

N° D'ORDRE : 31/2009-M/MT

Republique Algerienne Democratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène  
Faculté des Mathématiques



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle : Mathématique de Gestion

Par : FERDJALLAH Baya

THÈME

COLORATIONS DOMINANTES ET HYPERCUBES

Soutenu le 24/06/2009, devant le jury composé de :

<i>M<sup>r</sup></i> .	SEMRI Ahmed	Maître de conférences	U.S.T.H.B.	Président.
<i>M<sup>r</sup></i> .	BERRACHEDI Abdelhafid	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
<i>M<sup>me</sup></i> .	BOUCHEMAKH Isma	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur.
<i>M<sup>elle</sup></i> .	AFFIF CHAOUCHE Fatma	Maître de conférences.	E.S.C	Invitée.
<i>M<sup>elle</sup></i> .	MECHEBBEK Meriem	Maître Assistante	U.S.T.H.B.	Invitée.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Rappel sur les graphes</b>	<b>6</b>
1.1 Définitions et notations . . . . .	6
1.1.1 Notion de distance et intervalle . . . . .	8
1.1.2 Opérations sur les graphes . . . . .	10
1.1.3 Homomorphisme - Automorphisme - isomorphisme . . . . .	13
1.1.4 Quelques classes de graphes . . . . .	13
1.1.5 Quelques invariants de graphes . . . . .	19
1.1.6 Algorithme et complexité . . . . .	20
<b>2 La coloration dominante</b>	<b>22</b>
2.1 Introduction . . . . .	22
2.2 Propriétés élémentaires de $\varphi(G)$ . . . . .	23
2.3 Quelques bornes de $\varphi(G)$ . . . . .	26
2.4 Le nombre b-chromatique de quelques graphes particuliers . . . . .	27
2.5 La b-coloration de quelques produits de graphes . . . . .	30
2.6 Le nombre b-chromatique de certains sous graphes . . . . .	36
<b>3 La b-coloration du produit cartésien de graphe <math>K_m</math> avec quelques graphes</b>	<b>39</b>
3.1 Introduction . . . . .	39
3.2 Le nombre b-chromatique du graphe $K_m \square K_{1,2,2}$ . . . . .	40
3.3 Le nombre b-chromatique du graphe $K_m \square R_n$ . . . . .	45

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	2
3.4 La b-coloration et l'hypercube . . . . .	61
3.5 Conclusion . . . . .	64
<b>4 Les graphes b-parfaits</b>	<b>65</b>
4.1 introduction . . . . .	65
4.2 Quelques résultats sur les graphes b-parfaits . . . . .	66
4.3 Conjectures sur les graphes b-parfaits . . . . .	67
4.4 La b-perfection et quelques opérations sur les graphes . . . . .	69
<b>Conclusion générale</b>	<b>71</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>72</b>

# Introduction

La théorie des graphes ouvre un grand champ de modélisation conduisant à des solutions efficaces pour de nombreux problèmes, en les ramenant à des configurations, qui se dessinent simplement à l'aide de points et de liaisons entre ces points.

Historiquement, le problème de la théorie des graphes remonte au problème dit "des ponts de Königsberg" en posant la question : est-il possible, en partant d'une zone de la ville, de retourner dans la même zone en traversant chacun de ses sept ponts une fois et une seule ? C'est en 1736 que Leonhard Euler a prouvé que le problème n'admet pas de solution. En 1822, le mot graphe est introduit pour la première fois par l'Anglais J.J.Sylvester ; et c'est en 1936 que paraît le premier livre sur la théorie des graphes, écrit par D.König. Depuis les années 1930, et de plus en plus au cours de ces dernières décennies, la théorie des graphes connaît un assez grand engouement dans diverses disciplines ; telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales, l'informatique théorique, la géographie, l'architecture ...

Le problème de coloration des graphes est parmi les plus étudiés en théorie des graphes. Il a débuté avec la conjecture des quatre couleurs, qui affirme que quatre couleurs suffisent pour colorier n'importe quelle carte plane, telle que les pays ayant une frontière commune soient de couleurs différentes. Il a fallu plus d'un siècle pour confirmer cette conjecture.

La coloration s'est aussi développée avec les travaux de Claude Berge[5] sur les graphes parfaits. Son ouvrage (Théorie des graphes et ses applications) publié en 1958 a marqué sans doute l'avènement de la première évolution de la théorie des graphes, en rassemblant de nombreux résultats sur la coloration des sommets ainsi que les arêtes.

Le nombre chromatique est un paramètre de coloration des sommets défini depuis les années 70. Il s'agit de déterminer combien de couleurs différentes suffisent pour colorier entièrement un graphe, de telle façon qu'aucun sommet du graphe n'ait la même couleur que ses sommets voisins.

En 1999, Irving et Manlove [11] ont introduit un nouveau paramètre de coloration appelé "le nombre b-chromatique". La recherche du nombre b-chromatique d'un graphe nous amène à la recherche d'une coloration dominante maximale dans ce graphe ; où cette dernière est une coloration propre telle que pour chaque couleur utilisée, il existe un sommet de cette couleur pour lequel toutes les autres couleurs apparaissent dans le voisinage. Elle est aussi appelée b-coloration.

Ce manuscrit est partitionné en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les notions élémentaires sur la théorie des graphes et quelques concepts de base qui seront utiles au cours de ce mémoire.

Le second chapitre regroupe les différentes études qui ont été faites sur la b-coloration.

En premier lieu, nous introduisons le vocabulaire de base concernant ce paramètre de coloration, et nous rappelons les principaux résultats obtenus. Ensuite nous présentons le nombre b-chromatique de quelques graphes particuliers et produit de graphes.

Ainsi que des bornes inférieures et supérieures du nombre b-chromatique de certaines classes de graphes réguliers et amplements réguliers. Nous allons aussi s'intéresser à la relation entre le nombre b-chromatique de certains graphes qui admettent des mailles de taille donnée et celui de leurs sous graphes induits.

Le but du troisième chapitre est de déterminer le nombre b-chromatique du graphe défini comme produit cartésien d'un graphe complet d'ordre  $m$ ,  $K_m$  et le graphe roue à  $n$  rayons. A la fin de ce chapitre, nous démontrons qu'un hypercube  $Q_n$ ,  $n \geq 5$  admet un système stable dominant. A partir de ce résultat nous donnons des nouvelles bornes inférieures du nombre b-chromatique de produit cartésien de l'hypercube et de quelques graphes particuliers.

Dans le dernier chapitre, nous présentons la classe des graphes b-parfaits. Elle a été récemment définie à partir des graphes parfaits par C.T.Hoàng et M.Kouider [9]. De même nous rappelons la notion de graphe b-imparfait minimal. Nous nous intéressons aussi aux propriétés structurelles des deux classes, en donnant un inventaire des principaux résultats obtenus jusqu'ici. Ensuite, nous énonçons les deux célèbres conjectures de C. Hoàng, Clàudia Linhares Sales et Frédéric Maffray [10] sur les graphes b-parfaits. A la fin de ce dernier chapitre, nous montrerons que le joint de deux graphes b-parfait est un graphe b-parfait.

Une conclusion générale termine ce manuscrit. Les références bibliographiques sont nombreuses, on en a mentionné une bonne une partie.

# Chapitre 1

## Rappel sur les graphes

### 1.1 Définitions et notations

Dans ce chapitre nous rappelons les concepts de base sur la théorie des graphes, nécessaires pour notre étude. La plupart des définitions et notations sont dues à C. Berg[5].

Un graphe  $G$  est un couple formé de deux ensembles : un ensemble fini, non vide  $V$  dont les éléments sont appelés sommets et un ensemble  $E$  de paires de sommets distincts dont les éléments sont appelés arêtes. On notera  $G = (V, E)$ .

On désigne par  $e = (u, v) \in E$ , notée aussi  $uv$ , l'arête  $e$  de  $G$  d'extrémités  $u$  et  $v$ . On dit que  $e$  joint  $u$  et  $v$ , ou que  $e$  passe par  $u$  et  $v$ . Les sommets  $u$  et  $v$  sont adjacents, ou voisins dans  $G$ .

Le nombre de sommets du graphe  $G$  est appelé ordre de  $G$ . Sa taille est le nombre de ses arêtes. Le degré d'un sommet  $u$ , noté  $d(u)$  est le nombre d'arêtes incidentes à  $u$ . Lorsque  $d(u) = 0$ , on dit que le sommet  $u$  est isolé et quand  $d(u) = 1$ , il est dit pendant.

On a :

$$\delta(G) = \text{Min} \{ d(u) ; u \in V(G) \}, \text{ degré minimum de } G.$$

$$\Delta(G) = \text{Max} \{ d(u) ; u \in V(G) \}, \text{ degré maximum de } G.$$

Un graphe est représenté dans le plan par une figure géométrique où les sommets sont représentés par des points et une arête  $uv$  est représentée par une ligne joignant le point représentant le sommet  $u$  à celui représentant le sommet  $v$ .

**Chaîne** : Une chaîne de longueur  $q$  est une séquence de  $q + 1$  sommets de  $G$  notée  $P = (u_1, u_2, \dots, u_{q+1})$ , telle que chaque sommet  $u_i$ ,  $2 \leq i \leq q$  de la séquence est adjacent aux sommets  $u_{i-1}$  et  $u_{i+1}$ .

Une chaîne qui ne rencontre pas deux fois le même sommet est dite élémentaire.

Une chaîne qui ne rencontre pas deux fois la même arête est dite simple.

**Cycle** : Un cycle de longueur  $q$  ou un  $q$ -cycle dans un graphe  $G$  est une séquence de sommets distincts  $C = (u_1, u_2, \dots, u_q, u_1)$ , où toute paire de sommets consécutifs sont adjacents.

Une arête joignant deux sommets non consécutifs de  $C$  est appelée corde.

**Boucle** : Une boucle est une arête d'un graphe ayant pour extrémités le même sommet.

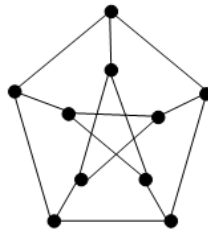
**Graphe connexe** : Un graphe est dit connexe si toute paire de sommets est reliée par une chaîne. Comme la relation de connexité est une relation d'équivalence, alors tout graphe non connexe peut se décomposer en composantes connexes.

**Graphe simple** : Un graphe  $G$  est dit simple, s'il est sans boucles et toute paire de sommets est reliée par au plus une arête.

On ne considérera dans ce travail que les graphes simples.

**Graphe régulier** : Un graphe  $G$  est dit régulier de degré  $k$ , si tous ses sommets sont de degré  $k$ .

Exemple : Le graphe de la figure 1.1 est 3-régulier

FIG. 1.1 –  $G$ 

**Grphe complémentaire :** Le graphe complémentaire de  $G$  noté  $\bar{G}$  est le graphe dont l'ensemble des sommets est  $V(G)$  et deux sommets distincts sont adjacents s'ils ne le sont pas dans  $G$ .

Exemple : Une chaîne de longueur 4 et son complémentaire (Fig 1.2).

FIG. 1.2 –  $P_4$  et  $\bar{P}_4$ 

**Sous-graphe :** Un graphe  $G' = (V', E')$  est un sous graphe du graphe  $G = (V, E)$  si  $V' \subseteq V$  et  $E' \subseteq E$

Si  $V' = V$ , le graphe  $G'$  est appelé **graphe partiel** de  $G$ .

$G'$  est dit **sous graphe induit** par  $V'$  si l'ensemble de ses arêtes  $E'$  est formé de toutes les arêtes de  $E$  ayant leurs extrémités dans  $V'$ .

### 1.1.1 Notion de distance et intervalle

Une **distance** entre deux sommets  $u$  et  $v$ ; notée  $d(u, v)$  est la longueur d'une plus courte  $(u, v)$ -chaîne.

**L'excentricité** d'un sommet  $u$ , notée  $e(u)$  est la longueur de la plus grande plus courte chaîne issue de  $u$ . i.e.

$$e(u) = \max_{v \in V(G)} d(u, v)$$

**Le diamètre** d'un graphe est la plus grande excentricité de ce graphe.

$$Diam(G) = \max_{u \in V(G)} e(u)$$

**Le rayon** d'un graphe  $G$  est la plus petite excentricité dans  $G$ .

$$R(G) = \min_{u \in V(G)} e(u)$$

**Un centre** de  $G$  est un sommet  $u$  tel que :  $e(u) = R(G)$ .

Un sommet  $v$  est dit **antipodique** du sommet  $u$  si  $d(u, v) = e(u)$ , il est dit **diamétral** si  $d(u, v) = Diam(G)$ .

**Décomposition en niveaux** : La décomposition en niveaux d'un graphe  $G$  à partir d'un sommet  $u$  est la partition de l'ensemble de sommets de  $G$  en  $N_0, N_1, \dots, N_p$  où  $p = e(u)$  et  $N_i = \{v \in V(G) / d(u, v) = i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ .

L'ensemble  $N_i(u)$  est appelé l'ensemble des sommets à distance  $i$  de  $u$ .

L'ensemble des voisins de  $u$  est  $N_1(u)$  ou  $N(u)$ .

Pour deux sommets  $u$  et  $v$  de  $G$ , l'intervalle  $I(u, v)$  est l'ensemble de tous les sommets appartenant à une plus courte  $(u, v)$ -chaîne.

### 1.1.2 Opérations sur les graphes

**Produit cartésien** : Soit  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  deux graphes. Le graphe noté  $G \square G'$ , appelé produit cartésien des deux graphes  $G$  et  $G'$ , et tel que  $V(G \square G') = V(G) \times V(G')$  et  $(u, u')$  est adjacent à  $(v, v')$  si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = v \quad \text{et} \quad u'v' \in E(G') \\ \quad \quad \quad \text{ou} \\ u = v' \quad \text{et} \quad uv \in E(G) \end{array} \right.$$

Exemple : Le graphe de la (Fig1.3 ) est le produit cartésien de la chaîne  $P_4$  et de graphe composé de 3 sommets adjacents deux à deux, il est noté  $K_3$ .

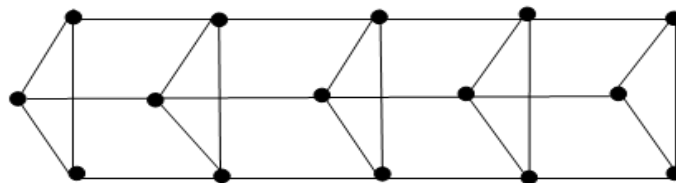
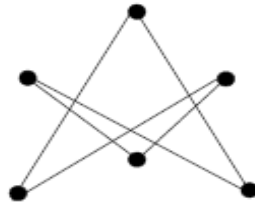


FIG. 1.3 –  $P_4 \square K_3$

**Produit catégoriel de deux graphes** : Le produit catégoriel de deux graphes  $G$  et  $G'$  est le graphe  $G \times G'$  dont l'ensemble des sommets est  $V(G) \times V(G')$  et deux sommets  $(u, u')$  et  $(v, v')$  sont adjacents si et seulement si :

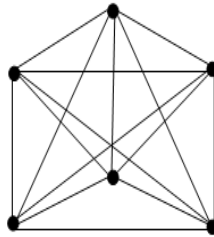
$$uv \in E(G) \quad \text{et} \quad u'v' \in E(G')$$

Exemple : Le graphe  $K_3 \times P_1$  (Fig1.4)

FIG. 1.4 –  $K_3 \times P_1$ 

**Produit total de deux graphes :** Le produit total de deux graphes  $G$  et  $G'$  est le graphe  $G \otimes G'$  défini par l'ensemble des sommets  $V(G) \times V(G')$  comme suit : deux couples de sommets  $(u, u')$  et  $(v, v')$  sont adjacents si et seulement si : soit  $u = v$  et  $u'v' \in E(G')$  ou  $u' = v'$  et  $uv \in E(G)$ , ou bien  $uv \in E(G)$  et  $u'v' \in E(G')$ .

Exemple : Le graphe  $K_3 \otimes P_1$  (Fig1.5)

FIG. 1.5 –  $K_3 \otimes P_1$ 

**Joint de deux graphes :** soient  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes disjoints. Le joint de  $G_1$  et  $G_2$  est le graphe obtenu par l'addition de tous les sommets entre  $G_1$  et  $G_2$ , on le note  $G_1 \cup G_2$

Exemple : Le graphe  $K_3 \cup K_3$  (Fig1.6)

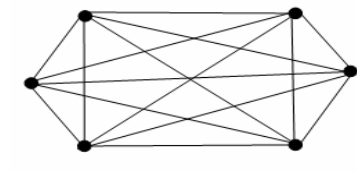


FIG. 1.6 –  $K_3 \cup K_3$

**L'union de graphes** : soient  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes disjoints. L'union de deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  est le graphe constitué de deux composantes  $G_1$  et  $G_2$ , on le note  $G_1 + G_2$ . Pour tout entier  $k \geq 2$ , le graphe noté  $kG$  est l'union de  $k$  copies de  $G$ .  
 Exemple : La figure 1.7 est le graphe  $K_3 + C_4$  et la figure 1.8 est le graphe  $3P_2$

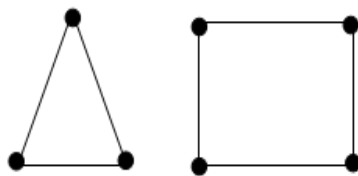


FIG. 1.7 –  $K_3 + C_4$

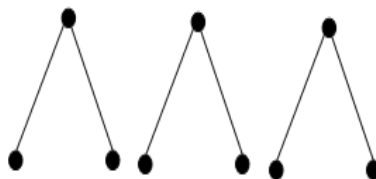


FIG. 1.8 –  $3P_2$

### 1.1.3 Homomorphisme - Automorphisme - isomorphisme

**Homomorphisme de graphes** : Un graphe  $G$  est Homomorphe au graphe  $G'$ , s'il existe une application  $f$  de  $V(G)$  dans  $V(G')$ , qui conserve l'adjacence. Autrement dit  $G$  est Homomorphe au graphe  $G'$  s'il existe une application  $f$  de  $V(G)$  dans  $V(G')$  telle que :

$$uv \in E(G), f(u)f(v) \in E(G').$$

**Isomorphisme de graphes** : Une bijection  $f$  de  $G$  dans  $G'$  est un isomorphisme si  $f$  et  $f^{-1}$  sont des homomorphismes.

**Automorphisme de graphes** : L'automorphisme est un isomorphisme de  $G$  dans lui-même.

### 1.1.4 Quelques classes de graphes

**Graphe complet** : Un graphe est dit complet si toute paire de sommets sont adjacents.

Un graphe complet à  $n$  sommets est noté  $K_n$ , ainsi chaque sommet de ce graphe est de degré  $n - 1$ .

Exemple : Le graphe  $K_4$  (Fig1.9).

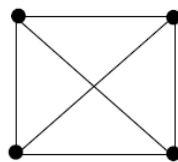


FIG. 1.9 –  $K_4$

**Graphe biparti** : Un graphe est dit biparti si l'ensemble de ses sommets  $V$  peut être partitionné en deux sous ensembles  $V_1$  et  $V_2$ , de sorte que les sommets du même

sous ensemble ne soient pas adjacents.

Exemple : Le graphe  $G$  de (Fig1.10) est biparti.

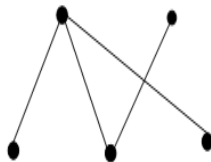


FIG. 1.10 –  $G$

**Graphe multiparti** :Un graphe  $G$  est dit multiparti si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en sous ensembles  $V_1, V_2, \dots, V_i \dots$ , de sorte que les sommets d'un même sous ensemble ne soient pas adjacents et  $\forall i \neq j$ , le sous graphe induit par l'ensemble des sommets  $V_i \cup V_j$  est connexe.

**Graphe biparti complet** : Un graphe biparti complet est un graphe biparti tel que tout sommet de  $V_1$  est adjacent à tous les sommets de  $V_2$ , si  $|V_1| = p$  et  $|V_2| = q$  on le note  $K_{p,q}$ .

Exemple : Le graphe biparti complet  $K_{3,2}$ (Fig 1.11).

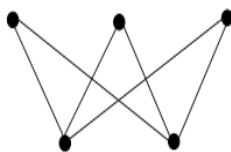
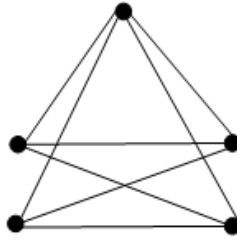


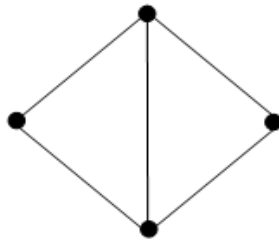
FIG. 1.11 –  $K_{3,2}$

**Graphe multiparti complet** :Un graphe  $G$  est dit multiparti complet si chaque sommet d'un sous ensemble  $V_i$  est adjacent à tous les sommets des autres sous ensembles.

Exemple(1) : Le graphe triparti complet  $K_{1,2,2}$  (Fig 1.12).

FIG. 1.12 –  $K_{1,2,2}$ 

Exemple(2) : Le graphe triparti complet  $K_{1,1,2}$  ou  $K_4 - e$  (Fig 1.13).

FIG. 1.13 –  $K_{1,1,2}$ 

**Graphe triangulé** : Un graphe est dit triangulé s'il ne possède pas de cycle induit de longueur supérieure ou égale à 4.

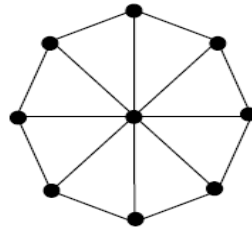
**Une clique** : est un sous graphe complet maximal.

**Un sommet simplicial** : un sommet est dit simplicial si son voisinage induit une clique.

**Une maille** : est la longueur d'un plus court cycle d'un graphe. Si le graphe ne contient pas de cycles, sa maille est infinie.

**Une roue** : La roue à  $n$  rayons noté  $R_n$  est le graphe constitué d'un cycle de longueur  $n$  et d'un sommet adjacent à tous les sommets du cycle.

Exemple : La roue à 8 rayons. (Fig 1.14).

FIG. 1.14 –  $R_8$ 

**Une chenille** : est un graphe, tel que la suppression des sommets pendants donne une chaîne.

Exemple : Le graphe de (Fig1.15) est une chenille.

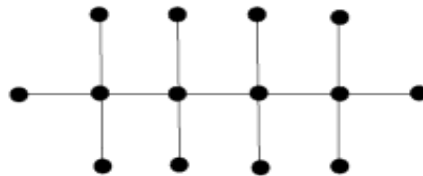


FIG. 1.15 –

**Graphe puissance** : Soit  $p$  un entier,  $p \geq 1$ . Le graphe  $p$ -puissance d'un graphe  $G$  est un graphe obtenu à partir de  $G$  en ajoutant une arête entre toute paire de sommets à distance inférieure ou égale à  $p$ .

**Graphe de Mulder** :  $G$  est dit graphe de Mulder ou  $(0, \lambda)$ -graphe, si toute paire de sommets admet 0 ou  $\lambda$  voisins communs.

Exemple : Le cycle  $C_4$  de (Fig1.16) est un  $(0, 2)$ -graphe.

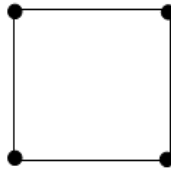
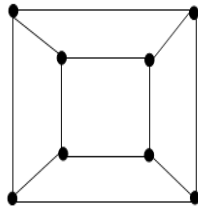


FIG. 1.16 –

**Le graphe de l'hypercube** : L'hypercube de dimension  $n$ , noté  $Q_n$  est le graphe dont l'ensemble de ses sommets est l'ensemble des  $n$ -uplets  $\{0, 1\}^n$ . Deux sommets sont adjacents si et seulement si ils se diffèrent exactement d'une seule composante.

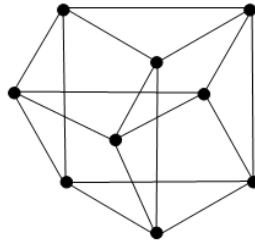
L'hypercube de dimension  $n$  est d'ordre  $2^n$  et de taille  $n2^{n-1}$ . Il est biparti et régulier.

Exemple : Le graphe  $Q_3$  (Fig1.17)

FIG. 1.17 –  $Q_3$ 

**Graphe de Hamming** : Le graphe de Hamming  $H(d, n)$  est le graphe obtenu par le produit cartésien de  $d$  graphes complets  $K_n$ . Le produit cartésien de plusieurs graphes complets  $K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_d}$  est appelé graphe de Hamming généralisé. Le cas particulier  $n_1 = n_2 \dots = n_d = 2$  est le graphe de l'hypercube  $Q_d$ .

Exemple : Le graphe  $H(2, 3)$  (Fig1.18)

FIG. 1.18 –  $H(2,3)$ 

**Grphe amplement régulier** : Un graphe amplement régulier  $G$  de paramètres  $(n, k, \lambda, \mu)$  est le graphe d'ordre  $n$ , régulier de degré  $k$  et vérifiant les deux conditions suivantes :

1. toute paire de sommets adjacents possèdent  $\lambda$  voisins communs.
2. toute paire de sommets à distance 2 possèdent  $\mu$  voisins communs.

Exemple :Le graphe de (Fig1.19) est amplement régulier de paramètres  $(6, 4, 2, 4)$ .

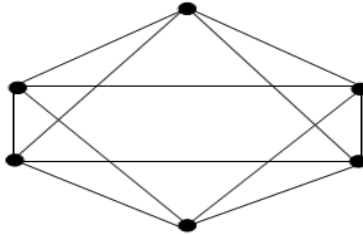


FIG. 1.19 –

**Grphe quasi-amplement régulier** : un graphe  $G$  est dit quasi-amplement régulier de paramètres  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$ , s'il est d'ordre  $n$ , régulier de degré  $k$ , une paire de sommets adjacents possèdent  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  voisins communs et toute paire de sommets à distance deux possèdent  $\mu_1$  ou  $\mu_2$  voisins communs.

### 1.1.5 Quelques invariants de graphes

**Un stable :** Un sous ensemble  $S$  de l'ensemble de sommets de  $G$  est dit stable s'il ne comprend que des sommets deux à deux non adjacents. Le cardinal maximum d'un stable de  $G$  est son nombre de stabilité. On le note  $\alpha(G)$ .

**Un couplage :** On appelle couplage dans un graphe  $G$ , un ensemble d'arêtes  $E_0 \subset E$  tel que les arêtes de  $E_0$  sont deux à deux non incidents.

Un couplage est dit parfait si tout sommet de  $G$  est une extrémité d'une arête de  $E_0$ .

**La notion de coloration :** Dans un graphe  $G = (V, E)$  une  $k$ -coloration est une affectation d'une couleur de l'ensemble des couleurs  $\{1, \dots, k\}$  à chaque sommet de  $G$  de telle sorte que, pour toute arête  $uv$  de  $G$ , les sommets  $u$  et  $v$  ont des couleurs différentes. Un graphe est dit  $k$ -coloriable s'il admet une  $k$ -coloration. Il s'agit d'une partition des sommets de  $G$  en  $k$  sous ensembles stables.

**Le nombre chromatique :** On appelle nombre chromatique d'un graphe  $G$ , noté  $\chi(G)$  le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorier les sommets de graphe  $G$ , de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

**Indice chromatique :** Soit  $G = (V, E)$  un graphe, on appelle indice chromatique  $q(G)$  de  $G$  le plus petit entier  $q$  qui a la propriété suivante : Il est possible, avec  $q$  couleurs de colorier les arêtes de  $G$ , de sorte que deux arêtes adjacentes ne soient pas de la même couleur.

**Taille d'une clique maximum :** la taille d'une clique maximum de  $G$  est la taille d'une clique maximale de  $G$ . On le note  $\omega(G)$ .

**Partition en cliques :** soit  $G = (V, E)$  un graphe, on appelle partition en cliques du graphe  $G$  la partition de l'ensemble  $V(G)$  en sous-ensembles  $C_1, C_2, \dots, C_k$  telle

que chaque sous graphe de  $G$  induit par  $C_i$  est une clique. On désigne par  $\theta(G)$  le nombre minimum de cliques qui partitionnent  $V$ .

**Graphe parfait** : Un graphe  $G$  est dit parfait si pour tout sous-graphe  $H$  induit de  $G$ , le nombre chromatique de  $H$  est égal à la taille d'une clique maximum de  $H$ .

D'autres paramètres et notions de coloration comme le nombre b-chromatique et la b-perfection seront définis dans les chapitres 2 et 4.

### 1.1.6 Algorithme et complexité

**Algorithme** : On désigne par le mot algorithme l'ensemble des opérations élémentaires effectuées pour résoudre un problème donné. Si ces opérations s'exécutent en séquence, on parle d'algorithme séquentiel. Si les opérations s'exécutent sur plusieurs processeurs en parallèle, on parle d'algorithme parallèle. Si les tâches s'exécutent sur un réseau de processeurs on parle d'algorithme réparti ou distribué.

**La complexité** : La complexité algorithmique est un moyen d'évaluation du coût d'un algorithme, elle mesure le nombre d'opérations élémentaires et le coût mémoire. Cela permet surtout de connaître le type de croissance en fonction de la taille des données. La théorie de la complexité algorithmique s'intéresse à l'estimation de l'efficacité des algorithmes.

Un problème de décision est dit dans la **Classe  $P$**  s'il peut être décidé par un algorithme déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.

**La classe  $NP$**  est la classe des problèmes Non-déterministes Polynomiaux, c'est à dire les problèmes de décision qui peuvent être résolus sur une machine non déterministe en temps polynomial. De façon équivalente, c'est la classe des problèmes qui admettent un algorithme polynomial capable de tester la validité d'une solution du problème. La recherche de l'efficacité de cette solution peut nécessiter une série d'essais systématiques dont on ne sait pas majorer par un polynôme le temps total de recherche. Par contre, pour chaque évaluation particulière, la vérification qu'elle est "correcte" prend un temps polynomial.

Les problèmes  $NP$  les plus étudiés sont **les problèmes NP-complets**. Ceci parce que beaucoup de problèmes intéressants sont  $NP$ -complets, et que l'on ne sait pas résoudre un problème  $NP$ -complet efficacement à cause du non déterminisme.

Parmi les problèmes de type  $NP$ -complets en théorie des graphes est celui de l'existence d'un circuit Hamiltonien, le 3-coloriage des graphes planaires, le coloriage des arcs d'un graphe 3-régulier avec 3 couleurs, l'existence d'un sous-graphe complet de taille au moins  $k$ , où  $k$  fait partie de la donnée du problème. . . Déterminer si un graphe est  $4, 5, \dots, k$ -coloriable pour chaque  $k$  fixé est également  $NP$ -complet. Par contre, un graphe est 2-coloriable, ou biparti si et seulement si son ensemble de sommets  $S$  peut être partitionné en deux classes  $A$  et  $B$  telles qu'aucun arc ne relie deux sommets de  $A$  ou deux sommets de  $B$ . Déterminer si un graphe est biparti peut se faire au moyen d'une exploration à partir d'un arbre recouvrant en largeur, donc en temps polynomial.

Les problèmes  $NP$ -complets sont donc les plus compliqués des problèmes  $NP$ . On peut aller jusqu'à douter de leur existence. Pourtant, on sait depuis 1970 qu'il en existe. Le problème du voyageur de commerce en est un. Celui du sac à dos est un autre.

## Chapitre 2

# La coloration dominante

### 2.1 Introduction

L'histoire de la coloration des sommets d'un graphe remonte au début de XX<sup>ème</sup> siècle avec les travaux de Claude Berge sur les graphes parfaits. Elle s'est alors développée dans diverses disciplines. En 1999 Irving et Manlove ont défini un nouveau paramètre de coloration, appelé le nombre b-chromatique.

Déterminer la valeur exacte du nombre b-chromatique est un problème *NP* complet dans le cas général, par contre il est polynomial pour certaines classes particulières de graphes, comme le cas des arbres.

Dans ce chapitre, nous présentons les principaux résultats ainsi que les approches de base concernant la recherche du nombre b-chromatique.

D'abord rappelons qu'une *k*-coloration propre des sommets d'un graphe  $G$  est une affectation d'une couleur de l'ensemble des couleurs  $\{1, 2, \dots, k\}$  à chaque sommet de graphe de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur. Un graphe est dit **k-colorable** s'il admet une *k*-coloration propre. Une coloration avec *k* couleurs, est donc une partition de l'ensemble des sommets en *k* stables.

Dans une *k* coloration propre d'un graphe  $G$ , si  $u$  est un sommet ayant la couleur  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , tel que : pour tout  $j \neq i$ ,  $1 \leq j \leq k$ , il existe un sommet  $v$  ayant la couleur  $j$  adjacent au sommet  $u$ , alors,  $u$  est dit sommet dominant pour sa couleur. Si toute couleur  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$  est représentée par un sommet dominant  $u_i$ , dans ce

cas l'ensemble des sommets dominants  $\{u_1, \dots, u_k\}$  est appelé un système dominant. Une telle coloration est appelée : une  $k$ -coloration dominante.

**Le nombre b-chromatique** du graphe  $G$  noté  $\varphi(G)$  est le nombre maximum  $k$  de couleurs utilisé pour colorier les sommets de  $G$  avec une  $k$ -coloration dominante. S'il existe un ensemble de sommets dominants stable, alors on dit que  $G$  admet **un système stable dominant**.

**Exemple :**

Le graphe hypercube  $Q_5$  de la figure (2.1) est un graphe biparti et 5- régulier. Son nombre b-chromatique  $\varphi(Q_5) = 6$ .

Les 6 sommets en gras représentent des sommets dominants, ils consistent un système dominant stable.

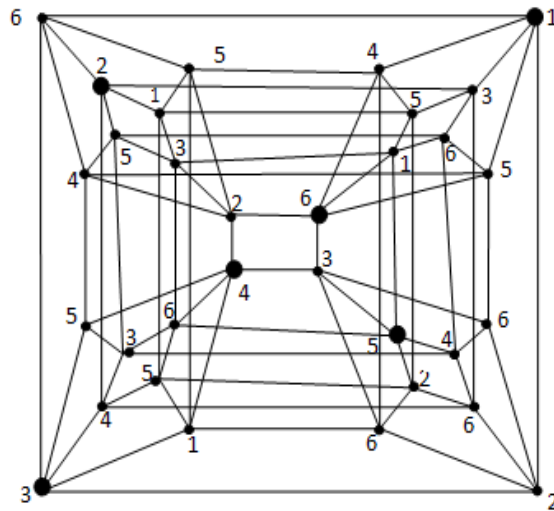


FIG. 2.1 – Une 6-coloration dominante du  $Q_5$

## 2.2 Propriétés élémentaires de $\varphi(G)$

Plusieurs études ont été faites pour déterminer le nombre b-chromatique de certains graphes, dans ce qui suit on va rappeler les résultats principaux.

Mekhia Kouider et Maryvonne Mahéo [13] ont démontré l'inégalité suivante : pour

tout graphe  $G$  on a :

$$\chi(G) \leq \varphi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Ces même auteurs, ont donné la valeur exacte du nombre b-chromatique des graphes complets, des chaines, des cycles et des stables. Ils ont aussi trouvé des bornes supérieures et inférieures pour certains produits de graphes.

**Proposition 2.2.1.** (*Mekkie Kouider et Maryvonne Mahéo[13]*). Si  $S_n$ ,  $K_n$ ,  $P_n$  et  $C_n$  sont respectivement le stable, le graphe complet, la chaine et le cycle de  $n$  sommets, on a :  $\varphi(S_n) = 1$ ,  $\varphi(K_n) = n$ , et  $\varphi(P_n) = \varphi(C_n) = 3$ ,  $n \geq 5$ .

Le cas où  $G$  est un graphe biparti complet, on énonce la proposition suivante :

**Proposition 2.2.2.** (*M.Kouider et M.Mahéo [13]*). Pour tout  $n, p \in \mathbb{N}$ , on a  $\varphi(K_{n,p}) = 2$ , où  $K_{n,p}$  est le graphe biparti complet.

**Proposition 2.2.3.** (*M.Kouider et M.Mahéo[13]*). Si  $G$  est un graphe non connexe et  $C_1, C_2, \dots, C_k$  sont ses composantes connexes alors

$$\varphi(G) \geq \max(\varphi(C_i), 1 \leq i \leq k).$$

**Proposition 2.2.4.** (*M.Kouider et M.Mahéo[13]*). Si  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  est l'ensemble de sommets de  $G$ , ordonnés selon leurs degrés croissant, alors

$$\varphi(G) \leq t,$$

où  $t = \max \{i, i - 1 \leq d(u_i)\}$ .

Le théorème suivant présente une condition nécessaire pour que la borne supérieure est atteinte.

**Théorème 2.2.1.** (*J.Kratochvil, Z.Tuza et Margit Voigt[15]*). Soit  $G$  un graphe ayant  $v_1, v_2, \dots, v_{\Delta+1}$  sommets. Si  $d(u_i, v_j) \geq 4$  pour tout  $i \neq j$ , alors

$$\varphi(G) = \Delta + 1.$$

**Corollaire 2.2.1.** (*Jan Kratochvíl, Zsolt Tuza et Margit Voigt[15]*). Si  $G$  est un graphe  $d$ -régulier ( $d \geq 2$ ) ayant au moins  $d^4$  sommets, alors

$$\varphi(G) = d + 1$$

Le cas d'un graphe régulier dont un plus court cycle est au moins de longueur 6 a été étudié par Amine El Sahili et Mekkia Kouider[8].

**Proposition 2.2.5.** (*Amine El Sahili et Mekkia Kouider[8]*). Tout graphe  $G$   $d$ -régulier dont la longueur d'un plus court cycle est 6, vérifie

$$\varphi(G) = d + 1.$$

Le théorème suivant garantit le même résultat si  $G$  est un graphe admettant un cycle de longueur 5, mais n'ayant pas de cycles de longueur 6.

**Théorème 2.2.2.** (*A.El Sahili et M.Kouider[8]*). Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier dont le plus court cycle est de longueur 5 et n'ayant pas de cycles de longueur 6. Alors le nombre  $b$ -chromatique du  $G$  est  $d + 1$ .

**Proposition 2.2.6.** (*A. El Sahili et M. Kouider[8]*). Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier. Pour le graphe  $G^2$ , le graphe 2-puissance de  $G$ , on a :

$\chi(G^2) = d+1$  si et seulement si  $V(G)$  peut être décomposé en  $d+1$  stables  $S_1, S_2, \dots, S_{d+1}$  tels que pour tout  $i$  et  $j$ , il existe un couplage parfait entre  $S_i$  et  $S_j$ .

**Proposition 2.2.7.** (*F.Affif Chaouche et A.Berrachedi[4]*). Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  et de degré  $k$ , possédant un système dominant stable  $S$ . Alors

$$\varphi(G) \leq \min \left\{ n - k, \frac{n}{2} \right\}$$

Pour  $n$  un nombre pair,  $\varphi(G) = \frac{n}{2}$  si et seulement si  $G$  est isomorphe au graphe complet biparti  $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$  duquel un couplage parfait est éliminé.

## 2.3 Quelques bornes de $\varphi(G)$

Nous commençons cette section par la remarque suivante :

**Remarque 2.3.1.** *Pour un graphe  $G$  les bornes inférieures de  $\chi(G)$  sont valables pour  $\varphi(G)$ [13]). Nous pouvons citer :  $\frac{n}{\alpha}$ ,  $\frac{n^2}{n^2-2m}$ ,  $\frac{n}{n-\delta}$*

On déduit directement de cette remarque que : si  $G$  admet  $K_n$  comme un sous graphe induit, alors

$$\varphi(G) \geq n.$$

La proposition ci-après donne une borne supérieure du nombre b-chromatique d'un graphe en fonction de son ordre et son nombre de stabilité.

**Proposition 2.3.1.** *(Mekkia Kouider-Maryvonne Mahéo[13]). Si  $G$  est un graphe de nombre de stabilité  $\alpha$ , alors*

$$\varphi(G) \leq n + 1 - \alpha.$$

Le cas où  $G$  est régulier on obtient :

**Proposition 2.3.2.** *(F.Affif Chaouche et A.Berrachedi[4]). Soit  $G$  un graphe  $k$ -régulier, d'ordre  $n$ , de nombre de stabilité  $\alpha$  et tel que  $G$  admet un système dominant stable  $S$ , alors  $\varphi(G) \leq \alpha$ .*

**Proposition 2.3.3.** *(M. Kouider et M. Mahéo[13]). Pour chaque graphe  $G$  de nombre d'arêtes  $m$ , on a*

$$\varphi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

A partir de cette proposition F.Affif Chaouche et A.Berrachedi[4] ont donné une condition nécessaire et suffisante pour que le nombre b-chromatique atteigne cette borne supérieure.

**Remarque 2.3.2.** *(F.Affif Chaouche et A.Berrachedi[4]). Pour un graphe  $G$  à  $m$  arêtes, on a*

$$\varphi(G) = \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

si et seulement si  $G$  est un graphe complet.

Le cas où  $G$  est régulier, on obtient :

**Proposition 2.3.4.** (*F.Affif Chaouche et A.Berrachedi[4]*). Soit  $G$  un graphe régulier de degré  $k$  et d'ordre  $n$ , alors

$$\varphi(G) \leq \frac{1 + \sqrt{4nk + 1}}{2}.$$

**Proposition 2.3.5.** (*A.El Sahili et M.Kouider[8]*). Pour un graphe  $G$  sans  $P_7$  et de plus court cycle  $C_5$ , on a :

$$\varphi(G) > \frac{\delta - 3}{4}$$

M.Kouider et Manouchehr Zaker[14] se sont intéressés à la valeur exacte du nombre  $b$ -chromatique de certains graphes bipartis. Mais avant de citer leurs résultats rappelons que, chaque sous graphe biparti complet d'un graphe biparti complet est appelé biclique. De même le nombre biclique d'un graphe est le nombre minimum de bicliques disjoints qui couvre les sommets de ce graphe.

**Théorème 2.3.1.** (*M.Kouider et Manouchehr Zaker[14]*). Soit  $G$  un graphe biparti tel que  $|V(G)| = |V(X)| + |V(Y)| = n$  et  $t$  son nombre biclique, alors

$$\varphi(G) \leq \left\lfloor \frac{n - t + 4}{2} \right\rfloor.$$

**Proposition 2.3.6.** (*M. Kouider et Manouchehr Zaker[14]*). Pour tout entier  $p \geq 3$ , il existe un graphe  $G$  biparti d'ordre  $n = 3p - 4$  et nombre biclique  $t = p - 1$  tel que

$$\varphi(G) = p = \left\lfloor \frac{n - t + 4}{2} \right\rfloor.$$

## 2.4 Le nombre $b$ -chromatique de quelques graphes particuliers

Brice Effantin et Hamamache Kheddouci[7] ont donné une valeur exacte du nombre  $b$ -chromatique des graphes puissances d'une chaîne et d'un cycle.

**Théorème 2.4.1.** (*B.Effantin et H.Kheddouci[7]*). Soit  $P_n$  la chaîne de longueur  $n$ . Le nombre  $b$ -chromatique du graphe  $P_n^p$ , où  $p \geq 1$  est :

$$\varphi(P_n^p) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq p + 1 \\ p + 1 + \lfloor \frac{n-p-1}{3} \rfloor & \text{si } p + 2 \leq n \leq 4p + 1 \\ 2p + 1 & \text{si } n \geq 4p + 2 \end{cases}$$

**Théorème 2.4.2.** (*B.Effantin et H.Kheddouci[7]*). Soit  $C_n$  un cycle d'ordre  $n$ . Le nombre  $b$ -chromatique du graphe  $C_n^p$ , où  $p \geq 1$ , est le suivant :

$$\varphi(C_n^p) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq 2p + 1 \\ p + 1 & \text{si } n = 2p + 2 \\ (\geq) \min(n - p - 1, p + 1 + \lfloor \frac{n-p-1}{3} \rfloor) & \text{si } 2p + 3 \leq n \leq 3p \\ p + 1 + \lfloor \frac{n-p-1}{3} \rfloor & \text{si } 3p + 1 \leq n \leq 4p \\ 2p + 1 & \text{si } n \geq 4p + 1 \end{cases}$$

On cite les résultats suivants concernant le nombre  $b$ -chromatique des graphes amplement réguliers, quasi-amplement réguliers et certaines classes de graphe de Hamming.

**Proposition 2.4.1.** (*F.Affif Chaouche et A.Berrachedi[3]*). Soit  $G$  un graphe amplement régulier de paramètre  $(n, k, \lambda, \mu)$  et sans  $K_4 - e$ , alors

$$(\lambda + 2) \leq \varphi(G) \leq d(\lambda + 1) + 1$$

avec  $d(\lambda + 1) = k$ .

Si  $\lambda = 0$  et  $G$  est un graphe de Hamming on a :

**Proposition 2.4.2.** (*F.Affif Chaouche et A.Berrachedi[3]*). Pour deux entiers positifs  $n$  et  $d$ , tels que  $n$  est impair,  $n \geq 1$  et  $d \neq 1$ , le nombre  $b$ -chromatique du graphe de Hamming  $H(2d, n)$  vérifie la relation  $\varphi(H(2d, n)) \geq (dn - (d - 1))$  et ce graphe

admet un  $(dn - (d - 1))$ -système dominant stable.

On a aussi :

$$\varphi(H(2d + 1, n)) \geq (d + 1)n - d, \text{ si } d > 1.$$

**Corollaire 2.4.1.** (F.Affif Chaouche et A.Berrachedi[3]). Pour  $n \geq m(m - 1)$

$$\varphi(H(d, m, n)) \geq n.$$

Les deux propositions suivantes regroupent les bornes inférieures de nombre b-chromatique de quelques classes de graphes de Hamming.

**Proposition 2.4.3.** (F.Affif Chaouche et A.Berrachedi[3]) Pour les entiers positifs et non nuls  $n, m$  et  $d$ ; tels que  $m$  et  $n$  sont impairs. On a :

1.  $\varphi(H(2d, m, n)) \geq d(n + m) - 2d + 1.$
2.  $\varphi(H(2d + 1, m, n)) \geq d(n + m) - 2d + 1.$
3. Si  $n > 2$  et  $m < n$ , alors  $\varphi(H(2d + 1; m, n)) \geq d(n + m - 2) + n.$

**Proposition 2.4.4.** (F.Affif Chaouche et A.Berrachedi[3]). Soient les entiers positifs  $n, m, d$  et  $d'$ , tels que,  $n$  et  $m$  sont impairs et différents de 1,  $d$  et  $d'$  sont non nuls.

On a :

1.  $\varphi(H(2d, m, 2d', n)) \geq (dm + d'n - (d + d') + 1)$  et ce graphe admet un système stable dominant d'ordre  $(dm + d'n - (d + d') + 1)$ .
2. Si  $(d' + 1)n - d' - 1 < dm - (d - 1)$ , alors  $\varphi(H(2d, m, 2d' + 1, n)) \geq (dm + (d' + 1)n - (d + d'))$
3. Si  $((d' + 1)n - d') > (dm - (d - 1))$ , alors  $\varphi(H(2d, m, 2d' + 1, n)) \geq (d' + 1)n - d'.$

M.Kouider et M.Zaker[14] ont donné une borne supérieure du nombre b-chromatique d'un graphe sans  $K_{1,t}$ , où  $t$  est un entier positif et  $t \geq 3$ .

**Théorème 2.4.3.** (M.Kouider et M.Zaker[14]). Soit  $G$  un graphe sans  $K_{1,t}$ , où  $t \geq 3$ ,

alors

$$\varphi(G) \leq (t-1)(\chi(G) - 1) + 1.$$

La proposition suivante garantit l'existence de graphes dont le nombre b-chromatique atteint cette borne supérieure.

**Proposition 2.4.5.** (M.Kouider et M.Zaker[14]). *Pour deux entiers  $k$  et  $t$ , où  $t \geq 3$ , il existe un graphe  $G$  sans  $K_{1,t}$  tel que  $\chi(G) = k$  et  $\varphi(G) = (t-1)(k-1) + 1$ .*

Une borne supérieure du nombre b-chromatique d'un graphe peut être donnée aussi en fonction du nombre de partition en cliques et du taille d'une clique maximum.

**Théorème 2.4.4.** (M.Kouider et M.Zaker[14]). *Soit  $G$  un graphe, tel que  $\theta(G) = k$ , alors*

$$\varphi(G) \leq \frac{k^2\omega}{2k-1},$$

où  $\omega$  est la taille d'une clique maximum.

Ces mêmes auteurs ont démontré le théorème suivant :

**Proposition 2.4.6.** (M.Kouider et M.Zaker[14]). *Pour un entier positif  $k \geq 2$  et tel que  $\omega(G)$  est divisible par  $2k-1$ , il existe un graphe  $G$  dont  $\theta(G) = k$  et*

$$\varphi(G) = \frac{k^2\omega}{2k-1}.$$

**Corollaire 2.4.2.** (M.Kouider et M.Zaker[14]). *Pour un graphe  $G$ , avec la taille d'une clique maximum est  $\omega$ , on a :*

$$\varphi(G) \leq \frac{\chi^2 \overline{G}}{2\chi \overline{G} - 1} \omega(G).$$

## 2.5 La b-coloration de quelques produits de graphes

Il existe plusieurs études sur le nombre b-chromatique de produit cartésien de graphes ; d'abord nous rappelons quelques résultats élémentaires.

**Proposition 2.5.1.** (Mekki Kouider-Maryvonne Mahéo[13])

$$\varphi(G \square H) \geq \max(\varphi(G), \varphi(H)).$$

**Remarque 2.5.1.** En général la différence entre  $\varphi(G \square H)$  et  $\max(\varphi(G), \varphi(H))$ , peut être large. Par exemple, dans le cas où  $G = H = K_{1,n}$ , on a  $\varphi(K_{1,n}) = 2$ ; par contre  $\varphi(K_{1,n} \square K_{1,n}) = n + 2$ .

**Proposition 2.5.2.** (F.Affif Chaouche et A.Berrachedi[4]). Soit  $G$  et  $G'$  deux graphes réguliers de degré respectivement  $k$  et  $k'$ . Si  $G$  et  $G'$  admettent des systèmes stables dominants de  $k + 1$  et  $k' + 1$  sommets respectivement, alors  $G \square G'$  préserve cette propriété.

Une application directe de cette proposition au cas de la classe des graphes noté  $G_\lambda$ , où  $G_\lambda$  désigne la classe de graphes amplement réguliers, telle que deux sommets adjacents ont  $\lambda$  voisins communs et deux sommets à distance deux ont 2 voisins communs.

**Corollaire 2.5.1.** (F.Affif Chaouche et A.Berrachedi[4]). Soit  $G$  un graphe de  $G_{\lambda_1}$  de degré  $k$  ayant un système dominant stable de  $k + 1$  éléments, et soit  $G'$  un graphe de  $G_{\lambda_2}$  de degré  $k'$  d'un système dominant stable de  $k' + 1$  éléments.  $G \square G'$  est alors un graphe de  $G_{\lambda_1, \lambda_2}$  de degré  $k + k'$  et ayant un système dominant stable de  $k + k' + 1$  sommets.

Avant d'énoncer la proposition suivante, on rappelle qu'un graphe  $G$  est dit localement  $(d_1, d_2)$ -bistars si pour tout sommet  $u$ ,  $N(u)$  est constitué de  $d_1(\lambda_1 + 2)$ -cliques et  $d_2(\lambda_2 + 2)$ -cliques.

**Proposition 2.5.3.** (F.Affif Chaouche et A.Berrachedi[4]). Si  $G$  est le graphe de  $G_{\lambda_1} \square G_{\lambda_2}$  localement  $(d_1, d_2)$ -bistras, alors

$$\lambda_2 + 2 \leq \varphi(G) \leq d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1) + 1$$

**Proposition 2.5.4.** (*M.Kouider et M.Mahéo[13]*). Si  $K_{1,p}$ ,  $P_p$  et  $K_p$  sont respectivement le graphe star, la chaîne et le graphe complet d'ordre  $p$ , alors on a :

$$\varphi(K_{1,n} \square K_{1,n}) = n + 2 \text{ si } n \geq 2.$$

$$\varphi(K_{1,n} \square P_k) = \min(k, n + 3), \text{ } n \geq 3, k \geq 4, \text{ sauf les cas } k = n + 3, k = n + 4,$$

$$\text{où } \varphi(K_{1,n} \square P_k) = n + 2.$$

$$n \leq \varphi(K_n \square K_p) \leq p(p-1) \text{ si } p \leq n < p(p-1), \text{ et } \varphi(K_n \square K_p) = n \text{ si } n \geq p(p-1)$$

**Proposition 2.5.5.** (*F.Affif Chaouche et A.Berrachedi[4]*). Soit  $K_n$  le graphe complet de  $n$  sommets, où  $n$  est un nombre impair différent de 1, alors  $K_n \square K_n$  admet un système dominant stable de  $n$  sommets. De plus, chaque sommet de  $K_n \square K_n$  est dans un système dominant stable.

B.Omoomi et R.Javadi[18] ont trouvé le nombre b-chromatique de  $K_m \square C_n$ ,  $K_m \square P_n$ , et ils ont donné une borne supérieure et inférieure de  $\varphi(K_n \square K_n)$ . Pour cela, ils ont d'abord démontré les résultats suivants :

**Proposition 2.5.6.** (*B.Omoomi et R.Javadi[18]*). Soient  $G$  et  $H$  deux graphes, si  $H'$  est un graphe obtenu par la substitution d'une arête dans  $H$  par une chaîne de longueur 3, alors :

$$\varphi(G \square H') \geq \varphi(G \square H).$$

On en déduit de cette proposition le corollaire suivant :

**Corollaire 2.5.2.** (*B.Omoomi et R.Javadi[17]*). Pour deux entiers positifs  $m$  et  $n$  on a :

$$\varphi(K_m \square C_{n+2}) \geq \varphi(K_m \square C_n)$$

et

$$\varphi(K_m \square P_{n+2}) \geq \varphi(K_m \square C_n)$$

Afin de déterminer le nombre b-chromatique de  $K_m \square C_n$ , ces mêmes auteurs ont proposé le lemme suivant, notons que le graphe  $K_m \square C_n$  est représenté sous forme

d'un tableau, où les colonnes représentent des copies du  $K_m$  et les lignes des copies du  $C_n$ .

**Lemme 2.5.1.** *(B.Omoomi et R.Javadi[18]). Si  $c$  est une coloration dominante du graphe  $K_m \square C_n$  avec  $k$  couleurs et un  $S$  un système stable dominant dans  $c$  tel que :*

1. *Il existe un seul sommet dominant, noté  $(u, v)$ ,  $u \neq m$ , dans la classe de couleurs  $c_i$ , telle que les sommets  $(u, v)$ ,  $(u, v \pm 1)$  ne sont pas dans  $S$ .*
2. *La ligne  $m$  ne contient pas des sommets dans  $S$ .*
3. *Quand  $n$  est impair,  $c(m, v - 1) \neq c_i$ .*

*Alors  $\varphi(K_{m+1} \square C_n) \geq k + 1$ .*

Le nombre b- chromatique de produit cartésien de graphe complet et d'un cycle est donné par le théorème suivant :

**Théorème 2.5.1.** *(B.Omoomi et R. Javadi[18]). Pour deux entiers positifs  $m$  et  $n \geq 4$  :*

$$\varphi(K_m \square C_n) = \begin{cases} m & \text{si } m \geq 2n \\ m + 1 & \text{si } m = 2n - 1 \\ m + 2 & \text{si } m \leq 2n - 2 \end{cases}$$

De même le nombre b-chromatique de graphe  $K_m \square P_n$  est donné par le théorème suivant :

**Théorème 2.5.2.** *(B.Omoomi et R. Javadi[18]). Pour deux entiers positifs  $m$  et  $n \geq 4$ , on a :*

$$\varphi(K_m \square P_n) = \begin{cases} m & \text{si } m \geq 2n - 2 \\ m + 1 & \text{si } 2n - 5 \leq m \leq 2n - 3 \\ m + 2 & \text{si } m \leq 2n - 6. \end{cases}$$

Avant d'énoncer le lemme suivant, notons le graphe  $K_n \square K_n$  est représenté sous forme d'un tableau, où les lignes, ainsi que les colonnes représentent des copies du  $K_n$ .

**Lemme 2.5.2.** *(B.Omoomi et R.Javadi[18]). Soit  $c$  une coloration dominante de graphe  $K_n \square K_n$  par  $2n - 1$  couleurs. Si les deux sommets  $(i, j)$  et  $(i, t)$  sont dominants dans  $c$ , alors dans les colonnes  $j$  et  $t$  il n'y a pas d'autre sommets dominants.*

**Théorème 2.5.3.** *(B.Omoomi et R.Javadi[18]). Pour tout entier positif  $n \geq 2$ , on a :*

$$\varphi(K_n \square K_n) \leq 2n - 2.$$

Si  $n \geq 5$ , on obtient :

**Théorème 2.5.4.** *(B.Omoomi et R.Javadi[18]). Pour tout entier positif  $n \geq 5$ , on a :*

$$\varphi(K_n \square K_n) \geq 2n - 3.$$

Afin de trouver une borne meilleure que celle du théorème précédent. Omoomi et R.Javadi ont énoncé la conjecture suivante :

**Conjecture 2.5.1.** *(B.Omoomi et R.Javadi[18]). Pour tout entier positif  $n \geq 5$ , on a :*

$$\phi(K_n \square K_n) = 2n - 3.$$

Dans ce qui suit nous présentons quelques résultats pour déterminer la b-coloration de certains produits particuliers de graphes. Rappelons d'abord que  $G_1 + G_2$  désigne l'union de deux graphes  $G_1$  et  $G_2$ . Il est facile de remarquer que :

$$\varphi(G_1 + G_2) \geq \max(\varphi(G_1), \varphi(G_2))$$

**Lemme 2.5.3.** (C.T.Hoàng et M.Kouider [9]). Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes disjoints et  $G = G_1 + G_2$ . Si  $\varphi(G) \geq \max(\varphi(G_1), \varphi(G_2)) = k$ , alors pour toute coloration dominante de  $m$  couleurs avec  $m > k$  dans  $G$ , il existe deux couleurs  $c_1$  et  $c_2$ , telles que chaque graphe  $G_i$  contient un sommet dominant de couleur  $c_i$  et  $G_j$  ne contient pas le sommet dominant de couleur  $c_i$ , pour  $i = 1, 2$  et  $i \neq j$ .

**Lemme 2.5.4.** (C.T.Hoàng et M.Kouider [9]). Soient  $G_1$  et  $K_k$  deux graphes disjoints, où  $K_k$  est le graphe complet d'ordre  $k$ , et  $G = G_1 + K_k$ , alors

$$\varphi(G) = \max(\varphi(G_1), k)$$

La borne est atteinte quand il s'agit de joint deux graphes ; comme le démontre ce lemme :

**Lemme 2.5.5.** (C.T.Hoàng et M.Kouider [9]) Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes disjoints. Le joint de deux graphes  $G_1 \cup G_2$  vérifié :

$$\varphi(G_1 \cup G_2) = \varphi(G_1) + \varphi(G_2).$$

La relation entre le nombre b-chromatique d'un graphe et son complémentaire est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 2.5.5.** (Mekhia Kouider-Maryvonne Mahéo[13]). Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  et  $\overline{G}$  son complémentaire, alors

$$\varphi(G) + \varphi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

La borne supérieure est atteinte, quand il s'agit de joint de graphes.

**Remarque 2.5.2.** (M.Kouider et M.Mahéo[13]). Si  $G$  est le stable  $S_p$  et  $K_{n-p}$  est le graphe complet, alors :

$$\varphi(S_p) \cup \varphi(K_{n-p}) = n + 1$$

**Remarque 2.5.3.** (M.Kouider et M.Mahéo[13]). La borne supérieure  $n+1$  est aussi une borne pour  $\chi(G) + \chi(\overline{G})$ .

En utilisant les deux inégalités  $\varphi\overline{\varphi} \geq \chi\overline{\chi}$  et  $\varphi + \overline{\varphi} \leq n + 1$ , on aura la remarque suivante :

**Remarque 2.5.4.** (M.Kouider et M.Mahéo[12])

$$\varphi\overline{\varphi} \leq \frac{(n+1)^2}{4} \quad \text{et} \quad \varphi + \overline{\varphi} \geq 2\sqrt{n}$$

F.Affif Chaouche et A. Berrachedi[4] ont fait une étude sur le produit total des graphes amplement réguliers et d'autre graphes.

**Proposition 2.5.7.** (F.Affif Chaouche et A. Berrachedi[4]). Pour un entier positif pair  $n$ , tel que  $n \geq 4$ , on a :

$$\varphi(C_4 \otimes C_n) \geq 5$$

## 2.6 Le nombre b-chromatique de certains sous graphes

Remarquons d'abord que si  $H$  est un sous graphe induit de  $G$ , on n'aura pas nécessairement  $\varphi(H) \leq \varphi(G)$ . F.Affif Chaouche et A.Berrachedi[4] ont donné un exemple qui justifié cette remarque. Cependant, le graphe  $\varphi(K_3 \square K_3) = 3$  ( figure 2.1), par contre le sous graphe induit  $H$  de  $K_3 \square K_3$  ( figure2.2 ) obtenu par l'élimination d'un sommet admet son nombre b-chromatique égal à 4.

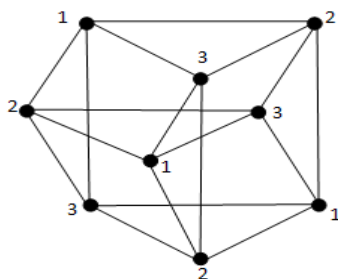


FIG. 2.2 – Une b-coloration du graphe  $K_3 \square K_3$

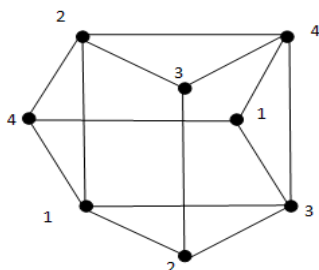


FIG. 2.3 – Une b-coloration du graphe  $H$

La remarque suivante donne une amélioration de la borne inférieure du nombre b-chromatique s'il admet un graphe complet comme sous graphe induit.

**Remarque 2.6.1.** (F.Affif Chaouche et A.Berrachedi[4]). Soit  $G$  un graphe et  $H_u$  un sous graphe induit de  $G$  par l'ensemble des sommets  $N[u] \cup N_2[u]$ . Si  $H_u$  n'admet pas une  $k$ -coloration propre, alors :

$$\phi(G) \geq k + 1.$$

**Proposition 2.6.1.** (F.Affif CHaouche et A.Berrachedi[4]). Soit  $G$  un graphe amplement régulier de paramètres  $(n, k, 0, 1)$  et sans  $C_5$  induit. Si  $k \geq 4$ , alors

$$\varphi(H_u) = k + 1.$$

où  $H_u$  est le graphe défini dans Remarque 2.6.1.

La proposition suivante présente une condition nécessaire pour que le nombre b-chromatique d'un graphe soit égal au nombre b-chromatique d'un sous graphe induit de ce graphe.

**Proposition 2.6.2.** (M.Kouider[12]). Soit  $H$  un sous graphe induit d'un graphe  $G$ .

1. Si  $\varphi(H) = \Delta(G) + 1$ , alors  $\varphi(G) = \varphi(H)$
2. S'il existe un sommet de degré au moins égal à  $\varphi(H)$  en dehors de  $H$ , alors  $\varphi(G) \geq \varphi(H)$ .

**Proposition 2.6.3.** (M. Kouider[12]). Soit  $G$  un graphe et  $H$  un sous graphe induit de  $G$ . S'il existe deux sommets  $u$  et  $u'$  de  $V(G)$  :

$\min(d_G(u), d_G(u')) \geq \varphi(H) - 1 \Rightarrow d(u, u') \geq 3$ , alors :

$$\varphi(G) \geq \varphi(H)$$

(M.Kouider[12]) a aussi étudié la relation entre la b-coloration des graphes qui admettent des mailles de taille donnée et leurs sous graphes induits.

**Théorème 2.6.1.** (M. Kouider[12]). Soit  $G$  un graphe ayant une maille de taille 5 et  $H$  un sous graphe induit de  $G$ . Supposons que  $H$  admet un système dominant  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_{\varphi(H)}\}$  tel que chaque deux sommets de  $S$  sont à distance au moins 6, alors

$$\varphi(G) \geq \varphi(H)$$

**Corollaire 2.6.1.** (M.Kouider[12]). Soit  $G$  un graphe ayant une maille de taille 5, de degré minimum  $\delta$  et de diamètre  $D$ , alors

$$\varphi(G) \geq \min(\delta, D/6).$$

**Théorème 2.6.2.** (M.Kouider[12]). Soit  $G$  un graphe ayant une maille de taille 4, tel que chaque sommet est dans un cycle de longueur au plus 5 et  $H$  un sous graphe induit de  $G$ . Si  $2\varphi(H) \leq \delta(G) + 2$ , alors

$$\varphi(G) \geq \varphi(H).$$

Le cas, où  $G$  admet une maille de taille 6, on cite le théorème suivant :

**Théorème 2.6.3.** (M.Kouider[12]). Soit  $G$  un graphe ayant une maille de taille 6 et  $H$  un sous graphe induit de  $G$ , alors

$$\varphi(G) \geq \varphi(H) - 1.$$

## Chapitre 3

# La b-coloration du produit cartésien de graphe $K_m$ avec quelques graphes

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse au nombre b-chromatique du graphe défini comme produit cartésien d'un graphe complet d'ordre  $m$ ,  $K_m$  et le graphe qu'on note  $R_n$ , où  $R_n$  est la roue à  $n$  rayons.

Le graphe  $K_m \square R_n$  est représenté sous forme d'un tableau de  $m \times (n + 1)$  cases, où les colonnes représentent des copies du graphe  $K_m$  et les lignes des copies du  $R_n$ . Une coloration dominante d'un tel graphe est affectée de la manière suivante :

- Tout élément  $i$  de l'ensemble  $1, 2, \dots, \varphi(G)$  ne figure pas deux fois dans la même colonne.
- Tout élément de la première colonne ne figure pas sur la même ligne
- Tout élément de la deuxième colonne ne figure pas sur la même ligne dans la troisième colonne ou dans la dernière.
- Tout élément  $i$  affecté à la case  $(u, v)$  n'apparaît pas dans les cases  $(u, v - 1)$  ou  $(u, v + 1)$ , avec  $3 \leq v \leq n$

Afin de trouver une valeur exacte du nombre b-chromatique de graphe  $K_m \square R_n$ ,

on commence notre étude par le cas particulier  $K_m \square R_4$ , où  $R_4$  est la roue à 4 rayons. Ce graphe est aussi isomorphe au triparti complet  $K_{1,2,2}$ .

Nous rappelons d'abord la proposition et le lemme suivants :

**Proposition 3.1.1.** *(B.Omoomi et R.Javadi [18]). Si  $C$  est une classe de couleurs du graphe  $K_m \square G$  par  $\varphi$  couleurs, où  $\varphi > m$  et  $v \in V(G)$ , alors la colonne correspondante au sommet  $v$ , contient au plus  $d_G(v)$  sommets dominants.*

**Preuve 3.1.1.** *(B.Omoomi et R.Javadi [18]) Supposons que  $\varphi > m$ , alors il y a au moins une couleur qui n'apparaît pas dans chaque colonne. Soit  $v$  une couleur qui n'a pas été affectée à la colonne notée  $k_v$ , cette couleur va apparaître dans les différentes colonnes voisines des sommets dominants de la colonne  $k_v$ , alors le nombre de sommets dominants dans la colonne  $k_v$  est au plus  $d_G(v)$ .  $\square$*

**Corollaire 3.1.1.** *(B.Omoomi et R.Javadi[18]). Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  et de taille  $e$  et  $d = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_n)$  et la séquence de degré de  $G$ , alors*

$$\varphi(K_m \square G) \leq 2e$$

### 3.2 Le nombre $b$ -chromatique du graphe $K_m \square K_{1,2,2}$

On a  $\Delta(K_m \square R_4) = m + 3$ . Comme  $\varphi(K_m \square R_4) \geq \max(\varphi(K_m), \varphi(R_4))$ , d'après la proposition 2.5.1, on a :

$$m \leq \varphi(K_m \square R_4) \leq m + 4$$

**Proposition 3.2.1.** *: Pour tout entier  $m$  positif et non nul, on a :*

$$\varphi(K_m \square R_4) \leq m + 3$$

**Preuve 3.2.1.** *Raisonnons par l'absurde. Supposons que  $\varphi(K_m \square R_4) > m + 3$ , alors il y'a au moins  $m + 3$  sommets de degré plus que  $m + 3$ . Or dans le graphe  $K_m \square R_4$  on retrouve uniquement  $m$  sommets de degré supérieur à  $m + 2$ . D'où le résultat.  $\square$*

Des bornes plus précises sont données par le théorème suivant :

**Théorème 3.2.1.**

$$\varphi(K_m \square R_4) = \begin{cases} (\geq)m + 2 & \text{si } 2 \leq m \leq 13 \\ 16 & \text{si } m = 14, 15 \\ m & \text{si } m \geq 16 \end{cases}$$

**Preuve 3.2.2.** Montrons que si  $m \geq 16$ , le graphe  $(K_m \square R_4)$  admet une 16-coloration.

On commence d'abord par le cas  $m = 16$ .

Si  $m = 16$ , d'après le corollaire, on a :  $\varphi(K_m \square R_4) \leq \sum d_i = 16$ , où  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  est la séquence des degré de graphe  $R_4$ . Comme  $m \leq \varphi(K_{16} \square R_4) \leq 16$ , on en déduit que  $\varphi(K_{16} \square R_4) = 16$ .

Si  $m > 16$ , supposons que  $\varphi(K_m \square R_4) > m$ , on a  $m < \varphi(K_m \square R_4) \leq 16$ , or  $m > 16$ .

D'où la contradiction. □

Si  $2 \leq m \leq 14$ , on propose une  $(m+2)$ -coloration dominante, les colorations proposées sont données comme suit :

1*	3	4*	2	4
2*	1	3	4	3*

TAB. 3.1 –  $K_2 \square R_4$

Le système dominant du graphe  $K_2 \square R_4$  est l'ensemble des sommets suivant :

$$S = \{1^*, 2^*, 3^*, 4^*\}.$$

1*	4*	5	3	2
2*	3	4	5	1
3*	2	1	4	5*

TAB. 3.2 –  $K_3 \square R_4$

$$S = \{1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*\}$$

1*	5*	6	4	3
2*	4	5	6*	1
3*	2	4	5	6
4*	6	1	3	5

TAB. 3.3 –  $K_4 \square R_4$

$$S = \{1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*\}$$

1*	6	7	4	5
2*	5*	6	7*	3
3*	4	2	6*	7
4*	7	3	5	6
5	1	4	1	4

TAB. 3.4 –  $K_5 \square R_4$

$$S = \{1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*\}$$

1*	7	8	4	2
2*	5*	7	8*	3
3*	6*	2	7*	8
4*	8	1	5	7
5	4	3	4	6
6	1	2	1	5

TAB. 3.5 –  $K_6 \square R_4$

$$S = \{1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*\}$$

1*	8	9	4	2
2*	5*	8	9*	3
3*	6*	2	8*	9
4*	9	1	5	8
5	1	7*	6	7
6	7	4	7	1
7	4	3	1	2

TAB. 3.6 –  $K_7 \square R_4$

$$S = \{1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*\}$$

1*	9	10	4	2
2*	5*	9	10*	3
3*	6*	2	9*	10
4*	10	1	8	9
5	8	7*	6	7
6	1	8*	5	4
7	4	3	1	5
8	7	4	7	3

TAB. 3.7 –  $K_8 \square R_4$

$$S = \{1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*\}$$

1*	10	11	4	6
2*	5*	10	11*	3
3*	6*	2	10*	11
4*	11	1	9	10
5	1	7*	6	8
6	4	8*	5	9
7	9	3	8	1
8	7	9	7	2
9	8	4	1	7

TAB. 3.8 –  $K_9 \square R_4$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, \\ 7^*, 8^*, 9^*, 10^*, 11^* \end{array} \right\}$$

1*	11	12	10	8
2*	5*	11	12*	3
3*	6*	2	11*	12
4*	12	1	9	11
5	1	7*	6	10*
6	4	8*	5	9*
7	10	9	4	1
8	9	10	1	7
9	8	4	7	2
10	7	3	8	4

TAB. 3.9 –  $K_{10} \square R_4$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, \\ 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^* \end{array} \right\}$$

1*	12*	13	10*	2
2*	11*	12	13*	1
3*	10	11	12	13
4*	13	10	11	12
5	3	1	6	8*
6	4	2	5	9*
7	5	3	4	3
8	6	5*	9	7
9	8	6*	7	10
10	9	7*	8	11
11	7	4	3	4

TAB. 3.10 –  $K_{11} \square R_4$

1*	13*	14	11*	2
2*	12*	13	14*	1
3*	11	12	13	14
4*	14	11	12	13
5	3	10	6	8*
6	5	1	4	9*
7	6	2	5	10*
8	4	5*	9	3
9	8	6*	7	4
10	9	7*	8	7
11	7	4	3	12
12	10	3	10	11

TAB. 3.11 –  $K_{12} \square R_4$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, \\ 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*, 13^* \end{array} \right\}$$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, \\ 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*, 13^*, 14^* \end{array} \right\}$$

1*	14	15	13	11
2*	1	14	15	12
3*	4	5*	14	15*
4*	15	6*	3	14*
5	3	7*	4	13*
6	2	8	2	1
7	5	11	1	2
8	6	9	12*	10
9	7	10	11*	5
10	11	1	8*	9
11	8	2	5	6
12	9*	13	6	7
13	10*	12	7	8

TAB. 3.12 –  $K_{13} \square R_4$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, \\ 9^*, 10^*, 11^*, 12^*, 13^*, 14^*, 15^* \end{array} \right\}$$

Pour les cas  $m = 14, 15$ , les bornes supérieures du nombre b-chromatique des graphes  $K_{14} \square R_4$  et  $K_{15} \square R_4$  sont atteintes.

En effet, pour le cas  $m = 14$  le graphe  $K_{14} \square R_4$  admet une 16-coloration dominante, si non  $\varphi(K_{14} \square R_4) > 16$ , or  $\varphi(K_{14} \square R_4) < \sum d_i = 16$ , d'où le résultat. On suit le même raisonnement pour démontrer que le graphe  $K_{15} \square R_4$  admet une 16-coloration dominante.

On propose dans les tableaux suivants une 16-coloration dominante pour les graphes  $K_{14} \square R_4$  et  $K_{15} \square R_4$ .

1*	15	16	14	2
2*	14	15	16	1
3*	4	13	15	16*
4*	16	1	3	15*
5	3	2	4	10*
6	11*	8	1	5
7	12*	6	2	8
8	13*	3	5	6
9	5	7*	10	7
10	9	5*	7	14
11	10	14*	9*	12
12	1	11	6*	13
13	2	12	8*	11
14	7	4	13	9

TAB. 3.13 –  $K_{15} \square R_4$

$$S = \{1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*, 13^*, 14^*, 15^*, 16^*, 16^*\}$$

1*	16*	2	14	15
2*	15*	16	15	14
3*	14*	13*	16	2
4*	1	12*	3	16
5	3	11*	10*	6*
6	4	1	9*	1
7	5	6	8*	3
8	7	5	1	4
9	8	4	2	11
10	9	7	4	7*
11	10	8	7	5*
12	11	9	5	8
13	12	10	11	9
14	6	15	12	13
15	13	14	13	12

TAB. 3.14 –  $K_{15} \square R_4$

$$S = \{1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*, 13^*, 14^*, 15^*, 14^*, 15^*, 16^*\}$$

On considère maintenant le graphe roue à  $n$  rayons, dans la section suivante on s'intéresse à la recherche du nombre  $b$ -chromatique de graphe  $K_m \square R_n$ , où  $R_n$  est le graphe roue à  $n$  rayons.

### 3.3 Le nombre $b$ -chromatique du graphe $K_m \square R_n$

Le graphe  $K_m \square R_n$  a  $m$  sommets de degré  $m + n - 1$  et tous les autres sommets sont de degré  $m + 2$ . Comme  $\chi(K_m \square R_n) = m$ , alors on a :

$$m \leq \varphi(K_m \square R_n) \leq m + n$$

**Proposition 3.3.1.** *Pour deux entiers non nuls et positifs  $m$  et  $n$ , on a :*

$$m \leq \varphi(K_m \square R_n) \leq m + 3 \tag{3.1}$$

**Preuve 3.3.1.** *Supposons que  $\varphi(K_m \square R_n) > m + 3$ , alors tous les sommets de ce graphe sont de degré au moins égal à  $m + 3$ . Or le graphe  $K_m \square R_n$  contient uniquement  $m$  sommets de degré plus que  $m + 3$ . D'où La contradiction.*

Ainsi

$$m \leq \varphi(K_m \square R_n) \leq m + 3$$

□

Soit  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  la séquence des degrés des sommets du graphe  $R_n$ . D'après le corollaire 3.1.1

$$\varphi(K_m \square R_n) \leq \sum d_i = 4n \quad (3.2)$$

De (3.1) et (3.2) on en déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 3.3.1.**

$$m \leq \varphi(K_m \square R_n) \leq \min \{m + 3, 4n\}$$

Avant de donner le nombre b-chromatique du graphe  $K_m \square R_n$  selon la relation entre ces deux paramètres, on s'occupe d'abord des cas particuliers.

Commençons par le cas  $m=4n-1$ .

Si  $m = 4n - 1$  et  $3 \leq n \leq 7$ , le graphe  $K_{4n-1} \square R_n$  admet une  $(m + 1)$ -coloration dominante. Les colorations proposées sont données par les tableaux suivants :

1*	12	11	4
2*	4*	12	1
3*	5*	2	12*
4	6*	1	2
5	7	3	11*
6	8	4	5
7	9	5	6
8	11	6	7
9	10	7*	8
10	1	8*	9
11	3	9*	10*

TAB. 3.15 –  $K_{11} \square R_3$

$$S = \{1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*\}$$

Le cas  $n = 4$  est déjà vu dans le Tab. 3.14

1*	20*	3	5	7	2
2*	19*	20	7	12	11
3*	18*	2	20	11	13
4*	1	6*	2	20	14
5*	3	7*	4	2	20
6	4	8*	3	4	9
7	5	9	10*	6	4
8	7	5	11*	9	6
9	6	10	12*	13*	8
10	9	11	8	14*	15*
11	10	12	13	15	16*
12	11	13	14	10	17*
13	12	14	15	16	18
14	13	15	16	17	12
15	14	16	17	18	19
16	15	17	18	19	1
17	16	18	19	1	3
18	17	19	1	3	5
19	8	1	6	5	7

TAB. 3.16 –  $K_{19} \square R_5$

$$S = \left\{ 1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*, 13^*, 14^*, 15^*, 14^*, 15^*, 16^*, 17^*, 18^*, 19^*, 20^* \right\}$$

1*	24*	5	7	9	11	2
2*	23*	24	9	11	13	15
3*	22*	2	24	12	15	17
4*	1	7*	2	24	14	16
5*	3	8*	4	2	24	18
6*	4	9*	10	4	2	24
7	5	10	11*	6	4	10
8	7	6	12*	13*	6	4
9	8	11	13	14*	8	6
10	9	12	8	15*	16*	8
11	10	13	14	16	17*	13
12	11	14	15	10	18*	19*
13	12	15	16	17	19	20*
14	13	16	17	18	12	21*
15	14	17	18	19	20	22
16	15	18	19	20	21	14
17	16	19	20	21	22	23
18	17	20	21	22	23	1
19	18	21	22	23	1	3
20	19	22	23	1	3	5
21	20	23	1	3	5	7
22	21	1	3	5	7	9
23	6	3	5	7	9	11

TAB. 3.17 –  $K_{23} \square R_6$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*, 13^*, \\ 14^*, 15^*, 16^*, 17^*, 18^*, 19^*, 20^*, 21^*, 22^*, 23^*, 24^* \end{array} \right\}$$

1*	28*	7	9	11	13	15	2
2*	27*	28	10	13	15	17	19
3*	26*	2	28	12	16	19	21
4*	1	8*	2	28	14	18	22
5*	3	9*	4	2	28	16	20
6*	4	10*	11*	4	2	28	18
7*	5	11	12*	6	4	2	28
8	7	6	13*	14*	6	4	17
9	8	12	14	15*	8	6	4
10	9	13	8	16*	17*	8	6
11	10	14	15	17	18*	10	8
12	11	15	16	10	19*	20*	10
13	6	16	17	18	20	21*	12
14	13	17	18	19	12	22*	23*
15	14	18	19	20	21	23	24*
16	15	19	20	21	22	14	25*
17	16	20	21	22	23	24	26
18	17	21	22	23	24	25	16
19	18	22	23	24	25	26	27
20	19	23	24	25	26	27	1
21	20	24	25	26	27	1	3
22	21	25	26	27	1	3	5
23	22	26	27	1	3	5	7
24	23	27	1	3	5	7	9
25	24	1	3	5	7	9	11
26	25	3	5	7	9	11	13
27	12	5	7	9	11	13	15

TAB. 3.18 –  $K_{27} \square R_7$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*, 13^*, 14^*, 15^*, 14^*, \\ 15^*, 16^*, 17^*, 18^*, 19^*, 20^*, 21^*, 22^*, 23^*, 24^*, 25^*, 26^*, 27^*, 28^* \end{array} \right\}$$

Si  $m = 4n - 2$ . Le graphe  $K_m \square R_n$  admet une  $(m + 2)$ -coloration dominante, avec  $m \geq 3$ .

Pour  $3 \leq n \leq 6$ , les colorations proposées sont données par les tableaux suivants

1*	7	12	11
2*	11*	3	12
3*	12*	11	2
4	5*	2	3
5	4	1	7
6	8	5	4*
7	1	4	5
8	9	6*	10*
9	10	7*	1
10	6	8*	9*

TAB. 3.19 –  $K_{10} \square R_3$

$$S = \{1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*\}$$

Pour  $n = 4$ . Ce cas est déjà vu dans le tableau Tab. 3.14.

1*	19*	2	5	4	20
2*	20*	19	18	5	1
3*	5	20	19	18	4
4*	18	1	2	19	2
5*	3	18	4	2	19
6	7	17*	8	1	5
7	8	16*	6	2	6
8	6	15*	7	3	7
9	11	10	14*	11	8
10	9	11	13*	9	18
11	10	9	12*	10	12
12	13	14	1	14	11*
13	14	12	2	12	10*
14	12	13	3	13	9
15	16	3	16	8*	17
16	17	4	17	7*	15
17	15	5	15	6*	16
18	4	8	11	15	3

TAB. 3.20 –  $K_{18} \square R_5$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*, \\ 13^*, 14^*, 15^*, 14^*, 15^*, 16^*, 17^*, 18^*, 19^*, 20^* \end{array} \right\}$$

1*	24*	2	3	20	8	23
2*	23*	24	4	21	9	1
3*	6	23	24	22	18	4
4*	22*	1	23	24	22	2
5*	21	4	1	23	24	3
6*	3	5	2	1	23	24
7	4	21*	8	2	1	5
8	7	20*	6	3	2	6
9	8	19*	7	4	3	7
10	5	9	18*	11	4	8
11	18	10	17*	12	5	9
12	9	11	16*	10	6	10
13	12	22	12	7*	14	11
14	13	12	13	8*	15	21
15	14	13	14	9*	13	18
16	15	14	15	5	10*	17
17	16	15	19	16	11*	22
18	17	16	20	17	12*	16
19	20	17	21	18	7	13*
20	10	18	22	15	19	14*
21	19	3	9	6	20	15*
22	11	6	5	19	21	12

TAB. 3.21 –  $K_{22} \square R_6$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*, 13^*, 14^*, \\ 15^*, 14^*, 15^*, 16^*, 17^*, 18^*, 19^*, 20^*, 21^*, 22^*, 23^*, 24^* \end{array} \right\}$$

Pour le cas  $m = 4n - 3$ . Le graphe  $K_m \square R_n$  admet une  $(m + 3)$ -coloration dominante, si  $m \geq 6$ .

On donne les  $b$ -colorations des cas particuliers : Pour  $m = 6, 7, 8, 9$  ci-après :

1*	22*	2	23	16	24	3
2*	23*	3	24	17	22	1
3*	24	1	22	18	21	2
4*	5	22	1	23	1	24
5*	6	23	2	24	2	22
6*	4	24	3	22	3	23
7	9	8	21*	9	4	15
8	7	9	20*	7	5	14
9	8	7	19*	8	6	13
10	11	18*	12	15*	11	4
11	12	17*	10	14*	12	5
12	10	16*	11	13*	10	6
13	14	15	4	1	14	7
14	15	13	5	2	15	8
15	13	14	6	3	13	9
16	17	4	13	4	18	12*
17	18	5	14	5	16	11*
18	16	6	15	6	17	10*
19	20	21	16	20	9*	21
20	21	19	17	21	8*	19
21	19	20	18	19	7*	20

TAB. 3.22 –  $K_{21} \square R_6$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*, 13^*, 14^*, \\ 15^*, 14^*, 15^*, 16^*, 17^*, 18^*, 19^*, 20^*, 21^*, 22^*, 23^*, 24^* \end{array} \right\}$$

1*	26	4	27	28	4	7	3
2*	27	22	28	1	26	8	1
3*	28	21	25	26	27	9	2
4*	1	20	26	27	28	10	25
5*	6	26*	7	10*	6	27	28
6*	7	27*	5	9*	7	28	26
7*	5	28*	6	8*	5	26	27
8	25*	9	1	2	1	25	10
9	24*	10	2	3	2	24	8
10	23*	8	3	4	3	23	9
11	2	12	22*	13	19*	12	7
12	3	13	21*	11	18*	13	4
13	4	11	20*	12	17*	11	5
14	11	19	23	16	25	1	6
15	12	18	24	17	24	2	24
16	13	17	19	18	23	3	23
17	18	16	18	19	8	19	13*
18	19	15	17	20	9	17	12*
19	17	14	8	21	10	18	11*
20	14	23	9	22	21	16*	22
21	15	24	10	23	22	15*	20
22	16	25	14	24	20	14*	21
23	20	1	15	25	14	4	14
24	21	2	16	14	15	5	15
25	22	3	4	15	16	6	16

TAB. 3.23 –  $K_{25} \square R_7$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*, 13^*, 14^*, 15^*, 14^*, \\ 15^*, 16^*, 17^*, 18^*, 19^*, 20^*, 21^*, 22^*, 23^*, 24^*, 25^*, 26^*, 27^*, 28^* \end{array} \right\}$$

1*	30	29	31	32	29	11	29	19
2*	31	28	32	29	28	30	28	18
3*	32	27	29	28	30	31	27	29
4*	5	26	28	30	31	32	19	28
5*	4	25	30	31	32	1	20	27
6*	7	30*	8	27	1	2	31	32
7*	8	31*	6	26	2	3	32	30
8*	6	32*	7	25	3	4	30	31
9	29*	10	26*	11	4	5	1	11
10	28*	11	25*	9	5	6	2	9
11	27*	9	24*	10	6	7	3	10
12	1	3	13	23*	14	8	4	13
13	2	4	14	22*	12	9	5	14
14	3	5	12	21*	13	10	6	1
15	12	2	1	16	20*	17	7	2
16	13	1	2	17	19*	15	8	3
17	14	12	3	15	18*	16	12	4
18	15	13	4	1	7	29	13	5
19	16	14	5	2	8	28	14	6
20	17	15	16	3	9	27	15	7
21	22	16	17	4	22	14*	23	17*
22	23	17	18	5	23	13*	21	16*
23	21	18	19	6	21	12*	22	15*
24	18	19	20	7	10	25	11*	26
25	19	20	21	8	24	26	10*	24
26	20	21	22	18	11	24	9*	25
27	24	22	23	19	25	18	16	8
28	25	23	15	20	26	19	17	12
29	26	24	27	24	27	20	18	20

TAB. 3.24 –  $K_{29} \square R_8$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*, 13^*, 14^*, 15^*, 14^*, 15^*, 16^*, \\ 17^*, 18^*, 19^*, 20^*, 21^*, 22^*, 23^*, 24^*, 25^*, 26^*, 27^*, 28^*, 29^*, 30^*, 31^*, 32^* \end{array} \right\}$$

1*	34	3	35	36	31	32	33	16	7
2*	35	1	36	31	32	33	34	17	8
3*	36	2	31	32	33	34	35	18	9
4*	12*	5	32	33	34	35	36	19	6
5*	11*	6	33	34	35	36	1	20	4
6*	10*	4	34	35	36	1	2	21	5
7*	9	34*	8	28	1	2	3	35	36
8*	7	35*	9	29	2	3	4	36	34
9*	8	36*	7	30	3	4	5	34	35
10	13	12	18*	11	4	5	6	1	16
11	14	10	17*	12	5	6	7	2	17
12	15	11	16*	10	6	7	8	3	18
13	16	33	15	21*	14	8	9	4	19
14	17	15	13	20*	15	9	10	5	20
15	18	13	14	19*	13	10	11	6	21
16	19	14	19	18	24*	17	12	7	22
17	20	16	20	16	23*	18	13	8	23
18	21	17	21	17	22*	16	14	9	24
19	22	18	22	1	21	27*	20	10	33
20	23	19	23	2	19	26*	22	11	32
21	24	20	24	3	20	25*	19	12	31
22	25	21	25	4	7	24	30*	23	1
23	26	22	26	5	8	22	29*	24	2
24	27	23	27	6	9	23	28*	22	3
25	33	24	28	7	10	11	27	33*	26
26	32	25	29	8	11	12	25	32*	27
27	31	26	30	9	12	13	26	31*	25
28	29	27	1	22	25	14	15	30	15*
29	30	28	2	23	26	15	16	28	14*
30	28	29	3	24	27	28	17	29	13*
31	1	30	4	25	28	29	18	13	12
32	2	31	5	26	29	30	31	14	11
33	3	32	6	27	30	31	32	15	10

TAB. 3.25 –  $K_{33} \square R_9$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*, 13^*, 14^*, 15^*, 17^*, 18^*, 19^*, 20^*, \\ 21^*, 22^*, 23^*, 24^*, 25^*, 26^*, 27^*, 28^*, 29^*, 30^*, 31^*, 32^*, 33^*, 34^*, 35^*, 36^* \end{array} \right\}$$

**Théorème 3.3.1.** *Pour deux entiers  $m$  positif et non nul et  $n \geq 6$ , on a :*

$$\varphi(K_m \square R_n) = \begin{cases} m & \text{si } m \geq 4n \\ m + 1 & \text{si } m = 4n - 1 \\ m + 2 & \text{si } m = 4n - 2 \\ m + 3 & \text{si } m = 4n - 3 \end{cases}$$

**Preuve 3.3.2.** *Si  $m \geq 4n$ . On distingue deux cas :*

*Si  $m = 4n$ , il suffit d'utiliser le corollaire 3.1.1 pour déduire que  $\varphi(K_m \square R_n) = m$ .*

*Le cas  $m > 4n$ , supposons que  $\varphi(K_m \square R_n) > m$ , on a d'après le corollaire 3.1.1  $m \leq \varphi(K_m \square R_n) \leq 4n$ , or  $m > 4n$ . D'où la contradiction.*

*Pour les cas  $m = 4n - 1$ ,  $m = 4n - 2$  et  $m = 4n - 3$ , la borne supérieure de chaque cas est atteinte.*

*En effet, pour le cas  $m = 4n - 1$  on a  $\varphi(K_{4n-1} \square R_n) \leq 4n = m + 1$ .*

*On a proposé une  $(m + 1)$ -coloration dominante pour ce cas, elle est donnée par la procédure suivante. □*

**Notation :** Pour  $r$  et  $k$  deux entiers positifs. La valeur  $i = m - n - r + 6 + k$  est calculée modulo  $m$  avec  $m - n - r + 6 + k$  reçoit  $m$  si  $m - n - r + 6 + k \geq m$ .

$$c(i, j) = \left\{ \begin{array}{ll} i & \text{si } (i, j) = (i, 1), i = 1 \dots m \\ m + 1 & \text{si } (i, j) = (i, i + 1), i = 1 \dots n \\ 2 & \text{si } (i, j) = (i, i), i = 3 \dots n \text{ et si } (i, j) = (1, n + 1) \\ 2(1 + k) & \text{si } (i, j) = (r + 2k, r + k), r = 3 \dots n - k + 1; \\ & k = 1 \dots \lfloor n/2 \rfloor + 2 \\ n + k + 3r - 2 & \text{si } (i, j) = (2r + k + 2, r + 2), r = 1 \dots n - 1; \\ & 0 \leq k \leq 3 \\ n + k + 3r - 3 & \text{si } (i, j) = (2r + k + 2, r + 2), r = 1 \dots n - 1; \\ & k = 5 \dots m - n - 3r + 3 \\ 2k + 1 & \text{si } (i, j) = (m - n - r + 6 + k, r + 2), r = 1 \dots n - 1; \\ & 0 \leq k < n/2 + 3/2(r - 1) \\ 2k + 1 & \text{si } (i, j) = (m - 2n + 7 + k, n + 1), 0 \leq k < 2n - 7 \\ 2k + 1 & \text{si } (i, j) = (m - 2n + 7 + k, n + 1), 2n - 5 \leq k < 2n - 3 \\ 4n - 11 & \text{si } (i, j) = (n + 1, n + 1) \\ m & \text{si } (i, j) = (2, 2) \\ m - 1 & \text{si } (i, j) = (3, 2) \\ 1 & \text{si } (i, j) = (4, 2) \\ 3 & \text{si } (i, j) = (5, 2) \\ 5 & \text{si } (i, j) = (7, 2) \\ i - 1 & \text{si } (i, j) = (i, 2), i = 8 \dots m - 1 \\ 6 & \text{si } (i, j) = (m, 2) \\ 2j - 2 + 2(\lfloor j + \frac{1}{2} \rfloor - k) & \text{si } (i, j) = (j - \lfloor j + \frac{1}{2} \rfloor + k, j), j = 4 \dots n - 4 \\ & k = 0 \dots \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor - 2 \end{array} \right.$$

Le système dominant est l'ensemble  $\left\{ \begin{array}{l} (i, 1), i = 1 \dots n, (2r + k + 2, r + 2), \\ r = 1 \dots n - 1, 0 \leq k \leq 2, (1, 2), (2, 2), (3, 2) \end{array} \right\}$ .

Si  $m = 4n - 2$ ,  $\varphi(K_{4n-2} \square R_n) = m + 2$ . On propose une  $(m+2)$ -coloration dominante, elle est donnée par la procédure suivante :

Notons que  $i$  est calculé modulo  $m$  si  $n + 3r + 3 \leq i \leq n + 4r + 2$  ou  $n + 4r + 3 \leq i \leq m + r - 1$ .

$$c(i, j) = \left\{ \begin{array}{ll} i & \text{si } (i, j) = (i, 1), i = 1 \dots m \\ m + 1 & \text{si } (i, j) = (i, i + 1), i = 1 \dots n \\ m + 2 & \text{si } (i, j) = (i, i + 2), i = 1 \dots n - 1 \text{ et si } (i, j) = (n, 2) \\ n + 3r - k & \text{si } (i, j) = (n + 3r + k - 7, r + 1), r = 1 \dots n - 1; 0 \leq k \leq 3 \\ n + 3r + k - 2 & \text{si } (i, j) = (n + 3r + k, r + 2), r = 1 \dots n - 2; 0 \leq k \leq 1 \\ n + 3r + k - 8 & \text{si } (i, j) = (n + 3r + k - 7, r + 2), r = 0 \dots n - 1; 0 \leq k \leq 2 \\ n + 3r - 5 & \text{si } (i, j) = (n + 3r + 2, r + 2), r = 1 \dots n - 2 \\ i - r - 1 & \text{si } (i, j) = (i, r + 2), r = 0 \dots n - 3; r + 2 \leq i \leq n + 3r - 8 \\ i - r - 11 & \text{si } (i, j) = (i, r + 2), r = 2 \dots n - 2; n + 3r + 3 \leq i \leq n + 4r + 2 \\ i - r + 1 & \text{si } (i, j) = (i, r + 2), r = 2 \dots n - 2; n + 4r + 3 \leq i \leq m + r - 1 \\ i + 1 & \text{si } (i, j) = (i, 3), n + 6 \leq i \leq m - 1 \\ n & \text{si } (i, j) = (n - 1, 2) \\ n - 1 & \text{si } (i, j) = (n + 1, 2) \\ i + 2 & \text{si } (i, j) = (i, 2), n + 2 \leq i \leq m - 2 \\ n - 5 & \text{si } (i, j) = (m - 1, 2) \\ n - 2 & \text{si } (i, j) = (m, 2) \\ n - 6 & \text{si } (i, j) = (m, 3) \\ i - n - 1 & \text{si } (i, j) = (i, n), n + 2 \leq i \leq 2n - 1 \\ i - n + 1 & \text{si } (i, j) = (i, n), 2n \leq i \leq 4n - 14 \\ n - 1 & \text{si } (i, j) = (n, n) \\ m & \text{si } (i, j) = (n + 1, n) \\ n - 3 & \text{si } (i, j) = (n - 4, n + 1) \\ 1 & \text{si } (i, j) = (n - 3, n + 1) \\ n - 4 & \text{si } (i, j) = (n - 2, n + 1) \\ n - 2 & \text{si } (i, j) = (n + 2, n + 1) \\ i + 1 & \text{si } (i, j) = (i, n + 1), 1 \leq i \leq n - 6 \\ 4(n - 3) & \text{si } (i, j) = (n - 5, n + 1) \\ m & \text{si } (i, j) = (n + 1, n + 1) \\ i - 2 & \text{si } (i, j) = (i, n + 1), n + 3 \leq i \leq 4n - 11 \\ i - 1 & \text{si } (i, j) = (i, n + 1), 4n - 7 \leq i \leq m \end{array} \right.$$

Le système dominant est l'ensemble suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i, 1), i = 1 \dots n, (n + 3r + k - 7, r + 1), r = 1 \dots n - 1, \\ 0 \leq k \leq 2, (n - 1, n + 1), (n, n + 1), (n + 1, n + 1) \end{array} \right\}.$$

Si  $m = 4n - 3$ , le graphe  $K_{4n-3} \square R_n$  admet une  $(m + 3)$ -coloration dominante. On propose la procédure de coloration suivante : Notons que  $i$  est calculé modulo  $m$  si  $m - 2 \leq i \leq n - 3$  et  $2n + 2r + 8 \leq i \leq m + n - r - 5$ .

$$c(i, j) = \left\{ \begin{array}{ll}
 i & \text{si } (i, j) = (i, 1), 1 \leq i \leq n-6, i = 1 \dots m \\
 m+i & \text{si } (i, j) = (i, 2), 1 \leq i \leq 3 \\
 m+1 & \text{si } (i, j) = (k+1, n-k), 1 \leq k \leq n-4, (n-1, n+1) \\
 & \text{et } (n, n) \\
 m+2 & \text{si } (i, j) = (k+2, n-k), 1 \leq k \leq n-5, (n-2, n), \\
 & (n, n+1) \text{ et } (1, 4) \\
 m+3 & \text{si } (i, j) = (k+3, n-k), 1 \leq k \leq n-6, (n-2, n+1), (n-1, n), \\
 & (1, 5) \text{ et } (2, 4) \\
 n+k & \text{si } (i, j) = (k+3, 2), 1 \leq k \leq n-3 \\
 n & \text{si } (i, j) = (n-2, 2) \\
 n-2 & \text{si } (i, j) = (n-1, 2) \\
 n-1 & \text{si } (i, j) = (n, 2) \\
 i-n+6 & \text{si } (i, j) = (i, 2), n+1 \leq i \leq 2n-9 \\
 i+3 & \text{si } (i, j) = (i, 2), 2n-8 \leq i \leq m-9 \\
 i+6 & \text{si } (i, j) = (i, 2), m-8 \leq i \leq m-6 \\
 m-4 & \text{si } (i, j) = (m-5, 2) \\
 m-3 & \text{si } (i, j) = (m-4, 2) \\
 m-5 & \text{si } (i, j) = (m-3, 2) \\
 k & \text{si } (i, j) = (m-3+k, 2), 1 \leq k \leq 3 \\
 m+10-n-k & \text{si } (i, j) = (k, 3), 1 \leq k \leq 3 \\
 m+3-n+i & \text{si } (i, j) = (i, 3), 7 \leq i \leq n \\
 k & \text{si } (i, j) = (n+3+k, 3), 1 \leq k \leq 3 \\
 i-3 & \text{si } (i, j) = (i, 3), n+7 \leq i \leq m+9-n \\
 n-m-3+I & \text{si } (i, j) = (i, 3), m+10-n \leq i \leq m \\
 m+3-i & \text{si } (i, j) = (i, 4), 3 \leq i \leq n-4 \\
 i-n-6 & \text{si } (i, j) = (i, 4), n+7 \leq i \leq 2n+3 \\
 i+6-n & \text{si } (i, j) = (i, 4), 2n+4 \leq i \leq m \\
 k & \text{si } (i, j) = (k+1, 5), n+7 \leq i \leq 2n+3 \\
 m-k & \text{si } (i, j) = (n-2+k, 5), 0 \leq k \leq 2 \\
 i-15 & \text{si } (i, j) = (i, 5), n+10 \leq i \leq n+15 \\
 i-3 & \text{si } (i, j) = (i, 5), n+16 \leq i \leq m \\
 i-n & \text{si } (i, j) = (i, n), n+1 \leq i \leq m-12 \\
 i-9-n & \text{si } (i, j) = (i, n), m-2 \leq i \leq n-3 \\
 k+6 & \text{si } (i, j) = (k, n+1), 1 \leq k \leq 3 \\
 6 & \text{si } (i, j) = (4, n+1) \\
 4 & \text{si } (i, j) = (5, n+1) \\
 5 & \text{si } (i, j) = (6, n+1) \\
 k+9 & \text{si } (i, j) = (6+k, n+1), 1 \leq k \leq n-9 \\
 m-2+k & \text{si } (i, j) = (m-14+k, n+1), 0 \leq k \leq 2 \\
 k & \text{si } (i, j) = (m-12+k, n+1), 1 \leq k \leq 3 \\
 n+6-k & \text{si } (i, j) = (m-5+k, n+1), 0 \leq k \leq 5 \\
 i+6 & \text{si } (i, j) = (i, n+1), n+1 \leq i \leq m-15 \\
 n+3r-k+6 & \text{si } (i, j) = (n+3r+k-2, r+3), 1 \leq r \leq n-30 \leq k \leq 2 \\
 n+3r+k-5 & \text{si } (i, j) = (n+3r+k-4, r+1), 1 \leq r \leq n-1, 0 \leq k \leq 1 \\
 n+3r-5 & \text{si } (i, j) = (n+3r-3, r+3), 1 \leq r \leq n-2 \\
 i-n+r+2 & \text{si } (i, j) = (i, r+5), n-1-r \leq i \leq n+3r, 1 \leq r \leq n-6 \\
 i+r-n-7 & \text{si } (i, j) = (i, r+5), n+3r+10 \leq i \leq 2n+2r+7, 1 \leq r \leq n-6 \\
 i-n+r+5 & \text{si } (i, j) = (i, r+5), 2n+2r+8 \leq i \leq m+n-r-5, 1 \leq r \leq n-6
 \end{array} \right.$$

### 3.4 La $b$ -coloration et l'hypercube

Tout d'abord, on cite les résultats suivants :

**Théorème 3.4.1.** (Mekkia Kouider et Maryvonne Mahéo[13]). Soient  $G$  et  $H$  deux graphes, tels que  $G$  admet un  $\varphi(G)$ -système stable dominant et  $H$  admet un  $\varphi(H)$ -système stable dominant. Alors

$$\varphi(G \square H) \geq \varphi(G) + \varphi(H) - 1$$

De plus le graphe  $G \square H$  admet un  $(\varphi(G) + \varphi(H) - 1)$ -système stable dominant.

**Remarque 3.4.1.** (Mekkia Kouider-Maryvonne Mahéo[13]). L'inégalité du théorème précédent est encore confirmée si le système dominant de  $G$  n'est pas stable, mais  $2 \leq \varphi(G) < \varphi(H)$

Remarquons qu'un hypercube  $Q_d$  de dimension  $d$  a  $\varphi(Q_1) = \varphi(K_2) = 2$  et  $\varphi(Q_2) = \varphi(C_4) = 2$ .

Il est facile de déduire que, pour tout  $d \geq 3$ ,  $Q_d$  admet une  $(d+1)$ -coloration dominante.

En effet, d'après l'inégalité de Mekkia Kouider et Maryvonne Mahéo [13], on a :

$$2 \leq \varphi(Q_d) \leq d + 1 \tag{3.3}$$

Montrons que pour  $d \geq 3$ ,  $Q_d \geq d + 1$ .

Le raisonnement se fait par récurrence sur  $d$ .

Si  $d = 3$  l'hypercube  $Q_3$  admet une 4-coloration dominante (figure 3.1).

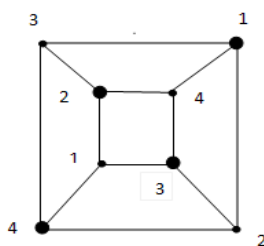


FIG. 3.1 –  $Q_3$

Si  $d \geq 4$ , on a  $Q_{d+1} = Q_d \square Q_1$  et comme  $2 \leq \varphi(Q_1) < \varphi(Q_d)$ . D'après la remarque précédente, on a  $\varphi(Q_{d+1}) \geq \varphi(Q_d) + \varphi(Q_1) - 1$ , d'où  $\varphi(Q_{d+1}) \geq d + 2$ .

On en déduit alors que, pour tout  $d \geq 3$ , on a :

$$\varphi(Q_d) \geq d + 1 \quad (3.4)$$

De (3.3) et (3.4), on obtient :

$$\varphi(Q_d) = d + 1$$

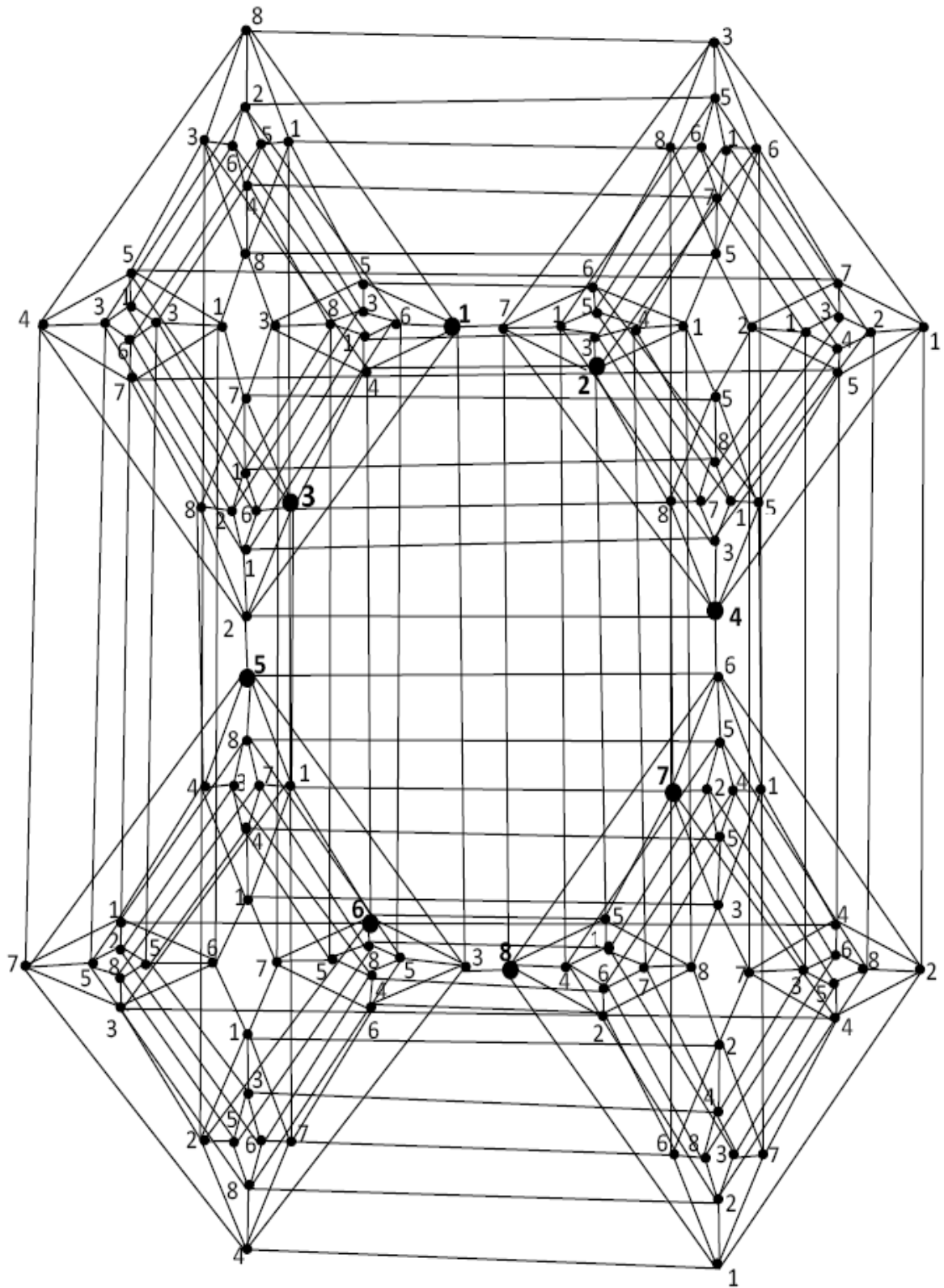
Mekkia Kouider-Maryvonne Mahéo[13] ont démontré qu'un hypercube  $Q_d$  admet un système stable dominant si  $d = 3k$  et  $d = 3k + 2$ , où  $k \geq 1$ .

Plus générale on énonce la proposition suivante :

**Proposition 3.4.1.** *Tout hypercube  $Q_d$ , de dimension  $d \geq 5$  admet un  $(d+1)$ -système stable dominant.*

**Preuve 3.4.1.** *Les deux cas  $d = 3k$  et  $d = 3k + 2$  ont été démontrés par Mekkia Kouider-Maryvonne Mahéo[13].*

*On s'intéresse au troisième cas,  $d = 3k + 1$ , où  $k = 2$ , le graphe  $Q_7$  admet un 8-système stable dominant, comme il est figuré ci-dessous. Notons qu'on n'a pas figuré toutes les arêtes du  $Q_7$ , et que les sommets en gras constituent un système dominant stable.*



Si  $k \geq 3$ . Remarquons que  $Q_{3(k+1)+1} = Q_{3(k-1)} \square Q_7$ . Comme les deux graphes

$Q_{3(k-1)}$  et  $Q_7$  admettent des systèmes stables dominants. Alors d'après le théorème précédent, on déduit que le produit vérifié aussi cette propriété.  $\square$

La proposition suivante donne des bornes inférieures de nombre b-chromatique du produit cartésien de l'hypercube quelques graphes particuliers.

**Proposition 3.4.2.** *Soient  $Q_d$ ,  $P_n$ ,  $C_n$  et  $R_n$ ,  $n \geq 5$ ,  $d \geq 5$  sont respectivement l'hypercube de dimension  $d$ , la chaîne de longueur  $n$ , le cycle de longueur  $n$  et la roue à  $n$  rayons, alors on a :*

1.  $\varphi(Q_d \square Q_n) = d + n - 1$
2.  $\varphi(Q_d \square P_n) \geq d + 3$
3.  $\varphi(Q_d \square C_n) \geq d + 3$
4.  $\varphi(Q_d \square R_n) \geq d + 4$

De plus :

- Le graphe  $Q_d \square Q_n$  admet un  $(d + n - 1)$ -système stable dominant, si  $n \geq 5$
- Le graphe  $Q_d \square C_n$  admet un  $(d + 3)$ -système stable dominant, si  $n \geq 6$
- Le graphe  $Q_d \square P_n$  admet un  $(d + 3)$ -système stable dominant, si  $n \geq 7$

**Preuve 3.4.2.** *Il suffit de remarquer que  $\varphi(Q_d \square Q_n) = \varphi(Q_{d+n}) = n + d + 1$*

*La démonstration de 2, 3, 4 découle directement du théorème 3.4.1*  $\square$

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes principalement intéressés à l'étude de la b-coloration de graphe  $K_m \square R_n$ . Nous avons donné les valeurs exactes de nombre b-chromatique de ce graphe. Ainsi des algorithmes de colorations sont proposés. De même nous avons donné des bornes inférieures de nombre b-chromatique du produit cartésien de quelques graphes et de l'hypercube.

## Chapitre 4

# Les graphes b-parfaits

### 4.1 introduction

En général, le nombre b-chromatique d'un graphe est supérieur à son nombre chromatique. C.T.Hoàng et M.Kouider [9] se sont intéressés à la caractérisation des graphes dont le nombre b-chromatique est égal au nombre chromatique.

Ce chapitre débute par un inventaire des principaux résultats obtenus sur cette nouvelle classe de graphes, ensuite nous montrons que le joint de deux graphes b-parfait est un graphe b-parfait. On adopte la définition suivante d'un graphe b-parfait

**Définition 4.1.1.** (C.T.Hoàng et M.Kouider [9]). *Un graphe  $G$  est dit b-parfait si tout sous graphe induit  $H$  de  $G$ , on a  $\varphi(H) = \chi(H)$ .*

De même on définit le graphe b-imparfait minimal comme suit :

**Définition 4.1.2.** (C.T.Hoàng et M.Kouider [9]). *Un graphe est dit b-imparfait minimal s'il n'est pas b-parfait, mais chaque sous graphe induit propre de ce graphe est b-parfait.*

On énonce d'abord les résultats suivants concernant quelques propriétés des graphes b-imparfaits minimaux.

**Proposition 4.1.1.** (C.T.Hoàng et M.Kouider [9]). *Si  $G$  est un graphe b-imparfait minimal alors son complémentaire  $\bar{G}$  est connexe et aucune composante de  $G$  n'est une clique.*

**Proposition 4.1.2.** *(C.T.Hoàng et M.Kouider [9]). Soit  $G$  un graphe biparti. Si  $G$  admet  $2K_2$  comme sous graphe induit alors  $G$  admet aussi  $P_5$  comme sous graphe induit, où  $P_5$  est la chaîne de longueur 5 et  $2K_2$  est le graphe constitué de deux copies de  $K_2$ .*

Remarquons que le lemme est faux si  $G$  n'est pas biparti ; comme le cas de famille des triangles avec exactement un sommet  $u_0$  en commun.

**Proposition 4.1.3.** *(C.Hoàng, Clàudia Linhares Sales, Frédéric Maffray[10]). Soit  $G$  un graphe  $b$ -imparfait minimal et  $u$  un sommet simplicial de  $G$ . Alors  $u$  n'est pas un sommet dominant pour aucune classe de couleurs dominante  $\varphi$  de  $G$ .*

**Proposition 4.1.4.** *(C.Hoàng, Clàudia Linhares Sales, Frédéric Maffray[10]). Soit  $G$  un graphe  $b$ -imparfait minimal.  $u, v$  deux sommets de  $G$  non adjacents, tels que  $N(u) \subseteq N(v)$  et  $c$  est une coloration dominante de  $\varphi$  couleurs. Alors  $c(u) \neq c(v)$ , et  $u$  n'est pas un sommet dominant, en particulier, si  $N(u) = N(v)$ , alors  $u$  et  $v$  ne sont pas dominants.*

Au cours de ce chapitre, pour un graphe donné  $F$ , on sous entend par l'expression : un graphe  $G$  est sans  $F$ ,  $G$  n'admet aucun sous graphe induit isomorphe à  $F$ .

## 4.2 Quelques résultats sur les graphes $b$ -parfaits

C.T.Hoàng et M. Kouider [9] ont prouvé un résultat très important concernant les graphes bipartis  $b$ -parfaits, comme le démontre le théorème suivant. Remarquons d'abord que les graphes  $P_5, 3P_3$  et  $P_4 + P_3$  ne sont pas  $b$ -parfaits. En effet on a :

$$\varphi(P_5) = \varphi(3P_3) = \varphi(P_4 + P_3) = 3 \text{ et } \chi(P_5) = \chi(3P_3) = \chi(P_4 + P_3) = 2$$

**Théorème 4.2.1.** *(C.T.Hoàng et M.Kouider [9]). Soit  $G$  un graphe biparti. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $G$  est  $b$ -parfait
2.  $G$  est sans  $P_5$ , sans  $3P_3$  et sans  $P_4 + P_3$ .

Le graphe  $P_5$  et son complémentaire ont une relation centrale avec les graphes  $b$ -parfaits. Le théorème suivant le prouve.

**Théorème 4.2.2.** (C.T.Hoàng et M.Kouider [9]) *Si  $G$  est un graphe sans  $2K_2$  et sans  $\bar{P}_5$ , alors  $G$  est b-parfait.*

La démonstration de ce théorème découle du théorème suivant :

**Théorème 4.2.3.** (C.T.Hoàng et M.Kouider [9]). *Si  $G$  est un graphe sans  $2K_2$ , sans  $\bar{P}_5$  et sans  $C_5$  alors  $G$  est b-parfait.*

Remarquons que le graphe  $2(K_4 - e)$  n'est pas b-parfait puisque,  $\varphi(2(K_4 - e)) = 4$  et  $\chi(2(K_4 - e)) = 3$ . De plus il est sans  $2K_2$  et sans  $\bar{P}_5$ . A partir de cette remarque nous citons le théorème suivant :

**Théorème 4.2.4.** (C.T.Hoàng et M.Kouider [9]). *Soit  $G$  un graphe sans  $2K_2$  et sans  $K_4 - e$ . Si  $\omega(G) \geq 4$  alors  $\varphi(G) = \chi(G) = \omega(G)$ . De plus, il existe des graphes sans  $2K_2$  et sans  $K_4 - e$  avec  $\omega(G) = 3$  et  $\varphi(G) > \chi(G)$ .*

C.T.Hoàng et M. Kouider [9] ont étudié la b-perfection de quelques classes de graphes particulières comme la classe de graphes nommée  $P_4$ -sparse. Cette dernière est une sous classe de graphes sans  $2K_2$  et sans  $\bar{P}_5$ . On dira qu'un graphe  $G$  est  $P_4$ -sparse s'il n'existe pas un sous ensemble de cinq sommets qui contient plus qu'une chaîne de longueur 4.

**Théorème 4.2.5.** (C.T.Hoàng et M.Kouider [9]) *Soit  $G$  un graphe  $P_4$ -sparse. Alors les deux assertions sont équivalentes :*

*$G$  est b-parfait*

*$G$  est sans  $2(K_4 - e)$ , sans  $3P_3$  et sans  $(P_4 + P_3)$ .*

### 4.3 Conjectures sur les graphes b-parfaits

C.Hoàng, Clàudia Linhares Sales, Frédéric Maffray[10] ont regroupé un ensemble de 22 graphes qui sont b-imparfaits minimaux ; noté  $\mathcal{F}$  cité ci-dessous (Fig. 4.1).

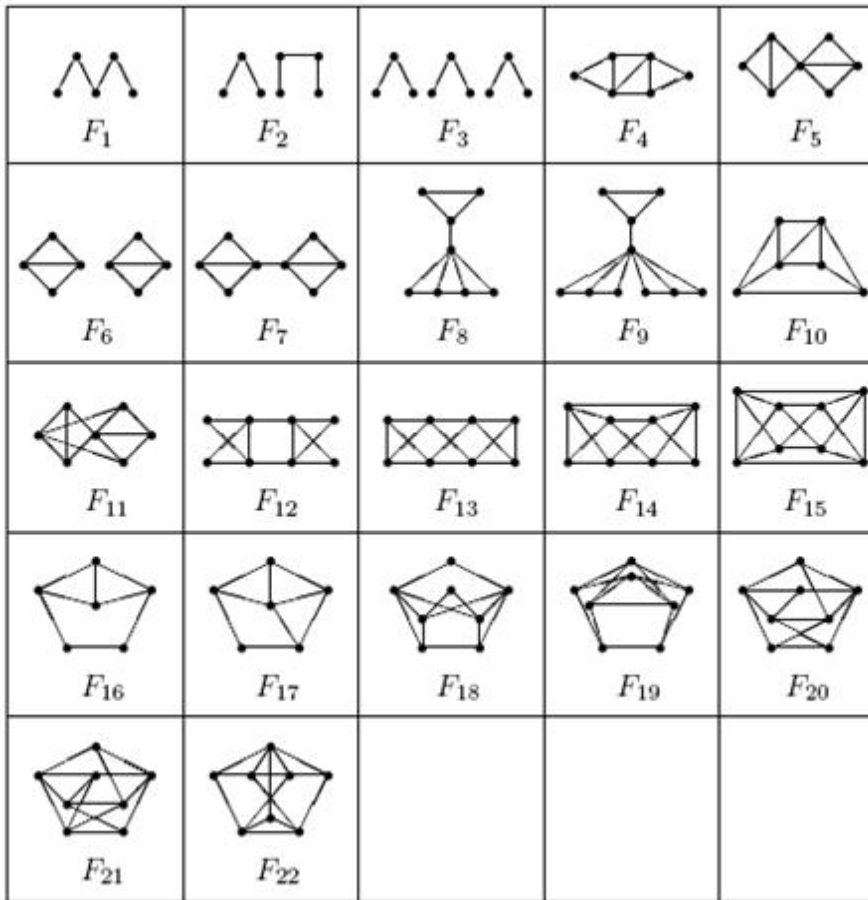


FIG. 4.1 – L'ensemble  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_{22}\}$

Ils ont proposé les deux conjectures suivantes :

**Conjecture 4.3.1.** (C.Hoàng, Clàudia Linhares Sales, Frédéric Maffray[10]). Un graphe  $G$  est  $b$ -parfait si et seulement si il ne contient pas un sous graphe induit isomorphe à un des graphes de l'ensemble  $\mathcal{F}$ .

**Conjecture 4.3.2.** (C.Hoàng, Clàudia Linhares Sales, Frédéric Maffray[10]). Un graphe  $b$ -imparfait minimal qui admet un triangle comme sous graphe induit vérifié  $\varphi(G) = 4$  et  $\omega(G) = 3$ .

la première conjecture a été démontée par les mêmes auteurs pour les graphes sans  $K_4 - e$  et les graphes dont le nombre chromatique est au plus 3. Comme le montre les deux théorèmes suivants :

**Théorème 4.3.1.** (C.Hoàng, Clàudia Linhares Sales, Frédéric Maffray[10]). La conjecture 4.3.1 est confirmée si  $G$  est un graphe sans  $K_4 - e$ .

**Théorème 4.3.2.** *(C.Hoàng, Clàudia Linhares Sales, Frédéric Maffray[10]). La conjecture 4.3.1 est justifiée pour un graphe  $G$  dont le nombre chromatique est au plus 3.*

La conjecture a été aussi prouvée par F.Maffray and M. Mechbbek[16] pour les graphes triangulés et les graphes sans cycles de longueur 4.

**Théorème 4.3.3.** *(F.Maffray and M. Mechbbek[16]). Si  $G$  est un graphe triangulé ne contenant pas un graphe de l'ensemble  $\mathcal{F}$ , alors  $G$  est b-parfait.*

Le théorème suivant généralise le précédent :

**Théorème 4.3.4.** *(F.Maffray and M. Mechbbek[16]). Soit  $G$  un graphe sans  $C_4$  et ne contenant pas un graphe de  $\mathcal{F}$ , alors  $G$  est b-parfait.*

Il est aussi prouvé que :

**Lemme 4.3.1.** *(F.Maffray and M. Mechbbek[16]). Soit  $G$  un graphe b-imparfait minimal ne contenant pas un graphe de l'ensemble  $\mathcal{F}$ , alors  $G$  est connexe.*

## 4.4 La b-perfection et quelques opérations sur les graphes

Remarquons que le produit cartésien de deux graphes b-parfaits n'est pas b-parfaits en général. En effet les graphes  $C_4$  et  $K_2$  sont b-parfaits, mais leur produit cartésien donne l'hypercube  $Q_3$  qui ne l'est pas.

Pour le cas de joint de graphes, on énonce la proposition suivante :

**Proposition 4.4.1.** *Soient  $G$  et  $G'$  deux graphes, si  $G$  et  $G'$  sont b-parfait, alors  $G \cup G'$  est b-parfait.*

**Preuve 4.4.1.** *Supposons que  $G \cup G'$  n'est pas b-parfait, alors il contient un sous graphe induit  $H$ , tel que  $H$  ne l'est pas.*

*On a nécessairement  $H \neq G \cup G'$ .*

*En effet, d'après le lemme 2.5.5 on a  $\varphi(G \cup G') = \varphi(G) + \varphi(G')$  et  $\chi(G \cup G') = \chi(G) + \chi(G')$ .*

*Supposons maintenant que  $H$  n'est pas b-parfait. D'après le théorème 4.2.2 de C.T.Hoàng*

et M.Kouider [9],  $H$  contient un sous graphe induit isomorphe à  $2K_2$  ou  $\bar{P}_5$ .

Supposons que  $H$  contient un  $2K_2$ , considérons d'abord le cas où un des deux  $K_2$  est dans  $G$  et l'autre est dans  $G'$ .

Soient  $a, b, c, d$  les sommets de  $2K_2$ , tels que  $a, b \in V(G)$  et  $c, d \in V(G')$ . Dans ce cas, on a pas d'adjacence ente le sommet  $a$  et les sommets  $c$  et  $d$ , ni entre le sommet  $b$  et les sommets  $c$  et  $d$ . Comme  $G \cup G'$  est le joint de deux graphes, contradiction avec la définition de joint des deux graphes.

On atteint la même contradiction si les deux  $K_2$  ont une extrémité dans  $G$  et l'autre est dans  $G'$ .

Pour le deuxième cas et sans perte de généralité supposons que une copie de  $K_2$  relie deux sommets de  $G$  et la deuxième copie de  $K_2$  a une extrémité dans  $G$  et l'autre dans  $G'$ , on obtient une autre fois une contradiction avec la définition de joint deux graphes.

On suit le même raisonnement pour démontrer que  $H$  ne contient pas de  $\bar{P}_5$ .  $\square$

# Conclusion générale

De nombreux problèmes pratiques peuvent être modélisés par la coloration des sommets d'un graphe. C'est pourquoi, cette dernière a connu un assez grand engouement ces dernières décennies.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés en premier lieu, à regrouper les principaux résultats obtenus jusqu'ici sur le nombre b-chromatique. Puis, nous nous sommes particulièrement intéressés à l'étude de la b-coloration d'un produit cartésien de quelques graphes.

En effet, nous avons déterminé le nombre b-chromatique du produit cartésien d'un graphe complet et d'une roue à quatre rayons. Ensuite, des algorithmes de recherche du nombre b-chromatique de produits cartésien de graphes complets et de roues quelconques sont proposés.

Nous avons aussi donné un aperçu sur les graphes b-parfaits et nous avons montré que le joint de deux graphes b-parfait est un graphe b-parfait.

Les résultats obtenus jusqu'à ici sur la b-coloration des graphes nous permettent, actuellement, de connaître le nombre b-chromatique de certains graphes et produits de graphes; mais beaucoup de problèmes restent ouverts, comme le nombre b-chromatique de graphe  $K_n \square K_n$ .

Nous avons aussi énoncé les deux célèbres conjectures de C. Hoàng, Claudia Linhares Sales et Frédéric Maffray [10] sur les graphes b-parfait. La première a été vérifiée pour les graphes sans  $K_4 - e$ , sans  $P_4$ , sans  $C_4$ , les graphes dont le nombre chromatique est au plus 3, les graphes triangulés et les graphes bipartis.

Il est important d'essayer de prouver la conjecture dans le cas général. Une question partiel est d'abord de confirmer la conjecture concernant les graphes b-imparfaits

minimaux. Ce travail nous montre que beaucoup de problèmes ouverts restent à traiter ; mais néanmoins des résultats importants sont obtenus

# Bibliographie

- [1] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi,B.Ferdjalah, Automorphism groups of generalized Hamming graphs. (Communication. ISOR 2-6-Novembre 2008. Alger)
- [2] F.Affif Chaouche, *Problèmes d'existence en structure discrètes*,Thèse de doctorat,USTHB,2008
- [3] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi. *Some bounds for the b-chromatic number of a generalized Hamming graphs*. Far East Journal of Applied Mathematics. Volume 26, No.3 (2007) 375-391.
- [4] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi, *On a b-chromatic number of a generalized Hamming graphs*, (communication COSI'06). Alger 11-13 Juin 2006. Actes du colloque. COSI'06 206-214.
- [5] C.Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod University 1973.
- [6] A.Berrachedi, *Sur quelques propriétés métriques des graphes de type hypercube*, Thèse doctores sciences, USTHB, 1997.
- [7] B.Effantin and H. Kheddouci, *The b-chromatic number of some power graphs*. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 6, 2003, 0045-054.
- [8] A.El Sahili and M. Kouider. *About b-coloring of regular graphs*. Rapport de Recherche N : 1432. Unité mixte de recherche 8623. CNRS-Université Paris Sud-LRI 02/2006.
- [9] C.T.Hoàng and M.Kouider, *On the b-dominating coloring of graphs*, Discrete Applied Mathematics 152(2005),176-186

- [10] C.Hoàng, Clàudia Linhares Sales, Frédéric Maffray On minimally  $b$ -imperfect graphs Laboratoire G-SCOP no 161.46 av. Félix Viallet, 38000 GRENOBLE, France
- [11] R. W. Irving and D.F.Manlove, *the  $b$ -chromatic number of a graph*. Discrete Applied Mathematics 91(1999), 127-141
- [12] M.Kouider,  *$b$ -chromatic number of graph, subgraph and degrees*. Rapport interne LRI,1392
- [13] M.Kouider, M.Mahèò. *Some bounds for the  $b$ -chromatic number of a graph*. Discrete Mathematics 256 (2002) 267-277.
- [14] M. Kouider and M. Zaker. *Bounds for the  $b$ -chromatic number of some families of graphs*. ar Xiv : math. Co/0506167 v1 9 Jun 2005.
- [15] J.Kratochvil, Z.Tuza and M.voigt. *On the  $b$ -chromatic number of graphs*. Lecture notes in Computer Science, Springer Berlin 2573, 310-320, (2002).
- [16] F. Maffray and M. Mechbbek, *On  $b$ -perfect chordal graphs*, November 26, 2007
- [17] H.M. Mulder *The interval function of a graph*
- [18] B. Omoomi and R. Javadi, *On the  $b$ -coloring of cartisian product of graphs*. to appear in Ars Combinatoria
- [19] J.M.Laborde and S.P.Rao Hebbare, *Another characterization of hypercubes*. Discrete Math, 39 (1982), 161-166.
- [21] Benoit Larose, Claudia Malvenuto, *Stable sets of maximal size in Kneser-type graphs*, European Journal of Combinatorics. (2003) 1-17.
- [22] Rafai Mourad MADANI. *Généralisation d'hypercubes et de  $(0, 2)$ -graphes*. 1994. Thèse présentée pour obtenir le titre de docteur en Informatique, Spécialité Recherche Opérationnelle. De l'université Joseph Fourier-Grenoble 1.
- [23] M.Mollard, *Les invariants du  $n$ -cube*, Thèse troisième cycle, Université Joseph Fourier. Grenoble 1981.
- [24] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi, *Une extension des Hypercubes*. Rencontre des Mathématiciens Algériens. (RMA 2000). Alger 21-24 Mai 2000.

- [25] B. Jamison, S. Olariu. *Linear-time optimization algorithms for  $p_4$ -sparse graphs*. Discrete Applied Mathematics.
- [26] Peter J.Cameron. *Random strongly regular graphs ?* Discrete Mathematics 273 (2003) 103-114.
- [27] M.J.Granell, T.S.Griggs, V.P.Korzhik, J.Siran. *On the minimal nonzero distance between triangular embeddings of a complete graph*. Discrete Mathematics 269 (2003) 149-160.
- [28] Gerzson Kéri, *On small covering codes in arbitrary mixed Hamming spaces*. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, accepted for publication.
- [29] T. Faik. *La  $b$ -continuité des  $b$ -colorations : complexité, propriétés structurelles et algorithmes*. PhD thesis, Univ. Orsay, France, 2005.
- [30] M.C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs.*, Annals of Discrete Mathematics 57, 2nd Edition, North Holland, 2004.
- [31] J. Ramirez-Alfonsin, B. Reed. *Perfect Graphs*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley, 2001.