N°d'ordre : 08 /2007-E /MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTE DE MATHEMATIQUES

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de **DOCTORAT D'ETAT**

EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par
Farid BENCHERIF

Sujet

NOMBRES PREMIERS ET DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE FONCTIONS ARITHMETIQUES

Soutenue publiquement le 18 décembre 2007 devant le Jury :

Benali	BENZAGHOU, Professeur, USTHB	Président
Michel	BALAZARD, Directeur de Recherches, CNRS /BORDEAUX	Directeur de thèse
Mohamed	Salah HACHAICHI, Maître de Conférences, USTHB	Codirecteur de thèse
Rachid	BEBBOUCHI, Professeur, USTHB	Examinateur
Kamel	BETINA, Professeur, USTHB	Examinateur
Arezki	KESSI, Professeur, USTHB	Examinateur
Abdallah	DERBAL, Maître de Conférences, ENS/KOUBA	Examinateur

Nombres premiers et développements asymptotiques de fonctions arithmétiques

Doctorat d'Etat en Mathématiques

Thème principal : Théorie analytique des nombres

Farid BENCHERIF

18 décembre 2007

Table des matières

A mon épouse.

Remerciements

J'apprécie au plus haut point, l'honneur que me fait Monsieur Benali BENZAGHOU, en acceptant de présider ce Jury.

J'exprime mes remerciements à Messieurs Rachid BEBBOUCHI, Kamel BETINA, Abdallah DERBAL et Arezki KESSI, pour avoir bien voulu accepter de faire partie de ce Jury.

J'exprime toute ma gratitude à Messieurs Michel BALAZARD, Mohamed Salah HACHAICHI, Jean-Louis NICOLAS et Guy ROBIN, pour leurs encouragements et pour l'aide scientifique qu'ils m'ont apporté.

Que Hacène BELBACHIR trouve ici l'expression de ma reconnaissance pour sa contribution à la réalisation de ce travail.

Introduction

"It will be another million years, at least, before we understand the primes"

Paul ERDOS(1913-1996).

Cette Thèse a pour thème l'étude du développement asymptotique de certaines fonctions arithmétiques. Elle comporte six chapitres

Le chapitre 1 met en évidence l'analogie entre le développement asymptotique du n-ième nombre premier et le développement asymptotique de nombreuses autres fonctions arithmétiques. Ces développements font intervenir des polynômes liés par des relations de récurrence.

Au chapitre 2, nous considérons la suite (x_n) définie par $x_0 \in]0, \pi[\,, x_n = \sin x_{n-1}\ (= \sin_n x)$ pour $n \geqslant 1$. Le développement asymptotique de x_n quand $n \to \infty$ y fait intervenir une famille de polynômes à coefficients rationnels, liés par des relations de récurrence du même type que celles étudiées au chapitre 1.

Nous généralisons le résultat obtenu pour la fonction sinus à une large classe de fonctions.

Le chapitre 3 est consacrée à une formule asymptotique explicite pour une somme comportant les puissances r-ièmes des inverses de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers (r étant un nombre entier ≥ 2).

Ce résultat constitue une extension d'un théorème d'Ivić concernant le cas où $r = 1$.

Le chapitre 4 contient une généralisation des résultats obtenus au chapitre 3 et du théorème d'Ivić à toute une classe de fonctions arithmétiques.

Le chapitre 5 s'appuie sur une étude des nombres et polynômes de Stirling.

Une extension des nombres de Stirling aux entiers négatifs est réalisée de manière simple

Une expression explicite du n-ième polynôme de Stirling à l'aide d'un déterminant d'ordre n est obtenue.

Nous prouvons que les coefficients de certaines séries formelles réciproques s'expriment simplement à l'aide des polynômes de Stirling.

Une identité remarquable vérifiée par ces polynômes est démontrée. Cette identité permet de retrouver une propriété des nombres de Bernoulli découverte en 1995 par Kaneko.

Une étude très précise des coefficients des polynômes de Stirling est réalisée. Cette étude permet de résoudre un problème posé par D.S. Mitrinović et R.S.Mitrinović concernant les coefficients de ces polynômes.

Le chapitre 6 est une étude de la fonction sommatoire de la puissance k-ième de la fonction "somme des chiffres en base q" (où $q \geqslant 2$). Nous prouvons qu'il existe une famille de polynômes $(Q_n(x))_{n\geq 0}$ à coefficients rationnels telle que pour tous entiers $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$ on ait :

$$Q_k(n) = \frac{1}{q^n} \sum_{m=0}^{q^n-1} \left(s_q\left(m\right)\right)^k$$

Les étapes suivantes suivantes sont explicitées :

- détermination de la fonction génératrice de la suite de polynômes $(Q_n(x))_{n\geq 0}$,
- expression de $Q_n(x)$ à l'aide d'un déterminant d'ordre n,
- obtention d'une identité remarquable vérifiée par ces polynômes (analogue à celle vérifiée par les polynômes de Stirling),
- expression de $Q_n(x)$ à l'aide des polyômes de Stirling.

Ce chapitre se termine par un théorème qui améliore et généralise un théorème de Cooper et Kennedy en donnant un développement asymptotique de $Q_k(n)$ quand n tend vers l'infini.

Chapitre 1

Permanence de relations de récurrence dans certains développements asymptotiques

1.1 Introduction

Le $n-$ième nombre premier p_n admet un développement asymptotique faisant intervenir une suite de polynômes à coefficients rationnels liés par des relations de récurrence simples.

Ce fait n'est pas isolé. De nombreuses fonctions arithmétiques admettent un développement asymptotique anlogue.

Le but de ce chapitre est d'en préciser quelques exemples et de monter que le cas de la suite $(\sin_n x)_{n\geq 0}$ où $x \in]0,\pi[$ est fixé, étudié et généralisé à une large classe de suites au chapitre suivant, s'inscrit aussi dans cette étude.

1.2 Développements asymptotiques de fonctions réciproques

Les fonctions $f : x \mapsto e^x/x^\alpha$ et $g : x \mapsto x/(\log x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ admettent chacune dans un voisinage de $+\infty$ une fonction réciproque que l'on note respectivement $f^{\langle -1\rangle}$ et $g^{\langle -1\rangle}$. Il est facile de constater que l'on a, pour $x \to +\infty$

$$f^{\langle -1\rangle}(x) \sim \log x \text{ et } g^{\langle -1\rangle}(x) \sim x(\log x)^\alpha .$$

Dans [23], L. Comtet obtient à l'aide des nombres de Stirling de première espèce, le développement asymptotique explicite de chacune de ces deux fonctions réciproques. Il utilise pour

cela la formule d'inversion de Lagrange.

les suites de polynômes $(\sigma_n(x))_{n\geq 1}$ (suite des polynômes de Stirling à laquelle on adjoint $\sigma_0(x) = 1/x$) et $(\tau_n(x))_{n\geq 0}$, définies et étudiées au chapitre cinq de cette thèse, permettent de reformuler simplement les Théorèmes de L. Comtet.

Rappelons les relations suivantes qui lient ces polynômes aux nombres de Stirling $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ non signés de première espèce définis par : $x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k\geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$. On a :

$$\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} = \tau_k(n) \quad \text{pour } n \geq k \geq 0,$$

et

$$\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} = (k+1)! \binom{n}{k+1} \sigma_k(n) \quad \text{pour } n \geq k \geq 1.$$

On peut alors écrire les résultats obtenus par L. Comtet sous la forme

$$f^{\langle -1\rangle}(x) \approx \log x \sum_{n\geq 0} \frac{A_n(\log\log x)}{(\log x)^n},$$

et

$$g^{\langle -1\rangle}(x) \approx x(\log x)^{\alpha} \sum_{n\geq 0} \frac{B_n(\log\log x)}{(\log x)^n},$$

$(A_n(x))_{n\geq 0}$ et $(B_n(x))_{n\geq 0}$ étant les suites de polynômes définies par

$$\begin{cases} A_0(x) = 1 \\ A_n(x) = \alpha^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \tau_{k-1}(n-1) \frac{x^k}{k!} \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} B_0(x) = 1 \\ B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k,\alpha} x^k \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

avec

$$c_{n,k,\alpha} = \alpha^n \binom{n}{k} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-1)^j \sigma_j(n)}{(k-j-1)!} \alpha^{k-j}.$$

Dans [69] G. Robin remarque que les suites $(A_n(x))_{n\geq 0}$ et $(B_n(x))_{n\geq 0}$ vérifient les relations de récurrence simples suivantes qui les caractérisent :

$$\begin{cases} A_0(x) = 1 \\ A'_{n+1}(x) = \alpha A'_n(x) - n\alpha A_n(x) \quad \text{pour } n \geq 0 \\ A_n(0) = 0 \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} B_0(x) = 1 \\ B'_{n+1}(x) = \alpha B'_n(x) - \alpha(n-\alpha) B_n(x) \quad \text{pour } n \geq 0 \\ B_n(0) = 0 \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Ces relations de récurrence sont similaires à celles que l'on obtient pour le développement asymptotique du n-ième nombre premier.

1.3 Développement asymptotique du n-ième nombre premier

Le Théorème des nombres premiers dans sa version faible

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \longrightarrow \infty),$$

permet de constater que

$$p_n \sim n \log n \quad (n \longrightarrow \infty).$$

En exploitant la version plus forte suivante du Théorème des nombres premiers

$$\pi(x) = Li(x) + o\left(\frac{x}{\log^N x}\right) \quad \text{pour tout entier } N \geq 1,$$

où

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t},$$

M. Cipolla [22] a prouvé qu'il existait une unique suite de polynômes $(P_m(x))_{m\geq 0}$ à coefficients rationnels tels que pour tout entier $N \geq 1$, on ait

$$p_n = n \log n \left(\sum_{m=0}^{N} \frac{P_m(\log\log n)}{(\log n)^m} + o\left(\frac{1}{\log^N n}\right)\right).$$

La suite de polynômes $(P_m(x))_{m\geq 0}$ vérifie la relation de récurrence

$$P'_{n+1}(x) = P'_n(x) - (n-1) P_n(x) \quad \text{pour } n \geq 0$$

Cette relation est similaire à celle obtenue pour les polynômes $(B_n(x))_{n\geq 0}$ pour $\alpha = 1$ à la différence près que l'on n'a pas d'informations sur la suite $(P_n(0))_{n\geq 0}$.

L'étude des termes constants des polynômes intervenant dans le développement asymptotique du n-ième nombre premier reste encore aujourd'hui un problème ouvert.

Les premières valeurs des polynômes $P_n(X)$ sont

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x - 1 \\
P_2(x) &= x - 2 \\
P_3(x) &= -\frac{x^2 - 6x + 11}{2} \\
P_4(x) &= \frac{2x^3 - 21x^2 + 84x - 131}{6}
\end{aligned}$$

Dans sa thèse de Doctorat [53], J. P. Massias a déterminé les polynômes $P_n(x)$ pour $0 \leq n \leq 15$ (calcul sur ordinateur).

1.4 Développement asymptotique de log(g(n)) et ω(g(n)

Dans [54] ,J.-P. Massias, J-L. Nicolas et G. Robin ont étudié le comportement asymptotique de la fonction g(n), ordre maximum d'un élément du groupe symétrique S_n et ont montré que

$$\log(g(n)) \approx \sqrt{Li^{-1}(n)}.$$

Si ω(g(n)) désigne le nombre de facteurs premiers de g(n), ils ont aussi prouvé que

$$\omega(g(n)) \approx Li(\sqrt{Li^{-1}(n)}).$$

Dans [69] ,G.Robin prouve que

$$\sqrt{Li^{-1}(n))} \approx \sqrt{n \log n} \left(\sum_{m \geq 0} \frac{C_m(\log\log n)}{(\log n)^m} \right).$$

avec

$$C'_{n+1}(x) = C'_n(x) - (n - 1/2) C_n(x) \quad \text{pour } n \geq 0 \text{ et } \quad C_0(x) = 1,$$

et

$$Li(\sqrt{Li^{-1}(n)))} \approx 2\sqrt{\frac{n}{\log n}} \left(\sum_{m \geq 0} \frac{D_m(\log\log n)}{(\log n)^m} \right).$$

avec

$$D'_{n+1}(x) = D'_n(x) - (n + 1/2) D_n(x) \quad \text{pour } n \geq 0 \text{ et } \quad D_0(x) = 1.$$

D'autres exemples similaires sont cités dans [69] .

Chapitre 2

Développement asymptotique du n-ième itéré d'une fonction

2.1 Introduction

Considérons la suite réelle (x_n) définie par

$$\begin{aligned} x_0 &= x \in]0, \pi[\\ x_n &= \sin x_{n-1} = \sin_n x \text{ pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

Il est bien connu que, $\sin_n x \sim \sqrt{3/n}$, pour $n \to \infty$, [32, ex21, p.117]. De Bruijn, [29, p.159], a établi plus précisément que, pour $n \to \infty$,

$$\sin_n x = \sqrt{\frac{3}{n}} \left(1 + \frac{1}{n} \left(-\frac{3}{10} \log n - \frac{C(x)}{2} \right) + \frac{1}{n^2} \left(a \log^2 n + b \log n + c \right) + O\left(\frac{\log^3 n}{n^3} \right) \right),$$

avec $a = \frac{27}{200}$; $b = \frac{9}{20} C(x) - \frac{9}{50}$; $c = \frac{3}{8} C(x)^2 - \frac{3}{10} C(x) + \frac{79}{700}$, $C(x)$ étant une fonction de x indépendante de n.

Nous généralisons ces résultats dans le théorème suivant qui est un cas particulier du Théorème 2.

Théorème 1 *Il existe une famille de polynômes $(S_m)_{m \geq 0}$ de $\mathbb{Q}[X]$ et une fonction $C(x)$ telles que le développement asymptotique de la suite $\sin_n x$ s'écrive, pour tout $N \geq 1$,*

$$\sqrt{\frac{3}{n}} \left(1 + \sum_{m=1}^{N} n^{-m} S_m \left(-\frac{3}{10} \log n - \frac{C(x)}{2} \right) + O\left(\left(\frac{\log n}{n} \right)^{N+1} \right) \right).$$

Les polynômes S_m, pour $m \geq 0$, sont de degré m et vérifient l'équation différentielle

$$S'_{m+1} = \frac{3}{5} S'_m + (2m+1) S_m.$$

Les premières valeurs des polynômes S_m *sont* : $S_0 = 1$, $S_1 = X$, $S_2 = \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{5}X + \frac{79}{700}$, $S_3 = \frac{5}{2}X^3 + \frac{12}{5}X^2 + \frac{647}{700}X + \frac{411}{3500}$.

La fonction $C(x)$ est dérivable sur $]0, \pi[$; elle est décroissante sur $]0, \pi/2[$ et admet, lorsque $x \to 0$, un développement asymptotique vérifiant, pour tout k entier ≥ 2,

$$C(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{3}{5}\log\left(3/x^2\right) + d_1x^2 + d_2x^4 + \cdots + d_{k-2}x^{2(k-2)} + O\left(x^{2(k-1)}\right),$$

avec $d_1 = 79/1050$, $d_2 = 29/2625, \ldots$

Ce théorème est principalement conséquence du théorème plus général suivant, puisque

$$x_{n+1} = \sin x_n = x_n + \sum_{m=1}^{N} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x_n^{2m+1} + O\left(x_n^{2N+3}\right), \text{ quand } n \to \infty.$$

La dernière partie du théorème est démontrée au dernier paragraphe.

Théorème 2 *Soit* $(a_1, a_2, \ldots, a_k, t)$ *une suite de* $(k+1)$ *réels avec* $k \geq 1$, $a_1 < 0$ *et* $t > 0$. *Posons* $\lambda = -1/ta_1$ *et pour* $k \geq 2$, $b_1 = (1 + t - (2a_2/a_1^2))/2t$.

· *Pour* $k \geq 2$, *il existe une suite de* $(k+1)$ *polynômes* $(P_m)_{0\leq m\leq k}$ *à coefficients dans* $\mathbb{Q}(a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}, t)$ *et vérifiant l'équation différentielle* $P'_{m+1} = b_1P'_m + (tm+1)P_m$, *pour* $0 \leq m \leq k-1$, *tels que la propriété suivante soit vraie :*

si une suite (u_n), *réelle, positive, convergente vers zéro, vérifie*

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{m=1}^{k} a_m u_n^{mt+1} + O\left(u_n^{(k+1)t+1}\right), \tag{1}$$

quand $n \to \infty$, *alors, elle a un développement asymptotique de la forme*

$$u_n = (\lambda/n)^{1/t}\left(1 + \sum_{m=1}^{k} n^{-m}P_m\left(-t^{-1}\left(b_1\log n + C\right)\right) + O\left(1/n^k\right)\right),$$

pour $n \to \infty$, C *étant la constante définie par* $C = \lim_{n\to\infty}\left(\lambda u_n^{-t} - n - b_1\log n\right)$.

De plus, $P_0 = 1$, $P_1 = X$, et $P_k \in \mathbb{Q}(a_1, a_2, \ldots, a_k, t)[X]$.

· *Pour* $k = 1$, *on peut seulement écrire* $u_n = (\lambda/n)^{1/t}\left(1 + O\left(\log n/n\right)\right)$.

Pour démontrer ce théorème, nous étudions au paragraphe suivant la suite $n \to \lambda\left(u_n\right)^{-t} = v_n$. Nous déterminons son développement asymptotique au paragraphe 3 et nous en déduisons celui de u_n au paragraphe 4.

Les paragraphes 5 et 6 traitent plus particulièrement de la fonction sinus afin de préciser les propriétés de la fonction $C(x)$ du Théorème 1.

2.2 Etude de la suite $n \to \lambda \left(u_n\right)^{-t}$

Définissons v_n par l'égalité $(u_n)^t = \lambda / v_n$. Avec (1), on obtient quand $n \to \infty$,

$$si\ k \geq 2 \qquad v_{n+1} - v_n = 1 + \sum_{m=1}^{k-1} b_m / v_n^{-m} + O\left(1/v_n^k\right) \tag{2}$$

$$si\ k = 1 \qquad v_{n+1} - v_n = 1 + O\left(1/v_n\right) \tag{2'}$$

$(b_m)_{1 \leq m \leq k-1}$ étant une suite d'éléments de $\mathbb{Q}\left(a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}, t\right)$. En paraticulier

$$b_1 = (1/2t)\left(1 + t - \left(2a_2/a_1^2\right)\right).$$

Lemme 3 *1. Pour $k \geq 2$, la suite $n \to v_n - n - b_1 \log n$ est convergente vers une limite C.*

2. Il existe une unique famille de réels $(c_m)_{1 \leq m \leq k-2}$, $c_m \in \mathbb{Q}\left(b_1, b_2, \ldots, b_{m+1}\right)$, pour laquelle la fonction Ψ définie par

$$\begin{aligned} si\ k &= 1 \qquad \Psi(x) = x, \\ si\ k &= 2 \qquad \Psi(x) = x - \left(b_1 \log x + C\right), \\ si\ k &\geq 3 \qquad \Psi(x) = x - \left(b_1 \log x + C\right) + c_1/x + \cdots + c_{k-2}/x^{k-2}, \end{aligned}$$

vérifie $\Psi\left(v_{n+1}\right) - \Psi\left(v_n\right) = 1 + O\left(1/n^k\right)$, pour $n \to \infty$.

De plus la fonction Ψ ainsi définie admet, au voisinage de $+\infty$, une fonction réciproque Ψ^{-1} et on a

$$\begin{aligned} si\ k &= 1 \qquad v_n = n + O\left(\log n\right), \\ si\ k &\geq 2 \qquad v_n = \Psi^{-1}(n) + O\left(1/n^{k-1}\right). \end{aligned}$$

Preuve.

1. Comme $v_n \to \infty$, on déduit $v_{n+1} - v_n \sim 1$ de (2) ou (2'), ce qui entraîne $v_n \sim n$ et permet d'écrire de nouveau avec (2) ou (2'), $v_{n+1} - v_n = 1 + O\left(1/n\right)$ et par conséquent, $v_n = n + O\left(\log n\right)$, ce qui termine la démonstration pour $k = 1$. Pour $k \geq 2$, on injecte cette expression de v_n dans le second membre de (2) pour obtenir

$$v_{n+1} - v_n = 1 + n^{-1} b_1 + O\left(n^{-2} \log n\right).$$

En posant $t_n = v_n - n - b_1 \log n$, cette relation s'écrit

$$t_{n+1} - t_n = O\left(n^{-2} \log n\right).$$

On en déduit que la suite $n \to t_n$ converge vers une limite C.

2. Soit $(c_m)_{0\leq m\leq k-2}$ une suite de réels et $\Psi : x \to x + c_0 \log x - C + \sum_{m=1}^{k-2} c_m/x^m$. (Si $k = 2$, la somme disparaît). Comme $v_n \sim n$, on a d'après (2)

$$\log\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{v_n} + \sum_{j=1}^{k-2} \frac{b_j}{v_n^{j+1}} + O\left(\frac{1}{n^k}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{a_{0j}}{v_n^j} + O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

et pour $1 \leq i \leq k-2$

$$\begin{aligned} v_{n+1}^{-i} - v_n^{-i} &= v_n^{-i}\left(\left(1 + \frac{1}{v_n} + \sum_{j=1}^{k-2} \frac{b_j}{v_n^{j+1}} + O\left(\frac{1}{n^k}\right)\right)^{-1} - 1\right) \\ &= \sum_{j=i+1}^{k-1} \frac{a_{ij}}{v_n^j} + O\left(\frac{1}{n^k}\right), \end{aligned}$$

$(a_{ij})_{0\leq i\leq k-2, i+1\leq j\leq k-1}$ étant une suite de réels, $a_{ij} \in \mathbf{Q}[b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}]$ avec $a_{01} = 1$ et $a_{i\,i+1} = -i$, pour $1 \leq i \leq k-2$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \Psi(v_{n+1}) - \Psi(v_n) &= c_0 \log(v_{n+1}/v_n) + \sum_{i=1}^{k-2} c_i\left(v_{n+1}^{-i} - v_n^{-i}\right) + v_{n+1} - v_n \\ &= \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} A_j / v_n^{-j}\right) + O\left(n^{-k}\right) \end{aligned}$$

avec $A_j = \sum_{i=0}^{j-1} a_{ij}c_i + b_j$, pour $1 \leq j \leq k-1$. On a alors $\Psi(v_{n+1}) - \Psi(v_n) = 1 + O\left(n^{-k}\right)$, $1 \leq j \leq k-1$, si et seulement si $A_j = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $(c_i)_{0\leq i\leq k-1}$ est solution dyu système

$$(\mathbf{S}) \qquad \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}c_i = -b_j \quad \text{pour } 1 \leq j \leq k-1.$$

Le déterminant Δ du système $(\mathbf{S})$

$$\Delta = \prod_{i=0}^{k-2} a_{i\,i+1} = (-1)^k (k-2)!,$$

est non nul et le système $(\mathbf{S})$ admet une solution unique pour laquelle $c_0 = -b_1$ et $c_m \in \mathbb{Q}(b_1, b_2, \ldots, b_{m+1})$ pour $1 \leq m \leq k-2$. Définissons une nouvelle suite (w_n) par $\Psi(v_n) = n + w_n$. On a alors $w_{n+1} - w_n = O\left(1/n^k\right)$ avec, d'après la définition de C,

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} (v_n - b_1 \log n - n - C) = 0.$$

On en déduit que

$$w_n = -\sum_{m\geq n} (w_{m+1} - w_m) = O\left(\sum_{m\geq n} 1/m^k\right) = O\left(1/n^{k-1}\right)$$

et ainsi $\Psi(v_n) = n + O\left(1/n^{k-1}\right)$. Il est immédiat de constater que Ψ admet au voisinage de $+\infty$ une fonction réciproque Ψ^{-1} dérivable telle que $\left(\Psi^{-1}\right)'(x) \sim 1$ pour $x \to \infty$. On en conclut que $v_n = \Psi^{-1}(n) + O\left(n^{1-k}\right)$, pour $n \to \infty$.

□

Remarque 4 *La démonstration précédente s'applique aussi pour montrer le résultat suivant qui nous sera utile au paragraphe 5.*

Soit $k \geq 2$ et g une fonction telle que, pour $x \to \infty$,

$$g(x) = x + 1 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{x^{k-1}} + O\left(\frac{1}{x^k}\right),$$

et soit $\Psi^* = \Psi + C$, alors $\Psi^*(g(x)) - \Psi^*(x) = 1 + O\left(1/x^k\right)$, pour $x \to \infty$.

2.3 Développement asymptotique de V_n

Commençons par préciser un résultat dû à Robin ([69, *th.*1], voir aussi [16]).

Proposition 5 *Soit f une fonction admettant un développement asymptotique de la forme $f(x) = h(x) + o(1/x^q)$ avec $h(x) = x - (\alpha \log x + \beta) + \gamma_1/x + \cdots + \gamma_q/x^q$, lorsque $x \to \infty$, $\left(\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q\right) \in \mathbb{R}^{q+2}$ et q un entier positif.*

Si f possède une fonction réciproque g dans un voisinage de $+\infty$, alors cette fonction g et la fonction réciproque de h admettant un même développement asymptotique, lorsque $x \to +\infty$, qui s'écrit

$$x\left(\sum_{m=0}^{q+1} x^{-m}\Gamma_m(\alpha \log x + \beta) + o\left(1/x^{q+1}\right)\right),$$

$(\Gamma_m)_{0\leq m\leq q+1}$ étant une suite de polynômes de $\mathbb{Q}\left(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m-1}, \alpha\right)[X]$, pour $2 \leq m \leq q+1$, $\Gamma_0 = 1$, $\Gamma_1 = X$, vérifiant les relations de récurrence $\Gamma'_{m+1} = \alpha\Gamma'_m - (m-1)\Gamma_m$, pour $0 \leq m \leq q$.

Preuve. Déterminons d'abord la forme du développement asymptotique. Posons $u = g(x)/x$ et $y = \alpha \log x + \beta$. En utilisant la forme du développement asymptotique de f et les relations $f(ux) = x$ et $u \sim 1$, pour $x \to \infty$, on peut écrire, pour $x \to \infty$,

$$u = 1 + \frac{y}{x} + \frac{\alpha}{x}\log u - \frac{\gamma_1}{x^2}u^{-1} - \cdots - \frac{\gamma_q}{x^{q+1}}u^{-q} + o\left(\frac{1}{x^{q+1}}\right) \tag{3}$$

On en déduit que $u = 1 + y/x + o(1/x)$, pour $x \to \infty$. Un raisonnement par récurrence permet alors de mettre en évidence l'existence d'une famille de polynômes $(\Gamma_m)_{0\leq m\leq q+1}$ de

$\mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$u = x^{-1}g(x) = \sum_{m=0}^{q+1} x^{-m}\Gamma_m(y) + o\left(1/x^{q+1}\right),$$

Γ_m étant, pour $0 \leq m \leq q+1$, un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ indépendant de β, les coefficients de Γ_m étant des polynômes en $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m-1}$ et α à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Il suffit pour cela de remarquer qu'une expression de u s'écrivant

$$u = 1 + \sum_{m=1}^{p} x^{-m}\left(\Gamma_m(y)\right) + o\left(1/x^p\right), \text{ avec } 0 \leq p \leq q-1,$$

injectée au second membre de (3) permet d'obtenir

$$u = 1 + \sum_{m=1}^{p+1} x^{-m}\left(\Gamma_m(y)\right) + o\left(1/x^{p+1}\right),$$

Γ_{p+1} pouvant s'écrire

$$\Gamma_{p+1} = -\gamma_p + \sum_{1\leq k\leq p} \sum_{1\leq i_1\leq i_2\ldots\leq i_k\leq p} \lambda_{i_1,\ldots,i_k}\Gamma_{i_1}\Gamma_{i_2}\cdots\Gamma_{i_k}$$

avec $\lambda_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathbb{Q}\left[\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p, \alpha\right]$ pour $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq p$. On obtient aisément $\Gamma_0 = 1$; $\Gamma_1 = X$; $\Gamma_2 = \alpha X - \gamma_1$; $\Gamma_3 = -(\alpha/2)X^2 + (\alpha^2 + \gamma_1)X - \gamma_1\alpha - \gamma_2$.

Déterminons maintenant les relations de récurrence. Posons

$$G(x) = x\left(\sum_{m=0}^{q+1} x^{-m}\Gamma_m(\alpha\log x)\right),$$

soit

$$\begin{aligned} G(x) &= x + \alpha\log x + \sum_{m=1}^{q+1} x^{-m}\Gamma_{m+1}(\alpha\log x), \\ G'(x) &= 1 + \sum_{m=1}^{q} x^{-m}\left(\alpha\Gamma'_m - (m-1)\Gamma_m\right)(\alpha\log x) + o\left(x^{-q}\right), \end{aligned}$$

et pour $p \geq 2$,

$$G^{(p)}(x) = \sum_{m=1}^{q} x^{-m}T_{p\,m}(\alpha\log x) + o\left(x^{-q}\right),$$

$T_{p\,m}$ étant, pour $2 \leq p \leq m \leq q$, un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ à coefficients indépendants de β. De plus $T_{p\,p} = (-1)^{p-1}(p-1)!\alpha$ pour $2 \leq p \leq q$. On a alors, pour $x \to \infty$, d'une part

$$\begin{aligned} g(x) &= G(x+\beta) + o\left(x^{-q}\right) \\ &= G(x) + \beta G'(x) + \cdots + \beta^q G^{(q)}(x)/q! + o\left(x^{-q}\right) \\ &= x + \alpha\log x + \beta + \sum_{m=1}^{q} x^{-m}Q_{\beta\,m}(\alpha\log x) + o\left(x^{-q}\right), \end{aligned}$$

avec, pour $1 \leq m \leq q$,

$$Q_{\beta\, m} = \Gamma_{m+1} + \beta\left(\alpha\Gamma'_m - (m-1)\,\Gamma_m\right) + \sum_{p=2}^{m} \beta^p T_{p\, m}/p!, \tag{4}$$

et d'autre part

$$g(x) = x + \alpha\log x + \beta + \sum_{m=1}^{q} x^{-m}\Gamma_{m+1}\left(\alpha\log x + \beta\right) + o\left(x^{-q}\right).$$

En identifiant les deux développements de g ainsi obtenus, on obetient pour $\alpha \neq 0$

$$Q_{\beta\, m}(X) = \Gamma_{m+1}(X+\beta). \tag{5}$$

Ceci montre, avec l'expression de $Q_{\beta m}(X)$ donnée par (4) que Γ_{m+1} est un polynôme de degré au plus égal à m, le coefficient de X^m étant égal à $T_{m\, m}/m! = (-1)^{m-1}\,\alpha/m$. De plus, en développant le second membre de (5) à l'aide de la formule de Taylor, on obtient avec (4) deux expressions de $Q_{\beta\, m}$ comme polynôme en β ; on peut donc identifier les coefficients de β dans ces deux expressions. On obtient $\Gamma'_{m+1} = \alpha\Gamma_m - (m-1)\,\Gamma_m$, pour $1 \leq m \leq q$. Dans le cas où $\alpha = 0$, on a d'une part

$$\begin{aligned} g(x) &= x + \beta + \sum_{r=1}^{q} \Gamma_{r+1}(0)\,(x+\beta)^{-r} + o\left(1/x^k\right) \\ &= x + \beta + \sum_{r=1}^{q}\sum_{j=0}^{q-r} (-1)^j \binom{r+j-1}{j} \frac{\beta^j \Gamma_{r+1}(0)}{x^{r+j}} + o\left(x^{-q}\right), \end{aligned}$$

et d'autre part

$$g(x) = x + \beta + \sum_{m=1}^{q} x^{-m}\Gamma_{m+1}(\beta) + o\left(x^{-q}\right).$$

En identifiant les deux développements de g obtenus dans ce cas, on déduit que

$$\Gamma_{m+1}(X) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} \Gamma_{m-k+1}(0)\, X^k.$$

La propriété bien connue

$$k\binom{m-1}{k} = (m-1)\binom{m-2}{k-1}, \text{ pour } 1 \leq k \leq m-1,$$

permet alors de constater que $\Gamma'_{m+1} = -(m-1)\,\Gamma_m$, pour $1 \leq m \leq q$. Les relations de récurrence sont donc aussi vérifiées dans le cas où $\alpha = 0$. □

Remarque 6 (Remarque concernant le degré du polynôme Γ_m) *Si $\alpha \neq 0$, alors pour tout entier m, $2 \leq m \leq q+1$, Γ_m est un polynôme de degré $m-1$ et de coefficient dominant $(-1)^{m-1}\alpha/(m-1)$. Si $\alpha = 0$ et si pour un entier s, $1 \leq s \leq q$, on a $\gamma_m = 0$ pour $1 \leq m \leq s-1$ et $\gamma_s \neq 0$ alors $\Gamma_m = 0$ pour $2 \leq m \leq s$, $\Gamma_{s+1} = -\gamma_s$ et degré $(\Gamma_m) = m-(s+1)$ pour $s+1 \leq m \leq q+1$.*

En exploitant le Lemme 3 et en appliquant la Proposition 5 à

$$\Psi(x) = x - (b_1 \log x + C) + c_1/x + \cdots + c_{k-2}/x^{k-2} + O\left(x^{k-1}\right),$$

nous obtenons la

Proposition 7 *Pour $k \geq 2$, il existe une famille de polynômes $(T_m)_{0\leq m\leq k}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que*

$$v_n = n\left(\sum_{m=0}^{k} n^{-m} T_m(b_1 \log n + C) + O\left(n^{-k}\right)\right),$$

avec $T_0 = 1$; $T_1 = X$; $T'_{m+1} = b_1 T'_m - (m-1)T_m$ pour $0 \leq m \leq k-1$. De plus, pour $0 \leq m \leq k-1$, les coefficients du polynôme T_m sont dans $\mathbb{Q}[a_1, a_2, ..., a_k, t]$ et sont indépendants de la constnte C. T_k a ses coefficients dans $\mathbb{Q}[a_1, a_2, ..., a_k, t]$.

2.4 Démonstration du Théorème 2

Nous commençons d'abord par démontrer un résultat déja signalé par Robin ([69, *prop.*1, *p.*21], voir aussi [16]).

Proposition 8 *Soit $\gamma \in \mathbb{R}^*$ et soit $(Q_m)_{m\geq 0}$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $Q_0 = 1$ et $Q'_{m+1} = aQ'_m + b(m+\mu)Q_m$ pour $m \geq 0$, $(a, b, \mu) \in \mathbb{R}^3$.*

Alors, dans $\mathbb{R}[[X, Y]]$, on a pour $\gamma \in \mathbb{R}^*$,

$$\left(\sum_{m\geq 0} Q_m(X)Y^m\right)^{\gamma} = \sum_{m\geq 0} R_m(X)Y^m,$$

$(R_m)_{m\geq 0}$ étant une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $R_0 = 1$, $R_1 = \gamma Q_1$ et $R'_{m+1} = aR'_m + b(m+\mu\gamma)R_m$ pour $m \geq 0$.

R_m n'est fonction que des polynômes $Q_1, Q_2, ..., Q_m$; de plus si $Q_m \in \mathbb{Q}[X]$ pour.$m \geq 0$ et si $\gamma \in \mathbb{Q}$, alors $R_m \in \mathbb{Q}[X]$ pour $m \geq 0$.

Preuve. Posons $S = \sum_{m\geq 0} Q_m(X)Y^m$ et $F = S^\gamma$. L'expression de F sous la forme $F = \sum_{m\geq 0} R_m Y^m$, $(R_m)_{m\geq 0}$ étant une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ avec $R_0 = 1$, $R_1 = \gamma Q_1$ est immédiate. En dérivant cette relation par rapport à X puis par rapport à Y, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial X} = \gamma S^{\gamma-1}\sum_{m\geq 0} Q'_m Y^m = \sum_{m\geq 0} R'_m Y^m \\ \frac{\partial F}{\partial Y} = \gamma S^{\gamma-1}\sum_{m\geq 1} mQ_m Y^{m-1} = \sum_{m\geq 1} mR_m Y^{m-1} \end{array}\right. \tag{6}$$

On en déduit, en calculant $aY\frac{\partial F}{\partial X} + bY^2\frac{\partial F}{\partial Y}$, que

$$\gamma S^{\gamma-1}\left(\sum_{m\geq 0}\left(aQ'_m + bmQ_m\right)Y^{m+1}\right) = \sum_{m\geq 0}\left(aR'_m + bmR_m\right)Y^{m+1}. \tag{7}$$

Mais, d'après les relations de récurrence vérifiées par la famille de polynômes $(Q_m)_{m\geq 0}$, on a

$$aQ'_m + bmQ_m = Q'_{m+1} - b\mu Q_m.$$

En injectant cette relation dans le premier membre de (7), on obtient, compte tenu que $Q'_0 = R'_0 = 0$ et les relations (6)

$$\sum_{m\geq 0}\left(R'_{m+1} - b\mu\gamma R_m\right)Y^{m+1} = \sum_{m\geq 0}\left(aR'_m + bmR_m\right)Y^{m+1}.$$

On en déduit immédiatement la relation $R'_{m+1} = aR'_m + b\left(m+\mu\gamma\right)R_m$ pour $m \geq 0$. Remarquons que degré $(R_m) \leq m$, pour $m \geq 1$ et que

$$R_m = \sum_{p=1}^{m}\frac{\gamma\left(\gamma-1\right)\left(\gamma-p+1\right)}{p!}\sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_p=m\\ \text{avec } i_k\geq 1 \text{ pour } 1\leq k\leq p}} Q_{i_1}Q_{i_2}\cdots Q_{i_p}.$$

Il en résulte que si $Q_m \in \mathbb{Q}[X]$ pour.$m \geq 0$ et si $\gamma \in \mathbb{Q}$, alors $R_m \in \mathbb{Q}[X]$. □

Corollaire 9 *Soit $(Q_m)_{0\leq m\leq q}$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $Q_0 = 1$ et $Q'_{m+1} = aQ'_m + b\left(m+\mu\right)Q_m$ pour $m \geq 0$, $(a,b,\mu) \in \mathbb{R}^3$. Alors, pour $(\alpha,\beta,\mu) \in \mathbb{R}^3$, $\gamma \neq 0$, on a*

$$\left(\sum_{m=0}^{q} n^{-m}Q_m(\alpha\log n+\beta)\right)^\gamma = \sum_{m=0}^{q} n^{-m}R_m(\alpha\log n+\beta) + O\left((\log n/n)^{q+1}\right),$$

$(R_m)_{0\leq m\leq q}$ étant une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $R_0 = 1$, $R_1 = \gamma Q_1$ et $R'_{m+1} = aR'_m + b\left(m+\mu\gamma\right)R_m$ pour.$0 \leq m \leq q-1$. De plus si $Q_m \in \mathbb{Q}[X]$ pour $0 \leq m \leq q$ et si $\gamma \in \mathbb{Q}$, alors $R_m \in \mathbb{Q}[X]$ pour $0 \leq m \leq q$.

Preuve du Théorème 2. En exploitant les Propositions 2 et 3, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda^{1/t}v_n^{-1/t} = (\lambda/n)^{1/t}\left(\sum_{m=0}^{k} n^{-m}T_m(b_1\log n + C) + O\left(n^{-k}\right)\right)^{-1/t} \\ &= (\lambda/n)^{1/t}\left(\sum_{m=0}^{k} n^{-m}R_m(b_1\log n + C) + O\left(n^{-k}\right)\right), \end{aligned}$$

$(R_m)_{0\leq m\leq k}$ étant une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$R_0 = 1, R_1 = -X/t \text{ et } R'_{m+1} = b_1 R'_m - (m+1/t)\, R_m.$$

Pour $0 \leq m \leq k$, posons $P_m(X) = R_m(-tX)$. On a alors $P_0 = 1, P_1 = X$ et $P'_{m+1} = b_1 P'_m + (tm+1)\, P_m$ pour $0 \leq m \leq k-1$ et

$$u_n = (\lambda/n)^{1/t} \left(1 + \sum_{m=1}^{k} n^{-m} P_m(-t^{-1}(b_1 \log n + C)) + O\left(1/n^k\right)\right).$$

□

2.5 Itération d'une fonction

Soit f une fonction numérique continue dans un voisinage à droite de zéro et admettant un développement asymptotique s'écrivant pour $k \geq 2$ et $x \to 0$,

$$f(x) = x + \sum_{m=1}^{k} a_m x^{mt+1} + O\left(x^{(k+1)t+1}\right) \text{ avec } a_1 < 0 \text{ et } t > 0.$$

En choisissant x assez petit, $x \in]0, \delta]$, la suite définie par $u_0 = x$ et

$$u_n = f(u_{n-1}) = f_n(x) \text{ pour } n \geq 1,$$

est strictement décroissante et vérifie les hypothèses du Théorème 1. La constante C du Théorème 1 est $C = \lim_{n\to\infty} (\lambda f_n(x)^{-t} - n - b_1 \log n)$. Elle dépend de f et de x, nous la noterons simplement $C(x)$. D'après l'expression de C précédente on a

$$C(f(x)) - C(x) = 1 \text{ pour tout } x \in]0, \delta].$$

2.5.1 Expression de $C(x)$ comme somme d'une série.

Soit $x \in]0, \delta]$, on a, d'après le Théorème 1, pour $n \to \infty$,

$$f_n(x) = (\lambda/n)^{1/t} (1 + O(\log n/n)). \tag{8}$$

On en déduit que $\log(\lambda/f_n(x)^t) = \log n + O(\log n/n)$ et, qu'ainsi, en posant pour $m \geq 0$, $S_m(x) = \lambda/f_m(x)^t - b_1 \log(\lambda/f_m(x)^t) - m$, il vient,

$$C(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \;=\; S_m(x) + \textstyle\sum_{n\geq m} (S_{n+1}(x) - S_n(x)) \;=\; S_m(x) + \sum_{n\geq m} p(f_n(x)) \quad \text{avec}$$

$$p(x) = \lambda/f_n(x)^t - \lambda/x^t + b_1 t \log(f(x)/x) - 1.$$

En particulier, pour $m = 0$, on obtient :

$$C(x) = \lambda/x^t - b_1 t \log\left(\lambda/x^t\right) + \sum_{n\geq 0} p(f_n(x)).$$

2.5.2 Développement asymptotique de $C(x)$.

Proposition 10 *Si f est croissante sur $]0,\delta]$, alors $C(x)$ est continue sur $]0,\delta]$ et on a pour $x \to 0$: $C(x) = \lambda/x^t - b_1 \log(\lambda/x^t) + d_1 x^t + ... + d_{k-2} x^{(k-2)t} + O\left(x^{(k-1)t}\right)$, les d_i étant réels, pour $i = 1, ..., k-2$.*

Preuve.

1. Continuité de $C(x)$ sur $]0,\delta]$: on constate aisément que $p(x) = O(x^{2t})$, pour $x \to 0$. Il existe donc des constantes C_1 et C_2 telles que pour tout $x \in]0,\delta]$, on ait $|p(x)| \leq C_1 x^{2t}$ et d'après (8), $f_n(x) \leq f_n(\delta) \leq C_2 (1/n)^{1/t}$, pour tout $n \geq 1$. On a, par suite, $|p(f_n(x))| \leq C_3/n^2$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in]0,\delta]$ où $C_3 = C_1 (C_2)^{2t}$ est une constante indépendante de x. On peut alors écrire

$$|C(x) - S_m(x)| \leq \sum_{n \geq m} p(f_n(x)) \leq 2C_3/m.$$

   $C(x)$ est par suite continue sur $]0,\delta]$ comme limite uniforme de la suite de fonctions continues $(S_m(x))$.

2. Développement asymptotique de $C(x)$: Ψ^* étant définie à la fin du paragraphe 2, désignons par φ^* la fonction $x \to \varphi^*(x) = \Psi^*(\lambda/x^t)$. On a :

$$\varphi^*(x) = \lambda/x^t - b_1 \log \lambda/x^t + d_1 x^t + \cdots + d_{k-2} x^{(k-2)t}$$

   avec $d_m = c_m/\lambda^m$ pour $m = 1, ..., k-2$. Soit g la fonction définie par $x \to \lambda \left(f\left((\lambda/x)^{1/t}\right)\right)^{-t}$. Comme $\varphi^*(f(x)) = \Psi^*(g(\lambda/x^t))$, il vient d'après la remarque du paragraphe 2, pour $x \to 0$,

$$\varphi^*(f(x)) - \varphi^*(x) = 1 + O\left(x^{kt}\right).$$

   Comme $C(x)$ vérifie la relation $C(f(x)) - C(x) = 1$ pour $x \in]0,\delta]$, on a, en posant $\chi(x) = C(x) - \varphi^*(x)$, $\quad \chi(f(x)) - \chi(x) = O\left(x^{kt}\right)$, pour $x \to 0$. Il existe donc une constante C_4 telle que

$$|\chi(f(x)) - \chi(x)| \leq C_4 x^{kt} \text{ pour } 0 < x \leq \delta.$$

   On constate, d'autre part, que $\chi(f_n(x))$ tend vers 0 avec $1/n$, on a en effet :

$$\begin{aligned} \chi(f_n(x)) &= \sum_{m \geq n} p(f_m(x)) - \sum_{m=1}^{k-2} d_m (f_n(x))^{mt} \\ &= C(x) - S_n(x) - \sum_{m=1}^{k-2} d_m (f_n(x))^{mt}. \end{aligned}$$

Comme $C(x) - S_n(x)$ et $f_n(x)$ tendent vers 0 avec $1/n$, il en est de même de $\chi(f_n(x))$. Il en résulte que pour $0 < x \leq \delta$, on a :

$$\chi(x) = \sum_{n\geq 0} \left(\chi(f_n(x)) - \chi(f_{n+1}(x))\right).$$

On a alors $|\chi(f_{n+1}(x)) - \chi(f_n(x))| \leq C_4 \left(f_4(x)\right)^{kt}$.
Les relations $f_n(x) \leq x$ et $f_n(x) \leq C_2 \left(1/n\right)^{1/t}$ conduisent alors aux majorations $|\chi(f_{n+1}(x)) - \chi(f_n(x))| \leq C_4 x^{kt}$ et $|\chi(f_{n+1}(x)) - \chi(f_n(x))| \leq C_5/n^k$ avec $C_5 = C_4 \left(C_2\right)^{kt}$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} |\chi(x)| &\leq \sum_{0\leq m\leq n} |\chi(f_{m+1}(x)) - \chi(f_m(x))| + \sum_{m>n} |\chi(f_m(x)) - \chi(f_{m+1}(x))| \\ &\leq C_4(n+1)x^{kt} + C_5/n^{k-1} \leq 2C_4 n x^{kt} + C_5/n^{k-1}. \end{aligned}$$

On choisit δ pour que $\delta^t < 1$ et n tel que $1/x^t < n < 2/x^t$, et l'on obtient $|\chi(x)| < \left(4C_4 + C_5\right) x^{(k-1)t}$ soit $\chi(x) = O\left(x^{(k-1)t}\right)$.

□

2.6 Etude de la fonction $C(x)$ associée à la fonction sinus

Pour $x \in]0, \pi[$, on a d'après le paragraphe précédent

$$\begin{aligned} &\lambda = 3,\ b_1 = 3/5, \\ &C(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{3}{(\sin_n x)^2} - n - \tfrac{3}{5}\log n\right), \\ &C\left(\sin x\right) - C(x) = 1, \\ &p(x) = \tfrac{3}{\sin^2 x} - \tfrac{3}{x^2} - 1 + \tfrac{6}{5}\log \tfrac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

Nous allons prouver que la fonction $C(x)$ est dérivable ; pour cela montrons d'abord une majoration uniforme de $\sin_n x$.

Proposition 11 *Pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a $\sin_n x < \sqrt{3/n}$.*

Commençons par un lemme.

Lemme 12 *Pour tout réel $x > 0$, on a* $\quad \sin_n^2 x < x^2/\left(1 + x^2/3\right)$.

Preuve. Pour $0 < x \leq 3\sqrt{2}/2$, on a

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} < 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{45}x^4 \leq 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{9+3x^2} = 1/\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)$$

et pour $x \geq 3\sqrt{2}/2$

$$\frac{x^2}{1+\frac{x^2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}} \geq \frac{1}{\frac{2}{9}+\frac{1}{3}} > 1 > \sin^2 x.$$

□

Preuve de la Proposition 11. La fonction $h : x \to x/\sqrt{1+x^2/3}$ est croissante ; on a donc $\sin x < h(x) < x$, pour $x > 0$. Par suite

$$\sin_n x < h\left(\sin_{n-1}(x)\right) < h_2\left(\sin_{n-2}(x)\right) < \cdots < h_n(x).$$

Or $h_n(x) = x/\sqrt{1+nx^2/3}$, donc

$$\sin_n x < 1/\sqrt{1/x^2+n/3} < \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

□

Théorème 13 *La fonction $C(x)$ est dérivable sur $]0,\pi[$ et vérifie $C(x) = C(\pi - x)$ et $C'(\pi/2) = 0$. Elle est décroissante sur $]0,\pi/2[$ et admet, lorsque $x \to 0$, un développement asymptotique vérifiant, pour tout k entier ≥ 2*

$$\begin{aligned} C(x) &= \left(3/x^2\right) - \frac{3}{5}\log(3/x^2) + d_1x^2 + d_2x^4 + \cdots + d_{k-2}x^{2(k-2)} + O\left(x^{2(k-1)}\right). \\ (d_1 &= 79/1050,\ d_2 = 29/2625, ...). \end{aligned}$$

Preuve. D'après la proposition précédente, il existe des constantes K_1 et K_2 telles que

$$|p\left(\sin_n x\right)| < K_1/n^2 \text{ et } |p'\left(\sin_n x\right)| < K_2/n^{3/2}.$$

Comme

$$\left(p\left(\sin_n x\right)\right)' = p'\left(\sin_n x\right)\cos\left(\sin_{n-1} x\right)\cdots\cos(\sin x)\cos x,$$

on a aussi $\left|\left(p\left(\sin_n x\right)\right)'\right| < K_2/n^{3/2}$. Les suites

$$S_m(x) = \frac{3}{5}\log\frac{\left(\sin_m x\right)^2}{3} + \frac{3}{\left(\sin_m x\right)^2} - m$$

et

$$S'_m(x) = \left(\frac{6}{5\sin_m x} - \frac{6}{\left(\sin_m x\right)^3}\right)\cos\left(\sin_{m-1} x\right)\cdots\cos\left(\sin x\right)\cos x$$

convergent uniformement pour $x \in]0,\pi[$, ce qui prouve que $C(x)$ est dérivable sur $]0,\pi[$. □

Chapitre 3

Somme comportant les puissances de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers

3.1 Introduction

Désignons par $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers n'excédant pas x. J-M. De Koninck et A. Ivić [30, th.9.1] ont prouvé que :

$$\sum_{2\leq n\leq x}\frac{1}{\pi(n)}=\frac{1}{2}\log^2 x+O(\log x).$$

Cette formule asymptotique est obtenue comme une conséquence du théorème des nombres premiers

$$\pi(x)=\frac{x}{\log x}+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)\quad(x\longrightarrow\infty).$$

En 2000, Panaitopol [66] améliore ce résultat en prouvant que :

Théorème 14

$$\sum_{2\leq n\leq x}\frac{1}{\pi(n)}=\frac{1}{2}\log^2 x-\log x-\log\log x+O(1).$$

L'obtention de cette formule asymptotique résulte de l'application d'une formule donnée par Panaitopol [66] , que l'on peut énoncer comme suit :

Théorème 15 *Soit* $(k_n)_{n\geq 1}$ *la suite de réels définie par récurrence par la relation :*

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \ k_n+\sum_{j=1}^{n-1}j!k_{n-j}=n.n!.$$

Alors pour tout entier $m \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{\pi(x)} = \frac{1}{x}\left(\log x - 1 - \frac{k_1}{\log x} - \frac{k_2}{\log^2 x} - \cdots - \frac{k_m\left(1+\alpha_m(x)\right)}{\log^m x}\right)$$

où $\alpha_m(x) <<_m \frac{1}{\log x}$.

De simples calculs donnent :

$$k_1 = 1,\ k_2 = 3,\ k_3 = 13,\ k_4 = 71,\ k_5 = 461,\ k_6 = 3447.$$

On a aussi pour $n \geq 1$:

$$k_n = \det\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}.$$

avec pour $1 \leq i \leq n$

$$a_{i,j} = \begin{cases} (n+1-i).(n+1-i)! & si\ j = 1\ \ et\ 1 \leq i \leq n \\ 0 & si\ 2 \leq j < i \leq n \\ (j-i)! & si\ i \leq j \leq n\ et\ j > 1 \end{cases}.$$

Pour établir le théorème 14, Panaitopol utilise la formule donnée dans le théorème 15 pour $m = 2$.

Récemment, A. Ivić [43], exploitant la formule de Panaitopol dans toute sa généralité, a prouvé le théorème suivant, plus précis que le théorème 14 :

Théorème 16 *Pour tout entier $m \geq 2$, on a*

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq n\leq x}\frac{1}{\pi(n)} &= \frac{1}{2}\log^2 x - \log x - \log\log x + C \\ &\quad + \frac{k_2}{\log x} + \frac{k_3}{2\log^2 x} + \cdots + \frac{k_m}{(m-1)\log^{m-1} x} + O\left(\frac{1}{\log^m x}\right)\end{aligned}$$

où C est une constante absolue.

Dans ce chapitre, nous généralisons l'étude d'Ivić en obtenant une formule asymptotique pour la somme $\sum_{2\leq n\leq x}\left(\frac{1}{\pi(n)}\right)^r$, pour tout entier $r \geq 2$.

Cette généralisation fait l'objet du théorème 17 que nous énonçons au paragraphe suivant :

3.2 Enoncé du théorème

Soit $r \geq 2$ un entier. Alors la série $\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{\pi(n)}\right)^r$ converge. En effet, d'après le théorème des nombres premiers, on a

$$\left(\frac{1}{\pi\left(n\right)}\right)^r \sim \frac{\log^r n}{n^r} \text{ quand } n \to \infty.$$

Désignons par C_r sa somme. Alors on a le :

Théorème 17 *Pour tout $m \geq 2$ entier, on a*

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq n\leq x}\left(\frac{1}{\pi\left(n\right)}\right)^r &= C_r + \frac{1}{x^{r-1}}\left(\lambda_{r,r}\log^r x + \lambda_{r,r-1}\log^{r-1} x + \cdots + \lambda_{r,1}\log x + \lambda_{r,0}\right.\\ &\left. + \frac{\mu_{r,1}}{\log x} + \frac{\mu_{r,2}}{\log^2 x} + \cdots + \frac{\mu_{r,m-1}}{\log^{m-1} x} + O\left(\frac{1}{\log^m x}\right)\right).\end{aligned}$$

où

$$\lambda_{r,k} = -\sum_{s=k}^{r}\frac{s!}{k!\left(r-1\right)^{s-k+1}}\alpha_{r,r-s} \qquad \text{pour } 0 \leq k \leq r,$$

$$\mu_{r,k} = \sum_{s=1}^{k}\frac{(k-1)!}{(s-1)!\left(1-r\right)^{k-s+1}}\alpha_{r,r+s}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq m-1,$$

$\left(\alpha_{r,n}\right)_{n\geq 0}$ étant la suite des réels définie par l'égalité dans $\mathbb{R}\left[\left[X\right]\right]$:

$$\left(1 - X - \sum_{n\geq 1} k_n X^{n+1}\right)^r = \sum_{n\geq 0}\alpha_{r,n}X^n,$$

$\left(k_n\right)_{n\geq 1}$ étant la suite des réels définis dans le théorème 2.

L'application de ces formules pour $r = 2$ et $m = 5$, puis pour $r = 3$ et $m = 5$ permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq n\leq x}\left(\frac{1}{\pi\left(n\right)}\right)^2 &= C_2 + \frac{1}{x}\left(-\log^2 x + 1 + \frac{4}{\log x} + \frac{15}{\log^2 x}\right.\\ &\left. + \frac{80}{\log^3 x} + \frac{505}{\log^4 x} + \frac{3732}{\log^5 x} + O\left(\frac{1}{\log^6 x}\right)\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq n\leq x}\left(\frac{1}{\pi\left(n\right)}\right)^3 &= C_3 + \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}\log^3 x + \frac{3}{4}\log^2 x + \frac{3}{4}\log x + \frac{19}{8}\right.\\ &\left. + \frac{21}{2\log x} + \frac{237}{4\log^2 x} + \frac{1583}{4\log^3 x} + \frac{2419}{8\log^4 x} + \frac{104091}{4\log^5 x} + O\left(\frac{1}{\log^6 x}\right)\right).\end{aligned}$$

La démonstration du théorème 17 repose essentiellement sur les deux lemmes suivants :

3.3 Lemmes

Soit $x > 0$. Pour tout entier $q \in \mathbb{Z}$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{\log^q t}{t^r} dt$ converge et on a :

Lemme 18 *Pour tout entier $r \geq 2$ et pour tout entier $s \geq 0$, on a :*

$$\int_x^{+\infty} \frac{\log^s t}{t^r} dt = \frac{1}{x^{r-1}} \sum_{k=0}^{s} \beta_{r,s,k} \log^k x,$$

avec $\beta_{r,s,k} = \frac{s!}{k!(r-1)^{s-k+1}}$, pour $0 \leq k \leq s$.

Lemme 19 *Pour tout entier $r \geq 2$ et pour tout entier $s \geq 1$, on a pour tout entier $m > s$:*

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^r \log^s t} dt = \frac{1}{x^{r-1}} \sum_{k=s}^{m-1} \frac{\gamma_{r,s,k}}{\log^k x} + O\left(\frac{1}{x^{r-1} \log^m x}\right),$$

avec $\gamma_{r,s,k} = -\frac{(k-1)!}{(s-1)!(1-r)^{k-s+1}}$, pour $k \geq s$.

Démonstration des lemmes

Pour $q \in \mathbb{Z}$, une intégration par parties permet d'écrire :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\log^q t}{t^r} dt = \frac{\log^q x}{x^{r-1}} + \frac{q}{r-1} \int_x^{+\infty} \frac{\log^{q-1} t}{t^r} dt. \qquad (\bigstar)$$

Démonstration du lemme 18.

Pour $k \geq 0$, posons

$$I_k = \frac{(r-1)^k}{k!} \int_x^{+\infty} \frac{\log^k t}{t^r} dt.$$

La relation précédente permet d'écrire

$$I_k - I_{k-1} = \frac{(r-1)^{k-1}}{k!} \frac{\log^k x}{x^{r-1}}, \text{ pour tout } k \geq 1,$$

on en déduit

$$I_s = \frac{(r-1)^s}{s!} \int_x^{+\infty} \frac{\log^s t}{t^r} dt = I_0 + \sum_{k=1}^{s} (I_k - I_{k-1}) = \sum_{k=0}^{s} \frac{(r-1)^{k-1}}{k!} \frac{\log^k x}{x^{r-1}},$$

d'où le lemme 1.

Démonstration du lemme 19.

Pour $q = -k$ avec $k \geq 1$, posons

$$J_k = -\frac{(k-1)!}{(1-r)^k} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^r \log^k t} dt,$$

la relation (★) permet d'écrire

$$J_k - J_{k+1} = \frac{(k-1)!}{(1-r)^k} \frac{1}{x^{r-1} \log^k x},$$

pour $m > s$, on a donc

$$J_s = \sum_{k=s}^{m-1} (J_k - J_{k+1}) + J_m,$$

ainsi

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^r \log^s t} dt = -\frac{1}{x^{r-1}} \sum_{k=s}^{m-1} \frac{(k-1)!}{(s-1)! (1-r)^{k-s+1} \log^k x} + R,$$

avec

$$R = \frac{m!}{(s-1)! (1-r)^{m-s+1}} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^r \log^{m+1} t} dt.$$

On a

$$R \leq \frac{(m-1)!}{(s-1)! (1-r)^{m-s} \log^m x} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^r} dt <<_m \frac{1}{x^{r-1} \log^m x},$$

d'où découle le résultat du lemme 2.

3.4 Démonstration du théorème principal

Soit $(\alpha_{r,n})_{n \geq 0}$ étant la suite des réels définie par l'égalité suivante dans $\mathbb{R}[[X]]$

$$\left(1 - X - \sum_{n \geq 1} k_n X^{n+1}\right)^r = \sum_{n \geq 0} \alpha_{r,n} X^n.$$

En posant

$$b_n = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ -1 & si\ n = 1 \\ -k_{n-1} & si\ n \geq 2 \end{cases},$$

on a

$$\alpha_{r,n} = \sum_{\substack{(i_1, i_2, \ldots, i_r) \in \mathbb{N}^r \\ i_1 + i_2 + \cdots + i_r = n}} b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_r}.$$

Alors le théorème 15 permet d'écrire pour $m \geq 2$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\pi(n)}\right)^r &= \left(\frac{\log n}{n}\right)^r \left(\sum_{j=0}^{m+r-1} \frac{b_j}{\log^j n} + O\left(\frac{1}{\log^{m+r} n}\right)\right)^r \\
&= \left(\frac{\log n}{n}\right)^r \left(\sum_{j=0}^{m+r-1} \frac{\alpha_{r,j}}{\log^j n} + O\left(\frac{1}{\log^{m+r} n}\right)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{r} \alpha_{r,j} \frac{\log^{r-j} n}{n^r} + \sum_{j=r+1}^{m+r-1} \frac{\alpha_{r,j}}{n^r \log^{j-r} n} + O\left(\frac{1}{n^r \log^m n}\right) \\
&= \sum_{s=0}^{r} \alpha_{r,r-s} \frac{\log^s n}{n^r} + \sum_{s=1}^{m-1} \frac{\alpha_{r,r+s}}{n^r \log^s n} + O\left(\frac{1}{n^r \log^m n}\right).
\end{aligned}$$

Par sommation, on obtient, pour $x \geq 3$

$$\begin{aligned}
\sum_{2\leq n\leq x} \left(\frac{1}{\pi(n)}\right)^r &= C_r - \sum_{n>x} \left(\frac{1}{\pi(n)}\right)^r \\
&= C_r - \sum_{s=0}^{r} \alpha_{r,r-s} \left(\sum_{n>x} \frac{\log^s n}{n^r}\right) \\
&\quad - \sum_{s=1}^{m-1} \alpha_{r,r+s} \sum_{n>x} \frac{1}{n^r \log^s n} + \quad O\left(\sum_{n>x} \frac{1}{n^r \log^m n}\right).
\end{aligned}$$

Remarquons alors que pour tout $q \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \longmapsto \frac{\log^q x}{x^r}$ est décroissante et positive pour $x \geq 3$ et que $\int_x^{+\infty} \frac{\log^q x}{x^r} dx$ converge. On peut donc écrire pour tout $q \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n>x} \frac{\log^q n}{n^r} &= \int_x^{+\infty} \frac{\log^q t}{t^r} dt + O\left(\frac{\log^q x}{x^r}\right) \\
&= \int_x^{+\infty} \frac{\log^q t}{t^r} dt + O\left(\frac{1}{x^{r-1} \log^m x}\right).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{2\leq n\leq x} \left(\frac{1}{\pi(n)}\right)^r &= C_r - \sum_{s=0}^{r} \alpha_{r,r-s} \int_x^{+\infty} \frac{\log^s t}{t^r} dt \\
&\quad - \sum_{s=1}^{m-1} \alpha_{r,r+s} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^r \log^s t} dt + O\left(\frac{1}{x^{r-1} \log^m x}\right).
\end{aligned}$$

En appliquant les lemmes 18 et 19, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{2\leq n\leq x} \left(\frac{1}{\pi(n)}\right)^r &= C_r - \sum_{s=0}^{r} \alpha_{r,r-s} \left(\frac{1}{x^{r-1}} \sum_{k=0}^{s} \beta_{r,s,k} \log^k x\right) \\
&\quad - \sum_{s=1}^{m} \alpha_{r,r+s} \left(\frac{1}{x^{r-1}} \sum_{k=s}^{m-1} \frac{\gamma_{r,s,k}}{\log^k x}\right) + O\left(\frac{1}{x^{r-1} \log^m x}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui s'écrit

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq n\leq x}\left(\frac{1}{\pi\left(n\right)}\right)^{r} &= C_r+\frac{1}{x^{r-1}}\sum_{s=0}^{r}\sum_{k=0}^{s}-\alpha_{r,r-s}\beta_{r,s,k}\log^{k}x\\ &\quad+\frac{1}{x^{r-1}}\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{k=s}^{m-1}-\frac{\alpha_{r,r+s}\gamma_{r,s,k}}{\log^{k}x}+O\left(\frac{1}{x^{r-1}\log^{m}x}\right).\end{aligned}$$

Remarquons alors que

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{k=0}^{s}\delta_{r,s,k}=\sum_{0\leq k\leq s\leq r}\delta_{r,s,k}=\sum_{k=0}^{r}\left(\sum_{s=k}^{r}\delta_{r,s,k}\right)\quad\text{avec }\delta_{r,s,k}=-\alpha_{r,r-s}\beta_{r,s,k}.$$

Posons

$$\lambda_{r,k}=\sum_{s=k}^{r}-\alpha_{r,r-s}\beta_{r,s,k}.$$

On a aussi

$$\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{k=s}^{m-1}\eta_{r,s,k}=\sum_{0\leq s\leq k\leq m-1}\eta_{r,s,k}=\sum_{k=1}^{m-1}\left(\sum_{s=1}^{k}\eta_{r,s,k}\right)\quad\text{avec }\eta_{r,s,k}=-\alpha_{r,r+s}\gamma_{r,s,k}.$$

Posons

$$\mu_{r,k}=\sum_{s=1}^{k}-\alpha_{r,r+s}\gamma_{r,s,k}.$$

On a alors

$$\sum_{2\leq n\leq x}\left(\frac{1}{\pi\left(n\right)}\right)^{r}=C_r+\frac{1}{x^{r-1}}\left(\sum_{k=0}^{r}\lambda_{r,k}\log^{k}x+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\mu_{r,k}}{\log^{k}x}+O\left(\frac{1}{\log^{m}x}\right)\right).$$

ce qui achève la démonstration du théorème 4.

Chapitre 4

Développement asymptotique de la somme des inverses d'une fonction arithmétique

La somme des puissances des inverses de $\pi(n)$, $\pi(x)$ désignant le nombre de nombres premiers n'excédant pas x, a fait l'objet de nombreux travaux,[30], [66], [43], [10]. Nous généralisons, dans ce chapitre, les formules asymptotiques obtenues par ces auteurs à toute une classe de fonctions arithmétiques.

4.1 Introduction

Pour tout entier $r \geq 1$, et pour tout réel $x \geq 2$, on note $S_r(x) := \sum_{2 \leq n \leq x} \left(\frac{1}{\pi(n)}\right)^r$, où $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ est le nombre de nombres premiers p n'excédant pas x.

Le Théorème des nombres premiers affirme que $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x} \quad (x \longrightarrow \infty)$.

Ce théorème permet de constater aisément que d'une part,

$$S_1(x) \sim \frac{1}{2}\log^2 x \quad (x \longrightarrow \infty) \tag{4.1}$$

et que d'autre part pour $r \geq 2$, la série $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\pi(n)}\right)^r$ est convergente de somme $C_r > 0$, et donc

$$S_r(x) \sim C_r \quad (x \longrightarrow \infty). \tag{4.2}$$

J-M. De Koninck et A. Ivić [30, 1980], L. Panaitopol [66, 2000] et A. Ivić [43, 2002]ont donné des développements asymptotiques de $S_1(x)$ plus précis que l'évaluation (4.1), le dernier en date étant celui de A. Ivić.

Théorème 20 *Soit $(k_n)_{n\geq 1}$ la suite d'entiers définie par récurrence par la relation*

$$k_n + 1!k_{n-1} + 2!k_{n-2} + \cdots + (n-1)!k_1 = n.n! \qquad (n \geq 1)\,. \tag{4.3}$$

Alors pour tout entier $m \geq 2$, on a pour $x \longrightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq n\leq x} \frac{1}{\pi(n)} &= \frac{1}{2}\log^2 x - \log x - \log\log x + C \\ &\quad + \frac{k_2}{\log x} + \frac{k_3}{2\log^2 x} + \cdots + \frac{k_m}{(m-1)\log^{m-1} x} + O\left(\frac{1}{\log^m x}\right),\end{aligned}$$

où C est une constante absolue.

Dans le cas où $r \geq 2$, nous avons établi le résultat suivant au chapitre 3

Théorème 21 *Pour un entier $r \geq 2$, soient $(k_n)_{n\geq 1}$ la suite d'entiers définie par* (4.3)*, $(\alpha_{r,n})_{n\geq 0}$ la suite de rationnels définie par l'égalité dans $R[[X]]$:*

$$\left(1 - X - \sum_{n\geq 1} k_n X^{n+1}\right)^r = \sum_{n\geq 0} \alpha_{r,n} X^n,$$

$(\lambda_{r,k})_{0\leq k\leq r}$ et $\left(\mu_{r,k}\right)_{k\geq 1}$ les suites de rationnels définies par

$$\lambda_{r,k} := -\sum_{s=k}^{r} \frac{s!}{k!\,(r-1)^{s-k+1}} \alpha_{r,r-s} \quad et \quad \mu_{r,k} := \sum_{s=1}^{k} \frac{(k-1)!}{(s-1)!\,(1-r)^{k-s+1}} \alpha_{r,r+s}.$$

Alors pour tout entier $m \geq 2$, on a pour $x \longrightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq n\leq x} \left(\frac{1}{\pi(n)}\right)^r &= C_r + \frac{1}{x^{r-1}}\left(\lambda_{r,r}\log^r x + \lambda_{r,r-1}\log^{r-1} x + \cdots + \lambda_{r,1}\log x + \lambda_{r,0}\right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_{r,1}}{\log x} + \frac{\mu_{r,2}}{\log^2 x} + \cdots + \frac{\mu_{r,m-1}}{\log^{m-1} x} + O\left(\frac{1}{\log^m x}\right)\right),\end{aligned}$$

où C_r est la constante absolue définie par (2)*.*

Le Théorème 21 constitue une extension naturelle du Théorème 20 d'Ivić. A part la constante C_r qui peut être évaluée avec l'approximation que l'on veut, les constantes qui y figurent sont des rationnels, explicitement donnés et facilement calculables. Ainsi pour $r = 3$ et $m = 6$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq n\leq x} \left(\frac{1}{\pi(n)}\right)^3 &= C_3 + \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}\log^3 x + \frac{3}{4}\log^2 x + \frac{3}{4}\log x + \frac{19}{8} + \frac{21}{2\log x}\right. \\ &\quad \left. + \frac{237}{4\log^2 x} + \frac{1583}{4\log^3 x} + \frac{24219}{8\log^4 x} + \frac{104091}{4\log^5 x} + O\left(\frac{1}{\log^6 x}\right)\right).\end{aligned}$$

Le théorème qui suit généralise les deux précédents et constitue le principal résultat de ce chapitre.

4.2 Enoncé du Théorème

Précisons tout d'abord quelques notations.

Pour toute série formelle $T(X) := \sum_{n\geq 0} t_n X^n \in \mathbb{R}[[X]]$ de valuation nulle, et pour tout entier $r \geq 1$, la série formelle $(T(X))^r$ est inversible et le coefficient de X^n dans $(T(X))^{-r}$ ne dépend que de $t_0, t_1, \ldots, t_n$ et r. Désignons-le par $A_n(t_0, t_1, \ldots, t_n; r)$. Autrement dit

$$(T(X))^{-r} = \sum_{n\geq 0} A_n(t_0, t_1, \ldots, t_n; r) X^n.$$

Un simple calcul donne

$$A_0(t_0; r) = \frac{1}{t_0^r} \quad \text{et} \quad A_1(t_0, t_1; r) = -r\frac{t_1}{t_0^{r+1}},$$

et en particulier pour $r = 1$, on a (voir [24])

$$A_n(t_0, t_1, \ldots, t_n; 1) = \frac{(-1)^n}{t_o^{n+1}} \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_n \\ t_0 & t_1 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ 0 & t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_0 & t_1 \end{vmatrix} \qquad (n \geq 1).$$

Avec ces notations, on obtient le

Théorème 22 *Soient $q \geq 1$, $r \geq 1$, $s \geq 1$, des entiers, $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels telle que $a_0 > 0$ et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction arithmétique admettant pour tout entier $m \geq 1$ un développement asymptotique, pour $n \to \infty$, s'écrivant*

$$f(n) = \frac{n^s}{\log^q n}\left(a_0 + \frac{a_1}{\log n} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{\log^{m-1} n} + O\left(\frac{1}{\log^m n}\right)\right).$$

Soit $\sum_{n\leq x}{}' \left(\frac{1}{f(n)}\right)^r$ une sommation étendue aux seuls entiers $n \leq x$ vérifiant $f(n) \neq 0$.

Dans le cas où $rs = 1$, on a pour tout entier $m \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n\leq x}{}' \frac{1}{f(n)} &= \frac{b_0}{q+1}\log^{q+1} x + \frac{b_1}{q}\log^q x + \cdots + \frac{b_q}{1}\log x + b_{q+1}\log\log x \\ &\quad + C - \frac{b_{q+2}}{\log x} - \frac{b_{q+3}}{2\log^2 x} - \cdots - \frac{b_{q+m}}{(m-1)\log^{m-1} x} + O\left(\frac{1}{\log^m x}\right), \end{aligned}$$

C étant une constante absolue indépendante de m et $b_k = A_k(a_0, a_1, \ldots, a_k; 1)$ pour $0 \leq k \leq q + m$.

Dans le cas où $rs \geq 2$, $\sum_{n\geq 0}{}' \left(\frac{1}{f(n)}\right)^r$ *est convergente et on a pour tout entier* $m \geq 1$

$$\sum_{n>x}{}' \left(\frac{1}{f(n)}\right)^r = \frac{\log^{qr} x}{x^{rs-1}} \left(c_0 + \frac{c_1}{\log x} + \cdots + \frac{c_{m-1}}{\log^{m-1} x} + O\left(\frac{1}{\log^m x}\right)\right),$$

avec

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{(qr-j)!}{(qr-k)!} (rs-1)^{j-k-1} A_j(a_0, a_1, \ldots, a_j; r), \quad (0 \leq k \leq m-1).$$

Remarque 23 *Comme pour tout entier* $m \geq 1$, *on a*

$$\pi(n) = \frac{n}{\log n} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{k!}{\log^k n} + O\left(\frac{1}{\log^m n}\right)\right),$$

on peut choisir $f(n) = \pi(n)$ *avec dans ce cas particulier* $q = s = 1$ *et* $a_k = k!$ *pour* $k \geq 0$; *on retrouve alors les résultats de J-M. De Koninck et A. Ivić, L. Panaitopol, A. Ivić ainsi que notre théorème 17 du chapitre 3.*

4.3 Démonstration du théorème principal

La démonstration du théorème principal repose sur les deux lemmes suivants :

Lemme 24 *Soient* $m \geq 1$, $q \geq 1$, *des entiers,* $(b_k)_{k\geq 0}$ *une suite de réels. Alors en posant*

$$T_m(x) := \frac{\log^q x}{x} \left(b_0 + \frac{b_1}{\log x} + \cdots + \frac{b_{m+q}}{\log^{m+q} x}\right)$$

et

$$\begin{aligned} U_m(x) \;:\; &= \frac{b_0}{q+1} \log^{q+1} x + \frac{b_1}{q} \log^q x + \cdots + \frac{b_q}{1} \log x \\ &\quad + b_{q+1} \log\log x - \frac{b_{q+2}}{\log x} - \frac{b_{q+3}}{2\log^2 x} - \cdots - \frac{b_{q+m}}{(m-1)\log^{m-1} x}, \end{aligned}$$

on a $U_m'(x) = T_m(x)$.

Lemme 25 *Soient* $m \geq 0$, $u \geq 1$, $v \geq 2$, *des entiers,* $(\alpha_k)_{0\leq k\leq m}$ *et* $(\beta_k)_{0\leq k\leq m}$ *des réels tels que*

$$\beta_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{(u-j)!\,(v-1)^{j-k-1}}{(u-k)!} \alpha_j.$$

Alors, en posant

$$V_m(x) := \frac{\log^u x}{x^v}\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\log x} + \cdots + \frac{\alpha_m}{\log^m x}\right)$$

et

$$W_m(x) := -\frac{\log^u x}{x^{v-1}}\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{\log x} + \cdots + \frac{\beta_m}{\log^m x}\right),$$

on a

$$W'_m(x) = V_m(x) + \frac{(m-u)\,\beta_m}{x^v \log^{m+1-u} x}.$$

Preuve des lemmes. La preuve du Lemme 24 est immédiate, alors que celle du Lemme 25 nécessite le calcul suivant. On a

$$W'_m(x) = \frac{\log^u x}{x^v}\left((v-1)\,\beta_0 + \sum_{j=1}^{m}\frac{(v-1)\,\beta_j + (j-1-u)\,\beta_{j-1}}{\log^j x} + \frac{m-u}{\log^{m+1} x}\beta_m\right).$$

On vérifie que $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ satisfont les relations

$$\begin{cases} (v-1)\,\beta_0 = \alpha_0 \\ (v-1)\,\beta_j + (j-1-u)\,\beta_{j-1} = \alpha_j \quad \text{pour } 1 \le j \le m. \end{cases}$$

Démonstration du Théorème 22.

a) Si $rs = 1$, c'est à dire $r = s = 1$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(n)} &= \frac{\log^q n}{n}\left(a_0 + \frac{a_1}{\log n} + \cdots + \frac{a_{m+q}}{\log^{m+q} n} + O\left(\frac{1}{\log^{m+q+1} n}\right)\right)^{-1} \\ &= \frac{\log^q n}{n}\left(b_0 + \frac{b_1}{\log n} + \cdots + \frac{b_{m+q}}{\log^{m+q} n}\right) + O\left(\frac{1}{n\log^{m+1} n}\right) \\ &= T_m(n) + O\left(\frac{1}{n\log^{m+1} n}\right). \end{aligned}$$

On a donc, à la lumière du lemme 24

$$\begin{aligned} {\sum_{n\le x}}' \frac{1}{f(n)} &= C_1 + \sum_{n\le x} U'_m(n) + O\left(\frac{1}{\log^m x}\right) \\ &= C + U_m(x) + O\left(\frac{\log^q x}{x}\right) + O\left(\frac{1}{\log^m x}\right) \\ &= C + U_m(x) + O\left(\frac{1}{\log^m x}\right). \end{aligned}$$

b) Si $rs \geq 2$, alors avec $\alpha_k = A_k(a_0, a_1, \ldots, a_k; r)$ pour $0 \leq k \leq m-1$, $u = qr$ et $v = rs$, on a

$$\left(\frac{1}{f(n)}\right)^r = \frac{\log^u n}{n^v}\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\log n} + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{\log^{m-1} n} + O\left(\frac{1}{\log^m n}\right)\right).$$

Comme $f(n)^{-r} \sim a_0^{-r} n^{-v} \log^u n$ avec $v \geq 2$, $\sum\limits_{n\geq 0}{}' f(n)^{-r}$ converge, et l'on a, à l'aide du Lemme 25 (on omet de justifier certains passages classiques)

$$\begin{aligned}
\sum_{n>x}{}'\left(\frac{1}{f(n)}\right)^r &= \sum_{n>x}\left(V_{m-1}(n) + O\left(\frac{\log^u n}{n^v \log^m n}\right)\right) \\
&= \sum_{n>x} W'_{m-1}(n) + O\left(\frac{\log^u x}{x^{v-1}\log^m x}\right) \\
&= \int_x^\infty W'_m(t)\,dt + O\left(\frac{\log^u x}{x^v}\right) + O\left(\frac{\log^u x}{x^{v-1}\log^m x}\right) \\
&= -W_{m-1}(x) + O\left(\frac{\log^{qr} x}{x^{rs-1}\log^m x}\right),
\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve du Théorème 22.

Chapitre 5

Nombres et polynômes de Stirling

5.1 Introduction

Les nombres et polynômes de Striling, du nom de James Stirling (1692-1770) ont été étudiés par de nombreux auteurs depuis fort longtemps.

De nos jours, ils continuent encore à faire l'objet de nombreuses recherches.

Parmi les auteurs du siècle dernier qui se sont particulierement intéressé à ces nombres et polynômes, on peut citer : N. Nielsen (1865-1961), C. Jordan (1871-1959), D. S. Mitrinović (1908-1995) et R. S. Mitrinović(1909-1993).

L'importance de l'étude des nombres de Stirling a été particulièrement souligné par C. Jordan en ces termes : "*Stirling's Numbers are of the greatest utility in Mathematical Calculus. This however has not been fully recognised ; the numbers have been neglected, and are seldom used. This is especially due to the fact that different authors have reintroduced them under different names and notations, not mentioning that they dealt with the same numbers. Stirling's numbers are as important or even more so than Bernoulli's numbers ; they should occupy a central position in the Calculus of Finite Differences.*"

Malgré leur importance dans les diverses branches des mathématiques pures et appliquées, les nombres de Stirling n'ont toujours pas de notations standards. Les polynômes de Stirling n'ont pas, non plus, de définition (ni de notations) standard.

Nous avons choisi d'adopter les notations préconisées par Graham, Knuth et Patashnik [40] pour les nombres de Stirling. Ils s'agit des notations de J.Karamata. Ainsi nous désignons par : $\left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ (resp. par :$\left(\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$) la famille des nombres de Stirling de première espèce (resp. de seconde espèce). Ces nombres sont définis par les égalités :

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k\geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \quad \text{et} \quad x^n = \sum_{k\geq 0} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}$$

où $x^{\bar{n}} = x\,(x+1)\cdots(x+n-1)$ et $x^{\underline{k}} = x\,(x-1)\cdots(x-k+1)$.

D'autres définitions équivalentes de ces nombres sont données au paragraphe 2 où l'on justifie ces notations. Une extension de la définition des nombres de Stirling à tous les couples d'entiers (n,k) de $\mathbb{Z}^2$ est réalisée au paragraphe 3.

Nous précisons la définition des polynômes de Stirling (selon Graham, Patashnik et Knuth [40]) au paragraphe 4 et nous donnons une représentation explicite de ces polynômes au paragraphe suivant.

La fonction génératrice de ces polynômes est étudiée au paragraphe 6. Elle permet d'obtenir assez simplement de nombreuses propriétés des polynômes de Stirling :

-Détermination des valeurs de ces polynômes pour des valeurs particuliéres de la variable.

-Obtention de relations de récurrence vérifiées par ces polynômes.

-Détermination des coefficients de certaines series entières réciproques à l'aide des nombres de Stirling.

Au Paragraphe 7, nous établissons une relation satisfaite par les polynômes de Stirling permettant ainsi de retrouver dans un cas particulier une identité de Kaneko concernant les nombres de Bernoulli. Nous cloturons ce chapitre par la résolution d'un ancien probleme posée par D.S. Mitrinović et R.S. mitrinović . Nous donnons une réponse affirmative à une question posée par ces auteurs concernant les coefficients des polynômes de Stirling.

5.2 Nombres de Stirling.

Les notations (de J. Karamata) que nous avons adopté des nombres de Stirling sont proches de la notation $\binom{n}{k}$ des coefficients binomiaux (pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$). Ces notations se justifient par les nombreuses propriétés des nombres de Stirling analogues a celles des coefficients binomiaux. Ainsi on prouve aisément que l'on a :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } k \geq 1$$

avec $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \delta_{n,0}$ *et* $\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = \delta_{0,k}$ pour $n \geq 0$ *et* $k \geq 0$ ainsi que

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } k \geq 1$$

avec $\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = \delta_{n,0}$ *et* $\begin{Bmatrix} 0 \\ k \end{Bmatrix} = \delta_{0,k}$ pour $n \geq 0$ *et* $k \geq 0$.

Ces propriétés sont à rapprocher bien sur des propriétés suivantes vérifiées par les coefficients binomiaux : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$ pour $n \geq 1$ *et* $k \geq 1$ avec $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{0}{k} = \delta_{0,k}$ pour $n \geq 0$ *et* $k \geq 0$.

L'analogie des nombres de Stirling avec les coefficients binomiaux ne s'arrête pas là. On constate grâce aux formules précedentes que $\binom{n}{k}, \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ *et* $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ sont des entiers naturels pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, et de plus pour $n \geq 1$, ces nombres ont les interprétations combinatoires suivantes :

$\binom{n}{k} =$ nombre de parties de $\{1,2,...,n\}$ à k éléments.

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ = nombre de permutations de $\{1,2,...,n\}$ à k orbites.

$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ = nombre de partitions de $\{1,2,...,n\}$ à k éléments.

Les relations suivantes sont aussi bien connues :

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \delta_{n,m} \text{ et }, \sum_{k\geq 0}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} = \delta_{n,m}$$

Ces relations se traduisent aussi en termes de matrices comme suit :

$$\left(\binom{i}{j}\right)^{-1}_{0\leq i,j\leq n} = \left((-1)^{i-j}\binom{i}{j}\right)_{0\leq i,j\leq n}$$

$$\left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\right)^{-1}_{0\leq i,j\leq n} = \left((-1)^{i-j}\begin{Bmatrix} i \\ j \end{Bmatrix}\right)_{0\leq i,j\leq n}$$

Elles ont pour conséquences les formules d'inversion suivantes : Pour toutes suites d'éléments d'un anneau commutatif unitaire, $(u_n)_{n\geq 0}$, et $(v_n)_{n\geq 0}$ on a les équivalences :

$$(\forall n \in \mathbb{N}; v_n = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}u_k) \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \sum_{k\geq 0}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}v_k$$

(formule d'inversion de Pascal) et

$$(\forall n \in \mathbb{N}; v_n = \sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}v_k) \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}; v_n = \sum_{k\geq 0}(-1)^{n-k}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}v_k.$$

Désignons par $\mathbf{I}, \mathbf{E}, \mathbf{D}$ et Δ les endomorphisme de $\mathbb{C}[x]$ définis comme suit :

I= operateur identité définie par $\mathbf{I}(P(x)) = P(x)$

E= operateur d'avance définie par $\mathbf{E}(P(x)) = P(x+1)$

D= operateur de dérivation définie par $\mathbf{D}(P(x)) = P^{'}(x)$

$\Delta =$ operateur de différence finie définie par $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$.

De plus pour tout endomorphisme Ω de $\mathbb{C}[x]$, définisons $\Omega_0(P(x)) := \Omega(P(x))|_{x=0}$

On a alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\mathbf{D}_0^k(1+x)^n \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{k!}\mathbf{D}_0^k(x^{\bar{n}}) \quad \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \frac{1}{k!}\Delta_0^k(x^n).$$

la formule explicite suivante est bien connue :

$$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

Pour l'obtenir, il suffit d'observer que les endomorphisme $\mathbf{E}$ et $\mathbf{I}$ commutent dans l'anneau $\mathcal{L}(\mathbb{C}(x))$ et que l'on a donc :

$$\Delta^k = (\mathbf{E} - \mathbf{I})^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \mathbf{E}^j$$

On ne connait, par contre, aucune formule explicite aussi simple pour $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, on sait seulement que [24] :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (-1)^{n-k} \sum_{0 \le j \le h \le n-k} (-1)^{j+h} \binom{h}{j} \binom{n-1+h}{n-k+h} \binom{2n-k}{n-k-h} \frac{(h-j)^{n-k+h}}{h!}$$

Nous donnons au paragraphe 5 une réprésentation explicite a $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ a l'aide d'un déterminant (simple) d'ordre n.
Les nombres de Stirling interviennent dans l'expression des coefficients de nombreux développements de séries formelles. Ainsi, il est bien connu que l'on a :

$$\frac{(\exp z - 1)^k}{k!} = \sum_{n \ge 0} \left\{ n \atop k \right\} \frac{z^n}{n!} \tag{5.1}$$

et

$$\frac{(\log(1+z))^k}{k!} = \sum_{n \ge 0} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{z^n}{n!} \tag{5.2}$$

Cette dernière relation s'ecrivant aussi :

$$\frac{1}{k!} (\log \frac{1}{1-z})^k = \sum_{n \ge 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{z^n}{n!}$$

Ces formules servent souvent à définir les nombres de Stirling. On sait aussi que l'on a :

$$(x\mathbf{D})^n = \sum_k \left\{ n \atop k \right\} x^k \mathbf{D}^k$$

et

$$x^n \mathbf{D}^n = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} (x\mathbf{D})^k$$

5.3 Extension de la definition des nombres de Stirling aux entiers negatifs.

On constate aisément que l'on définit bien une (unique) famille de rationnels $(\alpha_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{Z}}$ par les relations suivantes :

$$\forall (n,k)\in\mathbb{Z}^2 : \begin{cases} \alpha(n,k) = (n-1)\alpha(n-1,k) + \alpha(n-1,k-1) \\ \alpha(n,0) = \delta_{n,0} \ \ et \ \ \alpha(0,k) = \delta_{0,k} \end{cases}$$

On constate alors que si l'on pose pour tout $(n,k)\in\mathbb{Z}^2$,

$$\beta(n,k) = \alpha(-k,-n)$$

Alors la famille de rationnels $(\beta(n,k))_{(n,k)\in\mathbf{Z}^2}$ vérifie les relations :

$$\forall (n,k)\in\mathbb{Z}^2 : \begin{cases} \beta(n,k) = k\beta(n-1,k) + \beta(n-1,k-1) \\ \beta(n,0) = \delta_{n,0}\, et \ \ \beta(0,k) = \delta_{0,k} \end{cases}$$

On vérifie ainsi que pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, on a

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \alpha(n,k) \ et \ \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \beta(n,k)$$

On peut prolonger la définition des nombres de Stirling aux entiers négatifs, de manière que les relations restent valides pour $(n,k)\in\mathbb{Z}^2$, en posant :

$$\forall (n,k)\in\mathbb{Z}^2 : \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} := \alpha(n,k) \text{ et } \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} := \beta(n,k) = \alpha(-k,-n)$$

On peut alors constater que $\alpha(n,k) = 0$ pour $(n,k)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $nk \leq 0$ et $(n,k)\neq(0,0)$ ainsi que pour $k > n$ alors que $\alpha(n,n) = 1$ et qu'ainsi la famille $(\alpha(n,k))_{(n,k)\in\mathbb{Z}^2}$ est une famille d'entiers naturels.
On obtient alors la propriété suivante vérifiée pour $(n,k)\in\mathbb{Z}^2$:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k \\ -n \end{Bmatrix}$$

On peut ainsi remarquer que les deux familles de nombres de Stirling peuvent être considérés comme issues d'une seule et même famille d'entiers $(\alpha(n,k))(n,k)\in\mathbb{Z}^2$.

Voici maintenant le "triangle" des nombres $(\alpha(n,k))_{(n,k)}$ pour $-5 \leq n \leq 5$ et $-5 \leq k \leq 5$.

$n\backslash k$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	1										
-4	10	1									
-3	25	6	1								
-2	15	7	3	1							
-1	1	1	1	1	1						
0	0	0	0	0	0	1					
1	0	0	0	0	0	0	1				
2	0	0	0	0	0	0	1	1			
3	0	0	0	0	0	0	2	3	1		
4	0	0	0	0	0	0	6	11	6	1	
5	0	0	0	0	0	0	24	50	35	10	1

5.4 Définition des polynômes de Stirling

Désignons par $(\tau_n(x))_{x\geq 0}$ l'unique famille de polynômes de $\mathbb{Q}[x]$ définie par les relations

$$\begin{cases} \tau_0(x) = 1 \\ \tau_n(x+1) - \tau_n(x) = x\tau_{n-1}(x) \text{ et } \tau_n(0) = 0 \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Alors on a le

Théorème 26 *Pour tout entier $n \geq 1$, $\tau_n(x)$ est un polynôme de degré $2n$, divisible par $x(x-1)\cdots(x-n)$ et de coefficient dominant $\dfrac{1}{2^n n!}$.*

Preuve. Le théorème se démontre facilement par récurrence sur l'entier n. □

Notation 27 *Pour tout entier $n \geq 0$, posons*

$$\sigma_n(x) := \frac{\tau_n(x)}{x(x-1)\cdots(x-n)}$$

On a alors $\sigma_0(x) = \dfrac{1}{x}$ et d'après le théorème précédent, pour tout $n \geq 1$, $\sigma_n(x)$ est un polynôme de degré $n-1$ et de coefficient dominant $\dfrac{1}{2^n n!}$

Définition 28 *$\sigma_n(x)$ est appelé $n^{ième}$ polynôme de Stirling*

On vérifie aisément que $\tau_1(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$

Lemme 29 *Pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \tau_1(x) \quad et \quad \begin{Bmatrix} n+1 \\ n \end{Bmatrix} = \tau_1(-n)$$

Preuve. On a en effet : □

$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = [x^{n-1}](x(x+1)\cdots(x+n-1)) = 1+2+\cdots n-1 = \tau_1(n)$

et

$\begin{Bmatrix} n+1 \\ n \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{Bmatrix} k+1 \\ k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k \\ k-1 \end{Bmatrix} \right) = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2} = \tau_1(-n)$

Les relations entre nombres de Stirling et polynômes de Stirling sont alors données par le

Théorème 30 *Pour tous entiers n et $k \geq 0$, on a*

1. $\alpha(n, n-k) = \tau_k(n)$
2. $\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} = \tau_k(n)$
3. $\begin{Bmatrix} n+k \\ n \end{Bmatrix} = \tau_k(-n)$

Preuve. La relation 1. se prouve par récurrence sur k.

Pour $k = 0$, on a $\alpha(n, n) = 1 = \tau_0(n)$ pour tout entier n

Pour $k = 1$, on a d'après le lemme $\alpha(n, n-1) = \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \tau_1(n)$ si $n \geq 1$

et aussi $\alpha(n, n-1) = \begin{Bmatrix} -n+1 \\ -n \end{Bmatrix} = \tau_1(n)$ si $n \leq 0$

Supposons alors que l'on ait pour un entier $k \geq 0$: $\alpha(n, n-k) = \tau_k(n)$ et $\alpha(n, n-(k+1)) = \tau_{k+1}(n)$ alors les relations définissant $\alpha(n, k)$ impliquent qu'on a alors

$$\begin{aligned} \alpha(n, n-(k+2)) &= (n-1)\,\alpha(n-1, n-k-2) + \alpha(n-1, n-k-3) \\ &= (n-1)\,\tau_{k+1}(n-1) + \tau_{k+2}(n-1) \\ &= \tau_{k+2}(n) \end{aligned}$$

La relation 1. est alors vraie au rang $k+2$.

Par suite elle est vraie pour tout $k \geq 0$.

Les relations 2. et 3. en sont alors des conséquences immédiates. □

5.5 Expression du n-ième polynôme de Stirling à l'aide d'un déterminant

La suite des polynômes $(\tau_n(x))_{n\geq 1}$ et $(\sigma_n(x))_{n\geq 1}$ vérifient les relations de récurrence données par le :

Théorème 31 *Pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$\tau_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{x-j}{n+1-j}\tau_j(x) \ (*) \quad et \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x-j}{(n+1-j)!}\sigma_j(x) \ (**)$$

Preuve. soit un entier $n \geq 1$. Alors pour tout entier $m > n$, on a

$$\begin{aligned}
n\tau_n(m) &= m\tau_n(m) - (m-n)\tau_n(m) \\
&= (\tau_{n+1}(m+1) - \tau_{n+1}(m)) - (m-n)\tau_n(m) \\
&= \left[x^{m-n}\right]\left(x(x+1)^{\overline{m}}\right) - (\tau_{n+1}(m) + (m-n)\tau_n(m)) \\
&= \left[x^{m-n-1}\right]\sum_{j=0}^{m}\tau_j(m)(x+1)^{m-j} - (\tau_{n+1}(m) + (m-n)\tau_n(m)) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1}\binom{m-j}{m-n-1}\tau_j(m) - (\tau_{n+1}(m) + (m-n)\tau_n(m)) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\binom{m-j}{n+1-j}\tau_j(m)
\end{aligned}$$

Cette égalité ayant lieu pour une infinité d'entiers m, on a bien obtenue $(*)$, $(**)$ en découle par la relation $\tau_m(x) = x^{\underline{m+1}}\sigma_m(x)$ □

le lemme suivant va nous être utile pour donner une représentation explicite de $\sigma_n(x)$ à l'aide d'un déterminant

Lemme 32 *Soient $(\lambda_{ij})_{(i,j)\in IN\times IN^*}$ et $(\mu_n)_{n\geq 0}$ des familles d'éléments d'un anneau commutatif telles que pour tout $n \geq 1$, on ait*

$$\mu_n = \sum_{i=0}^{n-1}\lambda_{in}\mu_i$$

Alors en posant

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \lambda_{i-1,j} & si\ 1 \leq i \leq j \\ -1 & si\ i = j+1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On a pour tout $n \geq 1$

$$\mu_n = \mu_0 \det\left(\mu_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$$

Preuve. Il suffit de calculer μ_n à l'aide des formules de Cramer à partir du système d'équations :

$$\mu_k - \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_{ik}\mu_i = -\lambda_{0k}\mu_0,\ 1 \leq k \leq n$$

On en déduit le □

Corollaire 33 *Avec*

$$s_{ij}(x) = \begin{cases} (x+1-i)/(j+2-i)! & si\ 1 \leq i \leq j \\ -j & si\ i = j+1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On a pour tout entier $n \geq 1$

$$x\sigma_n(x) = \frac{1}{n!} \det\left(s_{ij}(x)\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Autrement dit

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} \\ -1 & \frac{x-1}{2!} & \frac{x-1}{3!} & & \frac{x-1}{(n-1)!} & \frac{x-1}{n!} \\ 0 & -2 & \frac{x-2}{2!} & & \frac{x-2}{(n-2)!} & \frac{x-2}{(n-1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & -(n-2) & \frac{x-(n-2)}{2!} & \frac{x-(n-2)}{3!} \\ 0 & 0 & & & -(n-1) & \frac{x-(n-1)}{2!} \end{vmatrix}$$

Application : Le théorème 31 permet d'obtenir les premières expressions des polynômes $\sigma_n(x)$. Compte tenu que $\sigma_0(x) = 1/x$, on obtient :

$\sigma_1(x) = 1/2$

$\sigma_2(x) = (3x-1)/24$

$\sigma_3(x) = x(x-1)/48$

$\sigma_4(x) = (15x^3 - 30x^2 + 5x + 2)/5760$

$\sigma_5(x) = x(x-1)(3x^2 - 7x - 2)/11520$

$\sigma_6(x) = (63x^5 - 315x^4 + 315x^3 + 91x^2 - 42x - 16)/2903040$

$\sigma_7(x) = x(x-1)(9x^4 - 54x^3 + 51x^2 + 58x + 16)/5806080$

Comme on a

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \tau_{n-k}(n) = \frac{n!}{(k-1)!}\sigma_{n-k}(n)$$

on en déduit le

Corollaire 34 *Avec les notations du corollaire 33, on a pour tout* $n \geq k+1$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n-1}{k-1} \det\left(s_{ij}(n)\right)_{\substack{1 \leq i \leq n-k \\ 1 \leq j \leq n-k}}$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n-1}{k-1} \begin{vmatrix} \frac{n}{2!} & \frac{n}{3!} & \cdots & \frac{n}{(n-k)!} & \frac{n}{(n-k+1)!} \\ -1 & \frac{n-1}{2!} & \cdots & \frac{n-1}{(n-k-1)!} & \frac{n-1}{(n-k)!} \\ 0 & -2 & \cdots & \cdots & \frac{(n-2)}{(n-k-1)!} \\ \vdots & \ddots & -(n-k+1) & \frac{k+2}{2!} & \frac{k+2}{3!} \\ 0 & \cdots & 0 & -(n-k) & \frac{k+1}{2!} \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \binom{n}{k} \det\left(-s_{ij}\left(-k\right)\right)_{\substack{1\leq i\leq n-k \\ 1\leq j\leq n-k}}$$

c'est-à-dire

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \binom{n}{k} \begin{vmatrix} \frac{k}{2!} & \frac{k}{3!} & \cdots & \frac{k}{(n-k)!} & \frac{k}{(n-k+1)!} \\ 1 & \frac{k+1}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{k+1}{(n-k)!} \\ 0 & 2 & \frac{k+2}{2!} & \cdots & \frac{k+1}{(n-k-1)!} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n-k & \frac{n-1}{2!} \end{vmatrix}$$

5.6 Fonction génératrice ordinaire des polynômes

Etant donné une série formelle $S\left(z\right) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}\left[\left[z\right]\right]$ telle que $a_0 = 1$, et $x \in \mathbb{C}$. On peut considérer la série $\left(S\left(z\right)\right)^x$ de $\mathbb{C}\left[\left[z\right]\right]$. Cette série formelle fait intervenir des polynômes en x que l'on précise dans le théorème suivant :

Théorème 35 *Soit $S\left(z\right) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}\left[\left[z\right]\right]$ telle que $a_0 = 1$. Il existe une unique suite de polynômes $\left(P_n\left(x\right)\right)_{n\geq 1}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{C}$, on ait*

$$\left(S\left(z\right)\right)^x = 1 + \sum_{n\geq 1} xP_n\left(x\right) z^n$$

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$P_n\left(x\right) = b_{n,1} + \frac{b_{n,2}}{2!}\left(x-1\right) + \cdots + \frac{b_{n,n}}{n!}\left(x-1\right)\left(x-2\right)\cdots\left(x-n+1\right)$$

où $b_{n,k} = \widehat{B}_{n,k}\left(a_1, a_2, \cdots, a_{n-k+1}\right)$

$\left(\widehat{B}_{n,k}\right)$ étant la famille des polynômes de Bell ordinaire.

$P_n\left(x\right)$ est un polynôme de degré au plus $n-1$

Si $a_1 \neq 0$, alors $P_n\left(x\right)$ est exactement de degré $n-1$ et de coefficient dominant $\frac{a_1^n}{n!}$.

Preuve. Pour tous $n \geq 1$ et $k \geq 1$, posons :

$$\begin{aligned} T_n(z) &= \sum_{k=1}^{n} a_k z^k \\ &\text{et} \\ b_{n,k} &= [z^n]\left(T_n(z)\right)^k \end{aligned}$$

On a alors aussi

$$b_{n,k} = [z^n]\left(\sum_{n\geq 1} a_n z^n\right)^k$$

et donc :

$b_{n,k} = 0$ pour $k > n$,

$b_{n,n} = a_1^n$

et $b_{n,k} = \widehat{B}_{n,k}(a_1, a_2, \cdots, a_{n-k+1})$ pour $k \leq n$

On peut ainsi écrire, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} [z^n]\left(S(z)\right)^x &= [z^n]\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{x}{k}\left(\sum_{n\geq 1} a_n z^n\right)^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\binom{x}{k} \\ &= xP_n(x) \end{aligned}$$

avec

$$P_n(x) = b_{n,1} + \frac{b_{n,2}}{2!}(x-1) + \cdots + \frac{b_{n,n}}{n!}(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

□

Remarquons alors que les séries formelles $\dfrac{ze^z}{e^z-1}$ et $\log\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$ ont toutes deux un terme constant égal à un, on a en effet :

$$\frac{ze^z}{e^z-1} = \frac{-z}{e^{-z}-1} = 1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{B_n}{n!} z^n$$

et

$$\frac{1}{z}\log\left(\frac{1}{1-z}\right) = 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n+1} z^n$$

Le théorème précédent s'applique à ces deux séries.

On va prouver que plus précisement, on a :

Théorème 36 *Pour tout $x \in \mathbb{C}^*$, on a*

$$\left(\frac{ze^z}{e^z-1}\right)^x = \sum_{n\geq 0} x\sigma_n(x)\, z^n$$

et

$$\left(\frac{1}{z}\log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)^x = \sum_{n\geq 0} x\sigma_n(x+n)\, z^n$$

Preuve. Les égalités (5.1) et (5.2) s'écrivent :

$$\left(\frac{e^z-1}{z}\right)^k = \sum_{n\geq 0} \frac{k!}{(n+k)!}\tau_n(-k)\, z^n$$

et

$$\left(\frac{1}{z}\log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)^k = \sum_{n\geq 0} \frac{k!}{(n+k)!}\tau_n(k+n)\, z^n$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\left(\frac{ze^z}{e^z-1}\right)^{-k} = \sum_{n\geq 0} (-k)\,\sigma_n(-k)\, z^n$$

et

$$\left(\frac{1}{z}\log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)^k = \sum_{n\geq 0} k\sigma_n(k+n)\, z^n$$

Ces égalités étant vérifiées pour tout entier $k \geq 1$, les relations du théorème en découlent. Signalons que ces deux relations sont données, sans démonstration dans [40] page 238. □

Nous allons maintenant prouver un résultat encore plus général que la deuxième relation du théorème36.

Soit un entier $t \geq 1$, considèrons la série formelle

$$S(z) = \frac{1-e^{-z^t}}{z^{t-1}}$$

on a :

$$S(z) = z - \frac{z^{t+1}}{2!} + \frac{z^{2t+1}}{3!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{nt+1}}{(n+1)!} + \cdots$$

$S(z)$ est une série formelle de valuation 1, $S(z)$ est donc réversible. En désignant par $S^{\langle -1\rangle}(z)$ sa série réciproque, on a le :

Théorème 37 *1. Pour tout entier $t \geq 1$, on a*

$$\left(\frac{1-e^{z^t}}{z^{t-1}}\right)^{\langle -1\rangle} = \sum_{n\geq 0} \sigma_n(1+tn)\, z^{tn+1}$$

2. Pour tout nombre complexe $x \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\left(\frac{1}{z}\left(\frac{1-e^{z^t}}{z^{t-1}}\right)^{\langle -1\rangle}\right)^x = x\sum_{n\geq 0}\sigma_n\left(x+tn\right)z^{tn}$$

Preuve. Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\left(\frac{S\left(z\right)}{z}\right)^{-n} = \sum_{m\geq 0} n\sigma_m\left(n\right)z^{tm}$$

Par application du théorème d'inversion de Lagrange des séries formelles, on a alors pour tout entier $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
\left[z^n\right]\left(\left(S^{\langle -1\rangle}\left(z\right)\right)^k\right) &= \frac{k}{n}\left[z^{n-k}\right]\left(\frac{S\left(z\right)}{z}\right)^{-n} \\
&= \begin{cases} k\sigma_m\left(k+tm\right) & \text{si } n = k+tm \text{ avec } m \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Le théorème en résulte. □

Remarquons que pour $t = 1$, on retrouve la deuxième relation du théorème 36.

Remarque 38 *on a aussi*

$$\frac{e^{z^t}-1}{z^{t-1}} = z + \sum_{n\geq 0}\frac{z^{nt+1}}{(n+1)!}$$

on prouve aisement que l'on a alors

$$\left(\frac{e^{z^t}-1}{z^{t-1}}\right)^{\langle -1\rangle} = \sum_{n\geq 0}\left(-1\right)^n\sigma_n\left(1+tn\right)z^{tn+1}$$

et

$$\left(\frac{1}{z}\left(\frac{e^{z^t}-1}{z^{t-1}}\right)^{\langle -1\rangle}\right)^x = x\sum_{n\geq 0}\left(-1\right)^n\sigma_n\left(x+tn\right)z^{tn}$$

Ainsi pour t=2 et x=1,on obtient :

$$\left(\frac{e^{z^2}-1}{z}\right)^{\langle -1\rangle} = z - \frac{z^3}{2} + \frac{7}{12}z^5 - \frac{7}{8}z^7 + \frac{1069}{720}z^9 - \frac{781}{288}z^{11} + \cdots$$

La suite des polynômes de Stirling vérifie des relations de recurrence données par le

Théorème 39 *La suite des polynômes de Stirling* $(\sigma_n(x))_{n\geq 1}$ *vérifie*

$$\sigma_0(x) = \frac{1}{x} \quad et \quad \sigma_n(x) = -\frac{x}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{B_{n-j}}{(n-j)!}\sigma_j(x) \quad pour\ n \geq 1$$

Preuve. on sait que l'on a :

$$\sum_{n\geq 0} x\sigma_n(x)\, z^n = \left(\frac{ze^z}{e^z-1}\right)^x$$

En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} nx\sigma_n(x)\, z^{n-1} &= \frac{x}{z}\left(1-\frac{z}{e^z-1}\right)\left(\frac{ze^z}{e^z-1}\right)^x \\ &= \frac{x}{z}\left(\sum_{n\geq 1}-\frac{B_n}{n!}z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} x\sigma_n(x)\, z^n\right)\end{aligned}$$

On obtient le résultat en calculant le coefficient de z^{n-1} dans le second membre de cette dernière égalité. □

Remarquons que pour tout entier $n \geq 1$, on a d'après le Théorème 39

$$\sigma_n(x) = -\frac{B_n}{n\cdot n!} - \frac{x}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{B_{n-j}}{(n-j)!}\sigma_j(x)$$

On constate ainsi que

$$\sigma_n(0) = -\frac{B_n}{n\cdot n!}$$

On peut aussi remarquer que les relations définissant les suites de polynômes $(\tau_n(x))$ et $(\sigma_n(x))$ impliquent que l'on a pour tous entiers m et $n \geq 2$

$$(m+1)\,\sigma_n(m+1) = (m-n)\,\sigma_n(m) + m\sigma_{n-1}(m)$$

On en déduit que pour $m = 0$, on a pour $n \geq 2$

$$\sigma_n(1) = -n\sigma_n(0) = \frac{B_n}{n!}$$

En remplaçant dans la relation précédente m succésivement par -1 ,1 et 2 , on obtient la

Proposition 40

1. *Pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned} \sigma_n(0) &= -\frac{B_n}{n \cdot n!} \\ \sigma_n(1) &= (-1)^n \frac{B_n}{n!} \\ et \;\; \sigma_n(-1) &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

2. *Pour tout entier $n \geq 2$, on a*

$$\begin{aligned} \sigma_{2n}(2) &= -\frac{(2n-1)}{2}\frac{B_{2n}}{(2n)!} \\ et \;\; \sigma_{2n+1}(2) &= \frac{B_{2n}}{2\,(2n)!} \end{aligned}$$

3. *Pour tout entier $n \geq 2$, on a*

$$\begin{aligned} \sigma_{2n}(3) &= \frac{(2n-1)(n-1)}{3}\frac{B_{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{3}\frac{B_{2n-2}}{(2n-2)!} \\ et \;\; \sigma_{2n+1}(3) &= -\frac{(2n-1)}{2}\frac{B_{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Remarque 41 *L'expression donnée de $\sigma_n(x)$ dans le corollaire (*) et la relation $\sigma_n(0) = -\dfrac{B_n}{n \cdot n!}$ permettent d'obtenir l'écriture du $n^{-ième}$ nombre de Bernoulli, à l'aide d'un déterminant d'ordre n*

$$B_n = (-1)^n n! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} \\ 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$B_n = (-1)^n n! \det (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

avec

$$b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{(j+2-i)!} & si \; j \geq i-1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Cette expression de B_n à l'aide d'un déterminant d'ordre n est conforme à un résultat de F. Costabile, F. Dell'acio and M. I. Gualtieri [28] .

Corollaire 42 *Pour tout entier $n \geq 1$, $\sigma_{2n+1}(x)$ est divisible par $x(x-1)$.*

Preuve. En effet pour $n \geq 1$, on a $B_{2n+1} = 0$ et il résulte du $1/$ de la proposition précédente que

$$\sigma_{2n+1}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{2n+1}(1) = 0$$

□

Le théorème 39 nous permet aussi d'obtenir une expression des coefficients de $\sigma_n(x)$ à l'aide des nombres de Bernoulli, on constate que

$$\left[x^0\right](\sigma_n(x)) = \sigma_n(0) = -\frac{B_n}{n \cdot n!}$$

$$\left[x^1\right](\sigma_n(x)) = \sigma_n'(0) = \sum_{\substack{r_1+r_2=n \\ r_1 \geq 1 \text{ et } r_2 \geq 1}} \frac{B_{r_1} B_{r_2}}{r_1(r_1+r_2) r_1! r_2!}$$

et plus généralement

$$\left[x^k\right]\sigma_n(x) = (-1)^{k+1} \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_{k+1}=n} \prod_{i=1}^{k+1} \frac{B_{r_i}}{r_i!(r_1+r_2+\cdots+r_i)}$$

La sommation étant étendue à tous les $(k+1)-uplets$ d'entiers $(r_1, r_2, \cdots, r_{k+1})$ appartenant à $(\mathbb{N}^*)^{k+1}$ vérifiant $r_1 + r_2 + \cdots + r_{k+1} = n$.

On constate ainsi que pour $n \geq 2$, on a :

$$\left[x^{n-1}\right]\sigma_n(x) = \frac{1}{n! 2^n}$$

et

$$\left[x^{n-2}\right]\sigma_n(x) = \frac{-1}{24 \cdot (n-2)! 2^{n-2}}$$

Par un calcul élémentaire, on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\sigma_{2n}'(0) &= \frac{1}{2n} \sum_{\substack{i+j=n \\ i \geq 1 \text{ et } j \geq 1}} \frac{1}{2j} \frac{B_{2i}}{(2i)!} \frac{B_{2j}}{(2j)!} \\
\sigma_{2n+1}'(0) &= -\frac{1}{2} \frac{B_{2n}}{(2n)(2n)!} \\
\sigma_{2n+1}''(0) &= \frac{1}{2n} \sum_{\substack{i+j=n \\ i \geq 1 \text{ et } j \geq 1}} \frac{1}{2j} \frac{B_{2i}}{(2i)!} \frac{B_{2j}}{(2j)!}
\end{aligned}$$

on en déduit ainsi la

Proposition 43

1. *Pour tout entier $n \geq 1$, on a*
$$2\sigma'_{2n+1}(0) = \sigma_{2n}(0)$$
2. *Pour tout entier $n \geq 2$, on a*
$$\sigma''_{2n+1}(0) = \sigma'_{2n}(0)$$

5.7 Une généralisation de la relation de Kaneko

En 1995, Kaneko démontre que les nombres de Bernoulli vérifient la remarquable propriété suivante
$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1) B_{n+k} = 0, \text{ pour } n \geq 1$$
Le théorème qui suit montre que les polynômes de stirling vérifient une propriété similaire, permettant même de retrouver la relation de Kaneko comme cas particulier.

Théorème 44 *Pour tout entier $n \geq 0$, on a :*
$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (n+k+1)! \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} \sigma_{n+k}(x) = 0$$

Dans le cas particulier où $x = 1$, la relation de ce théorème pour $n \geq 1$, n' est rien d'autre que la relation de Kaneko. En effet pour $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n+1$, on a $\sigma_{n+k}(1) = (-1)^{n+k} \dfrac{B_{n+k}}{(n+k)!}$ (proposition 40) et $B_{2n+1} = 0$.

Pour prouver ce théorème, nous allons d'abord énoncer deux propositions

Proposition 45 *Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $S(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ telle que $a_0 = 1$ et $S(z) = e^{\lambda z} S(-z)$.*

Alors la suite de polynômes $(u_n(x))_{n\geq 0}$ de $\mathbb{C}[x]$ définie par l'égalité :
$$(S(z))^x = \sum_{n\geq 0} \lambda^n u_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

vérifie la relation
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{n-k} \binom{n}{k} u_k(x)$$

Preuve. la relation $S(z) = e^{\lambda z} S(-z)$ s'écrit

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n u_n(x)}{n!} z^n = \left(\sum_{l\geq 0} \frac{\lambda^l}{l!} z^l\right)\left(\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k u_k(x)}{k!} z^k\right)$$

On obtient la relation recherchée en identifiant les coefficients de z^n dans chacun des deux membres de cette égalité. Remarquons qu'on a la relation : $\lambda = 2a_1$.. □

Remarque 46 *Remarquons que si l'on choisit* $S(z) = \left(\dfrac{ze^z}{e^z - 1}\right)$, *on a*

$S(z) = e^z S(-z)$ *et donc la proposition 45 s'applique avec* $\lambda = 1$. *On a alors,*

$$u_n(x) = n!\sigma_n(x)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma_n(x) = \sum_{k+l=n} (-1)^l \frac{x^k}{k!} \sigma_l(x)$$

Le lemme qui suit nous sera utile pour prouver la proposition 48 qui suit

Lemme 47 *Soient*

$$U_n(x,y) = (n+1)(x-y)^n (x-2y) y^n \quad et \quad V_n(x,y) = (x-y)^n - y^n$$

Alors pour tout $n \geq 0$, *on a*

1. $U_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (n+1+k) \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^{n+k}$
2. $U_n(x,y) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{n-k} \binom{n}{k} V_{n+k+1}(x,y)$

Preuve. 1. est immediat (en developpant $U_n(x,y)$)

Pour 2., il suffit d'observer que si l'on pose $W_n(x,y) = (n+1)(x-y)^n y^{n+1}$, on a aussi

$$U_n(x,y) = W_n(x, x-y) - W_n(x,y)$$

avec

$$W_n(x,y) = (n+1) \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k} y^{n+k+1}$$

□

Proposition 48 *Soit* $(u_n(x))_{n\geq 0}$ *une suite de polynôme de* $\mathbb{C}[x]$ *vérifiant la relation*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{n-k} \binom{n}{k} u_k(x).$$

Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k (n+k+1) \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} u_{n+k}(x) = 0.$$

Preuve. Pour tout polynôme $P(x,y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j \in \mathbb{C}[x,y]$ et pour toute suite de polynômes $(u_n(x))_{n\geq 0}$ de $\mathbb{C}[x]$, convenons de définir $P(x,u)$ en posant

$$P(x,u) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i u_j(x)$$

Avec cette notation, (dite symbolique), on peut remarquer si on a $P(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) P_k(x,y)$ avec $\lambda_k(x) \in \mathbb{C}[x]$ et $P_k(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ pour $0 \leq k \leq n$, alors on a aussi

$$P(x,u) = \sum_{i=10}^{n} \lambda_i(x) P_i(x,u)$$

La preuve de la proposition 48 est alors immediate □

La relation vérifie par $(u_n)_{n\geq 0}$ peut s'énoncer comme suit avec les notations du lemme

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n(x,u) = 0.$$

La relation 2/ du lemme permet alors d'affirmer que $U_n(x,u) = 0$. En utilisant la formulation de $U_n(x,y)$ du 1/ du lemme 47, on obtient le resultat de la proposition 48.

Démonstration du théorème 44. On sait que la suite $u_n(x)$ définie par $u_n(x) = n!\sigma_n(x)$ vérifie la relation 1/ de la proposition 48 (d'après la remarque 46). Le théorème découle alors de la proposition 48.

Posons pour tout entier $n \geq 0$,

$$\sigma_n^*(x) = n!2^n \sigma_n(x)$$

Pour $n \geq 1$, $\sigma_n^*(x)$ est un polynôme unitaire, et on a :

$\sigma_1^*(x) = 1$
$\sigma_2^*(x) = x - \frac{1}{3}$
$\sigma_3^*(x) = x^2 - x$
$\sigma_4^*(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{x}{3} + \frac{2}{15}$
$\sigma_5^*(x) = x^4 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$

On constate que l'on a :

$\sigma_1^*(x) = x\sigma_0^*(x)$
$\sigma_3^*(x) = 3x\sigma_2^*(x) - 2x^2\sigma_1^*(x)$
$\sigma_5^*(x) = 5x\sigma_4^*(x) - 8x^2\sigma_3^*(x) + 4x^3\sigma_2^*(x)$

Plus généralement si on désigne par $(c(n,k))_{(n,k)\in IN^2}$ la famille d'entiers rationels définis par

$$c(n,k) = \left[x^k\right]\left((x-1)(1-2x)^n\right)$$

on a

$$\begin{aligned} c(n,k) &= (-2)^{k-1}\left(2\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right) \\ &= (-2)^{k-1}\frac{2n+2-k}{n+1}\binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

□

Le théorème 44 a en effet pour.

Corollaire 49 *Pour tout entier $n \geq 0$ on a*

$$\sigma^*_{2n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} c(n,k)\, x^k \sigma^*_{2n+1-k}(x)$$

On retrouve les relations précédentes en donnant à n les valeurs 0,1,2

On peut ainsi remarquer que les entiers $c(n,k)$ possèdent les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} c(n,k) &= c(n-1,k) - 2c(n-1,k-1), \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } k \geq 1 \\ c(n,0) &= -1, \text{ pour } n \geq 0 \\ c(0,k) &= \begin{cases} (-1)^{k+1} & \text{si } k \in \{0,1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour } k \geq 0 \end{aligned}$$

ces relations permettent de construire "le triangle" des coefficients $c(n,k)$ de manière analogue au triangle de Pascal

n	$c(n,0)$	$c(n,1)$	$c(n,2)$	$c(n,3)$	$c(n,t)$
0	-1	1			
1	-1	3	-2		
2	-1	5	-8	-4	
3	-1	7	-18	20	-8

Ainsi on a

$$\sigma^*_7(x) = 7x\sigma^*_6(x) - 18x^2\sigma^*_5(x) + 20x^3\sigma^*_4(x) - 18x^4\sigma^*_3(x)$$

Les pôlynomes de Bernoulli $B_n(x)$ et les polynômes d'Euler $E_n(x)$.définies par les relations :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{z^n}{n!} = \frac{ze^{zx}}{e^z-1}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{2e^{zx}}{e^z + 1}$$

vérifient aussi des relations analogues. Dans [8], on prouve qu'il en est de même pour les polynômes de Chebychev.

5.8 Résolution d'un problème posée par D.S Mitrinovic et R.S. Mitrinovic

Dans [62], DS Mitrinović et R.S. Mitrinović émettent "une hypothèse sur les polynômes de Stirling".

Dans ce qui suit, nous avons choisi de transcrire fidèlement avec les notations de leur auteurs le problème posé. Pour $n > 0$, les nombres de Stirling de première espèce signés sont notés S_n^r et sont définies comme suit

$$x(x-1)\cdots(x-n+1) = \sum_{r=0}^{n} S_n^r x^r$$

Autrement dit avec nos notations

$$S_n^r = (-1)^{n-r} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$$

On a alors pour tout entier $m \geq 1$

$$S_n^{n-m} = (-1)^m \begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix} = (-1)^m \tau_m(n)$$

S_n^{n-m}est un polynôme par rapport à n, appelé "polynôme de Stirling" par D.S.Mitrinović et R.S.Mitrinović.

Dans [62], les auteurs calculent les neufs premiers polynômes S_n^{n-m} pour $m = 1, 2, \cdots, 9$ et

trouvent les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
S_n^{n-1} &= -\binom{n}{2} \\
S_n^{n-2} &= \frac{1}{4}\binom{n}{3}P_2(n) \\
S_n^{n-3} &= \frac{1}{2}\binom{n}{2}n(n-1)P_3(n) \\
S_n^{n-4} &= \frac{1}{48}\binom{n}{5}P_4(n) \\
S_n^{n-5} &= \frac{1}{16}\binom{n}{6}n(n-1)P_5(n) \\
S_n^{n-6} &= \frac{1}{576}\binom{n}{7}P_6(n) \\
S_n^{n-7} &= \frac{1}{144}\binom{n}{8}n(n-1)P_7(n) \\
S_n^{n-8} &= \frac{1}{3840}\binom{n}{9}P_8(n) \\
S_n^{n-9} &= \frac{1}{768}\binom{n}{10}n(n-1)P_9(n)
\end{aligned}$$

où les polynomes $P_k(n)$, $k = 2, 3, ..., 9$ ont les formes suivantes :

$$\begin{aligned}
P_2(n) &= 3n-1 \\
P_3(n) &= -1 \\
P_4(n) &= 15n^3 - 30n^2 + 5n + 2 \\
P_5(n) &= -3n^2 + 7n + 2 \\
P_6(n) &= 63n^5 - 315n^4 + 315n^3 + 91n^2 - 42n - 16 \\
P_7(n) &= -9n^4 + 54n^3 - 51n^2 - 58n - 16 \\
P_8(n) &= 135n^7 - 1260n^6 + 3150n^5 - 840n^4 - 2345n^3 - 540n^2 + 404n + 144 \\
P_9(n) &= -15n^6 + 165n^5 - 465n^4 - 17n^3 + 648n^2 + 548n + 144
\end{aligned}$$

Ils affirment alors :

“ *On voit que les polynômes* :

$P_2(n)$ *et* $P_3(n)$ *ont le même terme indépendant, à savoir* -1

$P_4(n)$ *et* $P_5(n)$ *ont le même terme indépendant, à savoir* 2

$P_6(n)$ *et* $P_7(n)$ *ont le même terme indépendant, à savoir* -16

$P_8(n)$ *et* $P_9(n)$ *ont le même terme indépendant, à savoir* 144.

Si l'on donne aux polynômes de Stirling

$$S_n^{n-k} \quad (k = 10, 11, 12, 13)$$

les formes analogues aux précedents, on constate que les couples de polynômes

$$P_{10}(n) \text{ et } P_{11}(n)$$
$$P_{12}(n) \text{ et } P_{13}(n)$$

jouissent également de la même propriété.

Nous proposons le problème d'examiner si la propriété en question a lieu en géneral pour les couples de polynômes :

$$P_{2k}(n) \text{ et } P_{2k+1}(n) \quad (k \geq 1)$$

rattachés aux polynômes de Stirling suivants :

$$S_n^{n-2k} \text{ et } S_n^{n-(2k+1)} \quad (k \geq 1) \quad \text{"}$$

Nous allons répondre positivement a cette question qui ne semble pas avoir reçu de réponse à ce jour.

Pour cela il nous faut clarifier le problème et le traduire avec nos notations. On a déja vu que :

$$S_n^{n-m} = (-1)^m \tau_k(n)$$

Il s'agit d'ecrire S_n^{n-2k} et $S_n^{n-(2k+1)}$ sous la forme :

$$\begin{aligned} S_n^{n-2k} &= \frac{1}{a_{2k}} \binom{n}{2k+1} P_{2k}(n) \\ S_n^{n-(2k+1)} &= \frac{1}{a_{2k+1}} \binom{n}{2k+2} n(n-1) P_{2k+1}(n) \end{aligned}$$

où a_{2k}, a_{2k+1} sont des entiers, naturels ≥ 1, P_{2k} et P_{2k+1} des polynomes primitifs à coefficients entiers.et de prouver qu'une telle ecriture est toujours possible avec de plus : $P_{2k}(0) = P_{2k+1}(0)$.

On sait que $S_n^{n-m} = (-1)^m \tau_k(n)$ et que $\tau_k(n) = n(n-1)...(n-k)\sigma_k(n)$

$$\begin{aligned} \tau_k(n) &= n(n-1)...(n-k)\sigma_k(n) \\ &= (k+1)! \binom{n}{k+1} \sigma_k(n) \end{aligned}$$

On a ainsi les relations :

$$(2k+1)!\sigma_{2k}(n) = \frac{1}{a_{2k}} P_{2k}(n)$$

$$-(2k+2)!\sigma_{2k+1}(n) = \frac{1}{a_{2k+1}} n(n-1) P_{2k+1}(n)$$

Nous allons tout d'abord préciser quelques définitions et notations.

Rappelons que tout entier rationnel q s'écrit de manière unique sous la forme : $n = \frac{r}{t}$ avec $(r,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, r$ et t premiers entre eux. On convient de dire que r et t sont respectivement le numérateur et le dénominateur de q et on écrit :

$r = num(q)$ et $t = denom(q)$.

Etant donné maintenant un polynôme $A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ de $\mathbb{Q}[x]$, on convient de noter :

$$\mathcal{N}(A(x)) := PGCD(num(a_i))_{0 \leq i \leq n}$$

$$\mathcal{D}(A(x)) := PPCM(denom(a_i))_{0 \leq i \leq n}$$

Un polynôme $A(x)$ de $\mathbb{Q}[x]$ est dans $\mathbb{Z}[x]$ si et seulement si $\mathcal{D}(A(x)) = 1$

Un polynôme $A(x)$ de $\mathbb{Z}[x]$ est dit primitif si et seulement si $\mathcal{N}(A(x)) = 1$.

Il est bien connu que le produit de deux polynômes primitifs de $\mathbb{Z}[x]$ est encore un polynôme primitif de $\mathbb{Z}[x]$. On a ausi les résultats suivants faciles à prouver :

Lemme 50 *Si $A(x)$ est un polynôme primitif de $\mathbb{Z}[x]$, alors pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, $A(x+m)$ est aussi un polynôme primitif de $\mathbb{Z}[x]$.*

Lemme 51 *Soit $A(x)$ un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[x]$, alors $q = \frac{\mathcal{N}(A(x))}{\mathcal{D}(A(x))}$ est l'unique rationnel positif tel que*

$\frac{1}{q} A(x)$ soit un polynôme primitif de $\mathbb{Z}[x]$.

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 52 *Avec pour tout entier $n \geq 1$:*

$$M_n := \prod_{p \text{ premier}} p^{\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p(p-1)} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2(p-1)} \right\rfloor + \cdots},$$

les polynômes $M_n \sigma_n(x)$ et $M_n \tau_n(x)$ sont des polynômes primitifs de $\mathbb{Z}[x]$.

Queques remarques avant de prouver ce théorème :

Remarque 53 *Observons tout d'abord que pour tout entier $n \geq 1$, M_n est un entier bien défini. En effet pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout nombre premier p, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$\left\lfloor \frac{n}{p^k(p-1)} \right\rfloor = 0$ *si* $p^k > n$ *c'est à dire si* $k > \frac{\log n}{\log p}$ *et aussi :*

$\left\lfloor \frac{n}{p^k(p-1)} \right\rfloor = 0$ *si* $p - 1 > n$ *c'est à dire si* $p > n + 1$.

Il en résulte que le produit M_n est un produit fini :

$$M_n = \prod_{p \text{ premier et } p \leq n+1} p^{v_p(M_n)}$$

avec

$$v_p(M_n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \log n / \log p \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^k(p-1)} \right\rfloor$$

Remarque 54 *La suite d'entiers $(M_n)_{n\geq 0} = (1, 2, 24, 48, 5760, ...)$ répertoriée sous la référence A053657 dans "The Online Encylopedia of Integer Sequences" de SLOANE* [72] *a été appelée suite des nombres de Minkowski par Martin Lorenz* [51] *. C'est en effet en 1887 que Minkowski a prouvé que M_n est égal au plus petit commun multiple des ordres de tous les sous groupes finis de $GL_n(\mathbb{Q})$. La notation M_n est due à Schur .*[71]

Preuve. *La démonstration de ce théorème repose essentiellement sur le résultat suivant de J.L. Chabert,*[20, 2007] *qui fut d'abord mis en évidence de façon expérimentale par Paul D. Hanna avant d'être etabli théoriquement tout récemment par Jean-Luc Chabert.*

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}([z^n]\,(\frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z})^x) = M_n$

D'après le théorème 37, cette propriété est équivalente à :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}(x\sigma_n(n+x)) = M_n$

Or on a

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{N}(x\sigma_n(n+x)) = 1$ *(car le coefficient dominant de $x\sigma_n(n+x)$ est égal à $\frac{1}{2^n n!}$)*

On en déduit à l'aide du lemme 50 que $M_n x\sigma_n(n+x)$ est un polynôme primitif de $\mathbb{Z}[x]$. Le lemme 51 permet alors de conclure. □

La suite des nombres de Minkowski $(M_n)_{n\geq 0}$ vérifie ([51]) :

Proposition 55 *Pour tout entier $n \geq 1$,*

1. *M_n est un entier divisible par $(n+1)!$*
2. *$M_{2n+1} = 2M_{2n}$*

Preuve. Pour tout entier $m \geq 1$ et pour tout nombre premier p, désignons par $v_p(m)$ la valuation p-adique de m. □

1. Pour tout entier $m \geq 1$, on a la formule de Legendre (Théorème 6 p 13 de Tenenbaum).

$$v_p((n+1)!) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n+1}{p^{k+1}} \right\rfloor$$

Comme $\left\lfloor \frac{n+1}{p^{k+1}} \right\rfloor = 0$ si $p > n+1$ ou si $p^k > n$, on en déduit que

$$(n+1)! = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leq n+1}} p^{v_p((n+1)!)}$$

avec

$$v_p((n+1)!) = \sum_{k=0}^{\lfloor \log n / \log p \rfloor} \left\lfloor \frac{n+1}{p^{k+1}} \right\rfloor$$

il s'ensuit que si l'on pose : $m_n = \frac{M_n}{(n+1)!}$,

on a :

$$m_n = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leq n+1}} p^{v_p(M_n) - v_p((n+1)!)}$$

avec pour $p \leq n+1$:

$$v_p(M_n) - v_p((n+1)!) = \sum_{k=0}^{\lfloor \log n / \log p \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^k(p-1)} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+1}{p^{k+1})} \right\rfloor$$

Comme pour $p \leq n+1$ et pour $k \geq 0$, on a :

$\frac{n}{p^k(p-1)} - \frac{n+1}{p^{k+1}} = \frac{n+1-p}{p^{k+1}(p-1)} \geq 0$

il en résulte que pour tout nombre premier $p \leq n+1$, on a

$$v_p(M_n) - v_p((n+1)!) \geq 0$$

et par conséquent $m_n \in \mathbb{N}^*$ et $(n+1)!$ divise M_n.

2. Le lemme qui suit facile à prouver, nous sera utile

Lemme 56 *Pour tous entiers naturels non nuls x et y, on a :*

$$\left\lfloor \frac{x+1}{y} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = \begin{cases} 1 \text{ si } y \text{ divise } x+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

on a : pour tout p premier :

$$v_p\left(\frac{M_{2n+1}}{M_{2n}}\right) = \sum_{k\geq 0} \left\lfloor \frac{2n+1}{p^k(p-1)} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2n}{p^k(p-1)} \right\rfloor$$

d'après le lemme si $p \geq 3$ on a $v_p\left(\frac{M_{2n+1}}{M_{2n}}\right) = 0$

et si $p = 2$, on a

$$v_p\left(\frac{M_{2n+1}}{M_{2n}}\right) = \sum_{k=0} \left\lfloor \frac{2n+1}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2n}{2^k} \right\rfloor = 1$$

Il en résulte que $M_{2n+1} = M_{2n}$.

Pour tout entier $n \geq 0$, convenons de noter "$n \bmod 2$" le reste de la division de n par 2. Autrement dit :

$n \bmod 2 = n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ .Alors on peut énoncer le

Théorème 57 *Il existe une unique suite* $(P_n(x))_{n\geq 0}$ *de polynômes primitifs de* $\mathbb{Z}[x]$ *vérifiant la relation :*

$$P_{2n}(0) = P_{2n+1}(0)$$

pour tout entier $n \geq 1$, *et telle que*

$$(-1)^n \tau_n(x) = \frac{1}{m_n}\binom{x}{n+1} (x(x-1))^{n \bmod 2} P_n(x)$$

Ce théorème a pour conséquence la réponse affirmative à la question posée par D.S. Mitrinović et R.S Mitrinović, contenue dans le corollaire suivant :

Corollaire 58 *Pour tous entiers* $k \geq 1$ *et* $n \geq 2k+1$, *on a :*

$S_n^{n-2k} = \frac{1}{m_{2k}}\binom{n}{2k+1} P_{2k}(n)$

et

$S_n^{n-(2k+1)} = \frac{1}{m_{2k+1}}\binom{n}{2k+2} n(n-1) P_{2k+1}(n)$

P_{2k} *et* P_{2k+1} *étant des polynômes primitifs à coefficients entiers vérifiant :*

$P_{2k}(0) = P_{2k+1}(0)$

Preuve. *(1) Pour tout entier* $n \geq 1$, *posons*

$$P_n(x) = (-1)^n \frac{M_n \sigma_n(x)}{((x(x-1))^{n \bmod 2}}$$

D'après le théorème et le corollaire 42, $P_n(x)$ *est un polynôme primitif de* $\mathbb{Z}[x]$ *et pour tout entier* $k \geq 1$, *on a :*

$$P_{2k}(x) = M_{2k}\sigma_{2k}(x)$$

et

$$x(x-1)P_{2k+1}(x) = -M_{2k+1}\sigma_{2k+1}(x)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} P_{2k}(0) &= M_{2k}\sigma_{2k}(0) \\ P_{2k+1}(0) &= M_{2k+1}\sigma'_{2k+1}(0) \end{aligned}$$

□

Or $M_{2k+1} = 2M_{2k}$ d'après la proposition 55 et $2\sigma'_{2k+1}(0) = \sigma_{2k}(0)$ d'après la proposition 43, par conséquent, on a

$$P_{2k}(0) = P_{2k+1}(0).$$

(2) On a

$$\begin{aligned} (-1)^n \tau_n(x) &= \frac{(n+1)!}{M_n}\binom{x}{n+1}((-1)^n M_n \sigma_n(x)) \\ &= \frac{1}{m_n}\binom{x}{n+1}((x(x-1))^{n \bmod 2} P_n(x). \end{aligned}$$

Observons maintenant que si l'on définit la suite de polynômes $(G_n(x))_{n\geq 0}$ par

$$G_n(x) = (-1)^n (x-1)^{n \bmod 2} P_n(x)$$

alors, $(G_n(x))_{n\geq 0}$ est une suite de polynômes primitifs de $\mathbb{Z}[x]$ vérifiant pour tout $n \geq 0$

$$\deg G_{2n+1}(x) = \deg G_{2n}(x) = 2n - 1$$

Les premières valeurs des polynômes $G_n(x)$ pour $2 \leq n \leq 9$ sont :

$G_2(x) = 3x - 1$

$G_3(x) = x - 1$

$G_4(x) = 15x^3 - 30x^2 + 5x + 2$

$G_5(x) = 3x^3 - 10x^2 + 5x + 2$

$G_6(x) = 63x^5 - 315x^4 + 315x^3 + 91x^2 - 42x - 16$

$G_7(x) = 9x^5 - 63x^4 + 105x^3 + 7x^2 - 42x - 16$

$G_8(x) = 135x^7 - 1260x^6 + 3150x^5 - 840x^4 - 2345x^3 - 540x^2 + 404x + 404$

$G_9(x) = 15x^7 - 180x^6 + 630x^5 - 448x^4 - 665x^3 + 100x^2 + 404x + 144$

On constate que pour $2 \leq n \leq 4$, on a

$$G_{2n+1}(x) - G_{2n}(x) \equiv 0 \bmod x^2\mathbb{Z}[x]$$

Le théorème qui suit montre cette propriété des coefficients de la suite des polynômes $(G_n(x))_{n\geq 0}$vérifiée directement pour $2 \leq n \leq 4$ est en fait vérifiée pour tout entier $n \geq 2$.Ce résultat fournit comme corollaire une autre propriété des coefficients. Le théorème suivant va nous permettre de découvrir une autre propriété des coefficients des polynomes $(P_n(x))_{n\geq 0}$.

Théorème 59 *Il existe une unique suite $(G_n(x))_{n\geq 0}$ de polynômes primitifs de $\mathbb{Z}[x]$ vérifiant pour tout entier $n \geq 2$ les relations :*

$\deg G_{2n+1}(x) = \deg G_{2n}(x) = 2n - 1$

et $G_{2n+1}(x) - G_{2n}(x) \equiv 0 \bmod x^2\mathbb{Z}[x]$ et telle que pour tout entier $n \geq 1$ on ait

$\tau_n(x) = \frac{1}{m_n}\binom{x}{n+1} x^{\bmod 2} G_n(x)$

Preuve. On a alors, d'après la proposition 55, pour tout entier $n \geq 2$,

$$x(G_{2k+1}(x) - G_{2k}(x)) = M_{2k+1}\sigma_{2k+1}(x) - M_{2k}x\sigma_{2k}(x) = M_{2k}H_k(x)$$

□

avec

$$H_k(x) = 2\sigma_{2k+1}(x) - x\sigma_{2k}(x).$$

On en déduit alors d'après le corollaire 42 :

$$H_k(0) = 2\sigma_{2k+1}(0) = 0.$$

De plus avec la proposition 43, on a :

$$H_k^{'}(x) = 2\sigma_{2k+1}^{'}(0) - \sigma_{2k}(0) = 0,$$

et

$$H_k^{''}(0) = 2\left(\sigma_{2k+1}^{''}(0) - \sigma_{2k}^{'}(0)\right) = 0.$$

Il en résulte que :

$$G_{2k+1}(x) - G_{2k}(x) \equiv 0 \bmod x^2\mathbb{Z}[x].$$

Corollaire 60 *La suite de polynômes* $(P_n(x))$ *définie au théorème 57 précédent vérifie les propriétés :*

$P_{2k+1}(0) = P_{2k}(0)$

$P_{2k+1}^{'}(0) = P_{2k}^{'}(0) + P_{2k}(0)$

Autrement dit on a :

$[x]\,P_{2k+1}(x) = [x]\,P_{2k}(x) + [x^0]\,P_{2k}(x)$

Preuve. *Pour tout entier* $n \geq 2$ *on a :*

$$G_n(x) = (-1)^n (x-1)^{n \bmod 2} P_n(x)$$

on en déduit que por tout entier $k \geq 2$

$$(1-x)P_{2k+1}(x) - P_{2k}(x) = G_{2k+1}(x) - G_{2k}(x) \equiv 0 \bmod x^2\mathbb{Z}[x].$$

Il en résulte que la dérivée du polynôme $(1-x)P_{2k+1}(x) - P_{2k}(x)$ *en* $x = 0$ *est nulle, ce qui fournit la relation du corollaire.* □

Chapitre 6

Fonction sommatoire de la puissance k-ième de la fonction "somme des chiffres en base q"

6.1 Introduction :

Dans tout ce chapitre, q désigne un entier fixé supérieur ou égal à 2. Tout entier positif ou nul n s'écrit de manière unique, en base q sous la forme

$$n = \sum_{r \geq 0} e_r(n)\, q^r$$

les fonctions $e_r = e_{r,q}$ prenant leurs valeurs dans l'ensemble des entiers $\{0, 1, \cdots, q-1\}$.

Les valeurs $e_r(n)$, pour $r \geq 0$ sont les chiffres de n en base q. Pour chaque entier $n \geq 0$, il n'y a seulement qu'un nombre fini de chiffres non nuls. Plus précisement, on a pour $n \geq 1$

$$e_r(n) = 0 \text{ pour } r > \left\lfloor \frac{\log n}{\log q} \right\rfloor$$

On peut aussi remarquer que

$$e_r(n) = \left\lfloor \frac{n}{q^r} \right\rfloor - q \left\lfloor \frac{n}{q^{r+1}} \right\rfloor$$

La "somme des chiffres en base q" est la fonction arithmétique s_q définie par

$$s_q(n) = \sum_{r \geq 0} e_r(n).$$

De nombreux auteurs ont étudié le comportement asymptotique de la fonction sommatoire de s_q^k, pour différentes valeurs entières de k.

Ainsi, pour $k = 1$, Bush [17] a montré en 1940, que l'on a lorsque x tend vers l'infini

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} s_q(n) \sim \frac{q-1}{2}\log_q x$$

où $\log_q x = \dfrac{\log x}{\log q}$.

En 1948, Bellman et Shapiro [3] ont obtenu :

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} s_q(n) = \frac{q-1}{2}\log_q x + O(\log\log x)$$

En 1949, Mirsky [57] a encore amélioré ce résultat en prouvant que

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} s_q(n) = \frac{q-1}{2}\log_q x + O(1)$$

En 1952, Drazin et Griffith [33] ont fait une étude encore plus précise du terme d'erreur.

En 1955, Cheo et Yien [21] prouvent que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\frac{1}{10^n}\sum_{m=0}^{10^n-1} s_{10}(m) = \frac{9}{2}n$$

Ils prouvent aussi que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} s_{10}(m) = \frac{9}{2}\log_{10} n + O(1)$$

En 1968, Trollope [74] donne une expression explicite pour la somme

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} s_2(m)$$

En 1975, H. Delange [42] simplifie la preuve et généralise le résultat de Trollope, en prouvant l'existence d'une fonction F_q périodique de période 1,continue et nulle part dérivable telle que pour tout entier $n \geq 2$, on ait

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} s_q(m) = \left(\frac{q-1}{2}\right)\log_q n + F_q\left(\log_q n\right).$$

En remarquant que pour

$$\operatorname{Re} s > 0,\ s\int_1^\infty \frac{1}{t^{s+1}} s_q([t])\,dt = \frac{q^s - q}{q^s - 1}\xi(s)$$

il parvient à déterminer explicitement la série de Fourier de F_q à l'aide des valeurs de la fonction ξ de Riemann aux points $\dfrac{2k\pi i}{\log q}$, où $k \in \mathbb{Z}^*$

En 1986, C.Cooper et R. Kennedy [25] généralisent le résultat de Chéo et Yien en prouvant que pour tout $k \geq 1$, on a aussi :

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} s_{10}(km) = \frac{9}{2}\log_{10} n + O(1)$$

En 1991, Cooper et Kennedy [26] s'interessent au cas où $k = 2$ et prouvent que

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} (s_{10}(n))^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 \log_{10}^2 x + O(\log_{10} x)$$

En 1992, Cooper et Kennedy démontrent que

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} (s_{10}(n))^k = \left(\frac{9}{2}\right)^k \log_{10}^k x + O\left(\log_{10}^{k-1/3} x\right)$$

Estimant qu'on pourrait améliorer le reste de cette formule asymptotique de manière plus précise, ils énoncent alors la :

Conjecture 61 *(Cooper-Kennedy)*

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} (s_{10}(n))^k = \left(\frac{9}{2}\right)^k \log_{10}^k x + O\left(\log_{10}^{k-1} x\right)$$

En 1993, ils démontrent le théorème suivant qui renforce la conjecture énoncée :

Théorème 62 *(C. Cooper-R. Kennedy)* [50]

Pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$\frac{1}{10^n}\sum_{m=0}^{10^n-1} (s_{10}(m))^k = \left(\frac{9}{2}\right)^k n^k (1 + O(1/n)) \quad (n \to \infty)$$

La méthode utilisée par Cooper et Kennedy pour obtenir ce résultat est loin d'être simple. En voici les grandes étapes.

Ils exploitent tout d'abord le fait suivant

Si l'on considère la suite $(f_k(x))_{k\geq 0}$ de polynômes à coefficients rationnels définie par

$$\begin{cases} f_0(x) = (1+x+x^2+\cdots+x^9)^n \\ f_k(x) = x f'_{k-1}(x) \text{ pour } k \geq 1 \end{cases}$$

alors on a

$$\sum_{m=0}^{10^n-1} (s_{10}(m))^k = f_k(1)$$

(ce résultat simple est prouvé un peu plus loin dans cette thèse)

Ils constatent alors que l'on a aussi

$$f_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} x^j f'_0(x)$$

Ce dernier résultat que Cooper et Kennedy démontrent par récurrence s'obtient aisément si l'on remarque que

$$f_k(x) = (xD)^k f_0(x)$$

et que l'on

$$(xD)^k = \sum_{j=0}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} x^j D^j$$

Ils obtiennent ainsi

$$\sum_{m=0}^{10^n-1} (s_{10}(m))^k = \sum_{j=0}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} f_0^{(j)}(1)$$

Ils exploitent alors la formule de Faā di Bruno qui donne la dérivée $k^{ième}$ d'une fonction composée et qu'ils appliquent pour estimer $f_0^{(j)}(1)$ ce qui leur permet alors de conclure ce qui leur permet ainsi de conclure.

Cependant, ils comfortent encore ce résultat par de nombreux calculs sur ordinateur, et obtiennent à l'aide de MAPLE les résultats suivants :

En posant :

$$\mathrm{S}_k(n) = \frac{1}{10^n} \sum_{m=0}^{10^n-1} (s_{10}(m))^k$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}_0(n) &= 1\\
\mathrm{S}_1(n) &= \frac{9}{2}n\\
\mathrm{S}_2(n) &= \frac{81}{4}n^2+\frac{33}{4}n\\
\mathrm{S}_3(n) &= \frac{729}{8}n^3+\frac{891}{8}n^2\\
\mathrm{S}_4(n) &= \frac{6561}{16}n^4+\frac{8091}{8}n^3+\frac{3267}{16}n^2-\frac{3333}{40}n\\
\mathrm{S}_5(n) &= \frac{59049}{32}n^5+\frac{120285}{16}n^4+\frac{147015}{32}n^3-\frac{29997}{16}n^2\\
\mathrm{S}_6(n) &= \frac{531441}{64}n^6+\frac{3247695}{64}n^5+\frac{3969405}{64}n^4-\frac{1080783}{64}n^3-\frac{329967}{32}n^2+\frac{15873}{4}n\\
\mathrm{S}_7(n) &= \frac{4782969}{128}n^7+\frac{40920957}{128}n^6+\frac{83357505}{128}n^5-\frac{56133}{128}n^4-\frac{20787921}{64}n^3+\frac{999999}{32}n^2\\
\mathrm{S}_8(n) &= \frac{43046721}{256}n^8+\frac{122762871}{64}n^7+\frac{750217545}{128}n^6+\frac{76284747}{32}n^5-\frac{1372208607}{256}n^4\\
&\qquad +\frac{67777479}{64}n^3+\frac{371095263}{320}n^2-\frac{33333333}{80}n
\end{aligned}
$$

Cependant, ils ne parviennent pas à calculer à l'aide de l'ordinateur, $\frac{1}{10^n}\sum_{m=0}^{10^n-1}\left(s_{10}(m)\right)^9$ du fait que les calculs devenaient alors trop importants pour la memoire de l'ordinateur utilisé. Voici ce qu'ils affirment :

"These results were obtained by initially considering the function

$$f(x)=\left(1+x+x^2+\cdots+x^9\right)^n$$

We then repeatdly differentiated multiplied by x, and substituted $x=1$. However, when an exponent of 9 was used, the computation became too big for the memory of the computer. Nevertheless, these results reinforced our that the conjecture is true. We proceeded to delve more deeply into the generating function".

Ils terminent leur article par deux problèmes ouverts :

- Peut-on trouver une formule exacte pour $\frac{1}{10^n}\sum_{m=0}^{10^n-1}\left(s_{10}(m)\right)^9$?

- A-t-on une formule générale exacte pour $\frac{1}{10^n}\sum_{m=0}^{10^n-1}\left(s_{10}(m)\right)^k$?

Dans ce chapitre, nous repondons à ces deux questions ;

Le calcul des valeurs de $\frac{1}{10^n}\sum_{m=0}^{10^n-1}\left(s_{10}(m)\right)^k$ pour des valeurs de k allant de 1 à 20 et même plus, ne pose plus du problème aux ordinateurs actuels.

Le calcul pour $k=9$ est même faisable à la main en un temps relativement court avec la méthode utilisée par Cooper et Kennedy.

Le véritable problème est donc la détermination d'une formule générale pour la somme

$$\frac{1}{q^n}\sum_{m=1}^{q^n-1}\left(s_q\left(m\right)\right)^k$$

C'est à cette question que nous allons répondre en prouvant que cette somme est toujours un polynôme de degré k en n, qui s'exprime naturellement et simplement à l'aide des polynômes de Stirling.

Nous déterminons aussi bien les premiers termes que les derniers termes de ce polynôme. Ce qui nous permet d'améliorer et de généraliser le Théorème énoncé par Cooper et Kennedy.

Avant d'énoncer les résultats obtenus, nous allons généraliser certaines propriétés obtenues pour les polynômes de Stirling à toute une classe de polynômes.

6.2 Propriétés de certaines suites de polynômes

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$,

Pour tous $\alpha \in K$ et $k \in \mathbb{N}$ définissons l'opérateur de dérivation : $\Omega : K\left[x\right] \to K\left[x\right]$ et l'application $\Omega_\alpha^k : K\left[x\right] \to K$ par $\Omega\left(P\left(x\right)\right) = xP^{'}\left(x\right)$, c'est-à-dire $\Omega = xD$ et $\Omega_\alpha^k P\left(x\right) = \Omega^k P\left(x\right)_{|x=\alpha} = \left(xD\right)^k P\left(x\right)_{|x=\alpha}$.

On a alors le

Lemme 63 (*formule de Leibniz*)

Pour tous, entiers $n \geq 0$, et $U,\ V \in K\left[x\right]$, on a :

$$\Omega^n\left(UV\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Omega^k U\Omega^{n-k}V$$

Preuve. Le lemme s'établit facilement par récurrence sur n. □

Il permet de prouver le

Théorème 64 *Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ et $P\left(x\right) \in \mathbb{C}\left[x\right]$ tel que $P\left(\alpha\right) = 1$. Soit $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ la suite d'éléments de K définie par :*

$$a_n = \left(\Omega_\alpha^k P\left(x\right)\right) \text{ pour tout } n \geq 0$$

Soit $\left(W_n\left(x\right)\right)_{n\geq 0}$ la suite de polynômes de $K\left[x\right]$ définie par :

$$\begin{cases} W_0\left(x\right) = 1 \\ W_n\left(x+1\right) - W_n\left(x\right) = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}a_{n-j}W_j\left(x\right) \text{ et } W_n\left(0\right) = 0 \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Alors la suite $\left(W_n\left(x\right)\right)_{n\geq 0}$ vérifie les propriétés suivantes

1. *Pour tous entiers $n, k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\Omega_\alpha^k (P(x))^n = W_k(x)$$

2. $W_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} W_k(x) W_{n-k}(y)$
3. $\sum_{n\geq 0} W_n(x) \frac{z^n}{n!} = \left(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}\right)^x$

Preuve. 1. La preuve se fait par récurrence sur l'entier $k \in \mathbb{N}$.

Pour $k = 0$, on a pour tout entier $n \geq 0$:

$$\Omega_\alpha^0 (P(x))^n = (P(\alpha))^n = 1 = W_0(n)$$

Supposons alors que pour tout entier $k \geq 1$, on ait

$\forall n \in \mathbb{N} : \Omega_\alpha^j (P(x))^n = W_j(x)$, pour tout $j \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$

On a alors tout entier $m \geq 0 : \Omega_\alpha^k \left((P(x))^{m+1}\right) = \Omega_\alpha^k \left((P(x))^m P(x)\right)$

En appliquant le lemme avec $U = (P(x))^m$ et $V = P(x)$

On en déduit que $\Omega_\alpha^k (P(x))^{m+1} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \Omega_\alpha^j (P(x))^m a_{k-j}$

En exploitant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$\Omega_\alpha^k (P(x))^{m+1} = \Omega_\alpha^k (P(x))^m + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} a_{k-j} W_j(m)$$

Ainsi

$$\Omega_\alpha^k (P(x))^{m+1} - \Omega_\alpha^k (P(x))^m = W_k(m+1) - W_k(m)$$

on en déduit que pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\Omega_\alpha^k (P(x))^n = \sum_{m=0}^{n-1} (W_k(m+1) - W_k(m)) = W_k(n)$$

2. Il suffit de le vérifier pour toutes valeurs entières ≥ 0 de x et de y. On a effectivement pour $(r, s) \in \mathbb{N}^2$

$$\begin{aligned} W_n(r+s) &= \Omega_\alpha^n (P(x))^{r+s} \\ &= \Omega_\alpha^n \left((P(x))^r (P(x))^s\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Omega_\alpha^k (P(x))^r \Omega_\alpha^{n-k} (P(x))^s \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} W_n(r) W_{n-k}(s). \end{aligned}$$

3. La formule se vérifie aisement aussi pour toutes valeurs entières de x. Le résultat en découle . □

Théorème 65 *Soit* $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *avec* $a_0 = 1$

Soit pour $n \geq 0$

$$c_n = n! \left[z^n\right] \left(zS^{-1}(z) S'(z)\right)$$

Alors

$$(S(z))^x = \sum_{n\geq 0} u_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

avec

$$\begin{cases} u_0(x) = 1 \\ u_n(x) = \dfrac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} c_{n-k} u_k(x) \ \ \textit{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

De plus on a : pour tout $n \geq 0$

$$\deg u_n(x) \leq n \ \textit{et} \ \deg u_n(x) = n \ \textit{ssi} \ c_1 \neq 0$$

Preuve. Par dérivation, on a

$$x(S(z))^{x-1} S'(z) = \sum_{n\geq 0} n u_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

Or par hypothèse, on a

$$z(S(z))^{-1} S'(z) = \sum_{n\geq 0} c_n \frac{z^n}{n!} \text{ et } \quad (S(z))^x = \sum_{n\geq 0} u_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

On en déduit que

$$\left(\sum_{n\geq 0} c_n \frac{z^n}{n!}\right) \left(\sum_{n\geq 0} u_n(x) \frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0} n u_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

En égalant les coefficients de z^n, pour $n \geq 1$, dans chaque membre, on obient les relations de récurrences du théorème en remarquant que de plus $c_0 = 0$ et $u_0(x) = 1$.

Le théorème 22 permet d'affirmer que l'on a bien

$$\deg u_n(x) \leq \ \text{ et } \ \deg u_n(x) = n \text{ ssi } c_1 \neq 0$$

en constatant aussi que $c_1 = a_1$. □

Corollaire 66 *Avec les notations du Théorème précédent (théorème 56), on a*

1. $\left[x^0\right](u_n(x)) = \delta_{n,0}$
2. $\left[x^1\right](u_n(x)) = \dfrac{c_n}{n}$

   Et plus généralement

3. $[x^r]\left(u_n\left(x\right)\right) = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=n} \prod_{j=1}^{r} \dfrac{c_{r_j}}{i_j!\left(i_1+i_2+\cdots+i_j\right)}$ *pour* $r \geq 1$

Preuve. 1. est immédiat puisque $u_0\left(x\right) = 1$ et $u_n\left(0\right) = 0$ pour $n \geq 1$.

On a alors pour tout entier $r \geq 1$

$$[x^r]\left(\frac{u_n\left(x\right)}{n!}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i+j=n}\frac{c_i}{i!}\left[x^{r-1}\right]\left(\frac{u_j\left(x\right)}{j!}\right)$$

2. Pour $r = 1$ on obtient

$$[x]\left(\frac{u_n\left(x\right)}{n!}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i+j=n}\frac{c_i}{i!}\frac{\delta_{j0}}{j!} = \frac{c_n}{n.n!}$$

3. En raisonnant par reccurence sur r, on démontre la formule générale donnant le coéfficient de x^r dans $u_n\left(x\right)$. □

Corollaire 67 *Avec les notations du théorème 65, si on suppose que* $a_1 \neq 0$ *et que* $c_{2j+1} = 0$ *pour tout entier* $j \geq 1$*, alors* $u_n\left(x\right)$ *est divisible par* x *pour tout entier* $n \geq 1$ *et par* x^2 *pour tout entier* n*, impair, supérieur ou égal à* 3.

De plus, en définissant les polynômes $v_{2n}\left(x\right)$ *et* $v_{2n+1}\left(x\right)$ *pour tout entier* $n \geq 1$ *par*

$$\begin{aligned}
u_{2n}\left(x\right) &= (2n)!a_1^{2n}xv_{2n}\left(x\right)\\
u_{2n+1}\left(x\right) &= (2n+1)!a_1^{2n+1}x^2v_{2n+1}\left(x\right),\\
On\ a\quad &:\\
\left[x^0\right]v_{2n}\left(x\right) &= \left[x^0\right]v_{2n+1}\left(x\right)\ \ pour\ n \geq 1\\
\left[x\right]v_{2n}\left(x\right) &= \left[x\right]v_{2n+1}\left(x\right)\ \ pour\ n \geq 2\\
v_{2n+1}\left(x\right) - v_{2n}\left(x\right) &\equiv 0\ \bmod x^2\mathbb{Q}\left[x\right]\ \ pour\ n \geq 2
\end{aligned}$$

Preuve. D'après le corollaire 1, on a pour $n \geq 1$: $[x^0]\,u_n\left(x\right) = 0$, et pour $n \geq 3$, n impair, on a $[x]\,u_n\left(x\right) = \dfrac{c_n}{n} = 0$. Ainsi pour tout entier $n \geq 1$ x divise $u_{2n}\left(x\right)$ et x^2 divise $u_{2n+1}\left(x\right)$.

On a alors, avec les notations du corollaire

$$\left[x^0\right]v_{2n}\left(x\right) = \frac{1}{(2n)!a_1^{2n}}\left[x\right]u_{2n}\left(x\right) = \frac{c_{2n}}{(2n)!\,(2n)\,a_1^{2n}}$$

et

$$\left[x^0\right]v_{2n+1}\left(x\right) = \frac{1}{(2n+1)!a_1^{2n+1}}\left[x^2\right]u_{2n+1}\left(x\right) = \frac{1}{(2n+1)!a_1^{2n+1}}(2n)!\sum_{i+j=2n+1}\frac{c_ic_j}{i.i!.j!}$$

Ainsi

$$\left[x^0\right] v_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+1)\,a_1^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\frac{c_1 c_{2n}}{(2n)!} = \frac{c_{2n}}{(2n)!\,(2n)\,a_1^{2n}}$$

□

On a bien $\left[x^0\right] v_{2n}(x) = \left[x^0\right] v_{2n+1}(x)$.

On procède de manière analogue pour prouver que l'on a

$$[x]\, v_{2n}(x) = [x]\, v_{2n+1}(x) = \frac{1}{2na_1^{2n}} \sum_{i+j=2n} \frac{c_i c_j}{i.i!.j!}$$

Corollaire 68 *Avec les notations du théorème 65, on a*

1. $\left[x^n\right] u_n(x) = c_1^n$
2. $\left[x^{n-1}\right] u_n(x) = \frac{1}{2}\binom{n}{2} c_1^{n-2} c_2$
3. $\left[x^{n-2}\right] u_n(x) = \frac{1}{3}\binom{n}{3} c_1^{n-3} c_3 + \frac{3}{4}\binom{n}{4} c_1^{n-4} c_2^2$
4. $\left[x^{n-3}\right] u_n(x) = \frac{1}{4}\binom{n}{4} c_1^{n-4} c_4 + \frac{5}{3}\binom{n}{5} c_1^{n-5} c_2 c_3 + \frac{15}{8}\binom{n}{6} c_1^{n-6} c_2^3$
5. $\left[x^{n-4}\right] u_n(x) = \frac{1}{5}\binom{n}{5} c_1^{n-5} c_5 + \frac{15}{8}\binom{n}{6} c_1^{n-6} c_2 c_4 + \frac{10}{9}\binom{n}{6} c_1^{n-6} c_3^2 + \frac{35}{4}\binom{n}{7} c_1^{n-7} c_2 c_3 + \frac{105}{16}\binom{n}{8} c_1^{n-8} c_2^4$

Preuve. Le théorème 65 fournit la relation

$$[x^r]\, u_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=r-1}^{n} \binom{n}{k} c_{n-k} \left[x^{r-1}\right] u_k(x), \text{ pour } 1 \le r \le n$$

En donnant à r successivement les valeurs $n,\ n-1,\ n-2,\ n-3$, et $n-4$ on obtient des relations desquelles on déduit aisement le corollaire 3. □

6.3 Théorème principal

La fonction génératrice exponentielle de la suite $\left(\frac{1}{q^n}\sum_{m=0}^{q^n-1}\left(s_q(m)\right)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est déterminée par le

Théorème 69 *Soit* $(Q_n(x))_{n\geq 0}$ *la suite de polynômes définie par*

$$\sum_{n\geq 0} Q_n(x)\frac{z^n}{n!} = \left(\frac{e^{qz}-1}{q(e^z-1)}\right)^x$$

Alors pout tout $n\geq 0$, $Q_n(x)$ *est un polynôme à coefficients rationnels, de degré* n, *de coefficient dominant* $\left(\frac{q-1}{2}\right)^n$, *s'annulant pour* $x=0$ *si* $n\geq 1$ *et vérifiant pour tout* $n\geq 0$

$$\frac{1}{q^n}\sum_{m=0}^{q^n-1}(s_q(m))^k = Q_k(n)$$

Corollaire 70 *La suite de polynômes* $(Q_n(x))_{n\geq 0}$ *est une suite de polynômes binômiaux. C'est à dire que pour tout* $n\geq 0$, *on a*

$$Q_n(x+y) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}Q_j(x)\,Q_{n-j}(y)$$

Démonstration du Théorème. Posons

$$S(z) = \frac{e^{qz}-1}{q(e^z-1)}$$

On constate aisement que $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a_0 = 1$, $a_1 = (q-1)/2 \neq 0$ et plus généralement

$$a_n = \frac{1}{q}\left(0^n + 1^n + 2^n + ...(q-1)^n\right) \text{ pour } n\geq 0.$$

Posons

$$P(x) = \frac{1+x+x^2+...+x^{q-1}}{q}$$

On constate que

$$a_n = \Omega_1^n P(x)$$

on a donc d'après le théorème 64

$$\sum_{n\geq 0} Q_n(x)\frac{z^n}{n!} = \left(\sum_{n\geq 0} a_n\frac{z^n}{n!}\right)^x$$

avec $Q_k(x) = \Omega_1^k (P(x))^n$

$(Q_n(x))_{n\geq 0}$ étant la suite de polynômes définie par

$$\begin{cases} Q_0(x) = 1 \\ Q_n(x+1) - Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}a_{n-j}Q_j(x) \text{ et } Q_n(0) = 0 \text{ pour } n\geq 1 \end{cases}$$

Posons

$$T_k(n) := \frac{1}{q^n} \sum_{m=0}^{q^n-1} (s_q(m))^k$$

On a alors pour tous entiers $n \geq 0$ et $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} T_k(n) &: = \frac{1}{q^n} \sum_{(c_0,c_1,...c_{n-1}) \in \{0,1,2,...,q-1\}^n} \left(s_q\left(c_0 + c_1 q + ... + c_{n-1} q^{n-1}\right)\right)^k \\ &= \frac{1}{q^n} \sum_{(c_0,c_1,...c_{n-1}) \in \{0,1,2,...,q-1\}^n} (c_0 + c_1 + ... + c_{n-1})^k \end{aligned}$$

Désignons par $R(k)$ la relation : $\forall n \in \mathbb{N} \ : T_k(n) = Q_k(n)$

Prouvons par récurrence sur k que l'on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ R(k)$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $T_0(n) = 1 = Q_0(n)$.

La relation $R(0)$ est donc vraie.

Supposons que pour un entier $k \geq 1$, $R(j)$ soit vraie pout tout entier j tel que : $0 \leq j \leq k-1$, alors pout tout entier $n \geq 0$, on a

$$T_k(n+1) = \frac{1}{q^{n+1}} \sum_{(c_0,c_1,...c_n) \in \{0,1,2,...,q-1\}^{n+1}} (c_0 + c_1 + ... + c_n)^k$$

Pour tout $(c_0, c_1, ..., c_n) \in \{0, 1, 2, ..., q-1\}^{n+1}$,on a :

$$(c_0 + c_1 + ... + c_n)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (c_0 + c_1 + ... + c_{n-1})^j \, c_n^{k-j}$$

On en déduit

$$T_k(n+1) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_{k-j} T_j(n)$$

Or par hypothèse de récurrence $T_j(n) = Q_j(n)$ pour $0 \leq j \leq k-1$; on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} T_k(n+1) - T_k(n) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_{k-j} Q_j(n) \\ &= Q_k(n+1) - Q_k(n) \end{aligned}$$

On en conclut que pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} T_k(n) &= \sum_{m=0}^{n-1} T_k(m+1) - T_k(m) \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} Q_k(m+1) - Q_k(m) \\ &= Q_k(n) \end{aligned}$$

La relation $R(k)$ est alors vraie. Elle l'est donc aussi vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

6.4 Expression explicite de $Q_n(x)$

Théorème 71 *La suite de polynôme $(Q_n(x))_{n\geq 0}$ définie par l'égalité :*

$$\sum_{n\geq 0} Q_n(x) \frac{z^n}{n!} = \left(\frac{e^{qz}-1}{q(e^z-1)}\right)^x$$

vérifie les relations de récurrence :

$Q_0(x) = 1$ et $Q_n(x) = \dfrac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} c_{n-k} Q_k(x)$ pour $n \geq 1$, où pour tout $n \geq 0$,

$$c_n := (-1)^n (q^n - 1) B_n,$$

B_n étant le $n^{ième}$ nombre de Bernoulli

Preuve. Avec $S(z) = \dfrac{e^{qz}-1}{q(e^z-1)}$, on a:

$$\begin{aligned} zS^{-1}(z) S'(z) &= \frac{(-qz)}{(e^{-qz}-1)} - \frac{(-z)}{(e^{-z}-1)} \\ &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n (q^n - 1) \tfrac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 56 à $S(z)$ pour obtenir le résultat.

En appliquant le lemme 32, on déduit de ce théorème la représentation explicite suivante de $Q_n(x)$ à l'aide d'un déterminant d'ordre n. □

Théorème 72 *Pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$Q_n(x) = \det(q_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$$

avec

$$q_{ij} = \begin{cases} \frac{x}{j}\binom{j}{i-1} c_{j-i+1} & si\ 1 \leq i \leq j \\ -1 & si\ i = j+1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

et $c_n = (-1)^n (q^n - 1) B_n$ *pour* $n \geq 0$.

Autrement dit

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} \frac{x}{1}\binom{1}{0} c_1 & \frac{x}{2}\binom{2}{0} c_2 & \cdots & \frac{x}{n}\binom{n}{0} c_n \\ -1 & \frac{x}{2}\binom{2}{0} c_1 & \cdots & \frac{x}{n}\binom{n}{1} c_{n-1} \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \frac{x}{n}\binom{n}{n-1} c_1 \end{vmatrix}$$

On détermine ainsi les premières expressions des polynômes $Q_n(x)$

$$Q_0(x) = 1$$

$$Q_1(x) = \left(\frac{q-1}{2}\right) x$$

$$Q_2(x) = \left(\frac{q-1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{q^2-1}{12}\right) x$$

$$Q_3(x) = \left(\frac{q-1}{2}\right)^3 x^3 + \frac{(q-1)^2 (q+1)}{8} x^2$$

$$Q_4(x) = \left(\frac{q-1}{2}\right)^4 x^4 + \frac{(q-1)^3 (q+1)}{8} x^3 + \frac{(q^2-1)^2}{48} x^2 - \left(\frac{q^4-1}{120}\right) x$$

$$Q_5(x) = \left(\frac{q-1}{2}\right)^5 x^5 + 5\frac{(q-1)^4 (q+1)}{48} x^4 + \frac{(q-1)^3 (q+1)^2}{96} x^3 - \frac{(q-1)(q^4-1)}{48} x^2$$

Remarquons que pour $j \geq 1$, on a

$$c_{2j+1} = (-1)^{2j+1} \left(q^{2j+1} - 1\right) B_{2j+1} = 0$$

Le corollaire 58 page 88 permet d'affirmer que $Q_n(x)$ est divisible par x pour tout entier $n \geq 1$ et par x^2 pour tout entier n, impair supérieur ou égal à 3.

De plus, en définissant la suite de polynômes $(V_n(x))_{n \geq 2}$ par

$$V_n(x) = \frac{Q_n(x)}{n! c_1^n x^{1+n \bmod 2}}$$

On sait qu'on a alors, pour tout entier $n \geq 2$:

$$V_{2n+1}(x) - V_{2n}(x) \equiv 0 \bmod x^2 \mathbb{Q}[x].$$

Par de simples calculs, on vérifie qu'on a effectivement :

– $V_2(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{q+1}{6(q-1)}$

$V_3(x) = \dfrac{x}{6} + \dfrac{q+1}{6(q-1)}$

$V_4(x) = \dfrac{x^3}{24} + \dfrac{q+1}{12(q-1)}x^2 + \dfrac{(q+1)^2}{72(q-1)^2}x - \dfrac{(q+1)(q^2+1)}{180(q-1)^3}$

$V_5(x) = \dfrac{x^3}{120} + \dfrac{q+1}{36(q-1)}x^2 + \dfrac{(q+1)^2}{72(q-1)^2}x - \dfrac{(q+1)(q^2+1)}{180(q-1)^3}.$

On vérifie qu'on a bien :

$$V_5(x) - V_4(x) \equiv 0 \bmod x^2\mathbb{Q}[x].$$

$V_6(x) = \dfrac{x^5}{7120} + \dfrac{q+1}{144(q-1)}x^4 + \dfrac{(q+1)^2}{144(q-1)^2}x^3 -$

$\dfrac{(q+1)(13q^2-10q+13)}{1620(q-1)^3}x^2 - \dfrac{(q+1)^2(q^2+1)}{1080(q-1)^4}x + \dfrac{(q+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)}{2835(q-1)^5}$

$V_7(x) = \dfrac{x^5}{5040} + \dfrac{q+1}{720(q-1)}x^4 + \dfrac{(q+1)^2}{432(q-1)^2}x^3 -$

$\dfrac{(q+1)(q^2-10q+1)}{6480(q-1)^3}x^2 - \dfrac{(q+1)^2(q^2+1)}{1080(q-1)^4}x + \dfrac{(q+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)}{2835(q-1)^5}.$

On vérifie qu'on a bien :

$$V_7(x) - V_6(x) \equiv 0 \bmod x^2\mathbb{Q}[x].$$

$V_8(x) = \dfrac{x^7}{40320} + \dfrac{q+1}{4320(q-1)}x^6 + \dfrac{(q+1)^2}{1728(q-1)^2}x^5 + \dfrac{(q+1)(q^2+5q+1)}{6480(q-1)^3}x^4 -$

$\dfrac{(q+1)^2(67q^2-10q+67)}{155520(q-1)^4}x^3 + \dfrac{(q+1)(9q^4-14q^3+2q^2-14q+9)}{90720(q-1)^5}x^2 +$

$\dfrac{(q+1)^2(101q^4+122q^2+101)}{1360800(q-1)^6}x - \dfrac{(q+1)(q^2+1)(q^4+1)}{37800(q-1)^7}$

$V_9(x) = \dfrac{x^7}{362880} + \dfrac{q+1}{30240(q-1)}x^6 + \dfrac{(q+1)^2}{8640(q-1)^2}x^5 + \dfrac{(q+1)(8q^2+25q+8)}{97200(q-1)^3}x^4 -$

$\dfrac{(q+1)^2(19q^2-10q+19)}{155520(q-1)^4}x^3 - \dfrac{(q+1)(q^2+8q+1)(5q^2+2q+5)}{272160(q-1)^5}x^2 +$

$\dfrac{(q+1)^2(101q^4+122q^2+101)}{1360800(q-1)^6}x - \dfrac{(q+1)(q^2+1)(q^4+1)}{37800(q-1)^7}.$

On vérifie qu'on a bien :

$$V_9(x) - V_8(x) \equiv 0 \bmod x^2\mathbb{Q}[x].$$

Pour $q=10$, le théorème 62 permet de retrouver toutes les expressions de $\frac{1}{10^n}\sum_{m=0}^{10^n-1}\left(s_{10}(m)\right)^k$ obtenues par Cooper et Kennedy pour $1\leq k\leq 8$ (cf.page 83), De plus pour $k=9$, on obtient l'expression explicite "formule exacte" recherchée par Cooper et Kennedy :

$$Q_9(n)=\frac{38742089}{512}n^9+\frac{1420541793}{128}n^8+\frac{12153524229}{256}n^7+$$
$$-\frac{7215728751}{160}n^6-\frac{30325460319}{512}n^5-\frac{2286016425}{128}n^4+$$
$$\frac{30058716303}{640}n^3-\frac{2699999973}{160}n^2$$

6.5 Identitée remarquable vérifiée par les polynômes $Q_n(x)$

Les polynômes $Q_n(x)$ ont des propriétés analogues aux polynômes de Stirling $\sigma_n(x)$. Ainsi le théorème suivant est analogue au théorème 44.

Théorème 73 *Pour tout entier $n\geq 0$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k(n+k+1)\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}\left(\frac{1}{q-1}\right)^{n+k}Q_{n+k}(x)=0$$

En posant pour tout entier $n\geq 0$:

$$Q_n^*(x)=\left(\frac{2}{q-1}\right)^n Q_n(x)$$

$Q_n^*(x)$ est un polynôme unitaire et on a le corollaire suivant analogue au corollaire 49 concernant les polynômes de Stirling

Corollaire 74 *Pour tout entier $n\geq 0$, on a*

$$Q_{2n+1}^*(x)=\sum_{k=1}^{n+1}c(n,k)\,x^kQ_{2n+1-k}^*(x)$$

avec $c(n,k)=(-2)^{k-1}\frac{2n+2-k}{n+1}\binom{n+1}{k}$

Démonstation du Théorème. Posons :

$$S(z)=\frac{e^{qz}-1}{q(e^z-1)}$$

On a alors :

$$S(z) = e^{\lambda z} S(-z), \text{ avec } \lambda = q - 1$$

La proposition 45 page 51 fournit alors la relation :

$$\lambda^{-n} Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{n-k} \binom{n}{k} \lambda^{-k} Q_k(x)$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition 48 page 52 à la suite $\left(\lambda^{-n} Q_n(x)\right)_{n\geq 0}$ pour obtenir le résultat □

Ainsi, on a :

$Q_0^*(x) = 1$

$Q_1^*(x) = x$

$Q_2^*(x) = x^2 + \dfrac{q+1}{3(q-1)} x$

$Q_3^*(x) = x^3 + \left(\dfrac{q+1}{q-1}\right) x^2$

$Q_4^*(x) = x^4 + 2\left(\dfrac{q+1}{q-1}\right) x^3 + \dfrac{(q+1)^2}{3(q-1)^2} x^2 - \dfrac{2(q+1)(q^2+1)}{15(q-1)^3} x$

et les relations

$Q_1^* = xQ_0^*$

$Q_3^* = 3xQ_2^* - 2x^2 Q_1$

$Q_5^* = 5xQ_4^* - 8x^2 Q_3 + 4x^3 Q_2$

$Q_7^* = 7xQ_6^* - 18x^2 Q_5 + 20x^3 Q_4 - 8x^4 Q_3$

6.6 Expression de $Q_n(x)$ à l'aide des polynômes de Stirling

Le théorème suivant montre que $Q_n(x)$ s'exprime à l'aide de $\sigma_0(x) = 1/x$ et des polynômes de Stirling $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \cdots, \sigma_n(x)$.

Théorème 75 *Pour tout entier $n \geq 0$, on a :*

$$Q_n(x) = (-1)^{n+1} n! x^2 \sum_{i+j=n} q^j \sigma_i(x) \sigma_j(-x)$$

la sommation étant étendue à tous les couples $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i + j = n$

Preuve. La relation suivante

$$\left(\frac{e^{-qz}-1}{q\left(e^{-z}-1\right)}\right)^{x}=\left(\frac{ze^{z}}{e^{z}-1}\right)^{x}\left(\frac{qze^{qz}}{e^{qz}-1}\right)^{-x}$$

se traduit par l'égalité

$$\sum_{n\geq 0}\frac{Q_{n}\left(x\right)}{n!}\left(-1\right)^{n}z^{n}=\left(\sum_{i\geq 0}x\sigma_{i}\left(x\right)z^{i}\right)\left(\sum_{j\geq 0}-x\sigma_{j}\left(-x\right)q^{j}z^{j}\right)$$

en identifiant les coefficients de z^n dans chaque membre, de cette égalité, on obtient le résultat. □

6.7 Amélioration et Généralisation du théorème de Cooper et Kennedy

On a :

$$\frac{1}{q^{n}}\sum_{m=0}^{q^{n}-1}\left(s_{q}\left(m\right)\right)^{k}=Q_{k}\left(n\right)$$

Le corollaire 71 de la page 73 permet de préciser les coefficients du polynôme Q_k. On obtient ainsi le théorème suivant qui améliore en précision et généralise le théorème de Cooper et Kennedy.

Théorème 76 *Pour tout entier $k \geq 0$, on a :*

$$\frac{1}{q^{n}}\sum_{m=0}^{q^{n}-1}\left(s_{q}\left(m\right)\right)^{k}=\left(\frac{q-1}{2}\right)^{k}n^{k}\left(1+\frac{A}{n}+\frac{B}{n^{2}}+\frac{C}{n^{3}}+\frac{D}{n^{4}}+O\left(\frac{1}{n^{5}}\right)\right)$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{3}\binom{k}{2}\frac{q+1}{q-1}\\
B &= \frac{1}{3}\binom{k}{4}\left(\frac{q+1}{q-1}\right)^{2}\\
C &= \frac{1}{270}\binom{k}{4}\frac{q+1}{\left(q-1\right)^{3}}\left(\left(5k^{2}-45k+64\right)\left(q+1\right)^{2}+72q\right)\\
D &= \frac{1}{216}\binom{k}{6}\frac{\left(q+1\right)^{2}}{\left(q-1\right)^{4}}\left(\left(5k^{2}-65k+66\right)\left(q+1\right)^{2}+288q\right)
\end{aligned}$$

Pour $q = 10$, on a le

Corollaire 77 *Pour tout entier $k \geq 0$, on a :*

$$\frac{1}{10^n}\sum_{m=0}^{10^n-1}\left(s_{10}\left(m\right)\right)^k = \left(\frac{9}{2}\right)^k n^k\left(1+\frac{11}{27}\binom{k}{2}\frac{1}{n}+\frac{121}{243}\binom{k}{4}\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

Conclusion

Nous avons mis en évidence, aux chapitres un et deux, de nombreux exemples de fonctions arithmétiques faisant intervenir des familles de polynômes liés par des relations de récurrences. La détermination des termes constants de ces polynômes reste cependant, comme dans le cas particulier du développement asymptotique du $n^{ième}$ nombre premier un problème ouvert, mais sur lequel on peut désormais jeter un regard nouveau.

Les formules asymptotiques obtenues au chapitre trois pourraient être explicitées et donner lieu à d'intéressantes approximations explicites.

Enfin le dernier théorème du chapitre six pourrait permettre de mieux étudier la conjecture de Kennedy et Cooper.

Bibliographie

[1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. Handbook of Mathematical Functions : with Formulas, Graphs and Mathematical tables, Dover Publications, 1972

[2] M. Balazard, Quelques exemples des suites unimodales en théorie des nombres, Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2) 2 (1991), n°.1,13-60.

[3] Bellman and Shapiro, A problem in additive number theory, Ann. of math. (2), 49(1948), pp. 333-340.

[4] H. Belbachir, F. Bencherif, L. Szalay. Unimodality of certain sequences connected with binomial coefficient. J. Integer Seq. 10 , no. 2, Article 07.2. ,9 pp..(2007)

[5] H. Belbachir, F. Bencherif, Unimodality of certain sequences associated to Pell numbers, to appear in Ars Combinatoria.(2007).

[6] H. Belbachir, F. Bencherif, Développement asymptotique de la somme des inverses d'une fonction arithmétique.Accepté pour publication, (Congrés International, Algèbre Théorie des nombres et leurs Applications mai2006 Oujda).

[7] H. Belbachir, F. Bencherif, On some properties of bivariate Fibonacci and Lucas polynomials, preprint(2007).

[8] H. Belbachir, F. Bencherif, On some properties of Chebychev polynomials, à paraître dans Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applications. Vol 28 n°2 (2008) .

[9] H. Belbachir, F. Bencherif, Sums of products of generalized Fibonacci and Lucas numbers, preprint (2007).

[10] H. Belbachir,. F. Bencherif, On a sum involving powers of the prime counting function. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 17 (2006), 45—51

[11] H. Belbachir, F.Bencherif, . Linear recurrent sequences and powers of a square matrix. Integers 6 (2006), A12, 17 pp.

[12] F. Bencherif ; G.Robin, . Sur l'itéré de sin x (French) [On the iteration of sin x] Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 56(70) (1994), 41–53

[13] F. Bencherif ; sur la permanence de relations de récurrence dans certains développements asymptotiques , preprint (2003)

[14] B. Benzaghou, D.Barsky, Extension of classical sequences to negative integers. Discuss.math. Gen. Algebra and appl.25 (2006) 75-83

[15] Carl m. Bender, D.C. Brody, B. K. Meister Bernoulli-like polynomials associated with stirling numbers – ar XIV : math-ph/0509008 v1 5sep 2005

[16] Bruno, Salvy, Fast computation of some asymptotic functional inverses, J. Symbolic Computation, Vol. 17,(1994) 227-236.

[17] L. E. Bush. An asymptotic formula for the average sum of the digits of integers, Amer. Math. Monthly, 47(1940),154-156.

[18] Carlitz, Leonard. Some numbers related to the stirling numbers of the first and second king. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Math. Fiz. N°544-N°%76 (1976) 49-55

[19] E. Cesaro. "Sur une formule empirique de M. Perrouchine", comptes rendus hghebdo. Des séances de l'académie des sciences, Vol. CXIX, (1895) pp. 848-849.

[20] J.-L. Chabert,Integer-valued polynomials on prime numbers and logarithm power expansion, European Journal of Combinatorics, t. 28 (2007), 754-761.

[21] P. Cheo & S. Yien, A problem on the K-adic Representation of Positive Integers, Acta. Math. Sinica 5 (1955), 433-438.

[22] M. Cipolla, La determinazione assintotica dell n-imo numero primo, Matematiche Napoli, Vol 3, (1902) pp. 132-166.

[23] L. Comtet, Inversion de $y^\alpha \exp y$ et $y \log^\alpha y$ au moyen des nombres de stirling, C.R. Acad. Sci. Paris, 279(1970).

[24] Louis Comtet, Analyse combinatoire, tomes1 et 2, collection Sup "Le Mathématicien", Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

[25] C.Cooper R.E. Kennedy A generalisation of a Theorem by Cheo and Yien concerning Digitals Sums. Internat. J. Math, &. Math.Sci. Vol. 9 N°. 4 (1986)817-820.

[26] C. Cooper & R. E. Kennedy, Digital Sum Sums, The Journal of Institute of Mathematics & Computer Sciences 5.1 (1992), 45-49.

[27] C. Cooper , R. E. Kennedy and M.Renberg, On certain sums of functions of base b expansions, Fibonacci Quart.36 (1998), n° 5, 407-415.

[28] F. Costabile – F. Dell'Accio-M.I. Gualtieri. A new approach to Bernoulli polynomials. Rendiconti di Matematica, Serie VII Volume 26, Roma (2006), 1-12.

[29] N.G. De Bruijn, Asymptotic Methods in Analysis, North Holland, Amsterdam,1961.

[30] J.-M. De Koninck and A. Ivić, Topics in Arithmetical Functions, notas de Matematica , North Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 43 (1980).

[31] H.G. Diamond, C. Pomerance and L. Rubel. Sets of with an Entire Function is Determined by its Range. Mathematische Zeitschrift 176. Heft 3 (Springer-Verlag 1981).

[32] J. Dieudonné, Calcul infinitésimal, Hermann, Paris, 1968.

[33] Drazin & Griffith. On the decimal representation of integers, Proc. Cambridge Phil. Soc. (4), 48 (1952), pp. 555-565.

[34] M. Drmota, J. Gajdosik. The distribution of the sum-of-digit function. Journal de theorie des nombres de Bordeaux, tome 10, n^{o}1 (1998).

[35] P. Dusart, Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers. Thèse de Doctorat de l'Université de Limoges (1998).

[36] W. L. Ellison & M. Mendès France, "Les nombres premiers", Hermann, Paris (1975).

[37] E.Fouvry, C.Mauduit, Sur les entiers dont la somme des chiffres est moyenne,Journal of number Fteory 114(2005) 135-152

[38] J.W. Glaisher : Congruences relating to the sums of products of the first n numbers and to other sums of products (The Quaterly Journal of Pure and Applied Mathematics, vol 31, 1900, p. 1-35).

[39] J.W. Glaisher : On the residues of the sums of products of the first p-1numbers, and thir powers, to modulus p^2 or p^3 (The Quaterly Journal of Pure and Applied Mathematics, vol 31, 1900, p. 321-353).

[40] R.L. Graham, D.E. Knuth, and O.Patashnik, Concrete Mathematics, Addison-Wesley, Pubishing Company. Inc, 1994

[41] J.M.Hammersley,The sums of products of the natural numbers, Proceedings of the London Mathematical Society, third series, Vol.1,1951,pp.435-452.

[42] Hubert Delange, Sur la fonction sommatoire de la fonction " Somme des chiffres", L'enseignement mathématique, Vol.21 (1975).

[43] A.Ivić, On a sum involving the prime counting function $\pi(x)$, Univ.Beograd.Publ Elektrotehn. Fak Ser. Mat. 13 (2002), 85-88.

[44] Rafael Jakimczuk. Asymtotic Formulae, Journal of Inequalities in Pure and AppliedMathematics. Volume 5,Issue3, Article 62, 2004.

[45] Ch.Jordan, Calculus of finite Differences (second edition,New York,1952,652p).

[46] Ch.Jordan, On Stirling's Numbers (The Tôhoku Mathematical Journal, Vol.37, 1933.p254-278).

[47] Kaneko Masanobu, A recurrence formula for the Bernoulli numbers, Proc.Japan Acad.Ser.A Math.Sci.71 (1995), n°8,192-193.

[48] Chr.Karanicoloff, Sur une représentation des nombres de Stirling dans une forme explicite, Publications de la Faculté d'électronique de l'Université à Belgrade n°67(1961).

[49] R.E. Kennedy ,C.Cooper, An extension of a Theorem by Cheo and Yien concerning Digitals Sums. Fibonacci Quarterly 29.2(1991),145-49.

[50] R.E. Kennedy ,C.Cooper, Sums of powers of digital sums.The Fibonacci Quartely 31.2(1993), 341-345.

[51] M. Lorenz, Orders of finite groups of matrices, draft, Jun 27 200

[52] E.Lucas, Théorie des nombres, nouveau triage, Librairie Scientifique et technique Albert Blanchard, Paris,1958.

[53] J-P.Massias, Ordre maximum d' un élément du groupe symétrique et applications, Thèse de Doctorat (1984) à l'Université de Limoges.

[54] J-P.Massias, J.L. Nicolas et G.Robin, Evaluation asymptotique de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique, Acta Arith.L(1988),p221-242.

[55] Gabriel Mincu. An asymtotic expansion, Journal of Inequalities in Pure and AppliedMathematics. Volume 4,Issue2, Article 30, 2003.

[56] H. Minkowski, Zur Theorie der quadratischen Formen, J. Reine Ange 101 (1887) ; 196-202. (=Ges. Abh., pp. 212-218, Chelsea, New Y 1967.)

[57] Mirsky, A theorem on representations of integers in the Scale of r, Scripta Math, 15 (1949),pp11-12.

[58] D.S.Mitrinovic, Sur les nombres de Stirling de première espèce et les polynômes de Stirling. Publications de la faculté d'électronique de l'Université à Belgrade n°23 (1959).

[59] D.S.Mitrinovic, Sur deux questions relatives aux nombres de Stirling nombres de Stirling. Publications de la faculté d'électronique de l'Université à Belgrade n°133 (1965).

[60] D.S.Mitrinovic-D.Dokovic, Sur une relation de récurrence concernant les nombres de Stirling, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, de Paris, t.250, 1960, p.2110-2111.

[61] D.S.Mitrinovic-R.S. Mitrinovic, Sur les nombres de Stirling et les nombres de Bernoulli d'ordre supérieur, PubiKacije EleKtotehnicKog faculteta Beograd, serija :Matematika ; fizika,n°43,(1960).

[62] D.S.Mitrinovic-R.S. Mitrinovic, Tableaux qui fournissent des polynômes de Stirling. Publications de la faculté d'électronique de l'Université à Belgrade n°34 (1960).

[63] D.S.Mitrinovic-R.S. Mitrinovic, Tableaux d' une classe de nombres reliés aux nombres de Stirling. Publications de la faculté d'électronique de l'Université à Belgrade n°132 (1965).

[64] Moser and M.Wyman, Asymptotic development of the Stirling numbers of the first kind. J.London.Math.Soc (33) 1958 p133-146

[65] Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion (Leipzig,1906,326S).

[66] L.Panaitopol, A formula for $\pi(x)$, applied to a result of Koninck-Ivić Nieuw Archief Woor Wiskunde5/1(2000), 55-56.

[67] Panayiotis Vlamos, Properties of the function f(x)=$x/\pi(x)$ (2000) Hindawi Publishing Corp.

[68] G.Robin, Développement asymptotique du n-ième itéré d'une function, CALSYF, (1984), 83-86.

[69] G.Robin, Permanence de relations de récurrence dans certains développemnts asymptotiques, Publ. Inst. Math. (Beograd) 43 (57) (1988), 17-25.

[70] S. Roman, The formula of Faà di Bruno, Amer. Math. Monthly 87 (1980) 805-09.

[71] I. Schur, Ueber eine Klasse von endlischen Gruppen Linearer Substi Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (1905), 77-91. (=Ges. Abh., pp. 128-142, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973).

[72] N.J.A. Sloane and S. Plouffe, The Encydopedia of Integer Sequences, Academic Press, San Diego, 1995.

[73] G. Tenenbaum, "Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres", Institut Elie Cartan (1990).

[74] Trollope. An explicit expression for binary digital sums, Math. MAg., 41 (1968), pp 21-25.