

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTE DE MATHEMATIQUES



Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT
EN : MATHEMATIQUES
Spécialité : Méthodes Stochastiques

Par
Fayçal HAMDI

Sujet

Modèles Espace d'États et Processus Périodiquement Corrélés

Soutenue le 08/10/2008, devant le jury composé de :

Hacène AIT HADDADENE,	Professeur,	U.S.T.H.B.,	Alger	Président
Mohamed BENTARZI,	Professeur,	U.S.T.H.B.,	Alger	Directeur de Thèse
Abdelouahab BIBI,	Professeur,	U.T.M.,	Constantine	Examineur
Nadjia El SAADI,	M. C,	I.N.P.S.,	Alger	Examinatrice
Hafida GUERBYENNE,	M. C,	U.S.T.H.B.,	Alger	Examinatrice
Mohamed IBAZIZEN,	Professeur,	U.M.M.T.O.,	Tizi-Ouzou	Examineur

Modèles Espace d'États et Processus Périodiquement Corrélés

Fayçal HAMDI

Département de Recherche Opérationnelle

Faculté de Mathématiques,

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene,

U. S. T. H. B.

Mai 2008

Cette thèse est dédiée à

*A mes parents,
A ma femme Louisa,
A mes deux filles Sarah et Imène
A tous ceux qui me sont chers,...*

Remerciements

Comme le veut la tradition, je vais tenter de satisfaire au difficile exercice de la page des remerciements, peut-être la tâche la plus ardue de ces années de thèse. Non qu'exprimer ma gratitude envers les personnes en qui j'ai trouvé un soutien soit contre ma nature, bien au contraire ; la difficulté tient plutôt dans le fait de n'oublier personne ; c'est pourquoi, je remercie par avance ceux dont le nom n'apparaît pas dans cette page et qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre. Ils se reconnaîtront. Pour les autres, non merci. Ils se reconnaîtront aussi...

La première personne que je tiens à remercier est le Professeur Mohamed Bentarzi, mon Directeur de thèse, pour m'avoir proposé ce sujet de recherche et grâce à qui cette expérience a été des plus agréables à vivre. Il a su me laisser libre de mes orientations tout en étant présent chaque fois que j'en ai eu besoin, que ce soit pour me fournir une idée importante au moment où j'en manquais ou bien pour me reconforter lorsque je doutais. Cette thèse lui doit beaucoup. Enfin sa grandeur scientifique et sa gentillesse ont été pour moi de véritables atouts. Merci pour toute cette énergie, ces idées, ces intuitions. Je souhaite à tous les thésards d'avoir le même encadrement et la même interaction que ceux dont j'ai bénéficié et qui ont rendu ces années de travail formidables à vivre.

J'exprime mes sincères remerciements à Monsieur le Professeur Hacène Aït Haddadene pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Ma gratitude va également aux examinateurs. Je suis honoré par la présence dans mon jury des Professeurs Abdelouahab Bibi, Nadja El Saadi, Hafida Guerbyenne et Mohamed Ibazizen.

Je remercie de plus, toutes les personnes qui m'ont aidé durant la préparation de cette thèse et en particulier :

Mon collègue Abdelhakim Aknouche, avec qui j'ai eu la chance de travailler et de partager des moments forts et co-auteur avec qui j'ai appris beaucoup de choses et dont certaines parties de ma thèse sont tirées de travaux écrits conjointement. Je voudrais lui témoigner ma profonde gratitude et mes plus vifs remerciements pour sa collaboration et son soutien.

Pour ses précieux conseils de tous ordres, sa disponibilité et sa confiance, mes remerciements et ma gratitude vont à Madame Hafida Guerbyenne, non pas en tant que membre de Jury mais en tant que enseignante, collègue et co-auteur avec qui j'ai beaucoup appris. Son expérience et sa compétence m'ont beaucoup aidé. Qu'elle trouve ici les marques de ma reconnaissance et de mon profond respect.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance et mes plus sincères remerciements à mon collègue et co-auteur Hacène Belbachir, pour le travail que nous avons réalisé en commun, sa gentillesse, ses encouragements constants, ses précieux conseils et son efficacité lors des difficultés logistiques que j'ai rencontré.

Sans oublier tous les collègues de notre équipe de recherche Ahmed Bensalma, Mouna Merzougui et Leila Djeddou, dont l'aide et le soutien m'ont été précieux au cours de mon travail.

Je remercie enfin mes collègues de la Faculté de Mathématiques, tous Départements confondus, pour leur aide et leurs encouragements.

Alà Barakati Ellah

Table des matières

Introduction	4
 I Étude des Modèles Périodiques via leurs Représentations Espace d'États	 10
1 Modèles Espace d'États à Coefficients Périodiques	11
1.1 Introduction	11
1.2 Modèle général espace d'états	12
1.3 Représentation de quelques modèles linéaires sous forme espace d'états . . .	12
1.3.1 Modèles <i>ARMA</i> sous forme espace d'états	13
1.3.2 Modèles <i>ARIMA</i> sous forme espace d'états	15
1.3.3 Modèles <i>ARMA</i> évolutifs sous forme espace d'états	17
1.3.4 Modèles <i>ARMA</i> périodiques sous forme espace d'états	19
1.4 Filtre de Kalman pour les modèles espace d'états linéaires à coefficients périodiques	19
1.5 Extension du filtre de Chandrasekhar au cas des modèles espace d'états périodiques	24
1.5.1 Définitions et notations préliminaires	25
1.5.2 Algorithmes de type Chandrasekhar périodique	26
1.5.3 Problème d'initialisation	31
1.6 Conclusion	35

2	Structure d'Autocorrélation des Modèles Autorégressifs Moyennes Mobiles Périodiques	36
2.1	Introduction	36
2.2	Calcul de la fonction d'autocovariances d'un modèle <i>ARMA</i> périodique . . .	37
2.2.1	La méthode	39
2.2.2	Illustration	41
2.3	Calcul de la fonction d'autocovariance des modèles <i>VARMA</i> périodiques . .	46
2.3.1	Notations et définitions	46
2.3.2	Calcul des autocovariances d'un modèle <i>PVARMA</i>	48
2.4	Conclusion	54
3	Estimation des Modèles Périodiques via leurs Représentations Espace d'États	55
3.1	Introduction	55
3.2	Evaluation de la vraisemblance exacte des modèles <i>PVARMA</i> Gaussiens . .	57
3.3	Bootstrap d'un modèle espace d'états périodique	64
3.3.1	La méthode	65
3.3.2	Etude de simulation	66
3.4	Conclusion	71
II	Mélange de Modèles de Séries Chronologiques Périodiques	73
4	Mélange de Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques Périodiques	74
4.1	Introduction	74
4.2	Mélange de modèles <i>ARCH</i> périodiques	76
4.3	Condition de stationnarité périodique du second ordre	79
4.4	Moment d'ordre quatre d'un processus <i>MPARCH</i> périodiquement stationnaire du second ordre	83

4.5	Estimation du maximum de vraisemblance via l'algorithme EM	90
4.6	Identification d'un modèle <i>MPARCH</i>	97
4.7	Application numérique	99
4.7.1	Etude de simulation	99
4.7.2	Application à l'indice boursier <i>S&P 500</i>	105
4.8	Conclusion	108
5	Mélange de Modèles Autorégressifs à Erreurs <i>ARCH</i> Périodiques	110
5.1	Introduction	110
5.2	Mélange de modèles <i>AR-ARCH</i> périodiques	111
5.3	Conditions de stationnarité périodique du premier et deuxième ordre	113
5.3.1	Condition de stationnarité du premier ordre	113
5.3.2	Condition de stationnarité périodique du second ordre	115
5.4	Estimation des paramètres	124
5.4.1	Calcul de la matrice d'information complète	127
5.4.2	Calcul de la matrice d'information manquante	128
5.5	Identification et test d'adéquation du modèle	133
5.5.1	Identification d'un modèle <i>MPAR-ARCH</i>	133
5.5.2	Test d'adéquation du modèle	134
5.6	Application numérique	136
5.6.1	Etude de simulation	136
5.6.2	Application à l'indice boursier <i>S&P 500</i>	138
5.7	Conclusion	142

Introduction

La classe de modèles espaces d'états est large et flexible, ce qui offre des outils attractifs pour analyser des séries chronologiques dans une grande variété de domaines scientifiques (cf., Anderson et Moore, 1979 ; Aoki, 1987 ; Harvey, 1989 ; Durbin et Koopman, 2001). Un des dispositifs intéressants des modèles espace d'états est que beaucoup de modèles de séries chronologiques, y compris les modèles périodiques, peuvent être exprimés sous forme espace d'états. En effet, ces derniers ont été largement utilisés dans les dernières décennies, pour décrire de nombreuses séries à dynamique périodique, rencontrées dans divers domaines tels que l'économie (Cleveland et Tiao, 1979 ; Osborn, 1992 ; Bentarzi et Hallin, 1996 ; Bollerslev et Ghysels, 1996 ; Franses, 1996 ; Franses et Paap, 2004), l'environnement (Salas et al., 1983 ; Vecchia 1985*a*, 1985*b* ; Jymenez et *al.*, 1989 ; Bentarzi et *al.*, 2008), l'ingénierie (Bittanti et De Nicolao, 1993 ; Adams et Goodwin, 1995 ; Varga, 2001) et plusieurs autres disciplines. Plusieurs classes de modèles linéaires ont été proposées dont la plus utilisée est la classe de modèles autorégressifs moyenne mobile périodiques (*PARMA*) qui peut être considérée comme une alternative prometteuse de la classe de modèles *SARIMA* pour représenter des séries générées par des processus du second ordre, dont les fonctions d'autocovariance sont périodiques dans le temps, une caractéristique qui ne peut être expliquée par les modèles classiques *SARIMA* (cf., Bentarzi, 1995, 1998 ; Aknouche, 2006 ; Guerbyenne, 2007). Un autre intérêt de cette classe de modèles périodiques, outre que l'étude des phénomènes saisonniers, réside dans la relation établie par le théorème de Gladyshev (1961), entre les modèles de cette classe et les modèles multivariés autorégressifs moyenne mobile (*VARMA*) stationnaires. En effet, les modèles périodiques peuvent être exploités dans l'analyse des séries chronologiques multivariées stationnaires, dans le but de réduire sensiblement le nombre de paramètres (cf., Newton, 1982).

De nombreux travaux de prospection et d'analyse des modèles linéaires stationnaires et périodiques à travers leurs représentations espace d'états équivalentes ont constitué jusqu'à

présent le centre d'intérêt de plusieurs chercheurs dont Gardner et *al.*, (1980), Pearlman (1980), Mélard (1984), Shea (1984, 1987, 1989), Harvey (1989), Hurvich et al. (1990), Stoffer et Wall (1991), Hurvich et Tsai (1993), Jimenez et *al.* (1989), Klein et Mélard (1990), Bentarzi et Hallin (1994), Mélard et Klein (1994), Cavanaugh et Shumway (1997), Casals et *al.*, (1998), Kent et al. (2002), Davis et Yam (2005), Shao et Lund (2004), Aknouche (2007) et d'autres. Ces travaux de recherche se sont soldés par de nombreux résultats intéressants. Parmi les concepts les plus utilisés par les statisticiens et les économètres et qui ont donné un grand essor aux séries chronologiques le filtre de Kalman (Kalman, 1960). Ce dernier est une approche statistique, d'assimilation de données, dont le principe est de corriger la trajectoire du modèle en combinant les observations avec l'information fournie par le modèle, de façon à minimiser l'erreur entre l'état vrai et l'état filtré. D'autre part, Schweppe (1965) a été le premier à remarquer que la fonction de vraisemblance d'un modèle écrit sous forme espace d'états, peut être évaluée au moyen du filtre de Kalman. De plus, en supposant que le modèle espace d'états à coefficients constants, Morf et *al.*, (1974) ont introduit les équations de Chandrasekhar qui sont, du point de vue calcul, plus efficaces d'un ordre de grandeur. Les procédures rapides sont souvent plus complexes mais ce n'est pas le cas ici. Bien au contraire, les équations de Chandrasekhar sont aussi légèrement plus simples que les équations du filtre de Kalman.

Notons que le filtre de Kalman est optimal dans le cas d'équations linéaires et d'erreurs Gaussiennes. Cependant, comme le filtre de Kalman est lui même une procédure linéaire, il est particulièrement sensible à des observations extrêmes. Il est possible de rendre la procédure plus robuste, en abandonnant l'hypothèse de normalité. D'un autre côté, l'hypothèse de linéarité se révèle restreinte et souvent inadéquate dans plusieurs situations pratiques et de ce fait devrait être abandonnée.

Devant les problèmes de modélisation rencontrés pour certaines séries de données (séries environnementales, financières, monétaires, ...) les modèles non linéaires ont été envisagés. Plusieurs classes de modèles ont été proposées (modèles bilinéaires, modèles à seuils, modèles hétéroscédastiques, mélange de modèles et d'autres). En particulier, les modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques (*ARCH*) introduits par Engle (1982) et leur version généralisée *GARCH* de Bollerslev (1986) sont les représentations les plus utilisées dans la modélisation de la volatilité instantanée qui caractérise beaucoup de séries financières. Plusieurs extensions de modèles conditionnellement hétéroscédastiques (*ARCH*-type) ont été proposées dans la littérature des séries économétriques afin de capturer diffé-

rentes caractéristiques additionnelles telles que la longue mémoire, le changement de régime et la périodicité dans la variance conditionnelle. Parmi les modèles proposés, la classe des modèles *GARCH* périodiques (*PGARCH*) introduite et étudiée par Bollerslev et Ghysels (1996) et qui a montré son adéquation pour capturer la périodicité dans la variance conditionnelle, une propriété qui ne peut pas être expliquée ni par les modèles *ARMA* linéaires classiques ni par les modèles *GARCH* stationnaires. Franses et Paap (2000) ont combiné la représentation *AR* périodique (*PAR*) avec celle du *PGARCH* pour capturer à la fois la périodicité dans la moyenne conditionnelle et la variance conditionnelle, en proposant le modèle *PAR-PGARCH* qu'ils ont appliqué avec succès dans la modélisation des données financières. Cependant, ces modèles s'avèrent inconsistants en présence d'autres caractéristiques de beaucoup de séries chronologiques avec une structure d'autocorrélation périodique, telles que le changement de régime, la grande kurtosis, les valeurs aberrantes, les événements extrêmes ainsi que la multimodalité dans les distributions des innovations. Afin de capturer ces caractéristiques, Wong et Li (2001) ont proposé d'ajouter plus de flexibilité à la famille des modèles *ARCH*-type, en introduisant un mélange de modèles *AR-ARCH*. Dans le même esprit de la formulation *MAR* de Wong et Li (2000), Shao (2006) a proposé le mélange de modèles autorégressifs périodiques (*MPAR*) qui peut représenter les séries chronologiques avec une structure d'autocorrélation périodique aussi bien que les caractéristiques mentionnées dans la moyenne conditionnelle.

L'objectif de cette thèse est d'une part, l'étude des modèles espace d'états à coefficients périodiques et la généralisation de certains algorithmes connus dans la littérature des modèles espace d'états linéaires à coefficients constants au cas des modèles espace d'états linéaires à coefficients périodiques. Nous procédons à l'étude de quelques propriétés algébriques et probabilistes et à l'élaboration des méthodes d'estimation de certains modèles périodiques en utilisant des représentations équivalentes espace d'états de ces derniers. Les performances des algorithmes proposés sont comparées à celles existantes dans la littérature.

D'autre part, afin de mieux représenter les séries chronologiques avec une dynamique périodique nous élaborons une étude de mélange de modèles périodiques. Cette étude englobe la classe de mélange de modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques périodiques et sa généralisation qui est le mélange de modèles autorégressifs à erreurs *ARCH* périodiques.

Apport et présentation de la thèse

La présente thèse est constituée de deux parties. La première qui se compose de trois chapitres, concerne l'étude de la modélisation linéaire des séries chronologiques à dynamique périodique à travers des représentations espace d'états linéaire à coefficients périodiques. La seconde partie est à son tour constituée de deux chapitres et consacrée à l'étude de certains modèles non linéaire périodiques, à savoir le mélange de modèles *ARCH* périodiques et sa généralisation qui est le mélange de modèles autorégressifs à erreurs *ARCH* périodiques.

Première partie : Étude des modèles périodiques via leurs représentations espace d'états

Chapitre 1. Modèles Espace d'États à Coefficients Périodiques

Dans ce chapitre, nous présentons en premier lieu le modèle général espace d'états linéaire. Nous présentons en suite, quelques modèles linéaires sous forme espace d'états. Nous exposons les équations récurrentes de Kalman pour des modèles espace d'états périodiques puis nous généralisons les équations de Chandrasekhar à temps discret proposées par Morf et *al.* (1974) pour les modèles espace d'états à coefficients constants au cas périodique à travers plusieurs formes. Ces équations ont un potentiel pour la réduction de la complexité numérique inhérente au filtre de Kalman correspondant. Notons qu'une version racine carrée peut être facilement formulée (Sayed et Kailath, 1994) dans le but d'améliorer la stabilité numérique des algorithmes proposés. Ces équations peuvent être appliquées pour réduire la complexité des problèmes d'inférence associés aux modèles périodiques linéaires tels que les modèles *ARMA* périodiques (*PARMA*).

Chapitre 2. Structure d'Autocorrélation des Modèles Autorégressifs Moyennes Mobiles Périodiques

Ce chapitre est consacré à l'étude de la structure d'autocorrélation des modèles *ARMA* périodiques. Nous proposons en premier lieu une procédure améliorée, basée sur l'approche de l'équation aux différences, pour calculer les autocovariances d'un modèle *PARMA* univarié. Cette proposition permet de calculer les autocovariances nécessaires pour démarrer le système d'équations de Yule Walker, en résolvant un système linéaire de matrice donnée explicitement et dont la forme analytique montre une structure circulaire, naturellement assortie avec la périodicité du modèle. En second lieu, nous présentons une généralisation de la procédure proposée récemment par Aknouche (2007) du cas des modèles *PVAR* purs au

cas des modèles *PVARMA*. La procédure obtenue peut être exploitée comme outil pour d'autres procédures de calcul telle que l'obtention de la matrice d'information de Fisher et l'estimation du maximum de vraisemblance.

Chapitre 3. Estimation des Modèles Périodiques via leurs Représentations Espace d'États

L'estimation des paramètres des modèles périodiques à partir de leurs représentations espace d'états est l'objet de ce chapitre. En premier lieu, nous étudions le problème de l'évaluation de la fonction de vraisemblance d'un modèle *PARMA* multivarié via la méthode de l'innovation qui nécessite un nombre d'opérations proportionnel à la taille des observations. Les résidus sont obtenus par les équations de Chandrasekhar périodiques présentées dans le Chapitre 1. Pour démarrer les équations de récurrences, nous proposons d'utiliser la procédure de calcul des autocovariances, dérivée dans le Chapitre 2. En second lieu, nous utilisons la formulation espace d'états, qui offre un cadre de modélisation informatiquement efficace, en particulier pour l'estimation des paramètres d'une large gamme de modèles (Harvey, 1989 ; Stoffer et Wall, 1991 ; Durbin et Koopman, 2001 et bibliographie intra). Nous adaptons plus précisément, la méthode du bootstrap appliquée aux innovations d'un modèle espace d'états Gaussien proposée par Stoffer et Wall (1991) pour l'estimation des paramètres d'un modèle périodique.

Deuxième partie : Mélange de Modèles de Séries Chronologiques Périodiques

Chapitre 4. Mélange de Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscastiques Périodiques

Le premier chapitre de cette deuxième partie de notre travail est consacré à l'étude de mélange de modèles *ARCH* périodiques (*MPARCH*). Nous commençons par la définition d'un modèle *MPARCH*. En suite nous dérivons une condition sous la quelle un processus *MPARCH* soit périodiquement stationnaire du second ordre et nous obtenons, sous cette condition, l'expression de la variance d'un processus *MPARCH*. Nous étudions également, l'existence du moment d'ordre quatre dont l'expression explicite est obtenue sous la condition établie. Le problème de l'estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance est traité en utilisant l'algorithme *EM* comme technique renommée d'optimisation de la vraisemblance. Une étude de simulation de la performance de l'algorithme *EM*

et une application de la nouvelle classe de modèles *MPARCH* à la modélisation de la série journalière de l'indice *S&P 500* sont données à la fin de ce chapitre.

Chapitre 5. Mélange de Modèles Autorégressifs à Erreurs *ARCH* Périodiques

Nous proposons dans ce chapitre, une nouvelle classe de modèles non linéaires qui est la classe de Mélange de modèles Autorégressifs Périodiques à erreurs *ARCH* périodiques (*MPAR-ARCH*). Cette classe de modèles généralise celle du mélange de modèles autorégressifs périodiques (*MPAR*) proposée par Shao (2006) dans laquelle la moyenne conditionnelle suit un mélange de modèles *AR* périodiques et généralise également, la classe de modèles *MPARCH* proposée et étudiée dans le chapitre précédent. Nous étudions alors quelques propriétés probabilistes et statistiques du modèle proposé telles que la stationnarité périodique du second ordre et l'*EMV* via l'algorithme itératif *EM*. Nous examinons la performance de l'algorithme *EM* dans l'estimation des paramètres d'un modèle *MPAR-ARCH*. Afin de voir dans quelle mesure la classe de modèles *MPAR-ARCH* est adaptée à la modélisation des séries financières, nous modélisons la série des rendements quotidiens de l'indice *S&P 500*.

Première partie

Étude des Modèles Périodiques via leurs Représentations Espace d'États

Chapitre 1

Modèles Espace d'États à Coefficients Périodiques

1.1 Introduction

Il est bien connu que les modèles espace d'états peuvent être utilisés afin de réduire la complexité des problèmes liés à l'analyse de certains modèles des séries chronologiques. En effet, plusieurs travaux de prospection et d'analyse des modèles linéaires stationnaires et périodiques, à travers leurs représentations espace d'états équivalentes, ont constitué jusqu'à présent, le centre d'intérêt de plusieurs chercheurs. Nous citons en particulier Gardner et *al.*, (1980), Pearlman (1980), Shea (1984, 1987, 1989), Mélard (1984), Jimenez et *al.* (1989), Stoffer et Wall (1991), qui se sont intéressés à l'estimation des paramètres du modèle; Hurvich et *al.* (1990), Hurvich et Tsai (1993), Cavanaugh et Shumway (1997), se sont concentrés sur le problème de l'identification du modèle; Klein et Mélard (1990) Bentarzi et Hallin (1994), Mélard et Klein (1994), Shao et Lund (2004), Aknouche (2007), ont étudiés certaines propriétés statistiques et probabilistes. Ces travaux de recherche se sont soldés par de nombreux résultats intéressants, qui reposent sur quelques algorithmes tels que le filtre de Kalman (Kalman, 1960) et le filtre de Chandrasekhar (Morf et *al.*, 1974). Ce chapitre est consacré à l'étude des modèles espace d'états à coefficients périodiques. Nous présentons dans la deuxième section, le modèle général espace d'états linéaire. En suite, nous présentons quelques modèles linéaires sous forme espace d'états. Par la suite, nous exposons les équations récurrentes de Kalman pour des modèles espace d'états périodiques. Dans la dernière section, nous généralisons au cas périodique les équations de Chandrasekhar à temps discret

proposées par Morf et *al.* (1974) pour les modèles espace d'états à coefficients constants.

1.2 Modèle général espace d'états

La forme de l'espace d'états appliquée à une série chronologique $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ permet l'étude d'un phénomène observé par l'intermédiaire d'un vecteur dit *variable d'états* $x_t \in \mathbb{R}^r$. Ces deux quantités, variable observée et variable d'états, sont liées par deux relations. La première est dite l'équation de transition ou d'état et la seconde, l'équation d'observation. Le système général espace d'états linéaire est décrit par

$$\begin{cases} x_{t+1} = F_t x_t + \Lambda_t u_t + G_t \varepsilon_t \\ y_t = H_t x_t + D_t u_t + C_t e_t \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où $u_t \in \mathbb{R}^h$ est un vecteur de variables exogènes, $e_t \in \mathbb{R}^k$, $\varepsilon_t \in \mathbb{R}^l$, et $(\varepsilon'_t, e'_t)'$ est un processus bruit blanc avec $E(\varepsilon_t) = E(e_t) = 0$, et tel que

$$\text{cov} \left((\varepsilon'_t, e'_t)' (\varepsilon'_t, e'_t)' \right) = \begin{pmatrix} Q_t & S_t \\ S'_t & R_t \end{pmatrix},$$

où Q_t est une matrice définie positive et R_t est une matrice strictement définie positive. Les matrices F_t , Λ_t , G_t , H_t , D_t et C_t sont des fonctions du temps et sont supposées être non aléatoires.

1.3 Représentation de quelques modèles linéaires sous forme espace d'états

Dans ce paragraphe, nous allons représenter certains modèles linéaires de séries chronologiques sous forme espace d'états. Nous commençons progressivement par les modèles simples à savoir les modèles autorégressifs moyenne mobile (*ARMA*) puis les modèles *ARMA* intégré (*ARIMA*) et les modèles *ARMA* à coefficients évolutifs dans le temps et enfin les modèles *ARMA* à coefficients périodiques (*PARMA*).

1.3.1 Modèles *ARMA* sous forme espace d'états

Rappelons qu'un processus aléatoire $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ du second ordre ($E(y_t^2) < \infty$) admet une représentation *ARMA* d'ordre p et q , s'il est solution d'une équation aux différences stochastiques de la forme

$$y_t - \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.3.1)$$

ou encore

$$\Phi(L)y_t = \Theta(L)\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc, *i.e.*, une suite de variables aléatoires non corrélées ($E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = 0$ pour $h \neq 0$) de moyenne $E(\varepsilon_t)$ nulle et de variance $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$, et $\Theta(L) = -\sum_{j=0}^q \theta_j L^j$, $\Phi(L) = -\sum_{j=0}^p \phi_j L^j$ où $\forall j < q$, $\theta_j \in \mathbb{R}$, $\forall j < p$, $\phi_j \in \mathbb{R}$, $\phi_0 = \theta_0 = -1$ et $(\phi_p, \theta_q) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

Notons que les processus autorégressif (*AR*) et moyenne mobile (*MA*) ne sont que des cas particuliers des processus *ARMA*. Un *AR*(p) correspond à un *ARMA*($p, 0$), de la même façon un *MA*(q) correspond à un *ARMA*($0, q$).

La représentation en espace d'états des modèles *ARMA* n'est pas unique dans la littérature, nous utilisons généralement deux représentations, dites représentation $\max(p, q+1)$ et $\max(p, q)$. Cependant, dans ce qui suit nous allons donner trois représentations dont deux de $\max(p, q+1)$ et une de $\max(p, q)$.

Première représentation

Il est bien connu que si $\{z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus *AR*(p) alors $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ défini par

$$y_t = z_t - \sum_{j=1}^q \theta_j z_{t-j}, \quad (1.3.2)$$

est un processus *ARMA*(p, q). Considérons alors l'écriture équivalente du modèle (1.3.2) suivante

$$\begin{cases} \Phi(B)z_t = \varepsilon_t, \\ y_t = \Theta(B)z_t. \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Posons $r = \max(p, q+1)$, $\phi_j = 0$ pour $j > p$ et $\theta_j = 0$ pour $j > q$. Soit x_t le r -vecteur défini par $x_t = (z_t, z_{t-1}, \dots, z_{t-r+1})'$. Comme z_t est un *AR*(p) alors d'après (1.3.3) nous avons

$$\begin{cases} x_t = Fx_{t-1} + G\varepsilon_t, \\ y_t = H'x_t, \end{cases} \quad (1.3.4)$$

où

$$F = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{r-1} & \phi_r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta_1 \\ -\theta_2 \\ \vdots \\ -\theta_{r-1} \end{pmatrix}$$

Deuxième représentation

Une deuxième représentation en espace d'états pour les modèles *ARMA* est équivalente à la précédente. Considérons le modèle (1.3.1) et introduisons le vecteur x_t , de dimension r , défini par

$$x_t(i) = \sum_{j=0}^{r-i} (\phi_{i+j} y_{t-j-1} - \theta_{i+j-1} \varepsilon_{t-j}), \quad i = 1, \dots, r,$$

où $r = \max(p, q + 1)$, ce qui donne

$$\begin{cases} x_t = Fx_{t-1} + G\varepsilon_t, \\ y_t = H'x_t, \end{cases} \quad (1.3.5)$$

où

$$F = \begin{pmatrix} \phi_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_2 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \phi_{r-1} & 0 & & 0 & 1 \\ \phi_r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta_1 \\ \vdots \\ -\theta_{r-2} \\ -\theta_{r-1} \end{pmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Troisième représentation

Cette troisième représentation a l'avantage de réduire la dimension du vecteur d'états à $\max(p, q)$ au lieu $\max(p, q + 1)$, mais elle est relativement moins utilisée que les deux précédentes en raison de la corrélation entre les bruits de l'équation des observations et l'équation des états.

Considérons le modèle (1.3.1) et soient $r = \max(p, q)$ et le r -vecteur x_t défini par

$$\begin{cases} x_t(1) = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_r y_{t-r} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_r \varepsilon_{t-r}, \\ x_t(2) = \phi_2 y_{t-1} + \cdots + \phi_r y_{t-r+1} - \theta_2 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_r \varepsilon_{t-r+1}, \\ \vdots \\ x_t(r) = \phi_r y_{t-1} - \theta_r \varepsilon_{t-1}, \end{cases}$$

qui peut s'écrire sous la forme suivante

$$x_t(i) = \sum_{j=0}^{r-i} \phi_{i+j} y_{t-j-1} - \sum_{j=1}^{r-i} \theta_{i+j} \varepsilon_{t-j}, \quad i = 1, \dots, r,$$

où bien la forme récursive

$$\begin{cases} x_t(1) = \phi_1 x_{t-1}(1) + x_{t-1}(2) + (\phi_1 - \theta_1) \varepsilon_{t-1}, \\ \vdots \\ x_t(r-1) = \phi_{r-1} x_{t-1}(1) + x_{t-1}(r) + (\phi_{r-1} - \theta_{r-1}) \varepsilon_{t-1}, \\ x_t(r) = \phi_r x_{t-1}(1) + (\phi_r - \theta_r) \varepsilon_{t-1}, \end{cases}$$

que nous pouvons l'écrire comme suit

$$\begin{cases} x_t = F x_{t-1} + G \varepsilon_t, \\ y_t = H' x_t + \varepsilon_t, \end{cases} \quad (1.3.6)$$

où

$$F = \begin{pmatrix} \phi_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_2 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \phi_{r-1} & \vdots & & \ddots & 1 \\ \phi_r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} \phi_1 - \theta_1 \\ \phi_2 - \theta_2 \\ \vdots \\ \phi_{r-1} - \theta_{r-1} \\ \phi_r - \theta_r \end{pmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que pour le cas des modèles *ARMA* multivariés, les mêmes représentations du cas univarié sont valables en remplaçant les coefficients scalaires par des matrices.

1.3.2 Modèles *ARIMA* sous forme espace d'états

Considérons un processus $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ qui suit un modèle *ARIMA*(p, d, q) tel que $\nabla^d y_t = (1 - B)^d y_t$ satisfait (1.3.1). Alors, d'après le paragraphe précédent le processus $\nabla^d y_t$ satisfait les trois représentations espace d'états (1.3.4), (1.3.5) et (1.3.6).

Prenons par exemple la représentation (1.3.5)

$$\begin{cases} \alpha_t = F \alpha_{t-1} + G \varepsilon_t, \\ \nabla^d y_t = H' \alpha_t, \end{cases} \quad (1.3.7)$$

où

$$F = \begin{pmatrix} \phi_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_2 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \phi_{r-1} & \vdots & & \ddots & 1 \\ \phi_r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta_1 \\ \vdots \\ -\theta_{r-2} \\ -\theta_{r-1} \end{pmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soient A et B deux matrices de dimension $d \times 1$ et $d \times d$, respectivement définies par $A = B = 1$ si $d = 1$ et par

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ (-1)^{d+1} C_d^d & (-1)^d C_d^{d-1} & (-1)^{d-1} C_d^{d-2} & \cdots & C_d^1 \end{pmatrix},$$

si $d > 1$. Définissons également le d -vecteur $Y_t = (y_{t-d+1}, y_{t-d+2}, \dots, y_t)'$. Comme

$$\nabla^d y_t = (1 - B)^d y_t = y_t + \sum_{j=1}^d (-1)^j C_d^j B^j y_{t-j},$$

i.e.

$$y_t = \nabla^d y_t - \sum_{j=1}^d (-1)^j C_d^j B^j y_{t-j},$$

alors, nous vérifions aisément que ce dernier vecteur satisfait l'équation suivante

$$Y_t = A \nabla^d y_t + B Y_{t-1} = A H' \alpha_t + B Y_{t-1}.$$

Définissons maintenant le nouveau vecteur d'état $x_t = (\alpha_t', Y_{t-1}')'$, de dimension $r + d$. Alors l'équation d'état est donnée par

$$x_{t+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{t+1} \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ A H' & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_t \\ Y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix} \varepsilon_t, \quad (1.3.8)$$

et l'équation d'observation est donnée par

$$y_t = \begin{pmatrix} H' & (-1)^{d+1} C_d^d & (-1)^d C_d^{d-1} & \cdots & C_d^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_t \\ Y_{t-1} \end{pmatrix}. \quad (1.3.9)$$

d'où la représentation espace d'états d'un modèle *ARIMA*

$$\begin{cases} x_t = \Phi x_{t-1} + \Omega \varepsilon_t, \\ y_t = \Lambda x_t, \end{cases}$$

où

$$\Phi = \begin{pmatrix} F & 0 \\ AH' & B \end{pmatrix}, \Omega = \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \Lambda = \begin{pmatrix} H' & (-1)^{d+1} C_d^d & (-1)^d C_d^{d-1} & \dots & C_d^1 \end{pmatrix}.$$

1.3.3 Modèles *ARMA* évolutifs sous forme espace d'états

Soit $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus du second ordre, solution de l'équation aux différences stochastiques suivante

$$y_t - \sum_{j=1}^p \phi_{t,j} y_{t-j} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_{t,j} \varepsilon_{t-j}, \quad (1.3.10)$$

où $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables non corrélées de variance σ_t^2 . L'équation (1.3.10) peut s'écrire comme suit

$$\Phi_t(B)y_t = \Theta_t(B)\varepsilon_t,$$

avec $\Theta_t(L) = -\sum_{j=0}^q \theta_{t,j} L^j$, $\Phi_t(L) = -\sum_{j=0}^p \phi_{t,j} L^j$.

Représentation $\max(p, q + 1)$

La représentation suivante a été proposée par Azrak et Mélard (1998). Soit x_t le vecteur de dimension $r = \max(p, q + 1)$, défini par l'équation matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} x_t(1) \\ x_t(2) \\ \vdots \\ x_t(r-1) \\ x_t(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{t,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \phi_{t+1,2} & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \phi_{t+r-2,r-1} & \vdots & & \ddots & 1 \\ \phi_{t+r-1,r} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1}(1) \\ x_{t-1}(2) \\ \vdots \\ x_{t-1}(r-1) \\ x_{t-1}(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta_{t+1,1} \\ \vdots \\ -\theta_{t+r-2,r-2} \\ -\theta_{t+r-1,r-1} \end{pmatrix} \varepsilon_t.$$

Si $y_t = (1, 0, \dots, 0) x_t$, alors nous avons

$$\begin{aligned} x_t(1) &= \phi_{t,1} y_{t-1} + \dots + \phi_{t,r} y_{t-r} + \varepsilon_t - \theta_{t,1} \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_{t,r} \varepsilon_{t-r} \\ &= \phi_{t,1} x_{t-1}(1) + x_{t-1}(2) + \varepsilon_t, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} x_{t-1}(2) &= \phi_{t,2} y_{t-2} + \dots + \phi_{t,r} y_{t-r} - \theta_{t,1} \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_{t,r} \varepsilon_{t-r} \\ &= \phi_{t,1} x_{t-2}(1) + x_{t-2}(3) - \theta_{t,1} \varepsilon_{t-1}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite, nous obtenons

$$x_t(i) = \sum_{j=i}^r \phi_{t+i-1,j} y_{t+i-j-1} - \theta_{t+i-1,j-1} \varepsilon_{t+i-j}, \quad i = 1, \dots, r-1$$

et

$$x_t(r) = \phi_{t+r-1,r}y_{t-1} - \theta_{t+r-1,r-1}\varepsilon_t$$

d'où la représentation suivante

$$\begin{cases} x_t = F_t x_{t-1} + G_t \varepsilon_t, \\ y_t = H' x_t, \end{cases} \quad (1.3.11)$$

où

$$F_t = \begin{pmatrix} \phi_{t,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_{t+1,2} & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \phi_{t+r-2,r-1} & \vdots & & \ddots & 1 \\ \phi_{t+r-1,r} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, G_t = \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta_{t+1,1} \\ \vdots \\ -\theta_{t+r-2,r-2} \\ -\theta_{t+r-1,r-1} \end{pmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Représentation $\max(p, q)$

La même représentation du cas stationnaire peut être adoptée. Soit $r = \max(p, q)$ alors le modèle (1.3.10) peut se mettre sous la forme espace d'états suivante

$$\begin{cases} x_t = F_t x_{t-1} + G_t \varepsilon_{t-1}, \\ y_t = H' x_t + \varepsilon_t, \end{cases} \quad (1.3.12)$$

où

$$F_t = \begin{pmatrix} \phi_{t,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_{t+1,2} & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \phi_{t+r-2,r-1} & 0 & 0 & & 1 \\ \phi_{t+r-1,r} & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, G_t = \begin{pmatrix} \phi_{t,1} - \theta_{t,1} \\ \phi_{t+1,2} - \theta_{t+1,2} \\ \vdots \\ \phi_{t+r-2,r-1} - \theta_{t+r-2,r-1} \\ \phi_{t+r-1,r} - \theta_{t+r-1,r} \end{pmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} x_t(1) &= \phi_{t,1}y_{t-1} + \cdots + \phi_{t,r}y_{t-r} - \theta_{t,1}\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_{t,r}\varepsilon_{t-r} \\ &= \phi_{t,1}x_{t-1}(1) + (\phi_{t,1} - \theta_{t,1})\varepsilon_{t-1} + x_{t-1}(2), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} x_{t-1}(2) &= \phi_{t,2}y_{t-2} + \cdots + \phi_{t,r}y_{t-r} - \theta_{t,1}\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_{t,r}\varepsilon_{t-r} \\ &= \phi_{t,2}x_{t-2}(1) + (\phi_{t,2} - \theta_{t,2})\varepsilon_{t-2} + x_{t-2}(3). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$x_t(i) = \sum_{j=i}^r \phi_{t+1,j}y_{t+1-j} - \sum_{j=i}^{r-1} \theta_{t+1,j}\varepsilon_{t+1-j}, \quad i = 1, \dots, r.$$

1.3.4 Modèles *ARMA* périodiques sous forme espace d'états

Considérons le modèle autorégressif moyen mobile S -périodique, $PARMA_S(p, q)$, qui est un cas particulier de (1.3.10) où la variance σ_t^2 et les coefficients $\phi_{t,j}$, $j = 1, \dots, p$; $\theta_{t,j}$, $j = 1, \dots, q$, sont des fonctions S -périodiques dans le temps. Posons $r = \max(p, q+1)$ et $\forall t \in \mathbb{Z}, t = s+nS$, $s \in \{1, \dots, S\}$ et $n \in \mathbb{Z}$. La représentation (1.3.10) peut se mettre sous la forme suivante

$$\begin{cases} x_{s+nS} = F_s x_{s+nS-1} + G_s \varepsilon_{s+nS}, \\ y_{s+nS} = H' x_{s+nS}, \end{cases} \quad (1.3.13)$$

où

$$F_s = \begin{pmatrix} \phi_{s,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_{s+1,2} & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \phi_{s+r-2,r-1} & \vdots & & \ddots & 1 \\ \phi_{s+r-1,r} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, G_s = \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta_{s+1,1} \\ \vdots \\ -\theta_{s+r-2,r-2} \\ -\theta_{s+r-1,r-1} \end{pmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Une autre représentation $\max(p, q)$ est également possible. Elle est donnée par

$$\begin{cases} x_{s+nS} = F_s x_{s+nS-1} + G_s \varepsilon_{s+nS-1}, \\ y_{s+nS} = H' x_{s+nS} + \varepsilon_{s+nS}. \end{cases} \quad (1.3.14)$$

où

$$F_s = \begin{pmatrix} \phi_{s,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_{s,2} & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \phi_{s,r-1} & \vdots & & \ddots & 1 \\ \phi_{s,r} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, G_s = \begin{pmatrix} \phi_{s,1} - \theta_{s,1} \\ \phi_{s,2} - \theta_{s,2} \\ \vdots \\ \phi_{s,r-1} - \theta_{s,r-1} \\ \phi_{s,r} - \theta_{s,r} \end{pmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.4 Filtre de Kalman pour les modèles espace d'états linéaires à coefficients périodiques

Une fois que le modèle a été mis sous une forme espace d'états, la voie est ouverte pour l'application d'un nombre important d'algorithmes. Au centre de ces derniers est l'algorithme appelé filtre de Kalman (Kalman, 1960 et 1963). Ce dernier est une procédure récursive pour

calculer l'estimateur optimal du vecteur d'état à l'instant t , en se basant sur l'information disponible à l'instant t . Cette information comprend les observations jusqu'à t et y compris le y_t .

Considérons le modèle espace d'états linéaire à coefficients périodiques suivant

$$\begin{cases} x_{t+1} = F_t x_t + \varepsilon_{t+1} \\ y_t = H_t x_t + A_t u_t + e_t \end{cases} \quad (1.4.1)$$

où $\{x_t\}$, $\{y_t\}$, $\{e_t\}$ et $\{\varepsilon_t\}$ sont des processus aléatoires de dimensions $r \times 1$, $m \times 1$, $r \times 1$, et $m \times 1$ respectivement, tels que

$$\begin{cases} E(e_t) = E(\varepsilon_t) = 0, \\ E(\varepsilon_t \varepsilon'_{t+h}) = \delta_{h,0} Q_t, \\ E(e_t e'_{t+h}) = \delta_{h,0} R_t, \\ E(e_t x'_{t-k}) = 0, \end{cases} \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}, \forall k \geq 0,$$

où δ désigne la fonction de Kronecker et les matrices F_t , H_t , Q_t et R_t sont périodiques de période S .

En supposant que les matrices F_t , H_t , Q_t et R_t sont connues, la prévision optimale de x_t , sur la base de l'information disponible jusqu'à l'instant $t-1$, est dérivée d'un résultat bien connu pour des variables normales (voir, par exemple, Hamilton (1994, p. 92)). Pour appliquer ce résultat, supposons que

- H1 Le bruit $\{\varepsilon_t\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de variance covariance Q_t .
- H2 Le bruit d'observation $\{e_t\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de variance covariance R_t .
- H3 Le vecteur initial d'état, x_0 est gaussien de moyenne μ_0 et de matrice de variance covariance P_0 .
- H4 Les bruits $\{e_t\}$ et $\{\varepsilon_t\}$, et l'état initial x_0 sont mutuellement indépendants.

Supposons également, que l'information disponible à l'instant $t-1$ peut être récapitulée par le vecteur $\mathcal{F}_{t-1} = (y'_{t-1}, y'_{t-2}, \dots, u'_{t-1}, u'_{t-2}, \dots)'$. Comme première étape (étape de prédiction), notre objectif est d'estimer le vecteur d'état x_t à partir de l'information disponible à l'instant $t-1$, de façon optimale et récursive. Si nous adoptons le critère de l'erreur moyenne quadratique, il s'agit de calculer la loi conditionnelle du vecteur d'état x_t sachant $\mathcal{F}_{t-1}$. D'après les hypothèses H1-H3, il suffit de calculer la moyenne, $\hat{x}_{t/t-1}$, et la matrice de variance covariance, $P_{t/t-1}$, de cette loi conditionnelle.

Supposons maintenant que la loi conditionnelle du vecteur d'état x_t sachant $\mathcal{F}_{t-1}$ est connue. Pour calculer la loi conditionnelle du vecteur d'état x_t sachant $\mathcal{F}_t$, nous procédons à la dèxième étape (étape du filtrage). Nous utilisons la nouvelle observation $(y'_t, u'_t)'$. Plus précisément, nous tenons en compte la nouvelle information par rapport au $\mathcal{F}_{t-1}$ apportée par $(y'_t, u'_t)'$, i.e.,

$$\hat{e}_t = y_t - E(y_t/u_t, \mathcal{F}_{t-1}) = y_t - H_t \hat{x}_{t/t-1} + A_t u_t = H_t (x_t - \hat{x}_{t/t-1}) + e_t. \quad (1.4.2)$$

Il est clair que le processus $\{\hat{e}_t\}$ est un processus gaussien, appelé processus d'innovation, de moyenne nulle et de matrice de variance covariance

$$E \left[(y_t - E(y_t/u_t, \mathcal{F}_{t-1})) (y_t - E(y_t/u_t, \mathcal{F}_{t-1}))' / u_t, \mathcal{F}_{t-1} \right] = H_t P_{t/t-1} H_t' + R_t. \quad (1.4.3)$$

Dans cette dernière égalité, nous utilisons le fait que $(x_t - \hat{x}_{t/t-1})$ est indépendant de e_t , donc

$$E \left[(x_t - \hat{x}_{t/t-1}) e_t' / u_t, \mathcal{F}_{t-1} \right] = E \left[(x_t - \hat{x}_{t/t-1})' e_t / u_t, \mathcal{F}_{t-1} \right] = 0.$$

Dérivation du filtre de Kalman

Nous supposons que la matrice de variance covariance R_t est inversible. Alors $\hat{x}_{t/t-1}$, $P_{t/t-1}$, $\hat{x}_{t/t}$ et $P_{t/t}$ sont définis par les équations suivantes

$$\hat{x}_{t/t-1} = F_{t-1} \hat{x}_{t-1/t-1}, \quad (1.4.4)$$

$$P_{t/t-1} = F_{t-1} P_{t-1/t-1} F_{t-1}' + Q_t, \quad (1.4.5)$$

et

$$\hat{x}_{t/t} = \hat{x}_{t/t-1} + P_{t/t-1} H_t' \left(H_t P_{t/t-1} H_t' + R_t \right)^{-1} (y_t - H_t \hat{x}_{t/t-1} - A_t u_t), \quad (1.4.6)$$

$$P_{t/t} = P_{t/t-1} - P_{t/t-1} H_t' \left[H_t P_{t/t-1} H_t' + R_t \right]^{-1} H_t P_{t/t-1}. \quad (1.4.7)$$

Justification

Sous les hypothèses H1-H4, le vecteur $(x'_0, y'_0)'$ est gaussien, de moyenne et de matrice de variance covariance données respectivement par

$$\begin{pmatrix} \mu_0 \\ H_S \mu_0 + A_S u_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_0 & P_0 H_S' \\ H_S P_0 & H_S P_0 H_S' + R_S \end{pmatrix}.$$

Alors, la loi de x_0 sachant y_0 est gaussienne, de moyenne

$$\hat{x}_{0/0} = \mu_0 + P_0 H_S' \left(H_S P_0 H_S' + R_S \right)^{-1} (y_0 - H_S \mu_0 - A_S u_0),$$

et de matrice de variance covariance

$$P_{0/0} = P_0 - P_0 H_S' \left(H_S P_0 H_S' + R_S \right)^{-1} H_S P_0.$$

Supposons maintenant que nous sommes à l'instant t et nous connaissons les valeurs de $\hat{x}_{t-1/t-1}$ et $P_{t-1/t-1}$ qui caractérisent la distribution conditionnelle de x_{t-1} sachant le passé $\mathcal{F}_{t-1}$.

Le vecteur $(x_t', y_1', \dots, y_{t-1}')'$ est gaussien, donc la loi de x_t sachant $\mathcal{F}_{t-1}$ est gaussienne, de moyenne $\hat{x}_{t/t-1}$ et de matrice de variance covariance $P_{t/t-1}$. De l'équation d'état de la représentation (1.4.1), nous avons

$$\hat{x}_{t/t-1} = E(x_t / u_t, \mathcal{F}_{t-1}) = E(F_{t-1} x_{t-1} + \varepsilon_t / u_t, \mathcal{F}_{t-1}) = F_{t-1} \hat{x}_{t-1/t-1},$$

donc

$$x_t - \hat{x}_{t/t-1} = F_{t-1} (x_{t-1} - \hat{x}_{t-1/t-1}) + \varepsilon_t,$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} P_{t/t-1} &= E \left[(x_t - \hat{x}_{t/t-1}) (x_t - \hat{x}_{t/t-1})' / u_t, \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= F_{t-1} P_{t-1/t-1} F_{t-1}' + Q_t. \end{aligned}$$

Finalement, il est clair que le vecteur $(x_t', y_1', \dots, y_t')'$ est gaussien, ainsi la loi de x_t sachant $\mathcal{F}_t$ est gaussienne, de moyenne $\hat{x}_{t/t}$ et de matrice de variance covariance $P_{t/t}$. D'après la relation (1.4.2), nous avons

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t/t} &= E[x_t / \mathcal{F}_t] = \hat{x}_{t/t-1} + E[(x_t - \hat{x}_{t/t-1}) / \mathcal{F}_t] \\ &= \hat{x}_{t/t-1} + E[(x_t - \hat{x}_{t/t-1}) / u_t, \mathcal{F}_{t-1}, \hat{e}_t] \\ &= \hat{x}_{t/t-1} + E[(x_t - \hat{x}_{t/t-1}) / \hat{e}_t], \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} x_t - \hat{x}_{t/t} &= (x_t - \hat{x}_{t/t-1}) - (x_{t/t} - \hat{x}_{t/t-1}) \\ &= (x_t - \hat{x}_{t/t-1}) - E[(x_t - \hat{x}_{t/t-1}) / \hat{e}_t], \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} P_{t/t} &= E \left[(x_t - \hat{x}_{t/t}) (x_t - \hat{x}_{t/t})' \right] \\ &= E \left[\begin{pmatrix} (x_t - \hat{x}_{t/t-1}) - E[(x_t - \hat{x}_{t/t-1}) / \hat{e}_t] \\ \times ((x_t - \hat{x}_{t/t-1}) - E[(x_t - \hat{x}_{t/t-1}) / \hat{e}_t])' \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer la moyenne conditionnelle et la matrice de variance covariance conditionnelle du vecteur $(x_t - \hat{x}_{t/t-1})$ sachant $\hat{e}_t$. A cette fin, nous savons que le vecteur $\left((x_t - \hat{x}_{t/t-1})', \hat{e}_t' \right)'$ est un vecteur gaussien, de moyenne nulle et de matrice de variance covariance

$$\begin{pmatrix} P_{t/t-1} & P_{t/t-1}H_t' \\ H_tP_{t/t-1} & H_tP_{t/t-1}H_t' + R_t \end{pmatrix}$$

L'hypothèse que R_t est inversible entraîne que $H_tP_{t/t-1}H_t' + R_t$ est inversible. Alors, nous avons immédiatement

$$\hat{x}_{t/t} = \hat{x}_{t/t-1} + P_{t/t-1}H_t' \left[H_tP_{t/t-1}H_t' + R_t \right]^{-1} \hat{e}_t,$$

et

$$P_{t/t} = P_{t/t-1} - P_{t/t-1}H_t' \left[H_tP_{t/t-1}H_t' + R_t \right]^{-1} H_tP_{t/t-1},$$

ce qui termine la justification.

Nous avons imposé la normalité de e_t , ε_t et de l'état initial x_0 , notons cependant que cette hypothèse peut être levée et remplacée par l'existence des moments du second ordre, à condition de remplacer la notion d'espérance conditionnelle par la notion de régression affine.

L'algorithme suivant récapitule la procédure récursive pour calculer l'estimateur optimal du vecteur d'état à l'instant t , en se basant sur l'information disponible à l'instant $t - 1$.

Algorithme de Kalman (1960)

A partir des équations (1.4.4)-(1.4.7), le filtre de Kalman, pour le modèle espace d'états à coefficients périodiques (1.4.1), peut être donné par les équations suivantes

$$\begin{aligned} \Omega_t &= H_tP_{t/t-1}H_t' + R_t \\ K_t &= F_tP_{t/t-1}H_t'\Omega_t^{-1}, \\ \hat{x}_{t+1/t} &= (F_t - K_tH_t)\hat{x}_{t/t-1} + K_t y_t - K_t A_t u_t, \\ P_{t+1/t} &= F_tP_{t/t-1}F_t' - K_t\Omega_t^{-1}K_t' + Q_t, \end{aligned}$$

où la matrice K_t est appelée gain de Kalman.

1.5 Extension du filtre de Chandrasekhar au cas des modèles espace d'états périodiques

Pour des modèles espace d'états à temps discret et à coefficients constants, Morf et *al.* (1974) ont proposé des équations récurrentes (pour l'estimation linéaire des moindres carrés) substituant le filtre de Kalman avec une plus simple complexité numérique. Les nouveaux algorithmes ainsi introduits ont été nommés *filtre de Chandrasekhar* en raison de leur analogie avec des équations différentielles rencontrées dans les modèles à temps continu. Depuis, une grande attention a été prêtée au filtre de Chandrasekhar pour ses applications importantes dans l'amélioration de la complexité numérique relative à la construction des modèles linéaires à coefficients constants. Parmi ces applications, nous mentionnons non exhaustivement l'évaluation de la fonction de vraisemblance (Mélard (1984) pour les modèles *ARMA*), le calcul de la matrice d'information de Fisher (Mélard et Klein, 1994) et le développement des variantes rapides pour l'algorithme des moindres carrés récursif (Sayed et Kailath, 1994 ; Sayed et al., 1994 ; Nakamori et *al.*, 2004). Cependant, le filtre de Chandrasekhar classique se restreint exclusivement au cas de modèles à coefficients constants en vertu de la structure d'invariance des coefficients et il semble qu'il n'y ait pas de travaux pour le développement d'extensions pour des modèles à coefficients évolutifs dans le temps à l'exception de certains cas très spéciaux (Sayed et Kailath, 1994). Une classe particulière de modèles linéaires à coefficients variables dont l'importance pour la représentation des phénomènes périodiques n'est plus à démontrer est la classe des modèles espace d'états périodiques. Malgré le grand progrès qui a été fait pour la construction et l'analyse de tels modèles (voir e.g. Lund et Basawa, 2000 ; Varga et Van Dooren, 2001 ; Gautier, 2005 et les références intra), il semble qu'il n'y ait pas de résultats concernant l'extension des équations de Chandrasekhar. Nous proposons dans cette section quelques algorithmes pour l'estimation linéaire des moindres carrés des modèles espace d'états périodiques. Nos méthodes généralisent les équations de Chandrasekhar proposées par Morf et *al.* (1974) au cas périodique et retiennent leurs caractéristiques souhaitables.

1.5.1 Définitions et notations préliminaires

Considérons un modèle espace d'états périodique de la forme suivante

$$\begin{cases} x_{t+1} = F_t x_t + G_t \epsilon_t \\ y_t = H_t' x_t + e_t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}, \quad (1.5.1)$$

où $\{x_t\}$, $\{y_t\}$, $\{e_t\}$ et $\{\epsilon_t\}$ sont des processus aléatoires de dimensions $r \times 1$, $m \times 1$, $m \times 1$, et $d \times 1$ respectivement, tels que $E(\epsilon_t) = E(e_t) = 0$, $E(\epsilon_t \epsilon_{t+h}') = \delta_{h,0} Q_t$, $E(e_t e_{t+h}') = \delta_{h,0} R_t$, $E(\epsilon_t x_{t-k}') = 0$, $E(e_t y_{t-l}') = 0$ et $E(x_t x_t') = W_t, \forall t, h \in \mathbb{Z}, \forall k \geq 0, \forall l > 0$, (δ désigne la fonction de Kronecker). Les matrices F_t , G_t , H_t' , Q_t , R_t , et W_t sont périodiques en t de période S . Pour simplifier l'exposé, nous supposons sans perte de généralités que $E(e_t \epsilon_l') = 0, \forall t, l \in \mathbb{Z}$. Soit $\hat{x}_{t/t-1}$ et $\hat{y}_{t/t-1}$ les meilleures prévisions linéaires (au sens des moindres carrés) de x_t et y_t , respectivement, basées sur $y_1, y_2, \dots, y_{t-1}$. Il est bien connu que $\hat{x}_t$ et $\hat{y}_t$ peuvent être obtenues à partir du filtre de Kalman (1960), donné par

$$\Omega_t = H_t' P_{t/t-1} H_t + R_t, \quad (1.5.2a)$$

$$K_t = F_t P_{t/t-1} H_t, \quad (1.5.2b)$$

$$\hat{y}_{t/t-1} = H_t' \hat{x}_{t/t-1}, \quad (1.5.2c)$$

$$\hat{x}_{t+1/t} = (F_t - K_t H_t') \hat{x}_{t/t-1} + K_t y_t, \quad (1.5.2d)$$

$$P_{t+1/t} = F_t P_{t/t-1} F_t' - K_t \Omega_t^{-1} K_t' + G_t Q_t G_t'. \quad (1.5.2e)$$

avec valeurs de démarrage

$$\hat{x}_{1/0} = E(x_1) = 0, \quad (1.5.2f)$$

$$P_{1/0} = E(x_1 x_1') = W_1. \quad (1.5.2g)$$

où $\hat{e}_t = y_t - \hat{y}_{t/t-1}$ est le résidu correspondant à y_t de matrice de covariance Ω_t , $P_{t/t-1} = E(x_t - \hat{x}_{t/t-1})(x_t - \hat{x}_{t/t-1})'$ est la matrice de covariance de l'erreur de prédiction $x_t - \hat{x}_{t/t-1}$ et $K_t = E(x_{t+1} \hat{e}_t')$ est le gain de Kalman. La notation $A \geq 0$ (resp. $A > 0$) signifie que A est semi-définie positive (resp. définie positive).

L'équation (1.5.2e) basée sur la relation de démarrage (1.5.2g) sera dite équation aux différences de Riccati périodique (*periodic Riccati difference equation, PRDE*) puisque dans la limite, elle se réduit à une équation algébrique de Riccati périodique (Bittanti et al., 1988). La résolution de (1.5.2e) requiert $O(r^3)$ opérations par itération (voir Morf et al., 1974), ce qui est parfois très coûteux ; de plus, la solution $P_{t/t-1}$, dite variable de Riccati, doit être semi-définie positive, propriété qui n'est pas facile à préserver dans une résolution numérique de

(1.5.2e). La section suivante propose des équations récurrentes que nous appellerons filtre de Chandrasekhar périodique, permettant de remédier aux inconvénients du filtre de Kalman.

1.5.2 Algorithmes de type Chandrasekhar périodique

Posons $\Delta_S P_t = P_{t+S/t+S-1} - P_{t/t-1}$ la différence d'ordre S de la variable de Riccati pour $P_{1/0}, P_{2/1}, \dots, P_{S/S-1} \geq 0$ données. La formulation de nos équations récurrentes est similaire à celle des équations de Chandrasekhar classiques et se base sur le résultat de factorisation suivant.

Proposition 1 (Aknouche et Hamdi, 2007)

La matrice $\Delta_S P_t$ vérifie les deux équations aux différences suivantes

$$\Delta_S P_{t+1} = (F_t - K_{t+S} \Omega_{t+S}^{-1} H_t') [\Delta_S P_t + \Delta_S P_t H_t \Omega_t^{-1} H_t' \Delta_S P_t] (F_t - K_{t+S} \Omega_{t+S}^{-1} H_t')' \quad (1.5.3)$$

$$\Delta_S P_{t+1} = (F_t - K_t \Omega_t^{-1} H_t') [\Delta_S P_t - \Delta_S P_t H_t \Omega_{t+S}^{-1} H_t' \Delta_S P_t] (F_t - K_t \Omega_t^{-1} H_t')'. \quad (1.5.4)$$

Preuve.

i) D'après (1.5.2a), nous avons

$$\Omega_{t+S} = H_t' \Delta_S P_t H_t + H_t' P_t H_t + R_t = H_t' \Delta_S P_t H_t + \Omega_t,$$

cette dernière équation peut se réécrire comme suit

$$\Omega_{t+S} = \Omega_t + \Delta_S \Omega_t, \quad \text{où } \Delta_S \Omega_t \stackrel{\text{def}}{=} H_t' \Delta_S P_t H_t. \quad (1.5.5)$$

D'autre part, à partir de (1.5.2e), nous avons

$$\begin{aligned} P_{t+1+S/t+S} &= F_t P_{t+S/t+S-1} F_t' - \tilde{K}_{t+S} \Omega_{t+S} \tilde{K}_{t+S}' + G_t Q_t G_t', \\ P_{t+1/t} &= F_t P_{t/t-1} F_t' - \tilde{K}_t \Omega_t \tilde{K}_t' + G_t Q_t G_t', \end{aligned}$$

où $\tilde{K}_t = K_t \Omega_t^{-1}$ et par conséquent

$$\Delta_S P_{t+1} = F_t \Delta_S P_t F_t' - \tilde{K}_{t+S} \Omega_{t+S} \tilde{K}_{t+S}' + \tilde{K}_t \Omega_t \tilde{K}_t'. \quad (1.5.6)$$

Par ailleurs, le gain de Kalman $\tilde{K}_t$ peut être écrit sous la forme réursive retardée

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_t &= (F_t P_{t+S/t+S-1} H_t - F_t \Delta_S P_t H_t) \Omega_t^{-1} \\
&= (\tilde{K}_{t+S} \Omega_{t+S} - F_t \Delta_S P_t H_t) \Omega_t^{-1} \\
&= [\tilde{K}_{t+S} (H_t' P_{t+S/t+S-1} H_t + R_t) - F_t \Delta_S P_t H_t] \Omega_t^{-1} \\
&= [\tilde{K}_{t+S} (H_t' \Delta_S P_t H_t + H_t' P_{t/t-1} H_t + R_t) - F_t \Delta_S P_t H_t] \Omega_t^{-1} \\
&= [\tilde{K}_{t+S} \Omega_t + \tilde{K}_{t+S} H_t' \Delta_S P_t H_t - F_t \Delta_S P_t H_t] \Omega_t^{-1} \\
&= \tilde{K}_{t+S} - (F_t - \tilde{K}_{t+S} H_t') \Delta_S P_t H_t \Omega_t^{-1}.
\end{aligned}$$

de ce fait, on peut voir que

$$\tilde{K}_t = \tilde{K}_{t+S} - \Delta_S \tilde{K}_t, \quad \text{où } \Delta_S \tilde{K}_t \stackrel{\text{def}}{=} (F_t - \tilde{K}_{t+S} H_t') \Delta_S P_t H_t \Omega_t^{-1}. \quad (1.5.7)$$

En remplaçant la valeur de $\tilde{K}_t$ dans le dernier terme du membre droit de (1.5.6) et tout en utilisant (1.5.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Delta_S P_{t+1} &= F_t \Delta_S P_t F_t' - \tilde{K}_{t+S} \Omega_{t+S} \tilde{K}_{t+S}' + \tilde{K}_t \Omega_t \tilde{K}_t' \\
&= F_t \Delta_S P_t F_t' - \tilde{K}_{t+S} (\Omega_t + H_t' \Delta_S P_t H_t) \tilde{K}_{t+S}' \\
&\quad + (\tilde{K}_{t+S} - \Delta_S \tilde{K}_t) \Omega_t (\tilde{K}_{t+S} - \Delta_S \tilde{K}_t)' \\
&= F_t \Delta_S P_t F_t' - \tilde{K}_{t+S} H_t' \Delta_S P_t H_t \tilde{K}_{t+S}' - \tilde{K}_{t+S} H_t' \Delta_S P_t (F_t - \tilde{K}_{t+S} H_t')' \\
&\quad - (F_t - \tilde{K}_{t+S} H_t') \Delta_S P_t H_t \tilde{K}_{t+S}' \\
&\quad + (F_t - \tilde{K}_{t+S} H_t') \Delta_S P_t H_t \Omega_t^{-1} H_t' \Delta_S P_t (F_t - \tilde{K}_{t+S} H_t')' \\
&= (F_t - \tilde{K}_{t+S} H_t') \Delta_S P_t F_t' - (F_t - \tilde{K}_{t+S} H_t') \Delta_S P_t H_t \tilde{K}_{t+S}' \\
&\quad + (F_t - \tilde{K}_{t+S} H_t') \Delta_S P_t H_t \Omega_t^{-1} H_t' \Delta_S P_t (F_t - \tilde{K}_{t+S} H_t')'
\end{aligned}$$

d'où

$$\Delta_S P_{t+1} = (F_t - \tilde{K}_{t+S} H_t') \left[\Delta_S P_t + \Delta_S P_t H_t \Omega_t^{-1} H_t' \Delta_S P_t \right] (F_t - \tilde{K}_{t+S} H_t')'.$$

ii) Un argument similaire peut être utilisé pour déduire (1.5.4). Il suffit d'exprimer $\tilde{K}_{t+S}$ en fonction $\tilde{K}_t$ sous une forme récursive avancée

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{t+S} &= (F_t P_{t/t-1} H_t + F_t \Delta_S P_t H_t) \Omega_{t+S}^{-1} = (\tilde{K}_t \Omega_t + F_t \Delta_S P_t H_t) \Omega_{t+S}^{-1} \\
&= \left[\tilde{K}_t (H'_t P_{t/t-1} H_t + R_t) + F_t \Delta_S P_t H_t \right] \Omega_{t+S}^{-1} \\
&= \left[\tilde{K}_t (H'_t P_{t+S/t+S-1} H_t - H'_t \Delta_S P_t H_t + R_t) + F_t \Delta_S P_t H_t \right] \Omega_{t+S}^{-1} \\
&= \left[\tilde{K}_t \Omega_{t+S} - \tilde{K}_t H'_t \Delta_S P_t H_t + F_t \Delta_S P_t H_t \right] \Omega_{t+S}^{-1} \\
&= \tilde{K}_t + (F_t - \tilde{K}_t H'_t) \Delta_S P_t H_t \Omega_{t+S}^{-1},
\end{aligned}$$

il s'en suit que

$$\tilde{K}_{t+S} = \tilde{K}_t + \Delta_S \tilde{K}_t, \quad \text{où } \Delta_S \tilde{K}_t = (F_t - \tilde{K}_t H'_t) \Delta_S P_t H_t \Omega_{t+S}^{-1}, \quad (1.5.8)$$

et en remplaçant cette dernière expression dans le 2^{eme} terme du membre droit de (1.5.6), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Delta_S P_{t+1} &= F_t \Delta_S P_t F'_t - \tilde{K}_{t+S} \Omega_{t+S} \tilde{K}'_{t+S} + \tilde{K}_t \Omega_t \tilde{K}'_t \\
&= F_t \Delta_S P_t F'_t - (\tilde{K}_t + \Delta_S \tilde{K}_t) \Omega_{t+S} (\tilde{K}_t + \Delta_S \tilde{K}_t)' \\
&\quad + \tilde{K}_t (\Omega_{t+S} - H'_t \Delta_S P_t H_t) \tilde{K}'_t \\
&= F_t \Delta_S P_t F'_t - \tilde{K}_t \Omega_{t+S} \Delta_S \tilde{K}'_t - \Delta_S \tilde{K}_t \Omega_{t+S} \tilde{K}'_t - \Delta_S \tilde{K}_t \Omega_{t+S} \Delta_S \tilde{K}'_t - \tilde{K}_t H'_t \Delta_S P_t H_t \tilde{K}'_t.
\end{aligned}$$

De la relation (1.5.8), nous pouvons écrire $\Delta_S P_{t+1}$ comme suit

$$\begin{aligned}
\Delta_S P_{t+1} &= F_t \Delta_S P_t F'_t - \tilde{K}_t \left((F_t - \tilde{K}_t H'_t) \Delta_S P_t H_t \right)' - (F_t - \tilde{K}_t H'_t) \Delta_S P_t H_t \tilde{K}'_t \\
&\quad - \left((F_t - \tilde{K}_t H'_t) \Delta_S P_t H_t \right) \Omega_{t+S}^{-1} \left((F_t - \tilde{K}_t H'_t) \Delta_S P_t H_t \right)' \\
&\quad - \tilde{K}_t H'_t \Delta_S P_t H_t \tilde{K}'_t \\
&= F_t \Delta_S P_t F'_t - \tilde{K}_t H'_t \Delta_S P_t (F_t - \tilde{K}_t H'_t)' - (F_t - \tilde{K}_t H'_t) \Delta_S P_t H_t \tilde{K}'_t \\
&\quad - (F_t - \tilde{K}_t H'_t) \Delta_S P_t H_t \Omega_{t+S}^{-1} H'_t \Delta_S P_t (F_t - \tilde{K}_t H'_t)' - \tilde{K}_t H'_t \Delta_S P_t H_t \tilde{K}'_t \\
&= F_t \Delta_S P_t F'_t - \tilde{K}_t H'_t \Delta_S P_t F'_t + \tilde{K}_t H'_t \Delta_S P_t (\tilde{K}_t H'_t)' - F_t \Delta_S P_t H_t \tilde{K}'_t \\
&\quad - (F_t - \tilde{K}_t H'_t) \Delta_S P_t H_t \Omega_{t+S}^{-1} H'_t \Delta_S P_t (F_t - \tilde{K}_t H'_t)' \\
&= (F_t - \tilde{K}_t H'_t) \Delta_S P_t F'_t - (F_t - \tilde{K}_t H'_t) \Delta_S P_t (\tilde{K}_t H'_t)' \\
&\quad - (F_t - \tilde{K}_t H'_t) \Delta_S P_t H_t \Omega_{t+S}^{-1} H'_t \Delta_S P_t (F_t - \tilde{K}_t H'_t)' \\
&= (F_t - \tilde{K}_t H'_t) \Delta_S P_t (F_t - \tilde{K}_t H'_t)' \\
&\quad - (F_t - \tilde{K}_t H'_t) \Delta_S P_t H_t \Omega_{t+S}^{-1} H'_t \Delta_S P_t (F_t - \tilde{K}_t H'_t)'
\end{aligned}$$

d'où

$$\Delta_S P_{t+1} = \left(F_t - \tilde{K}_t H_t' \right) \left[\Delta_S P_t - \Delta_S P_t H_t \Omega_{t+S}^{-1} H_t' \Delta_S P_t \right] \left(F_t - \tilde{K}_t H_t' \right)'.$$

□

La *Proposition 1* montre que $\Delta_S P_t$ peut être factorisée comme suit

$$\Delta_S P_t = Y_t M_t Y_t', \quad (1.5.9)$$

où M_t est une matrice carrée symétrique non nécessairement semi-définie positive de dimension $\text{rang}(\Delta_S P_1)$, qui est au plus égal à r , puisque de (1.5.3) nous avons

$$\text{rang}(\Delta_S P_{t+1}) \leq \text{rang}(\Delta_S P_t) \leq \dots \leq \text{rang}(\Delta_S P_1) \leq r.$$

Notons que ce résultat n'est pas surprenant du fait que l'on peut toujours écrire un modèle périodique du type (1.5.1) sous la forme d'un modèle espace d'état à coefficients constants auquel on peut appliquer la factorisation de Chandrasekhar classique (Morf et *al.*, 1974). Toutefois, compte tenu de la grande complexité de calcul requise, le développement d'une théorie propre aux modèles périodiques est souhaitable. Ainsi, grâce à la proposition de factorisation de Chandrasekhar précédent, les matrices Y_t et M_t données par (1.5.9) peuvent être obtenues récursivement. L'algorithme suivant montre que l'équation aux différences de Riccati périodique (1.5.2e) peut être remplacée par un système d'équations sur Ω_t , K_t , Y_t et M_t avec une réduction dans l'effort de calcul, spécialement lorsque la dimension du vecteur d'état r est très grande devant m , la dimension de y_t .

Algorithme 2 (Aknouche et Hamdi, 2007)

Le filtre de Kalman (1.5.2) peut être remplacé par (1.5.2c), (1.5.2d) et les équations suivantes

$$\Omega_{t+S} = \Omega_t + H_t' Y_t M_t Y_t' H_t, \quad (1.5.10a)$$

$$K_{t+S} = (K_t + F_t Y_t M_t Y_t' H_t), \quad (1.5.10b)$$

$$Y_{t+1} = (F_t - K_{t+S} \Omega_{t+S}^{-1} H_t') Y_t, \quad (1.5.10c)$$

$$M_{t+1} = M_t + M_t Y_t' H_t \Omega_t^{-1} H_t' Y_t M_t, \quad (1.5.10d)$$

avec valeurs de démarrage

$$\Omega_s = H_s' P_s H_s, \quad s = 1, \dots, S, \quad (1.5.10e)$$

$$K_s = F_s P_s H_s, \quad s = 1, \dots, S, \quad (1.5.10f)$$

où $P_{s/s-1}$, $1 \leq s \leq S$ est calculée à partir de (1.5.2e) et (1.5.2g), tandis que Y_1 et M_1 s'obtiennent en factorisant

$$\Delta_S P_1 = P_{S+1/S} - P_{1/0} = F_S P_{S/S-1} F'_S - K_S \Omega_S^{-1} K'_S + G_S Q_S G'_S - P_{1/0}, \quad (1.5.10g)$$

comme $Y_1 M_1 Y'_1$.

Preuve. La relation (1.5.10a) n'est rien d'autre que (1.5.5) lorsqu'on utilise (1.5.9), tandis que (1.5.10b) s'en suit à partir de (1.5.9) et de la relation

$$K_{t+S} = (F_t P_{t/t-1} H_t + F_t \Delta_S P_t H_t).$$

D'autre part, à partir de (1.5.3) que nous réécrivons en utilisant (1.5.9) comme suit

$$\begin{aligned} \Delta_S P_{t+1} &= (F_t - \tilde{K}_{t+S} H'_t) \left[\Delta_S P_t + \Delta_S P_t H_t \Omega_t^{-1} H'_t \Delta_S P_t \right] (F_t - \tilde{K}_{t+S} H'_t)' \\ &= (F_t - \tilde{K}_{t+S} H'_t) \left[Y_t M_t Y'_t + Y_t M_t Y'_t H_t \Omega_t^{-1} H'_t Y_t M_t Y'_t \right] (F_t - \tilde{K}_{t+S} H'_t)' \\ &= (F_t - K_{t+S} \Omega_{t+S}^{-1} H'_t) Y_t (M_t + M_t Y'_t H_t \Omega_t^{-1} H'_t Y_t M_t) Y'_t (F_t - K_{t+S} \Omega_{t+S}^{-1} H'_t)' \\ &= Y_{t+1} M_{t+1} Y'_{t+1}. \end{aligned}$$

Par identification, nous trouvons (1.5.10c) et (1.5.10d). $\square$

Notons que la *PRDE* (1.5.2e) doit être utilisée seulement pour $1 \leq s \leq S$ pour démarrer (1.5.10). Pour $t > S$ le calcul récursif de $P_{t/t-1}$ n'est pas pris en compte par l'algorithme mais peut être déduit à travers l'équation

$$P_{kS+s/kS+s-1} = P_{s/s-1} + \sum_{j=0}^{k-1} Y_{jS+s} M_{jS+s} Y'_{jS+s}, \quad 1 \leq s \leq S.$$

Similairement au cas des modèles à coefficients constants (Morf et *al.*, 1974), d'autres formes de l'*Algorithme 2* peuvent être obtenues à partir de la *Proposition 1*. La variante suivante est particulièrement bien adaptée lorsque $M_1 < 0$, auquel cas, $M_t \leq 0$ pour tout $t \geq 2$. Ce dernier cas se présente entre autres lorsque le modèle (1.5.1) est causal.

Algorithme 3 (Aknouche et Hamdi, 2007)

Le système d'équations récurrentes suivant, dans lequel les équations (1.5.10a), (1.5.10b) et (1.5.10e)-(1.5.10g) restent inchangées tandis que (1.5.10c) et (1.5.10d) sont remplacées par

$$Y_{t+1} = (F_t - K_t \Omega_t^{-1} H'_t) Y_t, \quad (1.5.11a)$$

$$M_{t+1} = M_t - M_t Y'_t H_t \Omega_{t+S}^{-1} H'_t Y_t M_t, \quad (1.5.11b)$$

fournit le même résultat que l'*Algorithme 2*.

Preuve. La formulation est similaire à celle de l'*Algorithme 2*, mais elle est basée sur la factorisation (1.5.4) plutôt que (1.5.3). $\square$

Il est encore possible d'en déduire d'autres variantes de l'*Algorithme 2* comme pour le cas standard. L'équation aux différences de Riccati périodique (1.5.10d) peut être linéarisée en utilisant le lemme d'inversion matricielle (Morf et *al.*, 1974) à travers lequel nous obtenons des récurrences sur M_t^{-1} plutôt que sur M_t , comme suit

$$M_{t+1}^{-1} = M_t^{-1} - Y_t' H_t \Omega_{t+S}^{-1} H_t' Y_t.$$

Le filtre de Chandrasekhar périodique sera préféré au filtre de Kalman (1.5.2) pourvu que les dimensions de Y_t et/ou de M_t sont significativement plus petites que r . Ces dimensions sont conditionnées sur le bon choix de la factorisation non unique $\Delta_S P_1 = Y_1 M_1 Y_1'$ dans l'étape d'initialisation que nous abordons dans la section suivante.

1.5.3 Problème d'initialisation

Supposons que le processus $\{x_t\}$ donné par (1.5.1) est causal, c'est à dire que la matrice monodromique $\prod_{i=0}^S F_{S-i}$ a ses valeurs propres inférieures à 1 en module. Considérons les deux cas suivants.

i) Cas où $Sm < r$: Itérons (1.5.10g) S fois et utilisons le fait que sous la condition de stationnarité périodique, $P_{1/0}$ vérifie l'équation de Lyapunov à temps discret périodique (discrete-time periodic Lyapunov equation *DPLE*, e.g. Bittanti et *al.*, 1988 ; Varga, 1997)

$$P_{1/0} = \left(\prod_{j=0}^{S-1} F_{S-j} \right) P_{1/0} \left(\prod_{j=0}^{S-1} F_{S-j} \right)' + \sum_{k=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{k-1} F_{S-j} \right) G_{S-k} Q_{S-k} G_{S-k}' \left(\prod_{j=0}^{k-1} F_{S-j} \right)', \quad (1.5.12)$$

D'autre part, l'équation (1.5.10g) peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned}
\Delta_S P_1 &= F_S P_{S/S-1} F'_S - \tilde{K}_S \Omega_S \tilde{K}'_S + G_S Q_S G'_S - P_{1/0} \\
&= F_S F_{S-1} P_{S-1/S-2} (F_S F_{S-1})' - F_S \tilde{K}_{S-1} \Omega_{S-1} \tilde{K}'_{S-1} F'_S + F_S G_{S-1} Q_{S-1} G'_{S-1} F'_S \\
&\quad - \tilde{K}_S \Omega_S \tilde{K}'_S + G_S Q_S G'_S - P_{1/0} \\
&= F_S F_{S-1} F_{S-2} P_{S-2/S-3} (F_S F_{S-1} F_{S-2})' - F_S F_{S-1} \tilde{K}_{S-2} \Omega_{S-2} (F_S F_{S-1} \tilde{K}_{S-2})' \\
&\quad + (F_S F_{S-1}) G_{S-2} Q_{S-2} G'_{S-2} (F_S F_{S-1})' - F_S \tilde{K}_{S-1} \Omega_{S-1} (\tilde{K}_{S-1} F_S)' \\
&\quad + F_S G_{S-1} Q_{S-1} G'_{S-1} F'_S - \tilde{K}_S \Omega_S \tilde{K}'_S + G_S Q_S G'_S - P_{1/0} \\
&\quad \vdots \\
&= - \sum_{k=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{k-1} F_{S-j} \right) \tilde{K}_{S-k} \Omega_{S-k} \tilde{K}'_{S-k} \left(\prod_{j=0}^{k-1} F_{S-j} \right)' + \left(\prod_{j=0}^{S-1} F_{S-j} \right) P_{1/0} \left(\prod_{j=0}^{S-1} F_{S-j} \right)' \\
&\quad + \sum_{k=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{k-1} F_{S-j} \right) G_{S-k} Q_{S-k} G'_{S-k} \left(\prod_{j=0}^{k-1} F_{S-j} \right)' - P_{1/0}.
\end{aligned}$$

A partir de (1.5.12) nous concluons que la somme des trois derniers termes du membre droit de la dernière égalité est égale à 0.

D'où

$$\begin{aligned}
\Delta_S P_1 &= - \sum_{k=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{k-1} F_{S-j} \right) \tilde{K}_{S-k} \Omega_{S-k} \tilde{K}'_{S-k} \left(\prod_{j=0}^{k-1} F_{S-j} \right)' \\
&\quad - \sum_{k=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{k-1} F_{S-j} \right) K_{S-k} \Omega_{S-k}^{-1} K'_{S-k} \left(\prod_{j=0}^{k-1} F_{S-j} \right)' \\
&= - \sum_{k=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{k-1} F_{S-j} \right) K_{S-k} \Omega_{S-k}^{-1} K'_{S-k} \left(\prod_{j=0}^{k-1} F_{S-j} \right)' \\
&= -L \operatorname{diag}(\Omega_S^{-1}, \dots, \Omega_1^{-1}) L' = Y_1 M_1 Y_1'. \tag{1.5.13}
\end{aligned}$$

Il est clair que lorsque Sm est significativement plus petit que r , l'équation *PRDE* non homogène (1.5.2e) est remplacée par l'équation *PRDE* homogène (1.5.11b) qui est de dimension inférieure. Par exemple, pour $m = 1$, la complexité de la résolution de (1.5.10d) ou (1.5.11b) en utilisant (1.5.13) comme étape d'initialisation, est de l'ordre de $O(rS^2)$, ce qui est plus simple comparé à la résolution de (1.5.2e). Il est encore possible d'alléger le fardeau de calcul dans (1.5.13) en évitant de former la somme des produits matriciels (dans l'évaluation de L), en faisant appel à la décomposition de Schur périodique (Hench et Laub, 1994).

ii) **Cas où** $Sm \geq r$: Dans ce cas, il est préférable d'utiliser une autre décomposition. Par ailleurs, puisque

$$\begin{aligned}
 P_1 &= E(x_1 - \hat{x}_1)(x_1 - \hat{x}_1)' = E(x_1 x_1') \\
 &= E(F_S x_0 + G_S w_0)(F_S x_0 + G_S w_0)' \\
 &= F_S E(x_0 x_0') F_S' + G_S E(w_0 w_0') G_S' \\
 &= F_S W_0 F_S' + G_S Q_S G_S',
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 \Delta_S P_1 &= Y_1 M_1 Y_1' \\
 &= F_S P_{S/S-1} F_S' - \tilde{K}_S \Omega_S \tilde{K}_S' + G_S Q_S G_S' - F_S W_0 F_S' - G_S Q_S G_S' \\
 &= F_S (P_{S/S-1} - W_0) F_S' - \tilde{K}_S \Omega_S \tilde{K}_S' \\
 &= F_S (P_{S/S-1} - W_0) F_S' - (F_S P_{S/S-1} H_S \Omega_S^{-1}) \Omega_S (F_S P_{S/S-1} H_S \Omega_S^{-1})' \\
 &= F_S \left[P_{S/S-1} - W_0 - (P_{S/S-1} H_S) \Omega_S^{-1} (P_{S/S-1} H_S)' \right] F_S'.
 \end{aligned}$$

Ce qui permet d'identifier Y_1 et M_1 comme suit

$$\begin{cases} Y_1 = F_S, \\ M_1 = P_{S/S-1} - W_0 - (P_{S/S-1} H_S) \Omega_S^{-1} (P_{S/S-1} H_S)' . \end{cases}$$

Avec une telle initialisation, l'équation $PRDE$ (1.5.11b) est de même dimension que l'équation $PRDE$ (1.5.2e), et s'il semble qu'il n'y ait pas eu de réduction dans la complexité comparant au filtre de Kalman, la variable de Riccati M_t dans (1.5.11b) n'est cependant pas astreinte à être semi-définie positive, contrairement à la variable de Riccati $P_{t/t-1}$ de (1.5.2e).

Afin de rendre plus palpable le choix d'une bonne factorisation, dans la complexité de l'algorithme, nous allons donner un exemple.

Exemple 4 *Considérons pour simplifier l'exposé, un modèle autorégressif périodique d'ordre 5 et de période S , défini par l'équation aux différences stochastique suivante :*

$$y_t - \phi_{t,1} y_{t-1} - \phi_{t,2} y_{t-2} - \phi_{t,3} y_{t-3} - \phi_{t,4} y_{t-4} - \phi_{t,5} y_{t-5} = \varepsilon_t, \quad (1.5.14)$$

où (ε_t) est un bruit blanc périodique de variance périodique de période S et où les paramètres $\phi_{t,j}$, $j = 1, \dots, 5$ sont périodiques en t de période S .

En posant $x_t = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-4})'$, $\varepsilon_t = (\varepsilon_t, 0, 0, 0, 0)'$ et $H' = (1, 0, 0, 0, 0)'$, le modèle (1.5.14) peut se mettre sous la forme espace d'état suivante

$$\begin{cases} x_t = F_t x_{t-1} + \varepsilon_t, \\ y_t = H' x_t, \end{cases} \quad (1.5.15)$$

de sorte qu'en l'identifiant au modèle (1.5.1), les dimensions r , m et d sont respectivement égales à 5, 1 et 5.

Lorsque nous appliquons le filtre de Kalman au modèle (1.5.15), l'équation de Riccati périodique correspondante est d'ordre (la dimension de $P_{t/t-1}$) 5, quelque soit la valeur de S . Par contre, la dimension de l'équation de Riccati correspondante au filtre de Chandrasekhar périodique (dimension de M_t) dépend de S .

Considérons deux cas pour S .

i) **Cas où $S = 2$**

Nous sommes en présence du cas où $Sm < r$. D'après la formule (1.5.13), nous avons

$$\Delta_S P_1 = -L \begin{pmatrix} \Omega_2^{-1} & 0 \\ 0 & \Omega_1^{-1} \end{pmatrix} L' = Y_1 M_1 Y_1',$$

avec $L = [K_2, F_2 K_1]$, $K_1 = F_1 P_{1/0} H_1$ et $\Omega_t = H_t' P_{t/0} H_t$, $t = 1, 2$. Ainsi nous pouvons prendre

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Omega_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Omega_1} \end{pmatrix}$$

qui est une matrice 2×2 , et dont l'équation de Riccati est de l'ordre 2 (qui est inférieure à celui de l'équation de Riccati du filtre de Kalman). Il est bien clair que dans ce cas, le filtre de Chandrasekhar périodique est plus rapide que le filtre de Kalman.

ii) **Cas où $S = 12$**

Dans ce cas, la factorisation précédente est inefficace puisque l'ordre de la matrice de Riccati associée au filtre de Chandrasekhar périodique serait égal à 12, plus grand que 5. Cependant nous sommes en présence du cas $Sm > r$, ce qui revient à factoriser $\Delta_S P_1$ comme $Y_1 M_1 Y_1'$ où

$$Y_1 = F_{12} \text{ et } M_1 = P_{12/11} - W_0 - P_{12/11} H_{12} \Omega_{12}^{-1} H_{12}' P_{12/11}'$$

de sorte que la dimension de l'équation de Riccati (non homogène) associée au filtre de Chandrasekhar est la même que celle de l'équation de Riccati du filtre de Kalman. Cependant la matrice M_1 n'est pas astreinte à être semi-définie positive contrairement à P_1 et de ce point de vue, l'application du filtre de Chandrasekhar périodique reste plus souhaitable.

1.6 Conclusion

Nous avons généralisé dans ce chapitre les équations de Chandrasekhar à temps discret au cas périodique à travers plusieurs formes. Ces équations ont un potentiel pour la réduction de la complexité numérique inhérente au filtre de Kalman correspondant. Une version racine carrée peut être facilement formulée (Sayed et Kailath, 1994) dans le but d'améliorer la stabilité numérique des algorithmes proposés. Ces équations peuvent être appliquées pour réduire la complexité des problèmes d'inférence associés aux modèles périodiques linéaires tels que les modèles *ARMA* périodiques (*PARMA*). En effet, les équations de Chandrasekhar périodiques peuvent être utilisées dans l'évaluation de la fonction de vraisemblance et le calcul de la matrice d'information de Fisher des modèles *PVARMA*.

Chapitre 2

Structure d'Autocorrélation des Modèles Autorégressifs Moyennes Mobiles Périodiques

2.1 Introduction

Plusieurs séries chronologiques saisonnières rencontrées dans divers domaines tels que l'économie (Cleveland et Tiao, 1979 ; Osborn, 1992 ; Bentarzi et Hallin, 1996 ; Bollerslev et Ghysels, 1996 ; Franses, 1996 ; Franses et Paap, 2004), l'environnement (Jones et Brelsford, 1967 ; Salas et al., 1983 ; Vecchia 1985*a*, 1985*b* ; Jymenez et *al.*, 1989 ; Bentarzi et *al.*, 2008), l'ingénierie (Gardner et Frank, 1975 ; Meyer et Burrus, 1975 ; Bittanti et De Nicolao, 1993 ; Adams et Goodwin, 1995 ; Varga, 2003) et plusieurs autres sciences physiques et naturelles, ne peuvent être modélisées par les modèles classiques *SARIMA*. Il est bien connu que les modèles *ARMA* périodiques (*PARMA*) peuvent être considérés comme une alternative prometteuse des modèles *SARIMA* pour représenter des séries générées par des processus du second ordre, dont les fonctions d'autocovariances sont périodiques dans le temps. Cependant, cette classe de modèles reste peu utilisée en pratique, probablement en raison de la complexité de la modélisation, dû à la forme de la fonction d'autocorrélation (l'outil fondamental dans la modélisation des séries chronologiques, notamment les modèles *PARMA*) qui n'est pas symétrique, par conséquent l'absence de la propriété de Toeplitz. Plusieurs chercheurs ont proposé des procédures pour calculer la fonction d'autocovariance d'un modèle *ARMA* périodique, parmi lesquels nous citons Li et Hui (1988) et Shao et Lund (2004) pour

le cas des modèles *PARMA* mixtes et Boteva et Boshnakov (1992) et Bentarzi et Aknouche (2005) pour les modèles *PAR* purs. La plupart des chercheurs se basent sur l'approche de l'équation aux différences qui fait appel aux équations dites de Yule-Walker périodiques (Pagano, 1978 ; Vecchia, 1985b). Cette approche s'avère très coûteuse en terme de calculs, lorsque le modèle est de grande période. En effet, nous devons résoudre pour chaque saison un système d'ordre égal au nombre de valeurs nécessaire pour démarrer le système d'équations de Yule Walker périodiques. En se basant sur une représentation espace d'états des modèles *PVAR*, Aknouche (2007) a proposé une procédure alternative pour calculer les autocovariances de chacune des saisons séparément, ce qui facilite le calcul pour des modèles de grande période.

Une autre approche alternative pour ce problème est d'utiliser la représentation causale d'un modèle *PARMA* (voir, e.g. Brockwell et Davis, 1991 et Lund et Basawa, 2000 pour les cas *VARMA* et *PARMA* respectivement), à partir de laquelle, les autocovariances peuvent être exprimées comme une somme infinie. Cependant cette méthode est très lourde pour des modèles à ordres élevés et particulièrement lorsque les paramètres du modèle sont proches de la frontière du domaine de causalité.

Ce chapitre est consacré à l'étude de la structure d'autocorrélation des modèles *ARMA* périodiques. Nous proposons dans la Section 1, une procédure améliorée, basée sur l'approche de l'équation aux différences, pour calculer les autocovariances d'un modèle *PARMA* univarié. Cette proposition permet de calculer les autocovariances nécessaires pour démarrer le système d'équations de Yule Walker, en résolvant un système linéaire de matrice donnée explicitement et dont la forme analytique montre une structure circulaire, naturellement assortie avec la périodicité du modèle. Dans la Section 2, nous présentons une généralisation de la procédure proposée récemment par Aknouche (2007) du cas des modèles *PVAR* purs au cas des modèles *PVARMA*.

2.2 Calcul de la fonction d'autocovariances d'un modèle *ARMA* périodique

Rappelons qu'un processus aléatoire $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ du second ordre ($E(y_t^2) < \infty$) admet une représentation *PARMA* d'ordre p et q et de période S , s'il est solution d'une équation aux

différences stochastiques de la forme

$$y_t - \sum_{j=1}^p \phi_{t,j} y_{t-j} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_{t,j} \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.1.1)$$

où $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc périodique, *i.e.*, une suite de variables aléatoires non corrélées ($E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = 0$ pour $h \neq 0$) de fonction moyenne $E(\varepsilon_t)$ nulle et de fonction variance $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$. Les paramètres $\phi_{t,j}$, $\theta_{t,j}$ et σ_t^2 sont périodiques en t de période S . Ces modèles ont été largement étudiés lors de ces trois dernières décennies, dans le but est de représenter plusieurs séries chronologiques rencontrés dans divers domaines scientifiques (tels que l'économie, l'hydrologie, la météorologie et le traitement de signal) et qui sont caractérisées par une structure de corrélation périodique, structure qui ne peut être suffisamment expliquée par les modèles *ARMA* saisonniers à coefficients constants (*SARMA*). Un autre intérêt réside dans le fait qu'ils peuvent être exploités dans l'analyse multivariée afin de réduire sensiblement le nombre de paramètres correspondants (cf., Newton, 1982).

Cependant, comparés à la formulation *SARMA*, les modèles *PARMA* requièrent une représentation comprenant une structure d'autocovariance plus complexe et un plus grand nombre de paramètres. Ceci complique la mise en oeuvre ainsi que l'analyse des propriétés algébriques et probabilistes de tels modèles. D'autre part, il est bien connu que l'outil fondamental pour la modélisation des séries chronologiques, notamment les modèles *PARMA*, est la fonction d'autocovariances $\gamma_h^{(t)} = E(y_t y_{t-h})$. En outre, la fonction $\gamma_h^{(t)}$ peut être employée pour évaluer la fonction de vraisemblance d'un modèle *PARMA*, estimer ses paramètres, calculer la variance asymptotique de ses estimateurs, calculer la matrice de l'information de Fisher et prévoir les valeurs futures de la série. Malgré cela, le calcul de la fonction d'autocovariance a suscité peu d'intérêt dans la littérature, probablement en raison de la complexité inhérente en l'absence de la symétrie et par conséquent de la propriété de Toeplitz dans sa structure.

Les méthodes de calcul de la fonction d'autocorrélation, $\gamma_h^{(t)}$, proposées dans la littérature (e.g. Bentarzi and Aknouche, 2005) sont généralement basées sur l'approche de l'équation aux différences qui fait appel aux équations dites de Yule-Walker périodiques. Cette approche a été adoptée d'abord par Li et Hui (1988) où les autocovariances pour les $(p+1)$ premiers retards et pour chaque période $\gamma_h^{(s)}$, $h = 0, \dots, p$ et $s = 1, \dots, S$, sont données comme solutions du système linéaire suivant

$$A\gamma = y,$$

où γ est le $(p+1)S \times 1$ -vecteur des autocovariances de démarrage. Ce système est cependant

encombrant tant du point de vue analytique que du point de vue calculatoire puisque la matrice A n'est pas donnée explicitement mais formée à partir d'un algorithme approprié. En adoptant la même approche, Shao et Lund (2004) ont montré que pour $r = \max(p, q) + 1$ les Sr autocovariances de démarrage ($\gamma_h^{(s)}$, $h = 0, \dots, r$ et $s = 1, \dots, S$) peuvent être obtenues en résolvant, par rapport à γ , le système d'équations linéaires suivant

$$\Gamma U \gamma = \kappa,$$

où Γ et U sont respectivement, des matrices de dimensions $rS \times (p+1)rS$ et $(p+1)rS \times rS$. Contrairement au résultat de Li et Hui (1988), ces matrices sont données explicitement mais la méthode demeure relativement encombrante puisqu'elle requière un nombre d'opérations plus grand, dû au produit matriciel.

En se basant sur la même approche de l'équation aux différences, nous proposons dans cette section une alternative améliorée pour calculer les autocovariances d'un modèle *PARMA*. La méthode proposée calcule les $S(p+1)$ autocovariances de démarrage en se basant sur la résolution d'un système linéaire de matrice donnée explicitement et dont la forme analytique montre une structure circulaire correspondante à la périodicité du modèle.

2.2.1 La méthode

Réécrivons le modèle *PARMA* défini dans (2.1.1), en faisant ressortir la périodicité comme suit

$$\sum_{j=0}^p \phi_{s,j} y_{s-j+nS} = \sum_{j=0}^q \theta_{s,j} \varepsilon_{s-j+nS}, \quad 1 \leq s \leq S, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.1.2)$$

où $\phi_{s,0} = \theta_{s,0} = -1$. Soit $\gamma_h^{(s)} = E(y_{s+nS} y_{s+nS-h})$ la fonction d'autocovariance de retard $h \in \mathbb{Z}$ et de saison s . Il est bien connu, (Li et Hui, 1988; Shao et Lund, 2004) que lorsque nous multiplions (2.1.2) par y_{s+nS-h} et en prenant l'espérance des deux membres de l'équation obtenue, les d'autocovariances $\gamma_h^{(s)}$, $1 \leq s \leq S$, $h \in \mathbb{Z}$ sont des solutions des équations aux différences linéaires à coefficients périodiques (dites équations de Yule-Walker périodiques)

$$\gamma_h^{(s)} - \sum_{j=1}^p \phi_{s,j} \gamma_{h-j}^{(s-j)} = - \sum_{j=h}^q \theta_{s,j} \psi_{s-h,j-h} \sigma_{s-j}^2 \mathbf{1}_{[h \leq q]}, \quad h \geq 0, \quad (2.1.3)$$

où les covariances croisées normalisées $\psi_{s,k}$, $s = 1, \dots, S$, $k \in \mathbb{Z}$, coefficients de l'unique représentation causale du processus *PARMA* $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$, sont donnés par (voir e.g. Lund

et Basawa, 2000; Shao et Lund, 2004)

$$\psi_{s,k} = -\theta_{s,k} \mathbf{1}_{[k \leq q]} + \sum_{j=1}^{\min(k,p)} \phi_{s,j} \psi_{s-j,k-j}, \quad k \geq 1, \quad s = 1, \dots, S, \quad (2.1.4)$$

où $\psi_{s,0} = 1$ et $\mathbf{1}_{[A]}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A . La solution de (2.1.3) existe et elle est unique tant que le modèle (2.1.1) soit causal (e.g., Bentarzi, 1998).

Pour déterminer la fonction d'autocovariance à partir de l'équation aux différences (2.1.3), nous avons besoin des valeurs de démarrage $\gamma_h^{(s)}$, $h = 0, \dots, p$ et $s = 1, \dots, S$. Une fois ces valeurs connues, les $\gamma_h^{(s)}$ pour $h > p$ et $s = 1, \dots, S$, peuvent être calculées récursivement à partir de (2.1.3), en faisant appel à (2.1.4). Les autocovariances $\gamma_h^{(s)}$, pour des retards négatifs, peuvent être obtenues en utilisant la relation $\gamma_{-h}^{(s)} = \gamma_h^{(s+h)}$.

Soient $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0^{(1)}, \dots, \gamma_p^{(1)}, \gamma_0^{(2)}, \dots, \gamma_p^{(2)}, \dots, \gamma_0^{(S)}, \dots, \gamma_p^{(S)})'$ le $S(p+1)$ -vecteur des autocovariances de démarrage et $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_{pS+1}, \zeta_2, \dots, \zeta_{pS+2}, \dots, \zeta_S, \dots, \zeta_{pS+S})'$ le $S(p+1)$ -vecteur défini par

$$\zeta_{hS+s} = \sum_{j=h}^q \theta_{j,s} \psi_{s-h,j-h} \sigma_{s-j}^2, \quad 1 \leq s \leq S \text{ et } 0 \leq h \leq p.$$

Considérons la matrice fondamentale $\boldsymbol{\varphi}_h^{(s)}$ ($h \geq 0, 1 \leq s \leq S$) d'ordre $(p+1) \times (p+1)$

$$\boldsymbol{\varphi}_h^{(s)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{h \times (p+1-h)} & \mathbf{0}_{h \times h} \\ \begin{matrix} -\phi_{s,h} & -\phi_{s,h+1} & \cdots & \cdots & -\phi_{s,p} \\ 0 & -\phi_{s,h} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\phi_{s,h} \end{matrix} & \mathbf{0}_{(p+1-h) \times h} \end{pmatrix}, & \text{si } 0 \leq h \leq p \\ \mathbf{0}_{(p+1) \times (p+1)}, & \text{si } h \geq p+1, \end{cases} \quad (2.1.5)$$

à partir de laquelle est définie la matrice $\boldsymbol{\Phi}_k^{(s)}$ ($k, s \in \{1, \dots, S\}$) comme suit

$$\boldsymbol{\Phi}_k^{(s)} = \sum_{i \equiv 1-k \pmod{S}} \boldsymbol{\varphi}_i^{(s)}, \quad \text{pour } s, k \in \{1, \dots, S\}. \quad (2.1.6)$$

Formons à partir des $(\boldsymbol{\Phi}_k^{(s)})$ la matrice circulaire par blocs d'ordre $S(p+1) \times S(p+1)$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1^{(1)} & \boldsymbol{\Phi}_2^{(1)} & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{S-1}^{(1)} & \boldsymbol{\Phi}_S^{(1)} \\ \boldsymbol{\Phi}_S^{(2)} & \boldsymbol{\Phi}_1^{(2)} & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{S-2}^{(2)} & \boldsymbol{\Phi}_{S-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\Phi}_3^{(S-1)} & \boldsymbol{\Phi}_4^{(S-1)} & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_1^{(S-1)} & \boldsymbol{\Phi}_2^{(S-1)} \\ \boldsymbol{\Phi}_2^{(S)} & \boldsymbol{\Phi}_3^{(S)} & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_S^{(S)} & \boldsymbol{\Phi}_1^{(S)} \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{0}_{m \times n}$ est la matrice nulle de dimension $m \times n$. Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 5 (Aknouche, Belbachir et Hamdi, 2008)

Le vecteur des autocovariances de démarrage, γ , est l'unique solution du système linéaire suivant

$$\Phi\gamma = \zeta, \quad (2.1.7)$$

tant que le modèle (2.1.1) soit causal.

Preuve. Le système (2.1.7) s'obtient directement en explicitant (2.1.3) pour $1 \leq s \leq S$ et $0 \leq h \leq p$, et en réarrangeant les coefficients de $\gamma_h^{(s)}$ dans l'ordre approprié. $\square$

Il est possible de réduire la complexité de formation de la matrice Φ en utilisant sa propriété de circularité par blocs. En effet, la formule (2.1.6) peut être utilisée uniquement pour évaluer les premiers blocs $\Phi_k^{(1)}$, $k = 1, \dots, S$. Les autres blocs $\Phi_k^{(s)}$ ($s = 2, \dots, S$) peuvent en être déduits en remplaçant les paramètres $\phi_{1,j}$ par $\phi_{s,j}$, pour $j = 1, \dots, p$. Ceci pourra réduire la complexité de calcul induite par la formation de Φ .

Il est encore possible de simplifier considérablement le fardeau calculatoire en proposant de donner explicitement la forme de Φ , élément par élément. Si nous notons $\Phi = (\Phi_{i,j})_{1 \leq i,j \leq (p+1)S}$, en écrivant $i = \alpha(p+1) + \beta$ et $j = \gamma(p+1) + \delta$, l'expression de $\Phi_{i,j}$ est alors donnée par

$$\Phi_{i,j} = \Phi_{\alpha(p+1)+\beta, \gamma(p+1)+\delta} = \text{Coe}f_{\gamma,\delta} \left(\Phi_{S-\alpha+\beta+1}^{(\alpha+1)} \right) = \sum_{s \equiv \alpha - \beta \pmod{S}} \text{Coe}f_{\gamma,\delta} \left(\varphi_{\alpha+1}^{(s)} \right),$$

où $\text{Coe}f_{k,l}(A)$ désigne le (k,l) -ième coefficient de $\varphi_{\alpha+1}^{(s)}$.

2.2.2 Illustration

A fin d'illustrer la simplicité de la méthode proposée dans la section précédente, nous proposons les deux exemples suivants.

Exemple 6 *Considérons le modèle causal PARMA(6, q) de période $S = 3$. En explicitant l'équation (2.1.3) pour $1 \leq s \leq 3$ et $0 \leq h \leq 6$, les autocovariances de démarrage $\gamma_0^{(1)}, \dots, \gamma_6^{(1)}, \gamma_0^{(2)}, \dots, \gamma_6^{(2)}, \dots, \gamma_0^{(3)}, \dots, \gamma_6^{(3)}$ du modèle peuvent être données par le système (2.1.7) avec*

Il est clair que la matrice Φ peut être écrite par blocs comme suit

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(1)} & \Phi_2^{(1)} & \Phi_3^{(1)} \\ \Phi_3^{(2)} & \Phi_1^{(2)} & \Phi_2^{(2)} \\ \Phi_2^{(3)} & \Phi_3^{(3)} & \Phi_1^{(3)} \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(s)} &= \begin{pmatrix} 1 & -\phi_{s,1} & -\phi_{s,2} & -\phi_{s,3} & -\phi_{s,4} & -\phi_{s,5} & -\phi_{s,6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{s,3} & -\phi_{s,4} & -\phi_{s,5} & 1-\phi_{s,6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_{s,3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_{s,3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\phi_{s,6} & 0 & 0 & -\phi_{s,3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \Phi_2^{(s)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{s,2} & -\phi_{s,3} & -\phi_{s,4} & -\phi_{s,5} & -\phi_{s,6} & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_{s,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_{s,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{s,5} & -\phi_{s,6} & 0 & -\phi_{s,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_{s,5} & 0 & 0 & -\phi_{s,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Phi_3^{(s)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{s,1} & -\phi_{s,2} & -\phi_{s,3} & -\phi_{s,4} & -\phi_{s,5} & -\phi_{s,6} & 0 \\ 0 & -\phi_{s,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_{s,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{s,4} & -\phi_{s,5} & -\phi_{s,6} & -\phi_{s,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_{s,4} & 0 & 0 & -\phi_{s,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_{s,4} & 0 & 0 & -\phi_{s,1} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Il est aisé de constater que les matrices $\Phi_1^{(s)}$, $\Phi_2^{(s)}$ et $\Phi_3^{(s)}$ peuvent être écrites comme la somme des $\varphi_h^{(s)}$

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(s)} &= \varphi_0^{(s)} + \varphi_3^{(s)} + \varphi_6^{(s)}, \\ \Phi_2^{(s)} &= \varphi_2^{(s)} + \varphi_5^{(s)}, \\ \Phi_3^{(s)} &= \varphi_1^{(s)} + \varphi_4^{(s)}, \end{aligned}$$

où

$$\varphi_0^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & -\phi_{s,1} & -\phi_{s,2} & -\phi_{s,3} & -\phi_{s,4} & -\phi_{s,5} & -\phi_{s,6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{s,1} & -\phi_{s,2} & -\phi_{s,3} & -\phi_{s,4} & -\phi_{s,5} & -\phi_{s,6} & 0 \\ 0 & -\phi_{s,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_{s,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\phi_{s,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi_{s,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi_{s,1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{s,2} & -\phi_{s,3} & -\phi_{s,4} & -\phi_{s,5} & -\phi_{s,6} & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_{s,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_{s,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\phi_{s,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi_{s,2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{s,3} & -\phi_{s,4} & -\phi_{s,5} & -\phi_{s,6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_{s,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_{s,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\phi_{s,3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_4^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{s,4} & -\phi_{s,5} & -\phi_{s,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_{s,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_{s,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_5^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{s,5} & -\phi_{s,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_{s,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_6^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{s,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 7 De façon similaire, si nous considérons un modèle causal $PARMA_S(6, q)$ avec

$p = 6$ et $S = 9$, nous obtenons alors

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \varphi_6^{(1)} & \varphi_5^{(1)} & \varphi_4^{(1)} & \varphi_3^{(1)} & \varphi_2^{(1)} & \varphi_1^{(1)} \\ \varphi_1^{(2)} & \varphi_0^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \varphi_6^{(2)} & \varphi_5^{(2)} & \varphi_4^{(2)} & \varphi_3^{(2)} & \varphi_2^{(2)} \\ \varphi_2^{(3)} & \varphi_1^{(3)} & \varphi_0^{(3)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \varphi_6^{(3)} & \varphi_5^{(3)} & \varphi_4^{(3)} & \varphi_3^{(3)} \\ \varphi_3^{(4)} & \varphi_2^{(4)} & \varphi_1^{(4)} & \varphi_0^{(4)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \varphi_6^{(4)} & \varphi_5^{(4)} & \varphi_4^{(4)} \\ \varphi_4^{(5)} & \varphi_3^{(5)} & \varphi_2^{(5)} & \varphi_1^{(5)} & \varphi_0^{(5)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \varphi_6^{(5)} & \varphi_5^{(5)} \\ \varphi_5^{(6)} & \varphi_4^{(6)} & \varphi_3^{(6)} & \varphi_2^{(6)} & \varphi_1^{(6)} & \varphi_0^{(6)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \varphi_6^{(6)} \\ \varphi_6^{(7)} & \varphi_5^{(7)} & \varphi_4^{(7)} & \varphi_3^{(7)} & \varphi_2^{(7)} & \varphi_1^{(7)} & \varphi_0^{(7)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \varphi_6^{(8)} & \varphi_5^{(8)} & \varphi_4^{(8)} & \varphi_3^{(8)} & \varphi_2^{(8)} & \varphi_1^{(8)} & \varphi_0^{(8)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \varphi_6^{(9)} & \varphi_5^{(9)} & \varphi_4^{(9)} & \varphi_3^{(9)} & \varphi_2^{(9)} & \varphi_1^{(9)} & \varphi_0^{(9)} \end{pmatrix}$$

Malgré la simplicité de la méthode proposée comparée à celle de Li et Hui (1988) et Shao et Lund (2004), elle présente quand même un inconvénient lié à l'approche de l'équation aux différences, sur laquelle elle est basée. Nous remarquons que les autocovariances de démarrage sont calculées dans un même bloc et ce pour toutes les saisons, nécessitant ainsi la résolution d'un système d'équations linéaires dont la complexité de calcul est de l'ordre de $O(S^3(p+1)^3)$ opérations élémentaires. Ceci pourrait être très coûteux pour des modèles de grande période, ce qui est assez fréquent pour les modèles périodiques. Cet inconvénient représente la limitation principale de l'approche de l'équation aux différences comparée aux méthodes calculant les autocovariances pour différentes saisons séparément (cf., Aknouche, 2007) qui s'avèrent plus pertinentes.

2.3 Calcul de la fonction d'autocovariance des modèles $VARMA$ périodiques

2.3.1 Notations et définitions

Considérons un processus du second ordre m -varié périodiquement corrélé $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$, que nous supposons satisfaisant la représentation autorégressive moyenne mobile multivariée d'ordre p et q et de période S , notée par $PVARMA_S(p, q)$, suivante

$$\mathbf{y}_{s+nS} - \sum_{j=1}^p \phi_{s,j} \mathbf{y}_{s+nS-j} = \varepsilon_{s+nS} - \sum_{j=1}^q \theta_{s,j} \varepsilon_{s-j+nS}, \quad (2.2.1)$$

où $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc périodique m -varié, i.e., $E(\epsilon_{s+nS}) = 0$ et $E(\epsilon_{s+nS}\epsilon'_{s+nS-h}) = \delta_{h,0}\Sigma_s$ pour $s \in \{1, \dots, S\}$ et $n \in \mathbb{Z}$ (δ est la fonction de Kronecker usuelle).

Tiao et Grupe (1980) ont obtenu une condition nécessaire et suffisante de causalité pour un modèle *PARMA* à partir de sa représentation équivalente *VARMA*. Vecchia (1985b) a donné le même résultat sous une forme plus explicite. Bentarzi et Hallin (1994) ont obtenu une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité pour un modèle m -varié *PVMA_S(q)* à partir de sa représentation équivalente mq -varié *PVMA_S(1)*, où S est tel que qS est le plus petit multiple commun de q et S . Ula et Smadi (1997) ont adopté cette dernière approche pour obtenir une condition de causalité pour un modèle *PVARMA*. Une condition nécessaire et suffisante de causalité équivalente pour le modèle (2.2.1) est donnée par Aknouche (2007). Pour le reste de cette section, nous supposons que le modèle (2.2.1) est causal et inversible donc il admet la représentation causale suivante

$$\mathbf{y}_{s+nS} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{s,j} \epsilon_{s+nS-j},$$

dont les coefficients S -périodiques $\psi_{s,j}$ sont absolument sommables, c'est-à-dire $\sum_{j=0}^{+\infty} \|\psi_{s,j}\| < \infty$, pour chaque période $1 \leq s \leq S$ (" $\|\cdot\|$ " est la norme Euclidienne). Ces coefficients peuvent être obtenus récursivement, en fonction des paramètres du modèle, via la relation suivante (voir Lund et Basawa (2000) pour le cas d'un modèle *PARMA* et Brockwell et Davis (1991) pour le cas d'un modèle *VARMA*)

$$\begin{cases} \psi_{s,0} = \mathbf{I}_{m \times m} \\ \psi_{s,k} = -\theta_{s,k} \mathbf{1}_{[k \leq q]} + \sum_{j=1}^{\min(k,p)} \phi_{s,j} \psi_{s-j,k-j} \end{cases}, \quad s = 1, \dots, S, \quad (2.2.2)$$

où $\mathbf{1}_{[A]}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A .

Soient le vecteur aléatoire de dimension $mp \times 1$, $\mathbf{Y}_{s+nS} = (\mathbf{y}'_{s+nS}, \mathbf{y}'_{s+nS-1}, \dots, \mathbf{y}'_{s+nS-p+1})'$, $\epsilon_{s+nS} = (\xi'_{s+nS}, \mathbf{0}_{1 \times m(p-1)})'$ et la matrice S -périodique, de dimension $mp \times mp$ définie par

$$\Phi_s = \left(\begin{array}{c|c} \phi_{s,1} \cdots \phi_{s,p-1} & \phi_{s,p} \\ \hline \mathbf{I}_{m(p-1) \times m(p-1)} & \mathbf{0}_{m(p-1) \times m} \end{array} \right),$$

où $\xi_{s+nS} = \epsilon_{s+nS} - \sum_{j=1}^q \theta_{s,j} \epsilon_{s+nS-j}$. En utilisant ces notations, nous pouvons réécrire le modèle (2.2.1) sous forme espace d'états périodique équivalente qui sera employée très souvent dans le paragraphe suivant

$$\mathbf{Y}_{s+nS} = \Phi_s \mathbf{Y}_{s+nS-1} + \epsilon_{s+nS}. \quad (2.2.3)$$

Pour le cas particulier *PVAR*, cette représentation est réduite à celle utilisée par Lütkepohl (1991, Chapitre 12) et Aknouche (2007).

2.3.2 Calcul des autocovariances d'un modèle *PVARMA*

Comme il a été déjà mentionné dans la section précédente, les autocovariances d'un modèle *PARMA* univarié peuvent être obtenues en utilisant l'approche de l'équation aux différences (e.g. Li et Hui, 1988 ; Shao et Lund, 2004 ; Bentarzi et Aknouche, 2005), qui requiert la résolution d'un système linéaire obtenu à partir des équations de Yule-Walker périodiques. Cependant, les autocovariances de démarrage sont calculées dans un même bloc et ce pour toutes les saisons, nécessitant ainsi la résolution d'un système d'équations linéaires dont la complexité de calcul est de l'ordre de $O(S^3(p+1)^3)$. Ceci pourrait être très coûteux pour des modèles de grande période. D'ailleurs, l'obtention d'un tel système, semble très difficile dans le cas d'un modèle *PVARMA* multivarié sauf pour quelques cas particuliers. Une approche alternative pour résoudre ce problème est d'utiliser la représentation causale d'un modèle *PVARMA* (cf., Brockwell et Davis, 1991 et Lund et Basawa, 2000 pour le cas d'un modèle *VARMA* et le cas d'un modèle *PARMA*, respectivement), pour laquelle la fonction d'autocovariance peut être exprimée comme somme infinie. Cependant, cette méthode est informatiquement impraticable pour des modèles de grande dimension et en particulier lorsque les paramètres sont près de la frontière du domaine de causalité.

Cette section présente une procédure de calcul des autocovariances d'un modèle *PVARMA*, en tirant profit de la représentation espace d'états périodique (2.2.3). La méthode proposée généralise celle donnée par Aknouche (2007) pour des modèles *PVAR*.

Soient $\gamma_h^{(s)} = E(\mathbf{y}_{s+nS} \mathbf{y}_{s+nS-h}'')$ et $\mathbf{\Gamma}_h^{(s)} = E(\mathbf{Y}_{s+nS} \mathbf{Y}_{s+nS-h}'')$ les fonction d'autocovariance de retard $h \in \mathbb{Z}$ et de période $s \in \{1, \dots, S\}$ des processus $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$, respectivement. Soit également, $\Lambda_{s,h} = E(\epsilon_{s+nS} \mathbf{Y}_{s-h+nS}'')$ la fonction d'autocovariance croisée de retard $h \in \mathbb{Z}$ et de période $s \in \{1, \dots, S\}$. Alors, $\gamma_h^{(t)}$, $\mathbf{\Gamma}_h^{(t)}$ et $\Lambda_{s,h}$ sont périodiques de période S , (i.e., $\gamma_h^{(s+nS)} = \gamma_h^{(s)}$ et ainsi de suite) et nous avons donc $\gamma_{-h}^{(s)} = \left(\gamma_h^{(s+h)}\right)'$ et

$$\mathbf{\Gamma}_h^{(s)} = \begin{pmatrix} \gamma_h^{(s)} & \gamma_{h+1}^{(s)} & \cdots & \gamma_{h+p-1}^{(s)} \\ \gamma_{h-1}^{(s-1)} & \gamma_h^{(s-1)} & \cdots & \gamma_{h+p-2}^{(s-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{h-p+1}^{(s-p+1)} & \gamma_{h-p+2}^{(s-p+1)} & \cdots & \gamma_h^{(s-p+1)} \end{pmatrix}.$$

Définissons pour $h < q$ et $s = 1, \dots, S$ les matrices $\Theta_{s,h}$, $\Psi_{s,h}$ et $\Lambda_{s,h}$ de dimensions $mp \times m(q-h+1)$, $m(q-h+1) \times mp$ et $mp \times mp$ respectivement, comme suit

$$\Theta_{s,h} = \begin{pmatrix} \theta_{s,h}\Sigma_{s-h} & \theta_{s,h+1}\Sigma_{s-h-1} & \cdots & \theta_{s,q}\Sigma_{s-q} \\ \mathbf{0}_{m(p-1) \times m(q-h+1)} & & & \end{pmatrix},$$

$$\Psi_{s,h} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m \times m} \mathbf{1}_{[q-h+1 \geq 1]} & \mathbf{0}_{m \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \psi'_{s-h,1} \mathbf{1}_{[q-h+1 \geq 1]} & \mathbf{I}_{m \times m} \mathbf{1}_{[q-h+1 \geq 2]} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \psi'_{s-h-1,1} \mathbf{1}_{[q-h+1 \geq 2]} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{I}_{m \times m} \mathbf{1}_{[q-h+1 \geq p]} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \psi'_{s-h,q-h} \mathbf{1}_{[q-h+1 \geq 1]} & \psi'_{s-h-1,q-h-1} \mathbf{1}_{[q-h+1 \geq 2]} & \cdots & \psi'_{s-h-p+1,q-h-p+1} \mathbf{1}_{[q-h+1 \geq p]} \end{pmatrix},$$

et

$$\Lambda_{s,h} = -\Theta_{s,h} \Psi_{s,h} \quad (2.2.4)$$

où les $\psi_{s,j}$ sont les solutions de (2.2.2).

Soient le symbole $\otimes$ représentant le produit de Kronecker, $vec(A)$ l'opérateur usuel de la transformation de la matrice A en vecteur et $A^{\otimes m} = A \otimes A \otimes \cdots \otimes A$ le produit de Kronecker de m fois la matrice A . Avec les notations ci-dessus, les autocovariances d'un modèle $PVARMA$ peuvent être obtenues à partir de la proposition suivante.

Proposition 8 (Aknouche et Hamdi, 2008b)

Pour le modèle causal $PVARMA$ avec $p \geq 1$, les autocovariances $\Gamma_h^{(s)}$, pour $1 \leq s \leq S$ et $h \in N$, sont données par les équations suivantes :

$$\left(\mathbf{I}_{m^2 p^2 \times m^2 p^2} - \prod_{k=1}^S \Phi_{S-k+1}^{\otimes 2} \right) vec \left(\Gamma_0^{(S)} \right) = \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{k=0}^{j-1} \Phi_{S-k}^{\otimes 2} vec \left(\Phi_{S-j} \Lambda'_{S-j,1} + \Lambda_{S-j,0} \right), \quad (2.2.5)$$

$$vec \left(\Gamma_0^{(s)} \right) = \prod_{j=1}^s \Phi_{s-j+1}^{\otimes 2} vec \left(\Gamma_0^{(S)} \right) + \sum_{j=0}^{s-1} \prod_{k=0}^{j-1} \Phi_{s-k}^{\otimes 2} vec \left(\Phi_{s-j} \Lambda'_{s-j,1} + \Lambda_{s-j,0} \right), \quad (2.2.6)$$

$$\Gamma_h^{(s)} = \begin{cases} \prod_{k=0}^{h-1} \Phi_{s-k} \Gamma_0^{(s-h)} + \sum_{j=0}^{h-1} \prod_{k=0}^{j-1} \Phi_{s-k} \Lambda_{s-j,h-j}, & \text{pour } 1 \leq h \leq q, \\ \prod_{k=0}^{h-1} \Phi_{s-k} \Gamma_0^{(s-h)}, & \text{pour } h \geq q+1, \end{cases} \quad (2.2.7)$$

avec la convention $\prod_{k=x}^y A_k = \mathbf{I}$ pour $x > y$.

Preuve. En multipliant les deux côtés de (2.2.3) par $\mathbf{Y}'_{s-h+nS}$, ($h \in \mathbb{N}^*$) et en prenant les espérances, nous obtenant les équations de Yule-Walker périodiques suivantes

$$\Gamma_0^{(s)} = \Phi_s \Gamma_1^{(s)'} + \Lambda_{s,0}, \quad (2.2.8)$$

$$\Gamma_h^{(s)} = \Phi_s \Gamma_{h-1}^{(s-1)} + \Lambda_{s,h}, \quad 1 \leq h \leq q \quad (2.2.9)$$

$$\Gamma_h^{(s)} = \Phi_s \Gamma_{h-1}^{(s-1)}, \quad h \geq q+1, \quad (2.2.10)$$

pour $s = 1, \dots, S$. De l'équation (2.2.8) et (2.2.9) avec $h = 1$ nous avons

$$\Gamma_0^{(s)} = \Phi_s \Gamma_0^{(s-1)} \Phi_s' + \Phi_s \Lambda_{s,1}' + \Lambda_{s,0},$$

et appliquant l'opérateur usuel de la transformation de la matrice en vecteur, nous obtenons l'équation de *Lyapunov périodique à temps discret* (*discrete-time periodic Lyapunov equation DTPLE*) suivante (e.g. Bittanti et al., 1988 ; Varga, 1997)

$$\text{vec} \left(\Gamma_0^{(s)} \right) = \Phi_s^{\otimes 2} \text{vec} \left(\Gamma_0^{(s-1)} \right) + \text{vec} \left(\Phi_s \Lambda_{s,1}' + \Lambda_{s,0} \right).$$

Après r ($r \in \mathbb{N}^*$) remplacements successifs dans cette dernière équation, nous obtenons

$$\text{vec} \left(\Gamma_0^{(s)} \right) = \prod_{j=1}^r \Phi_{s-j+1}^{\otimes 2} \text{vec} \left(\Gamma_0^{(s-r)} \right) + \sum_{j=0}^{r-1} \prod_{k=0}^{j-1} \Phi_{s-k}^{\otimes 2} \text{vec} \left(\Phi_{s-j} \Lambda_{s-j,1}' + \Lambda_{s-j,0} \right). \quad (2.2.11)$$

Prenons $r = s$ dans (2.2.11), nous obtenons l'équation (2.2.6). Remplaçons s par S dans (2.2.6) nous obtenons (2.2.5). Enfin, l'équation (2.2.7) est obtenue en substituant successivement (2.2.5) et (2.2.6) à (2.2.9) et (2.2.10), respectivement. $\square$

D'autre part, dans le cas où $p = 0$, la fonction d'autocovariance d'un modèle multivarié moyenne mobile périodique peut être obtenue de

$$\gamma_h^{(s)} = \begin{cases} \sum_{j=h}^q \theta_{s,j} \Sigma_{s-j} \theta_{s-h,j-h}', & \text{si } 0 \leq h \leq q, \\ \mathbf{0}_{m \times m}, & \text{si } h > q, \end{cases} \quad (2.2.12)$$

où $\theta_{s,0} = \mathbf{I}_{m \times m}$, $s = 1, \dots, S$ (voir Vecchia, 1985b pour le cas d'un modèle *PARMA* univarié).

Remarque 9

1) Notons que pour le calcul des $\Gamma_0^{(s)}$, $s = 1, \dots, S$, en utilisant (2.2.5) et (2.2.6) nous n'avons besoin que de résoudre un système linéaire d'ordre $m^2 p^2$. Cependant, en raison de la symétrie de $\Gamma_0^{(s)}$ et de la périodicité de $\gamma_h^{(s)}$, le vecteur $\text{vec} \left(\Gamma_0^{(s)} \right)$ contient quelques composantes identiques, ce qui provoque une certaine redondance indésirable pour le calcul. Nous pouvons

palier cet inconvénient en améliorant de la méthode proposée comme suit :

i) Si $S > p$ nous pouvons utiliser la relation

$$\text{vec}(\Gamma_0^{(s)}) = \mathbf{D}_{m^2 p^2 \times m^2 p^2} \text{vech}(\Gamma_0^{(s)}) \quad (2.2.13)$$

où vech est l'opérateur qui permet de stocker dans une colonne les éléments situés sur et en-dessous de la diagonale d'une matrice et $\mathbf{D}_{m^2 p^2 \times m^2 p^2}$ est la matrice duplication usuelle (e.g. Magnus and Neudecker, 1989). En utilisant la relation (2.2.13), l'équation (2.2.5) peut se réécrire sous la forme équivalente

$$\mathbf{B} \text{vech}(\Gamma_0^{(S)}) = \Delta, \quad (2.2.14)$$

où la matrice $\mathbf{B}$ est le premier bloc de dimension $\frac{pm(pm+1)}{2} \times \frac{pm(pm+1)}{2}$ de la matrice

$$\left(\mathbf{I}_{m^2 p^2 \times m^2 p^2} - \prod_{k=1}^S \Phi_{S-k+1}^{\otimes 2} \right) \times \mathbf{D}_{m^2 p^2 \times m^2 p^2}$$

et Δ est le vecteur contenant les $\frac{pm(pm+1)}{2}$ premiers éléments du vecteur du côté droit de (2.2.5). Par conséquent, nous n'avons besoin que de résoudre un système linéaire d'ordre $\frac{pm(pm+1)}{2}$.

ii) Si $S \leq p$, il est possible d'améliorer la complexité de calcul de (2.2.5) en prenant tous éléments distincts de $\Gamma_0^{(S)}$ et en utilisant une matrice de permutation appropriée plutôt que la matrice de duplication $\mathbf{D}_{m^2 p^2 \times m^2 p^2}$ pour former un système linéaire similaire à (2.2.14).

2) De la Proposition 8 il est clair que l'avantage principal de la méthode proposée est que les autocovariances de chacune des saisons sont calculées séparément, contrairement aux différentes méthodes existantes dans la littérature (par exemple Li et Hui, 1988 ; Shao et Lund, 2004 ; Bentarzi et Aknouche, 2005).

L'algorithme suivant récapitule le calcul des autocovariances des modèles $PVARMA$.

Algorithme 10 (Aknouche et Hamdi, 2008b)

Si $p > 0$,

i) Calculer $\Lambda_{s,h}$ de (2.2.4), où $\Psi_{s,h}$ peut être obtenue de (2.2.2) ;

ii) Résoudre l'équation de Lyaponov à temps discret périodique (DTPLE) suivante

$$\Gamma_0^{(s)} = \Phi_s \Gamma_0^{(s-1)} \Phi_s' + \Phi_s \Lambda_{s,1}' + \Lambda_{s,0}, \quad (2.2.15)$$

pour $\Gamma_0^{(S)}$ en utilisant (2.2.5) ou l'algorithme de Verga (1997). Dédurre en suite $\Gamma_0^{(s)}$, $s = 1, \dots, S-1$ de (2.2.6) ;

iii) Pour $h \geq 1$, calculer $\Gamma_h^{(s)}$, $s = 1, \dots, S$ de (2.2.7).

Si $p = 0$, calculer $\gamma_h^{(s)}$ ($s = 1, \dots, S$, $h \in \mathbb{N}^*$) de (2.2.12). ■

Remarque 11 Au lieu d'utiliser l'opérateur *vec* pour résoudre l'équation (2.2.15) par (2.2.5), les autocovariances $\Gamma_0^{(S)}$ peuvent être calculées en résolvant directement l'équation de Lyapunov à temps discret périodique (2.2.15) (voir par exemple Sreedhar et Van Dooren 1993 ; Varga, 1997) en évitant le produit matriciel via la décomposition de Schur périodique (voir par exemple, Bojanczyk et al., 1992).

Nous concluons cette section avec l'exemple suivant, qui illustre la simplicité et l'utilité de l'Algorithme 10 dans l'étude de la structure d'autocovariance des modèles *PVARMA*.

Exemple 12 Considérons le modèle m -varié S -périodique $PVARMA_S(1, q)$ suivant

$$\mathbf{y}_{s+nS} - \phi_s \mathbf{y}_{s+nS-1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{s+nS} - \sum_{j=1}^q \boldsymbol{\theta}_{s,j} \boldsymbol{\varepsilon}_{s-j+nS}, \quad s = 1, \dots, S \text{ et } n \in \mathbb{Z},$$

que nous réécrivons dans la représentation équivalente espace d'états périodique

$$\mathbf{y}_{s+nS} = \Phi_s \mathbf{y}_{s+nS-1} + \boldsymbol{\epsilon}_{s+nS},$$

où $\boldsymbol{\epsilon}_{s+nS} = \boldsymbol{\varepsilon}_{s+nS} - \sum_{j=1}^q \boldsymbol{\theta}_{s,j} \boldsymbol{\varepsilon}_{s-j+nS}$, $\Phi_s = \phi_s$ et $\Gamma_h^{(s)} = \gamma_h^{(s)}$. En utilisant la Proposition 8 sous l'hypothèse de causalité et d'inversibilité, les autocovariances d'un modèle $PVARMA_S(1, q)$ peuvent être données par

$$\left(\mathbf{I}_{m^2 \times m^2} - \prod_{k=1}^S \phi_{S-k+1}^{\otimes 2} \right) \text{vec} \left(\gamma_0^{(S)} \right) = \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{k=0}^{j-1} \phi_{S-k}^{\otimes 2} \text{vec} \left(\phi_{S-j} \boldsymbol{\Lambda}'_{S-j,1} + \boldsymbol{\Lambda}_{S-j,0} \right), \quad (2.2.16)$$

$$\text{vec} \left(\gamma_0^{(s)} \right) = \prod_{j=1}^s \phi_{s-j+1}^{\otimes 2} \text{vec} \left(\gamma_0^{(S)} \right) + \sum_{j=0}^{s-1} \prod_{k=0}^{j-1} \phi_{s-k}^{\otimes 2} \text{vec} \left(\phi_{s-j} \boldsymbol{\Lambda}'_{s-j,1} + \boldsymbol{\Lambda}_{s-j,0} \right), \quad (2.2.17)$$

et

$$\gamma_h^{(s)} = \begin{cases} \phi_s \gamma_{h-1}^{(s-1)} + \boldsymbol{\Lambda}_{s,h}, & \text{pour } 1 \leq h \leq q \\ \phi_s \gamma_{h-1}^{(s-1)}, & \text{pour } h \geq q+1. \end{cases} \quad (2.2.18)$$

Les relations (2.2.16)-(2.2.18) sont réduites pour $m = 1$ et $q = 1$, à l'expression d'autocovariance donnée par Lund et Basawa (2000) (voir Exemple 5.1). Par exemple, pour le modèle particulier bivarié 2-périodique $PVARMA_2(1, 1)$ (i.e., pour $m = S = 2$ et $p = q = 1$)

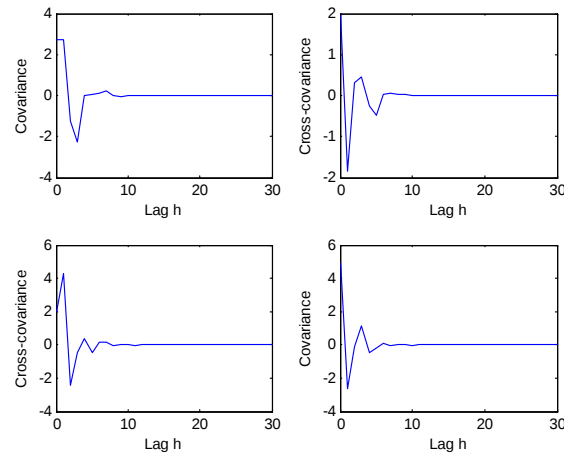
$$\mathbf{y}_{s+nS} - \phi_s \mathbf{y}_{s+nS-1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{s+nS} - \boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\varepsilon}_{s+nS-1}, \quad s = 1, \dots, S \text{ and } n \in \mathbb{Z},$$

dont les paramètres sont reportés dans le tableau suivant

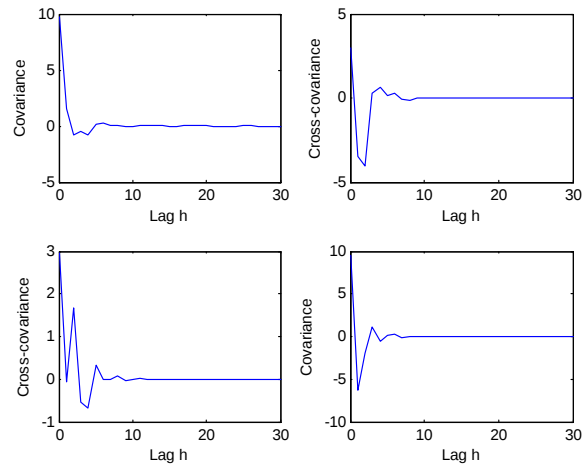
Tableau 2.2.1. Les paramètres du modèle $PVARMA_2(1,1)$

s	ϕ_s	θ_s	Σ_s
1	$\begin{pmatrix} 0.30 & 0.50 \\ 0.45 & -0.20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.50 & -0.70 \\ 0.40 & 0.50 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.00 & 3.00 \\ 3.00 & 4.00 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0.25 & -0.50 \\ -0.40 & -0.60 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.30 & -0.70 \\ 0.60 & 0.20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.00 & 4.00 \\ 4.00 & 1.00 \end{pmatrix}$

Le graphe des autocovariances du modèle $PVARMA$ ci-dessus est donné par la Figure 2.2.1.



$PVARMA$ Cross-covariances for season 1.



$PVARMA$ Cross-covariances for season 2.

Figure 2.2.1. Les autocovariances du modèle $PVARMA(1,1)$

2.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre deux procédures pour le calcul de la fonction d'autocovariance des modèles *ARMA* univariés et multivariés à coefficients périodiques. La première procédure concerne les modèles *PARMA* univariés où nous avons donné une méthode simple basée sur l'approche de l'équation aux différences. La simplicité de la méthode proposée comparée à celle de Li et Hui (1988) et Shao et Lund (2004) est due à la forme explicite du système qui permet de calculer les autocovariances de démarrage dont la matrice est de structure circulaire, naturellement assortie avec la périodicité du modèle. Malgré cet avantage, cette méthode présente quand même un inconvénient, lié à l'approche de l'équation aux différences sur laquelle elle se base, où les autocovariances de démarrage sont calculées dans un même bloc et ce pour toutes les saisons, nécessitant ainsi la résolution d'un système d'équations linéaires dont la complexité de calcul est de l'ordre de $O(S^3(p+1)^3)$ opérations élémentaires. Ceci pourrait être très coûteux pour des modèles de grandes périodes, ce qui est en pratique assez fréquent pour les modèles périodiques. C'est la limitation principale de l'approche de l'équation aux différences comparée aux méthodes plus pertinentes qui calculent les autocovariances pour différentes saisons séparément (e.g. Aknouche, 2007).

La deuxième procédure est basée sur une représentation espace d'états des modèles *VARMA* périodiques, utilisée récemment par Aknouche (2007) pour calculer les autocovariances de démarrage des modèles *PVAR* purs. Nous avons proposé une procédure généralisée au cas des modèles *PVARMA* où les autocovariances de chacune des saisons peuvent être calculées séparément, ce qui permet d'alléger le fardeau de calcul surtout pour les modèles de grandes périodes. La procédure obtenue peut être exploitée comme outil pour d'autres procédures de calcul, telle que l'obtention de la matrice d'information de Fisher et l'estimation du maximum de vraisemblance (voir Chapitre 3).

Chapitre 3

Estimation des Modèles Périodiques via leurs Représentations Espace d'États

3.1 Introduction

De nombreux travaux de prospection et d'analyse des modèles *ARMA* périodiques, avec leurs trois volets : identification du modèle, estimation des paramètres et validation des modèles trouvés, ont constitué jusqu'à présent le centre d'intérêt de plusieurs chercheurs dont Pagano (1978), Cleveland et Tiao (1979), Tiao et Grupe (1980), Vecchia (1985*a* et 1985*b*), Vecchia et Ballerini (1992), Anderson et Vicchia, (1993), Adams et Goodwin (1995), Bentarzi et Hallin (1994, 1996 et 1998), Benterzi (1995 et 1998), Franses et Klock (1995), Lund et Basawa (2000), Basawa et Lund (2001), Bentarzi et Aknouche (2005), Aknouche (2006 et 2007), Guerbyenne (2007), Bentarzi et *al.* (2008) et d'autres. Ces travaux de recherche se sont soldés par de nombreux résultats intéressants.

Le problème de l'estimation des paramètres de cette classe de modèles a connue ces dernières années, des progrès considérables et a été largement étudié dans les deux dernières décennies. Il existe actuellement, plusieurs résultats intéressants, obtenus en utilisant une variété d'approches et de méthodes, telles que la méthode du maximum de vraisemblance (Vecchia, 1985*a* ; Li et Hui, 1988 ; Jimenez et *al.*, 1989 ; Lund et Basawa, 2000 ; Basawa et Lund, 2001), l'approche bayésienne (Andel, 1983), la méthode des moments (Pagano,

1978 ; Boshnakov, 1996 ; Anderson et Meerschaert, 2005) et la méthode des moindres carrés (Adams et Goodwin, 1995 ; Basawa et Lund, 2001 ; Bentarzi et Aknouche, 2006). Sous certaines conditions de régularité, la méthode du maximum de vraisemblance est connue pour être statistiquement la plus efficace. Cependant, en raison de sa nature itérative, qui demande plusieurs évaluations de la fonction de vraisemblance, elle est informatiquement encombrante, en particulier pour les modèles *PVARMA*, qui ont généralement un nombre considérable de paramètres.

Le problème d'évaluation de la fonction de vraisemblance, dans le cas des modèles *PARMA* univariés, a été déjà considéré dans la littérature. Vecchia (1985a) a proposé une évaluation d'une approximation de la vraisemblance qui n'est satisfaisante que pour de petits ordres. Li et Hui (1988) ont développé un algorithme pour l'évaluation exacte de la fonction de vraisemblance qui exige la décomposition de Cholesky des matrices de grandes tailles. Jimenez et *al.* (1989) ont dérivé un algorithme rapide, basé sur le filtre de Kalman. Cependant, leur méthode requiert un nombre considérable d'opérations élémentaires, pour démarrer les équations récurrentes substituant le filtre de Kalman. Plus récemment, Lund et Basawa (2000) ont combiné la méthode d'Ansley (Ansley, 1979) pour l'évaluation de la vraisemblance d'un modèle *ARMA* et l'algorithme d'innovations pour calculer la prévision récursive, pour dériver un algorithme efficace afin d'évaluer la fonction de vraisemblance des modèles *PARMA*. L'algorithme proposé généralise celui de Brockwell et Davis (1991) pour les modèles *ARMA* stationnaires. Une limitation possible de cet algorithme réside dans le grand nombre d'opérations qu'il requiert dans le cas multivaré.

D'autre part, sous certaines hypothèses, les estimateurs des paramètres fournis par la méthode du maximum de vraisemblance et par les méthodes basées sur le filtre de Kalman sont consistents et asymptotiquement normalement distribués (cf., Ljung et Caines, 1979 ; Stoffer et Wall, 1991). Cependant, en pratique les séries chronologiques sont souvent de taille petite à modérer et l'utilisation des résultats asymptotiques n'est pas appropriée. Stoffer et Wall (1991) ont proposé l'utilisation de la méthode non paramétrique bootstrap, suggérée par Efron (1979), pour estimer les paramètres des modèles espace d'états linéaires gaussien à coefficients constants car cette méthode n'est pas fondée sur des hypothèses distributionnelles. La performance du bootstrap a été démontrée dans le cadre de la régression par Freedman (1981) et Freedman et Peters (1984a et 1984b).

L'estimation des paramètres des modèles périodiques à partir de leurs représentations espace d'états est l'objet de ce chapitre. En premier lieu, nous étudions le problème de l'éva-

luation de la fonction de vraisemblance d'un modèle *PARMA* multivarié via la méthode de l'innovation qui nécessite un nombre d'opérations proportionnel à la taille des observations. Les résidus sont obtenus par les équations de Chandrasekhar périodiques présentées dans le Chapitre 1 (*Algorithme 2*). Pour démarrer les équations de récurrences, nous proposons d'utiliser la procédure de calcul des autocovariances, dérivée dans le Chapitre 2 (*Proposition 8*). En second lieu, nous utilisons la formulation espace d'états, qui offre un cadre de modélisation informatiquement efficace, en particulier pour l'estimation des paramètres d'une large gamme de modèles (Harvey, 1989 ; Stoffer et Wall, 1991 ; Durbin et Koopman, 2001 et bibliographie intra). Nous adaptons plus précisément, la méthode du bootstrap appliquée aux innovations d'un modèle espace d'états Gaussien proposée par Stoffer et Wall (1991) pour l'estimation des paramètres d'un modèle périodique

3.2 Evaluation de la vraisemblance exacte des modèles *PVARMA* Gaussiens

Il est bien connu que l'approche d'innovation pour l'évaluation de la fonction de vraisemblance des modèles linéaires est la plus efficace, du point de vue du nombre théorique d'opérations qui est proportionnel à la dimension de la série. Cette approche a été déjà employée dans la littérature de l'évaluation de la vraisemblance des modèles *PARMA*, où les innovations empiriques ont été calculées à partir du filtre de Kalman (cf., Jimenez et al., 1989 ; Casals et al., 1998) ou à partir de l'algorithme d'innovation (Lund et Basawa, 1999 et 2000). En adoptant la méthode d'innovation, nous proposons dans cette section, deux algorithmes pour l'évaluation de la fonction de vraisemblance des modèles *PVARMA* Gaussiens. Dans le premier, les innovations empiriques sont obtenues par le filtre de Kalman alors que dans le deuxième, elles sont obtenues par les équations de Chandrasekhar périodiques (Chapitre 1, *Algorithme 2*). Ainsi, nous considérerons une représentation espace d'états périodique $\max(p, q + 1)$ du modèle sous-jacent, pour lequel la fonction de vraisemblance est efficacement dérivée en utilisant la procédure proposée dans le chapitre précédent (*Algorithme 10*), pour calculer les autocovariances dont on a besoin, pour évaluer les valeurs initiales des deux filtres Kalman et Chandrasekhar.

Considérons le modèle *PVARMA* défini dans (2.2.1), que nous supposons causal, inversible et gaussien. Pour une réalisation donnée $\mathbf{y} = (\mathbf{y}'_1, \mathbf{y}'_2, \dots, \mathbf{y}'_{NS})'$ du modèle (2.2.1), la fonction

de vraisemblance du vecteur des paramètres $\beta = (vec(\phi)', vec(\theta)', vec(\Sigma)')'$ peut être exprimée comme suit

$$\mathcal{L}(\beta; \mathbf{y}) = (2\pi)^{-NS/2} |\det(\Gamma)|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{y}' \Gamma^{-1} \mathbf{y} \right\}, \quad (3.1.1)$$

où Γ est la matrice de variance-covariance du vecteur $\mathbf{y}$. Soit $\hat{\mathbf{y}}_{s+nS/s+nS-1}$ le meilleur prédictor linéaire (au sens des moindres carrés) de $\mathbf{y}_{s+nS}$ basé sur $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{s+nS-1}$, (i.e., le vecteur donné par la projection orthogonale du vecteur $\mathbf{y}_{s+nS}$ sur le sous espace engendré par $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{s+nS-1}\}$) et soit $\hat{\mathbf{e}}_{s+nS} = \mathbf{y}_{s+nS} - \hat{\mathbf{y}}_{s+nS/s+nS-1}$ l'innovation empirique à l'instant $s + nS$, dont l'erreur moyenne quadratique $\Omega_{s+nS} = E(\hat{\mathbf{e}}_{s+nS} \hat{\mathbf{e}}_{s+nS}')$. La fonction de vraisemblance donnée par (3.1.1) peut être réécrite sous la forme d'innovation comme suit

$$\mathcal{L}(\beta; \mathbf{y}) = (2\pi)^{-\frac{NS}{2}} \prod_{s=1}^S \prod_{n=0}^{N-1} (\det \Omega_{s+nS})^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^S \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\mathbf{e}}_{s+nS}' \Omega_{s+nS}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_{s+nS} \right\}, \quad (3.1.2)$$

dans laquelle nous avons besoin d'évaluer Ω_{s+nS} , $\hat{\mathbf{y}}_{s+nS/s+nS-1}$ et par conséquent $\hat{\mathbf{e}}_{s+nS}$ pour $s = 1, \dots, S$ et $n = 0, \dots, N-1$. Ceci peut être achevé en utilisant l'algorithme du filtre de Kalman périodique, l'algorithme d'innovation ou l'algorithme de Chandrasekhar périodique, à chaque fois que nous pouvons exprimer le modèle (2.2.1) sous forme espace d'états périodique. Parmi plusieurs formes espace d'états possibles (cf., Jimenez et al., 1989; Azrak et Mélard, 1998) pour représenter les modèles *PVARMA*, nous choisissons la représentation bien connue $\max(p, q+1)$ (Jimenez et al., 1989), qui nécessite relativement peu d'opérations. Soit donc $r = \max(p, q+1)$ et définissons le processus *rm*-varié $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{s+nS}(i) &= \sum_{j=i}^r \phi_{s+nS+i-1,j} \mathbf{y}_{s+nS+i-j-1} - \theta_{s+nS+i-1,j-1} \epsilon_{s+nS+i-j}, \\ i &= 1, \dots, r, \quad s = 1, \dots, S \text{ et } n = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Alors le modèle (2.1.1) peut être représenté sous la forme espace d'états suivante (voir par exemple, Jimenez et al., 1989; Azrak et Mélard, 1998; Casals et al., 1998)

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{s+nS} = \mathbf{F}_s \mathbf{X}_{s+nS-1} + \mathbf{G}_s \epsilon_{s+nS}, \\ \mathbf{y}_{s+nS} = \mathbf{H} \mathbf{X}_{s+nS}, \end{cases}, \quad s = 1, \dots, S, n \in \mathbb{Z}, \quad (3.1.4)$$

où

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix},$$

et

$$\mathbf{F}_s = \begin{pmatrix} \phi_{s,1} & \mathbf{I}_{m \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \phi_{s+1,2} & \mathbf{0}_{m \times m} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{I}_{m \times m} \\ \phi_{s+r-1,r} & \mathbf{0}_{m \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m \times m} \\ -\theta_{s+1,1} \\ \vdots \\ -\theta_{s+r-1,r-1} \end{pmatrix}.$$

De la représentation (3.1.4), la projection orthogonale $\widehat{\mathbf{y}}_{s+nS/s+nS-1}$ peut être exprimée comme suit

$$\widehat{\mathbf{y}}_{s+nS} = \mathbf{H}\widehat{\mathbf{X}}_{s+nS/s+nS-1}, \quad (3.1.5)$$

où $\widehat{\mathbf{X}}_{s+nS/s+nS-1}$ est le meilleur prédicteur linéaire de $\mathbf{X}_{s+nS}$ basé sur $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{s+nS-1}$, de matrice de covariance de l'erreur de prédiction

$$\mathbf{P}_{s+nS/s+nS-1} = E \left(\mathbf{X}_{s+nS} - \widehat{\mathbf{X}}_{s+nS/s+nS-1} \right) \left(\mathbf{X}_{s+nS} - \widehat{\mathbf{X}}_{s+nS/s+nS-1} \right)'.$$

Nous entamons maintenant l'évaluation de la fonction de vraisemblance du modèle donné par (3.1.2). Comme il est bien connu qu'il est possible d'évaluer récursivement $\boldsymbol{\Omega}_{s+nS}$ et $\widehat{\mathbf{e}}_{s+nS}$ dont nous avons besoin dans (3.1.2) à partir du filtre de Kalman (Kalman, 1960), qui est donné par

$$\widehat{\mathbf{X}}_{s+nS+1/s+nS} = \mathbf{F}_{s+1}\widehat{\mathbf{X}}_{s+nS} + \mathbf{K}_{s+nS}\widehat{\mathbf{e}}_{s+nS}, \quad (3.1.6)$$

$$\mathbf{P}_{s+nS+1/s+nS} = \mathbf{F}_{s+1}\mathbf{P}_{s+nS/s+nS-1}\mathbf{F}_{s+1}' + \mathbf{G}_{s+1}\boldsymbol{\Sigma}_{s+1}\mathbf{G}_{s+1}' - \mathbf{K}_{s+nS}\boldsymbol{\Omega}_{s+nS}\mathbf{K}_{s+nS}', \quad (3.1.7)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{s+nS} = \mathbf{H}\mathbf{P}_{s+nS/s+nS-1}\mathbf{H}' \quad (3.1.8)$$

$$\mathbf{K}_{s+nS} = \mathbf{F}_{s+1}\mathbf{P}_{s+nS/s+nS-1}\mathbf{H}'\boldsymbol{\Omega}_{s+nS}^{-1} \quad (3.1.9)$$

avec les valeurs de démarrage

$$\widehat{\mathbf{X}}_{1/0} = \mathbf{0}_{rm \times 1} \text{ et } \mathbf{P}_{1/0} = \mathbf{F}_1\mathbf{W}_0\mathbf{F}_1' + \mathbf{G}_1\boldsymbol{\Sigma}_1\mathbf{G}_1', \quad (3.1.10)$$

où $\mathbf{W}_0 = E(\mathbf{X}_0\mathbf{X}_0')$. Cette dernière matrice de covariance peut être dérivée de (3.1.3) comme suit

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}_0)_{i,j} &= \sum_{k=i}^r \sum_{h=j}^r \phi_{i-1,k} \boldsymbol{\Gamma}_{i-k-j+h}^{(i-k-1)} \phi_{j-1,h}' - \sum_{k=i}^r \sum_{h=j}^r \phi_{i-1,k} \boldsymbol{\Psi}_{i-k-1,i-j+h-k-1} \boldsymbol{\Sigma}_{j-h} \boldsymbol{\theta}_{j-1,h-1}' \\ &\quad - \sum_{k=i}^r \sum_{h=j}^r \boldsymbol{\theta}_{i-1,k-1} \boldsymbol{\Sigma}_{i-k} \boldsymbol{\Psi}_{j-h-1,j-h-i+k-1} \phi_{j-1,h}' + \sum_{k=i}^r \boldsymbol{\theta}_{i-1,k-1} \boldsymbol{\Sigma}_{i-k} \boldsymbol{\theta}_{j-1,j+k-i-1}'. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

où le calcul des autocovariances $\boldsymbol{\Gamma}_h^{(s)}$ qui figurent dans (3.1.11) peut être facilement établi à partir de la méthode proposée dans le chapitre précédent.

Remarque 13 *Au lieu d'utiliser (3.1.10) et (3.1.11), la matrice de covariance initiale $\mathbf{P}_{1/0}$ peut être obtenue en résolvant l'équation de Lyapunov à temps discret périodique (DTPLE) suivante*

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{F}_1\mathbf{W}_0\mathbf{F}_1' + \mathbf{G}_1\boldsymbol{\Sigma}_1\mathbf{G}_1',$$

comme ont fait Jimenez et al., (1989, p. 235), où $\mathbf{P}_1 = \mathbf{W}_1$. Cependant, l'équation précédente est d'ordre $m \max(p, q+1)$ et il serait plus approprié d'utiliser (3.1.11) qui est basée sur $\mathbf{\Gamma}_0^{(S)}$, solution d'une équation de Lyapunov à temps discret périodique d'ordre mp . Une approche similaire, dans le cas univarié, a été employée par Mélard (1984) pour les modèles ARMA à coefficients constants et Azrak et Mélard (1998) pour les modèles ARMA à coefficients évolutifs dans le temps.

Les récursions (3.1.6)-(3.1.9) ci-dessus sont très efficaces et ont été précédemment employé pour l'évaluation de la fonction de vraisemblance des modèles *PARMA* univariés (Jimenez et al., 1989) et *PARMA* multivariés (Casals et al. 1998), avec une modification de l'étape d'initialisation. Cependant, la résolution de l'équation aux différences (3.1.7) requiert un nombre d'opérations d'ordre $O((mr)^3)$ par itération, qui peut être encombrante pour les modèles d'ordre élevé. En outre, la solution $\mathbf{P}_{t/t-1}$ doit être semi-définie positive, propriété qui n'est pas facile à préserver dans une résolution numérique de (3.1.7).

Comme nous avons déjà détaillé dans le Chapitre 1, les récursions de type-Chandrasekhar périodiques ont un potentiel pour la réduction de la complexité numérique associée aux récursions du filtre de Kalman correspondantes et par conséquent peuvent être utilisées pour évaluer $\mathbf{\Omega}_{s+nS}$ et $\hat{\mathbf{e}}_{s+nS}$ ainsi que la fonction de vraisemblance du modèle (2.2.1).

En adoptant la représentation espace d'états (3.1.4) du modèle *PVARMA* défini par (2.2.1), les équations récurrentes de type-Chandrasekhar périodiques sont données par

$$\mathbf{\Omega}_{t+S} = \mathbf{\Omega}_t + \mathbf{H}\mathbf{Y}_t\mathbf{M}_t\mathbf{Y}_t'\mathbf{H}', \quad (3.1.12)$$

$$\mathbf{K}_{t+S} = \mathbf{K}_t + \mathbf{F}_t\mathbf{Y}_t\mathbf{M}_t\mathbf{Y}_t'\mathbf{H}', \quad (3.1.13)$$

$$\mathbf{Y}_{t+1} = (\mathbf{F}_t - \mathbf{K}_t\mathbf{\Omega}_t^{-1}\mathbf{H})\mathbf{Y}_t, \quad (3.1.14)$$

$$\mathbf{M}_{t+1} = \mathbf{M}_t - \mathbf{M}_t\mathbf{Y}_t'\mathbf{H}'\mathbf{\Omega}_{t+S}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{Y}_t\mathbf{M}_t, \quad (3.1.15)$$

avec les valeurs de démarrage

$$\mathbf{\Omega}_s = \mathbf{H}\mathbf{P}_{s/s-1}\mathbf{H}' \text{ et } \mathbf{K}_s = \mathbf{F}_s\mathbf{P}_{s/s-1}\mathbf{H}, \quad s = 1, \dots, S,$$

où $\mathbf{P}_{s/s-1}$, $s = 1, \dots, S$ sont déterminées à partir de (3.1.7), (3.1.10) et (3.1.11), alors que $\mathbf{Y}_1$ et $\mathbf{M}_1$ sont obtenues en factorisant $\Delta^S\mathbf{P}_1$ en $\mathbf{Y}_1\mathbf{M}_1\mathbf{Y}_1'$. Rappelons que cette dernière factorisation n'admet pas une solution unique, pour cela nous proposons deux solutions efficaces selon la relation d'ordre entre S et r .

i) Pour le cas où $S < r$, posons (voir Chapitre 1, Section 5)

$$\Delta^S \mathbf{P}_1 = -\mathbf{L} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}_S^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_1^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{L}'$$

où L est donnée par

$$\mathbf{L} = \left[\mathbf{K}_S, \mathbf{F}_S \mathbf{K}_{S-1}, \mathbf{F}_S \mathbf{F}_{S-1} \mathbf{K}_{S-2}, \dots, \prod_{j=0}^{S-1} \mathbf{F}_{S-j} \mathbf{K}_1 \right]. \quad (3.1.16)$$

Il est clair que lorsque S est plus petit que r , l'équation aux différences de Riccati périodique non homogène (3.1.7) peut être remplacée par (3.1.15) qui est de dimension inférieure. Par exemple, pour $m = 1$, la complexité de la résolution de (3.1.15), en utilisant (3.1.16) comme valeur initiale, est de l'ordre $O(rS^2)$ qui est relativement simple, comparée à la résolution de (3.1.7) qui est à son tour de l'ordre $O(r^3)$.

ii) Pour le cas où $S \geq r$, la factorisation ci-dessus est inefficace. Cependant, nous proposons dans ce cas (voir Chapitre 1, Section 5), la factorisation suivante

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{F}_S \text{ et } \mathbf{M}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_{S/S-1} - \mathbf{W}_0 - \mathbf{P}_{S/S-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\Omega}_S^{-1} \mathbf{H}' \mathbf{P}'_{S/S-1}. \quad (3.1.17)$$

Bien que la *PRDE* (3.1.15) possède la même dimension que la *PRDE* (3.1.7), lorsque nous utilisons (3.1.17) comme valeurs de démarage, la différence entre elles est que la matrice $\mathbf{M}_t$ n'est pas nécessairement semi-définie positive, contrairement à la matrice $\mathbf{P}_{t/t-1}$. Ceci nous aide à alléger la complexité de calcul pour la résolution de l'équation (3.1.15) et nous assure la stabilité numérique de cette dernière.

Les deux algorithmes suivants récapitulent la procédure d'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance, des paramètres d'un modèle *PVARMA*, en utilisant le filtre de Kalman et le filtre de Chandrasekhar.

Algorithme 14 (Aknouche et Hamdi, 2008b)

- i) Commençons par une estimation initiale $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)} = \left(\text{vec} \left(\hat{\boldsymbol{\phi}}^{(0)} \right)', \text{vec} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} \right)', \text{vec} \left(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(0)} \right)' \right)'$ de $\boldsymbol{\beta} = (\text{vec}(\boldsymbol{\phi})', \text{vec}(\boldsymbol{\theta})', \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma})')'$.
- ii) Calculer $\mathbf{W}_0 = E(\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_0')$ de (3.1.11), où $\boldsymbol{\Gamma}_h^{(s)}$ est calculée à partir de l'Algorithme 10 (voir Chapitre 2, Section 2).
- iii) Calculer $\boldsymbol{\Omega}_{s+nS}$ et $\hat{\mathbf{e}}_{s+nS}$ pour $s = 1, \dots, S$ et $n = 0, \dots, N-1$ via les équations récurrentes de Kalman (3.1.6)-(3.1.10).

iv) Utiliser une procédure d'optimisation pour déterminer $\hat{\beta}$ qui minimise $-2\mathcal{L}(\beta; \mathbf{y})$. La fonction de vraisemblance $\mathcal{L}(\beta; \mathbf{y})$ peut être évaluée par la relation (3.1.2).

Algorithme 15 (Aknouche et Hamdi, 2008b)

- i) Commençons par une estimation initiale $\hat{\beta}^{(0)} = \left(\text{vec} \left(\hat{\phi}^{(0)} \right)', \text{vec} \left(\hat{\theta}^{(0)} \right)', \text{vec} \left(\hat{\Sigma}^{(0)} \right)' \right)'$ de $\beta = (\text{vec}(\phi)', \text{vec}(\theta)', \text{vec}(\Sigma)')'$.
- ii) Calculer $\mathbf{W}_0 = E(\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_0')$ de (3.1.11), où $\Gamma_h^{(s)}$ est obtenue à partir de l'Algorithme 10 (voir Chapitre 2, Section 2).
- iii) Calculer la valeur de démarrage $\mathbf{P}_{1/0} = \mathbf{F}_1 \mathbf{W}_0 \mathbf{F}_1' + \mathbf{G}_1 \Sigma_1 \mathbf{G}_1'$ des équations récurrentes de Kalman (3.1.6)-(3.1.9).
- iv) Calculer Ω_{s+nS} et $\hat{\mathbf{e}}_{s+nS}$ pour $s = 1, \dots, S$ et $n = 0, \dots, N-1$ via les équations récurrentes de Chandrasekhar (3.1.12)-(3.1.15).
- v) Utiliser une procédure d'optimisation pour déterminer $\hat{\beta}$ qui minimise $-2\mathcal{L}(\beta; \mathbf{y})$. La fonction de vraisemblance $\mathcal{L}(\beta; \mathbf{y})$ peut être évaluée par la relation (3.1.2).

Nous évaluons maintenant la performance de l'algorithme de type-Chandrasekhar (noté *P-CHAND*) (équations (3.1.12)-(3.1.15)) en le comparant à l'algorithme de Kalman (noté *KALAM*) (équations (3.1.6)-(3.1.9)), par rapport au nombre d'opérations élémentaires (division et multiplication) pour chaque itération. Le nombre total d'opérations $T(p, q, S, m, N)$, nécessaire pour une exécution complète est alors donné par $T(p, q, S, m, N) = I(p, q, S, m) + NSK(p, q, S, m)$, où $I(p, q, S, m)$ est le nombre d'opérations nécessaire pour calculer les valeurs initiales (i.e., pour les récursions à l'instant $t = 0$) et $K(p, q, S, m)$ désigne le nombre d'opérations nécessaire pour l'instant t , $1 \leq t \leq NS$. Puisque les itérations de démarrage sont les mêmes pour les deux filtre Kalman et Chandrasekhar, nous ne comparons que le nombre d'opérations $K(p, q, S, m)$ des deux algorithmes. Le Tableau 3.1.1 rapporte cette comparaison selon la relation d'ordre entre S et r . Le calcul de la matrice Ω_t^{-1} est nécessaire dans les deux algorithmes, ainsi le nombre d'opérations correspondant est dominé par un polynôme de l'ordre m^3 que nous dénotons par $O(m^3)$.

A partir du Tableau 3.1.1, il est clair que lorsque $S < r$, l'algorithme de Chandrasekhar périodique nécessite un nombre d'opérations d'ordre $O(m^3 S r^2)$ par itération, ce qui le rend plus efficace comparé à l'algorithme de Kalman qui à son tour nécessite un nombre plus grand d'opérations de l'ordre $O(m^3 r^3)$. Pour le cas où $S \geq r$, les deux algorithmes semblent

Tableau 3.1.1. Nombre d'opérations nécessaire par itération pour exécuter *P-CHAND* et *KALAM*

Algorithmes	Nombre d'opérations pour l'instant t , $1 \leq t \leq NS$ ($K(p, q, S, m)$)
<i>KALAM</i>	$m^3(3r^3 + 4r^2 + 4r) + m^2(r^2 + 2r) + O(m^3)$
<i>P-CHAND</i>	$S \geq r : m^3(7r^3 + 7r^2 + 3r) + m^2(r^2 + r) + O(m^3)$
	$S < r : m^3(3Sr^2 + 3S^2r + 2S^3 + 2r^2 + 4Sr + S^2 + 2r + S) + m^2(r^2 + 2r) + O(m^3)$

Tableau 3.1.2. Temps d'exécution pour l'évaluation de la vraisemblance par *P-CHAND* et *KALAM*

Algorithmes	Tailles	$PARMA_2(1, 1)$	$PARMA_3(1, 1)$	$PARMA_2(6, 1)$	$PARMA_2(7, 1)$
<i>KALAM</i>	100	.0226	.0203	.0378	.0398
	250	.0626	.0658	.1620	.1947
	500	.1408	.1399	.5179	.7366
<i>P-CHAND</i>	100	.0211	.0223	.0361	.0368
	250	.0661	.0709	.1486	.1800
	500	.1615	.1653	.4417	.5722

équivalent et tous les deux nécessitent un nombre d'opérations de l'ordre $O(m^3r^3)$, avec une supériorité légère en faveur du filtre de Kalman. Cependant, comme nous avons déjà souligné ci-dessus, la solution de *DTPL*E (3.1.15) dans l'algorithme de Chandrasekhar périodique n'est pas nécessairement semi-définie positive, une propriété qui garantit une stabilité numérique pour l'algorithme.

Comme le nombre théorique d'opérations de l'algorithme de Chandrasekhar semble supérieur à celui de l'algorithme de Kalman, ce qui n'est pas suffisant en pratique, nous les comparons sur la base du temps d'exécution en secondes pour évaluer la fonction de vraisemblance de plusieurs séries chronologiques générées à partir de divers modèles $PARMA_S(p, q)$ de longueurs 100, 250 et 500. Les moyennes de 1000 répétitions du temps d'exécution sont reportées dans le Tableau 3.1.2. En outre, les rapports du temps d'exécution de l'algorithme *P-CHAND* sur *KALAM* pour les mêmes séries sont rapportés dans le Tableau 3.1.3.

Nous observons que les résultats de la comparaison théorique donnée par le Tableau 3.1.1 sont conformes aux résultats donnés par le critère du temps d'exécution présenté dans les tableaux 3.1.2 et 3.1.3. En effet, l'algorithme *P-CHAND* est le plus rapide dans le cas où

Tableau 3.1.3. Rapport du temps d'exécution du *P-CHAND* sur *KALAM*

Tailles	$PARMA_2(1, 1)$	$PARMA_3(1, 1)$	$PARMA_2(6, 1)$	$PARMA_2(7, 1)$
100	.9693	1.0985	.9550	.9246
250	1.0559	1.0775	.9172	.9244
500	1.1470	1.1815	.8528	.7768

$S < r$, alors que dans le cas contraire, plus la taille de la série est grande, plus l'algorithme *KALAM* est rapide.

3.3 Bootstrap d'un modèle espace d'états périodique

La formulation espace d'états offre un cadre de modélisation informatiquement efficace, en particulier pour l'estimation des paramètres d'une large gamme de modèles de séries chronologiques (Harvey, 1989 ; Stoffer et Wall, 1991 ; Durbin et Koopman, 2001 et bibliographie intra). Il est bien connu que sous certaines conditions de régularités, les estimateurs des paramètres fournis par la méthode du maximum de vraisemblance et par les méthodes basées sur le filtre de Kalman sont consistants et asymptotiquement normalement distribués (cf., Ljung et Caines, 1979 ; Stoffer et Wall, 1991). En pratique, lorsque nous souhaitons faire de l'inférence, nous avons un nombre de données fini et nous utilisons en général la loi asymptotique comme approximation de la vraie loi inconnue. Toutefois, pour que la loi asymptotique soit une bonne image de la vraie loi des estimateurs des paramètres, il faut que le nombre de données soit suffisamment important, sinon l'approximation peut être faussée. Une des caractéristiques majeures des méthodes du bootstrap est qu'elles permettent très souvent d'obtenir une meilleure approximation de la vraie loi des estimateurs que celle donnée par la loi asymptotique, pour des échantillons dont le nombre d'observations n'est pas très grand. Stoffer et Wall (1991) ont proposé et étudié l'utilisation de la méthode non paramétrique bootstrap, suggérée par Efron (1979), pour estimer les paramètres des modèles espace d'états linéaires gaussiens à coefficients constants. L'objectif, dans cette section est d'adapter la méthode du bootstrap appliquée aux innovations d'un modèle espace d'états gaussien proposée par Stoffer et Wall (1991) pour l'estimation des paramètres d'un modèle périodique. Nous étudions par la suite, la performance de la méthode adaptée dans l'estimation des paramètres

d'un modèle espace d'états linéaire à coefficients périodiques.

3.3.1 La méthode

Considérons le modèle espace d'états (1.5.1) avec les deux hypothèses suivantes :

H1. x_0 , ϵ_t et e_t sont des vecteurs aléatoires mutuellement indépendants.

H2. x_0 , ϵ_t et e_t sont des vecteurs aléatoires normalement distribués.

Rappelons que la meilleure prévision linéaire $\hat{x}_{t/t-1}$ de la variable d'état x_t basée sur $y_1, y_2, \dots, y_{t-1}$ et le résidu $\hat{e}_t$ correspondant à y_t sont donnés par

$$\hat{x}_{t+1/t} = F_t \hat{x}_t + K_t \Omega_t^{-1} \hat{e}_t, \quad (3.2.1)$$

$$\hat{e}_t = y_t - H_t' \hat{x}_{t/t-1}, \quad (3.2.2)$$

Pour une réalisation $\mathbf{y} = (y_1', y_2', \dots, y_{NS}')'$ du modèle (1.5.1), la fonction de vraisemblance du paramètre $\beta = (vec(F)', vec(G)', vec(H'))'$ est donnée par

$$\mathcal{L}(\beta; \mathbf{y}) = (2\pi)^{-NS/2} |\det(\Gamma)|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{y}' \Gamma^{-1} \mathbf{y} \right\}, \quad (3.2.3)$$

où Γ est la matrice de covariance de $\mathbf{y}$. Sous l'hypothèse de normalité, la suite des résidus $\{\hat{e}_{s+nS}\}$ est une suite de vecteurs aléatoires indépendants gaussiens. Par conséquent, la fonction de vraisemblance (3.2.3) peut être écrite sous la forme suivante (Schweppe, 1965)

$$\mathcal{L}(\beta; \mathbf{y}) = (2\pi)^{-\frac{NS}{2}} \prod_{s=1}^S \prod_{n=0}^{N-1} (\det \Omega_{s+nS})^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^S \sum_{n=0}^{N-1} \hat{e}_{s+nS}' \Omega_{s+nS}^{-1} \hat{e}_{s+nS} \right\}, \quad (3.2.4)$$

où nous avons besoin d'évaluer Ω_{s+nS} et $\hat{e}_{s+nS}$ pour $s = 1, \dots, S$ et $n = 0, \dots, N-1$. Ceci peut être achevé en utilisant l'algorithme de type-Chandrasekhar périodique (Chapitre 1, Algorithme 2).

Avec ces notations, nous pouvons adapter une procédure de rééchantillonnage d'un modèle espace d'états gaussien à coefficients périodiques, similaire à celle proposée par Stoffer et Wall (1991) dans le cas d'un modèle espace d'états gaussien à coefficients constants. Cette procédure est définie par les cinq étapes suivantes :

Algorithme 16 (Guerbyenne et Hamdi)

- i) Estimer le vecteur des paramètres β avec la méthode du maximum de vraisemblance en utilisant l'expression (3.2.4) et une méthode d'optimisation. Nous notons par $\hat{\beta}$ l'EMV de β .
- ii) Exécuter l'algorithme de Chandrasekhar périodique (Chapitre 1, Algorithme 2) avec $\beta = \hat{\beta}$ et construire la suite des innovations standardisées $\hat{\varepsilon}_t(\hat{\beta}) = \Omega_t^{-1/2}(\hat{\beta}) \hat{e}_t(\hat{\beta})$.
- iii) Construire un nouvel échantillon bootstrappé $\{\hat{\varepsilon}_t^*(\hat{\beta}), t = 1, \dots, NS\}$ de la suite des innovations standardisées estimées $\{\hat{\varepsilon}_t(\hat{\beta}), t = 1, \dots, NS\}$.
- iv) Utiliser les relations (3.2.1) et (3.2.2) pour construire la série bootstrappée $\{y_t^*, t = 1, \dots, NS\}$ comme suit : Définir le vecteur $\xi_t = \left(\hat{x}_{t+1/t}', y_t' \right)'$ de dimension $(r + m) \times 1$. Par conséquent, de (3.2.1) et (3.2.2), Nous pouvons écrire

$$\xi_t = \begin{pmatrix} F_t & 0 \\ H_t' & 0 \end{pmatrix} \xi_{t-1} + \begin{pmatrix} K_t \Omega_t^{-1/2}(\hat{\beta}) \\ \Omega_t^{1/2}(\hat{\beta}) \end{pmatrix} \hat{\varepsilon}_t(\hat{\beta}), \quad (3.2.5)$$

Donc, pour construire la série bootstrappée $\{y_t^*, t = 1, \dots, NS\}$, résoudre (3.2.5) en remplaçant les innovations standardisées $\{\hat{\varepsilon}_t(\hat{\beta}), t = 1, \dots, NS\}$ par les innovations bootstrappées $\{\hat{\varepsilon}_t^*(\hat{\beta}), t = 1, \dots, NS\}$.

- v) Répéter un grand nombre de fois, T , les étapes (iii) et (iv) pour construire la suite $\{\hat{\beta}^{*(i)}, i = 1, \dots, T\}$. Enfin, estimer la distribution de $\hat{\beta}$ à partir de la distribution des $\hat{\beta}^{*(i)}$.

3.3.2 Etude de simulation

Pour étudier la performance de la procédure de bootstrap d'un modèle espace d'états gaussien à coefficients périodiques, exposé précédemment, nous proposons d'appliquer cette procédure sur des séries générées à partir de trois modèles *PARMA* de différents ordres et périodes. Pour chaque modèle nous effectuons deux simulations, la première en utilisant une série de petite taille ($NS = 60$) et la deuxième en utilisant une série de taille modérée ($NS = 100$). Nous avons varié la taille de la série pour voir l'influence de cette dernière sur la distribution empirique estimée. Dans chaque expérience le nombre de simulations bootstrap, T , est égal à 1000.

Afin de comparer la moyenne et l'écart type des valeurs estimées des paramètres par rapport à la moyenne et l'écart type de la distribution empirique des valeurs estimées des paramètres lors de l'utilisation de la méthode de bootstrap, nous avons simulé 1000 séries de taille 60 et 100, ceci pour les trois modèles.

Les tableaux (3.2.1)-(3.2.6) reportent les vraies valeurs des paramètres (TV), les estimations des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance (MLE), les moyennes (MEB) et les écarts types ($ESEB$) des distributions bootstrap ainsi que les moyennes (ME) et les écarts types (ESE) des estimations de 1000 séries générées à partir du modèle correspondant.

Tableau 3.2.1. Résultats de simulation du modèle $PAR_2(1)$ pour une taille 60.

	TV	MLE	MEB	$ESEB$	ME	ESE
$\phi_{1,1}$	-.7	-.6528	-.5954	.1783	-.6983	.1585
$\phi_{2,1}$	.5	.4653	.4285	.1559	.4971	.1434

Tableau 3.2.2. Résultats de simulation du modèle $PAR_2(1)$ pour une taille 100.

	TV	MLE	MEB	$ESEB$	ME	ESE
$\phi_{1,1}$	-.7	-.7341	-.7709	.1298	-.6961	.1211
$\phi_{2,1}$	.5	.3655	.4101	.1045	.4929	.1075

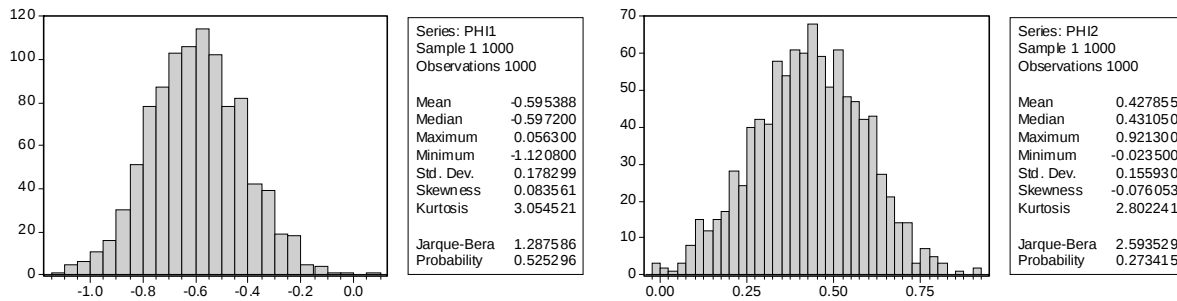


Figure 3.2.1. Histogrammes des paramètres estimés, du modèle $PAR_2(1)$, à partir des séries bootstrapées, pour une taille $NS = 60$ et un nombre de réplifications $T = 1000$.

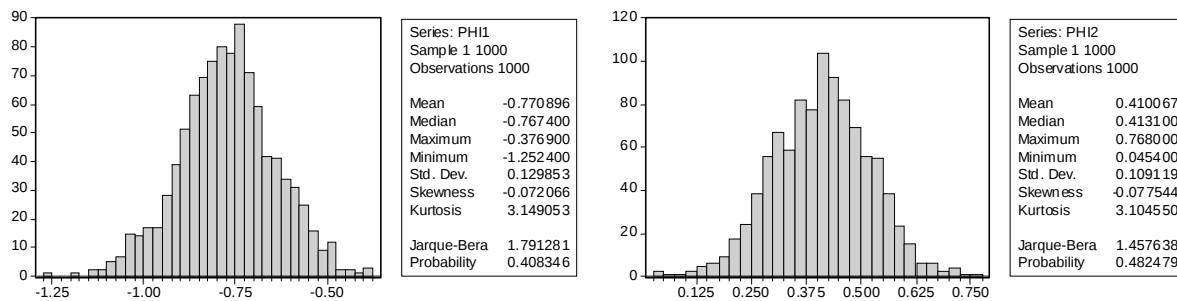


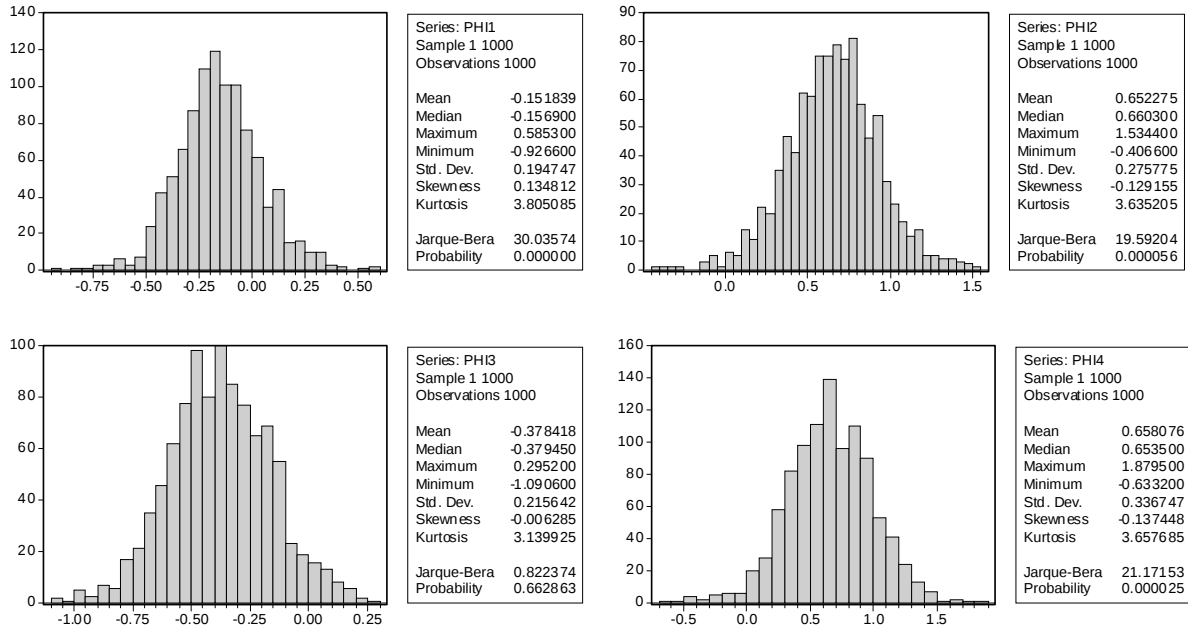
Figure 3.2.2. Histogrammes des paramètres estimés, du modèle $PAR_2(1)$, à partir des séries bootstrapées, pour une taille $NS = 100$ et un nombre de réplifications $T = 1000$.

Tableau 3.2.3. Résultats de simulation du modèle $PAR_4(1)$ pour une taille 60.

	TV	MLE	MEB	$ESEB$	ME	ESE
$\phi_{1,1}$	-.4	-.2259	-.1518	.1947	-.3967	.2511
$\phi_{2,1}$	.2	.5796	.6523	.2758	.1995	.2547
$\phi_{3,1}$	-.7	-.4629	-.3784	.2156	-.6981	.2639
$\phi_{4,1}$	.5	.6636	.6581	.3367	.4999	.2119

Tableau 3.2.4. Résultats de simulation du modèle $PAR_4(1)$ pour une taille 100.

	TV	MLE	MEB	$ESEB$	ME	ESE
$\phi_{1,1}$	-.4	-.3575	-.4222	.1310	-.3941	.2106
$\phi_{2,1}$	.2	.3035	.2571	.1601	.2025	.2111
$\phi_{3,1}$	-.7	-.7458	-.7652	.2009	-.6999	.2253
$\phi_{4,1}$	.5	.6092	.6110	.1156	.5051	.1915

Figure 3.2.3. Histogrammes des paramètres estimés, du modèle $PAR_4(1)$, à partir des séries bootstrapées, pour une taille $NS = 60$ et un nombre de répliques $T = 1000$.

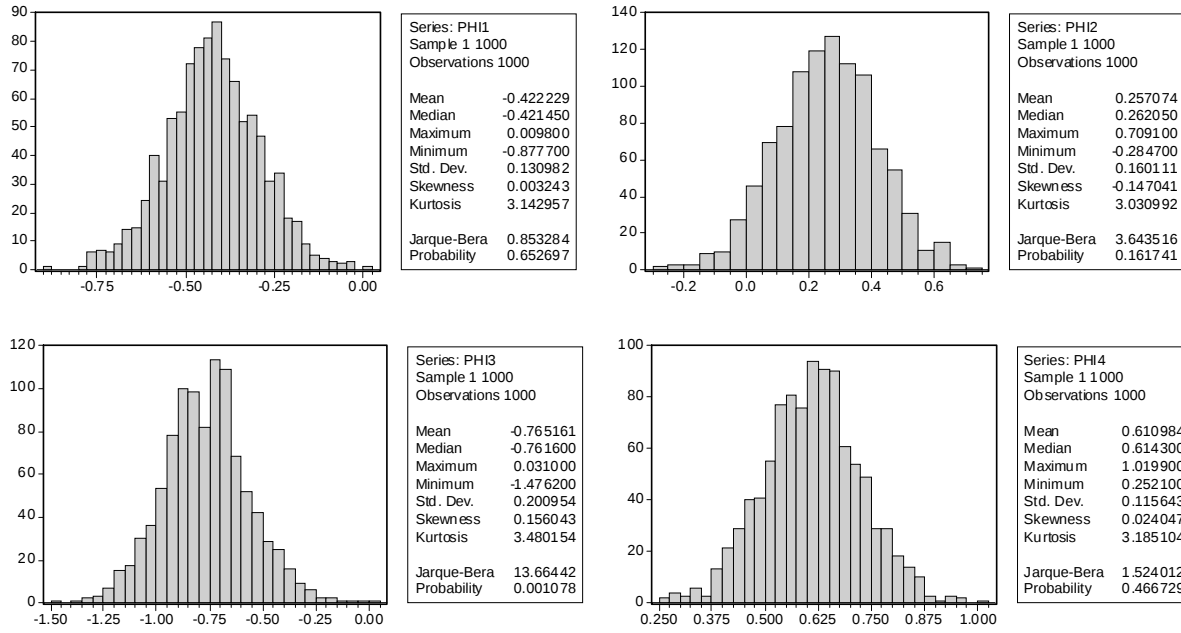


Figure 3.2.4. Histogrammes des paramètres estimés, du modèle $PAR_4(1)$, à partir des séries bootstrapées, pour une taille $NS = 100$ et un nombre de réplifications $T = 1000$.

Tableau 3.2.5. Résultats de simulation du modèle $PARMA_2(1, 1)$ pour une taille 60.

	TV	MLE	MEB	$ESEB$	ME	ESE
$\phi_{1,1}$	.9	.8399	.8176	.2717	.8786	.1572
$\phi_{2,1}$	.7	.5677	.5481	.0985	.6900	.1151
$\theta_{1,1}$	-.75	-.9559	-1.0736	.3366	-.8180	.2172
$\theta_{2,1}$	.9	1.0461	.4559	.1673	.8747	.1987

Tableau 3.2.6. Résultats de simulation du modèle $PARMA_2(1, 1)$ pour une taille 100.

	TV	MLE	MEB	$ESEB$	ME	ESE
$\phi_{1,1}$	.9	.9983	.9605	.1248	.8802	.1186
$\phi_{2,1}$	.7	.6633	.6459	.0679	.6899	.0880
$\theta_{1,1}$	-.75	-.6068	-.9626	.1832	-.7931	.1590
$\theta_{2,1}$	.9	.5876	.5773	.1174	.8563	.1380

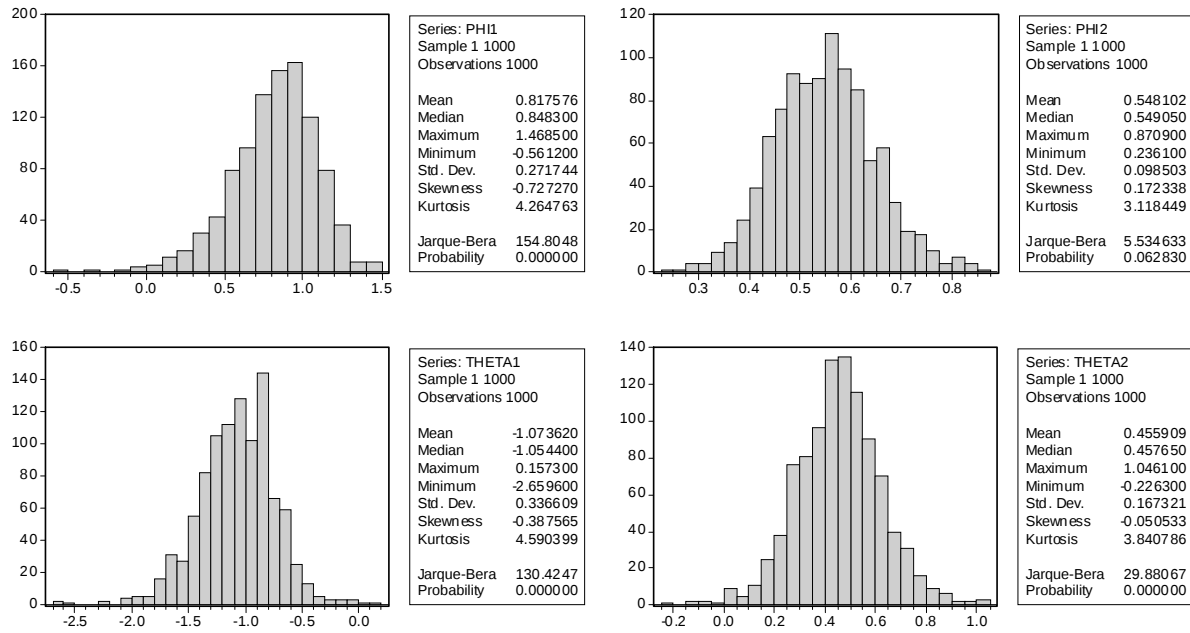


Figure 3.2.5. Histogrammes des paramètres estimés, du modèle $PARMA_2(1, 1)$, à partir des séries bootstrapées, pour une taille $NS = 60$ et un nombre de réplifications $T = 1000$.

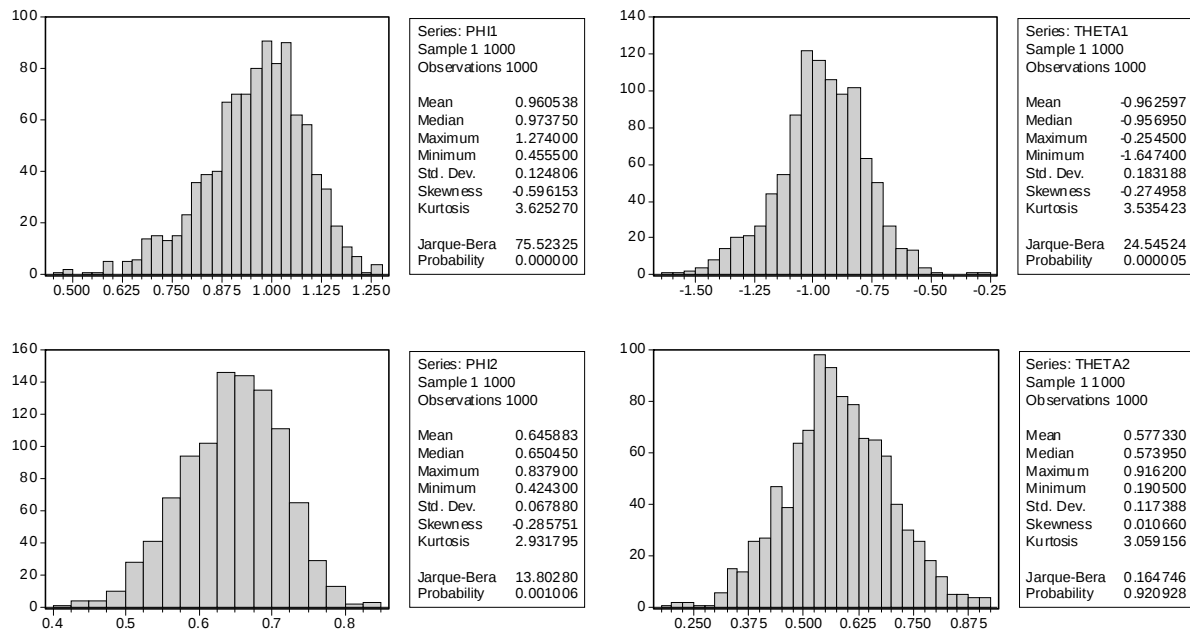


Figure 3.2.6. Histogrammes des paramètres estimés, du modèle $PARMA_2(1, 1)$, à partir des séries bootstrapées, pour une taille $NS = 100$ et un nombre de réplifications $T = 1000$.

Nous constatons des Tableaux (3.2.1)-(3.2.6) que les écarts types des distributions bootstrap sont proches des écarts types des vraies lois surtout pour la taille 100. Nous constatons également que lorsque la taille augmente les distributions bootstrap deviennent normales (Figures (3.2.1), (3.2.2) et (3.2.4)), ce qui est connu dans la théorie asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance (e.g., Ljung et Caines, 1979).

Les simulations effectuées confirment le bien-fondé théorique de l'algorithme 16 et mettent en évidence l'apport du bootstrap dans le problème de l'estimation des paramètres d'un modèle espace d'états à coefficients périodiques. En effet, à partir de cette étude de simulation, il est clair que l'application du bootstrap à un problème d'estimation des paramètres présente de nombreux intérêts dont celui de permettre l'obtention d'estimation des distributions plus proches des vraies lois que les distributions asymptotiques généralement utilisées qui sont les distributions normales (Figures (3.2.3), (3.2.5) et (3.2.6)), lorsque la taille de la série est petite ou modérée, ce qui est assez fréquent en pratique.

Nous notons aussi, que la performance de l'algorithme de Stoffer et Wall (1991), dans le cas des modèles espace d'états gaussiens à coefficients constants, est conservée dans le cas des modèles à coefficients périodiques.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons construit trois algorithmes dont deux pour estimer les paramètres d'un modèle *PVARMA* gaussien, à partir de sa représentation espace d'états. Il s'agit de la méthode du maximum de vraisemblance où les résidus sont obtenus par les équations récurrentes de Kalman ou de Chandrasekhar périodiques. Dans ces deux algorithmes, nous avons proposé, pour démarrer les équations de récurrences, d'utiliser la procédure de calcul des autocovariances, dérivée dans le Chapitre 2. Nous avons évalué la performance de l'algorithme de type-Chandrasekhar et nous l'avons comparé à l'algorithme de Kalman, par rapport au nombre d'opérations élémentaires (division et multiplication) pour chaque itération. Nous avons constaté à partir du nombre d'opérations nécessaire pour chaque itération correspondant aux deux algorithmes, que lorsque $S < r$, l'algorithme de Chandrasekhar périodique nécessite un nombre d'opérations d'ordre $O(m^3 S r^2)$ par itération, ce qui le rend plus efficace comparé à l'algorithme de Kalman qui à son tour nécessite un nombre plus grand d'opérations de l'ordre $O(m^3 r^3)$. Tandis que lorsque $S \geq r$, les deux algorithmes

semblent équivalent et tous les deux nécessitent un nombre d'opérations de l'ordre $O(m^3r^3)$, avec une supériorité légère en faveur du filtre de Kalman. Cependant, la solution de l'équation de Lyapounov à temps discret périodique (*DTPLE*) dans l'algorithme de Chandrasekhar périodique n'est pas nécessairement semi-définie positive, une propriété qui garantit une stabilité numérique pour l'algorithme. Nous avons fait également une comparaison entre les deux algorithmes sur la base du temps d'exécution en secondes pour évaluer la fonction de vraisemblance où nous avons remarqué que les résultats de la comparaison théorique donnés par le nombre d'opérations nécessaire pour chaque itération correspondant aux deux algorithmes, sont conformes aux résultats donnés par le critère du temps d'exécution.

Le troisième algorithme proposé concerne l'estimation des modèles espace d'états linéaires à coefficients périodiques où nous avons adapté la méthode du bootstrap appliquée aux innovations d'un modèle espace d'états Gaussien proposée par Stoffer et Wall (1991) pour l'estimation des paramètres d'un modèle à coefficients constants. Afin d'examiner la performance de l'algorithme proposé dans le cas des séries de petites tailles, nous avons présenté quelques résultats de simulation où nous avons constaté que l'algorithme adapté au cas périodique conserve les mêmes performances du cas classique.

Cet algorithme peut être appliqué lorsque nous souhaitons faire de l'inférence, en particulier lorsque nous souhaitons de tester une hypothèse. La fiabilité des tests en est accrue, notamment pour des séries de petites tailles. L'application de la procédure bootstrap a des conséquences importantes car le gain de précision qu'elle apporte peut avoir d'importants effets sur les décisions prises par un analyste.

Deuxième partie

Mélange de Modèles de Séries Chronologiques Périodiques

Chapitre 4

Mélange de Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques Périodiques

4.1 Introduction

Devant les problèmes de modélisation rencontrés pour certaines séries de données (séries environnementales, financières, monétaires, ...) les modèles non linéaires ont été envisagés. Plusieurs classes de modèles ont été proposées (modèles bilinéaires, modèles à seuils, modèles hétéroscédastiques, changement de régime et d'autres). L'étude de ces modèles n'est pas terminée mais a progressé de manière significative. En effet, il est bien connu que les modèles les plus populaires et les plus utilisés dans la modélisation de la volatilité instantanée dans les séries chronologiques financières sont les modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques (*ARCH*), introduit par Engle (1982) et leur extension *GARCH* (*ARCH* généralisés) de Bollerslev (1986). Leur caractérisation repose essentiellement sur le concept de variance conditionnelle. Divers modèles ont été proposés dans la littérature économique afin de capturer différentes caractéristiques additionnelles telles que la longue mémoire, le changement de régime et la périodicité dans la variance conditionnelle. Parmi les modèles proposés, la classe des modèles *GARCH* périodiques (*PGARCH*) introduite par Bollerslev et Ghysels (1996) qui a montré une grande capacité à capturer la périodicité dans la variance conditionnelle. Malheureusement, ces modèles sont connus par leur inconsistance dans la modélisation des séries chronologiques qui possèdent certaines caractéristiques telles

que la grande kurtosis, les valeurs aberrantes et les événements extrêmes. Wong et Li (2001) ont proposé d'ajouter plus de flexibilité à la famille des modèles *ARCH* en généralisant le modèle Mélange de Distributions Gaussienne de Transition (*GMTD*), étudié par Le et al. (1996), dans le cadre de séries chronologiques où le mélange de modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques (*MAR-ARCH*) à été proposé. Cette nouvelle classe de mélange de modèles a dominé la modélisation des séries chronologiques financières dans la dernière décennie et peut être considérée comme une alternative prometteuse aux modèles de type *ARCH* qui sont relativement difficile à estimer (voir par exemple Wong et Li, 2000, 2001 ; Zhang et al., 2006 ; Ausin et Galeano, 2007). Plusieurs extensions du mélange de modèles *ARCH* de Wong et Li (2001) ont été proposés dans la littérature des séries temporelles, en particulier les séries économiques, (mélange de modèles *GARCH*, Zhang et al., 2006 ; mélange de modèles multivariés *GARCH*, Bauwens et al., 2007 ; mélange de modèles *VAR*, Fong et al., 2007 ; mélange de modèles *GARCH* à seuil, Giannikis et al., 2008 ; et d'autres). Cependant, la plupart des formulations proposées considèrent les paramètres comme étant des constantes par rapport au temps ; par conséquent ils ne peuvent pas expliquer adéquatement le comportement des séries chronologiques dont la volatilité montre une certaine périodicité dans la fonction d'autocorrélation où cette dernière ne peut pas être expliquée par les modèles mélange à coefficients constants. Dans le même esprit de la formulation de Wong et Li (2001), notre but est de proposer un modèle qui peut représenter des séries chronologiques avec une structure d'autocorrélation périodique aussi bien que les caractéristiques mentionnées ci-dessus dans la variance conditionnelle. Nous proposons spécifiquement, un Mélange de modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques Périodiques (*MPARCH*). Ce mélange de modèles peut être combiné avec un mélange de modèles autorégressifs périodiques (*MPAR*) proposé par Shao (2006) afin de capturer la périodicité dans la moyenne conditionnelle et la variance conditionnelle.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. Dans la Section 2, nous proposons la classe de mélange de modèles *ARCH* périodiques. Nous étudions la condition sous la quelle un processus *MPARCH* soit périodiquement stationnaire du second ordre et nous obtenons, sous cette condition, l'expression de la variance d'un processus *MPARCH* dans la Section 3. La Section 4 est consacrée à l'étude de l'existence du moment d'ordre quatre. En outre, l'expression de ce moment, sous la condition établie, est obtenue. La Section 5 traite l'estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance tout en utilisant l'algorithme *EM* comme technique renommée d'optimisation de la vraisemblance. Dans la

Section 6, nous étudions le problème de l'identification des ordres d'un modèle *MPARCH*. Enfin, la section 7 présente une étude de simulation de la performance de l'algorithme *EM* et une application de la nouvelle classe de modèles *MPARCH* à la modélisation de la série journalière de l'indice *S&P 500*.

4.2 Mélange de modèles *ARCH* périodiques

Les mélanges de distributions sont un moyen d'obtenir des distributions relativement complexes, tout en s'appuyant à la base sur des lois très simples, comme les lois normales. Nous présentons la définition générale de ces mélanges pour nous restreindre rapidement au cas gaussien.

Définition d'un modèle de mélange

Définition 17

Une densité de mélange correspond à la superposition de densités plus simples. Soit Y et Z deux variables aléatoires et soient $\phi(y/z)$ la densité de la distribution de Y conditionnellement à Z et $h(z)$ la densité de la distribution de Z . La forme générale de la densité de mélange s'écrit comme suit

$$f(y) = \int \phi(y/z) h(z) dz.$$

Quand Z ne prend qu'un ensemble fini de valeurs $\{1, \dots, K\}$, alors la distribution de Z est discrète et affecte une probabilité positive à chacune de ces valeurs. L'intégrale est alors remplacée par une somme pour donner une densité de mélange fini. Cette densité est définie par

$$f(y) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_k(y),$$

où $\phi_k(y) = \phi(y/Z = k)$ et $\lambda_k = P(Z = k)$. Ces probabilités λ_k sont appelées proportions du mélange et sont assujetties aux deux contraintes suivantes

$$\lambda_k > 0, \forall k \in \{1, \dots, K\} \text{ et } \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1.$$

Comme cas particulier, nous trouvons le mélange gaussien qui est très classique. Dans la situation multivariée, la variable aléatoire Y est dans $\mathbb{R}^n$, la densité de la $k^{\text{ième}}$ composante

du mélange ($k = 1, \dots, K$) s'écrit comme suit

$$\phi_k(y/\theta_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{|\Sigma_k|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y - \mu_k)' \Sigma_k^{-1} (y - \mu_k) \right\},$$

avec $\theta_k = (\mu_k', \text{vec}'(\Sigma_k))'$, μ_k est la moyenne de la $k^{\text{ième}}$ composante du mélange et Σ_k sa matrice de variance-covariance.

Finalement, la densité de mélange gaussien s'exprime alors par

$$f(y/\underline{\theta}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_k(y/\theta_k).$$

Cette dernière densité est paramétrée par le vecteur $\underline{\theta} = (\lambda', \theta_1', \dots, \theta_K')$, où λ est le vecteur des $K - 1$ premières proportions du mélange $(\lambda_1, \dots, \lambda_{K-1})'$.

Il est bien connu que la pratique statistique montre que, dans une étude statistique, il est assez rare que la loi d'une variable d'intérêt soit unique. En général, la loi globale est un mélange de plusieurs lois, chacune d'entre elles reflétant une attitude particulière vis-à-vis du problème étudié. Ce phénomène apparaît souvent, par exemple en séries chronologiques financières, lorsque l'on observe un histogramme avec plusieurs modes (cf., Tong, 1990; Le et al., 1996, Wong et Li, 2000 et 2001; etc....). L'analyse des séries temporelles repose sur la construction d'un modèle pour le processus stochastique sous-jacent. Celui-ci est ensuite utilisé d'un point de vue statistique, que ce soit pour analyser la structure du processus ou pour produire des prévisions. Parfois, il y a de bonnes raisons de supposer que les distributions conditionnelles de certaines séries chronologiques soient multimodales. Par conséquent, la densité conditionnelle est une densité de mélange.

Dans le paragraphe qui suit, une nouvelle classe de modèles de séries chronologiques périodiques appelée mélange de modèles *ARCH* périodiques (*MPARCH*), est présentée. Ces modèles se constituent d'un mélange de K modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques périodiques.

Mélange de modèles *ARCH* périodiques (*MPARCH*)

Rappelons qu'un processus $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$, suit un mélange de K modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques, d'ordres $q_1, q_2, \dots, q_K$, noté *MARCH* ($K; q_1, q_2, \dots, q_K$), s'il

est défini par

$$\begin{cases} F(y_t / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \Phi\left(\frac{y_t}{\sqrt{h_{k,t}}}\right), & t \in \mathbb{Z}, \\ h_{k,t} = \alpha_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{q_k} \alpha_i^{(k)} y_{t-i}^2, \end{cases}$$

où $\Phi(\cdot)$ et $F(\cdot / \mathcal{F}_{t-1})$ sont, respectivement, la distribution cumulative de la loi normale centrée réduite et la distribution cumulative conditionnelle de y_t , sachant le passé du processus et où $\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par les valeurs passées de y_s jusqu'au temps t .

Définition 18

Un processus stochastique $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$, suit un mélange de K modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques périodiques, de période S et d'ordres $q_1, q_2, \dots, q_K$, noté $MPARCH_S(K; q_1, q_2, \dots, q_K)$, s'il est défini par

$$\begin{cases} F(y_t / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \Phi\left(\frac{y_t}{\sqrt{h_{k,t}}}\right), & t \in \mathbb{Z}, \\ h_{k,t} = \alpha_{0,t}^{(k)} + \sum_{i=1}^{q_k} \alpha_{i,t}^{(k)} y_{t-i}^2, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

où $\Phi(\cdot)$ et $F(\cdot / \mathcal{F}_{t-1})$ sont, respectivement, la distribution cumulative de la loi normale centrée réduite et la distribution cumulative conditionnelle de y_t , sachant les valeurs passées du processus y_s jusqu'au temps $t-1$. Les paramètres $\alpha_{i,t}^{(k)}$, $i = 0, 1, \dots, q_k$, sont périodiques en t , de période S , i.e., $\alpha_{i,t+rS}^{(k)} = \alpha_{i,t}^{(k)}$, $i = 0, \dots, q_k$, $k = 1, \dots, K$, $r \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{Z}$. Pour exclure la possibilité d'avoir des variances conditionnelles négatives ou nulles, les conditions suivantes sur les $\alpha_{i,t}^{(k)}$, doivent être imposées : $\alpha_{0,t}^{(k)} > 0$, $k = 1, \dots, K$ et $t \in \mathbb{Z}$, et $\alpha_{i,t}^{(k)} \geq 0$, $i = 1, \dots, q_k$, $k = 1, \dots, K$ et $t \in \mathbb{Z}$. Finalement, les constantes λ_k , $k = 1, 2, \dots, K$, sont des réelles strictement positives tel que $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$.

Sans perdre de généralité, les constantes q_k peuvent être considérées comme constantes en k tout en posant $q = \max_k q_k$ et en prenant $\alpha_{i,t}^{(k)} = 0$ pour $i > q_k$. Il est clair que pour $K = 1$, nous obtenons la définition standard d'un processus autorégressif conditionnellement hétéroscédastique périodique, d'ordre q et de période S , noté $PARCH_S(q)$, qui est donnée par

$y_t = \sqrt{h_t} \zeta_t$, où $h_t := E(y_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha_{0,t} + \sum_{i=1}^q \alpha_{i,t} y_{t-i}^2$, et $\alpha_{i,t+rS} = \alpha_{i,t}$, $i = 0, \dots, q$, $r \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{Z}$ avec $\{\zeta_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires *i.i.d.* centrées réduites.

4.3 Condition de stationnarité périodique du second ordre

Nous allons chercher dans cette section, sous quelles conditions il existe des processus périodiquement stationnaires au second ordre vérifiant la définition 18. Il est clair qu'à partir de la définition d'un mélange de modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques périodiques, équations (4.2.1), la variance conditionnelle de y_t , sachant le passé jusqu'au temps $t - 1$, est donnée par

$$Var(y_t / \mathcal{F}_{t-1}) = E(y_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_{0,t}^{(k)} + \sum_{i=1}^q \alpha_{i,t}^{(k)} y_{t-i}^2 \right), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent, la variance du processus s'exprime alors par

$$\gamma_t(0) := E(y_t^2) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{0,t}^{(k)} + \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{i,t}^{(k)} E(y_{t-i}^2), \quad t \in \mathbb{Z},$$

cette dernière équation peut se réécrire comme suit

$$\gamma_t(0) = a_0(t) + a_1(t) \gamma_{t-1}(0) + a_2(t) \gamma_{t-2}(0) + \dots + a_q(t) \gamma_{t-q}(0), \quad (4.2.2)$$

où les coefficients $a_i(t) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{i,t}^{(k)}$, $i = 0, 1, \dots, q$, sont périodiques, de période S . Ainsi, la variance du processus satisfait une équation linéaire au différence d'ordre q , à coefficients périodiques.

De (4.2.1), il est clair que le processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est de moyenne nulle. Dans ce paragraphe, nous établissons une condition nécessaire et suffisante pour que le processus y_t soit périodiquement stationnaire au second ordre. À cette fin, nous définissons les $q \times q$ matrices périodiques suivantes

$$\text{et } (A_{0,T})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ -a_{j-i}(qT - i + 1), & \text{si } i < j, \\ 0, & \text{si } i > j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, q, \quad (4.2.3)$$

$$(A_{1,T})_{ij} = \begin{cases} a_{q+j-i}(qT - i + 1), & \text{si } i \geq j, \\ 0, & \text{si } i < j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, q.$$

Soit $\mathbb{S}$ ($\mathbb{S} \in \mathbb{N}$) le plus petit entier tel que $q\mathbb{S}$ soit le plus petit multiple commun de q et S . Nous pouvons voir que les matrices $A_{0,T}$ et $A_{1,T}$ sont $\mathbb{S}$ -périodiques. En utilisant ces notations, nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Proposition 19 (Bentarzi et Hamdi, 2008a)

Le processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant une représentation $MPARCH_S(K; q, q, \dots, q)$ est périodiquement stationnaire au second ordre si et seulement si toutes les racines du polynôme (de degré q)

$$|Iz - \Psi|, \quad z \in \mathbb{C},$$

soient de module strictement inférieur à l'unité, où $\Psi = \prod_{j=0}^{S-1} B_{S-j}$. De plus, l'expression de la variance de tel processus est donnée par

$$\underline{\gamma}_T(0) = (I - \Psi)^{-1} \sum_{r=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{r-1} B_{T-j} \right) C_{T-r}, \quad T \in \mathbb{Z}, \quad (4.2.4)$$

où $\underline{\gamma}_T(0) = (\gamma_{qT}(0), \gamma_{qT-1}(0), \dots, \gamma_{qT-q+1}(0))'$, $C_T = A_{0,T}^{-1} c_T$, $B_T = A_{0,T}^{-1} A_{1,T}$, $c_T = (a_0(Tq), a_0(Tq-1), \dots, a_0(Tq-q+1))'$, et avec la convention $\prod_{j=x}^y B_j = I$, pour tout $x > y$.

Preuve.

a) **Condition nécessaire et suffisante.** Définissons, pour $T \in \mathbb{Z}$, les deux vecteurs périodiques suivants

$$\underline{\gamma}_T(0) = (\gamma_{qT}(0), \gamma_{qT-1}(0), \dots, \gamma_{qT-q+1}(0))',$$

et

$$c_T = (a_0(Tq), a_0(Tq-1), \dots, a_0(Tq-q+1))',$$

avec ces notations, nous pouvons réécrire l'équation (4.2.2) sous forme vectorielle. En effet, l'équation (4.2.2) est équivalente à l'équation linéaire au différence d'ordre 1 suivante

$$\underline{\gamma}_T(0) = B_T \underline{\gamma}_{T-1}(0) + C_T, \quad T \in \mathbb{Z}, \quad (4.2.5)$$

où la matrice $B_T = A_{0,T}^{-1} A_{1,T}$ et le vecteur colonne $C_T = A_{0,T}^{-1} c_T$, avec $A_{0,T}$ et $A_{1,T}$ sont données par (4.2.3). Il est évident que B_T et C_T sont $\mathbb{S}$ -périodiques tel que $1 \leq \mathbb{S} \leq S$.

i) Si $\mathbb{S} = 1$, i.e. q est un multiple de S , l'équation (4.2.5) devient une équation au différence non homogène classique

$$\underline{\gamma}_T(0) = B \underline{\gamma}_{T-1}(0) + C, \quad T \in \mathbb{Z},$$

où il est clair que B soit égale à $\Psi = A_{0,1}^{-1} A_{1,1}$. Par conséquent, une condition nécessaire et suffisante pour que cette dernière équation au différence non homogène classique, admet une solution finie est que toutes les racines du polynôme (de degré q) $|Iz - \Psi| = 0$, soient de module strictement inférieur à l'unité.

ii) Si $1 < \mathbb{S} \leq S$, nous définissons pour tout $T \in \mathbb{Z}$, les deux vecteurs, de dimension $q\mathbb{S}$, suivants

$$\underline{\Gamma}_\tau(0) = \left(\gamma'_{1+\mathbb{S}\tau}(0), \gamma'_{2+\mathbb{S}\tau}(0), \dots, \gamma'_{\mathbb{S}+\mathbb{S}\tau}(0) \right)',$$

et

$$\underline{C}_\tau = (C'_{1+\mathbb{S}\tau}, C'_{2+\mathbb{S}\tau}, \dots, C'_{\mathbb{S}+\mathbb{S}\tau})', \tau \in \mathbb{Z}.$$

Nous pouvons maintenant, réécrire l'équation (4.2.5) sous la forme équivalente

$$\underline{V} \underline{\Gamma}_\tau(0) = \underline{W} \underline{\Gamma}_{\tau-1}(0) + \underline{C}_\tau, \quad \tau \in \mathbb{Z}, \quad (4.2.6)$$

où les matrices, de dimension $q\mathbb{S} \times q\mathbb{S}$, $\underline{V}$ et $\underline{W}$, sont données par

$$(\underline{V})_{ij} = \begin{cases} I, & \text{si } i = j, \\ -B_i, & \text{si } i = j + 1, \\ \underline{0}, & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, \mathbb{S},$$

et

$$(\underline{W})_{ij} = \begin{cases} B_1, & \text{si } i = 1 \text{ si } j = \mathbb{S}, \\ \underline{0}, & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, \mathbb{S}.$$

Comme la matrice $\underline{V}$ est régulière ($\det \underline{V} = 1$), alors nous pouvons réécrire (4.2.5) comme suit

$$\underline{\Gamma}_\tau(0) = \underline{V}^{-1} \underline{W} \underline{\Gamma}_{\tau-1}(0) + \underline{V}^{-1} \underline{C}_\tau, \quad \tau \in \mathbb{Z},$$

où nous avons une équation au différence non homogène classique d'ordre un. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que cette dernière équation admette une solution finie est que toutes les racines du polynôme (de degré q) $|Iz - \underline{V}^{-1} \underline{W}| = 0$, soient de module strictement inférieur à l'unité. De plus, on peut facilement vérifier que les éléments de la matrice $\underline{V}^{-1} \underline{W}$ sont donnés par

$$(\underline{V}^{-1} \underline{W})_{ij} = \begin{cases} \prod_{s=0}^{i-1} B_{\mathbb{S}-s}, & \text{si } j = \mathbb{S}, \\ \underline{0}, & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, \mathbb{S},$$

et par conséquent, nous avons $\left| Iz - \prod_{s=0}^{S-1} B_{\mathbb{S}-s} \right| = |Iz - \Psi| = 0$.

b) **Expression de la variance.** Par $S-1$ remplacements successifs dans (4.2.5) et en tenant compte de la périodicité de la matrice B_T et le vecteur C_T , nous obtenons

$$(I - \Psi) \underline{\gamma}_T(0) = \sum_{r=0}^{S-1} \prod_{j=0}^{r-1} B_{T-j} C_{T-r}.$$

Donc, sous la condition établie dans la proposition 1, le vecteur périodique $\underline{\gamma}_T(0)$ est donné par (4.2.4). $\square$

Remarque 20 Dans le modèle $(2, 1)$ la distribution conditionnelle du processus est donnée par un mélange des distributions normales. Chacune de ces distributions possède une variance périodique. De la proposition 19, nous pouvons voir qu'il peut y avoir des processus de type $(2, 1)$ périodiquement stationnaires au second ordre quoique quelques composantes du mélange et/ou quelques périodes ne soient pas stationnaires au second ordre.

Corollaire 21 (Bentarzi et Hamdi, 2008a)

Le processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant une représentation $MPARCH_S(K; 1, 1, \dots, 1)$ est périodiquement stationnaire au second ordre si et seulement si

$$\prod_{s=1}^S \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,s}^{(k)} < 1.$$

De plus, l'expression de sa variance est alors donnée par

$$\gamma_t(0) = \sum_{r=0}^{S-1} \prod_{j=0}^{r-1} \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,t-j}^{(k)} \right) \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{0,t-r}^{(k)} \right) / \left(1 - \prod_{s=1}^S \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,s}^{(k)} \right), \quad (4.2.7)$$

avec la convention $\prod_{j=x}^y B_j = I$, pour tout $x > y$.

Preuve.

a) **Condition nécessaire et suffisante.** Dans ce cas particulier où $q = 1$, nous avons $\mathbb{S} = S$ et les matrices $A_{0,T}$ et $A_{1,T}$ sont réduites respectivement à 1 et $a_1(T)$. Par conséquent, $B_T = a_1(T)$ est périodique, de période S , donc la condition nécessaire et suffisante est réduite à $\prod_{s=1}^S \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,s}^{(k)} < 1$. Notons que cette condition devient, pour $S = 1$, $\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_1^{(k)} < 1$, condition nécessaire et suffisante connue, de stationnarité du second ordre d'un mélange de K modèles $ARCH$ d'ordre un (voir par exemple Wong et Li, 2001; Zhang et al, 2006). Notons également que cette condition est réduite, pour $K = 1$, à $\prod_{s=1}^S \alpha_{1,s} < 1$, condition connue de stationnarité périodique du second ordre, d'un modèle $ARCH$ périodique d'ordre un.

b) **Expression de la variance.** Dans le cas où $q = 1$, nous avons

$$\Psi = \prod_{s=1}^S a_1(s) = \prod_{s=1}^S \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,s}^{(k)}, \quad B_T = a_1(T) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,T}^{(k)}$$

et

$$C_T = c_T = a_0(T) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{0,T}^{(k)}.$$

Donc, l'expression de la variance du processus $MPARCH_S(K; 1, 1, \dots, 1)$ est donnée par (4.2.7). Cette expression devient

i) Pour $K = 1$ et sous la condition $\prod_{s=1}^S \alpha_{1,s} < 1$

$$\gamma_t(0) = \sum_{r=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{r-1} \alpha_{1,t-j} \right) \alpha_{0,t-r} \Bigg/ \left(1 - \prod_{s=1}^S \alpha_{1,s} \right)$$

qui est l'expression de la variance d'un processus $ARCH(1)$ périodiquement stationnaire au second ordre.

ii) Pour $S = 1$ et sous la condition

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_1^{(k)} < 1 \quad \gamma(0) = \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_0^{(k)} \right) \Bigg/ \left(1 - \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_1^{(k)} \right)$$

qui est l'expression de la variance d'un modèle $MARCH(K; 1, 1, \dots, 1)$ classique, stationnaire au second ordre. $\square$

4.4 Moment d'ordre quatre d'un processus $MPARCH$ périodiquement stationnaire du second ordre

Afin d'établir une condition nécessaire et suffisante d'existence du moment d'ordre quatre, $E(y_t^4)$, d'un processus périodiquement stationnaire du second ordre $MPARCH$ d'ordre deux, nous avons besoin d'introduire les matrices de dimension $q^* \times q^* = (S-1) \times (S-1)$ suivantes

$$(G_{0,T})_{ij} = \begin{cases} \varphi_0(q^*T - i + 1), & \text{si } i = j, \\ -\varphi_{j-i}(q^*T - i + 1), & \text{si } i < j, \\ 0, & \text{si } i > j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, q^*,$$

(4.3.1)

et

$$(G_{1,T})_{ij} = \begin{cases} \varphi_{q^*+j-i}(q^*T - i + 1), & \text{si } i \leq j, \\ 0, & \text{si } i > j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, q^*,$$

où les coefficients périodiques $\varphi_r(t)$ sont donnés par

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} 1 - 6 \frac{b_{1,2}(t)}{(1-\Psi_2)} \left(\prod_{j=1}^{S-2} a_2(t-j) \right) a_1(t+1), & r = 0, \\ 3b_{1,1}(t) + 6 \frac{b_{1,2}(t)}{(1-\Psi_2)} \left(\prod_{j=1}^{S-1} a_2(t-j) \right) a_1(t), & r = 1, \\ 3b_{2,2}(t) + 6 \frac{b_{1,2}(t) a_1(t-1)}{(1-\Psi_2)}, & r = 2, \\ 6 \frac{b_{1,2}(t)}{(1-\Psi_2)} \left(\prod_{j=1}^{r-2} a_2(t-j) \right) a_1(t-r+1), & 3 \leq r \leq S-1, \end{cases} \quad (4.3.2)$$

avec

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \prod_{s=1}^S \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{2,s}^{(k)} \right), \\ a_i(t) &= \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{i,t}^{(k)}, \quad i = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

et

$$b_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{i,t}^{(k)} \alpha_{j,t}^{(k)}, \quad i, j = 0, 1, 2.$$

Comme les coefficients $\varphi_r(t)$ sont périodiques, de période S , il est clair que les matrices $G_{0,T}$ et $G_{1,T}$ soient également périodiques de période S . Soit

$$\begin{aligned} C_t &= 3b_{0,0}(t) + 6b_{0,1}(t)E(y_{t-1}^2) + 6b_{0,2}(t)E(y_{t-2}^2) \\ &\quad + \frac{6b_{1,2}(t)}{(1-\Psi_2)} \sum_{r=1}^S \left(\prod_{j=1}^{r-1} a_2(t-j) \right) a_0(t-r) E(y_{t-r-1}^2). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

En utilisant ces notations, nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Proposition 22 (Bentarzi et Hamdi, 2008a)

Si $\Psi_2 < 1$, alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ périodiquement stationnaire au second ordre satisfaisant une représentation S -périodique $MPARCH(K; 2, 2, \dots, 2)$, avec $S > 2$, possède un moment d'ordre quatre fini est que toutes les racines du polynôme (de degré $q^ = S - 1$)*

$$|Iz - \Omega|, \quad z \in \mathbb{C},$$

soient de module strictement inférieur à l'unité, où $\Omega = \prod_{j=0}^{S-1} F_{S-j}$. Par ailleurs, l'expression de $\xi_t = E(y_t^4)$, sous cette condition, est donnée par

$$\xi_T = (I - \Omega)^{-1} \sum_{r=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{r-1} F_{T-j} \right) D_{T-r}, \quad T \in \mathbb{Z}, \quad (4.3.4)$$

où $D_T = G_{0,T}^{-1} \underline{C}_T$, $\underline{C}_T = (C_{q^*T}, C_{q^*T-1}, \dots, C_{q^*T-q^*+1})'$, $\underline{\xi}_T = (\xi_{q^*T}, \xi_{q^*T-1}, \dots, \xi_{q^*T-q^*+1})'$ et la matrice périodique $F_T = G_{0,T}^{-1} G_{1,T}$.

Preuve. De la représentation (4.2.1), il est facile de voir que le moment conditionnel d'ordre quatre de y_t , sachant le passé du processus jusqu'au temps $t-1$, est donné par

$$E(y_t^4 / \mathcal{F}_{t-1}) = 3 \sum_{k=1}^K \lambda_k h_{k,t}^2,$$

et par conséquent le moment d'ordre quatre vérifie la relation suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} E(y_t^4) &= \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_{0,t}^{(k)} \right)^2 + 2E(y_{t-1}^2) \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{0,t}^{(k)} \alpha_{1,t}^{(k)} \\ &\quad + 2E(y_{t-2}^2) \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{0,t}^{(k)} \alpha_{2,t}^{(k)} + E(y_{t-1}^4) \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_{1,t}^{(k)} \right)^2 \\ &\quad + E(y_{t-2}^4) \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_{2,t}^{(k)} \right)^2 + 2E(y_{t-1}^2 y_{t-2}^2) \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,t}^{(k)} \alpha_{2,t}^{(k)}. \end{aligned}$$

Posons $b_{i,j}(t) = \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{i,t}^{(k)} \alpha_{j,t}^{(k)} \right)$, $i, j = 0, 1, 2$, nous pouvons réécrire cette dernière équation comme suit

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} E(y_t^4) &= b_{0,0}(t) + 2b_{0,1}(t)E(y_{t-1}^2) + 2b_{0,2}(t)E(y_{t-2}^2) \\ &\quad + b_{1,1}(t)E(y_{t-1}^4) + b_{2,2}(t)E(y_{t-2}^4) + 2b_{1,2}(t)E(y_{t-1}^2 y_{t-2}^2), \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

où nous avons besoin d'évaluer $E(y_{t-1}^2 y_{t-2}^2)$. Ceci peut être achevé par $S-1$ remplacements successifs dans l'expression suivante

$$E(y_{t-1}^2 y_{t-2}^2) = a_0(t-1)E(y_{t-2}^2) + a_1(t-1)E(y_{t-2}^4) + a_2(t-1)E(y_{t-2}^2 y_{t-3}^2), \quad (4.3.6)$$

et tout en tenant compte de la périodicité des coefficients $a_i(t)$, $i = 0, 1, 2$. Nous obtenons après certaines manipulations

$$\begin{aligned} E(y_{t-1}^2 y_{t-2}^2) &= \sum_{r=1}^S \prod_{j=1}^{r-1} a_2(t-j) a_0(t-r) E(y_{t-r-1}^2) \\ &\quad + \sum_{r=1}^S \prod_{j=1}^{r-1} a_2(t-j) a_1(t-r) E(y_{t-r-1}^4) \\ &\quad + \prod_{j=1}^S a_2(t-j) E(y_{t-1}^2 y_{t-2}^2). \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Posons $\Psi_2 = \prod_{j=1}^S a_2(t-j)$, alors nous avons pour $\Psi_2 < 1$

$$\begin{aligned} E(y_{t-1}^2 y_{t-2}^2) &= \frac{1}{1-\Psi_2} \sum_{r=1}^S \left(\prod_{j=1}^{r-1} a_2(t-j) \right) a_0(t-r) E(y_{t-r-1}^2) \\ &\quad + \frac{1}{1-\Psi_2} \sum_{r=1}^S \left(\prod_{j=1}^{r-1} a_2(t-j) \right) a_1(t-r) E(y_{t-r-1}^4). \end{aligned}$$

En remplaçant $E(y_{t-1}^2 y_{t-2}^2)$ par cette dernière expression dans l'équation (4.3.5), nous obtenons pour $S > 2$

$$\begin{aligned} &\left[1 - \frac{6b_{1,2}(t)(\prod_{j=1}^{S-2} a_2(t-j))a_1(t+1)}{1-\Psi_2} \right] E(y_t^4) \\ &= 3b_{0,0}(t) + 6b_{0,1}(t)E(y_{t-1}^2) + 6b_{0,2}(t)E(y_{t-2}^2) \\ &\quad + \frac{6b_{1,2}(t)}{1-\Psi_2} \sum_{r=1}^S \left(\prod_{j=1}^{r-1} a_2(t-j) \right) a_0(t-r) E(y_{t-r-1}^2) \\ &\quad + 3 \left[b_{1,1}(t) + \frac{2b_{1,2}(t)}{1-\Psi_2} \left(\prod_{j=1}^{S-1} a_2(t-j) \right) a_1(t) \right] E(y_{t-1}^4) \\ &\quad + 3 \left[b_{2,2}(t) + \frac{2b_{1,2}(t)}{1-\Psi_2} a_1(t-1) \right] E(y_{t-2}^4) \\ &\quad + \frac{6b_{1,2}(t)}{1-\Psi_2} \sum_{r=3}^{S-1} \left(\prod_{j=1}^{r-2} a_2(t-j) \right) a_1(t-r+1) E(y_{t-r}^4). \end{aligned}$$

Ainsi, le moment d'ordre quatre, $E(y_t^4)$, du processus $MPARCH_S(K; 2, 2, \dots, 2)$ satisfait l'équation aux différences linéaire non homogène à coefficients périodiques, d'ordre $q^* = S-1$, suivante

$$\varphi_0(t) E(y_t^4) = \sum_{r=1}^{S-1} \varphi_r(t) E(y_{t-r}^4) + C_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.3.8)$$

où les coefficients périodiques $\varphi_r(t)$ et C_t sont, respectivement, donnés par (4.3.2) et (4.3.3). Posons maintenant $\xi_t = E(y_t^4)$ et définissons, pour $T \in \mathbb{Z}$, les vecteurs périodiques, de dimension q^* , $\underline{\xi}_T = (\xi_{q^*T}, \xi_{q^*T-1}, \dots, \xi_{q^*T-q^*+1})'$, $\underline{C}_T = (C_{q^*T}, C_{q^*T-1}, \dots, C_{q^*T-q^*+1})'$, $D_T = G_0^{-1} \underline{C}_T$ et la matrice périodique $F_T = G_{0,T}^{-1} G_{1,T}$, nous pouvons alors réécrire l'équation (4.3.8) sous forme équivalente q^* -varié S -périodique

$$\underline{\xi}_T = F_T \underline{\xi}_{T-1} + D_T, \quad T \in \mathbb{Z}.$$

Cette équation aux différences stochastiques non homogène d'ordre un et à coefficient périodique est similaire à celle donnée par (4.2.5). Par conséquent, le reste de la preuve peut être facilement établi comme nous avons déjà fait pour la preuve de la *Proposition 3*. $\square$

Le résultat établi dans la *Proposition 22* est valable pour les modèles périodiques, de période supérieure ou égale à 3. Dans le paragraphe qui suit, nous dérivons des résultats

similaires pour les autres cas (voir Corollaire (23) pour $S = 2$ et Corollaire (25) pour le cas stationnaire). En effet, si $S = 2$, nous avons de (4.3.5) et (4.3.6)

$$\varphi_0(t) E(y_t^4) = \varphi_1(t) E(y_{t-1}^4) + C_t, \quad (4.3.9)$$

où les coefficients 2-periodiques $\varphi_r(t)$ et C_t sont donnés par

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} 1 - \frac{6b_{1,2}(t)}{1-\Psi_2} a_1(t-1) - 3b_{2,2}(t), & \text{si } r = 0, \\ \frac{6b_{1,2}(t)}{1-\Psi_2} a_2(t-1) a_1(t) + 3b_{1,1}(t), & \text{si } r = 1, \end{cases} \quad (4.3.10)$$

et

$$\begin{aligned} C_t = & 3b_{0,0}(t) + 6 \left[\frac{b_{1,2}(t)}{1-\Psi_2} a_0(t-1) + b_{0,2}(t) \right] E(y_t^2) \\ & + 6 \left[\frac{b_{1,2}(t)}{1-\Psi_2} a_2(t-1) a_0(t) + b_{0,1}(t) \right] E(y_{t-1}^2). \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

De l'équation aux différences non homogène à coefficients 2-periodiques (4.3.9), d'ordre 1, une condition nécessaire et suffisante pour que le processus périodiquement stationnaire au second ordre $MPARCH_2(K; 2, 2, \dots, 2)$ possède un moment d'ordre quatre fini, peut être facilement dérivée comme nous avons fait dans la Proposition 1, où nous obtenons le résultat suivant

Corollaire 23 (Bentarzi et Hamdi, 2008a)

Si $\Psi_2 < 1$, alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ périodiquement stationnaire au second ordre satisfaisant une représentation 2-périodique $MPARCH(K; 2, 2, \dots, 2)$, possède un moment d'ordre quatre fini est

$$\left| \frac{\varphi_1(2) \varphi_1(1)}{\varphi_0(2) \varphi_0(1)} \right| < 1.$$

Par ailleurs, l'expression du moment d'ordre quatre, sous cette condition, est donnée par

$$E(y_t^4) = \frac{\varphi_1(t) C_{t-1} + \varphi_0(t-1) C_t}{\varphi_0(t) \varphi_0(t-1) - \varphi_1(t) \varphi_1(t-1)}. \quad (4.3.12)$$

où les coefficients 2-periodiques $\varphi_r(t)$ et C_t sont donnés par (4.3.10) et (4.3.11).

Corollaire 24 (Bentarzi et Hamdi, 2008a)

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ périodiquement stationnaire au second ordre satisfaisant une représentation S -périodique $MPARCH(K; 1, 1, \dots, 1)$, possède un moment d'ordre quatre fini est

$$\prod_{j=1}^S \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,j}^{(k)2} \right) < \frac{1}{3^S}. \quad (4.3.13)$$

En outre, l'expression du moment d'ordre quatre est donnée sous cette condition par

$$\begin{aligned}
 E(y_t^4) = & \frac{\sum_{r=0}^{S-1} 3^{r+1} \left(\prod_{j=0}^{r-1} \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,t-j}^{(k)2} \right) \right) \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{0,t-r}^{(k)2} \right)}{1 - 3^S \prod_{j=1}^S \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,j}^{(k)2}} \\
 & + \frac{\sum_{r=0}^{S-1} 3^{r+1} \left(\prod_{j=0}^{r-1} \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,t-j}^{(k)2} \right) \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{0,t-r}^{(k)2} \alpha_{1,t-r}^{(k)2} \right) \gamma_{t-r-1}(0)}{1 - 3^S \prod_{j=1}^S \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,j}^{(k)2}}, \quad (4.3.14)
 \end{aligned}$$

où la variance du processus, $\gamma_t(0)$, est donnée par (4.2.7).

Preuve. Dans ce cas particulier où $q = 1$, nous avons

$$\frac{1}{3} E(y_t^4) = b_{0,0}(t) + 2b_{0,1}(t)E(y_{t-1}^2) + b_{1,1}(t)E(y_{t-1}^4).$$

Après $S - 1$ remplacements successifs dans cette dernière équation, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \left[1 - 3^S \prod_{s=1}^S \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,s}^{(k)2} \right) \right] E(y_t^4) \\
 & = \sum_{r=0}^{S-1} 3^{r+1} \prod_{j=0}^{r-1} b_{1,1}(t-j) [b_{0,0}(t-r) + b_{0,1}(t-r)E(y_{t-r-1}^2)]. \quad (4.3.15)
 \end{aligned}$$

En utilisant cette dernière relation, il est facile de montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus périodiquement stationnaire au second ordre $MPARCH_S(K; 1, 1, \dots, 1)$, possède un moment d'ordre quatre fini, est donnée par (4.3.13). De plus, il est clair, de la relation (4.3.15), que l'expression du moment d'ordre quatre, $E(y_t^4)$, du processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$, sous la condition (4.3.13) est donnée par (4.3.14). $\square$

Corollaire 25 (Bentarzi et Hamdi, 2008a)

Si $\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_2^{(k)} < 1$, alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ stationnaire du second ordre satisfaisant une représentation $MARCH(K; 2, 2, \dots, 2)$, possède un moment d'ordre quatre fini, est que les deux racines z_1 et z_2 de l'équation

$$z^2 - 3 \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_1^{(k)2} z - 3 \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_2^{(k)2} + \frac{6 \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_1^{(k)} \alpha_2^{(k)} \right) \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_1^{(k)} \right)}{1 - \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_2^{(k)} \right)} = 0, \quad (4.3.16)$$

soient de module strictement inférieur à l'unité. Par ailleurs, l'expression explicite du moment d'ordre quatre est, sous cette condition, donnée par

$$\begin{aligned}
E(y_t^4) = & \frac{3}{1 - 3 \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_1^{(k)2} + \alpha_2^{(k)2} \right) + \frac{2 \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_1^{(k)} \right) \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_1^{(k)} \alpha_2^{(k)} \right)}{1 - \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_2^{(k)}} \right)} \\
& \times \left\{ \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_0^{(k)2} + \frac{2 \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_0^{(k)} \right) \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_0^{(k)} \left(\alpha_1^{(k)} + \alpha_2^{(k)} \right) \right)}{1 - \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_1^{(k)} + \alpha_2^{(k)} \right)} \right. \\
& \left. + \frac{2 \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_0^{(k)} \right)^2 \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_1^{(k)} \alpha_2^{(k)} \right)}{\left(1 - \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_1^{(k)} + \alpha_2^{(k)} \right) \right) \left(1 - \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_2^{(k)} \right)} \right\}. \quad (4.3.17)
\end{aligned}$$

Preuve. Dans ce cas classique, i.e., $S = 1$, l'équation aux différences à coefficients périodiques (4.3.8) est réduite à une équation aux différences à coefficients constants. Plus précisément, de (4.3.5) et (4.3.7) nous avons

$$E(y_t^4) = \varphi_1 E(y_{t-1}^4) + \varphi_2 E(y_{t-2}^4) + C, \quad (4.3.18)$$

où les coefficients φ_r et C sont donnés par

$$\varphi_r = \begin{cases} 3b_{1,1}, & \text{si } r = 1, \\ 3b_{2,2} + \frac{6a_1b_{1,2}}{1-a_2}, & \text{si } r = 2, \end{cases}$$

et

$$C = 3b_{0,0} + 6 \left[b_{0,1} + b_{0,2} + \frac{b_{1,2}a_0}{1-a_2} \right] \gamma(0).$$

De (4.3.18), il est clair qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus stationnaire du second ordre satisfaisant une représentation $MARCH(K; 2, 2, \dots, 2)$, possède un moment d'ordre quatre fini est que les deux racines, z_1 et z_2 , de l'équation (4.3.16) soient de module strictement inférieur à l'unité. De plus, sous cette condition, nous avons

$$E(y_t^4) = \frac{3b_{0,0} + 6 \left[b_{0,1} + b_{0,2} + \frac{b_{1,2}a_0}{1-a_2} \right] \gamma(0)}{1 - 3 \left(b_{1,1} + b_{2,2} + \frac{2a_1b_{1,2}}{1-a_2} \right)}, \quad (4.3.19)$$

où la variance du processus, $\gamma(0) = E(y_t^2)$, peut être obtenue de la relation (4.2.4) qui sera réduite pour $q = 2$ et $a_i = \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_i^{(k)}$, $i = 0, 1, 2$, à l'équation aux coefficients constants suivante

$$\gamma(0) - a_1\gamma(0) - a_2\gamma(0) = a_0,$$

ainsi, nous avons $\gamma(0) = a_0 / (1 - a_1 - a_2)$. Par conséquent, en remplaçant $\gamma(0)$ par sa valeur dans (4.3.19), nous obtenons (4.3.17). $\square$

4.5 Estimation du maximum de vraisemblance via l'algorithme EM

Cette section est consacrée au problème de l'estimation des paramètres d'un modèle *MPARCH* par la méthode du maximum de vraisemblance. Il est bien connu que dans le cadre des mélanges, la résolution de l'équation de vraisemblance conduit à des équations non linéaires (voir l'équation (4.4.5) ci-dessous), donc généralement impossibles à résoudre sous forme explicite. L'évolution des moyens de calculs, grâce à l'informatique, a permis de surmonter graduellement cette difficulté. En effet, l'algorithme *EM* de Dempster et *al.* (1977) est une procédure générale pour maximiser la vraisemblance. Elle est adaptée à de nombreuses situations décrites sous forme de problèmes avec données incomplètes. Depuis cet article de référence, de nombreux chercheurs ont décrit cet algorithme, ces propriétés et parfois ses variantes (on pourra se reporter à McLachlan et Krishnan, 1997). Dans le cadre des séries chronologiques, cet algorithme a été exploité par plusieurs chercheurs (voir par exemple, Wong et Li, 2000 et 2001, pour des modèles de *MAR* et *MAR-ARCH*, respectivement ; Shao, 2006, pour le modèle de *MPAR*).

Pour procéder à l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance des paramètres d'un modèle *MPARCH* que nous avons présentés dans ce Chapitre, il est nécessaire d'avoir l'expression de la fonction de vraisemblance. Pour cela, soit $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{NS}, Z_1, Z_2, \dots, Z_{NS})$ et $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_{NS})$ le vecteur contenant, respectivement, les données complètes et les données manquantes, où $Z_t = (Z_{1,t}, Z_{2,t}, \dots, Z_{K,t})$ est un vecteur, de dimension K , dont chaque composante $Z_{k,t}$ est égale à 1 si l'observation y_t est générée par la $k^{ième}$ composante de la distribution conditionnelle et 0 ailleurs.

Soit $\underline{\theta} = (\underline{\lambda}', \theta'_{1,1}, \dots, \theta'_{1,S}, \theta'_{2,1}, \dots, \theta'_{2,S}, \dots, \theta'_{K,1}, \dots, \theta'_{K,S})'$, tel que $\theta_{k,s} = (\alpha_{0,s}^{(k)}, \alpha_{1,s}^{(k)}, \dots, \alpha_{q_k,s}^{(k)})'$, $s = 1, \dots, S$, $K = 1, \dots, K$, et $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{K-1})'$. Pour une réalisation donnée $y = (y_1, y_2, \dots, y_{NS})$ du modèle (4.2.1), la densité conjointe de (Z_t, y_t) est alors donnée par

$$\begin{aligned} f(y_t, z_t / \mathcal{F}_{t-1}) &= \prod_{k=1}^K \left[P(Z_{k,t} = z_{k,t}) \frac{1}{\sqrt{h_{k,t}}} \phi\left(\frac{y_t}{\sqrt{h_{k,t}}}\right) \right]^{z_{k,t}} \\ &= \prod_{k=1}^K \left[\frac{\lambda_k}{\sqrt{h_{k,t}}} \phi\left(\frac{y_t}{\sqrt{h_{k,t}}}\right) \right]^{z_{k,t}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction de vraisemblance du vecteur des paramètres $\underline{\theta}$ s'exprime donc

par

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{t=q+1}^{NS} f(y_t, z_t / \mathcal{F}_{t-1}) = \prod_{t=q+1}^{NS} \prod_{k=1}^K \left(\frac{\lambda_k}{\sqrt{2\pi} \sqrt{h_{k,t}}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_{k,t}}\right) \right)^{z_{k,t}}.$$

Nous utiliserons plutôt, pour des raisons de calcul, le logarithme naturel de la vraisemblance qui s'écrit comme suit

$$\mathcal{L}(\underline{\theta}) = \sum_{t=q+1}^{NS} \sum_{k=1}^K z_{k,t} \left(\ln \lambda_k - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \left(\ln h_{k,t} + \frac{y_t^2}{h_{k,t}} \right) \right). \quad (4.4.1)$$

Posons maintenant $t = s + \tau S$, pour $s = 1, \dots, S$, $\tau = 0, 1, \dots, N-1$, et $q+1 = s_0 + \tau_0 S$, $1 \leq s_0 \leq S$, et

$$\tau_0 = \begin{cases} \lfloor \frac{q+1}{S} \rfloor, & \text{si } s_0 \neq S, \\ \lfloor \frac{q+1}{S} \rfloor - 1, & \text{si } s_0 = S, \end{cases} \quad \text{et } \tau_1 = \begin{cases} \tau_0, & \text{si } s \geq s_0, \\ \tau_0 + 1, & \text{si } s < s_0, \end{cases}$$

où $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x . Avec ces notations, nous pouvons alors réécrire (4.4.1) comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{\theta}) = & C + \sum_{s=s_0}^S \sum_{k=1}^K z_{k,s+S\tau_0} \left(\ln \lambda_k - \frac{1}{2} \left(\ln h_{k,s+S\tau_0} + \frac{y_{s+S\tau_0}^2}{h_{k,s+S\tau_0}} \right) \right) \\ & + \sum_{\tau=\tau_0+1}^{N-1} \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^K z_{k,s+S\tau} \left(\ln \lambda_k - \frac{1}{2} \left(\ln h_{k,s+S\tau} + \frac{y_{s+S\tau}^2}{h_{k,s+S\tau}} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

avec $C = \frac{(q-NS)}{2} \ln(2\pi)$. Il est commode dans le reste de ce paragraphe, de réécrire la fonction log-vraisemblance, $\mathcal{L}(\underline{\theta})$, sous forme vectorielle. En définissant le vecteur $\underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau} = (1, y_{s-1+S\tau}^2, y_{s-2+S\tau}^2, \dots, y_{s-q+S\tau}^2)'$, nous pouvons donc réécrire $h_{k,s+S\tau}$ comme $\theta'_{k,s} \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau}$. Ainsi, en utilisant cette écriture vectorielle de $h_{k,s+S\tau}$, nous pouvons exprimer (4.4.2) sous forme vectorielle

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{\theta}) = & C + \sum_{s=s_0}^S \sum_{k=1}^K z_{k,s+S\tau_0} \left(\ln \lambda_k - \frac{1}{2} \left(\ln \left(\theta'_{k,s} \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau_0} \right) + \frac{y_{s+S\tau_0}^2}{\theta'_{k,s} \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau_0}} \right) \right) \\ & + \sum_{\tau=\tau_0+1}^{N-1} \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^K z_{k,s+S\tau} \left(\ln \lambda_k - \frac{1}{2} \left(\ln \left(\theta'_{k,s} \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau} \right) + \frac{y_{s+S\tau}^2}{\theta'_{k,s} \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau}} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Supposons pour l'instant, que les paramètres λ_k et $\theta_{s,k}$ sont connus et égal à $\lambda_k^{(i)}$ et $\theta_{s,k}^{(i)}$, respectivement. Les données manquantes $Z_{k,t}$ peuvent être remplacées par leurs espérances conditionnelles, sachant le vecteur des paramètres $\underline{\theta}$ et les données observées $y = (y_1, y_2, \dots, y_{NS})$.

La densité conditionnelle de $y_{s+S\tau}$ et $z_{k,s+S\tau}$, sachant le passé jusqu'à l'instant $t - 1 = s + S\tau - 1$, est donnée par

$$f(y_{s+S\tau}, z_{k,s+S\tau} / \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{\lambda_k}{\sqrt{h_{k,s+S\tau}}} \phi \left(\frac{y_{s+S\tau}}{\sqrt{h_{k,s+S\tau}}} \right).$$

Soit $\tau_{k,s+S\tau}$ dénote la probabilité conditionnelle que l'observation y_t soit générée par la $k^{\text{ième}}$ composante de la distribution conditionnelle du mélange, sachant le passé jusqu'à l'instant $t - 1$ et les estimations des paramètres $\lambda_k^{(i)}$ et $\theta_{s,k}^{(i)}$. Il est facile de vérifier que

$$\tau_{k,s+S\tau} = E \left(z_{k,s+S\tau} / \lambda_k^{(i)}, \theta_{s,k}^{(i)}, \mathcal{F}_{t-1} \right) = \frac{\frac{\lambda_k^{(i)}}{\sqrt{h_{k,s+S\tau}(\theta_{s,k}^{(i)})}} \phi \left(\frac{y_{s+S\tau}}{\sqrt{h_{k,s+S\tau}(\theta_{s,k}^{(i)})}} \right)}{\sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k^{(i)}}{\sqrt{h_{k,s+S\tau}(\theta_{s,k}^{(i)})}} \phi \left(\frac{y_{s+S\tau}}{\sqrt{h_{k,s+S\tau}(\theta_{s,k}^{(i)})}} \right)}.$$

Le processus de formulation des $\tau_{k,s+S\tau}$ est bien connu sous le nom de l'étape *E* (pour *Expectation*). Une fois que les données soient complètes, nous procédons à la deuxième étape de l'algorithme *EM*, à savoir l'étape *M* (pour *Maximization*). Après l'estimation des données manquantes, Z_t , le problème de l'estimation des paramètres peut être accompli par la résolution du système d'équations suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda_k} = 0, & k = 1, \dots, K - 1, \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}} = 0, & k = 1, \dots, K - 1 \text{ et } s = 1, \dots, S. \end{cases}$$

Les dérivées partielles de (4.4.3), par rapport aux paramètres inconnus λ_k et $\theta_{s,k}$, sous la contrainte $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$, sont données, pour $k = 1, \dots, K$ et $s = 1, \dots, S$, par

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda_k} = \sum_{t=q+1}^{NS} \left(\frac{z_{k,t}}{\lambda_k} - \frac{z_{K,t}}{\lambda_K} \right), \quad (4.4.4)$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}} = -\frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} z_{k,s+S\tau} \left(\frac{\underline{y}_{s,\tau}}{\theta'_{k,s} \underline{y}_{s,\tau}} - \frac{y_{s+S\tau}^2 \underline{y}_{s,\tau}}{\theta'_{k,s} \underline{y}_{s,\tau} \underline{y}'_{s,\tau} \theta_{k,s}} \right), \quad (4.4.5)$$

ainsi, les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres λ_k , $k = 1, \dots, K - 1$, sont alors donnés par

$$\hat{\lambda}_k = \frac{1}{NS - q} \sum_{t=q+1}^{NS} z_{k,t}, \quad \text{pour } k = 1, \dots, K - 1.$$

Pour les paramètres $\theta_{k,s}$, il n'existe pas de solution explicite de l'équation $\partial \mathcal{L}(\underline{\theta}) / \partial \theta_{k,s} = 0$. Pour cette raison, nous proposons d'utiliser la méthode Newton-Raphson, où nous avons besoin d'évaluer la dérivée seconde de la fonction de log vraisemblance, $\mathcal{L}(\underline{\theta})$, par rapport à $\theta_{k,s}$. Il est facile de montrer que, pour $k = 1, 2, \dots, K$, et $s = 1, 2, \dots, S$, nous avons

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s} \partial \theta'_{k,s}} = -\frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \frac{z_{k,s+S\tau}}{h_{k,s+S\tau}^3} (2y_{s+S\tau}^2 - h_{k,s+S\tau}) \left(\underline{y}_{s,\tau} \underline{y}'_{s,\tau} \right).$$

Finalement, partant d'une valeur initiale, $\theta_{k,s}^{(0)}$, du vecteur des paramètres $\theta_{k,s}$, l'estimation $\hat{\theta}_{k,s}$ du vecteur $\theta_{k,s}$ peut être obtenue d'une façon itérative, pour $k = 1, 2, \dots, K$, et $s = 1, 2, \dots, S$, par les équations suivantes

$$\theta_{k,s}^{(i+1)} = \theta_{k,s}^{(i)} + \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s} \partial \theta'_{k,s}} \right]_{\theta_{k,s} = \theta_{k,s}^{(i)}}^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}} \right]_{\theta_{k,s} = \theta_{k,s}^{(i)}}, \quad (4.4.6)$$

où $\theta_{k,s}^{(i)}$ est la valeur de $\theta_{k,s}$ dans la $i^{\text{ème}}$ itération. L'algorithme s'arrête dès que la log-vraisemblance devient stationnaire, c'est-à-dire dès que

$$\left| \mathcal{L}(\underline{\theta}^{(i+1)}) - \mathcal{L}(\underline{\theta}^{(i)}) \right| \leq \varepsilon,$$

avec ε une valeur arbitrairement petite. Dans la pratique, pour évaluer la dérivée seconde de la fonction log-vraisemblance dans (4.4.6), les variables $z_{k,s+S\tau}$ sont remplacées par leurs estimations $\tau_{k,s+S\tau}$ calculées dans l'étape précédente de l'algorithme *EM* (l'étape *E*). Par ailleurs, nous pouvons utiliser le principe de l'information manquante (Louis, 1982) pour calculer les écarts types des estimations. En effet, la matrice d'information observée, I_{ob} , peut être calculée à partir de la matrice d'information complète, I_c , et la matrice d'information manquante, I_m , avec la relation suivante

$$I_{ob} = I_c - I_m$$

où

$$I_c = E \left(- \frac{\partial^2 \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}'} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_n \right) \bigg|_{\underline{\theta} = \hat{\underline{\theta}}},$$

et

$$I_m = Var \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_n \right) \bigg|_{\underline{\theta} = \hat{\underline{\theta}}}.$$

Les formules pour calculer les matrices I_c et I_m sont données dans le paragraphe suivant.

Calcul de la matrice d'information complète

Dans le cas d'un modèle *MPARCH*, il est clair que la matrice d'information complète, $E \left(- \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}'} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}}$, est une matrice bloc diagonale de la forme suivante

$$I_c = \begin{pmatrix} A^{(\lambda)} & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & A^{(\theta_{1,1})} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & A^{(\theta_{1,S})} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \\ & & & & & A^{(\theta_{K,1})} \\ & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \cdots & & 0 & A^{(\theta_{K,S})} \end{pmatrix}$$

Le premier bloc $A^{(\lambda)}$ est une matrice carrée de dimension $K-1$, définie par

$$A^{(\lambda)} = E \left(- \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda \partial \lambda'} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(A_{k,l}^{(\lambda)} \right)_{k,l=1,\dots,K-1}.$$

Pour calculer les éléments, $A_{k,l}^{(\lambda)}$, $k, l = 1, \dots, K-1$, de la matrice $A^{(\lambda)}$ nous avons besoin d'évaluer la dérivée seconde de la fonction log-vraisemblance par rapport à λ . De l'équation (4.4.4), il est clair que, pour $k = 1, \dots, K-1$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial^2 \lambda_k} &= - \sum_{t=q+1}^{NS} \left(\frac{z_{k,t}}{\lambda_k^2} + \frac{z_{K,t}}{\lambda_K^2} \right) \\ &= - \sum_{s=s_0}^S \left(\frac{z_{k,s+S\tau_0}}{\lambda_k^2} + \frac{z_{K,s+S\tau_0}}{\lambda_K^2} \right) - \sum_{\tau=\tau_0+1}^{N-1} \sum_{s=1}^S \left(\frac{z_{k,s+S\tau}}{\lambda_k^2} + \frac{z_{K,s+S\tau}}{\lambda_K^2} \right), \end{aligned}$$

et pour $k, l = 1, \dots, K-1$ avec $k \neq l$, nous avons

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} = - \sum_{t=q+1}^{NS} \frac{z_{K,t}}{\lambda_K^2} = - \sum_{s=s_0}^S \frac{z_{K,s+S\tau_0}}{\lambda_K^2} - \sum_{\tau=\tau_0+1}^{N-1} \sum_{s=1}^S \frac{z_{K,s+S\tau}}{\lambda_K^2}.$$

Donc, pour $k = 1, \dots, K-1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} A_{k,k}^{(\lambda)} &= E \left(\sum_{t=q+1}^{NS} \left(\frac{z_{k,t}}{\lambda_k^2} + \frac{z_{K,t}}{\lambda_K^2} \right) \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \sum_{t=q+1}^{NS} \left(\frac{\tau_{k,t}}{\hat{\lambda}_k^2} + \frac{\tau_{K,t}}{\hat{\lambda}_K^2} \right) \\ &= \sum_{s=s_0}^S \left(\frac{\tau_{k,s+S\tau_0}}{\hat{\lambda}_k^2} + \frac{\tau_{K,s+S\tau_0}}{\hat{\lambda}_K^2} \right) + \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=\tau_0+1}^{N-1} \left(\frac{\tau_{k,s+S\tau}}{\hat{\lambda}_k^2} + \frac{\tau_{K,s+S\tau}}{\hat{\lambda}_K^2} \right), \end{aligned}$$

et pour $k, l = 1, \dots, K - 1$ avec $k \neq l$, nous obtenons

$$\begin{aligned} A_{k,l}^{(\lambda)} &= E \left(\sum_{t=q+1}^{NS} \frac{z_{K,t}}{\hat{\lambda}_K^2} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \sum_{t=q+1}^{NS} \frac{\tau_{K,t}}{\hat{\lambda}_K^2} \\ &= \sum_{s=s_0}^S \frac{\tau_{K,s+S\tau_0}}{\hat{\lambda}_K^2} + \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=\tau_0+1}^{N-1} \frac{\tau_{K,s+S\tau}}{\hat{\lambda}_K^2}. \end{aligned}$$

D'autre part, les matrices $A^{(\theta_{k,s})}$, pour $k = 1, \dots, K$ et $s = 1, \dots, S$, sont des matrices carrées de dimension $q + 1$ définies par

$$\begin{aligned} A^{(\theta_{k,s})} &= E \left(- \frac{\partial^2 \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s} \partial \theta'_{k,s}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} E \left(\frac{z_{k,s+S\tau}}{h_{k,s+S\tau}^3} (2 y_{s+S\tau}^2 - h_{k,s+S\tau}) (\underline{y}_{s,\tau} \underline{y}'_{s,\tau}) \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \frac{\tau_{k,s+S\tau}}{h_{k,s+S\tau}^3} (2 y_{s+S\tau}^2 - h_{k,s+S\tau}) (\underline{y}_{s,\tau} \underline{y}'_{s,\tau}). \end{aligned}$$

Calcul de la matrice d'information manquante

Afin de simplifier le calcul de la matrice d'information manquante, $I_m = Var \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}}$, il convient de diviser cette matrice comme suit

$$I_m = \begin{pmatrix} B^{(\lambda,\lambda)} & B^{(\lambda,\theta_{1,1})} & \dots & B^{(\lambda,\theta_{1,S})} & \dots & B^{(\lambda,\theta_{K,1})} & \dots & B^{(\lambda,\theta_{K,S})} \\ B^{(\theta_{1,1},\lambda)} & B^{(\theta_{1,1},\theta_{1,1})} & \dots & B^{(\theta_{1,1},\theta_{1,S})} & \dots & B^{(\theta_{1,1},\theta_{K,1})} & \dots & B^{(\theta_{1,1},\theta_{K,S})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots & \\ B^{(\theta_{1,S},\lambda)} & B^{(\theta_{1,S},\theta_{1,1})} & \dots & B^{(\theta_{1,S},\theta_{1,S})} & & & & B^{(\theta_{1,S},\theta_{K,S})} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ B^{(\theta_{K,1},\lambda)} & B^{(\theta_{K,1},\theta_{1,1})} & \dots & B^{(\theta_{K,1},\theta_{1,S})} & \dots & B^{(\theta_{K,1},\theta_{K,1})} & \dots & B^{(\theta_{K,1},\theta_{K,S})} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ B^{(\theta_{K,S},\lambda)} & B^{(\theta_{K,S},\theta_{1,1})} & \dots & B^{(\theta_{K,S},\theta_{1,S})} & \dots & B^{(\theta_{K,S},\theta_{K,1})} & \dots & B^{(\theta_{K,S},\theta_{K,S})} \end{pmatrix},$$

où les matrices $B^{(\lambda,\lambda)}$, $B^{(\theta_{k,s},\lambda)}$ et $B^{(\theta_{k,s},\theta_{l,\nu})}$, $s, v = 1, \dots, S$ et $k = 1, \dots, K$, sont, respectivement, de dimensions $(K - 1) \times (K - 1)$, $(q + 1) \times (K - 1)$ et $(q + 1) \times (q + 1)$.

Comme la matrice I_m est symétrique, pour l'évaluer il suffit d'évaluer sa matrice triangulaire inférieure.

Nous commençons toujours par le premier bloc $A^{(\lambda,\lambda)}$ qui est défini par

$$B^{(\lambda,\lambda)} = Var \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(B_{k,l}^{(\lambda,\lambda)} \right)_{k,l=1,\dots,K-1},$$

où les éléments $B_{k,l}^{(\lambda,\lambda)}$, $k, l = 1, \dots, K-1$, sont donnés par

$$\begin{aligned} B_{k,k}^{(\lambda,\lambda)} &= Var \left(\sum_{t=q+1}^{NS} \left(\frac{z_{k,t}}{\lambda_k} - \frac{z_{K,t}}{\lambda_K} \right) \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \sum_{t=q+1}^{NS} \left(\frac{\tau_{k,t}(1-\tau_{k,t})}{\hat{\lambda}_k^2} + \frac{\tau_{K,t}(1-\tau_{K,t})}{\hat{\lambda}_K^2} + 2 \frac{\tau_{k,t}\tau_{K,t}}{\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_K} \right) \end{aligned}$$

et pour $k \neq l$, nous avons

$$\begin{aligned} B_{k,l}^{(\lambda,\lambda)} &= Cov \left(\sum_{t=q+1}^{NS} \left(\frac{z_{k,t}}{\lambda_k} - \frac{z_{K,t}}{\lambda_K} \right), \sum_{t=q+1}^{NS} \left(\frac{z_{l,t}}{\lambda_l} - \frac{z_{K,t}}{\lambda_K} \right) \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \sum_{t=q+1}^{NS} \left(-\frac{\tau_{k,t}\tau_{l,t}}{\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_l} + \frac{\tau_{k,t}\tau_{K,t}}{\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_K} + \frac{\tau_{K,t}\tau_{l,t}}{\hat{\lambda}_K\hat{\lambda}_l} + \frac{\tau_{K,t}(1-\tau_{K,t})}{\hat{\lambda}_K^2} \right) \end{aligned}$$

Pour les matrices $B^{(\theta_{k,s},\theta_{l,s})}$, $s = 1, \dots, S$ et $k, l = 1, \dots, K$, il est facile de montrer que si $k = l$, nous avons

$$\begin{aligned} B^{(\theta_{k,s},\theta_{k,s})} &= Var \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \tau_{k,s+S\tau} (1-\tau_{k,s+S\tau}) \left(\frac{1}{\hat{\theta}'_{k,s} \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau}} - \frac{y_{s+S\tau}^2}{\hat{\theta}'_{k,s} \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau} \underline{\mathcal{Y}}'_{s,\tau} \hat{\theta}_{k,s}} \right)^2 \left(\underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau} \underline{\mathcal{Y}}'_{s,\tau} \right). \end{aligned}$$

et que si $k \neq l$, nous avons

$$\begin{aligned} B^{(\theta_{k,s},\theta_{l,s})} &= Cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}}, \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{l,s}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \tau_{k,s+S\tau} \tau_{l,s+S\tau} \left(\frac{\underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau}}{\hat{\theta}'_{k,s} \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau}} - \frac{y_{s+S\tau}^2 \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau}}{\hat{\theta}'_{k,s} \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau} \underline{\mathcal{Y}}'_{s,\tau} \hat{\theta}_{k,s}} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau}}{\hat{\theta}'_{l,s} \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau}} - \frac{y_{s+S\tau}^2 \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau}}{\hat{\theta}'_{l,s} \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau} \underline{\mathcal{Y}}'_{s,\tau} \hat{\theta}_{l,s}} \right)'. \end{aligned}$$

Notons que pour $s, \nu = 1, \dots, S$ et $k, l = 1, \dots, K$, les matrices $B^{(\theta_{k,s},\theta_{l,\nu})} = 0$ si $s \neq \nu$.

Pour les matrices $B^{(\theta_{k,s},\lambda)}$, nous avons

$$B^{(\theta_{k,s},\lambda)} = Cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}}, \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(B_{i,j}^{(\theta_{k,s},\lambda)} \right)_{\substack{i=1,\dots,q+1 \\ j=1,\dots,K-1}}.$$

Posons $B_{.,j}^{(\theta_{k,s},\lambda)}$, $j = 1, \dots, K-1$, le $j^{ième}$ vecteur de cette dernière matrice. Nous avons alors

$$\begin{aligned} B_{.,k}^{(\theta_{k,s},\lambda)} &= Cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}}, \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda_k} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \left(\frac{\tau_{k,s+S\tau} (1 - \tau_{k,s+S\tau})}{\hat{\lambda}_k} + \frac{\tau_{k,s+S\tau} \tau_{K,s+S\tau}}{\hat{\lambda}_K} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\underline{y}_{s,\tau}}{\hat{\theta}'_{k,s} \underline{y}_{s,\tau}} - \frac{y_{s+S\tau}^2 \underline{y}_{s,\tau}}{\hat{\theta}'_{k,s} \underline{y}_{s,\tau} \underline{y}'_{s,\tau} \hat{\theta}_{k,s}} \right), \end{aligned}$$

et si $j \neq k$ et $k \neq K$

$$\begin{aligned} B_{.,j}^{(\theta_{k,s},\lambda)} &= Cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}}, \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda_j} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \left(\frac{\tau_{k,s+S\tau} \tau_{K,s+S\tau}}{\hat{\lambda}_K} - \frac{\tau_{k,s+S\tau} \tau_{j,s+S\tau}}{\hat{\lambda}_j} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\underline{y}_{s,\tau}}{\hat{\theta}'_{k,s} \underline{y}_{s,\tau}} - \frac{y_{s+S\tau}^2 \underline{y}_{s,\tau}}{\hat{\theta}'_{k,s} \underline{y}_{s,\tau} \underline{y}'_{s,\tau} \hat{\theta}_{k,s}} \right), \end{aligned}$$

par contre si $j \neq k$ et $k = K$, nous avons alors

$$\begin{aligned} B_{.,j}^{(\theta_{k,s},\lambda)} &= Cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}}, \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda_j} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \left(\frac{\tau_{K,s+S\tau} (1 - \tau_{K,s+S\tau})}{\hat{\lambda}_K} + \frac{\tau_{K,s+S\tau} \tau_{j,s+S\tau}}{\hat{\lambda}_j} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\underline{y}_{s,\tau}}{\hat{\theta}'_{K,s} \underline{y}_{s,\tau}} - \frac{y_{s+S\tau}^2 \underline{y}_{s,\tau}}{\hat{\theta}'_{K,s} \underline{y}_{s,\tau} \underline{y}'_{s,\tau} \hat{\theta}_{K,s}} \right). \end{aligned}$$

Après avoir calculé la matrice d'information observée, nous pouvons évaluer la variance des estimations, $\hat{\underline{\theta}}$, à partir de la diagonale de l'inverse de la matrice I_{ob} . En outre, la variance de l'estimation $\hat{\lambda}_K$, qui est égale à $1 - \sum_{k=1}^{K-1} \hat{\lambda}_k$, est donnée par

$$var \left(\hat{\lambda}_K \right) = var \left(1 - \sum_{k=1}^{K-1} \hat{\lambda}_k \right) = \sum_{k=1}^{K-1} var \left(\hat{\lambda}_k \right) + 2 \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{l>k}^{K-1} cov \left(\hat{\lambda}_k, \hat{\lambda}_l \right)$$

4.6 Identification d'un modèle *MPARCH*

Dans l'étape de l'estimation, nous avons supposé que le nombre de modèles, K , dans le mélange et l'ordre, q_k , de chaque modèle *PARCH* sont connus. En pratique, ces deux nombres

soient inconnus, pour cela nous avons besoin de les identifier avant de commencer l'estimation.

Dans les études de mélange de modèles de séries chronologiques, la plupart des travaux d'identification avaient pour objectif principal la généralisation des méthodes classiques au cas de mélange de modèles. En effet, Le et *al.* (1996) ont proposé d'utiliser le critère *BIC* pour identifier un modèle *GMTD*. Ils ont également utilisé la fonction log-vraisemblance pour comparer le modèle *GMTD* au modèle *ARIMA*. Wong et Li (2000) ont utilisé une approche similaire pour la sélection d'un modèle *MAR*. Ils ont étudié la performance des critères *AIC* et *BIC*, qui sont basés d'une part, sur la fonction de log-vraisemblance de type (4.4.1), où le maximum de cette dernière est donné automatiquement par l'algorithme *EM* après estimation des données manquantes $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_{NS})$. D'autre part, ils ont proposé les critères *AIC** et *BIC** basés sur la fonction de densité conditionnelle de type (4.2.1). Et sur la base d'une étude de simulation, ils ont constaté que, dans le cas d'une série de petite taille, les trois critères *AIC**, *BIC* et *BIC** ne possèdent pas une bonne performance de sélection du vrai nombre de composantes dans le mélange. Ils ont également remarqué que lorsque la taille de la série augmente, la fréquence d'identifier correctement K par les critères *BIC* et *BIC** augmente aussi, avec une supériorité remarquable du *BIC**. Pour le choix de l'ordre du modèle de chaque composante, les deux critères *BIC* et *BIC** ont une bonne performance lorsque le nombre de composantes est correctement choisi. Le critère *BIC** en particulier, sélectionne les vrais ordres dans plus de 90% des cas où le vrai nombre de mélange est choisi. Sur la base de ces résultats, ils ont suggéré d'utiliser le *BIC** dans l'identification des modèles *MAR* et non pas le critère *AIC* puisqu'il n'est pas approprié pour la sélection de ce type de modèles. La performance du critère *BIC** a été examinée dans le cas des modèles *MAR-ARCH* et *MVAR* par Wong et Li (2001) et Fong et *al.* (2007) respectivement. Ils ont également suggéré d'employer ce critère dans l'identification de ces deux classes de modèles.

L'intérêt de cette Section sera porté sur le problème de l'identification d'un mélange de modèles *ARCH* périodiques. Nous visons les deux critères de sélection *AIC** et *BIC** proposés par Wong et Li (2001) pour identifier un modèle *MARCH* à coefficients constants, au cas d'un modèle *MARCH* à coefficients périodiques, tout en utilisant une fonction de pénalité adaptée au cas périodique.

Rappelons que dans le cas stationnaire, les critères *AIC**, *BIC* et *BIC** sont définis par

(voir Wong et Li, 2001)

$$\begin{aligned}
AIC^*(K, q_1, q_2, \dots, q_K) &= -2\mathcal{L}^*(\hat{\underline{\theta}}) + 2 \left(2K - 1 + \sum_{k=1}^K q_k \right), \\
BIC(K, q_1, q_2, \dots, q_K) &= -2\mathcal{L}(\hat{\underline{\theta}}) + \log(n - q) \left(2K - 1 + \sum_{k=1}^K q_k \right), \\
BIC^*(K, q_1, q_2, \dots, q_K) &= -2\mathcal{L}^*(\hat{\underline{\theta}}) + \log(n - q) \left(2K - 1 + \sum_{k=1}^K q_k \right),
\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{L}^*(\hat{\underline{\theta}}) = \sum_{t=q+1}^{NS} \log \left(\frac{d}{dy_t} F(y_t / \mathcal{F}_{t-1}) \right),$$

avec $F(y_t / \mathcal{F}_{t-1})$ est donnée par (4.2.1). Ces critères peuvent être adaptés au cas périodique comme suit

$$\begin{aligned}
P-AIC^*(K, q_1, q_2, \dots, q_K) &= -2\mathcal{L}^*(\hat{\underline{\theta}}) + 2 \left((S+1)K - 1 + S \sum_{k=1}^K q_k \right), \\
P-BIC(K, q_1, q_2, \dots, q_K) &= -2\mathcal{L}(\hat{\underline{\theta}}) + \log(NS - q) \left((S+1)K - 1 + S \sum_{k=1}^K q_k \right), \\
P-BIC^*(K, q_1, q_2, \dots, q_K) &= -2\mathcal{L}^*(\hat{\underline{\theta}}) + \log(NS - q) \left((S+1)K - 1 + S \sum_{k=1}^K q_k \right).
\end{aligned}$$

4.7 Application numérique

4.7.1 Etude de simulation

Cette section est consacrée à l'étude de la performance de l'algorithme *EM*. Nous proposons de l'appliquer sur des séries générées par des modèles *MPARCH*, *S*-périodiques, de différents ordres et périodes ($q = 1, 2$, $S = 2, 4$ et $K = 2, 3$) et pour plusieurs tailles ($NS = 500, 750, 1000, 1500, 2000$). Pour analyser l'effet de la variation de la taille de la série, le nombre de modèles dans le mélange, l'ordre de chaque modèle *PARCH* et la période du modèle, sur l'estimation des paramètres, nous avons considéré différents modèles.

Les paramètres de chaque modèle simulé sont choisis de façon à ce que le modèle soit stationnaire. Néanmoins, dans le dernier modèle les paramètres sont choisis tels qu'au moins une des racines de l'équation caractéristique soit proche de la zone de stationnarité, ceci afin de tester la sensibilité de l'algorithme *EM* dans une telle situation. Pour chaque modèle, nous

avons simulé 1000 séries. Les vraies valeurs (TV) des paramètres de processus $MPARCH$ générateurs des séries, la moyenne empirique (ME) et l'écart-types empirique (ESE) de leurs estimations pour les 1000 séries sont rapportées dans les Tableaux (4.7.1)-(4.7.3).

Tableau 4.7.1. Résultats de 1000 simulations pour un modèle $MPARCH_2(2; 1, 1)$

	$NS = 500$			$NS = 750$		$NS = 1000$		$NS = 1500$	
	TV	ME	ESE	ME	ESE	ME	ESE	ME	ESE
λ_1	0.25	0.2849	0.1013	0.2729	0.0849	0.2664	0.0700	0.2578	0.0504
$\alpha_{0,1}^{(1)}$	1.00	0.9843	0.5398	0.9774	0.4626	0.9867	0.3756	0.9899	0.3071
$\alpha_{1,1}^{(1)}$	0.70	0.6955	0.5797	0.6590	0.3904	0.6546	0.3634	0.6692	0.3447
$\alpha_{0,2}^{(1)}$	1.40	1.3575	0.8787	1.3401	0.6608	1.3274	0.5488	1.2936	0.4904
$\alpha_{1,2}^{(1)}$	1.20	1.0774	0.6897	1.0799	0.6245	1.1283	0.5978	1.1417	0.4831
λ_2	0.75	0.7151	0.1013	0.7271	0.0849	0.7336	0.0700	0.7422	0.0504
$\alpha_{0,1}^{(2)}$	0.60	0.5916	0.1775	0.5947	0.1469	0.6071	0.1387	0.6053	0.1134
$\alpha_{1,1}^{(2)}$	1.00	1.0434	0.2529	1.0272	0.2113	1.0223	0.1918	1.0115	0.1509
$\alpha_{0,2}^{(2)}$	0.90	0.9138	0.2599	0.9233	0.2209	0.9227	0.1930	0.9310	0.1930
$\alpha_{1,2}^{(2)}$	0.50	0.5161	0.2270	0.5259	0.2021	0.5192	0.1793	0.5182	0.1430

Nous pouvons observer à partir des tableaux (4.7.1)-(4.7.3), que les biais des estimations obtenues sont généralement assez petits, même pour des séries de petite taille. Par contre, les écarts-types empiriques des estimations des paramètres $\alpha_{j,s}^{(k)}$ sont relativement grands pour les séries de petite taille. Cependant, ce phénomène indésirable disparaît, comme nous pouvons le constater à partir des Tableaux (4.7.1) et (4.7.2), lorsque la taille devient importante, ce qui reflète la consistance empirique des estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance via l'algorithme EM . Ces résultats sont similaires à ceux obtenus dans le cas des modèles $MARCH$ stationnaire (voir Wong et Li, 2001). Nous pouvons également constater que les estimations se rapprochent des vraies valeurs des paramètres, au fur et à mesure que la taille augmente, ce qui prouve la convergence empirique des estimateurs obtenus par l'algorithme EM . Cette dernière propriété devrait être théoriquement prouvée.

D'autre part, il est intéressant de voir les conséquences de la modélisation des données générées à partir d'un modèle $MARCH$ périodique par un modèle $MARCH$ stationnaire.

Tableau 4.7.2. Résultats de 1000 simulations d'un modèle $MPARCH_2(3; 1, 1, 1)$

	TV	NS = 1000		NS = 1500		NS = 2000	
		ME	ESE	ME	ESE	ME	ESE
λ_1	.30	.3024	.0536	.3046	.0428	.3008	.0362
λ_2	.50	.4931	.0636	.4939	.0485	.5007	.0406
λ_3	.20	.2044	.0497	.2015	.0417	.1985	.0364
$\alpha_{0,1}^{(1)}$	.70	.6550	.3134	.6403	.2765	.6577	.2633
$\alpha_{0,1}^{(2)}$	.90	1.0255	.2789	1.0178	.2569	1.0037	.2433
$\alpha_{0,1}^{(3)}$	2.00	1.8011	.8542	1.8794	.8882	1.8590	.6578
$\alpha_{1,1}^{(1)}$	.70	.8309	.3418	.8120	.3241	.8059	.2977
$\alpha_{1,1}^{(2)}$	.50	.4863	.2109	.4895	.1899	.4920	.1626
$\alpha_{1,1}^{(3)}$	1.20	1.0603	.6868	1.0642	.6108	1.0692	.5695
$\alpha_{0,2}^{(1)}$	1.50	1.3730	.4801	1.3790	.3867	1.4149	.3836
$\alpha_{0,2}^{(2)}$	.60	.6383	.2373	.6377	.2032	.6273	.1856
$\alpha_{0,2}^{(3)}$	.90	.9804	.3510	.9887	.3495	.9682	.3345
$\alpha_{1,2}^{(1)}$	.90	.8665	.4099	.8720	.3456	.8587	.3381
$\alpha_{1,2}^{(2)}$	.70	.7134	.2456	.7155	.2218	.7267	.1980
$\alpha_{1,2}^{(3)}$	.80	.8078	.3098	.7928	.2884	.8087	.2852

Tableau 4.7.3. Résultats de 1000 simulations d'un modèle $MPARCH_4(2;2,2)$, avec $NS = 2000$

	$i = 0$			$i = 1$			$i = 2$		
	TV	ME	ESE	TV	ME	ESE	TV	ME	ESE
λ_i				.7000	.6730	.0673	.3000	.3270	.0673
$\alpha_{i,1}^{(1)}$	1.0000	.9789	.3180	.7000	.6904	.1838	.6000	.5869	.1679
$\alpha_{i,2}^{(1)}$	2.0000	2.0739	.4684	.2000	.1883	.0964	.5000	.4876	.1700
$\alpha_{i,3}^{(1)}$	1.4000	1.3639	.3896	.6000	.5866	.1729	.4000	.3813	.1325
$\alpha_{i,4}^{(1)}$	2.5000	2.4345	.5900	.7000	.6879	.2073	.2000	.2133	.1291
$\alpha_{i,1}^{(2)}$	.6000	.7131	.5303	.5000	.5307	.3300	.3500	.4056	.2882
$\alpha_{i,2}^{(2)}$	1.8000	1.6892	.8610	.4000	.4177	.2174	.5000	.5275	.3238
$\alpha_{i,3}^{(2)}$	1.0000	1.1149	.6979	.4000	.4363	.2891	.1500	.2206	.0862
$\alpha_{i,4}^{(2)}$	.9000	1.2306	.6993	.2700	.3407	.1965	.3500	.3487	.1768

Pour illustrer l'effet de l'ignorance de la périodicité dans la modélisation des séries issues d'un modèle $MARCH$ périodique, sur l'estimation des paramètres et sur la fonction prédictive, nous avons simulé plusieurs séries dont nous rapportons ici les résultats d'une seule série chronologique, de taille 500, générée à partir d'un modèle $MPARCH_2(2;1,1)$, dont les paramètres sont reportés dans le Tableau (4.7.4).

Tableau 4.7.4

	λ_1	$\alpha_{0,1}^{(1)}$	$\alpha_{1,1}^{(1)}$	$\alpha_{0,2}^{(1)}$	$\alpha_{1,2}^{(1)}$	λ_2	$\alpha_{0,1}^{(2)}$	$\alpha_{1,1}^{(2)}$	$\alpha_{0,2}^{(2)}$	$\alpha_{1,2}^{(2)}$	BIC
<i>Vraie valeurs</i>	.2500	.0100	.1000	.5000	1.2000	.7500	.0500	.3000	.9000	.9000	
$MPARCH_2(2;1,1)$	.3179	.0051	.0891	.4319	2.2284	.6821	.0500	.3742	.9121	.4555	19321
$MARCH(2;1,1)$	.3479	.0267	.0928	—	—	.6521	.7620	.4020	—	—	22737

Nous comparons les deux modélisations $MARCH$ stationnaire et périodique, tout en supposant que le nombre, K , de modèles dans le mélange et l'ordre, q , de chaque composante sont connus et respectivement égal à 2 et 1. Nous constatons en premier lieu, à partir du Tableau (4.7.4), que la valeur du $P-BIC^*$ associée au modèle $MPARCH$ estimé est plus petite que celle du $P-BIC^*$ associée au modèle de $MARCH$. En outre, le graphe de la variance conditionnelle ou la volatilité calculée à partir du modèle $MPARCH$ estimé se rapproche de

la volatilité de la série simulée plus que de la volatilité calculée à partir du modèle *MARCH* (figures (4.7.1b) et (4.7.1d)). Ainsi, le modèle *MARCH* périodique est plus précis et plus approprié pour représenter les caractéristiques de la série.

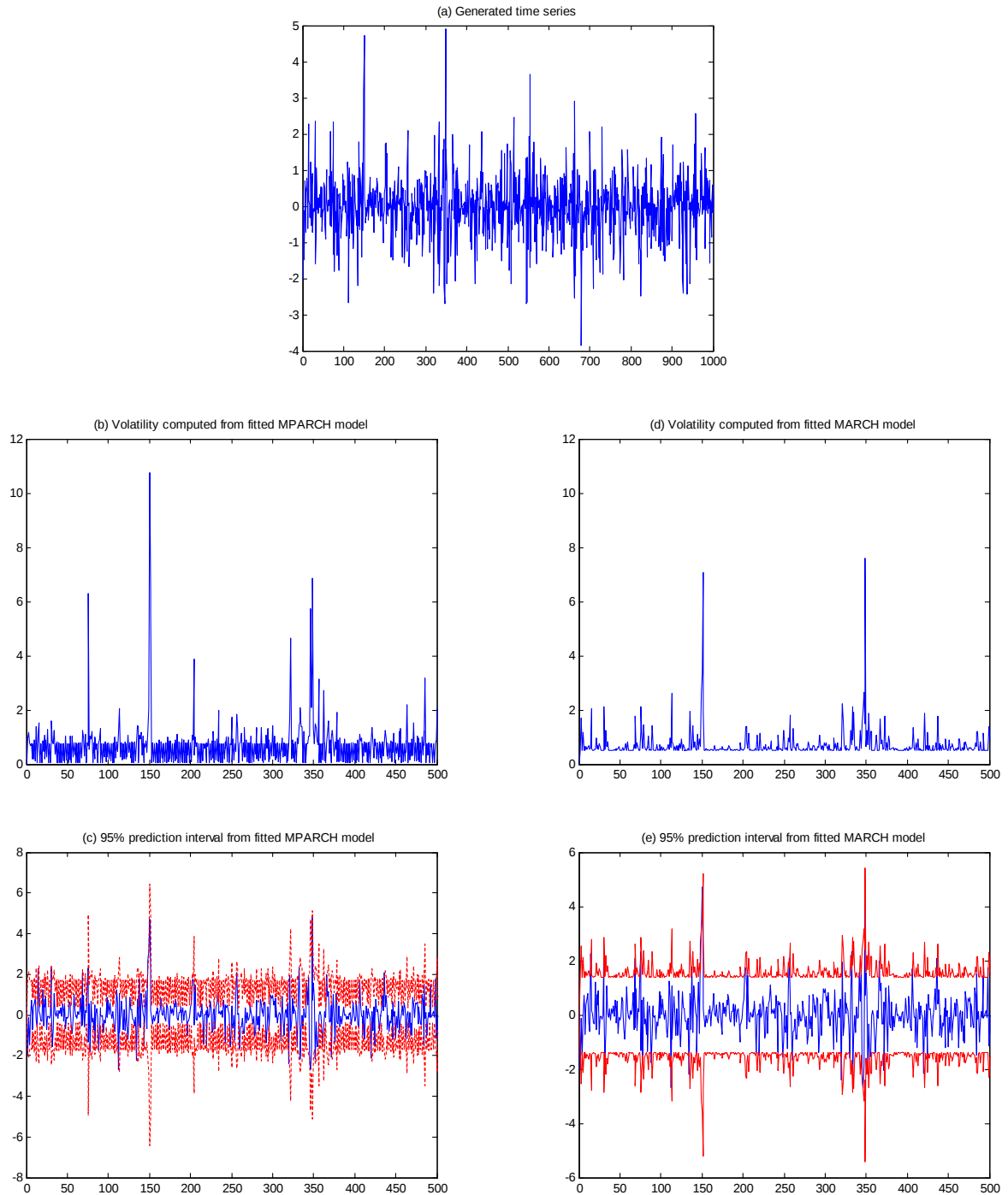


Figure 4.7.1. Ignorance de l'existence de la périodicité dans un mélange de modèles *ARCH*.

La comparaison entre les deux modèles estimés *MARCH* stationnaire et périodique peut être également faite en calculant les distributions prédictives pour l'horizon un. La figure (4.7.2), représente les densités prédictives pour l'horizon un aux instants $t = 111$, $t = 112$, $t = 281$ et $t = 348$, calculées à partir des deux modèles. Nous pouvons constater que si la volatilité de la série est importante, comme pour $t = 112$ et $t = 348$, la densité prédictive calculée à partir du modèle *MARCH* périodique est plus pointue que celle du modèle non périodique (voir figures (4.7.2b) et (4.7.2c)). Par contre, si la volatilité de la série est modérée ou faible, comme pour $t = 111$ et $t = 281$, la densité prédictive calculée à partir du modèle *MARCH* périodique est plus pointue que celle du modèle non périodique. (voir figures (4.7.2a) et (4.7.2d)).

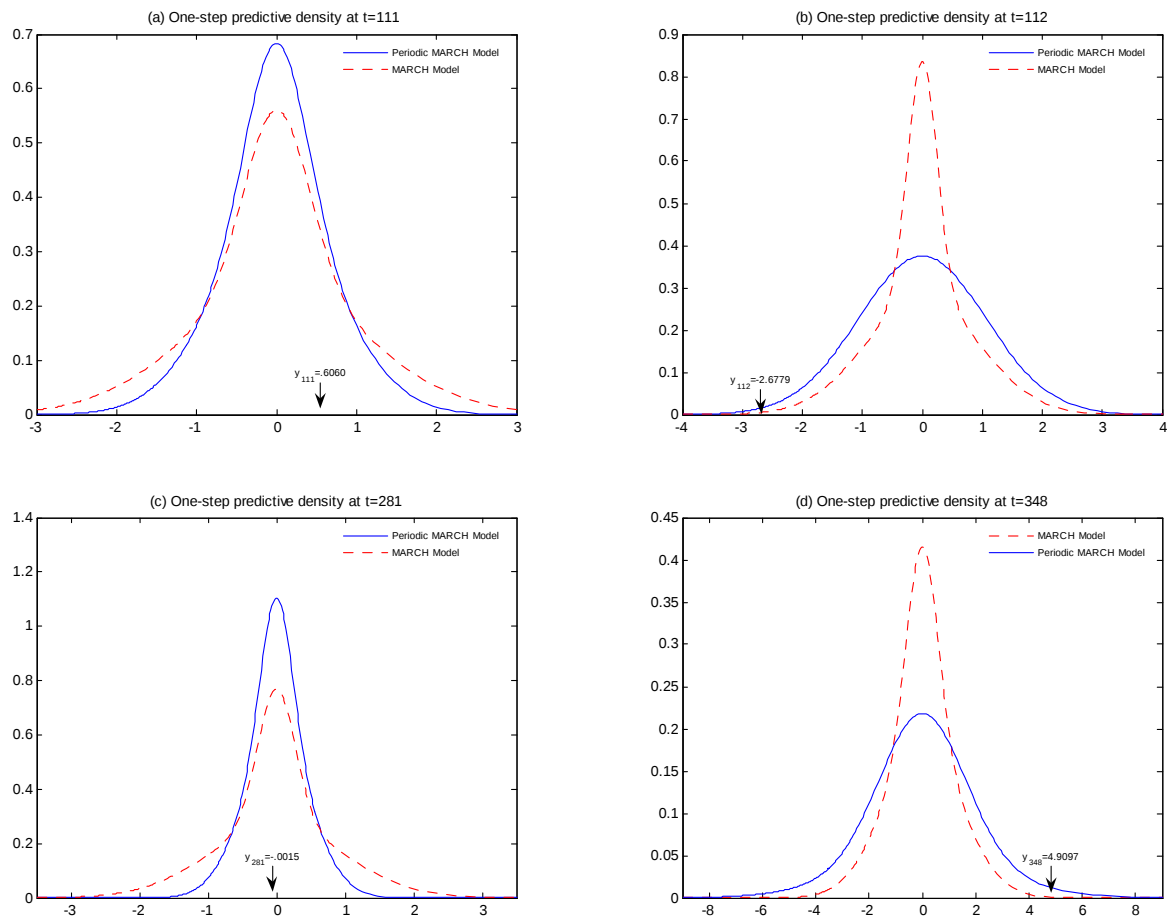


Figure 4.7.2 Densité prédictive pour l'horizon un aux instants $t = 111$, $t = 112$, $t = 281$ et $t = 348$.

En outre, à partir du Tableau 4.7.5, il apparaît que les intervalles de confiance asymptotiques des prévisions déterminés à partir du modèle *MARCH* périodique sont plus proches du niveau de confiance théorique que les intervalles de confiance des prévisions déterminés

à partir du modèle *MARCH* stationnaire. A partir de ces observations, nous suggérons l'utilisation d'un modèle périodique à chaque fois que la périodicité est présente.

Tableau 4.7.5 Intervalles de confiance asymptotiques des prévisions à l'horizon 1 aux niveaux $(1 - \alpha)100\%$

Model	$(1 - \alpha)100\%$					
	95	90	80	70	60	50
<i>MPARCH</i>	93.6	88.6	79.4	72.8	63.4	54
<i>MARCH</i>	92	88.2	83.8	77.6	70.6	63

4.7.2 Application à l'indice boursier *S&P* 500

Dans ce paragraphe, nous essayons de montrer, à travers la modélisation d'une série réelle très connue dans la littérature des séries financières et qui a suscité beaucoup d'intérêts, l'utilité et la susceptibilité des modèles *MPARCH* de capturer, en plus de tous les caractéristiques saisies par le modèle *MARCH* stationnaire, la périodicité qui est très souvent rencontrée dans les données économiques, en particulier les données financières. En effet, nous modélisons la série journalière du rendement cours-bénéfices de l'indice boursier américain *S&P* 500 par la classe des modèles *MPARCH*. Cette série a été analysée par Wong et Li (2001), sur une période allant du 2/Jan/1970 au 15/Jan/1999, partagée en six séries de cinq ans : 1970-1974, 1975-1979, 1980-1984, 1985-1989, 1990-1994 et 1995-1999 avec respectivement 1262, 1262, 1264, 1262, 1264 et 1020 observations. Ils ont estimé les modèles suivants *MAR-ARCH*(2; 1, 0; 4, 0), *MAR-ARCH*(2; 1, 0; 0, 0), *MAR-ARCH*(2; 1, 0; 0, 0), *MAR-ARCH*(3; 1, 0, 0; 2, 0, 0), *MAR-ARCH*(2; 0, 0; 0, 1) et *MAR-ARCH*(2; 1, 0; 1, 1) correspondant respectivement, aux six séries précédentes. Afin de comparer les deux modélisations *MARCH* stationnaire et périodique, nous nous sommes intéressés à la quatrième série (du 2/Jan/1990 au 30/Déc/1994).

Notons que dans notre modélisation *MPARCH* de la série journalière du rendement de l'indice boursier *S&P* 500, la périodicité est artificielle mais justifiable. Ainsi, nous considérons des modèles *MARCH* 2-périodiques pour modéliser cette série, où la 2-périodicité est juste une division de la série pour étudier la présence ou l'absence de l'effet des jours fériés, comme il a été déjà fait par Bollerslev et Ghysels (1996) dans la modélisation des taux de change spot de Deutschmark/Livre sterling par les modèles *GARCH* périodiques. Pour cela, nous divisons l'ensemble de nos données en deux périodes, la première contient

les observations du lundi et les jours qui suivent un jour férié et le reste des données sont considérées comme deuxième période.

Nous avons utilisé le critère $P-BIC^*$ comme critère de sélection du modèle où nous avons supposé que le nombre maximum de modèles dans le mélange est égal à 3 et l'ordre maximum des modèles $PARCH$ est égal à 5. Nous avons trouvé que le meilleur modèle est un mélange de deux modèles $PARCH(2)$ ($MPARCH_2(2; 2, 2)$) avec un $P-BIC^*$ égale à -8865.6 . Le modèle estimé est donné par

$$\begin{cases} F(y_{s+\tau S} / \mathcal{F}_{s+\tau S-1}) = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \Phi\left(\frac{y_{s+\tau S}}{\sqrt{h_{k,s+\tau S}}}\right), & \tau \in \mathbb{Z}, 1 \leq s \leq 2. \\ h_{k,s+\tau S} = \alpha_{0,s}^{(k)} + \alpha_{1,s}^{(k)} \varepsilon_{s+\tau S-1}^2 + \alpha_{2,s}^{(k)} \varepsilon_{s+\tau S-2}^2, \end{cases}$$

où $(\lambda_1, \lambda_2) = (.5574, .4426)$, $(\alpha_{0,1}^{(1)}, \alpha_{1,1}^{(1)}, \alpha_{2,1}^{(1)}) = (.000024, .0428, .0065)$, $(\alpha_{0,2}^{(1)}, \alpha_{1,2}^{(1)}, \alpha_{2,2}^{(1)}) = (.000071, .1289, .0996)$, $(\alpha_{0,1}^{(2)}, \alpha_{1,1}^{(2)}, \alpha_{2,1}^{(2)}) = (.000070, .6820, .3746)$ et $(\alpha_{0,2}^{(2)}, \alpha_{1,2}^{(2)}, \alpha_{2,2}^{(2)}) = (.000013, 0, .0284)$. Notons que les modèles $MARCH$ classiques figuraient parmi les modèles candidats mais aucun d'entre eux n'a été choisi (le meilleur modèle est celui proposé par Wong et Li (2001) avec une valeur du BIC^* égal à -8833.2).

Après estimation du modèle, nous pouvons maintenant comparer notre modèle estimé avec celui de Wong et Li (2001), en se basant sur la distribution prédictive. En effet, la densité prédictive pour l'horizon un, aux instants $t = 164$, $t = 165$ et $t = 1007$, calculée à partir des deux modèles $MARCH$ périodique et classique est représentée dans la Figure 4.7.4, où il apparaît que lorsque la volatilité de la série du rendement de l'indice boursier $S\&P$ 500 est forte (le marché est très actif), comme pour $t = 165$, la densité prédictive calculée à partir du modèle $MPARCH$ a des queues plus épaisses que celle calculée à partir du modèle $MARCH$ (voir Figure (4.7.5b)). Nous notons également que lorsque la volatilité de la série est modérée ou faible (marché plus calme), comme pour $t = 1007$ et $t = 164$, les deux densités prédictives ont des queues similaires (voir la Figure (4.7.5a) et (4.7.5c)). Cependant, la probabilité d'obtenir une valeur au voisinage de la vraie valeur y_t , est plus grande pour le modèle périodique que pour le modèle de Wong et Li, ceci pour n'importe quelle volatilité. En outre, la comparaison peut être faite en calculant les intervalles de confiance asymptotique des prévisions pour l'horizon un, construits à partir des deux modèles. Nous pouvons constater du Tableau 4.7.6, que ces intervalles de confiance sont semblables.

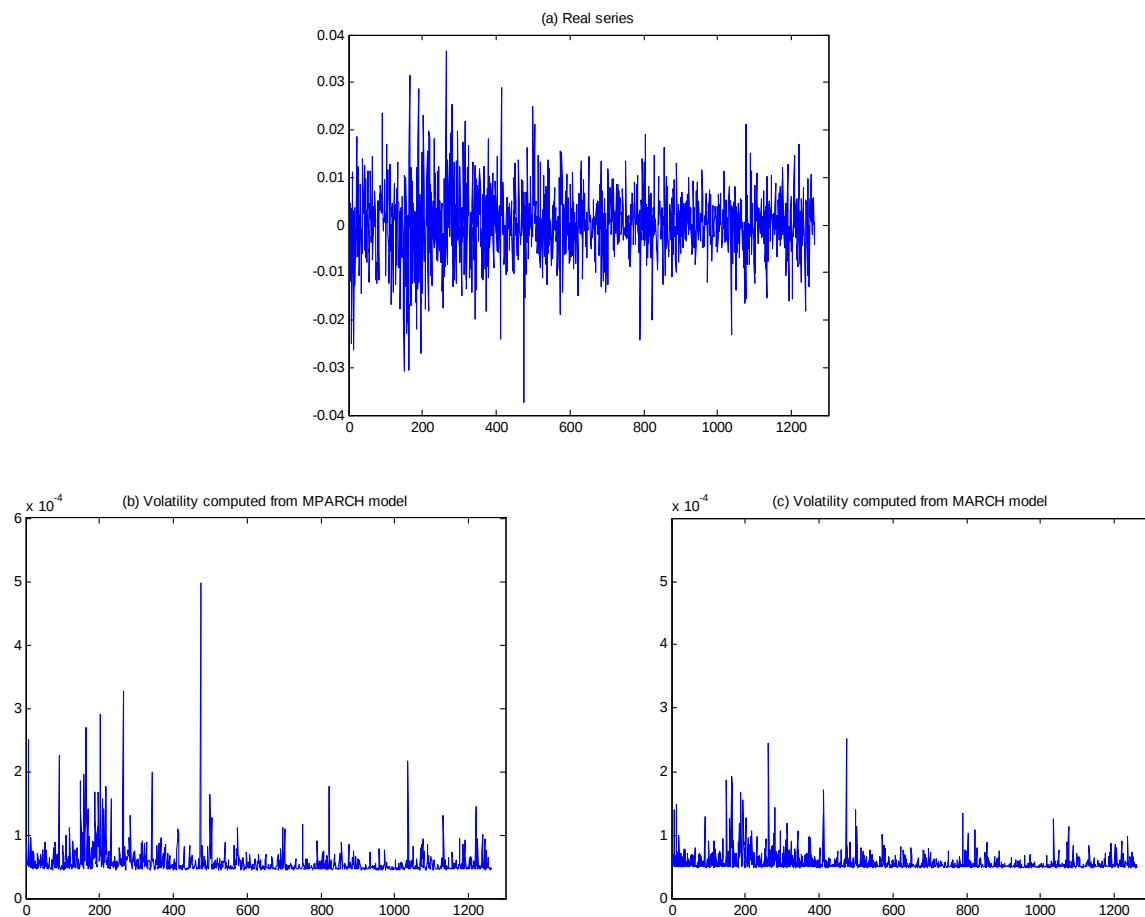


Figure 4.7.3 La série du rendement de l'indice boursier *S&P* 500 pour la période 1990 à 1994.

Tableau 4.7.6 Intervalles de confiance des prévisions à l'horizon 1 aux niveaux $(1 - \alpha)100\%$

Model	$(1 - \alpha)100\%$					
	95	90	80	70	60	50
<i>MPARCH</i>	94.3829	89.1614	81.8829	74.1297	67.1677	59.0981
<i>MARCH</i>	94.1456	89.7152	82.4367	74.6835	66.5348	58.3861

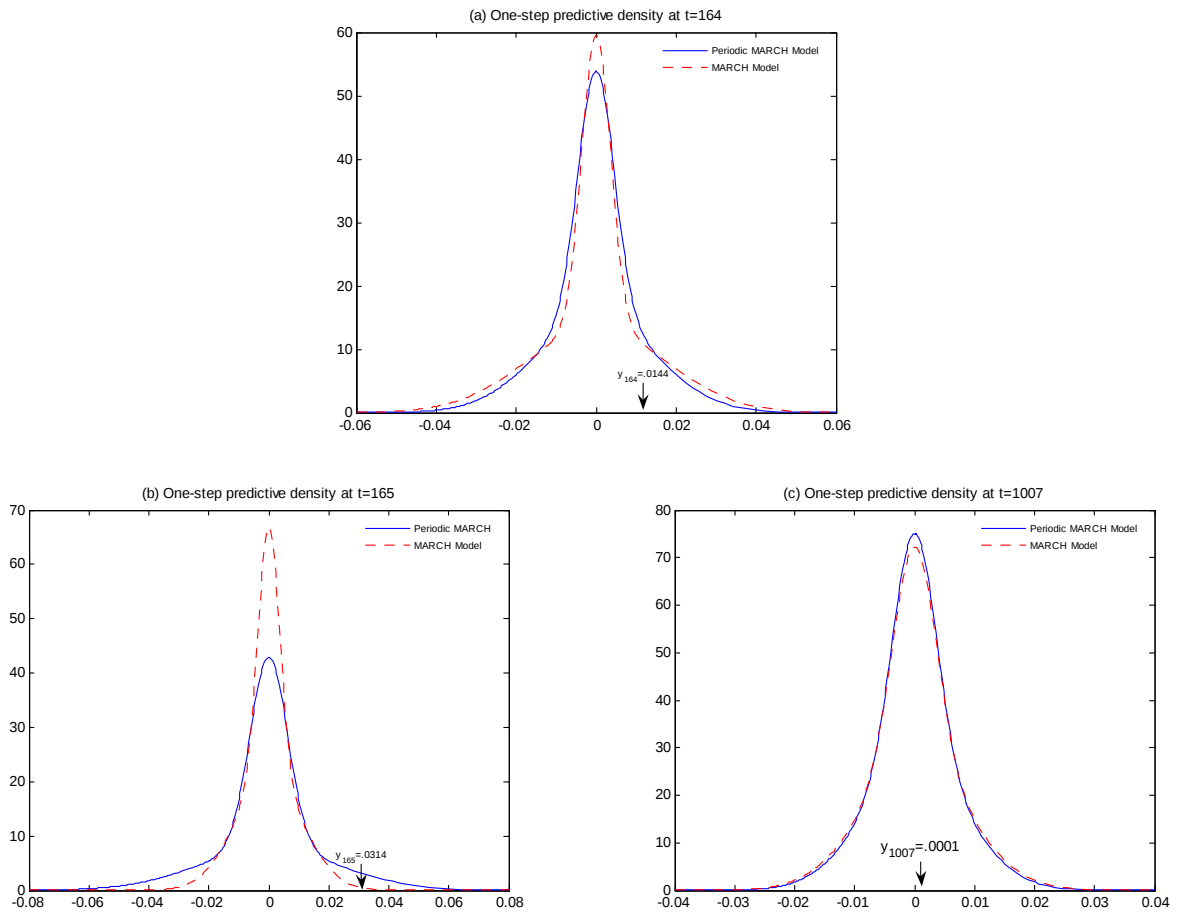


Figure 4.7.4 Densité prédictive pour l'horizon un aux instants $t = 164$, $t = 165$ et $t = 1007$.

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé une nouvelle classe de mélange de modèles de séries chronologiques périodiques que nous avons appelée Mélange de Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques Périodiques (*MPARCH*). Après introduction de cette nouvelle classe de modèles, nous avons procédé à l'étude de quelques propriétés probabilistes et statistiques. Nous avons étudié en particulier, sous quelle condition un processus *MPARCH* soit périodiquement stationnaire du second ordre et nous avons obtenu, sous cette condition, l'expression explicite de la variance du processus. Ainsi, nous avons étudié l'existence du moment d'ordre quatre. Afin de compléter notre étude, l'estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance via l'algorithme *EM* a été considérée. Nous avons montré à travers une série simulée à partir d'un modèle *MPARCH*, l'effet de l'ignorance de la périodicité dans la modélisation des séries issues d'un modèle *MARCH* périodique, sur l'estimation des paramètres et sur la fonction prédictive. En comparant les

deux modélisation *MARCH* périodique et non périodique, nous suggérons l'utilisation d'un modèle périodique à chaque fois que la périodicité est présente.

Afin de voir dans quelle mesure la classe de modèles *MPARCH* est adaptée à la modélisation des séries financières, nous avons modélisé la série des rendements quotidiens de l'indice *S&P 500*. Le modèle estimé *MPARCH* est comparé à celui estimé par Wong et Li (2001) pour la même série.

Malgré son adéquation pour capturer beaucoup de caractéristiques de séries chronologiques, la formulation *MPARCH* peut en pratique, conduire à un ordre de retards assez grand (il s'agit d'une difficulté semblable à celle que l'on rencontre dans la modélisation *ARCH* classique et périodique), donc à l'estimation d'un nombre important de paramètres. Par analogie avec la démarche usuelle qui applique toujours un principe de parcimonie qui veut que, à qualité d'ajustement égale, l'on adopte en priorité la représentation nécessitant l'estimation du minimum de paramètres (Box et Jenkins pour le cas *ARMA* et Bollerslev pour le cas *GARCH*), le modèle *MPARCH* peut être généralisé en introduisant une dynamique autorégressive moyenne mobile. Une autre généralisation possible de la formulation proposée dans ce chapitre est de la combiner avec celle du *MPAR* proposée par Shao (2006) pour capturer à la fois la périodicité dans la moyenne conditionnelle et la variance conditionnelle.

Chapitre 5

Mélange de Modèles Autorégressifs à Erreurs *ARCH* Périodiques

5.1 Introduction

La modélisation des séries financières est un problème complexe. Cette complexité tient surtout de l'existence de régularités statistiques communes à un très grand nombre de séries financières et difficiles à reproduire artificiellement à partir de modèles stochastiques. Il est bien connu que les modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques (*ARCH*) introduits par Engle (1982) et leur version généralisée *GARCH* de Bollerslev (1986) sont les représentations les plus utilisées dans la modélisation de la volatilité instantanée qui caractérise beaucoup de séries financières. Plusieurs extensions de modèles de type *ARCH* ont été proposées dans la littérature des séries économétriques afin de capturer différentes caractéristiques additionnelles telles que la longue mémoire et le changement de régime, tout en gardant la propriété de stationnarité. D'autres formulations sont proposées pour expliquer la non stationnarité, en supposant que les paramètres *ARCH* varient dans le temps (cf., Dahlhaus et Subba Rao, 2006), en particulier la classe des modèles *GARCH* à coefficients périodiques (*PGARCH*) introduite par Bollerslev et Ghysels (1996) et qui a montrée son adéquation pour capturer la périodicité dans le variance conditionnelle, une propriété qui ne peut pas être expliquée ni par les modèles *ARMA* linéaires classiques ni par les modèles *GARCH* stationnaires. Franses et Paap (2000) ont combiné la représentation *AR* périodique (*PAR*) avec celle du *PGARCH* pour capturer à la fois la périodicité dans la moyenne conditionnelle et la variance conditionnelle, en proposant le modèle *PAR-PGARCH* qu'ils ont

appliqué avec succès dans la modélisation des données financières. Cependant, ces modèles s'avèrent inconsistants avec d'autres caractéristiques de beaucoup de séries chronologiques avec une structure d'autocorrélation périodique, en particulier les séries financières, telles que le changement de régime, la grande kurtosis, les valeurs aberrantes et les événements extrêmes. Afin de capturer ces caractéristiques, Wong et Li (2001) ont proposé d'ajouter plus de flexibilité à la famille des modèles de type *ARCH*, en introduisant un mélange de modèles *AR-ARCH*. Dans le même esprit de la formulation de Wong et Li (2001) et du chapitre précédent, notre but est de proposer un modèle qui peut représenter les séries chronologiques avec une structure d'autocorrélation périodique aussi bien que les caractéristiques mentionnées dans la moyenne conditionnelle et la variance conditionnelle. Nous proposons spécifiquement, un Mélange de modèles Autorégressifs Périodiques à erreurs *ARCH* périodiques (*MPAR-ARCH*). Notre modèle généralise le mélange de modèles autorégressifs périodiques (*MPAR*) proposé par Shao (2006) dans lequel la moyenne conditionnelle suit un mélange de modèles *AR* périodiques et il généralise également, le modèle *MPARCH* proposé dans le chapitre précédent. Nous étudions alors quelques propriétés probabilistes du modèle proposé telles que la stationnarité périodique du second ordre et l'estimation du maximum de vraisemblance via l'algorithme itératif *EM*

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous proposons la classe de mélange de modèles *AR-ARCH* périodiques. La section 3 étudie les conditions de stationnarité périodique du premier et deuxième ordre. Les formes explicites des moments sont dérivées sous les conditions établies. Dans la section 4, l'estimation des paramètres est abordée par la méthode du maximum de vraisemblance par l'algorithme itératif *EM*. Dans la section 5, le problème de l'identification et les tests de validation du modèle sont discutés. La performance de l'algorithme *EM* est montrée par une étude de simulation et une application sur des données réelles dans la dernière section.

5.2 Mélange de modèles *AR-ARCH* périodiques

Rappelons qu'un processus stochastique $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfait une représentation *AR* périodique à erreurs *ARCH* périodique d'ordre p et q et de période S , notée *PAR-ARCH_S* (p, q),

s'il est défini par

$$\begin{cases} y_t = \phi_{0,t} + \sum_{i=1}^p \phi_{i,t} y_{t-i} + \varepsilon_t, & t \in \mathbb{Z}, \\ \varepsilon_t = \sqrt{h_t} \zeta_t \\ h_t := E(\varepsilon_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}) = \beta_{0,t} + \sum_{j=1}^q \beta_{j,t} \varepsilon_{t-j}^2, & t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (5.2.1)$$

où $\{\zeta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. centrées et réduites et $\mathcal{F}_t$ est le passé du processus jusqu'à l'instant $t - 1$. Les paramètres $\phi_{i,t}$ et $\beta_{j,t}$ sont périodiques en t , de période S , i.e., $\phi_{i,t+rS} = \phi_{i,t}$, $i = 0, \dots, p$ et $\beta_{j,t+rS} = \beta_{j,t}$, $j = 0, \dots, q$ tels que $\beta_{0,t} > 0$ et $\beta_{j,t} \geq 0$, $j = 1, \dots, q$, $\forall t, r \in \mathbb{Z}$.

Le modèle *MPAR-ARCH* que nous proposons peut être considéré comme un mélange de modèles de type (5.2.1)

Définition 26

Un processus stochastique $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$, suit un mélange de K modèles *PAR-ARCH* d'ordres $p_1, p_2, \dots, p_K$; $q_1, q_2, \dots, q_K$ et de période S , noté *MPAR-ARCH_S* ($K; p_1, p_2, \dots, p_K$; $q_1, q_2, \dots, q_K$), s'il est défini par

$$\begin{cases} F(y_t / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \Phi\left(\frac{\varepsilon_t^{(k)}}{\sqrt{h_t^{(k)}}}\right), \\ \varepsilon_t^{(k)} = y_t - \phi_{0,t}^{(k)} - \sum_{i=1}^{p_k} \phi_{i,t}^{(k)} y_{t-i}, & t \in \mathbb{Z}, \\ h_t^{(k)} = \beta_{0,t}^{(k)} + \sum_{j=1}^{q_k} \beta_{j,t}^{(k)} \varepsilon_{t-j}^{(k)2}, & t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (5.2.2)$$

où $\Phi(\cdot)$ et $F(\cdot / \mathcal{F}_t)$ sont respectivement, la distribution cumulative de la lois normale centrée réduite et la distribution cumulative conditionnelle de y_t sachant les valeurs passées du processus y_s jusqu'au temps t . A l'instar de (5.2.1), les paramètres $\phi_{i,t}^{(k)}$ et $\beta_{j,t}^{(k)}$ sont périodiques en t , de période S , i.e., $\phi_{i,t+rS}^{(k)} = \phi_{i,t}^{(k)}$, $i = 0, \dots, p_k$ et $\beta_{j,t+rS}^{(k)} = \beta_{j,t}^{(k)}$, $j = 0, \dots, q_k$, $k = 1, \dots, K$, et $t, r \in \mathbb{Z}$. Afin d'exclure la possibilité d'avoir des variances conditionnelles négatives ou nulles, les paramètres *ARCH* sont supposés être non négatifs : $\beta_{0,t}^{(k)} > 0$ et $\beta_{j,t}^{(k)} \geq 0$, $j = 1, \dots, q_k$, $k = 1, \dots, K$ et $t \in \mathbb{Z}$. Les constantes λ_k , $k = 1, 2, \dots, K$, sont des réelles strictement positives tel que $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$.

Comme dans le cas du modèle *MPARCH*, les constantes q_k , sans perdre de généralité, peuvent être considérées comme constantes en k , en posant $p = \max_k p_k$, $q = \max_k q_k$ et en prenant $\phi_{i,t}^{(k)} = 0$ pour $i > p_k$ et $\beta_{j,t}^{(k)} = 0$ pour $j > q_k$.

5.3 Conditions de stationnarité périodique du premier et deuxième ordre

Un problème standard qui surgit habituellement en étudiant les équations aux différences stochastiques (5.2.2) est de rechercher des conditions d'existence d'une solution périodiquement stationnaire du premier et/ou deuxième ordre. Nous étudions d'abord dans cette section, la condition sur les coefficients λ_k et $\phi_{i,t}^{(k)}$ $i = 0, \dots, p_k$ et $k = 1, \dots, K$ qui garantit l'existence d'une solution périodiquement stationnaire du premier ordre de (5.2.2). Par la suite, nous dérivons une condition nécessaire et suffisante de la stationnarité périodique du second ordre d'un mélange de modèles *PAR-ARCH*.

5.3.1 Condition de stationnarité du premier ordre

Il est facile de voir que la moyenne conditionnelle du processus $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant la représentation (5.2.2) est égale à

$$E(y_t / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\phi_{0,t}^{(k)} + \sum_{i=1}^p \phi_{i,t}^{(k)} y_{t-i} \right), \quad t \in \mathbb{Z},$$

donc la moyenne, $E(y_t)$, du processus est donnée par

$$\mu_t := E(y_t) = a_0(t) + \sum_{i=1}^p a_i(t) \mu_{t-i}, \quad (5.3.1)$$

où $a_i(t) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{i,t}^{(k)}$, $i = 0, 1, \dots, p$. Par conséquent, la moyenne périodique satisfait une équation aux différences linéaires non homogène périodique d'ordre p .

Dans ce paragraphe nous établissons une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation aux différences linéaires (5.3.1) possède une solution finie. C'est la condition de stationnarité périodique en moyenne du modèle *MPAR-ARCH_S* ($K; p_1, p_2, \dots, p_K; q_1, q_2, \dots, q_K$). Pour cela, définissons les deux matrices $A_{0,T}$ et $A_{1,T}$, de dimension $p \times p$, suivantes

$$\text{et } (A_{0,T})_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ -a_{j-i}(pT - i + 1), & \text{if } i < j, \\ 0, & \text{if } i > j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, p. \quad (5.3.2)$$

$$(A_{1,T})_{i,j} = \begin{cases} a_{p-i+j}(pT - i + 1), & \text{if } i \geq j, \\ 0, & \text{if } i < j, \end{cases}$$

Posons $\mathbb{S}$ ($\mathbb{S} \in \mathbb{N}$) le plus petit entier tel que $q\mathbb{S}$ soit le plus petit multiple commun de q et S , il est clair que les deux matrices $A_{0,T}$ et $A_{1,T}$ sont périodiques, en T , de période $\mathbb{S}$. En utilisant ces notations, nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Proposition 27 (Bentarzi et Hamdi 2008b)

Un processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant un modèle $MPAR-ARCH_S(K; p_1, p_2, \dots, p_K; q_1, q_2, \dots, q_K)$ est périodiquement stationnaire en moyenne si et seulement si toutes les racines du polynôme (de degré $p = \max_k p_k$)

$$|Iz - \Psi| = 0, \quad z \in \mathbb{C},$$

soient de module strictement inférieur à l'unité, où $\Psi = \prod_{j=0}^{\mathbb{S}-1} B_{\mathbb{S}-j}$. Par ailleurs, l'expression du moment d'ordre un est, sous cette condition, donnée par

$$\underline{\mu}_T = (I - \Psi)^{-1} \sum_{r=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{r-1} B_{T-j} \right) C_{T-r}, \quad T \in \mathbb{Z}. \quad (5.3.3)$$

où $\underline{\mu}_T = (\mu_{pT}, \mu_{pT-1}, \dots, \mu_{pT-(p-1)})'$, $C_T = A_{T,0}^{-1} c_T$, $B_T = A_{0,T}^{-1} A_{1,T}$ et $c_T = (a_0(pT), a_0(pT-1), \dots, a_0(pT-p+1))'$.

Preuve.

a) **Condition nécessaire et suffisante.** En définissant pour $T \in \mathbb{Z}$, les vecteurs périodiques, de dimension p , $\underline{\mu}_T = (\mu_{pT}, \mu_{pT-1}, \dots, \mu_{pT-(p-1)})'$ et $c_T = (a_0(pT), a_0(pT-1), \dots, a_0(pT-p+1))'$, nous pouvons réécrire l'équation (5.3.1) sous forme d'une équation au différenciel d'ordre un, p -variée et $\mathbb{S}$ -périodique comme suit

$$\underline{\mu}_T = B_T \underline{\mu}_{T-1} + C_T, \quad T \in \mathbb{Z}, \quad (5.3.4)$$

où la matrice $B_T = A_{0,T}^{-1} A_{1,T}$ et le vecteur colonne $C_T = A_{0,T}^{-1} c_T$, avec $A_{0,T}$ et $A_{1,T}$ sont définies par (5.3.2). Il est clair que la condition nécessaire pour que cette dernière équation aux différences linéaires non homogène possède une solution finie est la condition établie dans l'épreuve de la Proposition 19, c'est-à-dire que toutes les racines du polynôme $|Iz - \prod_{j=0}^{\mathbb{S}-1} B_{\mathbb{S}-j}| = 0, \quad z \in \mathbb{C}$, soient de module strictement inférieur à l'unité.

Notons que cette condition est équivalente à celle établit, dans le Théorème 2.1, par Shao (2006), pour un mélange de modèles PAR d'ordre p , ce qui correspond à notre modèle particulier $MPAR-ARCH_S(K; p, p, \dots, p; 0, 0, \dots, 0)$.

b) **Expression de la moyenne.** Par $S - 1$ remplacements successifs dans (5.3.4) et en tenant compte de la périodicité de la matrice B_T et du vecteur C_T , nous obtenons

$$(I - \Psi) \underline{\mu}_T = \sum_{r=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{r-1} B_{T-j} \right) C_{T-r}, \quad T \in \mathbb{Z}. \quad (5.3.5)$$

D'où, le vecteur $\underline{\mu}_T$ est donné, sous la condition établit, par (5.3.3). $\square$

Corollaire 28 (Bentarzi et Hamdi, 2008b)

Un processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant une représentation $MPAR-ARCH_S(K; 1, 1, \dots, 1; q_1, q_2, \dots, q_K)$ est périodiquement stationnaire en moyenne si et seulement si

$$\left| \prod_{s=1}^S \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{1,s}^{(k)} \right) \right| < 1.$$

En outre, l'expression de la moyenne périodique sous cette condition est donnée par

$$\mu_s = \frac{\sum_{r=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{r-1} \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{1,s-j}^{(k)} \right) \right) \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{0,s-r}^{(k)} \right)}{1 - \prod_{s=1}^S \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{1,s}^{(k)} \right)}, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (5.3.6)$$

Preuve. Dans ce cas particulier où $p = 1$, nous avons $\mathbb{S} = S$ et les matrices $A_{0,T}$ et $A_{1,T}$ sont réduites respectivement aux nombres scalaires 1 et $a_1(T)$. Par conséquent, $B_T = a_1(T)$ est S -périodique, ainsi la condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus $MPAR-ARCH_S(K; 1, 1, \dots, 1; q_1, q_2, \dots, q_K)$ soit périodiquement stationnaire en moyenne est donnée par

$$\left| \prod_{s=1}^S \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{1,s}^{(k)} \right) \right| < 1.$$

C'est la condition établit par Shao (2006) (voir Shao (2006), *Théorème 2.2*), pour un mélange de modèles $PAR(1)$, ce qui correspond à notre cas particulier $MPAR-ARCH_S(K; 1, 1, \dots, 1; 0, 0, \dots, 0)$. D'autre part, après $S - 1$ remplacements successifs dans (5.3.1), avec $p = 1$, nous obtenons (5.3.6). $\square$

5.3.2 Condition de stationnarité périodique du second ordre

Condition de stationnarité périodique du second ordre d'un processus $MPAR-ARCH_S(K; 1, 1, \dots, 1; q_1, q_2, \dots, q_K)$

Soit $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus périodiquement stationnaire du premier ordre satisfaisant (5.2.2), avec $\max p_k = 1$. Il est facile de montrer que l'espérance conditionnelle du carré du

processus est donné par

$$E(y_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k h_{k,t} + \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{0,t}^{(k)2} + 2 \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{0,t}^{(k)} \phi_{1,t}^{(k)} y_{t-1} + \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{1,t}^{(k)2} y_{t-1}^2,$$

ainsi, le moment d'ordre deux de y_t est donné comme suit

$$\begin{aligned} E(y_t^2) &= \sum_{k=1}^K \lambda_k \beta_{0,t}^{(k)} + \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{0,t}^{(k)2} + 2 \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{0,t}^{(k)} \phi_{1,t}^{(k)} \mu_{t-1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{1,t}^{(k)2} E(y_{t-1}^2) + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^q \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} E(\varepsilon_{t-j}^{(k)2}), \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

où μ_t est la moyenne de y_t , qui satisfait l'équation aux différences linéaires non homogène périodique (5.3.1) et l'espérance $E(\varepsilon_{t-j}^{(k)2})$ vérifie

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_{t-j}^{(k)2}) &= E(y_{t-j}^2) + \phi_{0,t-j}^{(k)2} + \phi_{1,t-j}^{(k)2} E(y_{t-j-1}^2) + 2\phi_{1,t-j}^{(k)} \phi_{0,t-j}^{(k)} \mu_{t-j-1} \\ &\quad - 2\phi_{0,t-j}^{(k)} \mu_{t-j} - 2\phi_{1,t-j}^{(k)} E(y_{t-j} y_{t-j-1}). \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} E(y_{t-j} y_{t-j-1}) &= E(E(y_{t-j} y_{t-j-1} / \mathcal{F}_{t-j-1})) \\ &= a_0(t-j) \mu_{t-j-1} + a_1(t-j) E(y_{t-j-1}^2). \end{aligned}$$

En remplaçant $E(y_{t-j} y_{t-j-1})$ par sa valeur dans l'expression de $E(\varepsilon_{t-j}^{(k)2})$, nous trouvons

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_{t-j}^{(k)2}) &= \phi_{0,t-j}^{(k)2} - 2\phi_{0,t-j}^{(k)} \mu_{t-j} + 2\phi_{1,t-j}^{(k)} (\phi_{0,t-j}^{(k)} - a_0(t-j)) \mu_{t-j-1} + E(y_{t-j}^2) \\ &\quad + \phi_{1,t-j}^{(k)} [\phi_{1,t-j}^{(k)} - 2a_1(t-j)] E(y_{t-j-1}^2). \end{aligned}$$

Par conséquent, en remplaçant $E(\varepsilon_{t-j}^{(k)2})$ par son expression dans (5.3.7), nous obtenons

$$E(y_t^2) = \Lambda_{0,t} + \sum_{j=1}^{q+1} \Lambda_{j,t} E(y_{t-j}^2), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (5.3.8)$$

où

$$\begin{aligned} \Lambda_{0,t} &= \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\beta_{0,t}^{(k)} + \phi_{0,t}^{(k)2} \right) + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^q \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} \phi_{0,t-j}^{(k)2} + 2 \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{0,t}^{(k)} \phi_{1,t}^{(k)} \mu_{t-1} \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^q \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} \phi_{0,t-j}^{(k)} \mu_{t-j} + 2 \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^q \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} \phi_{1,t-j}^{(k)} (\phi_{0,t-j}^{(k)} - a_0(t-j)) \mu_{t-j-1}, \end{aligned}$$

et

$$\Lambda_{j,t} = \begin{cases} \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\phi_{1,t}^{(k)2} + \beta_{1,t}^{(k)} \right), & \text{si } j = 1, \\ \sum_{k=1}^K \lambda_k \left\{ \beta_{j,t}^{(k)} + \beta_{j-1,t}^{(k)} \phi_{1,t-j+1}^{(k)} \left[\phi_{1,t-j+1}^{(k)} - 2 \sum_{l=1}^K \lambda_l \phi_{1,t-j+1}^{(l)} \right] \right\}, & \text{si } 2 \leq j \leq q, \\ \sum_{k=1}^K \lambda_k \beta_{q,t}^{(k)} \phi_{1,t-q}^{(k)} \left(\phi_{1,t-q}^{(k)} - 2 \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{1,t-q}^{(k)} \right), & \text{si } j = q+1. \end{cases}$$

Equation (5.3.8) est une équation aux différences linéaires non homogène, d'ordre $q^* = q+1$, S -périodique. Pour avoir une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation admette une solution finie, nous procédons de la même manière utilisée lors de l'établissement de la condition nécessaire et suffisante de la stationnarité périodique du premier ordre (*Proposition 27*). En effet, soit $G_{0,T}$ et $G_{1,T}$ les deux matrices, de dimension $q^* \times q^*$, $\mathbb{S}$ -périodiques suivantes ($\mathbb{S}$ est le plus petit entier tel que $q^*\mathbb{S}$ soit le plus petit multiple commun de q^* et S)

$$(G_{0,T})_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ -\Lambda_{j-i,q^*T-i+1}, & \text{si } i < j \\ 0, & \text{si } i > j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, q^*.$$

$$(G_{1,T})_{i,j} = \begin{cases} \Lambda_{q^*-i+j,q^*T-i+1}, & \text{si } i \geq j \\ 0, & \text{si } i < j \end{cases}$$

Alors, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus satisfaisant une représentation $MPAR-ARCH_S(K; 1, 1, \dots, 1; q_1, q_2, \dots, q_K)$ soit périodiquement stationnaire au second ordre est donnée par la proposition suivante.

Proposition 29 (Bentarzi et Hamdi, 2008b)

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ périodiquement stationnaire en moyenne, satisfaisant une représentation $MPAR-ARCH_S(K; 1, 1, \dots, 1; q_1, q_2, \dots, q_K)$ soit périodiquement stationnaire au second ordre est que toutes les racines du polynôme (d'ordre $q^ = \max_k q_k + 1$)*

$$|Iz - \Psi| = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

soient de module strictement inférieur à l'unité, où $\Psi = \prod_{j=0}^{S-1} D_{S-j}$. Par ailleurs, l'expression du moment d'ordre deux, sous cette condition, est donné par

$$\pi_T = (I - \Psi)^{-1} \sum_{r=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{r-1} D_{T-j} \right) H_{T-r}, \quad T \in \mathbb{Z}, \quad (5.3.9)$$

où $\pi_T = (E(y_{q^*T}^2), E(y_{q^*T-1}^2), \dots, E(y_{q^*T-q^*+1}^2))'$, $H_T = G_{T,0}^{-1} c_T$, $D_T = G_{0,T}^{-1} G_{1,T}$, et $c_T = (\Lambda_{0,q^*T}, \Lambda_{0,q^*T-1}, \dots, \Lambda_{0,q^*T-q^*+1})'$.

Preuve. En utilisant les mêmes procédures de la preuve de la *Proposition 19*, nous trouvons facilement le résultat éablit dans la *Proposition 29*. $\square$

Condition de stationnarité périodique du second ordre d'un processus $MPAR-ARCH_S(K; 2, 2, \dots, 2; q_1, q_2, \dots, q_K)$

Dans ce paragraphe, nous établissons une condition nécessaire et suffisante de la stationnarité périodique du second ordre d'un processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ périodiquement stationnaire en moyenne, satisfaisant (5.2.2) avec $p = \max_k p_k = 2$. Dans ce cas, il est clair que l'espérance conditionnelle de y_t sachant le passé jusqu'à l'instant $t - 1$ est donnée par

$$\begin{aligned} E(y_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}) &= \sum_{k=1}^K \lambda_k h_{k,t} + \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{0,t}^{(k)2} + \sum_{k=1}^K \lambda_k 2 \phi_{0,t}^{(k)} \phi_{1,t}^{(k)} y_{t-1} + 2 \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{0,t}^{(k)} \phi_{2,t}^{(k)} y_{t-2} \\ &\quad + \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{1,t}^{(k)2} y_{t-1}^2 + \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{2,t}^{(k)2} y_{t-2}^2 + 2 \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{1,t}^{(k)} \phi_{2,t}^{(k)} y_{t-1} y_{t-2}, \end{aligned}$$

par conséquent le moment d'ordre deux du processus est donné comme suit

$$\begin{aligned} E(y_t^2) &= \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\phi_{0,t}^{(k)2} + 2 \phi_{0,t}^{(k)} \phi_{1,t}^{(k)} \mu_{t-1} + 2 \phi_{0,t}^{(k)} \phi_{2,t}^{(k)} \mu_{t-2} + \beta_{0,t}^{(k)} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{1,t}^{(k)2} E(y_{t-1}^2) + \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{2,t}^{(k)2} E(y_{t-2}^2) \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{1,t}^{(k)} \phi_{2,t}^{(k)} E(y_{t-1} y_{t-2}) + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{q_k} \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} E(\varepsilon_{t-j}^{(k)2}), \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

où $E(\varepsilon_{t-j}^{(k)2})$ peut être exprimé en fonction des moments du processus y_t comme suit

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_{t-j}^{(k)2}) &= E\left(E(\varepsilon_{t-j}^{(k)2} / \mathcal{F}_{t-j-1})\right) \\ &= E\left(E\left(y_{t-j} - \phi_{0,t-j}^{(k)} - \phi_{1,t-j}^{(k)} y_{t-j-1} - \phi_{2,t-j}^{(k)} y_{t-j-2}\right)^2 / \mathcal{F}_{t-j-1}\right) \\ &= \phi_{0,t-j}^{(k)2} - 2 \phi_{0,t-j}^{(k)} \mu_{t-j} + 2 \phi_{0,t-j}^{(k)} \phi_{1,t-j}^{(k)} \mu_{t-j-1} + 2 \phi_{0,t-j}^{(k)} \phi_{2,t-j}^{(k)} \mu_{t-j-2} \\ &\quad + E(y_{t-j}^2) + \phi_{1,t-j}^{(k)2} E(y_{t-j-1}^2) + \phi_{2,t-j}^{(k)2} E(y_{t-j-2}^2) - 2 \phi_{1,t-j}^{(k)} E(y_{t-j} y_{t-j-1}) \\ &\quad + 2 \phi_{1,t-j}^{(k)} \phi_{2,t-j}^{(k)} E(y_{t-j-1} y_{t-j-2}) - 2 \phi_{2,t-j}^{(k)} E(y_{t-j} y_{t-j-2}). \end{aligned}$$

Pour représenter l'équation (5.3.10) sous forme d'une équation aux différences linéaires, il est clair qu'il faut exprimer les espérances $E(y_{t-j} y_{t-j-1})$, $E(y_{t-j} y_{t-j-2})$ et $E(y_{t-j-1} y_{t-j-2})$, qui apparaissent dans la dernière expression de $E(\varepsilon_{t-j}^{(k)2})$, en fonction des moments d'ordres

un et deux de y_t . Pour cela, nous pouvons facilement montrer que

$$E(y_{t-j} y_{t-j-1}) = a_0(t-j)\mu_{t-j-1} + a_1(t-j)E(y_{t-j-1}^2) + a_2(t-j)E(y_{t-j-1}y_{t-j-2}),$$

se qui nous permet, après $S-1$ remplacements successifs dans cette dernière équation, d'obtenir

$$\begin{aligned} E(y_{t-j}y_{t-j-1}) &= \frac{1}{1-\Phi_2} \sum_{r=0}^{S-1} \prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-j-l)a_0(t-j-r)\mu_{t-j-r-1} \\ &+ \frac{1}{1-\Phi_2} \sum_{r=0}^{S-1} \prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-j-l)a_1(t-j-r)E(y_{t-j-r-1}^2), \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

où $\Phi_2 = \prod_{s=1}^S a_2(s) = \prod_{s=1}^S \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{2,s}^{(k)} \right)$. Pour calculer $E(y_{t-j-1}y_{t-j-2})$, il suffit de remplacer t par $t-1$ dans l'équation (5.3.11). D'autre part, il est facile de montrer que

$$E(y_{t-i} y_{t-i-2}) = a_0(t-i)\mu_{t-i-2} + a_2(t-i)E(y_{t-i-2}^2) + a_1(t-i)E(y_{t-i-1}y_{t-i-2}),$$

et en remplaçant $E(y_{t-i-1} y_{t-i-2})$ par son expression (5.3.11), nous obtenons

$$\begin{aligned} E(y_{t-j} y_{t-j-2}) &= a_0(t-j)\mu_{t-j-2} + a_2(t-j)E(y_{t-j-2}^2) \\ &+ \frac{a_1(t-j)}{1-\Phi_2} \sum_{r=0}^{S-1} \prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-j-l-1)a_0(t-j-r-1)\mu_{t-j-r-2} \\ &+ \frac{a_1(t-j)}{1-\Phi_2} \sum_{r=0}^{S-1} \prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-j-l-1)a_1(t-j-r-1)E(y_{t-j-r-2}^2) \end{aligned}$$

De l'équation (5.3.10) nous trouvons après certaines manipulations algébriques et en tenant compte la périodicité des coefficients $\phi_{i,t}^{(k)}$ et $\beta_{j,t}^{(k)}$, que

$$\begin{aligned} E(y_t^2) &= C_t + \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{1,t}^{(k)2} E(y_{t-1}^2) + \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{2,t}^{(k)2} E(y_{t-2}^2) + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{q_k} \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} E(y_{t-j}^2) \\ &+ \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{q_k} \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} \phi_{1,t-j}^{(k)2} E(y_{t-j-1}^2) + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{q_k} \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} \phi_{2,t-j}^{(k)2} E(y_{t-j-2}^2) \\ &+ 2 \sum_{k=1}^K \sum_{r=0}^{S-1} \frac{\lambda_k \phi_{1,t}^{(k)} \phi_{2,t}^{(k)}}{1-\Phi_2} \left(\prod_{j=0}^{r-1} a_2(t-j-1) \right) a_0(t-r-1)\mu_{t-r-2} \\ &+ 2 \sum_{k=1}^K \sum_{r=0}^{S-1} \frac{\lambda_k \phi_{1,t}^{(k)} \phi_{2,t}^{(k)}}{1-\Phi_2} \left(\prod_{j=0}^{r-1} a_2(t-j-1) \right) a_1(t-r-1)E(y_{t-r-2}^2) \\ &- 2 \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{q_k} \sum_{r=0}^{S-1} \frac{\lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} \phi_{1,t-j}^{(k)}}{1-\Phi_2} \left(\prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-j-l) \right) a_0(t-j-r)\mu_{t-j-r-1} \\ &- 2 \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{q_k} \sum_{r=0}^{S-1} \frac{\lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} \phi_{1,t-j}^{(k)}}{1-\Phi_2} \left(\prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-j-l) \right) a_1(t-j-r)E(y_{t-j-r-1}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{q_k} \sum_{r=0}^{S-1} \frac{\lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} \phi_{1,t-j}^{(k)} \phi_{2,t-j}^{(k)}}{1-\Phi_2} \prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-j-l-1) a_0(t-j-r-1) \mu_{t-j-r-2} \\
& +2 \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{q_k} \sum_{r=0}^{S-1} \frac{\lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} \phi_{1,t-j}^{(k)} \phi_{2,t-j}^{(k)}}{1-\Phi_2} \prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-j-l-1) a_1(t-j-r-1) E(y_{t-j-r-2}^2) \\
& -2 \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{q_k} \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} \phi_{2,t-j}^{(k)} a_0(t-j) \mu_{t-j-2} - 2 \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{q_k} \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} \phi_{2,t-j}^{(k)} a_2(t-j) E(y_{t-j-2}^2) \\
& -2 \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{q_k} \sum_{r=0}^{S-1} \frac{\lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} \phi_{2,t-j}^{(k)} a_1(t-j)}{1-\Phi_2} \prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-j-l-1) a_0(t-j-r-1) \mu_{t-j-r-2} \\
& -2 \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{q_k} \sum_{r=0}^{S-1} \frac{\lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} \phi_{2,t-j}^{(k)} a_1(t-j)}{1-\Phi_2} \prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-j-l-1) a_1(t-j-r-1) E(y_{t-j-r-2}^2),
\end{aligned}$$

que nous pouvons écrire comme suit

$$\begin{aligned}
E(y_t^2) &= \varphi_{0,t} + b_{1,1}(t) E(y_{t-1}^2) + b_{2,2}(t) E(y_{t-2}^2) \\
&+ \sum_{j=1}^q d_j(t) E(y_{t-j}^2) + \sum_{j=1}^q v_{1,1,j}(t-j, t) E(y_{t-j-1}^2) \\
&+ \sum_{j=1}^q (v_{2,2,j}(t-j, t) - 2e_{2,j}(t-j, t) a_2(t-j)) E(y_{t-j-2}^2) \\
&+ 2 \sum_{r=0}^{S-1} \prod_{j=0}^{r-1} a_2(t-j-1) \frac{b_{1,2}(t) a_1(t-r-1)}{1-\Phi_2} E(y_{t-r-2}^2) \\
&- 2 \sum_{j=1}^q \sum_{r=0}^{S-1} \prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-j-l) \frac{e_{1,j}(t-j, t) a_1(t-j-r)}{1-\Phi_2} E(y_{t-j-r-1}^2) \\
&+ 2 \sum_{j=1}^q \sum_{r=0}^{S-1} \prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-j-l-1) \frac{v_{1,2,j}(t-j, t) a_1(t-j-r-1)}{1-\Phi_2} E(y_{t-j-r-2}^2) \\
&- 2 \sum_{j=1}^q \sum_{r=0}^{S-1} \prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-j-l-1) \frac{e_{2,j}(t-j, t) a_1(t-j) a_1(t-j-r-1)}{1-\Phi_2} E(y_{t-j-r-2}^2)
\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

où

$$\begin{aligned}
\varphi_{0,t} = & b_{0,0}(t) + d_0(t) + \sum_{j=1}^q v_{0,0,j}(t-j, t) + 2b_{0,1}(t)\mu_{t-1} + 2b_{0,2}(t)\mu_{t-2} \\
& - 2 \sum_{j=1}^q e_{0,j}(t-j, t) \mu_{t-j} + 2 \sum_{j=1}^q v_{0,1,j}(t-j, t)\mu_{t-j-1} \\
& - 2 \sum_{j=1}^q \sum_{r=0}^{S-1} \prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-j-l) \frac{e_{1,j}(t-j, t) a_0(t-j-r)}{1 - \Phi_2} \mu_{t-j-r-1} \\
& + 2 \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^q \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} \phi_{0,t-j}^{(k)} \phi_{2,t-j}^{(k)} \mu_{t-j-2} - 2 \sum_{j=1}^q e_{2,j}(t-j, t) a_0(t-j) \mu_{t-j-2} \\
& + 2 \sum_{r=0}^{S-1} \prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-l-1) \frac{b_{1,2}(t) a_0(t-r-1)}{1 - \Phi_2} \mu_{t-r-2} \\
& + 2 \sum_{j=1}^q \sum_{r=0}^{S-1} \prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-j-l-1) \frac{v_{1,2,j}(t-j, t) a_0(t-j-r-1)}{1 - \Phi_2} \mu_{t-j-r-2} \\
& - 2 \sum_{j=1}^q \sum_{r=0}^{S-1} \prod_{l=0}^{r-1} a_2(t-j-l-1) \frac{e_{2,j}(t-j, t) a_1(t-j) a_0(t-j-r-1)}{1 - \Phi_2} \mu_{t-j-r-2}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b_{i,j}(t) &= \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{i,t}^{(k)} \phi_{j,t}^{(k)}, \quad i, j = 1, \dots, p; \quad k = 1, \dots, K \text{ et } t \in \mathbb{Z} \\
d_j(t) &= \sum_{k=1}^K \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)}, \quad j = 1, \dots, q; \quad k = 1, \dots, K \text{ et } t \in \mathbb{Z} \\
e_{i,j}(t, h) &= \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{i,t}^{(k)} \beta_{j,h}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, p; \quad j = 1, \dots, q; \quad k = 1, \dots, K \text{ et } t, h \in \mathbb{Z} \\
v_{i,j,l}(t, h) &= \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{i,t}^{(k)} \phi_{j,t}^{(k)} \beta_{l,h}^{(k)}, \quad i, j = 1, \dots, p; \quad l = 1, \dots, q; \quad k = 1, \dots, K \text{ et } t, h \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Donc, nous pouvons réécrire l'équation aux différences linéaires non homogène (5.3.12) comme suit

$$(1 - \varphi_{S,t}) E(y_t^2) = \varphi_{0,t} + \sum_{i=1}^{S-1} \varphi_{i,t} E(y_{t-i}^2) \quad (5.3.12)$$

où l'expression explicite des coefficients $\varphi_{i,t}$, $i = 1, \dots, S$ est donnée selon les valeurs de S et q . Notons que ces coefficients sont périodiques en t , de période S . Par conséquent, l'équation (5.3.12) est une équation aux différences linéaires non homogène S -périodique d'ordre $q^* = S - 1$.

Soient $G_{0,T}$ et $G_{1,T}$ deux matrices S -périodiques, de dimension $q^* \times q^*$, définies par

$$\text{et } (G_{0,T})_{i,j} = \begin{cases} 1 - \varphi_{S,t}, & \text{si } i = j \\ -\varphi_{j-i, q^*T-i+1}, & \text{si } i < j \\ 0, & \text{si } i > j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, q^*.$$

$$(G_{1,T})_{i,j} = \begin{cases} \varphi_{q^*-i+j, q^*T-i+1}, & \text{si } i \geq j \\ 0, & \text{si } i < j \end{cases}$$

En Utilisant ces notations, nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Proposition 30 (Bentarzi et Hamdi, 2008b)

Soit $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ un processus $MPAR-ARCH_S(K; 2, 2, \dots, 2; q_1, q_2, \dots, q_K)$, avec $S \geq 2$, périodiquement stationnaire en moyenne. Supposons que $\prod_{s=1}^S (1 - \varphi_{S,s}) \neq 0$ et $1 - \Phi_2 \neq 0$, alors une condition nécessaire et suffisante pour que y_t soit périodiquement stationnaire au second ordre est que toutes les racines du polynôme (d'ordre $q^* = S - 1$)

$$|Iz - \Psi| = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

soient de module strictement inférieur à l'unité, où $\Psi = \prod_{j=0}^{S-1} D_{S-j}$. En outre, l'expression du moment d'ordre deux, sous cette condition, est donnée par

$$\pi_T = (I - \Psi)^{-1} \sum_{r=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{r-1} D_{T-j} \right) H_{T-r}, \quad T \in \mathbb{Z}.$$

où $\pi_T = (E(y_{q^*T}^2), E(y_{q^*T-1}^2), \dots, E(y_{q^*T-q^*+1}^2))'$, $H_T = G_{T,0}^{-1} c_T$, $D_T = G_{0,T}^{-1} G_{1,T}$ et $c_T = (\varphi_{0,q^*T}, \varphi_{0,q^*T-1}, \dots, \varphi_{0,q^*T-q^*+1})'$.

Preuve. En utilisant les mêmes procédures de la preuve de la Proposition 19, nous trouvons facilement le résultat. $\square$

Concernant le cas classique, i.e., $S = 1$, où l'équation aux différences linéaires non homogène S -périodique (5.3.12) devient comme suit

$$E(y_t^2) = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{p+2} \varphi_i E(y_{t-i}^2), \quad (5.3.13)$$

où les coefficients φ_i , $i = 1, \dots, p+2$, sont donnés par

$$\varphi_i = \begin{cases} b_{1,1} + d_1, & \text{si } i = 1, \\ b_{2,2} + v_{1,1,1} + d_2 + 2 \frac{b_{1,2} - e_{1,1}}{1 - \Phi_2} a_1, & \text{si } i = 2, \\ d_i + v_{1,1,i-1} + v_{2,2,i-2} - 2e_{2,i-2}a_2 + 2 \frac{v_{1,2,i-2} - e_{2,i-2}a_1 - e_{1,i-1}}{1 - \Phi_2} a_1, & \text{si } 3 \leq i \leq q, \\ v_{1,1,q} + v_{2,2,q-1} - 2e_{2,q-1}a_2 + 2 \frac{v_{1,2,q-1} - e_{2,q-1}a_1 - e_{1,q}}{1 - \Phi_2} a_1, & \text{si } i = q+1, \\ v_{2,2,q} - 2e_{2,q}a_2 + 2 \frac{v_{1,2,q} - e_{2,q}a_1}{1 - \Phi_2} a_1, & \text{si } i = q+2, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= b_{0,0} + d_0 + \sum_{j=1}^q v_{0,0,j} + 2 \left(b_{0,1} + b_{0,2} + \frac{b_{1,2}}{1 - \Phi_2} a_0 \right) \mu \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^q \left[v_{0,1,j} - e_{0,j} + v_{0,2,j} + \left(\frac{v_{1,2,j} - e_{2,j}a_1 - e_{1,j}}{1 - \Phi_2} - e_{2,j} \right) a_0 \right] \mu. \end{aligned}$$

Corollaire 31 (Bentarzi et Hamdi, 2008b)

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus $\{y_t; t \in Z\}$ stationnaire en moyenne, satisfaisant une représentation MAR-ARCH $(K; 2, 2, \dots, 2, q_1, q_2, \dots, q_K)$, tel que $\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_2^{(k)} \neq 1$, soit stationnaire au second ordre, est que les racines $z_1, z_2, \dots, z_{q+2}$ de l'équation

$$z^{q+2} - \sum_{i=1}^{q+2} \varphi_i z^{q+2-i} = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

soient de module strictement inférieur à l'unité, où $q = \max_k q_k$. Par ailleurs, l'expression explicite du moment d'ordre deux, sous cette condition, est donnée par

$$\begin{aligned} E(y_t^2) &= \frac{\sum_{k=1}^K \lambda_k (\phi_0^{(k)2} + \beta_0^{(k)}) + \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_0^{(k)2} \beta_j^{(k)}}{1 - \sum_{i=1}^{p+2} \varphi_i} \\ &\quad + \frac{2 \left(\sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_0^{(k)} (\phi_1^{(k)} + \phi_2^{(k)} - 1) \beta_j^{(k)} \right) \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_0^{(k)} \right)}{(1 - \sum_{i=1}^{p+2} \varphi_i) \left(1 - \sum_{k=1}^K \lambda_k (\phi_1^{(k)} - \phi_2^{(k)}) \right)} \\ &\quad + \frac{2 \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_0^{(k)} (\phi_1^{(k)} + \phi_2^{(k)}) \right) \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_0^{(k)} \right) - 2 \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_2^{(k)} \beta_j^{(k)} \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_0^{(k)} \right)^2}{(1 - \sum_{i=1}^{p+2} \varphi_i) \left(1 - \sum_{k=1}^K \lambda_k (\phi_1^{(k)} - \phi_2^{(k)}) \right)} \\ &\quad + \frac{2 \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_1^{(k)} \phi_2^{(k)} \right) \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_0^{(k)} \right)^2 - 2 \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_1^{(k)} \beta_j^{(k)} \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_0^{(k)} \right)^2}{(1 - \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_2^{(k)}) (1 - \sum_{i=1}^{p+2} \varphi_i) \left(1 - \sum_{k=1}^K \lambda_k (\phi_1^{(k)} - \phi_2^{(k)}) \right)} \\ &\quad + \frac{2 \sum_{j=1}^q \left[\left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_1^{(k)} \phi_2^{(k)} \beta_j^{(k)} \right) - \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_1^{(k)} \right) \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_2^{(k)} \beta_j^{(k)} \right) \right] \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_0^{(k)} \right)^2}{(1 - \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_2^{(k)}) (1 - \sum_{i=1}^{p+2} \varphi_i) \left(1 - \sum_{k=1}^K \lambda_k (\phi_1^{(k)} - \phi_2^{(k)}) \right)}. \end{aligned}$$

Preuve. La condition de stationnarité du second ordre est une conséquence immédiate de (5.3.13). D'ailleurs, sous cette condition, l'expression explicite du moment d'ordre deux est

donnée par

$$E(y_t^2) = \varphi_0 \left/ \left(1 - \sum_{i=1}^{q+2} \varphi_i \right) \right.$$

Comme la moyenne du processus, $\mu = E(y_t)$, peut être obtenue de l'équation (5.3.1) qui est réduite, pour $p = 2$ et $a_i = \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_i^{(k)}$, $i = 0, 1, 2$, à $\mu - a_1\mu - a_2\mu = a_0$, nous obtenons alors $\mu = a_0 / (1 - a_1 - a_2)$. Finalement, la preuve de l'expression explicite de $E(y_t^2)$ peut être donnée en remplaçant μ par sa valeur dans l'expression de φ_0 . $\square$

Remarque 32 *Corollaire 31 généralise le résultat de Wong et Li (2001) pour les modèles $MAR-ARCH(K; 1, 1, \dots, 1; q_1, q_2, \dots, q_K)$ au cas des modèles $MAR-ARCH(K; 2, 2, \dots, 2; q_1, q_2, \dots, q_K)$ (voir Wong et Li (2001) Théorème 2).*

5.4 Estimation des paramètres

Les paramètres du modèle $MPAR-ARCH$ peuvent être facilement estimés en utilisant l'algorithme EM qui est une approche largement utilisée dans le calcul récursif des estimations du maximum de vraisemblance avec des données manquantes. Notons par $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{NS}, Z_1, Z_2, \dots, Z_{NS})$ et $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_{NS})$ le vecteur contenant respectivement les données complètes et les données manquantes, où $Z_t = (Z_{1,t}, Z_{2,t}, \dots, Z_{K,t})$ est un vecteur, de dimension K , dont chaque composante $Z_{k,t}$ est égale à 1 si l'observation y_t est générée par la $k^{ième}$ composante du mélange et 0 ailleurs.

Soit $\underline{\theta} = (\underline{\lambda}', \Phi'_{1,1}, \theta'_{1,1}, \dots, \Phi'_{1,S}, \theta'_{1,S}, \Phi'_{2,1}, \theta'_{2,1}, \dots, \Phi'_{2,S}, \theta'_{2,S}, \dots, \Phi'_{K,1}, \theta'_{K,1}, \dots, \Phi'_{K,S}, \theta'_{K,S})'$ tels que $\Phi_{k,s} = (\phi_{0,s}^{(k)}, \phi_{1,s}^{(k)}, \dots, \phi_{p_k,s}^{(k)})'$, $\theta_{k,s} = (\beta_{0,s}^{(k)}, \beta_{1,s}^{(k)}, \dots, \beta_{q_k,s}^{(k)})'$ et $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{K-1})'$, soit également $t = s + \tau S$, pour $s = 1, \dots, S$, $\tau = 0, 1, \dots, N-1$, et $p + q + 1 = s_0 + \tau_0 S$, pour $1 \leq s_0 \leq S$,

$$\tau_0 = \begin{cases} \lfloor \frac{p+q+1}{S} \rfloor, & \text{si } s_0 \neq S, \\ \lfloor \frac{p+q+1}{S} \rfloor - 1, & \text{si } s_0 = S, \end{cases}$$

et

$$\tau_1 = \begin{cases} \tau_0, & \text{si } s \geq s_0, \\ \tau_0 + 1, & \text{si } s < s_0, \end{cases}$$

où $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x .

Avec ces notations, nous pouvons exprimer, pour une réalisation donnée $y = (y_1, y_2, \dots, y_{NS})$

du modèle (5.2.2), la fonction de log-vraisemblance du vecteur des paramètres $\underline{\theta}$ comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n(\underline{\theta}) = & -\frac{(p+q-NS)\ln(2\pi)}{2} \sum_{s=s_0}^S \sum_{k=1}^K z_{k,s+S\tau_0} \left(\ln \lambda_k - \frac{1}{2} \left(\ln h_{s+S\tau_0}^{(k)} + \frac{\varepsilon_{s+S\tau_0}^{(k)2}}{h_{s+S\tau_0}^{(k)}} \right) \right) \\ & + \sum_{\tau=\tau_0+1}^{N-1} \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^K z_{k,s+S\tau} \left(\ln \lambda_k - \frac{1}{2} \left(\ln h_{s+S\tau}^{(k)} + \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)2}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Notons par $\tau_{k,s+S\tau}$ l'espérance conditionnelle de la $k^{ième}$ composante de $Z_{s+S\tau}$ sachant le passé jusqu'à l'instant $t-1$ et les estimations des paramètres. Alors, $\tau_{k,s+S\tau}$ peut être donnée, pour $k=1, \dots, K$, $s=1, \dots, S$, et $\tau \in \mathbb{Z}$, par

$$\tau_{k,s+S\tau} = \frac{\lambda_k^{(i)}}{\sqrt{h_{s+S\tau}^{(k)}(\underline{\theta}^{(i)})}} \phi\left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{\sqrt{h_{s+S\tau}^{(k)}(\underline{\theta}^{(i)})}}\right) / \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k^{(i)}}{\sqrt{h_{s+S\tau}^{(k)}(\underline{\theta}^{(i)})}} \phi\left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{\sqrt{h_{s+S\tau}^{(k)}(\underline{\theta}^{(i)})}}\right),$$

où $\phi(\cdot)$ est la densité de la loi normale centrée réduite.

Nous entamons maintenant la deuxième étape de l'algorithme *EM*, où nous supposons que les données manquantes sont connues. Alors, l'estimation des paramètres peut être établie en résolvant les équations $\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta}) / \partial \lambda_k = 0$, $\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta}) / \partial \phi_{i,s}^{(k)} = 0$ et $\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta}) / \partial \beta_{j,s}^{(k)} = 0$, pour $i=0, 1, \dots, p_k$, $j=0, 1, \dots, q_k$, et $k=1, \dots, K$.

Les dérivées premières de (5.4.1) par rapport à λ_k , $\phi_{i,s}^{(k)}$ et $\beta_{j,s}^{(k)}$, sous la contrainte $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$, sont respectivement données pour $s=1, \dots, S$ par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \lambda_k} &= \sum_{t=q+1}^{NS} \left(\frac{z_{k,t}}{\lambda_k} - \frac{z_{K,t}}{\lambda_K} \right), \quad k=1, \dots, K-1, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} &= \frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \frac{z_{k,s+S\tau}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \left[\frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} \left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)2}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} - 1 \right) - 2\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)} \frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} \right], \quad k=1, \dots, K; \\ &\quad i=0, \dots, p_k, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \beta_{j,s}^{(k)}} &= -\frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \frac{z_{k,s+S\tau}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \beta_{j,s}^{(k)}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)2}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \right), \quad k=1, \dots, K; \quad j=0, \dots, q_k. \end{aligned}$$

où $\frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} = 2 \sum_{j=1}^{q_k} \beta_{j,s}^{(k)} \frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau-j}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} \varepsilon_{s+S\tau-j}^{(k)}$, pour $i=1, \dots, p_k$, $\frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \beta_{0,s}^{(k)}} = 1$, $\frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{0,s}^{(k)}} = -1$, $\frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} = -y_{s+S\tau-i}$, pour $i=1, \dots, p_k$, et $\frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \beta_{j,s}^{(k)}} = \varepsilon_{s+S\tau-j}^{(k)2}$ pour $j=1, \dots, q_k$.

Par conséquent, l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ_k est donné par

$$\hat{\lambda}_k = \frac{1}{NS - p - q} \sum_{t=p+q+1}^{NS} z_{k,t}, \quad \text{pour } k=1, \dots, K-1.$$

Pour les paramètres $\phi_{k,s}$ et $\beta_{k,s}$, $s=1, \dots, S$ et $k=1, \dots, K$, il n'y a pas de solution explicite pour les équations $\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta}) / \partial \phi_{k,s} = 0$ et $\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta}) / \partial \beta_{k,s} = 0$, pour cette raison, nous proposons d'utiliser la méthode de Newton-Raphson, où nous avons besoin d'évaluer les dérivées

secondes de la fonction de vraisemblance par rapport aux paramètres $\phi_{k,s}$ et $\beta_{k,s}$, $s = 1, \dots, S$ et $k = 1, \dots, K$. En utilisant les mêmes techniques de Wong et Li (2001), il est facile de prouver que les dérivés secondes de la fonction log-vraisemblance par rapport aux paramètres $\phi_{i,s}^{(k)}$ et $\beta_{j,s}^{(k)}$ peuvent être approximées, pour $k = 1, \dots, K$ et $s = 1, \dots, S$, par les quantités suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \phi_{i,s}^{(k)} \partial \phi_{j,s}^{(k)}} &\approx - \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \frac{z_{k,s+S\tau}}{2h_{s+S\tau}^{(k)2}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{j,s}^{(k)}} + \frac{z_{k,s+S\tau}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} \frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{j,s}^{(k)}}, \quad i, j = 0, \dots, p_k, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \phi_{i,s}^{(k)} \partial \beta_{j,s}^{(k)}} &\approx - \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \frac{z_{k,s+S\tau}}{2h_{s+S\tau}^{(k)2}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \beta_{i,s}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \beta_{j,s}^{(k)}}, \quad i, j = 0, \dots, q_k, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \phi_{i,s}^{(k)} \partial \beta_{j,s}^{(k)}} &\approx 0, \quad i = 0, \dots, p_k, j = 0, \dots, q_k. \end{aligned}$$

Partant des valeurs initiales $\Phi_{k,s}^{(0)}$ et $\theta_{k,s}^{(0)}$, alors les estimations $\hat{\Phi}_{k,s}$ et $\hat{\theta}_{k,s}$ des paramètres $\Phi_{k,s}$ et $\theta_{k,s}$ peuvent être obtenues en itérant, pour $k = 1, 2, \dots, K$, et $s = 1, 2, \dots, S$, les deux équations suivantes jusqu'à avoir la convergence

$$\Phi_{k,s}^{(i+1)} = \Phi_{k,s}^{(i)} + \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}_n}{\partial \Phi_{k,s} \partial \Phi_{k,s}'} \right]_{\Phi_{k,s}^{(i)}, \theta_{k,s}^{(i)}}^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \Phi_{k,s}} \right]_{\Phi_{k,s}^{(i)}, \theta_{k,s}^{(i)}}, \quad (5.4.2)$$

et

$$\theta_{k,s}^{(i+1)} = \theta_{k,s}^{(i)} + \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}_n}{\partial \theta_{k,s} \partial \theta_{k,s}'} \right]_{\Phi_{k,s}^{(i+1)}, \theta_{k,s}^{(i)}}^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \theta_{k,s}} \right]_{\Phi_{k,s}^{(i+1)}, \theta_{k,s}^{(i)}}, \quad (5.4.3)$$

où $\Phi_{k,s}^{(i)}$ et $\theta_{k,s}^{(i)}$ sont respectivement les valeurs de $\Phi_{k,s}$ et $\theta_{k,s}$ dans la $i^{\text{ème}}$ itération. En pratique, les variables $z_{k,s+S\tau}$ sont remplacées par leurs estimations $\tau_{k,s+S\tau}$ calculées dans l'étape précédente de l'algorithme *EM* (*E-step*). Par ailleurs, comme dans le cas des modèles *MPARCH*, nous pouvons utiliser le principe de l'information manquante (Louis, 1982) pour calculer les écarts types des estimations. En effet, la matrice d'information observée, I_{ob} , peut être calculée de la matrice d'information complète, I_c , et de la matrice d'information manquante, I_m , avec la relation suivante

$$I_{ob} = I_c - I_m = E \left(- \frac{\partial^2 \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}'} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_n \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} - Var \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_n \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}}.$$

Les formules pour calculer les matrices I_c et I_m sont données dans le paragraphe suivant.

5.4.1 Calcul de la matrice d'information complète

Comme pour le modèle *MPARCH*, il est clair que la matrice d'information complète d'un modèle *MPAR-ARCH*, $E \left(- \frac{\partial^2 \mathcal{L}_n}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}'} / \underline{\theta}, \mathcal{F}_n \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}}$, est une matrice bloc diagonale. Posons

$$I_c = \begin{pmatrix} A^{(\lambda)} & 0 & & & & 0 \\ 0 & A^{(\Phi_{1,1})} & & & & \\ & & A^{(\theta_{1,1})} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & A^{(\Phi_{k,s})} & \\ & & & & & A^{(\theta_{k,s})} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & A^{(\Phi_{K,S})} & 0 \\ 0 & & & & & & & 0 & A^{(\theta_{K,S})} \end{pmatrix}$$

Dans la matrice I_c , le bloc $A^{(\lambda)}$ est une matrice carrée de dimension $K - 1$, définie par

$$A^{(\lambda)} = E \left(- \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda \partial \lambda'} / \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(A_{k,l}^{(\lambda)} \right)_{k,l=1,\dots,K-1},$$

où les éléments $A_{k,l}^{(\lambda)}$, $k, l = 1, \dots, K - 1$, sont donnés par

$$\begin{aligned} A_{k,k}^{(\lambda)} &= \sum_{t=q+1}^{NS} \left(\frac{\tau_{k,t}}{\hat{\lambda}_k^2} + \frac{\tau_{K,t}}{\hat{\lambda}_K^2} \right) \\ &= \sum_{s=s_0}^S \left(\frac{\tau_{k,s+S\tau_0}}{\hat{\lambda}_k^2} + \frac{\tau_{K,s+S\tau_0}}{\hat{\lambda}_K^2} \right) + \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=\tau_0+1}^{N-1} \left(\frac{\tau_{k,s+S\tau}}{\hat{\lambda}_k^2} + \frac{\tau_{K,s+S\tau}}{\hat{\lambda}_K^2} \right). \end{aligned}$$

et pour $k, l = 1, \dots, K - 1$ avec $k \neq l$, par

$$A_{k,l}^{(\lambda)} = \sum_{t=q+1}^{NS} \frac{\tau_{K,t}}{\hat{\lambda}_K^2} = \sum_{s=s_0}^S \frac{\tau_{K,s+S\tau_0}}{\hat{\lambda}_K^2} + \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=\tau_0+1}^{N-1} \frac{\tau_{K,s+S\tau}}{\hat{\lambda}_K^2}.$$

Les matrices $A^{(\Phi_{k,s})}$, $k = 1, \dots, K$ et $s = 1, \dots, S$, sont des matrices carrées de dimension $p + 1$ définies par

$$A^{(\Phi_{k,s})} = E \left(- \frac{\partial^2 \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \Phi_{k,s} \partial \Phi_{k,s}'} / \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(A_{i,j}^{(\Phi_{k,s})} \right)_{i,j=1,\dots,p+1},$$

où les éléments $A_{i+1,j+1}^{(\Phi_{k,s})}$, $i, j = 0, \dots, p$, sont donnés comme suit

$$\begin{aligned} A_{i+1,j+1}^{(\Phi_{k,s})} &= E \left(- \frac{\partial^2 \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \phi_{i,s}^{(k)} \partial \phi_{j,s}^{(k)}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \tau_{k,s+S\tau} \left[\frac{1}{2h_{s+S\tau}^{(k)2}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{j,s}^{(k)}} + \frac{1}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} \frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{j,s}^{(k)}} \right]. \end{aligned}$$

D'autre part, les matrices $A^{(\theta_{k,s})}$, $k = 1, \dots, K$ et $s = 1, \dots, S$, sont des matrices carrées de dimension $q + 1$ définies par

$$A^{(\theta_{k,s})} = E \left(- \frac{\partial^2 \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s} \partial \theta'_{k,s}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(A_{i,j}^{(\theta_{k,s})} \right)_{i,j=1,\dots,q+1},$$

où les éléments $A_{i+1,j+1}^{(\theta_{k,s})}$, $i, j = 0, \dots, q$, sont donnés par la relation suivante

$$\begin{aligned} A_{i+1,j+1}^{(\Phi_{k,s})} &= E \left(- \frac{\partial^2 \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \beta_{i,s}^{(k)} \partial \beta_{j,s}^{(k)}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \tau_{k,s+S\tau} \left[\frac{1}{2h_{s+S\tau}^{(k)2}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \beta_{i,s}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \beta_{j,s}^{(k)}} \right]. \end{aligned}$$

5.4.2 Calcul de la matrice d'information manquante

Il est bien connu que la matrice d'information manquante est définie par $I_m = \text{Var} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}}$. Posons

$$I_m = \begin{pmatrix} B^{(\lambda,\lambda)} & B^{(\lambda,\Phi_{1,1})} & \dots & B^{(\lambda,\Phi_{k,s})} & B^{(\lambda,\theta_{k,s})} & \dots & B^{(\lambda,\theta_{K,S})} \\ B^{(\Phi_{1,1},\lambda)} & B^{(\Phi_{1,1},\Phi_{1,1})} & \dots & B^{(\Phi_{1,1},\Phi_{k,s})} & B^{(\Phi_{1,1},\theta_{k,s})} & \dots & B^{(\Phi_{1,1},\theta_{K,S})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B^{(\Phi_{k,s},\lambda)} & B^{(\Phi_{k,s},\Phi_{1,1})} & \dots & B^{(\Phi_{k,s},\Phi_{k,s})} & B^{(\Phi_{k,s},\theta_{k,s})} & \dots & B^{(\Phi_{k,s},\theta_{K,S})} \\ B^{(\theta_{k,s},\lambda)} & B^{(\theta_{k,s},\Phi_{1,1})} & \dots & B^{(\theta_{k,s},\Phi_{k,s})} & B^{(\theta_{k,s},\theta_{k,s})} & \dots & B^{(\theta_{k,s},\theta_{K,S})} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B^{(\theta_{K,S},\lambda)} & B^{(\theta_{K,S},\Phi_{1,1})} & \dots & B^{(\theta_{K,S},\Phi_{k,s})} & B^{(\theta_{K,S},\theta_{k,s})} & \dots & B^{(\theta_{K,S},\theta_{K,S})} \end{pmatrix}$$

où les matrices $B^{(\lambda,\lambda)}$, $B^{(\lambda,\Phi_{k,s})}$, $B^{(\lambda,\theta_{k,s})}$, $B^{(\Phi_{k,s},\Phi_{l,\nu})}$, $B^{(\theta_{k,s},\theta_{l,\nu})}$ et $B^{(\Phi_{k,s},\theta_{k,s})}$ ($s, \nu = 1, \dots, S$ et $k, l = 1, \dots, K$) sont, respectivement, de dimensions $(K-1) \times (K-1)$, $(K-1) \times (p+1)$, $(K-1) \times (q+1)$, $(p+1) \times (p+1)$, $(q+1) \times (q+1)$ et $(p+1) \times (q+1)$. Comme la matrice I_m est symétrique, il suffit alors d'évaluer la matrice triangulaire supérieure de I_m .

Commençons par la matrice $A^{(\lambda,\lambda)}$ qui est définie par

$$B^{(\lambda,\lambda)} = Var \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(B_{k,l}^{(\lambda,\lambda)} \right)_{k,l=1,\dots,K-1},$$

où les éléments $B_{k,l}^{(\lambda,\lambda)}$, $k, l = 1, \dots, K-1$, sont donnés par

$$B_{k,k}^{(\lambda,\lambda)} = \sum_{t=q+1}^{NS} \left(\frac{\tau_{k,t}(1-\tau_{k,t})}{\hat{\lambda}_k^2} + \frac{\tau_{K,t}(1-\tau_{K,t})}{\hat{\lambda}_K^2} + 2 \frac{\tau_{k,t}\tau_{K,t}}{\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_K} \right),$$

et si $k \neq l$, nous avons

$$B_{k,l}^{(\lambda,\lambda)} = \sum_{t=q+1}^{NS} \left(-\frac{\tau_{k,t}\tau_{l,t}}{\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_l} + \frac{\tau_{k,t}\tau_{K,t}}{\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_K} + \frac{\tau_{K,t}\tau_{l,t}}{\hat{\lambda}_K\hat{\lambda}_l} + \frac{\tau_{K,t}(1-\tau_{K,t})}{\hat{\lambda}_K^2} \right).$$

Pour les matrices $B^{(\Phi_{k,s}, \Phi_{l,v})}$, $s = 1, \dots, S$ et $k, l = 1, \dots, K$, il est facile de montrer que si $k = l$, nous avons

$$B^{(\Phi_{k,s}, \Phi_{k,s})} = Var \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \Phi_{k,s}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(B_{i,j}^{(\Phi_{k,s}, \Phi_{k,s})} \right)_{i,j=1,\dots,p+1},$$

où les éléments $B_{i+1,j+1}^{(\Phi_{k,s}, \Phi_{k,s})}$, $i, j = 0, \dots, p$, sont donnés comme suit

$$\begin{aligned} B_{i+1,j+1}^{(\Phi_{k,s}, \Phi_{k,s})} &= cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \phi_{j,s}^{(k)}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \tau_{k,s+S\tau} (1 - \tau_{k,s+S\tau}) \left\{ \frac{1}{2h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} \left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)2}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} - 1 \right) - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{j,s}^{(k)}} \left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)2}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} - 1 \right) - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{j,s}^{(k)}} \right\}, \end{aligned}$$

et que si $k \neq l$, nous avons

$$B^{(\Phi_{k,s}, \Phi_{l,s})} = cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \Phi_{k,s}}, \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \Phi_{l,s}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(B_{i,j}^{(\Phi_{k,s}, \Phi_{l,s})} \right)_{i,j=1,\dots,p+1},$$

où les éléments $B_{i+1,j+1}^{(\Phi_{k,s}, \Phi_{l,s})}$, $i, j = 0, \dots, p$, sont donnés par l'expression suivante

$$\begin{aligned} B_{i+1,j+1}^{(\Phi_{k,s}, \Phi_{l,s})} &= cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \phi_{j,s}^{(l)}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} -\tau_{k,s+S\tau} \tau_{l,s+S\tau} \left\{ \frac{1}{2h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} \left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)2}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} - 1 \right) - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{z_{l,s+S\tau}}{2h_{s+S\tau}^{(l)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(l)}}{\partial \phi_{j,s}^{(l)}} \left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(l)2}}{h_{s+S\tau}^{(l)}} - 1 \right) - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(l)}}{h_{s+S\tau}^{(l)}} \frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(l)}}{\partial \phi_{j,s}^{(l)}} \right\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, il est facile de montrer que si $k = l$, les matrices $B^{(\theta_{k,s}, \theta_{l,s})}$, $s = 1, \dots, S$ et $k, l = 1, \dots, K$, sont définies par les relations suivantes

$$B^{(\theta_{k,s}, \theta_{k,s})} = Var \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(B_{i,j}^{(\theta_{k,s}, \theta_{k,s})} \right)_{i,j=1,\dots,q+1},$$

où les éléments $B_{i+1,j+1}^{(\theta_{k,s}, \theta_{k,s})}$, $i, j = 0, \dots, q$, sont donnés par

$$\begin{aligned} B_{i+1,j+1}^{(\theta_{k,s}, \theta_{k,s})} &= cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \beta_{i,s}^{(k)}}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \beta_{j,s}^{(k)}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \frac{\tau_{k,s+S\tau} (1 - \tau_{k,s+S\tau})}{h_{s+S\tau}^{(k)2}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \beta_{i,s}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \beta_{j,s}^{(k)}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)2}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \right)^2, \end{aligned}$$

et que si $k \neq l$, nous avons alors

$$B^{(\theta_{k,s}, \theta_{l,s})} = cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}}, \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{l,s}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(B_{i,j}^{(\theta_{k,s}, \theta_{l,s})} \right)_{i,j=1,\dots,q+1},$$

où les éléments $B_{i+1,j+1}^{(\theta_{k,s}, \theta_{l,s})}$, $i, j = 0, \dots, q$, sont donnés par

$$\begin{aligned} B_{i+1,j+1}^{(\theta_{k,s}, \theta_{l,s})} &= cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \beta_{i,s}^{(k)}}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \beta_{j,s}^{(l)}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \tau_{k,s+S\tau} \tau_{l,s+S\tau} \left\{ \frac{1}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \beta_{i,s}^{(k)}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)2}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \right) \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{h_{s+S\tau}^{(l)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(l)}}{\partial \beta_{j,s}^{(l)}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(l)2}}{h_{s+S\tau}^{(l)}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Notons que si $s \neq \nu$, les matrices $B^{(\Phi_{k,s}, \Phi_{l,\nu})}$, $B^{(\theta_{k,s}, \theta_{l,\nu})}$ et $B^{(\Phi_{k,s}, \theta_{l,\nu})}$ sont nulles.

Pour les matrice $B^{(\Phi_{k,s}, \theta_{k,s})}$, nous avons

$$B^{(\Phi_{k,s}, \theta_{k,s})} = cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \Phi_{k,s}}, \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(B_{i,j}^{(\Phi_{k,s}, \theta_{k,s})} \right)_{\substack{i=1,\dots,p+1 \\ j=1,\dots,q+1}},$$

où les éléments $B_{i+1,j+1}^{(\Phi_{k,s}, \theta_{k,s})}$, $i = 0, \dots, p$ et $j = 0, \dots, q$, sont donnés par

$$\begin{aligned} B_{i+1,j+1}^{(\Phi_{k,s}, \theta_{k,s})} &= cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \beta_{j,s}^{(k)}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \tau_{k,s+S\tau} (1 - \tau_{k,s+S\tau}) \left\{ \frac{1}{2h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} \left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)2}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} - 1 \right) - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \beta_{j,s}^{(k)}} \left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)2}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} - 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Par contre pour $k, l = 1, \dots, K$ avec $k \neq l$, les matrices $B^{(\Phi_{k,s}, \theta_{l,s})}$, sont données comme suit

$$B^{(\Phi_{k,s}, \theta_{l,s})} = \text{cov} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \Phi_{k,s}}, \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{l,s}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(B_{i,j}^{(\Phi_{k,s}, \theta_{l,s})} \right)_{\substack{i=1,\dots,p+1 \\ j=1,\dots,q+1}},$$

où les éléments $B_{i+1,j+1}^{(\Phi_{k,s}, \theta_{l,s})}$, $i = 0, \dots, p$ et $j = 0, \dots, q$, sont donnés par la relation suivante

$$\begin{aligned} B_{i+1,j+1}^{(\Phi_{k,s}, \theta_{l,s})} &= \text{cov} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \beta_{j,s}^{(k)}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \tau_{k,s+S\tau} \tau_{l,s+S\tau} \left\{ \frac{1}{2h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} \left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)2}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} - 1 \right) - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{i,s}^{(k)}} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2h_{s+S\tau}^{(l)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(l)}}{\partial \beta_{j,s}^{(l)}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(l)2}}{h_{s+S\tau}^{(l)}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $k, l = 1, \dots, K$ avec $k \neq l$, les matrices $B^{(\theta_{l,s}, \Phi_{k,s})}$, sont définies comme suit

$$B^{(\theta_{l,s}, \Phi_{k,s})} = \text{cov} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{l,s}}, \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \Phi_{k,s}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(B_{i,j}^{(\theta_{l,s}, \Phi_{k,s})} \right)_{\substack{i=1,\dots,q+1 \\ j=1,\dots,p+1}},$$

où l'expression des éléments $B_{i+1,j+1}^{(\Phi_{k,s}, \theta_{l,s})}$, $i = 0, \dots, p$ et $j = 0, \dots, q$, est donnée par

$$\begin{aligned} B_{i+1,j+1}^{(\Phi_{k,s}, \theta_{k,s})} &= \text{cov} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \beta_{i,s}^{(k)}}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \phi_{j,s}^{(k)}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \tau_{k,s+S\tau} \tau_{l,s+S\tau} \left\{ \frac{1}{2h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \beta_{i,s}^{(k)}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)2}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \right) \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2h_{s+S\tau}^{(l)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(l)}}{\partial \phi_{j,s}^{(l)}} \left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(l)2}}{h_{s+S\tau}^{(l)}} - 1 \right) - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(l)}}{h_{s+S\tau}^{(l)}} \frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(l)}}{\partial \phi_{j,s}^{(l)}} \right\}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour les matrices $B^{(\lambda, \Phi_{k,s})}$, $k = 1, \dots, K-1$ et $s = 1, \dots, S$, nous avons

$$B^{(\lambda, \Phi_{k,s})} = \text{cov} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \Phi_{k,s}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(B_{i,j}^{(\lambda, \Phi_{k,s})} \right)_{\substack{i=1,\dots,K-1 \\ j=1,\dots,p+1}},$$

où les éléments $B_{k,j+1}^{(\lambda, \Phi_{k,s})}$, $k = 1, \dots, K-1$ et $j = 0, \dots, p$, sont donnés par

$$\begin{aligned} B_{k,j+1}^{(\lambda, \Phi_{k,s})} &= \text{cov} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \lambda_k}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \phi_{j,s}^{(k)}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \left(\frac{\tau_{k,s+S\tau} (1 - \tau_{k,s+S\tau})}{\lambda_k} + \frac{\tau_{k,s+S\tau} \tau_{K,s+S\tau}}{\lambda_K} \right) \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{j,s}^{(k)}} \left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)2}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} - 1 \right) - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{j,s}^{(k)}} \right\}, \end{aligned}$$

et les éléments $B_{l,j+1}^{(\lambda, \Phi_{k,s})}$, $l = 1, \dots, K-1$ et $j = 0, \dots, p$ avec $l \neq k$, sont donnés par la relation suivante

$$\begin{aligned} B_{l,j+1}^{(\lambda, \Phi_{k,s})} &= cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \lambda_l}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \phi_{j,s}^{(k)}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \left(\frac{\tau_{k,s+S\tau} \tau_{K,s+S\tau}}{\lambda_K} - \frac{\tau_{l,s+S\tau} \tau_{k,s+S\tau}}{\lambda_l} \right) \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{j,s}^{(k)}} \left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)2}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} - 1 \right) - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \phi_{j,s}^{(k)}} \right\}. \end{aligned}$$

De la même manière, pour $k = 1, \dots, K-1$ et $s = 1, \dots, S$, nous avons

$$B^{(\lambda, \theta_{k,s})} = cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(B_{i,j}^{(\lambda, \theta_{k,s})} \right)_{\substack{i=1,\dots,K-1 \\ j=1,\dots,q+1}},$$

où l'expression de $B_{k,j+1}^{(\lambda, \theta_{k,s})}$, $k = 1, \dots, K-1$ et $j = 0, \dots, q$, est donnée par

$$\begin{aligned} B_{k,j+1}^{(\lambda, \theta_{k,s})} &= cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \lambda_k}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \beta_{j,s}^{(k)}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \left(\frac{\tau_{k,s+S\tau} (1 - \tau_{k,s+S\tau})}{\lambda_k} + \frac{\tau_{k,s+S\tau} \tau_{K,s+S\tau}}{\lambda_K} \right) \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \beta_{j,s}^{(k)}} \left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)2}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} - 1 \right) \right\}, \end{aligned}$$

et de $B_{l,j+1}^{(\lambda, \theta_{k,s})}$, $l = 1, \dots, K-1$ et $j = 0, \dots, q$ avec $l \neq k$, est donnée comme suit

$$\begin{aligned} B_{l,j+1}^{(\lambda, \theta_{k,s})} &= cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \lambda_l}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \beta_{j,s}^{(k)}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \left(\frac{\tau_{k,s+S\tau} \tau_{K,s+S\tau}}{\lambda_K} - \frac{\tau_{l,s+S\tau} \tau_{k,s+S\tau}}{\lambda_l} \right) \left\{ \frac{1}{h_{s+S\tau}^{(k)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(k)}}{\partial \beta_{j,s}^{(k)}} \left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(k)2}}{h_{s+S\tau}^{(k)}} - 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Enfin, pour $s = 1, \dots, S$, nous avons

$$B^{(\lambda, \Phi_{K,s})} = cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \Phi_{K,s}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(B_{i,j}^{(\lambda, \Phi_{K,s})} \right)_{\substack{i=1,\dots,K-1 \\ j=1,\dots,p+1}},$$

où les éléments $B_{k,j+1}^{(\lambda, \Phi_{K,s})}$, $k = 1, \dots, K-1$ et $j = 0, \dots, p$, sont donnés par

$$\begin{aligned} B_{k,j+1}^{(\lambda, \Phi_{K,s})} &= cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \lambda_k}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \phi_{j,s}^{(K)}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= - \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \left(\frac{\tau_{K,s+S\tau} (1 - \tau_{K,s+S\tau})}{\lambda_K} + \frac{\tau_{k,s+S\tau} \tau_{K,s+S\tau}}{\lambda_k} \right) \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2h_{s+S\tau}^{(K)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(K)}}{\partial \phi_{j,s}^{(K)}} \left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(K)2}}{h_{s+S\tau}^{(K)}} - 1 \right) - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(K)}}{h_{s+S\tau}^{(K)}} \frac{\partial \varepsilon_{s+S\tau}^{(K)}}{\partial \phi_{j,s}^{(K)}} \right\}, \end{aligned}$$

et pour $s = 1, \dots, S$, les matrices $B^{(\lambda, \theta_{K,s})}$ sont définies par

$$B^{(\lambda, \theta_{K,s})} = cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \theta_{K,s}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(B_{i,j}^{(\lambda, \theta_{K,s})} \right)_{\substack{i=1, \dots, K-1 \\ j=1, \dots, q+1}},$$

où les éléments $B_{k,j+1}^{(\lambda, \theta_{K,s})}$, $k = 1, \dots, K-1$ et $j = 0, \dots, q$, sont donnés par

$$\begin{aligned} B_{k,j+1}^{(\lambda, \theta_{K,s})} &= cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \lambda_k}, \frac{\partial \mathcal{L}_n(\underline{\theta})}{\partial \beta_{j,s}^{(K)}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \bigg|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \left(\frac{\tau_{k,s+S\tau} \tau_{K,s+S\tau}}{\lambda_k} + \frac{\tau_{K,s+S\tau} (1 - \tau_{K,s+S\tau})}{\lambda_K} \right) \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{h_{s+S\tau}^{(K)}} \frac{\partial h_{s+S\tau}^{(K)}}{\partial \beta_{j,s}^{(K)}} \left(\frac{\varepsilon_{s+S\tau}^{(K)2}}{h_{s+S\tau}^{(K)}} - 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Il est possible de calculer la matrice de variance-covariance des $(2S+1)K-1+S \sum_{k=1}^K (p_k + q_k)$ estimateurs des paramètres d'un modèle *MPAR-ARCH*_S ($K; p_1, p_2, \dots, p_K; q_1, q_2, \dots, q_K$) à partir de l'inverse de la matrice d'information observée I_{ob} . Donc, les variances des estimations des paramètres du modèle sont déterminées de la diagonale de l'inverse de la matrice I_{ob} . Par ailleurs, la variance de l'estimation $\hat{\lambda}_K$, qui est égale à $1 - \sum_{k=1}^{K-1} \hat{\lambda}_k$, est donnée par

$$var(\hat{\lambda}_K) = var \left(1 - \sum_{k=1}^{K-1} \hat{\lambda}_k \right) = \sum_{k=1}^{K-1} var(\hat{\lambda}_k) + 2 \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{l>k}^{K-1} cov(\hat{\lambda}_k, \hat{\lambda}_l).$$

5.5 Identification et test d'adéquation du modèle

5.5.1 Identification d'un modèle *MPAR-ARCH*

L'intérêt de cette Section sera porté sur le problème de l'identification d'un mélange de modèles *AR-ARCH* périodiques. Nous visons à adapter le critère de sélection BIC^* proposé

par Wong et Li (2001) pour identifier un modèle *MAR-ARCH* à coefficients constants, au cas d'un modèle *MAR-ARCH* à coefficients périodiques. En même temps, nous généralisons le critère de sélection *P-BIC** qui a été proposé dans le chapitre précédent pour identifier un modèle *MPARCH*, au cas d'un modèle *MPAR-ARCH*.

Rappelons que dans le cas stationnaire, les critères *AIC**, *BIC* et *BIC** sont définis par (voir Wong et Li, 2001)

$$\begin{aligned} BIC(K; p_1, \dots, p_K; q_1, \dots, q_K) &= -2\mathcal{L}(\hat{\underline{\theta}}) + \log(n - p - q) \left(3K - 1 + \sum_{k=1}^K (p_k + q_k) \right), \\ BIC^*(K; p_1, \dots, p_K; q_1, \dots, q_K) &= -2\mathcal{L}^*(\hat{\underline{\theta}}) + \log(n - p - q) \left(3K - 1 + \sum_{k=1}^K (p_k + q_k) \right), \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{L}^*(\hat{\underline{\theta}}) = \sum_{t=q+1}^{NS} \log \left(\frac{d}{dy_t} F(y_t / \mathcal{F}_{t-1}) \right),$$

avec $F(y_t / \mathcal{F}_{t-1})$ est donnée par (5.2.2). Ces critères peuvent être adaptés au cas périodique comme suit

$$\begin{aligned} P-BIC(K; p_1, \dots, p_K; q_1, \dots, q_K) &= -2\mathcal{L}(\hat{\underline{\theta}}) \\ &\quad + \log(NS - p - q) \left((2S + 1)K - 1 + S \sum_{k=1}^K (p_k + q_k) \right), \\ P-BIC^*(K; p_1, \dots, p_K; q_1, \dots, q_K) &= -2\mathcal{L}^*(\hat{\underline{\theta}}) \\ &\quad + \log(NS - p - q) \left((2S + 1)K - 1 + S \sum_{k=1}^K (p_k + q_k) \right). \end{aligned}$$

5.5.2 Test d'adéquation du modèle

Lorsque le processus est bien estimé, les résidus entre les valeurs observées et les valeurs estimées par le modèle doivent se comporter comme un bruit blanc. Dans la modélisation *MPAR-ARCH*, nous proposons d'examiner si les résidus estimés forment un bruit blanc ou non, en utilisant le test de Portemanteau modifié ou test d'adéquation globale du modèle sur des résidus d'estimation standardisés $\hat{\zeta}_t^{(k)}$. Ce test repose sur l'idée que la fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc ne doit pas révéler d'autocorrélations non nulles. Il est bien connu que l'utilisation de l'espérance conditionnelle dans le calcul des résidus n'est pas appropriée (voir Wong et Li, 2001; Fong et al., 2007). En effet, les observations y_t sont des réalisations d'un mélange de modèles dont chaque observation émane d'un seul et unique modèle alors que l'espérance conditionnelle est une combinaison des moyennes des composantes

du mélange, qui peut être située dans une région de faible probabilité. Par conséquent, l'espérance conditionnelle peut donner des prévisions erronées. Cependant, les résidus doivent tenir compte des estimations des variables manquantes $Z_{k,t}$ par l'espérance conditionnelle $\tau_{k,t}$. Nous considérons à cet effet, que l'observation y_t provient de la $k^{ième}$ composante du mélange si $\tau_{k,t} = \max_{l=1,\dots,K} \tau_{l,t}$. Nous définissons alors, la série résiduelle par

$$\hat{\zeta}_t^{(k)} = \frac{y_t - \hat{y}_t}{\left(\hat{h}_t^{(k)}\right)^{1/2}} = \frac{y_t - \hat{\phi}_{0,t}^{(k)} - \sum_{i=1}^{p_k} \hat{\phi}_{i,t}^{(k)} y_{t-i}}{\left(\hat{\beta}_{0,t}^{(k)} + \sum_{j=1}^{q_k} \hat{\beta}_{j,t}^{(k)} \hat{\varepsilon}_{t-j}^{(k)2}\right)^{1/2}},$$

où

$$\begin{cases} \hat{y}_t = E\left(y_t / \mathcal{F}_{t-1}, \max_{l=1,\dots,K} \tau_{l,t} = \tau_{k,t}\right) = \hat{\phi}_{0,t}^{(k)} - \sum_{i=1}^{p_k} \hat{\phi}_{i,t}^{(k)} y_{t-i}, \\ \hat{\varepsilon}_t^{(k)} = y_t - \hat{\phi}_{0,t}^{(k)} - \sum_{i=1}^{p_k} \hat{\phi}_{i,t}^{(k)} y_{t-i}, \\ \hat{h}_t^{(k)} = \hat{\beta}_{0,t}^{(k)} + \sum_{j=1}^{q_k} \hat{\beta}_{j,t}^{(k)} \hat{\varepsilon}_{t-j}^{(k)2}, \end{cases}$$

Afin d'évaluer la qualité d'ajustement de la série par le modèle *MPAR-ARCH* estimé, nous pouvons utiliser le test de Portemanteau (Ljung et Box, 1978) pour chaque période $s = 1, \dots, S$. Ce dernier est fondé sur la statistique

$$Q_L'^{(s)} = N(N+2) \sum_{h=1}^L \frac{\left(\hat{r}_h^{(s)}\right)^2}{N-h}$$

où $\hat{r}_h^{(s)}$ est la fonction d'autocorrélation empirique de retard h et de saison s des résidus estimés et L est le nombre maximal de retard. Cette statistique $Q_L'^{(s)}$ en l'absence d'autocorrélation, obéit à un χ^2 avec $d = L - \sum_{k=1}^K (p_k + q_k) - 3K + 1$ degrés de liberté. Nous acceptons l'hypothèse qu'il existe au moins un $\rho_h^{(s)}$ significativement différent de 0 au seuil de $\alpha\%$ si $Q_L'^{(s)}$ est supérieur au quantile $1 - \alpha$ de la loi χ_d^2 .

Les statistiques de Portemanteau sont asymptotiquement indépendantes pour $s = 1, \dots, S$. Par conséquence, le test global de Portemanteau dans le cas périodique est fondé sur la statistique suivante

$$Q_L = \sum_{s=1}^S Q_L'^{(s)}$$

où Q_L suit une lois χ^2 avec dS degrés de liberté.

5.6 Application numérique

5.6.1 Etude de simulation

Dans cette section, la performance de l'algorithme *EM* est étudiée. Nous l'avons appliqué sur plusieurs séries chronologiques, générées par des modèles *MPAR-PARCH* de différents ordres et périodes et pour différentes tailles. Pour chaque modèle, nous considérons 1000 simulations. Les vraies valeurs des paramètres de chacun des processus *MPAR-ARCH* générateur des données, la moyenne et les écarts types de leurs estimations, pour les 1000 simulations, sont reportés dans les Tableaux (5.6.1) et (5.6.3).

Tableau 5.6.1. Résultats de 1000 simulations pour un modèle *MPAR-ARCH*₂(2; 1, 1; 1, 1)

	<i>NS</i> = 500			<i>NS</i> = 1000	
	TV	ME	ESE	ME	ESE
λ_1	.25	.2497	.0345	0.2509	0.0231
$\phi_{0,1}^{(1)}$	.60	.6430	.4296	.6217	.2714
$\phi_{1,1}^{(1)}$	.90	.8918	.1699	.8879	.1075
$\beta_{0,1}^{(1)}$	1.00	1.1921	.8373	1.0805	.5194
$\beta_{1,1}^{(1)}$	.70	.7216	.8190	.7126	.2662
$\phi_{0,2}^{(1)}$	.90	.9278	.5210	.9037	.3362
$\phi_{1,2}^{(1)}$	.30	.2888	.1953	.3015	.1171
$\beta_{0,2}^{(1)}$	1.40	1.3678	1.2438	1.3690	.7495
$\beta_{1,2}^{(1)}$	.50	.4843	.1853	.4986	.1285
λ_2	.75	.7503	.0345	.7491	.0231
$\phi_{0,1}^{(2)}$	1.60	1.5893	.1099	1.5996	.0735
$\phi_{1,1}^{(2)}$	−.90	−.8962	.0297	−.8994	.0172
$\beta_{0,1}^{(2)}$	.60	.5929	.1380	.5926	.0967
$\beta_{1,1}^{(2)}$	.40	.3933	.0626	.3958	.0326
$\phi_{0,2}^{(2)}$	2.00	1.9948	.1357	2.0023	.0889
$\phi_{1,2}^{(2)}$	.70	.6976	.0337	.6994	.0191
$\beta_{0,2}^{(2)}$	.90	.8876	.2350	.8890	.1560
$\beta_{1,2}^{(2)}$	.80	.7998	.0029	.7999	.0009

Des Tableaux (5.6.1) et (5.6.2), nous pouvons remarquer que l'algorithme *EM* donne des estimations avec un petit biais. Nous pouvons également observer que les écarts-types empiriques des estimations des paramètres ont des valeurs raisonnables. Ainsi, la performance de l'algorithme *EM*, dans le cas des modèles *MAR-ACRH* (Wong et Li, 2001) et dans le cas des modèles *MPAR* (Shao, 2006), est conservée dans le cas des modèles *MPAR-ARCH*.

Tableau 5.6.2. Résultats de 1000 simulations pour un modèle *MPAR-ARCH*₄(2; 1, 1; 1, 1)

<i>NS</i> = 1500							
	TV	ME	ESE		TV	ME	ESE
λ_1	0.30	.3008	.0226	λ_2	.70	.6992	.0226
$\phi_{0,1}^{(1)}$	.90	.9214	.2731	$\phi_{0,3}^{(1)}$	.75	.7282	.2781
$\phi_{1,1}^{(1)}$	.90	.8904	.0944	$\phi_{1,3}^{(1)}$	-.60	.5998	.1294
$\beta_{0,1}^{(1)}$	1.00	1.1353	.6689	$\beta_{0,3}^{(1)}$	1.40	1.3574	.6867
$\beta_{1,1}^{(1)}$	.50	.4742	.1541	$\beta_{1,3}^{(1)}$	.90	.9063	.2010
$\phi_{0,2}^{(1)}$	-.90	-.9028	.3216	$\phi_{0,4}^{(1)}$	1.50	1.4782	.4248
$\phi_{1,2}^{(1)}$	.70	.6982	.0909	$\phi_{1,4}^{(1)}$	.75	.7577	.1717
$\beta_{0,2}^{(1)}$	5.00	4.8693	1.2082	$\beta_{0,4}^{(1)}$	10.00	9.9534	2.0317
$\beta_{1,2}^{(1)}$	.40	.3926	.1639	$\beta_{1,4}^{(1)}$	.32	.3084	.1596
$\phi_{0,1}^{(2)}$	-1.00	-1.0083	.1086	$\phi_{0,3}^{(2)}$	1.20	1.2040	.0770
$\phi_{1,1}^{(2)}$	.30	.3050	.0549	$\phi_{1,3}^{(2)}$	.65	.6498	.0303
$\beta_{0,1}^{(2)}$	.90	.9163	.2200	$\beta_{0,3}^{(2)}$	.40	.4062	.0942
$\beta_{1,1}^{(2)}$	.75	.7153	.1161	$\beta_{1,3}^{(2)}$	.50	.5000	.0025
$\phi_{0,2}^{(2)}$	.25	.2482	.1039	$\phi_{0,4}^{(2)}$	-.70	-.6995	.1058
$\phi_{1,2}^{(2)}$	-.70	-.6989	.0527	$\phi_{1,4}^{(2)}$	.50	.4996	.0402
$\beta_{0,2}^{(2)}$	1.00	1.0026	.1922	$\beta_{0,4}^{(2)}$	.70	.7039	.1436
$\beta_{1,2}^{(2)}$	.45	.4508	.0401	$\beta_{1,4}^{(2)}$	.90	.8997	.0044

Tableau 5.6.3. Résultats de 1000 simulations pour un modèle $MPAR-ARCH_4(2; 1, 1; 1, 1)$

$NS = 2000$							
	TV	ME	ESE		TV	ME	ESE
λ_1	0.30	0.3008	0.0226	λ_2	.70	.6992	.0226
$\phi_{0,1}^{(1)}$	.90	.9214	.2731	$\phi_{0,3}^{(1)}$	.75	.7282	.2781
$\phi_{1,1}^{(1)}$	.90	.8904	.0944	$\phi_{1,3}^{(1)}$	-.60	.5998	.1294
$\beta_{0,1}^{(1)}$	1.00	1.1353	.6689	$\beta_{0,3}^{(1)}$	1.40	1.3574	.6867
$\beta_{1,1}^{(1)}$	.50	.4742	.1541	$\beta_{1,3}^{(1)}$	.90	.9063	.2010
$\phi_{0,2}^{(1)}$	-.90	-.9028	.3216	$\phi_{0,4}^{(1)}$	1.50	1.4782	.4248
$\phi_{1,2}^{(1)}$	.70	.6982	.0909	$\phi_{1,4}^{(1)}$	.75	.7577	.1717
$\beta_{0,2}^{(1)}$	5.00	4.8693	1.2082	$\beta_{0,4}^{(1)}$	10.00	9.9534	2.0317
$\beta_{1,2}^{(1)}$	.40	.3926	.1639	$\beta_{1,4}^{(1)}$	.32	.3084	.1596
$\phi_{0,1}^{(2)}$	-1.00	-1.0083	.1086	$\phi_{0,3}^{(2)}$	1.20	1.2040	.0770
$\phi_{1,1}^{(2)}$	.30	.3050	.0549	$\phi_{1,3}^{(2)}$	.65	.6498	.0303
$\beta_{0,1}^{(2)}$	.90	.9163	.2200	$\beta_{0,3}^{(2)}$	.40	.4062	.0942
$\beta_{1,1}^{(2)}$	.75	.7153	.1161	$\beta_{1,3}^{(2)}$	.50	.5000	.0025
$\phi_{0,2}^{(2)}$	.25	.2482	.1039	$\phi_{0,4}^{(2)}$	-.70	-.6995	.1058
$\phi_{1,2}^{(2)}$	-.70	-.6989	.0527	$\phi_{1,4}^{(2)}$	.50	.4996	.0402
$\beta_{0,2}^{(2)}$	1.00	1.0026	.1922	$\beta_{0,4}^{(2)}$	.70	.7039	.1436
$\beta_{1,2}^{(2)}$	.45	.4508	.0401	$\beta_{1,4}^{(2)}$	.90	.8997	.0044

5.6.2 Application à l'indice boursier $S\&P$ 500

Dans le chapitre précédent, nous avons montré, à travers la modélisation de la série journalière des rendements de l'indice $S\&P$ 500, l'adéquation des modèles $MPARCH$ pour capturer différentes caractéristiques des données financières. Dans cette section, nous essayons de montrer que la modélisation $MPARCH$ peut être appliquée non pas au processus initial, mais au processus d'innovation. Ceci en introduisant dans la moyenne des termes autorégressifs, en raison de l'existence d'une autocorrélation entre les rendements quotidiens sur la période qui va de 2 janvier 1985 au 29 décembre 1994.

Le processus $MPAR-ARCH$ 2-périodique représentant le mieux notre série $S\&P$ 500 sur

cette période est donné par

$$\begin{cases} F(y_{s+\tau S} / \mathcal{F}_{s+\tau S-1}) = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \Phi\left(\frac{\varepsilon_{s+\tau S}^{(k)}}{\sqrt{h_{s+\tau S}^{(k)}}}\right), \\ \varepsilon_t^{(k)} = y_t - \phi_{0,s}^{(k)} - \phi_{1,s}^{(k)} y_{s+\tau S-1}, \\ h_{s+\tau S}^{(k)} = \beta_{0,s}^{(k)} + \beta_{1,s}^{(k)} \varepsilon_{1-j}^{(k)2}, \end{cases} \quad \tau \in \mathbb{Z}, 1 \leq s \leq 2.$$

où les valeurs des paramètres λ_k , $\phi_{0,s}^{(k)}$, $\phi_{1,s}^{(k)}$, $\beta_{0,s}^{(k)}$ et $\beta_{1,s}^{(k)}$, pour $s = 1, 2$ et $k = 1, 2, 3$, sont reportées dans le Tableau 5.6.4.

Tableau 5.6.4. Les paramètres du modèle *MPAR-ARCH* estimé

		λ_k	$\phi_{0,s}^{(k)}$	$\phi_{1,s}^{(k)}$	$\beta_{0,s}^{(k)}$	$\beta_{1,s}^{(k)}$
$k = 1$	$s = 1$	.3777	-.0002	.5832	.00019	.0938
	$s = 2$		.0011	-.0730	.00002	.0096
$k = 2$	$s = 1$	.6108	0	-.0162	.00003	.0391
	$s = 2$		.0014	.0839	.00009	.2192
$k = 3$	$s = 1$	.0115	-.0843	2.7414	.00012	.4743
	$s = 2$		-.0283	-.3477	.00082	.2951

Notons que nous avons utilisé le critère $P\text{-}BIC^*$ dans le choix du meilleur modèle *MPAR-ARCH* où nous avons supposé que le nombre maximum de modèles dans le mélange est égal à 3 et l'ordre maximum de la partie *PAR* et la partie *ARCH* sont égal à 5. La valeur du critère $P\text{-}BIC^*$ associée au modèle estimé est égale à -8124 .

La Figure 5.5.1 représente les rendements quotidiens de l'indice *S&P 500* ainsi que les rendements quotidiens estimés à partir du modèle *MPAR-ARCH* (Figure 5.5.1a) et à partir du modèle proposé par Wong et Li (2001) (Figure 5.5.1b). Alors que les Figures 5.5.1c et d représentent les volatilités calculées à chaque date à l'aide des deux modèles estimés.

Nous constatons en premier lieu, à partir des Figures 5.6.1a et b, que le modèle *MAR-ARCH* périodique représente mieux les rendements de la série *S&P 500*, que le modèle proposé par Wong et Li (2001), surtout dans les périodes où le marché est très actif (voir par exemple la période du krach boursier d'octobre 1987 à $t = 706$ et la période du mini-krach d'octobre 1989 à $t = 1209$). En outre, le graphe de la volatilité calculée à partir du modèle *MPAR-ARCH* estimé, se rapproche de la volatilité de la série *S&P 500* plus que de la volatilité calculée à partir du modèle *MAR-ARCH* (Figures (5.6.1c) et (5.6.1d)).

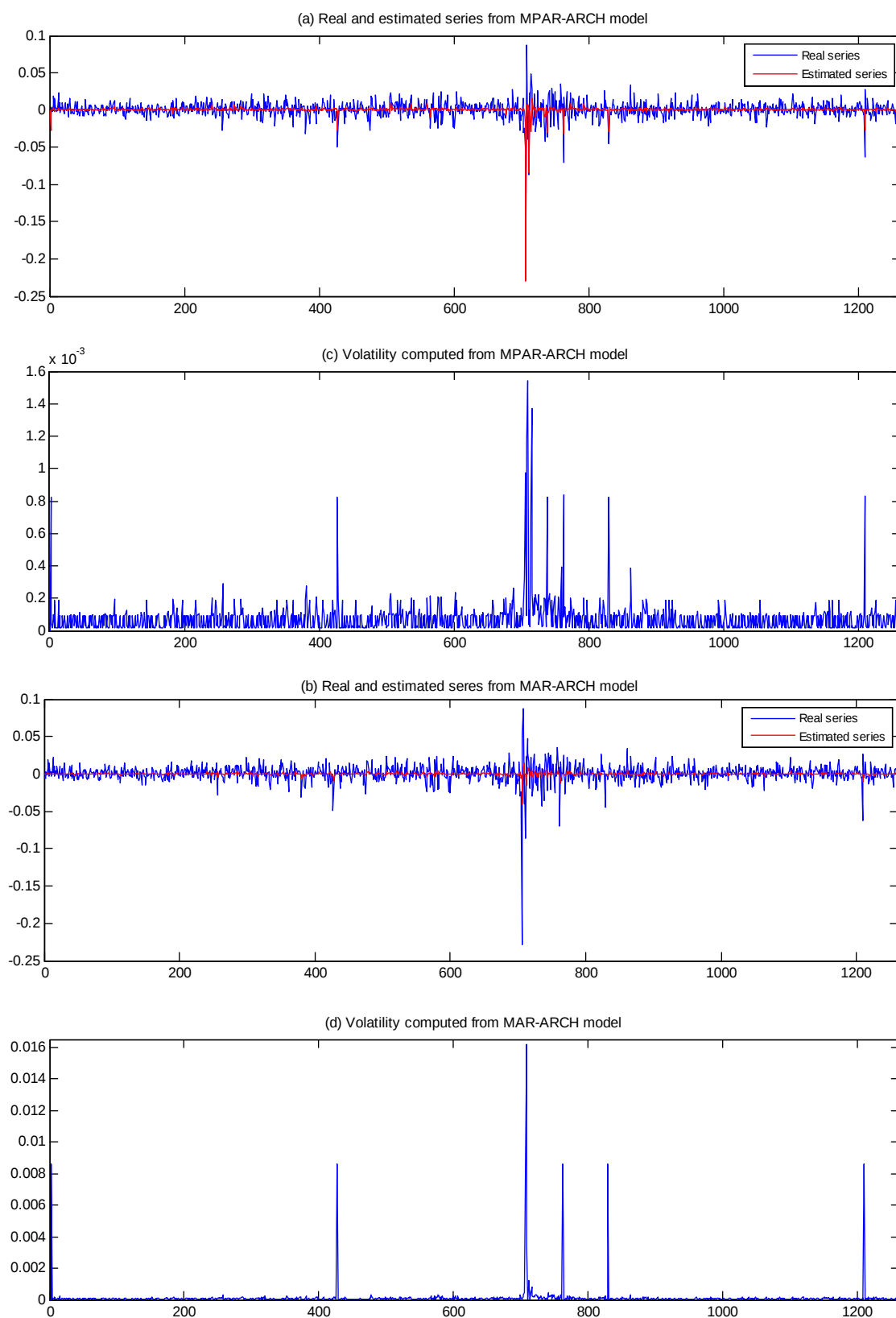


Figure 5.6.1 La série du rendement de l'indice boursier *S&P* 500 pour la période 1985 à 1989.

En second lieu, à partir des densités prédictives pour l'horizon un, aux instants $t = 706, 707, 1174, 1209$ et 1210 , calculées à partir des deux modèles estimés *MAR-ARCH* stationnaire et périodique (Figures 5.6.1a-h), il apparaît que lorsque la volatilité du marché est forte, comme pour $t = 706, t = 1209$ et $t = 1210$, la densité prédictive calculée à partir du modèle *MPAR-ARCH* a des queues plus épaisses que celle calculée à partir du modèle *MAR-ARCH* (voir Figures 5.6.2b et f).

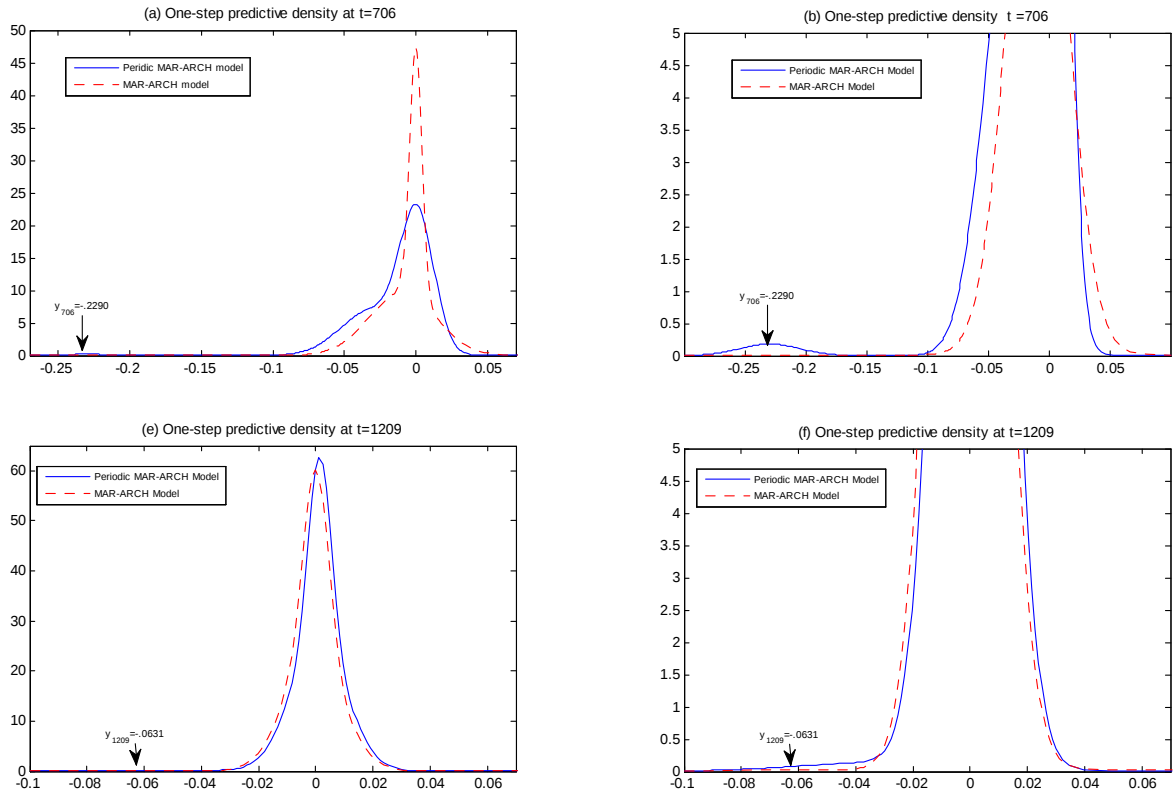


Figure 5.6.2 Densité prédictive pour l'horizon un aux instants $t = 706, 707, 1174, 1209$ et 1210 .

Nous remarquons également que lorsque la volatilité de la série est modérée ou faible, comme pour $t = 1174$ et $t = 1210$, les deux densités prédictives ont des queues similaires (voir la figure 5.6.2c et d). Cependant, la probabilité d'obtenir une valeur au voisinage de la vraie valeur y_t , est plus grande pour le modèle périodique que pour le modèle de Wong et Li (2001) et ceci pour n'importe quelle volatilité.

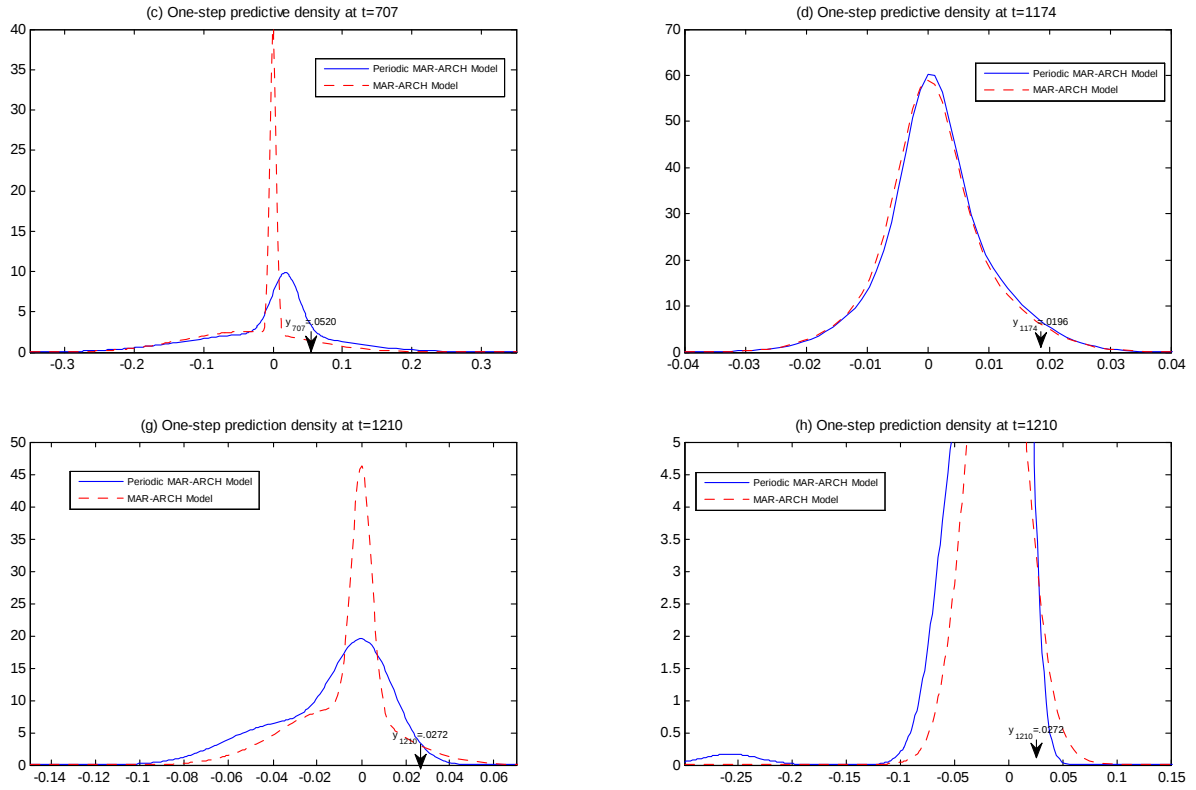


Figure 5.6.2 Densité prédictive pour l'horizon un aux instants $t = 706, 707, 1174, 1209$ et 1210 .

5.7 Conclusion

Nous avons introduit dans ce dernier chapitre, une nouvelle formulation que nous avons appelée Mélange d' Autorégressifs à Erreurs *ARCH* Périodiques. Cette formulation contient les représentations *PARCH*, *PAR-ARCH*, *MAR-ARCH*, *MPAR* et *MPARCH* comme cas particuliers et elle est adéquate pour capturer beaucoup de caractéristiques de séries chronologiques avec une structure d'autocorrélation périodique, en particulier les séries financières, telles que le changement de régime, la grande kurtosis, les valeurs aberrantes et les événements extrêmes. Nous avons étudié quelques propriétés probabilistes du modèle proposé telles que la stationnarité périodique du premier et du second ordre et l'estimation du maximum de vraisemblance via l'algorithme itératif *EM*. Nous avons adapté le critère BIC^{*} , proposé par Wong et Li (2001), pour identifier les ordres du modèle dans le cas périodique. Cependant, ce critère est dérivé par analogie avec la démarche d'identification classique, il est donc plus judicieux d'élaborer un critère de sélection propre au mélange de modèles de séries chronologiques.

Pour voir l'aptitude de la classe de modèles *MPAR-ARCH* à la modélisation des séries chronologiques avec une structure d'autocorrélation périodique, nous avons modélisé la série des rendements quotidiens de l'indice *S&P 500* qui a été déjà étudié par Wong et Li (2001). Le modèle *MPAR-ARCH* obtenu est comparé au modèle *MAR-ARCH* de Wong et Li (2001).

Le modèle *MPAR-ARCH* peut être généraliser dans plusieurs directions. En effet, nous pouvons généraliser le modèle au cas multivarié. Nous pouvons également envisager d'autres lois que la loi normale, par exemple la loi de student, la loi exponentielle, la loi gamma et la loi Weibull, dans la définition du modèle *MPAR-ARCH*.

Bibliographie

- [1] Adams, G. J. and Goodwin, G. C. (1995). Parameter estimation for periodic *ARMA* Models. *J. Time Ser. Anal.*, **16**, 127-145.
- [2] Andel, J., (1983). Statistical analysis of periodic autoregression. *Aplikace Matimatiky*, **28**, 364-385.
- [3] Ansley, C. F., (1979). An algorithm for the exact likelihood of a mixed autoregressive-moving average process. *Biometrika*, **66**, 59-65.
- [4] Aknouche, A., (2006). Etude théorique et algorithmique de la modélisation des séries chronologiques périodiques. Thèse de Doctorat. U.S.T.H.B, Alger, Algérie.
- [5] Aknouche, A., (2007). Causality conditions and autocovariance calculations in *PVAR* models. *J. Statistical Computation and Simulation*, **77**, 769-780.
- [6] Aknouche, A. and **Hamdi, F.**, (2007) Chandrasekhar-type recursions for periodic linear systems. *Far East Journal of Theoretical Statistics*, **22**, 65-80.
- [7] Aknouche, A. and **Hamdi, F.**, (2008a). Extension du filtre de Chandrasekhar au cas des modèles espace d'états périodiques. *C. R. Acad. Sci. Ser. I*, **346**, 177-182.
- [8] Aknouche, A. and **Hamdi, F.**, (2008b). Calculating the autocovariances and the likelihood calculations for periodic *VARMA* models, *J. Statistical Computation and simulation*. A paraître.
- [9] Aknouche A., Belbachir, H. and **Hamdi, F.**, (2008). Note on calculating autocovariances of periodic *ARMA* models. *Communications in statistics-Simulation and computation*, **37**, 924-927.
- [10] Anderson, P. L. and Meerschaert, M. M., (2005). Parameter estimation for periodically stationary time series. *J. Time Ser. Anal.*, **26**, 489-518.
- [11] Anderson, B. D. O., and Moore, J. B., (1979). Optimal filtering. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall.

- [12] Aoki, M., (1987). State space modelling of time series. Springer-Verlag, New York.
- [13] Ausín, M.C, Galeano, P., (2007). Bayesian estimation of the Gaussian mixture *GARCH* model, *Comput. Statist. Data Anal.* **51**, 2636–2652
- [14] Azrak, R. and Mélard, G., (1998). The exact quasi-likelihood of time-dependent *ARMA* models. *J. Statistical Planning and Inference*, **68**, 31-46.
- [15] Basawa, I. V. and Lund, R., (2001). Large sample properties of parameters estimates for periodic *ARMA* models. *J. Time Ser. Anal.*, **22**, 1-13.
- [16] Bauwens, L., Hafner, C.M. Rombouts, J.V.K., (2007). Multivariate mixed normal conditional heteroskedasticity. *Comput. Statist. Data Anal.* **51**, 3551–3566.
- [17] Bentarzi, M., (1995). Modèles de séries chronologiques à coefficients périodiques. Thèse de Doctorat en sciences. U.S.T.H.B, Alger, Algérie.
- [18] Bentarzi, M., (1998). Model-building problem of periodically m-variate moving average processes. *J. Multivariate Analysis*, **66**, 1-21.
- [19] Bentarzi, M. and Aknouche A. (2005). Calculation of the Fisher information matrix for periodic *ARMA* models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **34**, 891-903.
- [20] Bentarzi, M. and Aknouche A., (2006). An on-line estimation algorithm for periodic autoregressive models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **35**, 1495-1512.
- [21] Bentarzi, M. and Hallin, M. (1994). On the Invertibility of Periodic Moving Average Models. *J. Time Ser. Anal.*, **15**, 263-268.
- [22] Bentarzi, M. and Hallin, M. (1996). Locally optimal tests against periodic autoregression. *Econometric Theory*, **12**, 88-112.
- [23] Bentarzi, M. and Hallin, M. (1998). Spectral factorization of periodically correlated *MA*(1) processes. *J. Applied Probability*, **35**, 46-54.
- [24] Bentarzi, M. and **Hamdi, F.**, (2008a). Mixture Periodic Autoregressive Conditional Heteroskedastic Models. *Comput. Statist. Data Anal.*, **53**, 1-16.
- [25] Bentarzi, M. and **Hamdi, F.**, (2008b). Mixture Periodic Autoregression with Periodic *ARCH* Errors. *Advances and Applications in Statistics*, **8**, 219-246.
- [26] Bentarzi, M., Guerbyenne, H. and Hemis, R., (2008). Predictive density order selection of periodic *AR* models. *Communications in statistics-Simulation and computation*, **37**, 1167-1182.

- [27] Bittanti, S. Colaneri, P. and De Nicolao G. D. (1988). The difference periodic Riccati equation for the periodic prediction problem. *IEEE Trans. Autom. Control*, **33**, 706-712.
- [28] Bittanti, S. and De Nicolao, G. (1993). Spectral factorization of linear periodic systems with application to the optimal prediction of periodic *ARMA* models. *Automatica*, **29**, 517-522.
- [29] Bollerslev, T., (1986). Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *J. Econometrics*. **51**, 307-327.
- [30] Bollerslev, T., Ghysels E., (1996). Periodic Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *J. Bus. Econom. Statist.*, **14**, 139-152.
- [31] Bojanczyk, A. W. Golub, G. and Van Dooren, P., (1992). The periodic Schur decomposition : Algorithms and applications, In F.T. Luk (ed.). *Proceedings SPIE Conference*, **1770**, 31-42.
- [32] Boteva, A. and Boshnakov, G.N., (1992). An algorithm for the computation of the theoretical autocovariances of a periodic autoregressive process, In Proceedings of the 8th Seminar on Statistical Data Analysis. Varna, 9-15.
- [33] Brokwell, P.J.; Davis, R.A., (1991). Time Series : Theory and Methods, (2nd edn), New York : Springer-Verlag
- [34] Boshnakov, G. N., (1996). Recursive computation of the parameters of periodic autoregressive moving-average processes. *J. Time Ser. Anal.*, **17**, 333-349.
- [35] Casals, J., Sotoca, S. and Jerez, M., (1998). Un algoritmo rápido para evaluar la verosimilitud exacta de modelos *VARMAX* periódicos, *Estadística Espanola*, **40**, 269-291.
- [36] Cavanaugh, J. and Shumway, R. H., (1997). A bootstrap-corrected variant of aic for state-space model selection. *Statistica Sinica*, **7**, 473-496.
- [37] Cleveland, W. P and Tiao, G. C. (1979). Modeling seasonal time series. *Revue Economique Appliquée*, **32**, 107-129.
- [38] Dahlhaus, R. and Subba Rao, S., (2006). Statistical inference for time-varying *ARCH* processes. *J. Ann. Statist.*, **34** , 1075-1114.
- [39] Davis, R. A. and Yam, G. R. (2005) Estimation for state space models based on a likelihood approximation. *Statistica Sinica*, **15**, 381-406.

- [40] Dempster, A.P., Laird, N.M., Rubin and D.B., (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the *EM* algorithm (with discussion). *J.Roy. Statist. Soc. B* **39**, 1–38.
- [41] Durbin, J. and Koopman, S. J., (2001). Time Series Analysis by State Space Methods. Oxford, New York.
- [42] Efron, B., (1979). Bootstrap methods : Another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, **7**, 1-26.
- [43] Engle, R., (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of the UK inflation. *Econometrica*, **50**, 987-1008.
- [44] Fong, P. W., Li, W. K., Yau, C. W. and Wong, C. S., (2007). On a mixture vector autoregressive model. *Canadian Journal of Statistics*, **35**, 135-150.
- [45] Freedman, D. A., (1981). Bootstrapping regression models. *Annals of Statistics*, **9**, 1218-1228.
- [46] Freedman, D. A. and Peters, S. C., (1984a). Bootstrapping a regression equation : Some empirical results. *J. American Statistical Association*, **79**, 97-106.
- [47] Freedman, D. A. and Peters, S. C., (1984b). Bootstrapping an econometric model : Some empirical results. *J. Business and Economic Statistics*, **2**, 150-158.
- [48] Gautier, A., (2005). Influence asymptotique de la correction par la moyenne sur l'estimation d'un modèle *AR*(1) périodique, *C. R. Acad. Sci. Paris- Mathématique*, **340**, 315-318.
- [49] Gardner, G., Harvey, A. C. and Phillips, G. D. A. (1980). Algorithm AS 154. An algorithm for exact maximum likelihood estimation of autoregressive-moving average models by means of Kalman filtering. *Applied Statistics*, **29**, 311-322.
- [50] Giannikis, D., Vrontos, I. D. and Dellaportas, P., (2008). Modelling nonlinearities and heavy tails via threshold normal mixture GARCH models. *Comput. Statist. Data Anal.* **52**, 1549-1571.
- [51] Gladyshev, E. G. (1961). Periodically correlated random sequences. *Soviet. Math.*, **2**, 385-88.
- [52] Guerbyenne, H. (2007). Modèles de Séries Chronologiques Conditionnellement Hétéroscédastiques. Thèse de Doctorat en sciences. U.S.T.H.B, Alger, Algérie.
- [53] Hamilton, J. D., (1994). Time series analysis. Princeton University Press, New Jersey.

- [54] Harvey, A. C., (1989). Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter. Cambridge University Press, New York.
- [55] Hensch, J. J. and Laub, A. J., (1994). Numerical solution of the discrete-time periodic Riccati equation, *IEEE Trans. Autom. Control*, **39**, 1197-1210.
- [56] Hurvich, C. M., Shumway, R. H. and Tsai, C. L. (1990). Improved estimators of Kullback-Leibler information for autoregressive model selection in small samples. *Biometrika*, **77**, 709-719.
- [57] Hurvich, C. M. and Tsai, C. L., (1993). A corrected Akaike information criterion for vector autoregressive model selection. *J. Time Ser. Anal.*, **14**, 271-279.
- [58] Franses, P. H. (1996). Periodicity and Stochastic Trends in Economic Times Series. Oxford University Press.
- [59] Franses, P.H. and Paap, R. (2000). Modeling Day-of-the-Week Seasonality in the S&P 500 Index. *Applied Financial Economics*, **10**, 483-488.
- [60] Franses, P. and Paap, R. (2004). Periodic time series models. Oxford University Press.
- [61] Jimenez, C., McLeod, A.I. and Hipel, K.W., (1989) Kalman filter estimation for periodic autoregressive-moving average models. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, **3**, 227-240.
- [62] Kalman E., (1960). A new approach to linear filtering and predicting problems. *Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering Series*, **82**, 35-45.
- [63] Klein, A. and Mélard, G. (1990). Fisher's information matrix for seasonal autoregressive moving average models. *J. Time Ser. Anal.*, **11**, 231-237.
- [64] Le, N.D., Martin, R.D., Raftery, A.E., (1996). Modeling flat stretches, bursts, and outliers in time series using mixture transition distribution models. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **91**, 1504-1514.
- [65] Li, W. K and Hui, Y. V. (1988). An Algorithm for the exact likelihood of periodic autoregressive moving average models. *Communication in Statistics- Simulation and Computation*, **16**, 1483-1494.
- [66] Ljung, L. and Caines, P. E. (1979). Asymptotic normality of prediction error estimators for approximate system models. *Stochastics*, **3**, 29-46.
- [67] Louis, T., (1982). Finding the observed information matrix when using the *EM* algorithm. *J. Roy. Statist. Soc. B*, **44**, 226-233.

- [68] Lund, R. and Basawa, I. V., (1999). Modeling and inference for periodically correlated time series. In : Gosh, S. (Ed.), *Asymptotics, Nonparametrics and Time series*, Marcel Dekker, New York, 37-62.
- [69] Lund, R. and Basawa, I. V. (2000). Recursive prediction and likelihood evaluation for periodic *ARMA* models. *J. Time Ser. Anal.*, **21**, 75-93.
- [70] Lütkepohl, H., (1991). *Introduction to multiple time series analysis*, Berlin : Springer Verlag.
- [71] McLachlan, G.J. and Krishnam, T., (1997). *The EM algorithm and extensions*. Wiley, New York.
- [72] Mélard G., (1984). Algorithm AS197 : A fast algorithm for the exact likelihood of autoregressive-moving average models. *Appl. Statistics*, **33**, 104-114.
- [73] Mélard G. and Klein A., (1994). On a fast algorithm for the exact information matrix of a Gaussian *ARMA* time series. *IEEE Trans. Signal Process*, **42**, 2201-2203.
- [74] Morf M., Sidhu G. S. and Kailath T., (1974). Some new algorithms for recursive estimation in constant, linear, discrete-time systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, **19**, 315-323.
- [75] Nakamori, S., Hermoso, A. Jimknez, J. and Linares, J., (2004). Chandrasekhar-type filter for a wide-sense stationary signal from uncertain observations using covariance information. *Appl. Math. Comput.*, **151**, 315-325.
- [76] Newton, H. J. (1982). Using periodic autoregressions for multiple spectral estimation. *Technometrics*, **6**, 1310-1317.
- [77] Osborn, D. R. (1992). The implication of periodically varying coefficients for seasonal time series processes. *J. Econometrics*, **48**, 373-384.
- [78] Pagano, M., (1978). On periodic and multiple autoregression. *Annals of Statistics*, **6**, 1310-1317.
- [79] Pearlman, J. G. (1980). An algorithm for the exact likelihood of a high-order autoregressive moving average process. *Biometrika*, **67**, 232-233.
- [80] Salas, J. D, Duane C. Boes and Smith, R. A. (1983). Estimation of *ARMA* Models with Seasonal Parameters. *Water Resources Research*, **18**, 1006-1010.
- [81] Sayed A. H. and Kailath T., (1994). Extended Chandrasekhar recursions. *IEEE Trans. Autom. Control*, **39**, 619-623.

- [82] Sayed, A. H., Kailath, T., Lev-Ari, H., (1994). Generalized Chandrasekhar recursions from the generalized Schur algorithm, *IEEE Trans. Autom. Control*, **39**, 2265-2269.
- [83] Schweppe, F. (1965). Evaluation of likelihood function for Gaussian signals. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **11**, 61-70.
- [84] Shea, B. L. (1984). Maximum likelihood estimation of multivariate ARMA process via the Kalman filter. *J. Time Ser. Anal.*, 91-101.
- [85] Shea, B. L. (1987). Estimation of multivariate time series. *J. Time Ser. Anal.*, **8**, 95-109.
- [86] Shea, B. L. (1989). The exact likelihood of a vector autoregressive moving average model. *J. Royal Statistical Society C*, **38**, 161-184.
- [87] Shao Q., (2006). Mixture periodic autoregressive time series models. *Statist. Probab. Lett.*, **76**, 609-618.
- [88] Shao, Q. and Lund, R. (2004). Computation and characterization of autocorrelations and partial autocorrelations in periodic *ARMA* models. *J. Time Ser. Anal.*, **25**, 359-372.
- [89] Sreedhar, J. and Van Dooren, P., (1993). Periodic Schur form and some matrix equations. In U. Helmke, R. Mennicken and J. Saurer (eds), Proc. MTNS'93, Regensburg, Germany, **I**, 339-362.
- [90] Stoffer D. S, and Wall, K. D., (1991). Bootstrapping state-space models : Gaussian maximum likelihood estimation and the Kalman filter. *J. Amer. Statis Assoc.*, **86**, 1024-33.
- [91] Tiao, G. C and Grupe, M. R., (1980). Hidden periodic autoregressive-moving average models in time series data. *Biometrika*, **67**, 365-373.
- [92] Tong, H., (1990). Nonlinear Time Series : a Dynamical System Approach. Oxford University Press, Oxford.
- [93] Ula, T. A. and Smadi A. A., (1997). Periodic stationary conditions for periodic autoregressive moving average processes as eigenvalue problems. *Water Resources Research*, **33**, 1929-1934.
- [94] Varga, A., (1997) Periodic Lyapunov equations : some applications and new algorithms. *Int. J. Control*, **67**, 69-87.

- [95] Varga, A. and Van Dooren, P., (2001). Computational methods for periodic systems - an overview. Proc. of IFAC Workshop on Periodic Control Systems, Como, Italy, 171-176.
- [96] Vecchia, A. V. (1985a). Maximum likelihood estimation for periodic autoregressive Moving average models. *Technometrics*, **27**, 375-384.
- [97] Vecchia, A. V. (1985b). Periodic autoregressive-moving average (*PARMA*) modeling with application to water resources. *Water Resources Bulletin*, **21**, 721-730.
- [98] Wall, K. D. and Stoffer D. S., (2002). A state space approach to bootstrapping conditional forecasts in *ARMA* models. *J. Time Ser. Anal.*, **23**, 733-751.
- [99] Wong, C. and Li, W., (2000). On a mixture autoregressive model. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **62**, 95-115.
- [100] Wong, C.S. and Li, W.K., (2001). On a mixture autoregressive conditional heteroscedastic model. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **96**, 982-995.
- [101] Zhang, Z., Li, W.K., Yuen, K.C., (2006). On a mixture *GARCH* time-series model. *J. Time Ser. Anal.* **27**, 577-597.