

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA THECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
USTHB/ALGER**

FACULTE DE MATHEMATIQUES



THESE

**Présentée pour l'obtention du grade de :
Magister en mathématiques**

Spécialité : Systèmes dynamiques

Par

Mohamed El-Amine TALBI

SUJET

SYSTEMES DYNAMIQUES SUBSTITUTIFS ET APPLICATIONS

Soutenue publiquement le 18 décembre 2003 devant le jury composé de :

Mr BEBOUCHI Rachid	Professeur USTHB	Président
Mr ZEGHIB Abdelghani	Directeur de recherches CNRS Lyon, France	Directeur de thèse
Mr KESSI Arezki	Professeur USTHB	Examineur
Mr DJEBALI Smail	Maître de conférences ENS Kouba, Alger	Examineur
Mr AROUCHE Abdelwahab	Chargé de cours USTHB	Examineur

A mon père.

Remerciements

Avant tout, je remercie Abdelghani Zeghib d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse, de son soutien, d'avoir toujours répondu présent bien qu'il soit en France et surtout de sa patience. Ce travail est loin d'être ce qu'il espérait de ma part mais cela reste toujours un grand pas pour moi dans le domaine de la recherche.

Je remercie tous les membres de mon jury pour avoir, d'une part accepté d'être président et examinateurs et d'autres part pour leur aide : Mr Bebbouchi pour la documentation, Mr Kessi pour les logiciels, Mrs Djballi et Arouche de m'avoir proposé leur aide.

Je remercie aussi toute l'équipe du laboratoire de système dynamique Yazid, Mohamed ... pour ne pas tous les citer.

Ces remerciements seraient incomplets si je ne remerciais pas mon grand père, mon père, mes frères et soeurs et ma mère à qui je dois beaucoup.

INTRODUCTION

Substitution, un objet combinatoire qui fait correspondre à chaque lettre d'un alphabet fini un mot non vide sur cet alphabet. Cette notion est apparue pour la première fois en 1963 (W. H. Gottschalk, Substitution minimal sets. Trans. Amer. Math. Soc. 109 (1963), 467-491), elle permettait de définir le " Morse minimal set ", car Morse en 1921 construit une suite qui s'avéra être point fixe de substitution pour montrer l'existence de géodésiques récurrentes sur des surfaces à courbure négative, On rappelle qu'une *géodésique γ est dite récurrente si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe L tel que pour tout segment S de γ de longueur supérieure à L tout point de γ soit à au plus ϵ de S* . Cette substitution est de longueur constante car l'image de chaque lettre a même longueur. Un autre exemple significatif est la substitution de Fibonacci construite aussi sur un alphabet à deux lettres mais qui est de longueur non constante. Les substitutions font partie de l'une des deux classes distinctes des systèmes dynamiques symboliques, l'autre étant la classe des sous shift de types finis d'entropie strictement positive alors que les systèmes substitutifs ont une entropie nulle.

Notre travail se résume comme suit :

Un historique sur Fibonacci et Morse est présenté dans la première section du premier chapitre. Puis dans la deuxième section, on introduit les systèmes dynamiques substitutifs et ceci par l'étude des deux suites de Morse et de Fibonacci. On commence par donner les définitions classiques sur les substitutions ainsi que leurs propriétés : Primitivité, matrice d'incidence, automate et on les classe en deux catégories : les substitutions de longueur constante telle que la substitution de Morse, et celles de longueurs non constantes comme la substitution de Fibonacci. Dans la troisième section on énonce différentes propriétés (arithmétiques et combinatoires) de ces deux suites. Dans la quatrième section on définit l'espace associé à une substitution ; topologie, métrique, caractérisation des éléments, langage par les mots, fonction de complexité ...

Nous donnerons aussi la définition de l'entropie topologique en fonction de la complexité, puis nous donnerons le calcul dans le cas de Morse et de Fibonacci ainsi que la généralisation. Dans la cinquième section on définit les systèmes dynamiques substitutifs en mettant l'accent sur l'étude de la minimalité de

ces systèmes et en montrant l'équivalence entre la minimalité des suites et les systèmes associés, d'abord en étudiant la minimalité de la suite de Morse, puis la généralisation aux systèmes dynamiques substitutifs primitifs. Pour la sixième section on parlera de la notion d'unique ergodicité, on étudiera d'abord un cas particulier celui de la substitution de Morse (en passant par la définition de la mesure dans le cas général) puis la généralisation aux substitutions primitives qu'on appliquera à la substitution de Fibonacci. Dans la section sept nous parlerons brièvement de chaos. Enfin dans la dernière section nous donnerons la représentation géométrique de la substitution de Fibonacci qui est le codage de rotation d'angle de valeur le nombre d'or alors que la substitution de Morse est une extension de l'odomètre dyadique. Nous terminerons par quelques remarques et commentaires.

Dans le chapitre deux nous commençons par quelques rappels sur la géométrie hyperbolique, la représentation symbolique et quelques théorèmes classiques, puis nous définissons un ensemble de suites symboliques nécessaire au codage des géodésiques. Après une introduction sur le codage du pantalon hyperbolique et un résumé sur la méthode de Morse avec des références sur la méthode d'Artin, nous expliciterons la méthode de Caroline Series. Pour cela, nous donnerons les différents outils nécessaires ; expansion frontière, suite de découpage et représentation des géodésiques.

En conclusion nous ferons un survol sur les systèmes dynamiques substitutifs d'une manière générale. Celui ci combine historique et acheminement des travaux sur des domaines différents tels que :

Systèmes dynamiques symboliques et théorie ergodique.

La théorie des automates, logique, arithmétique et théorème de Gobham.

Théorie des langages formels (DOL système, décidabilité et complexité de langage).

Théorie des nombres (transcendance et séries formelles).

Géométrie (pavages et fractales).

Groupes de dimensions et diagramme de Bratteli.

Physique théorique (quasi cristaux et opérateurs discrets).

Un grand nombre de documents sont donnés comme références.

Table des matières

CHAPITRE 1 INTRODUCTION AUX SYSTEMES DYNAMIQUES SUBSTITUTIFS

1-1 HISTORIQUE :

Suite de Fibonacci.....	4
Suite de Morse.....	5

1-2 INTRODUCTION AUX SUBSTITUTIONS :

Construction de la suite de Morse	7
Substitution.....	7
Primitivité.....	8
Matrice d'incidence.....	9
Automate associé à une substitution	10

1-3 QUELQUES PROPRIETES DES SUITES DE MORSE ET DE FIBONACCI

Systèmes de numération	13
Autres propriétés	14

1-4 L'ESPACE ASSOCIE À UNE SUBSTITUTION MUNI DU SHIFT

Le shift.....	16
Topologie.....	16
Métrie	17
Fonction de complexité	17
Langage	18
Entropie.....	18

1-5 SYSTEMES DYNAMIQUES SYMBOLIQUES SUBSTITUTIFS ASSOCIES A UNE SUITE

Caractérisation des éléments de X_U	19
Etude de la minimalité.....	20
Affirmations	21

1-6 NOTION D'UNIQUE ERGODICITE :

Cas particulier	22
Généralisation aux substitutions primitives.....	24

1-7 SYSTEMES SUBSTITUTIFS ET CHAOS..... 25

1-8 REPRESENTATION GEOMETRIQUES DES SUBSTITUTIONS DE FIBONNACCI ET DE MORSE.

Fibonacci.....	26
Morse.....	29

CHAPITRE 2 APPLICATION : Codage du pantalon hyperbolique

2-1 QUELQUES NOTIONS DE GEOMETRIE HYPERBOLIQUE ET RAPPELS	34
2-2 INTRODUCTION.....	36
2-3 CODAGE DU PANTALON.....	38
Expansion frontière	41
Suites de découpages.....	41
Représentation des géodésiques	43
CONCLUSION	47

CHAPITRE 1

INTRODUCTION AUX SUBSTITUTIONS

1.1 HISTORIQUE

1.1.1 Suite de Fibonacci

Léonardo de Pise dit Fibonacci (1170 environ-1250 environ), a rejoint son père Bonacci à Bejaia durant son enfance juste après le traité de paix entre les deux villes. Il étudia les travaux algébriques d'EL KHAWARIZMI avec son maître " admirable " comme il le décrit lui-même, il s'agit d'un certain Cheikh Omar, il apprit les différents systèmes de calcul ; l'algèbre, la géométrie... A son retour à Pise il publia en 1202 son fameux livre " Libérer abacci " où il compare le système de numération romain à celui des arabes, le considérant plus avancé. Il introduit la numération positionnelle en utilisant les chiffres arabes, c'est le premier grand mathématicien européen à l'adopter et à le vulgariser auprès des scientifiques. Mais tout cela était mal vu par les autorités locales, à titre d'exemple en 1209 Florence a interdit l'utilisation des chiffres arabes par les banquiers. Son livre contient aussi la plupart des résultats connus des arabes en algèbre et arithmétique (racine...) Il donna aussi une liste de problèmes d'algèbre avec 12 énigmes, et aussi le premier problème de démographie :

Un couple de lapins arrive seul sur une île, chaque saison le couple reproduit un nouveau couple, on admet que la grossesse dure une saison et que la maturité est atteinte au bout d'une autre saison, on suppose aussi que les lapins ne meurent jamais et ne deviennent jamais stériles.

Question du pisan :

quelle sera la taille de la population au bout de n périodes ?

La taille de la population, année après année, est donné par la suite de Fibonacci, cette histoire de lapins n'était qu'un moyen pour introduire le nombre d'or dont Fibonacci était féru. En 1220 il publia *practica geometriae*. En 1225 il publia *liber quadratorum* (résolution de problèmes ; la racine de $x^2 + 1$ etc..

Pour répondre à la question de Fibonacci on suppose la population d'une année donnée en individus matures et immatures. La population mature est égale à la population totale de l'année précédente, puisque les immatures seront arrivés à maturité et que les matures ont survécu. La population

immature est égale à la population mature de l'année précédente qui l'a engendrée, donc à la population totale de deux ans auparavant. La population totale de l'année est ainsi la somme des populations totales des deux années précédentes, en partant du couple initial qui a débarqué dans l'île à sa naissance, on calcule facilement la population année après année 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 34, 55, ... cette suite tend vers une progression géométrique ayant pour raison le nombre d'or.

1.1.2 Suite de Morse

Harold Calvin Marston Morse (1892-1977) ; mathématicien américain né à Waterville (Massachusetts). Il fit ses études supérieures à Harvard, où il fut l'élève de G.B Birkoff. Il était parent de Samuel F. Morse, l'inventeur de la télégraphie.

En 1921 il utilisa un objet combinatoire qu'on appelle substitution (cf 1-2) pour construire des géodésiques non fermées sur des surfaces. Il construisit une suite minimale non périodique sur l'alphabet $\{a, b\}$ (il fait un code à la géodésique par une suite infinie de 0 et de 1 cf chap 2). Cette suite est aussi appelée suite de Morse -Thues -Prouhet, car le premier mathématicien qui a étudié cette suite est E. Prouhet, en 1851 pour résoudre le problème suivant :

Etant donné deux entiers q et r , trouver un nombre infini de suites de q^r nombres, chaque suite pouvant être divisée en q ensembles de q^{r-1} éléments tels que pour tout entier $k < r$, la somme des puissances $k^{ième}$ des éléments de chaque ensemble est la même. Si $q = 2$ la solution du problème de E. Prouhet est donnée par la suite de Morse.

Thues quant à lui étudia en 1907 la combinatoire du point fixe de la substitution de Morse dans le cadre d'étude des suites sans facteurs carrés.

Proposition : U la suite de morse, la suite définie sur l'alphabet par $V_n = U_{n-1} - U_n$ est sans facteurs carrés (cf 1.3.2 propriété 1.5).

Définitions

Système dynamique

Un système dynamique (X, T) est la donnée d'une application continue $T : X \rightarrow X$ de l'espace métrique X dans lui même.

Remarque :

L'objet principal de l'étude des systèmes dynamiques symboliques est l'étude des orbites des points, elle sont obtenus en itérant plusieurs fois l'application T , i.e la composée de T avec elle-même avec des temps n , et $T^n(x)$ est l'orbite d'un point x de X :

C'est $\{\dots, T^{-2}(x), T^{-1}(x), x, T(x), T^2(x), \dots\}$ quand T est inversible, et $\{x, T(x), T^2(x), \dots\}$, quand T ne l'est pas.

Système dynamique symbolique

Un système dynamique symbolique est le couple (Ω, T) , où :

- Ω est un fermé de $A^{\mathbf{N}}$ (l'ensemble des suites infinies indexées par $\mathbf{N}$ et définie sur un alphabet fini A qui est un ensemble de lettres).

- T est la restriction du décalage (l'oublie de la première lettre de la suite).

Mot

Un mot est une suite finie d'éléments de A .

Concaténation

La Concaténation de deux mots $v = v_1 \dots v_r$ et $w = w_1 \dots w_s$ est le mot $vw = v_1 \dots v_r w_1 \dots w_s$.

Si $v = v_1 \dots v_r$, r est la longueur de v , notée $|v|$.

Un mot $v = v_1 \dots v_r$ apparaît à l'indice m dans une suite $(x_n)_n$ ou dans un mot $x_0 \dots x_s$ si $x_m = v_1, \dots, x_{m+r-1} = v_r$.

1.2 INTRODUCTION AUX SUBSTITUTIONS

1.2.1 Construction de la suite de morse

Soient $(A_r)_r$ et $(B_r)_r$ deux suites sur l'alphabet a, b définies par :

$$\begin{cases} A_0 = a \\ B_0 = b \end{cases} \text{ et } \forall r > 0 \text{ on a } \begin{cases} A_{r+1} = A_r.B_r \\ B_{r+1} = B_r.A_r \end{cases}$$

Si on note l'alphabet $\{a, b\}$ par A , A^* l'ensemble des mots finis de A , la loi étant la concaténation, elle est associative et a pour élément neutre le mot vide ϵ , l'ensemble A^* est alors un monode libre. la suite A_r est bien définie et admet une limite dans $\{a, b\}^* \cup \{a, b\}^N$, cette limite est notée U .

$$U = abbabaabbaababba....$$

De plus $\forall r > 0$, A_r est égale à la suite B_r modulo l'échange de lettres a et b et $\forall r > 0$, $|A_r| = |B_r| = 2^r$ où $|A_r|$ désigne la longueur du mot A_r .

1.2.2 Substitution

Définition : Une substitution est un objet combinatoire qui fait correspondre à chaque lettre d'un alphabet fini un mot fini non vide sur cet alphabet. C'est-à-dire on substitue un mot à une lettre. C'est aussi la donnée d'une direction $\sigma : A \rightarrow A$, elle s'étend à un morphisme par concaténation :

$\sigma(w w') = \sigma(w) \sigma(w')$, où w et w' sont des mots de A , et de manière naturelle à une application de A^N .

La première substitution a été étudiée par Prouhet-Thues-Morse, elle est définie par :

$$\begin{cases} \sigma_1(a) = ab \\ \sigma_1(b) = ba \end{cases}$$

Remarque : L'ordre est important car si par exemple on prend $\sigma_1(a) = ab$ et $\sigma_1(b) = ba$ on obtient une suite $ababababab...$ périodique et on verra plus loin que la suite de Morse ne l'est pas.

Si a est une lettre telle que $\sigma(a)$ commence par a et $|\sigma(a)| \geq 2$, alors il existe un unique point fixe U de σ qui commence par a .

La substitution de Morse est de longueur constante 2 car la longueur de

l'image de chaque lettre est de longueur 2.

Un n -mot est soit $\sigma^n(a)$ soit $\sigma^n(b)$.

La suite de Morse U s'obtient comme la limite de $\sigma_1^n(a)$, il est clair qu'elle converge dans $\{a, b\}^* \cup \{a, b\}^{\mathbb{N}}$. C'est le point fixe de la substitution qui commence par a , définie sur $\{a, b\}$ par $\sigma_1(a) = ab$ et $\sigma_1(b) = ba$

$U = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_1^n(a)$ et vérifie $\sigma_1(U) = U$.

$$U = u_0 u_1 u_2 \dots$$

Exemple de substitution de longueur non constante ; substitution de Fibonacci :

C'est la substitution définie sur l'alphabet $\{a, b\}$ par : $\begin{cases} \sigma_2(a) = ab \\ \sigma_2(b) = a \end{cases}$

La suite de Fibonacci noté F est l'unique point fixe de la substitution de Fibonacci.

On a $F = abaababaabaab\dots$

Elle n'est pas de longueur constante car $\sigma_2(a)$ est de longueur 2 alors que $\sigma_2(b)$ est de longueur 1. La longueur de $\sigma_2^n(a)$ est le n^{iem} nombre de Fibonacci F_n donné par la formule de récurrence :

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 2 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

1.2.3 Primitivité

Une substitution est dite primitive si elle mélange suffisamment les lettres.

C-à-d : $\exists h$ tq $\sigma^h(a)$ contient une occurrence de b pour tous couples (a, b) dans $A \times A$, cela revient à dire aussi que les coefficients d'une puissance de la matrice associée sont tous positifs.

1.2.4 Matrice d'incidence

M_σ la matrice est définie par $(i, j) = |\sigma(a_j)_i|$; c'est le nombre de présence de a_i dans $\sigma(a_j)$, avec a_i, a_j des lettres de l'alphabet $\{a, b\}$.

Exemples :

1- Pour la suite de Fibonacci :

$$M_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sa valeur propre dominante est le nombre d'or $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$.

2-Pour la suite de Morse :

$$M_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sa valeur propre dominante est sa longueur qui vaut 2.

Remarque 1

Pour toute substitution de longueur constante, la valeur propre dominante associée à sa matrice d'incidence est égale à sa longueur.

Remarque 2

La primitivité des substitutions peut aussi être définie à partir de la matrice d'incidence.

En effet une substitution σ est primitive si et seulement si, il existe un entier k tel que la puissance k^{ieme} de la matrice M_σ a ses coefficients strictement positifs.

Les matrices irréductibles (en particulier primitives) satisfont le théorème de **Perron-Frobenius** :

Soit M une matrice irréductible positive, alors M admet une valeur propre α strictement positive, qui est dominante en module ; si λ est une autre valeur propre alors $\alpha \geq |\lambda|$.

La valeur propre α est simple et il existe un vecteur propre aux coordonnées positives associées à α .

De plus si M est primitive, alors α est strictement dominante en module ; $\alpha > |\lambda|$.

Il existe aussi une autre classe de substitutions ; ce sont les substitutions

de type Pisot définies par :

Les valeurs propres sont toutes non nulles et de module différent de 1, et que seule la valeur propre dominante est de module supérieur à 1.

Cette valeur propre dominante est appelée nombre de Pisot.

On a aussi le **théorème** : une substitution de type Pisot est primitive.

Pour la démonstration ainsi qu'une étude détaillée on renvoie à [Sei].

1.2.5 Automate associé à une substitution

k entier ≥ 2

Définition : Un k -*automate* consiste en la donnée de :

-Un ensemble fini S nommé état, un de ces états est appelé état initial et est noté i .

- K bords orientés appelés applications transitions de l'ensemble des états S dans lui-même, étiqueté par des entiers entre 0 et $k - 1$.

-Un ensemble Y et une application de S dans Y appelée application sortie.

Automate : Une suite U_n à valeur dans Y est dite k -*automatique* si elle est générée par un automate comme suit : Soit $\sum_{i=0}^j n_i k^i$, $n_j \neq 0$ le développement de l'entier n dans la base k .

Partant de l'état initial, on alimente l'automate avec la suite $n_0, n_1, n_2, \dots, n_j$ (les chiffres sont lus dans l'ordre croissant des présences) ; après avoir fait cela, cet automate est à l'état $a(n)$; alors on pose $U_n = \varphi(a(n))$.

L'automate est alors dit alimenté par lecture inverse.

On donne aussi une autre définition de la k -*automaticité* en lisant les chiffres en sens inverse en commençant par le chiffre le plus important (c-à-d commençant par n_j) mais on voit facilement que les deux notions sont équivalentes. L'automate est alors dit alimenté par lecture directe.

Dans la définition de l'automate direct on ajoute souvent la condition suivante : Le bord (arrêt) 0 applique l'état initial sur lui-même.

Remarque : Un automate est considéré comme une machine à produire

les suites mais n'est pas pratique comme machine à reconnaître les langages.

Projection lettre-à-lettre : Soit une application d'un alphabet fini A dans un autre alphabet fini B , elle s'étend naturellement à une application de $A^* \cup A^{\mathbb{N}}$ dans $B^* \cup B^{\mathbb{N}}$ cette application est appelée projection lettre-à-lettre.

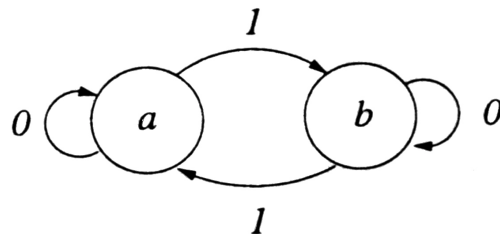
Caractérisation :

Une suite U est *k-automatique* si et seulement si U est l'image par une projection lettre-à-lettre du point fixe d'une substitution de longueur constante k .

Pour la preuve, on considère l'automate par la lecture directe : L'image par la projection lettre-à-lettre du point fixe de la substitution de longueur constante est générée par un automate dont l'ensembles des états est l'alphabet de la substitution ; l'application transition est donnée par la substitution et l'application sortie par la projection P .

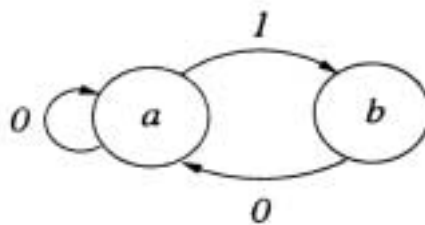
Représentation graphique

1) On associe à la suite de Morse le graphe suivant :



En fait c'est un 2-automate d'étape initial a et d'application sortie $id\{a,b\}$

2) On associe à la suite de Fibonacci le graphe suivant :



Remarque : On définit aussi la reconnaissabilité d'un langage par les automates

1.3 QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SUITES DE MORSE ET DE FIBONACCI

1.3.1 Système de numération

Morse

Soit $N_i = \{n \text{ tq la } (n+1)^{\text{ieme}} \text{ lettre soit } i, i \in \{a, b\}\}$
 $N_a = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, \dots\}$
 $N_b = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, \dots\}$

Proposition 1.1 : Soit $n \in N$, on note $S_2(n) = \sum_{i \geq 0} n_i$ si $n = \sum_{i \geq 0} n_i 2^i$;
 $n_i \in \{0, 1\}$ le développement dyadique de n , on a alors :
 $N_a = \{n \in N; S_2(n) \text{ paire}\}$ et $N_b = \{n \in N; S_2(n) \text{ impaire}\}$.

Preuve : $N_a = \{n \in N; S_2(n) \text{ paire}\}$ et $N_b = \{n \in N; S_2(n) \text{ impaire}\}$ forment une partition de N , par induction (récurrence) sur r on montre

$(P_r) : \{n \in N_a \text{ et } n < 2^r \Rightarrow S_2(n) \text{ paire}\} \text{ et } \{n \in N_b \text{ et } n < 2^r \Rightarrow S_2(n) \text{ impaire}\}$
 Supposant $n \in N_a$ et considérant (P_r) vraie, montrons (P_{r+1}) :
 Soit n tq $2^r < n < 2^{r+1}$ alors $n = 2^r + n'$ avec $n' \in N_b$ et $n' < 2^r$ par la construction $A_{r+1} = A_r B_r$ (cf introduction aux substitutions)
 $S_2(n) = S_2(2^r) + S_2(n') = 1 + S_2(n')$ $n' \in N_b$ et $n' < 2^r \Rightarrow S_2(n')$ impaire d'où le résultat.

Fibonacci

On note : F_a l'ensemble des entiers n tel que la $(n+1)^{\text{iem}} \text{ lettre soit } a$,
 F_b l'ensemble des entiers n tel que la $(n+1)^{\text{iem}} \text{ lettre soit } b$.
 $F_a = \{0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15, \dots\}$
 $F_b = \{1, 4, 6, 9, 12, 14, 17, 19, 22, 25, \dots\}$

Proposition 1.2 :

$$F_a = \{n \in N; Fib(n) \in \{0, 1\}^{k-1} \times \{0\}\}$$

$$F_b = \{n \in N; Fib(n) \in \{0, 1\}^{k-1} \times \{1\}\}.$$

Preuve : $F = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sigma_2^r(a)$, $|\sigma_2^r(a)| = F_r$, $\sigma_2^{r+1}(a) = \sigma_2^r(a)\sigma_2^{r-1}(a)$, $\forall r \geq 1$
ce qui implique que si :
 $fib(n) = u_k \dots u_0$ alors $n \in F_a$ si et seulement si $n - F_k \in F_a$ comme $0 \in F_a$
et $1 \in F_b$ en déduit que $n \in F_a$ (resp $n \in F_b$) si et seulement si $n_o = 0$ (resp $n_0 = 1$).

Proposition 1.3 : Tout entier positif n peut s'écrire de manière unique
comme $n = \sum_{i \geq 0} n_i F_i$ avec $n_i \in \{0, 1\}$; $n_i \cdot n_{i+1} = 0$, $\forall i \geq 0$.

Preuve : Existence de la décomposition :

Par récurrence $n = 0$, $n = 1$ vraies.

Supposons la propriété vraie $\forall n < F_k$ ($k \geq 2$) si $F_k < n < F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$
alors $n - F_k < F_{k-1}$, l'hypothèse de récurrence implique $n - F_k = \sum_{i=0}^{k-2} n_i F_i$
d'où $n = F_k + \sum_{i=0}^{k-2} n_i F_i$.

Remarque :

Si $(n_0, \dots, n_k) \in \{0, 1\}^{k+1}$ et $n_i n_{i+1} = 0, \forall i < k$ alors $\sum_{i=0}^k n_i F_i < F_{k+1}$.

la preuve se fait aussi par récurrence : Si $n_k = 1$ alors $n_{k-1} = 0$ et

$\sum_{i=0}^k n_i F_i = F_k + \sum_{i=0}^{k-2} n_i F_i$ d'où si on suppose que $\sum_{i=0}^{k-2} n_i F_i < F_{k-1}$ on
aura $\sum_{i=0}^k n_i F_i < F_k + F_{k-1} = F_{k+1}$.

Montrons maintenant l'unicité :

Supposons $\sum_{i=0}^k n_i F_i = \sum_{i=0}^k n'_i F'_i$, $n_i, n'_i \in \{0, 1\}$ et $n_i n_{i+1} = n'_i n'_{i+1} = 0, \forall i \geq 0$ pour simplifier (les termes de haut) on peut supposer $n_k = 1, n'_k = 0$
et $n_i = n'_i = 0$ pour $i > k$ ce qui implique que $\sum_{i \geq 0} n_i F_i \geq F_k$ et d'après la
remarque précédente que $\sum_{i \geq 0} n'_i F'_i < F_k$; contradiction.

Définition : Soit $n = \sum_{i=0}^k n_i F_i$ avec $n_k = 1, n_i \in \{0, 1\}$ et $n_i \cdot n_{i+1} = 0$
 $\forall i < k$

Le développement de Fibonacci pour l'entier positif n est :

$Fib(n) = n_k n_{k-1} \dots n_0 \in \{0, 1\}^k$.

1.3.2 AUTRES PROPRIÉTÉS

Suite de Fibonacci :

Propriété 1.1 : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{F_n \cdot F_{n+1}} = \alpha - 1$ où α est le nombre d'or.

Suite de Morse :

Propriété 1.2 : $u_{2n} = u_n$ et $u_{2n+1} = 1 - u_n$, et au rang $k2^n$ la suite présente toujours un n -mot : $\sigma^n(a)$ si $u_k = a$, $\sigma^n(b)$ si $u_k = b$.

Preuve : $u_{2n} = u_n$ car $S_2(n)$ et $S_2(2n)$ ont la même parité et on applique la proposition 1.1.

Propriété 1.3 : Dans la suite de morse il n'existe pas de mot de la forme VVv avec v la première lettre de U .

Preuve : Posons $|U| = l$

Supposons l impair et qu'il est à une place impaire :

$U = v|a_1b_1|...|a_pb_p|$ (où les barres indiquent la séparation entre deux mots présents au rang $2k$ dans U), le mot de la forme $|a_0v|a_1b_1|...|b_pv|$, (a_0UUv) doit être dans la suite de Morse avec l'indication de la position des barres.

$a_0+v = a_1+b_1 = ... = a_p+b_p$ et $v+a_1 = b_1+a_2 = ... = b_p+v = 1, a_{i+1}+b_{i+1} = a_{i+1}+b_i = a_i+b_i, i = 1, ... (p+1) a_1 = a_2 = ... = a_p, a_0 = a_1 = b_p, b_1 = ... = b_p$ ce qui est impossible car $V = 1$ ou $V = 0$.

Si l est impair et UUv apparaît à un rang pair $2k$ alors :

$u = |vb_1|.a_2b_2|...|a_pb_p|$, si $u' = va_2...a_p$ et $S(u'u'v)$ apparaît dans la suite de Morse à la position $2k$ et donc $u'u'v$ sera présent à la position k ($S(U) = U$, S injective) v est la première lettre de u' est la longueur de u' est strictement inférieure à l , en continuant on aura $|u| = 1$ mais 111 et 000 n'apparaissent pas dans U .

Les deux cas restants se traitent de la même manière (mutadis mutandis ; en changeant ce qu'il faut).

Conséquence : Deux occurrences du même mot dans la suite de Morse sont forcément disjointes.

Propriété 1.4 : Dans la suite de Morse tout mot de longueur inférieure ou égale à 5 a une unique décomposition en 1-mot, pouvant commencer par la dernière lettre du 1-mot et se terminer par la première lettre du 2-mot.

Preuve : Il y a une unique façon de mettre les barres, c'est vrai si notre mot contient 00 ou 11, comme ils ne peuvent être entre deux barres donc il doit y avoir une barre au milieu, sinon le mot doit contenir 01010 ou 10101 mais $|01|01|0$ ou $0|10|01|$ n'apparaissent pas car 010101 et 101010 n'apparaissent pas.

Le mot 10101 n'apparaît pas pour les mêmes raisons.

Propriété 1.5 : Soit U la suite de Morse, la suite V définie sur l'alphabet fini $\{-1, 0, 1\}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est sans facteur carré.

Preuve : Si le mot $a_1 \dots a_k a_1 \dots a_k$ est présent à la place i dans v alors $a_1 + \dots + a_k = 0$, et comme $u_{2k+i} - u_i = 2(a_1 + \dots + a_k)$ est dans $\{-1, 0, 1\}$ mais ceci implique que pour $e \in \{0, 1\}$ le mot $e(e + a_1) \dots (e + a_1 + \dots + a_{k-1})v(e + a_1 + \dots + a_{k-1})$ est dans U ; contradiction.

1.4 L'ESPACE ASSOCIÉ A UNE SUBSTITUTION MUNI DU SHIFT

1.4.1 Le shift (décalage)

C'est l'application $T : \{a, b\}^N \rightarrow \{a, b\}^N$ définie par $T((U)_{n \in N}) = (U_{n+1})_{n \in N}$.

Exemples :

1-Pour la suite de Fibonacci : $T(F) = T(abaabab\dots) = baabab\dots$

$T^2(F) = T(T(F)) = aabab\dots$

2-Pour la suite de Morse : $T(U) = T(abbabaab\dots) = bbabaab\dots$

$T^2(U) = T(T(U)) = babaab\dots$

1.4.2 Topologie

L'ensemble $\{a, b\}^N$ est muni de la topologie produit des topologies discrètes définies sur A .

Définition : Si $w = w_0...w_r$, le cylindre $[w]$ est l'ensemble :
 $\{x \in X_U; x_0 = w_0, ..., x_r = w_r\}$.

1.4.3 Métrie

$\{a, b\}^N$ est un espace métrisable par la métrie : $d(u, v) = 2^{-\min\{n \in \mathbb{N}; u_n \neq v_n\}}$
 où $(u, v) \in A^N \times A^N$ si $u \neq v$, et $d(u, v) = 0$ si $u = v$.

1.4.4 Fonction de complexité

Définition : La complexité est une fonction qui mesure le désordre pour une suite, elle prend ses valeurs dans l'alphabet fini, à valeurs entières $p_U(n)$ c'est le nombre de mots de longueur n qui apparaissent dans la suite U .

Exemples :

1- La suite de Fibonacci est de complexité $n + 1$ (cf lemme 1.8).

C'est une suite *sturmienn*e : elle a la plus petite complexité possible pour une suite non périodique.

Définition : Les suites *sturmiennes* sont des suites de complexité $n + 1$.

2- Pour la suite de morse U , on a : $p_U(1) = 2, p_U(2) = 4$ et pour $n \geq 3$:
 si $n = 2^r + q + 1, r \geq 0, 0 < q \leq 2^r$ alors : $p_U(n) = 6 \cdot 2^{r-1} + 4q$ si $0 < q < 2^{r-1}$
 et $p_U(n) = 8 \cdot 2^{r-1} + 2q$ si $2^{r-1} < q \leq 2^r$.
 On déduit aussi que $p_U(n) \leq 4n$.

Preuve : Si $n \geq 4$ la propriété (**propriété 1.4**) implique que $p_u(n) = p_0(n) + p_1(n)$, où $p_0(n)$ est le nombre de mots de longueur n débutant juste après la barre, et $p_1(n)$ juste avant.

Soit $n = 2k + 1$ et w un mot de longueur n ; si w est dans la première catégorie, $w = |a_1b_1|...|a_kb_k|a_{k+1}$, $a_i + b_i = 1$, et il y a autant de mots que les mots $a_k...a_{k+1}$, d'où $p_0(2k + 1) = p_U(k + 2)$.

De la même manière $p_1(2k+1) = p_U(k+1)$, $p_0(2k) = p_U(k)$, $p_1(2k) = p_u(k+1)$ les première valeurs peuvent être calculées à la main.

1.4.5 Langage

$L(U)$ est l'ensemble des mots de A^N présent dans U .

C'est le langage de U , et $L_n(U)$ est l'ensemble des mots de longueur n .

1.4.6 Entropie topologique

On définit l'entropie topologique pour une suite U par :

$$H_{top}(U) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_d(p_U(n))}{n} \text{ avec } d = \text{card} A.$$

Applications :

Suite de Fibonacci : $p_U(n) = n + 1, d = 2$ (d'après le lemme 1.8) d'où $H_{top}(U) = 0$.

Suite de Morse : $p_U(n) \leq 4n, d = 2$ d'où $H_{top}(U) = 0$.

Généralisation : Tout système substitutif primitif est d'entropie nulle.

Pour le démontrer on utilise le lemme suivant :

Lemme 1.1 : Si σ est une substitution primitive, la complexité de son point fixe U est sous-affine.

Preuve : La primitivité implique que M_σ^k a tous ses coefficients positifs, et donc, par le théorème de Perron-Frobenius, M_σ a une valeur propre strictement positive θ , simple, et telle que $\theta > |\lambda|$ pour toute autre valeur λ propre, et comme M_σ est à coefficients entiers, on a $\theta > 1$, donc $\inf_{a \in A} |\sigma^p a| \rightarrow +\infty$ avec p ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver p tel que $\inf_{a \in A} |\sigma^{p-1} a| \leq n \leq \inf_{a \in A} |\sigma^p a|$.

D'après le théorème de Perron-Frobenius ; si p est assez grand, $c\theta^p < \inf_{a \in A} |\sigma^p a| < d\theta^p$.

Tout mot de longueur n est contenu dans un $\sigma^p a$ ou un $\sigma^p(ab)$; à a et b fixés, il y a au plus $|\sigma^p(a)\sigma^p(b)|$ tels mots de longueur n , repérés par la position de leur première lettre ; il y a au plus K choix possibles de a et b .

Donc $p(n) < 2Kd\theta^p < 2Kdc^{-1}\theta n$ pour n assez grand. CQFD

On remplace cette dernière formule dans la définition de l'entropie, on obtient le résultat.

Remarque :

En fait ce qui différencie les sous shift de type fini aux systèmes substitutifs c'est l'entropie, qui est strictement positive pour les premiers et nulle pour les seconds.

1.5 SYSTÈME DYNAMIQUE SYMBOLIQUE ASSOCIÉ A UNE SUITE U

Définition : Le système dynamique symbolique associé à la suite U et à valeurs dans A est le système $(\overline{\theta(U)}, T)$ où $\overline{\theta(U)} \subset A^N$ est la clôture positive de l'orbite de la suite U sous l'action du shift, c-à-d : $\{T^n(U), n \in N\}$. On note $\overline{\theta(U)}$ par X_U .

Proposition 1.4 : X_U est un espace compact et $T : X_U \rightarrow X_U$ est une application uniformément continue.
Les cylindres sont ouverts et fermés et forment une base de X_U .

Preuve : L'ensemble A^N est compact et X_U est un ensemble fermé donc compact.

Comme $d(T(x), T(y)) \leq 2d(x, y)$ le shift est donc uniformément continu. Ceci implique que si $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T^{k_n}(U)$ alors $T(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T^{k_{n+1}}(U)$ et $Tx \in X_U$.

Si le cylindre $[w]$ est non vide, soit x dedans, $[w]$ s'identifie à la fois, à la boule ouverte $\{y; d(x, y) < 2^{-n}\}$ et à la boule fermée $\{y; d(x, y) \geq 2^{-n-1}\}$, d'où la dernière assertion.

1.5.1 Caractérisation des éléments de X_U

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $x \in X_U, x = x_0x_1x_2\dots$
- (ii) il existe une suite k_n telle que $x_0\dots x_n = u_{k_n}\dots u_{k_n+n}$ pour tout $n \geq 0$
- (iii) $L_n(x) \subset L_n(U)$ pour tout n .

Preuve : (i) est équivalente à $d(x, T^{k_n}(U)) < 2^{-n}$ pour une certaine suite k_n et donc (ii).

(ii) implique (iii) car un mot présent dans x doit être présent dans $x_0\dots x_n$

(iii) implique (ii) car $x_0\dots x_n$ est dans $L_{n+1}(U)$

1.5.2 Étude de la minimalité

Définition 1 : Le système (X, T) est minimal si les seuls ensembles fermés $E \subset X$ tel que $T(E) \subset E$ sont X et $\emptyset$.

Ce qui implique : Pour tout point $x \in X$, l'orbite $\{T^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X .

Définition 2 : Une suite est dite minimale ou bien uniformément récurrente si chaque mot présent dans U est présent une infinité de fois dans des lacunes bornées, c'est à dire qu'il a des temps de retour à sauts bornés :

$\forall i < j, \exists s \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \exists m; n < m < n + s \text{ tq } : u_i = u_m, \dots, u_j = u_{m+(j-i)}$

Ou bien : pour tous facteurs w facteur de $U \exists s \text{ tq } \forall n, w$ est facteur de $u_n\dots u_{n+s-1}$.

Proposition 1.5 : Le système (X_U, T) est minimal si et seulement si la suite U est minimale.

Preuve : Si U est minimale, on sait que $x \in X_U, U$ a une orbite fermée, qui doit être dans X_x , l'orbite fermée de x d'où $X_x = X_U$.

Si (X_U, T) est minimal pour $x \in X_U$, l'orbite fermée X_x est égal X_U , d'où U est dans X_x et $L_n(U) \subset L_n(x)$ et pour tout n on a $X_U = \bigcup_{n=0}^{+\infty} T^{-n}[w]$.

Maintenant si w est présent dans U , il doit être présent dans tous $x \in X_U$ ce qui implique $X_U = \bigcup_{n=0}^{+\infty} T^{-n}[w]$, d'où par compacité $X_U = \bigcup_{n=1}^p T^{-n_i}[w]$ donc pour tout $k \geq 0$ $S^k(U) \in \bigcup_{i=1}^p T^{-n_i}[w]$ ce qui revient à dire que w est présent dans U une infinité de fois dans des lacunes de longueur $\max n_i$.

1.5.3 Affirmations

Proposition 1.6 : La suite de Morse M est minimale.

Preuve : Soit w un mot quelconque dans U , il existe m tq w est présent à une place entre 0 et 2^m , donc dans $\sigma_1^m(a)$, mais $\sigma_1^m(a)$ est présent dans tout $m+1$ -mot, donc une infinité de fois dans U (en shiftant) avec des sauts bornés par 2^{m+1} et donc de w d'où U est minimale.

Proposition 1.7 : La suite de Morse n'est ni périodique ni ultimement périodique.

On rappelle qu'une suite est dite :

-Périodique, si chaque facteur revient une infinité de fois.

-Ultimement périodique, si $\exists n_0, \exists t \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0$ on a $u_n = u_{n+t}$.

Preuve : Il suffit de montrer que la suite n'est pas ultimement périodique (car périodique implique ultimement périodique).

D'après la (**propriété 1.2**) $u_{2n+1} \neq u_n$ donc $n+1$ n'est pas période (si non $u_{2n+1} = u_{n+(n+1)} = u_n$ contradiction). $\forall n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0$ tq $(n+1)$ multiple de p donc $n+1 = kp$, $u_{2n+1} = u_{n+(n+1)} = u_{n+kp} = u_n$, si p est période on aura donc $u_{2n+1} = u_n$, absurde.

Généralisation aux substitutions primitives

Affirmation 1 :

Proposition 1.8 : Si σ est une substitution primitive alors son point fixe W est une suite minimale.

Preuve : 0 est contenu dans tous les $\sigma^k 0$ donc apparaît dans $W = \sigma^k u$ une infinité de fois avec des lacunes bornées : Donc c'est vrai aussi pour tous les $\sigma^k 1$ donc pour tout mot de W .

Affirmation 2 : La substitution de Fibonacci est primitive donc le système associé est minimal.

1.6 NOTION D'UNIQUE ERGODICITE

Proposition 1.9 : Un système dynamique topologique admet toujours une mesure de probabilité invariante C-à-d : une mesure μ sur X (muni de la tribu des boréliens) telles que $\mu(X) = 1$ et $\mu(Tf) = \mu(f)$ pour toute fonction f borélienne.

Preuve : Il suffit de prendre pour μ un point d'accumulation, pour la convergence vague, de la suite de mesures de probabilité $\mu_n = n^{-1} \sum_{k \leq n} \delta_{T^k x}$, pour un point x quelconque de X .

On peut alors parler de système dynamique mesuré (X, T, μ) .

Définition : Un système dynamique est uniquement ergodique s'il possède une unique mesure de probabilité invariante.

c-à-d : $\mu(X) = 1$ et $\int f(Tx) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x)$.

1.6.1 Cas particulier : Suite de Morse

Proposition 1.10 : Le système dynamique associé à la suite de Morse est uniquement ergodique.

Preuve : Soit σ_1 la substitution de Morse, $N(w, v)$ le nombre d'occurrence du mot w dans le mot v .

Lemme 1.2 : Pour tous facteurs w quand $n \rightarrow +\infty$, $\frac{N(w, \sigma_1^n(e))}{2^n}$ tend vers une limite f_w indépendamment de $e = 0$ ou $e = 1$.

Preuve : Nous regardons la quantité $N(w, \sigma_1^n 0) + N(w, \sigma_1^n 1)$; on remarque que $N(w, \sigma_1^{n+1} 0) + N(w, \sigma_1^{n+1} 1) \leq 2(N(w, \sigma_1^n 0) + N(w, \sigma_1^n 1))$, car $\sigma_1^{n+1} 0 = \sigma_1^n 0 \sigma_1^n 1$, $\sigma_1^{n+1} 1 = \sigma_1^n 1 \sigma_1^n 0$ et on a seulement pu oublier des apparitions à cheval

entre deux mots. Donc $2^{-n-1}(N(w, \sigma_1^n 0) + N(w, \sigma_1^n 1))$, mais $2^{-n-1}(N(w, \sigma_1^{n+1} 0))$ ne diffère de la quantité précédente que par les apparitions situées à la charnière entre les deux mots, et leur contribution est au plus $2^{-n-1}|w|$, et de même pour 1, donc $N(w, \sigma_1^n e)/2^n \rightarrow f$, pour $e = 0$ ou $e = 1$. CQFD

Lemme 1.3 : Sous les mêmes hypothèses $\frac{N(w, u_k \dots u_{k+n})}{n+1} \rightarrow f_w$ uniformément par rapport à k quand $n \rightarrow +\infty$ et pour tout mot w .

preuve : Soit $v = u_k \dots u_{k+n}$. On écrit $v = A\sigma_1^p(u_j \dots u_{j+l-1})B$, pour un p petit devant n , avec $|A| = a < 2^p$, et $|B| = b < 2^p$. On a $n+1 = a+b+l2^p$, et, en vertu de la proposition précédente $|N(w, \sigma_1^p u_i) - 2^p f_w| < \epsilon 2^p$, si n et p sont assez grands. Et on a $N(w, v) \leq N(w, A) + N(w, B) + \sum_{i=j}^{j+l-1} N(w, \sigma_1^p u_i) + l|w|$. Le dernier terme, nécessaire à cause des occurrences à cheval entre deux mots, vérifie $l|w|/(n+1) \leq |w|/2^p$. $N(w, v) \geq \sum_{i=j}^{j+l-1} N(w, \sigma_1^p u_i)$.

En divisant ces inégalités par $n+1$ et en choisissant p puis n assez grand on obtient la conclusion désirée.

La convergence uniforme vient du fait que p et l peuvent être choisis indépendamment de k . CQFD

Définition de la mesure : La mesure μ est définie par :
 $\mu([w]) = \mu(T^{-n}[w]) = f_w$.

Proposition 1.11 : Pour toute suite vérifiant le lemme précédent le système dynamique topologique associé est uniquement ergodique.

Preuve : On définit une mesure μ par $\mu([w]) = \mu(T^{-n}[w]) = f_w$, pour tout mot w et tout $n \in \mathbb{N}$.

On vérifie que cette mesure s'étend à toute la tribu des boréliens et est invariante par T .

Le lemme précédent dit que $(1/N) \sum_{n=0}^{N-1} 1_W(T^{n+j}u) \rightarrow \mu(W)$ uniformément en j , pour tout cylindre W , on déduit que :

$(1/N) \sum_{n=0}^{N-1} g(T^{n+j}u) \rightarrow \mu(g)$ uniformément en j , pour toute fonction continue g .

Soit x un point de X , $x = \lim_{k \rightarrow +\infty} T^{n_k}u$, et $(1/N) \sum_{n=0}^{N-1} g(T^{n+n_k}u) \rightarrow \mu(g)$

quand $n \rightarrow +\infty$, uniformément en k , donc $(1/N) \sum_{n=0}^{N-1} g(T^n x) \rightarrow \mu(g)$ pour toute fonction continue g .

Mais s'il existe une autre probabilité T -invariante ν la relation précédente et le théorème de convergence dominée impose $\nu(g) = \mu(g)$ pour toute fonction continue g , donc $\mu = \nu$.

CQFD

Corollaire : Le système (X, T, μ) associé à la suite de Morse est *ergodique*.
i.e : Pour tout ensemble invariant A , $\mu(A) = 0$ ou $\mu(X \setminus A) = 0$.

Preuve : Si non $\nu(E) = \mu(E \cap A)/\mu(A)$ définit une autre mesure invariante.

1.6.2 Généralisation aux substitutions primitives

Proposition 1.12 : Pour toute substitution primitive la proposition précédente reste vraie.

Lemme 1.4 : Si σ est une substitution primitive alors $\frac{N(e, \sigma^n a)}{|\sigma^n a|} \rightarrow f_e$ quand $n \rightarrow +\infty$ pour tout $a \in A$ et tout mot e d'une lettre.

Preuve : Soit $N(v)$ le vecteur $(N(e, v), e \in A)$ pour tout mot v , et soit M la matrice $((m_{i,j}))$, $i \in A, j \in A$, où $m_{i,j} = N(j, \zeta i)$.

On a $N(\zeta v) = MN(v)$ pour tout mot v , et $N(\zeta^n a) = M^n N(a)$ la primitivité implique que M^k a tous ses coefficients positifs, et donc, par le théorème de Perron-Frobenius, M a une valeur propre strictement positive θ , simple, correspondant à un vecteur propre strictement positif g , et telle que $\theta > |\lambda|$ pour toute autre valeur λ propre, et $f(\zeta^n a)/\theta^n$ converge vers un multiple g_a strictement positif de g .

De plus, comme M est à coefficients entiers $\theta > 1$.

Et $|\zeta^n a|$ est le produit scalaire de $N(\zeta^n a)$ avec le vecteur $h = (1, \dots, 1)$ donc $N(\zeta^n a)/|\zeta^n a| \rightarrow g_a/(g_a, h)$, qui est le multiple de g dont la somme des coordonnées vaut 1, et est donc indépendant de a .

CQFD

Lemme 1.5 : Si σ est primitive $\frac{N(w, \sigma^n a)}{|\sigma^n a|} \rightarrow f_w$ quand $n \rightarrow +\infty$ pour tout $a \in A$ et pour tout mot w .

Preuve : Pour cela on fait apparaître $v = v_1 \dots v_l$ comme mot de une lettre d'une nouvelle substitution primitive ζ_l , sur l'alphabet A_l dont les lettres sont les mot de longueur l de u .

On définit ; si $\zeta(v) = y_1 \dots y_m$ et $|\zeta v_1| = q$, $\zeta_l(v_1 \dots v_l) = (y_1 \dots y_l)(y_2 \dots y_{l+1}) \dots (y_q \dots y_{q+l-1})$.

On remarque que $\zeta_l^m(u_0 \dots u_{l-1}) = (u_0 \dots u_{l-1})(u_1 \dots u_l) \dots (u_{|\zeta^n u_0|-1} \dots u_{|\zeta^n u_0|+l})$ et donc que cette suite définit un point fixe de ζ_l , $U_l = (u_0 \dots u_{l-1})(u_1 \dots u_l) \dots (u_n \dots u_{n+l-1}) \dots$

ζ_l est primitive : Soient $v, w \in A_l$; $\exists p$; $w \subset \zeta^p 0$ par définition de u , et $\exists m$; $0 \subset \zeta^m v_1$, par primitivité de ζ ; donc $w \subset \zeta^{m+p} v_1$, donc w est une lettre de $\zeta_l^{m+p} v$.

ζ_l vérifie les autres hypothèses, avec $u_0 \dots u_{l-1}$ le zéro de l'alphabet A_l ; on vérifie que $|\zeta_l^n v| = |\zeta^n v_1|$, que $N(w, \zeta_l^n v)$ est proche de $N(w, \zeta^n v_1)$ quand n est grand et donc le lemme précédent donne le résultat.

CQFD

Retour à la démonstration de la proposition :

Elle est inchangée (comme dans le cas de Morse) à part que $|\zeta^p u_i|$ ne vaut plus 2^p . Mais $\inf_{a \in A} |\zeta^n a| \rightarrow +\infty$, ce qui suffit pour parvenir à la même conclusion.

CQFD

1.7 Systèmes substitutifs et chaos

On rappelle qu'un système (X, T) est dit chaotique s'il vérifie :

i) l'ensemble des points périodiques (i.e $\{w \in X; \exists h \geq 1 \text{ tq } T^h(w) = w\}$) est dense.

ii) le système est topologiquement transitif (i.e $\forall A, B$ deux ensembles non vide de X alors $\exists k$ entier tq $T^k(A) \cap B \neq \emptyset$).

iii) il vérifie la sensibilité aux conditions initiales (i.e $\exists \epsilon > 0$ tq $\forall x \in X$, $\{\forall \delta > 0 \exists y \in X, \exists n \in \mathbf{N} ; d(x, y) < \delta \text{ et } d(T^n(x), T^n(y)) \geq \epsilon\}$).

La dernière assertion est en fait une conséquence de i) et de ii) (cf [Ba, Br, Ca])

Les systèmes substitutifs primitifs ne sont pas chaotiques car ceux sont des systèmes minimaux, donc ils ne possèdent pas de points périodiques.

Affirmation

Le système associé à la suite de Morse n'est pas chaotique.

1.8 Représentation géométrique des substitutions de Fibonacci et de Morse

Définition : Le système dynamique topologique (X, T) est isomorphe au système (X', T') s'il existe une bijection bicontinue ϕ de X sur X' vérifiant $\phi T = T' \phi$.

Lemme 1.6 : Si u et v sont deux suites sur des alphabets finis, et s'il existe un isomorphisme topologique ϕ du système dynamique topologique associé à u avec le système dynamique topologique associé à v , ϕ est un code fini : il existe q fini tel que $(\phi(x))_i$ ne dépend que de $x_i, \dots, x_{i+q}$.

Proposition 1.13 : Le système associé à la suite de Fibonacci est un codage de la rotation R .

R : la rotation irrationnelle d'angle $1 + \alpha$ sur le tore assimilé à l'intervalle $[0, 1[$.

α : nombre d'or.

Lemme 1.7 : La suite de Fibonacci vérifie $u_n = 0$ si $R^n \theta \in [1 - \theta, 1[$, $u_n = 1$ si $R^n \theta \in [0, 1 - \theta[$, où $\theta = 1 + \alpha$.

preuve : Soit v la suite définie ci-dessus.

On peut aussi l'écrire $v = Tv''$, où $v''_n = 0$ si $R^n 0 \in [1 - \theta, 1[$, $v''_n = 1$ si $R^n 0 \in [0, 1 - \theta[$, T étant le shift.

Soit I l'intervalle $[0, \theta[$ et R' la transformation induite de R sur I , c-a-d $R'x = R^{n(x)}x$ si $x \in I$, où $n(x)$ est le temps du premier retour de x en I , c-a-d le plus petit $n \geq 1$ tel que $R^n x \in I$.

R' est bien définie et s'écrit explicitement :

Si $x \in [0, 1 - \theta[, n(x) = 2, R'x = x + 2\theta - 1$.

Si $x \in [1 - \theta, \theta[, n(x) = 1, R'x = x + \theta - 1$.

Soit v' la suite définie par $v'_n = 0$ si $R^n 0 \in [0, 1 - \theta[, v'_n = 1$ si $R^n 0 \in [1 - \theta, \theta[$.

Comparons v' à v'' .

Si $n(x)$ est le temps du premier retour de x en I , $n_2(x) = n(x) + n(R'x)$ est le temps du deuxième retour, $n_i(x) = n_{i-1}(x) + n(R^{i-1}x)$ est le temps du i -ème de retour x en I .

Si l'on sait que $v'_i = 0$, on sait que $R^i 0$ est dans $[0, 1 - \theta[$; donc $R^{n_i(o)} 0$ qui est le même point, est dans $[0, 1 - \theta[, R^{n_i(o)+1} 0$ est dans $[\theta, 1[\subset [1 - \theta, 1[$ est $R^{n_i(o)+2} 0$ est revenu dans $[0, \theta[$ donc coïncide avec $R^{i+1} 0$; on sait donc que $n_{i+1} o + n_i 0 = 2$, que $v''_{n_i(0)} = 1$ et que $v''_{n_i(0)+1} = 0$.

Si $v'_i = 1$, $R^i 0$ est dans $[1 - \theta, \theta[$ donc $R^{n_i(o)} 0$ est dans $[1 - \theta, \theta[\subset [1 - \theta, 1[$, et $R^{n_i(o)+1} 0$ reste dans $[0, \theta[$.

On a donc $n_{i+1}(0) + n_i(0) = 1$ et $v''_{n_i(0)} = 0$.

L'analyse qui précède a permis, à partir de la connaissance de v' , de déterminer v'' entre deux $n_i(0)$ consécutifs :

On voit finalement que $v'' = \tau_0 v'$ où τ_0 est la substitution $\tau_0 0 = 10, \tau_0 1 = 0$.

La suite initiale v vaut donc $T\tau_0 v'$.

On ne change pas v' si on fait une homothétie de $1/\theta$; alors R' devient la rotation de $2 - 1/\theta = 1 - \theta$ sur l'intervalle $[0, 1[$.

Et $v'_n = 1$ si $R^n 0 \in [\theta, 1[, v'_n = 0$ si $R^n 0 \in [0, \theta[$.

On induit R' sur $[0, \theta[$, soit Q la tranformation induite ; on a :

Si $x \in [0, 2\theta - 1[, n(x) = 1, Qx = x + 1 - \theta$.

Si $x \in [2\theta - 1, \theta[, n(x) = 2, Qx = x + 1 - 2\theta$.

Soit w définie par $w_n = 0$ si $Q^n 0 \in [0, 2\theta - 1[, w_n = 1$ si $Q^n 0 \in [2\theta - 1, \theta[$.

On vérifie que $v' = \tau_1 w$ où $\tau_1 0 = 0, \tau_1 1 = 01$.

On normalise en divisant par θ .

On voit que Q est la rotation R , et que $w_n = 1$ si $R^n 0 \in [1 - \theta, 1[, w_n = 0$ si $R^n 0 \in [0, 1 - \theta[$.

Une nouvelle induction semblable à la première nous fait revenir sur R' et v' , et montre que $w = \tau_2 v'$ où $\tau_2 0 = 01, \tau_2 1 = 1$.

Donc $v' = \tau v'$ où $\tau 0 = 001, \tau 1 = 01$; donc pour tout n , $v' = \tau^n v'$, et v' commence par 0, donc v' commence par $\tau^n 0$, ce qui définit v' .

Et finalement $v = T\tau_0 \tau^\infty(0)$, il ne reste qu'à identifier en v la suite de Fibonacci.

Or $\tau_0\tau 0 = 10100$, $\tau_0\tau 1 = 100$; on vérifie que $\tau_0\tau^n 0$ est constitué par un 1 suivi de toutes les lettres sauf la dernière de $\sigma_2^{2n+1}0$ et que $\tau_0\tau^n 1$ est constitué par les f_{2n+1} dernières lettres de $\tau_0\tau^n 1$: on utilise pour cela le découpage de u "à l'envers", $\sigma^n 0 = \sigma^{n-1}0\sigma^{n-2}0 = \sigma^{n-2}0(\sigma^{n-3}0\sigma^{n-2}0)$; et donc v commence par $\sigma_2^{2n+1}0$, d'où $v = u$.

Retour à la démonstration de la proposition :

Soit P la partition ($P_1 = [0, 1 - \theta[$, $p_0 = [1 - \theta, 1[$) et $\phi(x)$ le P -nom (pour $n \geq 0$) de x .

On a $\phi(\theta) = u$, $\phi(R^n\theta) = T^n u$; comme R est continue, quand $R^{n_k}\theta \rightarrow x$, on a $\phi(R^{n_k}\theta) \rightarrow \phi(x)$ pour la topologie produit sur $(0, 1)^N$, sauf si x est dans l'orbite de θ à cause de la semi-fermeture des intervalles de P ; et $\phi(x) = \lim T^{n_k} u$ est alors un point de $X = \bar{O}u$; comme les $(n\theta, n \in \mathbb{N})$ sont denses dans $[0, 1[$, on voit que $\phi([0, 1[/ D) \subset X$, où D est un ensemble dénombrable.

Réciproquement, deux points qui ont le même P -nom ne sont pas séparés par des intervalles arbitrairement petits, donc sont identiques ; et tout point de X , s'écrivant sous la forme $\lim T^{n_k} u$, s'écrit, quitte à prendre une sous-suite telle que $R^{n'_k}\theta$ converge, et à éliminer un nombre dénombrable de points, $\phi(R^{n'_k}\theta)$; ϕ est donc bien une bijection à part un ensemble dénombrable, et $\phi R = T\phi$. CQFD

Lemme 1.8 : La complexité de Fibonacci est $p(n) = n + 1$ pour tout entier naturel n .

Preuve : Un mot $w_0 \dots w_{n-1}$ apparait dans u (par minimalité) si et seulement si $\bigcap_{i=0}^{n-1} R^{-i} P_{w_i} \neq \emptyset$.

Le découpage de l'intervalle $[0, 1[$ par les ensembles $\bigcap_{i=0}^{n-1} R^{-i} P_{w_i}$ quand w parcourt l'ensemble des mots de longueur n , est le découpage de l'intervalle par les points $R^i 0$, $1 \leq i \leq n$, il y a donc $n + 1$ intervalles non vides.

CQFD

Remarque: L'équivalent sur un alphabet à trois lettres de la substitution de Fibonacci est la substitution de Tribonacci définie par $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$, $\sigma(3) = 1$ G.Rauzy, avec des techniques issues de la théorie des nombres, a montré en 1981 que le système substitutif qui y est associé est isomorphe d'une part à une rotation sur le tore de dimension 2, et d'autre part à un

échange de morceau dans un compact auto similaire du plan à frontière fractale.

Proposition 1.14 : La suite de Morse est métriquement isomorphe à un système (Y, S) qui est une extension à deux points de la rotation dyadique.

Pour la preuve on se contentera d'un résumé (les grandes lignes) de la démonstration car celle-ci est trop technique et nécessite le rappel de plusieurs autres définitions.

Définitions :

Représentation par les tours de Rokhlin :

Lemme 1.9 : On peut toujours écrire X sous forme d'une réunion disjointe :

$$X = \bigcup_{e=0,1} \bigcup_{k=0}^{2^n-1} T^k \sigma^n[e] .$$

Nous pouvons donc construire des ensembles $F_{n,e} = \sigma^n[e]$ et leurs itérés $T^k F_{n,e}$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$ de la manière suivante :

À l'étape n , on a deux *tours*, dont les niveaux sont des ensembles disjoints de mesure 2^{-n-1} , et T envoie chaque niveau de chaque tours, sauf les sommets, sur les niveaux situés immédiatement au dessus ; T n'est pas apparente sur les sommets ; Au début, $F_{0,0}$ et $F_{0,1}$ sont deux ensembles disjoints de mesure $1/2$; soit $F_{n,0}$ et $F_{n,1}$ les bases des deux n -*tours*, on coupe $F_{n,i}$ en deux sous ensembles égaux $F_{n+1,i}$ et $G_{n+1,i}$, et on voit apparaître T sur une partie des étages ou elle n'était pas encore définie en envoyant $T^{2^n-1} F_{n+1,0}$ sur $G_{n+1,1}$ et $T^{2^n-1} F_{n+1,1}$ sur $G_{n+1,0}$ ce qui définit les $n+1$ -*tours* qui seront de hauteurs 2^{n+1} au dessus de leurs bases.

Lemme 1.10 : Il existe un ensemble E de mesure nulle tel que si x et x' sont des éléments de X/E et pour tous $n \geq 0$, x et x' sont dans le même étage $T^k F_{n,e}$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$, $e = 0, 1$, alors $x = x'$.

On dit que les tours de bases $F_{n,e}$ engendrent le système (X, T, μ) et qu'on a définit T par une méthode de *découpage et empilage* (cutting and stacking)

ou encore par des *tours de Rokhlin*.

On utilise deux tours à chaque étape donc S est dite de rang deux au plus (pour être sûr que T est de rang deux, il faudra montrer qu'on ne peut utiliser une seule tour à chaque étape).

On introduit sur X la relation suivante : $x \sim x'$ si $x = x'$ où $x_n + x'_n = 1$ pour tout $n \in N$. Chaque classe d'équivalence a deux éléments, et on vérifie que sur l'espace quotient X' , le décalage et la mesure se transportent naturellement en une mesure μ' et un décalage T' ; on dit que (X', μ', T') est un facteur à fibré deux de (X, T, μ) .

Pour remonter de X' vers X , on associe à $x' \in X'$ les deux éléments de la classe x' .

On écrit donc dans $Z/2Z$, que $z(e, x) = e + \phi(x)$, où ϕ est une application mesurable de X' dans $Z/2Z$.

On dit que (X, T, μ) est un *produit gauche* de (X, T, μ') par $Z/2Z$ construit avec l'application ϕ , ou *une extension à deux points* de (X', T', μ') .

Les étages $T^k F_{n,e}$ se projettent dans X' sur des étages $T'^k F_n$; les tours de bases F_n engendrent le système (X', T') qui est de rang un.

On appelle rotation le système dynamique constitué par un groupe compact G , une translation S de G et la mesure de Haar λ sur G .

Soit $Y = (0, 1)^N$, muni de l'addition en base deux avec retenue infinie, est un groupe compact.

Il contient une copie de N et une copie de Z .

Les entiers sont denses dans Y muni de la topologie usuelle, on appelle $(Y, +)$ le *groupe des entiers 2-adiques*. S est la rotation $x \rightarrow x + 1$. On l'appelle la *rotation dyadique* ou *l'odomètre dyadique*.

Lemme 1.11 : S est uniquement ergodique, et donc ergodique.

La mesure invariante de S est la mesure de Haar λ .

Pour le système dynamique mesurable (Y, S, λ) , il y a une structure spectrale sous-jacente, les valeurs propres, ici, déterminent entièrement la structure spectrale.

Lemme 1.12 : S est à spectre discret c'est-à-dire que le sous espace vectoriel engendré par les fonctions propres est dense dans $L^2(Y, \lambda)$, et ses valeurs

propres sont tous les $e^{2i\pi\alpha}$ pour les rationnels dyadiques $\alpha = p2^{-k}$.

On regarde S définie par son graphe ; soit G_0 l'intervalle $[0, 1[$, F_n l'intervalle $[0, 2^{-n}[$, S envoie de manière affine $S^i G_n$ sur $S^{i+1} G_n$ pour $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. On écrit ces intervalles l'un au dessus de l'autre, sous forme d'une tour (*de roklin*) qui remplit tout l'espace ; S est l'action de monter d'un étage dans la n -tour et n'est pas définie sur le sommet.

La $n + 1 - \text{tour}$ (qui n'est pas définie sur le sommet) s'obtient en coupant la n -tour verticalement en deux moitiés et en empilant la moitié de droite sur celle de gauche ; par cette opération on définit S sur une partie plus grande de l'espace.

S est de rang un, engendré par les tours de base G_n ; sous cette forme S est connue sous le nom de *von Neumann-Kakutani*.

De retour à la suite de Morse ; son facteur à fibre deux (X', T) est engendré par des tours de base F_n , de même hauteur que les tours de base G_n engendrant (Y, S) ; elles ont des étages de même mesure et sont construites avec la même règle de récurrence.

Soit maintenant θ une application de X' dans Y , qui envoie tout point x' tel que $x' \in T'^{k_n(x)} F_n$, $n \in N$ sur un point x tel que $x \in S^{k_n(x)} G_n$, $n \in N$, comme les systèmes sont engendrés par 'a, par l'application $(x', e) \rightarrow (\theta x', e)$, au système (Y, S) qui est une extension à deux points de la rotation dyadique.

Commentaire :

On a ainsi un modèle géométrique pour T où l'isomorphisme de (Y', S') sur (X, T) est donné explicitement.

et on montre qu'il est défini partout et continu sauf sur un nombre dénombrable de points (les extrémités des intervalles) ; on a réalisé ce qu'on appelle un codage du système géométrique (Y', S') par le système symbolique (X, T) .

Remarque :

Les deux systèmes ne peuvent pas être topologiquement isomorphes, car la version géométrique de T n'est pas continue et sa version symbolique l'est.

CHAPITRE 2

APPLICATION

Codage du pantalon hyperbolique

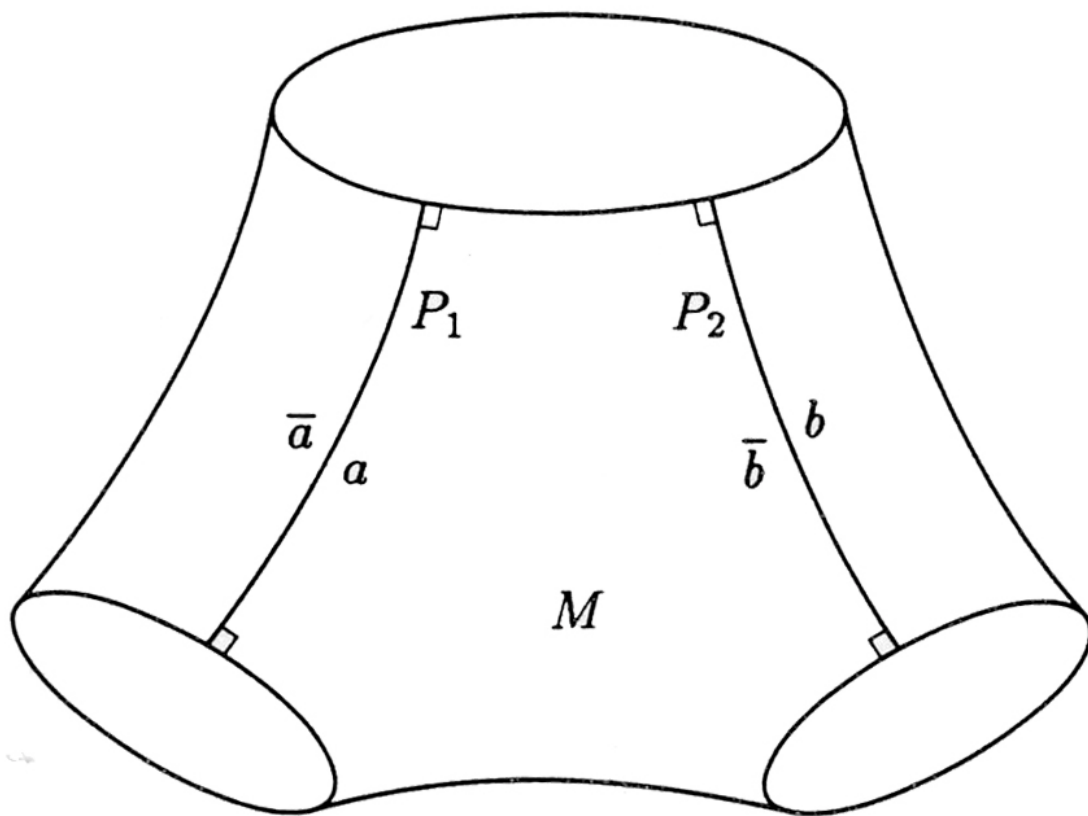


Fig « 2 »

2.1 Quelques notions de géométrie hyperbolique

Le modèle étudié est celui du disque hyperbolique dit aussi disque de Poincaré.

Géodésique

C'est le chemin le plus court reliant deux points quelconque d'une surface.

Transformation de Mobius

D disque unité dans $\mathbf{C}$.

$Aut(D)$: groupe des applications conformes (qui préservent les angles) de D dans lui-même, ce sont les transformations de Mobius c-à-d de la forme : $g(z) = az + \bar{c}/cz + \bar{a}$ (a et c dans $\mathbf{C}$) avec $|a|^2 - |c|^2 = 0$.

On définit la métrique sur D par :

$\rho(z, \omega) = \inf L(\gamma)$ (γ la courbe joignant les deux points z et ω).

Discontinuité

Soit G le groupe des homéomorphismes de l'espace topologique X sur lui-même.

Un sous groupe G_0 de G agit discontinuement sur X si pour tout sous ensemble compact K de X , $g(K) \cap K$ est non vide pour un nombre fini de g dans G_0 .

(Un groupe qui agit discontinuement est nécessairement dénombrable).

Groupe fushien

C'est le groupe des transformations de Mobius qui agit discontinuement sur le disque D .

Domaine (région) fondamental

Soit G un groupe fushien agissant discontinuement sur D , un domaine fondamental F est un sous ensemble ouvert de D avec les propriétés :

i) $\bigcup_{g \in G} g(\bar{F}) = D$, où $\bar{F}$ est la clôture de F relative à D .

ii) $g(F) \cap h(F) = \emptyset$ si $g \neq h$

Ainsi F est région fondamentale de G si tout point de D se trouve dans la clôture d'une certaine image de $g(F)$, et si deux images distinctes ne se chevauchent pas.

En général F est un polygone (dans la géométrie appropriée).

Side-pairing

L'application *Side-pairing* applique un côté du polygone sur un autre.

Théorème : Les éléments *side-pairing* génèrent G .

Flot géodésique

Définition algébrique : c'est l'action à droite, sur l'espace quotient $SL(2, Z)/SL(2, R)$, du groupe des matrices diagonales positives de la forme :

$$g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

A propos du théorème de Poincaré

Soit un polygone F , et une isométrie g_n *side-pairing*, le théorème nous donne une condition suffisante impliquant que le groupe $G = \langle g_1, g_2, \dots \rangle$ agit discontinuement et a F comme domaine fondamental.

Le rapport général est tout à fait technique mais le critère principal est facile à comprendre, nous discuterons de ceci brièvement :

Soit v_0 un sommet du polygone F , maintenant v_0 va être appliqué sur un autres sommets de F par une des applications *side-pairing*, et ce nouveau sommet, est aussi appliqué vers un autre sommet.

Ce processus crée une relation d'équivalence sur les cotés de F et, de plus en prenant soin de la description précisée, nous constatons que les classes d'équivalences sont (par exemple) $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ avec l'application f_j qui applique v_j vers v_{j+1} ou sur $v_n = v_0$.

Ceci nous fournit une application $f_n \dots f_2 f_1$ qui fixe v_0 .

Représentation symbolique

Le cas inversible :

Soit $T : C \rightarrow C$ une transformation inversible, en partitionnant C en :

$$C = \bigcup_{i=0}^n C_i$$

On peut associer à tout point p une suite symbolique *bi-infinie* d'étiqueté :

$p \leftrightarrow (\dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots)$ où x_n est l'étiqueté de C_i selon que :

$$T^n p \in C_{x_n}, n \in Z$$

On note l'espace des suites symboliques par Σ , agissant sur le groupe des itérations du shift.

Le cas non inversible :

Soit $f : X \rightarrow X$ une application non inversible comme une application quotient.

En partitionnant X en :

$$X = \bigcup_{i=1}^N I_i$$

On peut associer à tout point p une *f-expansion*, i.e, *une suite symbolique infinie* d'étiqueté :

$$p \leftrightarrow (x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots)$$

où x_n est défini par $f^n p \in I_{x_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ sur l'espace Σ^+ des *f-expansion*.

Sous shift de type fini

On se donne un graphe orienté, avec V l'ensemble des sommets et E les arêtes.

On définit X comme l'ensemble des suites infinies bilatères d'arêtes *admissibles*, admissible signifie que la suite correspond à un chemin fini du graphe, et soit T le left shift (le décalage à gauche);

Le système dynamique (X, T) est alors dit sous shift de type fini.

Il est entièrement déterminé par la donnée d'une matrice $n \times n$ notée A où n est entier, et chaque terme de la matrice est soit 1 soit 0.

Comme cas particulier :

$$X =: \{x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) : \forall t \in \mathbb{Z}, x_t \text{ dans l'alphabet, et } A(x_t, x_{t+1}) = 1\}$$

Donc une suite x est admissible si $A(x_t, x_{t+1}) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

2.1.1 Introduction

"Paire de pantalons" ou pantalon (en français) est généralement utilisé pour la sphère dont on a enlevé 3 disques, les géodésiques dans cet exemple ont été étudiés par Morse en 1921.

On donne un exemple de dynamique symbolique pour le flot géodésique sur $M = D/\Gamma$ où D est le disque hyperbolique, et Γ est soit $SL(2, \mathbb{Z})$, soit Π un groupe fondamental de surface compacte (de genre 2).

Soit N le filet des translatés des cotés de R (la région fondamentale).
 Chaque coté orienté s de N détermine une copie S de la région fondamentale
 et c'est l'unique élément de Γ_0 qui identifie s à un autre coté de S .

Dans chaque cas les géodésiques de D peuvent être codées comme suites
 infinies de générateurs de Γ , et tel que le conjugué de la géodésique de Γ
 correspond à une suite équivalente sous l'action du shift.

Si on prend Σ l'ensemble des suites infinies obtenues en codant les géodésiques
 orientées dans Γ_0 ; $\Gamma_0 = \{a, b, \bar{a}, \bar{b}\}$ où a et b sont des applications Side-pairing
 (ou bien $\Gamma_0 = \{P, P^{-1}, Q\}$ avec $P : z \mapsto z+1$ et $Q : z \mapsto -1/z$ les générateurs
 de $SL(2, Z)$), on regarde dans quels cas Σ vérifie les propriétés suivantes :

1-Il existe une bijection $\Sigma \leftrightarrow$ géodésiques, et Σ est définie par un ensemble
 de règles simples.

2- Σ est type fini c-a-d $\exists m \in N$ et $A \subseteq \prod_1^m \Gamma_0$ tel que $\{x_n\}_{-\infty}^{\infty} \in \Sigma$ si et
 seulement si $(x_{n-m+1}, \dots, x_n) \in A$ pour tout $n \in Z$

3- les géodésiques sont conjuguées sous Γ si et seulement si la correspondance
 des éléments de Σ est équivalente sous l'action du shift.

4-Il y a une manière d'associer à un élément $x \in \Sigma$ un vecteur $p(x)$ le long
 de la géodésique correspondante γ , et une fonction $h : \Sigma \rightarrow R^+$ tel que
 $gp(\sigma x) = \phi_{h(t)}p(x)$ pour $g \in \Gamma$.

Il y a deux méthodes différentes pour la construction du codage :

Méthode d'Artin

Elle utilise les fractions continues, elle est basée sur des résultats classiques
 de la théorie (élémentaire) des nombres .

Pour une lecture plus détaillée consultez [Ar].

Mais celle qui nous intéresse c'est bien la méthode de Morse, en voici un
 résumé :

Méthode de Morse

Soit γ une géodésique orientée dans D partant d'un point quelconque sur γ ,
 on inscrit dans l'ordre les côtés successifs de N traversés par γ , ceci donne
 une suite $(t_i)_{-\infty}^{\infty}$ d'éléments de Γ_0 .

Malheureusement sans modification ce codage ne satisfait aucune des pro-

priétés (1) à (4).

On peut montrer qu'on peut modifier la suite (t_i) en utilisant certaines règles géométriques telles que l'on ait (1) et (3).

La méthode est de remplacer les géodésiques par certaines chaînes de polygones dans N .

La chaîne étant une suite de polygones dont chacun a exactement un bord en commun avec son prédécesseur immédiat et successeur mais aucun avec un autre polygone de la chaîne.

Chaque géodésique dans D correspond exactement à une chaîne et inversement, aussi la géodésique se trouve toujours dans la coque convexe de sa chaîne.

Les chaînes peuvent être codées en énumérant (inscrivant) les suites de générateurs correspondants aux bords successifs adjacents des polygones de la chaîne.

Partant de points différents de la chaîne on obtient le sous shift des suites de générateurs.

Deux chaînes congrues sous Π donnent la même suite de générateur.

La suite ainsi obtenu satisfait (1) et (3).

Il n'est pas évident d'assigner le vecteur unité comme dans (4), cependant, on montre avec une interprétation plus soigneuse qu'en fait on a les propriétés (2) et (4) pour ce codage (cf l'article original de Morse).

Utilisant seulement (1) et (3), Morse démontre l'existence de géodésique transitive et périodique.

En résumé la méthode de Morse consiste à coder les géodésiques s'accordant un ordre en traversant certaines lignes de la surface, ces lignes correspondent à un filet N d'arête de translation de région fondamentale R pour Γ agissant sur D .

Cette méthode étant assez ancienne, est trop technique, c'est pour cela qu'on donne la méthode de Caroline Ceries, cette méthode est elle-même développée à partir de la méthode de Morse.

2.2 Codage du pantalon

Dans ce qui va suivre on donne un exemple particulier pour la méthode du codage du flot géodésique sur une surface de courbure négative constante

D/G , on choisit une région fondamentale de G agissant sur D (dans tout ce qui suit D est le disque hyperbolique), cette méthode est la généralisation de la méthode trouvée par la partition Markov pour le flot du tore ayant une crevaision (cf [Be. Ke. Se] chapitre 4).

Cette idée provient de plusieurs sources ; le mathématicien Nilson 1927 qui trouve le codage de la frontière.

Cette méthode a été utilisée par Hendlimd 1934 qui donna la première preuve d'ergodicité du flot géodésique sur une surface à courbure négative constante avant la démonstration de Hopf.

En fait Kobe 1929 a fait un codage de géodésique dans le cas général de surface à courbure négative constante analogue à la méthode de découpage des suites données par Carolne Ceries. Cette méthode a été originalement développée par Bowen (cf [Be. Ke. Se] chapitre 5).

Comme explication pour cette introduction, l'expansion frontière est une manière très pratique dans le sens où elle préserve la relation entre la théorie ergodique et le flot géodésique (théorie ergodique sur la frontière à l'infini, la théorie des sous shift de type fini et l'opérateur de R-P-F).

On peut mettre une métrique hyperbolique sur le pantalon en le découpant en 2 hexagones déclarant que ce sont des hexagones hyperboliques conformes avec des angles droits à chaque sommet.

Actuellement la méthode standard pour l'étude des métriques hyperboliques sur n'importe quelle surface consiste à les découper en plusieurs hexagones, étudiant séparément chaque hexagone et les coller en ensemble arrière (Fathi et Al 1979, Bleiler et Casson 1988).

La longueur des trois courbes frontières peut être indiquée arbitrairement et ceci déterminera complètement la surface hyperbolique.

La figure "2" montre que les polygones dans le disque hyperbolique est une *side-pairing* des isométries a, b qui satisfont les conditions du théorème de Poincaré (cf rappel) et qu'elle colle vers le haut du polygone dans le pantalon dans lequel les trous sont devenues prolongés dans les entonnoirs qui s'évasent au loin à l'infini.

C'est l'unique géodésique dans la classe d'homotopie des courbes entourant chaque entonnoir, et si on découpe les entonnoirs le long de ces courbes géodésiques on obtient le pantalon standard figure "2", nous appellerons cette surface tronquée M .

Le théorème de Poincaré dit qu'il n'y a pas de relation non triviale dans le groupe engendré par a et b de sorte que G soit un groupe libre de deux générateurs.

Le graphe d'un groupe relatif à un groupe particulier (dit graphe de Cayly) d'ensemble de générateurs de G_R (dans notre cas $G_R = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$) est le graphe dont les sommets sont les éléments du groupes et qui un bord joignant les sommets g, h chaque fois que $g^{-1}h \in G_R$.

On peut penser que le graphe est comme incorporé dans le plan hyperbolique par identification des éléments de G dans les orbites de O dans D .

Le bord dirigé de gO vers hO est représenté par la géodésique hyperbolique de gO vers hO et étiqueté par $g^{-1}h$.

Comme G est un groupe libre tout élément a une représentation unique comme mot réduit de générateurs c'est-à-dire comme mot dans lequel un élément n'est jamais suivi par son inverse. Un tel mot est peut être considéré comme chemin dans le graphe (de Cayley) comme par exemple le mot $e_0e_1...e_n$ correspondant au chemin joignant les sommets $O, e_0O, e_0e_1O, ..., e_0e_1...e_nO$.

La condition qu'un mot peut être réduit est équivalente à la condition qu'un chemin ne se double jamais en arrière donc le graphe est arbre, les extrémités du graphe correspondent de manière évidente au chemin réduit infini commençant par O .

Il est facile de voir que l'ensemble des mots infinis réduits est le sous shift de type fini car la condition qu'un mot peut être réduit implique seulement de vérifier qu'aucun symbole n'est immédiatement suivi par son inverse.

Nous verrons que les extrémités du graphe peuvent être identifiées dans notre exemple comme l'ensemble limite Λ du groupe G agissant dans D ainsi, on aura identifié l'ensemble limite de G avec le sous shift de type fini.

En particulier chaque point de l'ensemble limite peut être associé à un unique mot fini, ce mot est *l'expansion frontière* du point correspondant dans Λ .

Dans ce qui suit nous verrons que *l'expansion frontière* peut être engendrée comme la *f-expansion* (non inversible) d'une certaine application expansion de ∂D .

Les géodésiques sur M peuvent être codées apparemment de deux manières différentes, l'une est de voir comment ils traversent successivement à gauche les cotés des copies de R dans D .

L'autre est la concaténation des expansions frontières de leurs deux points extrémités à l'infini.

Dans cet exemple les deux méthodes donnent le même résultat.

2.2.1 Expansion frontière

Pour chaque $a \in G_R$, soit $C(e)$ le côté de R dont l'étiquette extérieure est e , et soit $A(e)$ l'arc découpé sur ∂D par $C(e)$.

Soit A tel que $A = \cup\{A(e) : e \in G_R\}$ et $f : A \rightarrow \partial D$ défini par $f|_{A(e)}(x) = e^{-1}x$, tout point $x \in A$ a un développement fini ou infini $e_0e_1\dots$, $e_i \in G_R$ définie par $f^n(x) \in A(e_n)$, $n \geq 0$, où la suite se termine à e_n si et seulement si $f^n(x) \in A$ mais $f^{n+1}(x) \notin A$.

Notons que $f(A(e)) \cap A(e^{-1}) = \emptyset$ pour $e \in G_R$ de sorte que l'expansion frontière est nécessairement réduite.

Inversement toute suite réduite $e_0e_1e_2\dots$ apparaît comme l'orbite d'un point dans $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-1}(A(e_n))$ cette intersection devient non vide car $f(A(e)) \supset A(\acute{e})$ chaque fois que $\acute{e} \neq e^{-1}$.

Proposition 2.1 : f^P est le développement pour chaque $P \in N$.

On suppose pour cette démonstration que le développement frontière est un unique point dans Λ .

2.2.2 Suite de découpage (ordre de découpage)

Une fois projetés sur le pantalon M , les côtés $C(a), C(a^{-1})$ et $C(b), C(b^{-1})$ de R sont identifiés par les isométries a, b respectivement et deviennent les lignes p_a, p_b (fig "2") ce sont les lignes perpendiculaires joignant une frontière de la courbe aux deux autres.

N'importe quelle géodésique γ sur M coupe ces deux lignes plusieurs fois.

La suite de découpage de γ est la suite $\dots e_0e_1e_2\dots$ avec $e_i \in G_R$, des étiquetées des lignes p_e dans l'ordre où ils apparaissent.

Par convention on prend l'étiquette se trouvant sur le second côté (externe) de p_e car on se déplace le long de γ .

La suite de découpage peut aussi être définie relativement à la géodésique soulevée $\tilde{\gamma}$: si le i^{eme} croisement le long de γ et de la région $e_0e_1\dots e_{i-1}R$ vers

$e_0e_1\dots e_iR$ alors le i^{eme} terme de la suite de découpage est e_i .

Les choses sont faites de sorte que si $\tilde{\gamma}$ se promène entre les copies R_1 et R_2 de R avec la suite de découpage $e_0e_1\dots e_i$, alors $R_2 = e_0e_1\dots R_1$.

Une autre manière de penser est de transporter l'étiquette $C(e)$ du côté de R vers une autre image de R sous G utilisant l'action de G .

La suite de découpage de $\tilde{\gamma}$ est alors la suite d'étiquette $C(e)$ coupé par $\tilde{\gamma}$.

La suite de découpage de γ (ou $\tilde{\gamma}$) est infinie si et seulement si γ ne rencontre jamais ∂M .

Notez aussi que la suite de découpage est automatiquement réduite car si e est suivi immédiatement par e^{-1} cela voudrait dire que γ coupe p_i deux fois successivement venant de directions opposées ce qui est impossible puisque γ et p_i sont des géodésiques.

Le résultat suivant relie la suite de découpage à l'expansion frontière :

Lemme 2.1 : Soit β un arc de géodésique reliant $p \in R$ à $\xi \in A$ alors l'expansion frontière de ξ est la suite de découpage de β .

On peut maintenant prouver l'assertion ci-dessus au sujet de l'ensemble limite, et de voir comment il peut être représenté comme un sous shift de type fini.

Lemme 2.2 : L'ensemble des points avec l'expansion frontière infinie, $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(A)$, est égal à l'ensemble limite Λ de G .

Preuve : Ce Λ est inclus dans $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(A)$ d'après la G invariance de Γ .

Utilisant le lemme précédent ; la suite de découpage de la géodésique β joignant O à un certain $\xi \in \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(A)$ est infinie ce qui signifie que la projection de β sur la surface M se trouve toujours sur la partie compacte de M , et donc ce β se trouve obligatoirement à l'intérieur (à une distance bornée) de l'orbite GO .

Il s'en suit que le point extrémité de β est dans Λ .

Corollaire : il y a une bijection p^+ entre Σ^+ et Λ où Σ^+ est l'espace des suites infinies réduites de G_R .

Preuve : L'application p^+ associe à $e_0e_1e_2\dots \in \Sigma^+$ le point $\bigcap_{n=0}^{\infty} (e_0e_1\dots e_n)^{-1}A(e_{n+1})$.

Il découle du lemme 2.2 que p^+ applique sur Λ , tandis que p^+ est injective car comme remarqué ci-dessus, une certaine puissance de f est expansive.

2.2.3 Représentation des géodésiques

Rappelons qu'une géodésique dans D peut être spécifiée par ses deux points limites.

Rappelons aussi que l'ensemble *non-wandering* d'un flot est l'ensemble des points qui reviennent infiniment souvent à l'intérieur d'une distance bornée d'un certain point fixe donné.

lemme 2.3 : Une géodésique γ dans D a ses points d'extrémités dans l'ensemble limite Λ si et seulement si la projection de γ sur M_∞ se trouve entièrement dans M .

l'ensemble *non-wandering* du flot géodésique sur le paquet tangent unité de M correspond exactement au vecteur tangent unité dirigé le long de telle géodésique.

(Pour la preuve cf [Be. Ke. Se]).

Soit maintenant γ une géodésique orientée dans D dont le point extrémité positif ξ et le point extrémité négatif η se trouvent dans Λ avec respectivement les expansions frontières $e_0e_1\dots$ et $f_0f_1\dots$.

La *suite de concaténation* notée $\eta^{-1}*\xi$ est par définition $\dots f_2^{-1}f_1^{-1}f_0^{-1}e_0e_1e_2\dots$. Cette suite peut ou ne peut pas être réduite ; il est facile de voir qu'elle est réduite (réductible) si et seulement si $f_0 \neq e_0$ ce qui est le cas si et seulement si $\gamma \cap R \neq \emptyset$.

Utilisant le lemme 1, on peut voir que dans ce cas $\dots f_2^{-1}f_1^{-1}f_0^{-1}e_0e_1e_2\dots$ est précisément la suite de découpage de γ , numérotée de sorte que e_0 est l'étiqueté (extérieur) du côté par lequel γ quitte R .

Ainsi on a prouvé :

Théorème 2.1 : Il y a bijection entre Σ ; l'ensemble de toutes les suites réduites doublement infinies dans G_R , et l'ensemble de toutes les géodésiques orientées dans D qui intersectent R , et tous les deux ont leurs points extrémités dans Λ .

Ce théorème nous permet de représenter l'ensemble *non-wandering* du flot géodésique sur T_1M comme flot de suspension ([Be. Ke. Se.] chapitre 2) de telle manière que la transformation sur la base est le sous shift de type fini. Notre surface à trois trous et M_∞ est non compacte et a une superficie infinie. Ces géodésiques qui ne sont pas dans l'ensemble *non-wandering* peuvent s'échapper par la suite à l'infini en bas d'un des entonnoirs (cela correspond à une géodésique dont les points extrémités ne se trouvant pas dans Λ), la section transversale que nous prenons est l'ensemble de vecteurs unités tangents v avec point de base sur l'un des quatre bords (côté) de R et se dirigeant dans R , ceux qui se trouvent sur la géodésique dont les deux points extrémités sont dans Λ .

Le temps de retour est la distance hyperbolique entre une intersection de la géodésique γ à travers v avec ∂R et le suivant.

Le codage donné par cette suite de découpage de γ n'est rien d'autre que la partition de Markov.

Car dans ce cas il y a bijection entre une section (coupe) transversale du flot géodésique sur l'ensemble *non-wandering* et l'espace des suites, on voit que la section transversale est totalement discontinue, en fait c'est un ensemble de Cantor.

Remarque : Le lecteur attentif aura remarqué que ce codage utilise les sous shift de types finis alors qu'on a remarqué auparavant que ces derniers étaient complètement différent des systèmes substitutifs (à cause de l'entropie) ; la raison est qu'on peut toujours passer par un isomorphisme de mots de la suite obtenue par le codage avec les sous shift de types finis à une suite substitutive. Le théorème de A. Siegel donne précisément la relation entre ces deux systèmes.

Une fois encore pour ne pas alourdir ce travail par trop de définition, on se contentera d'énoncer ce théorème :

(Théorème 2.4.2 p7 [Sie]) Tout système symbolique associé à une substitution primitive est conjugué en mesure par une application continue explicite à une transformation adique sur le support d'un système dynamique symbolique de type fini défini explicitement à partir de la substitution. La conjugaison est injective sauf sur l'orbite des points du système périodiques pour

la substitution, où les fibres sont finies.

La mesure ergodique sur le système substitutif est envoyée par la conjugaison sur une mesure équivalente à la mesure d'entropie maximale du système dynamique symbolique de type fini.

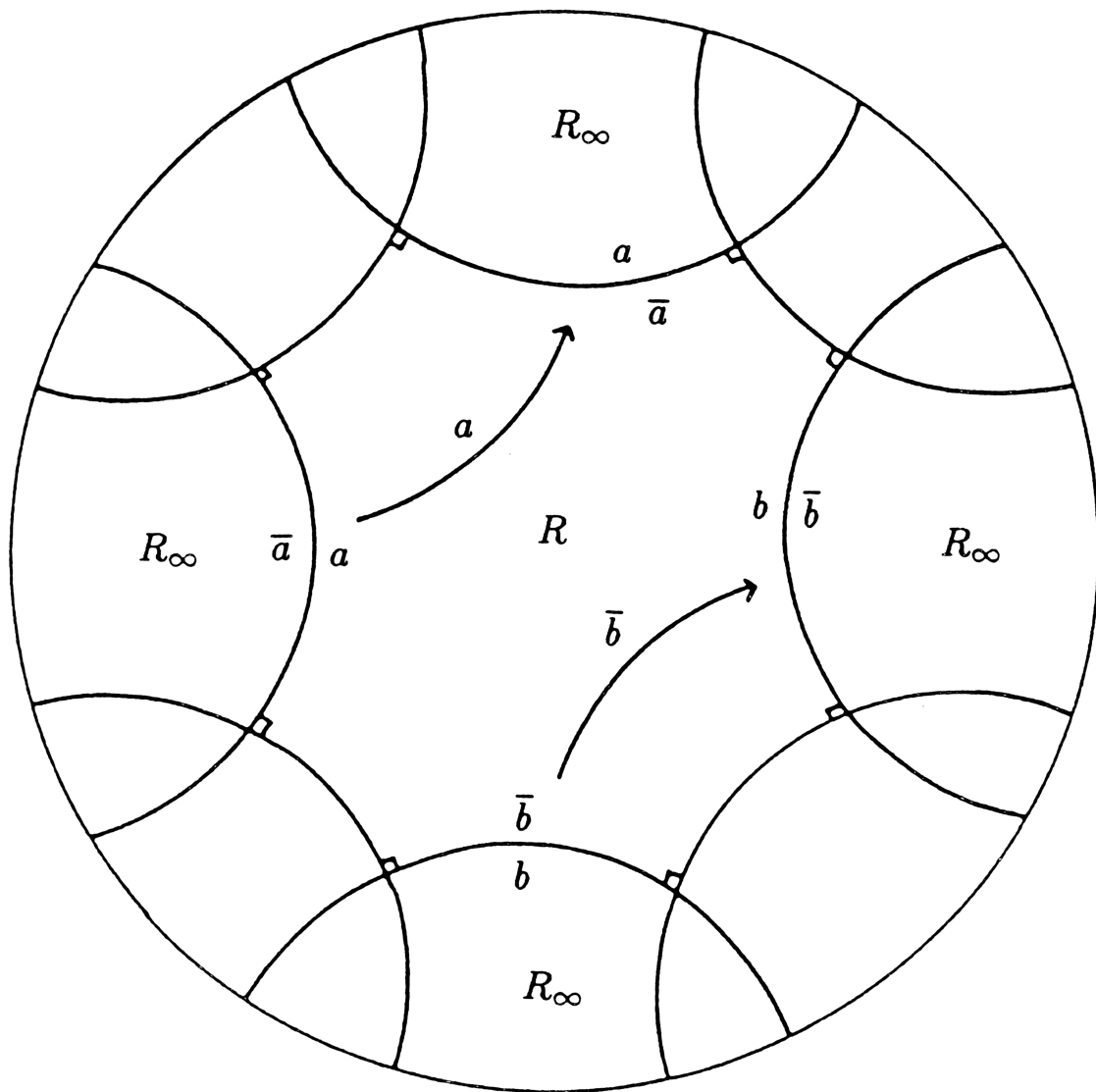


Fig «2»

CONCLUSION

Voici un survol sur les systèmes dynamiques substitutifs qui combine historique et acheminement des travaux sur différents domaines.

Système dynamique symbolique et théorie ergodique

Au début des années 70 sont parus de nombreux articles [CK, Ka, Kl, Mal, Ma2, Mi] étudiant les propriétés topologiques et ergodiques des systèmes dynamiques symboliques engendrés par des points fixes de substitutions. Mis à part [Ma2] tous traitaient le cas des substitutions de longueur constante. Dans son article [Ka] T. Kame montrait que les systèmes dynamiques symboliques engendrés par des substitutions primitives de longueur constante sont minimaux. B.G. Klein a prouvé [Kl] que ces systèmes sont uniquement ergodiques (cf chapitre 1).

En 1978 F.M.Dekking [Dek2] établit de façon indépendante ce résultat. F.M. Dekking et M.Keane [DK] montrèrent qu'il n'existait pas de système de substitution fortement mélangeant.

Plus tard B.Host [Hp] a montré que les fonctions propres des systèmes de substitutions primitives sont toutes continues, et a donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre complexe soit une valeur propre d'un système de substitution primitive donné (voir également [FMN, Li, Sol, so2, so3]).

Bon nombre de ces résultats se trouvent dans [Qu].

L'étude du type spectral des substitutions fait par M. Queffélec dans [Qu] combine la combinatoire des mots, la théorie ergodique et l'analyse spectrale. Notons que la notion combinatoire importante dans l'étude des valeurs propres des systèmes de substitutions est la reconnaissabilité des substitutions (voir [Mo1,Mo2]). Dans [Ho1] B. Host et F. parreau étudiant les facteurs (mesurables) entre systèmes de substitutions de longueur constante et montre qu'en général ils sont continus.

Théorie des automates, logique, arithmétique et Théorème de Cobham

Parallèlement à l'étude topologique et ergodique intensive des substitutions les articles [Co1,Co2] de A.Cobham ont ouvert un champ d'investigations nouveau pour les substitutions.

Le Théorème de Cobham [Co1] énonce que les seuls ensembles d'entiers re-

connaissables par automates indépendamment de la base p (où p est un entier) de numération dans laquelle on les écrits sont les ensembles d'entiers ultimement périodiques.

Dans [Co2] A. Cobham a caractérisé, pour tout entier positif n , les ensembles d'entiers écrits en base n reconnaissables par automate par les suites substitutives provenant de substitutions de longueur constante (appelées suites *n-substitutives*).

Durant les années 70 et jusqu'au milieu des années 80 très peu d'articles complétèrent les travaux de A. Cobham.

Dans [Ei] S. Eilenberg suggéra de trouver une autre preuve au Théorème de Cobham car bien qu'élémentaire la preuve initiale était difficile.

En 1982 G. Hansel donna une preuve plus simple.

En 1977 A. Semenov a généralisé le Théorème de Cobham (Théorème de Cobham-Semenov [Se]) à des sous-ensembles de N^n et en 1980 G. Christol, T. Kame, Mendes-France et G. Rauzy [CKMR] ont donné une caractérisation algébrique, utilisant des séries formelles, des suites q -substitutives où q est une puissance d'un nombre premier.

C. Michaux et R. Villemaire donnèrent en 1993 dans [MV] une nouvelle preuve du Théorème de Cobham et A. Muchnick [Mu] proposa une nouvelle preuve du Théorème de Cobham-Semenov. S. Fabre [Fa3] ainsi que V. Bruyère et G. Hansel [Bh1, Bh2] ont caractérisé les ensembles d'entiers écrits dans les systèmes de numération de Bertrand (cf [Ber2]) par des substitutions de longueur non-constante.

Un système de numération U est de Bertrand si :

$w \in L(U)$ si et seulement si $w0^n \in L(U)$ pour tout $n \in N$.

Théorie des langages formels : D0L système, décidabilité et complexité de langages

Dans la Théorie des langages formels des substitutions s'apparentent à la notion de D0L systèmes. Un D0L système est un triplet $D = (A, \sigma, u)$ où A est un alphabet, σ une application de A dans A^* (A^* est le monoïde libre engendré par A ; i.e. la réunion de A^+ et du mot vide ϵ muni de l'opération de concaténation), étendue par concaténation en une application de A^* dans A^* telle que $\sigma(\epsilon) = \epsilon$ et u un mot de A^* . Dans [RS] G. Rozenberg et A. Salomaa ont montré que l'équivalence de deux D0L système (A, σ, u) et (B, τ, v) est décidable ; i.e. il existe un algorithme qui en un temps fini permet de dire si

oui ou non l'ensemble $\{\sigma^n(u); n \in N\}$ est égal à l'ensemble $\{\tau^n(u); n \in N\}$. Le langage d'un D0L Système $D = (A, \sigma, u)$ est l'ensemble $L(D)$ des mots apparaissant dans des mots du type $\sigma^n(u)$. A. Ehrenfeucht, K. p. Lee et G. Rozenberg ont étudié [ELR] la fonction de complexité des langages de D0L systèmes ; remarquant qu'elle est nécessairement croissante. Leurs travaux et ceux de [Pan1, Pan2] montrent que la complexité d'un D0L système ne peut croître que comme l'une des applications $n \rightarrow n$, $n \rightarrow n \log n$, $n \rightarrow \log \log n$ ou $n \rightarrow n^2$ (sur ce sujet voir également [Ca, Mo3] ou [Al1] pour un exposé plus complet).

La complexité d'une suite a été initialement introduite par G. A. Hedlund et M. Morse dans [Hm1]. Ils ont fait les remarques désormais classiques sur la complexité : La complexité est croissante et s'il existe n tel que $P_x(n) = P_x(n+1)$ ou $P_x(n) \leq n$ alors la suite x est ultimement périodique. Ainsi la complexité la plus faible envisageable est $P_x(n) = n+1$ pour tout $n \in N$, comme exemple, le point fixe de la substitutions dite de Fibonacci. Nous avons vu que cette suite a une interprétation géométrique intéressante. Nous avons vu aussi que Les points fixes de substitutions primitives ont des complexités sous-affines (cf chapitre 1).

Si la suite des différences premières de la complexité d'une suite x , i.e $(P_x(n+1) - P_x(n))_{n \in N}$, est bornée alors P_x est sous-affine. J.Cassaigne a montré [Ca] la réciproque ; elle avait été conjecturée par S. Frenzi.

Théorie des nombres : Transcendance et séries formelles

Dans l'introduction de leur article [LP] J. H. Loxton et A van der poorten estiment raisonnable de penser que la distribution des chiffres de l'écriture d'un nombre irrationnel algébrique dans une base quelconque est aléatoire, pour une notion "d'aléatoire" convenable. Que peut-on dire des nombres dont l'écriture est très peu aléatoire ?

En particulier, que peut-on dire lorsque cette écriture est une suite substitutive ?

F.M. Dekking a montré [Dek1] que si $(x_n)_{n \in N}$ est la suite de Morse alors le réel $\sum_{i=0}^{+\infty} x_n 2^{-n}$ est transcendant. J.H. Loxton et A. J. Vanderpoten ensuite montré que si la suite des chiffres de l'écriture en base $q \in N^*$ d'un réel x est le point fixe d'une substitution de longueur constante alors ce nombre est transcendant. Prenons une suite $(x_n)_{n \in N} \in \{0, 1\}^N$ telle que les nombres $\sum_{i=0}^{+\infty} x_n 2^{-n}$ et $\sum_{i=0}^{+\infty} x_n 3^{-n}$ soient algébriques sur Q . Cela implique-t-il que

la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est utilement périodique ?

J.-p. Allouche dans [Al2] donne le résultat si l'on remplace les opérations usuelles par des opérations sans retenue. C'est une conséquence du Théorème de Cobham et de la caractérisation des suites p-substitutives donné dans [CKMR].

Considérons le corps F_p où p est un nombre premier, comme un alphabet. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de F_p . Dans [CKMR] il est montré que la suite x est p-substitutive, si et seulement si, la série formelle $\sum_{i=0}^{+\infty} x_n X^{-n}$ est algébrique sur le corps des fractions rationnelles sur $F_p(X)$.

Plus récemment S. Frenczi et C. Mauduit ont montré [FM] que si la suite des chiffres de l'écriture d'un réel positif x dans une base quelconque est le point fixe de certaines substitutions de longueur non constante alors x est transcendant.

Géométrie : Pavages, fractales

Les systèmes dynamiques engendrés par des substitutions sont des objets abstraits aussi est-il naturel de chercher à les représenter autrement, géométriquement par exemple.

Pour illustrer ce que l'on entend par représentation géométrique rappelons que le système dynamique engendré par la substitution de Fibonacci est isomorphe en mesure au système dynamique $[0, 1[, x \mapsto x + \alpha - 1 \bmod 1$ où α est le nombre d'or $(1 + \sqrt{5})/2$ [HM2] ; le système dynamique $[0, 1[, x \mapsto x + \alpha - 1 \bmod 1$ est la représentation géométrique du système engendré par la substitution de Fibonacci (cf chapitre 1).

Le résultat le plus remarquable obtenu jusqu'à présent est dû à G. Rauzy [Ra1]. Il montre que le système dynamique engendré par la substitution primitive définie par $0 \mapsto 01, 1 \mapsto 02$ et $2 \mapsto 0$ est isomorphe en mesure à un échange de trois morceaux dans R^2 . La méthode qu'il propose concerne essentiellement la théorie des nombres et s'étend à des substitutions quelconques moyennant certaines conditions générales (voir [Ra2]). Elle engendre des pavages quasi-périodiques du plan par des objets fractales (le fractale de Rauzy pour la substitution ci-dessous).

Une collection Γ de compacts de R^n est un pavage d'un ensemble X qui est l'adhérence de son intérieur si et seulement si :

- $X = \bigcup_{C \in \Gamma} C$,
- Tout élément de Γ est l'adhérence de son intérieur,
- Tout compact de X rencontre un nombre fini d'éléments de Γ ,

- Les éléments de Γ sont d'intérieurs disjoints.

En 1982 F. Dekking proposa dans [Dek3] une méthode liée aux substitutions permettant de construire des objets fractales. Il remarqua notamment que le fameux pavage de Penrose [Pe] pouvait être engendré par une substitution. Plus tard S. Ito [IK] a montré que cette méthode permettait de générer le fractal de Rauzy (voir également [Me]). La représentation géométrique d'un système de substitution (X, T) et l'étude des valeurs propres (i.e. du spectre) de (X, T) sont liées par le résultat général suivant un système ergodique dont le spectre est discret et isomorphe en mesure à un système (G, R) où G est un groupe compact muni de la mesure de Haar et R une rotation sur ce groupe (cf chapitre 1). Ce type d'approche des représentations géométriques mêle la plupart des domaines dont nous avons parlés jusqu'ici, pour s'en convaincre il suffit de lire [So1, So2, So3]. B. Solmyak a montré que pour une certaine classe de substitutions, sur un alphabet à n lettres, les systèmes dynamiques associés étaient isomorphes à des rotations sur le tore $\mathbb{T}^{n-1}$. un autre type de représentation géométrique est donné dans [HZ].

Groupes de dimension et diagramme de Bratteli

La notion de groupe de dimension a été introduite dans [EL] par G. A. Elliott alors qu'il cherchait à classer les C^* -algèbres AF (approximately finite-dimension). Initialement cette classe d'algèbre fut étudiée par O. Bratteli [Br]. Son étude se basait sur une notion de graphe infini appelé désormais diagramme de Bratteli.

Un diagramme de Bratteli (V, E) est constitué d'un ensemble de sommets V et un ensemble d'arrêtes E , ou E et V comme réunion dénombrable d'ensemble fini non vide :

$V = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup \dots$ et $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots$ vérifiant certaines propriétés.

Le groupe de dimension $k_0(V, E)$ est par définition la limite inductive du système ordonné de groupes associé au diagramme de Bratteli (V, E) :

$\mathbb{Z}^{card(V_0)} \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{Z}^{card(V_1)} \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{Z}^{card(V_2)} \xrightarrow{\varphi_3} \dots$ où les φ_i sont des homomorphismes donnés par la matrice d'incidence.

Au début des années 80 A. M. Vershik eut l'idée de munir l'ensemble des chemins infinis d'un diagramme de Bratteli d'un ordre partiel, puis de définir, en utilisant cet ordre partiel, une transformation (transformation adique) sur cet ensemble. Il définit ainsi un nouveau type de système dynamique : les

systèmes adiques (voir[Ve1]). Tout système dynamique (X, S, μ) , où μ est une mesure de Lebesgue invariante par S , est isomorphe en mesure à un système adique. L'idée sous-jacente est l'approximation des systèmes ergodiques. A. N. Livishits a remarqué [Li] qu'un système adique est stationnaire si et seulement s'il est isomorphe en mesure à un système de substitution primitive. En 1992 R. H. Hermman, I. Pam et C. F Skau [HPS] ont obtenu une version topologique du résultat de A. M. Vershik sur les systèmes adiques (qu'ils ont renommés systèmes de Bratteli-Vershik) : Tout système dynamique de Cantor minimal est topologiquement isomorphe à un système adique. Dans [HPS] est également montré que le groupe de dimension est un invariant d'isomorphisme. A. Forrest a ensuite considéré les substitutions dans ce cadre et a montré [Fo] que tout système de substitution primitive est (topologiquement) isomorphe à un système de Bratteli-Vershik stationnaire. Dans le cas métrique le représentant adique d'un système de substitution primitive est décrit par la matrice de la substitution . Dans [Ho2] B. Host montre que la notion de substitution peut se manipuler sans avoir recours à la théorie des C^* -algèbres et que dans le cas des substitutions le calcul du groupe de dimension est aisé, ce qui est rarement le cas pour des systèmes de Cantor minimaux.

Physique théorique : Quasi cristaux

En 1974 R. Penrose [Pe] découvrit l'existence d'un pavage quasi-périodique du plan tard appelé pavage de Penrose. Puis en 1984 les auteurs de [SBGC] montrèrent expérimentalement que de tels pavages existaient dans la nature, ils prirent le nom de quasi cristaux. Rappelons que les cristaux ont une structure périodique. Certaines structures unidimensionnelles des quasi cristaux se modélisent par des points fixes de substitutions (voir[BT]).

Références

[Ar] Pierre ARNOUX. Habilitation à diriger des recherches université d'Aix-Marseille II (novembre 1991).

Représentation géométrique des systèmes dynamiques symboliques.

[Ba, Br, Ca] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey. On Devaney's definition of chaos. Amer. Math. Monthly, 99:332-334, 1992.

[Be. Fe. Ma] V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel. Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics. P.Fogg.

[Be. Ke. Se] Ergodic theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces. Edited by Tim BEDFORD, Michael KEANE, Caroline SERIES. Oxford university press 1991.

[De] M. Denker, C. Grillenberger and K. Sigmund, Ergodic Theory on Compact Spaces, Lecture Notes in Mathematics, vol. 527 (1976).

[Du] Fabien DURAND. Thèse de doctorat université de la Méditerranée (novembre 1996).

Contributions à l'étude des suites et systèmes dynamiques substitutifs.

[Du1] F. Durand, A characterization of substitutive sequences using return words, to appear in Discrete Mathematics.

[Du2] F. Durand, A generalization of Cobham's theorem, accepted by Mathematical Systems Theory.

[DT] J.-M. Dumont et A. Thomas, Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions, Theo. Comp. Sci. 65 (1989), 153-169.

[ELR] A. Ehrenfeucht, K. P. Lee and G. Rozenberg, Subword complexities of various classes of deterministic developmental languages without interaction, Theo. Comp. Sci. 1 (1975), 59-75.

[Ei] S. Eilenberg, Automata, Languages and Machines, Academic Press vol. A.

[El] G. A. Elliott, On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite dimensional algebras, J. Algebra 38 (1976), 29-44.

[Fa1] S. Fabre Substitutions et indépendance des systèmes de numération, Thèse, Université d'Aix-Marseille II (1992).

[Fa2] S. Fabre, Une généralisation du théorème de Cobham, Acta Arithmetica LXVII.3 (1994) 197-208.

- [Fa3] S. Fabre, Substitutions et systèmes de numération, *Theo. Comp. Sc.* 137 (1995), 219-236.
- [Fag] I. Fagnot, Cobham's theorem and automaticity in non-standard bases, preprint.
- [Fe1] S. Ferenczi, Les Transformations de Chacon : combinatoire, structure géométrique, lien avec les systèmes de complexité $2n+1$, *Bull. Soc. Math. France* (1995), 271- 292.
- [Fe2] S. Ferenczi, Rank and symbolic complexity, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 16 (1996), 663-682.
- [FMN] S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Nogueira, Substitution dynamical systems: Algebraic characterization of eigenvalues, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 29 (1996), 519-533.
- [FM] S. Ferenczi and C. Mauduit, Transcendence of numbers with low complexity expansion, preprint.
- [Fo] A. H. Forrest, K-Groups associated with substitution minimal systems, To appear in *Israel Journal*.
- [Fr] C. Frougny, Systèmes de numération linéaires et automates finis, Thèse d'état, Université Paris VII, 1986.
- [Ga] F.R. Gantmacher, *Theory of matrices*, Chelsea Publishing Company vol. 2.
- [Go] W. H. Gottschalk, Substitution minimal sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* 109 (1963), 467-491.
- [GPS] T. Giordano, I. Putnam and C. F. Skau, Topological orbit equivalence and C^* -crossed products, *J. reine angew. Math.* 469 (1995), 51-111.
- [Ha] G. Hansel, A propos d'un théorème, théorème de Cobham, *Actes de la fête des mots*, D. Perrin Ed., GRECO de programmation, Rouen (1982).
- [HM1] G. A. Hedlund and M. Morse, Symbolic dynamics, *Am. J. Math.* 60 (1938), 815- 866.
- [HM2] G. A. Hedlund and M. Morse, Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories, *Am. J. Math.* 62 (1940), 1-42.
- [Ho1] B. Host, Homomorphismes entre systèmes dynamiques définis par substitutions, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 9 (1989), 469-477.
- [Ho2] B. Host, Dimension groups and substitution dynamical systems, preprint (1995).

[HP] B. Host et F. Parreau, Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 6 (1986), 529-540. B. Host, Homomorphismes entre systèmes dynamiques définis par substitutions, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 9 (1989), 469-477.

[HPS] R. H. Herman, I. Putnam and C. F. Skau, Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics, *Internat. J. Math.* 3 (1992), 827-864.

[Hu] P. Hubert, Dynamique symbolique des billards polygonaux rationnels, Thèse, Université d'Aix-Marseille II (1995).

[HZ] C. Holton and L. Q. Zamboni, Dynamics of substitutions and actions on real trees, preprint.

[IK] S. Ito and M. Kimura, On Rauzy fractal, *Japan J. Indust. Appl. Math.* 8 (1991), 461-486.

[Ka] T. Kamae, A topological invariant of substitution minimal sets, *J. Math. Soc. Japan*, vol. 24, No. 2 (1972), 285-306.

[Kl] B. G. Klein, Homomorphisms of symbolic dynamical systems, *Math. Syst. Th.* 6 (1972), 107-122

[Li] A. N. Livshits, A sufficient condition for weak mixing of substitutions and stationary adic transformations, *Mat. Zametki* 44 (1988), 785-793, translated in *Math. Notes* 44 (1988), 920-925.

[LM] D. Lind and B. Marcus, An introduction to symbolic dynamics and coding, Cambridge University Press (1995). 134

[Lo] N. Loraud, Numérations généralisées, langages et automates, Thèse, Université d'Aix-Marseille I (1995).

[LP] J. H. Loxton and A. J. Van der Poorten, Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations, *J. reine angew. Math.* 330 (1982), 159-172.

[LV] A. N. Livshits and A. M. Vershik, Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions, and related topics, *Adv. in Soviet Math.* 9 (1992), 185-204.

[Ma1] J. C. Martin, Substitution minimal flows, *Amer. J. Math.* 93 (1971), 503-526.

[Ma2] J. C. Martin, Substitution Minimal flows arising from substitutions of non-constant length, *Math. Syst. Th.* 7 (1973), 73-82.

[Me] A. Messaoudi, Autour du fractal de Rauzy, Thèse, Université d'Aix-Marseille II (1996).

- [Mi] P. Michel, Stricte ergodicité d'ensembles minimaux de substitutions, C. R. Acad. Sci. Paris 278 (1974), 811-813.
- [Mor] M. Morse, Recurrent geodesics on a surface of negative curvature, Trans. Amer. Math. Soc. 22 (1921), 84-100.
- [Mo1] B. Mossé, Puissances de mots et reconnaissabilité des points fixes d'une substitution, Theo. Comp. Sci. 99 (1992) 327-334.
- [Mo2] B. Mossé, Reconnaisabilité des substitutions et complexité des suites automatiques, Bull. Soc. Math. France 124 (1996) 101-118.
- [Mo3] B. Mossé, On the complexity function of fixed points of substitutions, preprint.
- [MS1] F. Mignosi et P. Sébold, Morphismes sturmiens et règles de Rauzy, J. Th. des Nombres de Bordeaux 5 (1993), 221-233.
- [MS2] F. Mignosi et P. Séébold, If a D0L language is k -power free then it is circular, ICALP 1993.
- [Mu] A. Muchnik, Definable criterion for definability in Presburger arithmetic and its application, preprint in Russian, Institute of New Technologies (1991).
- [MV] C. Michaux et R. Villemaire, Cobham's theorem seen through Buchi theorem, Pro. ICALP 1993, Lecture Notes in Comput. Sci. 700 (1993), 325-334.
- [Pa] W. Parry, On the fi-expansions of real numbers, Acta Math. Acad. Sci. Hungar 11 (1960), 401-416.
- [Pan1] J.-J. Pansiot, Bornes inférieures sur la complexité des facteurs des mots infinis engendrés par morphismes itérés, Lect. Notes in Comp. Sci. 166 (1984), 230-240.
- [Pan2] J.-J. Pansiot, Complexité des facteurs des mots infinis engendrés par morphismes itérés, Lect. Notes in Comp. Sci. 172 (1984), 380-389.
- [Pe] R. Penrose, The role of aesthetics in pure and applied mathematical research, Bull. Inst. Math. Appl. 10 (1974), 266-271.
- [Pr] E. Prouhet, Comptes rendus de l'Académie des Sciences Paris 33 (1851), 225-225.
- [Qu] M. Queffélec, Substitution Dynamical Systems Spectral Analysis, Lecture Notes in Math. vol.1294 (1987).

[Ra1] G. Rauzy, Nombres algébriques et substitutions, Bull. Soc. Math. France 110 (1982), 147-178.

[Ra2] G. Rauzy, Rotations sur les groupes, nombres algébriques et substitutions, Bull. Soc. Math. France 110 (1982), 147-178.

[RS] G. Rozenberg and A. Salomaa, The mathematical theory of L systems, Academic Press (1980).

[SBGC] D. Shechtman, D. Blech, I. Gratiás and J. V. Cahn, Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry, Phys. Rev. Lett. 53 (1984), 1951-1953.

[Sc] K. Schmidt, On periodic expansions of Pisot numbers and Salem numbers, Bull. London Math. Soc. 12 (1980), 269-278.

[Se] A. L. Semenov, The Presburger nature of predicates that are regular in two number systems, Siberian Math. J. 18 (1977), 289-299.

[Sei] On coding geodésics with continued fractions by Caroline SERIES. Séminaire sur la théorie ergodique. Marseille 1981.

[Sh1] J. Shallit, A generalization of automatic sequences, Lect. Notes Comput. Sci. 623 (1992), 89-100.

[Sh2] J. Shallit, Numeration systems, linear recurrences and regular sets, Theo. Comp. Sc. 61 (1988), 1-16.

[Si] Anne SIEGEL. Thèse de doctorat université de la méditerranée (décembre 2000). Représentations géométrique, combinatoire et arithmétique des systèmes substitutifs de type Pisot.

[So1] B. Solomyak, Substitutions, adic transformations and beta-expansions, Contemp. Math. 135 (1992), 361-372.

[So2] B. Solomyak, On simultaneous action of Markov shift and adic transformation, Adv. Sov. Mat. 9 (1992), 231-239.

[So3] B. Solomyak, On the spectral theory of adic transformations, Adv. Sov. Mat. 9 (1992), 217-230.

[Th] A. Thue, Über unendliche zeichenreihen, Norske vid. Selsk. Skr. I. Mat. Kl. Christiania, 1 (1906), 1-22. 136

[Ve1] A. M. Vershik, Uniform algebraic approximation of shift and multiplication operators, Dokl. Acad. Nauk SSSR 259 (1981), 526-529; English transl. in J. Soviet Math. 28 (1985), 97-100.

[Ve2] A. M. Vershik, A theorem on periodical markov approximation in ergodic theory, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov 115 (1982), 72-82; English transl. in J. Soviet Math. 28 (1985), 667-674.

[WW] Z.-X. Wen et Z.-Y. Wen, Marches sur les arbres homogènes suivant une suite substitutive, J. Th. des Nombres de Bordeaux 4 (1992), 155-186.

[Za] L. Q. Zamboni, communication privée. 137