tau\varphi}\varphi|\frac{\partial p}{\partial \eta}|^2)\,(s, x')\, d\sigma(x')ds$ dans le **cas 1**, et l'intégrale $\tau\lambda \int\limits_{\varepsilon}^{S_0-\varepsilon} \int\limits_{\Gamma_1} \left(e^{2\tau\varphi}\varphi|\frac{\partial p}{\partial \eta}|^2\right)(s, x')\, d\sigma(x')ds$ dans le **cas 2**, et ceci pour $\varepsilon > 0$ assez petit.*

Preuve du Lemme 5.17 Pour $\tau > 0$ et $\lambda > 0$, on introduit la fonction $\psi = e^{\tau\varphi}p$, où $\varphi = e^{\lambda\beta}$ et β est la fonction poids donnée dans le Lemme 5.15. Par un calcul simple, cette nouvelle fonction satisfait la relation suivante

$$M_1\psi + M_2\psi = f_\tau,$$

où

$$\begin{aligned} M_1\psi &= \tau^2\lambda^2\varphi^2|\nabla\beta|^2\psi - A\psi \\ M_2\psi &= -2\tau\lambda\varphi\nabla\beta.\nabla\psi - 2\tau\lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2\psi \\ f_{\tau,\lambda} &= -e^{\tau\varphi}f + \tau\lambda\varphi\Delta\beta\psi - \tau\lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2\psi. \end{aligned}$$

Si nous notons $< ., . >_{L^2(Z')}$ le produit scalaire dans $L^2(Z')$ et $\|.\|_{L^2(Z')}$ la norme associée, alors

$$\|M_1\psi\|^2_{L^2(Z')} + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Z')} + 2 < M_1\psi, M_2\psi >_{L^2(Z')} = \|f_{\tau,\lambda}\|^2_{L^2(Z')}.$$

Ensuite, on écrira $< M_1\psi, M_2\psi >_{L^2(Z')}$ comme $\sum\limits_{1\le i,j\le 2} I_{ij}$, où I_{ij} est le produit scalaire entre le i-ième terme dans l'expression de $M_1\psi$ et le j-ième terme dans l'expression de $M_2\psi$. En développant ces termes par des intégrations par parties et puis en faisant certaines majorations, on atteindra, moyennant quelques techniques d'absorption connues dans les estimations de Carleman, l'inégalité voulue (5.60). Mais avant d'entamer ces calculs, rappelons les propriétés suivantes dont leur utilité se verra lorsqu'il est question de simplifier certaines intégrales au bord

Remarque 5.19 *Si on note ν la normale unitaire sortante à $\partial Z'$, alors on a les propriétés suivantes qu'on utilisera pour expliquer les calculs obtenus après intégration par parties :*

1. *Sur* $(0,S_0)\times\Gamma$, *on a* $\psi=0$ *et* $\nu=(0,\eta)^t$. *Alors,* $\nabla_{x'}\psi=\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}\eta$ *et* $\dfrac{\partial\beta}{\partial\nu}=\dfrac{\partial\beta}{\partial\eta}$.
2. *Sur* $\{0\}\times\Omega'$, *on a* $\nu=(-1,0,0)^t$ *et* $\nabla\psi=(\partial_{\mathrm{S}}\psi,0,0)$ (*car* $\psi=0$).
3. *Sur* $\{S_0\}\times\Omega'$, *on a aussi* $\nu=(1,0,0)^t$ *et* $\nabla_{x'}\beta=0$.

Cas 1 : Dans ce qui suit, nous développons les termes $I_{ij}, 1\le i,j\le 2$ en intégrant par parties plusieurs fois sur le domaine Z'. Donc, nous aurons à considérer quatre intégrales où seules I_{21} et I_{22} demandent un traitement particulier. En fait, cela est dû à la présence de $\Delta\psi$ ainsi qu'à la régularité de la solution p du problème (5.57) qui est insuffisante pour justifier certaines intégrations par parties. Cependant, pour les autres intégrales, ce problème n'est pas posé puisque notre domaine est à frontière Lipschitzienne (voir [23]).
• Pour le terme I_{11}, on a :

$$\begin{aligned} I_{11} &= -2\tau^3\lambda^3\int_{Z'}\varphi^3|\nabla\beta|^2\psi(\nabla\beta.\nabla\psi)dx'ds\\ &= -\tau^3\lambda^3\int_{Z'}\varphi^3|\nabla\beta|^2\left(\nabla\psi^2.\nabla\beta\right)dx'ds. \end{aligned}$$

Aprés intégration par parties, I_{11} devient :

$$I_{11}=3\tau^3\lambda^4\int_{Z'}\varphi^3|\nabla\beta|^4\psi^2dx'ds-\tau^3\lambda^3\int_{\partial Z'}\varphi^3|\nabla\beta|^2\left(\nu.\nabla\beta\right)\psi^2d\sigma\left(s,x'\right)+X_{11}$$

où

$$\begin{aligned} X_{11} &= \tau^3\lambda^3\int_{Z'}\varphi^3\nabla|\nabla\beta|^2.\nabla\beta\psi^2dx'ds\\ &+\tau^3\lambda^3\int_{Z'}\varphi^3|\nabla\beta|^2div\left(\nabla\beta\right)\psi^2dx'ds \end{aligned}$$

• On a $I_{12}=-2\tau^3\lambda^4\int_{Z'}\varphi^3|\nabla\beta|^4\psi^2dx'ds$ et

$$\begin{aligned} I_{11}+I_{12} &= \tau^3\lambda^4\int_{Z'}\varphi^3|\nabla\beta|^4\psi^2dxds-\tau^3\lambda^3\int_{\partial Z'}\varphi^3|\nabla\beta|^2\left(\nu.\nabla\beta\right)\psi^2d\sigma\left(s,x'\right)\\ &+X_{11} \end{aligned} \tag{5.61}$$

Compte tenu de (**H1**) et de (**H4**), il existe une constante $C=C(c_1,\|\beta\|_{W^{2,\infty}(Z')})>0$ telle que pour tout $\lambda\ge C$

$$\begin{aligned} I_{11}+I_{12} &\ge c_1^4\tau^3\lambda^4\int_{Z'}\varphi^3\psi^2dx'ds-\tau^3\lambda^3\int_{\Omega'}\left(\varphi^3\left(\partial_{\mathrm{S}}\beta\right)^3\psi^2\right)\left(S_0,x'\right)dx'\\ &\ge C(\tau^3\lambda^4\int_{Z'}\varphi^3\psi^2dx'ds+\tau^3\lambda^3\int_{\Omega'}\left(\varphi^3\psi^2\right)\left(S_0,x'\right)dx'). \end{aligned} \tag{5.62}$$

puisque le terme X_{11} est absorbé par $\tau^3\lambda^4\int_{Z'}\varphi^3\psi^2dx'ds$, et $\psi=0$ sur $(0,S_0)\times\partial\Omega'$ et sur $\{0\}\times\Omega'$.
• Concernant le traitement du terme $I_{21}=-2\tau\lambda\int_{Z'}\varphi\Delta\psi\left(\nabla\beta.\nabla\psi\right)dx'ds$, on s'inspirera de la même idée suivie dans [17]. D'où le lemme suivant :

Lemme 5.20 *Pour* $\psi \in H^l(Z')$ *tel que* $3/2 < l < 2$*, on a*

$$\begin{aligned}
-2\tau\lambda \int\limits_{Z'} \varphi\Delta\psi\,(\nabla\beta.\nabla\psi)\,dx'ds \; &= 2\tau\lambda^2 \int\limits_{Z'} \varphi|\nabla\psi.\nabla\beta|^2 dx'ds \\
&-\tau\lambda^2 \int\limits_{Z'} \varphi|\nabla\beta|^2|\nabla\psi|^2 dx'ds \\
&-2\tau\lambda \int\limits_{\partial Z'} \varphi\,(\nu.\nabla\psi)\,(\nabla\beta.\nabla\psi)\,d\sigma \\
&+\tau\lambda \int\limits_{\partial Z'} \varphi\,(\nu.\nabla\beta)\,|\nabla\psi|^2 d\sigma \\
&+2\tau\lambda \sum_{1\le i,j\le 3} \int\limits_{Z'} \varphi(\partial j\psi)\partial_j(\partial_i\beta)\partial_i\psi dx'ds \\
&-\tau\lambda \int\limits_{Z'} \varphi\Delta\beta|\nabla\psi|^2 dx'ds.
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Preuve du Lemme 5.20 Grâce à la densité de $H^2(Z')$ dans $H^l(Z')$ (voir [23]), on prend premièrement ψ dans $H^2(Z')$. En intégrant par parties, on trouve :

$$\begin{aligned}
-2\tau\lambda \int\limits_{Z'} \varphi\Delta\psi\,(\nabla\beta.\nabla\psi)\,dx'ds \; &= 2\tau\lambda^2 \int\limits_{Z'} \varphi|\nabla\psi.\nabla\beta|^2 dx'ds \\
&+\tau\lambda \sum_{1\le i,j\le 3} \int\limits_{Z'} \varphi\partial_i\beta\partial_i(\partial_j\psi)^2 dx'ds \\
&+2\tau\lambda \sum_{1\le i,j\le 3} \int\limits_{Z'} \varphi(\partial j\psi)\partial_j(\partial_i\beta)\partial_i\psi dx'ds \\
&-2\tau\lambda \int\limits_{\partial Z'} \varphi\,(\nu.\nabla\psi)\,(\nabla\beta.\nabla\psi)\,d\sigma.
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Une seconde intégration par parties dans la seconde intégrale du membre droit de (5.64) nous donne

$$\begin{aligned}
-2\tau\lambda \int\limits_{Z'} \varphi\Delta\psi\,(\nabla\beta.\nabla\psi)\,dx'ds \; &= 2\tau\lambda^2 \int\limits_{Z'} \varphi|\nabla\psi.\nabla\beta|^2 dx'ds \\
&-\tau\lambda^2 \int\limits_{Z'} \varphi|\nabla\beta|^2|\nabla\psi|^2 dx'ds \\
&-2\tau\lambda \int\limits_{\partial Z'} \varphi\,(\nu.\nabla\psi)\,(\nabla\beta.\nabla\psi)\,d\sigma \\
&+\tau\lambda \int\limits_{\partial Z'} \varphi\,(\nu.\nabla\beta)\,|\nabla\psi|^2 d\sigma \\
&+2\tau\lambda \sum_{1\le i,j\le 3} \int\limits_{Z'} \varphi(\partial_j\psi)\partial_j(\partial_i\beta)\partial_i\psi dx'ds \\
&-\tau\lambda \int\limits_{Z'} \varphi\Delta\beta|\nabla\psi|^2 dx'ds.
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Sous réserve que l'intégrale du membre de gauche de l'égalité précédente soit considérée comme un crochet de dualité, l'identité (5.65) reste valable pour ψ dans $H^l(Z')$ puisque tous les termes du membre de droite sont bien définis et dépendent continûment de ψ dans cet espace. En effet, le terme du membre de gauche de (5.65)

$$\Delta\psi \in H^{l-2}(Z')$$

et

$$\varphi\nabla\beta.\nabla\psi \in H^{l-1}(Z') \subset H^{2-l}(Z') = H_0^{2-l}(Z'),$$

puisque $l-1 > 2-l$ et $2-l < 1/2$. Concernant les intégrales sur Z' du membre droit de (5.65), elles dépendent aussi continûment de $\psi \in H^1(Z')$. Pour celles qui sont au bord, grâce au Theorem 1.5.1.2 dans [[23] section 1.5], on peut vérifier qu'elles dépendent continûment de $\psi \in H^l(Z')$, puisque

$$\nabla\psi \in H^{l-3/2}(\partial Z')^3 \subset L^2(\partial Z')^3 \text{ et } \nu.\nabla\psi \in H^{l-3/2}(\partial Z') \subset L^2(\partial Z');$$

ce qui termine la preuve du Lemme 5.20.

Grâce à la proposition 3.4, $\psi \in H^l(Z)$ où $\frac{3}{2} < l < 2$, et donc le Lemme 5.20 peut être appliqué a ψ. Par ailleurs, les intégrales au bord (5.63) deviennent

$$\begin{aligned}
&-2\tau\lambda \int\limits_{\partial Z'} \varphi\,(\nu.\nabla\psi)\,(\nabla\beta.\nabla\psi)\,d\sigma\,(s,x') + \tau\lambda \int\limits_{\partial Z'} \varphi\,(\nu.\nabla\beta)\,|\nabla\psi|^2 d\sigma\,(s,x') = \\
&-\tau\lambda \int\limits_{\Omega'} \varphi\,(S_0,x)\,\partial_{\mathrm{S}}\beta\,(S_0,x')\,(\partial_{\mathrm{S}}\psi\,(S_0,x'))^2\,dx' \\
&-\tau\lambda \int\limits_0^{S_0}\int\limits_{\Gamma} \varphi(\frac{\partial\beta}{\partial\eta})(\frac{\partial\psi}{\partial\eta})^2 d\sigma\,(x')\,ds \\
&+\tau\lambda \int\limits_{\mathcal{O}'} \varphi\,(0,x')\,\partial_{\mathrm{S}}\beta\,(0,x')\,(\partial_{\mathrm{S}}\psi\,(0,x'))^2\,dx' \\
&+\tau\lambda \int\limits_{\Omega'\setminus\mathcal{O}'} \varphi\,(0,x')\,\partial_{\mathrm{S}}\beta\,(0,x')\,(\partial_{\mathrm{S}}\psi\,(0,x'))^2\,dx' \\
&+\tau\lambda \int\limits_{\Omega'} \varphi\,(S_0,x')\,\partial_{\mathrm{S}}\beta\,(S_0,x')\,|\nabla_{x'}\psi\,(S_0,x')\,|^2 dx' \\
&= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5.
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Dans (5.66), on a tenu compte de la Remarque 5.19 et du fait que :

1. Le gradient tangentiel $\dfrac{\partial\psi}{\partial\mu}$ de ψ s'annule sur $(0,S_0)\times\Gamma$ et sur $\{0\}\times\Omega'$.
2. $|\nabla\psi(S_0,x')|^2 = (\dfrac{\partial\psi}{\partial s}(S_0,x'))^2 + |\nabla_{x'}\psi(S_0,x')|^2$ sur $\{S_0\}\times\Omega'$.

A partir des propriétés **(H2)**, **(H3)** et **(H4)**, on déduit respectivement que les intégrales au bord T_2, T_4 and T_1 sont positives, et de plus

$$\begin{aligned}
-\tau\lambda \int\limits_{\Omega'} (\varphi\partial_{\mathrm{S}}\beta\,(\partial_{\mathrm{S}}\psi)^2)\,(S_0,x')\,dx' &\geq c_3\tau\lambda \int\limits_{\Omega'} (\varphi\,(\partial_{\mathrm{S}}\psi)^2)\,(S_0,x')\,dx' \\
\tau\lambda \int\limits_{\Omega'\setminus\mathcal{O}'} (\varphi\partial_{\mathrm{S}}\beta\,(\partial_{\mathrm{S}}\psi)^2)\,(0,x')\,dx' &\geq c_2\tau\lambda \int\limits_{\Omega'\setminus\mathcal{O}'} (\varphi\,(\partial_{\mathrm{S}}\psi)^2)\,(0,x')\,dx'
\end{aligned}$$

En additionnant ces deux dernières inégalités, on trouve que

$$\begin{aligned}
-\tau\lambda \int\limits_0^{S_0}\int\limits_{\Gamma} \varphi(\frac{\partial\beta}{\partial\eta})(\frac{\partial\psi}{\partial\eta})^2 d\sigma\,(x')\,ds - \tau\lambda \int\limits_{\Omega'} (\varphi\partial_{\mathrm{S}}\beta\,(\partial_{\mathrm{S}}\psi)^2)\,(S_0,x')\,dx' \\
+\tau\lambda \int\limits_{\Omega'\setminus\mathcal{O}'} (\varphi\partial_{\mathrm{S}}\beta\,(\partial_{\mathrm{S}}\psi)^2)\,(0,x')\,dx' \geq C(\tau\lambda \int\limits_{\Omega'} (\varphi\,(\partial_{\mathrm{S}}\psi)^2)\,(S_0,x')\,dx' \\
+\tau\lambda \int\limits_{\Omega'\setminus\mathcal{O}'} (\varphi\,(\partial_{\mathrm{S}}\psi)^2)\,(0,x')\,dx'),
\end{aligned} \tag{5.67}$$

où C est une constante positive telle que $C = C(c_2, c_3, \Omega', \mathcal{O}')$.
Notons que les deux termes du membre de droite de l'inégalité (5.67) peuvent être retrouvés dans l'inégalité (5.60).
Concernant les termes T_3 et T_5, le premier est négatif et le second est de signe indéterminé.

Grâce à la propriété **(H1)** et au même argument que précédemment, ces intégrales sont récupérées dans le membre droit de l'inégalité de Carleman (5.60).

Pour ce qui est des quatre intégrales sur Z' contenues dans le membre de droite de l'égalité (5.63), la première est de signe positif et la seconde sera additionnée avec un terme de la même forme qu'on retrouvera dans I_{22}. Concernant les deux dernières intégrales sur Z' qui restent dans (5.63), on utilisera la propriété **(H1)** afin de les absorber par le terme positif

$$\tau\lambda^2 \int_{Z'} \varphi|\nabla\psi|^2 dx'ds.$$

Ce terme apparaîtra dans les calculs qu'on effectuera par la suite.

• L'intégrale $I_{22} = -2\tau\lambda^2 \int_{Z'} \varphi\,(\Delta\psi)\,|\nabla\beta|^2\psi dxds$, sera traitée de la même manière que I_{21}. Après intégration par parties, on trouve :

$$I_{22} = 2\tau\lambda^2 \int_{Z'} \varphi|\nabla\beta|^2|\nabla\psi|^2 dx'ds - 2\tau\lambda^2 \int_{\partial Z'} \varphi\,(\nu.\nabla\psi)\,|\nabla\beta|^2\psi d\sigma\,(s,x') + X_{22},$$

où

$$X_{22} = 2\tau\lambda^2 \int_{Z'} \nabla\psi.\nabla(\varphi(|\nabla\beta|^2))\psi dx'ds.$$

En vertu de l'inégalité de Young et du fait que $\varphi \geq 1$ dans Z', l'intégrale de bord dans I_{22} devient

$$\begin{aligned} -2\tau\lambda^2 \int_{\partial Z'} \varphi\,(\nu.\nabla\psi)\,|\nabla\beta|^2\psi d\sigma\,(s,x') &= -2\tau\lambda^2 \int_{\Omega'} (\varphi(\partial_S\beta)^2\psi\partial_S\psi)\,(S_0,x')\,dx' \\ &\leq \tau^2\lambda^3 \int_{\Omega'} (\varphi^3(\partial_S\beta)^2\psi^2)\,(S_0,x')\,dx' \\ &+\lambda \int_{\Omega'} (\varphi(\partial_S\beta)^2(\partial_S\psi)^2)\,(S_0,x')\,dx'. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Dans (5.68), on a tenu compte du fait que $\psi = 0$ sur $\{0\}\times\Omega'$ et sur $(0,S_0)\times\Omega'$. En prenant τ suffisamment grand, les deux intégrales au bord du membre de droite de l'inégalité (5.68) peuvent être absorbées respectivement par l'intégrale de bord de (5.62) et par T_1 de (5.66). Concernant la première intégrale sur Z' de I_{22}, en l'additionnant avec le second terme du membre de droite (5.63), la somme devient

$$\tau\lambda^2 \int_{Z'} \varphi|\nabla\beta|^2|\nabla\psi|^2 dx'ds.$$

Grâce à la propriété **(H1)**, on a

$$2\tau\lambda^2 \int_{Z'} \varphi|\nabla\beta|^2|\nabla\psi|^2 dx'ds \geq C\tau\lambda^2 \int_{Z'} \varphi\,|\nabla\psi|^2\,dx'ds. \tag{5.69}$$

où C est une constante telle que $C = C(c_1,\Omega',S_0) > 0$.

Par ailleurs, pour le terme X_{22} on a

$$X_{22} = 2\tau\lambda^3 \int_{Z'} (\nabla\psi.\nabla\beta)|\nabla\beta|^2\varphi\psi dx'ds + 2\tau\lambda^2 \int_{Z'} (\nabla\psi.\nabla|\nabla\beta|^2)\varphi\psi dx'ds \tag{5.70}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut montrer aisément que les deux termes du membre droit de (5.70) peuvent être absorbés par les termes positifs

$$\tau^3\lambda^4 \int_{Z'} \varphi^3\psi^2 dx'ds \text{ et } \tau\lambda^2 \int_{Z'} \varphi\,|\nabla\psi|^2\, dx'ds,$$

en choisissant bien sûr $\tau \geq 1$ et $\lambda \geq 1$ suffisamment grands.
Finalement, on regroupe toutes les inégalités obtenues puis on revient à la fonction p en utilisant encore une fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que les techniques de dominance qu'on s'est servi tout le long de notre raisonnement. Nous arrivons donc à l'inégalité de Carleman (5.60).

Cas 2 : Pour ce qui est du cas où Ω' est un domaine avec une fissure rectiligne débouchant sur la frontière de Ω', on choisit un système de coordonnées (x_1, x_2) d'origine la pointe S de la fissure Λ et tel que l'axe positif Sx_1 contienne la fissure Λ (voir Figure 5.2).
Soit $\Omega'_\varepsilon = \Omega' \backslash B(S, \varepsilon)$, où $B(S, \varepsilon)$ est la boule ouverte de rayon $\varepsilon > 0$ et de centre S. Remarquons que si nous divisons Ω'_ε en deux sous-domaines $\Omega'_{\varepsilon+}$ et $\Omega'_{\varepsilon-}$ où

$$\Omega'_{\varepsilon+} = \Omega'_\varepsilon \cap \{x_2 > 0\} \text{ et } \Omega'_{\varepsilon-} = \Omega'_\varepsilon \cap \{x_2 < 0\},$$

alors nous pouvons reprendre les mêmes calculs comme dans le cas 1 sauf que les intégrations par parties se feront sur les sous-domaines $Z'_{\varepsilon+} = (0, S_0) \times \Omega'_{\varepsilon+}$ et $Z'_{\varepsilon-} = (0, S_0) \times \Omega'_{\varepsilon-}$ de Z', pour ε assez petit.
En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on peut justifier le passage à la limite, lorsque ε tend vers zéro, dans les intégrales volumiques sur Z'_ε et dans certaines intégrales au bord $\partial Z'_\varepsilon$ obtenues dans le cas 1 après intégration par parties. Concernant le traitement des autres intégrales au bord, on adopte le même argument de densité de la Proposition 6.1 de [22]. Cet argument consiste dans un premier temps à utiliser la forme particulière de p, à savoir que $p \in C^2[0, S_0] \bigotimes D(A')$. Cela signifie que p est une combinaison finie de fonctions $p_j(s, x') = p_{j,1}(s)p_{j,2}(x')$ où $p_{j,1} \in C^2[0, S_0]$ et $p_{j,2} \in D(A')$. Dans un deuxième temps, on approche chaque fonction $p_{j,2}$ par des fonctions plus régulières appartenant à l'espace $\mathcal{W} = D(A') \cap$ Vect$\{C^1(\overline{\Omega'}); g_{\mathrm{S}}\}$, où

$$g_{\mathrm{S}}(r, \theta) = \sqrt{r} \sin(\frac{\theta}{2}).$$

(ici (r, θ) sont les coordonnées polaires par rapport à la géométrie considérée dans la figure 5.3). Ceci nous permet aussi d'approcher p par des fonctions plus régulières qu'on continue à dénoter par p. Donc, dans cet sous-espace :

$$p = O(1), |\nabla p| = O(\frac{1}{\sqrt{r}}), \tag{5.71}$$

dans un voisinage de la pointe de la fissure Λ puisque la partie singulière g_{S} vérifie :

$$g_{\mathrm{S}} = O(\sqrt{r}), |\nabla g_{\mathrm{S}}| = O(\frac{1}{\sqrt{r}}). \tag{5.72}$$

En procédant de cette manière, on peut calculer toutes les intégrales de l'inégalité (5.60) pour p dans ce sous-espace $\mathcal{W}$ de $C^2[0,S_0]\bigotimes D(A')$ (voir [22]). Finalement, par densité on déduira l'inégalité souhaitée (5.60) pour tout p dans $C^2[0,S_0]\bigotimes D(A')$.
Dénotons I^ε_{ij}, pour $1\leq i,j\leq 3$ l'intégrale I_{ij} sur le domaine $Z'_\varepsilon=(0,S_0)\times\Omega_\varepsilon$. Nous dénotons aussi C_ε l'ensemble $(0,S_0)\times\partial B(O,\varepsilon)$ et ν_ε la normale unitaire sortante à ∂Z_ε. On a alors :

• Pour les intégrales I^ε_{11} et I^ε_{12}, elles deviennent

$$\begin{aligned} I^\varepsilon_{11}+I^\varepsilon_{12} &= \tau^3\lambda^4\int_{Z'_\varepsilon}\varphi^3|\nabla\beta|^4\psi^2dx'ds+\tau^3\lambda^3\int_{Z'_\varepsilon}\varphi^3\nabla|\nabla\beta|^2.\nabla\beta\psi^2dx'ds\\ &+\tau^3\lambda^3\int_{Z'_\varepsilon}|\nabla\beta|^2\mathrm{div}\,(\nabla\beta)\,\varphi^3\psi^2\mathrm{dx'ds}-\tau^3\lambda^3\int_{\partial Z'_\varepsilon}\varphi^3|\nabla\beta|^2(\nu_\varepsilon.\nabla\beta)\psi^2\mathrm{d}\sigma \end{aligned} \tag{5.73}$$

Grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, les trois premières intégrales de $I^\varepsilon_{11}+I^\varepsilon_{12}$ tendent vers les mêmes termes que ceux de $I_{11}+I_{12}$, puisque $\psi\in H^1(Z')$ et $\varphi,\beta\in W^{2,\infty}(Z')$. Cette façon de justifier le passage à la limite sur ε sera la même pour le traitement des autres intégrales sur Z'_ε. Concernant l'intégrale de bord de (5.73), on aura

$$\begin{aligned} -\tau^3\lambda^3\int_{\partial Z'_\varepsilon}\varphi^3|\nabla\beta|^2(\nu_\varepsilon.\nabla\beta)\psi^2d\sigma(s,x') &= -\tau^3\lambda^3\int_{\{S_0\}\times\Omega'_\varepsilon}\varphi^3|\nabla\beta|^2\,(\nu_\varepsilon.\nabla\beta)\,\psi^2d\sigma\\ &-\tau^3\lambda^3\int_{C_\varepsilon}\varphi^3|\nabla\beta|^2\,(\nu_\varepsilon.\nabla\beta)\,\psi^2d\sigma \end{aligned} \tag{5.74}$$

Notons que, dans (5.74), nous avons tenu compte du fait que ψ s'annule sur $(0,S_0)\times\partial\Omega'$. En faisant tendre ε vers zéro, on trouve exactement l'inégalité (5.62), puisque du théorème de convergence dominée de Lebesgue et de (5.71)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\varphi^3|\nabla\beta|^2\,(\nu_\varepsilon.\nabla\beta)\,\psi^2d\sigma\,(s,x')=0.$$

• Pout traiter l'intégrale $I^\varepsilon_{21}=-2\tau\lambda\int_{Z'_\varepsilon}\varphi\Delta\psi\,(\nabla\beta.\nabla\psi)\,dx'ds$, on suit le même raisonnement que dans le cas 1. On obtient après deux intégrations par parties sur Z'_ε,

$$\begin{aligned} I^\varepsilon_{21} &= 2\tau\lambda^2\int_{Z'_\varepsilon}\varphi|\nabla\psi.\nabla\beta|^2dx'ds-\tau\lambda^2\int_{Z'_\varepsilon}\varphi|\nabla\beta|^2|\nabla\psi|^2dx'ds\\ &- 2\tau\lambda\int_{\partial Z'_\varepsilon}\varphi\,(\nu_\varepsilon.\nabla\psi)\,(\nabla\beta.\nabla\psi)\,d\sigma\,(s,x')+\tau\lambda\int_{\partial Z'_\varepsilon}\varphi\,(\nu_\varepsilon.\nabla\beta)\,|\nabla\psi|^2d\sigma\,(s,x')\\ &+ 2\tau\lambda\sum_{1\leq i,j\leq 3}\int_{Z'_\varepsilon}\varphi(\partial j\psi)\partial_j(\partial_i\beta)\partial_i\psi dx'ds-\tau\lambda\int_{Z'_\varepsilon}\varphi\Delta\beta|\nabla\psi|^2dx'ds. \end{aligned}$$

Toutes les intégrales sur Z'_ε tendent vers celles de (5.63) quand $\varepsilon\to 0$. Pour les intégrales au bord, elles s'expriment comme suit

$$\begin{aligned} \tau\lambda\int_{\partial Z'_\varepsilon}\varphi(-2(\frac{\partial\psi}{\partial\nu})(\nabla\beta.\nabla\psi) &+ (\frac{\partial\beta}{\partial\nu})|\nabla\psi|^2)d\sigma=\tau\lambda\int_{\partial Z_\varepsilon}\varphi\frac{\partial\beta}{\partial\nu}(|\nabla_T\psi|^2-(\frac{\partial\psi}{\partial\nu})^2)d\sigma\\ &- 2\tau\lambda\int_{\partial Z'_\varepsilon}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\nu}(\nabla_T\beta.\nabla_T\psi)d\sigma, \end{aligned} \tag{5.75}$$

où $\nabla_T\psi$ et $\nabla_T\beta$ désignent les gradients tangentiels de ψ et de β respectivement. Notons par I_ε la membre de droite de (5.75). Donc, nous pouvons considérer I_ε comme une forme quadratique en ψ, et nous pouvons écrire :

$$I_\varepsilon = \int\limits_{\partial Z'_\varepsilon} T(\psi,\psi)d\sigma,$$

où

$$T(\psi,\psi) = \tau\lambda\varphi\left[\frac{\partial\beta}{\partial\nu}(|\nabla_T\psi|^2 - (\frac{\partial\psi}{\partial\nu})^2) - 2\frac{\partial\psi}{\partial\nu}(\nabla_T\beta.\nabla_T\psi)\right].$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial Z'_\varepsilon} T(\psi,\psi)d\sigma &= \int\limits_{\{0\}\times\Omega'_\varepsilon} T(\psi,\psi)d\sigma + \int\limits_{\{S_0\}\times\Omega'_\varepsilon} T(\psi,\psi)d\sigma \\ &+ \int\limits_{(0,S_0)\times\partial\Omega'_\varepsilon} T(\psi,\psi)d\sigma.\end{aligned}$$

En détaillant ces intégrales surfaciques, on trouve :

$\star$ Sur $\{0\}\times\Omega'_\varepsilon$, on a $\psi=0$, $\nu = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\frac{\partial\beta}{\partial\nu}(0,x') = -\frac{\partial\beta}{\partial s}(0,x')$. Ceci donne

$$\begin{aligned}\int\limits_{\{0\}\times\Omega'_\varepsilon} T(\psi,\psi)d\sigma(s,x') &= \tau\lambda\int\limits_{\Omega'_\varepsilon\setminus\mathcal{O}'}(\varphi\frac{\partial\beta}{\partial s}(\frac{\partial\psi}{\partial s})^2)(0,x')dx' \\ &+\tau\lambda\int\limits_{\mathcal{O}'}(\varphi\frac{\partial\beta}{\partial s}(\frac{\partial\psi}{\partial s})^2)(0,x')dx'.\end{aligned}$$

La propriété (**H3**) implique que la première intégrale est positive. La seconde intégrale est de signe quelconque que l'on retrouve dans le membre droit de l'inégalité (5.60).

$\star$ De la propriété (**H4**), on déduit que sur $\{S_0\}\times\Omega'_\varepsilon$ l'intégrale de bord (5.75) devient

$$\begin{aligned}\int\limits_{\{S_0\}\times\Omega'_\varepsilon} T(\psi,\psi)d\sigma = &-\tau\lambda\int\limits_{\Omega'_\varepsilon}(\varphi\frac{\partial\beta}{\partial s}(\frac{\partial\psi}{\partial s})^2)(S_0,x')dx' \\ &+\tau\lambda\int\limits_{\Omega'_\varepsilon}(\varphi\frac{\partial\beta}{\partial s}|\nabla_T\psi|^2)(S_0,x')dx'.\end{aligned}$$

Le premier terme est positif, le second sera placé dans le membre de droite de (5.60) puis sera majoré comme suit :

$$\tau\lambda|\int\limits_{\Omega'_\varepsilon}(\varphi\frac{\partial\beta}{\partial s}|\nabla_T\psi|^2)(S_0,x')dx'| \le C\tau\lambda\int\limits_{\Omega'}(\varphi|\nabla_T\psi|^2)(S_0,x')dx', \tag{5.76}$$

où $C = C(c_3,\gamma_1,\Omega')$ est une constante positive. Remarquons que, comme $p\in C^2[0,S_0]\bigotimes D(A')$, $p(s,.)\in D(A')\subset H^1(\Omega')$ alors l'intégrale du membre de droite de (5.76) est finie.

$\star$ Sur $(0,S_0)\times\partial\Omega'_\varepsilon$ $\psi=0$, et $\dfrac{\partial\beta}{\partial\eta_\pm}=0$ sur Λ. Il s'ensuit que

$$\int\limits_{(0,S_0)\times\partial\Omega'_\varepsilon} T(\psi,\psi)d\sigma(s,x') = -\tau\lambda\int\limits_0^{S_0}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\partial\beta}{\partial\eta}(\varphi(\frac{\partial\psi}{\partial\eta})^2)(s,x')d\sigma(x')ds + \int\limits_{C_\varepsilon} T(\psi,\psi)d\sigma(s,x').$$

De la propriété **(H2)** du lemme 5.15, on peut affirmer que la première intégrale est positive. Dans le lemme suivant, on montre que, si on suppose que la fonction p est suffisamment régulière tel que c'est expliqué au début du **Cas 2**, la limite de la deuxième intégrale est aussi positive.

Lemme 5.21 *Si $p\in C^2[0,S_0]\bigotimes(D(A')\cap\ Vect\{C^1(\overline{\Omega'});g_{\mathrm{S}}\})$, alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{C_\varepsilon} T(\psi,\psi)d\sigma(s,x')$$

est positive.

Preuve du Lemme 5.21 Sans perte de généralité, nous montrerons le lemme pour un $p\in C^2[0,S_0]\bigotimes(D(A')\cap\mathrm{Vect}\{C^1(\overline{\Omega'});g_{\mathrm{S}}\})$ s'écrivant comme $p_1\cdot p_2$, où $p_1\in C^2[0,S_0]$ et $p_2\in D(A')\cap\mathrm{Vect}\{C^1(\overline{\Omega'});g_{\mathrm{S}}\}$.

Introduisons la notation suivante :

$$T_\varepsilon(\psi,\psi)=\int\limits_{\partial B(S,\varepsilon)}\varphi\left[\frac{\partial\beta}{\partial\nu}(|\nabla_T\psi|^2-(\frac{\partial\psi}{\partial\nu})^2)-2\frac{\partial\psi}{\partial\nu}(\nabla_T\beta.\nabla_T\psi)\right]d\sigma(x').$$

Alors,

$$\int\limits_{C_\varepsilon} T(\psi,\psi)d\sigma(s,x')=\tau\lambda\int\limits_0^{S_0}T_\varepsilon(\psi,\psi)ds.$$

Comme $p_2\in\mathrm{Vect}\{C^1(\overline{\Omega'});g_{\mathrm{S}}\}$, alors il existe une fonction $g_R\in C^1(\overline{\Omega'})$ et une constante $c\in\mathbb{R}$ telles que

$$p_2=g_R+cg_{\mathrm{S}}.$$

En introduisant p_1 dans la dernière expression, on réécrit p comme suit :

$$p=p_R+p_{\mathrm{S}},$$

où $p_R(s,x')=p_1(s)g_R(x')$ et $p_{\mathrm{S}}(s,r,\theta)=cp_1(s)g_{\mathrm{S}}(r,\theta)$. Avec ces nouvelles notations, on aura

$$\int\limits_{C_\varepsilon} T(\psi,\psi)d\sigma(s,x') = \int\limits_0^{S_0}T_\varepsilon(\psi_R,\psi_R)ds+2\int\limits_0^{S_0}T_\varepsilon(\psi_R,\psi_{\mathrm{S}})ds + \int\limits_0^{S_0}T_\varepsilon(\psi_{\mathrm{S}},\psi_{\mathrm{S}})ds,$$

où $\psi_R = e^{\lambda\varphi} p_R$ et $\psi_{\mathrm{S}} = e^{\lambda\varphi} p_{\mathrm{S}}$. En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour les deux premières integrales, on montre que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{C_\varepsilon} T(\psi,\psi) d\sigma(s,x') = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{S_0} T_\varepsilon(\psi_{\mathrm{S}},\psi_{\mathrm{S}}) ds. \tag{5.77}$$

Dans (5.77), nous avons tenu compte de la propriété (5.72) et du fait que g_R et p_1 soient suffisamment régulières afin que l'on puisse justifier les limites suivantes :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{S_0} T_\varepsilon(\psi_R,\psi_R) ds = \lim_{\varepsilon\to 0} 2 \int\limits_0^{S_0} T_\varepsilon(\psi_R,\psi_{\mathrm{S}}) ds = 0.$$

Par ailleurs, grâce à (5.72), on peut aisément vérifier que :

$$T_\varepsilon(\psi_{\mathrm{S}},\psi_{\mathrm{S}}) = \int\limits_{\partial B(S,\varepsilon)} e^{2\lambda\varphi} T(p_{\mathrm{S}},p_{\mathrm{S}}) d\sigma(x') + O(\varepsilon).$$

Par un calcul simple, on obtient que :

$$\begin{aligned} |(\nabla_T p_{\mathrm{S}})(s,r,\theta)|^2 &= (\frac{\partial p_{\mathrm{S}}}{\partial \mu_h})^2(s,r,\theta) + (\frac{\partial p_{\mathrm{S}}}{\partial \mu_v})^2(s,r,\theta) \\ &= (c\frac{p_1(s)}{2\sqrt{r}} \cos\tfrac{\theta}{2})^2 + (cp_1'(s)\sqrt{r}\sin\tfrac{\theta}{2})^2 \\ &= c^2(\frac{p_1(s)}{2\sqrt{r}}\cos\tfrac{\theta}{2})^2 + O(r), \end{aligned} \tag{5.78}$$

où $\mu_h = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$, $\mu_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. De plus, on a aussi :

$$\frac{\partial p_{\mathrm{S}}}{\partial \nu}(s,r,\theta) = -\frac{\partial p_{\mathrm{S}}}{\partial r}(s,r,\theta) = -c\frac{p_1(s)}{2\sqrt{r}} \sin\frac{\theta}{2}, \tag{5.79}$$

où $\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} \nabla_T\beta.\nabla_T p_{\mathrm{S}} &= \frac{\partial\beta}{\partial\mu_v}\frac{\partial p_{\mathrm{S}}}{\partial\mu_v} + \frac{\partial\beta}{\partial\mu_h}\frac{\partial p_{\mathrm{S}}}{\partial\mu_h} \\ &= \frac{\partial\beta}{\partial s}\frac{\partial p_{\mathrm{S}}}{\partial s} + \frac{\partial\beta}{\partial\mu_h}\frac{\partial p_{\mathrm{S}}}{\partial\mu_h}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.15, dans le système de coordonnées défini dans la figure 5.3, on a :

$$\beta(s,x_1,x_2) = \beta_1(s)\beta_2(x_1,x_2),$$

où $\beta_2(x_1, x_2) = ax_1 + b$, a et b sont deux constantes réelles avec $a < 0$. Grâce à ces propriétés, on déduit que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \beta}{\partial s}(s,r,\theta) & = \beta_1'(s)(ar\cos\theta + b), \\ \frac{\partial \beta}{\partial \nu}(s,r,\theta) & = -\beta_1(s)a\cos\theta, \\ \frac{\partial \beta}{\partial \mu_h}(s,r,\theta) & = -\beta_1(s)a\sin\theta, \\ \frac{\partial p_{\mathrm{S}}}{\partial s}(s,r,\theta) & = cp_1'(s)\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \end{cases}$$

et par conséquent

$$(\nabla_T\beta.\nabla_T p_{\mathrm{S}})(s,r,\theta) = -\beta_1(s)ac\frac{p_1}{2\sqrt{r}}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} + O(\sqrt{r}). \tag{5.80}$$

En combinant entre (5.78), (5.79) et (5.80), on déduit que

$$T_\varepsilon(\psi_{\mathrm{S}}, \psi_{\mathrm{S}}) = -\int_0^{2\pi} c^2\varphi\beta_1(s)e^{2\lambda\varphi}a\frac{p_1^2(s)}{4}d\theta + O(\varepsilon).$$

Ce qui montre que $\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{C_\varepsilon} T(\psi,\psi)d\sigma(s,x') \geq 0$, puisque $a < 0$ et la fonction p_1 est continue.

Ceci termine la preuve du lemme 5.21.

• Il nous reste à voir la dernière intégrale $I_{22}^\varepsilon = -2\tau\lambda^2\int\limits_{Z'_\varepsilon}\varphi\Delta\psi|\nabla\beta|^2\psi dx'ds$. On utilise les techniques de dominance comme dans le cas 1. En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} I_{22}^\varepsilon &= 2\tau\lambda^2\int\limits_{Z'_\varepsilon}\varphi|\nabla\beta|^2|\nabla\psi|^2dx'ds + 2\tau\lambda^2\int\limits_{Z'_\varepsilon}\nabla\psi.\nabla(\varphi(|\nabla\beta|^2))\psi dx'ds \\ &\quad -2\tau\lambda^2\int\limits_{\partial Z'_\varepsilon}\varphi\left(\nu_\varepsilon.\nabla\psi\right)|\nabla\beta|^2\psi d\sigma\left(s,x'\right) \\ &= D_1^\varepsilon + D_2^\varepsilon + D_3^\varepsilon. \end{aligned}$$

On applique encore une fois le théorème de convergence dominée de Lebesgue et on déduit que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} D_1^\varepsilon + D_2^\varepsilon = 2\tau\lambda^2\int\limits_{Z'}\varphi|\nabla\beta|^2|\nabla\psi|^2dx'ds + 2\tau\lambda^2\int\limits_{Z'}\nabla\psi.\nabla(\varphi(|\nabla\beta|^2))\psi dx'ds$$

Pour l'intégrale de bord D_3^ε, on utilise le fait que $\psi = 0$ sur $\{0\}\times\Omega_\varepsilon$ et sur $(0,S_0)\times\Omega_\varepsilon$. Alors :

$$\begin{aligned} D_3^\varepsilon &= -2\tau\lambda^2\int\limits_{\Omega'_\varepsilon}(\varphi(\partial_{\mathrm{S}}\beta)^2\psi\partial_{\mathrm{S}}\psi)(S_0,x')d\sigma\left(x'\right) - 2\tau\lambda^2\int\limits_{C_\varepsilon}\varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)|\nabla_{x'}\beta|^2\psi d\sigma \\ &= D_{31}^\varepsilon + D_{32}^\varepsilon \end{aligned}$$

Comme conséquence du théorème de convergence dominée de Lebesgue et de la propriété (5.71), on a $\lim_{\varepsilon\to 0} D_{32}^{\varepsilon} = 0$. Concernant le terme D_{31}^{ε}, comme

$$D_{31}^{\varepsilon} \leq 2\tau\lambda^2 \int\limits_{\Omega'} |(\varphi(\partial_{\mathrm{S}}\beta)^2\psi\partial_{\mathrm{S}}\psi)(S_0, x')|d\sigma\,(x')\,,$$

alors D_{31}^{ε} peut être absorbé comme dans le **cas 1**.
Finalement, on aboutit à l'estimation de Carleman (5.60) pour p appartenant au sous-espace dense dans $C^2[0,S_0]\bigotimes D(A')$. Par densité, on peut passer à $p \in C^2[0,S_0]\bigotimes D(A')$ pour obtenir l'estimation souhaitée. En effet, à cause de l'approximation faite dans $D(A')$, le passage à la limite dans les deux premières intégrales du membre gauche de l'inégalité (5.60) est possible. L'écriture en forme tensorielle rend aussi possible le passage à la limite dans les trois intégrales restantes du membre gauche ainsi que les deux dernières intégrales du membre droit de cette inégalité. Finalement, la convergence dans $D(A')$ et l'écriture en forme tensorielle permettent de passer à la limite dans le premier terme du membre droit de l'inégalité (5.60).

Preuve du Théorème 5.14 Considérons la fonction de troncature $\varrho \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ à support dans $(-S_1, S_1)$ et telle que $\varrho(s) = 1$ sur $[0, S_0]$. Par construction, pour tout $\mu > 0$, la fonction

$$p\,(s,x') = \sum_{\mu_j<\mu} b_j\varrho(s)\frac{\sinh\left(\sqrt{\mu_j}s\right)}{\sqrt{\mu_j}}\phi_j\,(x') \tag{5.81}$$

appartient à $D(A)$ et est une solution de l'équation

$$Ap(s,x') = 0,\ \forall s \in [0,S_0],\ \forall x' \in \Omega',$$

(où (μ_j, ϕ_j) sont les éléments spectraux de l'opérateur A' dans $D(A')$). Par ailleurs, cette fonction p appartient à $C^2[0,S_0]\bigotimes D(A')$.
Par conséquent, en démarrant du fait que φ est constant sur $\{S_0\}\times\Omega'$ (d'après la propriété **(H4)**), on déduit de l'inégalité (5.60) que la fonction p définie dans (5.81) satisfait l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\tau^3 e^{2\tau\varphi(S_0)} \int\limits_{\Omega'} |p\,(S_0,x')|^2\,dx' \quad &\leq C[\tau e^{2\tau\varphi(S_0)} \int\limits_{\Omega'} |\nabla_{x'} p\,(S_0,x')|^2\,dx' \\ &+\tau \int\limits_{\mathcal{O}'} e^{2\tau\varphi(0,x')}\,|\partial_{\mathrm{S}} p\,(0,x')|^2\,dx'],\end{aligned}$$

pour tout $\tau \geq \tau_1$ et $C = C(\lambda_1) > 0$.
Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega'} |p\,(S_0,x')\,|^2 dx' \quad &= \int\limits_{\Omega'} |\sum_{\mu_j<\mu} b_j \frac{sh\left(\sqrt{\mu_j}S_0\right)}{\sqrt{\mu_j}}\phi_j\,(x')\,|^2 dx' \\ &= \sum_{\mu_j<\mu}\left|b_j\tfrac{sh\left(\sqrt{\mu_j}S_0\right)}{\sqrt{\mu_j}}\right|^2 \\ &\geq S_0^2\sum_{\mu_j<\mu}|b_j|^2\end{aligned} \tag{5.82}$$

et

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathcal{O}'} e^{2\tau\varphi(0,x')}\left|\partial_{\mathrm{S}} p\left(0, x'\right)\right|^2 dx & \leq \exp\left(2\tau \sup_{x' \in \Omega'} \varphi\left(0, x'\right)\right) \int\limits_{\mathcal{O}'}\left|\partial_{\mathrm{S}} p(0, x)\right|^2 dx' \\ & = \exp(2\tau \sup_{x' \in \Omega'} \varphi\left(0, x'\right)) \int\limits_{\mathcal{O}'} |\sum_{\mu_j<\mu} b_j \phi_j\left(x'\right)|^2 dx'\end{aligned} \tag{5.83}$$

Et pour obtenir l'inégalité spectrale (5.56), il suffit de voir que

$$\frac{1}{2}\tau^3 e^{2\tau\varphi(S_0)} \int\limits_{\Omega'}\left|p\left(S_0, x'\right)\right|^2 dx' \geq C\tau e^{2\tau\varphi(S_0)} \int\limits_{\Omega'}\left|\nabla_{x'} p\left(S_0, x'\right)\right|^2 dx', \tag{5.84}$$

pour $\tau \geq C'\sqrt{\mu}$, où $C'=\sqrt{2C}$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}&\tau e^{2\tau\varphi(S_0)} \int\limits_{\Omega'} |\nabla_{x'} p\left(S_0, x'\right)|^2 dx' = \tau e^{2\tau\varphi(S_0)} \int\limits_{\Omega'} |\sum_{\mu_j<\mu} b_j \frac{\sinh\left(\sqrt{\mu_j} S_0\right)}{\sqrt{\mu_j}} \nabla_{x'} \phi_j\left(x'\right)|^2 dx' \\ &= \tau e^{2\tau\varphi(S_0)} \int_{\Omega'}(\sum_{\mu_i<\mu} b_i \frac{\sinh(\sqrt{\mu_i} S_0)}{\sqrt{\mu_i}} \nabla_{x'} \phi_i . \sum_{\mu_j<\mu} b_j \frac{\sinh\left(\sqrt{\mu_j} S_0\right)}{\sqrt{\mu_j}} \nabla_{x'} \phi_j)(x') dx'.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que les fonctions $\left(\nabla_{x'}\phi_k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisfont la relation $\int\limits_{\Omega'} \nabla_{x'}\phi_i . \nabla_{x'}\phi_j dx' = \mu_j \delta_{ij}$, on obtient alors

$$\tau e^{2\tau\varphi(S_0)} \int\limits_{\Omega'} |\nabla_{x'} p\left(S_0, x'\right)|^2 dx' = \tau e^{2\tau\varphi(S_0)} \sum_{\mu_j<\mu}\left(b_j \sinh\left(\sqrt{\mu_j} S_0\right)\right)^2 .$$

Comme chaque $\mu_j<\mu$, alors

$$\tau e^{2\tau\varphi(S_0)} \int\limits_{\Omega'} |\nabla_{x'} p\left(S_0, x'\right)|^2 dx' \leq \mu\tau e^{2\tau\varphi(S_0)} \int\limits_{\Omega'}\left(p\left(S_0, x'\right)\right)^2 dx' .$$

En prenant $\tau^2 \geq C'\mu$, on parviendra à l'inégalité désirée (5.84). Finalement, la combinaison entre (5.82), (5.83) et (5.84) donnera l'inégalité spectrale (5.56).

Chapitre 6

Inégalité spectrale et contrôlabilité à zéro dans un domaine singulier

Dans l'une des parties de ce travail, nous nous sommes fixés un objectif qui est d'établir un résultat de contrôle pour le problème parabolique (5.55) en passant par la méthode de Lebeau-Robbiano simplifiée. Nous avons montré dans la section 2.1 du chapitre 5 (Théorème 5.14) une inégalité spectrale pour les combinaisons linéaires finies de fonctions propres du laplacien. Dans la section suivante, nous indiquerons comment cette inégalité spectrale est utilisée par G. Lebeau et L. Robbiano afin d'établir la contrôlabilité à zéro des équations paraboliques. Il est utile de savoir que la méthode dont il est question repose essentiellement sur deux points : l'un sur les estimations de Carleman et l'autre sur la particularité de la construction du contrôle permettant d'amener le système à l'état d'équilibre. La clé centrale de cette méthode se trouve dans les propriétés spectrales du laplacien.

1 Sur la méthode de Lebeau-Robbiano simplifiée pour le contrôle de l'équation de la chaleur

Dans cette section, on abordera les grandes lignes de la version simplifiée de la méthode de Lebeau-Robbiano. On mettra au clair les démarches suivies dans cette méthode afin de ressortir la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur ainsi que le coût de ce contrôle. On considère donc un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ et un sous-domaine non vide $\omega \subset\subset \Omega$. On s'intéresse au résultat de contrôlabilité à zéro du problème parabolique suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} \partial_t u - \Delta u & = f & \text{dans } Q_T = (0,T)\times\Omega \\ u\,(t,x) & = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega \\ u\,(0,x) & = u_0\,(x) & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{6.1}$$

u_0 est la donnée intiale appartenant à $L^2(\Omega)$ et f, supposée dans $L^2((0,T)\times\Omega)$, représente le contrôle. Dans la pratique, f est généralement choisie à support localisé dans $(0,T)\times\omega$ puisqu'il arrive qu'on ne chauffe ou refroidisse notre corps que sur une petite partie.
Rappelons que le système (6.1) admet une solution unique dans

$L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0((0,T);L^2(\Omega))$, qui s'écrit sous la forme

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \tag{6.2}$$

où $S(.)$ est un C_0 semi-groupe dans $L^2(\Omega)$ de générateur infinitésimal $A = -\Delta$ de domaine $D(A) = \{v \in H_0^1(\Omega) | \Delta v \in L^2(\Omega)\}$. La décomposition spectrale de $S(.)$ dans $L^2(\Omega)$ est donnée par

$$S(t)v = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\lambda_k t} < v, \phi_k >_{L^2(\Omega)} \phi_k, \text{pour } v \in L^2(\Omega),$$

où $((\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}, (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}})$ sont les éléments spectraux de l'opérateur A et $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ constitue une base orthonormée de $L^2(\Omega)$. La méthode de Lebeau-Robbiano est fondée sur le résultat suivant :

Théorème 6.1 *Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pout tout $\lambda \geq 1$ et pour toute fonction $g \in L^2(\Omega)$ vérifiant $g = \sum_{\lambda_k<\lambda} b_k\phi_k$, on a :*

$$\|g\|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{C\sqrt{\lambda}} \|g\|_{L^2(\omega)}, \tag{6.3}$$

alors il existe, pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, un contrôle $f \in L^2((0,T)\times\Omega)$ tel que la solution u de (6.1) au temps T soit orthogonale à tous les ϕ_k, pour $\lambda_k < \lambda$ (i.e , $\exists (b_k) \in \ell^2 : u(T,.) = \sum_{\lambda_k>\lambda} b_k\phi_k$). De plus, il existe deux constantes $C', C'' > 0$ telles que

$$\|f\|_{L^2((0,T)\times\omega)} \leq C' \frac{e^{C'\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{T}} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{6.4}$$

et

$$\|u(t,.)\|_{L^2(\Omega)} \leq C'' e^{C''\sqrt{\lambda}} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{6.5}$$

Avant de passer à la preuve de ce théorème, faisons quelques remarques sur le résultat précédent :

Remarque 6.2
1. *L'inégalité (6.3) est exactement l'inégalité spectrale abordée dans le chapitre 5. Elle représente aussi une inégalité d'observabilité du type (4.28) pour le problème adjoint correspondant au problème (6.1), seulement l'espace des états serait le sous-espace propre engendré par les valeurs propres plus petites que λ.*
2. *Notons que le contrôle construit dans le théorème 6.1 permet d'amener la solution u du système (6.1) issue de n'importe quelle donnée initiale de $L^2(\Omega)$ à un état $u(T)$ appartenant à l'orthogonal de l'espace engendré par les fonctions propres ϕ_k associées aux valeurs propres plus petites que λ.*
3. *Par ailleurs, si on prenait dans le système (6.1) une donnée initiale $u_0 = \sum_{\lambda_k>\lambda} b_k\phi_k$ et un contrôle nul, alors l'énergie de la solution va diminuer avec le temps, puisque*

$$S(t)u_0 = \| \sum_{\lambda_k>\lambda} b_k e^{-t\lambda_k}\phi_k\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-t\lambda}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{6.6}$$

4. *Dans la méthode de Lebeau-Robbiano simplifiée, la propriété abordée dans la deuxième remarque sert à construire le contrôle de façon itérative. Plus précisément, construire une suite de contrôles actifs et inactifs sur des intervalles de temps de plus en plus petits et proches de T. Sur chaque petit intervalle, on contrôle les premières modes propres pendant un certain temps, et le coût du contrôle est de l'ordre de $e^{C\sqrt{\lambda}}$. Puis, on laisse dissiper la chaleur des modes restants d'un facteur $e^{-C\lambda t}$ près. Par itération de cette démarche sur chaque intervalle de temps et pour λ croissant et dépendant du nombre d'itérations, on aboutit à l'état nul au temps T.*

Preuve du théorème 6.1 :
Remarquons d'abord que l'orthogonalité de $u(T,.)$ avec les ϕ_k, pour $\lambda_k < \lambda$, signifie que

$$< u(T,.), g >_{L^2(\Omega)} = 0, \text{ pour tout } g = \sum_{\lambda_k<\lambda} b_k\phi_k,$$

ce qui est équivalent, d'après l'expression (6.2), à prouver l'existence d'un contrôle $f \in L^2((0,T)\times\omega)$ tel que

$$- < S(T)u_0, g >_{L^2(\Omega)} = \int_0^T < S(T-s)f(s,.), g(.) >_{L^2(\Omega)} ds.$$

Pour ce faire, on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{\chi_\omega S(T-.)g \in L^2((0,T)\times\omega), \text{ pour } g = \sum_{\lambda_k<\lambda} b_k\phi_k\}$$

de $L^2((0,T)\times\omega)$, puis on introduit la fonction K définie de F vers $\mathbb{R}$ par

$$Kw = -\int_\Omega S(T)u_0(x)g(x)dx,$$

où $w \in K$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et au fait que, pour tout $s \in (0,T)$

$$\begin{aligned} \|S(T)g\|^2_{L^2(\Omega)} &= \sum_{\lambda_k<\lambda} e^{-2\lambda_k T} b_k^2 \\ &\leq \sum_{\lambda_k<\lambda} e^{-2\lambda_k(T-s)} b_k^2, \end{aligned}$$

on déduit que

$$|Kw| \leq (\sum_{\lambda_k<\lambda} e^{-2\lambda_k(T-s)} b_k^2)^{1/2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité spectrale (6.3) puis en intégrant sur $(0,T)$, on trouve

$$|Kw| \leq C' \frac{e^{C'\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{T}} \|S(T-.)g\|_{L^2((0,T)\times\omega)} . \|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Le théorème de Hahn-Banach nous permet de prolonger la forme linéaire K sur F en une forme linéaire continue $\widetilde{K}$ sur l'espace de Hilbert $L^2((0,T)\times\omega)$ tel que

$$\widetilde{K}w = Kw \text{ sur } F \text{ et } |\widetilde{K}w| \leq C'\frac{e^{C'\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{T}}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2((0,T)\times\omega)}.$$

Puis en appliquant le théorème de Riesz à la forme linéaire $\widetilde{K}$ sur $L^2((0,T)\times\omega)$, on en déduit l'existence d'un $f \in L^2((0,T)\times\omega)$ tel que

$$Kw = \int_0^T\int_\omega S(T-s)g(x)f(s,x)dxds,$$

avec

$$\|f\|_{L^2((0,T)\times\omega)} \leq C'\frac{e^{C'\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{T}}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

On aboutit donc à l'inégalité (6.4). En ce qui concerne l'inégalité (6.5), elle se déduit à partir de l'expression (6.2), puisque

$$\begin{aligned}\|u(t,.)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|f(s,.)\|_{L^2(\omega)}\\ &\leq C''e^{C''\sqrt{\lambda}}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}ds,\end{aligned}$$

où C'' est une constante strictement positive. Ce qui termine la preuve du théorème.

Revenons, à présent, à la construction du contrôle à la façon de Lebeau-Robbiano et qui permet d'amener à l'état 0 au temps T la solution du système (6.1) :
Soient donc $\alpha > 0$ et $A = \sum\limits_{k\geq 1} 2^{-k\alpha}$, et considérons la suite $T_n = \dfrac{T}{A}\sum\limits_{k=1}^{k=n} 2^{-k\alpha}$, pour $n \geq 1$.
Remarquons que cette suite possède les propriétés suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = T$,
2. $T_{n+1} - T_n = \dfrac{T}{A}2^{-(n+1)\alpha}$,
3. Si on pose $T'_n = \dfrac{T_{n+1}+T_n}{2}$, alors $T'_n - T_n = T_{n+1} - T'_n = \dfrac{T}{A2^{1+\alpha}}2^{-n\alpha}$, pour $n \geq 1$.

Sur $[T_n, T_{n+1}]$, deux contrôles sont construits le premier sur $[T_n, T'_n]$ dit actif et le deuxième sur $[T'_n, T_{n+1}]$ est dit inactif. En fait, on a :

1. Sur $[T_n, T'_n]$, on a :

$$u(t,x) = S(t-T_n)u(T_n,x) + \int_{T_n}^{t} S(t-s)f_n(s,x)ds,$$

   où $f_n \in L^2([T_n, T'_n]\times\omega)$.
2. Sur $[T'_n, T_{n+1}]$, on a : $u(t,x) = S(t-T'_n)u(T'_n)$ (ici le contrôle est donc nul).

En utilisant le théorème 6.1 pour $\lambda = 2^{2n}$ sur l'intervalle de temps $[T_n, T'_n]$, alors on déduit de l'inégalité (6.5) que :

$$\exists C_1 > 0, \; \|u(T'_n, .)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 e^{C_1 2^n} \|u(T_n, .)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{6.7}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} u(T_{n+1}, .) &= S(T_{n+1} - T'_n) u(T'_n, .) \\ &= \sum_{\lambda_k > 2^{2n}} e^{-(T_{n+1} - T'_n)\lambda_k} < u(T'_n, .), \phi_k >_{L^2(\Omega)} \phi_k. \end{aligned}$$

En passant à la norme dans $L^2(\Omega)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|u(T_{n+1}, .)\|_{L^2(\Omega)} &\leq e^{-(T_{n+1} - T'_n) 2^{2n}} \|u(T'_n, .)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq e^{-C_2 2^{-n\alpha + 2n}} \|u(T'_n, .)\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{6.8}$$

où C_2 est une constante strictement positive égale à $\dfrac{T}{A 2^{\alpha+1}}$. Par transitivité entre les inégalités (6.8) et (6.7), on trouve

$$\|u(T_{n+1}, .)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 e^{2^{n(2-\alpha)}(C_1 2^{n(\alpha-1)} - C_2)} \|u(T_n, .)\|_{L^2(\Omega)}.$$

En choisissant $0 < \alpha < 1$, on peut montrer qu'il existe une constante $C_3 > 0$ et un entier N tels que

$$C_1 2^{n(\alpha-1)} - C_2 \leq -C_3,$$

pour tout $n \geq N$. Ce qui nous fait aboutir à la relation de récurrence suivante entre $\|u(T_{n+1}, .)\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|u(T_n, .)\|_{L^2(\Omega)}$:

$$\|u(T_{n+1}, .)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 e^{-C_3 2^{n(2-\alpha)}} \|u(T_n, .)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{6.9}$$

Par itération de la relation (6.9), on trouve la relation suivante entre $\|u(T_n, .)\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|u_0\|_{L^2(\Omega)}$

$$\|u(T_n, .)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1^{n-N} e^{-C_4 2^{n(2-\alpha)}} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{6.10}$$

où $C_4 > 0$ est une constante. Comme remarque, dans (6.10), on a tenu compte de la majoration suivante :

$$e^{-C_3(2^{(n-1)(2-\alpha)} + 2^{(n-2)(2-\alpha)} + \ldots + 2^{N(2-\alpha)})} \leq e^{-C_4 2^{n(2-\alpha)}},$$

où $C_4 = C_3 2^{(\alpha-2)}$.

Par ailleurs, l'utilisation de l'inégalité (6.5) sur l'intervalle $[T_n, T_{n+1}]$ implique l'existence d'une constante C_5 telle que :

$$\|u(t, .)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_5 e^{C_5 2^n} \|u(T_n, .)\|_{L^2(\Omega)},$$

pour tout $t \in [T_n, T_{n+1}]$. En combinant cette inégalité et l'inégalité (6.10), on trouve que :

$$\|u(t, .)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_5 C_1^{n-N} e^{-C_4 2^{n(2-\alpha)} + C_5 2^n} \|u_0\|_{L^2(\Omega)},$$

pour tout $t \in [T_n, T_{n+1}]$. Ce qui montre que $u(t,.) \to 0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $t \to T$, étant donné que $T - t \sim 2^{-n\alpha}$.
Finalement, le contrôle sur $(0,T)$ permettant d'amener le système (6.1) à l'état $u(T) = 0$ est donné par

$$f(t,x) = \sum_{n\geq 1} \chi_{[T_n,T'_n]}(t) f_n(t,x). \tag{6.11}$$

qui est, d'après l'inégalité (6.5) du théorème 6.1 et l'inégalité (6.10), dans $L^2((0,T)\times\Omega)$. De plus, il existe une constante $C_8 > 0$ telle que :

$$\|f\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} \leq C_8 \|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pour justifier cette dernière inégalité, on démarre de l'inégalité (6.4) pour déduire, pour n assez grand, l'existence d'une constante $C_6 > 0$ telle que :

$$\|f_n\|_{L^2([T_n,T'_n]\times\Omega)} \leq C' e^{C_6 2^n} 2^{n\alpha/2} \|u(T_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C'' e^{C'' 2^n} \|u(T_n)\|_{L^2(\Omega)},$$

où C' est la constante donnée dans le théorème 6.1. Ce qui prouve que

$$\|f_n\|_{L^2([T_n,T'_n]\times\Omega)} \leq C'' e^{C'' 2^n} \|u(T_n)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{6.12}$$

en prenant une constante $C'' > 0$ et l'entier n suffisamment grands.
Par passage à la norme de $L^2((0,T)\times\Omega)$ dans (6.11), et en combinant les inégalités (6.10) et (6.12), on aboutit à l'inégalité voulue puisque :

$$\|f\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} \leq \sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{L^2([T_n,T'_n]\times\Omega)}.$$

2 Application à la contrôlabilité à zéro dans un milieu stratifié

2.1 Cas régulier

La question de la contrôlabilité à zéro d'équations paraboliques à coefficients de diffusion réguliers a été déjà résolue par le biais des estimations de Carleman (voir [14]). Dans le cas de coefficients non réguliers, il existe quelques travaux donnant des résultats dans ce sens. On peut citer le papier de A. Doubova, A. Osses et J.-P. Puel [12] où les coefficients de la partie principale de l'opérateur parabolique sont supposés de classe C^1 par morceaux, en plus d'une condition géométrique sur la zone d'observabilité. En dimension un d'espace, le même résultat a été démontré dans [8] pour le cas de coefficients de classe C^1 par morceaux, et dans [17], les coefficients de diffusion sont supposés à variations bornées. Contrairement à [12], il n'y a pas de restriction sur la zone de contrôle. En dimension supérieure, sans restriction de la localisation de la zone de contrôle (ou d'observation), la question relative à l'établissement d'une inégalité de Caleman reste encore un problème ouvert. Toutefois, dans [7] les auteurs ont pu établir des résultats concernant cette dimension quelconque seulement pour des équations paraboliques du même type que (5.55). Le paragraphe qui va suivre contient quelques points essentiels de ces résultats. Il est à noter que dans ce papier, l'hypothèse centrale imposée se trouve dans le fait que les coefficients de diffusion sont réguliers par rapport à $(n-1)$ variables d'espace, et par rapport à l'autre variable, ils sont à variations bornées (milieu stratifié). Plus précisément, le système étudié est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla_x \cdot (B\nabla_x u) & = \chi_{\mathcal{O}} v \quad \text{dans } Q_T = (0,T) \times \Omega \\ u\,(t,x) & = 0 \qquad \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega \\ u\,(0,x) & = u_0\,(x) \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{6.13}$$

où $v \in L^2\,(Q_T)$ est la fonction contrôle, $\Omega = \Omega' \times (0,H)$, avec $H > 0$. On suppose que Ω' est un ouvert non vide régulier de $\mathbb{R}^{n-1}$ de frontière C^2. On fait les mêmes hypothèses que dans la section 2 du chapitre 5, $\mathcal{O}$ est un sous-domaine ouvert de Ω tel que $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \times \mathcal{O}_n$, où $\mathcal{O}' \subset\subset \Omega'$ et $\mathcal{O}_n \subset (0,H)$ sont des ouverts non vides et $\mathcal{O}' \subset \mathbb{R}^{n-1}$.
Pour ce qui de la matrice $B\,(x)$, elle est supposée être une matrice diagonale par blocs telle que :

$$\text{Pour tout } x = (x', x_n) \in \Omega, B\,(x) = \begin{pmatrix} a_1(x_n)A_1(x') & 0 \\ 0 & a_2(x_n) \end{pmatrix}.$$

où $a_1 \in L^\infty(0,H)$, $a_2 \in BV(0,H)$ avec $0 < a_{\min} \leq a\,(x_3) \leq a_{\max}$ et A_1 est une matrice symétrique dans $C^1(\overline{\Omega'}, M_{n-1}(\mathbb{R}))$. Le coefficient a_2 est supposé de classe C^1 dans un ouvert non vide de $\mathcal{O}_n$.

Rappelons toujours que l'objectif central est de montrer, à l'aide de la méthode de Lebeau-Robbiano, la contrôlabilité à zéro du système (6.13). En vertu des rappels donnés dans la section précédente, cela se fait par l'intermédiaire d'une inégalité spectrale du type donné dans le théorème 5.14. A cause de la singularité de la matrice de diffusion, utiliser les inégalités de Carleman pour avoir cette inégalité reste un problème non encore résolu. En revanche dans [7], cette contrainte est contournée puisque l'inégalité spectrale établie concerne les fonctions propres de l'opérateur elliptique auto-adjoint $A' = -\nabla_{x'} \cdot (A_1 \nabla_{x'})$. Ce qui permettra de lever certaines contraintes, à savoir manipuler les estimations de Carleman avec un coefficient à variations bornées, qui est a_2. Pour résumer, à l'aide d'une certaine décomposition spectrale de la solution de l'équation (6.13) et de l'estimation de Carleman en dimension un, montrée dans [17], le résultat de contrôlabilité à zéro du système (6.13) est déduit dans [7] par l'intermédiaire de la méthode de Lebeau-Robbiano.

Soit $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la famille de fonctions propres de l'opérateur A' associées aux valeurs propres $\mu_k, k \in \mathbb{N}^*$ de multiplicité finie et telles que

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_k \leq ...$$

On peut toujours supposer que cette famille forme une base orthonormée de $L^2(\Omega')$. A chaque valeur propre μ_k, on associe l'opérateur auto-adjoint $A_k = -\partial_{x_n}(c_2(x_n)\partial_{x_n}) + c_1(x_n)\mu_k$ de domaine $A_k = \{u \in H_0^1(0,H)\,;\, c_2(x_n)\partial_{x_n} u \in H^1(0,H)\}$. Et notons $\psi_{k,p}, p \in \mathbb{N}^*$ une base orthonormée de fonctions propres de A_k associées aux valeurs propres $\lambda_{k,p}, p \in \mathbb{N}^*$ de multiplicité finie et telles que

$$0 < \lambda_{k,1} \leq \lambda_{k,2} \leq ... \leq \lambda_{k,p} \leq$$

En tenant compte de la densité de $L^2(\Omega')\otimes L^2(0,H)$ dans $L^2(\Omega'\times(0,H))$ et en séparant les variables dans les coefficients de la matrice B, on peut montrer que les fonctions propres de l'opérateur $A=-\nabla(B.\nabla)$ sont les fonctions

$$\varphi_{k,p}(x',x_n)=\phi_k(x')\psi_{k,p}(x_n),$$

pour $(k,p)\in\mathbb{N}^{*2}$. De plus, la famille de ces fonctions forme une base orthonormée de $L^2(\Omega)$.
Considérons, maintenant, les sous-espaces fermés de dimension infinie H_k ; $k\in\mathbb{N}$ de $L^2(\Omega)$, qui sont définis comme suit :

$$H_k=\overline{<\psi_{k,p}\,;\,p\in\mathbb{N}^*>}=\{\phi_k\otimes f; f\in L^2(0,H)\}.$$

Et soit l'ensemble $E_j=\underset{k\leq 2^j}{\oplus}H_k$, pour $j\in\mathbb{N}$. On sait que

$$\overline{\underset{j\in\mathbb{N}}{\cup}E_j}=\underset{k\in\mathbb{N}^*}{\oplus}H_k.$$

La suite du raisonnement consiste à contrôler les modes propres sur E_j dans des intervalles de temps de plus en plus proches de T. Pour $\delta\in(0,\frac{2}{3})$, on décompose l'intervalle du temps $(0,T)$ comme suit :

$$(0,T)=\underset{j\in\mathbb{N}}{\cup}[a_j,a_{j+1}],\ a_{j+1}-a_j=2T_j$$

avec $a_0=0$, $T_j=K\alpha_j^{-\delta}$, $\alpha_j=2^j$ où K est une constante telle que $2\sum\limits_{j=0}^{\infty}T_j=T$.
D'après [16], on est amené à construire une suite de contrôles v_j de $L^2((a_j,a_j+T_j)\times\Omega)$, $j\geq j_0$ pour un certain $j_0\in\mathbb{N}$. Chaque contrôle v_j est chargé de ramener à zéro au temps a_j+T_j la projection orthogonale sur E_j de la solution du système

$$\left\{\begin{array}{rll}\partial_t u-\nabla_x\cdot(B\nabla_x u) & =\chi_{\mathcal{O}}v & \text{dans }\ (a_j,a_j+T_j)\times\Omega\\ u\,(t,x) & =0 & \text{sur }\ (a_j,a_j+T_j)\times\partial\Omega\\ u\,(a_j,x) & =u_j\,(x) & \text{dans }\Omega\end{array}\right.$$

où $u_j\in(E_{j-1})^\perp$. En d'autres termes, si on dénote Π_{E_j} l'opérateur de projection orthogonale sur E_j dans $L^2(\Omega)$, alors $\Pi_{E_j}u(a_j+T_j)=0$. Comme le semi-groupe associé à l'opérateur $\nabla_x\cdot(B\nabla_x)$ commute avec l'opérateur de projection Π_{E_j}, alors cette contrôlabilité est équivalente à l'inégalité d'observabilité [13]

$$\|\varphi(a_j,.)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C^2_{T_j}\int\limits_{(a_j,a_j+T_j)\times\mathcal{O}}|\varphi(t,x)|^2dtdx,\tag{6.14}$$

pour $\varphi\in C^0([a_j,a_j+T_j];E_j)$ solution du système adjoint

$$\left\{\begin{array}{rll}-\partial_t\varphi-\nabla_x\cdot(B\nabla_x\varphi) & =0 & \text{dans }\ (a_j,a_j+T_j)\times\Omega\\ \varphi\,(t,x) & =0 & \text{sur }\ (a_j,a_j+T_j)\times\partial\Omega\\ \varphi\,(a_j+T_j,x) & =\varphi_0\,(x) & \text{dans }\Omega\end{array}\right.\tag{6.15}$$

où $\varphi_0 \in E_j$. De la définition de E_j, on peut écrire la solution du problème (6.15) comme une somme finie, i.e :

$$\varphi(t, x', x_n) = \sum_{k \leq 2^j} \phi_k(x')\varphi_k(t, x_n)$$

où φ_k est la solution du problème parabolique unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi_k + A_k \varphi_k &= 0 \quad \text{dans } (a_j, a_j + T_j) \times (0, H) \\ \varphi_k(t) &= 0 \quad \text{sur } (a_j, a_j + T_j) \times \{0, H\}. \end{cases} \tag{6.16}$$

Grâce à l'inégalité de Carleman prouvée dans [17] pour le problème (6.16), on sait qu'il existe une constante $C = C(H, \mathcal{O}_3, a_{min}, a_{max}) > 0$ telle que pout tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour $s_k = \max(T_j \mu_k^{2/3}, T_j + T_j^2)$

$$\|\varphi_k(a_j, .)\|^2_{L^2(0,H)} \leq \frac{1}{T_j} C e^{C s_k} \int\limits_{a_j}^{a_j+T_j} \int\limits_{\mathcal{O}_3} |\varphi_k(t, x_3)|^2 dx_3 dt$$

De plus, pour tout $j \geq j_0$ avec j_0 suffisamment large

$$\|\varphi(a_j, .)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C e^{C \mu_{\alpha_j}^{2/3}} \int\limits_{a_j}^{a_j+T_j} \int\limits_{\mathcal{O}_3} \sum_{k \leq 2^j} |\varphi_k(t, x_3)|^2 dx_3 dt$$

Finalement, il reste à appliquer l'inégalité spectrale énoncée dans la théorème 5.14 pour obtenir (6.14). Il suffira pour cela de remplacer b_k par $|\varphi_k(t, x_3)|^2$ dans (5.56) pour obtenir l'inégalité souhaitée.
En conclusion, la contrôlabilité à zéro du système (6.13) se déduit de la même façon que dans [16].

2.2 Cas singulier.

Dans ce sous-paragraphe, nous allons faire le passage entre ce qui a été rappelé comme résultats dans les sections précédentes et l'application de ces résultats au problème parabolique tridimensionnel posé dans la section 2. Nous rappelons que dans notre cas, la matrice de diffusion est définie par :

$$\text{Pour } x = (x', x_3) \in \Omega, B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a(x_3) \end{pmatrix},$$

où : $a \in BV(0, H)$ et $0 < a_{\min} \leq a(x_3) \leq a_{\max}$, presque partout dans $(0, H)$.
La singularité du domaine Ω' fait que l'inégalité spectrale à laquelle fait référence le raisonnement suivi dans [7] ainsi que la méthode de Lebeau-Robbiano n'est pas évidente dans notre cas. Il nous a fallu la rejustifier par le biais d'une inégalité de Carleman, ce travail a été réalisé dans la section 2.1 du chapitre 5. Bien entendu, nous avons tenu compte du fait qu'il fallait aussi construire une fonction poids satisfaisant les propriétés données dans le lemme 5.15. Finalement, la contrôlabilité à zéro du système (5.55) se déduit de la même manière que dans [7].

Chapitre 7

Généralisation aux domaines polygonaux et à plusieurs fissures

Les résultats obtenus dans le chapitre 5, concernant le problème parabolique (5.1) en dimension deux et le problème elliptique (5.57) en dimension trois, peuvent être étendus aux cas de domaine contenant plusieurs coins (où domaines polygonaux). Il est possible aussi de passer au cas de plusieurs fissures rectilignes débouchant sur le bord et telles que l'intersection deux à deux soit vide. En réalité, le plus important est de pouvoir prouver les propositions 5.5 et 5.6 dans des domaines bidimensionnels pareils. Dans les sections suivantes nous indiquerons justement comment construire des fonctions poids vérifiant les propriétés similaires à celles énoncées dans ces propositions.

1 Cas d'un polygone

Soient Ω un polygone de frontière Γ et $S_1, ..., S_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) les sommets de chaque coin. Pour distinguer les coins rentrants et les coins sortants, on considère pour cela la partie $I = \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ de $\{1, 2, ..., n\}$, où $0 < k < n$, telle que chaque sommet S_i, où $i \in I$, correspond à un coin rentrant. Puis, pour un sommet S_i, où $i \in I$, on choisit deux points distincts $M_{1,i}, M_{2,i}$ de Γ tels que $M_{1,i}$ se trouve entre S_{i-1} et S_i, et $M_{2,i}$ entre S_i et S_{i+1}.

Dans ce cas, on aura $\Gamma = \Gamma_S \cup \Gamma_1$ avec $\Gamma_S = \underset{i \in I}{\cup} \Gamma_{S_i}$, Γ_{S_i} désigne la partie de Γ comprise entre $M_{1,i}$ et $M_{2,i}$ (voir Figure 7.1).
Parallélement à ce qui a été fait dans la preuve des propositions 5.5 et 5.6, on verra dans ce qui va suivre que les étapes franchies afin de construire ces fonctions poids sont presque semblables. En effet, dans :

Etape 1 : Pour $1 \leq i \leq n$, on considère un système de coordonnées locales $(x_1 O x_2)$ d'origine S_i et tel que l'axe (Ox_1) coïncide avec la bissectrice de $M_{1,i} O M_{2,i}$. Par ailleurs, on définit la fonction β_{S_i} par :

$$\beta_{S_i}(x_1, x_2) = -x_1 + c_i.$$

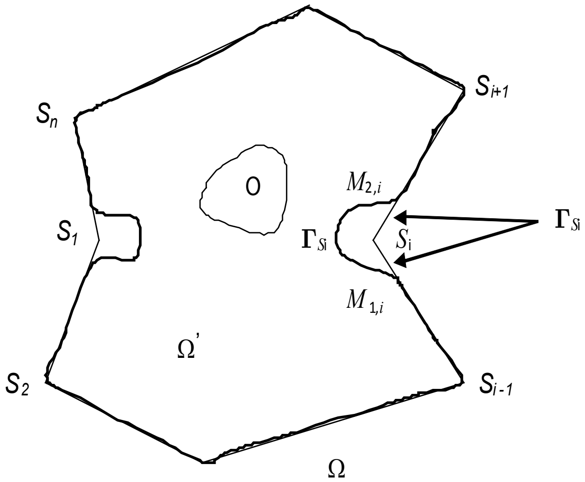

FIGURE 7.1 – Domaine Polygonal

Il est clair que β_{S_i} vérifie

$$\beta_{S_i} \in C^2(\overline{\Omega}),\ \beta_{S_i} > 0 \text{ dans } \overline{\Omega},\ |\nabla \beta_{S_i}| > 0 \text{ dans } \overline{\Omega} \text{ et } \frac{\partial \beta_{S_i}}{\partial \nu} < 0 \text{ dans } \Gamma_{S_i} \backslash \{S_i\}.$$

Etape 2 : Soit Ω' un ouvert non vide inclus dans Ω à frontière $\partial\Omega'$ de classe C^2. On suppose que $\partial\Omega' = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ et $\Gamma_0 = \bigcup\limits_{i \in I} \Gamma_0^i$, où Γ_0^i désigne la partie du bord $\partial\Omega'$ comprise entre $M_{1,i}$ et $M_{2,i}$ (voir Figure 7.1).
On a

$$\frac{\partial \beta_{S_i}}{\partial \nu} < 0 \text{ sur } \Gamma_0^i.$$

Etape 3 : En prenant sur chaque Γ_0^i la même paramétrisation que celle utilisée dans l'étape 2 de la preuve de la proposition 5.5, on pourra alors introduire deux fonctions g_0^i et h_0^i telles que

$$g_0^i = \beta_{S_i} \text{ et } h_0^i = \frac{\partial \beta_{S_i}}{\partial \nu} \text{ sur } \Gamma_0^i.$$

Puis on prolonge les fonctions g_0^i et h_0^i à Ω' par g et h respectivement de telle sorte que $g > 0$ et $h < 0$ sur $\partial\Omega'$. La suite de la justification se fait de la même façon que dans la preuve de la proposition 5.5. On obtient ainsi la fonction β qui vérifie les propriétés sur Ω de la proposition 5.5. L'expression de β sera de la forme :

$$\beta = \begin{cases} \beta_{S_i} & \text{dans } \overline{\Omega_{S_i}} \\ \beta' & \text{dans } \overline{\Omega'} \end{cases}$$

où Ω_{S_i} est le sous ensemble de Ω tel que $\partial\Omega_{S_i} = \Gamma_0^i \cup \Gamma_{S_i}$, et β' est la fonction construite dans l'étape 4 et l'étape 5 de la preuve de la proposition 5.5.

2 Cas de plusieurs fissures

Pour le cas d'un domaine Ω contenant plusieurs fissures rectilignes débouchant sur le bord, si on suppose que ces fissures sont disjointes deux à deux, alors on peut réitérer le même raisonnement qui a nous permis de prouver la proposition 5.6. Puis, en contournant la pointe de chaque fissure, nous pouvons construire, comme dans le cas d'un polygone (voir section prévédente), une fonction poids vérifiant les propriétés de la proposition 5.6.

Perspectives

Une extension peut être envisagée du résultat de contrôle obtenu dans le chapitre 5 concernant l'équation parabolique bidimensionnelle (5.1) avec les conditions de Dirichlet homogènes au bord, ainsi l'équation parabolique en dimension trois (5.55) avec toujours les mêmes conditions au bord. Cette extension peut être faite au cas d'opérateurs réels fortement elliptiques de second ordre et à partir duquelle on peut espérer avoir les mêmes résultats en remplaçant respectivement dans (5.1) le Laplacien et dans (5.55) l'opérateur A' par un opérateur sous forme de divergence :

$$\sum_{i,j=1}^{2} \partial_i(a_{ij}\partial_j)$$

avec $a_{ij} = a_{ji} \in C^{1,1}(\Omega')$, et il existe $\sigma > 0$ tel que

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x')\xi_i\xi_j \leq -\sigma|\xi|^2,$$

pour tout $x' \in \Omega'$ et $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$. Ce qu'il faut vérifier c'est la possibilité de redémontrer une inégalité de Carleman du type (5.13) pour le premier problème, et une inégalité de Carleman du type (5.60) pour le deuxième problème. On peut aussi penser à étendre les résultats obtenus dans le chapitre 5 à des problèmes aux limites de même type considérés dans ce chapitre, mais seulement le domaine où sont posés ces problèmes sont à frontière encore plus singulière. Cette singularité se caractérise par le présence d'un

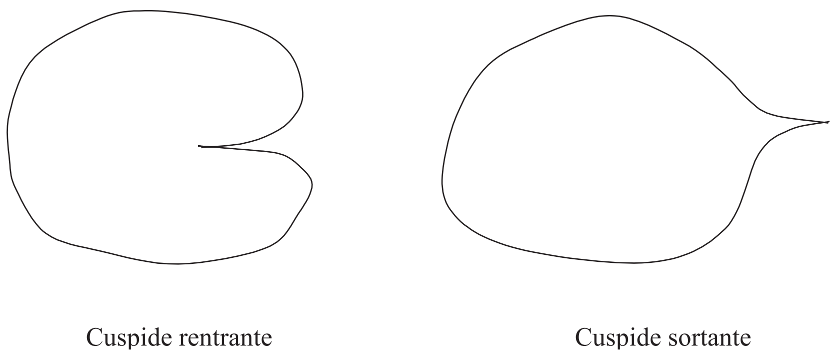

FIGURE 7.2 – Domaine contenant un point cuspide.

point cuspide rentrant ou sortant (voir figure 7.2). Nous adoptons pour cela la même approche suivie dans ce mémoire, à savoir tenir compte du comportement de la solution des problèmes étudiés au voisinage du point cuspide. On peut s'inspirer des résultats obtenus dans [15] ou [30] afin de bien cerner notre problème.

Annexe

Rappelons dans ce paragraphe quelques définitions liées aux notions de contrôle de systèmes linéaires en dimension infinie. Considèrons un espace de Hilbert H et un opérateur A, en général linéaire non borné dans H, de domaine $D(A) \subset H$. On supposera que $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$. Soient U un espace de Hilbert et $B \in \mathcal{L}(U, H)$.
Soit le système d'évolution suivant :

$$\begin{cases} u_t & = Au + Bv \\ u(0) & = u_0, \end{cases} \tag{7.1}$$

où $u_0 \in H$ est une donnée initiale, u représente l'état du système et $v \in L^2(0, T; U)$ est le contrôle introduit dans le système.
Rappelons que pour $v \in L^2(0, T; U)$, le système (7.1) admet une unique solution $u \in C([0, T]; H)$ donnée par :

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)Bv(s)ds.$$

Définition 7.1 1. *On dit que le système (7.1) est exactement contrôlable au temps $T > 0$ si pour tout $u_0, u_1 \in H$, il existe $v \in L^2(0, T; U)$ tel que :*

$$u(T; u_0, v) = u_1,$$

ou, de manière équivalente, si un état arbitraire u_1 peut être atteint au temps T, à partir de n'importe quel état u_0.

2. *On dit que le système (7.1) est contrôlable à zéro au temps $T > 0$ si tout état $u_0 \in H$ peut être transféré à 0 au temps T :*

$$\forall u_0 \in H, \exists v \in L^2(0, T; U) : u(T; u_0, v) = 0.$$

3. *Soit $b \in H$ une trajectoire ou un état au temps T, et supposons qu'il existe $c \in H$, $v \in L^2(0, T; U)$ tels que :*

$$u(T; c, v) = b.$$

On dit que le système (7.1) est contrôlable aux trajectoires au temps $T > 0$ si pour tout $a, c \in H$, $v \in L^2(0, T; U)$, il existe $w \in L^2(0, T; U)$ tel que :

$$u(T; a, w) = b = u(T; c, v).$$

Voici quelques comparaisons entre ces notions.

Proposition 7.2

1. *La contrôlabilité aux trajectoires est équivalente à la contrôlabilité à zéro.*
2. *La contrôlabilité exacte implique la contrôlabilité aux trajectoires mais la réciproque est fausse.*

Bibliographie

[1] J. P. Aubin and I. Ekeland, *Applied nonlinear analysis*, John Wiley and Sons, New York, (1984).

[2] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.* Masson, (1983).

[3] R. Bey, J.P Lohéac and M. Moussaoui, *Singularities of the solution of a mixed problem for a general second order elliptic equation and boundary stabilization of the wave equation*, J.Math.Pures appl, **78** (1999), 1043–1067.

[4] A.H. Belghazi, F. Smadhi, O. Zair and N. Zaidi, *Carleman inequalities for the heat equation in singular domains*. C. R. Acad. Sci. Paris, **348** (2010), 277–282.

[5] A.H. Belghazi, F. Smadhi, O. Zair and N. Zaidi, *Carleman inequalities for the two dimensional heat equation in singular domains*, Mathematical Control And Related Fields, **2** (2012), 331–359.

[6] A.H. Belghazi, *Null controllability of three-dimensional heat equation in singular domains and stratied media. Spectral Inequality*, Acta Applicanda Mathematicae, **134** 1 (2014), 87–109.

[7] A.Benabdallah, Y. Dermenjian and J. Le Rousseau, *On the controllability of linear parabolic equations with an arbitrary control location for stratified media* ; C. R. Acad. Sci. Paris, 344, **6** (2007), 357–362.

[8] A. Benabdallah, Y. Dermenjian, J. Le Rousseau, *Carleman estimates for the one-dimensional heat equation with a discontinuous coefficient and applications to controllability and an inverse problem*, Journal of Mathematical Analysis and applications **336**, 2 (2007), 865–887.

[9] F.Boyer, F. Hubert and J. Le Rousseau, *Discrete Carleman estimates for elliptic operators and uniform controllability of semi-discretized parabolic equations*, J. Math. Pures Appl., **93** (2010), 240–276.

[10] T. Carleman, *Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes*, Ark. Mat. Astr. Fys., **26 B(17)** (1939), 1–9.

[11] S. Dolecki and D.L. Russell, *A general theory of observation and control.* SIAM J. Control Optim. **15(2)** (1977), 185–220.

[12] A. Doubova, A. Osses and J.-P. Puel, *Exact controllability to trajectories for semilinear heat equations with discontinuous diffusion coefficients*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **8** (2002), 621–661.

[13] E. Fernandez-Cara and S. Guerrero, *Global Carleman Inequalities For Parabolic Systems And application To Controllability.* SIAM J. Control Optim, **45** (2006),no. 4, 1395-1446.

[14] A. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of Evolution Equations*, Lecture Notes Series 34, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.

[15] A. Khelif, *Problèmes aux limites pour le Laplacien dans un domaine à points cuspides.* C. R. Acad. Sci. Paris, **287** (1978), 1113–1116.

[16] G. Lebeau and L. Robbiano, *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, Comm. Partial Differential. Equations **20** (1995), 335–356.

[17] J. Le Rousseau, *Carleman estimates and controllability results for the one-dimensional heat equation with BV coefficients*, J. Differential Equations. **233** (2007), 417–447.

[18] J. Le Rousseau, *Représentation Microlocale de Solutions de Systèmes Hyperboliques, Application à l´Imagerie, et Contributions au Contrôle et aux Problèmes Inverses pour des Equations Paraboliques, Mémoire d´habilitation à diriger des recherches*, Université d´Aix-Marseille, Université de Provence, (2007) http ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00201887/fr/.

[19] J. Le Rousseau and G.Lebeau, *On Carleman estimates for elliptic and parabolic operators. Applications to unique continuation and control of parabolic equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. (2011), 26.

[20] J. L Lions and E. Magenes, *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Dunod, Paris, (1968).

[21] P. Grisvard, *Edge Behavior of the Solution of an Elliptic Problem*, Math. Nachr. **132** (1987), 215–299.

[22] P. Grisvard, *Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités.* J.Math.Pures appl, **68** (1989), 215–259.

[23] P. Grisvard, *Singularities in boundary value problems*, Masson, Paris, 1992.

[24] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, London, 1985.

[25] A. Heibig and M.A. Moussaoui, *Exact controllability of the wave equation for domains with slits and for mixed boundary conditions*, Discrete and continuous dynamical systems, **2** (1996), 367–386.

[26] M.A. Moussaoui and B.K. Saadallah, *Régularité des coefficients de propogation de singularités de l'équation de la chaleur dans un domaine polygonal plan*, C. R. Acad. Sci. Paris, **293** (1981), 297–300.

[27] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, (1967).

[28] M.T. Niane and O. Seck, *Contrôlabilité exacte frontière de l'équation des ondes dans un polygone plan*, C. R. Acad. Sci. Paris, **316** (1993).

[29] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, (1983).

[30] J.-L. Steux, *Problème de Dirichlet pour un opérateur elliptique dans un domaine à point cuspide*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **6**, (1997), 143–175.