

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
(U.S.T.H.B) ALGER

INSTITUT DE MATHEMATIQUES

THESE

Présentée pour l'obtention du grade de

MAGISTER

Présentée par :

MOULOUD Halima née AIT-CHAIT

Option : Analyse (E.D.P)

SUJET :

Problèmes aux limites pour quelques équations
de type non-classique

Soutenue publiquement le : 23 avril 2001

Devant le jury composé de :

M.S. MOULAY
N. BENOUAR
R. KESSI
A. ASSEM

Professeur
Professeur
Maître de conférence
Chargé de cours

USTHB
USTHB
USTHB
USTHB

Président
Rapporteur
Examineur
Examineur

A la mémoire de mon frère Mohamed

et à toute ma famille

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur N.E. BENOUAR pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé, et pour les conseils et l'aide précieuse qu'il a dispensés durant l'élaboration de ce travail. C'est grâce à lui que j'ai pu faire connaissance avec ce domaine de recherche.

Je remercie Monsieur M.S. MOULAY pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury d'examination.

J'exprime également mes plus vifs remerciements à Messieurs A. ASSEM et R. KESSI qui ont accepté de faire partie du jury.

Je remercie chaleureusement mon mari Monsieur M. Abdelrazak qui m'a aidée et encouragée à terminer ce travail.

Je n'oublie pas aussi d'adresser un Grand merci à tous mes enseignants et à tous ceux qui ont contribué à la

réalisation de ce travail, en particulier Mademoiselle A.
CHAREF-KHODJA et Monsieur A. BOUZIANI.

- Introduction :

Le but de ce travail est l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions généralisées dans des espaces de Sobolev appropriés de quelques problèmes aux limites de type non classiques pour des classes d'équations composites.

On utilisera la méthode de l'inégalité de l'énergie qui est également appelée méthode d'analyse fonctionnelle ou bien méthode des estimations à priori. Cette méthode permet aussi d'établir la dépendance continue de la solution par rapport aux données, et elle est basée sur les idées de Leray [18], Garding [12] et Petrovsky [23]; elle a été particulièrement développée par Ladyzhenskaya [15], Yurchuk [32] et Friedrichs [11].

Cette méthode nécessite une étude particulière pour chaque problème et elle peut-être décrite par le schéma suivant :

Etant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, dans le cylindre $Q = \Omega \times (0, T)$, avec $T > 0$; on considère l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$Lu = f(x, t), \quad \text{dans } Q, \quad (1)$$

avec L un opérateur différentiel.

A l'équation (1), on associe les conditions initiales suivantes :

$$\ell_i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}(x, 0) = \varphi_i(x), \quad \Omega, i = \overline{0, p}, \quad (2)$$

et les conditions au bord :

$$\gamma_j = \frac{\partial^j u}{\partial x_j} = 0, \quad \Gamma = \partial\Omega \times (0, T), j = \overline{0, q}. \quad (3)$$

Le problème (1) – (3) peut être écrit sous forme opérationnelle comme suit :

$$Lu = F,$$

où : $L : E \longrightarrow F$.

L'opérateur L est engendré par l'équation (1) et les conditions initiales : $L = (L, \ell_0, \dots, \ell_p)$, le

membre de droite est donné par : $F = (f, \varphi_0, \dots, \varphi_p)$.

L'espace E est le «domaine de définition» de l'opérateur L lié au domaine de définition de l'opérateur L , dans lequel on retrouve les conditions au bord.

F est l'espace produit des espaces dans lesquels $f, \varphi_0, \dots, \varphi_p$ sont donnés.

Comme première étape, on établit l'estimation suivante :

$$\|u\|_E \leq C \|Lu\|_F, \quad \forall u \in D(L), \quad (4)$$

appelée «Inégalité de l'énergie», où C est une constante positive indépendante de u .

Pour démontrer l'inégalité (4) qui représente le noyau fondamental de la méthode, on multiplie scalairement l'équation (1) par un opérateur Mu bien choisi et on intègre par partie le résultat $Lu \cdot Mu$ dans le cylindre Q ; l'opérateur Mu est appelé opérateur «diviseur».

Ensuite, pour les topologies «fortes» des espaces E et F , on construit la fermeture (une extension) de l'opérateur L qu'on note $\bar{L}$.

Par passage à la limite, on prolonge l'inégalité (4) aux éléments de $D(\bar{L})$:

$$\|u\|_E \leq C \|\bar{L}u\|_F. \quad (5)$$

De cette inégalité découle immédiatement l'unicité de la solution et l'identité $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$

où, $R(L)$ représente l'image de l'opérateur L et la solution du problème :

$$\bar{L}u = F, u \in D(\bar{L}) \quad \text{est appelée solution forte du problème considéré.}$$

Enfin, la dernière étape consiste à démontrer la densité de $R(L)$ dans F , c'est-à-dire :

$$\overline{R(L)} = F \text{ pour avoir l'existence de la solution.}$$

Dans ce présent travail, on étudie les problèmes liés aux équations de type composite. Ce type d'équations a été introduit par Hadamard [13], il a étudié les problèmes aux limites pour l'équation :

$$\partial_x \Delta u = 0,$$

où Δ est l'opérateur de Laplace.

Après lui d'autres auteurs [25] – [10] ont étudié par différentes méthodes les équations de ce type dans des ouverts de géométrie très simples (disque, rectangle dans le plan).

Dans [8], en utilisant des méthodes d'analyse complexe, l'auteur étudie les équations composites du troisième ordre dans le plan.

Ce travail est proche des résultats obtenus dans [1] – [2], dans lesquels l’auteur étudie les problèmes aux limites pour une classe d’équations composites à une caractéristique réelle dans un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, de géométrie quelconque, et à frontière régulière par morceaux; dans [4], l’auteur étudie une équation de type parabolo-elliptique qui s’écrit comme composition de l’opérateur de la chaleur et l’opérateur de Laplace.

Ce type d’équations est donné par des problèmes physiques concrets, qu’on rencontre lors de l’étude de certains phénomènes dans les milieux hétérogènes (milieux composites). A titre d’exemple l’étude d’un système multi-ondes parallèles Lin [19] et les vibrations longitudinales des poutres hétérogènes Timoshenko [28].

En suivant le schéma proposé dans [7], on montre l’existence et l’unicité de la solution pour les problèmes proposés, sur la base des inégalités de l’énergie pour le problème direct et son dual.

Cette thèse se compose de trois chapitres :

- **Chapitre 0 :**

Dans ce chapitre, on donne quelques notations et rappels généraux sur quelques éléments d’analyse fonctionnelle, qu’on utilisera dans toute la thèse.

- **Chapitre 1 :**

Ce chapitre est consacré à l’étude des problèmes aux limites pour une classe d’équations composites de type parabolo-elliptique.

Pour les deux premières parties, on désigne par Ω l’ouvert $]0,1[$ de $\mathbb{R}$ et Q_T l’ouvert

$\Omega \times]0, T[, T > 0.$

Dans la première partie, on étudie le problème suivant :

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}_0 u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = f, & \text{dans } Q_T, \\ \ell_0 u = u(x, 0) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega, \\ \ell_1 u = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & , \quad \text{sur } (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 & , \quad \text{sur } (0, T), \\ u(x, T) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega. \end{array} \right.$$

Où a, b des constantes strictement positives et f une fonction donnée.

Pour ce qui est de la deuxième partie, on complète le problème précédent en ajoutant les membres d'ordre inférieur, d'où on étudie le problème suivant :

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{ll} L u = L_0 u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u = f & , \quad \text{dans } Q_T, \\ \ell_0 u = u(x, 0) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega, \\ \ell_1 u = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & , \quad \text{sur } (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 & , \quad \text{sur } (0, T), \\ u(x, T) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega. \end{array} \right.$$

Où L_0 est l'opérateur défini dans le problème précédent appelé la partie principale du problème, λ une constante strictement négative, et f une fonction donnée.

Et dans la troisième partie, on se donne un ouvert Ω de R^n et Q_T l'ouvert $\Omega \times]0, T[$

avec $T > 0$, et on s'intéresse à la résolution du problème suivant :

$$(P_3) \left\{ \begin{array}{ll} L u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - A \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B u \right) = f & , \quad \text{dans } Q_T, \\ \ell_0 u = u(x, 0) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega, \\ \ell_1 u = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega, \\ u|_{\Sigma} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Sigma} = 0 & , \\ u(x, T) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega. \end{array} \right.$$

Avec :

$$A u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

et

$$B u = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Et avec des conditions adéquates sur les coefficients.

Où $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$ désigne la surface latérale du cylindre Q_T , ν le vecteur unitaire de la normale extérieure à ∂Q_T , et f une fonction donnée, a_{ij} et b_{ij} des constantes strictement positives avec : $a_{ij} = a_{ji}$ et $b_{ij} = b_{ji}$.

L'étude de l'existence et l'unicité de la solution généralisée pour les trois problèmes précédents est basée sur l'inégalité de l'énergie pour le problème direct et le problème dual, en utilisant le même opérateur multiplicateur $Mu = (t - T)u$.

- **Remarque 1 :**

Pour les trois problèmes précédents, la distribution des conditions au bord répond parfaitement à la théorie générale des problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles. En effet, nous avons une condition sur toute la frontière, associée à l'opérateur elliptique, et les autres conditions sont celles associées à l'opérateur parabolique.

- **Chapitre 2 :**

Dans ce chapitre, on s'intéressera à l'étude des problèmes aux limites pour une classe d'équations composite de type hyperbolo-elliptique.

Pour les deux premières parties, on se donne un ouvert $\Omega =]0,1[$ de $\mathbb{R}$ et le rectangle $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$.

Dans la première partie, on fait l'étude du problème suivant :

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{ll} L_0 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = f, & \text{dans } Q_T, \\ \ell_0 u = u(x, 0) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega, \\ \ell_1 u = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega, \\ \ell_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, 0) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & , \quad \text{sur } (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 & , \quad \text{sur } (0, T), \\ u(x, T) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega. \end{array} \right.$$

Où a, b des constantes strictement positives et f une fonction donnée.

Pour la seconde partie, on complète le problème précédent, en ajoutant les membres d'ordre inférieur, d'où on fait l'étude du problème suivant :

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{ll} L u = L_0 u + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u = f , & \text{dans } Q_T, \\ \ell_0 u = u(x,0) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega, \\ \ell_1 u = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega, \\ \ell_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,0) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & , \quad \text{sur } (0,T), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & , \quad \text{sur } (0,T), \\ u(x,T) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega. \end{array} \right.$$

Où L_0 est l'opérateur défini dans le problème (P_1) appelé partie principale du problème,

λ une constante strictement négative et f une fonction donnée.

Pour la dernière partie, on se donne un ouvert Ω de R^n et Q_T le cylindre $\Omega \times (0, T)$, $T > 0$ et on résout le problème suivant :

$$(P_3) \left\{ \begin{array}{ll} L u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - A \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B u \right) = f , & \text{dans } Q_T, \\ \ell_0 u = u(x,0) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega, \\ \ell_1 u = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega, \\ \ell_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,0) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega, \\ u|_{\Sigma} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Sigma} = 0 & , \\ u(x,T) = 0 & , \quad \text{sur } \Omega. \end{array} \right.$$

Avec :

$$Au = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

et

$$Bu = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Et avec des conditions adéquates sur les coefficients.

Où $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$ désigne la surface latérale du cylindre Q_T , ν le vecteur unitaire de la normale extérieure à ∂Q_T , et f une fonction donnée, a_{ij} et b_{ij} des constantes strictement positives avec : $a_{ij} = a_{ji}$ et $b_{ij} = b_{ji}$.

Pour l'étude des problèmes (P_1) , (P_2) et (P_3) , on se base toujours sur l'inégalité de l'énergie,

en utilisant le même opérateur diviseur $Mu = (t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u$, pour tout le chapitre.

Notons que les opérateurs liés à ces problèmes sont des opérateurs auto-adjoints.

- **Remarque 2 :**

Pour la distribution des conditions au bord, on a la même remarque donnée dans le chapitre 1, car nous avons une condition sur toute la frontière, associée à l'opérateur elliptique, et les autres condition sont celles associées à l'opérateur hyperbolique.

- **NOTATIONS**

1. Soit une suite $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\forall i = 1, \dots, n$, qui désigne un multi-indice.

On note : $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

2. Soit $X \in \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, \dots, x_n)$, pour un $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note la dérivation d'ordre $|\alpha|$ par :

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial X^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

3. $C^k(\Omega)$: l'espace des fonctions définies sur Ω qui admettent des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k inclus, k étant un entier positif, où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

4. $D(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω .

5. $D'(\Omega)$ l'espace des distributions définies sur Ω .

6. $L_2(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions lebesgue mesurables avec :

$$\int_{\Omega} |f|^2 d\Omega < +\infty,$$

muni du produit scalaire :

$$(f, g)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} f \cdot g d\Omega,$$

et de norme associée :

$$\|f\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |f|^2 d\Omega,$$

est un espace de Hilbert.

7. $H^m(\Omega)$ est l'espace de Sobolev d'ordre m défini par :

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L_2(\Omega) / \frac{\partial^\alpha u}{\partial X^\alpha} \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq m \right\},$$

où $\frac{\partial^\alpha u}{\partial X^\alpha}$ désigne la dérivation au sens de $D'(\Omega)$, muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial X^\alpha}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial X^\alpha} \right)_{L_2(\Omega)},$$

et de norme associée :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \left\| \frac{\partial^\alpha u}{\partial X^\alpha} \right\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

est un espace de Hilbert.

8. Etant donnés deux espaces de Banach E et F et un opérateur non borné A de E dans F , on notera par $D(A)$ le domaine de définition de A , par $R(A)$ l'image de A et par $G(A)$ le graphe de A .

9. Pour un opérateur A à domaine dense, on note A^* l'opérateur adjoint de A .

10. On note par J_ε l'opérateur de régularisation de Freidrichs.

• **RAPPELS**

- **Opérateur fermable :**

Soient E et F deux espaces de Banach et A un opérateur de E dans F de domaine $D(A)$.

- **Définition 1 :**

L'opérateur A est dit fermable s'il est prolongeable en un opérateur fermé.

- **Définition 2 :**

On dit que A est fermé si son graphe est fermé dans $E \times F$.

- **Proposition 1 :**

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est fermé.

(ii) Si $\{x_n\} \subset D(A)$ telle que :

$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x \text{ dans } E \\ \text{et} \\ Ax_n \rightarrow y \text{ dans } F \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in D(A) \\ \text{et} \\ Ax = y \end{array} \right.$$

- **Proposition 2 :**

Si l'opérateur A est fermable, il existe un opérateur $\overline{A}$ tel que : $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$.

L'opérateur $\overline{A}$ est appelé la fermeture de A . ($\overline{A}$ est la plus petite extension fermée de A).

- **Proposition 3 :**

Si A est fermable, on définit $\overline{A}$ par :

$u \in D(\overline{A})$ si et seulement si, il existe une suite $\{u_n\} \subset D(A)$ telle que :

$u_n \rightarrow u$ dans E , et $\lim_{n \rightarrow +\infty} Au_n$ existe.

Dans ce cas, on définit : $\overline{A}u = \lim_{n \rightarrow +\infty} Au_n$.

- **Définition de l'adjoint A^* :**

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur non-borné à domaine dense. On va définir un opérateur non-borné $A^* : D(A^*) \subset F' \rightarrow E'$ comme suit. On pose :

$$D(A^*) = \{ v \in F' : \exists c \geq 0 \text{ tel que } |\langle v, Au \rangle| \leq c \|u\|, \forall u \in D(A) \}$$

Il est clair que $D(A^*)$ est un sous-espace vectoriel de F .

On va maintenant définir A^*v pour $v \in D(A^*)$. Etant donné $v \in D(A^*)$, on considère l'application $g : D(A) \rightarrow \mathbb{R}$ défini par :

$$\begin{cases} g(u) = \langle v, Au \rangle, & u \in D(A), \\ |g(u)| \leq c \|u\|, & \forall u \in D(A). \end{cases}$$

Grâce au théorème de Hahn-Banach (forme analytique), on sait que g peut-être prolongée en une application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que :

$$|f(u)| \leq c \|u\|, \quad \forall u \in E.$$

Par suite $f \in E'$, on remarquera que le prolongement de g est unique puisque f est continue sur E et que $D(A)$ est dense. On pose : $A^*v = f$.

Il est clair que A^* est linéaire. L'opérateur $A^* : D(A^*) \subset F' \rightarrow E'$ est appelé l'adjoint de A . On a par conséquent la relation fondamentale suivante qui lie A et A^* :

$$\langle v, Au \rangle_{F' \times F} = \langle A^* v, u \rangle_{E' \times E}, \quad \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*).$$

- **Opérateurs auto-adjoints :**

Soit H un espace de Hilbert complexe . On dit que l'opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si $A^* = A$, c'est-à-dire : si pour tous $u, v \in H$, on a : $(Au, v) = (u, Av)$.

- **Opérateurs de régularisation :**

Le rôle des opérateurs de régularisation est d'associer à une fonction u d'un certain espace fonctionnel, une fonction régularisée c'est-à-dire une fonction appartenant au même espace avec des propriétés supplémentaires.

Les opérateurs utilisés dans cette thèse sont les opérateurs de régularisation de Freidrichs définis dans Mikhailov [20] .

❖ Soit ω une fonction paire infiniment différentiable et :

$$\omega(\zeta) \geq 0 \quad \text{et} \quad \omega(\zeta) = 0 \quad \text{si} \quad |\zeta| \geq 1 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 \omega(\zeta) d\zeta = 1.$$

• **Définition 3 :**

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, on définit l'opérateur J_ε par :

$$J_\varepsilon u(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_Q \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy$$

et on note : $u_\varepsilon(x) = J_\varepsilon u(x)$,

$u_\varepsilon(x)$ est appelée fonction régularisée et telle que :

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} u(x) & , x \in Q, \\ 0 & , x \notin Q_\varepsilon. \end{cases}$$

Avec $Q \subset Q_\varepsilon$ et $Q \subset \mathbb{R}^n$.

• **Propriété 1 :**

Pour toute fonction $u \in L_2(Q_T)$, soit $u \in D(L)$, la fonction $J_\varepsilon u \in C(Q_T)$ et en particulier elle est dans $D(L)$.

• **Propriété 2 :**

L'opérateur J_ε est auto-adjoint.

• **Propriété 3 :**

L'opérateur J_ε permute avec l'opérateur de différentiation.

• **Propriété 4 :**

$$\forall \varepsilon \geq 0, \quad \text{on a : } \|J_\varepsilon\|_{L_2} \leq 1.$$

• **Propriété 5 :**

$$\|J_\varepsilon u - u\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

- **Propriété 6 :**

Si a une fonction continue, alors on a :

$$\|aJ_\varepsilon u - J_\varepsilon(au)\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

- **Lemme de Gronwall :**

Si une fonction $u(t)$ positive, absolument continue, vérifie pour presque tous les $t > 0$ l'inégalité :

$$\frac{du(t)}{dt} \leq c_1(t)u(t) + c_2(t),$$

où $c_i, i = 1, 2$ sont des fonctions intégrables, alors :

$$u(t) \leq \left[u(0) + \int_0^1 c_2(\zeta) \exp\left(-\int_0^\zeta c_1(\tau) d\tau\right) d\zeta \right] \exp\left(\int_0^1 c_1(\tau) d\tau\right).$$

- **Remarque :**

Si $c_1(t)$ est une constante positive non nulle ($c_1(t) \equiv c_1$) et $c_2(t)$ est une fonction croissante alors :

$$u(t) \leq \exp(c_1 t) u(0) + \frac{\exp(c_1 t) - 1}{c_1} c_2(t),$$

et
$$\frac{du(t)}{dt} \leq [c_1 u(0) + c_2(t)] \exp(c_1 t).$$

- **Théorème 1 : (Théorème de représentation de Riesz-Frechet)**

Soit H un espace de Hilbert .

Etant donné $\varphi \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que :

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v), \quad \forall v \in H,$$

de plus on a : $|f| = \|\varphi\|_{H'}.$

- **Théorème 2 : (Alternative de Fredholm)**

Soit E un espace de Banach muni de la norme $\| \cdot \|$.

Si T est un opérateur linéaire borné et compact dans E alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $I + T$ est surjectif, c'est-à-dire : $R(I + T) = E$.
- ii) $I + T$ est injectif, c'est-à-dire : $\text{Ker}(I + T) = \{0_E\}$.
- iii) $I + T$ est un isomorphisme et il existe une constante $c \geq 0$ telle que :

$$\|u\| \leq c \|(I + T)u\|, \quad \forall u \in E.$$

- **Inégalité de Cauchy-Schwartz :**

Soient a et b deux membres arbitraires, on a :

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

- **Définition d'une équation de type composite:**

On dit qu'une équation est de type composite si elle admet en chaque point des caractéristiques réelles et des caractéristiques complexes conjuguées.

- **Exemple:**

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = f.$$

Cette équation admet une caractéristique réelle et deux caractéristiques complexes conjuguées.

- **Remarque:**

Il ne faut pas confondre entre équation de type composite et une équation de type mixte.

En effet une équation de type mixte, est une équation qui change de type dans différentes parties du domaine où elle est donnée. A titre d'exemple, l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = f, \text{ est:}$$

- hyperbolique si : $x < 0$

- elliptique si : $x > 0$

- parabolique si : $x = 0$.

Partie 1 : Problème composite à partie principale

1. Position du problème :

Dans l'ouvert rectangulaire $Q_T = \Omega \times (0, T)$, où $\Omega = (0, 1)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $T > 0$, on considère l'équation différentielle de type composite de la forme :

$$(1.1) \quad L_0 u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = f(x, t), \quad \text{dans } Q_T,$$

où a, b des constantes strictement positives et f une fonction donnée.

A cette équation, on associe les conditions initiales suivantes :

$$(1.2) \quad u(x, 0) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

La condition de Dirichlet homogène :

$$(1.4) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \text{sur } (0, T),$$

Les conditions au bord :

$$(1.5) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t), \quad \text{sur } (0, T),$$

et la condition finale :

$$(1.6) \quad u(x, T) = 0, \quad \text{sur } \Omega.$$

Parallèlement au problème (1.1)-(1.6), on considère son problème dual. On note L_0^* le dual formel de l'opérateur L_0 , que l'on définit relativement au produit scalaire dans l'espace $L_2(Q_T)$ à l'aide de l'égalité suivante :

$$(1.7) \quad (L_0 u, v) = (u, L_0^* v).$$

Pour tout u et v de $C_0^{3,4}(Q_T)$, où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire dans $L_2(Q_T)$.

D'où on considère l'équation suivante :

$$(1.8) \quad L_0^* v = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = g(x, t),$$

Le problème dual consiste à résoudre dans le rectangle Q_T , l'équation (1.8) par rapport à la fonction v vérifiant la condition initiale :

$$(1.9) \quad v(x, 0) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

Les conditions finales :

$$(1.10) \quad v(x, T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, T) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

et les conditions aux limites :

$$(1.11) \quad v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad \text{sur } (0, T),$$

$$(1.12) \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1, t) = 0, \quad \text{sur } (0, T).$$

2. Espaces fonctionnels :

On désigne le domaine de définition de l'opérateur L_0 par : $D(L_0) = H_0^{3,4}(Q_T)$, le sous-espace de l'espace de Sobolev $H^{3,4}(Q_T)$, constitué des éléments u vérifiant les conditions (1.2)-(1.6). On définit également le domaine de définition de l'opérateur L_0^* par

$D(L_0^*) = H_0^{3,4}(Q_T)$ constitué de tous les éléments v de $H^{3,4}(Q_T)$ vérifiant les conditions (1.9)-(1.12).

On note H_ρ^2 l'espace de Sobolev avec poids, défini par :

$$H_\rho^2(Q_T) = \left\{ u \in H^1(Q_T) / \rho(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \in L_2(Q_T), \rho(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L_2(Q_T) \right\},$$

où $\rho(t) = (T - t)^{\frac{1}{2}}$.

Soit $H_0^2(Q_T)$ le sous-espace de $H_p^2(Q_T)$, dont les éléments vérifient les conditions suivantes :

$$(2.1) \quad u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(2.2) \quad u(x,T) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(2.3) \quad u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , \quad \text{sur } (0,T),$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \quad , \quad \text{sur } (0,T).$$

Soit $H_0^{-2}(Q_T)$ l'espace dual de $H_0^2(Q_T)$ par rapport à la forme bilinéaire canonique $\langle u, v \rangle$, $u \in H_0^{-2}(Q_T)$, $v \in H_0^2(Q_T)$, prolongement par continuité de la forme bilinéaire (u, v) où $u \in L_2(Q_T)$, et $v \in H_0^2(Q_T)$.

3. Inégalité de l'énergie et ses conséquences :

Le problème (1.1)-(1.6) sera considéré comme résolution de l'équation opérationnelle :

$$(3.1) \quad L_0 u = f \quad , \quad u \in D(L_0),$$

Où l'opérateur L_0 est engendré par l'équation (1.1).

Et le problème (1.8)-(1.12) comme résolution de l'équation opérationnelle suivante :

$$(3.2) \quad L_0^* v = g \quad , \quad v \in D(L_0^*).$$

Pour résoudre l'équation (3.1) pour tout $f \in H_0^{-2}(Q_T)$, on construit une extension L_0 de l'opérateur L_0 , dont l'image $R(L_0)$ coïncide avec l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$.

Pour construire l'extension L_0 de l'opérateur L_0 , on complète $D(L_0)$ par les éléments qui rendent la forme bilinéaire $\Phi(u, v)$ continue par rapport à v , c'est-à-dire :

Une fonction $u \in H_0^2(Q_T)$ sera considérée comme élément de $D(L_0)$ (domaine de définition de L_0), si l'application :

$$v \longrightarrow \Phi(u, v) = (u, L_0^* v),$$

est une fonctionnelle linéaire continue sur l'ensemble $H_0^{3,4}(Q_T)$, dense dans l'espace $H_0^2(Q_T)$ muni de la topologie induite de $H_0^2(Q_T)$.

Donc, la fonctionnelle $\Phi(u, v)$ admet un prolongement continu, désigné par le même symbole sur tout $H_0^2(Q_T)$. D'après le théorème de Riesz, il existe un élément unique $L_0 u \in H_0^{-2}(Q_T)$ tel que :

$$\Phi(u, v) = \langle L_0 u, v \rangle,$$

pour tout $u \in D(L_0)$ et pour tout $v \in H_0^2(Q_T)$.

On note $\|\cdot\|$ la norme dans $L_2(Q_T)$, et $\|\cdot\|_{p,0}$ la norme dans l'espace de Sobolev $H_0^p(Q_T)$,

$p \in \mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs).

La norme de $L_0 u$ est définie par la formule :

$$\|L_0 u\|_{-2,0} = \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(u, v)|}{\|v\|_{2,0}}.$$

De manière analogue, à partir de la forme bilinéaire :

$$\Psi(u, v) = (L_0 u, v),$$

on construit l'extension L_0^* de l'opérateur L_0 .

- Définition 3.1 :

La solution de l'équation opérationnelle :

$$(3.3) \quad L_0 u = f, \quad u \in D(L_0),$$

est appelée solution généralisée (faible) du problème (1.1)-(1.6), et la solution de l'équation :

$$(3.4) \quad L_0^* v = g, \quad v \in D(L_0^*),$$

solution généralisée du problème dual (1.8)-(1.12).

- Remarque :

La résolution des problèmes (1.1)-(1.6) et (1.8)-(1.12) est basée sur les inégalités de l'énergie pour les opérateurs L_0 et L_0^* .

- Théorème 3.1 :

Les opérateurs L_0 et L_0^* , engendrés par les problèmes (1.1)-(1.6) et (1.8)-(1.12) respectivement, satisfont les estimations à priori suivantes :

$$(3.5) \quad \|u\|_{2,0} \leq c \|L_0 u\|_{-2,0}, \quad \forall u \in D(L_0),$$

$$(3.6) \quad \|v\|_{2,0} \leq c^* \|L_0^* v\|_{-2,0}, \quad \forall v \in D(L_0^*),$$

où les constantes $c > 0$ et $c^* > 0$ ne dépendent pas de u et v .

- Démonstration :

On démontre dans un premier lieu l'inégalité (3.5) pour les fonctions assez régulières, c'est-à-dire $u \in D(L_0)$; dans ce cas on a :

$$(3.7) \quad \Phi(u, v) = (L_0 u, v).$$

Dans cette dernière égalité, on pose :

$$Mu = v(x, t) = (t - T) u.$$

En intégrant par parties, la forme bilinéaire $\Phi(u, v)$ peut-être écrite sous une forme plus simple. Pour cela, on considère séparément les intégrales qui la composent.

$$\begin{aligned} (L_0 u, (t - T) u) &= \int_{Q_T} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) [(t - T) u] dx dt, \\ &= \int_{Q_T} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + b \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - a \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - ab \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right] [(t - T) u] dx dt, \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions (1.2)-(1.6), et du fait que le poids $(t - T)$ s'annule pour $t = T$, à l'aide d'intégration par parties successives, on calcule les intégrales I_1 , I_2 , I_3 et I_4 .

La première intégrale peut-être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{Q_T} (t - T) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} u \, dx dt, \\
 &= - \int_{Q_T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial t} [(t - T)u] \, dx dt, \\
 &= - \int_{Q_T} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u + \frac{1}{2} (t - T) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] \, dx dt, \\
 &= \frac{3}{2} \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \, dx dt.
 \end{aligned}$$

La seconde intégrale I_2 peut-être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{Q_T} b(t - T) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} u \, dx dt, \\
 &= - \int_{Q_T} b(t - T) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \, dx dt, \\
 &= \frac{1}{2} \int_{Q_T} b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \, dx dt.
 \end{aligned}$$

On a également pour I_3 :

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{Q_T} a(t - T) \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} u \, dx dt, \\
 &= \int_{Q_T} a(t - T) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 \, dx dt.
 \end{aligned}$$

Et enfin l'intégrale I_4 peut-être transformée comme suit :

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_{Q_T} ab(t - T) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} u \, dx dt, \\
 &= \int_{Q_T} ab(t - T) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \, dx dt.
 \end{aligned}$$

D'où en ajoutant membre à membre les intégrales précédentes on obtient :

$$2(L_0 u, (t - T)u) = 3 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + \int_{Q_T} b \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} a (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right)^2 dxdt + \\ + 2 \int_{Q_T} ab (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dxdt.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$3 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + \int_{Q_T} b \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} a (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right)^2 dxdt + \\ + 2 \int_{Q_T} ab (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L_0 u)^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_T} (Mu)^2 dxdt \\ \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L_0 u)^2 dxdt + \varepsilon T^2 \int_{Q_T} u^2 dxdt.$$

On a pour tout $u \in D(L_0)$ l'estimation de type Poincaré suivante :

$$(3.8) \quad \|u\| \leq 2T \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|, \quad \forall u \in D(L_0),$$

en utilisant l'inégalité (3.8) on obtient :

$$3 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + \int_{Q_T} b \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} a (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right)^2 dxdt + \\ + 2 \int_{Q_T} ab (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L_0 u)^2 dxdt + 4\varepsilon T^4 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt.$$

Et d'autre part, on a :

$$\frac{1}{4T^2} \int_{Q_T} u^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + \int_{Q_T} b \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} a (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right)^2 dxdt + \\ + 2 \int_{Q_T} ab (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L_0 u)^2 dxdt + 4\varepsilon T^4 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt.$$

Qui s'écrit également :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4T^2} \int_{Q_T} u^2 dxdt + (2 - 4\varepsilon T^4) \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} a (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + \\ & + 2 \int_{Q_T} ab (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L_0 u)^2 dxdt. \end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{4T^4}$ et en minorant le membre de gauche de l'inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dxdt + \int_{Q_T} (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt \leq \\ & \leq c \int_{Q_T} (L_0 u)^2 dxdt. \end{aligned}$$

où c est une constante indépendante de u.

De cette dernière inégalité découle immédiatement l'inégalité recherchée (3.5) et le théorème 3.1 est démontré.

Pour $u \in D(L_0)$, on utilise les opérateurs de régularisation de Friedrichs [19].

- **Théorème 4.1 :**

Si les conditions du théorème 3.1 sont vérifiées alors pour toute fonction $f \in H_0^{-2}(Q_T)$ (respectivement $g \in H_0^{-2}(Q_T)$), le problème (1.1)-(1.6) (respectivement (1.8)-(1.12)) admet une et une seule solution généralisée.

- **Démonstration :**

La démonstration de ce théorème est analogue à celle proposée dans [2], [14]. En effet, de l'inégalité (3.5) découle l'unicité de la solution. Elle assure également la fermeture de l'ensemble image $R(L_0)$ de l'opérateur L_0 . Pour montrer l'identité $R(L_0) = H_0^{-2}(Q_T)$, on montre d'abord l'inclusion $\overline{R(L_0)} \subset R(L_0)$. Ensuite on montre la densité des éléments $L_0 u$ dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$ lorsque u parcourt $D(L_0)$.

En effet, soit $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$, constituée des éléments de l'ensemble $R(L_0)$. Il lui correspond une suite $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $D(L_0)$ telle que :

$$L_0 u = f_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De l'inégalité (3.5) on déduit que la suite $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy dans l'espace $H_0^2(Q_T)$. Car :

$$\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ une suite de Cauchy} \Leftrightarrow \left\{ \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq n_0 : \|f_p - f_q\| < \varepsilon \right\}$$

$$\text{et} \quad \|u_p - u_q\|_{2,0} \leq c \|L_0(u_p - u_q)\|_{-2,0} = c \|f_p - f_q\|_{-2,0} < c \varepsilon.$$

La suite (u_k) converge vers un élément $u \in H_0^2(Q_T)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonctionnelle :

$$v \longrightarrow \Phi(u_k, v),$$

est continue dans $H_0^2(Q_T)$. Ce qui entraîne la continuité de la fonctionnelle :

$$v \longrightarrow \Phi(u, v).$$

On définit : $L_0 u = f$, avec $f = \lim f_k$.

D'où on obtient l'inclusion $\overline{R(L_0)}$ dans $R(L_0)$.

Pour montrer la densité de $R(L_0)$ dans $H_0^{-2}(Q_T)$, on montre un résultat équivalent, qui consiste à montrer que l'orthogonal se réduit à l'élément nul, c'est-à-dire : $R(L_0)^\perp = \{0\}$.

Soit $v \in H_0^{-2}(Q_T)$ tel que : $\langle L_0 u, v \rangle = 0, \quad \forall u \in D(L_0)$.

Pour $u \in D(L_0)$ et $v \in H_0^{-2}(Q_T)$ et à partir de l'égalité (1.7) on a :

$$(L_0 u, v) = (u, L_0^* v) = 0.$$

De cette dernière égalité, et en utilisant l'inégalité (3.6) on déduit que v est nulle dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$, lorsque u parcourt $D(L_0)$.

La seconde partie du théorème, pour le problème dual se démontre de manière analogue en utilisant le diviseur :

$$M * v = u(x, t) = tv.$$

Partie 2 : Problème composite avec partie secondaire

1. Position du problème :

Dans l'ouvert rectangulaire $Q_T = \Omega \times (0, T)$, où $\Omega = (0,1)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $T > 0$, on complète le problème étudié dans la première partie, en ajoutant les membres d'ordre inférieur. D'où on considère l'équation différentielle de type composite suivante :

$$(1.1) \quad L_0 u = L_0 u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u = f \quad , \quad \text{dans } Q_T,$$

$$\text{avec : } L_0 u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right),$$

où a, b des constantes strictement positives, λ une constante strictement négative et f une fonction donnée.

A cette équation, on associe les conditions initiales suivantes :

$$(1.2) \quad u(x, 0) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

La condition de Dirichlet homogène :

$$(1.4) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad , \quad \text{sur } (0, T),$$

Les conditions au bord :

$$(1.5) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) \quad , \quad \text{sur } (0, T),$$

et la condition finale :

$$(1.6) \quad u(x, T) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega.$$

Parallèlement au problème (1.1)-(1.6), on considère son problème dual. On note L^* le dual formel de l'opérateur L , que l'on définit relativement au produit scalaire dans l'espace $L_2(Q_T)$ à l'aide de l'égalité suivante :

$$(1.7) \quad (L u, v) = (u, L^* v).$$

Pour tout u et v de $C_0^{3,4}(Q_T)$, où $(.,.)$ désigne le produit scalaire dans $L_2(Q_T)$.

D'où on considère l'équation suivante :

$$(1.8) \quad L^* v = L_0^* v + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda v = g(x, t),$$

$$\text{avec: } L_0^* v = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right).$$

Le problème dual consiste à résoudre dans le rectangle Q_T , l'équation (1.8) par rapport à la fonction v vérifiant la condition initiale :

$$(1.9) \quad v(x, 0) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

Les conditions finales :

$$(1.10) \quad v(x, T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, T) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

et les conditions aux limites :

$$(1.11) \quad v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad \text{sur } (0, T),$$

$$(1.12) \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1, t) = 0, \quad \text{sur } (0, T).$$

2. Espaces fonctionnels :

On désigne le domaine de définition de l'opérateur L par : $D(L) = H_0^{3,4}(Q_T)$, le sous-espace de l'espace de Sobolev $H^{3,4}(Q_T)$, constitué des éléments u vérifiant les conditions (1.2)-(1.6). On définit également le domaine de définition de l'opérateur L^* par

$D(L) = H_0^{3,4}(Q_T)$ constitué de tous les éléments v de $H^{3,4}(Q_T)$ vérifiant les conditions (1.9)-(1.12).

On note H_p^2 l'espace de Sobolev avec poids, défini par :

$$H_p^2(Q_T) = \left\{ u \in H^1(Q_T) / \rho(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \in L_2(Q_T), \rho(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L_2(Q_T) \right\},$$

où $\rho(t) = (T - t)^{\frac{1}{2}}$.

Soit $H_0^2(Q_T)$ le sous-espace de $H_p^2(Q_T)$, dont les éléments vérifient les conditions suivantes :

$$(2.1) \quad u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad , \text{ sur } \Omega,$$

$$(2.2) \quad u(x, T) = 0 \quad , \text{ sur } \Omega,$$

$$(2.3) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad , \text{ sur } (0, T),$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 \quad , \text{ sur } (0, T).$$

Soit $H_0^{-2}(Q_T)$ l'espace dual de $H_0^2(Q_T)$ par rapport à la forme bilinéaire canonique $\langle u, v \rangle$, $u \in H_0^{-2}(Q_T)$, $v \in H_0^2(Q_T)$, prolongement par continuité de la forme bilinéaire (u, v) où $u \in L_2(Q_T)$, et $v \in H_0^2(Q_T)$.

3. Inégalité de l'énergie et ses conséquences :

Le problème (1.1)-(1.6) sera considéré comme résolution de l'équation opérationnelle :

$$(3.1) \quad L u = f \quad , \quad u \in D(L),$$

où l'opérateur L est engendré par l'équation (1.1).

Et le problème (1.8)-(1.12) comme résolution de l'équation opérationnelle suivante :

$$(3.2) \quad L * v = g \quad , \quad v \in D(L^*).$$

Pour résoudre l'équation (3.1) pour tout $f \in H_0^{-2}(Q_T)$, on construit une extension L de l'opérateur L , dont l'image $R(L)$ coïncide avec l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$.

Pour construire l'extension L de l'opérateur L , on complète $D(L)$ par les éléments qui rendent la forme bilinéaire $\Phi(u, v)$ continue par rapport à v , c'est-à-dire :

Une fonction $u \in H_0^2(Q_T)$ sera considéré comme élément de $D(L)$ (domaine de définition de L), si l'application :

$$v \longrightarrow \Phi(u, v) = (u, L^* v),$$

est une fonctionnelle linéaire continue sur l'ensemble $H_0^{3,4}(Q_T)$, dense dans l'espace $H_0^2(Q_T)$ muni de la topologie induite de $H_0^2(Q_T)$. Donc, la fonctionnelle $\Phi(u, v)$ admet un prolongement continu, désigné par le même symbole sur tout $H_0^2(Q_T)$. D'après le théorème de Riesz, il existe un élément unique $Lu \in H_0^{-2}(Q_T)$ tel que :

$$\Phi(u, v) = \langle Lu, v \rangle,$$

pour tout $u \in D(L)$ et pour tout $v \in H_0^2(Q_T)$.

On note $\|\cdot\|$ la norme dans $L_2(Q_T)$, et $\|\cdot\|_{p,0}$ la norme dans l'espace de Sobolev $H_0^p(Q_T)$, $p \in \mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs).

La norme de Lu est défini par la formule :

$$\|Lu\|_{-2,0} = \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(u, v)|}{\|v\|_{2,0}}.$$

De manière analogue, à partir de la forme bilinéaire :

$$\Psi(u, v) = (L u, v),$$

on construit l'extension L^* de l'opérateur L .

- Définition 3.1 :

La solution de l'équation opérationnelle :

$$(3.3) \quad Lu = f, \quad u \in D(L),$$

est appelée solution généralisée (faible) du problème (1.1)-(1.6), et la solution de l'équation :

$$(3.4) \quad L^* v = g, \quad v \in D(L^*),$$

solution généralisée du problème dual (1.8)-(1.12).

- Remarque :

La résolution des problèmes (1.1)-(1.6) et (1.8)-(1.12) est basée sur les inégalités de l'énergie pour les opérateurs L et L^* .

- Théorème 3.1 :

Pour tout $\lambda \leq -\lambda_0$ tel que $\lambda_0 > 0$, les opérateurs L et L^* , engendrés par les problèmes (1.1)-(1.6) et (1.8)-(1.12) respectivement satisfont les estimations à priori suivantes :

$$(3.5) \quad \|u\|_{2,0} \leq c \|Lu\|_{-2,0}, \quad \forall u \in D(L),$$

$$(3.6) \quad \|v\|_{2,0} \leq c^* \|L^* v\|_{-2,0}, \quad \forall v \in D(L^*),$$

où les constantes $c > 0$ et $c^* > 0$ ne dépendent pas de u et v .

- Démonstration :

On démontre dans un premier lieu l'inégalité (3.5) pour les fonctions assez régulières, c'est-à-dire $u \in D(L)$. Dans ce cas on a :

$$(3.7) \quad \Phi(u, v) = (Lu, v).$$

Dans cette dernière égalité, on pose :

$$Mu = v(x, t) = (t - T)u.$$

En intégrant par parties, la forme bilinéaire $\Phi(u, v)$ peut-être écrite sous une forme plus simple. Pour cela on considère séparément les intégrales qui la composent.

$$(Lu, (t - T)u) = (L_0 u, (t - T)u) + \int_{Q_T} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u \right] [(t - T)u] dx dt,$$

$$\begin{aligned}
(L u, (t - T)u) &= (L_0 u, (t - T)u) + \int_{Q_T} (t - T) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u \, dxdt + \int_{Q_T} (t - T) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u \, dxdt + \\
&\quad + \int_{Q_T} \lambda (t - T) u^2 \, dxdt, \\
&= (L_0 u, (t - T)u) + I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

En tenant compte des conditions (1.2)-(1.6), et du fait que le poids $(t - T)$ s'annule pour $t = T$, à l'aide d'intégration par parties successives, on calcule les intégrales suivantes :

D'après la première partie on a :

$$\begin{aligned}
2(L_0 u, (t - T)u) &= 3 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \, dxdt + \int_{Q_T} b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \, dxdt + 2 \int_{Q_T} a (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 \, dxdt + \\
&\quad + 2 \int_{Q_T} ab (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \, dxdt.
\end{aligned}$$

D'autre part on a,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{Q_T} (t - T) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u \, dxdt, \\
&= \int_{Q_T} (T - t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \, dxdt.
\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{Q_T} (t - T) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u \, dxdt, \\
&= \int_{Q_T} (T - t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \, dxdt.
\end{aligned}$$

D'où en ajoutant membre à membre les intégrales précédentes on obtient :

$$\begin{aligned}
2(L u, (t - T)u) &= 3 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \, dxdt + \int_{Q_T} b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \, dxdt + 2 \int_{Q_T} a (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 \, dxdt + \\
&\quad + 2 \int_{Q_T} ab (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \, dxdt + 2 \int_{Q_T} (T - t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \, dxdt + \\
&\quad + 2 \int_{Q_T} (T - t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \, dxdt + 2 \int_{Q_T} \lambda (t - T) u^2 \, dxdt.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de cauchy-schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned}
& 3 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} a (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + \\
& + 2 \int_{Q_T} ab (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt + \\
& + 2 \int_{Q_T} \lambda (t-T) u^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_T} (M u)^2 dxdt, \\
& \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt + \varepsilon T^2 \int_{Q_T} u^2 dxdt.
\end{aligned}$$

On a pour tout $u \in D(L)$ l'estimation de type Poincaré suivante

$$(3.8) \quad \|u\| \leq 2T \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|, \quad \forall u \in D(L),$$

En utilisant l'inégalité (3.8) on obtient :

$$\begin{aligned}
& 3 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} a (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + \\
& + 2 \int_{Q_T} ab (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt + \\
& + 2 \int_{Q_T} \lambda (t-T) u^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt + 4\varepsilon T^4 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité peut-être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
& (3 - 4\varepsilon T^4) \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} a (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + \\
& + 2 \int_{Q_T} ab (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \\
& + 2 \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt - 2 \int_{Q_T} \lambda (T-t) u^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt
\end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon = \frac{5}{8T^4}$ et en minorant le membre de gauche de l'inégalité, on obtient :

$$\int_{Q_T} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dxdt + \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + \\ + \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt + \lambda_0 \int_{Q_T} u^2 dxdt \leq c \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt$$

D'où on déduit :

$$(3.9) \quad \|u\|_{2,0} + \lambda_0 \|u\| \leq c \|L u\|_{-2,0},$$

où c est une constante indépendante de u .

De cette dernière inégalité on déduit l'inégalité recherchée (3.5) et le théorème 3.1 est démontré.

Pour $u \in D(L)$, on utilise les opérateurs de régularisation de Friedrichs [19].

Soit $u \in D(L)$, en vertu de la propriété 1 $J_\varepsilon u \in D(L)$ donc $J_\varepsilon u$ vérifie l'inégalité (3.5), d'où :

$$(3.10) \quad \|J_\varepsilon u\|_{H^2(Q_T)} \leq c \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(J_\varepsilon u, v)|}{\|v\|_{H^2(Q_T)}}.$$

Nous allons d'abord calculer : $\Phi(J_\varepsilon u, v)$.

Pour cela nous utilisons la propriété 2 et la propriété 3 des opérateurs de régularisation de Friedrichs et on décompose $\Phi(J_\varepsilon u, v)$ sous la forme :

$$\Phi(J_\varepsilon u, v) = (l_0 J_\varepsilon u, v) + (l_1 J_\varepsilon u, v) + (l_2 J_\varepsilon u, v) + (l_3 J_\varepsilon u, v) + (l_4 J_\varepsilon u, v) + \\ + (l_5 J_\varepsilon u, v) + \lambda \int_{Q_T} u^2 dxdt,$$

où les opérateurs l_0, l_1, l_2, l_3, l_4 et l_5 sont donnés par :

$$l_0 = \frac{\partial^3}{\partial t^3},$$

$$l_1 = b \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2},$$

$$l_2 = -a \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial x^2},$$

$$l_3 = -ab \frac{\partial^4}{\partial x^4},$$

$$l_4 = \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$l_5 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

En effectuant des intégrations par parties, et en tenant des conditions (1.2)-(1.6) on aura :

$$\begin{aligned} (l_0 J_\varepsilon u, v) = & - \int_{Q_T} u J_\varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} dx dt + \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} J_\varepsilon v \right] dx dt - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial t} J_\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} \right] dx dt + \\ & + \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[u J_\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] dx dt. \end{aligned}$$

D'où :

$$(l_0 J_\varepsilon u, v) = - \int_{Q_T} u J_\varepsilon \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} dx dt.$$

Pour le deuxième terme on a :

$$\begin{aligned} (l_1 J_\varepsilon u, v) = & - \int_{Q_T} b u J_\varepsilon \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} dx dt + \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} J_\varepsilon v \right] dx dt - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left[b \frac{\partial u}{\partial x} J_\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} \right] dx dt + \\ & + \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left[b u J_\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right] dx dt. \end{aligned}$$

D'où :

$$(l_1 u, v) = - \int_{Q_T} b u J_\varepsilon \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} dx dt.$$

On a également pour le troisième terme on a :

$$\begin{aligned}(l_2 J_\varepsilon u, v) = & - \int_{Q_T} a u J_\varepsilon \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} dx dt - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[a \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} J_\varepsilon v \right] dx dt + \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left[a \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} J_\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} \right] dx dt - \\ & - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left[a \frac{\partial u}{\partial t} J_\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right] dx dt + \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[a u J_\varepsilon \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} \right] dx dt.\end{aligned}$$

D'où :

$$(l_2 J_\varepsilon u, v) = - \int_{Q_T} a u J_\varepsilon \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} dx dt.$$

Et pour le quatrième terme on a :

$$\begin{aligned}(l_3 J_\varepsilon u, v) = & - \int_{Q_T} ab u J_\varepsilon \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} dx dt - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left[ab \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} J_\varepsilon v \right] dx dt + \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left[ab \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} J_\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx dt - \\ & - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left[ab \frac{\partial u}{\partial x} J_\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] dx dt + \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left[ab u J_\varepsilon \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right] dx dt.\end{aligned}$$

D'où :

$$(l_3 J_\varepsilon u, v) = - \int_{Q_T} ab u J_\varepsilon \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} dx dt.$$

Et le cinquième terme s'écrit comme suit :

$$(l_4 J_\varepsilon u, v) = \int_{Q_T} u J_\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx dt + \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial t} J_\varepsilon v \right] dx dt - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} [u J_\varepsilon v] dx dt.$$

D'où :

$$(l_4 J_\varepsilon u, v) = \int_{Q_T} u J_\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx dt.$$

Enfin pour le dernier terme on a :

$$(l_5 J_\varepsilon u, v) = \int_{Q_T} u J_\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dt + \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} J_\varepsilon v \right] dx dt - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} [u J_\varepsilon v] dx dt.$$

D'où :

$$(l_5 J_\varepsilon u, v) = \int_{Q_T} u J_\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dt.$$

Donc :

$$(3.11) \quad \Phi(J_\varepsilon u, v) = \Phi(u, J_\varepsilon v) + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial t^2} J_\varepsilon v \right)_{L_2(Q_T)} + 2 \left(b \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} J_\varepsilon v \right)_{L_2(Q_T)}.$$

$$\text{On note :} \quad K = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial t^2} J_\varepsilon v \right)_{L_2(Q_T)} + 2 \left(b \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} J_\varepsilon v \right)_{L_2(Q_T)}.$$

On a pour tout $\delta > 0$ et $c(\delta) > 0$ qui dépend d'une manière continue de δ l'estimation suivante :

$$(3.12) \quad \|u\|_{1,0} \leq \delta \|u\|_{2,0} + c(\delta) \|u\|.$$

En utilisant la propriété 4 des opérateurs de régularisation, on obtient :

$$K \leq \|u\|_{1,0} \|v\|_{2,0}.$$

En vertu de l'inégalité (3.11) on aura :

$$K \leq (\delta \|u\|_{2,0} + c(\delta) \|u\|) \|v\|_{2,0}.$$

A partir de l'inégalité (3.9) on obtient l'inégalité suivante :

$$\|u\|_{2,0} + \lambda_0 \|u\| \leq c \|L u\|_{-2,0}, \quad \forall u \in D(L),$$

Et à partir de (3.11) et (3.12), on obtient :

$$(3.13) \quad \|J_\varepsilon u\|_{2,0} + \lambda_0 \|u\| \leq c \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(u, J_\varepsilon v)|}{\|v\|_{2,0}} + \delta \|u\|_{2,0} + c(\delta) \|u\|,$$

$$\text{puisque :} \quad \|J_\varepsilon v\|_{H^2(Q_T)} \leq \|v\|_{H^2(Q_T)}.$$

Donc :

$$(3.14) \quad \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(u, J_\varepsilon v)|}{\|v\|_{2,0}} \leq \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(u, J_\varepsilon v)|}{\|J_\varepsilon v\|_{2,0}} \leq \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(u, v)|}{\|v\|_{2,0}}.$$

En vertu de (3.14), l'inégalité (3.13) peut-être écrite ainsi :

$$\|J_\varepsilon u\|_{2,0} + \lambda_0 \|u\| \leq c \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(u, v)|}{\|v\|_{2,0}} + \delta \|u\|_{2,0} + c(\delta) \|u\|.$$

En passant à la limite dans la dernière inégalité, quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et du fait que $J_\varepsilon u \rightarrow u$ dans $H_0^2(Q_T)$ donc :

$$(3.15) \quad \|u\|_{2,0} + \lambda_0 \|u\| \leq c \|Lu\|_{-2,0} + \delta \|u\|_{2,0} + c(\delta) \|u\|.$$

En vertu du fait que δ est une valeur suffisamment petite, et λ_0 une valeur suffisamment grande, de l'inégalité (3.14) découle immédiatement l'inégalité (3.5).

4. Existence et unicité de la solution :

- Théorème 4.1 :

Si les conditions du théorème 3.1 sont vérifiées alors pour toute fonction $f \in H_0^{-2}(Q_T)$ (respectivement $g \in H_0^{-2}(Q_T)$), le problème (1.1)-(1.6) (respectivement (1.8)-(1.12)) admet une et une seule solution généralisée.

- Démonstration :

La démonstration de ce théorème est analogue à celle proposée dans [2], [14]. En effet, de l'inégalité (3.5) découle l'unicité de la solution. Elle assure également la fermeture de l'ensemble image $R(L)$ de l'opérateur L .

Pour montrer l'identité $R(L) = H_0^{-2}(Q_T)$, on montre d'abord l'inclusion $\overline{R(L)} \subset R(L)$.

Ensuite on montre la densité des éléments Lu dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$ lorsque u parcourt $D(L)$.

En effet, soit $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$, constituée des éléments de l'ensemble $R(L)$. Il lui correspond une suite $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $D(L)$ telle que :

$$Lu_k = f_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De l'inégalité (3.5) on déduit que la suite $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy dans l'espace $H_0^2(Q_T)$. Car :

$$\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ une suite de Cauchy} \Leftrightarrow \left\{ \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq n_0 : \|f_p - f_q\| < \varepsilon \right\}$$

$$\text{et } \|u_p - u_q\|_{2,0} \leq c \|L_0(u_p - u_q)\|_{-2,0} = c \|f_p - f_q\|_{-2,0} < c \varepsilon.$$

La suite (u_k) converge vers un élément $u \in H_0^2(Q_T)$.

:Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonctionnelle :

$$v \rightarrow \Phi(u_k, v),$$

est continue dans $H_0^2(Q_T)$. Ce qui entraîne la continuité de la fonctionnelle :

$$v \rightarrow \Phi(u, v).$$

On définit : $Lu = f$, avec $f = \lim f_k$.

D'où on obtient l'inclusion $\overline{R(L)}$ dans $R(L)$.

Pour montrer la densité de $R(L)$ dans $H_0^{-2}(Q_T)$, on montre un résultat équivalent, qui

consiste à montrer que l'orthogonal se réduit à l'élément nul, c'est-à-dire : $R(L)^\perp = \{0\}$.

Soit $v \in H_0^{-2}(Q_T)$ tel que : $\langle Lu, v \rangle = 0$, $\forall u \in D(L)$.

Pour $u \in D(L)$ et $v \in H_0^{-2}(Q_T)$ et à partir de l'égalité (1.7) on a :

$$(Lu, v) = (u, L^*v) = 0.$$

De cette dernière égalité, et en utilisant l'inégalité (3.6) on déduit que v est nulle dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$, lorsque u parcourt $D(L)$.

La seconde partie du théorème, pour le problème dual se démontre de manière analogue en utilisant le diviseur :

$$M^*v = u(x, t) = tv.$$

Partie 3 : Problème composite dans l'espace :

1. Position du problème :

Soit Ω un ouvert borné de points $x = (x_1, \dots, x_n)$ de l'espace $\mathbb{R}^n$, à frontière régulière par morceaux $\Gamma = \partial\Omega$. Dans le cylindre $Q_T = \Omega \times (0, T)$ avec $T > 0$, on considère l'équation différentielle de type composite suivante :

$$(1.1) \quad L u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - A \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B u \right) = f \quad , \quad \text{dans } Q_T,$$

Avec :

$$\begin{aligned} Au &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \\ \text{et} \quad Bu &= \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

A cette équation, on associe les conditions initiales suivantes :

$$(1.2) \quad u(x, 0) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

La condition finale :

$$(1.4) \quad u(x, T) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

et les conditions aux limites homogènes :

$$(1.5) \quad u|_{\Sigma} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Sigma} = 0.$$

où $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$ désigne la surface latérale du cylindre Q_T , et ν le vecteur unitaire de la normale extérieure à ∂Q_T , f une fonction donnée et a_{ij}, b_{ij} des constantes strictement positives vérifiant les conditions suivantes :

$$(1.6) \quad a_{ij} = a_{ji} \quad , \quad b_{ij} = b_{ji} \quad ; i, j = 1, \dots, n.$$

$$(1.7) \quad a_{ij} \zeta_i \zeta_j \geq \alpha |\zeta|^2 \quad , \quad b_{ij} \zeta_i \zeta_j \geq \beta |\zeta|^2 \quad , \quad \forall \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$(1.8) \quad b_{kj} a_{il} \zeta_i \zeta_{kl} \geq \gamma |\zeta_{ij}|^2.$$

Parallèlement au problème (1.1)-(1.5), on considère son problème dual . On note L^* le dual formel de l'opérateur L , que l'on définit relativement au produit scalaire dans l'espace $L^2(Q_T)$ à l'aide de l'égalité suivante :

$$(1.9) \quad (Lu, v) = (u, L^*v).$$

Pour tout u et v de $C_0^{3,4}(Q_T)$, où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire dans $L_2(Q_T)$.

D'où on considère l'équation suivante :

$$(1.10) \quad L^*v = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + Bv\right) = g, \quad \text{dans } Q_T,$$

Le problème dual consiste à résoudre dans le rectangle Q_T , l'équation (1.10) par rapport à la fonction v vérifiant la condition initiale :

$$(1.11) \quad v(x, 0) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

De Les conditions finales :

$$(1.12) \quad v(x, T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, T) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

et les conditions aux limites :

$$(1.13) \quad v|_{\Sigma} = \frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\Sigma} = 0.$$

2. Espaces fonctionnels :

On désigne le domaine de définition de l'opérateur L par : $D(L) = H_0^{3,4}(Q_T)$, le sous espace de l'espace de Sobolev $H^{3,4}(Q_T)$, constitué des éléments u vérifiant les conditions (1.2)-(1.5). On définit également le domaine de définition de l'opérateur L^* par

$D(L^*) = H_0^{3,4}(Q_T)$ constitué de tous les éléments v de $H^{3,4}(Q_T)$ vérifiant les conditions (1.11)-(1.13).

On note H_p^2 l'espace de Sobolev avec poids, défini par :

$$H_p^2(Q_T) = \left\{ u \in H^1(Q_T) / \rho(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \in L_2(Q_T), \rho(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L_2(Q_T) \right\},$$

où $\rho(t) = (T - t)^{\frac{1}{2}}$.

Soit $H_0^2(Q_T)$ le sous espace de $H_\rho^2(Q_T)$, dont les éléments vérifient les conditions suivantes :

$$(2.1) \quad u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(2.2) \quad u(x,T) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(2.3) \quad u|_\Sigma = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Sigma = 0.$$

Soit $H_0^{-2}(Q_T)$ l'espace dual de $H_0^2(Q_T)$ par rapport à la forme bilinéaire canonique $\langle u, v \rangle$, $u \in H_0^{-2}(Q_T)$, $v \in H_0^2(Q_T)$, prolongement par continuité de la forme bilinéaire (u, v) où $u \in L^2(Q_T)$, et $v \in H_0^2(Q_T)$.

3. Inégalité de l'énergie et ses conséquences :

Le problème (1.1)-(1.5) sera considéré comme résolution de l'équation opérationnelle :

$$(3.1) \quad L u = f \quad , \quad u \in D(L),$$

Où l'opérateur L est engendré par l'équation (1.1).

Et le problème (1.10)-(1.13) comme résolution de l'équation opérationnelle suivante :

$$(3.2) \quad L^* v = g \quad , \quad v \in D(L^*).$$

Pour résoudre l'équation (3.1) pour tout $f \in H_0^{-2}(Q_T)$, on construit une extension L de l'opérateur L , dont l'image $R(L)$ coïncide avec l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$.

Pour construire l'extension L de l'opérateur L , on complète $D(L)$ par les éléments qui rendent la forme bilinéaire $\Phi(u, v)$ continue par rapport à v , c'est-à-dire :

Une fonction $u \in H_0^2(Q_T)$ sera considéré comme élément de $D(L)$ (domaine de définition de L), si l'application :

$$v \longrightarrow \Phi(u, v) = (u, L^* v),$$

est une fonctionnelle linéaire continue sur l'ensemble $H_0^{3,4}(Q_T)$, dense dans l'espace $H_0^2(Q_T)$ muni de la topologie induite de $H_0^2(Q_T)$.

Donc, la fonctionnelle $\Phi(u, v)$ admet un prolongement continu, désigné par le même symbole sur tout $H_0^2(Q_T)$. D'après le théorème de Riesz, il existe un élément unique $Lu \in H_0^{-2}(Q_T)$ tel que :

$$\Phi(u, v) = \langle Lu, v \rangle,$$

pour tout $u \in D(L)$ et pour tout $v \in H_0^2(Q_T)$.

On note $\| \cdot \|$ la norme dans $L_2(Q_T)$, et $\| \cdot \|_{p,0}$ la norme dans l'espace de Sobolev $H_0^p(Q_T)$,

$p \in \mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs).

La norme de Lu est défini par la formule :

$$\|Lu\|_{-2,0} = \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(u, v)|}{\|v\|_{2,0}}.$$

De manière analogue, à partir de la forme bilinéaire :

$$\Psi(u, v) = (L u, v),$$

on construit l'extension L^* de l'opérateur L .

- **Définition 3.1 :**

La solution de l'équation opérationnelle :

$$(3.3) \quad Lu = f, \quad u \in D(L),$$

est appelée solution généralisée (faible) du problème (1.1)-(1.5), et la solution de l'équation :

$$(3.4) \quad L^* v = g, \quad v \in D(L^*),$$

solution généralisée du problème dual (1.10)-(1.13).

- **Remarque :**

La résolution des problèmes (1.1)-(1.5) et (1.10)-(1.13) est basée sur les inégalités de l'énergie pour les opérateurs L et L^* .

- Théorème 3.1 :

Si les coefficients de l'équation (1.1) vérifient les conditions (1.6)-(1.8), alors les opérateurs L et L^* , engendrés par les problèmes (1.1)-(1.5) et (1.10)-(1.13) respectivement satisfont les estimations à priori suivantes :

$$(3.5) \quad \|u\|_{2,0} \leq c \|Lu\|_{-2,0}, \quad \forall u \in D(L),$$

$$(3.6) \quad \|v\|_{2,0} \leq c^* \|L^* v\|_{-2,0}, \quad \forall v \in D(L^*),$$

où les constantes $c > 0$ et $c^* > 0$ ne dépendent pas de u et v .

- Démonstration :

On démontre dans un premier lieu l'inégalité (3.5) pour les fonctions assez régulières, c'est-à-dire $u \in D(L)$. Dans ce cas on a :

$$(3.7) \quad \Phi(u, v) = (Lu, v).$$

Dans cette dernière égalité, on pose :

$$Mu = v(x, t) = (t - T)u.$$

En intégrant par parties, la forme bilinéaire $\Phi(u, v)$ peut-être écrite sous une forme plus simple. Pour cela on considère séparément les intégrales qui la composent.

$$\begin{aligned} (Lu, (t-T)u) &= \int_{Q_T} \left(\frac{\partial}{\partial t} - A \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \right) [(t-T)u] dx dt \\ &= \int_{Q_T} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_i \partial x_j} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x_i \partial x_j} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i,j=1}^n \sum_{l,k=1}^n a_{il} b_{kj} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i \partial x_l \partial x_k \partial x_j} \right] [(t-T)u] dx dt, \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions (1.2)-(1.5), et du fait que le poids $(t - T)$ s'annule pour $t = T$, à l'aide d'intégration par parties successives, on calcule les intégrales ci dessus :

Pour la première on a :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{Q_T} (t-T) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} u dx dt, \\ &= \frac{3}{2} \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt. \end{aligned}$$

La seconde intégrale peut-être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{Q_T} b_{ij} (t - T) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_i \partial x_j} u \, dx dt, \\
&= - \int_{Q_T} (t - T) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (b_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}) \, dx dt, \\
&= \frac{1}{2} \int_{Q_T} b_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx dt.
\end{aligned}$$

Pour la troisième intégrale on aura :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{Q_T} a_{ij} (t - T) \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x_i \partial x_j} u \, dx dt, \\
&= \int_{Q_T} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_{ij} (t - T) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j} \right] dx dt, \\
&= \int_{Q_T} a_{ij} (t - T) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j} \, dx dt.
\end{aligned}$$

Et enfin, pour I_4 on aura :

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{Q_T} a_{il} b_{kj} (t - T) \frac{\partial^4 u}{\partial x_i \partial x_l \partial x_k \partial x_j} \, dx dt, \\
&= \int_{Q_T} a_{il} b_{kj} (t - T) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \, dx dt.
\end{aligned}$$

D'où en ajoutant membre à membre les intégrales précédentes on obtient :

$$\begin{aligned}
2(L u, (t - T)u) &= 3 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \, dx dt + \int_{Q_T} b_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx dt + 2 \int_{Q_T} a_{ij} (T - t) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j} \, dx dt + \\
&\quad + 2 \int_{Q_T} a_{il} b_{kj} (T - t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \, dx dt.
\end{aligned}$$

En utilisant (1.6), (1.7) et (1.8) on obtient l'estimation suivante :

$$3 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \beta \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dxdt + 2\alpha \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right)^2 dxdt + \\ + 2\gamma \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dxdt \leq 2 \int_{Q_T} L u M u dxdt.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, de cette dernière inégalité on obtient :

$$3 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \beta \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dxdt + 2\alpha \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right)^2 dxdt + \\ + 2\gamma \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_T} (M u)^2 dxdt \\ \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt + \varepsilon T^2 \int_{Q_T} u^2 dxdt.$$

On a pour tout $u \in D(L)$ l'estimation de type Poincaré suivante :

$$(3.8) \quad \|u\| \leq 2T \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|, \quad \forall u \in D(L)$$

En utilisant cette estimation de l'inégalité (3.8) on obtient :

$$3 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \beta \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dxdt + 2\alpha \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right)^2 dxdt + \\ + 2\gamma \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt + 4\varepsilon T^4 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt.$$

Et d'autre part, on a :

$$\frac{1}{4T^2} \int_{Q_T} u^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \beta \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dxdt + 2\alpha \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right)^2 dxdt + \\ + 2\gamma \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt + 4\varepsilon T^4 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt.$$

Que l'on peut écrire encore sous la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4T^2} \int_{Q_T} u^2 dxdt + (2 - 4\varepsilon T^4) \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \beta \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dxdt + \\ & + 2\alpha \int_{Q_T} (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right)^2 dxdt + 2\gamma \int_{Q_T} (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt. \end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{4T^4}$ et en minorant le membre de gauche de l'inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right] dxdt + \int_{Q_T} (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right)^2 dxdt + \\ & + \int_{Q_T} (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dxdt \leq c \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt, \end{aligned}$$

où c est une constante indépendante de u .

De cette dernière inégalité découle immédiatement l'inégalité recherchée (3.5) et le théorème 3.1 est ainsi démontré.

Pour $u \in D(L)$, on utilise les opérateurs de régularisation de Friedrichs [19].

4. Existence et unicité de la solution :

- Théorème 4.1 :

Si les conditions du théorème 3.1 sont vérifiées alors pour toute fonction $f \in H_0^{-2}(Q_T)$ (respectivement $g \in H_0^{-2}(Q_T)$), le problème (1.1)-(1.5) (respectivement (1.10)-(1.13)) admet une et une seule solution généralisée.

- Démonstration :

La démonstration de ce théorème est analogue à celle proposée dans [2], [14]. En effet, de l'inégalité (3.5) découle l'unicité de la solution. Elle assure également la fermeture de l'ensemble image $R(L)$ de l'opérateur L . Pour montrer l'identité $R(L) = H_0^{-2}(Q_T)$, on montre d'abord l'inclusion $\overline{R(L)} \subset R(L)$. Ensuite on montre la densité des éléments $L_0 u$ dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$ lorsque u parcourt $D(L)$.

En effet, soit $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$, constituée des éléments de l'ensemble $R(L)$. Il lui correspond une suite $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $D(L)$ telle que .

$$Lu_k = f_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De l'inégalité (3.5) on déduit que la suite $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy dans l'espace $H_0^2(Q_T)$.

$$\text{Car : } \|u_p - u_q\|_{2,0} \leq c \|L_0(u_p - u_q)\|_{-2,0} = c \|f_p - f_q\|_{-2,0} \rightarrow 0.$$

La suite (u_k) converge vers un élément $u \in H_0^2(Q_T)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonctionnelle :

$$v \rightarrow \Phi(u_k, v),$$

est continue dans $H_0^2(Q_T)$. Ce qui entraîne la continuité de la fonctionnelle :

$$v \rightarrow \Phi(u, v).$$

On définit : $Lu = f$, avec $f = \lim f_k$.

D'où on obtient l'inclusion $\overline{R(L)}$ dans $R(L)$.

Pour montrer la densité de $R(L)$ dans $H_0^{-2}(Q_T)$, on montre un résultat équivalent, qui consiste à montrer que l'orthogonal se réduit à l'élément nul, c'est-à-dire : $R(L)^\perp = \{0\}$.

Soit $v \in H_0^{-2}(Q_T)$ tel que : $\langle Lu, v \rangle = 0$, $\forall u \in D(L)$.

Pour $u \in D(L)$ et $v \in H_0^{-2}(Q_T)$ et à partir de l'égalité (1.7) on a :

$$(Lu, v) = (u, L^*v) = 0.$$

De cette dernière égalité, et en utilisant l'inégalité (3.6) on déduit que v est nulle dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$, lorsque u parcourt $D(L)$.

La seconde partie du théorème, pour le problème dual se démontre de manière analogue en utilisant le diviseur :

$$M^*v = u(x, t) = tv.$$

Partie 1 : Problème composite à partie principale

1. Position du problème :

Dans l'ouvert rectangulaire $Q_T = \Omega \times (0, T)$, où $\Omega = (0, 1)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $T > 0$, on considère l'équation différentielle de type composite de la forme :

$$(1.1) \quad L_0 u \text{ Erreur ! Signet non défini.}$$

Où a, b des constantes strictement positives, $a - b \geq 0$ et f une fonction donnée.

A cette équation, on associe les conditions initiales suivantes :

$$(1.2) \quad u(x, 0) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, 0) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

La condition de Dirichlet homogène :

$$(1.5) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \text{sur } (0, T),$$

Les conditions au bord :

$$(1.6) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t), \quad \text{sur } (0, T),$$

et la condition finale :

$$(1.7) \quad u(x, T) = 0, \quad \text{sur } \Omega.$$

Parallèlement au problème (1.1)-(1.7), on considère son problème dual. On note L_0^* le dual formel de l'opérateur L_0 , que l'on définit relativement au produit scalaire dans l'espace $L_2(Q_T)$ à l'aide de l'égalité suivante :

$$(1.8) \quad (L_0 u, v) = (u, L_0^* v).$$

Pour tout u et v de $C_0^4(Q_T)$, où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire dans $L_2(Q_T)$.

D'où on considère l'équation suivante :

$$(1.9) \quad L_0^* v = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = g(x, t).$$

Le problème dual consiste à résoudre dans le rectangle Q_T , l'équation (1.9) par rapport à la fonction v vérifiant la condition initiale :

$$(1.10) \quad v(x, 0) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

Les conditions finales :

$$(1.11) \quad v(x, T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, T) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, T) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

et les conditions aux limites :

$$(1.12) \quad v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad \text{sur } (0, T),$$

$$(1.13) \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1, t) = 0, \quad \text{sur } (0, T).$$

Les problèmes (1.1)-(1.7) et (1.9)-(1.13) sont auto-adjoints.

2. Espaces fonctionnels :

On désigne le domaine de définition de l'opérateur L_0 par : $D(L_0) = H_0^4(Q_T)$, le sous espace de l'espace de Sobolev $H^4(Q_T)$, constitué des éléments u vérifiant les conditions (1.2)-(1.7). On définit également le domaine de définition de l'opérateur L_0^* par $D(L_0^*) = H_0^4(Q_T)$ constitué de tous les éléments v de $H^4(Q_T)$ vérifiant les conditions (1.10)-(1.13).

Soit $H_0^2(Q_T)$ le sous espace de $H^2(Q_T)$, dont les éléments vérifient les conditions suivantes :

$$(2.1) \quad u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, 0) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(2.2) \quad u(x, T) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(2.3) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \text{sur } (0, T),$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad \text{sur } (0, T).$$

Soit $H_0^{-2}(Q_T)$ l'espace dual de $H_0^2(Q_T)$ par rapport à la forme bilinéaire canonique $\langle u, v \rangle$, $u \in H_0^{-2}(Q_T)$, $v \in H_0^2(Q_T)$, prolongement par continuité de la forme bilinéaire (u, v) où $u \in L_2(Q_T)$, et $v \in H_0^2(Q_T)$.

3. Inégalité de l'énergie et ses conséquences :

Le problème (1.1)-(1.7) sera considéré comme résolution de l'équation opérationnelle :

$$(3.1) \quad L_0 \text{ Erreur ! Signet non défini. } D(L_0),$$

Où l'opérateur L_0 est engendré par l'équation (1.1).

Et le problème (1.9)-(1.13) comme résolution de l'équation opérationnelle suivante :

$$(3.2) \quad L_0^* v = g, \quad v \in D(L_0^*).$$

Pour résoudre l'équation (3.1) pour tout $f \in H_0^{-2}(Q_T)$, on construit une extension L_0 de l'opérateur L_0 , dont l'image $R(L_0)$ coïncide avec l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$.

Pour construire l'extension L_0 de l'opérateur L_0 , on complète $D(L_0)$ par les éléments qui rendent la forme bilinéaire $\Phi(u, v)$ continue par rapport à v , c'est-à-dire :

Une fonction $u \in H_0^2(Q_T)$ sera considéré comme élément de $D(L_0)$ (domaine de définition de L_0), si l'application :

$$v \longrightarrow \Phi(u, v) = (u, L_0^* v),$$

est une fonctionnelle linéaire continue sur l'ensemble $H_0^4(Q_T)$, dense dans l'espace $H_0^2(Q_T)$ muni de la topologie induite de $H_0^2(Q_T)$. Donc, la fonctionnelle $\Phi(u, v)$ admet un prolongement continu, désigné par le même symbole sur tout $H_0^2(Q_T)$. D'après le théorème de Riesz, il existe un élément unique $L_0 u \in H_0^{-2}(Q_T)$ tel que :

$$\Phi(u, v) = \langle L_0 u, v \rangle,$$

pour tout $u \in D(L_0)$ et pour tout $v \in H_0^2(Q_T)$.

On note $\| \cdot \|$ la norme dans $L_2(Q_T)$, et $\| \cdot \|_{p,0}$ la norme dans l'espace de Sobolev $H_0^p(Q_T)$,

$p \in \mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs).

La norme de $L_0 u$ est défini par la formule :

$$\|L_0 u\|_{-2,0} = \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(u, v)|}{\|v\|_{2,0}}.$$

De manière analogue, à partir de la forme bilinéaire :

$$\Psi(u, v) = (L_0 u, v),$$

on construit l'extension L_0^* de l'opérateur L_0 .

- Définition 3.1 :

La solution de l'équation opérationnelle :

$$(3.3) \quad L_0 u = f, \quad u \in D(L_0),$$

est appelée solution généralisée (faible) du problème (1.1)-(1.7), et la solution de l'équation :

$$(3.4) \quad L_0^* v = g, \quad v \in D(L_0^*),$$

solution généralisée du problème dual (1.9)-(1.13).

- Remarque :

La résolution des problèmes (1.1)-(1.7) et (1.9)-(1.13) est basée sur les inégalités de l'énergie pour les opérateurs L_0 et L_0^* .

- Théorème 3.1 :

Les opérateurs L_0 et L_0^* , engendrés par les problèmes (1.1)-(1.7) et (1.9)-(1.13) respectivement satisfont les estimations à priori suivantes :

$$(3.5) \quad \|u\|_{2,0} \leq c \|L_0 u\|_{-2,0}, \quad \forall u \in D(L_0),$$

$$(3.6) \quad \|v\|_{2,0} \leq c^* \|L_0^* v\|_{-2,0}, \quad \forall v \in D(L_0^*),$$

où les constantes $c > 0$ et $c^* > 0$ ne dépendent pas de u et v .

- Démonstration :

On démontre dans un premier lieu l'inégalité (3.5) pour les fonctions assez régulières,

c'est-à-dire $u \in D(L_0)$. Dans ce cas on a :

$$(3.7) \quad \Phi(u, v) = (L_0 u, v) .$$

Dans cette dernière égalité, on pose :

$$Mu = v(x, t) = (t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u .$$

En intégrant par parties, la forme bilinéaire $\Phi(u, v)$ peut-être écrite sous une forme plus simple. Pour cela on considère séparément les intégrales qui la composent.

$$\begin{aligned} (L_0 u, (t - T) u) &= \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \left[(t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u \right] dx dt, \\ &= \int_{Q_T} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + (b - a) \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - ab \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right] \left[(t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u \right] dx dt, \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6. \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions (1.2)-(1.7), et à l'aide d'intégration par parties successives, on calcule les intégrales suivantes :

Pour la première intégrale on a :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{Q_T} (t - T) \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt, \\ &= - \int_{Q_T} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{\partial}{\partial t} \left[(t - T) \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx dt, \\ &= - \int_{Q_T} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} (t - T) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 \right] dx dt, \\ &= \frac{3}{2} \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dx dt - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt. \end{aligned}$$

La seconde intégrale peut-être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{Q_T} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} u \, dx dt, \\
&= - \int_{Q_T} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{\partial u}{\partial t} \, dx dt, \\
&= \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 \, dx dt - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \, dx dt.
\end{aligned}$$

L'intégrale I_3 peut-être transformée sous la forme :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{Q_T} (b-a)(t-T) \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} \, dx dt, \\
&= \frac{1}{2} \int_{Q_T} (b-a) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 \, dx dt.
\end{aligned}$$

Et pour l'intégrale I_4 on aura :

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{Q_T} (b-a) \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} u \, dx dt, \\
&= \int_{Q_T} (b-a) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 \, dx dt.
\end{aligned}$$

On a également pour I_5 :

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_{Q_T} ab(t-T) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \frac{\partial u}{\partial t} \, dx dt, \\
&= - \frac{1}{2} \int_{Q_T} ab \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \, dx dt.
\end{aligned}$$

Enfin pour la dernière intégrale on a :

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_{Q_T} ab \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} u \, dx dt, \\
&= \int_{Q_T} ab \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \, dx dt.
\end{aligned}$$

D'où en ajoutant membre à membre les intégrales précédentes on obtient :

$$2(L_0 u, (t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u) = \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} (a - b) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + 3 \int_{Q_T} ab \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} (a - b) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + \\ & + 3 \int_{Q_T} ab \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L_0 u)^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_T} (Mu)^2 dxdt, \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L_0 u)^2 dxdt + \varepsilon T^2 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + 2 \varepsilon \int_{Q_T} u^2 dxdt. \end{aligned}$$

On a pour tout $u \in D(L_0)$ l'estimation de type Poincaré suivante :

$$(3.8) \quad \begin{cases} \|u\| \leq 2T \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| & , \forall u \in D(L_0), \\ \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\| \leq 2T \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\| & , \forall u \in D(L_0), \\ \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \leq 2T \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\| & , \forall u \in D(L_0). \end{cases}$$

en utilisant les inégalités (3.8) on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8T^2} \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{Q_T} (a - b) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + \\ & + \frac{1}{8T^2} \int_{Q_T} (a - b) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt + 3 \int_{Q_T} ab \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L_0 u)^2 dxdt + \\ & + \varepsilon T^2 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + 2 \varepsilon \int_{Q_T} u^2 dxdt. \end{aligned}$$

Et d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{64T^4} \int_{Q_T} u^2 dxdt + \frac{1}{16T^2} \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{1}{8T^2} \int_{Q_T} (a-b) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt + \\
& + \frac{1}{2} \int_{Q_T} (a-b) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + 3 \int_{Q_T} ab \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L_0 u)^2 dxdt + \\
& + \varepsilon T^2 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + 2 \varepsilon \int_{Q_T} u^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{64T^4} - 2\varepsilon \right) \int_{Q_T} u^2 dxdt + \left(\frac{1}{16T^2} - \varepsilon T^2 \right) \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{1}{8T^2} \int_{Q_T} (a-b) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt + \\
& + \frac{1}{2} \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{Q_T} (a-b) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + 3 \int_{Q_T} ab \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L_0 u)^2 dxdt.
\end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{256T^4}$ et en minorant le membre de gauche de l'inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_T} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dxdt + \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt + \\
& + \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt \leq c \int_{Q_T} (L_0 u)^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Où c est une constante indépendante de u .

De cette dernière inégalité découle immédiatement l'inégalité recherchée (3.5) et le théorème 3.1 est démontré.

Pour $u \in D(L_0)$, on utilise les opérateurs de régularisation de Friedrichs [19].

Soit $u \in D(L_0)$, en vertu de la propriété 1, $J_\varepsilon u \in D(L_0)$ donc $J_\varepsilon u$ vérifie l'inégalité (3.5), d'où :

$$(3.9) \quad \|J_\varepsilon u\|_{H^2(Q_T)} \leq c \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(J_\varepsilon u, v)|}{\|v\|_{H^2(Q_T)}}.$$

Nous allons d'abord montrer l'égalité suivante:

$$(3.10) \quad \Phi(J_\varepsilon u, v) = \Phi(u, J_\varepsilon v).$$

Pour cela nous utilisons la propriété 2 et la propriété 3 des opérateurs de régularisation de Freidrichs et on décompose $\Phi(J_\varepsilon u, v)$ sous la forme :

$$\Phi(J_\varepsilon u, v) = (l_0 J_\varepsilon u, v) + (l_1 J_\varepsilon u, v) + (l_2 J_\varepsilon u, v).$$

Où les opérateurs l_0, l_1 et l_2 sont donnés par :

$$l_0 = \frac{\partial^4}{\partial t^4},$$

$$l_1 = (b-a) \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial x^2},$$

$$l_2 = -ab \frac{\partial^4}{\partial x^4}.$$

En effectuant des intégrations par parties, et en tenant des conditions (1.2)-(1.7) on aura :

$$\begin{aligned} (l_0 J_\varepsilon u, v) &= \int_{Q_T} u J_\varepsilon \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} dxdt + \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} J_\varepsilon v \right] dxdt - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} J_\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} \right] dxdt + \\ &+ \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial t} J_\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] dxdt - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[u J_\varepsilon \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} \right] dxdt, \end{aligned}$$

D'où :

$$(l_0 J_\varepsilon u, v) = - \int_{Q_T} u J_\varepsilon \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} dxdt.$$

Pour le deuxième terme on a :

$$\begin{aligned} (l_1 J_\varepsilon u, v) &= \int_{Q_T} (b-a) u J_\varepsilon \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} dxdt + \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[(b-a) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} J_\varepsilon v \right] dxdt - \\ &- \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left[(b-a) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} J_\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} \right] dxdt + \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left[(b-a) \frac{\partial u}{\partial t} J_\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right] dxdt - \\ &- \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[(b-a) u J_\varepsilon \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} \right] dxdt, \end{aligned}$$

D'où :

$$(l_1 J_\varepsilon u, v) = \int_{Q_T} (b-a) u J_\varepsilon \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} dxdt.$$

Enfin pour le dernier terme on a :

$$\begin{aligned}
(l_2 J_\varepsilon u, v) = & - \int_{Q_T} ab u J_\varepsilon \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} dxdt - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left[ab \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} J_\varepsilon v \right] dxdt + \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left[ab \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} J_\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} \right] dxdt - \\
& - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left[ab \frac{\partial u}{\partial x} J_\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] dxdt + \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left[ab u J_\varepsilon \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right] dxdt,
\end{aligned}$$

D'où :

$$(l_2 J_\varepsilon u, v) = - \int_{Q_T} ab u J_\varepsilon \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} dxdt.$$

Donc :

$$\Phi(J_\varepsilon u, v) = \Phi(u, J_\varepsilon v).$$

En vertu de (3.9) et (3.10), on obtient :

$$(3.11) \quad \|J_\varepsilon u\|_{2,0} \leq c \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(u, J_\varepsilon v)|}{\|v\|_{2,0}}.$$

D'après la propriété 4 des opérateurs de régularisation, on a :

$$\|J_\varepsilon v\|_{H^2(Q_T)} \leq \|v\|_{H^2(Q_T)}.$$

Donc :

$$(3.12) \quad \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(u, J_\varepsilon v)|}{\|v\|_{2,0}} \leq \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(u, J_\varepsilon v)|}{\|J_\varepsilon v\|_{2,0}} \leq \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(u, v)|}{\|v\|_{2,0}}.$$

En vertu de (3.12), l'inégalité (3.11) peut-être écrite ainsi :

$$\|J_\varepsilon u\|_{2,0} \leq c \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(u, v)|}{\|v\|_{2,0}}.$$

En passant à la limite dans la dernière inégalité, quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et du fait que $J_\varepsilon u \rightarrow u$ dans $H_0^2(Q_T)$, on obtient :

$$(3.13) \quad \|u\|_{2,0} \leq c \|L_0 u\|_{-2,0}, \quad \forall u \in D(L_0).$$

A partir de la forme bilinéaire $\Psi(u, v)$ associée au problème dual, de manière analogue on établit l'inégalité (3.6) pour tout $v \in D(L_0^*)$.

4. Existence et unicité de la solution :

- Théorème 4.1 :

Si les conditions du théorème 3.1 sont vérifiées alors pour toute fonction $f \in H_0^{-2}(Q_T)$ (respectivement $g \in H_0^{-2}(Q_T)$), le problème (1.1)-(1.7) (respectivement (1.9)-(1.13)) admet une et une seule solution généralisée.

- Démonstration :

La démonstration de ce théorème est analogue à celle proposée dans [2], [14]. En effet, de l'inégalité (3.5) découle l'unicité de la solution. Elle assure également la fermeture de l'ensemble image $R(L_0)$ de l'opérateur L_0 . Pour montrer l'identité $R(L_0) = H_0^{-2}(Q_T)$, on montre d'abord l'inclusion $\overline{R(L_0)} \subset R(L_0)$. Ensuite on montre la densité des éléments $L_0 u$ dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$ lorsque u parcourt $D(L_0)$.

En effet, soit $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$, constituée des éléments de l'ensemble $R(L_0)$. Il lui correspond une suite $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $D(L_0)$ telle que :

$$L_0 u = f_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De l'inégalité (3.5) on déduit que la suite $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy dans l'espace $H_0^2(Q_T)$. Car :

$$\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ une suite de Cauchy} \Leftrightarrow \left\{ \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq n_0 : \|f_p - f_q\| < \varepsilon \right\}$$

$$\text{et } \|u_p - u_q\|_{2,0} \leq c \|L_0(u_p - u_q)\|_{-2,0} = c \|f_p - f_q\|_{-2,0} < c \varepsilon.$$

La suite (u_k) converge vers un élément $u \in H_0^2(Q_T)$.

:Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonctionnelle :

$$v \rightarrow \Phi(u_k, v),$$

est continue dans $H_0^2(Q_T)$. Ce qui entraîne la continuité de la fonctionnelle :

$$v \rightarrow \Phi(u, v).$$

On définit : $L_0 u = f$, avec $f = \lim f_k$.

D'où on obtient l'inclusion $\overline{R(L_0)}$ dans $R(L_0)$.

Pour montrer la densité de $R(L_0)$ dans $H_0^{-2}(Q_T)$, on montre un résultat équivalent, qui consiste à montrer que l'orthogonal se réduit à l'élément nul, c'est-à-dire : $R(L_0)^\perp = \{0\}$.

Soit $v \in H_0^{-2}(Q_T)$ tel que : $\langle L_0 u, v \rangle = 0$, $\forall u \in D(L_0)$.

Pour $u \in D(L_0)$ et $v \in H_0^{-2}(Q_T)$ et à partir de l'égalité (1.7) on a :

$$(L_0 u, v) = (u, L_0^* v) = 0.$$

De cette dernière égalité, et en utilisant l'inégalité (3.6) on déduit que v est nulle dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$, lorsque u parcourt $D(L_0)$.

La seconde partie du théorème, pour le problème dual se démontre de manière analogue en utilisant le diviseur

$$M^* v = u(x, t) = t \frac{\partial v}{\partial t} - v.$$

Partie 2 : Problème composite avec partie secondaire

1. Position du problème :

Dans l'ouvert rectangulaire $Q_T = \Omega \times (0, T)$, où $\Omega = (0,1)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $T > 0$, on complète le problème étudié dans la première partie, en ajoutant les membres d'ordre inférieur. D'où on considère l'équation différentielle de type composite suivante:

$$(1.1) \quad L u = L_0 u + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u = f \quad , \quad \text{dans } Q_T,$$

Avec : $L_0 u$ **Erreur ! Signet non défini.**

Où a, b des constantes strictement positives, $a - b \geq 0$, et λ une constante strictement négative et f une fonction donnée.

A cette équation, on associe les conditions initiales suivantes :

$$(1.2) \quad u(x, 0) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, 0) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

La condition de Dirichlet homogène :

$$(1.5) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad , \quad \text{sur } (0, T),$$

Les conditions au bord :

$$(1.6) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) \quad , \quad \text{sur } (0, T),$$

et la condition finale :

$$(1.7) \quad u(x, T) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega.$$

Parallèlement au problème (1.1)-(1.7), on considère son problème dual. On note L^* le dual formel de l'opérateur L , que l'on définit relativement au produit scalaire dans l'espace $L^2(Q_T)$ à l'aide de l'égalité suivante :

$$(1.8) \quad (L u, v) = (u, L^* v),$$

Pour tout u et v de $C_0^4(Q_T)$, où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire dans $L_2(Q_T)$.

D'où on considère l'équation suivante :

$$(1.9) \quad L^* \mathbf{v} = L \mathbf{v} \quad \text{Erreur !} \quad \text{Signet} \quad \text{non}$$

$$\text{défini.} - \frac{\partial^3 \mathbf{v}}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 \mathbf{v}}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \lambda \mathbf{v} = \mathbf{g}(x, t),$$

$$\text{Avec } L^* \text{Erreur ! Signet non défini.} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} \right).$$

Le problème dual consiste à résoudre dans le rectangle Q_T , l'équation (1.8) par rapport à la fonction v vérifiant la condition initiale :

$$(1.10) \quad v(x, 0) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

Les conditions finales :

$$(1.11) \quad v(x, T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, T) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, T) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

et les conditions aux limites :

$$(1.12) \quad v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad \text{sur } (0, T),$$

$$(1.13) \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1, t) = 0, \quad \text{sur } (0, T).$$

2. Espaces fonctionnels :

On désigne le domaine de définition de l'opérateur L par : $D(L) = H_0^4(Q_T)$, le sous espace de l'espace de Sobolev $H^4(Q_T)$, constitué des éléments u vérifiant les conditions (1.2)-(1.7). On définit également le domaine de définition de l'opérateur L^* par :

$D(L^*) = H_0^4(Q_T)$ constitué de tous les éléments v de $H^4(Q_T)$ vérifiant les conditions (1.10)-(1.13).

Soit $H_0^2(Q_T)$ le sous espace de $H^2(Q_T)$, dont les éléments vérifient les conditions suivantes :

$$(2.1) \quad u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, 0) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(2.2) \quad u(x, T) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(2.3) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad , \quad \text{sur } (0, T),$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 \quad , \quad \text{sur } (0, T).$$

Soit $H_0^{-2}(Q_T)$ l'espace dual de $H_0^2(Q_T)$ par rapport à la forme bilinéaire canonique $\langle u, v \rangle$, $u \in H_0^{-2}(Q_T)$, $v \in H_0^2(Q_T)$, prolongement par continuité de la forme bilinéaire (u, v) où $u \in L^2(Q_T)$, et $v \in H_0^2(Q_T)$.

3. Inégalité de l'énergie et ses conséquences :

Le problème (1.1)-(1.7) sera considéré comme résolution de l'équation opérationnelle :

$$(3.1) \quad L \text{ Erreur ! Signet non défini. } D(L),$$

Où l'opérateur L est engendré par l'équation (1.1).

Et le problème (1.9)-(1.13) comme résolution de l'équation opérationnelle suivante :

$$(3.2) \quad L * v = g \quad , \quad v \in D(L *).$$

Pour résoudre l'équation (3.1) pour tout $f \in H_0^{-2}(Q_T)$, on construit une extension L de l'opérateur L , dont l'image $R(L)$ coïncide avec l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$.

Pour construire l'extension L de l'opérateur L , on complète $D(L)$ par les éléments qui rendent la forme bilinéaire $\Phi(u, v)$ continue par rapport à v , c'est-à-dire :

Une fonction $u \in H_0^2(Q_T)$ sera considéré comme élément de $D(L)$ (domaine de définition de L), si l'application :

$$v \rightarrow \Phi(u, v) = (u, L * v),$$

est une fonctionnelle linéaire continue sur l'ensemble $H_0^4(Q_T)$, dense dans l'espace $H_0^2(Q_T)$ muni de la topologie induite de $H_0^2(Q_T)$.

Donc, la fonctionnelle $\Phi(u, v)$ admet un prolongement continu, désigné par le même symbole sur tout $H_0^2(Q_T)$. D'après le théorème de Riesz, il existe un élément unique

$L_0 u \in H_0^{-2}(Q_T)$ tel que :

$$\Phi(u, v) = \langle L u, v \rangle,$$

pour tout $u \in D(L)$ et pour tout $v \in H_0^2(Q_T)$.

On note $\| \cdot \|$ la norme dans $L_2(Q_T)$, et $\| \cdot \|_{p,0}$ la norme dans l'espace de Sobolev $H_0^p(Q_T)$,
 $p \in \mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs).

La norme de Lu est défini par la formule :

$$\|Lu\|_{-2,0} = \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(u, v)|}{\|v\|_{2,0}}.$$

De manière analogue, à partir de la forme bilinéaire :

$$\Psi(u, v) = (Lu, v),$$

on construit l'extension L^* de l'opérateur L .

- Définition 3.1 :

La solution de l'équation opérationnelle :

$$(3.3) \quad Lu = f, \quad u \in D(L),$$

est appelée solution généralisée (faible) du problème (1.1)-(1.7), et la solution de l'équation :

$$(3.4) \quad L^* v = g, \quad v \in D(L^*),$$

solution généralisée du problème dual (1.9)-(1.13).

- Remarque :

La résolution des problèmes (1.1)-(1.7) et (1.9)-(1.13) est basée sur les inégalités de l'énergie pour les opérateurs L et L^* .

- Théorème 3.1 :

Les opérateurs L et L^* , engendrés par les problèmes (1.1)-(1.7) et (1.9)-(1.13) respectivement satisfont les estimations à priori suivantes :

$$(3.5) \quad \|u\|_{2,0} \leq c \|Lu\|_{-2,0}, \quad \forall u \in D(L),$$

$$(3.6) \quad \|v\|_{2,0} \leq c^* \|L^* v\|_{-2,0}, \quad \forall v \in D(L^*),$$

où les constantes $c > 0$ et $c^* > 0$ ne dépendent pas de u et v .

- Démonstration :

On démontre dans un premier lieu l'inégalité (3.5) pour les fonctions assez régulières, c'est-à-dire $u \in D(L)$. Dans ce cas on a :

$$(3.7) \quad \Phi(u, v) = (L u, v).$$

Dans cette dernière égalité, on pose :

$$Mu = v(x, t) = (t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u.$$

En intégrant par parties, la forme bilinéaire $\Phi(u, v)$ peut-être écrite sous une forme plus simple. Pour cela on considère séparément les intégrales qui la composent.

$$\begin{aligned} (L u, (t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u) &= (L_0 u, (t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u) + \\ &\quad + \int_{Q_T} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u \right] \left[(t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u \right] dx dt, \\ &= (L_0 u, (t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u) + \int_{Q_T} (t - T) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - \int_{Q_T} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} u dx dt + \\ &\quad + \int_{Q_T} (t - T) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - \int_{Q_T} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} u dx dt + \int_{Q_T} (t - T) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - \\ &\quad - \int_{Q_T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u dx dt + \int_{Q_T} (t - T) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - \int_{Q_T} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u dx dt + \\ &\quad + \int_{Q_T} \lambda (t - T) \frac{\partial u}{\partial t} u dx dt - \int_{Q_T} \lambda u^2 dx dt, \\ &= (L_0 u, (t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u) + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 + I_9. \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions (1.2)-(1.7), et à l'aide d'intégration par parties successives, on calcule les intégrales suivantes :

D'après la première partie on a :

$$2(L_0 u, (t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u) = \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dx dt + \int_{Q_T} (a - b) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dx dt + 3 \int_{Q_T} ab \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx dt.$$

Pour la première intégrale on a :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{Q_T} (t - T) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt, \\
&= \int_{Q_T} (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt.
\end{aligned}$$

La seconde intégrale peut-être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{Q_T} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} u dx dt, \\
&= -\frac{1}{2} \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Pour la troisième intégrale on aura :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{Q_T} (t - T) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt, \\
&= \int_{Q_T} (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dx dt.
\end{aligned}$$

L'intégrale I_4 peut-être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{Q_T} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} u dx dt, \\
&= - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pour l'intégrale I_5 on aura :

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_{Q_T} (t - T) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt, \\
&= -\frac{1}{2} \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt.
\end{aligned}$$

L'intégrale I_6 peut-être transformée sous la forme :

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_{Q_T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u \, dx dt, \\
&= - \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Et l'intégrale I_7 peut-être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
I_7 &= \int_{Q_T} (t - T) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt, \\
&= \frac{1}{2} \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt.
\end{aligned}$$

On a également pour I_8 :

$$\begin{aligned}
I_8 &= \int_{Q_T} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u \, dx dt, \\
&= - \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Enfin pour la dernière intégrale on a :

$$\begin{aligned}
I_9 &= \int_{Q_T} \lambda (t - T) \frac{\partial u}{\partial t} u \, dx dt, \\
&= - \frac{1}{2} \int_{Q_T} \lambda u^2 dx dt.
\end{aligned}$$

D'où en ajoutant membre à membre les intégrales précédentes on obtient :

$$\begin{aligned}
2(L u, (t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u) &= \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dx dt + \int_{Q_T} (a - b) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dx dt + 3 \int_{Q_T} ab \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx dt + \\
&\quad + 2 \int_{Q_T} (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dx dt + 2 \int_{Q_T} (T - t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dx dt + \\
&\quad + \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + 3 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt - 3 \int_{Q_T} \lambda u^2 dx dt.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de cauchy-schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + 3 \int_{Q_T} ab \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} (a-b) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + \\
& + 2 \int_{Q_T} (t-T) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \\
& + 3 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt - 3 \int_{Q_T} \lambda u^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_T} (M u)^2 dxdt, \\
& \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt + \varepsilon T^2 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \\
& + 2 \varepsilon \int_{Q_T} u^2 dxdt.
\end{aligned}$$

On a pour tout $u \in D(L)$ l'estimation de type Poincaré suivante

$$(3.8) \quad \|u\| \leq 2T \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|, \quad \forall u \in D(L).$$

En utilisant l'inégalité (3.8) on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + 3 \int_{Q_T} ab \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} (a-b) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + \\
& + 2 \int_{Q_T} (t-T) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \\
& + 3 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt - 3 \int_{Q_T} \lambda u^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt + 9\varepsilon T^2 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + 3 \int_{Q_T} ab \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} (a-b) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + \\
& + 2 \int_{Q_T} (t-T) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + 2 \int_{Q_T} (T-t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt + (1-9\varepsilon T^2) \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \\
& + 3 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt - 3 \int_{Q_T} \lambda u^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt.
\end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{18T^2}$ et en minorant le membre de gauche de l'inégalité, on obtient :

$$\int_{Q_T} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dxdt + \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt + \\ + \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 dxdt \leq c \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt.$$

Où c est une constante indépendante de u .

De cette dernière inégalité découle immédiatement l'inégalité recherchée (3.5) et le théorème 3.1 est démontré.

Pour $u \in D(L)$, on utilise les opérateurs de régularisation de Friedrichs [19].

4. Existence et unicité de la solution :

- Théorème 4.1 :

Si les conditions du théorème 3.1 sont vérifiées alors pour toute fonction $f \in H_0^{-2}(Q_T)$ (respectivement $g \in H_0^{-2}(Q_T)$), le problème (1.1)-(1.7) (respectivement (1.9)-(1.13)) admet une et une seule solution généralisée.

- Démonstration :

La démonstration de ce théorème est analogue à celle proposée dans [2], [14]. En effet, de l'inégalité (3.5) découle l'unicité de la solution. Elle assure également la fermeture de l'ensemble image $R(L)$ de l'opérateur L . Pour montrer l'identité $R(L) = H_0^{-2}(Q_T)$, on montre d'abord l'inclusion $\overline{R(L)} \subset R(L)$.

Ensuite on montre la densité des éléments Lu dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$ lorsque u parcourt $D(L)$. En effet, soit $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$, constituée des éléments de l'ensemble $R(L)$. Il lui correspond une suite $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $D(L)$ telle que :

$$Lu_k = f_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De l'inégalité (3.5) on déduit que la suite $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy dans l'espace $H_0^2(Q_T)$. Car :

$$\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ une suite de Cauchy} \Leftrightarrow \left\{ \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq n_0 : \|f_p - f_q\| < \varepsilon \right\}$$

$$\text{et } \|u_p - u_q\|_{2,0} \leq c \|L_0(u_p - u_q)\|_{-2,0} = c \|f_p - f_q\|_{-2,0} < c \varepsilon.$$

La suite (u_k) converge vers un élément $u \in H_0^2(Q_T)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonctionnelle :

$$v \rightarrow \Phi(u_k, v),$$

est continue dans $H_0^2(Q_T)$. Ce qui entraîne la continuité de la fonctionnelle :

$$v \rightarrow \Phi(u, v).$$

On définit : $Lu = f$, avec $f = \lim f_k$.

D'où on obtient l'inclusion $\overline{R(L)}$ dans $R(L)$.

Pour montrer la densité de $R(L)$ dans $H_0^{-2}(Q_T)$, on montre un résultat équivalent, qui

consiste à montrer que l'orthogonal se réduit à l'élément nul, c'est-à-dire : $R(L)^\perp = \{0\}$.

Soit $v \in H_0^{-2}(Q_T)$ tel que : $\langle Lu, v \rangle = 0$, $\forall u \in D(L)$.

Pour $u \in D(L)$ et $v \in H_0^{-2}(Q_T)$ et à partir de l'égalité (1.7) on a :

$$(Lu, v) = (u, L^*v) = 0.$$

De cette dernière égalité, et en utilisant l'inégalité (3.6) on déduit que v est nulle dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$, lorsque u parcourt $D(L)$.

La seconde partie du théorème, pour le problème dual se démontre de manière analogue en utilisant le diviseur

$$M^*v = u(x, t) = t \frac{\partial v}{\partial t} - v.$$

Partie 3 : Problème composite dans l'espace :

1. Position du problème :

Soit Ω un ouvert borné de points $x = (x_1, \dots, x_n)$ de l'espace $\mathbb{R}^n$, à frontière régulière par morceaux $\Gamma = \partial\Omega$. Dans le cylindre $Q_T = \Omega \times (0, T)$ avec $T > 0$, on considère l'équation différentielle de type composite suivante:

$$(1.1) \quad L u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - A \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B u \right) = f \quad , \quad \text{dans } Q_T,$$

Avec :

$$\begin{aligned} A u &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \\ \text{et} \\ B u &= \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned}$$

A cette équation, on associe les conditions initiales suivantes :

$$(1.2) \quad u(x, 0) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, 0) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

La condition finale :

$$(1.5) \quad u(x, T) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

et les conditions aux limites homogènes :

$$(1.6) \quad u|_{\Sigma} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Sigma} = 0.$$

où $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$ désigne la surface latérale du cylindre Q_T , et ν le vecteur unitaire de la normale extérieure à ∂Q_T , f une fonction donnée et a_{ij}, b_{ij} des constantes strictement positives vérifiant les conditions suivantes :

$$(1.7) \quad a_{ij} = a_{ji} \quad , \quad b_{ij} = b_{ji} \quad ; i, j = 1, \dots, n.$$

$$(1.8) \quad (a_{ij} - b_{ij}) \zeta_i \zeta_j \geq \alpha |\zeta|^2 \quad , \quad \forall \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$(1.9) \quad b_{kj} a_{il} \zeta_i \zeta_k \geq \gamma |\zeta_{ij}|^2.$$

Parallèlement au problème (1.1)-(1.6), on considère son problème dual . On note L^* le dual formel de l'opérateur L , que l'on définit relativement au produit scalaire dans l'espace $L_2(Q_T)$ à l'aide de l'égalité suivante :

$$(1.10) \quad (Lu, v) = (u, L^*v).$$

Pour tout u et v de $C_0^4(Q_T)$, où $(.,.)$ désigne le produit scalaire dans $L_2(Q_T)$.

D'où on considère l'équation suivante:

$$(1.11) \quad L^*v = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - A\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Bv\right) = g \quad , \quad \text{sur } Q_T,$$

Le problème dual consiste à résoudre dans le rectangle Q_T , l'équation (1.8) par rapport à la fonction v vérifiant la condition initiale :

$$(1.12) \quad v(x, 0) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega.$$

Les conditions finales :

$$(1.13) \quad v(x, T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, T) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, T) = 0 \quad , \quad \text{sur } \Omega,$$

et les conditions aux limites :

$$(1.14) \quad v|_{\Sigma} = \frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\Sigma} = 0.$$

Les problèmes (1.1)-(1.6) et (1.11)-(1.14) sont auto-adjoints.

2. Espaces fonctionnels :

On désigne le domaine de définition de l'opérateur L par : $D(L) = H_0^4(Q_T)$, le sous-espace de l'espace de Sobolev $H^4(Q_T)$, constitué des éléments u vérifiant les conditions (1.2)-(1.6). On définit également le domaine de définition de l'opérateur L^* par

$D(L^*) = H_0^4(Q_T)$ constitué de tous les éléments v de $H^4(Q_T)$ vérifiant les conditions (1.12)-(1.14).

Soit $H_0^2(Q_T)$ le sous espace de $H_p^2(Q_T)$, dont les éléments vérifient les conditions suivantes :

$$(2.1) \quad u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,0) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(2.2) \quad u(x,T) = 0, \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(2.3) \quad u|_{\Sigma} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Sigma} = 0.$$

Soit $H_0^{-2}(Q_T)$ l'espace dual de $H_0^2(Q_T)$ par rapport à la forme bilinéaire canonique $\langle u, v \rangle$, $u \in H_0^{-2}(Q_T)$, $v \in H_0^2(Q_T)$, prolongement par continuité de la forme bilinéaire (u, v) où $u \in L^2(Q_T)$, et $v \in H_0^2(Q_T)$.

3. Inégalité de l'énergie et ses conséquences :

Le problème (1.1)-(1.6) sera considéré comme résolution de l'équation opérationnelle :

$$(3.1) \quad L \text{ Erreur ! Signet non défini. } D(L),$$

où l'opérateur L est engendré par l'équation (1.1).

Et le problème (1.11)-(1.14) comme résolution de l'équation opérationnelle suivante :

$$(3.2) \quad L^* v = g, \quad v \in D(L^*).$$

Pour résoudre l'équation (3.1) pour tout $f \in H_0^{-2}(Q_T)$, on construit une extension L de l'opérateur L , dont l'image $R(L)$ coïncide avec l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$.

Pour construire l'extension L de l'opérateur L , on complète $D(L)$ par les éléments qui rendent la forme bilinéaire $\Phi(u, v)$ continue par rapport à v , c'est-à-dire :

Une fonction $u \in H_0^2(Q_T)$ sera considéré comme élément de $D(L)$ (domaine de définition de L), si l'application :

$$v \longrightarrow \Phi(u, v) = (u, L^* v),$$

est une fonctionnelle linéaire continue sur l'ensemble $H_0^4(Q_T)$, dense dans l'espace $H_0^2(Q_T)$ muni de la topologie induite de $H_0^2(Q_T)$. Donc, la fonctionnelle $\Phi(u, v)$ admet un prolongement continu, désigné par le même symbole sur tout $H_0^2(Q_T)$. D'après le théorème de Riesz, il existe un élément unique $Lu \in H_0^{-2}(Q_T)$ tel que :

$$\Phi(u, v) = \langle Lu, v \rangle,$$

pour tout $u \in D(L)$ et pour tout $v \in H_0^2(Q_T)$.

On note $\|\cdot\|$ la norme dans $L_2(Q_T)$, et $\|\cdot\|_{p,0}$ la norme dans l'espace de Sobolev $H_0^p(Q_T)$,

$p \in \mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs).

La norme de Lu est défini par la formule :

$$\|Lu\|_{-2,0} = \sup_{v \in H_0^2(Q_T)} \frac{|\Phi(u, v)|}{\|v\|_{2,0}}.$$

De manière analogue, à partir de la forme bilinéaire :

$$\Psi(u, v) = (L u, v),$$

on construit l'extension L^* de l'opérateur L .

- **Définition 3.1 :**

La solution de l'équation opérationnelle :

$$(3.3) \quad Lu = f, \quad u \in D(L),$$

est appelée solution généralisée (faible) du problème (1.1)-(1.6), et la solution de l'équation :

$$(3.4) \quad L^* v = g, \quad v \in D(L^*),$$

solution généralisée du problème dual (1.11)-(1.14).

- **Remarque :**

La résolution des problèmes (1.1)-(1.6) et (1.11)-(1.14) est basée sur les inégalités de l'énergie pour les opérateurs L et L^* .

- **Théorème 3.1 :**

Si les coefficients de l'équation (1.1) vérifient les conditions (1.7)-(1.9), les opérateurs L et L^* , engendrés par les problèmes (1.1)-(1.6) et (1.11)-(1.14) respectivement satisfont les estimations à priori suivantes :

$$(3.5) \quad \|u\|_{2,0} \leq c \|Lu\|_{-2,0}, \quad \forall u \in D(L),$$

$$(3.6) \quad \|v\|_{2,0} \leq c^* \|L^* v\|_{-2,0}, \quad \forall v \in D(L^*),$$

où les constantes $c > 0$ et $c^* > 0$ ne dépendent pas de u et v .

- Démonstration :

On démontre dans un premier lieu l'inégalité (3.5) pour les fonctions assez régulières, c'est-à-dire $u \in D(L)$. Dans ce cas on a :

$$(3.7) \quad \Phi(u, v) = (Lu, v).$$

Dans cette dernière égalité, on pose :

$$Mu = v(x, t) = (t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u.$$

En intégrant par parties, la forme bilinéaire $\Phi(u, v)$ peut-être écrite sous une forme plus simple. Pour cela on considère séparément les intégrales qui la composent.

$$\begin{aligned} (Lu, (t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u) &= \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - A \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \right) \left[(t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u \right] dx dt \\ &= \int_{Q_T} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} - a_{ij}) \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x_i \partial x_j} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{il} b_{kj} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i \partial x_l \partial x_k \partial x_j} \right] \left[(t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u \right] dx dt, \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6. \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions (1.2)-(1.6), et à l'aide d'intégration par parties successives, on calcule les intégrales suivantes :

Pour la première intégrale on a :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{Q_T} (t - T) \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt, \\
&= \frac{3}{2} \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dx dt - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt.
\end{aligned}$$

La seconde intégrale peut-être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{Q_T} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} u dx dt, \\
&= \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dx dt - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt.
\end{aligned}$$

Pour la troisième intégrale on aura :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{Q_T} (b_{ij} - a_{ij})(t - T) \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt, \\
&= - \int_{Q_T} (t - T) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[(b_{ij} - a_{ij}) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j} \right] dx dt, \\
&= \frac{1}{2} \int_{Q_T} (b_{ij} - a_{ij}) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j} dx dt.
\end{aligned}$$

L'intégrale I_4 peut-être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{Q_T} (b_{ij} - a_{ij}) \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x_i \partial x_j} u dx dt, \\
&= - \int_{Q_T} (b_{ij} - a_{ij}) \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx dt, \\
&= \int_{Q_T} (b_{ij} - a_{ij}) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j} dx dt.
\end{aligned}$$

On a également pour I_5 :

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_{Q_T} a_{il} b_{kj} (t - T) \frac{\partial^4 u}{\partial x_i \partial x_l \partial x_k \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt, \\
&= \int_{Q_T} (t - T) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[a_{il} b_{kj} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \right] dx dt, \\
&= -\frac{1}{2} \int_{Q_T} a_{il} b_{kj} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} dx dt.
\end{aligned}$$

Enfin pour dernière intégrale, on a :

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_{Q_T} a_{il} b_{kj} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i \partial x_l \partial x_k \partial x_j} dx dt, \\
&= \int_{Q_T} a_{il} b_{kj} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} dx dt.
\end{aligned}$$

D'où en ajoutant membre à membre les intégrales précédentes on obtient :

$$\begin{aligned}
2(L u, (t - T) \frac{\partial u}{\partial t} - u) &= \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dx dt + \int_{Q_T} (a_{ij} - b_{ij}) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j} dx dt + \\
&\quad + 3 \int_{Q_T} a_{il} b_{kj} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} dx dt.
\end{aligned}$$

En utilisant (1.7) - (1.9) on obtient :

$$\int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dx dt + \alpha \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right)^2 dx dt + 3\gamma \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_l} \right)^2 dx dt \leq 2 \int_{Q_T} L u M u dx dt.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + \alpha \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right)^2 dxdt + \\
& 3\gamma \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_T} (Mu)^2 dxdt, \\
& \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt + \varepsilon T^2 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + 2\varepsilon \int_{Q_T} u^2 dxdt.
\end{aligned}$$

On a pour tout $u \in D(L)$ l'estimation de type Poincaré suivante :

$$(3.8) \quad \begin{cases} \|u\| \leq 2T \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|, & \forall u \in D(L), \\ \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\| \leq 2T \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right\|, & \forall u \in D(L), \\ \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \leq 2T \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|, & \forall u \in D(L). \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité (3.8) on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8T^2} \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + \frac{1}{8T^2} \alpha \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dxdt + \\
& + \frac{1}{2} \alpha \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right)^2 dxdt + 3\gamma \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt + \\
& + \varepsilon T^2 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + 2\varepsilon \int_{Q_T} u^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Et d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{64T^4} \int_{Q_T} u^2 dxdt + \frac{1}{16T^2} \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{1}{8T^2} \alpha \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + \\
& + \frac{1}{2} \alpha \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right)^2 dxdt + 3\gamma \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (L u)^2 dxdt + \varepsilon T^2 \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \\
& + 2\varepsilon \int_{Q_T} u^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{64T^4} - 2\varepsilon \right) \int_{Q_T} u^2 dxdt + \left(\frac{1}{16T^2} - \varepsilon T^2 \right) \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + \\ & \frac{1}{8T^2} \alpha \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} \alpha \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right)^2 dxdt + 3\gamma \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (Lu)^2 dxdt. \end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{256T^4}$ et en minorant le membre de gauche de l'inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right] dxdt + \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right)^2 dxdt + \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + \\ & + \int_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dxdt \leq c \int_{Q_T} (Lu)^2 dxdt. \end{aligned}$$

Où c est une constante indépendante de u .

De cette dernière inégalité découle immédiatement l'inégalité recherchée (3.5) et le théorème 3.1 est démontré.

Pour $u \in D(L)$, on utilise les opérateurs de régularisation de Friedrichs [19].

4. Existence et unicité de la solution :

- Théorème 4.1 :

Si les conditions du théorème 3.1 sont vérifiées alors pour toute fonction $f \in H_0^{-2}(Q_T)$ (respectivement $g \in H_0^{-2}(Q_T)$), le problème (1.1)-(1.6) (respectivement (1.11)-(1.14)) admet une et une seule solution généralisée.

- Démonstration :

La démonstration de ce théorème est analogue à celle proposée dans [2], [14]. En effet, de l'inégalité (3.5) découle l'unicité de la solution. Elle assure également la fermeture de l'ensemble image $R(L)$ de l'opérateur L . Pour montrer l'identité $R(L) = H_0^{-2}(Q_T)$, on montre d'abord l'inclusion $\overline{R(L)} \subset R(L)$. En suite on montre la densité des éléments Lu dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$ lorsque u parcourt $D(L)$.

En effet, soit $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$, constituée des éléments de l'ensemble $R(L)$. Il lui correspond une suite $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $D(L)$ telle que .

$$Lu_k = f_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De l'inégalité (3.5) on déduit que la suite $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy dans l'espace $H_0^2(Q_T)$.

$$\text{Car : } \|u_p - u_q\|_{2,0} \leq c \|L_0(u_p - u_q)\|_{-2,0} = c \|f_p - f_q\|_{-2,0} \rightarrow 0$$

La suite (u_k) converge vers un élément $u \in H_0^2(Q_T)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonctionnelle :

$$v \rightarrow \Phi(u_k, v)$$

est continue dans $H_0^2(Q_T)$. Ce qui entraîne la continuité de la fonctionnelle :

$$v \rightarrow \Phi(u, v)$$

On définit : $Lu = f$, avec $f = \lim f_k$.

D'où on obtient l'inclusion $\overline{R(L)}$ dans $R(L)$.

Pour montrer la densité de $R(L)$ dans $H_0^{-2}(Q_T)$, on montre un résultat équivalent, qui consiste à montrer que l'orthogonal se réduit à l'élément nul, c'est-à-dire : $R(L)^\perp = \{0\}$.

Soit $v \in H_0^{-2}(Q_T)$ tel que : $\langle Lu, v \rangle = 0$, $\forall u \in D(L)$.

Pour $u \in D(L)$ et $v \in H_0^{-2}(Q_T)$ et à partir de l'égalité (1.7) on a :

$$(Lu, v) = (u, L^*v) = 0.$$

De cette dernière égalité, et en utilisant l'inégalité (3.6) on déduit que v est nulle dans l'espace $H_0^{-2}(Q_T)$, lorsque u parcourt $D(L)$.

La seconde partie du théorème, pour le problème dual se démontre de manière analogue en utilisant le diviseur :

$$M^*v = u(x, t) = t \frac{\partial v}{\partial t} - v.$$

- **Conclusion:**

Dans le cas des problèmes mixtes, il suffit de faire l'étude de la partie principale de l'équation, et on peut étendre l'étude au cas de l'équation complète. Mais, dans le cas des équations de type composite cela n'est pas toujours possible.

En effet, on ne peut pas rajouter tous les membres d'ordre inférieur tous dépend de l'opérateur diviseur.

La question qui se pose, peut-on améliorer les opérateurs utilisés dans ce travail ?

• **Bibliographie :**

- [1] N. BENOUAR : Problèmes aux limites pour une classe d'équations d'ordre impair. Bull. Cla. Sci., Acad. Roy. Belgique, .6 Sér., T.V., 1-6, p. 51-58, 1994.
- [2] N. BENOUAR : Problèmes aux limites pour une classe d'équations composites. C. R. Acad. Sci., Paris, t.319, Série I, p. 953-958, 1994.
- [3] P.E.BERKHIN : Sur un problème aux limites pour une équation de type composite. Soviet Math. Dok I. , T.214, N⁰ 3, p.496-498, 1974.
- [4] L. BOUGOFFA : Problèmes aux limites pour une classe d'équations composites parabol-elliptiques. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 65, pp.399-406, 1996.
- [5] A. BOUZIANI and N. BENOUAR : Problèmes aux limites pour une classe d'équations de type non classique pour une structure pluri-dimensionnelle. Bulletin of the Polish Academy of Sciences mathematics Vol. 43, N⁰4, 1995.
- [6] H. BREZIS : Analyse fonctionnelle (Théorie et Applications). Masson, Paris, 1983.
- [7] A.A. DEZIN : Théorème d'existence et d'unicité de la solution pour des problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels. U.S.P. Math. Naouk, T. 14, N⁰13 (87), p.22-73, 1959.
- [8] A. DZHURAEV : Systèmes d'équations de type composite. Nauka, Moscou, 1972.
- [9] G.I. ESKIN : Problèmes aux limites pour l'équation $D_t P(D_t, D_x) = 0$ où $P(D_t, D_x)$ est un opérateur elliptique, Siber. Math. J., T.3, N⁰6, p.882-911, 1962.
- [10] G.I. ESKIN : Problèmes aux limites pour les équations à coefficients constants dans le plan. Math. Sbornik, T. 9 (101), p.67-104, 1962.

- [11] K. FRIEDRICHS : Symetric hyperbolic linear differentiel equations. Comm. Pure Appl. Math, Vol.7, N^o 2 , p.345-392, 1954.
- [12] L. GARDING : Cauchy's problem for hyperbolic equations. Univ. of Chicago 1958 (Revised edition).
- [13] J. HADAMARD : Propriétés d'une équation linéaire aux dérivées partielles du quatrième ordre. Tohuku Math J., 37, p.133-150, 1933.
- [14] V.I. KORZIOUK : Problèmes couplés des équations de type hyperbolique et parabolique. Diff-Uravneniya, T.10, 1968, p.1854-1866.
- [15] O.A. LADYZENSKAYA : The boundary value problems of mathematical physics. Naouka, Moscou, 1973.
- [16] O.A. LADYZENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV and N.N URAL'CEVA : Linear and quasilinear equations of parabolic type.Vol 23, American mathematical, Society providence, rhode Island, 1968.
- [17] O.A. LADYZENSKAYA and N.N URAL'CEVA : Linear and quasilinear elliptic equations, Vol.46. Academic Press, New-york and London, 1968.
- [18] J. LERAY : Hyperbolic differentiel equations. Princeton, 1952.
- [19] C.C. LIN: On the stability of two-dimentional parallel flow,. Part I, Quaterly of Applied Mathematics, Vol.3, 1945, pp.117-142.
- [20] V.P. MIKHAILOV : Equations aux dérivées partielles. Edition Mir, 1986.
- [21] S.G. MIKHLIN : Mathematical physics, an advanced course. Vol.11, North-Holland Publishing Company-Amsterdam. London 1970.
- [22] J. NECAS : Les méthodes directes en théorie des equations elliptiques. Masson, Paris 1967.

- [23] I.G. PETROVSKY : Uber das cauchyshe problem für ein system linearen partialler differentialgleichungen in gebiet der nichtanalytischen funktionen. Bull .Uni, d'état Moscow 1A N⁰7, p.1-74, 1938.
- [24] O. SJOSTRAND : Sur une équation du type composite I. Arkiv Math. Astr. Och Fisik, 25A, N⁰1, p.1-11, 1937.
- [25] O. SJOSTRAND : Sur une équation aux dérivées partielles du type composite II. Arkiv Math. Astr. Och Fisik, 26A, N⁰1, p.1-10, 1938.
- [26] V.G. SIGILLITO : Explicit a priori inequalities with applications to boundary value problems. Pitmen Publishing, london. Sanfran cisco, Melbourne, 1977.
- [27] V. THOMEE : Existence proofs for mixed problems for hyperbolic differentiel equations in two independent variables by means of the continuity method, Math. Scand. , Vol.6, p. 5-32, 1958.
- [28] S.P. TIMOSHENSKO, J.N.GOODIER: Theory of elasticity.- N.Y.: MC GRAW-HILL, 1970.
- [29] V. TRENOGUINE, B. PISSAREVSKI, T. SOBOLEVA : Problèmes et exercices d'analyse fonctionnelle. Edition Mir - Moscou 1984.
- [30] N.I. YURCHUK : Estimations à priori de la solution des problèmes aux limites pour quelques équations différentielles opérationnelles, differents.Uravn., Vol.12, p.729-739, 1976.
- [31] N.I. YURCHUK : Cauchy's problem for second-order hyperbolic differential-operational equations. J. Diff. Equa, Vol.12, N⁰12, p.1564-1570, 1976.
- [32] N.I. YURCHUK : Solvability of boundary-value problems for certain differential-operational equations. J. Diff. Equa, Vol.13, N⁰4, p.423-429, 1977.