

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie « Houari Boumediene »
FACULTE DE PHYSIQUE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

EN : PHYSIQUE

Spécialité : Physique Théorique des Basses
et Moyennes Energies

Par

REZZOUK Réda

Sujet

***Contribution à l'étude de l'effet d'appariement
isovectoriel sur les double-transitions bêta***

Soutenu le : 23/06/2012 , devant le jury composé de :

Mme A. ABABOU

Professeur, à l'U.S.T.H.B

Présidente

Melle N. H. ALLAL

Professeur, à l'U.S.T.H.B

Directrice de Mémoire

Mr M. FELLAH

Professeur, à l'U.S.T.H.B

Examineur

Mme K. KHALAL-KOUACHE

Professeur, à l'U.S.T.H.B

Examinatrice

Mr M. R. OUDIH

Professeur, à l'U.S.T.H.B

Examineur

Mme D. MOKHTARI-BELOUTI

M.C.B, à l'U.S.T.H.B

Invitée

Je dédie ce mémoire

À mes parents

À mon épouse

À mes deux fils Rachid et Rayane

À mes beaux-parents

À mes beaux- frères Rahim et Amine

À mes belles-sœurs Hadjer et Namia

À mes beaux- frères Ahmed et Hakim

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe « Théorie de la Structure Nucléaire » de la Faculté de Physique de l'U.S.T.H.B.

Je remercie Dieu de m'avoir donné la santé, la force, la volonté et les moyens d'entreprendre et de terminer ce travail.

*Je remercie tout d'abord le Professeur **FELLAH Mohamed** de m'avoir accueillie au sein du laboratoire, pour ses conseils, ses critiques constructives et ses encouragements constants. Sa rigueur, sa pédagogie et son sens du travail furent pour moi et pour l'ensemble du laboratoire un exemple et un honneur.*

*Toute ma gratitude va à Mademoiselle **ALLAL Nassima-Hosni**, Professeur à l'USTHB de m'avoir proposé ce sujet, pour ses conseils, ses critiques constructives et ses encouragements constants. Sa rigueur, sa pédagogie et son sens du travail furent pour moi un exemple.*

*Je tiens à remercier Madame **ABABOU Amina**, Professeur à l'USTHB, qui m'a fait l'honneur de présider le jury du mémoire de magister.*

*Mes remerciements vont aussi à Madame **KHALAL-KOUACHE Karima**, Professeur à l'U.S.T.H.B., qui a accepté d'examiner ce travail.*

*Je remercie Monsieur **UDIH Mohamed Réda**, Professeur à l'U.S.T.H.B, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de l'évaluer.*

*Je remercie vivement Monsieur **FELLAH Mohamed**, Professeur à l'USTHB, d'avoir accepté de juger ce travail, ainsi que pour son aide précieuse.*

*Je remercie particulièrement Madame **MOKHTARI-BELOUTI Djamila**, Maître de Conférences B à l'U.S.T.H.B pour l'intérêt qu'elle a manifestée pour ce travail, pour sa participation à mon jury de soutenance.*

*C'est un honneur pour moi d'être parmi une équipe dirigée par Monsieur **Fellah Mohamed**, Professeur à l'U.S.T.H.B. Cette équipe a permis de maintenir une excellente ambiance de travail.*

*Je remercie en particulier **KADI Hocine** pour son aide précieuse, pour ses encouragements et ses conseils constructifs.*

*Je remercie les membres du Laboratoire (**AMI Ismahane**, **HAMMACHE Fayza**, **MOKHTARI-BELOUTI Djamila**, **BENSMAIA Kamel Mustafa**, **BERBICHE Amine**, **HAMZA Yacine**, **HADDOUCHE Abd-Esalam**, **KEROUCHI Slimane**) pour le soutien et les encouragements qu'ils m'ont apportés.*

*Sans oublier la promotion de l'année théorique (**SIAH Hocine**, **FELTANE Fodil**, **HAMIL Bilal**) ainsi que tout mes amis et collègues de la Faculté de Physique.*

Table des matières

0.1	Introduction	3
1	Traitement de l'appariement entre particules identiques	6
1.1	Introduction	6
1.2	Hamiltonien-Diagonalisation	7
1.3	Représentation quasiparticule	9
2	Traitement de l'appariement isovectoriel	12
2.1	Introduction	12
2.2	Hamiltonien du système	13
2.3	Diagonalisation de l'hamiltonien du système	14
2.3.1	Théorème de Wick	14
2.3.2	Transformation de Bogoliubov -Valatin	18
2.4	Equations du gap	20
2.5	Etats BCS	21
2.5.1	Etat fondamental	21
2.5.2	Etat à une quasiparticule	22
2.5.3	Etat à deux quasiparticules	23
2.6	Limite lorsque $\Delta_{np} \rightarrow 0$	25
3	Calcul des observables physiques	28
3.1	Introduction	28
3.2	Calcul des valeurs moyennes de N et N^2	28
3.2.1	Valeur moyenne de N	28
3.2.2	Valeur moyenne de N^2	29
3.2.3	Paramètres du gap	29

3.3	Energie du système	30
3.4	Probabilité de la double désintégration bêta	30
3.4.1	Cas de l'appariement entre particules identiques	31
3.4.2	Cas de l'appariement isovectoriel	32
4	Résultats numériques et discussion	34
4.1	Résolution des équations du gap	34
4.1.1	Modèle à un niveau	34
4.1.2	Modèle de Richardson	36
4.2	Eléments de matrice de la double désintégration Bêta	39
4.2.1	Test numérique du code de calcul	39
4.2.2	Variation en fonction de G_{np}	41
4.2.3	Variation en fonction de G_{nn}	42
	 Annexe(A)	 66

0.1 Introduction

Le développement, au cours des deux dernières décennies, des faisceaux d'ions radioactifs, a rendu possible l'étude expérimentale de certains noyaux à la limite de la stabilité [1]-[3]. Ceci a entraîné de nombreuses études sur les noyaux exotiques (voir par exemple [4]-[7]). Ce nom peut aussi bien désigner les noyaux super-lourds que les noyaux riches en neutrons ou les noyaux riches en protons. Les chercheurs estiment de 4 000 à 6 000 le nombre de nucléides restant à découvrir d'où un regain d'intérêt pour ce type de noyaux, aussi bien sur le plan expérimental que sur le plan théorique.

Il se trouve que pendant la dernière décennie, la physique des noyaux riches en protons a pris un essor remarquable. Dans ce type de noyaux, auxquels nous nous intéressons dans le présent travail, l'inclusion de l'appariement neutron-proton (n-p), en plus de l'appariement entre particules identiques, est nécessaire [8]-[50]. En effet, ce dernier pourrait être dominant dans les noyaux tels que $N = Z$ où le recouvrement des fonctions d'onde neutrons et protons est très grand [9].

L'appariement entre nucléons de même espèce (neutron-neutron ou proton-proton) est bien connu depuis longtemps (voir par exemple [51], [52]). Par contre, l'appariement entre neutrons et protons recèle encore bien des mystères. Il existe sous deux formes : appariement isoscalaire ($T = 0$), qui représente un appariement (n-p) pur, et appariement isovectoriel ($T = 1$) qui englobe à la fois l'appariement (n-p) et l'appariement entre particules identiques. Dans le présent travail, nous nous restreindrons au cas de l'appariement isovectoriel [10], [11].

Par ailleurs, la double désintégration bêta fait actuellement l'objet de nombreux travaux (voir par exemple [54], [55]). En effet, ce phénomène concerne à la fois la physique des particules, la physique nucléaire et la physique atomique [56]. La double désintégration bêta peut se manifester suivant deux processus distincts : l'un avec émission de deux neutrinos et l'autre sans émission de neutrinos .

La double désintégration bêta avec émission de neutrinos envisagée dès 1935 par Goeppert-Mayer [57] a été observée pour la première fois en 1968 [58]. Cette décroissance entraîne un changement du numéro atomique du noyau de deux unités, avec l'émission simultanée de quatre particules, deux électrons et deux antineutrinos

électroniques emportant l'énergie Q libérée par la transition :

$$(A; Z) \longrightarrow (A; Z + 2) + 2\bar{e} + 2\tilde{\nu}$$

Ce type de décroissance s'applique à des noyaux instables riches en neutrons et ne peut se produire que si la décroissance simple vers le noyau $(A; Z + 1)$ n'a pas lieu. Tous les émetteurs sont ainsi nécessairement des noyaux pair-pairs car cette configuration déstabilise les noyaux impair-impairs intermédiaires. Le déplacement des niveaux en énergie peut être suffisant pour interdire la décroissance simple pour des raisons énergétiques. La décroissance peut également être défavorisée si la différence de moment angulaire entre l'état initial $(A; Z + 2)$ et final $(A; Z + 1)$ est élevé.

De nombreuses recherches tentent de mettre en évidence la double désintégration bêta sans émission de neutrinos [59]. Ce processus est prédit sous certaines conditions. En particulier, il nécessite que le neutrino soit une particule de Majorana et non une particule de Dirac ($\nu = \tilde{\nu}$). Une telle décroissance est strictement interdite par le modèle standard de la physique des particules car elle ne respecte pas la loi de conservation du nombre leptonique. La réaction est donnée dans ce cas par :

$$(A; Z) \longrightarrow (A; Z + 2) + 2\bar{e}$$

Elle permettrait cependant d'accéder à la masse du neutrino, trop faible pour être mesurée directement avec les techniques expérimentales actuelles mais non nulle comme le démontre le phénomène d'oscillation des neutrinos. En effet, le nouvel aspect oscillatoire des neutrinos a suscité un intérêt sans précédent laissant place à de nouvelles perspectives dans la compréhension de la structure nucléaire [60], [61].

Le but du présent travail est de contribuer à l'étude de l'effet de l'appariement neutron-proton de type isovectoriel sur les probabilités de double transition bêta. Nous utiliserons pour cela l'approximation BCS ainsi qu'une définition simple des éléments de matrice de cette transition proposée par Zamick et Auerbach [62]. Le présent mémoire est organisé de la manière suivante : dans le premier chapitre, et dans un but de cohérence, un rappel du traitement de l'appariement entre particules identiques dans le cadre de la théorie BCS usuelle est effectué.

Le second chapitre est consacré au rappel du traitement de l'appariement (n-p) de type isovectoriel dans le cadre de la théorie BCS généralisée. Les expressions des éléments de matrice de la double désintégration bêta sont établies dans le chapitre 3. Les résultats numériques sont présentés et discutés dans le dernier chapitre. Les principaux résultats sont résumés dans la conclusion générale.

Chapitre 1

Traitement de l'appariement entre particules identiques

1.1 Introduction

La théorie BCS a été introduite par Bardeen, Cooper et Schrieffer en 1957 [63] pour une description microscopique de la supraconductivité des métaux.

L'attraction effective à longue distance entre deux électrons est causée par la vibration du réseau quantifié (phonons du réseau). Les électrons forment des paires corrélées avec un spin total nul. Ces paires de bosons se condensent à l'état fondamental. Il existe des preuves expérimentales de la présence d'un condensat collectif similaire dans les noyaux atomiques [51], [64], [65]. Cette attraction à courte portée a été caractérisée par la force d'appariement G . Ces corrélations d'appariement sont importantes pour décrire les états proches du niveau de Fermi.

Dans ce contexte, le spin des nucléons joue un rôle particulier puisque l'observation laisse penser qu'ils s'associent entre partenaires de spin opposé. C'est pourquoi ayant reconnu le phénomène d'appariement dans les noyaux, Bohr, Mottelson et Pines [66] et Belyaev [67] en 1958-59 ont proposé d'appliquer la théorie BCS aux noyaux. La théorie est devenue une partie intégrante de la description de la structure nucléaire.

Dans ce présent chapitre, nous rappelons brièvement le traitement de l'appariement entre particules identiques au moyen de la théorie BCS.

1.2 Hamiltonien-Diagonalisation

Dans le formalisme de la seconde quantification, un système de particules appariées (neutrons ou protons) est décrit par l'hamiltonien [68] :

$$H = \sum_{\nu>0} \varepsilon_{\nu} \left(a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + a_{\bar{\nu}}^{\dagger} a_{\bar{\nu}} \right) - G \sum_{\nu\mu>0} a_{\nu}^{\dagger} a_{\bar{\nu}}^{\dagger} a_{\bar{\mu}} a_{\mu}, \quad (1.1)$$

où $a_{\nu}^{\dagger}$ et $a_{\bar{\nu}}^{\dagger}$ sont respectivement les opérateurs de création d'une particule dans l'état $|\nu\rangle$ et $|\bar{\nu}\rangle$ (renversé par rapport au sens du temps de $|\nu\rangle$), a_{ν} et $a_{\bar{\nu}}$ les opérateurs de destruction correspondants.

ε_{ν} est l'énergie de la particule dans l'état $|\nu\rangle$ et G est l'intensité de la force d'appariement .

L'état fondamental du noyau construit avec ces paires s'écrit :

$$|\Psi\rangle = \prod_{\nu>0} \left(u_{\nu} + v_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\bar{\nu}}^{\dagger} \right) |0\rangle, \quad (1.2)$$

où les probabilités que le niveau d'énergie ε_{ν} soit occupé ou vide sont notées respectivement (v_{ν}^2) et (u_{ν}^2) .

Les paramètres variationnels u_{ν} et v_{ν} sont déterminés en minimisant la valeur moyenne de l'hamiltonien auxiliaire $H' = H - \lambda N$ donnée par :

$$E' = 2 \sum_{\nu>0} \left(\varepsilon_{\nu} - \lambda - G v_{\nu}^2 \right) v_{\nu}^2 - G \sum_{\nu\mu>0} u_{\nu} v_{\nu} u_{\mu} v_{\mu}, \quad (1.3)$$

où λ est le paramètre de Lagrange satisfaisant la conservation en moyenne du nombre de particules étant donné que la fonction d'onde considérée n'est pas fonction propre de l'opérateur nombre de particules N . Le principe variationnel prend donc la forme :

$$\frac{\partial E'}{\partial u_{\nu}} = \frac{\partial E'}{\partial v_{\nu}} = 0. \quad (1.4)$$

En tenant compte de la condition de normalisation des états BCS :

$$u_{\nu}^2 + v_{\nu}^2 = 1 \quad (1.5)$$

La relation (1.4) conduit aux équations :

$$2 (\varepsilon_\nu - \lambda - G v_\nu^2) u_\nu v_\nu - \Delta (u_\nu^2 - v_\nu^2) = 0, \quad \forall \nu \quad (1.6)$$

où Δ est la demi-largeur du gap définie par :

$$\Delta = G \sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu. \quad (1.7)$$

La résolution du système formé par les équations (1.5) et (1.6) conduit à :

$$\left. \begin{matrix} u_\nu^2 \\ v_\nu^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{\varepsilon_\nu - \lambda - G v_\nu^2}{\sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda - G v_\nu^2)^2 + \Delta^2}} \right], \quad (1.8)$$

De plus, la condition de conservation du nombre de particules s'écrit :

$$n_0 = 2 \sum_{\nu>0} v_\nu^2 \quad (1.9)$$

n_0 étant le nombre de particules du système.

L'énergie du système s'écrit alors :

où :

$$E_{BCS} = 2 \sum_{\nu>0} (\varepsilon_\nu - G v_\nu^2) v_\nu^2 - \Delta \sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu. \quad (1.10)$$

En combinant la définition (1.7) avec (1.8), on obtient l'équation :

$$\frac{2}{G} = \sum_{\nu>0} \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda - G v_\nu^2)^2 + \Delta^2}}, \quad (1.11)$$

Lors des calculs numériques, il apparaît une valeur critique G_c en dessous de laquelle l'appariement ne peut exister ($\Delta = 0$). Dans ce cas, l'expression de l'énergie devient :

$$E = 2 \sum_{\nu: \text{occupé}} (\varepsilon_\nu - G). \quad (1.12)$$

où la notation $\sum_{\nu: \text{occupé}}$ signifie la sommation sur les niveaux occupés.

1.3 Représentation quasiparticule

La transformation de Bogoliubov et Valatin [51] introduit de nouveaux opérateurs α_ν et $\alpha_{\bar{\nu}}$ appelés opérateurs de quasiparticules permettant le passage de la représentation particule à celle de quasiparticules. Elle est définie par :

$$\begin{aligned}\alpha_{\bar{\nu}}^\dagger &= u_\nu a_{\bar{\nu}}^\dagger + v_\nu a_\nu, \\ \alpha_\nu &= -v_\nu a_{\bar{\nu}}^\dagger + u_\nu a_\nu.\end{aligned}\tag{1.13}$$

La quasiparticule créée par $\alpha_\nu^\dagger$ est une vraie particule avec une amplitude de probabilité u_ν et un vrai trou avec une amplitude de probabilité v_ν .

L'état défini par la propriété $\alpha_\nu |\Psi\rangle = 0$, représente l'état BCS, qui n'est autre que l'état (1.2)

Par cette transformation de Bogoliubov-Valatin, on peut donc définir une nouvelle représentation dans laquelle l'hamiltonien s'exprime en fonction des nouveaux opérateurs $\alpha^\dagger, \alpha$. A l'aide du théorème de Wick, et compte tenu de (1.8) l'hamiltonien auxiliaire s'écrit alors :

$$H' = E_0 + H_{11} + H_2 + H_{resid}\tag{1.14}$$

avec

$$E_0 = 2 \sum_{\nu>0} \left(\varepsilon_\nu - \lambda - \frac{G}{2} v_\nu^2 \right) v_\nu^2 - \frac{\Delta^2}{G}\tag{1.15}$$

$$H_{11} = \sum_{\nu>0} E_\nu \left(\alpha_\nu^\dagger \alpha_\nu + \alpha_{\bar{\nu}}^\dagger \alpha_{\bar{\nu}} \right)\tag{1.16}$$

où $E_\nu = \sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda - G v_\nu^2) + \Delta^2}$ est l'énergie d'une quasiparticule.

$$\tag{1.17}$$

avec $H_2 = \sum_{\nu>0} H_2^\nu \left(\alpha_\nu^\dagger \alpha_{\bar{\nu}}^\dagger + \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_\nu \right)$

$$\tag{1.18}$$

où $H_2^\nu = 2 (\varepsilon_\nu - \lambda - G v_\nu^2) u_\nu v_\nu - \Delta (u_\nu^2 - v_\nu^2)$

$$\tag{1.19}$$

et $H_{resid} = H_{22} + H_3 + H_4$

$$\tag{1.20}$$

où l'on a posé :

$$H_{22} = \sum_{\nu\mu>0} \left\{ H_{22}^{\nu\mu} \alpha_{\nu}^{\dagger} \alpha_{\bar{\nu}}^{\dagger} \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_{\mu} + \bar{H}_{22}^{\nu\mu} \left(\alpha_{\bar{\nu}}^{\dagger} \alpha_{\bar{\mu}}^{\dagger} \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_{\bar{\nu}} + \alpha_{\nu}^{\dagger} \alpha_{\mu}^{\dagger} \alpha_{\mu} \alpha_{\nu} + 2 \alpha_{\bar{\nu}}^{\dagger} \alpha_{\mu}^{\dagger} \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_{\bar{\nu}} \right) \right\} \quad (1.21)$$

$$H_{22}^{\nu\mu} = -G (u_{\nu}^2 v_{\mu}^2 + v_{\nu}^2 u_{\mu}^2) \quad (1.22)$$

$$\bar{H}_{22}^{\nu\mu} = -G u_{\nu} v_{\nu} u_{\mu} v_{\mu} \quad (1.23)$$

$$H_3 = \sum_{\nu\mu>0} H_3^{\nu\mu} \left\{ \alpha_{\nu}^{\dagger} \alpha_{\bar{\nu}}^{\dagger} \left(\alpha_{\bar{\mu}}^{\dagger} \alpha_{\bar{\mu}} + \alpha_{\mu}^{\dagger} \alpha_{\mu} \right) + \left(\alpha_{\mu}^{\dagger} \alpha_{\mu} + \alpha_{\bar{\mu}}^{\dagger} \alpha_{\bar{\mu}} \right) \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_{\nu} \right\} \quad (1.24)$$

$$H_3^{\nu\mu} = G (u_{\nu}^2 - v_{\nu}^2) u_{\mu} v_{\mu} \quad (1.25)$$

$$H_4 = \sum_{\nu\mu>} H_4^{\nu\mu} \left(\alpha_{\nu}^{\dagger} \alpha_{\bar{\nu}}^{\dagger} \alpha_{\mu}^{\dagger} \alpha_{\bar{\mu}}^{\dagger} + \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_{\mu} \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_{\nu} \right) \quad (1.26)$$

$$H_4^{\nu\mu} = \frac{G}{2} (u_{\nu}^2 v_{\mu}^2 + u_{\mu}^2 v_{\nu}^2) \quad (1.27)$$

La partie $H_{résid}$ peut être interprétée comme une interaction entre les quasi-particules. L'approximation BCS consiste à annuler H_2 d'abord puis à négliger $H_{résid}$. Ceci permet de traiter le problème comme un système de quasi-particules indépendantes. Le problème se trouve ainsi transformé d'un problème à N-corps en un problème à un corps. Notons que souvent le terme $(-Gv_{\nu}^2)$ est négligé au numérateur de l'expression (1.8). Dans ce cas, les probabilités d'occupation et d'inoccupation s'écrivent :

$$\left. \begin{matrix} u_{\nu}^2 \\ v_{\nu}^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{\varepsilon_{\nu} - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_{\nu} - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right] , \quad (1.28)$$

L'énergie d'une quasiparticule s'écrit alors :

$$E_{\nu} = \sqrt{(\varepsilon_{\nu} - \lambda)^2 + \Delta^2} \quad (1.29)$$

Quand à l'énergie BCS, elle devient :

$$E_{BCS} = 2 \sum_{\nu>0} \varepsilon_{\nu} v_{\nu}^2 - \frac{\Delta^2}{G} \quad (1.30)$$

et son homologue en l'absence d'appariement s'écrit

$$E = 2 \sum_{\nu \text{ occ}} \varepsilon_{\nu} \quad (1.31)$$

Quand à l'équation (1.11), elle s'écrit

$$\frac{2}{G} = \sum_{\nu > 0} \frac{1}{E_{\nu}} \quad (1.32)$$

Chapitre 2

Traitement de l'appariement isovectoriel

2.1 Introduction

Pour des noyaux où le nombre de neutrons est voisin de celui des protons les niveaux de Fermi sont énergétiquement voisins, l'interaction d'appariement $(n - p)$ est alors au moins aussi importante que celle entre particules identiques [8]. Il est à noter que l'appariement entre neutrons et protons [69]-[71] peut intervenir aussi bien dans le canal isoscalaire ($T = 0$) qui représente un appariement $(n - p)$ pur, que dans le canal isovectoriel ($T = 1$) qui englobe l'appariement $(n - n)$, $(p - p)$ et $(n - p)$. Une des méthodes les plus utilisées pour la description de l'appariement $(n - p)$ est l'approximation BCS [63].

Dans le présent travail, nous nous sommes restreints au cas de l'appariement isovectoriel. Dans ce présent chapitre le traitement de l'appariement du type isovectoriel dans le cadre de cette dernière est rappelé. L'hamiltonien du système est considéré dans sa forme la plus générale et est diagonalisé par le biais du théorème de Wick. Les équations du gap ainsi que les expressions de la fonction d'onde et de l'énergie de l'état fondamental dans le cas des systèmes pair-pairs sont établies.

2.2 Hamiltonien du système

Soit un noyau de masse $A = Z + N$, (constitué de N neutrons et Z protons).

L'hamiltonien régissant l'état du système s'écrit, dans le formalisme de la seconde quantification, lorsqu'on se restreint au cas isovectoriel [72]-[74] :

$$H = \sum_{\nu > 0, t} \varepsilon_{\nu t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu, \mu > 0} (a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'}) \quad (2.1)$$

où $a_{\nu t}^+$ et $a_{\nu t}$ représentent respectivement les opérateurs de création et d'annihilation de la particule dans l'état $|\nu t\rangle$, $a_{\tilde{\nu} t}^+$ et $a_{\tilde{\nu} t}$ sont les opérateurs de création et d'annihilation de l'état $|\tilde{\nu} t\rangle$ renversé par rapport au sens du temps de l'état $|\nu t\rangle$.

Ces derniers vérifient les relations d'anticommutation des fermions :

$$\{a_{\nu t}^+, a_{\mu t'}^+\} = \{a_{\nu t}, a_{\mu t'}\} = 0 \quad (2.2)$$

$$\{a_{\nu t}^+, a_{\mu t'}\} = \delta_{\nu\mu} \cdot \delta_{tt'} \quad (2.3)$$

et $G_{tt'}$ représente l'intensité de la force d'appariement.

La diagonalisation exacte de l'hamiltonien H n'étant pas simple à réaliser dans le cas le plus général, on introduit l'hamiltonien auxiliaire :

$$H' = H - \sum_{t=n,p} \lambda_t N_t \quad (2.4)$$

Dans ce dernier, l'on impose la conservation en moyenne du nombre de neutrons et protons au moyen des paramètres de Lagrange λ_t ($t = n, p$) [75].

Les N_t ($t = n, p$) sont les opérateurs nombre de particules définis par :

$$N_t = \sum_{\nu > 0} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) \quad (2.5)$$

Compte tenu de l'équation (2.4) l'hamiltonien auxiliaire H' s'écrit :

$$H' = \sum_{\nu>0,t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} (a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'}) \quad (2.6)$$

avec :

$$\tilde{\varepsilon}_{\nu t} = \varepsilon_{\nu t} - \lambda_t \quad , t = n, p \quad (2.7)$$

2.3 Diagonalisation de l'hamiltonien du système

2.3.1 Théorème de Wick

En appliquant le théorème de Wick à l'hamiltonien H' on aura :

$$\begin{aligned} H' &= \sum_{\nu>0,t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} [a_{\nu t}^{+\square} a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^{+\square} a_{\tilde{\nu} t} + :a_{\nu t}^+ a_{\nu t}: + :a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}:] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} \{ a_{\nu t}^{+\square} a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'}^\square a_{\mu t} - a_{\nu t}^{+\square} a_{\tilde{\mu} t'} a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\mu t} + a_{\nu t}^{+\square} a_{\mu t} a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\tilde{\mu} t'} \\ + a_{\nu t}^{+\square} a_{\tilde{\nu} t'}^+ &: a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} : + : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t'}^\square a_{\mu t} - a_{\nu t}^{+\square} a_{\tilde{\mu} t'} : a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\mu t} : \\ - &: a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\mu} t'} : a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\mu t} + a_{\nu t}^{+\square} a_{\mu t} : a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} : + : a_{\nu t}^+ a_{\mu t} : a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\tilde{\mu} t'} \\ &+ a_{\nu t}^{+\square} a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'}^\square a_{\mu t'} - a_{\nu t}^{+\square} a_{\tilde{\mu} t'} a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\mu t'} + a_{\nu t}^{+\square} a_{\mu t'} a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\tilde{\mu} t'} \\ + a_{\nu t}^{+\square} a_{\tilde{\nu} t'}^+ &: a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t'} : + : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t'}^\square a_{\mu t'} - a_{\nu t}^{+\square} a_{\tilde{\mu} t'} : a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\mu t'} : \\ - &: a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\mu} t'} : a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\mu t'} + a_{\nu t}^{+\square} a_{\mu t'} : a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} : + : a_{\nu t}^+ a_{\mu t'} : a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\tilde{\mu} t'} \\ &+ : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} : + : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} : \} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dans ce qui suit, les produits normaux : $a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t}$: et : $a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'}$: seront négligés afin de linéariser la quantité H' .

Sachant que les différentes contractions sont telles que [69] :

$$a_{\nu t}^{+\square} a_{\mu t'} = a_{\nu t}^{+\square} a_{\nu t'} \delta_{\nu\mu} \delta_{tt'} \quad (2.9)$$

$$a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\tilde{\mu} t} = a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\tilde{\nu} t} \delta_{\nu\mu} \delta_{tt'} \quad (2.10)$$

il vient :

$$\begin{aligned}
H' &= E_0 + \sum_{\nu>0,t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} (: a_{\nu t}^+ a_{\nu t} : + : a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t} :) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu>0} [a_{\nu t}^{+\square} a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\nu} t'} a_{\nu t} : + a_{\tilde{\nu} t'}^\square a_{\nu t} : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ \\
&\quad + a_{\nu t}^{+\square} a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\nu} t} a_{\nu t'} : + a_{\tilde{\nu} t}^\square a_{\nu t'} : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ :] \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu>0} [a_{\nu t}^{+\square} a_{\nu t} : a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\nu} t'} : + a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\tilde{\nu} t'} : a_{\nu t}^+ a_{\nu t} : \\
&\quad + a_{\nu t}^{+\square} a_{\nu t'} \delta_{tt'} : a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\nu} t} : + a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\tilde{\nu} t} \delta_{tt'} : a_{\nu t}^+ a_{\nu t'} :]
\end{aligned} \tag{2.11}$$

où E_0 contient les termes entièrement contractés :

$$\begin{aligned}
E_0 &= \sum_{\nu>0,t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} \{ a_{\nu t}^{+\square} a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^{+\square} a_{\tilde{\nu} t} \} - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} \{ a_{\nu t}^{+\square} a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\mu t}^\square a_{\mu t} \\
&\quad - a_{\nu t}^{+\square} a_{\tilde{\mu} t'} a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\mu t} + a_{\nu t}^{+\square} a_{\mu t} a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\tilde{\mu} t'} + a_{\nu t}^{+\square} a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\mu t}^\square a_{\mu t'} \\
&\quad - a_{\nu t}^{+\square} a_{\mu t} a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\mu t'} + a_{\nu t}^{+\square} a_{\mu t'} a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\mu t} \}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Posons :

$$\Delta_{tt'} = G_{tt'} \sum_{\nu>0} a_{\nu t}^{+\square} a_{\tilde{\nu} t'}^+ = G_{tt'} \sum_{\nu>0} a_{\tilde{\nu} t'}^\square a_{\nu t} \tag{2.13}$$

et

$$h_{\nu}^{tt} = a_{\nu t}^{+\square} a_{\nu t} \quad , \quad h_{\tilde{\nu}}^{t't'} = a_{\tilde{\nu} t'}^{+\square} a_{\tilde{\nu} t'} \tag{2.14}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
H' &= E_0 + \sum_{\nu>0,t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} (: a_{\nu t}^+ a_{\nu t} : + : a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t} :) \\
&\quad - \sum_{tt'} \Delta_{tt'} \sum_{\nu>0} [: a_{\tilde{\nu} t'} a_{\nu t} : + : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ :] \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{t'} G_{tt'} \sum_{\nu>0} \left[(1 + \delta_{tt'}) h_{\nu}^{t't'} (: a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\nu} t'} : + : a_{\nu t}^+ a_{\nu t} :) \right]
\end{aligned} \tag{2.15}$$

H' peut s'écrire sous la forme condensée :

$$H' = E_0 + \sum_{\nu>0,t} \xi_{\nu t} (: a_{\nu t}^+ a_{\nu t} : + : a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t} :) - \sum_{\nu>0,tt'} \Delta_{tt'} (: a_{\tilde{\nu} t'} a_{\nu t} : + : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ :) \tag{2.16}$$

où l'on a posé :

$$\xi_{\nu t} = \tilde{\varepsilon}_{\nu t} - \frac{1}{2} \sum_{t'} G_{tt'} (1 + \delta_{tt'}) h_{\nu}^{t't'} \quad (2.17)$$

Soit, en explicitant la nature des nucléons (t,t'=n,p) :

$$\begin{aligned} H' = E_0 + \sum_{\nu > 0} & \left\{ \xi_{\nu p} (: a_{\nu p}^+ a_{\nu p} : + : a_{\tilde{\nu} p}^+ a_{\tilde{\nu} p} :) + \xi_{\nu n} (: a_{\nu n}^+ a_{\nu n} : + : a_{\tilde{\nu} n}^+ a_{\tilde{\nu} n} :) \right. \\ & - \Delta_{nn} (: a_{\tilde{\nu} n} a_{\nu n} : + : a_{\nu n}^+ a_{\tilde{\nu} n}^+ :) - \Delta_{pp} (: a_{\tilde{\nu} p} a_{\nu p} : + : a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu} p}^+ :) \\ & \left. - \Delta_{np} (: a_{\tilde{\nu} p} a_{\nu n} : + : a_{\nu n}^+ a_{\tilde{\nu} p}^+ :) - \Delta_{np} (: a_{\tilde{\nu} n} a_{\nu p} : + : a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu} n}^+ :) \right\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

H' peut aussi s'écrire sous forme matricielle :

$$H' = E_0 + \sum_{\nu > 0} \left\{ (a_{\nu p}^+, a_{\nu n}^+, a_{\tilde{\nu} p}, a_{\tilde{\nu} n}) A_{\nu} \begin{pmatrix} a_{\nu p} \\ a_{\nu n} \\ a_{\tilde{\nu} p}^+ \\ a_{\tilde{\nu} n}^+ \end{pmatrix} + \xi_{\nu p} + \xi_{\nu n} \right\} \quad (2.19)$$

où A_{ν} est la matrice d'excitation définie par [76], [77] :

$$A_{\nu} = \begin{pmatrix} \xi_{\nu p} & 0 & -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} \\ 0 & \xi_{\nu n} & -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} \\ -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} & -\xi_{\nu p} & 0 \\ -\Delta_{pn} & -\Delta_{nn} & 0 & -\xi_{\nu n} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Les valeurs propres de la matrice A_{ν} sont solution de l'équation bicarrée :

$$\lambda^4 - \lambda^2 (E_{\nu n}^2 + E_{\nu p}^2 + 2\Delta_{np}^2) + E_{\nu n}^2 E_{\nu p}^2 + \Delta_{np}^4 + 2\Delta_{np}^2 (\xi_{\nu p} \xi_{\nu n} - \Delta_{nn} \Delta_{pp}) = 0 \quad (2.21)$$

avec :

$$E_{\nu t} = \sqrt{\xi_{\nu t}^2 + \Delta_{tt}^2} \quad t = n, p \quad (2.22)$$

soit :

$$E_{\nu\tau}^2 = \frac{1}{2} [(E_{\nu n}^2 + E_{\nu p}^2 + 2\Delta_{np}^2) + \text{avec } \tau = 1, 2 \quad (2.23)$$

$$(-1)^{\tau+1} \sqrt{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2)^2 + 4\Delta_{np}^2 [E_{\nu n}^2 + E_{\nu p}^2 - 2(\xi_{\nu p}\xi_{\nu n} - \Delta_{nn}\Delta_{pp})]}]$$

Les vecteurs propres correspondants sont :

$$X_{\nu 1} = \begin{pmatrix} u_{\nu 1p} \\ u_{\nu 1n} \\ v_{\nu 1p} \\ v_{\nu 1n} \end{pmatrix}, \quad X_{\nu 2} = \begin{pmatrix} u_{\nu 2p} \\ u_{\nu 2n} \\ v_{\nu 2p} \\ v_{\nu 2n} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

dont les composantes sont définies pour le premier vecteur par [78] :

$$u_{\nu 1p} = \frac{T_{\nu 1}}{T_{\nu}}, \quad u_{\nu 1n} = -\frac{T_{\nu 2}}{T_{\nu}}, \quad v_{\nu 1p} = \frac{T_{\nu 3}}{T_{\nu}}, \quad v_{\nu 1n} = -\frac{T_{\nu 4}}{T_{\nu}} \quad (2.25)$$

où :

$$\begin{aligned} T_{\nu 1} &= (\xi_{\nu p} + E_{\nu 1}) (\xi_{\nu n}^2 - E_{\nu 1}^2) + \Delta_{np}^2 (\xi_{\nu n} + E_{\nu 1}) + \Delta_{nn}^2 (\xi_{\nu p} + E_{\nu 1}) . \\ T_{\nu 2} &= \Delta_{np} \cdot [\Delta_{pp} (\xi_{\nu n} + E_{\nu 1}) + \Delta_{nn} (\xi_{\nu p} + E_{\nu 1})] . \\ T_{\nu 3} &= -(\xi_{\nu n} - E_{\nu 1}) \cdot [\Delta_{pp} (\xi_{\nu n} + E_{\nu 1})] - \Delta_{nn} \cdot [\Delta_{pp} \Delta_{nn} - \Delta_{np}^2] . \\ T_{\nu 4} &= \Delta_{np} \cdot [(\xi_{\nu n} - E_{\nu 1}) \cdot (\xi_{\nu p} + E_{\nu 1}) - (\Delta_{nn} \Delta_{pp} - \Delta_{np}^2)] . \end{aligned} \quad (2.26)$$

et

$$T_{\nu} = \sqrt{T_{\nu 1}^2 + T_{\nu 2}^2 + T_{\nu 3}^2 + T_{\nu 4}^2} \quad (2.27)$$

Celles du second vecteur sont données par :

$$u_{\nu 2p} = \frac{T'_{\nu 1}}{T'_{\nu}}, \quad u_{\nu 2n} = -\frac{T'_{\nu 2}}{T'_{\nu}}, \quad v_{\nu 2p} = \frac{T'_{\nu 3}}{T'_{\nu}}, \quad v_{\nu 2n} = -\frac{T'_{\nu 4}}{T'_{\nu}} . \quad (2.28)$$

où :

$$T'_\nu = \sqrt{T'^2_{\nu 1} + T'^2_{\nu 2} + T'^2_{\nu 3} + T'^2_{\nu 4}} \quad (2.29)$$

et où les $T'_{\nu i}$ ($i = 1, \dots, 4$) sont obtenus en remplaçant $E_{\nu 1}$ par $E_{\nu 2}$ dans les expressions des $T_{\nu i}$ ($i = 1, \dots, 4$) .

De plus, l'orthonormalisation des vecteurs $X_{\nu 1}$ et $X_{\nu 2}$ impose :

$$u^2_{\nu 1p} + u^2_{\nu 1n} + v^2_{\nu 1p} + v^2_{\nu 1n} = u^2_{\nu 2p} + u^2_{\nu 2n} + v^2_{\nu 2p} + v^2_{\nu 2n} = 1 \quad (2.30)$$

et

$$u_{\nu 1p} \cdot u_{\nu 2p} + u_{\nu 1n} \cdot u_{\nu 2n} + v_{\nu 1p} \cdot v_{\nu 2p} + v_{\nu 1n} \cdot v_{\nu 2n} = 0 \quad (2.31)$$

2.3.2 Transformation de Bogoliubov -Valatin

On construit la matrice T de transformation qui diagonalise A_ν , et donc H' à partir des vecteurs propres de cette dernière. On a alors :

$$T = \begin{pmatrix} u_{\nu 1p} & u_{\nu 1n} & v_{\nu 1p} & v_{\nu 1n} \\ u_{\nu 2p} & u_{\nu 2n} & v_{\nu 2p} & v_{\nu 2n} \\ -v_{\nu 1p} & -v_{\nu 1n} & u_{\nu 1p} & u_{\nu 1n} \\ -v_{\nu 2p} & -v_{\nu 2n} & u_{\nu 2p} & u_{\nu 2n} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

En effet :

$$H' = E_0 + \sum_{\nu > 0} (a_{\nu p}^+, a_{\nu n}^+, a_{\tilde{\nu} p}, a_{\tilde{\nu} n}) T^{-1} D T \begin{pmatrix} a_{\nu p} \\ a_{\nu n} \\ a_{\tilde{\nu} p}^+ \\ a_{\tilde{\nu} n}^+ \end{pmatrix} + \sum_{\nu > 0} \xi_{\nu t} \quad (2.33)$$

où :

$$D = \begin{pmatrix} E_{\nu 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{\nu 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{\nu 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{\nu 2} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

En introduisant des nouveaux opérateurs $\alpha_{\tilde{\nu}\tau}^+, \alpha_{\nu\tau}$ de création et d'annihilation de quasiparticules, il vient :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1} \\ \alpha_{\nu 2} \\ \alpha_{\tilde{\nu} 1}^+ \\ \alpha_{\tilde{\nu} 2}^+ \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a_{\nu p} \\ a_{\nu n} \\ a_{\tilde{\nu} p}^+ \\ a_{\tilde{\nu} n}^+ \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Cette transformation est donc la transformation généralisée de Bogoluibov -Valatin.

On constate alors l'existence de deux types de quasiparticules, notées 1, 2.

Sous forme condensée, l'expression (2.35) s'écrit :

$$\alpha_{\nu\tau}^+ = \sum_{t=n,p} (u_{\nu\tau t} a_{\nu t}^+ + v_{\nu\tau t} a_{\tilde{\nu} t}) \quad , \quad \tau = 1, 2 \quad (2.36)$$

Le vide correspondant, appelé état BCS, noté $|\Psi\rangle$, est défini implicitement par :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{\nu\tau} |\Psi\rangle = 0 \\ \langle\Psi| \alpha_{\nu\tau}^+ = 0 \end{array} \right\} \quad \forall \nu, \tau \quad (2.37)$$

La transformation inverse s'écrit :

$$a_{\tilde{\nu} t} = \sum_{\tau} (u_{\nu\tau t} \alpha_{\tilde{\nu}\tau} + v_{\nu\tau t} \alpha_{\nu\tau}^+) \quad (2.38)$$

En utilisant ces relations, on aura finalement :

$$H' = E_0 + \sum_{\nu>0, \tau} E_{\nu\tau} (\alpha_{\nu\tau}^+ \alpha_{\nu\tau} + \alpha_{\tilde{\nu}\tau}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau}) \quad (2.39)$$

H' est donc l'hamiltonien des quasiparticules indépendantes et $E_{\nu\tau}$ n'est autre que

l'énergie d'une quasiparticule.

Notons ici que la méthode de diagonalisation utilisée dans le présent travail est nettement plus rapide que celle de [74] . Dans ces dernières, une rediagonalisation de l'hamiltonien était nécessaire.

En utilisant la transformation (2.36), h_ν^{tt} défini par (2.14), devient :

$$h_\nu^{tt} = \sum_{\tau} v_{\nu\tau t}^2 \quad (2.40)$$

Pour leur part, les $\xi_{\nu t}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \xi_{\nu p} &= \tilde{\varepsilon}_{\nu p} - G_{pp} \sum_{\tau} v_{\nu\tau p}^2 - \frac{1}{2} G_{np} \sum_{\tau} v_{\nu\tau n}^2 \\ \xi_{\nu n} &= \tilde{\varepsilon}_{\nu n} - G_{nn} \sum_{\tau} v_{\nu\tau n}^2 - \frac{1}{2} G_{np} \sum_{\tau} v_{\nu\tau p}^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

En introduisant la transformation de Bogoliubov Valatin, l'énergie du système E_{BCS} devient :

$$\begin{aligned} E_{BCS} &= E_0 = 2 \sum_{\nu>0,t} \left[\tilde{\varepsilon}_{\nu t} - \frac{1}{2} G_{tt} \left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau t}^2 \right) \right] \left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau t}^2 \right) \\ &\quad - G_{np} \sum_{\nu>0} \left[\left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau p}^2 \right) \left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau n}^2 \right) + \left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau p} v_{\nu\tau n} \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{\Delta_{pp}^2}{G_{pp}} - \frac{\Delta_{nn}^2}{G_{nn}} - \frac{\Delta_{np}^2}{G_{np}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.4 Equations du gap

Les paramètres du gap définis par les expressions (2.13) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Delta_{nn} &= -G_{nn} \sum_{\nu>0,\tau} u_{\nu\tau n} v_{\nu\tau n} \\ \Delta_{pp} &= -G_{pp} \sum_{\nu>0,\tau} u_{\nu\tau p} v_{\nu\tau p} \\ \Delta_{np} &= -G_{np} \sum_{\nu>0,\tau} (u_{\nu\tau n} v_{\nu\tau p} + u_{\nu\tau p} v_{\nu\tau n}) \end{aligned} \quad (2.43)$$

De même, les conditions de conservation du nombre de protons et de neutrons sont données par :

$$\begin{aligned}\langle \psi | N_p | \psi \rangle &= 2 \sum_{\nu > 0, \tau} v_{\nu \tau p}^2 \\ \langle \psi | N_n | \psi \rangle &= 2 \sum_{\nu > 0, \tau} v_{\nu \tau n}^2\end{aligned}\tag{2.44}$$

Le système d'équations (2.43) et (2.44) constitue les équations du gap.

2.5 Etats BCS

2.5.1 Etat fondamental

L'état BCS est défini en éliminant du vrai vide toutes les quasiparticules :

$$|\Psi\rangle = k \prod_{\nu > 0, \tau} \alpha_{\nu 1} \alpha_{\tilde{\nu} 1} \alpha_{\nu 2} \alpha_{\tilde{\nu} 2} |0\rangle\tag{2.45}$$

où k représente la constante de normalisation

Soit, à l'aide de la transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin :

$$|\Psi\rangle = \prod_{\nu > 0} |\Psi_\nu\rangle\tag{2.46}$$

où :

$$|\Psi_\nu\rangle = [B_1^\nu A_{\nu p}^+ A_{\nu n}^+ + B_p^\nu A_{\nu p}^+ + B_n^\nu A_{\nu n}^+ + B_4^\nu (a_{\nu n}^+ a_{\nu p}^+ + a_{\nu p}^+ a_{\nu n}^+) + B_5^\nu] |0\rangle\tag{2.47}$$

et où $A_{\nu t}^+ = a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\nu t}^+$ désigne l'opérateur de création d'une paire de particules.

Les coefficients $B_1^\nu, B_p^\nu, B_n^\nu, B_4^\nu, B_5^\nu$ sont donnés par :

$$B_i^\nu = b_i^\nu / k \quad , \quad i = 1, 2, p, n, 4, 5\tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
b_1^\nu &= (v_{\nu 1p} v_{\nu 2n} - v_{\nu 1n} v_{\nu 2p})^2 \\
b_p^\nu &= v_{\nu 1p}^2 (u_{\nu 2p} v_{\nu 2p} + u_{\nu 2n} v_{\nu 2n}) \\
&\quad + v_{\nu 2p}^2 (u_{\nu 1n} v_{\nu 1n} - u_{\nu 1p} v_{\nu 1p}) - 2u_{\nu 1n} v_{\nu 1p} v_{\nu 2p} v_{\nu 2n} \\
b_n^\nu &= v_{\nu 1n}^2 (u_{\nu 2p} v_{\nu 2p} + u_{\nu 2n} v_{\nu 2n}) \\
&\quad - v_{\nu 2n}^2 (u_{\nu 1n} v_{\nu 1n} - u_{\nu 1p} v_{\nu 1p}) - 2u_{\nu 1p} v_{\nu 1n} v_{\nu 2p} v_{\nu 2n} \\
b_4^\nu &= v_{\nu 1p} v_{\nu 1n} (u_{\nu 2p} v_{\nu 2p} + u_{\nu 2n} v_{\nu 2n}) \\
&\quad - v_{\nu 2n}^2 (u_{\nu 1n} v_{\nu 1p}) - v_{\nu 2p}^2 (u_{\nu 1p} v_{\nu 1n}) \\
b_5^\nu &= (u_{\nu 1n} v_{\nu 1n} + u_{\nu 1p} v_{\nu 1p}) (u_{\nu 2p} v_{\nu 2p} + u_{\nu 2n} v_{\nu 2n}) \\
&\quad - (u_{\nu 1n} v_{\nu 2n} + u_{\nu 1p} v_{\nu 2p})^2
\end{aligned} \tag{2.49}$$

où :

$$k = \left\{ (b_1^\nu)^2 + (b_p^\nu)^2 + (b_n^\nu)^2 + 2 (b_4^\nu)^2 + (b_5^\nu)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.50}$$

La normalisation de l'état $|\Psi\rangle$ impose :

$$(B_1^\nu)^2 + (B_p^\nu)^2 + (B_n^\nu)^2 + 2 (B_4^\nu)^2 + (B_5^\nu)^2 = 1 \tag{2.51}$$

On constate alors que le niveau ν peut comporter soit :

- deux paires homogènes neutron-neutron et proton-proton avec une probabilité B_1^ν .
- une paire homogène proton-proton avec une probabilité B_p^ν .
- une paire homogène neutron-neutron avec une probabilité B_n^ν .
- une paire mixte neutron-proton avec une probabilité B_4^ν .
- une paire mixte proton- neutron avec une probabilité B_4^ν .
- aucune particule avec une probabilité B_5^ν .

2.5.2 Etat à une quasiparticule

L'état à une quasiparticule est défini par :

$$\begin{aligned}
|\nu\tau\rangle &= \alpha_{\nu\tau}^+ |\Psi\rangle \\
&= (B_{3\nu\tau}^{p,n} A_{\nu p}^+ a_{\nu n}^+ + B_{3\nu\tau}^{n,p} A_{\nu n}^+ a_{\nu p}^+ + \gamma_{\nu\tau p} a_{\nu p}^+ + \gamma_{\nu\tau n} a_{\nu n}^+) \prod_{j \neq \nu} |\Psi_j\rangle \quad (2.52)
\end{aligned}$$

où les différents coefficients sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
B_{3\nu\tau}^{p,n} &= (-B_4^\nu u_{\nu\tau p} + B_p^\nu u_{\nu\tau n} + B_1^\nu v_{\nu\tau n}) \\
B_{3\nu\tau}^{n,p} &= (-B_4^\nu u_{\nu\tau n} + B_n^\nu u_{\nu\tau p} + B_1^\nu v_{\nu\tau n}) \quad \tau = 1, 2 \quad (2.53) \\
\gamma_{\nu\tau p} &= (B_5^\nu u_{\nu\tau p} + B_p^\nu v_{\nu\tau p} + B_4^\nu v_{\nu\tau n}) \\
\gamma_{\nu\tau n} &= (B_5^\nu u_{\nu\tau n} + B_n^\nu v_{\nu\tau n} + B_4^\nu v_{\nu\tau p})
\end{aligned}$$

C'est une superposition d'états ayant un nombre impair de particules. Le niveau ν , peut donc comporter soit :

- une paire homogène de proton et un neutron avec une probabilité $B_{3\nu\tau}^{p,n}$.
- une paire homogène de neutron et un proton avec une probabilité $B_{3\nu\tau}^{n,p}$.
- un proton avec une probabilité $\gamma_{\nu\tau p}$.
- un neutron avec une probabilité $\gamma_{\nu\tau n}$.

2.5.3 Etat à deux quasiparticules

L'état à deux quasiparticules est défini par :

$$|\nu\tau\tilde{\mu}\tau'\rangle = \alpha_{\nu\tau}^+ \alpha_{\tilde{\mu}\tau'}^+ |\Psi\rangle \quad (2.54)$$

Compte tenu de ce qui précède, on obtient :

$$\begin{aligned}
|\nu\tau\tilde{\mu}\tau'\rangle &= \left\{ (B_{3\nu\tau}^{p,n} A_{\nu p}^+ a_{\nu n}^+ + B_{3\nu\tau}^{n,p} A_{\nu n}^+ a_{\nu p}^+ + \gamma_{\nu\tau p} a_{\nu p}^+ + \gamma_{\nu\tau n} a_{\nu n}^+) \right. \\
&\quad \times \left. (B_{3\mu\tau'}^{p,n} A_{\mu p}^+ a_{\mu n}^+ + B_{3\mu\tau'}^{n,p} A_{\mu n}^+ a_{\mu p}^+ + \gamma_{\mu\tau' p} a_{\mu p}^+ + \gamma_{\mu\tau' n} a_{\mu n}^+) \right\} \prod_{j \neq \nu\mu} |\Psi_j\rangle \\
&\text{si } \nu \neq \mu
\end{aligned} \quad (2.55)$$

Lorsque $\nu = \mu$, il s'écrit :

$$\begin{aligned}
|\nu\tau\tilde{\nu}\tau'\rangle &= \left[C_{1\tau\tau'}^\nu A_{\nu p}^+ A_{\nu n}^+ + C_{p\tau\tau'}^\nu A_{\nu p}^+ + C_{n\tau\tau'}^\nu A_{\nu n}^+ \right. \\
&\quad \left. + C_{4\tau\tau'}^{\nu np} a_{\nu n}^+ a_{\nu p}^+ + C_{4\tau\tau'}^{\nu pn} a_{\nu p}^+ a_{\nu n}^+ + C_{5\tau\tau'}^\nu \right] \prod_{j \neq \nu} |\Psi_j\rangle
\end{aligned} \tag{2.56}$$

où les différents coefficients sont donnés par :

$$\begin{aligned}
C_{1\tau\tau'}^\nu &= (u_{\nu\tau p} B_{3\nu\tau'}^{np} + u_{\nu\tau n} B_{3\nu\tau'}^{pn}) / K_{\nu\tau\tau'} \\
C_{p\tau\tau'}^\nu &= (v_{\nu\tau n} B_{3\nu\tau'}^{pn} - u_{\nu\tau p} \gamma_{\nu\tau'p}) / K_{\nu\tau\tau'} \\
C_{n\tau\tau'}^\nu &= (v_{\nu\tau p} B_{3\nu\tau'}^{np} - u_{\nu\tau n} \gamma_{\nu\tau'n}) / K_{\nu\tau\tau'} \\
C_{4\tau\tau'}^{\nu np} &= -(v_{\nu\tau p} B_{3\nu\tau'}^{pn} + u_{\nu\tau p} \gamma_{\nu\tau'n}) / K_{\nu\tau\tau'} \\
C_{4\tau\tau'}^{\nu pn} &= -(v_{\nu\tau n} B_{3\nu\tau'}^{np} + u_{\nu\tau n} \gamma_{\nu\tau'p}) / K_{\nu\tau\tau'} \\
C_{5\tau\tau'}^\nu &= (u_{\nu\tau n} \gamma_{\nu\tau'n} + v_{\nu\tau p} \gamma_{\nu\tau'p}) / K_{\nu\tau\tau'}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

où :

$$K_{\nu\tau\tau'} = \sqrt{(C_{1\tau\tau'}^\nu)^2 + (C_{p\tau\tau'}^\nu)^2 + (C_{n\tau\tau'}^\nu)^2 + (C_{4\tau\tau'}^{\nu np})^2 + (C_{4\tau\tau'}^{\nu pn})^2 + (C_{5\tau\tau'}^\nu)^2} \tag{2.58}$$

C'est une superposition d'états ayant un nombre pair de particules. Pour le niveau ν , ils comprennent soit :

- deux paires homogènes neutron-neutron et proton-proton avec une probabilité $C_{1\tau\tau'}^\nu$.
- une paire homogène proton-proton avec une probabilité $C_{p\tau\tau'}^\nu$.
- une paire homogène neutron-neutron avec une probabilité $C_{n\tau\tau'}^\nu$.
- une paire mixte neutron-proton avec une probabilité $C_{4\tau\tau'}^{\nu np}$.
- une paire mixte proton- neutron avec une probabilité $C_{4\tau\tau'}^{\nu pn}$.
- aucune particule avec une probabilité $C_{5\tau\tau'}^\nu$.

2.6 Limite lorsque $\Delta_{np} \rightarrow 0$

En absence d'appariement neutron-proton c'est à dire lorsque $\Delta_{np} \rightarrow 0$ et $G_{np} = 0$, la matrice d'excitation A_ν définie par (2.20) devient :

$$A_\nu = \begin{pmatrix} \xi_{\nu p} & 0 & -\Delta_{pp} & 0 \\ 0 & \xi_{\nu n} & 0 & -\Delta_{nn} \\ -\Delta_{pp} & 0 & -\xi_{\nu p} & 0 \\ 0 & -\Delta_{nn} & 0 & -\xi_{\nu n} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

avec $\xi_{\nu t}$, $t=n,p$:

$$\begin{aligned} \xi_{\nu p} &= \tilde{\varepsilon}_{\nu p} - G_{pp}v_{\nu p}^2 \\ \xi_{\nu n} &= \tilde{\varepsilon}_{\nu n} - G_{nn}v_{\nu n}^2 \end{aligned} \quad (2.60)$$

Les valeurs propres de A_ν sont respectivement :

$$E_{\nu t} = \sqrt{\xi_{\nu t}^2 + \Delta_{tt}^2} \quad , \quad t = n, p \quad (2.61)$$

Ces dernières ne sont autres que les énergies des quasiparticules dans le cas de l'appariement entre particules identiques.

Les vecteurs propres s'écrivent quant à eux :

$$X_{\nu 1} = \begin{pmatrix} u_{\nu 1p} \\ u_{\nu 1n} \\ v_{\nu 1p} \\ v_{\nu 1n} \end{pmatrix} \quad , \quad X_{\nu 2} = \begin{pmatrix} u_{\nu 2p} \\ u_{\nu 2n} \\ v_{\nu 2p} \\ v_{\nu 2n} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

avec :

$$\begin{cases} u_{\nu 1p}^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\xi_{\nu p}}{E_{\nu p}} \right] = u_{\nu p}^2 \\ v_{\nu 1p}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\xi_{\nu p}}{E_{\nu p}} \right] = v_{\nu p}^2 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} u_{\nu 1n} = 0 \\ v_{\nu 1n} = 0 \end{cases} \quad (2.63)$$

et

$$\begin{cases} u_{\nu 2p} = 0 \\ v_{\nu 2p} = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} u_{\nu 2n}^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\xi_{\nu n}}{E_{\nu n}} \right\} = u_{\nu n}^2 \\ v_{\nu 2n}^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\xi_{\nu n}}{E_{\nu n}} \right\} = v_{\nu n}^2 \end{cases} \quad (2.64)$$

où $u_{\nu t}^2, v_{\nu t}^2$ ($t = n, p$) sont les probabilités d'occupation et d'inoccupation dans le cas de l'appariement entre particules identiques.

Les conditions de conservation du nombre de protons et de neutrons s'écrivent dans ce cas :

$$N_p = 2 \sum_{\nu>0} v_{\nu p}^2 \quad (2.65)$$

$$N_n = 2 \sum_{\nu>0} v_{\nu n}^2 \quad (2.66)$$

Ce qui signifie que les probabilités d'occupation et d'inoccupation ainsi que les énergies de quasiparticules et les conditions de conservation du nombre de protons et de neutrons se ramènent à celles de l'appariement entre particules identiques [67]-[52].

L'énergie du système s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} E_{BCS} = & 2 \sum_{\nu>0} \left(\varepsilon_{\nu n} - \frac{G_{nn}}{2} v_{\nu n}^2 \right) v_{\nu n}^2 - \frac{\Delta_{nn}^2}{G_{nn}} \\ & + 2 \sum_{\nu>0} \left(\varepsilon_{\nu p} - \frac{G_{pp}}{2} v_{\nu p}^2 \right) v_{\nu p}^2 - \frac{\Delta_{pp}^2}{G_{pp}} \end{aligned} \quad (2.67)$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$E_{BCS} = E_{BCSn} + E_{BCSp} \quad (2.68)$$

où :

$$E_{BCSn} = 2 \sum_{\nu>0} \left(\varepsilon_{\nu n} - \frac{G_{nn}}{2} v_{\nu n}^2 \right) v_{\nu n}^2 - \frac{\Delta_{nn}^2}{G_{nn}} \quad (2.69)$$

et

$$E_{BCSp} = 2 \sum_{\nu>0} \left(\varepsilon_{\nu p} - \frac{G_{pp}}{2} v_{\nu p}^2 \right) v_{\nu p}^2 - \frac{\Delta_{pp}^2}{G_{pp}} \quad (2.70)$$

Pour un $\Delta_{np} \rightarrow 0$ et $G_{np} \neq 0$ l'énergie du système s'écrit :

$$E_{BCS} = E_{BCSn} + E_{BCSp} - G_{np} \sum_{\nu>0} v_{\nu n}^2 v_{\nu p}^2 \quad (2.71)$$

D'autre part, les coefficients $B_1^\nu, B_p^\nu, B_n^\nu, B_4^\nu, B_5^\nu$ deviennent :

$$B_1^\nu = v_{\nu p} \cdot v_{\nu n}$$

$$B_p^\nu = v_{\nu p} \cdot u_{\nu n}$$

$$B_n^\nu = v_{\nu n} \cdot u_{\nu p}$$

$$B_4^\nu = 0$$

$$B_5^\nu = u_{\nu n} \cdot u_{\nu p}$$

La fonction d'onde $|\psi\rangle$ décrivant l'état du système n'est alors autre que celle du cas de l'appariement entre particules identiques :

$$\lim_{\Delta_{np} \rightarrow 0} |\psi\rangle = \prod_{j > 0} |\psi_{jn}\rangle \cdot |\psi_{jp}\rangle \quad (2.72)$$

Chapitre 3

Calcul des observables physiques

3.1 Introduction

Les équations du gap, de même que les expressions de la fonction d'onde, ont été établies au chapitre précédent. Dans le présent chapitre, nous nous proposons de déterminer les valeurs moyennes des différents observables physiques. Il s'agit en particulier des opérateurs nombre de particules et nombre de particules au carré et de l'hamiltonien du système.

Les expressions des éléments de matrice de l'opérateur double transitions bêta seront établies aussi bien dans le cas de l'appariement entre particules identiques que dans le cas de l'appariement isovectoriel.

3.2 Calcul des valeurs moyennes de N et N^2

3.2.1 Valeur moyenne de N

L'opérateur nombre total de particules est défini par :

$$N = \sum_{\nu > 0, t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\bar{\nu} t}^+ a_{\bar{\nu} t}) \quad (3.1)$$

Compte tenu de l'écriture de l'état fondamental en représentation particule (2.46), la valeur moyenne de N est donnée par :

$$\langle \Psi | N | \Psi \rangle = 2 \sum_{\nu > 0} \left[2 (B_1^\nu)^2 + (B_p^\nu)^2 + (B_n^\nu)^2 + 2(B_4^\nu)^2 + (B_5^\nu)^2 \right] \quad (3.2)$$

Par ailleurs, compte tenu de la définition (2.46) de l'état fondamental, l'action de l'opérateur nombre de particules N sur l'état $|\Psi\rangle$ s'écrit :

$$N |\Psi\rangle = 2\Omega |\Psi\rangle + 2 \sum_{\nu > 0} (B_1^\nu A_{\nu p}^+ A_{\nu n}^+ - B_5^\nu) \prod_{j \neq \nu} |\Psi_j\rangle \quad (3.3)$$

Ω étant la dégénérescence totale des niveaux

La valeur moyenne de N est alors donnée par :

$$\langle \Psi | N | \Psi \rangle = 2\Omega + 2 \sum_{\nu > 0} \left[(B_1^\nu)^2 - (B_5^\nu)^2 \right] \quad (3.4)$$

3.2.2 Valeur moyenne de N^2

Sachant que l'action de l'opérateur N^2 sur $|\Psi\rangle$ est donnée par :

$$N^2 |\Psi\rangle = 4\Omega^2 |\Psi\rangle + 4(2\Omega + 1) \sum_{\nu > 0} B_1^\nu A_{\nu p}^+ A_{\nu n}^+ \prod_{j \neq \nu} |\Psi_j\rangle - (2\Omega - 1) \sum_{\nu > 0} B_5^\nu \prod_{j \neq \nu} |\Psi_j\rangle \quad (3.5)$$

$$+ 4 \sum_{\substack{\nu\mu > 0 \\ \nu \neq \mu}} (B_1^\nu A_{\nu p}^+ A_{\nu n}^+ - B_5^\nu) (B_1^\mu A_{\mu p}^+ A_{\mu n}^+ - B_5^\mu) \prod_{j \neq (\nu, \mu)} |\Psi_j\rangle$$

il vient :

$$\begin{aligned} \langle \Psi | N^2 | \Psi \rangle &= 4\Omega^2 + 4 \sum_{\nu > 0} [(2\Omega + 1) (B_1^\nu)^2 - (2\Omega - 1) (B_5^\nu)^2] \\ &\quad + 4 \sum_{\substack{\nu\mu > 0 \\ \nu \neq \mu}} \left[(B_1^\nu)^2 - (B_5^\nu)^2 \right]^2 \left[(B_1^\mu)^2 - (B_5^\mu)^2 \right]^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2.3 Paramètres du gap

Les paramètres du gap peuvent également s'exprimer en fonction des coefficients B_i^ν ($i = 1, p, n, 4, 5$) en partant de leurs définitions données par 2.13 :

$$\begin{aligned}
\Delta_{nn} &= -G_{nn} \sum_{\nu>0} (B_p^\nu B_1^\nu + B_5^\nu B_n^\nu) \\
\Delta_{pp} &= -G_{pp} \sum_{\nu>0} (B_n^\nu B_1^\nu + B_5^\nu B_p^\nu) \\
\Delta_{np} &= -G_{np} \sum_{\nu>0} (B_4^\nu B_1^\nu - B_5^\nu B_4^\nu)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

3.3 Energie du système

L'énergie du système calculée en représentation quasiparticule (2.42) peut s'écrire en fonction des coefficients B_i^ν ($i = 1, p, n, 4, 5$).

Elle est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
E_{BCS} &= \langle \Psi | H | \Psi \rangle \\
&= 2 \sum_{\nu>0} \left\{ (\varepsilon_{\nu p} + \varepsilon_{\nu n}) ((B_1^\nu)^2 + (B_4^\nu)^2) + \varepsilon_{\nu p} (B_p^\nu)^2 + \varepsilon_{\nu n} (B_n^\nu)^2 \right\} \\
&\quad - G_{pp} \left\{ \sum_{\substack{\nu>0 \\ \nu=\mu}} [(B_1^\nu)^2 + (B_p^\nu)^2] + \sum_{\substack{\nu\mu>0 \\ \nu\neq\mu}} [(B_1^\nu \cdot B_n^\nu + B_p^\nu \cdot B_5^\nu) \cdot (B_1^\mu \cdot B_n^\mu + B_p^\mu \cdot B_5^\mu)] \right\} \\
&\quad - G_{nn} \left\{ \sum_{\substack{\nu>0 \\ \nu=\mu}} [(B_1^\nu)^2 + (B_n^\nu)^2] + \sum_{\substack{\nu\mu>0 \\ \nu\neq\mu}} (B_1^\nu \cdot B_p^\nu + B_n^\nu \cdot B_5^\nu) \cdot (B_1^\mu \cdot B_p^\mu + B_n^\mu \cdot B_5^\mu) \right\} \\
&\quad - G_{np} \left\{ \sum_{\substack{\nu\mu>0 \\ \nu\neq\mu}} [B_4^\nu \cdot (B_5^\nu - B_1^\nu) \cdot B_4^\mu (B_1^\mu - B_5^\mu)] + \sum_{\substack{\nu\mu>0 \\ \nu=\mu}} [(B_1^\nu)^2 + (B_4^\nu)^2] \right\} \tag{3.8}
\end{aligned}$$

3.4 Probabilité de la double désintégration bêta

L'opérateur de transition bêta est défini par [68] :

$$T^+ = \sum_{\nu>0} T_\nu^+ = \sum_{\nu>0} (a_{\nu p}^+ a_{\nu n} + a_{\tilde{\nu} p}^+ a_{\tilde{\nu} n}) \tag{3.9}$$

La probabilité de double transition bêta entre l'état initial $|\psi^i\rangle$ et l'état final

$|\psi^f\rangle$ c'est à dire du noyau père au noyau fils ($Z + 2$) est définie par [62] :

$$P = |\langle \psi^f | T^+ T^+ | \psi^i \rangle|^2 \quad (3.10)$$

3.4.1 Cas de l'appariement entre particules identiques

Dans le cas de l'appariement entre particules identiques, l'état $|\psi^i\rangle$ (respectivement $|\psi^f\rangle$) apparaissant dans l'expression 3.10 est défini par :

$$|\psi^{i(f)}\rangle = \prod_{j>0} |\psi_{jn}^{i(f)}\rangle \cdot |\psi_{jp}^{i(f)}\rangle \quad (3.11)$$

avec :

$$|\psi_{jt}^{i(f)}\rangle = \left(u_{jt}^{i(f)} + v_{jt}^{i(f)} a_{jt}^+ a_{\tilde{j}t}^+ \right) |0\rangle \quad t = n, p \quad (3.12)$$

L'action de l'opérateur T^+ sur $|\psi^i\rangle$ conduit à :

$$T^+ |\psi^i\rangle = \sum_{\nu>0} T_{\nu}^+ |\psi^i\rangle = \sum_{\nu>0} \left\{ u_{\nu p}^i v_{\nu n}^i [a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu}n}^+ - a_{\tilde{\nu}p}^+ a_{\nu n}^+] \prod_{j \neq \nu} |\psi_{jp}^i\rangle |\psi_{jn}^i\rangle \right\} \quad (3.13)$$

En appliquant une seconde fois l'opérateur de transition, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu, \mu>0} T_{\mu}^+ T_{\nu}^+ |\psi^i\rangle &= \sum_{\nu>0} (a_{\nu p}^+ a_{\nu n} + a_{\tilde{\nu}p}^+ a_{\tilde{\nu}n}) \left\{ u_{\nu p}^i v_{\nu n}^i [a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu}n}^+ - a_{\tilde{\nu}p}^+ a_{\nu n}^+] \prod_{j \neq \nu} |\psi_{jp}^i\rangle |\psi_{jn}^i\rangle \right\} \\ &+ \sum_{\substack{\nu, \mu>0 \\ \nu \neq \mu}} \left(a_{\mu p}^+ a_{\mu n} + a_{\tilde{\mu}p}^+ a_{\tilde{\mu}n} \right) |\psi_{\mu p}^i\rangle |\psi_{\mu n}^i\rangle \cdot u_{\nu p}^i v_{\nu n}^i \cdot (a_{\nu p}^+ a_{\nu n} + a_{\tilde{\nu}p}^+ a_{\tilde{\nu}n}) \prod_{j \neq (\nu, \mu)} |\psi_{jp}^i\rangle |\psi_{jn}^i\rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

Soit encore :

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu, \mu > 0} T_{\mu}^{+} T_{\nu}^{+} \mid \psi^i \rangle &= 2 \sum_{\nu > 0} u_{\nu p}^i v_{\nu n}^i a_{\nu p}^{+} a_{\nu p}^{+} \prod_{j \neq \nu} \mid \psi_{jp}^i \rangle \mid \psi_{jn}^i \rangle \\
+ \sum_{\substack{\nu, \mu > 0 \\ \nu \neq \mu}} \left(a_{\mu p}^{+} a_{\mu n} + a_{\mu p}^{+} a_{\mu n} \right) \mid \psi_{\mu p}^i \rangle \mid \psi_{\mu n}^i \rangle &\cdot u_{\nu p}^i v_{\nu n}^i \cdot (a_{\nu p}^{+} a_{\nu n} + a_{\nu p}^{+} a_{\nu n}) \prod_{j \neq (\nu, \mu)} \mid \psi_{jp}^i \rangle \mid \psi_{jn}^i \rangle
\end{aligned} \tag{3.15}$$

En projetant à gauche sur le bras $\langle \psi^f \mid$ il vient :

$$\begin{aligned}
\langle \psi^f \mid T^{+} T^{+} \mid \psi^i \rangle &= 2 \sum_{\nu > 0} u_{\nu p}^f v_{\nu n}^f u_{\nu n}^i v_{\nu p}^i \prod_{j \neq \nu} \left[\left(\nu_{jp}^i \cdot \nu_{jp}^f + u_{jp}^i \cdot u_{jp}^f \right) \cdot \left(\nu_{jn}^i \cdot \nu_{jn}^f + u_{jn}^i \cdot u_{jn}^f \right) \right] \\
&= 2 \sum_{\nu > 0} u_{\nu p}^f v_{\nu n}^f u_{\nu n}^i v_{\nu p}^i \prod_{j \neq \nu} \langle \psi_{jp}^f \mid \psi_{jp}^i \rangle \langle \psi_{jn}^f \mid \psi_{jn}^i \rangle
\end{aligned} \tag{3.16}$$

3.4.2 Cas de l'appariement isovectoriel

Dans le cas de l'appariement isovectoriel, l'état $\mid \psi^i \rangle$ (respectivement $\mid \psi^f \rangle$) apparaissant dans (3.10) n'est autre que l'état (2.46). On a alors :

$$\begin{aligned}
\langle \psi^f \mid T^{+} T^{+} \mid \psi^i \rangle &= 2 \sum_{\nu > 0} B_n^{\nu f} B_p^{\nu i} \prod_{j \neq \nu} \langle \psi_j^f \mid \psi_j^i \rangle \\
&+ 4 \sum_{\substack{(\nu, \mu) > 0 \\ \nu \neq \mu}} \left[\left(B_p^{\nu i} B_4^{\nu f} + B_4^{\nu i} B_n^{\nu f} \right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \times \left(B_p^{\mu i} B_4^{\mu f} + B_4^{\mu i} B_n^{\mu f} \right) \prod_{j \neq (\nu, \mu)} \langle \psi_j^f \mid \psi_j^i \rangle \right]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

avec :

$$\langle \psi_j^f \mid \psi_j^i \rangle = B_1^{ji} B_1^{jf} + B_n^{ji} B_n^{jf} + B_p^{ji} B_p^{jf} + 2 B_4^{ji} B_4^{jf} + B_5^{ji} B_5^{jf} \tag{3.18}$$

Pour $\Delta_{np} \rightarrow 0$ il vient :

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta_{np} \rightarrow 0} \langle \psi^f | T^+ T^+ | \psi^i \rangle &= 2 \sum_{\nu > 0} v_{\nu n}^f u_{\nu p}^f v_{\nu p}^i u_{\nu n}^i \prod_{j \neq \nu} \left[\left(\nu_{jp}^i \nu_{jp}^f + u_{jp}^i u_{jp}^f \right) \cdot \left(\nu_{jn}^i \nu_{jn}^f + u_{jn}^i u_{jn}^f \right) \right] \\
&= 2 \sum_{\nu > 0} v_{\nu n}^f u_{\nu p}^f v_{\nu p}^i u_{\nu n}^i \prod_{j \neq \nu} \langle \psi_{jp}^f | \psi_{jp}^i \rangle \cdot \langle \psi_{jn}^f | \psi_{jn}^i \rangle \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Ce qui revient au cas de l'appariement entre particules identiques.

Chapitre 4

Résultats numériques et discussion

4.1 Résolution des équations du gap

Un code de calcul à été élaboré au sein de notre laboratoire afin de résoudre les équations du gap formées par les deux conditions de conservation du nombre de particules définies par (2.44) et par les expressions des différents paramètres du gap définis par (2.43).

Ces équations forment un système de cinq équations non linéaires où les cinq inconnues sont les trois paramètres du gap Δ_{pp} , Δ_{nn} et Δ_{np} , et les 2 niveaux de Fermi λ_n et λ_p .

Ce système n'étant pas simple à résoudre analytiquement nous avons fait appel à une résolution numérique utilisant la méthode itérative de Brown [79].

4.1.1 Modèle à un niveau

Dans le but de tester le code en question, nous avons considéré le modèle schématique à un niveau [80]. Ce modèle repose sur l'existence d'un seul niveau de dégénérescence totale Ω et d'énergie $\varepsilon_\nu = 0$ et cela quel que soit le niveau ν .

Nous avons considéré un système tel que $\Omega = 14$, possédant $N = 6$ neutrons et $Z = 4$ protons avec $G_{nn} = G_{pp} = 0.121$. L'évolution des différents paramètres du gap en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} a été reportée sur la figure 4-1.

L'allure du graphe obtenu est tout à fait similaire à ce que l'on peut trouver dans la littérature [68], [72], [71] En particulier, comme nous pouvons le constater,

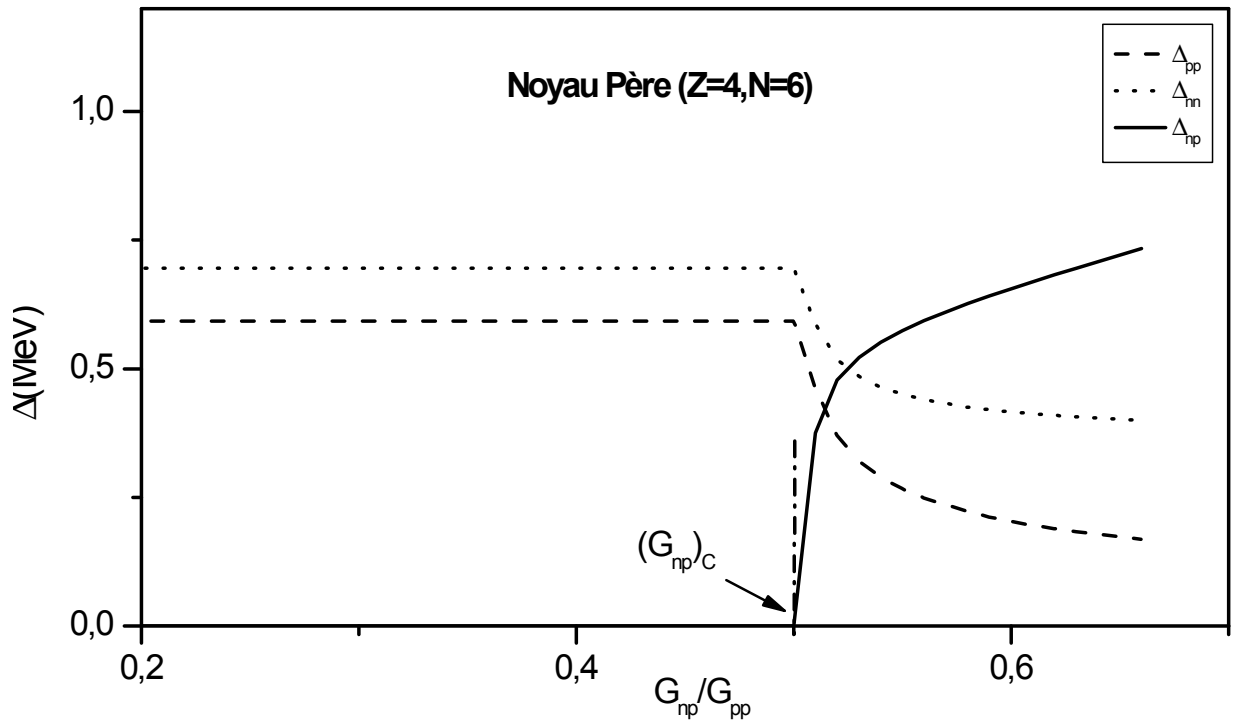


FIG. 4-1 – Evolution des trois paramètres du gap en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} dans le cadre du modèle à un niveau avec $\Omega = 14$, $G_{pp} = G_{nn} = 0.121$ dans le cas $Z = 4$, $N = 6$.

il existe deux régions distinctes, de part et d'autre d'une valeur particulière de G_{np} , appelée G_{np} critique et qui sera notée $(G_{np})_c$ dans ce qui suit. La position de $(G_{np})_c$ est repérée en pointillés dans la figure 4-1.

Dans la première région, c'est à dire en dessous de $(G_{np})_c$, $\Delta_{np} = 0$ et Δ_{pp} et Δ_{nn} sont constants. Les valeurs de ces derniers sont dans ce cas celles calculées dans le cadre de la théorie BCS traitant de l'appariement entre particules identiques, autrement dit, tout se passe comme s'il y avait absence d'appariement n-p.

Lorsque $G_{np} = (G_{np})_c$, le système passe brusquement de l'appariement entre particules identiques à l'appariement isovectoriel, ce qui se traduit par une augmentation soudaine de Δ_{np} et une diminution de Δ_{pp} et Δ_{nn} .

Dans la seconde région, Δ_{np} augmente au point de devenir prépondérant par rapport à Δ_{pp} et Δ_{nn} .

De tout ce qui précède, nous pouvons conclure à la validité de notre code de calcul.

4.1.2 Modèle de Richardson

Nous avons ensuite résolu le système d'équations précédant dans le cadre du modèle schématique de Richardson [80, 81]. Ce dernier consiste en un spectre dont les niveaux d'énergie sont équidistants et doublement dégénérés. L'énergie de chaque niveau vaut $\varepsilon_\nu = \nu$.

Nous avons considéré un système ayant $N = 32$ neutrons et $Z = 32$ protons, tel que $G_{nn} = G_{pp} = 0.375$, $G_{np} = 0.2$ et $\Omega = 32$.

Nous avons calculé numériquement les probabilités d'occupation $(B_i^\nu)^2$, $i = 1, n, p, 4, 5$ où les (B_i^ν) sont définies par l'expression (2.48). Elles sont représentées dans la figure 4-2 en fonction des niveaux individuels.

Nous avons repéré en pointillés la position des niveaux de Fermi des systèmes considérés ($\lambda_n = \lambda_p = 16.5 \text{ MeV}$).

Nous remarquons sur la figure 4-2 que les courbes donnant les probabilités d'occupation de l'état $|\nu\rangle$ par une paire de protons et une paire de neutrons $(B_p^\nu)^2$, $(B_n^\nu)^2$ sont confondues. Ceci est dû au fait d'avoir considéré ($N = Z$) et que les deux types de nucléons (n et p) ont la même force d'appariement ($G_{nn} = G_{pp}$) et les mêmes

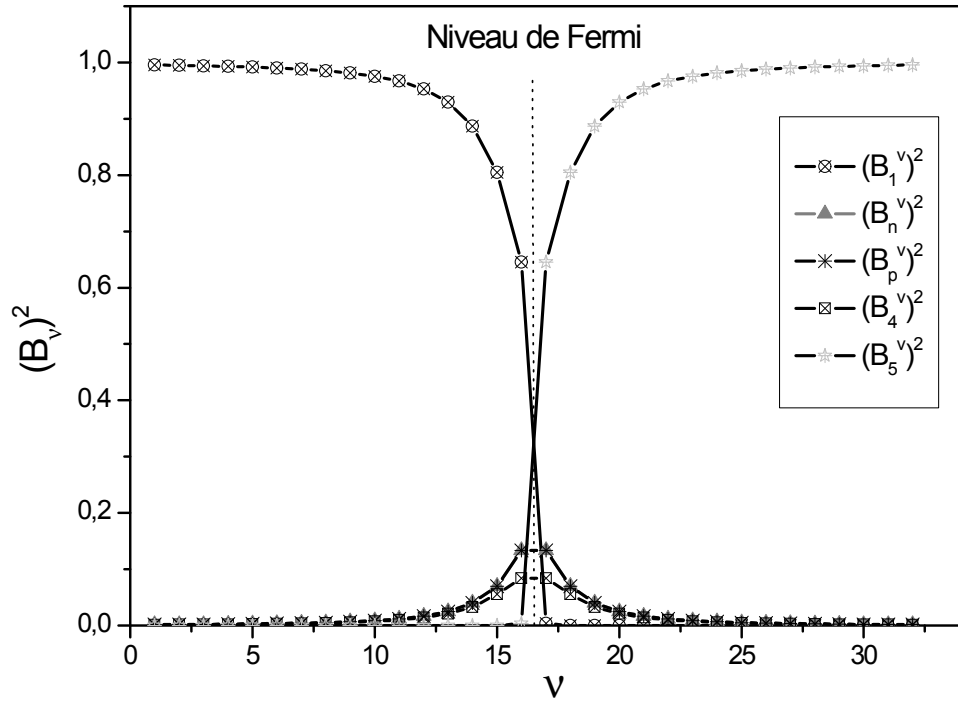


FIG. 4-2 – Evolution des probabilités d’occupation $(B_i^\nu)^2$ dans le cas de l’appariement isovectoriel en fonction des niveaux individuels ν dans le cadre du modèle de Richardson avec $N = Z = 32$, $\Omega = 32$, $G_{nn} = G_{pp} = 0.375$ et $G_{np} = 0.2$.

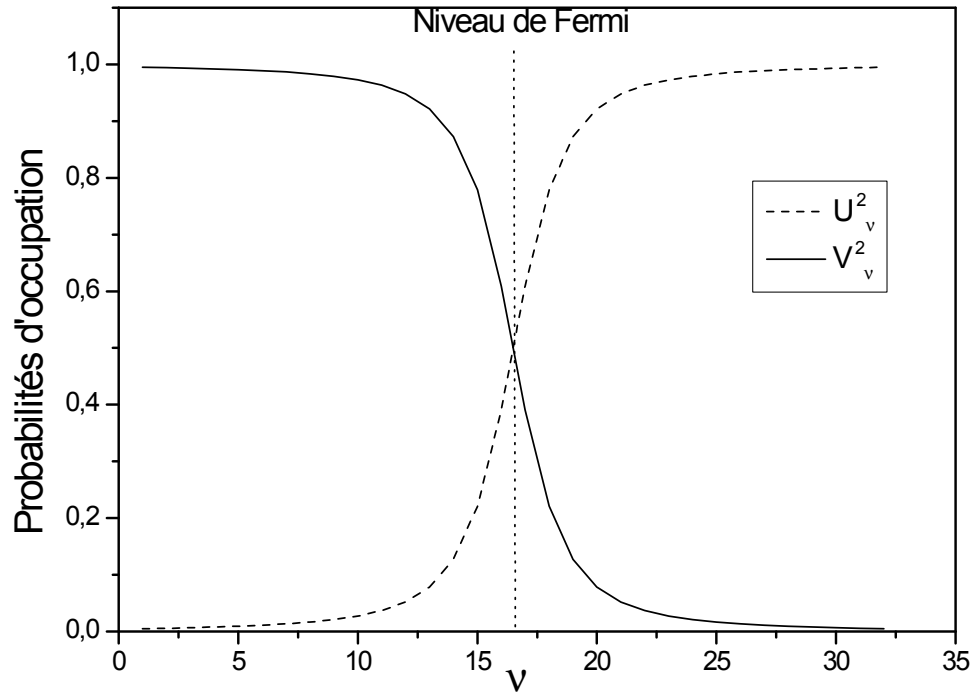


FIG. 4-3 – Evolution des probabilités d'occupation dans le cas de l'appariement à particules identiques en fonction des niveaux individuels ν dans le cadre du modèle de Richardson avec $N = Z = 32$, $\Omega = 32$, $G_{nn} = G_{pp} = 0.375$.

énergies individuelles ($\varepsilon_{\nu p} = \varepsilon_{\nu n} \quad \forall \nu$).

D'autre part, les probabilités d'occupation par deux paires (neutron-neutron et proton-proton), $(B_1^\nu)^2$, et d'inoccupation $(B_5^\nu)^2$ ont une allure analogue à celle des probabilités d'occupation (v_ν^2) et d'inoccupation (u_ν^2) dans le cas de l'appariement entre particules identiques (voir figure 4-3).

Par ailleurs, les probabilités d'occupation $(B_p^\nu)^2$, $(B_n^\nu)^2$, $(B_4^\nu)^2$ n'ont de valeurs significatives qu'au voisinage du niveau de Fermi.

On constate que l'allure de la fig.4-2 est similaire à celles des références [74], [71] après la rediagonalisation. Ceci permet de conclure à l'efficacité de la méthode de diagonalisation décrite au chapitre 1 et effectuée au moyen du théorème de Wick. Cette dernière s'avère donc non seulement rapide lors du calcul analytique, mais également efficace sur le plan numérique. Il est donc préférable d'utiliser cette méthode plutôt que celle utilisée dans les références [74], [71].

4.2 Eléments de matrice de la double désintégration Bêta

Une étude numérique des éléments de matrice de double désintégration bêta définis par l'expression (3.17) a été réalisée dans le cadre du modèle à un niveau.

Nous avons considéré un ensemble de systèmes tels que $N - Z = 2$, puis tels que $N - Z = 4$. Les variations des éléments de matrice qui seront notés dans ce qui suit $\langle T^+ T^+ \rangle$ ont été étudiées en fonction du paramètre G_{np} , puis du paramètre G_{nn} .

4.2.1 Test numérique du code de calcul

Dans une première étape, et afin de juger de la validité de notre code de calcul, nous avons comparé les valeurs de $\langle T^+ T^+ \rangle$ évaluées à l'aide de l'expression (3.17) lorsque $G_{np} < (G_{np})_c$ à celles obtenues au moyen de l'expression (3.19).

Ces valeurs sont reportées dans le tableau 4.1 pour les systèmes tels que $N - Z = 2$ pour le noyau père et dans le tableau 4.2 pour ceux tels que $N - Z = 4$ pour le noyau père.

Système	Appariement isovectoriel (np)	Appariement entre particules identiques	Valeur exacte
$(4, 6) \longrightarrow (2, 8)$	4.22707	4.22706	4.22706
$(6, 8) \longrightarrow (4, 10)$	5.51008	5.51007	5.51008
$(8, 10) \longrightarrow (6, 12)$	6.43238	6.43237	6.43237
$(10, 12) \longrightarrow (8, 14)$	7.03714	7.03713	7.03713
$(12, 14) \longrightarrow (10, 16)$	7.33729	7.33733	7.33733

TAB. 4.1 – Comparaison entre les valeurs des éléments de matrice de double désintégration bêta obtenues en prenant en compte l'appariement isovectoriel lorsque $G_{np} < (Gnp)_c$ (colonne 2), celles obtenues en prenant en compte uniquement l'appariement entre particules identiques (colonne 3) et les valeurs exactes (colonne 4), pour des systèmes tels que N-Z=2 pour les noyaux père.

Système	Appariement isovectoriel (np)	Appariement entre particules identiques	Valeur exacte
$(4, 8) \longrightarrow (2, 10)$	4.53461	4.53460	4.53461
$(6, 10) \longrightarrow (4, 12)$	5.74514	5.74513	5.74513
$(8, 12) \longrightarrow (6, 14)$	6.55986	6.55985	6.55986
$(10, 14) \longrightarrow (8, 16)$	7.03713	7.03713	7.03713
$(12, 16) \longrightarrow (10, 18)$	7.19474	7.19474	7.19474

TAB. 4.2 – Comparaison entre les valeurs des éléments de matrice de double désintégration bêta obtenues en prenant en compte l'appariement isovectoriel lorsque $G_{np} < (Gnp)_c$ (colonne 2), celles obtenues en prenant en compte uniquement l'appariement entre particules identiques (colonne 3) et les valeurs exactes (colonne 4), pour des systèmes tels que N-Z=4 pour les noyaux père.

De ces deux tableaux il ressort que les valeurs obtenues dans le cas isovectoriel lorsque $G_{np} < (Gnp)_c$ sont identiques à celles de la théorie BCS usuelle ; comme cela était prévu par la relation (3.19).

Les valeurs obtenues au moyen des deux codes de calcul sont également comparées aux valeurs exactes. En effet, il est possible d'obtenir ces dernières dans le cas du modèle à un niveau. (voir Annexe A).

On peut donc conclure à la validité de notre code dans le cas de l'appariement entre particules identiques et à celle du code dans le cas isovectoriel (au moins pour $G_{np} < (Gnp)_c$).

4.2.2 Variation en fonction de G_{np}

Les variations de $\langle T^+T^+ \rangle$ en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} sont représentées dans les figures (4.4) à (4.8) pour des systèmes dont le noyau père est tel que $N - Z = 2$ et dans les figures (4.9) à (4.13) pour des systèmes dont le noyau père est tel que $N - Z = 4$. Nous avons dans chaque cas utilisé les valeurs $G_{nn} = G_{pp} = 0.121$ et $\Omega = 14$.

Nous avons dans chaque figure également représenté les variations des différents paramètres du gap, Δ_{pp} , Δ_{nn} et Δ_{np} du noyau père et du noyau fils en fonction du même rapport. En effet, c'est l'allure de ces derniers graphes qui permet d'expliquer le comportement de $\langle T^+T^+ \rangle$ en fonction de G_{np} .

On distingue alors trois régions :

a) Lorsque G_{np} est inférieur à la valeur critique $(G_{np})_{cp}$ pour le noyau père (remarquons que dans chaque cas $(G_{np})_{cp}$ est inférieur à $(G_{np})_{cf}$ du noyau fils) : dans cette région, tout se passe comme s'il y avait absence d'appariement n-p, les paramètres du gap Δ_{pp} , Δ_{nn} demeurent constants tout au long de cette dernière, de même que $\langle T^+T^+ \rangle$.

b) Dans la deuxième région $((G_{np})_{cp} < G_{np} < (G_{np})_{cf})$ l'appariement n-p commence à apparaître et se traduit par une augmentation des éléments de matrice. Le noyau père considéré passe d'un système dans lequel n'existe que l'appariement entre particules identiques à un système apparié sous l'effet de l'appariement isovectoriel.

c) Au niveau de la troisième région $G_{np} > (G_{np})_{cf}$, nous notons une augmentation importante des valeurs des éléments de matrice. Cette région correspond au cas où les deux noyaux sont des systèmes qui se trouvent au delà de leurs valeurs critiques $(G_{np})_c$ respectives, c'est à dire où l'appariement $n - p$ est prépondérant.

Nous avons dans une seconde étape essayé de quantifier l'effet de l'appariement isovectoriel en évaluant l'écart relatif entre les valeurs de $\langle T^+T^+ \rangle$ calculées en $(G_{np})_{cp}$ et $(G_{np})_{cf}$ soit :

$$\delta = \frac{\langle T^+T^+ \rangle (G_{np})_{cf} - \langle T^+T^+ \rangle (G_{np})_{cp}}{\langle T^+T^+ \rangle (G_{np})_{cp}} \quad (4.1)$$

Les valeurs correspondantes sont regroupées dans le Tableau 4.3 pour les sys-

Système $N - Z = 2$	$\delta(\%)$	Moyenne (%)
$(Z = 4, N = 6) \longrightarrow (Z = 2, N = 8)$	93.53	201.13
$(Z = 6, N = 8) \longrightarrow (Z = 4, N = 10)$	186.91	
$(Z = 8, N = 10) \longrightarrow (Z = 6, N = 12)$	98.12	
$(Z = 10, N = 12) \longrightarrow (Z = 8, N = 14)$	262.24	
$(Z = 12, N = 14) \longrightarrow (Z = 10, N = 16)$	364.83	

TAB. 4.3 – Ecart relatif entre les valeurs des éléments de matrice évaluées en $(G_{np})_{cp}$ et $(G_{np})_{cf}$ pour un système tel que $N-Z=2$ pour le noyau père.

Système $N - Z = 4$	$\delta(\%)$	Moyenne
$(Z = 4, N = 8) \longrightarrow (Z = 2, N = 10)$	76.62	125.21
$(Z = 6, N = 10) \longrightarrow (Z = 4, N = 12)$	214.44	
$(Z = 8, N = 12) \longrightarrow (Z = 6, N = 14)$	130.63	
$(Z = 10, N = 14) \longrightarrow (Z = 8, N = 16)$	101.33	
$(Z = 12, N = 16) \longrightarrow (Z = 10, N = 18)$	103.02	

TAB. 4.4 – Ecart relatif entre les valeurs des éléments de matrice évaluées en $(G_{np})_{cp}$ et $(G_{np})_{cf}$ pour un système tel que $N-Z=4$ pour le noyau père

tèmes tels que $N - Z = 2$ pour le noyau père et dans le Tableau 4.4 pour les systèmes tels que $N - Z = 4$ pour le noyau père. On note dans chaque tableau des disparités importantes d'un système à l'autre. Cependant, lorsqu'on calcule la valeur moyenne pour le Tableau 4.3 ($\bar{\delta} = 201.13 \%$) et pour le Tableau 4.4 ($\bar{\delta} = 125.21 \%$), on constate que les systèmes tels que $N - Z = 2$ sont nettement plus affectés par l'appariement isovectoriel que ceux pour lesquels $N - Z = 4$.

En résumé, il a été constaté que l'effet d'appariement isovectoriel est loin d'être négligeable lors du calcul des éléments de matrice $\langle T^+ T^+ \rangle$. De plus, les valeurs de G_{np} doivent être choisies de manière minutieuse lors des calculs réalistes : un petit changement dans la valeur de G_{np} peut entraîner des changements importants dans les valeurs des éléments de matrice $\langle T^+ T^+ \rangle$.

4.2.3 Variation en fonction de G_{nn}

Nous avons ensuite réalisé une étude des variations de $\langle T^+ T^+ \rangle$ en fonction de G_{nn} . (voir figures (4.14) à (4.23)). Deux cas de figure peuvent alors se présenter :

$$G_{np} < (G_{np})_{cp} \text{ ou } G_{np} > (G_{np})_{cp}.$$

1) Si $G_{np} < (G_{np})_{cp}$

Nous présentons dans la figure 4.14, à titre d'exemple, les variations de $\langle T^+ T^+ \rangle$

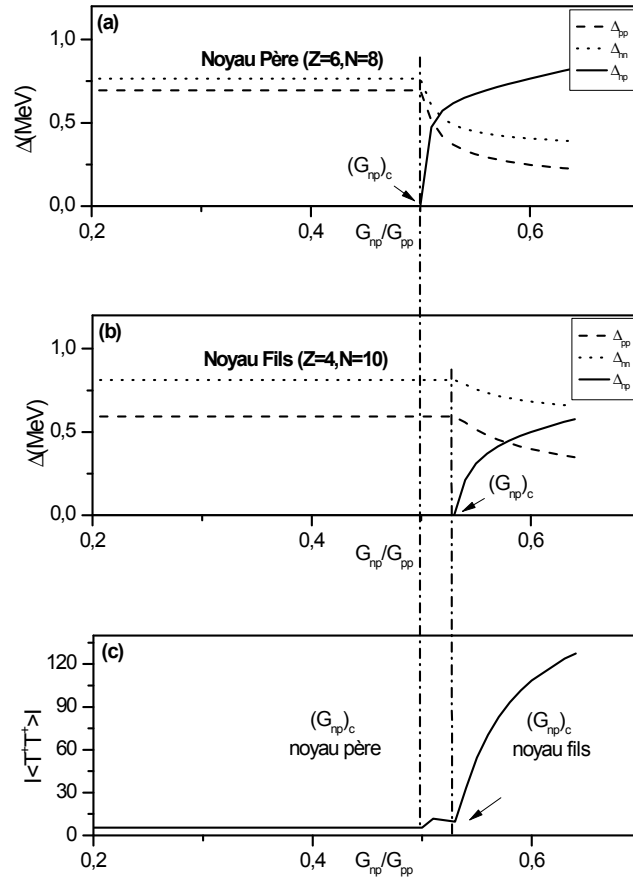


FIG. 4-4 – Evolution des trois paramètres du gap du noyau père ($Z = 6, N = 8$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 4, N = 10$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} .

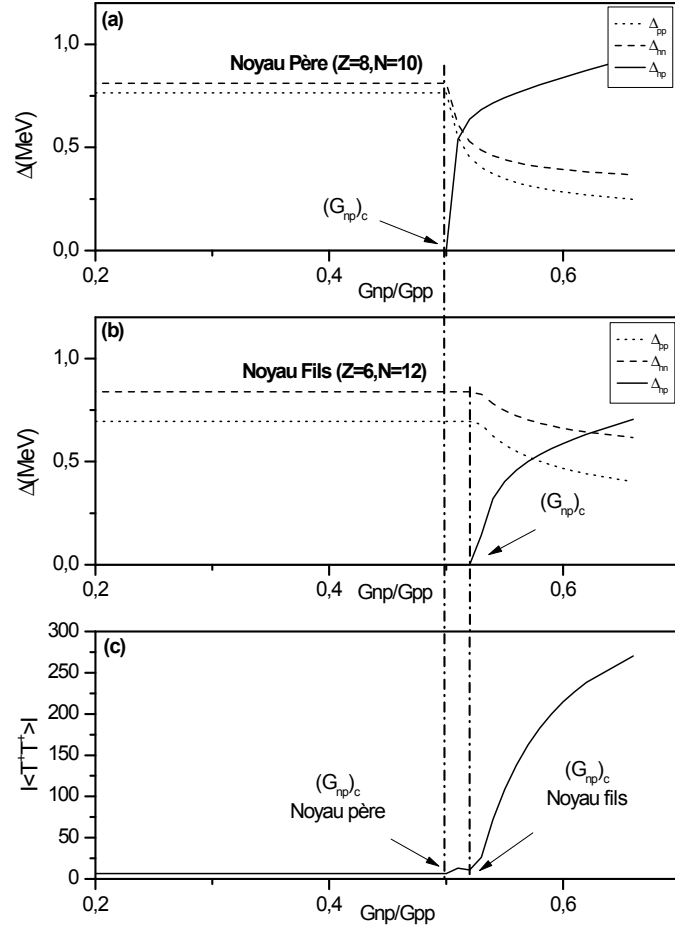


FIG. 4-5 – Evolution des trois paramètres du gap du noyau père ($Z = 8, N = 10$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 6, N = 12$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} .

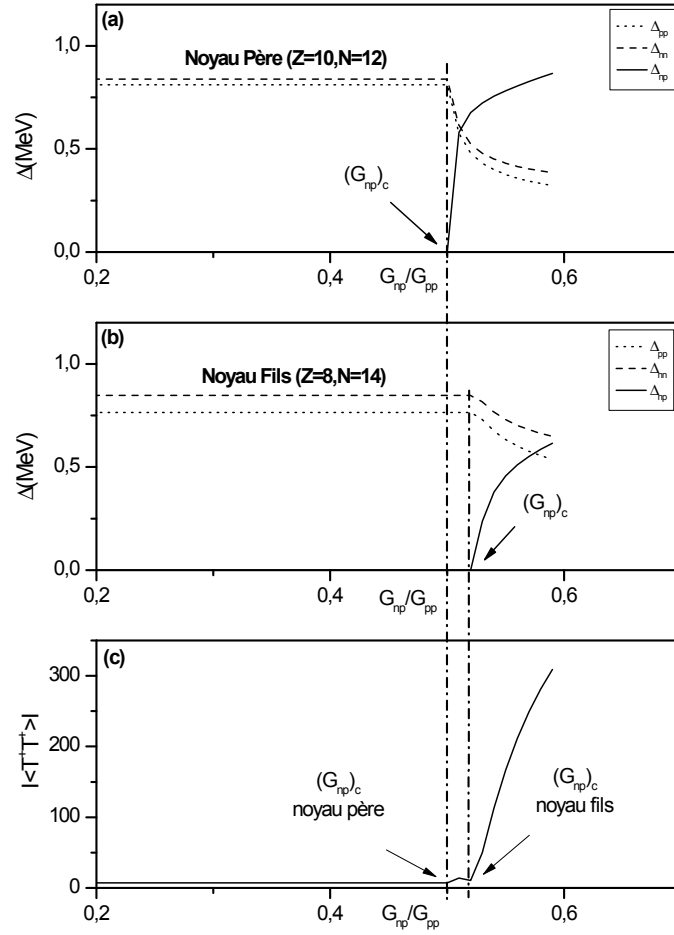


FIG. 4-6 – Evolution des trois paramètres du gap du noyau père ($Z = 10, N = 12$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 8, N = 14$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} .

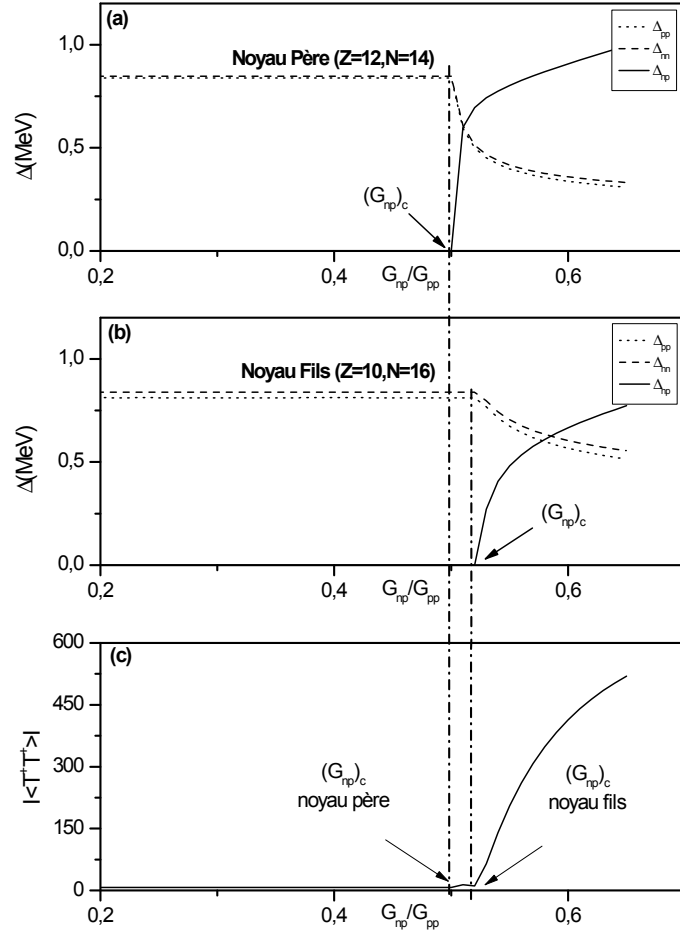


FIG. 4-7 – Evolution des trois paramètres du gap du noyau père ($Z = 12, N = 14$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 10, N = 16$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} .

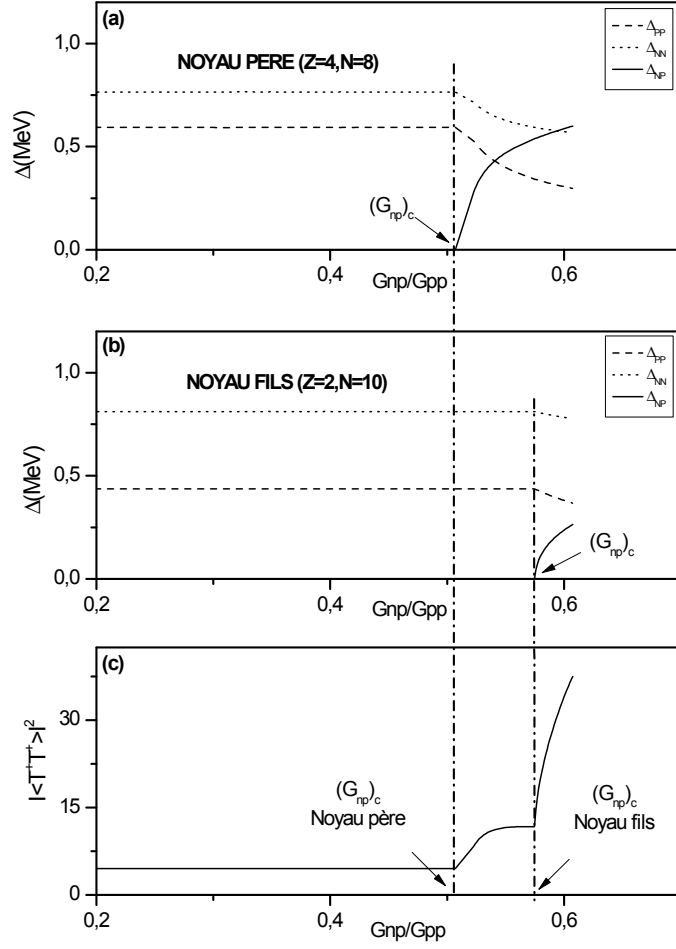


FIG. 4-8 – Evolution des trois paramètres du gap du noyau père ($Z = 4, N = 8$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 2, N = 10$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} .

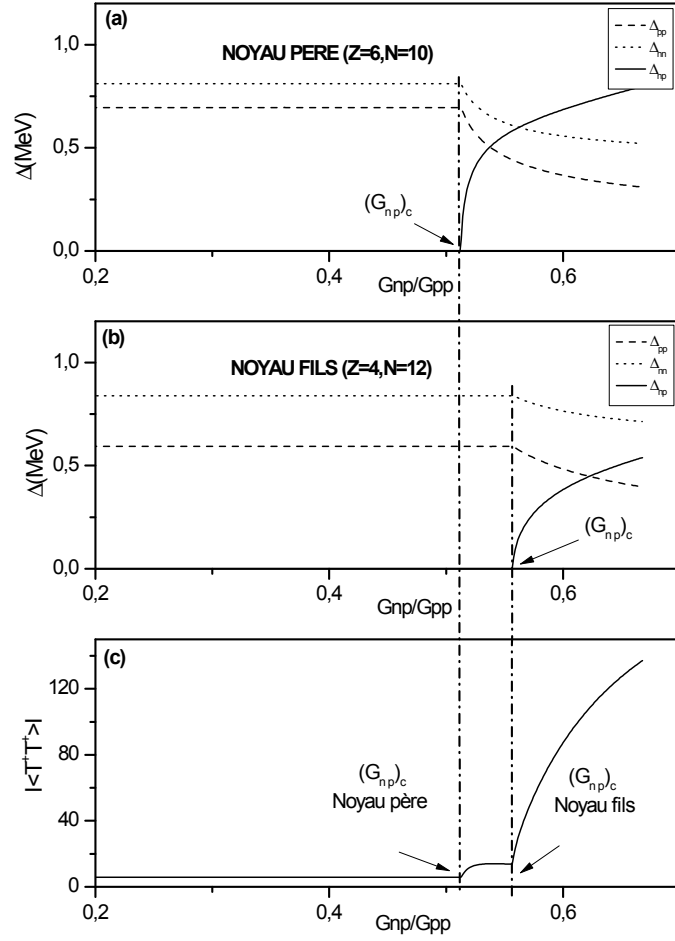


FIG. 4-9 – Evolution des trois paramètres du gap du noyau père ($Z = 6, N = 10$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 4, N = 12$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} .

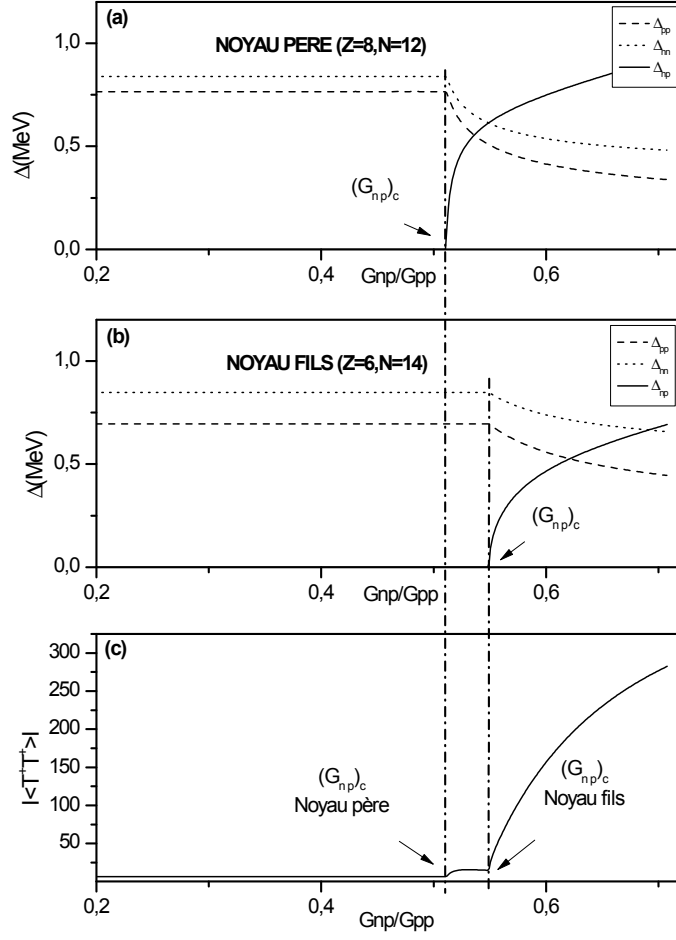


FIG. 4-10 – Evolution des trois paramètres du gap du noyau père ($Z = 8, N = 12$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 6, N = 14$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} .

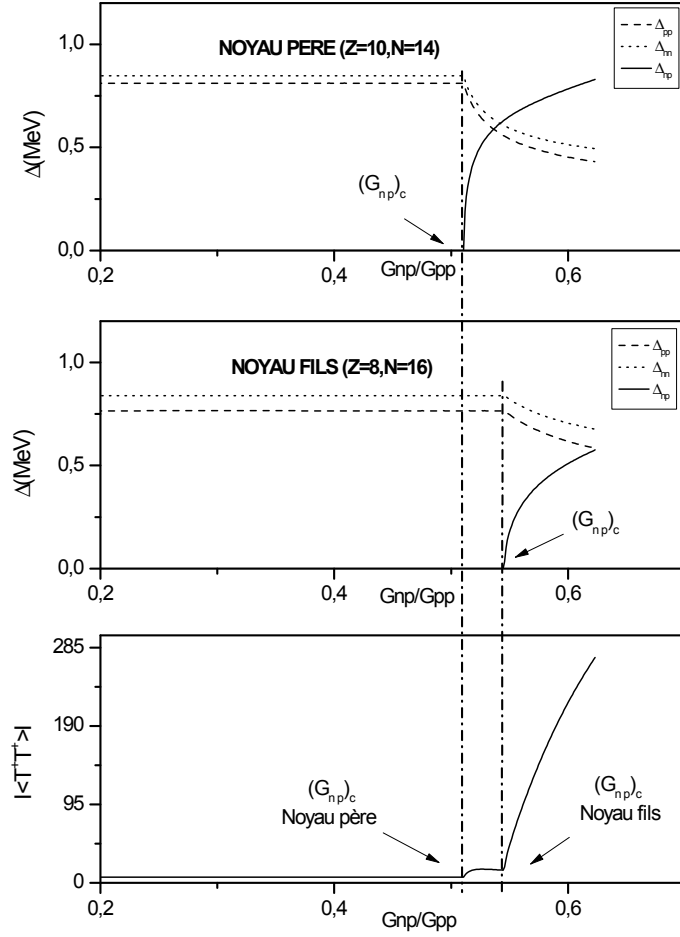


FIG. 4-11 – Evolution des trois paramètres du gap du noyau père ($Z = 10, N = 14$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 8, N = 16$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} .

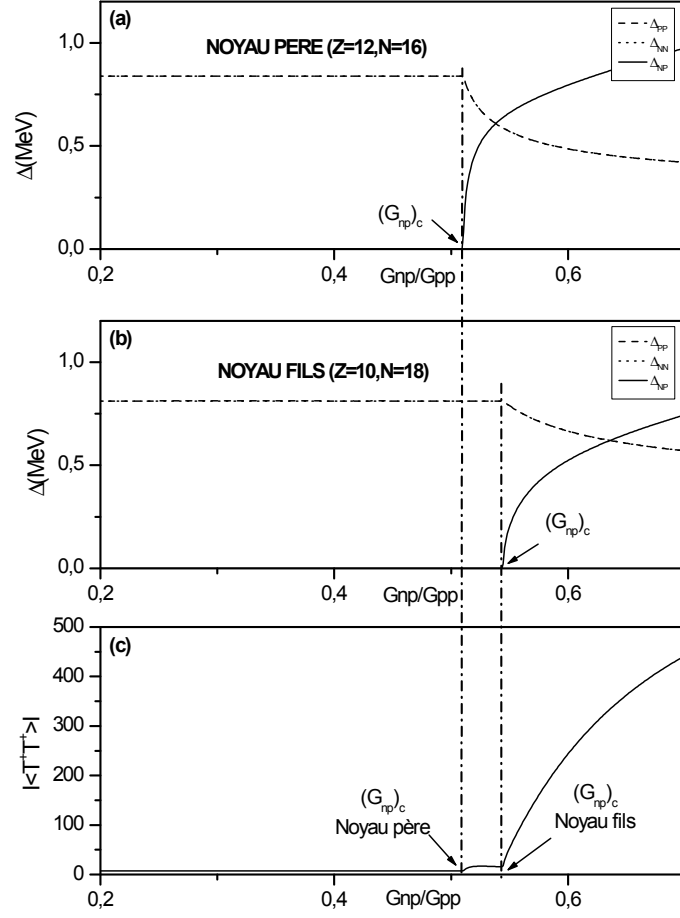


FIG. 4-12 – Evolution des trois paramètres du gap du noyau père ($Z = 12, N = 16$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 10, N = 18$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} .

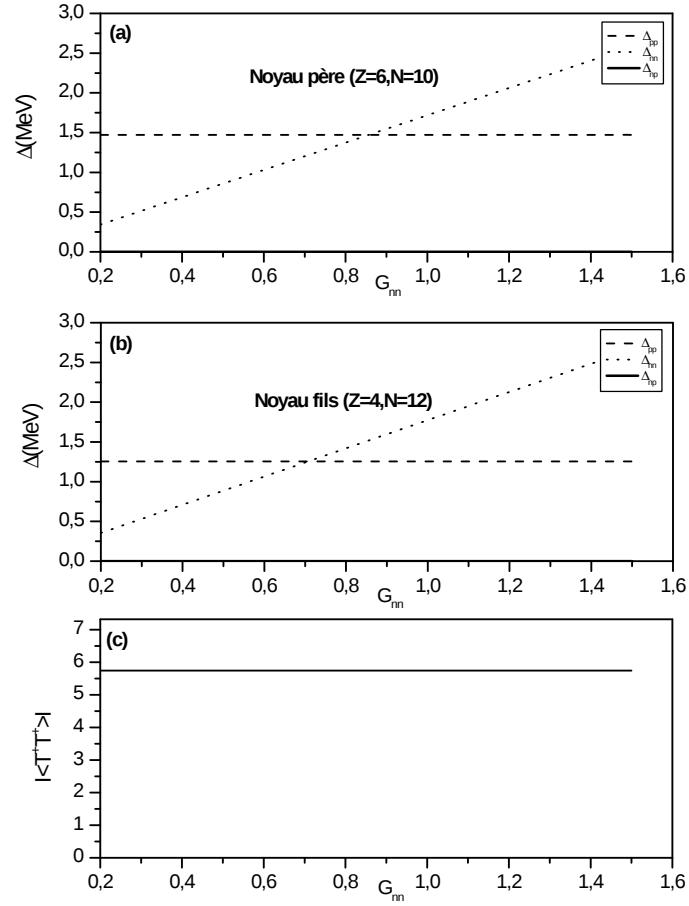


FIG. 4-13 – Evolution des trois paramètres du gap avant valeur critique $(G_{np})_c$ du noyau père ($Z = 6, N = 10$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 4, N = 12$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction de G_{nn} lorsque $G_{nn} > (G_{nn})_{cp}$

et des différents paramètres du gap des noyaux père et fils en fonction de G_{nn} . On constate que tout se passe comme dans le cas d'un système où n'existe que l'appariement entre particules identiques : $\Delta_{np} = 0$, Δ_{pp} est constant et Δ_{nn} croît en fonction de G_{nn} . Ceci entraîne que $\langle T^+T^+ \rangle$ est constant. L'allure constante de l'élément de matrice de double transition bêta $\langle T^+T^+ \rangle$ est tout à fait justifiée par le fait que les probabilités d'occupation et d'inoccupation u_ν^2, v_ν^2 sont indépendantes de G dans le cas de l'appariement entre particules identiques et dans le cadre du modèle à un niveau (voir annexe A).

2) Si $G_{np} > (G_{np})_{cp}$.

Nous avons là aussi considéré des systèmes tels que $N - Z = 2$ (voir figures 4.15 à 4.19) puis tels que $N - Z = 4$ (voir figures 4.20 à 4.23).

On note un fait à priori surprenant : Δ_{np} et Δ_{pp} varient, alors que les valeurs de G_{np} et G_{pp} sont fixées. Ceci est dû au fait que Δ_{pp}, Δ_{nn} et Δ_{np} sont solutions d'un système d'équations non linéaires et ne sont pas indépendants les uns des autres (sauf si $\Delta_{np} = 0$). En particulier, Δ_{np} connaît un plateau, puis décroît jusqu'à s'annuler pour une valeur critique de (G_{nn}) que nous noterons $(G_{nn})_{cp}$ pour le noyau père et $(G_{nn})_{cf}$ pour le noyau fils.

Δ_{pp} connaît lui aussi un plateau, puis augmente jusqu'à la valeur critique de G_{nn} et devient ensuite constant lorsque $\Delta_{np} = 0$. (On se trouve alors dans le cas de l'appariement entre particules identiques). Quand à Δ_{nn} , il est croissant en fonction de G_{nn} . On note cependant un changement de pente au point $G_{nn} = (G_{nn})_c$.

Comme dans le paragraphe 4.2.2, on constate l'existence de trois régions distinctes dans le graphe de $\langle T^+T^+ \rangle$ qui peuvent s'expliquer par l'allure des graphes de Δ_{pp}, Δ_{nn} et Δ_{np} des noyaux père et fils. Remarquons toutefois que l'allure globale des graphes est inversée par rapport aux figures (4.4) à (4.13). En particulier $(G_{nn})_{cf}$ est toujours inférieur à $(G_{np})_{cp}$.

1) Si $G_{nn} < (G_{nn})_{cf}$ la valeur de $\langle T^+T^+ \rangle$ est maximale au voisinage de 0 puis décroît jusqu'à $(G_{nn})_{cf}$.

2) Si $(G_{nn})_{cf} < G_{nn} < (G_{nn})_{cp}$: $\langle T^+T^+ \rangle$ prend une allure légèrement croissante.

3) Si $G_{nn} > (G_{nn})_{cp}$: $\langle T^+T^+ \rangle$ décroît brusquement puis se stabilise.

Nous avons une fois de plus calculé l'écart relatif entre les valeurs des éléments de

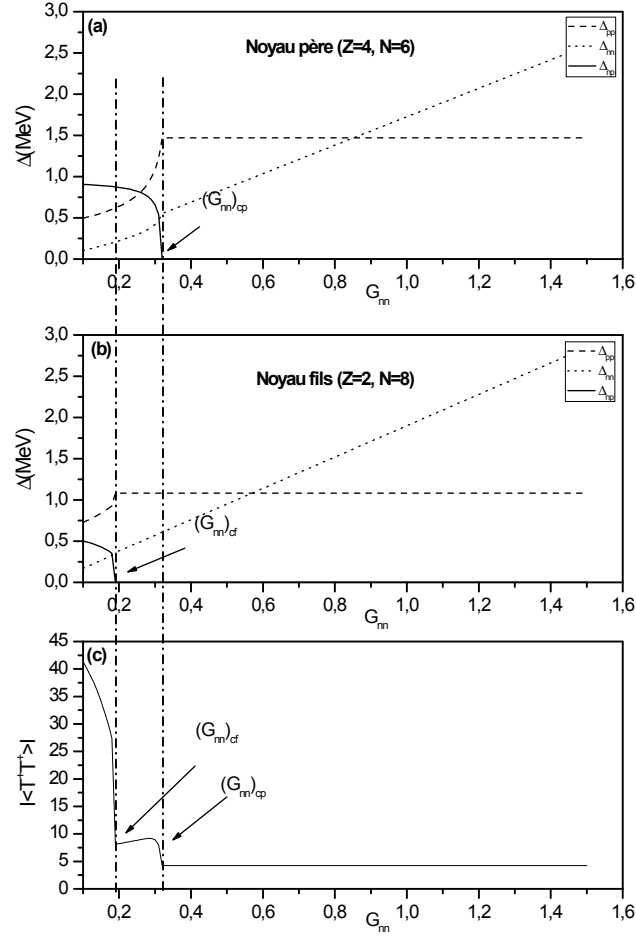


FIG. 4-14 – Evolution des trois paramètres du gap après valeur critique $(G_{np})_c$ du noyau père ($Z = 4, N = 6$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 2, N = 8$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction de G_{nn} lorsque $G_{np} > (G_{np})_c$.

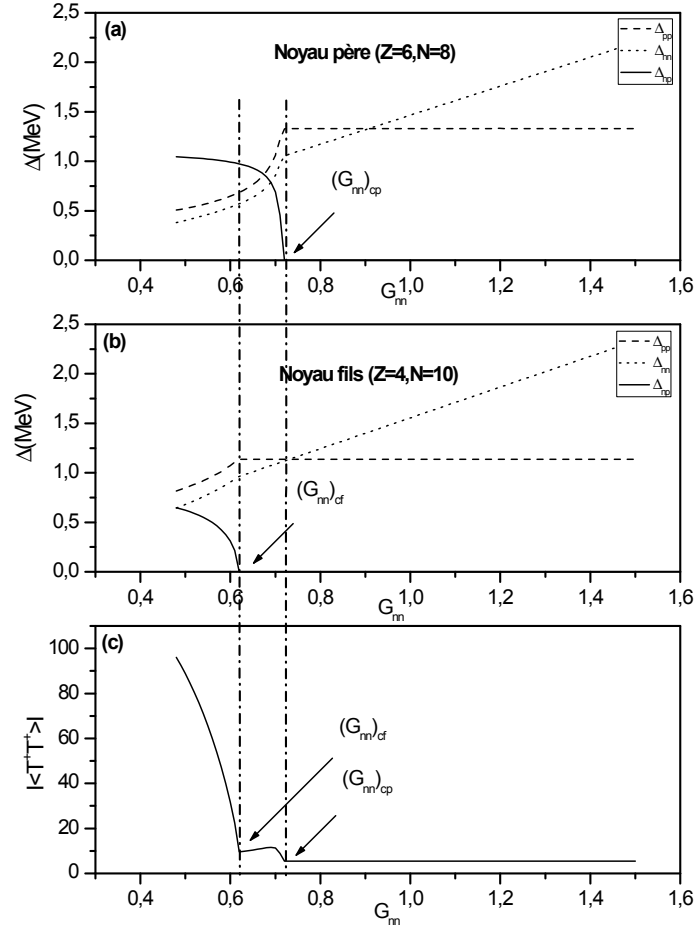


FIG. 4-15 – Evolution des trois paramètres du gap après valeur critique $(G_{np})_c$ du noyau père ($Z = 6, N = 8$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 4, N = 10$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction de G_{nn} lorsque $G_{np} > (G_{np})_c$.

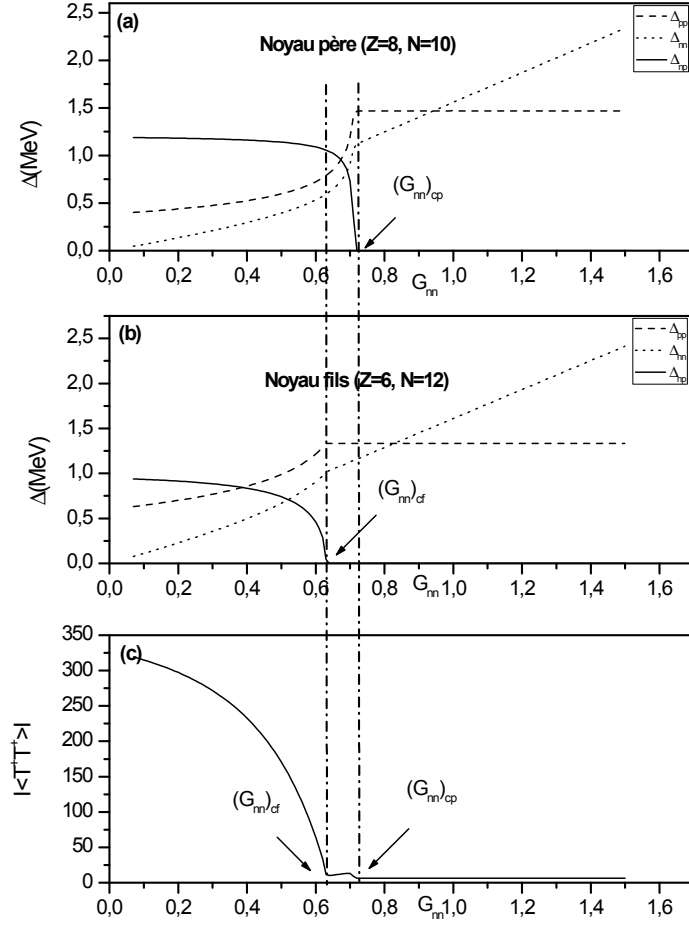


FIG. 4-16 – Evolution des trois paramètres du gap après valeur critique $(G_{np})_c$ du noyau père ($Z = 8, N = 10$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 6, N = 12$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction de G_{nn} lorsque $G_{np} > (G_{np})_c$

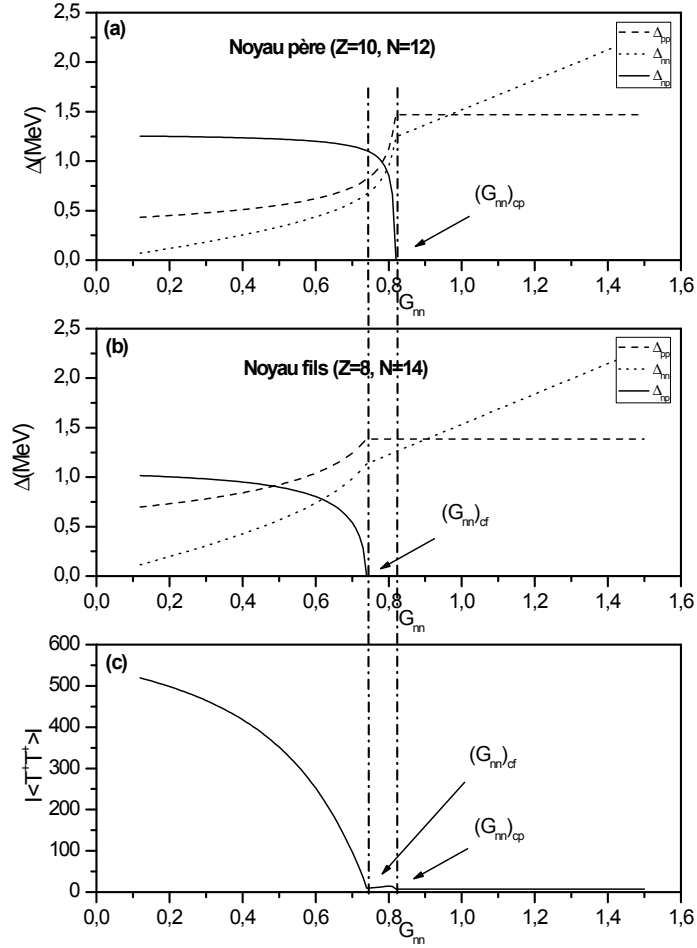


FIG. 4-17 – Evolution des trois paramètres du gap après valeur critique $(G_{np})_c$ du noyau père ($Z = 10, N = 12$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 8, N = 14$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction de G_{nn} lorsque $G_{np} > (G_{np})_c$.

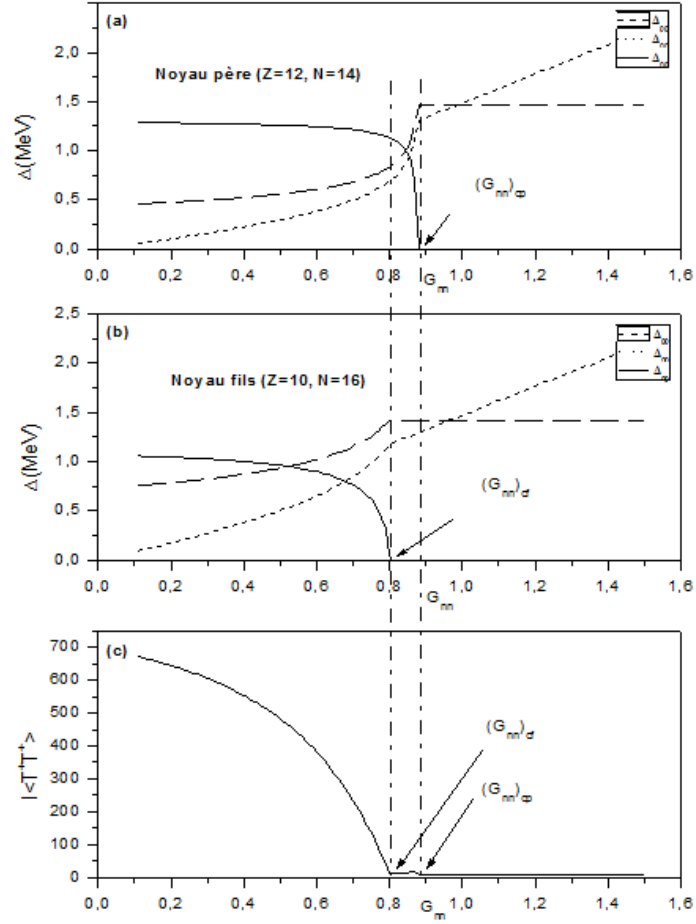


FIG. 4-18 – Evolution des trois paramètres du gap après valeur critique $(G_{np})_c$ du noyau père ($Z = 12, N = 14$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 10, N = 16$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction de G_{nn} lorsque $G_{np} > (G_{np})_c$.

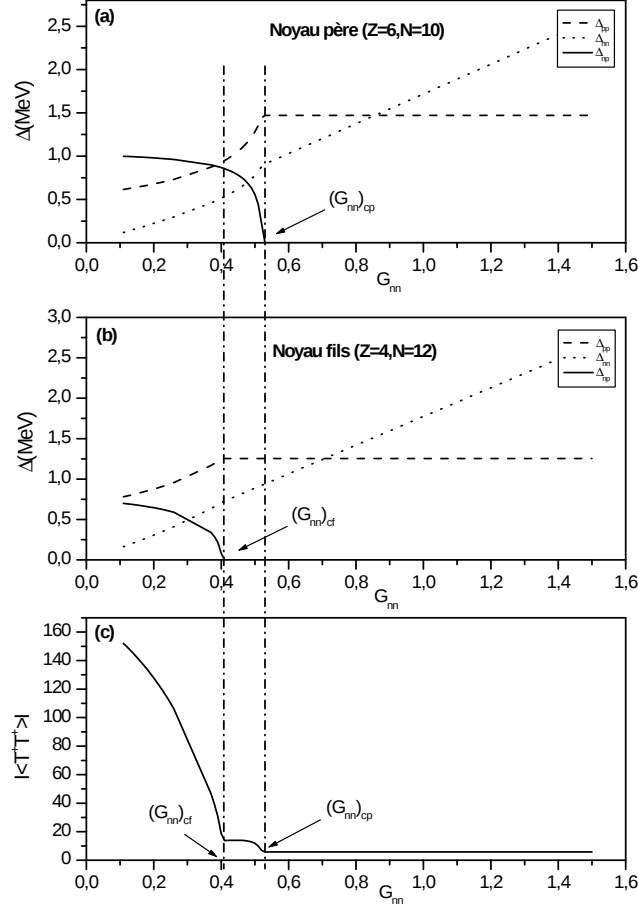


FIG. 4-19 – Evolution des trois paramètres du gap après valeur critique $(G_{np})_c$ du noyau père ($Z = 6, N = 10$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 4, N = 12$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction de G_{nn} lorsque $G_{np} > (G_{np})_c$.

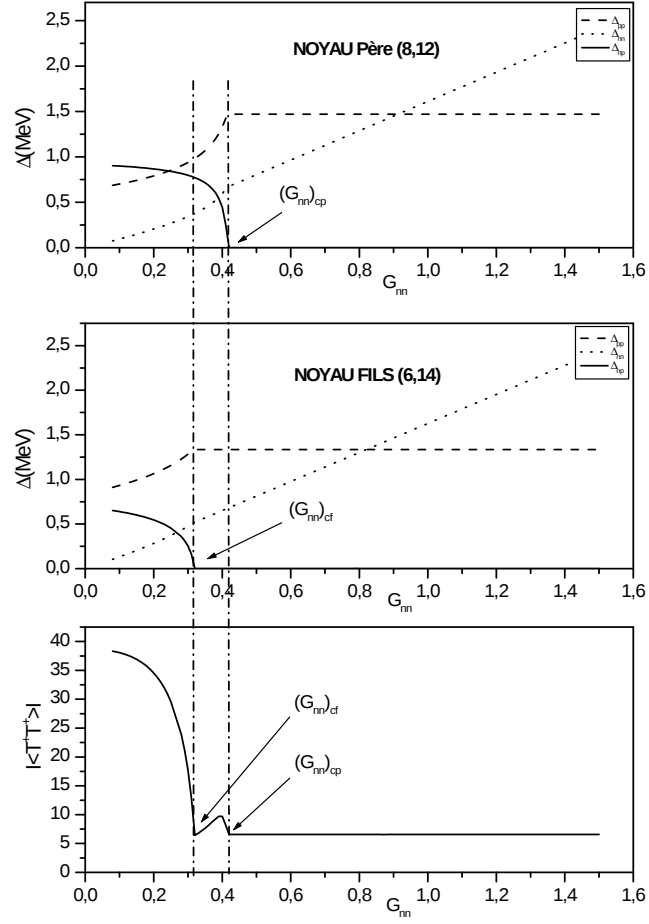


FIG. 4-20 – Evolution des trois paramètres du gap après valeur critique $(G_{np})_c$ du noyau père ($Z = 8, N = 12$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 6, N = 14$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction de G_{nn} lorsque $G_{np} > (G_{np})_c$.

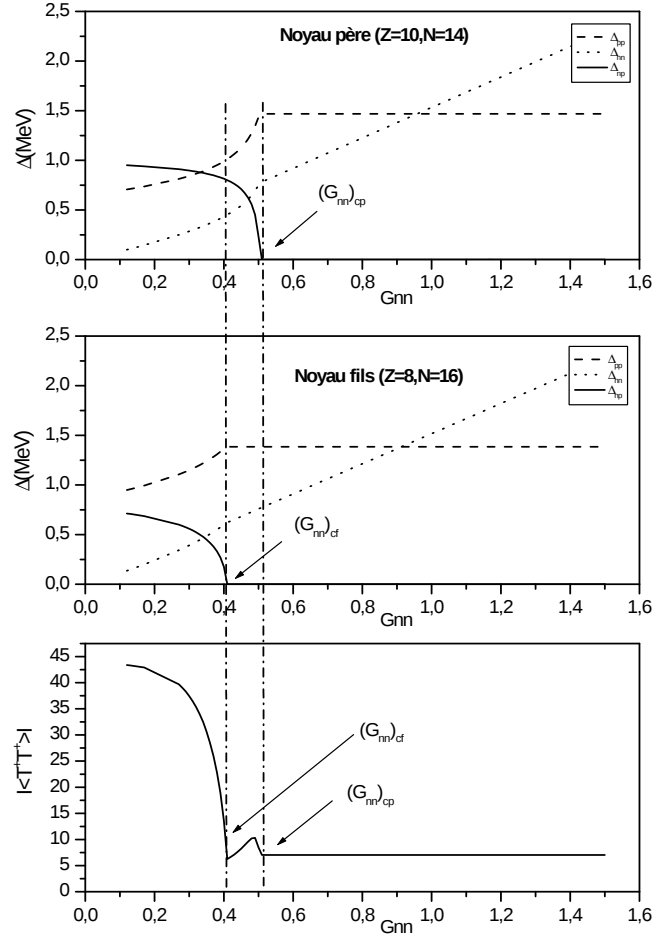


FIG. 4-21 – Evolution des trois paramètres du gap après valeur critique $(G_{np})_c$ du noyau père ($Z = 10, N = 14$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 8, N = 16$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction de G_{nn} lorsque $G_{np} > (G_{np})_c$.

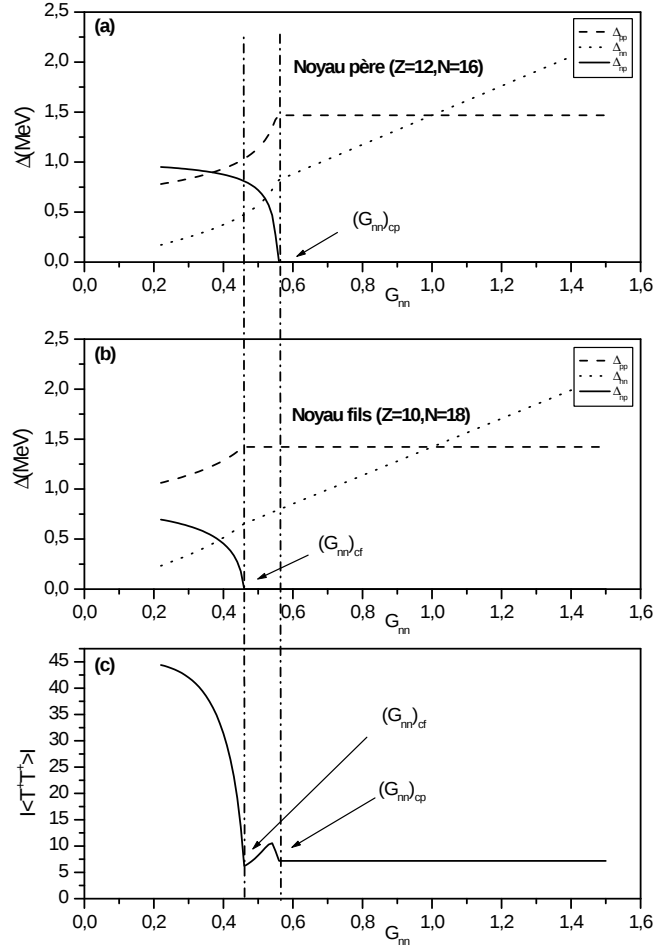


FIG. 4-22 – Evolution des trois paramètres du gap après valeur critique $(G_{np})_c$ du noyau père ($Z = 12, N = 16$) (partie (a)), du noyau fils ($Z = 10, N = 18$) (partie (b)) et des éléments de matrice de la double transition bêta (partie (c)) en fonction de G_{nn} lorsque $G_{np} > (G_{np})_c$.

Système $N - Z = 2$	$\delta(\%)$	Moyenne (%)
$(Z = 4, N = 6) \longrightarrow (Z = 2, N = 8)$	92.81	84.04
$(Z = 6, N = 8) \longrightarrow (Z = 4, N = 10)$	72.67	
$(Z = 8, N = 10) \longrightarrow (Z = 6, N = 12)$	97.22	
$(Z = 10, N = 12) \longrightarrow (Z = 8, N = 14)$	118.36	
$(Z = 12, N = 14) \longrightarrow (Z = 10, N = 16)$	39.15	

TAB. 4.5 – Ecart relatif entre les valeurs des éléments de matrice évaluées en $(G_{nn})_{cp}$ et $(G_{nn})_{cf}$ pour un système tel que $N-Z=2$ pour le noyau père

Système $N - Z = 4$	$\delta(\%)$	Moyenne (%)
$(Z = 6, N = 10) \longrightarrow (Z = 4, N = 12)$	139.55	73.72
$(Z = 8, N = 12) \longrightarrow (Z = 6, N = 14)$	125.97	
$(Z = 10, N = 14) \longrightarrow (Z = 8, N = 16)$	12.78	
$(Z = 12, N = 16) \longrightarrow (Z = 10, N = 18)$	16.59	

TAB. 4.6 – Ecart relatif entre les valeurs des éléments de matrice évaluées en $(G_{nn})_{cp}$ et $(G_{nn})_{cf}$ pour un système tel que $N-Z=4$ pour le noyau père

matrice $\langle T^+ T^+ \rangle$ mais cette fois entre les valeurs correspondant à $(G_{nn})_{cp}$ et $(G_{nn})_{cf}$. Les valeurs sont présentées dans le tableau 4.5 pour les systèmes tels que $N - Z = 2$ et dans le tableau 4.6 pour les systèmes tels que $N - Z = 4$. Comme dans l'étude en fonction de G_{np} , on note dans les deux tableaux, des différences importantes d'un système à l'autre.

Lorsqu'on calcule les valeurs moyennes de δ ($\bar{\delta} = 84.04\%$ dans le cas du Tableau 4.5 et $\bar{\delta} = 73.72\%$ dans le cas du Tableau 4.6), on constate que ces derniers sont nettement moins importantes que dans le cas des Tableaux 4.3 et 4.4.

On constate également que la différence entre les systèmes tels que $N - Z = 2$ et $N - Z = 4$ pour le noyau père est moins importante que lors de l'étude en fonction de G_{np} .

De ce qui précède, on peut conclure que le choix de G_{nn} (et G_{pp} qui joue un rôle symétrique dans le cas schématique) doit être fait de manière minutieuse dans le cas réaliste, puisqu'un petit changement dans la valeur de G_{nn} peut entraîner des grands changements dans les valeurs de $\langle T^+ T^+ \rangle$.

Conclusion

Dans le présent travail, nous avons étudié l'effet de l'appariement isovectoriel sur les éléments de matrice de la double désintégration bêta dans le cadre de l'approximation BCS.

Nous avons commencé, dans un but de cohérence, par rappeler le traitement de l'appariement entre particules identiques au moyen de la théorie BCS usuelle.

Dans une seconde étape, nous avons considéré l'hamiltonien du système dans le cas de l'appariement isovectoriel. Ce dernier a été diagonalisé approximativement en utilisant le théorème de Wick et l'approximation des quasiparticules indépendantes. Ceci a permis de déduire la transformation de Bogoliubov -Valatin généralisée et les équations du gap.

Nous avons ensuite établi les expressions des éléments de matrice de la double désintégration bêta incluant l'effet d'appariement isovectoriel (notés $\langle T^+ T^+ \rangle$). En nous basant sur une définition simple proposée par Zamick et Auerbach [62]. En faisant tendre le paramètre du gap Δ_{np} vers zéro, il a été vérifié que les expressions obtenues généralisent bien celles de la théorie BCS usuelle (dans le cas de l'appariement entre particules identiques).

Dans une dernière étape, une étude numérique de ces éléments de matrice a été effectuée dans le cadre du modèle schématique à un niveau. Dans ce but, deux codes de calcul ont été élaborés : l'un dans le cas de l'appariement entre particules identiques (noté dans ce qui suit BCS), l'autre dans le cas de l'appariement isovectoriel (noté dans ce qui suit BCSnp). Dans une première phase, il a été montré que le code BCS reproduit correctement les valeurs analytiques exactes. Il a également été montré que le code BCSnp permet de retrouver les valeurs du code BCS lorsque Δ_{np} tend vers zéro.

Dans une seconde phase, une étude systématique des variations des éléments de matrice $\langle T^+T^+ \rangle$ a été effectuée en fonction des constantes d'appariement G_{np} et G_{nn} , pour des système tels que $N - Z = 2$ et $N - Z = 4$ pour le noyau père.

Le comportement des $\langle T^+T^+ \rangle$ en fonction de G_{np} et G_{nn} a été expliqué par celui des trois paramètres du gap Δ_{nn} , Δ_{pp} et Δ_{np} . En particulier, il a été constaté des changements d'allures des courbes de $\langle T^+T^+ \rangle$ pour les valeurs correspondants aux valeurs critiques de G_{np} (respectivement G_{nn}), c'est à dire celles pour lesquelles Δ_{np} (respectivement Δ_{nn}) s'annule.

Il a été montré que l'effet de l'appariement isovectoriel sur les éléments de matrice de double désintégration bêta $\langle T^+T^+ \rangle$ est non négligeable et décroît en fonction de $(N - Z)$.

Notons que s'agissant d'un modèle schématique, il n'est pas possible de faire des comparaisons avec des valeurs expérimentales. Il serait intéressant de considérer un modèle réaliste, du type champ moyen de Wood-Saxon. Il faudrait dans ce cas choisir minutieusement les valeurs des paramètres d'appariement G_{nn} , G_{pp} et G_{np} puisque nous avons montré qu'une petite variation des ces derniers peut entrainer des grandes variations dans les valeurs des éléments de matrice $\langle T^+T^+ \rangle$.

Annexe

Annexe (A) : Calcul analytique des éléments de matrice de double désintégration bêta dans le cas de l'appariement entre particules identiques et dans le cadre du modèle à un niveau

Le modèle à un niveau est l'un des rares modèles où la résolution analytique des équations du gap est possible (dans le cas de l'appariement entre particules identiques).

Compte tenu du fait qu'il existe un seul niveau, l'indice ν peut être omis dans les expressions de u_ν , v_ν et de l'énergie d'une quasiparticule. La condition de conservation du nombre de particules définie par (1.9) s'écrit alors :

$$n_0 = 2 \cdot \sum_{\nu} v_{\nu}^2 = 2 \cdot \Omega \cdot v^2. \quad (\text{A.1})$$

On en déduit :

$$v^2 = \frac{n_0}{2 \cdot \Omega}. \quad (\text{A.2})$$

et

$$u^2 = 1 - v^2 = 1 - \frac{n_0}{2\Omega} \quad (\text{A.3})$$

Le paramètre du gap défini par (1.7) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Delta &= G\Omega uv \\ &= \frac{G}{2} \sqrt{n_0 (2\Omega - n_0)} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

De même l'équation (1.31) devient :

$$\frac{2}{G} = \frac{\Omega}{E} \quad (\text{A.5})$$

E étant l'énergie d'une quasiparticule définie par l'expression (1.27) qui s'écrit dans le cas particulier du modèle à un niveau :

$$E = \sqrt{\lambda^2 + \Delta^2} \quad (\text{A.6})$$

A partir des expressions (A.4) et (A.6), on déduit l'expression du niveau de Fermi :

$$\lambda = \frac{G}{2} |\Omega - n_0| \quad (\text{A.7})$$

Les u et v étant connus, on les injecte dans l'expression (3.16) pour obtenir la valeur exacte de l'élément de matrice $\langle T^+ T^+ \rangle$.

Bibliographie

- [1] B. Jonson, Phys. Rep. **389** (2004) 1.
- [2] T. Otsuka, T. Suzuki and Y. Utsun, Nucl. Phys. **A805** (2008) 127c.
- [3] L. Chen et al. Nucl. Phys. **A882** (2012) 71.
- [4] J. N. De, X. Vinas, S. K. Patra and M. Centelles, Phys. Rev. **C64** (2001) 057306.
- [5] B. Blank and M.J.G. Borge, Prog. Part. Nucl. Phys. **60** (2008) 403.
- [6] J. Dobaczewski, N. Michel, W. Nazarewicz, M. Ploszajczak and J. Rotureau. Prog. Part. Nucl. Phys. **59** (2007) 432.
- [7] R. F. Casten and B. M. Sherrill, Prog. Part. Nucl. Phys. **45** (2000) 5171.
- [8] A. L. Goodman, Adv. Nucl. Phys. **11** (1979) 263.
- [9] D. S. Delion, R. Wyss, R. J. Liotta, Bo Cederwall, A. Johnson and M. Sandze-
lius, *Phys. Rev.* **C82** (2010) 024307.
- [10] O. Civitarese and M. Reboiro, Phys. Rev. **C56** (1997)1179.
- [11] O. Civitarese, M. Reboiro and P. Vogel, *Phys. Rev.* **C56**(1997) 1840.
- [12] D. Mokhtari, N. H. Allal, M. Fellah, *Acta Phys. Hung. A : Heavy Ion Phys.* **19**
(2004) 187.
- [13] G. Pantis, F. Simkovic, J.D. Vergados and A. Faessler, *Phys. Rev.* **C53** (1996)
695.
- [14] J. Dobes and S. Pittel, *Phys. Rev.* **C57** (1998) 688.
- [15] O. Civitarese, F. Montani and M. Reboiro, *Phys. Rev.* **C60** (1999) 024305.
- [16] A. Bobyk, W. A. Kaminski and P. Zareba, *Eur. Phys. J.* **A5** (1999) 385.
- [17] S. G. Frauendorf and J. A. Sheikh, *Nucl. Phys.* **A645** (1999) 509.

- [18] D. S. Delion, J. Dukelsky, P. Schuck, E. J. V. de Passos and F. Krmpotic, *Phys. Rev.* **C62** (2000) 044311.
- [19] A. A. Raduta, L. Pacearescu, V. Baran, P. Sarriguren and E. Moya de Guerra. *Nucl. Phys.* **A675** (2000) 503.
- [20] P. Sarriguren, E. Moya de Guerra and R. Alvarez-Rodriguez, *Nucl. Phys.* **A716** (2003) 230.
- [21] N. Paar, T. Niksic, D. Vretenar and P. Ring, *Phys. Rev.* **C69** (2004) 054303.
- [22] W. Satula and R. Wyss, *Nucl. Phys.* **A676** (2000) 120.
- [23] M. Kyotoku and H. T. Chen, *Phys. Rev.* **C36** (1987) 1144.
- [24] N. H. Allal, M. Fellah, M. R. Oudih and N. Benhamouda, *Eur. Phys. J.* **A27**, s01 (2006) 301.
- [25] S. Kerrouchi, D. Mokhtari, N. H. Allal and M. Fellah, *Int. J. Mod. Phys.* **E18** (2009) 141.
- [26] S. Kerrouchi, N. H. Allal, M. Fellah and M. Douici, *Int. J. Mod. Phys.* **E19** (2010) 1383.
- [27] N. Sandulescu, B. Errea and J. Dukelsky, *Phys. Rev.* **C80** (2009) 044335.
- [28] M. Belabbas, M. Fellah, N. H. Allal, N. Benhamouda, I. Ami and M.R. Oudih, *Int. J. Mod. Phys.* **E19** (2010) 1973.
- [29] I. Ami, M. Fellah, N. H. Allal, N. Benhamouda, M. Belabbas and M. R. Oudih, *Int. J. Mod. Phys.* **E20** (2011) 1947.
- [30] A. Goswami and L. S. Kisslinger, *Phys. Rev.* **B26** (1965) 140.
- [31] J. Janecke, *Nucl. Phys.* **73** (1965) 97.
- [32] H. T. Chen and A. Goswami, *Phys. Lett.* **B24** (1967) 257.
- [33] J. Bar-Tour, A. Goswami, A. L. Goodman and G. L. Struble, *Phys. Rev.* **178** (1969) 178.
- [34] A. L. Goodman, G. L. Struble, J. Bar-Tour and A. Goswami, *Phys. Rev.* **C2** (1970) 380.
- [35] K. Neergard, *Phys. Lett.* **B537** (2002) 287.
- [36] N. Dinh Dang and N. Q. Hung, *Phys. Rev.* **C77** (2008) 064315.

- [37] T. Bloxham et al., Phys. Rev. **C82** (2010) 027308.
- [38] G. L. Fogli et al. Phys. Rev. **D70** (2004) 113003.
- [39] G. L. Fogli et al. Phys. Rev. **D75** (2007) 053001.
- [40] V. Gillet, J. Phys. (Paris) Colloque **C 10** Tome 34 (1973) C1 0- 1.
- [41] M. Fellah, T. F. Hammann and D. E. Medjadi, Phys. Rev. **C8** (1973) 1585.
- [42] M. R. Oudih, N. H. Allal and M. Fellah, Int. J. Mod. Phys. **E12** (2003) 109.
- [43] S. G. Nilson and I. Ragnarsson, "Shapes and Shells in Nuclear Structure" (Cambridge University Press, 1995).
- [44] M. Douici, S. Kerrouchi, N. H. Allal and M. Fellah, Alg. Rev. Nucl. Sci. **8** (2010) 1.
- [45] D. Mokhtari, Thèse de Magister, USTHB, 2002.
- [46] A. Berbiche, Thèse de Magister, USTHB, 2011.
- [47] P. Vogel, Czech. J. Phys **48** (1998) 269.
- [48] K. Kumar, Phys. Rep. **264** (1996) 267.
- [49] G. Bertsch, Z. Phys. A **289** (1978) 103.
- [50] M. Douici, N. H. Allal, M. Fellah, N. Benhamouda and M. R. Oudih, to appear in Int. J. Mod. Phys. **E21** (2012).
- [51] P. Ring and P. Schuk, "The Nuclear Many Body Problem" (Springer, Berlin, 1996)
- [52] W. Greiner and J. A. Marhun, "Nuclear Models" (Springer, Berlin, 1996).
- [53] K. Abe et al. arXiv :1109.1621v2 [hep-ex] 2011.
- [54] D.S. Delion, J. Dukelsky and P. Schuck, Phys. Rev. **C55** (1997) 2340.
- [55] D.L. Fang, A. Faessler, V. Rodin and F. Simkovic, Phys. Rev. **C82** (2010) 051301(R).
- [56] F. Simkovic, Prog. Part. Nucl. Phys. **64** (2010) 219.
- [57] M. Goeppert-Mayer, Phys. Rev. **48** (1935) 512.
- [58] T. Kirsten, O. A. Schaeffer, E. Norton and R. W. Stoenner, Phys. Rev. Lett. **20** (1968) 1300.

- [59] H. V. Klapdor-Kleingrothaus and H. Pas, arxiv : [hep-ph/ **0005045** (2000) 3p].
- [60] A. Strumia and F. Vissani, arXiv :[hep-ph/**0606054**v3].
- [61] S. Pascoli and S. Petcov, Phys. Rev. **D77** (2008) 113003.
- [62] L. Zamick and N. Auerbach, Phys. Rev. **C26** (1982) 2185.
- [63] J. Bardeen, L. N Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **106** (1957) 162.
- [64] A. L. Goodman, G. L. Struble and A.Goswami, Phys. Lett. **B26** (1968) 260.
- [65] J. N. Ginocchio and J. Weneser, Phys. Rev. **170** (1968) 859.
- [66] A. Bohr, B. R. Mottelson and D. Pines, Phys. Rev.**110** (1958) 936.
- [67] S. T. Belyaev, K. Dan. Selsk, Mat. Fys. Medd, **11** (1959) 31.
- [68] A. A. Raduta and E. Moya de Guerra, *Ann. Phys.-New-York* **284** (2000) 134.
- [69] A. Goswami, Nucl. Phys. **60** (1964) 228.
- [70] H. Wolter, A. Faessler. and P. Sauer, Phys. Lett. **B31** (1970) 516.
- [71] M. Douici, Thèse de Magister, USTHB (2008).
- [72] D. Mokhtari, I. Ami, M. Fellah and N.H. Allal, *Int. J. Mod. Phys.* **E17** (2008) 655.
- [73] M. Fellah, N. H. Allal, M. Belabbas, M. R. Oudih and N.Benhamouda, Phy. Rev. **C76** (2007) 047306.
- [74] F. Hammache, Thèse de Magister, USTHB, 2010.
- [75] M. Fellah,Thèse de Doctorat de Troisième Cycle, Université d'Alger (1969).
- [76] F. Simkovic, Ch. C. Moustakidis, L. Pacearescu and A. Faessler, *Phys. Rev.* **C68** (2003) 054319.
- [77] A. Baran and K. Sieja, Acta Phys.Pol. **B37** (2006) 107.
- [78] C. Scouarnec, "Algèbre Spectrale, Tome 1" (Publisud, Toulouse, 1987).
- [79] K. M. Brown, "Numerical Solution of systems of Nonlinear Algebraic Equations" Edited by G. D. Byrne and C. A . Hall, (Academic Press, New-York 1973) p. 281.
- [80] R. W. Richardson and N. Sherman, Nucl. Phys. **52** (1964) 221.
- [81] R. W. Richardson, J. Math. Phys. **18** (1977) 1802.