



N^o d'ordre
18/2001-M/PH

Université des Sciences et de la Technologie « HOUARI BOUMEDIENE »
Faculté des Sciences- Physique-

Thèse

Présentée par

Houria RAMDANE-CHERIF
(Epouse AISSIOU)

en vue de l'obtention du diplôme de

Magister en Physique

Spécialité : ***Energétique et Mécanique des Fluides***
Thème

**Etude du ruissellement graduellement
varié de fluides newtoniens ou en loi
puissance**

Soutenue le 15 /11 / 2001 devant la commission d'examen composée de :

<i>Mr R.SOUIDI</i>	<i>Maître de Conférences -USTHB</i>	<i>Président</i>
<i>Mr T. BENABID</i>	<i>Professeur -USTHB</i>	<i>Examineur</i>
<i>Mr S.BENAYAD</i>	<i>Dr.Es.Sciences -IAP- boumerdes</i>	<i>Examineur</i>
<i>Mr N. ZERAIBI</i>	<i>Maître de Conférences -Univ. de Boumerdes</i>	<i>Examineur</i>
<i>Mr A.SALEM</i>	<i>Professeur -USTHB</i>	<i>Directeur de Thèse</i>

REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au laboratoire de Mécanique des Fluides de l'U.S.T.H.B sous la direction du Professeur A. SALEM. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour l'aide et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de ce travail.

Je prie Monsieur, F. SOUIDI, Maître de Conférence à l'U.S.T.H.B. de recevoir la plus vive expression de mes sentiments reconnaissants et respectueux, pour l'honneur qu'il a bien voulu me faire en acceptant de présider mon jury d'examen.

Que Monsieur N. ZERAIBI, Maître de Conférence à l'Université de Boumerdes qui m'a fait l'amabilité de s'intéresser à mon travail et m'a aidé de ses nombreux conseils et son savoir, trouve ici l'expression de ma reconnaissance la plus sincère.

Je suis également très reconnaissante envers le Professeur BENABID de l'USTHB et M^{er} BENAYAD, Dr.Es.Sciences de l'I.A.P qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de cette thèse.

Enfin je n'oublierai jamais tous mes collègues du laboratoire et de l'institut qui ont toujours su maintenir une atmosphère de bonne humeur et m'ont soutenue moralement dans les moments les moins agréables.

Je voudrai insister sur ma profonde reconnaissance envers mes parents sans lesquels tout ce qui précède, ainsi que tout ce qui va suivre, n'aurait pas même été évoqué.....

Pour finir, je tiens à saluer mon mari pour son soutien continu.....

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	1
Chapitre I PRESENTATION DES TRAVAUX ANTERIEURS.....
I.1. INTRODUCTION.....	3
I.1.1. Régimes d'écoulements.....	4
I.1.2. Structure de l'écoulement.....	5
I.2. PRESENTATION DES TRAVAUX ANTERIEURS.....	7
I.2.1. FLUIDES NEWTONIENS.....	7
I.2.2. FLUIDES NON NEWTONIENS.....	14
I.3. CONCLUSION.....	17
Chapitre II EQUATIONS GENERALES.....	17
II.1. INTRODUCTION.....	19
II.2. EQUATIONS GENERALES ET CONDITIONS AUX LIMITES.....	19
II.2.1. EQUATIONS.....	19
II.2.2. CONDITIONS AUX LIMITES.....	22
II.2.3. CAS PARTICULIER D'UNE SURFACE PLANE – Solution de Nusselt.....	23
II.3. EQUATIONS ADIMENSIONNELLES.....	25
II.3.1. VARIABLES REDUITES.....	25
II.3.2. EQUATIONS ADIMENSIONNELLES.....	26
II.3.3. SOLUTION ANALYTIQUE APPROCHEE.....	29
II.4. EQUATIONS DU RUISSELLEMENT GRADUELLEMENT VARIE.....	31
II.4.1. Cas particulier du ruissellement sur un cylindre circulaire.....	32
II.5. CONCLUSION.....	33
Chapitre III TRAITEMENT NUMERIQUE.....
III.1. NTRODUCTION.....	35
III.2. ÉQUATIONS TRANSFORMEES.....	35
III.3. METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION.....	37
III.3.1. Discrétisation des équations.....	37
III.3.2. Organigramme descriptif.....	39
III.3.3. Processus de calcul, stabilité et convergence.....	41
III.4. CAS PARTICULIER DES FLUIDES NON NEWTONIENS.....	42
III.4.1. INTRODUCTION.....	42
III.4.2. CLASSIFICATION DES FLUIDES "EN LOI PUISSANCE".....	42
III.4.3. RUISSELLEMENT D'UN FLUIDE EN LOI PUISSANCE SUR UN PLAN INCLINE.....	44
III.4.4. EQUATIONS GENERALES EN BIDIMENSIONNEL.....	45
III.5. CONCLUSION.....	49
Chapitre IV RESULTATS ET COMMENTAIRES.....
IV.1. INTRODUCTION.....	51
IV.2. FLUIDES NEWTONIENS.....	51
IV.2.1. Validation du code de calcul.....	51
IV.2.2. Influence du Nombre de Reynolds.....	53
IV.2.3. Influence de l'inclinaison θ_0 du plan d'arrivée du fluide.....	55
IV.2.4. Influence du profil initial des vitesses.....	64
IV.2.5. Conclusion.....	70

IV.3. FLUIDES NON NEWTONIENS.....	71
IV.3.1. INTRODUCTION.....	71
IV.3.2. VALIDATION DU CODE DE CALCUL.....	71
IV.3.3. RESULTATS ET DISCUSSION.....	72
IV.3.4. CONCLUSION.....	79
<i>Chapitre V CONCLUSION GENERALE.....</i>	80
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	

NOMENCLATURE

$\overline{\overline{D}}$	Tenseur des vitesses de déformation
Fr	Nombre de Froude
g	Accélération de pesanteur
h	Epaisseur du film
H	Epaisseur adimensionnelle du film
h_0	Epaisseur initiale du film
K	Courbure de cylindre
k	Consistance du fluide
n	Indice de comportement
P_a	Pression atmosphérique
P	Pression
q_v	Débit du liquide par unité de largeur
R	Rayon du cylindre
Re	Nombre de Reynolds
Reg	Nombre de Reynolds généralisé
r, θ	Coordonnée semi polaires
u, v	Composante de la vitesse
u^+, v^+	Composante adimensionnelle de la vitesse
u_e, v_e	Composante de la vitesse à la surface libre
x, y	Coordonnées locales
x^+, y^+	Coordonnées locales adimensionnelles

Lettres grecques

$\dot{\gamma}$	Vitesse de cisaillement
$\overline{\overline{\tau}}$	Tenseur des contraintes
α, β	Fonctions définies par (II.22)
θ_0	Inclinaison du plan d'arrivée par rapport à l'horizontal
Γ	Paramètre défini par (II.2)
ξ	Vorticité
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
μ_{app}	Viscosité apparente
ρ	Masse volumique
τ	Contrainte de cisaillement
ε	Rapport de l'épaisseur de la lame liquide au rayon de courbure
ω	$\omega = (r-1)/\rho_e$
ρ_e	Epaisseur adimensionnelle
σ	Tension superficielle

INTRODUCTION GENERALE

C'est en 1916 que NUSSELT [Nus16], travaillant sur un problème posé par l'industrie sucrière, publiait le premier article traitant des écoulements en couche mince et proposait une solution dans le cas simple du ruissellement laminaire sur un plan.

Depuis cette date de très nombreux travaux ont été consacrés à ces écoulements du fait des nombreux domaines d'application où ils interviennent (génie chimique, nucléaire, thermique, etc....)

Dans le premier chapitre de ce mémoire est présentée une revue de ces travaux. Leur analyse est rendue difficile car ces études qu'elles soient expérimentales ou théoriques diffèrent les unes des autres par les conditions d'expérience, les hypothèses, les conditions aux limites ou par les régimes d'écoulements considérés.

Cependant cette synthèse permet de mettre en évidence que c'est essentiellement sur des surfaces planes ou le long de tubes verticaux que le ruissellement a été étudié alors que d'autres types de surfaces sont utilisées dans l'industrie. Par ailleurs peu d'études sont consacrées au ruissellement de fluides complexes alors que ces derniers sont d'un usage courant dans l'industrie pharmaceutique où agro-alimentaire.

C'est dans le second chapitre qu'est développée l'étude théorique du ruissellement sur des surfaces de forme quelconque.

Le problème est formulé à partir des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement associées aux conditions aux limites dynamiques et cinématique; la surface considérée étant un cylindre de section quelconque d'axe horizontal. L'étude analytique

permet en particulier de mettre en évidence le rôle primordial du rapport de l'épaisseur de la couche fluide au rayon de courbure de la surface.

La résolution numérique du système d'équations obtenu est présentée dans le troisième chapitre. Son originalité réside dans le fait que le domaine fluide a une frontière libre.

Les résultats obtenus sont présentés et analysés dans le quatrième chapitre. Le cas des fluides newtoniens est étudié en premier, celui des fluides non newtoniens dont la loi de comportement est du type puissance le sont après présentation des réarrangements nécessaires dans le code de calcul.

Chapitre I

*PRESENTATION DES TRAVAUX
ANTERIEURS*

I.1. INTRODUCTION

L'écoulement de ruissellement est un écoulement en couche mince sur une paroi sous l'effet de la pesanteur. Il se distingue des autres types d'écoulements diphasiques par la présence d'une surface libre continue séparant le liquide de la seconde phase, qui est un gaz au repos ou en mouvement.

Le ruissellement des eaux de pluie est un exemple simple de ce phénomène que l'on rencontre fréquemment dans la nature. La nécessité d'une étude approfondie des films minces est soulignée par SOLESIO[Sol78] qui cite le problème très actuel de la "crise d'ébullition". Ce problème est dû à la rupture du film de liquide réfrigérant dans les réacteurs nucléaires qui est l'une des limitations de puissance de ces derniers. Un tel phénomène peut apparaître lorsque le fluide réfrigérant se présente sous la forme d'un écoulement annulaire dispersé où un film liquide est plaqué à la paroi par un écoulement de gaz central chargé de gouttelettes. L'épaisseur du film liquide diminue le long du canal sous l'action de l'arrachement de gouttelettes et de l'évaporation à l'interface. A une certaine cote, l'épaisseur du film devient nulle et l'assèchement de la paroi se produit. Cela entraîne une diminution du coefficient d'échange, donc une augmentation de la température de paroi, qui peut provoquer sa destruction. On peut citer aussi l'exemple du phénomène de renversement de débit qui apparaît lors du remouillage par le haut d'un canal chauffant rempli de vapeur. Le film liquide est ré-entraîné vers le haut lorsque l'écoulement ascendant de vapeur atteint un certain débit. Les applications nombreuses et diverses où le ruissellement intervient expliquent le nombre particulièrement élevé de travaux théoriques et expérimentaux s'y rapportant.

Contrairement à l'hydrodynamique des films minces de liquides newtoniens, qui a été largement étudiée durant plusieurs décennies, celle des liquides non newtoniens n'a suscité qu'une modeste attention.

Une étude bibliographique permet de remarquer que les mêmes régimes d'écoulements et la même structure hydrodynamique de la couche mince sont observés aussi bien pour le ruissellement de liquides newtoniens que pour certains fluides non newtoniens (en loi puissance).

1.1.1. Régimes d'écoulements

Si l'on considère le ruissellement sur une plaque plane, lorsque le nombre de Reynolds défini par ($Re = q_v / \nu$) augmente, les régimes d'écoulement suivants peuvent être observés :

D'abord un régime dit laminaire lisse, pour lequel la surface du film est lisse partout ($Re < 10$).

Ensuite au delà d'une zone située à l'entrée qui reste toujours lisse, des ondes de capillarité ou de gravité ou les deux à la fois, apparaissent à la surface du film, ce régime est appelé laminaire ondulé ($10 < Re < 1500$).

Enfin la turbulence envahit progressivement l'épaisseur du film et le régime est dit turbulent pour des grandes valeurs du nombre de Reynolds ($Re > 1500$).

Notons qu'en fait ces différents régimes dépendent de manière complexe des propriétés physiques du liquide, du débit volumique et de la pente de la surface solide, aussi, doivent ils être décrits selon FULFORD [Ful64] à l'aide du nombre de Reynolds Re , du nombre de Froude Fr , et du nombre de Weber We , définis comme suit :

$$Re = \frac{u_m h_m}{\nu}$$

$$Fr^2 = \frac{u_m^2}{g h_m}$$

$$We = \frac{\sigma}{\rho h_m u_m^2}$$

Une nomenclature à été proposée par cet auteur ; c'est ainsi que dans le cas d'un film d'eau par exemple, les ondes de gravité apparaissent les premières pour $Fr = 1$ à 2 , les effets de capillarité deviennent importants au voisinage de $We = 1$, quant à la transition laminaire-turbulent elle se produit dans la zone $Re = 250$ à 500 .

1.1.2. Structure de l'écoulement

A partir de l'entrée on distingue successivement les trois régions suivantes (fig. I.1.2-1):

- La région d'entrée ou de couche limite: dès l'entrée, une couche limite interne surmontée par une zone potentielle se développe à partir du fond de la paroi jusqu'à envahir toute l'épaisseur du film; la zone potentielle disparaissant alors.
- La région pleinement visqueuse: la couche limite occupe toute l'épaisseur du film mais le régime d'écoulement n'y est encore pas établi.
- La région établie: l'influence des termes d'inertie disparaît complètement, le profil de vitesse devient établi dans le sens de l'écoulement.

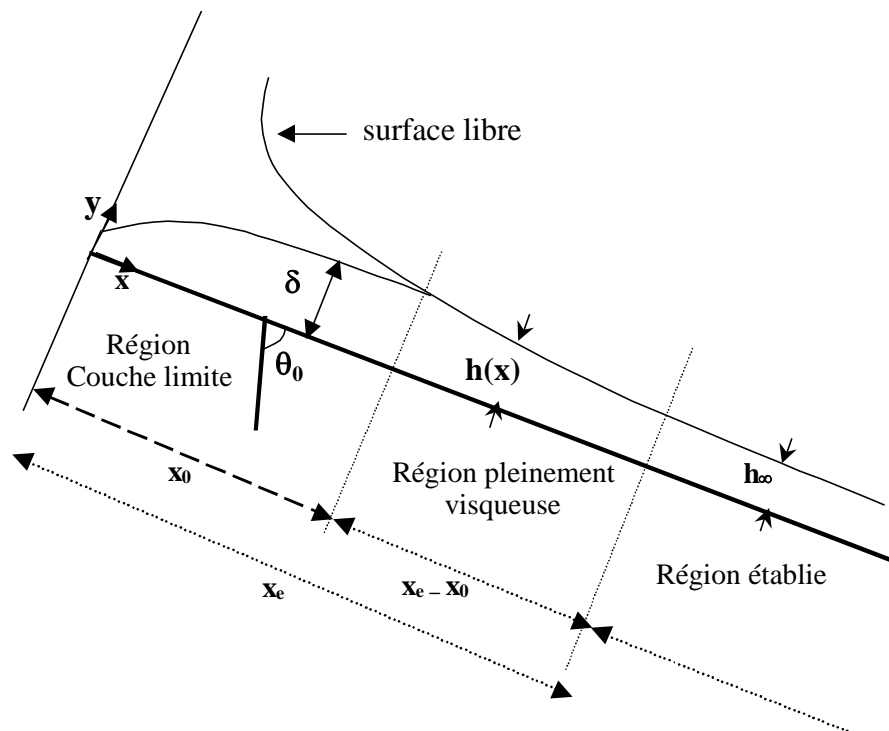


Figure I.1.2-1 les différents régimes de la structure de l'écoulement

Dans la littérature on désigne généralement par « région d'établissement » ou « région d'entrée hydrodynamique » la zone comprise entre l'entrée et la zone établie .

Il est important de noter également ce point commun à la fois au ruissellement des fluides newtoniens et non newtoniens : la plus grande partie des travaux relevés dans la littérature concerne essentiellement le ruissellement soit sur des plans verticaux ou inclinés soit le long de tubes.

Dans le présent travail nous nous intéresserons en particulier au ruissellement sur des surfaces courbes, et nous ne considérerons que le régime laminaire.

Pour cela nous commencerons par présenter une analyse des travaux antérieurs consacrés à ce régime d'écoulement; la première partie concerne les fluides newtoniens et la seconde les fluides non newtoniens.

I.2. PRESENTATION DES TRAVAUX ANTERIEURS

I.2.1. FLUIDES NEWTONIENS

La surface du film peut être lisse sur laquelle se propagent des ondes de gravité ou de capillarité ou des deux à la fois, et les différents régimes d'écoulement ne peuvent plus être caractérisés par le nombre de Reynolds seul. Parmi ces régimes d'écoulement, on relève les trois principaux déjà cités: le régime laminaire lisse, le régime pseudo-laminaire ondulé et le régime turbulent.

Notre étude porte sur le ruissellement laminaire d'un fluide newtonien ou non sur un obstacle de forme quelconque, aussi dans la suite, les travaux consacrés au ruissellement sont passés en revue en accordant une attention particulière au régime laminaire .

I.1.1.a. RUISSELLEMENT SUR DES SURFACES PLANES

I.1.1.a.1. Travaux théoriques

La plupart des travaux considèrent le ruissellement sur une plaque plane verticale ou inclinée. NUSSELT [Nus16] a été le premier à étudier l'écoulement d'un film laminaire le long d'une plaque verticale. Dans cette étude, il néglige les termes d'inertie et suppose nulle la contrainte de cisaillement à l'interface liquide-gaz; il obtient ainsi un profil de vitesse semi parabolique d'équation $u = g(hy - y^2)/\nu$ et une épaisseur du film constante égale à $h = (3\nu q_v / g)^{1/3}$.

Notons que ces résultats ne s'appliquent que dans la zone établie; dans la région d'entrée les termes d'inertie se conservent et une solution exacte des équations ne peut plus être obtenue de façon simple.

Pour calculer l'écoulement à partir de l'entrée, la plupart des auteurs font une hypothèse quant à la forme du profil de vitesse dans la couche mince et utilisent les méthodes globales classiques de résolution de type Karman -Polhausen.

C'est ainsi que KASIMOV et ZIGMUND [Kas60] supposent un profil de vitesse semi parabolique, l'épaisseur locale $h(x)$ à quelques centimètres après la source est donnée par l'expression suivante:

$$\frac{5gx}{6q_v^2} = \frac{1}{6h_N^2} \log \left[\left(\frac{h(x)^2 + h_N h_x + h_N^2}{(h(x) - h_N)^2} \right) \left(\frac{h_0 - h_N}{h_0^2 + h_0 h_N - h_N^2} \right) \right] + \frac{1}{h_N^2 \sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left[\frac{h_N \sqrt{3} (h(x) - h_0)}{h(x)(h_0 - h_N) + h_0 h_N + 2h_N^2} \right]$$

où h_0 est l'épaisseur à l'entrée et h_N l'épaisseur correspondant à la solution de Nusselt et q_v le débit par unité de largeur.

En ne faisant aucune hypothèse sur la forme du profil des vitesses, ils trouvent [Kas60] qu'à partir d'une distance $x = 2.02 \text{ cm}$ de l'entrée, le profil des vitesses dans le film devient indépendant des conditions à l'entrée, et est donné par:

$$u = -\frac{g}{\nu} \left(h(x)y - \frac{y^2}{2} \right) + \frac{\nu}{6} \left(\frac{g}{4\nu^2} \right) \frac{h^2(x)}{x} \left[y^4 - \frac{13}{210} \frac{g}{4\nu^2} \frac{h(x) - y^2}{x} \right]$$

HASSEN [Has67] quant à lui suppose un profil de vitesse représenté par un polynôme de degré 3, et intègre l'équation de quantité de mouvement sur l'épaisseur du film $\Delta = \left(\frac{h(x)}{h_N} \right)^3$,

l'épaisseur adimensionnelle du film est donnée par l'équation :

$$\frac{x\nu}{hq} = \frac{\Delta}{560} + \left(\frac{1}{140} - \frac{41}{1050} \right) + \left(\frac{816}{1575} + \frac{41}{1050} - \frac{41}{140} \right) \left(\frac{1}{\Delta} \right)^3 \left[\frac{1}{6} \log \frac{1 + \Delta^{1/3} + \Delta^{2/3}}{(1 - \Delta^{1/3})^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{(1 + 2\Delta)^{1/3}}{\sqrt{3}} \right]$$

où x est la distance parcourue.

Notons que si l'épaisseur du film obtenue vérifie la solution de NUSSELT lorsque x tend vers l'infini, par contre en $x = 0$, l'épaisseur trouvée ne coïncide pas avec l'épaisseur initiale.

BRULEY [Bru65] est le premier à avoir supposé l'existence dans la région d'entrée d'une couche limite interne à la couche mince de liquide dans les écoulements de ruissellement.

Dans la couche surmontant la couche limite, le fluide est supposé s'écouler en bloc à la vitesse $(u_0^2 + 2gx)^{1/2}$ correspondant à la vitesse de chute libre en fluide parfait.

Ce modèle a été adopté également par d'autres auteurs (HAUGEN, JAIN, ACKERBERG).

HAUGEN [Hau68] suppose que le fluide est introduit avec une épaisseur h_0 et une vitesse uniforme u_0 , il adopte une répartition semi-parabolique du profil de vitesse dans la zone d'entrée. Après résolution de l'équation intégrale du mouvement, il obtient une épaisseur locale $h(x)$ du film différente de l'épaisseur δ de la couche limite; ces deux épaisseurs deviennent égales dans la zone établie. Il remarque, par ailleurs, que l'épaisseur du film décroît sensiblement au voisinage de l'origine. Cette décroissance est d'autant plus marquée que l'épaisseur initiale du film est grande. Notons que cette dernière observation traduit le fait que le profil imposé à l'entrée (uniforme) est sensiblement différent du profil supposé être semi-parabolique immédiatement après l'entrée.

ACKERBERG [Ack68] développe une théorie asymptotique pour résoudre ce problème. Un développement en série en fonction d'un petit paramètre ε , caractérisant l'importance des termes d'inertie, est utilisé pour résoudre les équations de la couche limite. Les résultats obtenus montrent en particulier qu'au delà d'une certaine distance à partir de l'entrée, les conditions d'entrées n'ont plus aucune influence.

JAIN [Jai78] a utilisé, pour représenter la répartition des vitesses dans la couche limite, un polynôme du quatrième degré avec un paramètre de forme. Les solutions, qui dépendent des mêmes paramètres que ceux définis par HAUGEN, sont calculées numériquement pour différentes valeurs du paramètre de forme. Les résultats ainsi obtenus diffèrent très peu de ceux obtenus par HAUGEN ou par BRULEY.

Dans tous les travaux cités précédemment l'hypothèse de l'existence, dans la zone d'entrée, d'une couche limite interne surmontée d'une zone potentielle est justifiée par le fait que les

conditions d'introduction du fluide sur la plaque ne sont pas adaptées; elles se traduisent par des variations brusques dans les conditions d'écoulement au voisinage immédiat de l'entrée.

CERRO et WHITAKER [Cer71] ont présenté une analyse théorique plus générale concernant la zone initiale avec un profil de vitesse parabolique à l'entrée. Le fluide qui ruisselle sur le plan est amené entre deux plaques parallèles distantes de h_0 . Les solutions obtenues, par intégration numérique, englobent les résultats de HASSEN et BRULEY.

Pour MURTY et SASTRY [Mur73], l'hypothèse d'un frottement nul à la surface libre n'est pas justifiée dans la zone d'accélération d'un film mince. L'épaisseur du film est exprimée en particulier en fonction du rapport des propriétés physiques des deux fluides à l'interface $\gamma = \rho\mu/\rho_g\mu_g$. Loin de l'entrée, il retrouve l'épaisseur correspondant au régime établi.

MAHAMDI [Mah80] a résolu l'équation du mouvement pour déterminer les caractéristiques hydrodynamiques de l'écoulement, sans faire d'hypothèses préalables sur le profil de vitesses, dans la zone d'entrée. Il obtient l'expression suivante pour l'épaisseur de la couche limite :

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2.73u_0\nu}{g \sin \theta} \left(1 + \frac{2g \sin \theta_x}{u_0^2}\right)^{1/4}}$$

L'épaisseur du film est donnée par:

$$h(x) = \frac{q}{\sqrt{(2g \sin \theta + u_0^2)}} + 0.32\delta(x)$$

$h(x)$ est analogue à l'expression obtenue par HAUGEN. Cependant, les valeurs de u_0 et de h_0 à l'entrée ne sont pas retrouvées exactement. Ceci est attribué au changement de variables effectué qui entraîne une épaisseur de couche limite non nulle à l'entrée.

HOUNKANLIN [Hou87] a fait une étude théorique de l'établissement d'un film liquide ruisselant sur un plan incliné à partir d'un écoulement de Poiseuille établi.

Une méthode de développements asymptotiques raccordés est mise en œuvre. Les profils de vitesse et la forme de la surface libre dans la zone d'entrée sont obtenus. Pour des nombres de

Reynolds, Re , allant de 800 à 2000, le réajustement des profils de vitesse et la contraction du film sont progressifs.

A partir des résultats de HOUNKANLIN, PHILIPPE [Phi88] propose un modèle analytique qu'il utilise pour étudier le transfert de masse d'un soluté dans le film liquide et sur des surfaces actives disposées dans le plan de ruissellement. Les résultats obtenus montrent que le modèle est satisfaisant au voisinage immédiat de l'entrée.

ANDERSSON [And87] a fait une étude analytique dans laquelle les équations de la couche limite sont également résolues par une méthode globale. Les calculs sont faits avec un profil de vitesse supposé sinusoïdal ainsi qu'avec des profils représentés respectivement par des polynômes d'ordre deux, trois et quatre, permettant ainsi une comparaison avec tous les travaux des auteurs précédemment cités.

Dans son analyse des résultats, il apparaît que l'un ou l'autre des profils utilisés semble mieux adapté pour décrire une zone particulière de l'écoulement et aucun de ces profils ne permet de décrire correctement la structure de l'écoulement depuis l'entrée jusqu'à la zone établie. Cependant le profil sinusoïdal permet une représentation relativement satisfaisante de l'écoulement bien qu'il aboutisse à une surévaluation ($\sim 20\%$) de l'étendue de la zone d'établissement.

1.1.1.a.2. Travaux expérimentaux

La méconnaissance de certains problèmes fondamentaux dans les processus industriels, utilisant le ruissellement, est à l'origine de nombreux travaux expérimentaux, visant à une meilleure représentation de la structure de l'écoulement dans les films liquides. La faible épaisseur de ces derniers ne permettant pas une mesure directe des vitesses par l'introduction d'une sonde (pitôt ou anémomètre à fil chaud), les efforts des expérimentateurs ont porté principalement sur la détermination de l'épaisseur de la couche mince et des

méthodes de mesure variées ont été mises au point. La détermination de l'épaisseur du film, associée à celle de la pente à la paroi du profil des vitesses, permet de mieux approcher la répartition des vitesses dans le film. La pente à la paroi étant elle-même obtenue à partir de la mesure du transfert pariétal de matière au moyen d'une technique électrochimique : la polarographie.

Dans une étude expérimentale sur le plan incliné, THOMAS et RICE [Tho73] utilisant une technique photographique ont déterminé trois régions:

- Une zone initiale dite zone d'accélération où se développe la couche limite, l'épaisseur du film diminue.
- Une zone de stabilisation où la couche limite envahit toute l'épaisseur du film; le régime d'écoulement n'étant toujours pas établi.
- Une zone d'écoulement établi.

L'exploitation des photographies montre l'existence d'un profil de vitesse représenté par un polynôme d'ordre 3 dans la zone d'entrée, ce qui remet en cause le profil parabolique proposé par HAUGEN. Dans la zone établie, la répartition parabolique proposée par NUSSELT et HASSEN est confirmée.

A l'aide d'une méthode chronophotographique, WILKES et NEDERMAN [Wil62] ont déterminé le profil des vitesses pour un écoulement de ruissellement sur un plan vertical. Dans la zone d'entrée ce profil est pratiquement semi parabolique et un léger freinage est observé au voisinage de la surface libre.

Par une méthode polarographique, CAMPERGUE [Cam72] a étudié le ruissellement sur un plan incliné, et a mis en évidence l'influence de l'inclinaison et du nombre de Reynolds Re sur le régime d'écoulement. Il a en particulier défini les conditions d'apparition du régime d'ondes, et observé la persistance d'une zone d'entrée lisse quel que soit le régime d'écoulement.

KOLLET et DAGUENET [Kol82] ont quant à eux mesuré le transfert de masse sur un plan incliné rugueux par une méthode polarographique et ce pour des nombres de Reynolds compris entre 100 et 2000. La valeur du courant limite ne variant plus à partir de 12 cm de l'entrée, ils en ont déduit que cette longueur est celle de la zone d'établissement.

Notons que les études théoriques aussi bien que celles expérimentales analysées précédemment diffèrent les unes des autres soit par les hypothèses faites soit par les conditions d'expériences, ce qui rend difficile leur comparaison.

I.1.1.b. RUISSELLEMENT SUR DES SURFACES DE GEOMETRIE QUECONQUE

Dans l'industrie, le ruissellement est essentiellement réalisé sur des surfaces planes ou le long de tubes cylindriques verticaux ou inclinés.

Dans le cas des tubes, FEIND [Fei65] a résolu les équations de l'écoulement en faisant les mêmes hypothèses que NUSSELT. Dans le cas par exemple d'un film de 1 mm d'épaisseur à l'extérieur d'un tube vertical, le débit est supérieur de 20% par rapport à la plaque plane.

Sur des surfaces autres que des plans ou des tubes, très peu d'études théoriques ont été développées. C'est ainsi que dans une étude expérimentale d'absorption de SO₂ par des films d'eau autour d'une sphère, LYNN et STREATEMAER [Lyn55] ont simplement transposé les résultats de NUSSELT obtenus dans le cas plan.

Dans le cas particulier du ruissellement sur un obstacle de pente variable, une étude théorique et expérimentale réalisée par SALEM [Sal81] est consacrée au ruissellement graduellement varié autour d'un cylindre d'axe horizontal. L'auteur montre qu'au voisinage de l'entrée la perturbation due à la variation de pente est de nature singulière, par ailleurs l'influence des conditions d'entrée finit par disparaître assez rapidement vers l'aval.

L'étude de la stabilité de l'écoulement laminaire décrit précédemment, est développée par TRAD [Tra87] qui utilise une méthode de perturbation régulière. Il montre que l'écoulement devient instable pour $Re > Re_c = (5/6) \cotg \theta_0$, ou θ_0 est la pente à l'entrée du plan tangent au cylindre.

1.1.1.c. CONCLUSION

Nous remarquons à partir de cette analyse que la plupart des travaux ont concerné le ruissellement sur des plans ou bien le long de tubes verticaux ou inclinés. Ces travaux diffèrent les uns des autres soit, par les conditions initiales, soit par les hypothèses utilisées, rendant difficile leur comparaison.

Par ailleurs, à l'exception des travaux de SALEM et de TRAD, rares sont ceux portant sur le ruissellement sur des surfaces courbes bien que ces surfaces sont utilisées dans certains types d'échangeurs.

1.2.2. FLUIDES NON NEWTONIENS

Le ruissellement des liquides newtoniens a été largement étudié. Par contre, une modeste attention a été consacrée aux liquides non newtoniens s'écoulant sous l'influence de la gravité bien que ce type d'écoulement soit de plus en plus rencontré dans les processus de fabrication utilisés dans l'industrie agro alimentaire et pharmaceutique.

Dans les quelques travaux théoriques qui traitent de ce problème, on remarque, comme pour les fluides newtoniens, que c'est la méthode intégrale de résolution qui est souvent mise en œuvre.

L'écoulement d'un film laminaire, d'un fluide non newtonien le long d'une surface plane inclinée, dû à la gravité, a été étudié dès 1964 par ASTARITA [Ast64]. Ce dernier a mesuré l'épaisseur de film pour plusieurs fluides non newtoniens à différents débits et inclinaisons. Il

a montré en particulier que le plan incliné peut être utilisé pour obtenir les courbes contrainte-vitesse de cisaillement pour les fluides adhérents à la paroi. Cette même technique rend possible la détection d'effet même mineur d'un glissement à la paroi.

Dans une recherche similaire THERIEN [The70] compare ses valeurs expérimentales de l'épaisseur du film à l'épaisseur théorique:

$$\delta = \left\{ \left(\frac{k}{\rho g \sin \theta} \right)^{1/n} \frac{q(2n+1)}{n} \right\}^{\frac{n}{2n+1}}$$

L'épaisseur théorique est calculée en utilisant le modèle rhéologique d'Oswald-de Waele avec un glissement apparent nul à la paroi. La comparaison, portant sur plus de 250 essais, montre en définitive que le modèle d'Oswald-de Waele permet de prédire l'épaisseur du film liquide avec une erreur relative moyenne inférieure à 4 %.

NARAYANA [Nar78] a étudié la région d'entrée pour des fluides pseudoplastiques et dilatants en incluant l'effet du frottement interfacial entre liquide et vapeur. Il intègre l'équation du mouvement dans l'épaisseur du film, en supposant un profil sinusoïdal. Il observe que la longueur d'entrée dépend du rapport $\alpha = Fr/Re$ et de l'indice n de la loi en puissance. Pour une valeur fixée de n , la diminution de l'épaisseur du film à partir de l'entrée est d'autant plus importante que α est petit ($\alpha \leq 0.01$). Par ailleurs, pour une valeur de α fixée mais petite, l'épaisseur du film diminue lorsque n augmente. Cependant, dans le cas particulier où α est proche de l'unité, au voisinage immédiat de l'entrée, l'épaisseur du film liquide croît dans le sens de l'écoulement; l'évolution de l'épaisseur avec n est complexe.

TEKIC [Tek84] étudie le ruissellement d'un liquide non newtonien sur un plan incliné avec un profil de vitesse parabolique à l'entrée. Il utilise les équations de type couche limite et prend en compte le gradient de pression et la tension de surface. Le problème est résolu par la mise en œuvre d'une méthode globale, le profil de vitesse est supposé devenir semi parabolique immédiatement après l'entrée. Les résultats obtenus montrent que l'épaisseur du

film de même que la longueur d'entrée diminuent avec n . Plus récemment, ANDERSSON et IRGENS [And88] ont démontré que le ruissellement le long d'une plaque verticale pouvait être décrit dans la zone d'entrée par une équation généralisée de type Falkner-Skan dont il donne une solution semblable exacte. Cette solution est raccordée à celle obtenue dans la région pleinement visqueuse par une méthode intégrale. Les résultats obtenus permettent de déterminer l'influence de la rhéologie du film sur la longueur d'entrée hydrodynamique pour $0.5 \leq n \leq 2$, ANDERSSON observe en particulier que la longueur d'entrée diminue avec n .

Dans le cas d'une plaque inclinée, ANDERSSON [And98] propose une nouvelle transformation semblable qui permet de tenir compte de l'inclinaison de la plaque, l'équation obtenue appartenant toujours à la famille des transformations de type Falkner-Skan. Cette nouvelle méthode permet en outre d'étudier les fluides hautement pseudoplastiques $n \leq 0.5$. Les résultats obtenus montrent que l'indice n a un effet sur la distribution de la vitesse à l'intérieur de la couche limite ce qui se traduit par une région d'entrée qui est d'autant plus étendue que n est faible.

H.PASCAL [Pas91] établit une solution dans le cas d'un fluide non newtonien dont la loi de comportement est de type puissance et montre que le profil de la surface libre est affecté par les paramètres rhéologiques. Il montre aussi que l'épaisseur de la nappe de fluide décroît lorsque l'exposant n décroît. Il donne l'expression suivante du profil de la surface libre :

$$\frac{h}{h_0(t)} = \left[1 - \left(\frac{\eta}{\eta_1} \right)^{1+n} \right]^{\frac{1}{2+n}} \quad \eta < \eta_1$$

Récemment HOUNKANLIN [Hou99] a présenté une étude théorique et expérimentale de l'écoulement d'un film liquide non Newtonien (solution aqueuse de Carboxyméthylcellulose), émergeant d'un canal de Poiseuille et s'étalant sur un plan incliné. Il suppose deux profils de vitesse : l'un sinusoïdal, le second vérifie la loi en puissance. Il résout l'équation intégrale de la quantité de mouvement en utilisant quatre modèles de fluide (Carreau, d'Oswald, de

Herchel-Bulkey, de Cross). Il détermine ainsi l'épaisseur du film et le frottement pariétal. Des mesures expérimentales de l'épaisseur du film obtenues en utilisant un capteur capacitif sont comparées avec les résultats théoriques. Les résultats obtenus montrent que le modèle d'Ostwald est bien adapté lorsque les concentrations sont inférieures à 2% ; et celui de Cross pour des concentrations supérieures à 2 %.

I.3. CONCLUSION

Une analyse relativement exhaustive des travaux consacrés au ruissellement laminaire a été effectuée, elle permet de tirer les conclusions principales suivantes.

Depuis la première étude due à Nusselt (1916) de très nombreuses publications ont porté sur le ruissellement de fluides newtoniens. Avec le développement des industries agro-alimentaire et pharmaceutiques des travaux récents concernent de plus en plus les fluides non newtoniens. Le recoupement de ces nombreux travaux est assez difficile que ce soit au plan théorique ou expérimental. Ils diffèrent les uns des autres soit par les conditions initiales, soit par les hypothèses utilisées, soit par la surface considérée ou encore par la nature du fluide.

On peut cependant observer un consensus sur la structure de l'écoulement : une zone d'accélération dans laquelle une couche limite interne se développe depuis l'entrée surmontée d'une zone potentielle. Cette zone d'accélération est suivie d'une zone de stabilisation puis d'une zone dite établie.

Différents profils sont proposés, aucun n'est satisfaisant ; à chaque zone un type particulier de profil est le mieux adapté.

Les travaux ont concerné essentiellement le ruissellement sur des plans inclinés, ou le long de tubes cylindriques verticaux ; le ruissellement sur d'autres types de surfaces a été très

rarement étudié bien que dans certains types d'échangeurs l'écoulement est réalisé sur des surfaces courbes.

Aussi, nous avons jugé intéressant d'étudier le ruissellement autour d'un cylindre de forme quelconque d'axe horizontal et ce aussi bien pour des fluides newtoniens que pour des fluides non newtoniens qui vérifient la loi en puissance.

Chapitre II
EQUATIONS GENERALES

II.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on considère en premier lieu le cas général de l'écoulement bidimensionnel instationnaire d'une lame de liquide sur un cylindre de forme quelconque d'axe horizontal . Les équations et conditions aux limites qui gouvernent le mouvement du fluide supposé newtonien incompressible et visqueux, sont établies.

Par un choix approprié de variables réduites, ces équations sont rendues adimensionnelles en faisant apparaître en particulier un paramètre important du problème ; celui du rapport de l'épaisseur de la lame fluide au rayon de courbure moyen du cylindre. Lorsque la valeur de ce paramètre est faible, on peut effectuer des simplifications significatives conduisant à un système simplifié d'équations et de conditions aux limites applicable à un écoulement à surface libre sur un obstacle de pente variable.

Le cas particulier du ruissellement est ensuite examiné et les considérations physiques développées permettent de procéder à des simplifications supplémentaires du système d'équations précédemment établi.

Ce dernier système gouverne l'écoulement de ruissellement graduellement varié qui fait l'objet de notre étude.

II.2. EQUATIONS GENERALES ET CONDITIONS AUX LIMITES

II.2.1. EQUATIONS

Dans le repère représenté ci-après (Figure II-1), les équations et conditions aux limites qui gouvernent l'écoulement bidimensionnel d'une lame de liquide autour d'un cylindre de forme quelconque s'écrivent comme suit [Mil66]:

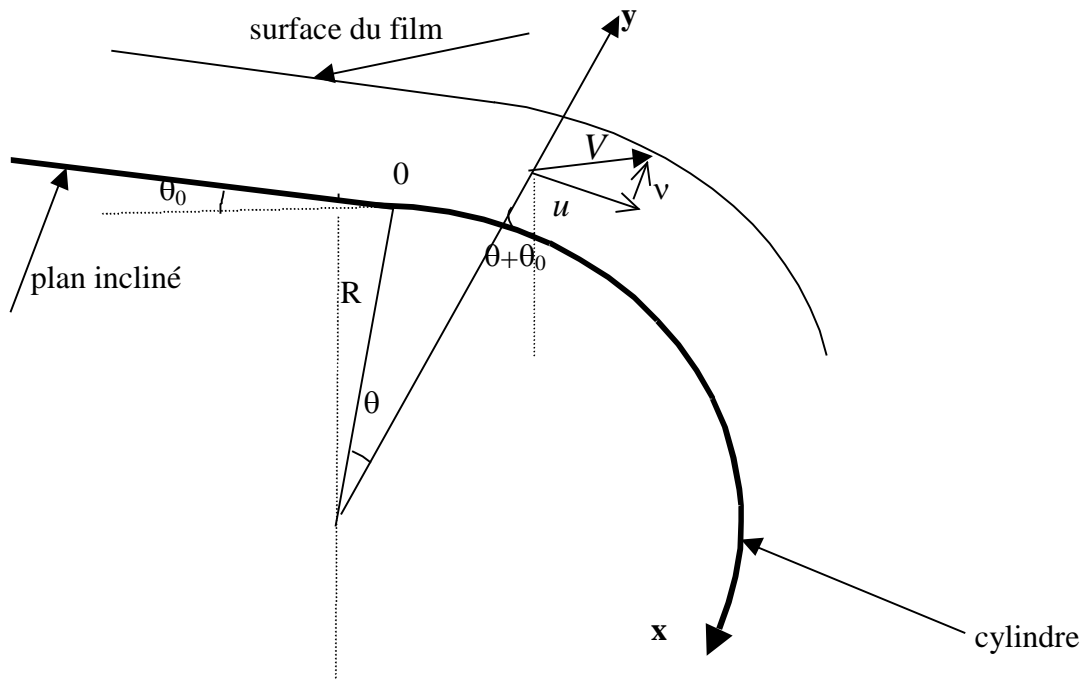


Figure II-1

Configuration de l'écoulement

Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(\Gamma v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + kv + \Gamma \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Equations de quantité de mouvement

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{K}{\Gamma} vu = -\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) - v \frac{\partial \xi}{\partial y} + g \sin(\theta_0 + \theta)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{ku^2}{\Gamma} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{v}{\Gamma} \frac{\partial \xi}{\partial x} - g \cos(\theta_0 + \theta)$$

(II.1)

x mesure la longueur de l'obstacle à partir d'une origine 0

y est porté par la normale au contour

$K(x)$ est la courbure locale du cylindre

$g \sin(\theta_0 + \theta)$ et $-g \cos(\theta_0 + \theta)$ traduisent l'influence de la pesanteur

θ_0 étant l'inclinaison par rapport à l'horizontale du plan tangent au cylindre au point 0.

Le paramètre Γ et la vorticité ξ sont respectivement définis par:

$$\Gamma = 1 + Ky \quad (\text{II.2})$$

$$\xi = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} - Ku}{1 + Ky} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{K}{\Gamma} u - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{II.3})$$

Cette expression de la vorticité lorsqu'elle est introduite dans les équations précédentes conduit aux résultats suivants :

Calcul de $\frac{\partial \xi}{\partial y}$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\frac{\partial(v_x - Ku)}{\partial y} \Gamma - \frac{\partial \Gamma}{\partial y} (v_x - Ku)}{\Gamma^2} - u_{,yy}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{K}{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{K}{\Gamma^2} \frac{\partial v}{\partial x} + K^2 \frac{u}{\Gamma^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

le terme $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ figurant dans l'expression précédente est calculé à partir de l'équation de

continuité comme suit :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{K}{\Gamma} v$$

que l'on dérive ensuite par rapport à x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Gamma} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{K}{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{\Gamma} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\left(\frac{-y \partial K / \partial x}{\Gamma^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{K}{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} - v \left(\frac{\Gamma \partial K / \partial x - y K \partial K / \partial x}{\Gamma^2} \right)$$

soit :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{y}{\Gamma^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial K}{\partial x} - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{v}{\Gamma} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{y v}{\Gamma^2} \frac{\partial K}{\partial x} K - \frac{K}{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x}$$

il en résulte pour $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ l'expression finale suivante:

$$-\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{\Gamma^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2K}{\Gamma^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{y}{\Gamma^2} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{K}{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{K^2 u}{\Gamma^2} + \frac{v}{\Gamma^2} \frac{\partial K}{\partial x} \quad (\text{II.4})$$

Le terme $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ est calculé de manière analogue :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2K \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{K}{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{y}{\Gamma^2} \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{\Gamma^2} \frac{\partial K}{\partial x} \quad (\text{II.5})$$

II.2.2. CONDITIONS AUX LIMITES

En négligeant les effets de tension superficielle, la continuité des contraintes à l'interface gaz-liquide se traduit par les deux conditions suivantes :

$$p = p_a + \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial h}{\partial x} \left(\xi + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad \text{à} \quad y = h \quad (\text{II.6})$$

$$\left[1 - \left(\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \left[\xi + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{4}{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{à} \quad y = h \quad (\text{II.7})$$

A la surface libre la condition cinématique s'écrit:

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\Gamma} u \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{à} \quad y = h \quad (\text{II.8})$$

A la paroi l'adhérence du liquide se traduit par :

$$u = v = 0 \quad \text{à} \quad y = 0 \quad (\text{II.9})$$

II.2.3. CAS PARTICULIER D'UNE SURFACE PLANE – Solution de Nusselt

Le système précédent s'applique également au cas particulier de l'écoulement sur une plaque plane. Il suffit en effet de faire tendre R vers l'infini ($R \rightarrow \infty$), le système simplifié qui en résulte a été résolu par Nusselt dans le cas du ruissellement permanent sur une plaque plane inclinée.

Il suppose l'écoulement établi, la répartition des vitesses reste alors invariante vers l'aval.

Cette hypothèse a été associée par Nusselt aux hypothèses suivantes :

- Les effets de tension superficielle sont négligeables.
- La pression à la surface libre est constante et égale à la pression atmosphérique.
- L'écoulement est unidirectionnel ($\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$) et stationnaire ($\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$).

Pour une plaque plane d'inclinaison θ_0 , le système (II.1) se réduit alors à:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \nu \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g \sin \theta_0 \quad (\text{II.10})$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} \right) - g \cos \theta_0 \quad (\text{II.11})$$

$$p = p_a \quad y = h_0 \quad (\text{II.12})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad y = h_0 \quad (\text{II.13})$$

$$u = 0 \quad y = 0 \quad (\text{II.14})$$

II.2.3.a. Détermination de la pression et de la vitesse dans le film

La dérivation de l'équation (II.10) par rapport à x conduit à :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

L'intégration de l'équation (II.11) compte tenu de (II.12) donne :

$$p = p_a - \rho g (y - h_0) \cos \theta_0 \quad (\text{II.15})$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.16})$$

l'équation (II.10) se ramène alors à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{g}{\nu} \sin \theta_0 = 0$$

dont l'intégration compte tenu des conditions (II.12), (II.13), (II.14) conduit à :

$$u = \frac{g}{\nu} \left(y h_0 - \frac{y^2}{2} \right) \sin \theta_0 \quad (\text{II.17})$$

II.2.3.b. Détermination de l'épaisseur du film

Lorsque le débit est constant, l'épaisseur du film peut être calculée au moyen de l'équation :

$$\int_0^{h_0} u dy = q_v$$

En y reportant l'expression (II.17) de la vitesse, on trouve :

$$h_0 = \left(\frac{3\nu q_v}{g \sin \theta_0} \right)^{1/3} \quad (\text{II.18})$$

Remarque : c'est cette épaisseur dite « épaisseur de Nusselt » qui servira de référence pour la mesure des épaisseurs du film dans la suite de la thèse.

II.3. EQUATIONS ADIMENSIONNELLES

II.3.1. VARIABLES REDUITES

h_0 étant une épaisseur caractéristique de la lame de fluide, et R le rayon moyen du cylindre, le rapport $\varepsilon = h_0 / R$ est un paramètre important du problème puisque dans le cas qui nous intéresse il pourra être considéré comme très petit ($\varepsilon \ll 1$)

posons par ailleurs :

$$h^+ = \frac{h}{h_0} \quad t^+ = \frac{q_v}{Rh_0} t \quad p^+ = \frac{h_0^2}{\rho q_v^2} p$$

$$x^+ = \frac{x}{R} \quad u^+ = \frac{h_0}{q_v} u \quad K^+ = RK$$

$$y^+ = \frac{y}{h_0} \quad v^+ = \frac{h_0}{\varepsilon q_v} v \quad \xi^+ = \frac{h_0^2}{q_v} \xi$$

$$\Gamma^+ = 1 + \varepsilon K^+ y^+$$

où q_v représente le débit par unité de largeur du cylindre.

On prendra comme épaisseur caractéristique de lame fluide, l'épaisseur h_0 correspondant à la solution de Nusselt:

$$h_0 = \left(\frac{3\nu q_v}{g \sin \theta_0} \right)^{1/3}$$

Notons que chacune de ces variables a un ordre de grandeur voisin de 1 .

II.3.2. EQUATIONS ADIMENSIONNELLES

Les coordonnées réduites étant ainsi définies, nous les introduisons dans le système d'équations (II.1) (pour des raisons de commodité on ne reportera pas les exposants +), ces équations s'écrivent alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\Gamma v) = 0 \quad (\text{II.19})$$

$$\varepsilon \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \Gamma \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon K u v + \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \Gamma \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + 3\alpha(x) \right) \quad (\text{II.20})$$

$$\varepsilon^2 \left(\Gamma \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \Gamma \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \varepsilon K u^2 = -\Gamma \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{3}{Re} \beta(x) \right) + \varepsilon \frac{1}{Re} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (\text{II.21})$$

où Re est le nombre de Reynolds défini par, $Re = \frac{q_v}{\nu}$

α et β , des fonctions définies par :

$$\alpha = \frac{\sin(\theta_0 + \theta)}{\sin \theta_0} \quad ; \quad \beta = \frac{\cos(\theta_0 + \theta)}{\sin \theta_0} \quad (\text{II.22})$$

Les expressions de $\partial\xi / \partial x$ et $\partial\xi/\partial y$ deviennent :

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{\Gamma} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2K\varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{K}{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{y}{\Gamma^2} \varepsilon^3 \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\Gamma^2} \frac{\partial K}{\partial x} \quad (\text{II.23})$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{1}{\Gamma^2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2K}{\Gamma^2} \varepsilon^3 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{y}{\Gamma^2} \varepsilon^3 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{K}{\Gamma} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{K^2}{\Gamma^2} \varepsilon^2 u + \frac{1}{\Gamma^2} \varepsilon^3 v \frac{\partial K}{\partial x} \quad (\text{II.24})$$

Les conditions aux limites deviennent:

$$p = p_a + \varepsilon \frac{1}{Re} \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial h}{\partial x} \left(\xi + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad y = h \quad (\text{II.25})$$

$$\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{\Gamma^2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \left[\xi + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \right] + 4\varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad y = h \quad (\text{II.26})$$

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\Gamma} u \frac{\partial h}{\partial x} \quad y = h \quad (\text{II.27})$$

$$u = v = 0 \quad y = 0 \quad (\text{II.28})$$

Récapitulatif :

En remplaçant $\frac{\partial\xi}{\partial y}$ et $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ par leurs expressions le système d'équations et de conditions

limites précédent s'écrit :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma v) = 0 \quad (\text{II.29})$$

Equation de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \Gamma \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon K u v + \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= \Gamma \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\alpha(x) \right) + \Gamma \frac{\varepsilon^2}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{K^2}{\Gamma^2} u^2 \right) \\ &+ \frac{1}{\Gamma} \frac{\varepsilon^3}{Re} \left(2K \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial K}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left(\Gamma \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + \Gamma v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \varepsilon K u^2 &= -\Gamma \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{3}{Re} \beta(x) \right) + \varepsilon \frac{1}{Re} \left(\Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{K}{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ &\varepsilon^2 \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2K \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\Gamma^2} \frac{\partial K}{\partial x} \right) + \varepsilon^3 \frac{y}{Re \Gamma^2} \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Conditions aux limites :

$$p = p_a + \frac{1}{Re} \left[2\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{K}{\Gamma^2} u \frac{\partial h}{\partial x} - \varepsilon^3 \frac{1}{\Gamma^2} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad y = h \quad (\text{II.32})$$

$$\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{\Gamma^2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \left[\Gamma \frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon k u + \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right] + 4\varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad y = h \quad (\text{II.33})$$

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\Gamma} u \frac{\partial h}{\partial x} \quad y = h \quad (\text{II.34})$$

$$u = v = 0 \quad y = 0 \quad (\text{II.35})$$

Remarque:

Le système précédent d'équations et de conditions aux limites est celui qui gouverne le cas général de l'écoulement d'une lame de liquide d'épaisseur quelconque sur une surface cylindrique de forme quelconque d'axe horizontal.

Le rôle du coefficient $\varepsilon = \frac{h_0}{R}$ (rapport de l'épaisseur de la lame de liquide au rayon de courbure de la surface) est ainsi mis en évidence, et les simplifications qui peuvent intervenir dans le cas où $\varepsilon \ll 1$ apparaissent ainsi clairement.

II.3.3. SOLUTION ANALYTIQUE APPROCHEE

Dans le cas où le rapport $\frac{h_0}{R}$ est faible ($\varepsilon \ll 1$), la solution du système précédent est recherchée sous forme d'un développement asymptotique en puissance de ε .

SALEM et TRAD [Str81] ont fait l'hypothèse que la perturbation introduite par la variation de pente à l'entrée est de nature régulière, et ils ont résolu les systèmes d'ordre 0, et d'ordre 1 en ε en posant:

$$f = F + \varepsilon f_1 + o(\varepsilon^2) \quad \text{où} \quad f = (u, v, p, h)$$

Le système d'ordre 0 qui correspond à l'écoulement de Nusselt s'écrit comme suit:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{II.41}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\alpha(x) \right) = 0 \tag{II.42}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{3}{Re} \beta(x) \right) = 0 \tag{II.43}$$

$$p = p_a \quad y = h \quad (\text{II.44})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad y = h \quad (\text{II.45})$$

$$u = v = 0 \quad y = 0. \quad (\text{II.46})$$

Sa résolution est donnée par:

$$u = 3\alpha(Hy - y^2 / 2) \quad (\text{II.36})$$

$$v = -(1/2)k\beta[2H - y]y^2 \quad (\text{II.37})$$

$$p = 3Re^{-1}\beta[H - y] \quad (\text{II.38})$$

$$H(x) = [\alpha(x)]^{-1/3} \quad (\text{II.39})$$

C'est un écoulement de cisaillement mais non uniforme en y ; il est valable sur tout le contour plan-cylindre. Notons qu'il se réduit à la solution de Nusselt dans le cas où la surface est plane ($K=0$).

La résolution du système d'ordre ε par la méthode des perturbations donne les solutions des perturbations u_1, v_1, p_1, h_1 , de cet écoulement dues à la courbure.

L'expression obtenue pour la perturbation h_1 de l'épaisseur du film est donnée par :

$$h_1 = -KH^2 \left[(1/2) + (1/9)(\beta/\alpha)^2 - (2/35)Re(\beta/\alpha) \right] \quad (\text{II.40})$$

II.4. EQUATIONS DU RUISSELLEMENT

GRADUELLEMENT VARIE

Le ruissellement est caractérisé par la faible valeur de l'épaisseur de la couche de liquide par rapport au rayon de courbure. Il est donc naturel de se placer dans les conditions des approximations de la couche limite où les gradients transversaux des composantes des vitesses sont plus importants que les gradients longitudinaux et la composante de la vitesse u le long de l'écoulement est plus importante que la composante v suivant la normale à l'écoulement.

Par ailleurs la force motrice du mouvement étant l'accélération de la pesanteur, la pression est supposée égale à la pression atmosphérique partout dans le fluide. Cette seconde hypothèse justifiée au plan expérimental, permet de découpler les deux équations du mouvement mais aussi de découpler la pression de l'épaisseur, ce qui est nécessaire pour obtenir un problème bien posé de nature parabolique.

Compte tenu de ces hypothèses, le système précédent se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma v) = 0 \quad (\text{II.41})$$

$$\varepsilon \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \Gamma v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \Gamma \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\alpha(x) \right) \quad (\text{II.42})$$

$$P = Pa \quad y = h \quad (\text{II.43})$$

$$\left[\Gamma \frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon ku \right] = 0 \quad y = h \quad (\text{II.44})$$

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\Gamma} u \frac{\partial h}{\partial x} \quad y = h \quad (\text{II.45})$$

$$u = v = 0 \qquad y = 0 \qquad \text{(II.46)}$$

II.4.1. Cas particulier du ruissellement sur un cylindre circulaire

Dans le cas particulier du ruissellement sur un cylindre circulaire, l'utilisation des coordonnées cylindriques est plus indiquée.

Les équations précédentes écrites en coordonnées cylindriques deviennent :

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{(II.47)}$$

$$\frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{uv}{r} = \frac{1}{\varepsilon Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + 3\alpha(x) \right) \qquad \text{(II.48)}$$

En remplaçant $\alpha(x)$ par son expression (II.2), on aboutit à :

$$\frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{uv}{r} = \frac{1}{\varepsilon Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{1}{Fr^2} \sin(\theta_0 + \theta) \qquad \text{(II.49)}$$

$$\text{où} \quad \varepsilon Re = \frac{u_0 h_0}{\nu} \qquad \text{(II.50)}$$

$$\text{et} \quad Fr^2 = \frac{u_0^2}{gR} \qquad \text{(II.51)}$$

II.4.1.a. Conditions aux limites-

$$u = v = 0 \qquad r = 1 \qquad \text{adhérence à la paroi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} = 0 \quad r = 1 + \rho_e \quad \text{continuité des contraintes à la surface libre.}$$

$$\frac{v_e}{u_e} = \frac{1}{1 + \rho_e} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \quad r = 1 + \rho_e \quad \text{condition cinématique à la surface libre}$$

II.4.1.b. Raccordement avec l'écoulement sur le plan

$$\text{Pour } \theta = 0 \quad \begin{cases} \rho_e(0) = h_{0i} \\ u(0, r) = u_0(r) \\ v(0, r) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.50})$$

v_e , u_e , ρ_e représentent respectivement les composantes de la vitesse à la surface libre et la cote de la surface libre.

Remarque

$u_0(r)$ représente le profil de vitesse à l'entrée, on pourra considérer différents profils correspondant à des conditions spécifiques d'arrivée du fluide sur le cylindre.

II.5. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons d'abord établi les équations et conditions aux limites qui gouvernent le mouvement dans le cas général d'une lame de liquide s'écoulant sur une surface de forme quelconque. Le système obtenu est ensuite rendu adimensionnel par un choix approprié de variables réduites permettant de faire apparaître un des paramètres importants du problème notamment le rapport ε de l'épaisseur de la lame fluide au rayon de courbure de la surface.

Les équations sont enfin écrites dans le cas particulier du ruissellement graduellement varié où l'application des simplifications classiques de la couche limite sont justifiées.

Une première solution approchée du système obtenu est développée dans le cas stationnaire.

Les équations et conditions aux limites gouvernant ce type d'écoulement sont ensuite écrites dans le cas particulier où l'obstacle est un cylindre circulaire.

Dans le chapitre qui suit, on procédera au développement de la résolution numérique du système d'équations obtenu.

Chapitre III

TRAITEMENT NUMERIQUE

III.1. INTRODUCTION

Nous présentons dans cette partie, la méthode numérique mise en œuvre dans le cadre de ce travail pour résoudre le système d'équations du ruissellement laminaire permanent autour du cylindre.

Rappelons que ces équations ont été obtenues en faisant les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur du film est suffisamment faible devant le rayon de courbure du cylindre de sorte que les approximations classiques de couche limite soient valables.
- L'accélération de la pesanteur étant la seule source du mouvement, nous supposons dans tout le fluide la pression constante et égale à la pression atmosphérique. Cette seconde hypothèse permet de découpler la pression de l'épaisseur afin d'obtenir un problème décrit par des équations de nature simplement paraboliques.

III.2. ÉQUATIONS TRANSFORMÉES

La lame de fluide n'ayant pas une épaisseur constante dans le sens de l'écoulement ; il en résulte que le domaine dans lequel les équations doivent être résolues n'a pas une forme régulière. Pour cela et en vue de la discrétisation de ces équations, nous effectuons le changement de variable défini par :

$$(r,\theta) \longrightarrow (\omega,\theta) \quad \text{où} \quad \omega = \frac{r-1}{\rho_e} \quad (\text{III.1})$$

Ce changement de variable permet de transformer le domaine fluide en un domaine régulier [Agu94]. Les dérivées deviennent:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\omega}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \omega}; \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial}{\partial \omega}; \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{\rho_e^2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \quad (\text{III.2})$$

Cette transformation est appliquée aussi bien pour le système d'équations en fluide newtonien qu'en fluides en loi puissance.

Après transformation, le système d'équations et de conditions aux limites pour le ruissellement en fluide newtonien devient:

$$\frac{\partial((1 + \omega \rho_e)v)}{\partial \omega} + H \frac{\partial u}{\partial \omega} + \rho_e \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{III.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{u}{\omega \rho_e + 1} \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{H}{\rho_e} \frac{\partial u}{\partial \omega} \right| + \frac{v}{\rho_e} \frac{\partial u}{\partial \omega} + \frac{uv}{\omega \rho_e + 1} = \\ \frac{h_{0i}}{Re} \left\{ \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} + \frac{1}{\rho_e(\omega \rho_e + 1)} \frac{\partial u}{\partial \omega} + \frac{1}{(\omega \rho_e + 1)^2} \left(-u + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{H}{\rho_e} \frac{\partial v}{\partial \omega} \right) \right) \right\} \\ + \frac{1}{Fr^2 h_{0i}} \sin(\theta + \theta_0) \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

$$u = v = 0 \quad \omega = 0 \quad (\text{III.5})$$

$$\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial u}{\partial \omega} - \frac{u}{(1 + \omega \rho_e)} = 0 \quad \omega = 1 + \rho_e \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{v_e}{u_e} = \frac{1}{1 + \omega \rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial \theta} = 0 \quad \omega = 1 + \rho_e \quad (\text{III.7})$$

$$\text{avec} \quad H = -\omega \frac{\partial \rho_e}{\partial \theta} \quad (\text{III.8})$$

III.3. METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION

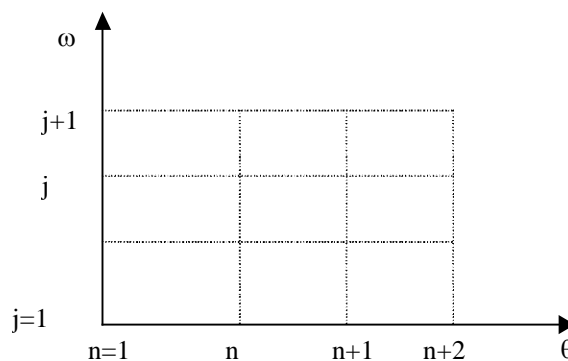
L'équation de quantité de mouvement étant de nature parabolique suivant θ , nous avons mis en œuvre dans cette étude une méthode numérique « pas à pas », en vue de déterminer les caractéristiques hydrodynamiques de l'écoulement à partir de l'entrée. Dans le plan (ω, θ) l'écoulement est ainsi analysé le long des colonnes successives.

Un schéma de différences finies implicites est utilisé, et est associé à un procédé itératif pour la détermination de l'épaisseur ρ_e .

Les conditions à l'entrée sont constituées par le profil des vitesses existant à l'entrée du cylindre et ce profil dépend des conditions d'amenée du fluide sur le cylindre.

III.3.1. Discrétisation des équations

La méthode implicite aux différences finies mise en œuvre dans le cadre de ce travail consiste à approcher d'une part les dérivées par rapport à θ par des différences centrées sur trois points (différence finie avant). D'autre part, les dérivées par rapport à ω sont approchées par des différences finies centrées sur deux points.



Représentation schématique du maillage

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial \omega} &= u_j^{n+2} \frac{\tilde{u}_{j+1}^{n+2} - \tilde{u}_{j-1}^{n+2}}{2\Delta\omega} + o(\Delta\omega^2) \\
u \frac{\partial u}{\partial \theta} &= u_j^{n+2} \frac{3\tilde{u}_j^{n+2} - 4u_j^{n+1} + u_j^n}{2\Delta\theta} o(\Delta\theta^3) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} &= \frac{\tilde{u}_{j+1}^{n+2} - 2\tilde{u}_j^{n+2} + \tilde{u}_{j-1}^{n+2}}{\Delta\omega^2} o(\Delta\omega^3)
\end{aligned} \tag{III.9}$$

Les dérivées premières par rapport à ω et θ s'écrivent alors comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \omega} &= \frac{\tilde{u}_{j+1}^{n+2} - \tilde{u}_{j-1}^{n+2}}{2\Delta\omega} o(\Delta\omega^2) \\
\frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{3\tilde{v}_j^{n+2} - 4\tilde{v}_j^{n+1} + \tilde{v}_j^n}{2\Delta\theta} o(\Delta\theta^3) \\
\frac{\partial v}{\partial \omega} &= \frac{\tilde{v}_{j+1}^{n+2} - \tilde{v}_{j-1}^{n+2}}{2\Delta\omega} o(\Delta\omega^2) \\
\frac{\partial \rho_e}{\partial \theta} &= \frac{3\rho_e^{n+2} - 4\rho_e^{n+1} + \rho_e^n}{2\Delta\theta} o(\Delta\theta^3)
\end{aligned} \tag{III.10}$$

\tilde{u}_j^{n+2} représente la valeur de u_j^{n+2} à l'itération suivante

Le système discrétisé est :

$$\begin{aligned}
u_j^{n+2} \frac{3u_j^{n+2} - 4u_j^{n+1} + u_j^n}{2\Delta\theta(\omega\rho_e + 1)} - \frac{\omega}{\rho_e(\omega\rho_e + 1)} \left(\frac{3\rho_e^{n+2} - 4\rho_e^{n+1} + \rho_e^n}{2\Delta\theta} \right) u_j^{n+2} \frac{u_{j+1}^{n+2} - u_{j-1}^{n+2}}{2\Delta\omega} + \\
\frac{1}{\rho_e} v_j^{n+2} \frac{u_{j+1}^{n+2} - u_{j-1}^{n+2}}{2\Delta\omega} + \frac{u_j^{n+2} u_j^{n+2}}{\omega\rho_e + 1} = \frac{h_0}{Re} \frac{1}{\rho_e} \frac{u_{j+1}^{n+2} - 2u_j^{n+2} + u_{j-1}^{n+2}}{\Delta\omega^2} + \\
\frac{u_{j+1}^{n+2} - u_{j-1}^{n+2}}{2\Delta\omega\rho_e(\omega\rho_e + 1)} - \frac{u_j^{n+2}}{(\omega\rho_e + 1)^2} + \frac{2(3v_j^{n+2} - 4v_j^{n+1} + v_j^n)}{2(\omega\rho_e + 1)^2 \Delta\theta} - \\
2 \frac{\omega}{\rho_e(\omega\rho_e + 1)^2} \frac{v_{j+1}^{n+2} - v_{j-1}^{n+2}}{2\Delta\omega} \left(\frac{3\rho_e^{n+2} - 4\rho_e^{n+1} + \rho_e^n}{2\Delta\omega} \right) + \frac{1}{h_0 Fr^2} \sin(\theta + \theta_0)
\end{aligned} \tag{III.11}$$

Après réarrangement de l'équation en regroupant les termes en $\tilde{u}_{j+1}, \tilde{u}_j, \tilde{u}_{j-1}$, on aboutit au

système algébrique suivant :

$$A_j \tilde{u}_{j-1}^{n+2} + B \tilde{u}_j^{n+2} + C_j \tilde{u}_{j+1}^{n+2} = D_j \quad (\text{III.12}) \quad \text{pour } j = 2, j_{inf}$$

$$A_j = \frac{u_j^{n+2} \omega_j}{\rho_e (\omega \rho_e^{n+2} + 1)} \left(\frac{3\rho_e^{n+2} - 4\rho_e^{n+2} + \rho_e^n}{4\Delta\theta\Delta\omega} \right) - \frac{v_j^{n+2}}{2\rho_e^{n+2} \Delta\omega} - \frac{h_{0i}}{\rho_e^{n+2} Re \Delta\omega^2} \quad (\text{III.13})$$

$$B_j = \frac{3u_j^{n+2}}{(\omega_j \rho_e^{n+2} + 1) 2\Delta\theta} + \frac{h_{0i}}{Re} \frac{2}{\rho_e^{n+2} \Delta\omega^2} \quad (\text{III.14})$$

$$C_j = \frac{-\omega_j u_j^{n+2}}{4\rho_e^{n+2} (\omega_j \rho_e^{n+2} + 1) \rho_e^{n+2} \Delta\omega \Delta\theta} (3\rho_e^{n+2} - 4\rho_e^{n+1} + \rho_e^n) + \frac{v_j^{n+2}}{2\rho_e^{n+2} \Delta\omega} - \frac{h_{0i}}{Re \rho_e^{n+2} \Delta\omega^2} \quad (\text{III.15})$$

$$D_j = \frac{u_j^{n+2} (4u_j^{n+1} - u_j^n)}{2\Delta\theta (\omega \rho_e^{n+2} + 1)} - \frac{u_j^{n+2} v_j^{n+2}}{(\omega \rho_e^{n+2} + 1)} + \frac{1}{Fr^2 h_{0i}} \sin(\theta^{n+2} + \theta_0) + \frac{h_{0i}}{Re} \left[\frac{u_{j+1}^{n+2} - u_{j-1}^{n+2}}{2\Delta\omega \rho_e^{n+2} (\omega_j \rho_e + 1)} - \frac{u_j^{n+2}}{(\omega_j \rho_e^{n+2} + 1)^2} + \frac{2}{(\omega_j \rho_e + 1)^2} \left(-\frac{\omega_j (3\rho_e^{n+2} - 4\rho_e^{n+1} + \rho_e^n) (v_j^{n+2} - v_j^{n+2})}{4\rho_e \Delta\omega \Delta\theta} \right) + \frac{3v_j^{n+2} - 4v_j^{n+1} + v_j^n}{2\Delta\theta} \right] \quad (\text{III.16})$$

III.3.2. Organigramme descriptif

Le procédé itératif comporte les trois étapes suivantes ;

1. Calcul de v

Calcul de v au moyen de l'équation de continuité (III.3) et de la condition d'adhérence à la paroi (III.5).

L'équation est discrétisée en $(n+2, j+0.5)$, les données étant supposées connues sur les colonnes n et $n+1$ et sur la ligne $j = 1$.

On obtient l'expression suivante pour la composante v_{j+1}^{n+2} :

$$v_{j+1}^{n+2} = \frac{1}{1 + j\Delta\omega\rho_e^{n+2}} \left(\left(1 + (j-1)\Delta\omega\rho_e^{n+2} \right) v_j^{n+2} + \frac{\left(j - \frac{1}{2} \right)}{2\Delta\theta} \left(3\rho_e^{n+2} - 4\rho_e^{n+1} + \rho_e^n \right) \left(u_{j+1}^{n+2} - u_j^{n+2} \right) \right) - \frac{1}{1 + j\Delta\omega\rho_e^{n+2}} \left(\frac{\rho_e^{n+2}\Delta\omega}{2\Delta\theta} \left(3u_{j+1}^{n+2} - 4u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n \right) \right) \quad (\text{III.17})$$

2. Calcul de ρ_e

Calcul de l'épaisseur ρ_e au moyen de la condition cinématique sur la surface libre.

Cette condition est également discrétisée en $(n+2, j+0.5)$ et nous obtenons pour ρ_e^{n+2}

l'expression :

$$\rho_e^{n+2} = \frac{2\Delta\theta u_{j\max}^{n+2} + \left(4\rho_e^{n+1} - \rho_e^n \right) u_{j\max}^{n+2}}{3u_{j\max}^{n+2} - 2\Delta\theta v_{j\max}^{n+2}} \quad (\text{III.18})$$

3. Calcul de U :

Calcul de u au moyen de l'équation de quantité de mouvement (III.4) discrétisé au point $(n+2, j)$ en tenant compte de $u = 0$ à la paroi et de la condition (III.6) à la frontière extérieure :

Le problème à résoudre est alors celui d'une matrice tri-diagonale de forme générale

$$[A] \cdot [u] = [D] \quad (\text{III.19})$$

au plan mathématique, si la matrice inverse $[A]^{-1}$ existe, la solution est donnée par :

$$[u] = [D] \times [A]^{-1} \quad (\text{III.20})$$

Ce système algébrique est résolu en utilisant l'Algorithme de Thomas.

III.3.3. Processus de calcul, et convergence

Les conditions initiales à l'entrée du cylindre, correspondant à la colonne $n=1$, sont l'épaisseur initiale ρ_e égale à l'épaisseur du film sur le plan d'arrivée, ainsi que le profil de vitesse choisi.

Ces mêmes données sont transférées dans les colonnes $n=2$ et $n=3$ pour permettre le démarrage de calcul. Un premier test est effectué et si la convergence n'est pas atteinte, on passe à l'étape suivante en faisant à nouveau un transfert dans les colonnes 2 et 3. Le processus de transfert se renouvelle à chaque itération et ce jusqu'à satisfaction d'un test de convergence.

La convergence sur u , v , ρ_e a été obtenue avec une précision relative de un dix millième au bout de cinq itérations en général.

Les résultats deviennent pratiquement invariants lorsque $\Delta\omega \leq \frac{1}{30}$ et $\Delta\theta \leq \frac{1}{2}$.

III.4. CAS PARTICULIER DES FLUIDES NON NEWTONIENS

III.4.1. INTRODUCTION

Dans cette partie, nous examinons la possibilité d'étendre l'utilisation du code de calcul précédent au cas du ruissellement de fluides non newtoniens.

Afin de ne procéder qu'à de simples réarrangements du code de calcul, nous nous sommes limités aux fluides dont la loi de comportement est de type puissance.

Après un bref rappel sur les fluides complexes, nous écrivons les équations adimensionnelles qui gouvernent le ruissellement de tels fluides en faisant apparaître les nombres adimensionnels caractéristiques.

III.4.2. CLASSIFICATION DES FLUIDES "EN LOI PUISSANCE"

La contrainte étant définie par

$$\tau = k \dot{\gamma}^n \quad (\text{III.21})$$

où k est la consistance du fluide, n son indice de comportement, on introduit une viscosité

apparente $\mu_{app} = k \dot{\gamma}^{n-1}$, rapport entre la contrainte et la vitesse de déformation correspondante.

Cette relation met en évidence le fait que lorsque $\dot{\gamma}$ augmente, la viscosité apparente μ_{app} croît ou décroît selon que n est supérieur ou inférieur à 1.

Les fluides sont appelés pseudo-plastiques lorsque $n < 1$ et dilatants ou rhéoépaississants lorsque $n > 1$. La valeur $n = 1$ correspond aux fluides newtoniens, la valeur $n = 0$ correspond à un comportement plastique (contrainte constante quelle que soit la valeur du taux de déformation).

III.4.2.a. Fluides pseudoplastiques ($n < 1$).

Leur viscosité apparente, telle que définie précédemment, tend vers l'infini quand $\dot{\gamma}$ tend vers zéro[Ble96].

Les principaux fluides présentant un comportement pseudo-plastique sont :

- Les suspensions de particules asymétriques.
- Les solutions de haut polymères.
- Les polymères fondus
- La mayonnaise

III.4.2.b. Fluides dilatants ou rhéoépaississants ($n > 1$).

Ces fluides obéissent également à « la loi puissance » d'Ostwald mais dans ce cas l'indice de la loi puissance n est supérieur à 1 ($n > 1$).

Autrement dit, la viscosité croît avec le taux de cisaillement (Figure III.4.2-1), d'où le comportement rhéoépaississant de ces fluides. Contrairement aux fluides pseudo plastiques, les fluides dilatants sont d'un emploi moins fréquent en génie chimique que les fluides pseudoplastiques.

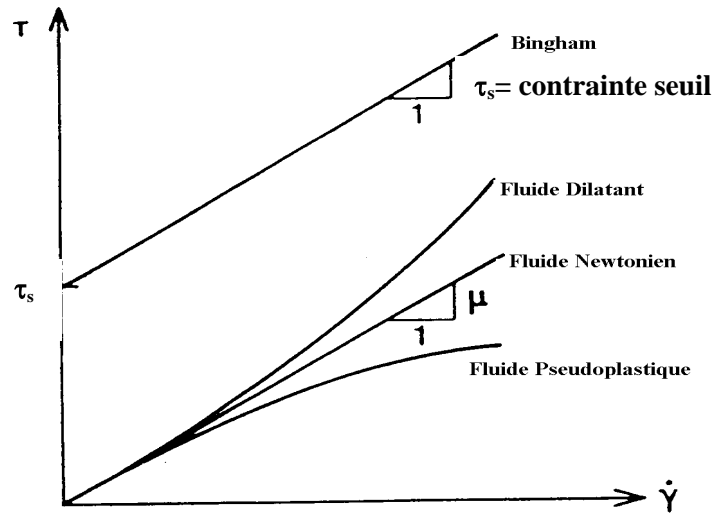


Figure III.4.2-1

Contrainte de cisaillement τ en fonction de la vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$ pour les fluides indépendants du temps

III.4.3. RUISSELLEMENT D'UN FLUIDE EN LOI PUISSANCE SUR UN PLAN INCLINÉ.

Le problème a été étudié par R. Bird [Bir60], nous rapportons ci-après ses principaux résultats:

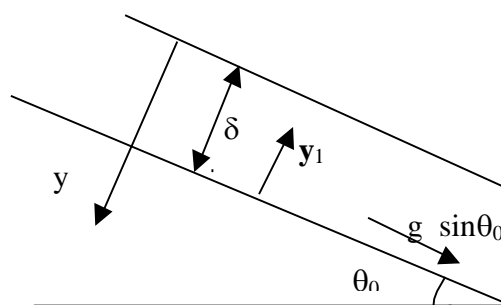


Figure III.4.3-1

Débit par unité de largeur:
$$Q = \frac{n}{2n+1} \left(\frac{\rho g \sin\theta_0}{k} \right) \delta^{\frac{2n+1}{n}} \quad (\text{III.23})$$

La distribution de vitesse:
$$u = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin\theta_0}{k} \delta^{n+1} \right)^{\frac{1}{n}} \left(1 - \left(\frac{y_1}{\delta} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right) \quad (\text{III.24})$$

Epaisseur du film:
$$\delta = \left[\left(\frac{2n+1}{n} q_v \right)^n \frac{k}{\rho g \sin\theta_0} \right]^{\frac{1}{2n+1}} \quad (\text{III.25})$$

Pour $n = 1$, on retrouve les solutions correspond à la solution de NUSSELT.

III.4.4. Equations générales en bidimensionnel

Pour un fluide « Newtonien généralisé », les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement s'écrivent en coordonnées cylindriques en termes de τ [Bir60].

EQUATION DE CONTINUITÉ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u)}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{III.26})$$

EQUATIONS DE QUANTITE DE MOUVEMENT :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right) \right\} + \rho g \cos(\theta_0 + \theta) \quad (\text{III.27})$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} \right) + \rho g \sin(\theta_0 + \theta) \quad (\text{III.28})$$

III.4.4.a. LOI DE COMPORTEMENT

En introduisant la notion de viscosité apparente, la loi de comportement pour un fluide «Newtonien généralisé» s'écrit sous la forme [Nou86]:

$$\overline{\tau} = 2\mu_{app}^*(S)\overline{D} \quad (\text{III.29})$$

où $\overline{\tau}$ est le tenseur des contraintes et \overline{D} le tenseur des vitesses de déformation.

$$\overline{D} = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}\vec{v}} + \overline{\text{grad}\vec{v}^*}) \quad (\text{III.30})$$

Pour un fluide pseudoplastique, l'expression la plus utilisée dans la littérature pour la viscosité apparente est:

$$\mu_{app}^*(S) = kS^{(n-1)/2} \quad (\text{III.31})$$

$$\text{où } S = 2\text{trace}(\overline{D}^2) \quad (\text{III.32})$$

En coordonnées cylindriques, les composantes du tenseur de déformation sont données par :

$$D_{rr} = \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$D_{r\theta} = D_{\theta r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (\text{III.33})$$

$$D_{\theta\theta} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right)$$

$$D_{rz} = 0$$

$$D_{\theta z} = 0$$

$$D_{zz} = 0$$

$$\text{Avec } S = 2\text{trace}(\overline{D}^2) = 2 \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right)^2 \right\} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\}^2 \quad (\text{III.34})$$

On en déduit les composantes du tenseur des contraintes qui s'écrivent comme suit:

$$\begin{aligned}\tau_{rr} &= \mu_{app}^* D_{rr} = \mu_{app}^* \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ \tau_{r\theta} &= \mu_{app}^* D_{r\theta} = \mu_{app}^* \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \tau_{\theta\theta} &= \mu_{app}^* D_{\theta\theta} = \mu_{app}^* \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right)\end{aligned}\tag{III.35}$$

III.4.4.b. EQUATIONS ADIMENSIONNELLES

En faisant les approximations de la couche limite, le système d'équations et de conditions aux limites se réduit à :

Equation de continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0\tag{III.36}$$

Equation de quantité de mouvement :

$$\rho \left(v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} \right) = \mu_{app}^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \rho g \sin(\theta_0 + \theta)\tag{III.37}$$

En introduisant les paramètres adimensionnels :

$$u^+ = \frac{u}{u_0}, \quad v^+ = \frac{v}{u_0}, \quad r^+ = \frac{r}{R}, \quad \rho = \frac{h}{R}, \quad S^+ = S \left(\frac{u_0}{R} \right)^{n-1}\tag{III.38}$$

les équations adimensionnelles régissant le phénomène s'écrivent comme suit (on supprimera l'indice +):

Equation de continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0\tag{III.39}$$

Equation de quantité de mouvement

$$v \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{u v}{r} = \frac{\mu_{\text{app}}^*}{\text{Reg}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{1}{Fr^2} \sin(\theta_0 + \theta) \quad (\text{III.40})$$

$$\text{où} \quad Fr^2 = \frac{u_0^2}{gR} \quad (\text{III.41})$$

$$\text{Reg} = \frac{\rho R^n u_0^{2-n} n}{k} \quad (\text{III.42})$$

Reg est le nombre de Reynolds généralisé.

Conditions aux limites

Les conditions aux limites associées au système sont :

A la paroi

$$u = v = 0 \quad r = l \quad (\text{III.43})$$

A la surface libre

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} = 0 \quad r = l + \rho_e \quad (\text{III.44})$$

L'écoulement étudié est représenté sur (Fig II.1), le liquide arrive sur la surface courbe avec le profil u_1 correspondant à la solution de Bird:

$$u_1 = \frac{n}{n+1} h_0^{n+1} \frac{\rho g \sin \theta_0}{k} \left(1 - \frac{y}{h_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \quad (\text{III.45})$$

et une épaisseur h_0 :

$$h_0 = \left[\left(\frac{2n+1}{n} \right)^n qv^n \left(\frac{k}{\rho g \sin \theta_0} \right) \right]^{\frac{1}{2n+1}} \quad (\text{III.46})$$

III.4.4.c. EQUATIONS DISCRETISEES

Les équations adimensionnelles sont transformées de la même manière qu'en fluide newtonien. La discrétisation de l'équation de quantité de mouvement conduit à:

$$\begin{aligned}
& u_j^{n+2} \frac{3u_j^{n+2} - 4u_j^{n+1} + u_j^n}{2\Delta\theta(\omega\rho_e + 1)} - \frac{\omega}{\rho_e(\omega\rho_e + 1)} \left(\frac{3\rho_e^{n+2} - 4\rho_e^{n+1} + \rho_e^n}{2\Delta\theta} \right) u_j^{n+2} \frac{u_{j+1}^{n+2} - u_{j-1}^{n+2}}{2\Delta\omega} + \\
& \frac{1}{\rho_e} v_j^{n+2} \frac{u_{j+1}^{n+2} - u_{j-1}^{n+2}}{2\Delta\omega} + \frac{u_j^{n+2} v_j^{n+2}}{\omega\rho_e + 1} = \frac{h_0}{Reg} \text{Vis}(j) \left[\frac{1}{\rho_e} \frac{u_{j+1}^{n+2} - 2u_j^{n+2} + u_{j-1}^{n+2}}{\Delta\omega^2} + \right. \\
& \left. \frac{u_{j+1}^{n+2} - u_{j-1}^{n+2}}{2\Delta\omega\rho_e(\omega\rho_e + 1)} - \frac{u_j^{n+2}}{(\omega\rho_e + 1)^2} + \frac{2(3v_j^{n+2} - 4v_j^{n+1} + v_j^n)}{2(\omega\rho_e + 1)^2 \Delta\theta} - \right. \\
& \left. 2 \frac{\omega}{\rho_e(\omega\rho_e + 1)^2} \frac{v_{j+1}^{n+2} - v_{j-1}^{n+2}}{2\Delta\omega} \left(\frac{3\rho_e^{n+2} - 4\rho_e^{n+1} + \rho_e^n}{2\Delta\omega} \right) \right] + \frac{1}{h_0 Fr^2} \sin(\theta + \theta_0)
\end{aligned}
\tag{III.47}$$

la même méthode numérique de résolution que celle décrite pour les fluides newtoniens est mise en œuvre.

III.5. CONCLUSION

Les équations transformées ainsi que les conditions aux limites qui gouvernent le ruissellement sur le cylindre ont été discrétisées et la méthode numérique utilisée pour la résolution du système obtenu a été décrite. Dans la suite, nous présentons les résultats obtenus à la fois pour le fluide newtonien et également pour des fluides non newtoniens en loi puissance.

Chapitre IV

RESULTATS ET COMMENTAIRES

IV.1. INTRODUCTION

Deux codes de calcul ont été mis au point dans le cadre de ce travail ; le premier concerne les fluides newtoniens, le second des fluides complexes dont la loi de comportement est de type puissance. Ces codes permettent en particulier d'obtenir, pour différentes conditions d'arrivée du fluide sur le cylindre, l'évolution le long de l'obstacle des profils de vitesse de l'épaisseur du film et du frottement pariétal.

Dans la première partie de ce chapitre nous examinons d'abord les résultats relatifs aux fluides newtoniens ; nous analyserons aussi les résultats relatifs aux fluides complexes dans la seconde partie.

IV.2. FLUIDES NEWTONIENS

Dans l'analyse des résultats qui suit , nous avons considéré un profil initial des vitesses de forme semi-parabolique correspondant au profil réel de l'écoulement sur le plan incliné par l'intermédiaire duquel le fluide arrive sur le cylindre.

L'influence de profils initiaux différents est examinée ultérieurement.

IV.2.1. Validation du code de calcul

Pour vérifier la validité du code de calcul, nous avons comparé les résultats fournis par ce dernier avec les résultats expérimentaux obtenus par SALEM [Sal81]. Cet auteur a en particulier déterminé l'épaisseur du film ainsi que le frottement pariétal. Il a également donné l'évolution de ces grandeurs le long du cylindre pour différentes inclinaisons du plan d'arrivée du fluide et différents nombres de Reynolds.

Dans les figures IV.2.1-1 et IV.2.1-2, un très bon accord entre les résultats numériques et expérimentaux est observé partout sauf très loin de l'entrée où un très léger décalage existe. Ce dernier est lié au fait que dans cette zone les effets de tension superficielle ne sont plus négligeables comme le suppose le modèle numérique.

L'influence de la tension superficielle au niveau de la surface libre se traduit par un freinage du fluide et donc un épaissement du film, d'où la légère sous évaluation de l'épaisseur et la surévaluation du frottement pariétal par le modèle numérique.

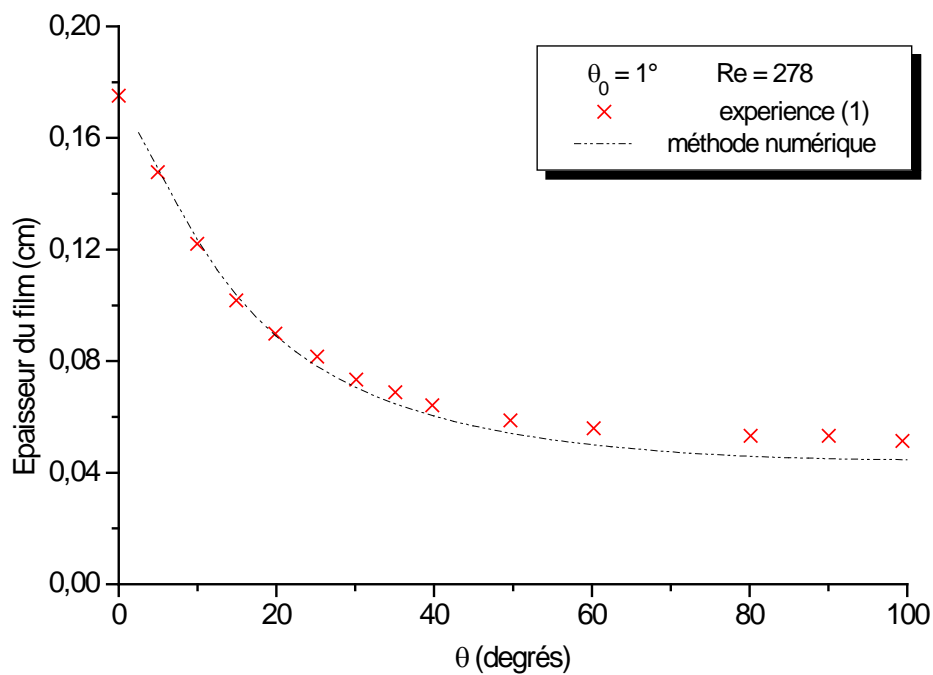


Figure IV.2.1-1 Evolution de l'épaisseur du film le long du cylindre

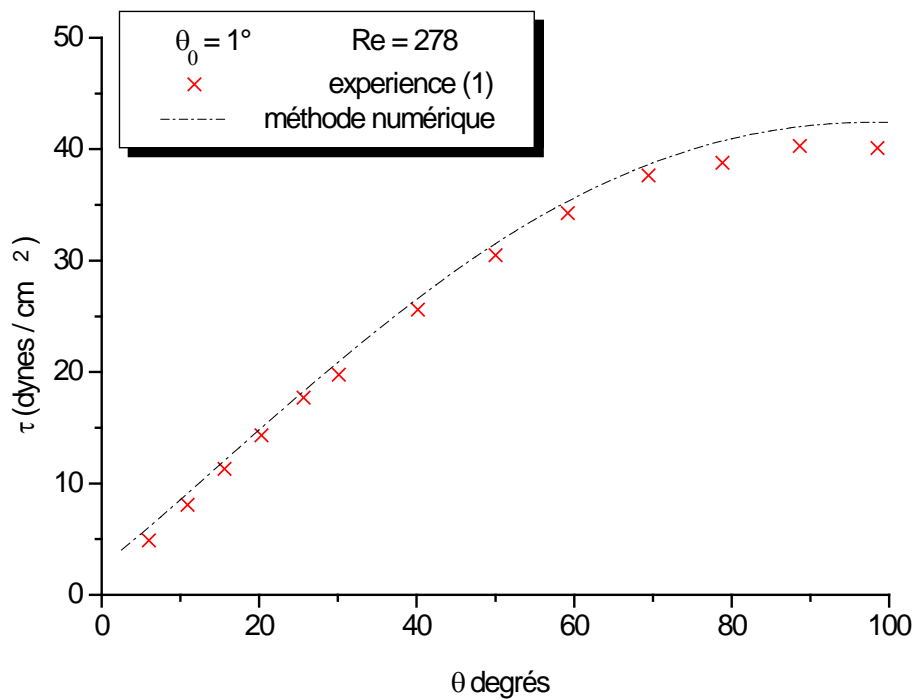


Figure IV.2.1-2 *Evolution du frottement pariétal*

Une bonne concordance entre résultats expérimentaux et numériques a été également vérifiée pour différentes valeurs de Re inférieures à $Re_c \cong 500$, valeur au-delà de laquelle l'écoulement n'est plus laminaire.

Nous pouvons donc en conclure que le code de calcul mis au point reproduit de manière satisfaisante la réalité physique, tant que l'écoulement reste laminaire.

IV.2.2. Influence du Nombre de Reynolds

Dans la suite nous examinons l'influence de Re sur les évolutions le long de l'obstacle de l'épaisseur du film, du frottement pariétal ainsi que du profil des vitesses.

L'examen des courbes (Figure IV.2.2-1), montre que pour une valeur fixée de Re l'épaisseur du film décroît très rapidement au voisinage de l'entrée. Cette décroissance devient ensuite faible et même insignifiante pour les faibles valeurs de Re . Cette zone de décroissance rapide de

l'épaisseur que nous désignerons par "zone d'entrée " est d'autant plus étendue que Re est plus grand.

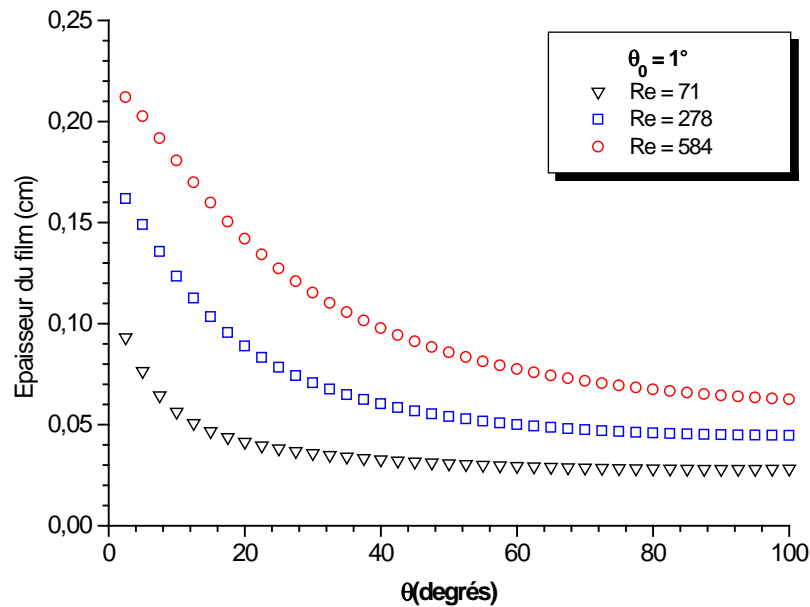


Figure IV.2.2-1 Variation de l'épaisseur du film (profil semi parabolique à l'entrée)

Les résultats précédents sont confirmés par les courbes de la figure IV.2.2-2 donnant l'évolution du frottement pariétal; en effet, pour une valeur fixée de Re la rapide diminution de l'épaisseur à l'entrée se traduit par une augmentation significative du frottement pariétal dans cette zone. Par ailleurs, au delà de cette région d'entrée le frottement est d'autant plus important que Re est plus grand .

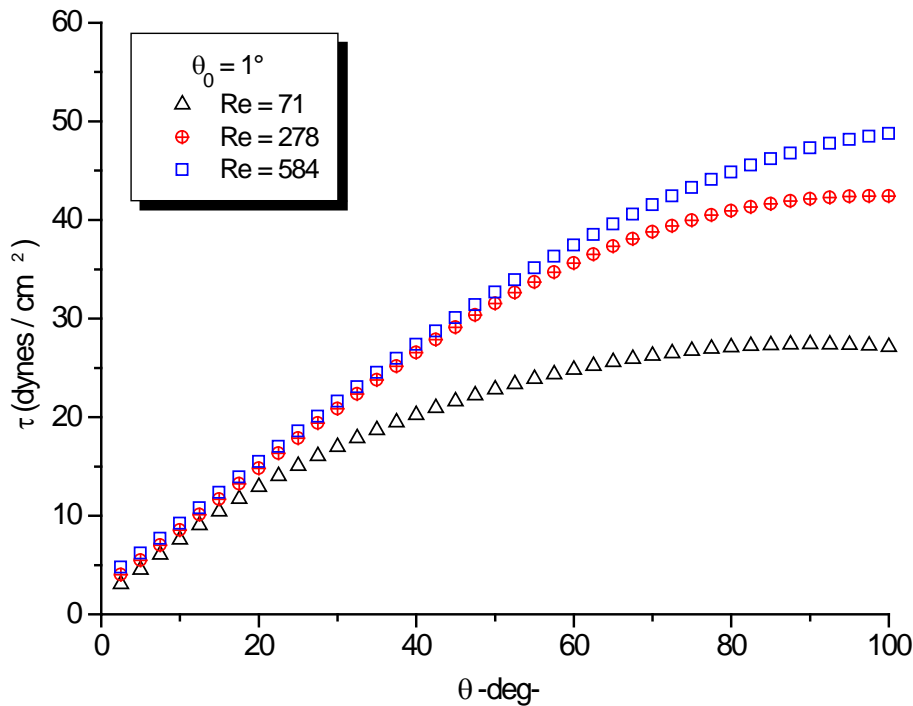


Figure IV.2.2-2 Variation du frottement pariétal (profil de vitesse semi parabolique à l'entrée)

Rappelons que l'analyse précédente de l'influence du nombre de Reynolds a été effectuée dans le cas d'une inclinaison du plan d'arrivée du fluide $\theta_0 = 1^\circ$; dans la suite nous examinons l'influence de ce paramètre θ_0 .

IV.2.3. Influence de l'inclinaison θ_0 du plan d'arrivée du fluide

Le profil initial des vitesses étant toujours supposé semi parabolique, nous avons représenté dans les figures IV.2.3-1, 2 les évolutions le long du cylindre de l'épaisseur pour différentes valeurs de θ_0 et ce pour deux valeurs de Re.

Pour Re=71, les épaisseurs initiales du film sont d'autant plus grandes que θ_0 est plus faible; cette évolution est conforme à la solution de Nusselt.

Par contre, au voisinage immédiat de l'entrée et vers l'aval, on observe une diminution brutale de ces épaisseurs qui deviennent pratiquement toutes égales à partir de $\theta=40^\circ$ et ce quelle que soit la valeur de θ_0 .

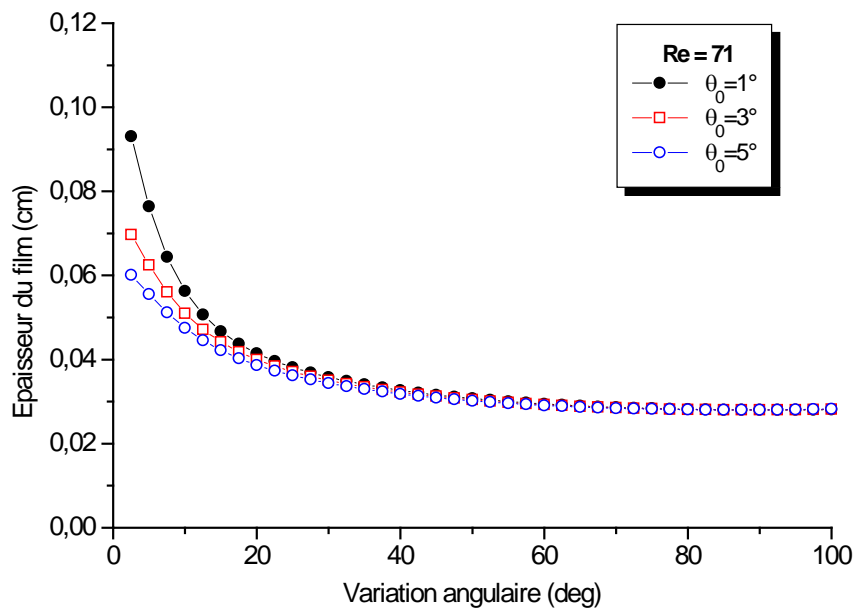


Figure IV.2.3-1 *Influence de θ_0 (profil semi parabolique à l'entrée)*

La même évolution en fonction de θ_0 est obtenue pour $Re = 278$, la zone d'entrée étant cependant plus étendue.

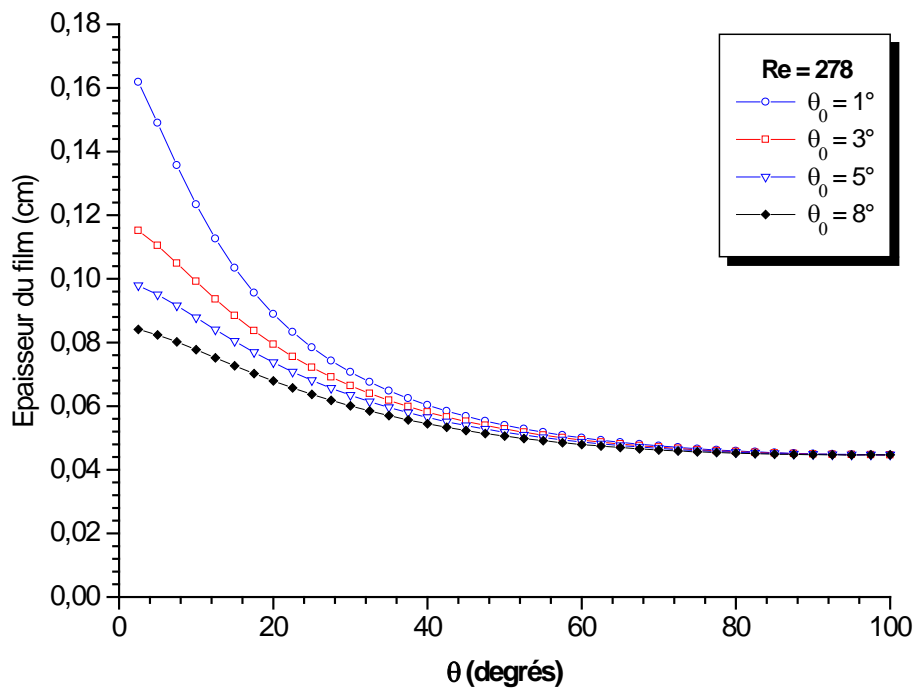


Figure IV.2.3-2 *Influence de θ_0*

Les évolutions précédentes de l'épaisseur du film sont corroborées par celles du frottement pariétal.

En effet, de fortes variations du frottement pariétal sont observées au voisinage immédiat de l'entrée; ces variations sont d'autant plus importantes que θ_0 est plus faible; la zone d'entrée est d'autant plus étendue que le nombre de Reynolds Re est grand (Figure IV.2.3-3, 4).

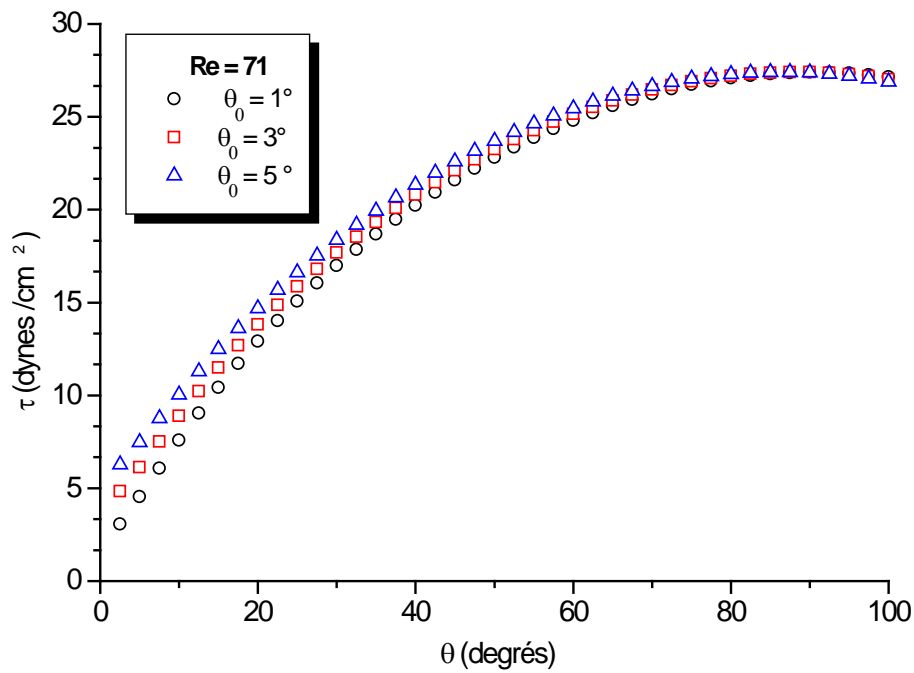


Figure IV.2.3-3 *Variation du frottement pariétal, cas d'un profil semi parabolique à l'entrée*

Le frottement pariétal étant directement lié à la pente du profil des vitesses à la paroi, nous avons jugé utile de déterminer l'évolution de la courbure du profil des vitesses en fonction de θ_0 et de Re afin de mieux appréhender l'hydrodynamique de l'écoulement dans la zone d'entrée. Dans la suite nous avons représenté (figure IV.2.3-5 et figure IV.2.3-6) l'évolution de cette courbure pour deux valeurs de Re , et ce pour différentes inclinaisons θ_0 du plan d'arrivée.

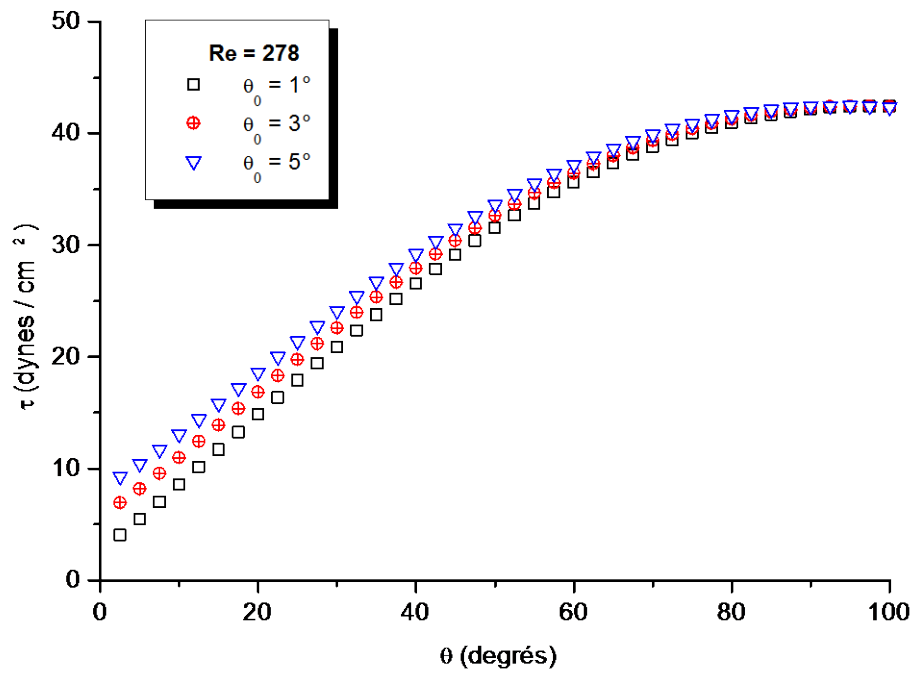


Figure IV.2.3-4 *Variation du frottement pariétal, cas d'un profil semi parabolique à l'entrée*

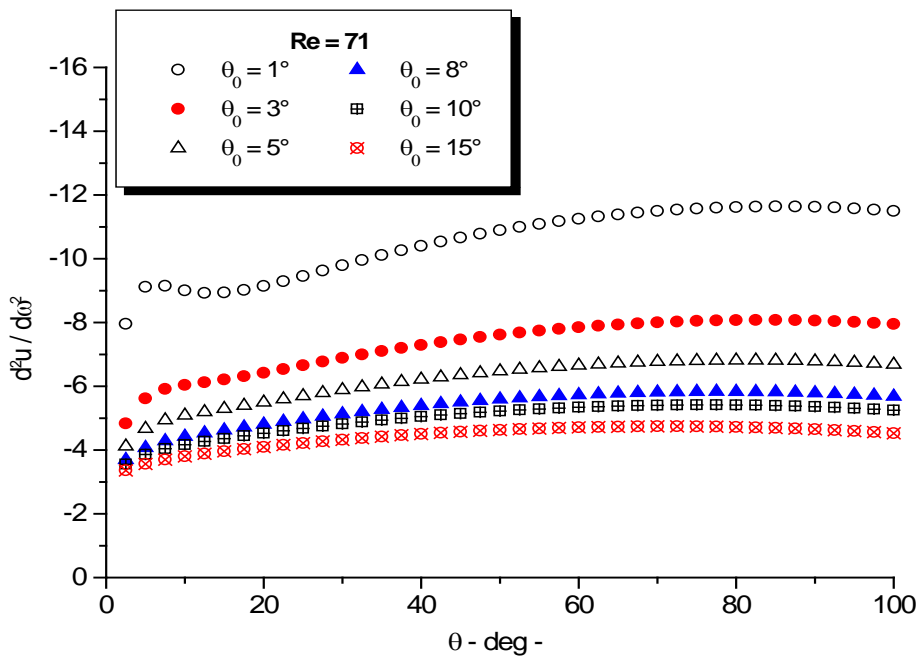


Figure IV.2.3-5 *Evolution de la courbure à la paroi en fonction de θ .*

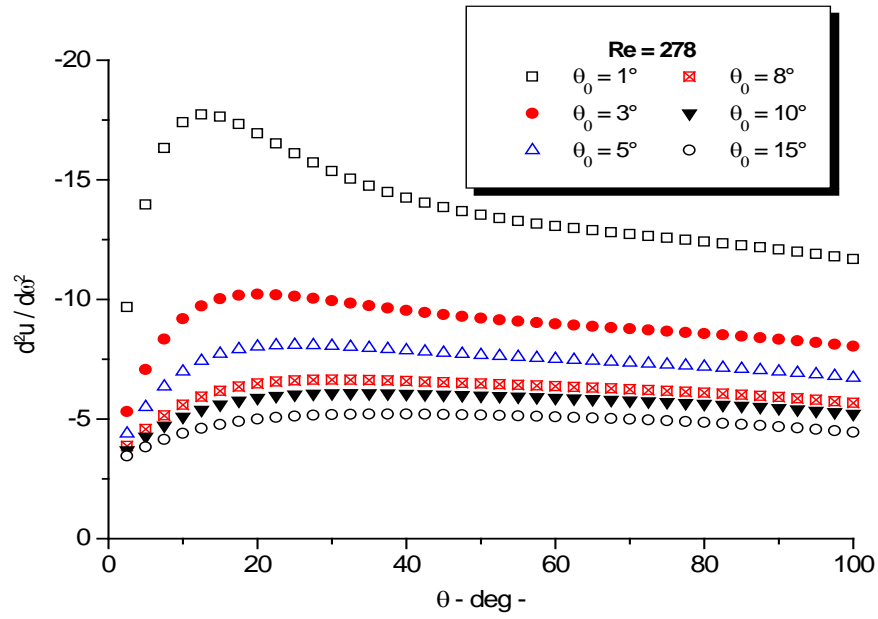


Figure IV.2.3-6 Evolution de la courbure à la paroi en fonction de θ .

Dans la figure IV.2.3-7 est étudiée l'influence de Re sur la courbure du profil des vitesses pour une inclinaison initiale de 1° .

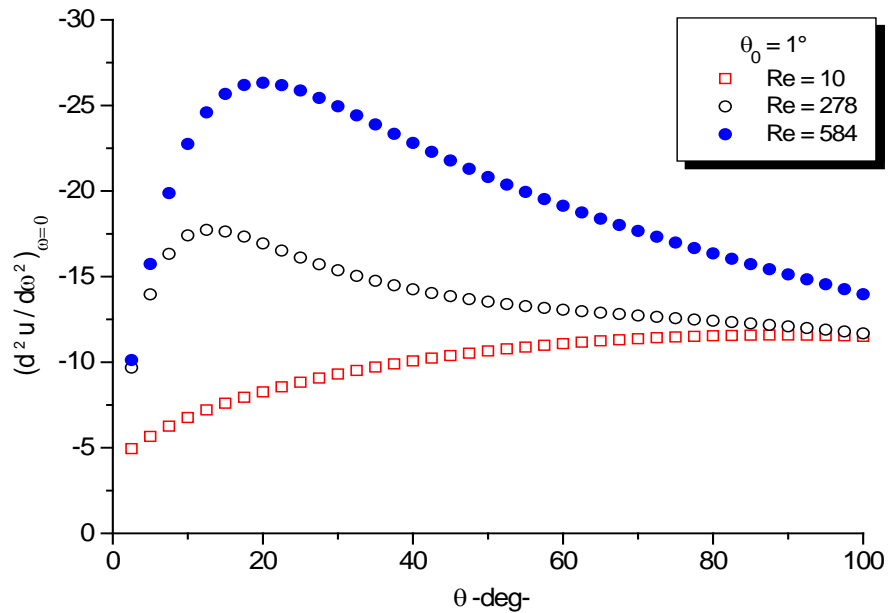


Figure IV.2.3-7 Evolution de la courbure du profil des vitesses à la paroi

L'examen de l'ensemble des ces courbes montre que d'importantes modifications de l'hydrodynamique de l'écoulement se produisent au voisinage de l'entrée. Ces perturbations dues à la brutale variation de pente de la surface sont d'autant plus marquées que Re est plus grand; la zone d'entrée est alors d'autant plus étendue.

Dans le but d'évaluer les importantes modifications de la structure de l'écoulement qui s'y produisent, nous avons défini la grandeur adimensionnelle suivante:

$$\Delta u^* = \frac{u(\omega, \theta) - u(\omega, 0)}{u_e(\theta) - u_e(0)}$$

De part sa définition, Δu^* représente, à une cote donnée ω et en un point du cylindre d'abscisse θ , la variation relative de la vitesse depuis l'entrée. L'examen de l'évolution de ce paramètre à travers l'épaisseur du film $[\Delta u^*(\omega)]$ en différentes abscisses permet donc de caractériser la déformation subie par le profil initial des vitesses.

Nous avons représenté l'évolution le long du cylindre du paramètre $\Delta u^*(\omega)$ pour deux valeurs différentes du nombre de Reynolds, l'inclinaison du plan d'arrivée restant la même et égale à $\theta_0 = 1^\circ$.

Pour une faible valeur du nombre de Reynolds $Re = 10$, figure (IV.2.3-8), et à une cote donnée (ω fixé), la variation relative de vitesse reste pratiquement constante tout le long du cylindre.

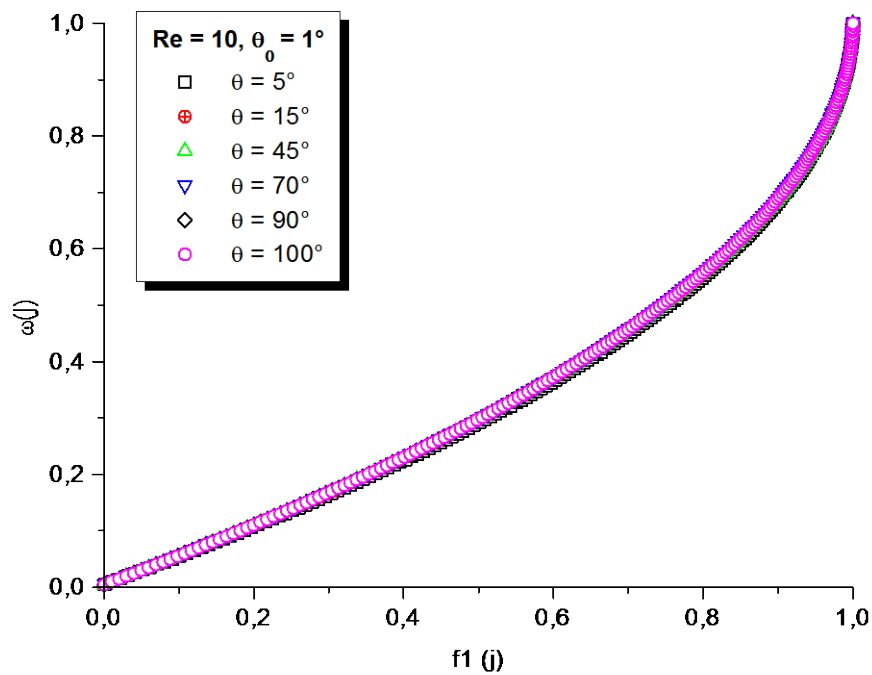


Figure IV.2.3-8 *Déformation du profil des vitesses. Evolution le long de l'obstacle.*

En effet les courbes $\Delta u^*(\omega)$ se superposent les unes aux autres quand θ varie. On peut donc conclure qu'aux faibles débits, le profil des vitesses évolue de manière régulière; l'accroissement de vitesse dû à l'augmentation de la pente se traduit par une diminution de l'épaisseur du film. La perturbation introduite par la variation de pente de la surface est de nature régulière.

Pour une grande valeur du nombre de Reynolds ($Re = 584$), nous observons, par contre, une déformation importante du profil des vitesses (Figure IV.2.3-9). Cette déformation, qui est très importante au voisinage de l'entrée, va en s'atténuant dans le sens de l'écoulement.

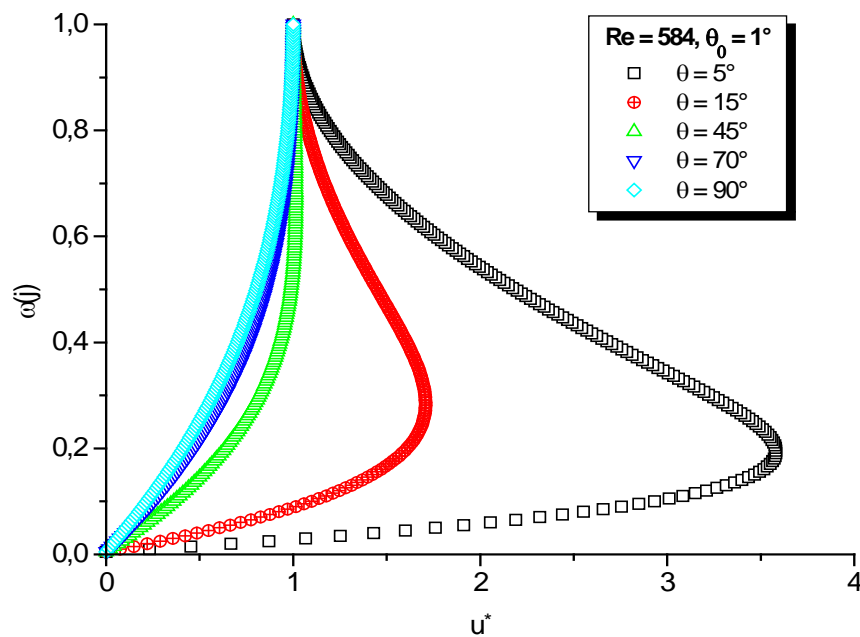


Figure IV.2.3-9 *Déformation du profil des vitesses. Evolution le long de l'obstacle.*

Notons que cette déformation qui affecte surtout la région de proche paroi traduit le fait que la perturbation introduite par la variation de pente de la paroi est de nature singulière. Elle est accompagnée de profondes modifications de l'hydrodynamique de l'écoulement dans cette zone d'entrée. Il est à remarquer également que pour $1 < \omega < 0.9$, $\Delta u^* \approx 1$, ce qui laisse supposer qu'au voisinage de la surface libre l'écoulement se fait en bloc ; cette zone correspond probablement à une zone d'écoulement potentiel, la zone de couche limite affectant les couches inférieures ($\omega < 0.9$).

Les résultats obtenus pour différentes valeurs de Re montrent que les déformations subies par l'écoulement sont d'autant plus importantes que Re est plus grand, la zone d'entrée est alors d'autant plus étendue.

Remarque

Les résultats précédents vont dans le même sens que ceux établis par SALEM [Sal81] ainsi que ceux obtenus par CHAABOUNIA [Cha88]. En effet, SALEM, par une approche analytique a analysé la perturbation provoquée au sein de l'écoulement par la variation de pente subie à l'entrée. Cette perturbation est analysée à partir de l'évolution d'un paramètre de forme caractérisant le profil des vitesses. La nature singulière de cette perturbation est d'autant plus marquée que θ_0 est faible. CHABOUNIA [Ch88] arrive aux mêmes conclusions en faisant une évaluation des ordres de grandeurs des différents éléments de l'équation gouvernant l'écoulement dans cette zone.

IV.2.4. Influence du profil initial des vitesses

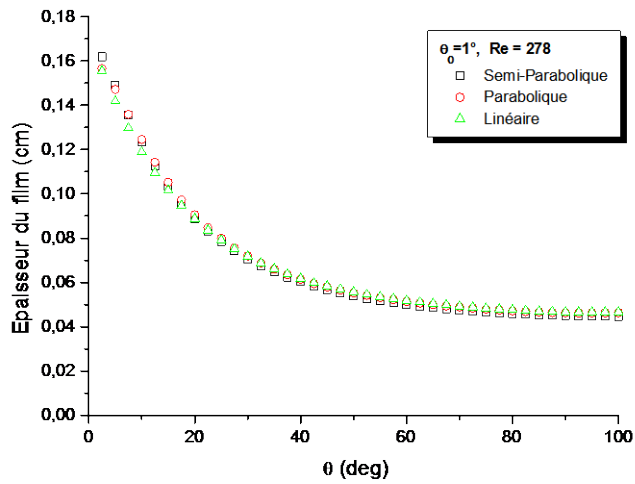
Divers profils des vitesses peuvent être réalisés à l'entrée du cylindre; c'est ainsi par exemple que si le liquide est amené entre deux plaques parallèles, le profil initial sera de forme parabolique. Dans la suite une étude comparative est menée en considérant trois profils différents: semi-parabolique, parabolique et linéaire. Pour un nombre de Reynolds fixé, l'épaisseur initiale est calculée à l'aide de la solution de Nusselt pour le profil semi-parabolique.

Cette épaisseur initiale est ensuite imposée aux deux autres profils de vitesses lesquels sont calculés à l'aide de la conservation du débit et des conditions aux limites.

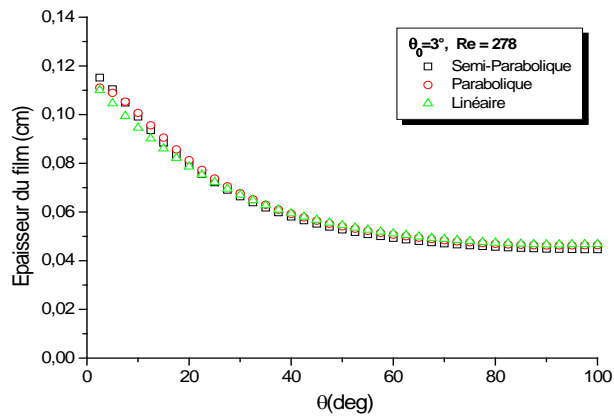
A l'entrée du cylindre nous aurons donc la même épaisseur du film, le même débit mais des profils de vitesses différents.

Dans les planches (IV.2.4-1) et (IV.2.4-2) nous avons représenté respectivement les évolutions de l'épaisseur du film et du frottement pariétal pour les trois profils considérés pour $Re = 278$ en faisant varier θ_0 .

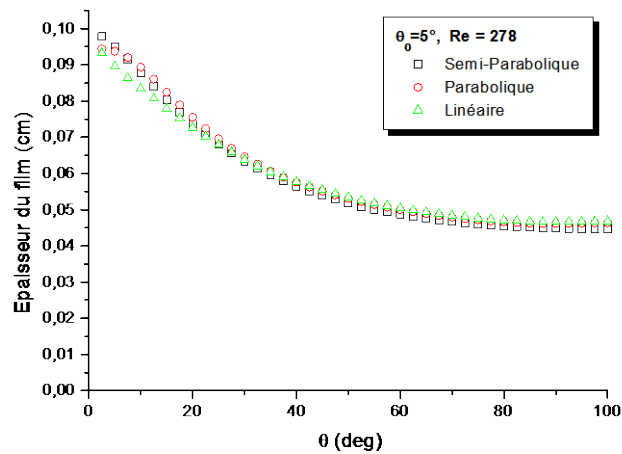
Nous pouvons observer pour les épaisseurs comme pour les frottements des différences au delà de l'entrée. Les écarts qui sont d'autant plus marqués que θ_0 est grand s'estompent très rapidement vers l'aval et disparaissent complètement après la zone d'entrée qui s'étend de $\theta = 0^\circ$ à $\theta \cong 30^\circ$, alors que pour les frottements l'écart est insignifiant même au voisinage immédiat de l'entrée.



(a)

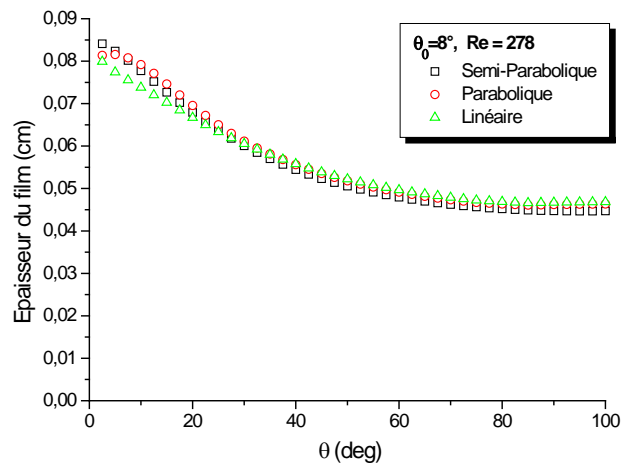


(b)

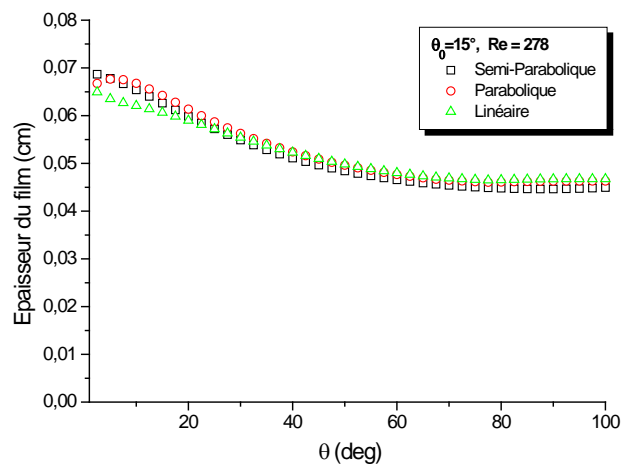


(c)

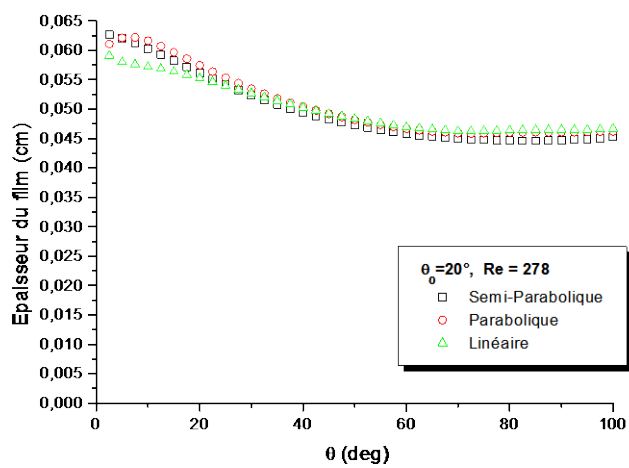
Planche IV.2.4.1- Variation de l'épaisseur du film pour différents profils de vitesse, (a) : $\theta_0=1^\circ$, (b) : $\theta_0=3^\circ$, (c) : $\theta_0=5^\circ$



(d)



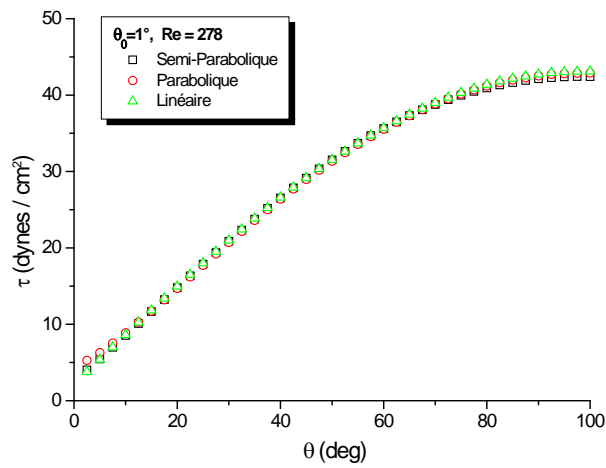
(e)



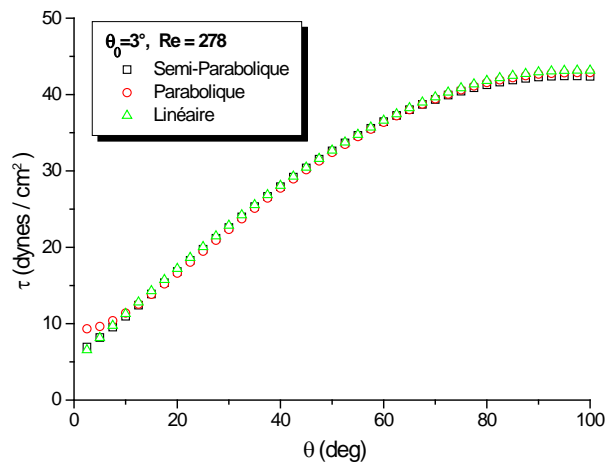
(f)

Planche IV.2.4.1-

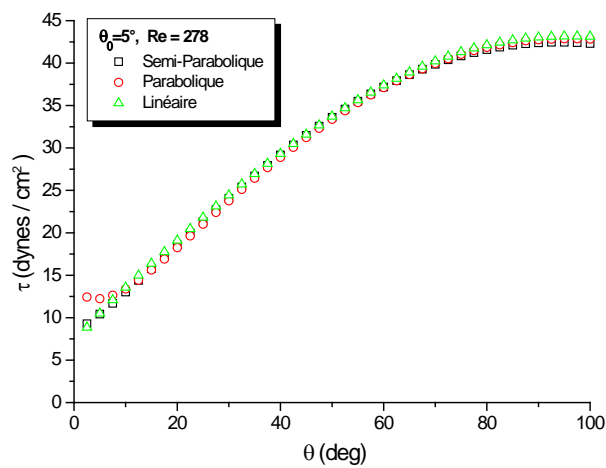
Variation de l'épaisseur du film pour différents profils de vitesse,
(d) : $\theta_0=8^\circ$, (e) : $\theta_0=15^\circ$, (f) : $\theta_0=20^\circ$.



(a)



(b)

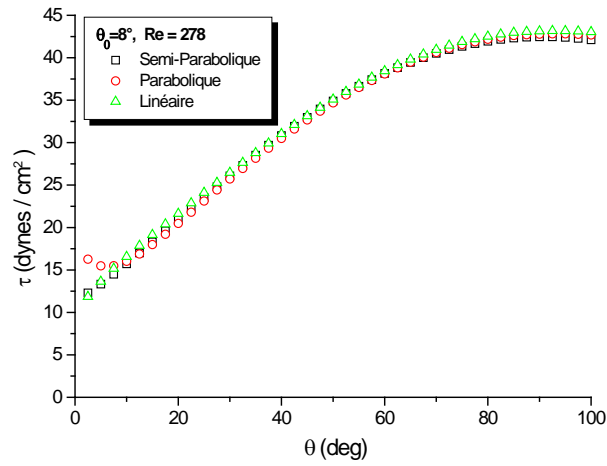


(c)

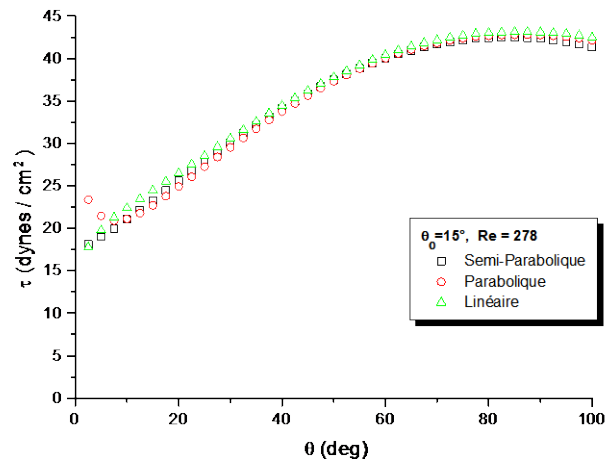
Planche IV.2.4-2

Variation du frottement pariétal. Influence des conditions d'entrée.

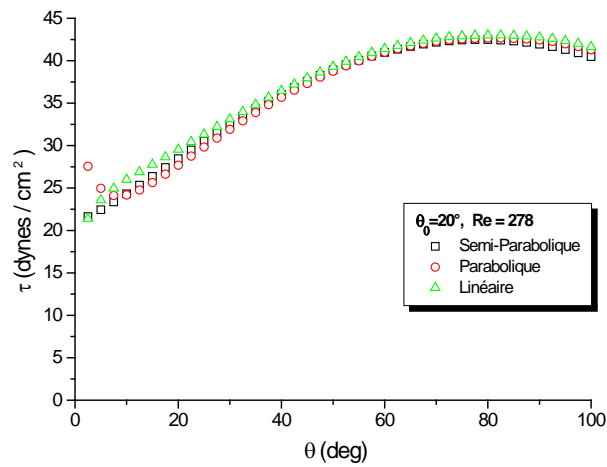
(a) : $\theta_0 = 1^\circ$, (b) : $\theta_0 = 3^\circ$, (c) : $\theta_0 = 5^\circ$.



(d)



(e)



(f)

Planche IV.2.4-2

Variation du frottement pariétal. Influence des conditions d'entrée ; (d) : $\theta_0 = 8^\circ$, (e) : $\theta_0 = 15^\circ$, (f) : $\theta_0 = 20^\circ$.

IV.2.5. CONCLUSION

Dans ce qui précède, nous avons analysé successivement l'influence sur l'hydrodynamique de l'écoulement du nombre de Re , de l'inclinaison θ_0 , et du profil de vitesse imposé à l'entrée ; c'est en somme une étude des conditions initiales sur la structure de l'écoulement vers l'aval.

L'ensemble de ces résultats indique de la part de l'écoulement "un oubli" des conditions initiales. En effet au delà d'une certaine distance à partir de l'entrée, les conditions initiales n'ont plus aucune influence. La zone d'entrée, (où cet oubli n'a pas encore eu lieu), est caractérisée par de profondes modifications de l'hydrodynamique de l'écoulement. Cette zone est d'autant plus étendue que Re est grand ou bien lorsque les conditions initiales ne sont pas adaptées à la géométrie de l'obstacle.

IV.3. FLUIDES NON NEWTONIENS

IV.3.1. INTRODUCTION

Le code de calcul mis au point dans ce travail pour étudier le ruissellement de fluides en loi puissance a d'abord été testé dans le cas particulier où $n = 1$. L'influence des paramètres Reg et n sur l'épaisseur et le frottement pariétal a ensuite été examinée.

IV.3.2. VALIDATION DU CODE DE CALCUL

En l'absence de résultats expérimentaux correspondants au problème étudié, nous avons vérifié le bon fonctionnement de notre code de calcul en comparant les résultats fournis par ce dernier dans le cas particulier où $n = 1$ avec ceux obtenus à l'aide du code de calcul établi pour les fluides newtoniens. Dans la figure IV.3.2-1 nous avons représenté l'évolution de l'épaisseur du film fournie par chacun des deux codes en prenant $n = 1$, $k = 0.66$ pour le code non newtonien; et une viscosité cinématique $\nu = 0.66$ pour le code en newtonien.

Le choix de ces paramètres est fait de manière à ce que le débit volumique soit le même pour les deux cas. Comme on peut l'observer sur la figure IV.3.2-1, les deux courbes se superposent ; le code de calcul se trouve donc ainsi validé. Rappelons que le code de calcul en newtonien a été validé par comparaison avec des résultats obtenus expérimentalement (§ VI.2.1)

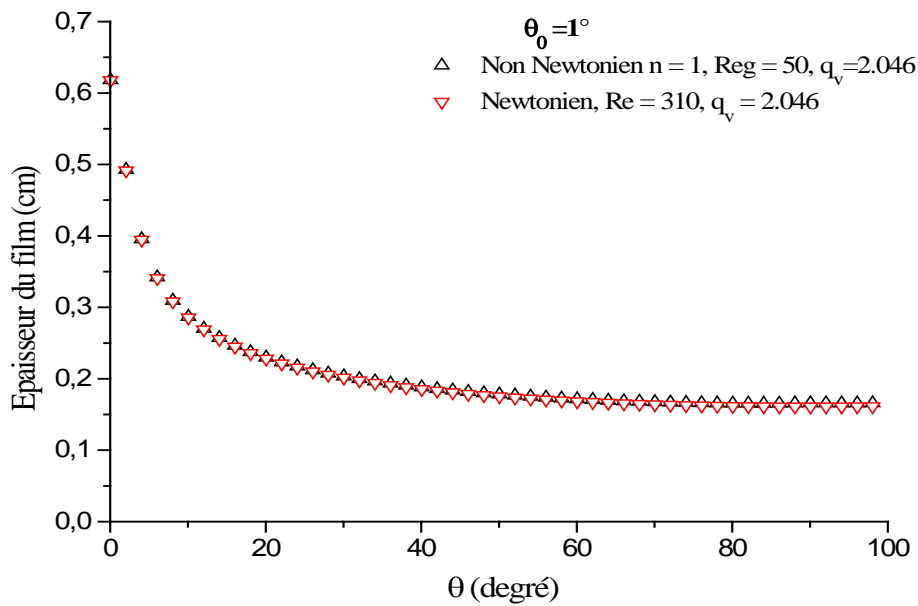


Figure IV.3.2-1 Evolution de l'épaisseur du film en fonction de θ

IV.3.3. RESULTATS ET DISCUSSION

Les résultats suivants ont été obtenus en prenant comme épaisseur initiale du film celle définie dans le chapitre III.

IV.3.3.a. EVOLUTION DE L'ÉPAISSEUR DU FILM

IV.3.3.a.1. Influence de Reg :

Dans la figure IV.3.3-1, on a représenté l'évolution de l'épaisseur du film pour différentes valeurs de Reg pour un fluide pseudoplastique. Comme pour les fluides newtoniens, l'épaisseur du film augmente avec Reg . Une décroissance rapide est observée dans la zone d'entrée; la zone d'entrée est d'autant plus étendue que Reg est plus grand.

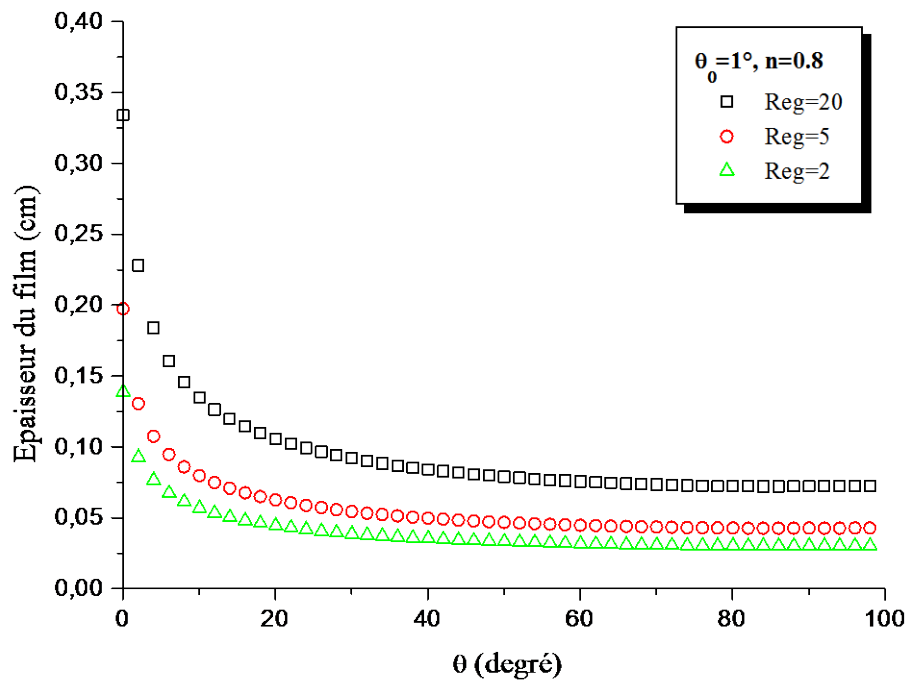


Figure IV.3.3-1 *Evolution de l'épaisseur du film*

Pour un fluide épaississant (Figure IV.3.3-2), la même évolution de l'épaisseur du film est observée. Cependant la zone d'entrée est nettement moins étendue. C'est ainsi que pour $Reg = 20$ par exemple la zone d'entrée s'étend jusqu'à $\theta \approx 30^\circ$ pour le fluide pseudoplastique ($n = 0.8$) alors qu'elle n'est que de $\theta \approx 10^\circ$ pour le fluide épaississant ($n = 1.2$). Notons par ailleurs que pour une même valeur de Reg ; l'épaisseur du film pour le fluide épaississant est supérieure à celle du fluide pseudoplastique.

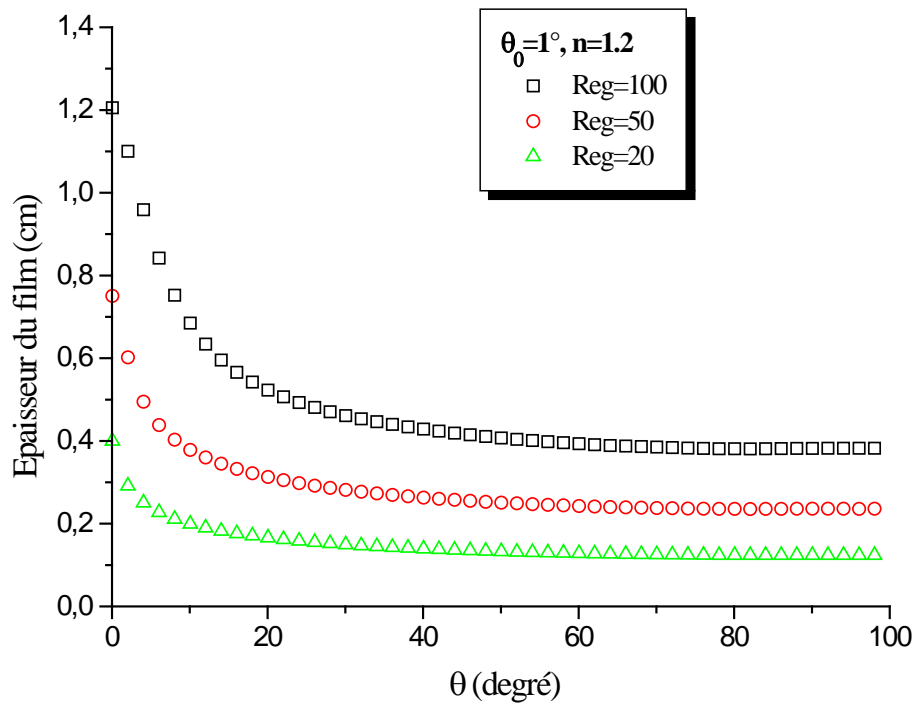


Figure IV.3.3-2 Evolution de l'épaisseur du film pour un fluide dilatant

IV.3.3.a.2.influence de n

Dans les courbes IV.3.3-3 et 4, l'évolution de l'épaisseur du film est représentée pour différentes valeurs de n pour $Reg = 20$ et $Reg = 50$.

Pour une valeur fixée de Reg , l'épaisseur diminue sensiblement avec n . Dans la zone d'entrée la variation d'épaisseur est plus brutale pour les fluides pseudoplastiques ($n < 1$).

L'évolution précédente est observée lorsque Reg augmente, les variations d'épaisseur sont cependant plus accentuées. Notons également que l'épaisseur initiale du film est fortement dépendante de l'indice n ; un écart de près de 40% est observé entre l'épaisseur d'entrée du fluide dilatant ($n = 1.2$) et celle du fluide pseudoplastique ($n = 0.5$)

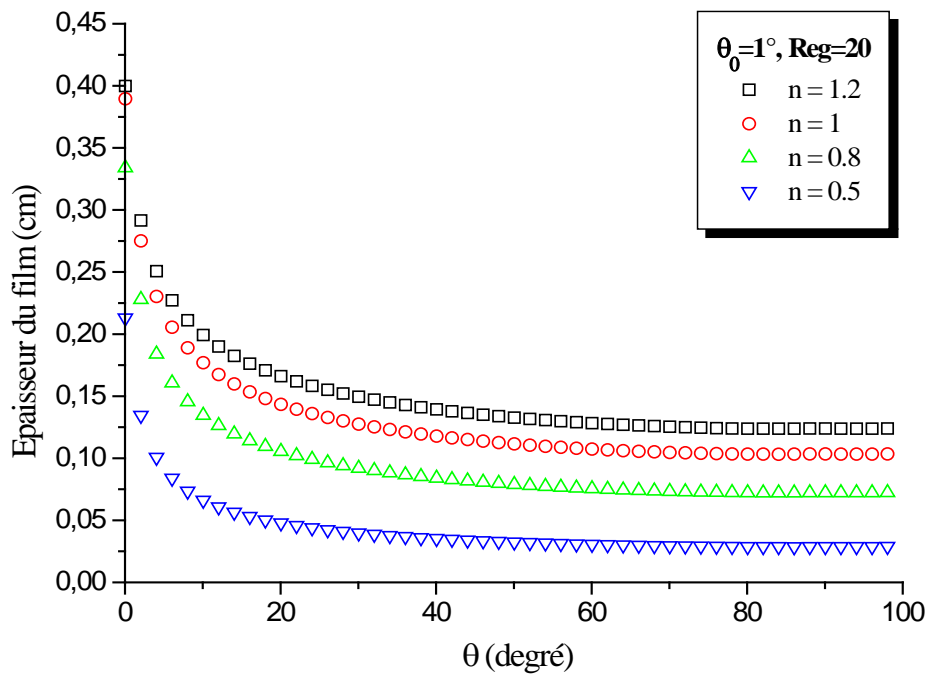


Figure IV.3.3-3 Evolution de l'épaisseur du film

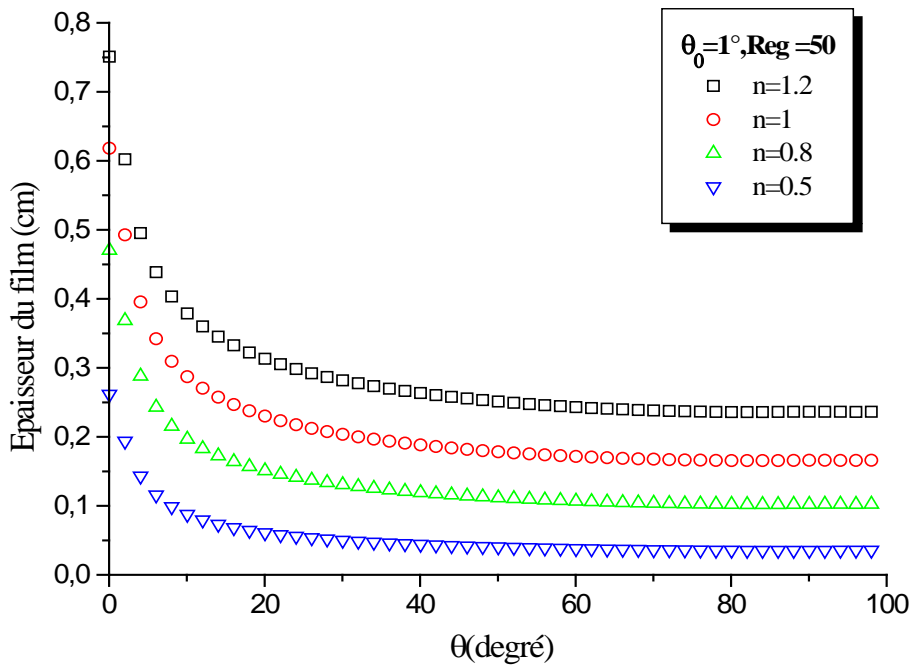


Figure IV.3.3-4 Evolution de l'épaisseur du film

IV.3.3.b. EVOLUTION DU FROTTEMENT PARIETAL

IV.3.3.b.1. Influence de Reg

Dans les figures IV.3.3-5 et 6, l'évolution du frottement pariétal est représentée pour différentes valeurs de Reg et ce pour deux valeurs distinctes de n.

Dans les deux cas, le frottement augmente avec Reg; les valeurs du frottement sont plus importantes pour les fluides épaississants ($n > 1$) que pour les fluides pseudoplastiques ($n < 1$) pour une même valeur de Reg.

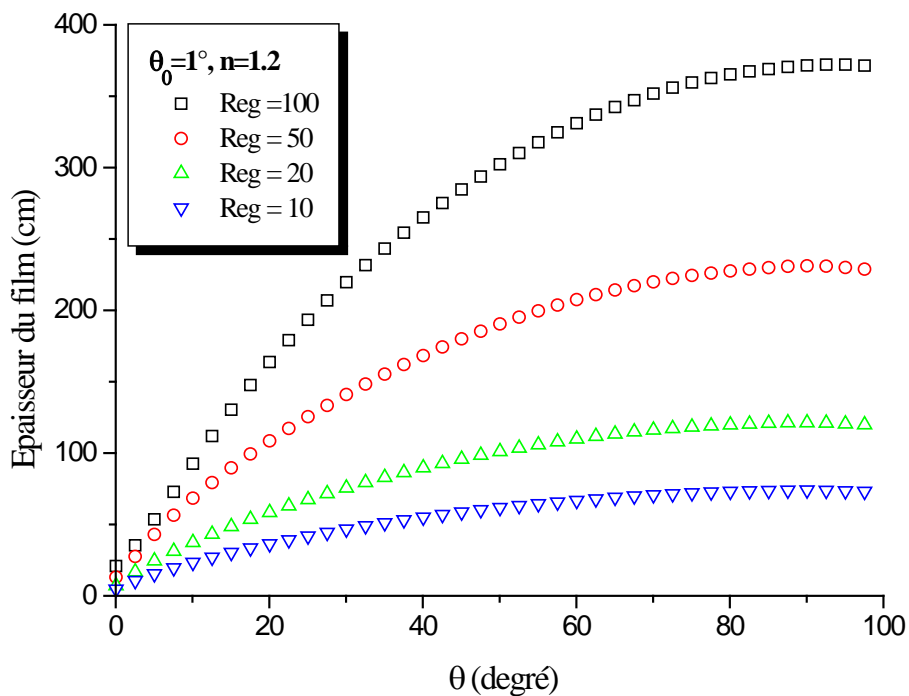


Figure IV.3.3-5 Evolution du frottement pariétal

IV.3.3.b.2. Influence de n

Lorsque Reg est fixé, le frottement pariétal augmente avec n (figures IV.3.3-7 et 8). Les valeurs du frottement augmentent rapidement dans la zone d'entrée ; cette évolution est conforme à l'évolution obtenue pour les épaisseurs de film. Les fluides pseudoplastiques

($n < 1$) correspondent à des épaisseurs de film et à des frottements inférieurs comparativement aux fluides épaississants.

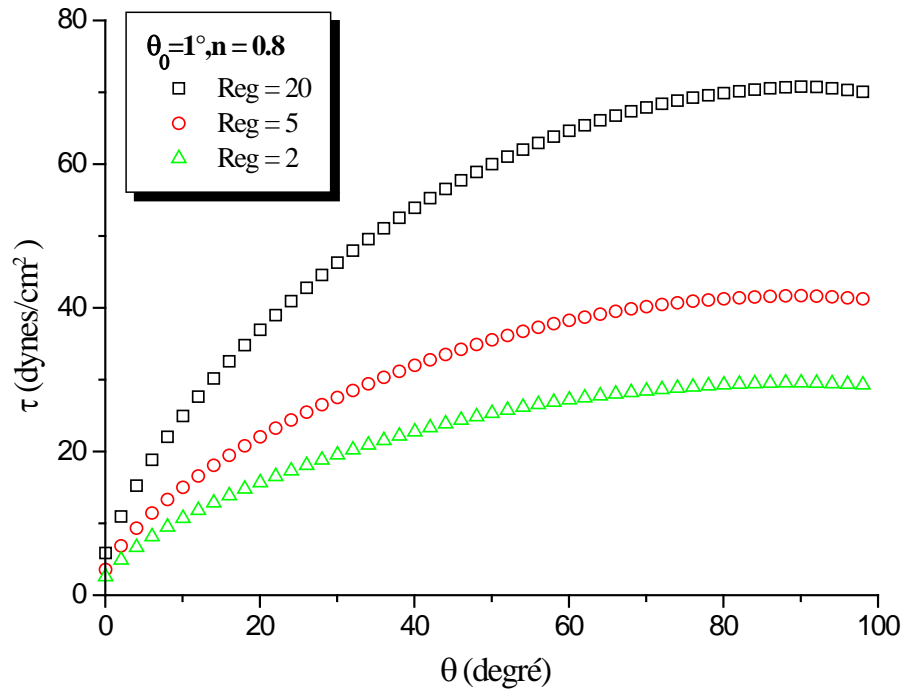


Figure IV.3.3-6

Evolution du frottement pariétal

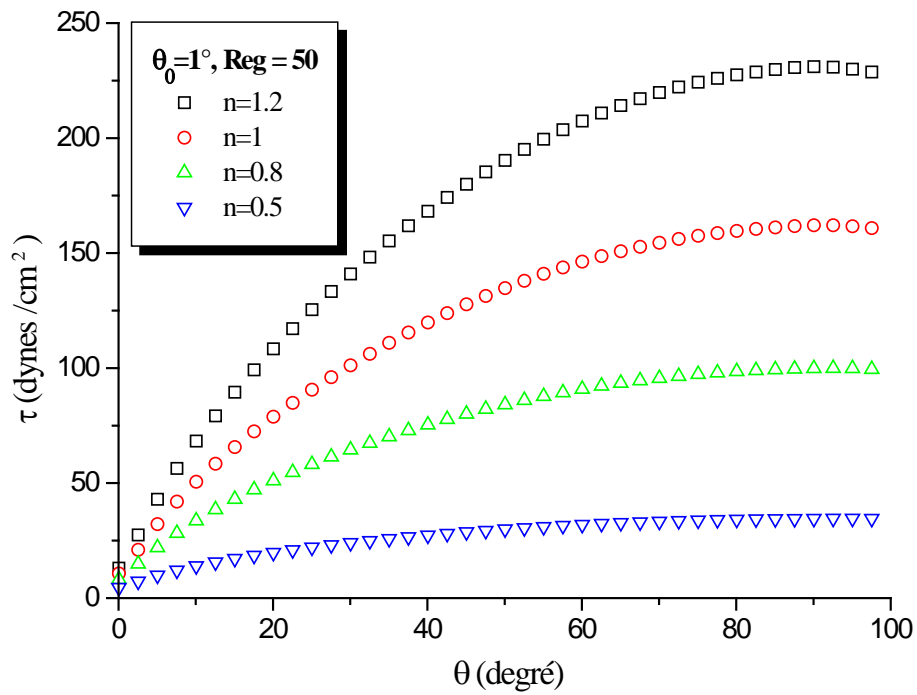


Figure IV.3.3-7 Evolution du frottement pariétal. Influence de n

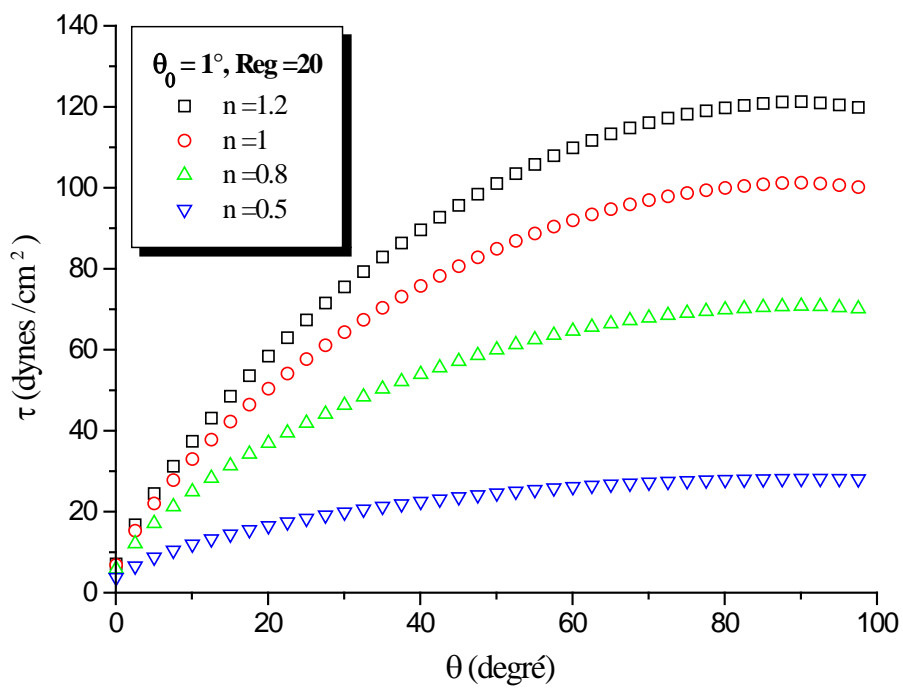


Figure IV.3.3-8 Evolution du frottement pariétal- Influence de n

IV.3.4. CONCLUSION

Les caractéristiques des films liquides pseudoplastiques et fluidifiants en écoulement sur un cylindre horizontal ont été étudiées numériquement. Les résultats montrent que l'évolution de l'épaisseur du film est influencée par l'indice de comportement n et par le débit d'entrée.

Chapitre V

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Nous nous sommes intéressés dans cette étude à l'hydrodynamique d'une lame de liquide s'écoulant par gravité sur une surface convexe d'axe horizontal.

Les équations et les conditions aux limites décrivant le mouvement du fluide ont été écrites en faisant apparaître un paramètre essentiel du problème, celui du rapport de l'épaisseur de la lame de liquide au rayon de courbure de la surface.

Lorsque ce rapport est faible, des simplifications peuvent être effectuées conduisant aux équations du ruissellement graduellement varié.

Les équations sont résolues par une méthode numérique dans le cas particulier du ruissellement laminaire d'un fluide newtonien sur un cylindre circulaire d'axe horizontal. L'originalité de cette méthode numérique tient au fait que le domaine fluide considéré est à frontière libre.

Compte tenu de l'intérêt actuel porté aux écoulements de fluides complexes, nous avons étendu notre étude au ruissellement de fluides non newtoniens en nous limitant cependant à ceux dont la loi de comportement est de type puissance.

L'exploitation des résultats obtenus a permis de montrer:

- * L'existence d'une zone d'entrée où de grandes modifications de la structure interne de la lame de liquide sont observées.
- * que l'étendue de cette zone d'entrée dépend du nombre de Reynolds de l'écoulement, de la nature du liquide ainsi que des conditions initiales.

* qu'au delà de cette zone d'entrée, on observe un oubli des conditions d'entrée, ces dernières n'ayant plus aucune influence sur l'hydrodynamique du film.

De nombreux développements de cette étude sont à envisager; nous citerons en particulier:

* L'étude du ruissellement instationnaire.

* L'extension de l'étude aux fluides complexes de manière générale.

* L'analyse des transferts de chaleur entre le fluide et la surface ainsi que celle des transferts de matière à la surface libre (écoulement co-courant ou contre courant).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Agu94] ABDERRAHMAN AGUNAOUN : « Etude de l'évaporation et du transfert de chaleur d'un film liquide mince en mouvement sur une paroi en présence d'un écoulement extérieur forcé », Thèse de doctorat de l'université de Perpignan, (1994)
- [Ack68] ACKERBERG R. C. *Physics of fluids- vol. 11 N°6 (1968)*
- [Ast64] ASTARITA G.: "Non Newtonian gravity flow along inclined plane surfaces" *Chemical, Ind.Eng. Chem. Fundamentals, Vol 3, 333-339, (1964).*
- [And85] ANDERSSON H. I. and YTREHMS T. : « Falkner skan solution for gravity driven film flow», *J of Applied Mechanics. Vol.52, pp 783, (1985).*
- [And87] ANDERSSON H. I. : " The momentum integral approach to laminar thin film flow", thin fluid films symposium : Applied mechanics bioengineering and fluids en gineering conference; 1987 jun, cincinnati, oh, vol 48. 7-13
- [And88] Helge I. ANDERSSON and Fridtjov IRGENS : " Gravity driven laminar film flow of power law fluids along vertical walls", *Journal of Non Newtonian Fluid Mechanics, 27 153-172 (1988).*
- [And98] Helge I. ANDERSSON and De-Yi SHANG: *An extended study of hydrodynamics of gravity- driven film flow of power-law fluids" fluid dynamics Reseach, 22 345-357 (1998).*
- [And90] Helge I. ANDERSSON and Fridtjov IRGENS : " film flow of power law fluids", *Encyclopedia of fluid Mechanics, Polymer flow engineering, vol 9 ed. N.P. Cheremisinoff, Gulf Publishing Company, Houston, Texas, (1990) 617-647.*
- [Bir60] BIRD.B.R, STEWART.W.E,et LIGHTFOOT.E.N.: " Transport phenomena", *Jhon Wiley et Sons, Madison, Wisconsin (1960)*
- [Bru65] BRULEY D.F. *A.I.C.H.E. Journ. Vol. 11 n°5 p 945-950 (1965).*
- [Ben82] BENZAOUI A. : « Contribution à l'étude du ruissellement plan de solutions diluées de macromolécules », *Thèse docteur de troisième cycle de l'institut national polytechnique de Lorraine, (1982).*
- [Cam72] CAMPERGUE D. "Etude du ruissellement plan par la méthode polarographique", *thèse 3eme cycle – Université d'Alger (1972)*
- [Cha87] N.CHABOUNIA. "Etude du ruissellement. Etude de la zone d'entrée", *thèse de Magister, 1987.*

- [Cer71] CERRO R.L; WHITAKER S. "Entrance region flows with a free surface. The Falling liquid film." – *Chem. Eng. Sci* ; Vol. 26, 785-798 (1971).
- [Des87] C. DESLOUIS, B. TRIBOLLET, R. COMOLET, G. VLACHOS, "Sur une méthode électrochimique pour l'étude des films d'eau en écoulement sur un plan". *Houille Blanche*, Vol 6, pp.459-468, (1987).
- [Des87] A.DESLOUIS , B. TRIBOLLET , R. COMOLET, G. VLACHOS : « Electrochemical methods for the study of liquid film flowing on a plane ». *la houille blanche*, vol.6,(1987).
- [Ful64] FULFORD G. D. " the flow of liquids in thin films", *Advan. Chem. Eng.* 5, 151-236, (1964)
- [Fei60] FEIND K. –*Ver. Deut. Ingr.* 481 (1960).
- [Has67] HASSAN A.N. "laminar flow along a vertical plate", *journal Applied Mech.*535-537, Sept.(1967)
- [Hau68] HAUGEN R.:" Laminar Flow Along a Vertical Wall" *J. Appl. Mech.* 631-633 (1968)
- [Hou87] M. HOUNKALIN, P. DUMARGUE, C. PHILIPPE : « Région d'entrée d'un film liquide issu d'un écoulement de Poiseuille établi ». *Actes du 18^{eme} congrès français de mécanique (31 Aout- 4septembre-Nantes) 1987.*
- [Hou99] M. HOUNKALIN, A. SANTA CRUZ BUSTAMANTE, C. PHILIPPE : « Comportement rhéologique et écoulement de films de solutions aqueuses de carboxyméthylcellulose ». *14^{eme} congrès français de mécanique, Toulouse(1999).*
- [Jal78] JAIN N.C. *Acta technica- CSAV. Vol 5 pp. 549-556 (1978)*
- [Kul83] N. N. KULOV, M. YU. MURAV'EV, V. A. MALYUSOV, and N. M. ZHAVORONKOV : « Velocity profiles in falling liquid films », *plenum publishing corporation,(1983).*
- [Kas63] KASIMOV B.S. and ZIGMUND F.F.: *Inzh.fz.zh.Akad.Nauk.Belorusk* 6 (11), 70 (1963)
- [Kol82] KOLLET ET DAGUENET: "Etude expérimentale des flux limités de diffusion entre un plan incliné rugueux et une couche mince de fluide en écoulement"; *Journal de*

chimie physique n°6, Vol.79, p 537-543 (1982)

- [Lyn55] LYNN, S. STREATEMAER, J.R. –*Chem. Eng. Sci.*, 4 pp., 64-67 (1955).
- [Lev60] LEVICH V.: "Physicochemical hydrodynamics", *Prentice-Hall, New Jersey (1960)*
- [Mil66] MILNE L.M. THOMSON : "Theorétical Aerodynamics", *Martin's press Newyork, (1966)*
- [Mah80] MAHAMDIA A. : « Etude dynamique et phénomènes de transfert dans un écoulement en film mince sur un plan incliné », *Thèse de 3^{ème} cycle de l'institut polytechnique de Lorraine,(1980).*
- [Mid85] MIDOUX. N., "Mécanique et Rhéologie des fluides en génie chimique", *Technique et documentation, Lavoisier (1985)*
- [Mur77] MURTY NARAYANA and SARMA:" A note on hydrodynamic entrance lenghts of non –newtonian laminar falling liquid films", *Chemical Engineering Science, (1977), vol 32, pp 566-567. Pergamon Press.*
- [Nou86] NOUAR.N.: "Convection thermique pour un fluide rhéofluidifiant cas de l'écoulement de couette-poiseuille", *Thèse de Doctorat 3^{ème} cycle, LEMTA, (1986).*
- [Nus16] NUSSELT W. *Ver Deut. Ingr. Z.60, 549-569 (1916).*
- [Oul99] D. OULD HADDA, A. AGUNAOUN, A. IL IDRISSE, A. DAIF, "Film liquide pseudoplastique en écoulement sur un cylindre horizontal". *4^{ème} Congrès de Mécanique. 13-16 Avril 1999. F.S.T.- Mohammadia. Société Marocaine des sciences Mécaniques.*
- [Oul00] D.OULD HADDA, A. AGUNAOUN, A. IL IDRISSE, M. ASBIK, « Etude du transfert de chaleur dans un film liquide non newtonien tombant laminaire sur un cylindre horizontal », *CIMASI' 2000, 23-25 Octobre, EHTP Casablanca Maroc.*
- [Oul01] D. OULD HADDA, A. IL IDRISSE, M. ASBIK,"Transfert de chaleur dans un film liquide à loi de puissance en écoulement sur un cylindre horizontal isotherme", *5^{ème} Congrès de Mécanique. 17-20 Avril 2001, Meknès. Maroc.*
- [Peu80] PEUBE J.L. et A. SALEM: *C. R. Acad. Sc. Paris, t.292, Série B.55 (sept.1980).*
- [Phi87] PHILIPPE C., HOUNKALIN M.A., ZOUANA A. : « Transfert de masse dans un film

liquide en régime laminaire non établi » 18^{ème} congrès français de mécanique, (1987).

- [Roy84] T.R.ROY: " On Laminar Thin-Film Flow Along a Vertical Wall", *Journal of Applied Mechanics*, September 1984, vol.51, 691.
- [Sal70] ABDELAZIZ SALEM : « Contribution à l'étude du ruissellement autour d'un cylindre circulaire horizontal », thèse docteur de troisième cycle, Alger, (1970).
- [Sal81] ABDELAZIZ SALEM : « Contribution à l'étude du ruissellement laminaire sur un obstacle de pente variable », thèse docteur es sciences physiques, Poitiers, (1981).
- [Sol78] SOLESIO J.N. " Stabilité et métrologie des films liquides", *thèse doctorat ès-Sciences*, université de Grenoble (1978)
- [Sch68] SCHLICHTING: " *Boundary layer theory*", Mc Graw Hill, (1968)
- [Sy173] NICOLAS D. SYLVESTER, JAMES S. TYLER, A.H.P. SKELLAND:" Non newtonian thin films: theory and experiment",*The Canadian Journal of Chemical Engineering*,Vol.51, August, (1973)
- [Tra87] AHMED TRAD : « Ruissellement visqueux sur une surface courbe. Stabilité. Ondes», *C.R.. Acad. Sc. Paris, t. 304, Série II, n° 10, 1987.*
- [Tek84] M. N. TEKIC D. POSARAC D. PETROVIC : « Entrance region lengths of laminar falling films », *Chemical Engineering Science* Vol.39, n° 1, pp 165-167, (1984).
- [The70] NORMAND THERIEN, BERNARD COUPAL ET JEAN L. CORNEILLE: "Vérification expérimentale de l'épaisseur du film pour des liquides non-newtoniens s'écoulant par gravité sur un plan incliné" *The canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol.48, February, (1970).
- [Tho73] THOMAS et RICE : " Application of the hydrogen-bubble technique for velocity measurements in thin liquids films"; *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, p321-325 (1973)
- [Wil62] WILKES ET NEDERMAN: "The mesurement of velocities in thin films of liquid" *Chemical Engineering Science*, Vol.17, p177-187 (1962)
- [Yan80] YANG T.M.T. and D.W. YARBROUGH: « Laminar flow non Newtonian liquid films inside verticale pipe », *Rheol. Acta* 19, 432-436, (1980).