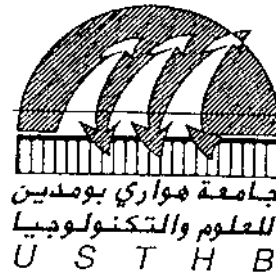


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE



FACULTE D'ÉLECTRONIQUE ET D'INFORMATIQUE

THESE

Présentée pour l'obtention du titre de

DOCTEUR D'ETAT EN ELECTRONIQUE

Spécialité : Automatique

Par

HEDJAR Ramdane

Sujet

**CONTRIBUTION A L'ANALYSE ET A LA SYNTHÈSE
DE COMMANDES ADAPTATIVES ET PREDICTIVES.
APPLICATION A UN PROCESSUS PHYSIQUE.**

Soutenue le 10 Décembre 2002 à l'USTHB devant le jury composé de :

Mr ADANE Abelhamid
Mr TOUMI Redouane
Mr BOUCHER Patrick
Mr GUESSOUM Abderezak
Mr BOUDJEMA Farès
Mr ATTARI Mokhtar
Mm SAADIA Nadia

Professeur USTHB
Professeur USTHB
Professeur Supélec Paris
Professeur U. Blida
Professeur ENP Alger
Professeur USTHB
Maître de Conférences USTHB

Président
Directeur de thèse
Codirecteur de thèse
Examineur

Notations :

θ : Vecteur des paramètres du modèle ARMAX.

$\xi(t)$: Séquence aléatoire gaussienne.

$A(\theta, q^{-1}), B(\theta, q^{-1}), C(q^{-1}), D(q^{-1})$: Polynômes du modèle ARMAX.

$R(\theta, q^{-1}), S(\theta, q^{-1}), T(\theta, q^{-1})$: Polynômes du régulateur.

$A_m(q^{-1}), B_m(q^{-1})$: Polynômes du modèle de référence.

$P(q^{-1})$: Polynôme désiré.

$\Phi(t)$: Vecteur des mesures.

$\Gamma(t)$: Matrice du gain d'adaptation.

$\lambda(t)$: Facteur d'oubli.

$G(q^{-1})$: Fonction de transfert du filtre passe-bande.

$y^*(t)$: Trajectoire de référence pour les systèmes mono-variable.

$e_y(t), e_u(t)$: Erreurs de poursuite de sortie et d'entrée.

$f(x), g(x), h(x)$: Fonctions vectorielles continues et dérivables.

$y_{ref}(t), x_{ref}(t)$: Trajectoire de référence de sortie et d'état pour les systèmes non linéaires.

h, h_c : Horizon de prédiction de sortie (ou d'état) et de commande.

$\mathbf{Q}, \mathbf{Q}_i, \mathbf{R}$: Matrices définie positive de pondération du critère quadratique.

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$: Matrices de représentation d'état continu.

$\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k$: Matrices de représentation d'état discret.

$\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)$: Positions et vitesses articulaires.

$\mathbf{q}_{ref}(t), \dot{\mathbf{q}}_{ref}(t)$: Trajectoires de référence des positions et vitesses articulaires.

$\mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathbf{U}(\mathbf{q})$: Le Lagrangien, énergie cinétique et potentiel.

$\mathbf{M}(\mathbf{q}), \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathbf{G}(\mathbf{q})$: Matrices d'inertie, de coriolis et des forces de gravités.

τ : Vecteur couple de commande.

$\mathbf{f}, \mathbf{f}_r$: Matrices des frottements secs et visqueux.

$\mathbf{J}$: L'inertie de la machine.

Ω, Ω_{ref} : Vitesse rotorique de la machine asynchrone et vitesse rotorique de référence.

ϕ_{rd}, ϕ_{rq} : Flux rotorique dans le repère (d,q).

ϕ_{sd}, ϕ_{sq} : Flux statorique dans le repère (d,q).

U_{sd}, U_{sq} : Tension statorique de commande dans le repère (d,q).

C_{em}, C_{res} : Couple électromagnétique et résistant.

I_{sd}, I_{sq} : Courant statorique dans le repère (d,q).

T_s : Période d'échantillonnage.

T_r : Constante de temps rotorique.

Introduction générale

Etant donné un système, défini comme un ensemble physique, l'objectif principal de l'Automatique est l'élaboration d'une loi de commande pour lui conférer des propriétés qu'il n'avait pas naturellement ou de renforcer ces propriétés si elles existaient déjà.

Pour mener à bien cette mission, l'automaticien a à sa disposition des méthodologies qui permettent principalement de :

- Synthétiser de manière systématique des lois de commande à partir d'un cahier des charges donné (synthèse).
- Garantir le bon fonctionnement des lois de commande une fois qu'elles sont appliquées au système physique concerné (analyse).

Depuis que la notion de bouclage a été formalisée par Black, les avancées de l'Automatique se sont faites par des progrès techniques (progrès de l'Informatique ou par la résolution de problèmes mathématiques tels que l'optimisation, l'algèbre linéaire...). D'autre part, ce progrès a été traduit par des applications de la commande des procédés linéaires (ou linéarisés) dans le domaine industriel. Ainsi, différentes stratégies de commande ont été développées (PID, GMV, placement de pôles, LQ, LQG, H_∞ ...) pour des systèmes linéaires représentés par une fonction de transfert ou représentés dans l'espace d'état. L'une des stratégies la plus utilisée est la commande à placement de pôles. Cette approche permet de spécifier la dynamique de régulation par les pôles désirés et de calculer un régulateur R-S-T pour des systèmes stables ou instables et :

- Sans restriction sur le degré du modèle du procédé,
- Sans restriction sur le retard du procédé,
- Sans restriction sur les zéros du procédé (stable ou instable).

Il faut noter qu'en présence de bruit de mesure, cette loi de commande peut amplifier la variance de régulation.

Dans ce travail, nous proposons une sur-paramétrisation du régulateur R-S-T qui permet de minimiser la variance de régulation tout en maintenant les performances de régulation spécifiées par les pôles désirés. Cette stratégie permet de calculer un régulateur optimal à placement de pôles et assure une variance minimale de la variable réglée autour de la consigne dans le cas où le procédé serait sujet à des perturbations aléatoires.

En présence de variations des paramètres du système, le maintien d'un haut niveau de performances peut être impossible à atteindre avec un régulateur fixe conçu au préalable sur un système dit nominal.

Le maintien d'un niveau de performances correct est, dès lors, rendu possible par le développement d'une version adaptative du régulateur. Nous présentons dans cette thèse une version de la commande à placement de pôles avec réduction de la variance de régulation adaptative. Cette méthode permet de réduire la variance de régulation autour de la consigne et d'affiner les performances obtenues avec la commande à placement de pôles en présence d'incertitudes paramétriques, dès que ces incertitudes demeurent raisonnables, ce qui est le cas lorsque les modèles sont correctement identifiés. Cependant, l'algorithme d'adaptation paramétrique est un mécanisme non linéaire qui peut dériver en présence de perturbations aléatoires ou de dynamiques négligées.

Il faut noter qu'il existe des méthodes de commande robustes vis-à-vis des incertitudes structurées et non structurées sans le processus d'adaptation paramétrique :

- La commande H_∞ , qui requiert une connaissance à priori des gabarits fréquentiels des incertitudes,
- La commande à base de logique floue, qui nécessite un temps de traitement important,
- Commande non linéaire à base de réseau de neurones dynamiques [MOR-1], qui nécessite l'intégration des mécanismes de stabilité et de robustesse [ORT-1] (dead zone, σ -modification,...) dans l'algorithme d'ajustement des poids synaptiques du réseau [SHU],
- La commande prédictive.

La philosophie de la commande prédictive se base sur la création d'un effet anticipatif par exploitation de la trajectoire à suivre dans le futur et minimisation d'un critère quadratique à horizon fini. La commande s'établit en utilisant le principe d'horizon fuyant. Cette structure de commande n'a émergé dans le domaine industriel qu'à partir du milieu des années 1980. En effet, le réel essor de la commande prédictive s'est manifesté grâce aux travaux de D. W. Clarke qui a popularisé son concept. A partir des travaux présentés par Clarke *et al* [CLA-2], de nombreux résultats d'applications ont été publiés et ce dans des domaines très variés tels que les secteurs de l'industrie chimique, de l'industrie pétrolière, de la robotique ainsi que dans le domaine des actionneurs (moteurs électriques).

La richesse de la commande prédictive provient du fait que d'une part sa démarche repose sur une méthodologie permettant la prise en compte des contraintes pour la mise au point de

la commande, d'autre part, il est possible d'exploiter pleinement les informations de trajectoires prédéfinies. En effet, le but de la stratégie, comme nous le verrons par la suite, est de faire coïncider la sortie du processus avec une consigne dans le futur et sur un horizon fini. En plus, de la robustesse vis-à-vis des incertitudes, la commande prédictive est applicable sur une large classe de systèmes linéaires (stable, instable en boucle ouverte, à phase non minimale, avec retard...). C'est pourquoi elle est apparue très séduisante aux industriels dans le cadre général de problèmes de suivi de trajectoires.

Notons que cette technique de commande est applicable aux systèmes linéaires ou systèmes non linéaires évoluant autour d'un point de fonctionnement.

Les trois dernières décennies sont caractérisées par le développement considérable de la théorie de l'analyse et de la commande des systèmes dont la dynamique est régie par des équations différentielles non linéaires. En outre, il est intéressant de noter que depuis l'émergence de la commande non linéaire, de nombreux travaux ont été réalisés pour tenter d'intégrer l'aspect non linéaire des procédés à commander aux idées de base de la commande prédictive. On peut notamment mentionner les travaux cités en référence [CHE-3, DEN-1, MAY, MIC, MOR-2, PAR-1, SCO].

Deux inconvénients majeurs ont été rencontrés lors de la synthèse de la loi de commande prédictive pour les systèmes non linéaires: le problème de stabilité et le temps d'optimisation nécessaire pour aboutir à la solution optimale.

A propos de la stabilité, H. Chen et F. Allgöwer proposent un schéma de commande prédictif pour des systèmes non linéaires, avec contraintes sur l'entrée de commande, garantissant la stabilité en boucle fermée [CHE-3]. La démarche est basée sur la minimisation d'une intégrale du carré de l'erreur (ISE : Integral Square Error) sur un horizon fini plus une fonction coût quadratique terminale. Ceci permettant de forcer l'état du système à être dans une région finale (au voisinage de l'origine) où on peut garantir la stabilité. Le problème de la stabilité a été aussi étudié par P. Scokaert mais différemment. En effet, l'auteur utilise le concept de la commande prédictive à horizon infini [SCO-2]. Dans le cadre où l'horizon de prédiction supérieure de commande est infini, la stabilité s'acquiert naturellement puisqu'on laisse le système converger vers la consigne. Cependant, cette approche n'est pas populaire à cause des difficultés d'implantation conséquentes et surtout des contraintes liées aux temps de réponses des systèmes dynamiques. L'auteur propose alors un schéma GPC^∞ avec l'introduction d'une égalité de contrainte terminale sur la sortie prédite. L'originalité de la démarche est de décomposer le système en une partie stable et une autre instable et d'élaborer

le prédicteur uniquement avec les pôles instables du système. La contrainte d'égalité finale impose alors, au bout d'un horizon maximal de prédiction, tous les modes instables du système à être nulles, ce qui permet de préserver seulement les dynamiques stables du système. Notons, que l'approche est réalisable avec ou sans contraintes sur la commande. La fonction coût quadratique conséquente est alors minimisée pour fournir la séquence optimale de commande.

Concernant les systèmes non linéaires avec contraintes, Mayne et Michalsca ont fourni une contribution importante dans le cadre de la commande prédictive à horizon fuyant [MAY, MIC]. Les auteurs proposent une formulation du problème, sur un horizon fuyant, pour les processus non linéaires par une commande 'Dual mode control'. La commande à horizon fuyant est appliquée lorsque l'état du système est à l'extérieur de la région terminale, et une fois qu'il est à l'intérieur ou aux frontières de cette région proche du point d'équilibre, une commande linéaire à retour d'état est appliquée pour ramener l'état du système vers le point d'équilibre.

Une des difficultés majeures de ces solutions proposées provient du temps d'optimisation en ligne nécessaire pour aboutir à la solution optimale. Par ailleurs, la solution globale du problème d'optimisation n'est pas garantie et le temps d'optimisation introduit un retard lors de l'implantation de la loi de commande. Bien que, Scokaert *et al* ont établi les conditions pour que la commande prédictive (sous optimale) soit stabilisante et que le temps d'optimisation nécessaire soit raisonnable [SCO-1].

Afin d'éviter ce problème d'optimisation en ligne du critère, plusieurs commandes prédictives non linéaires ont été développées [KOU-1, PIN-*, SOU-*].

Kourvaritas *et al* ont combiné la linéarisation du système autour de la trajectoire, et l'interpolation du coût à minimiser, ce qui permet d'établir la loi de commande [KOU-1]. Les travaux de Ping Lu [PIN-*] et Souroukh [SOU-*] ont été basés sur la prédiction de l'écart à un pas en utilisant le développement en série de Taylor à l'ordre r_i du signal de sortie et de référence, où r_i est le degré relatif de la $i^{\text{ème}}$ sortie du système. La solution de la minimisation du critère quadratique établit la loi de commande.

Pour améliorer les performances de la commande prédictive non linéaire développée par Ping Lu, le critère de performance utilisé par cette structure de commande est minimisé sur un horizon fini. Ainsi, par cette stratégie de commande, nous proposons une extension aux systèmes non linéaires de la commande GPC continue, développée par Demircioglu pour les systèmes linéaires [DEM-1, DEM-2]. Le problème d'optimisation en ligne a été contourné en

utilisant l'approximation de Taylor du critère à minimiser et la stabilité du système en boucle fermée est assurée par un choix adéquat du pas de prédiction.

La troisième structure de commande prédictive, proposée également dans notre thèse, est une combinaison de ces deux dernières, ceci conduit à la commande prédictive non linéaire avec contrainte terminale. Ainsi, le nombre de paramètres de réglage sera augmenté et les performances de poursuite et de robustesse seront améliorées.

Il faut noter que cette méthode n'est appliquée qu'aux systèmes non linéaires avec une dynamique des zéros stable et un degré relatif bien défini.

L'inconvénient majeur de la commande prédictive non linéaire, développée dans notre thèse, est la nécessité de mesurer l'état du système. Une des possibilités pour résoudre ce problème consiste à utiliser un système dynamique qui fournit une estimation asymptotique ou exponentielle de l'état en fonction des entrées appliquées au système et des sorties mesurées. Pour les modèles pouvant être mis sous forme canonique observable, nous avons appliqué l'approche de Gauthier [GAU] pour la synthèse d'un observateur non linéaire complet. Cette méthode ne nécessite pas de conditions restrictives pour la convergence de l'erreur d'observation. Elle requiert seulement l'hypothèse d'observabilité uniforme pour toute entrée. Le calcul des gains de l'observateur est basé sur la résolution d'une équation de Lyapunov avec facteur d'oubli. Pour d'autres modèles pouvant se mettre sous la forme d'un système linéaire variable dans le temps, le filtre de Kalman est utilisé pour estimer l'état du système.

Notre contribution dans ce travail de recherche porte sur l'amélioration des performances de poursuite de la méthode proposée par Ping Lu. Ainsi le critère quadratique de la commande prédictive non linéaire à un pas est minimisé sur un horizon fini.

Nous avons également proposé l'intégration de cette loi de commande avec celle de Ping Lu pour obtenir la commande prédictive non linéaire avec contrainte terminale. Les performances de poursuite de ces lois de commande ont été testées en simulation sur deux systèmes différents et fortement non linéaires (robot manipulateur et machine asynchrone).

Organisation de la thèse :

- Dans le chapitre 1, nous rappelons le formalisme utilisé pour décrire le modèle mathématique discret d'un système linéaire ainsi que la structure générale d'une loi de commande polynomiale R-S-T. La méthodologie de placement de pôles avec réduction de la variance de régulation est développée. Pour ajuster

automatiquement les paramètres du régulateur, la version adaptative de cette structure est présentée.

- Dans le chapitre 2, nous présentons la commande prédictive généralisée avec modèle de référence sur l'état partiel. Ce chapitre montre que cette structure de commande est robuste vis-à-vis d'incertitudes structurées et non structurées, et sans le mécanisme d'adaptation. En outre, cette loi de commande peut être appliquée à des systèmes linéaires particuliers avec retard inconnu et variable dans le temps.
- Dans le chapitre 3, nous rappelons la commande prédictive non linéaire à un pas développé par Ping Lu [PIN-1], ainsi que l'analyse de la stabilité du système en boucle fermée. Ensuite, nous présentons l'extension aux systèmes non linéaires de la commande CGPC, développée par Demircioglu pour les systèmes linéaires [DEM-1]. Ainsi, le critère de la commande prédictive à un pas, sera minimisé sur un horizon fini. Pour augmenter le nombre de paramètres de réglage et améliorer les performances de poursuite, les deux stratégies de commande ont été combinées (Integration Control), ce qui conduit à une commande prédictive non linéaire avec contrainte terminale.

Rappelons que le problème d'optimisation en ligne est résolu en utilisant l'approximation de Taylor et par conséquent, la commande prédictive développée dans notre thèse est synthétisée hors ligne.

Nous terminons ce chapitre par le développement d'un observateur non linéaire pour l'estimation de l'état des systèmes qui peuvent être sous une forme canonique observable.

- Dans le chapitre 4, nous rappelons quelques éléments de base permettant de modéliser la dynamique des robots manipulateurs rigides (formalisme de Lagrange). Notons que le robot manipulateur est un système multivariable non linéaire carré fortement couplé et avec variation de la charge. Ensuite, nous appliquons les différentes stratégies de commande prédictive non linéaire qui sont décrites dans le chapitre 3, dans le but de faire suivre au robot manipulateur (positions et vitesses articulaires), une trajectoire prédéfinie. La stabilité du système en boucle fermée est analysée.

Pour implanter ces structures de commande, il est nécessaire de mesurer les vitesses articulaires du robot. L'utilisation de génératrices tachymétriques pour mesurer ces vitesses conduit à des signaux entachés de bruit de mesure et augmente également le coût de revient de l'asservissement du robot. A cet effet, l'observateur de Gauthier [GAU] est utilisé pour reconstruire les positions et vitesses articulaires.

Nous présentons dans la dernière partie de ce chapitre, les résultats des simulations effectuées avec un modèle de robot à deux degrés de liberté.

- Le dernier chapitre, concerne l'application de la commande prédictive non linéaire de sortie cascade à une machine asynchrone. Nous présentons dans la première partie de ce chapitre la modélisation de la machine asynchrone en vue de sa commande. Cette modélisation est fondée sur les entrées de la machine en tension. Du point de vue de l'automaticien, la machine asynchrone est un système dynamique qui pose des problèmes qu'on peut résumer dans les points suivants :
 - Système non linéaire,
 - Système multivariable carré,
 - Système couplé,
 - Régime transitoire délicat,
 - Variation des paramètres résistifs, inductifs et de la charge,
 - Variable non mesurable (flux rotorique).

Pour qu'on puisse appliquer la commande prédictive non linéaire de sortie, présentée au chapitre 3, le modèle de la machine est décomposé en deux boucles, boucle interne (flux, couple) et boucle externe (vitesse), ce qui justifiera l'utilisation d'une structure cascade.

La stratégie de commande prédictive est ensuite appliquée afin que le flux, le couple et la vitesse suivent des trajectoires de références prédéfinies.

Le filtre de Kalman est utilisé pour estimer le flux rotorique et les différentes structures de commande sont testées par simulation sur une machine asynchrone de 1.5 KW avec variation des paramètres résistifs, inductifs et de la charge.

Enfin, concernant la conclusion, nous donnons un bilan de notre contribution et les perspectives qui nous apparaissent importantes à l'issue de nos travaux et résultats de recherche.

Chapitre 1

Commande des systèmes linéaires

1.1 Introduction

Les progrès réalisés dans l'étude des systèmes linéaires ont permis l'application des techniques d'approximation linéaires à la commande des procédés physiques. Dans ce cas, le comportement du procédé, généralement non linéaire et à caractère distribué, est linéarisé autour d'un point de fonctionnement de son modèle physique. Les régulateurs linéaires classiques (ex. PID) à paramètres de réglage fixes, conçus sur la base de ces modèles, peuvent avoir des performances satisfaisantes pour autant que le procédé évolue non loin du point de fonctionnement en question et que les perturbations ne soient pas de grandes amplitudes.

En pratique, les caractéristiques dynamiques et les paramètres physiques des procédés sont mal connus et peuvent varier dans le temps sous l'effet :

- Des variations des conditions d'entrées,
- Du changement des conditions d'opération,
- Des perturbations internes et externes,
- Du vieillissement des équipements.

Tant que l'incertitude résultante de ces variations est faible devant l'incertitude tolérée par le régulateur, celui-ci continue à assurer ses fonctions et maintient les performances proches du niveau désiré. Cependant, si l'incertitude résultante est importante, le régulateur ne peut pas maintenir les performances spécifiées ce qui peut causer des oscillations indésirables du système ou même déstabiliser le système de commande. Pour remédier à ce problème, la pratique courante est de modifier, manuellement, les paramètres du régulateur en vue de mieux les adapter aux nouvelles conditions de fonctionnement du procédé et d'éviter ainsi la dérive du système de commande. Lorsque le nombre des paramètres est élevé, l'ajustement manuel devient fastidieux et impraticable. Donc, il importe de procéder à un ajustement automatique des paramètres de sorte à maintenir les performances à un niveau acceptable.

Par ailleurs, quand les gabarits fréquentiels des incertitudes paramétriques et des dynamiques négligées sont connus, la commande robuste H_∞ peut maintenir les performances désirées sans le mécanisme d'adaptation paramétrique qui est non linéaire. En outre, il existe d'autres stratégies de commande robuste vis-à-vis des incertitudes paramétriques et des dynamiques négligées. Ces méthodes, basées sur l'intelligence artificielle (logique floue, réseaux de neurones...), ont reçu une attention particulière ces dernières années. En effet, le régulateur flou est établi sans la connaissance au préalable du modèle du procédé, d'où provient sa robustesse vis-à-vis des incertitudes structurées (paramétriques) et non structurées (dynamiques non modélisées)

La première partie de ce chapitre présente les formalismes utilisés pour décrire le modèle de connaissance discret d'un procédé ainsi que la structure générale d'une loi de commande. Ensuite, une attention particulière est accordée à la formulation polynomiale R-S-T du régulateur ainsi que la méthodologie de placement de pôles avec minimisation de la variance de régulation. Cette méthode permet de réduire l'amplitude des oscillations de la sortie du système autour de la trajectoire de référence. Pour ajuster automatiquement les paramètres du régulateur, la commande adaptative indirecte est présentée. La mise à jour des paramètres du modèle est effectuée par un algorithme d'adaptation paramétrique robuste. On termine ce chapitre par des applications de la commande adaptative et par quelques remarques.

1.2 Préliminaires

Nous allons décrire en premier lieu les formalismes utilisés pour la description des modèles échantillonnés [AST-2,MSA]:

- L'opérateur retard q^{-1} : est utilisé pour une écriture plus compacte des équations récurrentes décrivant les modèles échantillonnés dans le domaine temporel, il joue le même rôle que l'opérateur s pour les systèmes continus.

Si $x(t)$ est une série temporelle, alors on a :

$$q^{-1} x(t) = x(t-1) \text{ ou en général } q^{-i} x(t) = x(t-i) \quad \forall i \in \mathbb{N}^+.$$

- Ensemble des polynômes à coefficients réels dans $\mathfrak{R}(q^{-1})$: un tel ensemble sera utilisé pour une écriture compacte des équations aux différences, que nous utiliserons pour la représentation du comportement entrée-sortie des systèmes à commander.

$$\mathfrak{R}(q^{-1}) = \{x(q^{-1}), x(q^{-1}) = x_0 + x_1 q^{-1} + x_2 q^{-2} + \dots + x_{nx} q^{-nx} / (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{nx}) \in \mathfrak{R}^{nx+1}\}$$

Soit $\{s(t)\}$ une série temporelle, on a :

$$x(q^{-1})s(t) = x_0 s(t) + x_1 s(t-1) + \dots + x_{nx} s(t-nx) = \sum_{i=0}^{nx} x_i s(t-i).$$

- Modèle de comportement entrée-sortie du procédé : le comportement dynamique entrée-sortie du procédé avec son environnement, autour d'un point de fonctionnement peut être représenté par le modèle linéaire suivant :

$$A(\theta, q^{-1})y(t) = B(\theta, q^{-1})u(t-d) + v(t) + w(t) \quad (1.1)$$

avec :

$$\theta = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{na} \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{nb}]^T ; \quad A(\theta, q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{na} q^{-na} ;$$

$$B(\theta, q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{nb} q^{-nb},$$

$u(t)$ et $y(t)$ représentent respectivement l'entrée et la sortie du procédé,

d est le retard,

$w(t)$ représente la partie non modélisée du procédé (dynamique négligée),

$v(t)$ représente les perturbations extérieures.

- Modèle de perturbation : Les perturbations extérieures, qui affectent la dynamique du processus, sont souvent représentées par le modèle linéaire suivant:

$$D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\xi(t)$$

On distingue deux types de perturbations :

- a - Les perturbations déterministes : Pour avoir ce type de perturbations, on choisit $C(q^{-1})=1$ et $\xi(t)$ une séquence d'impulsions dont l'amplitude et les instants d'occurrences sont inconnus. Les perturbations périodiques du type sinusoïdal sont caractérisées quant à elles par :

- $v(t) = v(t-d)$ donc $D(q^{-1}) = (1 - q^{-d})$.
- $v(t) = V \sin(\alpha t + \varphi)$ donc $D(q^{-1}) = 1 - 2 \cos(\alpha) q^{-1} + q^{-2}$.

On notera que le choix de $D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$ permet d'incorporer une action intégrale explicite dans la loi de commande.

- b - Les perturbations stochastiques : Pour ce type de perturbations $C(q^{-1})$ est un polynôme asymptotiquement stable et $\xi(t)$ est une séquence de variables aléatoires de moyenne nulle et de variance connue.

Le modèle linéaire entrée-sortie du procédé et de son environnement est donné par :

$$A(\theta, q^{-1})y(t) = B(\theta, q^{-1})u(t-d-1) + v(t), \quad (1.2)$$

avec $D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\xi(t)$.

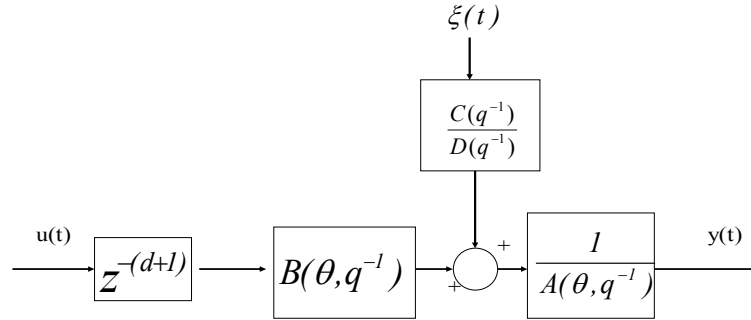


Figure 1.1 *Modèle linéaire entrée-sortie.*

1.3 Structure générale d'une loi de commande linéaire

Tout régulateur numérique, quelle que soit la méthode de synthèse utilisée, peut être mis sous la forme canonique à trois branches R-S-T :

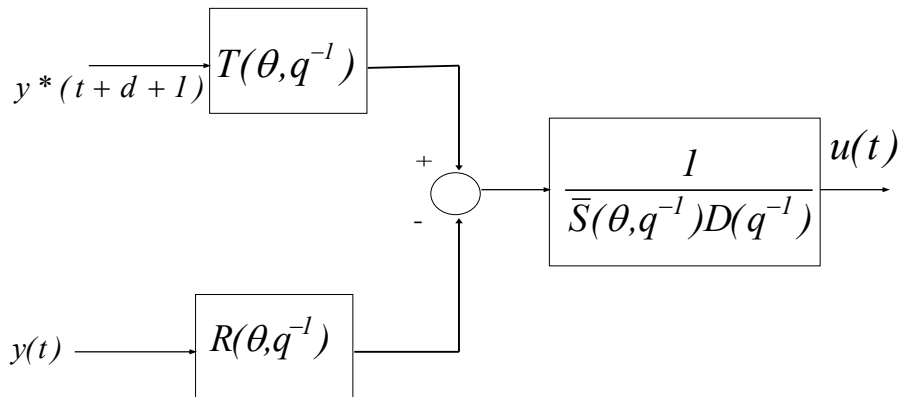


Figure 1.2 *Structure de réglage R-S-T*

La formulation de la loi de commande sous cette forme permet d'étudier ses caractéristiques et la dynamique du procédé. Ainsi, le système de commande est constitué du procédé et du régulateur dont les équations sont :

- Le procédé :

$$A(\theta, q^{-1})y(t) = B(\theta, q^{-1})u(t-d-1) + v(t), \quad (1.3)$$

avec $D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\xi(t)$.

- Le régulateur :

$$S(\theta, q^{-1})u(t) + R(\theta, q^{-1})y(t) = T(\theta, q^{-1})y^*(t+d+1), \quad (1.4)$$

avec $S(\theta, q^{-1}) = \bar{S}(\theta, q^{-1})D(q^{-1})$

- Modèle de référence : $A_m(q^{-1})y^*(t+d+1) = B_m(q^{-1})u^*(t)$. (1.5)

La structure du système en boucle fermée est représentée sur la figure suivante :

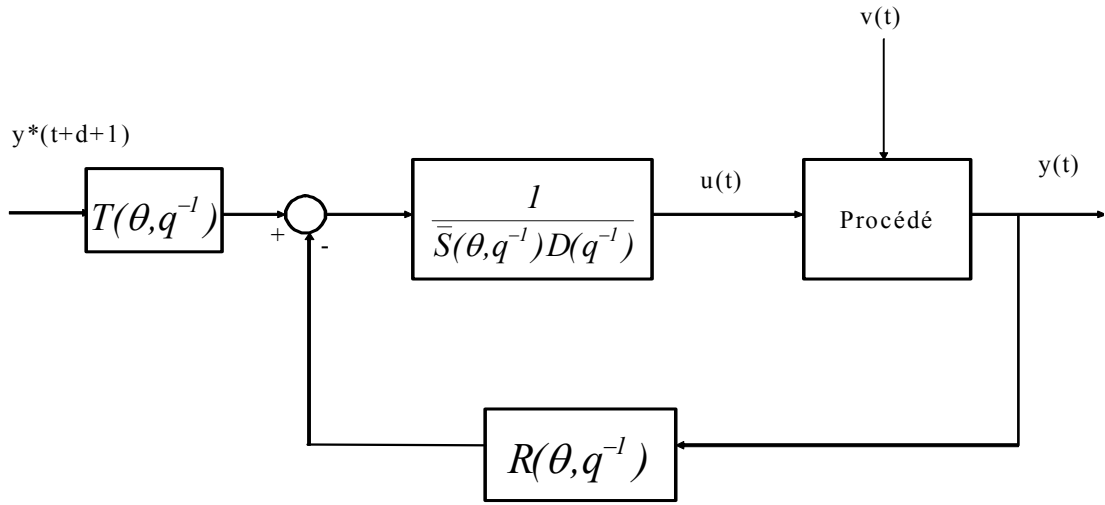


Figure 1.3 Schéma de commande du procédé.

On note que les paramètres du régulateur ou coefficients des polynômes $R(\theta, q^{-1})$, $S(\theta, q^{-1})$ et $T(\theta, q^{-1})$ sont calculés en tenant compte des performances désirées en poursuite et en régulation. Le système en boucle fermée est caractérisé :

- Par le signal de commande qui peut être exprimé par :

$$u(t) = \frac{T(\theta, q^{-1})}{\bar{S}(\theta, q^{-1}) D(q^{-1})} y^*(t+d+1) - \frac{R(\theta, q^{-1})}{\bar{S}(\theta, q^{-1}) D(q^{-1})} y(t) \quad (1.6)$$

Si nous remplaçons le signal de commande $u(t)$ de (1.3) par l'expression ci-dessus, alors nous obtenons :

$$P_c(\theta, q^{-1})y(t) = B(\theta, q^{-1})T(\theta, q^{-1})y^*(t) + \bar{S}(\theta, q^{-1})C(q^{-1})\xi(t) \quad (1.7)$$

où

$$P_c(\theta, q^{-1}) = S(\theta, q^{-1})A(\theta, q^{-1}) + q^{-(d+1)}B(\theta, q^{-1})R(\theta, q^{-1}) \quad (1.8)$$

est l'équation caractéristique du système en boucle fermée.

- Par la dynamique de poursuite qui est représentée par : $y(t) = \frac{B(\theta, q^{-1})T(\theta, q^{-1})}{P_c(\theta, q^{-1})} y^*(t)$.
- Par la dynamique de régulation qui est représentée par : $y(t) = \frac{\bar{S}(\theta, q^{-1})C(q^{-1})}{P_c(\theta, q^{-1})} \xi(t)$.

On note que $y^*(t)$ représente la trajectoire de référence dont le modèle est donné par :

$$y^*(t) = q^{-(d+1)} \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} u^*(t).$$

A partir de l'équation (1.4), le signal de commande peut être réécrit :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{nd} d_i u(t-i) - \sum_{i=1}^{ns} \bar{s}_i(\theta) D(q^{-1}) u(t-1) - \sum_{i=0}^{nr} r_i(\theta) y(t-i) + \sum_{i=0}^{nt} t_i(\theta) y^*(t+d+1) \quad (1.9)$$

Il faut noter que le modèle du procédé doit être stabilisable, c'est à dire le couple $\{A(\theta, q^{-1}) \text{ et } B(\theta, q^{-1})\}$ doit être contrôlable ou bien les modes incontrôlables soient stables.

Cette condition est nécessaire pour la stabilité du système de commande.

Par ailleurs, on dira que le modèle du procédé est admissible si :

- 1- Le calcul de la loi de commande est possible,
- 2- Le système de commande est stable.

On remarque que la stabilité du système de commande ne dépend pas du polynôme $T(\theta, q^{-1})$. Si ce dernier est choisi comme suit :

$$T(\theta, q^{-1}) = \beta(\theta) P_c(\theta, q^{-1}),$$

alors le comportement du système de commande en poursuite est donné par :

$$y(t) = \beta(\theta) B(\theta, q^{-1}) y^*(t).$$

En outre, si $B(\theta, 1) \neq 0$ et en choisissant $\beta(\theta) = \frac{1}{B(\theta, 1)}$, alors on aura un gain unitaire, c'est à

dire : $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*(t)$.

1.4 Commande à placement de pôles avec minimisation de la variance de régulation

La commande à placement de pôles permet de calculer le régulateur numérique R-S-T de manière à placer des pôles désirés du système de commande en boucle fermée. Ainsi, le polynôme $P_c(\theta, q^{-1})$ est spécifié par ces pôles qui fixent la dynamique de régulation du système de commande. Pour calculer les coefficients des polynômes $R(\theta, q^{-1})$ et $S(\theta, q^{-1})$, il faut résoudre l'équation Diophantine (1.8) :

$$P_c(\theta, q^{-1}) = S(\theta, q^{-1}) A(\theta, q^{-1}) + q^{-(d+1)} B(\theta, q^{-1}) R(\theta, q^{-1})$$

connue également sous le nom d'identité de Bezout.

L'identité de Bezout a une solution unique ($A(\theta, q^{-1})$ et $B(\theta, q^{-1})$ étant premiers entre eux) pour :

$$n_s + d = n_b ; \quad n_r = n_a - 1 \quad \text{et} \quad n_{pc} \leq n_a + n_b,$$

où

$$S(\theta, q^{-1}) = 1 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2} + \dots + s_{n_s} q^{-n_s},$$

$$R(\theta, q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} + r_2 q^{-2} + \dots + r_{n_r} q^{-n_r}.$$

Pour résoudre l'équation Diophantine (1.8), on peut la mettre sous la forme matricielle :

$$M_s(A, B) X = P, \quad (1.10)$$

où

$$X = \begin{bmatrix} 1 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n_s} & r_0 & r_1 & \dots & r_{n_r} \end{bmatrix}^T$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & p_{np} \end{bmatrix}^T.$$

$M_s(A, B)$ est la matrice de Sylvester (voir annexe A).

Le polynôme $T(\theta, q^{-1})$ est choisi généralement ainsi:

$$T(\theta, q^{-1}) = \beta(\theta) P_c(\theta, q^{-1}) \quad \text{où} \quad \beta(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } B(\theta, 1) = 0, \\ \frac{1}{B(\theta, 1)} & \text{si } B(\theta, 1) \neq 0. \end{cases}$$

Minimisation de la variance de régulation [HED-1] :

En plus du problème de robustesse numérique de la résolution de l'équation de Diophantine, la méthode de placement de pôles peut amplifier la variance de régulation (oscillations de grandes amplitudes autour de la trajectoire de référence). Dans ce travail, nous avons élaboré une méthode pour minimiser cette variance de régulation.

Exemple : Soit une fonction de transfert d'un système du 1^{er} ordre : $y(t) = \frac{S(\theta, q^{-1})}{P_c(\theta, q^{-1})} \xi(t)$,

avec

$$S(\theta, q^{-1}) = 1 + s_1 q^{-1} \text{ et } P_c(\theta, q^{-1}) = 1 - t_1 q^{-1} \text{ où } t_1 \text{ est le pôle désiré et } \text{Var}(\xi) = \sigma^2.$$

La variance de sortie est donnée par :

$$\text{Var}(y(t)^2) = \frac{1 + s_1 - 2t_1 s_1}{1 - t_1^2} \sigma^2$$

Si le pôle désiré t_1 est choisi très proche de un ($t_1 \approx 1$), alors la variance de régulation $\text{Var}(y)$ tend vers l'infini et le système exhibe des oscillations de grande amplitude autour de la trajectoire de référence.

On note que plusieurs systèmes physiques à structures non flexibles ne résistent pas à ces vibrations, donc il est nécessaire de réduire l'amplitude de ces oscillations en minimisant la variance de régulation.

Sachant que la solution générale de l'équation Diophantine est donnée par [AST-2] :

$$\begin{aligned} S(\theta, q^{-1}) &= S_0(\theta, q^{-1}) + B(\theta, q^{-1})H(q^{-1}) \\ R(\theta, q^{-1}) &= R_0(\theta, q^{-1}) - A(\theta, q^{-1})H(q^{-1}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

où $S_0(\theta, q^{-1})$ et $R_0(\theta, q^{-1})$ sont les solutions particulières de l'équation Diophantine,

$H(q^{-1})$ est un polynôme quelconque d'ordre n_h .

En régulation, la trajectoire de référence est supposée nulle : $y^*(t)=0$, donc l'équation (1.4) devient :

$$S(\theta, q^{-1})u(t) + R(\theta, q^{-1})y(t) = 0 \quad (1.12)$$

La substitution de la solution générale (1.11) dans cette dernière relation (1.12) fournit alors la relation entre la sortie, la commande et le bruit $v(t)$:

$$S_0(\theta, q^{-1})u(t) + R_0(\theta, q^{-1})y(t) = H(q^{-1})v(t) \quad (1.13)$$

A partir de la combinaison des équations (1.3) et (1.13), on déduit le comportement du système en régulation :

$$y(t) = \frac{(S_o(\theta, q^{-1}) + B(\theta, q^{-1})H(q^{-1}))}{P_c(\theta, q^{-1})} v(t)$$

La réduction de la variance de régulation est obtenue par la minimisation de la fonctionnelle :

$$Min_{H(q^{-1})} Var(y(t)) = E \left[\frac{S_o(\theta, q^{-1}) + B(\theta, q^{-1})H(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} v(t) \right]^2 \quad (1.14)$$

où E désigne l'espérance mathématique.

L'algorithme d'optimisation recherche alors le meilleur jeu des coefficients du polynôme $H(q^{-1})$ issu de la minimisation du critère (1.14).

Il faut remarquer que $\frac{\partial Var(y)}{\partial h_i} = 0$, pour $i=0,1,\dots,n_h$ constitue un système linéaire de (n_h+1) équations.

1.5 Commande adaptative

La commande adaptative est définie comme une commande permettant au régulateur de s'adapter aux changements des paramètres du processus. En conséquence, l'objectif de la commande adaptative est l'ajustement automatique en ligne et en temps réel des paramètres des régulateurs des boucles de commande, afin de réaliser ou de maintenir de façon identique un certain niveau de performances, quand les paramètres du procédé à commander varient dans le temps. Un système adaptatif peut s'envisager comme une structure à deux boucles, une boucle principale classique qui prend en compte les variations des signaux d'entrée et sortie, et une boucle secondaire qui réagit aux variations des paramètres du processus. C'est cette boucle qui rend le système adaptatif. Les différentes méthodes de commande adaptative se différencient par la structure choisie pour réaliser la remise à jour en temps réel des paramètres du régulateur en fonction des variations du processus à commander. Les stratégies résultantes conduisent aux deux grandes techniques adaptatives simples à mettre en œuvre et largement utilisées à ce jour en pratique :

- Commande adaptative directe,
- Commande adaptative indirecte.

1.5.1 Commande adaptative directe

L'idée de base de la commande adaptative directe consiste à recalculer les paramètres du régulateur, mais sans identifier explicitement les paramètres du système, donc en une seule étape, justifiant ainsi la terminologie de commande directe. Cette technique induit souvent des algorithmes plus rapides et favorise une application en temps réel. En contre partie, elle impose la plus part du temps que le système soit à déphasage minimal pour la réalisation de la structure.

Le schéma de la figure 1.4 illustre ce type de commande, pour laquelle les performances de la boucle fermée sont spécifiées par l'intermédiaire d'un modèle de référence.

Le régulateur de la boucle principale est élaboré de façon à assurer la stabilité du système corrigé. Il n'existe pas cependant de résultats généraux de stabilité de l'ensemble de la structure adaptative, sauf dans le cas où la loi de commande adaptative est issue d'une synthèse par la méthode de Lyapunov. L'inconvénient de cette dernière par ailleurs réside dans le fait de nécessiter le choix d'une fonction de Lyapunov candidate qui n'est pas toujours très simple à trouver.

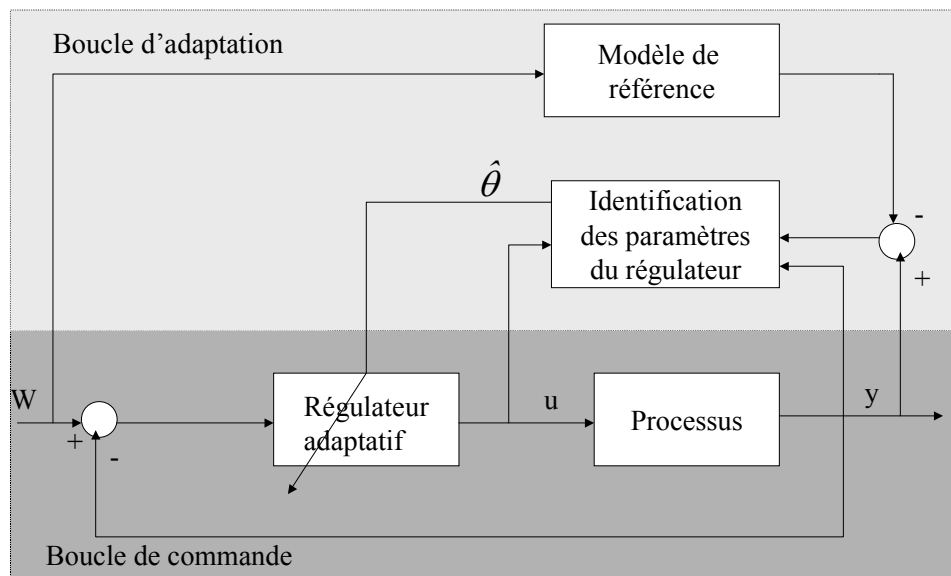


Figure 1.4 Structure de la commande adaptative directe.

1-5-2 Commande adaptative indirecte

Le principe de la commande adaptative repose sur l'identification d'un modèle du système en ligne et en temps réel. Ensuite, avec ce modèle calculé, le régulateur permettant de satisfaire les spécifications nominales est de nouveau élaboré.

Un régulateur adaptatif est conçu selon le principe de séparation [AST-2], si l'estimation du modèle du processus a eu lieu séparément de la recherche du régulateur : seul le critère sur la commande intervient pour la synthèse du régulateur, sans considération de performances de l'estimation, et vice-versa. Le principe d'équivalence certaine s'inscrit dans le prolongement du principe de séparation, en considérant que les paramètres du modèle issus de la phase d'identification caractérisent parfaitement le comportement du système, donc toute erreur d'identification nécessairement présente n'est pas prise en compte pour la phase de synthèse de la loi de commande. Ce principe permet donc de séparer totalement les deux étapes, justifiant par ailleurs la terminologie de commande adaptative indirecte, identification puis commande.

Le schéma de principe de ce type de commande est illustré sur la figure 1.5.

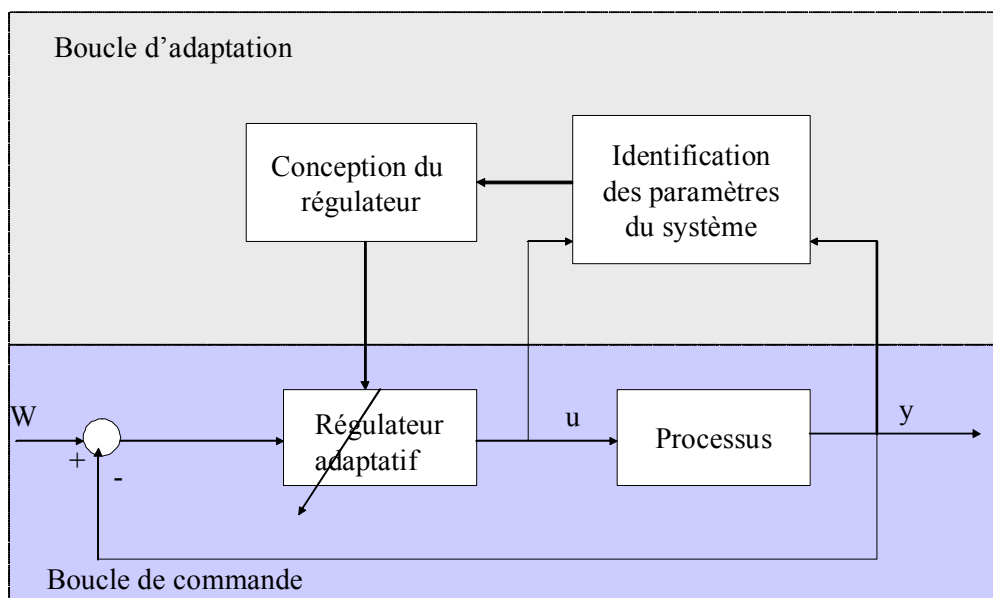


Figure 1.5 *Structure de la commande adaptative indirecte.*

Cette stratégie a été abondamment étudiée et la littérature propose sur ce sujet de nombreux algorithmes avec des types de commande très variés [AST-2, LAN-1]. Trois structures particulières reviennent de façon plus systématique :

La commande à placement de pôles, vue précédemment, qui ne peut s'appliquer que pour un modèle du procédé contrôlable et les objectifs de commande s'expriment en termes de régulation et poursuite.

Les deux autres stratégies élaborent la commande par minimisation d'un critère quadratique.

La commande linéaire quadratique (LQ ou LQG), à horizon fini, utilise un modèle du procédé sous forme de représentation d'état. Si ce modèle est préalablement issu d'une représentation par fonction de transfert, les hypothèses faites sur les polynômes de la fonction de transfert concernent d'une part la connaissance de leur degré maximal, d'autre part le fait que d'éventuels facteurs communs doivent correspondre à des pôles et des zéros asymptotiquement stables. On considère de plus un objectif de commande spécifié par un critère quadratique portant sur les échantillons de la sortie et de commande sur un horizon fini. La commande est élaborée par minimisation de ce critère.

La commande prédictive, et plus particulièrement la commande prédictive généralisée GPC, est évoquée plus en détail au chapitre suivant. Le modèle du système est sous forme de fonction de transfert entrée-sortie (CARIMA) et l'on minimise un critère quadratique à horizon fini portant sur les écarts futurs entre la sortie prédite et la trajectoire à suivre.

Les stratégies de mise à jour des paramètres du régulateur font appel aux méthodes d'identification suivantes :

- Méthode du gradient : l'algorithme d'adaptation paramétrique du gradient a comme objectif de minimiser un critère quadratique en terme d'erreur. Les courbes iso-critères [AST-2, LYU] s'éloignent de plus en plus du minimum au fur et à mesure que la valeur de ce critère augmente. Pour minimiser la valeur du critère, on se déplace donc dans la direction inverse du gradient de la courbe iso-critère correspondante. La mise à jour des paramètres est effectuée dans la bonne direction à l'aide de fonction de sensibilité dépendante du critère.
- Méthode des moindres carrés : plus générale que la structure précédente, cette méthode introduit un gain d'adaptation variable dans le temps, fixant ainsi une vitesse de convergence variable, plus élevée lorsque l'on se trouve loin de l'optimum, plus lente lorsque l'on tend à se stabiliser vers l'optimum. On pallie ainsi les deux problèmes majeurs de la structure du gradient, d'une part un gain d'adaptation fixe et donc une vitesse de convergence fixe, d'autre part un manque de stabilité et des oscillations au voisinage de l'optimum si le gain d'adaptation n'est pas suffisamment faible.

1.5.3 Algorithme d'adaptation paramétrique [LAN-1] :

On présente une approche à la base de nombreuses méthodes d'adaptation paramétrique en commande adaptative par minimisation d'un critère de type 'moindre carrés'. A partir de la relation entrée-sortie (1.3), la sortie du processus à l'instant (t+1) s'écrit :

$$\begin{aligned} y(t+1) &= -\sum_{i=1}^{na} a_i y(t+1-i) + \sum_{i=0}^{nb} b_i u(t-i) + v(t) \\ &= \Phi^T(t) \theta + v(t) \end{aligned} \quad (1.15)$$

où

$\theta^T = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{na} \quad b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{nb}]$: vecteur des paramètres du modèle,

$\Phi(t) = [-y(t) \dots -y(t+1-na) \quad u(t) \dots u(t-nb)]^T$ vecteur des mesures.

On définit l'erreur de prédiction 'à priori' :

$$\varepsilon^0(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) \quad (1.16)$$

où $\hat{y}(t+1) = \Phi(t)^T \hat{\theta}$ est la prédiction 'à priori' de la sortie du procédé.

L'algorithme d'adaptation récursif est de la forme :

$$\hat{\theta}(t+1) = f(\hat{\theta}, \Phi(t), \varepsilon^0(t+1)) \quad (1.17)$$

cherche à réduire l'erreur procédé/modèle au sens d'un certain critère.

Le critère de l'algorithme des moindres carrés récursif est donné par :

$$Min_{\hat{\theta}} J(t) = \sum_{i=1}^t \left| y(i) - \Phi^T(i-1) \hat{\theta}(t) \right|^2 \quad (1.18)$$

La solution de la minimisation de ce critère est un algorithme non récursif :

$$\hat{\theta}(t) = \Gamma(t) \sum_{i=1}^t y(i) \Phi(i-1)$$

avec $\Gamma^{-1}(t) = \sum_{i=1}^t \Phi(i-1) \Phi^T(i-1)$ où $\Gamma(t)$ est le gain d'adaptation.

Afin d'obtenir un algorithme récursif, on recalcule la valeur optimale de $\hat{\theta}(t+1)$ pour la minimisation de $J(t+1)$ et on exprime $\hat{\theta}(t+1)$ en fonction de $\hat{\theta}(t)$ et d'un terme de correction :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \Gamma(t+1) \Phi(t) \varepsilon^0(t+1) \quad (1.19)$$

avec $\Gamma(t+1)^{-1} = \Gamma(t)^{-1} + \Phi(t) \Phi^T(t)$.

En utilisant le lemme d'inversion matricielle, l'algorithme d'adaptation paramétrique s'écrit [AST-2] :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \Gamma(t+1)\Phi(t)\varepsilon^0(t+1) \quad (1.20)$$

$$\Gamma(t+1) = \Gamma(t) - \frac{\Gamma(t)\Phi(t)\Phi^T(t)\Gamma(t)}{I + \Phi^T(t)\Gamma(t)\Phi(t)} \quad (1.21)$$

$$\varepsilon^0(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) = y(t+1) - \Phi^T(t)\hat{\theta}(t) \quad (1.23)$$

En pratique, on démarre l'algorithme à $t=0$ en posant :

$$\Gamma(0) = \frac{1}{\delta} I_n \quad \text{avec} \quad 0 < \delta \ll 1.$$

Il faut noter que l'algorithme des moindres carrés récursif est approprié pour l'estimation des paramètres inconnus mais constants, car la matrice de gain $\Gamma(t+1)$ décroît avec le temps ($x^T \Gamma(t+1)x \leq x^T \Gamma(t)x$). En effet ce type d'algorithme donne de moins en moins de poids aux nouvelles mesures. En conséquence, ce type de variation du gain ne conviendra pas pour l'estimation des paramètres variables dans le temps.

Une manière d'obtenir un algorithme capable de suivre les variations des paramètres est de considérer un critère qui introduit un oubli des mesures anciennes par une pondération appropriée. Un exemple de tel critère est :

$$J(t) = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \left| y(i) - \Phi^T(i-1)\hat{\theta}(t) \right|^2 \quad (1.24)$$

avec $0 < \lambda < 1$.

qui conduit à un algorithme d'adaptation paramétrique avec facteur d'oubli λ .

Il est possible de remplacer le facteur d'oubli λ constant par $\lambda(t)$, ce qui donne un certain profil quant à l'oubli des données, et de moduler la décroissance du gain en introduisant une pondération sur le terme $\Phi(t)\Phi^T(t)$.

L'équation du gain d'adaptation sous forme récursive devient :

$$\Gamma(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} \left| \Gamma(t) - \frac{\Gamma(t)\Phi(t)\Phi^T(t)\Gamma(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + \Phi^T(t)\Gamma(t)\Phi(t)} \right| \quad (1.25)$$

avec $0 < \lambda_1(t) \leq 1$, $0 < \lambda_2(t) \leq 2$.

A noter que l'effet de :

- $\lambda_1(t) < 1$ tend à augmenter le gain d'adaptation,
- $\lambda_2(t) > 0$ tend à décroître le gain d'adaptation.

Dans les références [AST-2, LAN-1], on trouve différents types d'algorithme d'adaptation paramétrique en fonction des valeurs de $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$.

Remarque : En identification, la convergence de l'erreur de prédiction (même dans le cas sans bruit), n'implique pas nécessairement la convergence des paramètres. En effet, on peut avoir :

$$\varepsilon^0(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}(t)^T \Phi(t) = (\theta - \hat{\theta}(t))^T \Phi(t) = \varepsilon_\theta^T \Phi(t) = 0,$$

si le vecteur $\varepsilon_\theta \neq 0$ est perpendiculaire au vecteur $\Phi(t)$.

Si on désire que $\hat{\theta}(t)$ converge vers θ , des entrées avec certaines propriétés doivent être appliquées. En général, ceci revient à appliquer, au moins pendant un certain temps, un signal d'entrée suffisamment riche en fréquences (contenant au moins $\frac{n}{2}$ fréquences distinctes, où n est le nombre de paramètres à estimer). C'est la condition d'excitation persistante ou d'identifiabilité des paramètres du modèle.

1.5.4 Problèmes d'estimation paramétriques dans la pratique

Les systèmes de commande adaptative sont non linéaires et variables dans le temps. Les paramètres du régulateur dépendent des paramètres du procédé à travers le mécanisme d'adaptation. Ce qui explique les difficultés d'analyse de tels systèmes.

En outre, il faut mettre en évidence les problèmes d'estimation en présence des perturbations et des dynamiques négligées.

Ces problèmes sont fondamentalement dus au fait que :

- Les erreurs de modélisations dépendent des signaux d'entrée-sortie donc, on ne peut pas supposer a priori que ces mesures sont bornées.
- Les signaux d'entrée-sortie ne vérifient pas nécessairement la condition d'excitation persistante pour assurer la convergence des paramètres estimés vers les paramètres du procédé. En plus, le modèle estimé n'est pas nécessairement admissible (stabilisable).
- Les algorithmes d'adaptation paramétrique utilisés sont de type intégral. Les paramètres estimés peuvent dériver en présence de perturbations bornées, d'un signal de haute fréquence ou d'un gain d'adaptation assez grand.

Pour contourner ce problème pratique, il est judicieux d'utiliser un estimateur robuste des paramètres illustré sur la figure 1.6.

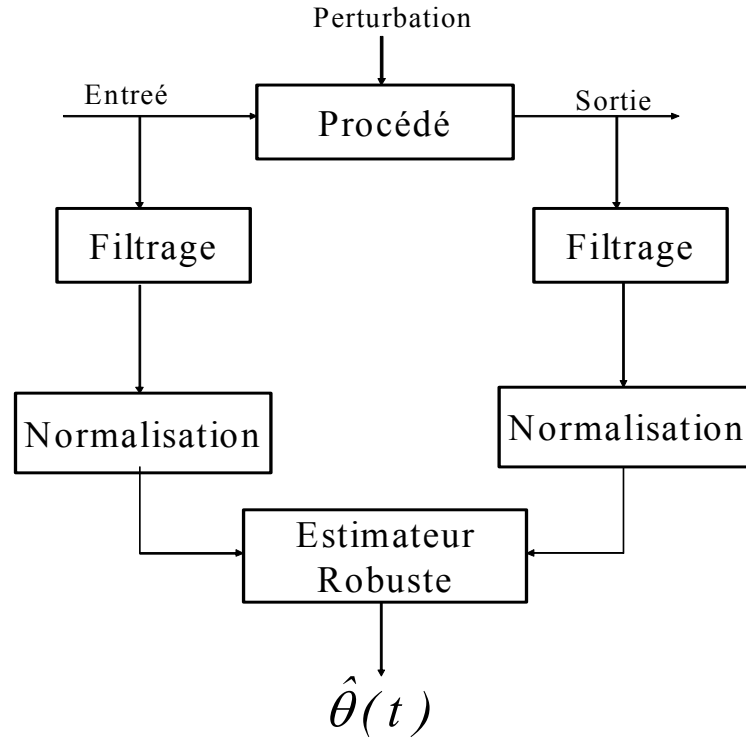


Figure 1.6 *Estimateur robuste des paramètres.*

Ce dernier est décrit par les étapes suivantes :

- 1- Filtrage des données :
 - Filtrage des signaux entrée-sortie, pour réduire les effets de la réponse de la partie non modélisée du procédé.

$$y_f(t) = G(q^{-1})y(t) ; u_f(t) = G(q^{-1})u(t) ; \Phi_f(t) = G(q^{-1})\Phi(t). \quad (1.26)$$

$G(q^{-1})$ est la fonction de transfert d'un filtre passe-bande pour éliminer les perturbations de charge (basse fréquence) et le bruit des mesures ainsi que les dynamiques non modélisées (haute fréquence).

- Normalisation des données : pour s'assurer de la bornitude de toutes les données requises pour l'estimation. En effet, les dynamiques non modélisées correspondent à des perturbations non nécessairement bornées avec effet déstabilisant sur la commande adaptative.

$$\frac{y_f(t)}{\sqrt{\eta(t)}} = \hat{\theta}(t) \frac{\Phi_f(t)}{\sqrt{\eta(t)}} + \frac{w_f(t)}{\sqrt{\eta(t)}} \quad (1.27)$$

$$\text{où} \quad \eta(t) = \mu\eta(t-1) + (1-\mu)\max(\Phi^T(t)\Phi(t), \eta_0) \quad (1.28)$$

avec $0 \leq \mu \leq 1$ et $\eta_0 > 0$.

2- Algorithme d'adaptation paramétrique robuste :

- Régularisation du gain d'adaptation : le gain d'adaptation est maintenu borné pour assurer une bonne capacité d'adaptation.

$$K_{\min} I_n \leq K(t) \leq K_{\max} I_n$$

- Gel de l'adaptation, projection ou contraction des paramètres estimés quand les signaux d'entrée-sortie ne vérifient pas la condition d'excitation persistante et ceci pour assurer la bornitude des paramètres estimés.

L'algorithme d'estimation paramétrique robuste s'écrit alors :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + K(t)\varepsilon^0(t+1) \quad (1.29)$$

$$\varepsilon^0(t+1) = y_f(t+1) - \Phi_f^T(t)\hat{\theta}(t) \quad (1.30)$$

$$K(t) = \frac{s(t)\Gamma(t)\Phi_f(t)}{\eta(t) + \Phi_f^T(t)\Gamma(t)\Phi_f(t)} \quad (1.31)$$

$$\Gamma(t+1) = \frac{1}{\lambda(t)} [\Gamma(t) - K(t)\Phi_f^T(t)\Gamma(t)] + R(t) \quad (1.32)$$

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\Phi_f^T(t)\Gamma(t)\Phi_f(t)}{\eta(t)} > \sigma_0 \\ 0 & \text{si non (operation de Gel)} \end{cases} \quad (1.33)$$

avec $\Gamma(0) = \frac{1}{\delta}$, $0 < \delta \ll 0$, $0 < \lambda(t) \leq 1$ et $R(t)$ est une matrice définie positive.

1.6 Commande adaptative à placement de pôles avec minimisation de la variance de régulation

Il s'agit de développer un algorithme permettant de recalculer les polynômes $R(\hat{\theta}, q^{-1})$, $S(\hat{\theta}, q^{-1})$ de la structure polynomiale R-S-T à partir du modèle estimé $\hat{\theta}(t)$, ainsi que le polynôme $H(q^{-1})$ pour réduire la variance de régulation, et cela pour maintenir les performances en poursuite et en régulation du processus dont les paramètres sont inconnus ou variable dans le temps.

Les principales étapes de la commande adaptative à placement de pôles avec minimisation de la variance de régulation sont :

Etape 0 : Initialisation

- Structure du modèle (na, nb et d),
- Vecteur paramètre du modèle $\hat{\theta}(0)$,
- Matrice de covariance $\Gamma(0)$,
- Facteur d'oubli $\lambda(0)$,
- Paramètres du régulateur.

Etape 1 : Estimation des paramètres du modèle du procédé en utilisant l'algorithme d'identification (1.29 – 1.33).

Etape 2 : Résolution de l'équation Diophantine pour trouver les solutions particulières $S_0(\hat{\theta}, q^{-1})$ et $R_0(\hat{\theta}, q^{-1})$:

$$\begin{bmatrix} S_0 & R_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{ns} & r_0 & r_1 & \dots & r_{nr} \end{bmatrix}^T = M_s(\hat{A}, \hat{B})^{-1} P_c \quad (1.34)$$

On rappelle que les conditions de solvabilité de l'équation (1.34) sont :

- 1- $|a_r(t)| \geq \gamma$ ou $|b_r(t)| \geq \gamma$ avec $\gamma > 0$ et $r = \max(na, nb)$,
- 2- $A(\hat{\theta}, q^{-1})$ et $B(\hat{\theta}, q^{-1})$ n'ont pas de facteur commun.

Etape 3 : Minimisation de la variance de régulation :

- Minimisation de la fonctionnelle (1.14), et résolution du système qui en découle ($H(q^{-1})$).

- Calcul des solutions générales :
$$\begin{cases} S(\hat{\theta}, q^{-1}) = S_0(\hat{\theta}, q^{-1}) + B(\hat{\theta}, q^{-1})H(q^{-1}) \\ R(\hat{\theta}, q^{-1}) = R_0(\hat{\theta}, q^{-1}) - A(\hat{\theta}, q^{-1})H(q^{-1}) \end{cases}$$

$$T(\hat{\theta}, q^{-1}) = \beta(\theta) P_c(q^{-1}).$$

Etape 4 : Calcul de la loi de commande $u(t)$ à partir de l'équation (1.9).

Les étapes 1-4 sont répétées à chaque pas d'échantillonnage.

Exemple de simulation : A titre d'exemple simple permettant de tester la commande linéaire adaptative décrite ci-dessus, considérons le système du premier ordre, instable et à phase non minimale suivant : $y(t) = a_1 y(t-1) + b_0 u(t-1) + b_1 u(t-2) + v(t)$ (1.35)

où $A(q^{-1}) = 1 - 1.25 q^{-1}$; $B(q^{-1}) = 0.5 q^{-1} + 2 q^{-2}$ et $v(t) = e(t) + 0.7 e(t-1)$,

Le système est soumis à une perturbation extérieure aléatoire fonction d'un bruit blanc $e(t)$ de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 = 1$.

La sortie $y(t)$ doit suivre la trajectoire de référence (signal carré de période $T=300s$ et d'amplitude 5). Les polynômes de synthèse désirés sont :

$$P_c(q^{-1}) = (1 - 0.9q^{-1})A_0(q^{-1}), \quad H(q^{-1}) = h_0$$

où $A_0(q^{-1}) = 1 + 0.7q^{-1}$ est le polynôme d'observateur.

Dans un premier temps, on a utilisé uniquement la solution particulière de l'équation Diophantine ($S_0(\hat{\theta}, q^{-1})$ et $R_0(\hat{\theta}, q^{-1})$) pour $0 < t < 500s$. Ensuite, pour $501s < t < 1000s$, le régulateur surparamétrisé est utilisé, c'est à dire la commande à placement de pôles avec minimisation de la variance de régulation. Les résultats de simulation sont reproduits sur les figures 1.7, 1.8 et 1.9. La figure 1.7 montre l'évolution des paramètres estimés. On constate qu'une meilleure convergence des paramètres estimés du modèle vers les paramètres du procédé est obtenue après l'introduction de réduction de la variance de régulation. La figure 1.9-b montre que pour $t > 500s$, le signal de commande est plus excitant, ceci est due à la réinjection du bruit de mesure dans le signal de commande (1.13). La figure 1.8 illustre la sortie du système pour les deux cas. Ces résultats confirment la validité de la structure de commande adaptative à placement de pôles avec minimisation de la variance de régulation. En outre, nous constatons de la figure 1.9-b une légère augmentation de la variance du signal de commande. Pour atténuer cette variance, le critère de minimisation de la variance de régulation a été reformulé en tenant compte de la variance du signal d'entrée, comme suit (voir [HED-2]):

$$\underset{H(q^{-1})}{Min} J(t) = Var(y^2) + \alpha Var(u^2)$$

où α est un scalaire positif (facteur de pondération).

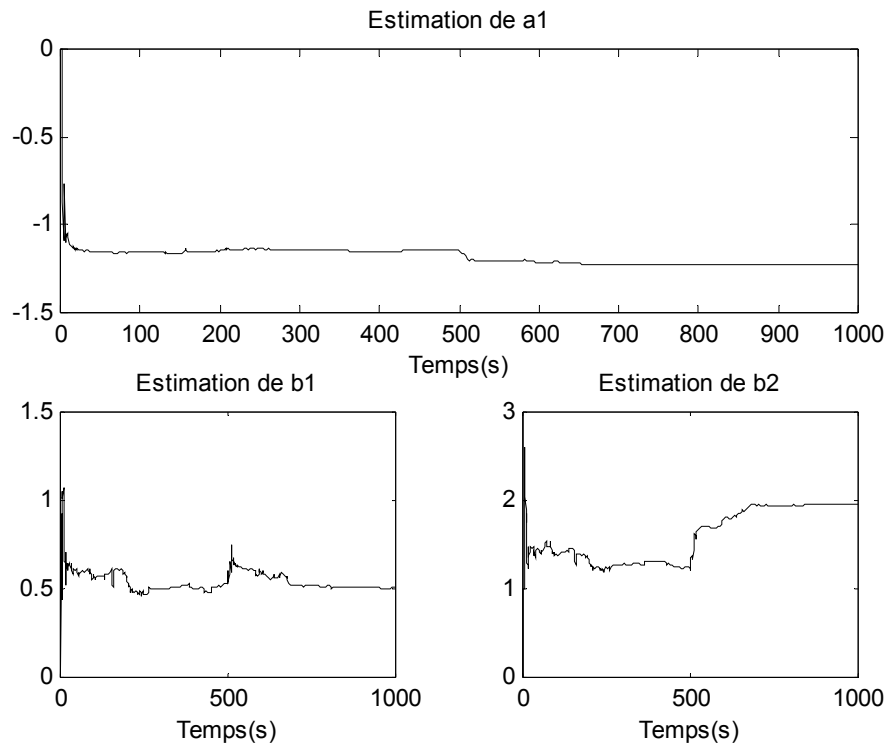


Figure 1.7 Estimation des paramètres du modèle

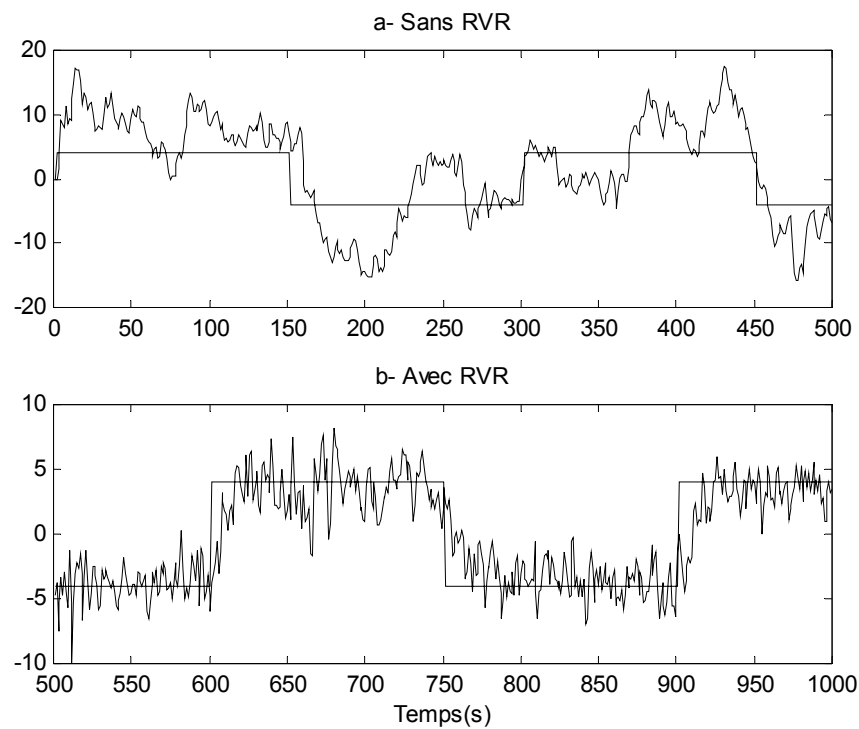


Figure 1.8 Réponse du système: a- Sans minimisation de variance de régulation, b- Avec minimisation de variance de régulation.

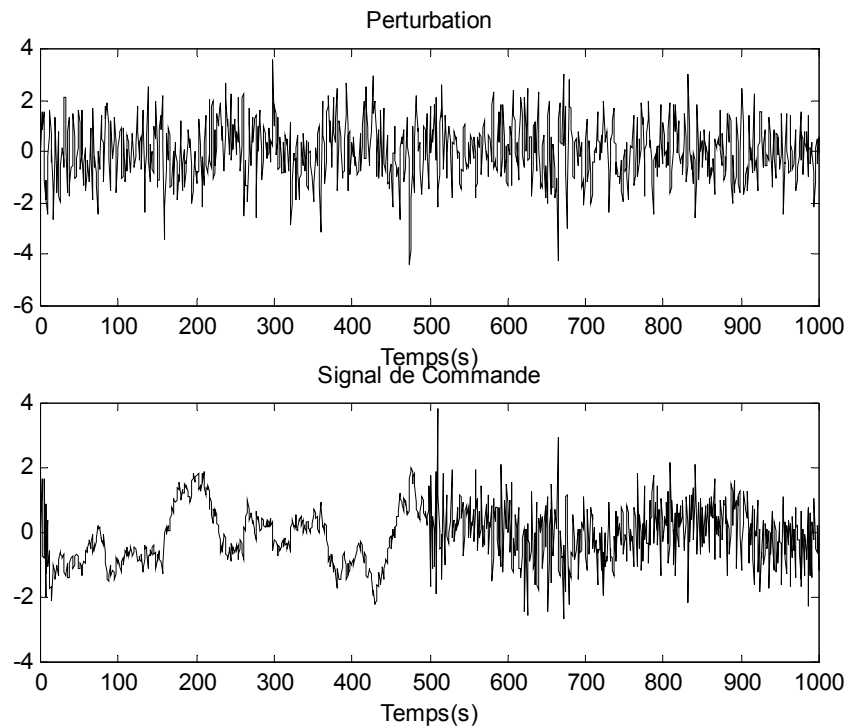


Figure 1.9 *Perturbation extérieure et le signal de commande.*

1.7 Application de la commande adaptative [LAN-1, AST-2]

Les techniques de commande adaptative ont été utilisées avec succès pour un grand nombre d'applications, telles que :

- Traitement des matériaux bruts,
- Fours de séchage et de traitement thermique,
- Cimenteries,
- Réacteurs chimiques,
- Colonnes à distiller,
- Machines à papier,
- Echangeurs de chaleur,
- Systèmes énergétiques,
- Commande des moteurs électriques,
- Robots manipulateurs.

Malgré ce nombre significatif d'applications réussies, la diffusion de ces techniques reste extrêmement restreinte vu qu'elles sont basées sur des informations (modèle de

connaissance) connues à priori sur le procédé d'une part, et elles ne peuvent pas être appliquées à des systèmes rapides qui sont soit à paramètres variables dans le temps soit constants et inconnus.

Rappelons avant tout que le mécanisme d'adaptation a été introduit dans la boucle de commande pour pallier aux problèmes de sensibilité des structures de commande classique aux variations des paramètres du procédé.

Il a été signalé au début de ce chapitre, que l'élaboration de la commande à base de la logique floue ne nécessite pas la connaissance au préalable du modèle du procédé. En effet, la commande floue consiste à remplacer les algorithmes de réglage conventionnel par des règles linguistiques du type :

Si Et Alors

On rappelle que la commande floue est constituée essentiellement de trois blocs :

- 1- Fuzzification ($e, \Delta e$),
- 2- Mécanisme d'inférence (Base de règle),
- 3- Defuzzification (élaboration de Δu).

La combinaison (ou intégration) de cette méthode de commande et de la commande à placement de pôles a été utilisée pour stabiliser un système fortement non linéaire (suspension magnétique) autour du point d'équilibre[HED-3]. L'intégration de ces deux lois de commande a permis d'une part d'améliorer la robustesse du système de commande vis-à-vis d'incertitudes paramétriques, et a augmenté d'autre part le domaine de stabilité du système non linéaire en boucle fermée autour du point d'équilibre.

Ici également l'inconvénient majeur de cette technique de commande est le temps de traitement nécessaire pour établir la loi de commande. Néanmoins, le constructeur MOTOROLA a inclus récemment dans le microcontrôleur 68HC12 des instructions pour l'implantation de la logique floue, et cela pour les applications à haute vitesse.

Il faut mentionner également que la commande à structure variable ou à mode glissant (Sliding mode Control) est une technique robuste vis-à-vis des incertitudes et peut s'appliquer aux systèmes linéaires ou non linéaires représentés dans l'espace d'état. Cette technique consiste à contraindre, à l'aide de m fonctions discontinues, les dynamiques du système sur une surface de glissement. L'attractivité et l'invariance de la surface de glissement sont assurées par des conditions, appelées conditions de glissement[CHI-2, SLO-2].

Principe de la commande à structure variable :

On considère le système linéaire décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.36)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $t \in \mathbb{R}^+$ est le temps et $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande.

On définit dans $\mathbb{R}^n$ m surfaces, soit pour $i=1, \dots, m$:

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^n : S_i(x) = 0\} \quad (1.37)$$

A partir de ces surfaces $S_i(x)$ que l'on appelle aussi surfaces de commutation, on définit un vecteur de commande discontinu, soit $i=1, \dots, m$:

$$u_i(x, t) = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{si } S_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{si } S_i(x) < 0 \end{cases} \quad (1.38)$$

où les fonctions $u_i^+(x, t)$ et $u_i^-(x, t)$ sont continues.

Les trajectoires du système (1.36) bouclé par la commande (1.38) peuvent atteindre une des surfaces de commutation $S_i(x)$ ou leur intersection en temps fini, puis y rester. Il existe des conditions sous lesquelles une surface $S_i(x)$ ou l'intersection de ces surfaces est attractive (voir [CHI-2, SLO-2]).

Quand cette technique est utilisée lors de la synthèse d'une loi de commande, le phénomène de chattering ou broutement est en général indésirable, car il ajoute au spectre de commande des composantes hautes fréquences. Ces composantes peuvent détériorer le système en excitant des modes élevés dont on n'a pas tenu compte lors de la modélisation ou en sollicitant trop les actionneurs et endommageant ainsi le mécanisme de commande.

1.8 Conclusion

Pour conclure ce chapitre sur la commande adaptative à placement de pôles, et justifier la démarche qui guide les chapitres suivants, mentionnons le point crucial de l'aspect réalisation temps réel.

Nous avons vu que la commande à placements de pôles ne peut s'appliquer que dans le cas d'un modèle de procédé pour lequel les polynômes de la fonction de transfert n'ont pas de facteurs communs ou encore sont premiers entre eux. Les objectifs de commande s'expriment en terme de régulation et de poursuite :

- De façon à éliminer toute perturbation selon une dynamique définie par un polynôme de régulation,

- Et de sorte que le signal de sortie rejoint la consigne selon une trajectoire de référence prédéfinie.

La structure du régulateur est implantée sous forme polynomiale R-S-T.

En outre, on a montré que quand le système est soumis à des perturbations extérieures, la variance de régulation peut être amplifiée et la sortie du système exhibe des oscillations de grande amplitude autour de la trajectoire de référence. Une certaine fragilité numérique est attachée à cette méthode de synthèse des régulateurs (inversion de la matrice de Sylvester).

Bien que le problème d'amplification de la variance de régulation soit résolu partiellement dans ce chapitre, le problème de robustesse numérique reste encore posé lors de l'implantation de la commande en temps réel.

Par ailleurs, il a été évoqué précédemment que la commande adaptative nécessite en temps réel la réalisation d'un algorithme d'identification robuste vis-à-vis des perturbations extérieures et des dynamiques non modélisées.

Par conséquent, toutes ces limites ont souvent rendu impossible l'implantation de ces stratégies sur des systèmes rapides à cadence d'échantillonnage élevée.

Nous proposons dès lors une nouvelle voie, basée sur une stratégie prédictive, robuste vis-à-vis des incertitudes structurées et non structurées, évitant ainsi le calcul en ligne des paramètres du modèle du procédé.

Chapitre 2

Commande prédictive généralisée avec modèle de référence sur l'état partiel

2.1 Introduction

Depuis une dizaine d'années, on a noté d'importants progrès dans le domaine de la commande des procédés linéaires, aussi bien en théorie qu'en pratique. L'inconvénient majeur des méthodes proposées dans la littérature réside dans la difficulté de leurs applications à des procédés ayant les propriétés suivantes :

- 1- Les procédés à ordre inconnu ; les méthodes de commandes classiques (PID, LQG, placement de pôles...) ont de mauvaises performances (erreur statique, instabilité...) si l'ordre du modèle mathématique du procédé est sous-estimé.
- 2- Les procédés avec retard variable et/ou inconnu ; une des principales difficultés rencontrées dans la commande des procédés industriels par les régulateurs classiques (P, PI, PID, MV et GMV) est la présence de retard (inconnu et/ou variable) qui est souvent dû aux caractéristiques du système à contrôler (temps de réponse d'éléments constituant le processus, acquisition et conversion des signaux...).
- 3- Les procédés à phase non minimale ; la plupart des fonctions de transfert en temps continus tendent, lors de la discrétisation, à présenter des zéros à l'extérieur du cercle unité [AST-1], les régulateurs à variance minimale sont inadaptés à ce type de systèmes.
- 4- Les procédés instables en boucle ouverte ou avec des pôles mal amortis.

Le concept-clé de la commande prédictive réside dans la création d'un effet anticipatif. On exploite pour cela les connaissances explicites sur l'évolution de la trajectoire à suivre dans le futur (connaissances nécessaires requises au moins sur un horizon de quelques points au delà de l'instant présent).

Comme l'illustrent par exemple les articles de Clarke, *et al* [CLA-*], la commande prédictive s'avère une structure suffisamment complète pour résoudre un problème très général,

fournissant un système asservi stable pour un jeu de paramètres de réglage donné. Cette stratégie permet de commander des processus linéaires à déphasage non minimal, avec des pôles instables ou mal amortis, avec des temps morts constants ou inconnus, ou avec un modèle d'ordre inconnu. Elle a montré son efficacité, sa flexibilité et son succès dans des applications industrielles même pour des systèmes à faible période d'échantillonnage (opérateur δ) [CLA-2]. Les applications dans le domaine de la conduite des moteurs ont donné de bons résultats en termes de rapidité et de précision.

Dans ce chapitre, la commande prédictive généralisée avec modèle de référence sur l'état partiel est présentée. Pour valider cette approche, un certain nombre d'exemples de modèles instables, à phase non minimale et avec incertitudes (structurées et non structurées) ont été simulés avec cette structure de commande. On conclut ce chapitre par quelques remarques.

2.2 Prédicteur optimal

La commande prédictive nécessite un modèle numérique de représentation pour son fonctionnement. Ce modèle permet de calculer la sortie prédite sur un horizon fini.

Historiquement la forme de représentation adoptée est du type polynomial sous la forme CARIMA (Controlled AutoRegressive Integrated Moving Average) vue dans le chapitre précédent (équation 1.3) et représentée sur la figure 1.1 avec $D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$. C'est un modèle incrémental du système en introduisant une action intégrale dans le modèle :

$$A(\theta, q^{-1})y(t) = B(\theta, q^{-1})u(t-d-1) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}\xi(t) \quad (2.1)$$

avec $D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$ opérateur différence.

Le but recherché avec l'introduction d'un intégrateur est l'annulation de toute erreur statique d'une consigne ou d'une perturbation constante.

La méthodologie prédictive requiert la définition d'un prédicteur optimal à j-pas qui permet d'anticiper le comportement de processus dans le futur sur un horizon fini. Pour cela, à partir du modèle (2.1) on élabore la sortie estimée à l'instant (t+j) :

$$y(t+j) = \frac{B(\theta, q^{-1})}{A(\theta, q^{-1})}u(t+j-d-1) + \frac{C(q^{-1})}{A(\theta, q^{-1})D(q^{-1})}\xi(t+j) \quad (2.2)$$

De cette équation, on note que les informations disponibles à l'instant t sont :

- Les sorties $y(t)$, $y(t-1)$, ...,
- Les entrées $u(t-1)$, $u(t-2)$, ...,
- Les commandes à calculer $u(t)$, $u(t+1)$, ..., $u(t+j-d-1)$,

- La partie prédictible des perturbations $\xi(t)$, $\xi(t-1)$, ... à partir de l'équation (2.1).

Et les informations imprédictibles à l'instant t sont :

- Les perturbations $\xi(t+1)$, $\xi(t+2)$,..... .

Le terme $\frac{C(q^{-1})}{A(\theta, q^{-1})D(q^{-1})}\xi(t+j)$ peut être décomposé en une partie complètement disponible à l'instant t et une autre partie imprédictible à cet instant. Pour ce faire, on utilise la division Euclidienne suivante :

$$C(q^{-1}) = A(\theta, q^{-1})D(q^{-1})E_j(\theta, q^{-1}) + q^{-j}F_j(\theta, q^{-1}) \quad (2.3)$$

avec $E_j(\theta, q^{-1}) = 1 + e_1 q^{-1} + e_2 q^{-2} + \dots + e_{j-1} q^{-j+1}$,

$$F_j(\theta, q^{-1}) = f_0^j + f_1^j q^{-1} + f_2^j q^{-2} + \dots + f_{nf}^j q^{-nf}.$$

En utilisant l'équation (2.3), on a :

$$\frac{C(q^{-1})}{A(\theta, q^{-1})D(q^{-1})}\xi(t+j) = E_j(\theta, q^{-1})\xi(t+j) + \frac{F_j(\theta, q^{-1})}{A(\theta, q^{-1})D(q^{-1})}\xi(t).$$

Les termes $E_j(\theta, q^{-1})\xi(t+j)$ sont imprédictibles à l'instant t , par contre les termes de

$$\frac{F_j(\theta, q^{-1})}{A(\theta, q^{-1})D(q^{-1})}\xi(t)$$

sont disponibles à cet instant.

L'équation du modèle du prédicteur (2.2), combinée avec l'équation (2.3), fournit l'équation polynomiale ci-dessous :

$$C(q^{-1})y(t+j) = E_j(\theta, q^{-1})B(\theta, q^{-1})D(q^{-1})u(t+j-d-1) + F_j(\theta, q^{-1})y(t) + C(q^{-1})E_j(\theta, q^{-1})\xi(t+j) \quad (2.4)$$

Par ailleurs, le terme $[C(q^{-1})]^l E_j(\theta, q^{-1})B(\theta, q^{-1})u(t+j-d-1)$ peut être aussi décomposé en fonction des entrées disponibles à l'instant t et des commandes à calculer en fonction de l'objectif de commande. Pour cela, on utilise la division Euclidienne suivante :

$$E_j(\theta, q^{-1})B(\theta, q^{-1}) = C(q^{-1})G_{j-d}(\theta, q^{-1}) + q^{-j+d}H_{j-d}(\theta, q^{-1}) \quad (2.5)$$

avec

$$G_{j-d}(\theta, q^{-1}) = g_0 + g_1 q^{-1} + g_2 q^{-2} + \dots + g_{j-d-1} q^{-j+d+1},$$

$$H_{j-d}(\theta, q^{-1}) = h_0^j + h_1^j q^{-1} + h_2^j q^{-2} + \dots + h_{nh}^j q^{-nh}.$$

Par conséquent, le modèle de commande (2.4) peut être réécrit sous la forme :

$$C(q^{-1})y(t+j) = C(q^{-1})G_{j-d}(\theta, q^{-1})D(q^{-1})u(t+j-d-1) + H_{j-d}(\theta, q^{-1})D(q^{-1})u(t-1) + F_j(\theta, q^{-1})y(t) + E_j(\theta, q^{-1})C(q^{-1})\xi(t+j) \quad (2.6)$$

Posons : $C(q^{-1})y_0(t+j) = H_{j-d}(\theta, q^{-1})D(q^{-1})u(t-1) + F_j(\theta, q^{-1})y(t),$

Avec cette notation, le prédicteur à j-pas peut s'écrire :

$$y(t+j) = G_{j-d}(\theta, q^{-1})D(q^{-1})u(t+j-d-1) + y_0(t+j) + E_j(\theta, q^{-1})\xi(t+1). \quad (2.7)$$

Donc, la sortie du prédicteur à l'instant (t+j) se compose de trois termes :

$$G_{j-d}(\theta, q^{-1})D(q^{-1})u(t+j-d-1) = g_0D(q^{-1})u(t+j-d-1) + g_1D(q^{-1})u(t+j-d-2) + \dots + g_{j-d-1}D(q^{-1})u(t)$$

Ces termes dépendent de la séquence des commandes futures.

- $y_0(t+j)$ qui est complètement disponible à l'instant t.
- $E_j(\theta, q^{-1})\xi(t+j) = \xi(t+j) + e_1\xi(t+j-1) + \dots + e_j\xi(t)$ qui est imprédictible à l'instant t.

Pour déterminer le meilleur prédicteur à j-pas de $y(t+j)$, nous devons minimiser le critère quadratique suivant :

$$J = E\left\{\left(y(t+j) - \hat{y}(t+j)\right)^2\right\} \quad (2.8)$$

où

$E\{\cdot\}$ représente l'espérance mathématique,

$\hat{y}(t+j)$ représente la sortie prédite à l'instant (t+j),

$y(t+j)$ représente la sortie du système à l'instant (t+j).

En faisant l'hypothèse que la meilleure prédiction du terme lié aux perturbations est sa moyenne (ici nulle dans le cas du bruit blanc centré), le prédicteur optimal est défini de façon unique, dès que les polynômes sont connus, par la relation :

$$\hat{y}(t+j) = G_{j-d}(\theta, q^{-1})D(q^{-1})u(t+j-d-1) + y_0(t+j) \quad (2.9)$$

où

$$C(q^{-1})y_0(t+j) = H_{j-d}(\theta, q^{-1})D(q^{-1})u(t) + F_j(\theta, q^{-1})y(t),$$

avec $\text{degré}(G_{j-d}(\theta, q^{-1})) = j-d-1$, $\text{degré}(H_{j-d}(\theta, q^{-1})) = \text{degré}(B(\theta, q^{-1})) - 1$,

$$\text{degré}(F_j(\theta, q^{-1})) = \text{degré}(A(\theta, q^{-1})).$$

On note qu'un programme sous MATLAB (Annexe B) a été développé pour calculer les coefficients des polynômes $G_{j-d}(\theta, q^{-1})$, $H_{j-d}(\theta, q^{-1})$ et $F_j(\theta, q^{-1})$.

Dans le cas où l'horizon de prédiction varie ($j=d+1$ à h_p), et pour simplifier les notations il est possible d'utiliser une représentation matricielle, à savoir :

$$\hat{Y}(t+h_p) = G(\theta)DU(t+h_p-d-1) + Y_0(t+h_p) \quad (2.10)$$

où h_p est l'horizon de prédiction,

$$\begin{aligned} \hat{Y}(t+h_p) &= [\hat{y}(t+d+1) \quad \dots \quad \hat{y}(t+h_p)]^T, \\ Y_0(t+h_p) &= [y_0(t+d+1) \quad \dots \quad y_0(t+h_p)]^T, \\ DU(t+h_p-d-1) &= [D(q^{-1})u(t) \quad \dots \quad D(q^{-1})u(t+h_p-d-1)]^T, \\ G(\theta) &= \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{h_p-d-1} & g_{h_p-d-2} & \dots & g_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.3 Commande avec modèle de référence sur l'état partiel [MSA]

On présente dans ce paragraphe une méthode de synthèse avec modèle de référence sur l'entrée et la sortie. L'idée de base d'une telle méthode consiste en une interprétation adéquate du principe de placement de pôles sous la forme d'un problème de régulation par rapport à deux indices de performances $e_y(t)$ et $e_u(t)$ que nous verrons par la suite.

Le modèle ARMA utilisé avec l'état partiel $x(t)$, s'écrit :

$$\begin{cases} A(\theta, q^{-1})D(q^{-1})x(t) = D(q^{-1})u(t-d-1) \\ y(t) = B(\theta, q^{-1})x(t) \end{cases} \quad (2.11)$$

Considérons l'objectif de commande suivant :

$$P(q^{-1})(x(t) - x^*(t)) = 0 \quad (2.12)$$

où $P(q^{-1})$ est un polynôme asymptotiquement stable, de degré $n_p = \max(n_a+d, n_b+d+1)$, représentant la dynamique de régulation souhaitée.

$x^*(t)$ est l'état partiel de référence, qui peut être modélisé par un système asymptotiquement stable tel que :

$$x^*(t) = \beta(\theta) y^*(t)$$

$$\text{avec } \beta(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } B(\theta, 1) = 0, \\ \frac{1}{B(\theta, 1)} & \text{si } B(\theta, 1) \neq 0. \end{cases}$$

$$A_m(q^{-1}) y^*(t+d+1) = B_m(q^{-1}) u^*(t),$$

$\frac{A_m(q^{-1})}{B_m(q^{-1})}$ est le modèle de référence de l'état partiel.

$\beta(\theta)$ est un scalaire, introduit pour avoir un gain statique unitaire en boucle fermée.

Si l'objectif de commande (2.12) est respecté, la relation entrée-sortie en boucle fermée est :

$$\begin{cases} A(\theta, q^{-1}) D(q^{-1}) x^*(t) = D(q^{-1}) u(t-d-1) \\ y(t) = B(\theta, q^{-1}) x^*(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

A partir des équations (2.11, 2.12 et 2.13) l'évolution du comportement entrée-sortie du modèle est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} P(q^{-1}) y(t) = P(q^{-1}) \beta(\theta) y^*(t) \\ P(q^{-1}) D(q^{-1}) u(t-d-1) = P(q^{-1}) A(\theta, q^{-1}) D(q^{-1}) \beta(\theta) y^*(t) \end{cases} \quad (2.14)$$

Ce qui nous permet d'écrire l'objectif de commande avec l'état partiel sous forme :

$$e_y(t) = D(q^{-1}) e_u(t) = 0 \quad (2.15)$$

avec

$$\begin{aligned} e_y(t) &= P(q^{-1}) (y(t) - B(\theta, q^{-1}) \beta(\theta) y^*(t)), \\ e_u(t) &= P(q^{-1}) (u(t) - A(\theta, q^{-1}) \beta(\theta) y^*(t+d+1)). \end{aligned}$$

Les variables $e_u(t)$ et $e_y(t)$ représentent les erreurs de poursuite d'entrée et de sortie par rapport aux trajectoires de référence de l'entrée et de la sortie, soient :

$$\{A(\theta, q^{-1}) \beta(\theta) y^*(t+d+1)\} \quad \text{et} \quad \{B(\theta, q^{-1}) \beta(\theta) y^*(t)\}.$$

Pour atteindre l'objectif de commande spécifié par l'équation (2.12) ou (2.15), on doit calculer les paramètres du régulateur polynomial (R-S-T) qui répond à ces performances. En combinant les expressions (1.6) et (2.1), on peut montrer que le comportement du modèle de procédé (ARMAX) en boucle fermée est décrit par les équations suivantes :

$$P(q^{-1}) (y(t) - B(\theta, q^{-1}) \beta(\theta) y^*(t)) = S(\theta, q^{-1}) C(q^{-1}) \xi(t),$$

$$P(q^{-1})D(q^{-1})(u(t) - A(\theta, q^{-1})\beta(\theta)y^*(t+d+1)) = -R(\theta, q^{-1})C(q^{-1})\xi(t).$$

où

$P(q^{-1})$ est l'équation caractéristique du système en boucle fermée.

Remarque : L'introduction du modèle de perturbation dans le modèle du procédé, a rendu les deux indices de performances $e_y(t)$ et $e_u(t)$ à moyenne nulle.

La combinaison des deux équations précédentes conduit à l'équation ci-dessous :

$$R(\theta, q^{-1})e_y(t) + S(\theta, q^{-1})D(q^{-1})e_u(t) = 0 \quad (2.16)$$

En substituant les expressions de $e_u(t)$ et $e_y(t)$ dans l'équation (2.16), on obtient :

$$R(\theta, q^{-1})y(t) + S(\theta, q^{-1})D(q^{-1})u(t) = \beta(\theta)\bar{T}(\theta, q^{-1})y^*(t+d+1) \quad (2.17)$$

où

$$\begin{aligned} T(\theta, q^{-1}) &= \beta(\theta)\bar{T}(\theta, q^{-1}) = \beta(\theta)P(q^{-1}), \\ \bar{T}(\theta, q^{-1}) &= P(q^{-1}) = A(\theta, q^{-1})S(\theta, q^{-1})D(q^{-1}) + q^{-(d+1)}B(\theta, q^{-1})R(\theta, q^{-1}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

On constate que le calcul des polynômes $R(\theta, q^{-1})$, $S(\theta, q^{-1})$ et $T(\theta, q^{-1})$ du régulateur peut être fait en choisissant les pôles du polynôme $P(q^{-1})$ qui définit la dynamique de régulation désirée.

La loi de commande avec placement de pôles considérée permet de spécifier d'une manière indépendante les dynamiques de poursuite en fonction de $y^*(t)$ et de régulation en fonction de $P(q^{-1})$.

Exemple : Soit un système discret du premier ordre instable et à phase non minimale dont les paramètres de la fonction de transfert sont :

$$A(\theta, q^{-1}) = 1 - 1.1q^{-1} \text{ (pôle instable } p_0=1.1) ;$$

$$B(\theta, q^{-1}) = 1 + 2q^{-1} \text{ (zéro instable } z_0=-2) ; C(q^{-1}) = 1 ; D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}.$$

Le modèle entrée-sortie du système est :

$$A(\theta, q^{-1})y(t) = B(\theta, q^{-1})u(t-1) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}\xi(t)$$

où

- $\xi(t)$ est un signal aléatoire gaussien de moyenne nulle et de variance $\sigma^2=0.01$,
- Le modèle de référence est un signal carré d'amplitude ± 2 et de période 400s,
- L'équation caractéristique désirée est :

$$P(q^{-1}) = 1 - 1.5q^{-1} + 0.56q^{-2}.$$

Pour avoir une bonne poursuite et un rejet de perturbation en régulation, les paramètres du régulateur ($R(\theta, q^{-1})$ et $S(\theta, q^{-1})$) qui vérifient la relation :

$$R(\theta, q^{-1})e_y(t) + S(\theta, q^{-1})D(q^{-1})e_u(t) = 0,$$

sont solutions de l'équation Diophantine (2.18). Par conséquent, on obtient :

$$\beta(\theta) = 1/3 ; \bar{T}(\theta, q^{-1}) = t_0 + t_1 q^{-1} + t_2 q^{-2} = 1 - 1.5 q^{-1} + 0.56 q^{-2} ;$$

$$R(\theta, q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} = 0.2258 - 0.2058 q^{-1} ; S(\theta, q^{-1}) = s_0 + s_1 q^{-1} = 1 + 0.3742 q^{-1} ;$$

Le signal de commande est généré par :

$$u(t) = u(t-1) - (S(\theta, q^{-1}) - s_0)D(q^{-1})e_y(t) + \beta(\theta)\bar{T}(\theta, q^{-1})y^*(t+1).$$

La figure 2.1-a illustre la trajectoire de référence et la sortie du système (instable et à phase non minimale) bouclé par la commande à placement de pôles avec modèle de référence sur l'état partiel. La figure 2.1-b reproduit le signal de commande.

Figure 2.1 *Performance de la commande PP/MREP.*

Ici également l'inconvénient majeur de cette structure de commande est la résolution de l'équation :

$$P(q^{-1}) = A(\theta, q^{-1})D(q^{-1})S(\theta, q^{-1}) + q^{-(d+1)}B(\theta, q^{-1})R(\theta, q^{-1})$$

qui présente des problèmes de robustesse numérique qui peuvent être critiques dans le contexte de la commande adaptative. A cet effet, pour remédier à ce problème, la commande

avec placement de pôles peut être interprétée comme un problème de régulation vis-à-vis des variables $e_y(t)$ et $e_u(t)$ [MSA]. Ainsi, on peut résoudre le placement de pôles considéré aux moindres carrés, en minimisant le critère quadratique suivant :

$$J(t, h_p, h_i) = E \left\{ \sum_{j=h_i}^{h_p} (e_y(t+j)^2 + \lambda D(q^{-1})e_u(t+j-h_i)^2) \right\}$$

On note que les méthodes de synthèse qui peuvent être utilisées sont :

- Commande prédictive à horizon étendu, dont le critère à minimiser est :

$$\underset{D(q^{-1})e_u(t)}{\text{Min}} J(t, h_p, h_c, h_i) = E \left\{ \sum_{j=h_i}^{h_p} (e_y(t+j)^2 + \lambda D(q^{-1})e_u(t+j-h_i)^2) \right\},$$

avec : $D(q^{-1})e_u(t+i) = 0$ pour $h_c \leq i \leq h_p$.

- Commande linéaire quadratique à horizon infini, dont le critère à minimiser est :

$$\text{Min } J(t, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left\{ \sum_{j=1}^T (e_y(t+j)^2 + \lambda D(q^{-1})e_u(t+j-1)^2) \right\}$$

2.4 Commande prédictive généralisée avec modèle de référence sur l'état partiel

Pour pallier au problème de robustesse numérique cité précédemment, la méthode de placement de pôles est résolue par les moindres carrés en utilisant le critère quadratique suivant :

$$J(t, h_p, h_i) = E \left\{ \sum_{j=h_i}^{h_p} (e_y(t+j)^2 + \lambda D(q^{-1})e_u(t+j-h_i)^2) \right\} \quad (2.19)$$

avec :

$$D(q^{-1})e_u(t+j) = 0 \text{ pour } j=h_c, h_{c+1}, \dots, h_p. \quad (2.20)$$

Cette hypothèse signifie que lorsque le pas de prédiction j atteint la valeur fixée pour l'horizon de commande h_c , la variation de l'erreur de poursuite d'entrée s'annule et donc la commande va se stabiliser. Cette hypothèse permettra par la suite de simplifier le calcul de la commande.

L'idée de base d'une telle approche consiste en une interprétation adéquate du principe de placement de pôles sous la forme d'un problème de régulation par rapport à deux indices de performances $e_y(t)$ et $e_u(t)$.

Le critère (2.19) nécessite la définition de quatre paramètres de réglage :

- h_i désigne l'horizon minimal de contrôle,

- h_c désigne l'horizon de prédiction de commande,
- h_p désigne l'horizon maximal de prédiction,
- λ est le paramètre de pondération.

Il faut noter que cette loi de commande est capable de satisfaire les propriétés suivantes [MSA] :

- Stabilisation des modèles de procédé très divers (stable ou instable),
- Insensibilité aux erreurs de modélisation,
- Rejet des perturbations externes sans erreur statique,
- Simplicité des spécifications des performances en boucle fermée.

Ainsi, la formulation du problème de commande sous la forme de minimisation d'un critère quadratique permet de réaliser les deux premières propriétés. Pour satisfaire la troisième propriété, nous incorporons dans la loi de commande le modèle des perturbations externes. Quant à la dernière propriété, elle peut être satisfaite en prenant un objectif de commande à placement de pôles, ce qui revient à faire un choix particulier des variables intervenant dans le critère.

2.4.1 Synthèse de la loi de commande

Le problème d'optimisation est formulé de façon à déterminer la loi de commande sur un horizon fini $[t, t+h_c]$ avec $h_c < h_p$. En pratique, seule la variable de commande $u(t)$, déduite de $e_u(t)$, est appliquée au procédé. A l'instant $(t+1)$ un nouveau problème d'optimisation est résolu. Cette procédure de mise en œuvre de la loi de commande est dite commande à **horizon fuyant** (receding horizon).

La contrainte supplémentaire, donnée par l'équation (2.20), vise essentiellement à forcer le système de commande à rencontrer, assez rapidement, les performances désirées. La synthèse de la loi de commande en question sera faite dans le cas où la séquence d'erreur de modélisation $w(t)$ est identiquement nulle. Le modèle de procédé peut s'écrire alors sous la forme :

$$A(\theta, q^{-1})D(q^{-1})y(t) = B(\theta, q^{-1})D(q^{-1})u(t-d-1) + C(q^{-1})\xi(t) \quad (2.21)$$

En multipliant par $P(q^{-1})$ les deux membres de cette équation et en retranchant le terme $P(q^{-1})(A(\theta, q^{-1})D(q^{-1})B(\theta, q^{-1})\beta(\theta)y^*(t))$, on obtient :

$$A(\theta, q^{-1}) D(q^{-1}) e_y(t) = B(\theta, q^{-1}) D(q^{-1}) e_u(t-d-1) + C(q^{-1}) \xi(t) \quad (2.22)$$

Cette reparamétrisation du modèle de procédé, établit une relation dynamique entre les indices de performances $e_y(t)$ et $e_u(t)$, nous l'appellerons alors modèle aux performances.

Etape1 : Prédicteur à j-pas de l'erreur de sortie

On se propose de calculer un prédicteur de $e_y(t+j)$ à partir de l'information disponible à l'instant t et des valeurs futures de l'erreur d'entrée. Pour ce faire, on considère les divisions Euclidiennes :

$$\begin{cases} P(q^{-1}) C(q^{-1}) = A(\theta, q^{-1}) D(q^{-1}) E_j(q^{-1}) + q^{-j} F_j(\theta, q^{-1}) \\ E_j(\theta, q^{-1}) B(\theta, q^{-1}) = P(q^{-1}) C(q^{-1}) G_{j-d}(\theta, q^{-1}) + q^{-j+d} H_{j-d}(\theta, q^{-1}) \end{cases} \quad (2.23)$$

où

$$- E_j(\theta, q^{-1}) = e_0 + e_1 q^{-1} + \dots + e_{j-1} q^{-j+1},$$

$$- F_j(\theta, q^{-1}) = f_0^j + f_1^j q^{-1} + \dots + f_{n_f}^j q^{-n_f},$$

$$- G_{j-d}(\theta, q^{-1}) = g_0 + g_1 q^{-1} + \dots + g_{j-d-1} q^{-j+d+1},$$

$$- H(\theta, q^{-1}) = h_0^j + h_1^j q^{-1} + \dots + h_{n_h}^j q^{-n_h},$$

avec $n_f = \max(n_a + n_d, n_c + n_p - j)$ et $n_h = \max(n_c + n_p, n_b + d) - 1$.

En tenant compte de ces deux identités polynomiales, le modèle aux performances peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} P(q^{-1}) C(q^{-1}) e_y(t+j) &= P(q^{-1}) C(q^{-1}) G_{j-d}(\theta, q^{-1}) D(q^{-1}) e_u(t+j-d-1) + \\ &H_{j-d}(\theta, q^{-1}) D(q^{-1}) e_u(t-1) + F_j(\theta, q^{-1}) e_y(t) + E_j(\theta, q^{-1}) P(q^{-1}) C(q^{-1}) \xi(t+j) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Par ailleurs, si on pose :

$$P(q^{-1}) C(q^{-1}) e_{y0}(t+j) = H_{j-d}(\theta, q^{-1}) D(q^{-1}) e_u(t-1) + F_j(\theta, q^{-1}) e_y(t)$$

alors le modèle aux performances peut se mettre sous la forme :

$$e_y(t+j) = G_{j-d}(\theta, q^{-1}) D(q^{-1}) e_u(t+j-d-1) + e_{y0}(t+j) + E_j(\theta, q^{-1}) \xi(t+j) \quad (2.25)$$

Le meilleur prédicteur à j-pas de $e_y(t+j)$ est obtenu en supposant que la partie imprédictible est nulle, soit :

$$\xi(k) = 0 \text{ pour } k \in [t+1, t+k]$$

Le prédicteur $\hat{e}_y(t+j)$ est alors :

$$\hat{e}_y(t+j) = G_{j-d}(\theta, q^{-1}) D(q^{-1}) e_u(t+j-d-1) + e_{y0}(t+j) \quad (2.26)$$

où

$$P(q^{-1})C(q^{-1})e_{y0}(t+j) = H_{j-d}(\theta, q^{-1})D(q^{-1})e_u(t-l) + F_j(\theta, q^{-1})e_y(t)$$

Un tel prédicteur est en effet optimal au sens de la minimisation de la variance (2.8) dans le cas où la séquence $\xi(t)$ est un bruit blanc.

Remarque :

- L'erreur de prédiction est : $e_y(t+j) - \hat{e}_y(t+j) = E_j(\theta, q^{-1})\xi(t+j)$.
- Pour $j < d+1$, le prédicteur est complètement disponible à l'instant t , alors que pour $j \geq d+1$, le prédicteur dépend de la séquence de commande $D(q^{-1})e_u(k)$ pour $k \in [t, t+h_c-l]$.

Etape 2 : Minimisation du critère quadratique considéré

Une fois définie l'équation de prédiction, la méthode implique la minimisation d'une fonction coût quadratique à horizon fini. La stratégie GPC/MREP minimise le critère donné par l'expression (2.19) :

$$J(t, h_p, h_i) = \sum_{j=h_i}^{h_p} (e_y(t+j)^2 + \lambda (D(q^{-1})e_u(t+j-h_i))^2) \quad (2.27)$$

avec

$$D(q^{-1})e_u(t+i) = 0 \text{ pour } h_c \leq i \leq h_p.$$

Ce critère comprend donc un terme quadratique sur l'erreur de poursuite de sortie et d'entrée. Sa minimisation analytique fournit la séquence des commandes futures dont seule la première sera effectivement appliquée. L'aspect incrémental du modèle se trouve dans le critère par l'intermédiaire de $D(q^{-1}) = I - q^{-1}$. Enfin le coefficient λ permet de donner plus ou moins de poids à l'erreur de poursuite d'entrée par rapport à l'erreur de poursuite de sortie, de façon à assurer la convergence lorsque le système de départ présente un risque d'instabilité.

La relation (2.26) donnant le prédicteur optimal est utilisée dans le critère (2.27) entre les horizons h_i et h_p . Pour simplifier les notations, il est possible d'utiliser une représentation matricielle de ce prédicteur.

Posons pour cela :

$$\hat{E}_y(t) = \begin{bmatrix} \hat{e}_y(t+h_i) & \dots & \dots & \dots & \hat{e}_y(t+h_p) \end{bmatrix}^T,$$

$$E_{y0}(t) = \begin{bmatrix} e_{y0}(t+h_i) & \dots & \dots & \dots & e_{y0}(t+h_p) \end{bmatrix}^T,$$

$$D E_u(t) = \left| D(q^{-1})e_u(t) \dots D(q^{-1})e_u(t+h_c-1) \right|^T,$$

$$G(\theta) = \begin{pmatrix} g_{hi-d-1} & g_{hi-d-2} & \cdot & \cdot & g_1 & g_0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ g_{hi-d} & g_{hi-d-1} & \cdot & \cdot & \cdot & g_1 & g_0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{hc-1} & g_{hc-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & g_1 & g_0 \\ g_{hc} & g_{hc-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & g_2 & g_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{hp-d-1} & g_{hp-d-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & g_{hp-hc-d+1} & g_{hp-hc-d} \end{pmatrix},$$

avec

$$\dim(G(\theta)) = (h_p - h_i + 1) \times h_c.$$

La matrice $G(\theta)$ formée à partir des coefficients des polynômes G_j s'identifie en fait aux coefficients de la réponse indicielle du modèle g_i (i Te), Te étant la période d'échantillonnage.

Avec ces notations, le prédictor à j -pas peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\hat{E}_y(t) = G(\theta) D E_u(t) + E_{y0}(t) \quad (2.28)$$

Le critère quadratique (2.27) peut se combiner avec la relation (2.28) pour obtenir l'expression matricielle de ce critère :

$$J(t, h_p, h_c) = \left| G(\theta) D E_u + E_{y0} \right|^T \left| G(\theta) D E_u + E_{y0} \right| + \lambda \left| D E_u \right|^T \left| D E_u \right| \quad (2.29)$$

Le vecteur E_u^* qui minimise ce critère est donné par :

$$D E_u^*(t) = - \left| G^T(\theta) G(\theta) + \lambda I_{hc} \right|^{-1} G^T(\theta) E_{y0} \quad (2.30)$$

Etape 3 : La loi de commande à horizon fuyant

De façon classique en commande prédictive, seule la première valeur de la séquence (2.30) est finalement utilisée pour établir la loi de commande à appliquer au système en accord avec la stratégie de l'horizon fuyant. On aura :

$$D(q^{-1})e_u(t) = -\Gamma(\theta)E_{y0} \quad (2.31)$$

$$\text{où} \quad \Gamma(\theta) = \left| 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right| \left| G^T(\theta) G(\theta) + \lambda I_{hc} \right|^{-1} G^T(\theta) E_{y0}$$

Une telle loi de commande peut se mettre sous la forme linéaire :

$$S(\theta, q^{-1}) D(q^{-1})e_u(t) + R(\theta, q^{-1})e_y(t) = 0$$

En effet, si on pose :

$$\Gamma(\theta) = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{hp-hi+1} \end{vmatrix}$$

alors on a :

$$D(q^{-1})e_u(t) = -\Gamma(\theta)E_{y0} = -\sum_{j=1}^{hp-hi+1} \gamma_j e_{y0}(t + hi + j - 1)$$

Cette relation correspond à l'équation :

$$\left(P(q^{-1})C(q^{-1}) + q^{-1} \sum_{j=1}^{hp-hi+1} \gamma_j H_{j+hi-d-1}(\theta, q^{-1}) \right) D(q^{-1})e_u(t) + \sum_{j=1}^{hp-hi+1} \gamma_j F_{j+hi-1}(\theta, q^{-1})e_y(t) = 0$$

Ce qui fournit par identification les deux polynômes $R(\theta, q^{-1})$ et $S(\theta, q^{-1})$ constituant le régulateur linéaire.

$$S(\theta, q^{-1}) = P(q^{-1})C(q^{-1}) + q^{-1} \sum_{j=1}^{hp-hi+1} \gamma_j H_{j+hi-d-1}(\theta, q^{-1}),$$

$$R(\theta, q^{-1}) = \sum_{j=1}^{hp-hi+1} \gamma_j F_{j+hi-1}(\theta, q^{-1}).$$

2.5 Analyse du système en boucle fermée

Un autre intérêt de la structure RST concerne l'étude de la stabilité de la boucle corrigée, et donc la caractérisation de la stabilité de la commande prédictive élaborée, qui est dès lors possible pour un jeu de paramètres du critère fixé. On peut vérifier la position des pôles en boucle fermée, donnés par l'équation :

$$\begin{aligned} \bar{T}(q^{-1}) &= A(\theta, q^{-1})D(q^{-1})S(\theta, q^{-1}) + q^{-d-1}B(\theta, q^{-1})R(\theta, q^{-1}) \\ &= P(q^{-1})C(q^{-1})P_f(\theta, q^{-1}) \end{aligned}$$

où $P(q^{-1})$ est le polynôme désiré (placement de pôles),

$C(q^{-1})$ polynôme asymptotiquement stable,

$$P_f(\theta, q^{-1}) = A(\theta, q^{-1})D(q^{-1}) + \sum_{j=1}^{hp-hi+1} \gamma_j q^{j+hi-d-2} (B(\theta, q^{-1}) - A(\theta, q^{-1})D(q^{-1})G_{j+hi-d-1}(\theta, q^{-1}))$$

Avec cette représentation, il est possible de tester la stabilité avant l'implantation de la loi de commande sur un système réel.

Comme la stabilité du système en boucle fermée est fixée par le polynôme $P_f(\theta, q^{-1})$, donc un choix adéquat des paramètres de synthèses h_p , h_i , h_c et λ doit être établi. Ce choix des paramètres s'avère cependant délicat, car il n'existe pas de relations empiriques permettant de

relier ces paramètres à des indicateurs classiques en Automatique, tels que marge de stabilité ou bande passante [BOU-1, MSA].

Nous donnons ci-dessous quelques résultats disponibles dans la littérature [CLA-3, MSA], sur la commande prédictive généralisée.

- $h_i=d+1$, h_c arbitraire, $h_p=h_i+h_c$ et $\lambda=0$ alors $P_f(\theta, q^{-1}) = B(\theta, q^{-1})$: le modèle de commande doit être inversement stable (à phase minimale), comme dans le cas d'une commande prédictive à pas sans pondération de la commande.
- $h_p=h_i=d+1$, $h_c=1$ et $\lambda \neq 0$ alors $P_f(q^{-1}) = B(\theta, q^{-1}) + \lambda A(\theta, q^{-1})$: le polynôme caractéristique $P_f(\theta, q^{-1})$ est le même que celui de la commande prédictive à un pas avec pondération de la commande.
- $h_c=n_a+n_b$, $h_i=n_b+d+1$, $h_p \geq h_c+h_i-1$ et $\lambda=0$ alors $P_f(\theta, q^{-1}) = 1$: On place ainsi $\max(n_a+n_d, n_b+d+1)$ pôles en zéros.
- $h_c=1$, $h_i=d+1$, $h_p \rightarrow \infty$ $D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$ et $\lambda=0$ alors $P_f(\theta, q^{-1}) = A(\theta, q^{-1})$: le procédé à commander doit présenter un comportement entrée-sortie stable et bien amorti. Si h_p est fini, alors les pôles $P_f(\theta, q^{-1})$ sont près des pôles de $A(\theta, q^{-1})$.
- $h_i=1$, h_p et $h_c \rightarrow \infty$, $\lambda > 0$ et le modèle est stabilisable : $P_f(\theta, q^{-1})$ est asymptotiquement stable. Le système de commande associé peut être utilisé dans de nombreuses applications industrielles.

Notons que pour la classe de procédé définie par l'équation (2.1), la loi de commande avec modèle de référence sur l'état partiel peut se mettre sous la forme linéaire :

$$S(\theta, q^{-1}) D(q^{-1}) e_u(t) + R(\theta, q^{-1}) e_y(t) = 0$$

avec

$$e_y(t) = P(q^{-1}) (y(t) - B(\theta, q^{-1}) \beta(\theta) y^*(t)),$$

$$e_u(t) = P(q^{-1}) (u(t) - A(\theta, q^{-1}) \beta(\theta) y^*(t + d + 1)).$$

Les dynamiques de poursuite et de régulation qui en résultent sont respectivement données par :

$$\frac{B(\theta, q^{-1}) B_m(q^{-1})}{B(\theta, 1) A_m(q^{-1})} \quad \text{et} \quad \frac{S(\theta, q^{-1})}{P(q^{-1}) P_f(\theta, q^{-1})} \xi(t).$$

2.6 Exemples de simulation

Dans ce paragraphe, la commande prédictive généralisée avec modèle de référence sur l'état partiel est appliquée à quelques systèmes particuliers, à savoir :

- Système à retard variable et inconnu,
- Système à ordre inconnu,
- Système à paramètres inconnus,
- Système non linéaire (modèle Hammerstein).

Dans ces exemples, l'entrée de référence (déduite du modèle de référence) est un signal carré et le signal $\xi(t)$ est une séquence aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance connue.

2.6.1 Commande GPC/MREP d'un système à retard inconnu et variable

La fonction de transfert du système est : $A(\theta, q^{-1}) = 1 - 1.1q^{-1}$, $B(\theta, q^{-1}) = 0.1 + 0.2q^{-1}$.

C'est un système instable et à phase non minimale.

Le modèle interne de perturbation : $C(q^{-1}) = 1$, $D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$, $\sigma^2 = 0.01$. Lors de la simulation, nous avons introduit pour le système le retard reproduit sur la figure 2.2.

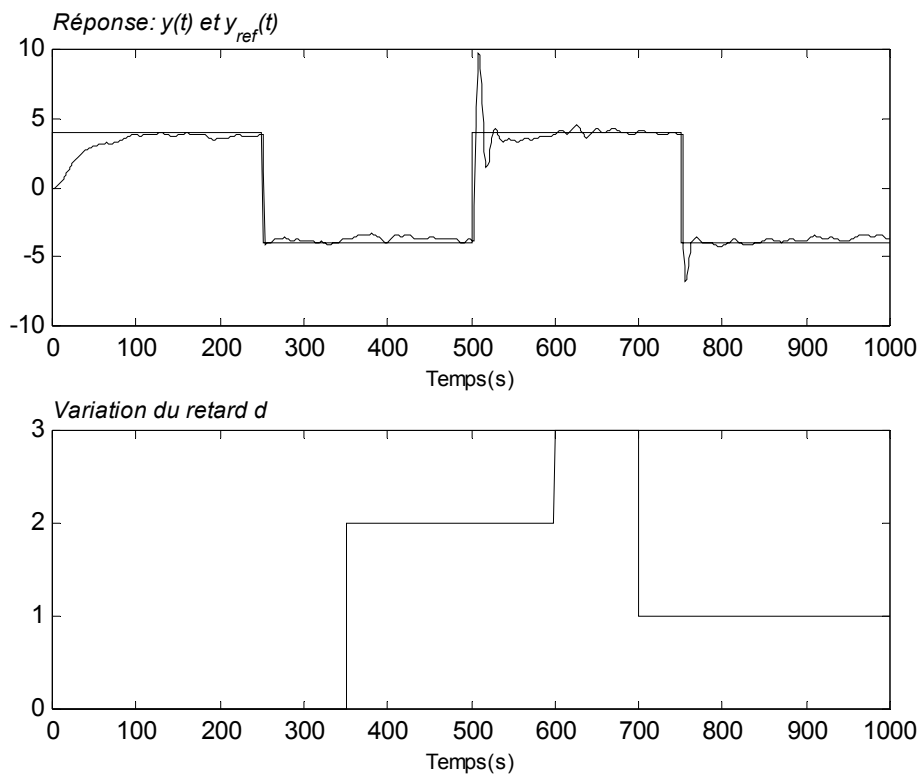


Figure 2.2 Performances de la commande GPC/MREP en présence du retard variable et inconnu.

Le polynôme désiré est donné par $P(q^{-1}) = 1 - 0.8q^{-1}$.

Dimensionnement du réglage : $h_p=15$, $h_i=15$, $h_c=1$ et $\lambda = 0$.

La matrice $G(\theta)$ établie est donnée par : $G(\theta) = [8.7722]$.

Les paramètres des polynômes $R(\theta, q^{-1})$, $S(\theta, q^{-1})$ et $\bar{T}(\theta, q^{-1})$ sont :

$$R(\theta, q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} = 1.2006 - 1.11778 q^{-1},$$

$$S(\theta, q^{-1}) = s_0 + s_1 q^{-1} = 1 + 0.2141 q^{-1},$$

$$\bar{T}(\theta, q^{-1}) = t_0 + t_1 q^{-1} + t_2 q^{-2} = (1 - 0.7998 q^{-1})(1 - 0.966 q^{-1}) = 1 - 1.7658 q^{-1} + 0.7726 q^{-2}$$

L'expression de la commande à appliquer au système est donnée par :

$$u(t) = u(t-1) + (1 - S(\theta, q^{-1}))D(q^{-1})u(t) - R(\theta, q^{-1})y(t) + \beta \bar{T}(\theta, q^{-1}) y_{ref}(t+1)$$

La synthèse de la loi de commande est établie sans tenir compte du retard, puisque ce dernier est inconnu. Les résultats de simulation sont reproduits sur la figure 2.2, on observe que la sortie du système en boucle fermée est insensible aux variations du retard d.

2.6.2 Application de la commande GPC/MREP à un système à ordre inconnu (modèle avec dynamique négligée)

Supposant que la fonction de transfert d'un procédé est donné par:

$$A(\theta, q^{-1}) = 1 - 1.3q^{-1} + 0.5q^{-2} ; B(\theta, q^{-1}) = 0.1 + 0.2q^{-1} ; d=0.$$

C'est un système stable et à phase non minimale.

Le modèle estimé pour la synthèse de la loi de commande est : $A(\theta, q^{-1}) = 1 - 1.1q^{-1}$ et $B(\theta, q^{-1}) = 0.1 + 0.2q^{-1}$, donc le terme négligeable est : $w(t) = (0.2q^{-1} - 0.5q^{-2})y(t)$.

Modèle de perturbation est : $C(q^{-1}) = 1$; $D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$; $\sigma^2 = 0.01$.

Le choix du polynôme désiré est $P(q^{-1}) = 1 - 0.8q^{-1}$.

Les paramètres de synthèse sont : $h_p=5$, $h_i=2$, $h_c=2$ et $\lambda=0$.

La matrice $G(\theta)$ est :

$$\begin{bmatrix} 0.41 & 0.1 \\ 0.751 & 0.41 \\ 1.1261 & 0.751 \\ 1.5387 & 1.1261 \end{bmatrix}.$$

Les paramètres du régulateur sont alors :

$$R(\theta, q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} = 5.047 - 4.3763 q^{-1} ; S(\theta, q^{-1}) = s_0 + s_1 q^{-1} = 1 + 0.7957 q^{-1} ;$$

$$\bar{T}(\theta, q^{-1}) = t_0 + t_1 q^{-1} + t_2 q^{-2} = (1 - 0.7986 q^{-1})(1 - 0.041 q^{-1}) = 1 - 0.8396 q^{-1} + 0.0327 q^{-2}.$$

L'expression de la commande à appliquer au système est donnée par :

$$u(t) = u(t-1) + (1 - S(\theta, q^{-1}))D(q^{-1})u(t) - R(\theta, q^{-1})y(t) + \beta \bar{T}(\theta, q^{-1}) y_{ref}(t+1)$$

La réponse du procédé en tenant compte de la dynamique négligée et bouclée par la commande ci-dessus est illustrée sur la figure 2.3. On constate que les signaux de sortie et de commande sont bornés et cela malgré la sous-paramétrisation du modèle de procédé.

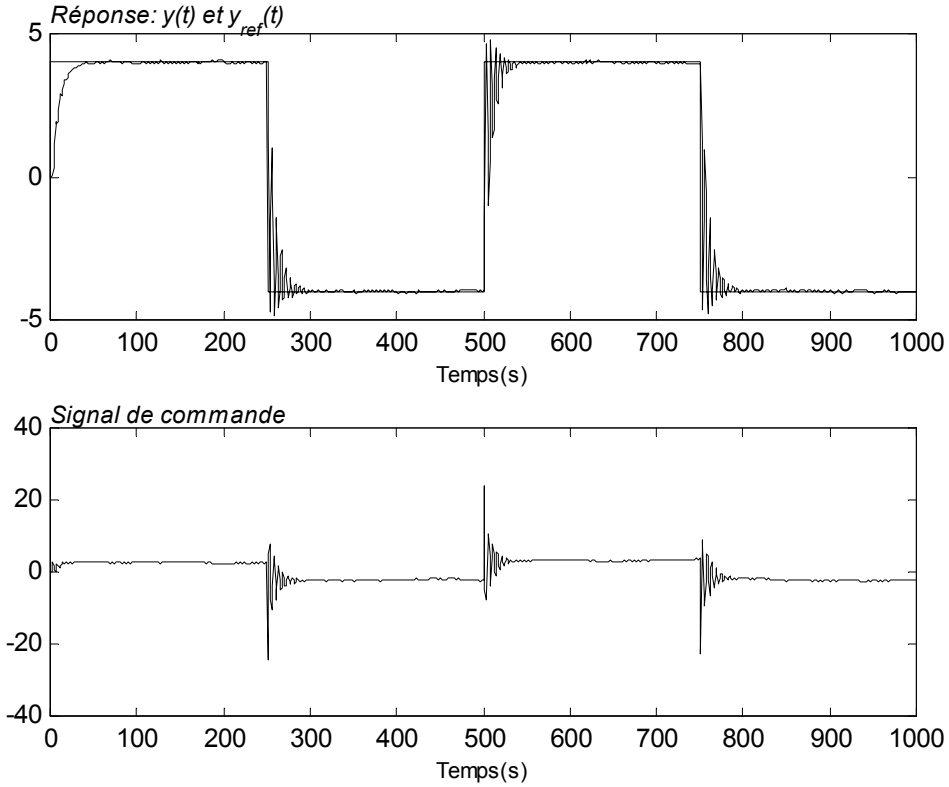


Figure 2.3 Performances de la commande GPC/MREP en présence de la dynamique négligée.

2.6.3 Application de la commande GPC/MREP à un système à paramètres inconnus

La fonction de transfert du système est : $A(\theta, q^{-1}) = 1 - 1.8 q^{-1} + 0.77 q^{-2}$,

$B(\theta, q^{-1}) = 1 - 1.5 q^{-1}$. C'est un système instable et à phase non minimale.

Le modèle des perturbations est : $C(\theta, q^{-1}) = 1$, $D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$, $\sigma^2 = 0.001$.

Le polynôme désiré est $P(q^{-1}) = 1 - 0.9 q^{-1}$, et les paramètres de synthèse sont choisis comme suit : $h_p=25$, $h_i=10$, $h_c=1$ et $\lambda=1$.

L'algorithme des moindres carrés récurrents avec gel est utilisé dans cet exemple pour identifier les paramètres du modèle (équations 1.29-1.33).

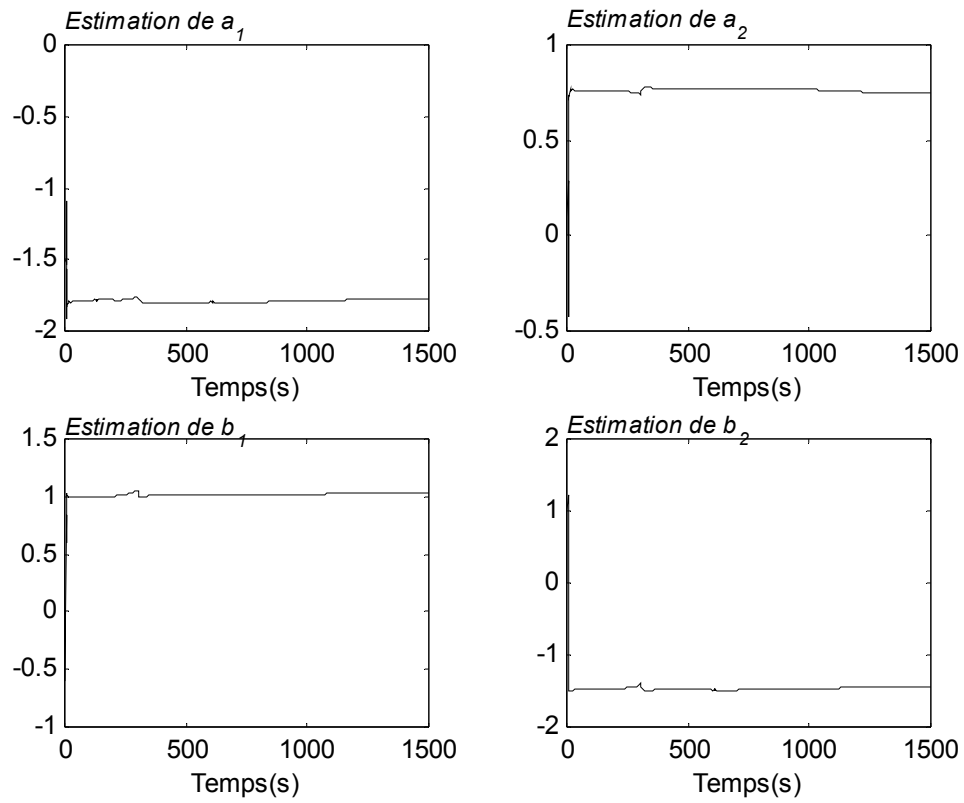


Figure 2.4 Estimation des paramètres du procédé.

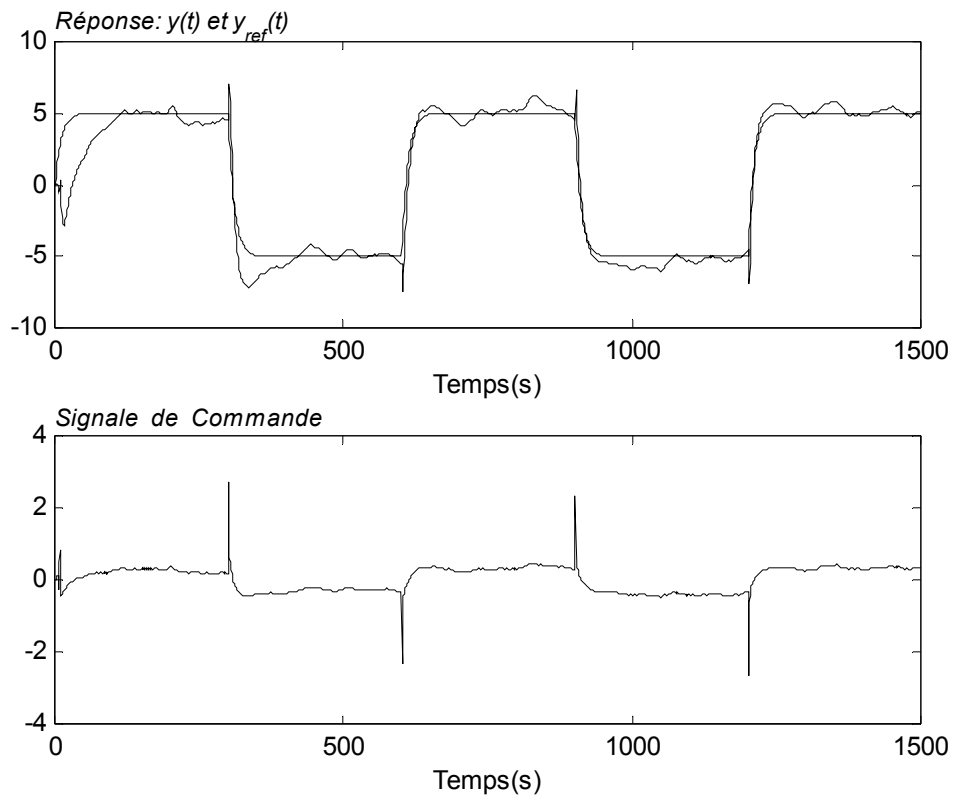


Figure 2.5 Performances de la commande GPC/MREP adaptative.

Le vecteur des paramètres est $\hat{\theta}(k) = [\hat{a}_1 \quad \hat{a}_2 \quad \hat{b}_1 \quad \hat{b}_2]^T$ avec $\hat{\theta}(0) = [-1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.5]$ et $\Gamma(0) = 5 \cdot 10^3 I_{4 \times 4}$.

Les paramètres du régulateur sont alors :

$$R(\theta, q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} + r_2 q^{-2} = -0.7577 + 1.2751 q^{-1} - 0.52 q^{-2} ;$$

$$S(\theta, q^{-1}) = s_0 + s_1 q^{-1} = 1 - 0.9994 q^{-1} ;$$

$$\begin{aligned} \bar{T}(\theta, q^{-1}) &= t_0 + t_1 q^{-1} + t_2 q^{-2} + t_3 q^{-3} = (1 - 0.9 q^{-1})(1 - 0.9638 q^{-1})(1 - 0.6944 q^{-1}) \\ &= 1 - 2.598 q^{-1} + 2.1618 q^{-2} - 0.6025 q^{-3} \end{aligned}$$

Les résultats de simulation du système à paramètres inconnus contrôlé par la commande adaptative GPC/MREP sont présentés sur les figures 2.4 et 2.5

La figure 2.4 représente l'évolution des paramètres estimés du modèle de commande. On voit qu'on a un estimateur sans biais. D'autre part, la figure 2.5 illustre les performances obtenues par cette méthode de commande GPC/MREP adaptative. On constate que le problème de poursuite de la trajectoire de référence est résolu par cette structure de commande avec incertitudes sur les paramètres du système.

2.6.4 Application de la commande GPC/MREP à un système non linéaire représenté par un modèle d'Hammerstein

La fonction de transfert du bloc linéaire est : $A(\theta, q^{-1}) = 1 - 1.1 q^{-1}$, $B(\theta, q^{-1}) = 1 + 2 q^{-1}$.

L'expression de la partie non linéaire est : $x(t) = 1 + u(t) - u(t)^2 - 0.2 u(t)^3$.

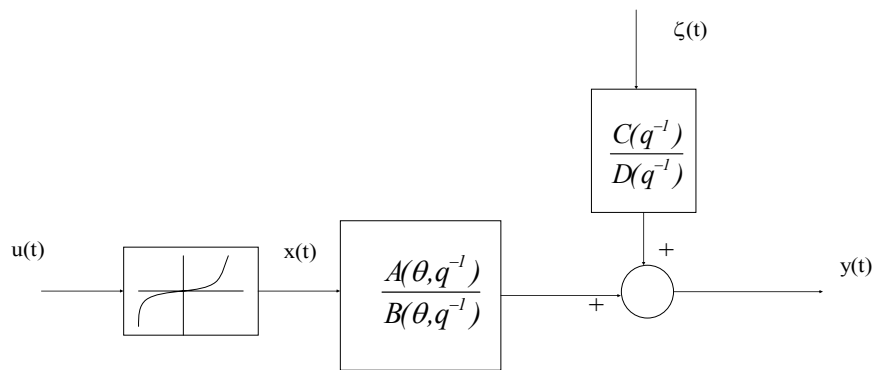


Figure 2.6 Représentation du modèle d'Hammerstein

Le modèle des perturbations est : $C(q^{-1}) = 1$, $D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$ et $\sigma^2 = 0.05$.

Le polynôme désiré est : $P(q^{-1}) = 1 - 1.5 q^{-1} + 0.56 q^{-2}$, et les paramètres de réglage sont :

$h_p=5$, $h_i=2$, $h_c=2$ et $\lambda=1$.

Les polynômes du régulateur pour la partie linéaire sont :

$$R(\theta, q^{-1}) = 0.1873 - 0.1711q^{-1} ; S(\theta, q^{-1}) = 1 - 0.1411q^{-1} + 0.0412q^{-2} \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}(\theta, q^{-1}) &= 1 - 1.77166q^{-1} + 1.0484q^{-2} - 0.2735q^{-3} + 0.0453q^{-4} \\ &= P(q^{-1})(1 - 0.2716q^{-1} + 0.809q^{-2}) \end{aligned}$$

A partir de ces polynômes, le signal intermédiaire $x(t)$ est calculé de la manière suivante :

$$x(t) = x(t-1) + (1 - S(\theta, q^{-1}))D(q^{-1})x(t) - R(\theta, q^{-1})y(t) + \beta \bar{T}(\theta, q^{-1})y_{ref}(t+1)$$

Le signal de commande, qui est appliqué au système non linéaire, est calculé par la résolution de l'algorithme Newton-Raphson, à savoir :

$$\begin{cases} u_0(t) = u(t-1) \\ u_{n+1}(t) = u_n(t) - \frac{\phi(u_n(t)) - x(t)}{\phi'(u_n(t))} \end{cases}$$

où $x(t)$ est le signal établi par la commande GPC/MREP en utilisant la partie linéaire,

$$\phi(u_n(t)) = 1 + u_n(t) - u_n(t)^2 + 0.2u_n(t)^3,$$

$$\phi'(u_n(t)) = \frac{d\phi(u_n(t))}{dt} = 1 - 2u_n(t) + 0.6u_n(t)^2.$$

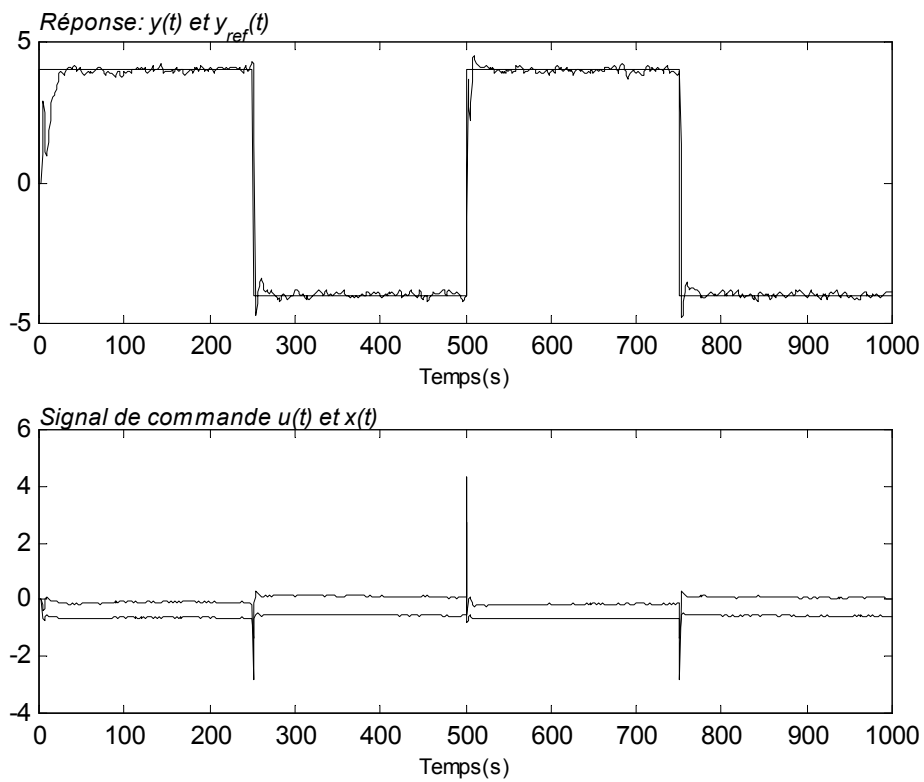


Figure 2.7 Performance de la commande GPC/MREP en présence des non linéarités.

La figure 2.7 présente les performances obtenues quand la commande GPC/MREP est appliquée au système non linéaire représenté par le modèle d'Hammerstein. D'après la figure 2.7-a, on note qu'il n'y a pas d'erreurs et qu'on a une bonne réjection de la perturbation. La figure 2.7-b illustre l'allure du signal de intermédiaire $x(t)$ et de commande $u(t)$.

2.7 Conclusion

L'algorithme de la commande prédictive généralisée avec modèle de référence sur l'état partiel (GPC/MREP) qui a fait l'objet de ce chapitre, peut être présenté comme une généralisation de quelques algorithmes de commande prédictive qui peuvent être retrouvés par un choix adéquat des paramètres de prédiction et de pondération. En outre, l'utilisation des indices de performances $e_u(t)$ et $e_y(t)$, permet de combiner la méthode de placement de pôles et la commande prédictive généralisée (GPC) pour le calcul de la loi de commande qui répond aux performances désirées (poursuite et régulation).

L'étude, en simulation de quelques exemples, a montré la robustesse de cette loi de commande par rapport aux variations du retard, aux dynamique négligée et aux incertitudes paramétriques.

Il faut noter que l'inconvénient majeur de cette structure de commande est que les performances sont grandement influencées par le choix des paramètres de synthèse h_p , h_i , h_c et λ . Par conséquent, un choix judicieux de ces paramètres est nécessaire, avant l'implantation de l'algorithme par essais ou simulation, afin de répondre aux performances désirées.

La commande prédictive généralisée avec modèle de référence sur l'état partiel permet de préserver la stabilité et garantir les performances requises pour une classe d'erreurs de modélisation aussi large que possible. Ainsi, elle a été développée dans de nombreuses applications dans le domaine industriel [MSA], où les modèles des procédés sont non linéaires travaillant autour d'un point de fonctionnement. Cependant, les modèles des processus physiques sont complexes et non linéaires, et pour bénéficier de son attrayante caractéristique 'la robustesse vis-à-vis des incertitudes structurées et non structurées', il faut synthétiser une loi de commande prédictive non linéaire tenant compte des non linéarités du système de commande. Dans les chapitres qui suivent, nous présentons la synthèse de la

commande prédictive continue non linéaire, ainsi que son application à des systèmes fortement non linéaires (la commande d'un robot manipulateur et d'une machine asynchrone).

Chapitre 3

Commande prédictive des systèmes non linéaires

3. 1 Introduction

Le concept de la commande prédictive réside dans la création d'un effet anticipatif. Cette structure de commande, développée pour les systèmes linéaires, n'a connu un réel essor en tant que technique de commande avancée que depuis les années 80 [CLA]. Cet essor est dû à sa robustesse vis-à-vis des incertitudes structurées ou non structurées [BOU-1]. Elle a montré son efficacité, sa flexibilité et son succès dans les applications industrielles.

En général, le modèle dynamique des processus physiques est non linéaire et l'établissement des lois de commande prédictive pour ces processus nécessite la minimisation de la fonction coût en ligne, opération qui est très complexe [HEN]. Cependant, les problèmes d'optimisation et de stabilité ont été résolus par la commande 'Dual mode control' [MIC]. Une des difficultés majeures de la solution proposée provient du temps d'optimisation en ligne nécessaire pour aboutir à un résultat optimal. Par ailleurs, la solution globale du problème d'optimisation n'est pas garantie et le temps d'optimisation introduit un retard au système de commande lors de son implémentation. Ce retard peut dégrader davantage les performances de poursuite ou même déstabiliser le système non linéaire.

Afin d'éviter ce problème d'optimisation en ligne, plusieurs commandes prédictives non linéaires hors ligne ont été proposées [PIN-2, SIN-1, SOU-1]. La prédiction de l'écart de poursuite à un pas est obtenue en utilisant le développement de Taylor d'ordre r_i du signal de sortie et de référence, où r_i est le degré relatif de la $i^{\text{ème}}$ sortie du système. La solution de la minimisation du critère quadratique à un pas établit la loi de commande. Dans ce qui suit, nous avons proposé l'extension aux systèmes non linéaires de la commande GPC continue, développée par Demircioglu pour les systèmes linéaires [DEM-1, DEM-2]. Ainsi donc le critère quadratique sera minimisé sur un horizon fini et le problème d'optimisation en ligne sera contourné en utilisant l'approximation de Taylor. En outre, la stabilité du système en boucle fermée est assurée par un choix adéquat des paramètres de réglage.

Pour augmenter le nombre de paramètres de réglage et améliorer les performances de poursuite, nous avons combiné les deux structures de commandes (commande prédictive à un pas et commande prédictive à horizon fini), ce qui conduit à la commande prédictive optimale avec contrainte terminale. Ainsi les performances de poursuite et de robustesse seront améliorées.

Cependant, ces méthodes ne sont appliquées qu'aux systèmes non linéaires avec une dynamique des zéros stable et un degré relatif bien défini. Comme la majorité des systèmes physiques vérifient cette contrainte, alors ces stratégies de commande seront appliquées pour la commande des positions et vitesses des axes d'un robot manipulateur ainsi que le couple, le flux et la vitesse d'une machine asynchrone dans les chapitres qui suivent.

Dans ce chapitre, nous rappelons la commande prédictive à un pas développée par Ping Lu, ainsi que l'analyse de la stabilité du système corrigé. Ensuite, nous proposons l'extension aux systèmes non linéaires de la commande CGPC développée par Demircioglu pour les systèmes linéaires et le critère de cette structure de commande sera minimisé sur un horizon fini. Pour améliorer davantage les performances de poursuite, ces deux lois de commande sont combinées (Integration Control), ce qui va permettre d'augmenter le nombre de paramètres de réglage et d'optimiser les performances. Finalement, nous présentons un observateur non linéaire pour l'estimation de l'état du système non linéaire.

3. 2 Commande GPC des systèmes non linéaires

Soit le système non linéaire affine par rapport à la commande :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i(t) \\ y(t) = h(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x(t) \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur des variables d'état, $u(t) \in \mathcal{R}^m$ est le vecteur de commande et $y(t) \in \mathcal{R}^m$ est le vecteur de mesure que nous appellerons sortie du système. Les fonctions non linéaires $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ et $h(\cdot)$ sont supposées être réelles et possèdent des dérivées partielles continues .

Pour que la commande prédictive généralisée puisse être appliquée au système non linéaire (3.1), la linéarisation exacte (entrée/sortie) par difféomorphisme et bouclage est nécessaire. Le but est de trouver un retour d'état statique :

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v$$

tel que le système non linéaire bouclé nous donne un système possédant un comportement entrée-sortie linéaire.

Afin d'introduire les conditions de linéarisation, nous devons d'abord définir les opérations de base de la géométrie différentielle, à savoir:

- La dérivée de Lie d'une fonction $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ le long d'un champ de vecteurs $f(x)$ est donnée par :

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x)$$

- Le crochet de Lie de f et g est le champ de vecteurs définis par :

$$[f, g] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} f_i(x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g_i(x) = L_f g(x) - L_g f(x)$$

On note : $ad_{f^0} g = g(x)$

$$ad_{fg} = [f, g] \dots\dots\dots, ad_{fg}^i = [f, ad_{fg}^{i-1}] \text{ avec } i = 2, 3 \dots$$

- Le vecteur degré relatif du système est le vecteur $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)^T$ où r_j correspond à la première dérivée de y_j faisant apparaître explicitement la commande u dans l'expression :

$$y_j^{(r_j)} = L_f^{(r_j)} h_j + \sum_{i=1}^m \left(L_{g_i} L_f^{r_j-1} h_j \right) u_i \quad (3.2)$$

- Une distribution Δ est un sous-espace engendré par des champs de vecteurs $f_1, f_2, \dots, f_p : \Delta(x) = \text{span}(f_1, \dots, f_p)$. Les conditions de linéarisation d'un système non linéaire s'obtiennent par la construction des distributions suivantes :

$$G_0 = (g_1, g_2, \dots, g_p),$$

$$G_1 = \text{span}(g_1, \dots, g_p, ad_{fg_1}, \dots, ad_{fg_p})$$

$$G_i = G_{i-1} + ad_{f_{G_{i-1}}} \text{ pour } i > 1.$$

Les conditions permettant d'effectuer une linéarisation exacte (sans dynamique des zéros) sont [ISI, THO] :

- 1- La distribution G_{n-1} est de rang n .
- 2- Pour tout i avec $0 \leq i < n-2$, la distribution G_i est involutive et de rang constant.

La première condition est liée à la condition de contrôlabilité du système linéaire. La deuxième correspond à l'existence d'un changement de coordonnées dans lesquelles le système a un comportement entrée-sortie linéaire.

On note que si ces conditions sont vérifiées jusqu'à l'ordre $r < n$, on obtient un sous-système linéarisable d'ordre r avec une dynamique des zéros d'ordre $(n-r)$ dont il faut prouver la stabilité puisque cette dynamique est incontrôlable.

La relation (3.2) peut s'écrire sous forme:

$$\begin{bmatrix} y_l^{r_l} \\ \vdots \\ y_m^{r_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_l} h_l(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_g L_f^{r_l-1} h_l(x) \\ \vdots \\ L_g L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} u$$

ou sous forme condensée : $y^r = D_0(x) + D(x) u$

$$D_0(x) = \begin{bmatrix} L_f^{r_l} h_l(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{ et } D(x) = \begin{bmatrix} L_{g_l} L_f^{r_l-1} h_l(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_l-1} h_l(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \text{ est une matrice de}$$

découplage.

Si la matrice $D(x)$ n'est pas singulière, alors le retour d'état statique de la forme: $u = D^{-1}(x)(-D_0(x) + v)$ découple et linéarise le système non linéaire (3.1). Le système en boucle fermée est équivalent à m chaînes de r_i intégrateurs en cascade indépendants :

$$\begin{cases} y_1^{(r_1)} = v_1 \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} = v_m \end{cases}$$

Ainsi, la commande prédictive généralisée peut être appliquée aux m modèles linéaires dont le modèle discret de chaque sortie est donné par:

$$A_i(q^{-1}) y_i(t) = B_i(q^{-1}) v_i(t-1) + \xi_i(t) / (1 - q^{-1}) \text{ avec } i=1, 2, \dots, m$$

La représentation schématique de la commande GPC du système non linéaire (3.1) est illustrée sur la figure 3.2:

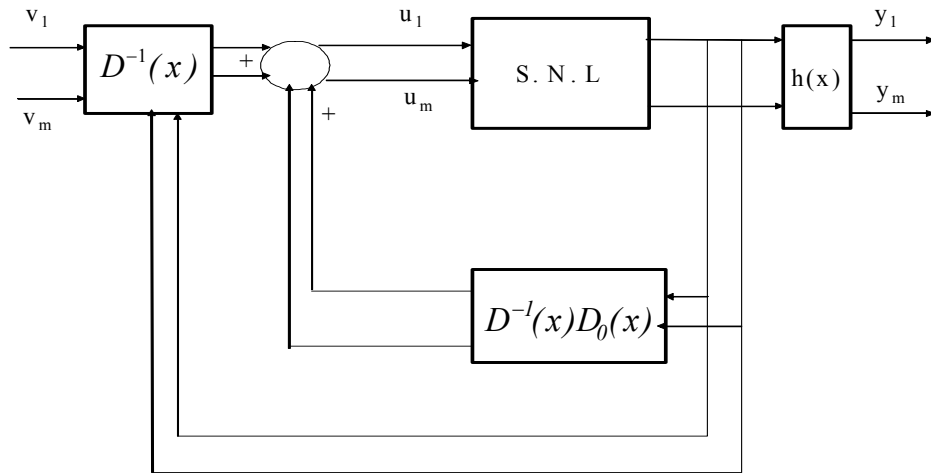


Figure 3.1 Représentation schématique de la linéarisation entrée-sortie.

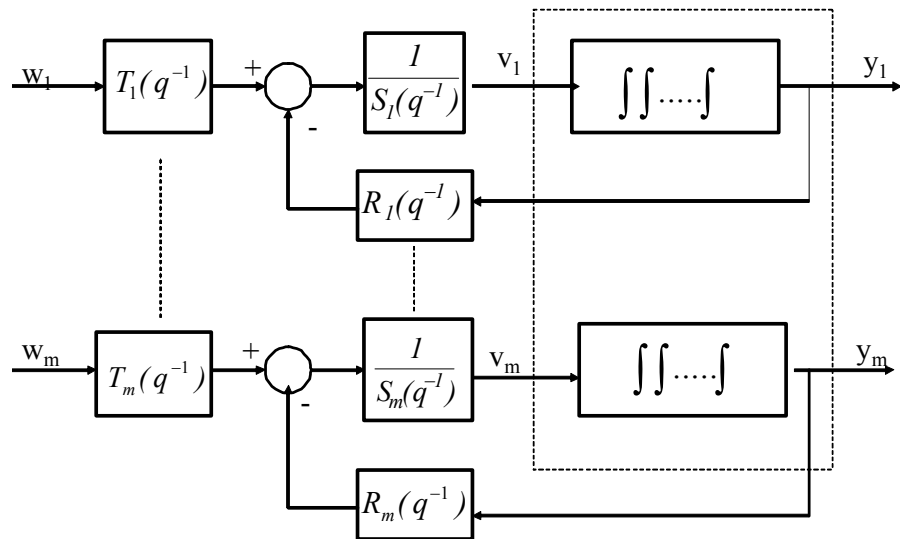


Figure 3.2 Représentation schématique de la commande GPC d'un système non linéaire.

Cette méthode a été utilisée par Boucher et al pour la commande du flux, du couple et de la vitesse d'une machine asynchrone en cascade. Ils ont montré que le moteur asynchrone bouclé par cette commande a donné de bonnes performances en poursuite avec un rejet du couple de charge en dépit des variations des paramètres rotorique et statorique [BOU-2].

L'inconvénient majeur de cette structure de commande est la perte de la linéarisation quand on a des contraintes sur la commande.

3. 3 Commande prédictive non linéaire de sortie

Un objectif classique en commande est d'exiger de la sortie du système commandé d'atteindre une consigne le plus rapidement possible. Dans le contexte prédictif, l'erreur de poursuite prédite est minimisée sur un horizon fini. Le modèle de prédiction d'un système non linéaire est une fonction continue qui nous permet de calculer la sortie du système à l'instant futur $(t+h)$, où $h > 0$ est l'horizon de prédiction, à partir des entrées et sorties jusqu'à l'instant t . La méthode de prédiction qui sera utilisée dans ce chapitre est basée sur le développement de Taylor. Par conséquent, le modèle prédictif de la sortie $y(t)$ à l'instant $(t+h)$ est donné par :

$$y(t+h) = y(t) + V_y(x, h) + \Lambda(h)W(x)u$$

où

$$V_y(x, h) = (v_1(x, h) \quad v_2(x, h) \quad \dots \quad v_m(x, h))^T$$

$$\text{avec } v_i(x, h) = h L_f h_i(x) + \frac{h^2}{2!} L_f^2 h_i(x) + \dots + \frac{h^{r_i}}{r_i!} L_f^{r_i} h_i(x)$$

$$\Lambda(h) = \text{diag}\left(\frac{h^{r_1}}{r_1!}, \frac{h^{r_2}}{r_2!}, \dots, \frac{h^{r_m}}{r_m!}\right),$$

$$W(x) = (w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_m)^T \text{ avec } w_i(x) = (L_{g1} L_f^{r_i-1} h_i(x) \dots L_{gm} L_f^{r_i-1} h_i(x))$$

Problème de trajectoire de référence : la trajectoire $y_{\text{ref}}(t)$ est appelée trajectoire de référence, s'il existe une loi de commande admissible $u^*(t) \in U$ qui fait suivre à la sortie du système non linéaire $y(t)$ la trajectoire $y_{\text{ref}}(t)$:

$$\exists u^*(t) \in U \in \mathbb{R}^m \text{ et } t_0 > 0 \text{ tel que } y(t) = y_{\text{ref}}(t) \text{ pour } t > t_0.$$

Pour que la sortie $y(t)$ du système non linéaire (3.1) puisse suivre la trajectoire de référence $y_{\text{ref}}(t)$, il faut qu'elle soit r fois dérivable, r est le degré relatif de la sortie $y(t)$. Cette condition garantit la contrôlabilité de la sortie tout le long de la trajectoire $y_{\text{ref}}(t)$ [HIR]. Par conséquent, on peut appliquer le développement de Taylor à l'ordre r au signal de référence:

$$y_{ref}(t+h) = y_{ref}(t) + d(t,h)$$

où

$$d(t,h) = (d_1(t,h) \ d_2(t,h) \dots \dots d_m(t,h))^T \text{ avec } d_i(t,h) = h \dot{y}_{refi} + \frac{h^2}{2!} \ddot{y}_{refi} + \dots + \frac{h^{r_i}}{r_i!} y_{refi}^{(r_i)}.$$

Dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée, un modèle de trajectoire de type exponentiel est utilisé pour générer la trajectoire de référence $y_{ref}(t)$ à partir de la consigne $y_d(t)$ [SOU-1]. Pour un degré relatif r , la trajectoire de référence $y_{ref}(t)$ est solution de l'équation différentielle suivante:

$$y_{ref}(t) + \gamma_1 \frac{dy_{ref}}{dt} + \gamma_2 \frac{d^2 y_{ref}}{dt^2} + \dots + \gamma_r \frac{d^r y_{ref}}{dt^r} = y_d$$

où y_d est la consigne, les gains γ_i sont choisis de façon à ce que le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle soit stable.

3. 3. 1 Commande prédictive non linéaire à un pas [PIN-2]

L'objectif de la commande prédictive non linéaire à un pas est de trouver une loi de commande $u(t)$ qui fait coïncider la sortie $y(t)$ avec le vecteur de référence $y_{ref}(t)$ à l'instant $(t+h)$. Ainsi donc le critère à minimiser est la fonctionnelle suivante:

$$J_1(y, y_{ref}, R, Q, u) = \frac{1}{2} \|y(t+h) - y_{ref}(t+h)\|_Q^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_R^2 \quad (3.3)$$

où

$Q \in \mathcal{R}^{mxm}$ est une matrice définie positive et $R \in \mathcal{R}^{mxm}$ est une matrice semi-définie positive [PIN-2].

Remarque : Parmi les compromis qu'on doit traiter pour engendrer une loi de commande stabilisante, il y a celui de réaliser un équilibre ou un compromis entre les écarts de sortie et la sollicitation des commandes par l'intermédiaire des paramètres de synthèse Q et R . En général, si on augmente globalement Q par rapport à R , on pénalise plus fortement la sortie, il en résultera des réponses plus rapides au prix de commandes plus énergiques qui peuvent déstabiliser le système non linéaire (3.1). Par conséquent, un choix judicieux de ces paramètres de synthèse est nécessaire.

Définition 1: La commande prédictive optimale du critère (3.3) pour le système non linéaire (3.1) est un retour d'état statique :

$$u(t) = \phi_1(x(t), e(t), Q, R)$$

où ϕ_1 est une fonction telle que :

$$\phi_1(x(t), e(t), Q, R) = \underset{U}{\text{Arg Min}} J_1(y(t), y_{ref}(t), Q, R, u(t))$$

On obtient (voir Annexe D):

$$u(t) = -[\Lambda W)^T Q \Lambda W + R]^{-1} (\Lambda W)^T Q [e(t) + V_y(x, h) - d(t, h)] \quad (3.4)$$

où $e(t) = y(t) - y_{ref}(t)$ est l'erreur de poursuite.

Théorème 1 [PIN-2]:

Soit h un réel positif et Q une matrice définie positive. La commande optimale prédictive décrite en (3.4) linéarise la dynamique de l'erreur de poursuite et permet une poursuite asymptotique de la trajectoire de référence si et seulement si $r_i \leq 4$ pour $i=1, 2, \dots, m$.

Preuve: En dérivant les sorties $y_i(t)$ par rapport au temps (r_i fois) jusqu'à ce qu'une des variables d'entrées apparaisse, nous obtenons :

$$y_i^{(r_i)} = L_f^{r_i} h_i + [L_{g_1} L_f^{r_i-1} h_i \quad L_{g_2} L_f^{r_i-1} h_i \quad \dots \quad L_{g_m} L_f^{r_i-1} h_i] u$$

ou sous forme condensée :

$$y^{(r)} = L_f^{(r)} c + W(x) u \quad (3.5)$$

où $r = (r_1 \ r_2 \ \dots \ r_m)$ est vecteur de degré relatif du système (3.1).

Posons $R=0$ (pas de pénalité sur la commande) l'équation (3.4) s'écrit :

$$u(t) = -(\Lambda W)^{-1} (e(t) + V_y(x, h) - d(t, h))$$

En substituant cette équation dans l'équation (3.5), nous obtenons:

$$y^{(r)} = L_f^{(r)} h - \Lambda^{-1} (e(t) + V_y(x, h) - d(t, h))$$

et la i^{eme} sortie s'écrit :

$$y_i^{(r_i)} = L_f^{(r_i)} h_i - \frac{r_i!}{h^{r_i}} (e_i(t) + v_i(x, h) - d_i(t, h)) \quad (3.6)$$

où :

$$v_i(x, h) - d_i(t, h) = h \dot{e}_i + \frac{h^2}{2!} \ddot{e}_i + \dots + \frac{h^{(r_i-1)}}{(r_i-1)!} e_i^{(r_i-1)} - \frac{h^{r_i}}{r_i!} y_{ref}^{(r_i)} + \frac{h^{r_i}}{r_i!} L_f^{r_i} h_i$$

Nous remplaçons l'équation précédente dans l'expression (3.6), nous obtenons :

$$\frac{h^{r_i}}{r_i!} y_i^{(r_i)} = - \left(e_i(t) + h \dot{e}_i(t) + \dots + \frac{h^{(r_i-1)}}{(r_i-1)!} e_i^{(r_i-1)}(t) \right) + \frac{h^{r_i}}{r_i!} y^{(r_i)}_{ref}$$

ou bien

$$\frac{h^{r_i}}{r_i!} e_i^{(r_i)} + \frac{h^{(r_i-1)}}{(r_i-1)!} e_i^{(r_i-1)} + \dots + \frac{h^2}{2!} \ddot{e}_i + h \dot{e}_i + e_i = 0$$

Ainsi le critère (3.3) sans pondération sur la commande établit une commande prédictive non linéaire qui linéarise et découple le système non linéaire (3.1). La poursuite de trajectoire est garantie pour les sorties ayant un degré relatif $r_i \leq 4$ et pour $h > 0$. En effet, on peut vérifier par le critère de ROUTH que l'équation caractéristique est asymptotiquement stable pour $r_i \leq 4$.

Dans le cas où le degré relatif est supérieur à quatre ($r_i > 4$), Ping Lu [PIN-2] propose de modifier le critère J_l à minimiser en ajoutant le terme dérivatif de l'erreur de poursuite.

Remarque: L'équation de la dynamique de l'erreur de poursuite des systèmes non linéaires (3.1) qui ont un degré relatif $r_i = 1$ ou $r_i = 2$, n'est que le polynôme de BUTTERWORTH d'ordre un ou deux, dont les pôles sont :

$$p_1 = -\frac{1}{h} \text{ pour } r_i = 1 \quad \text{ou} \quad p_{1,2} = -\frac{1}{h} (1 \pm j) \text{ pour } r_i = 2.$$

3. 3. 2 Commande prédictive non linéaire à horizon fini

Afin d'améliorer les performances de poursuite de la commande prédictive à un pas, nous avons développé une méthode inédite qui permet de minimiser le critère J_1 tout le long de l'intervalle de prédiction $[t, t+h]$, nous obtenons ainsi le critère suivant:

$$J_2(y, y_{ref}, Q, R, u) = \frac{1}{2} \int_0^h \|\hat{y}(t+T) - y_{ref}(t+T)\|_Q^2 dT + \frac{1}{2} \int_0^{h_c} \|u(t+T)\|_R^2 dT \quad (3.7)$$

où h et h_c sont les horizons de prédictions de l'erreur de poursuite et de la commande respectivement. On suppose que le signal de commande est constant le long de l'intervalle $[t, t+T]$ avec $0 \leq T \leq h_c$ et $h_c \ll h$, alors on a : $u(t+T) \approx u(t)$.

Définition 2: La commande prédictive optimale du critère pour le système non linéaire (3.1) minimisant le critère (3.7) est un retour d'état statique :

$$u(t) = \phi_2(x(t), e(t), Q, R)$$

où ϕ_2 est une fonction telle que :

$$\phi_2(x(t), e(t), Q, R) = \underset{U}{\text{Arg Min}} J_2(y(t), y_{ref}(t), Q, R, u(t))$$

On obtient :

$$u(t) = -[W^T P_1(h)W + h_c R]^{-1} W^T [\Gamma_1(h)e(t) + H_1(x, h) - D_1(t, h)] \quad (3.8)$$

où

$$\Gamma_1(h) = \int_0^h \Lambda(T) dT, \quad P_1(h) = \int_0^h \Lambda(T) Q \Lambda(T) dT, \quad H_1(x, h) = \int_0^h \Lambda(T) Q V_y(x, T) dT,$$

$$D_1(t, h) = \int_0^h \Lambda(T) Q d(t, T) dT \quad \text{et} \quad e(t) = y(t) - y_{ref}(t).$$

Théorème 2:

Soit h un réel positif et Q une matrice définie positive, la commande optimale prédictive décrite en (3.8) linéarise la dynamique de l'erreur de poursuite et permet une poursuite asymptotique de la trajectoire de référence si et seulement si $r_i \leq 5$ pour $i=1, 2, \dots, m$.

Preuve : Posons $R=0$ (pas de pondération sur la commande) dans (3.8) et $Q=q I_m$, l'équation (3.8) devient :

$$u(t) = -W^{-1} P_1(h)^{-1} (\Gamma_1(h)e(t) + H_1(x, h) - D_1(t, h))$$

En substituant cette équation dans l'expression (3.5), la $i^{\text{ème}}$ sortie obéit à la dynamique suivante :

$$y_i^{(r_i)} = L_f^{r_i} h_i - \frac{(2r_i + 1)(r_i!)^2}{h^{(2r_i+1)}} \left[\frac{h^{r_i+1}}{(r_i + 1)r_i!} e_i + \frac{h^{r_i+2}}{(r_i + 2)r_i!} \dot{e}_i + \dots \right. \\ \left. + \frac{h^{2r_i}}{2r_i r_i! (r_i - 1)!} e_i^{(r_i-1)} - \frac{h^{2r_i+1}}{(2r_i + 1)(r_i!)^2} y_{ref}^{(r_i)} + \frac{h^{2r_i+1}}{(2r_i + 1)(r_i!)^2} L_f^{r_i} h_i \right]$$

et la dynamique de l'erreur de poursuite est :

$$\frac{(r_i + 1)h^{r_i}}{(2r_i + 1)r_i!} e_i^{(r_i)} + \frac{(r_i + 1)h^{r_i-1}}{2r_i(r_i - 1)!} e_i^{(r_i-1)} + \dots + \frac{(r_i + 1)h^3}{3!(r_i + 4)} e_i^{(3)} + \frac{(r_i + 1)h^2}{2!(r_i + 3)} e_i^{(2)} + \frac{(r_i + 1)h}{(r_i + 2)} e_i^{(1)} + e_i = 0$$

On voit bien que la dynamique de l'erreur de poursuite est linéaire et découplée. En outre, on peut vérifier que cette dynamique est stable pour $r_i \leq 5$.

3.3.3 Commande prédictive non linéaire avec contraintes terminales

Notre contribution est également de combiner les deux stratégies de commandes vues précédemment (Control Integration), afin d'augmenter le nombre de paramètres de réglage et d'obtenir des performances de poursuite encore meilleures. Le critère quadratique à minimiser s'écrit:

$$J_3(y, y_{ref}, Q, R, u) = \frac{1}{2} \|e(t+h)\|_Q^2 + \frac{1}{2} \int_0^h \|e(t+T)\|_{Q_i}^2 dT + \frac{1}{2} \int_0^{h_c} \|u(t+T)\|_R^2 dT \quad (3.9)$$

où $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $Q_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sont des matrices définies positives, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice semi-définie positive. h et h_c sont les horizons de prédictions de l'erreur de poursuite et de la commande respectivement. On suppose également ici que le signal de commande est constant le long de l'intervalle $[t, t+T]$ avec $0 \leq T \leq h_c$ et $h_c \ll h$, on a : $u(t+T) \approx u(t)$.

Définition 3: La commande prédictive optimale du critère (3.9) pour le système non linéaire (3.1) est un retour d'état statique :

$$u(t) = \phi_3(x(t), e(t), Q, R)$$

où ϕ_3 est une fonction telle que :

$$\phi_3(x(t), e(t), Q, R) = \underset{U}{\text{Arg Min}} J_3(y(t), y_{ref}(t), Q, R, u(t))$$

On obtient :

$$u(t) = -[W^T P_2(h)W + h_c R]^{-1} W^T [\Gamma_2(h)e(t) + H_2(x, h) - D_2(t, h)] \quad (3.10)$$

où

$$\Gamma_2(h) = \Lambda(h)Q + \int_0^h \Lambda(T) dT Q_i, H_2(x, h) = \Lambda(h)Q V_y(x, h) + \int_0^h \Lambda(T) Q_i V_y(x, T) dT,$$

$$D_2(t, h) = \Lambda(h)Q d(t, h) + \int_0^h \Lambda(T) Q_i d(t, T) dT, P_2(h) = \Lambda(h)Q \Lambda(h) + \int_0^h \Lambda(T) Q_i \Lambda(T) dT,$$

$$e(t) = y(t) - y_{ref}(t).$$

Théorème 3:

Soit h un réel positif, Q et Q_i des matrices définies positives, la commande optimale prédictive décrite en (3.10) linéarise la dynamique de l'erreur de poursuite et permet une poursuite asymptotique de la trajectoire de référence si et seulement si $r_i \leq 5$ pour $i=1,2 \dots m$.

Preuve : En posant $R=0$ (pas de pondération sur la commande), $Q=q I_m$ et $Q_i=q_i I_m$ dans l'expression (3.10), l'équation (3.10) devient :

$$u(t) = -W^{-1}P_2(h)^{-1} (\Gamma_2(h)e(t) + H_2(x,h) - D_2(t,h))$$

En substituant cette équation dans l'expression (3.5), la dynamique de poursuite de la $i^{\text{ème}}$ sortie est:

$$\left(q + \frac{q_i h}{2r_i + 1}\right) \frac{h^{r_i}}{r_i!} e_i^{(r_i)} + \left(q + \frac{q_i h}{2r_i}\right) \frac{h^{r_i-1}}{(r_i-1)!} e_i^{(r_i-1)} + \dots + \left(q + \frac{q_i h}{r_i + 2}\right) h \dot{e}_i + \left(q + \frac{q_i h}{r_i + 1}\right) e_i = 0$$

Ainsi donc l'erreur de poursuite sous la commande prédictive (3.10) est linéaire, découplée et stable pour $r_i \leq 5$.

3. 4 Commande prédictive non linéaire d'état

Dans ce paragraphe, nous allons traiter la commande prédictive non linéaire à suivi de trajectoire d'état. L'objectif de commande est de faire suivre à l'état $x(t)$ du système la trajectoire de référence définie par $x_{\text{ref}}(t)$ à l'instant $(t+h)$, où h est l'horizon de prédiction de l'état.

Pour évaluer l'état du système à l'instant $(t+h)$, nous utilisons le développement de Taylor. Dans ce cas r_i est le degré relatif du $i^{\text{ème}}$ élément du vecteur d'état $x(t)$. A cet effet, on a :

$$x(t+h) = x(t) + V(x,h) + \Lambda(h)W(x)u(t)$$

où $V(x,h) = (v_1(x,h) \ v_2(x,h) \dots v_n(x,h))^T$

avec $v_i(x,h) = h f_i + \frac{h^2}{2} L_f f_i + \dots + \frac{h^{r_i}}{r_i!} L_f^{r_i-1} f_i$,

$$\Lambda(h) = \text{diag}\left(\frac{h^{r_1}}{r_1!}, \dots, \frac{h^{r_n}}{r_n!}\right), \quad W(x) = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$$

avec $w_i = (L_{g1}(L_f^{r_i-2} f_i), \dots, L_{gm}(L_f^{r_i-2} f_i))$ pour $i=1, \dots, n$.

De la même manière, on évalue l'état de référence $x_{ref}(t)$ à l'instant $(t+h)$ par le développement de Taylor suivant:

$$x_{ref}(t+h) = x_{ref}(t) + d(t, h)$$

où

$$d(t, h) = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T \quad \text{avec} \quad d_i = h \dot{x}_{refi} + \frac{h^2}{2} \ddot{x}_{refi} + \dots + \frac{h^{r_i(r_i)}}{r_i!} x_{refi}^{(r_i)}.$$

3. 4. 1 Commande prédictive optimale à un pas [PIN-2]

La commande prédictive optimale qui fait coïncider l'état $x(t)$ avec la trajectoire $x_{ref}(t)$ à l'instant $(t+h)$ est solution du critère quadratique suivant :

$$J_1'(x(t), x_{ref}(t), Q, R, u(t)) = \frac{1}{2} \|x(t+h) - x_{ref}(t+h)\|_Q^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_R^2 \quad (3.11)$$

où : $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice définie positive.

$R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice semi-définie positive.

$h \in \mathbb{R}^+$ est le pas de prédiction .

Définition 4: La commande optimale prédictive pour le système (3.1) minimisant le critère J_1' est un retour d'état non linéaire statique :

$$u(t) = \beta_1(x(t), e(t), Q, R)$$

où β_1 est la fonction telle que : $\beta_1(x(t), e(t), Q, R) = \underset{u}{\text{Arg Min}} J_1'$,

on obtient :

$$u(t) = -[(\Lambda W)^T Q \Lambda W + R]^{-1} (\Lambda W)^T Q [e(t) + v(x, h) - d(t, h)] \quad (3.12)$$

où : $e(t) = x(t) - x_{ref}(t)$ est l'erreur de poursuite.

Dans le cas où $r_1 = 1$, $m=n$ et la matrice $g(x)$ est non singulière, alors l'expression de la commande (3.12) s'écrit :

$$u(t) = -\frac{1}{h} \left[g^T(x) Q g(x) + h^{-2} R \right]^{-1} g^T(x) Q \left(e(t) + h(f(x) - \dot{x}_{ref}(t)) \right)$$

Posons $R=0$, pas de pénalité sur la commande, la dynamique de l'erreur de poursuite sera exprimée par: $\dot{e}(t) = -\frac{1}{h} e(t)$ ou $e(t) = e^{-\frac{t}{h}} e(0)$.

L'erreur de poursuite est exponentiellement stable et l'état $x(t)$ du système non linéaire (3.1) converge exponentiellement vers la trajectoire de référence $x_{ref}(t)$.

Considérons une classe des systèmes non linéaires sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x) + g(x)u \end{cases} \quad (3.13)$$

où $x = [x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ est l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^n$ est le signal de commande.

On note que plusieurs modèles mathématiques de systèmes physiques se mettent sous cette forme où x_1 représente le vecteur position et x_2 représente le vecteur vitesse.

Hypothèses:

H₁- la fonction $f(x) \in \mathbb{R}^n$ est bornée : il existe deux constantes $f_{\max}$ et $f_{\min}$, telles que $f_{\min} \leq \|f(x)\| \leq f_{\max} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{2n}$.

H₂ - la matrice $g(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique, bornée et non singulière: il existe deux constantes $g_{\max}$ et $g_{\min}$, telles que $g_{\min} \leq \|g(x)\| \leq g_{\max} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{2n}$.

H₃ – La trajectoire de référence est bornée: il existe donc trois constantes positives r_1 , r_2 et r_3 telles que:

$$\|x_{ref1}(t)\| \leq r_1, \quad \|\dot{x}_{ref1}\| \leq r_2 \quad \text{et} \quad \|\ddot{x}_{ref1}\| \leq r_2$$

H₄- A partir des hypothèses H₁ et H₃, on déduit qu'il existe une borne supérieure $\bar{\delta}(x, x_{ref})$ et un nombre positif k_p tels que : $\|f(x) - \dot{x}_{ref2}\| \leq \bar{\delta}(x, x_{ref}) = k_p \|e_2\|^2$ où $\|\cdot\|$ est la norme Euclidienne.

Notons que $\dot{x}_{ref1} = \dot{x}_{ref2}$, $\ddot{x}_{ref1} = \ddot{x}_{ref2}$ et la trajectoire de référence est $x_{ref} = \begin{bmatrix} x_{ref1} \\ x_{ref2} \end{bmatrix}$.

Nous cherchons à générer une commande $u(t)$ qui permet aux trajectoires (x_1, x_2) du système (3.13) de suivre les trajectoires de référence (x_{ref1}, x_{ref2}) .

Théorème 4 [PIN-2] :

Si les hypothèses $H_1 - H_4$ sont satisfaites et en choisissant $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & h^2 Q_2 \end{pmatrix}$, alors la commande prédictive non linéaire minimisant le critère (3.11), est donnée par :

$$u = -g^{-1}(x)P^{-1} \left\{ \frac{Q_1}{2h^2} e_1 + \frac{1}{h} \left(\frac{Q_1}{2} + Q_2 \right) e_2 + \left(\frac{Q_1}{4} + Q_2 \right) (f(x) - \dot{x}_{ref2}) \right\}, \quad (3.14)$$

où : $e_1 = x_1 - x_{ref1}$, $e_2 = x_2 - x_{ref2}$ et $P = \frac{Q_1}{4} + Q_2 + h^{-4} g^{-1}(x) R g^{-1}(x)$,

stabilise le système (3.13) autour de la trajectoire de référence avec une erreur statique bornée. En outre, si on réduit la pondération sur la commande ($\bar{r} = \|R\| \rightarrow 0$), alors la solution du système non linéaire (3.13), bouclé par la loi de commande (3.14), converge asymptotiquement vers la trajectoire de référence $x_{ref}(t)$.

Preuve: La dynamique de l'erreur de poursuite est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = f(x) - \dot{x}_{ref2} + g(x)u \end{cases} \quad (3.15)$$

et la commande (3.14) peut être réécrite sous forme :

$$u = -g^{-1}(x)P^{-1} \left\{ \frac{Q_1}{2h^2} e_1 + \frac{1}{h} \left(\frac{Q_1}{2} + Q_2 \right) e_2 + \left(P - h^{-4} g^{-1}(x) R g^{-1}(x) \right) (f(x) - \dot{x}_{ref2}) \right\} \quad (3.16)$$

A partir des relations (3.13) et (3.16), nous obtenons le modèle de l'erreur de poursuite suivant:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -\frac{P^{-1}}{2h^2} Q_1 e_1 - \frac{P^{-1}}{h} \left(\frac{Q_1}{2} + Q_2 \right) e_2 + h^{-4} P^{-1} g^{-1}(x) R g^{-1}(x) (f(x) - \dot{x}_{ref2}) \end{cases}$$

ou sous la forme:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{P^{-1}Q_1}{2h} - \frac{P^{-1}}{h} \left(\frac{Q_1}{2} + Q_2 \right) \end{bmatrix} e + S(x, x_{ref}, h) \quad (3.17)$$

où $S(x, x_{ref}, h) = \begin{bmatrix} 0 & h^{-4} P^{-1} g^{-1}(x) R g^{-1}(x) (f(x) - \dot{x}_{ref2}) \end{bmatrix}^T$

La dynamique de poursuite est régie par le système linéaire en $e(t)$ avec un bruit additif d'état $S(x, x_{ref}, h)$. L'origine $e^0 = [0 \ 0]^T$ n'est pas le point d'équilibre du système (3.17). Par conséquent, on ne peut pas étudier la stabilité de l'origine en tant que point d'équilibre. Cependant, en utilisant les hypothèses H₁-H₃, on peut montrer que le terme additif est borné. Par conséquent, l'étude de la bornitude de la solution du système perturbé (3.17) est possible.

Soit $V(e) = \frac{1}{2h} e_1^T Q_1 e_1 + h e_2^T P e_2$ la fonction de Lyapunov dont la dérivée par rapport au temps le long de la trajectoire du système (3.17) est donnée par:

$$\dot{V}(e) = -e_2^T (Q_1 + 2Q_2) e_2 + 2h^{-3} (f(x) - \dot{x}_{ref2})^T g^{-1}(x) R g^{-1}(x) e_2.$$

En tenant compte des hypothèses H₁-H₄, la dérivée de la fonction de Lyapunov $V(e)$ est majorée par :

$$\dot{V}(e) \leq -\lambda_{\min}(Q_1 + 2Q_2) \|e_2\|^2 + 2h^{-3} k_p \bar{r} g_{\min}^2 \|e_2\|^2$$

où $\bar{r} = \lambda_{\max}(R) = \|R\|$.

Si l'inégalité $\lambda_{\min}(Q_1 + 2Q_2) > 2h^{-3} \bar{r} k_p g_{\min}^2$ est vérifiée, alors la solution du système (3.17) converge vers l'origine avec une erreur statique uniformément bornée [KHA]. Il faut noter que la norme de cette erreur peut être réduite en prenant $\bar{r} \approx 0$.

Le bruit additif $S(x, x_{ref}, h)$ peut être annulé en posant $R=0$ dans le système (3.17). Dans ce cas l'origine e^0 devient le point d'équilibre et la dérivée de la fonction de Lyapunov est : $\dot{V}(e) = -e_2^T (Q_1 + 2Q_2) e_2$ qui est définie négative pour tout $e_2 \neq 0$. En vertu du théorème de La Salle, la solution $e(t)$ converge vers l'origine, donc le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

3.4.2 Commande prédictive optimale à horizon fini

Dans la stratégie de commande prédictive à horizon fuyant, le problème de minimisation du critère:

$$\underset{u(t)}{\text{Min}} J(x(t), t, u(t)) = \underset{u(t)}{\text{Min}} \frac{1}{2} \int_t^{t+h} [x(\tau)^T Q x(\tau) + u(\tau)^T R u(\tau)] d\tau$$

est résolu à chaque instant $t > 0$, avec la condition finale $x(t+h)=0$ pour $h > 0$.

Notons $u^*(\tau)$, la commande optimale solution du problème d'optimisation pour $\tau \in [t, t+h]$.

L'approche à horizon fuyant consiste à prendre la commande $u(t)$, à appliquer au système, égale à $u^*(t)$. Cette séquence d'optimisation est réitérée à chaque instant t selon la stratégie de l'horizon fuyant afin de faire converger le système vers l'origine. Cependant, la qualité des résultats obtenus pour le problème d'optimisation non linéaire dépend de la quantité de calculs effectués et en général, il est impossible de trouver la solution dans un temps limité par la dynamique du système. En outre, la solution globale du problème d'optimisation n'est pas garantie. En effet, en plus de la contrainte finale, le problème d'optimisation est non linéaire et non convexe [HEN].

Dans cette section, nous proposons de minimiser l'écart de poursuite le long de l'intervalle $[t, t+h]$ tout en sollicitant le moins possible les actionneurs et en utilisant le développement de Taylor afin de contourner le problème d'optimisation en ligne. Ceci conduit alors à un critère quadratique à minimiser sous forme :

$$J_2''(x(t), x_{ref}(t), Q, R, u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^h \|x(t+T) - x_{ref}(t+T)\|_Q^2 dT + \frac{1}{2} \int_0^{hc} \|u(t)\|_R^2 dT \quad (3.18)$$

où $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & T^2 Q_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ est une matrice définie positive et $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice semi-définie positive.

Le critère (3.18) peut être réécrit sous forme :

$$J_2''(x, x_{ref}, Q, R, u) = \frac{1}{2} \int_0^h (e_1^T(t+T) Q_1 e_1(t+T) + T^2 e_2^T(t+T) Q_2 e_2(t+T)) dT + \frac{1}{2} \int_0^{hc} u^T(t+T) R u(t+T) dT$$

$$\text{où } \begin{cases} e_1(t+T) = e_1(t) + T \dot{e}_1(t) + \frac{T^2}{2!} (f(x) - \dot{x}_{ref2}) + \frac{T^2}{2!} g(x) u \\ e_2(t+T) = e_2(t) + T (f(x) - \dot{x}_{ref2}) + T g(x) u \end{cases}$$

Définition 4 : La commande prédictive optimale du critère (3.18) pour le système non linéaire (3.13) est un retour d'état statique :

$$u(t) = \beta_2(x(t), e(t), Q, R)$$

où β_2 est la fonction telle que : $\beta_2(x(t), e(t), Q, R) = \underset{u}{\text{Arg Min}} J_2''$,

on obtient :

$$u(t) = -g^{-1}(x)\bar{P}^{-1}\left(\frac{10}{3h^2}Q_1e_1 + \frac{5}{2h}(Q_1 + 2Q_2)e_2 + (Q_1 + 4Q_2)(f(x) - \dot{x}_{ref2})\right) \quad (3.19)$$

où $\bar{P} = (Q_1 + 4Q_2 + 20h^{-4}h_c g^{-1}(x) R g^{-1}(x))$.

Théorème 5 :

Considérons le système (3.13) vérifiant les hypothèses H₁-H₄. La commande prédictive non linéaire (3.19) fait suivre à l'état $x(t)$ du système non linéaire (3.13) la trajectoire de référence $x_{ref}(t)$ avec une erreur statique bornée. Si le critère quadratique (3.18) est sans pondération sur la commande ($R=0$), alors l'écart de poursuite converge vers l'origine $e^0=[0 \ 0]^T$.

Preuve: En substituant l'expression (3.19) dans l'équation de l'erreur de poursuite (3.15), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -\frac{10}{3h^2}\bar{P}^{-1}Q_1e_1 - \frac{5}{2h}\bar{P}^{-1}(Q_1 + 2Q_2)e_2 + 20h^{-5}h_c\bar{P}^{-1}g^{-1}(x)Rg^{-1}(x)(f(x) - \dot{x}_{ref2}) \end{cases} \quad (3.20)$$

Le terme additif de la dynamique de poursuite donné par :

$$\bar{S}(x, x_{ref}, h, h_c) = \begin{bmatrix} 0 & 20h^{-5}h_c\bar{P}^{-1}g^{-1}(x)Rg^{-1}(x)(f(x) - \dot{x}_{ref2}) \end{bmatrix}^T,$$

est borné. Donc l'étude de la bornitude du système (3.13) autour de la trajectoire de référence est possible.

On considère la fonction de Lyapunov suivante : $V(e) = \frac{2}{3h}e_1^T Q_1 e_1 + \frac{h}{5}e_2^T \bar{P} e_2$.

La dérivée de $V(e)$ par rapport au temps est :

$$\dot{V}(e) = -e_2^T (Q_1 + 2Q_2)e_2 + 8h^{-4}h_c (f(x) - \dot{x}_{ref2})^T g^{-1}(x) R g^{-1}(x) e_2.$$

Ici également, la dérivée de la fonction de Lyapunov est majorée par :

$$\dot{V}(e) \leq -\lambda_{\min}(Q_1 + 2Q_2)\|e_2\|^2 + 8h_c h^{-4} \bar{r} g_{\min}^2 k_p \|e_2\|^2.$$

Par conséquent, la solution du système non linéaire (3.20) est uniformément bornée [KHA] si et seulement si : $\lambda_{\min}(Q_1 + 2Q_2) > 8h_c h^{-4} \bar{r} k_p g_{\min}^2$.

En outre, on peut vérifier que quand $\bar{r}$ tend vers zéro, le point d'équilibre du système tend vers l'origine e^0 . En effet, posons $R=0$ dans l'équation (3.20), la dérivée de la fonction de Lyapunov devient: $\dot{V}(e) = -e_2^T (Q_1 + 2Q_2)e_2$, qui est définie négative pour tout $e_2 \neq 0$. Ainsi donc, selon le théorème d'invariance de La Salle, la solution $e(t)$ du système non linéaire (3.20) tend asymptotiquement vers l'origine $\left(\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \right)$.

3. 4. 3 Commande prédictive optimale avec contrainte terminale

Nous avons également proposé dans cette section la combinaison ou intégration des deux lois de commande vues précédemment afin d'améliorer la dynamique de poursuite de l'état $x(t)$ de la trajectoire de référence $x_{ref}(t)$. Par conséquent, la fonction coût quadratique à minimiser est :

$$J_3''(x, x_{ref}, Q, S, R, u) = \frac{1}{2} \|e(t+h)\|_Q^2 + \frac{1}{2} \int_0^h \|e(t+T)\|_S^2 dT + \frac{1}{2} \int_0^{h_c} \|u(t+T)\|_R^2 dT \quad (3.21)$$

où $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & h^2 Q_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et $S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & T^2 S_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ sont des matrices définies positives et

$R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice semi-définie positive.

On rappelle que pour éviter le problème d'optimisation en ligne du critère quadratique (3.21), on utilise l'approximation de Taylor de l'écart de poursuite $e(t+T)$, ainsi que $e(t+h)$, autour de $e(t)$. On suppose également que le signal de commande est constant le long de l'intervalle $[t, t+h_c]$, on a donc : $u(t+T) = u(t)$ pour $0 \leq T \leq h_c$ avec $h_c \ll h$.

Définition 5 : La commande prédictive optimale du critère (3.21) pour le système non linéaire (3.13) est un retour d'état statique :

$$u(t) = \beta_3(x(t), e(t), Q, R)$$

où β_3 est la fonction telle que : $\beta_3(x(t), e(t), Q, R) = \underset{u}{\text{Arg Min}} J_3''$, on obtient :

$$\frac{\partial J_3''}{\partial u} = 0 \Rightarrow$$

$$u(t) = -g^{-1}(x) \tilde{P}^{-1} \left\{ \frac{1}{6h^2} (3Q_1 + hS_1)e_1 + \left(\frac{1}{2h} (Q_1 + 2Q_2) + \frac{1}{8} (S_1 + 2S_2) \right) e_2 \right. \\ \left. + \left(\frac{Q_1}{4} + Q_2 + \frac{h}{20} (S_1 + 4S_2) \right) (f(x) - \dot{x}_{ref2}) \right\} \quad (3.22)$$

$$\text{où } \tilde{P} = \left[\frac{Q_1}{4} + Q_2 + \frac{h}{20} (S_1 + 4S_2) + h_c h^{-4} g^{-1}(x) R g^{-1}(x) \right].$$

Théorème 6:

Supposons que le système (3.13) vérifie les hypothèses H₁-H₄. La commande prédictive non linéaire (3.22) fait suivre à l'état x(t) du système non linéaire (3.13) la trajectoire de référence x_{ref}(t) avec une erreur statique bornée. Si on annule la pondération sur la commande dans le critère quadratique (3.21), alors l'écart de poursuite converge asymptotiquement vers l'origine e⁰=[0 0]^T.

Preuve : En substituant le signal de commande (3.22) dans l'équation (3.15), nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -\frac{\tilde{P}^{-1}}{6h^2} (3Q_1 + hS_1)e_1 - \tilde{P}^{-1} \left(\frac{1}{2h} (Q_1 + 2Q_2) + \frac{1}{8} (S_1 + 2S_2) \right) e_2 + h_c h^{-4} \tilde{P}^{-1} g^{-1}(x) R g^{-1}(x) \end{cases} \quad (3.23)$$

L'origine e⁰ n'est pas le point d'équilibre du système (3.23), l'étude s'articule donc sur la bornitude de la solution du système non linéaire (3.23).

On considère la fonction de Lyapunov suivante : $V(e) = \frac{1}{6h} e_1^T \left(\frac{3}{h} Q_1 + S_1 \right) e_1 + e_2^T \tilde{P} e_2$,

sa dérivée le long de la trajectoire du système (3.23) est donnée par:

$$\dot{V}(e) = -e_2^T \left(\frac{1}{h} (Q_1 + 2Q_2) + \frac{1}{4} (S_1 + 2S_2) \right) e_2 + 2h_c h^{-4} (f(x) - \dot{x}_{ref2})^T g^{-1}(x) R g^{-1}(x) e_2$$

En tenant compte des hypothèses H₁-H₄, on peut montrer que la dérivée de la fonction de Lyapunov est majorée, et la borne supérieure est :

$$\dot{V}(e) \leq -\lambda_{\min} \left(\frac{1}{h} (Q_1 + 2Q_2) + \frac{1}{4} (S_1 + 2S_2) \right) \|e_2\|^2 + 2h_c h^{-4} k_p \bar{r} g_{\min}^2 \|e_2\|^2$$

Si le choix des paramètres de pondérations du critère quadratique est :

$$\lambda_{\min} \left(\frac{1}{h} (Q_1 + 2Q_2) + \frac{1}{4} (S_1 + 2S_2) \right) > 2h_c h^{-4} k_p \bar{r} g_{\min}^2,$$

alors la dynamique de poursuite, solution du système (3.23) est uniformément bornée. On peut rendre la bornitude de l'écart de poursuite très petite en réduisant la pondération sur la commande dans le critère (3.21).

Posons R=0 dans l'équation de la dynamique de l'erreur de poursuite (3.23), ce qui signifie un choix du critère (3.21) sans pondération de la commande, l'origine devient alors le point d'équilibre du système (3.23). La dérivée de la fonction de Lyapunov s'écrit :

$$\dot{V}(e) = -e_2^T \left(\frac{1}{h} (Q_1 + 2Q_2) + \frac{1}{4} (S_1 + 2S_2) \right) e_2$$

qui est définie négative pour tout $e_2 \neq 0$. Par conséquent, la solution $e(t)$ du système non linéaire (3.23) converge vers l'origine e^0 ($\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \rightarrow 0$).

3.5 Observateur non linéaire

Un bon fonctionnement de la commande nécessite une excellente information provenant du processus à contrôler. Cette information peut provenir des capteurs, exemple capteur de flux rotorique utilisé dans la commande des machines, qui sont en général des éléments coûteux et fragiles et qui demandent un traitement spécifique des signaux physiques directement captés. Dans certains cas, un certain nombre de variables d'état ne sont ni accessibles, ni mesurables directement. Dans ces conditions les techniques de filtrage et d'estimation sont utilisées pour la reconstruction des variables non mesurables dans les différentes structures de commande.

L'inconvénient majeur des structures de commande prédictive non linéaires vues dans ce chapitre, est qu'elles nécessitent la connaissance de l'état $x(t)$ du système à chaque instant t . Il nous faut alors envisager la réalisation d'un observateur qui, compte tenu des non linéarités du système à contrôler, doit être linéaire et variable dans le temps ou non linéaire. Malheureusement, l'introduction de ce nouvel élément dans la boucle de commande pose des problèmes. En effet, une loi de commande non linéaire par retour d'état et un observateur non linéaire stable ne garantissent pas que la commande bouclée sur l'observateur soit toujours stable. Le principe de séparation n'est pas vérifié en général dans les cas non linéaires. Dans ce qui suit, on décrit l'observateur de Gauthier [GAU, KHE] qui sera utilisé pour estimer l'état du système non linéaire (3.1).

Soit le système non linéaire affine par rapport à la commande mono-sortie :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.24)$$

où $x \in \mathfrak{R}^n$, $u \in \mathfrak{R}^m$ et $y \in \mathfrak{R}$.

Soient les hypothèses suivantes :

H₅- Le système (3.24) est observable pour toute entrée [KHE, BOR-1],

H₆- La transformation $z = \phi(x) = [h(x) \ L_f h(x) \dots L_f^{n-1} h(x)]$ constitue un difféomorphisme,

H₇- $\phi(x)$ est globalement Lipschitzienne en x ,

H₈- la commande u est bornée.

A partir de l'hypothèse H₆, le système (3.24) se transforme en:

$$\begin{cases} \dot{z} = A z + \phi(z, u) \\ y = C z \end{cases} \quad (3.25)$$

où $z \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$ et avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \in \mathbb{R}^n, \text{ et } \phi(z, u) = \begin{bmatrix} \phi_1(z_1, u) \\ \phi_1(z_1, z_2, u) \\ \vdots \\ \phi_n(z_1, z_2, \dots, z_n, u) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

La structure triangulaire de ϕ résulte de la condition d'observabilité uniforme du système.

Théorème 7 [GAU] :

Considérons le système (3.24) vérifiant les hypothèses H₆-H₈. Soit S_θ la solution de l'équation de Lyapunov avec facteur d'oubli $\theta > 0$:

$$\theta S_\theta = -(A^T S_\theta + S_\theta A) + C^T C$$

Pour des valeurs assez grandes du paramètre θ ($\theta > \theta_0$), le système dynamique :

$$\dot{\hat{z}} = A \hat{z} + \phi(\hat{z}, u) - S_\theta^{-1} C^T (C \hat{z} - y) \quad (3.26)$$

constitue un observateur exponentiel de l'état du système (3.25).

Gauthier a montré que si les conditions H₆-H₈ sont vérifiées, alors il existe un minorant θ_0 du facteur d'oubli θ pour que le système (3.26) constitue un observateur à convergence exponentielle de l'état du système (3.25).

A partir de l'observateur (3.26) et en utilisant l'inverse du difféomorphisme $\hat{x} = \phi^{-1}(\hat{z})$, on peut réécrire l'équation de l'observateur (3.26) dans les coordonnées initiales :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{-1} S_\theta^{-1} C^T (h(\hat{x}) - y)$$

On note que cet observateur a été généralisé à une classe de système multi-entrées, multi-sorties [BOR-1, KHE]. En outre, Atassi *et al* [ATA] ont montré que le principe de

séparation peut s'appliquer aux systèmes non linéaires pouvant se mettre, après transformation, sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\phi(x, z, u) \\ \dot{z} = \chi(x, z, u) \\ y = Cx \\ \xi = q(x, z) \end{cases} \quad (3.27)$$

Le système non linéaire bouclé par la loi de commande par retour d'état sur l'observateur non linéaire:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\phi_0(\hat{x}, \xi, u) + H(y - C\hat{x}) \\ u = \psi(\hat{x}, \xi) \end{cases}$$

stabilise globalement le système non linéaire (3.27).

On note que la classe des systèmes non linéaires traités dans notre thèse appartient à la classe définie par l'équation (3.27). Par conséquent, l'étude de la stabilité globale du système non linéaire bouclé par une loi de commande prédictive avec l'observateur non linéaire de Gauthier n'est pas nécessaire.

3. 6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé la commande prédictive non linéaire des systèmes non linéaires affine en commande. Pour éviter le problème d'optimisation en ligne du critère quadratique à minimiser, le développement de Taylor de l'erreur de poursuite future $e(t+h)$ autour de $e(t)$ a été utilisé. En premier lieu, on a développé la commande prédictive à suivi de trajectoire de sortie. Dans le cas sans pondération sur la commande, la convergence de l'erreur de poursuite vers l'origine est assurée par un choix adéquat du pas de prédiction. Nous avons ensuite développé la commande prédictive à suivi de trajectoire d'état et établi les conditions de convergence d'erreur de poursuite vers l'origine.

Nous avons noté que le pas de prédiction h influe directement sur la dynamique de l'erreur de poursuite. En effet, une valeur très petite du pas h augmente la dynamique de poursuite avec une commande plus énergique. Pour réduire l'amplitude de la commande, il faut soit réduire la pondération de l'erreur de poursuite, ce qui peut entraîner une dégradation des performances de poursuite, soit augmenter le pas de prédiction h . Cependant, à partir d'un certain seuil du pas de prédiction, les performances peuvent se dégrader et le mécanisme

d'instabilité apparaît. Cela est dû à la non validité de l'approximation de Taylor utilisée pour la synthèse de la loi de commande.

Par ailleurs, on note que la combinaison de la commande prédictive à un pas et la commande prédictive à horizon fini permet une meilleure convergence de l'erreur de poursuite d'état et de sortie.

En outre, ces lois de commande prédictives non linéaires s'appliquent également aux systèmes non linéaires non linéarisables. En effet, Ping Lu a appliqué la commande prédictive à un pas au problème de poursuite de trajectoire d'un chariot dans un parking [PIN-2].

Dans les chapitres qui suivent, la robustesse de ces lois de commande prédictive vis-à-vis des variations ou incertitudes des paramètres sera abordée. En outre, l'observateur de Gauthier sera utilisé pour estimer les variables d'état non accessibles directement par les sorties mesurées.

Chapitre 4

Commande prédictive non linéaire d'un robot manipulateur rigide

4. 1 Introduction

Durant ces dernières années une attention particulière a été accordée aux unités de production flexibles dont les performances prépondérantes sont la qualité, le coût et le temps de production. Ces unités requièrent en particulier la rapidité d'exécution des tâches dans un environnement restreint avec des interactions mécaniques qui peuvent avoir lieu dans l'espace de travail. Les robots industriels sont en grande majorité des manipulateurs, et sont souvent utilisés pour répondre à ces spécifications par programmation des tâches bien spécifiques dans l'espace opérationnel telles que l'assemblage, la peinture et le soudage. Pour améliorer l'efficacité et la précision d'exécution de ces tâches, plusieurs structures de commande ont été établies dans la littérature. Parmi elles, le régulateur PD qui est simple et donne de bonnes performances à des faibles vitesses et en absence de gravité [SPO-1]. Cependant, le robot manipulateur est un système non linéaire fortement couplé et dépendant des termes de gravité. Cette méthode constitue une limitation pour les robots industriels.

La méthode du couple calculé a été introduite pour pallier le problème de couplage et de l'effet de gravité. Cette méthode est basée sur le découplage et la linéarisation exacte des équations des mouvements du robot [SPO-1]. Cependant, l'implémentation de cette loi de commande nécessite la connaissance exacte du modèle dynamique du robot. Malheureusement, en pratique ce n'est pas le cas, cela est dû aux incertitudes paramétriques, aux variations de la charge et aux frottements secs ou visqueux. Par conséquent, le modèle dynamique est loin d'être représentatif du système réel, et ces incertitudes peuvent dégrader les performances désirées. De ce fait, plusieurs algorithmes de commande robuste ont été développés tels que la commande à structure variable [SLO-1], la commande adaptative robuste [ORT-2] et la commande H_∞ non linéaire [CHE-1]. Le premier recueil des résultats sur la commande robuste des robots a été édité par Abdallah *et al* [ABD]. Le second, avec des résultats récents, est donné par Sage *et al* [SAG-2]. Finalement, l'application de la

robotique dans les unités de production nécessite des lois de commande rapides et robustes vis-à-vis des incertitudes et des variations de la charge durant l'exécution des tâches.

La commande prédictive permet d'atteindre, dans bien des cas, un excellent compromis performance/robustesse. Pour bénéficier de cette potentialité dans la commande non linéaire des robots manipulateurs, les lois de commande prédictives à suivi de trajectoire développées dans le chapitre précédent seront appliquées à un robot manipulateur. L'objectif de commande est la poursuite d'une trajectoire prédéfinie et sa robustesse vis-à-vis des variations de la charge et des frottements secs et visqueux.

Dans la première partie, nous montrons que les trois structures de commande à suivi de trajectoire de sortie maintiennent les performances de poursuite en dépit des variations de la charge et en présence des frottements. Les résultats de simulation confirment les résultats escomptés. Dans la deuxième partie, les trois lois de commande prédictives non linéaires à suivi de trajectoire d'état sont appliquées également à un robot manipulateur. La méthode de Lyapunov est utilisée pour analyser la stabilité et la bornitude de la dynamique de l'écart de poursuite. En outre, les conditions de convergence de la dynamique de poursuite vers l'origine sont données.

L'inconvénient majeur de la commande prédictive non linéaire est la nécessité de mesurer les vitesses articulaires du robot. Les génératrices tachymétriques utilisées pour mesurer ces vitesses fournissent des signaux entachés de bruit de mesure et augmentent également le coût de revient de l'asservissement du robot. Une des façons pour résoudre ce problème consiste à utiliser un observateur non linéaire [GAU] qui reconstruit les positions et les vitesses articulaires.

Ce chapitre est structuré de la manière suivante : on présente d'abord le modèle dynamique d'un robot manipulateur. On développe dans le deuxième paragraphe les trois structures de commande prédictive non linéaire de sortie. Ces lois de commande permettent la poursuite de la trajectoire prédéfinie des positions articulaires. La stabilité du système en boucle fermée est analysée. Le troisième paragraphe est consacré à l'application de la commande prédictive non linéaire à suivi de trajectoire d'état. La stabilité du robot manipulateur en boucle fermée est analysée en utilisant la méthode de Lyapunov. L'observateur de Gauthier est utilisé pour reconstruire les vitesses articulaires du robot. Nous présentons dans la dernière partie les résultats des simulations effectuées avec un modèle de robot à deux degrés de liberté, et nous terminons ce chapitre par quelques remarques et perspectives.

4. 2 Modèle dynamique d'un robot manipulateur rigide

4. 2. 1 Modélisation

Le formalisme de Lagrange est un outil très utilisé pour décrire le comportement dynamique d'un système mécanique en terme d'énergie utilisant les coordonnées généralisées $q(t)$. L'énergie cinétique d'un robot manipulateur à n degrés de liberté est définie par :

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}(t)^T D(q) \dot{q}(t),$$

où $D(q)$ est la matrice d'inertie. Soit $U(q) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable, appelée énergie potentielle. Le Lagrangien $L(q, \dot{q})$ est défini par [SPO-1]:

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q).$$

Les équations régissant le comportement dynamique d'un robot manipulateur sont données par :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_k} = \tau_k, \quad k=1, \dots, n,$$

où $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ représentent les couples appliqués au système.

En réalité, les différents corps constituant le robot manipulateur sont affectés par des frottements et des perturbations extérieures, et en utilisant l'énergie cinétique et potentielle dans le Lagrangien, le modèle dynamique du robot peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$D(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) + f_r = \tau_r,$$

où $q(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ est le vecteur des positions articulaires et contrôlé par le vecteur couple $\tau_r \in \mathbb{R}^n$, $D(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D(q) = D(q)^T > 0$, est la matrice d'inertie des axes, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice des forces de gravité et Coriolis, $G(q) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des forces de gravités et f_r représente les frottements des articulations. Sage *et al* ont décrits le modèle dynamique d'un robot manipulateur en ne tenant compte que de la partie mécanique des actionneurs [SAG-2]. Par conséquent, le modèle dynamique du robot devient :

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) + f = \tau, \quad (4.1)$$

avec:

$$\tau = N \tau_m, \quad M(q) = D(q) + N^2 J_m = D(q) + J \quad \text{et} \quad f = f_r + N f_m,$$

où: N est la matrice diagonale des rapports de réduction,
 τ_m est le vecteur couple appliqué par les actionneurs,
 f_m est le vecteur des frottements des moteurs,
 J_m est la matrice diagonale d'inertie des moteurs.

4.2.2 L'objectif de commande

L'objectif de commande consiste à maintenir les positions articulaires du robot manipulateur autour d'une trajectoire de référence prédéterminée par les variables articulaires $q_{ref}(t)$. Par conséquent, la trajectoire de référence doit être bornée. Ainsi donc, il existe deux constantes positives r_1 et r_2 , qui vérifient les inégalités suivantes:

$$\|q_{ref}(t)\| \leq r_1 \quad \text{et} \quad \|\dot{q}_{ref}(t)\| \leq r_2. \quad (4.2)$$

4.3 Commande prédictive non linéaire à suivi de trajectoire de sortie[HED-8]

Dans cette section, nous présentons les stratégies de commande à suivi de trajectoires basées sur la minimisation de l'écart de sortie future du robot manipulateur. L'équation dynamique du robot manipulateur se présente sous la forme:

$$\ddot{q}(t) = -M(q)^{-1} (C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)) + M(q)^{-1} \tau(t) \quad (4.3)$$

4.3.1 Commande prédictive non linéaire à un pas

La commande prédictive optimale proposée par Ping Lu [PIN-2] est appliquée au robot manipulateur pour résoudre le problème de poursuite d'une trajectoire de référence par les positions articulaires. La trajectoire de référence est spécifiée par une fonction continue $q_{ref}(t)$ pour $t \in [t_0, t_f]$. Le problème consiste alors à trouver une loi de commande du couple $\tau(t)$ qui minimise l'écart de poursuite à l'instant $(t+h)$, où h est un incrément de temps, de manière à ce que $q(t+h)$ coïncide avec $q_{ref}(t+h)$. Ainsi donc, l'erreur de poursuite à l'instant $(t+h)$ sera définie par :

$$e(t+h) = q(t+h) - q_{ref}(t+h).$$

La manière la plus simple de prédire l'influence du couple $\tau(t)$ sur la sortie $q(t+h)$ est d'utiliser le développement de Taylor au deuxième ordre ($r=[2,2]$). On obtient:

$$q(t+h) = q(t) + h\dot{q}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{q}(t). \quad (4.4)$$

De l'équation (4.3), on déduit le modèle prédictif de la sortie à l'instant $(t+h)$:

$$q(t+h) = q(t) + V(q, \dot{q}, h) + \frac{h^2}{2} W(q) \tau(t).$$

où $V(q, \dot{q}, h) = h\dot{q} - \frac{h^2}{2} M^{-1}(q)(C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q))$ et $W(q) = M(q)^{-1}$.

De la même façon, on applique le développement de Taylor d'ordre deux au signal de référence $q_{ref}(t+h)$, on aura:

$$q_{ref}(t+h) = q_{ref}(t) + h\dot{q}_{ref}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{q}_{ref}(t) = q_{ref}(t) + d(t, h).$$

où $d(t, h) = h\dot{q}_{ref}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{q}_{ref}(t)$.

La dynamique de poursuite à l'instant $(t+h)$ dépendant du couple d'entrée s'écrit :

$$e(t+h) = e(t) + V(q, \dot{q}, h) - d(t, h) + \frac{h^2}{2} W(q) \tau(t). \quad (4.5)$$

L'objectif de commande dans le cadre de la commande prédictive à un pas est de trouver le couple $\tau(t)$ qui fait suivre à la sortie $q(t)$ la trajectoire de référence $q_{ref}(t)$ à l'instant $(t+h)$ tout en sollicitant le moins possible les actionneurs. Ceci conduit alors à un critère d'optimisation de la forme:

$$J_1(e, \tau, h) = \frac{1}{2} e(t+h)^T Q e(t+h) + \frac{1}{2} \tau(t)^T R \tau(t), \quad (4.6)$$

où $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont respectivement des matrices définies positives et semi-définies positives.

4.3.1.1 Elaboration du couple

La commande prédictive non linéaire s'obtient par minimisation analytique du critère

$J_1(e, \tau, h)$, par l'équation $\frac{\partial J_1(e, \tau)}{\partial \tau} = 0$, la solution est:

$$\tau(t) = - \left[\frac{h^4}{4} W(q)^T Q W(q) + R \right]^{-1} \left(\frac{h^2}{2} W(q) \right)^T Q (e(t) + V(q, \dot{q}, h) - d(t, h)).$$

Comme $W(q) = M(q)^{-1}$, le couple de commande devient:

$$\tau(t) = -M(q) \left[\frac{h^2}{2} \ddot{Q} + 2 \frac{M(q) R M(q)}{h^2} \right]^{-1} Q(e(t) + V(q, \dot{q}, h) - d(t, h)) \quad (4.7)$$

4.3.1.2 Performance de poursuite

Posons $R=0$ (pas de pénalité sur la commande) dans l'équation du couple de commande (4.7), on obtient :

$$\tau^*(t) = -\frac{2}{h^2} M(q) (e(t) + V(q, \dot{q}, h) - d(t, h)).$$

En remplaçant $\tau(t)$ par l'expression de $\tau^*(t)$ dans l'équation (4.3), nous obtenons l'équation dynamique de l'erreur de poursuite suivante:

$$\ddot{e}(t) + \frac{2}{h} \dot{e}(t) + \frac{2}{h^2} e(t) = 0. \quad (4.8)$$

Ainsi donc, l'erreur de poursuite obéit à une dynamique linéaire invariante stable dont les pôles sont : $p_{1,2} = -\frac{1}{h} (1 \pm j)$. Donc $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) \rightarrow q_{ref}(t)$

4.3.2 Commande prédictive non linéaire à horizon fini

Dans ce paragraphe, le critère quadratique, utilisé par Demircioglu [DEM-1] pour établir la commande CGPC pour les systèmes linéaires, est étendu aux systèmes non linéaires en utilisant le développement de Taylor. La commande prédictive qui améliore les performances de poursuite tout le long de l'intervalle $[t, t+h]$, tout en sollicitant le moins possible les actionneurs, a pour critère quadratique à minimiser :

$$J_2(e, \tau, h, h_c) = \frac{1}{2} \int_0^h e(t+T)^T Q e(t+T) dT + \frac{1}{2} \int_0^{h_c} \tau(t+T)^T R \tau(t+T) dT \quad (4.10)$$

où $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est définie positive, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ semi-définie positive, h et h_c sont des horizons de prédiction de l'erreur de poursuite et de la commande respectivement.

4.3.2.1 Elaboration du couple

En supposant que le signal de commande est constant le long de l'horizon de commande et en utilisant l'approximation au deuxième ordre du critère du problème de commande

prédictive à horizon fini, alors la minimisation du critère quadratique résultant par rapport à $\tau(t)$ donne la solution optimale suivante :

$$\tau(t) = -M(q) \left(Q + \frac{20h_c}{h^5} M(q) R M(q) \right)^{-1} Q \left(\frac{10}{3h^2} e + \frac{5}{2h} \dot{e} + f(q, \dot{q}) - \ddot{q}_{ref} \right) \quad (4.11)$$

avec $f(q, \dot{q}) = -M^{-1}(q)(C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q))$.

4. 3. 2. 2 Performance de poursuite

Posons $R=0$. L'expression de la commande (4.11) devient alors:

$$\tau^*(t) = -M(q) \left(\frac{10}{3h^2} e(t) + \frac{5}{2h} \dot{e}(t) + f(q, \dot{q}) - \ddot{q}_{ref} \right). \quad (4.12)$$

En remplaçant le signal de commande $\tau(t)$ dans l'équation (4.3) par $\tau^*(t)$, on obtient l'expression suivante :

$$\ddot{e}(t) + \frac{5}{2h} \dot{e}(t) + \frac{10}{3h^2} e(t) = 0. \quad (4.13)$$

Donc, la minimisation du critère quadratique (4.10) donne une dynamique de poursuite linéaire invariante et stable. Cette structure de commande conduit à une linéarisation exacte de l'erreur de poursuite et on peut facilement vérifier la stabilité par le critère de Routh. Donc, $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) \rightarrow q_{ref}(t)$.

4. 3. 3 Commande prédictive non linéaire avec contrainte terminale

Afin d'augmenter le nombre de paramètres de réglage et obtenir des performances encore meilleures, nous proposons de combiner les deux stratégies de commande vues précédemment. Dans ce cas, le critère quadratique à minimiser s'écrit :

$$J_3(e, \tau, h, hc) = \frac{1}{2} \|e(t+h)\|_Q^2 + \frac{1}{2} \int_0^h \|e(t+T)\|_{Q_i}^2 dT + \frac{1}{2} \int_0^{hc} \|\tau(t+T)\|_R^2 dT \quad (4.14)$$

où $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices définies positives. $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice semi-définie positive, h et hc sont les horizons de prédiction de l'écart de poursuite et de la commande.

4. 3. 3. 1 Elaboration du couple

Pour pallier le problème du temps d'optimisation du critère (4.14), l'erreur de poursuite future $e(t+T)$ est approximée autour de $e(t)$ en utilisant le développement en série de Taylor.

On suppose également ici que le couple de commande est constant tout le long de l'horizon de commande : $\tau(t+T) = \tau(t)$ pour $0 < T < h_c$ avec $h_c \ll h$. La minimisation du coût par rapport à $\tau(t)$ donne la solution optimale suivante:

$$\tau(t) = -M(q) \left[\frac{h^2}{2} Q + \frac{h^3}{10} Q_i + 2h_c M(q) R M(q) \right]^{-1} \times \left(\left(Q + \frac{h}{3} Q_i \right) e(t) + \left(hQ + \frac{h^2}{4} Q_i \right) \dot{e}(t) + \left(\frac{h^2}{2} Q + \frac{h^3}{10} \right) (f(q, \dot{q}) - \ddot{q}_{ref}) \right) \quad (4.15)$$

4.3.3.2 Performance de poursuite

Posons $R=0$ (pas de pondérant sur la commande), $Q=q I_n$ et $Q_i=q_i I_n$ dans l'expression du couple de commande (4.15). On obtient:

$$\tau(t) = - \left(\left(q + q_i \frac{h}{5} \right) \frac{h^2}{2} \right)^{-1} M(q) \left[\left(q + q_i \frac{h}{3} \right) e(t) + \left(q + q_i \frac{h}{4} \right) h \dot{e}(t) + \left(q + q_i \frac{h}{5} \right) \frac{h^2}{2} (f(q, \dot{q}) - \ddot{q}_{ref}) \right]$$

En substituant l'expression de $\tau(t)$ dans l'équation (4.3), nous obtenons :

$$\left(q + q_i \frac{h}{5} \right) \frac{h^2}{2} \ddot{e}(t) + \left(q + q_i \frac{h}{4} \right) h \dot{e}(t) + \left(q + q_i \frac{h}{3} \right) e(t) = 0 \quad (4.16)$$

Dans ce cas également, la dynamique de l'erreur de poursuite obéit à une dynamique linéaire invariante et stable. La minimisation de la fonction coût (4.14) conduit à une linéarisation exacte de l'erreur de poursuite du robot manipulateur et on peut facilement vérifier la stabilité de l'équation (4.16) par le critère de Routh pour $h > 0$. Donc, $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) \rightarrow q_{ref}(t)$

4.4 Commande prédictive non linéaire à suivi de trajectoire d'état

Le modèle mathématique d'un robot manipulateur à n degrés de liberté peut être représenté dans l'espace d'état sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + P(x_1) \tau(t), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (4.17)$$

où : $x = [x_1 \quad x_2]^T = [q \quad \dot{q}]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ est le vecteur d'état, $\tau(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le couple de commande et $y(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de sortie mesuré (positions articulaires).

$f(x_1, x_2) = -M(q)^{-1}(C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)) \in \mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle bornée et $P(x_1) = M(q)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est l'inverse de la matrice d'inertie.

Propriétés structurelles du modèle dynamique :

Nous présentons les propriétés structurelles des différents termes constituant l'équation du modèle dynamique d'un robot manipulateur à n degrés de liberté [SPO-1]. Ces propriétés seront utilisées dans l'analyse de la stabilité du robot manipulateur en boucle fermée.

P₁- La matrice $M(q)$ est symétrique et définie positive. De plus, il existe deux scalaires positifs tels que : $\underline{m} \leq \|M(q)\| \leq \bar{m}$ pour tout $q(t) \in \mathbb{R}^n$.

P₂- La matrice $C(q, \dot{q})$ est linéaire en $\dot{q}(t)$ et bornée en $q(t)$: il existe un scalaire positif k_1 tel que : $\|C(q, \dot{q})\| \leq k_1 \|\dot{q}\|$.

P₃- Les composantes du vecteur $G(q)$ dépendant des sinus et cosinus des variations articulaires uniquement. Nous avons par conséquent la majoration suivante :

$$\|G(q)\| \leq k_2 \text{ pour tout } q(t) \in \mathbb{R}^n \text{ et } k_2 \text{ est un scalaire positif.}$$

P₄- Il existe un scalaire positif k_p , tel que :

$$\|f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2}\| = \| -M(q)(C(q, \dot{q})\dot{q} - \dot{x}_{ref2}) \| \leq \bar{\delta}(x, x_{ref}) = k_p \|e_2\|^2.$$

L'objectif de commande: La loi de commande consiste à maintenir les positions et vitesses articulaires autour d'une trajectoire désirée et prédéfinie $x_{ref}(t) = \begin{bmatrix} q_{ref} & \dot{q}_{ref} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_{ref1} & x_{ref2} \end{bmatrix}^T$.

Il existe trois scalaires positifs r_1 , r_2 et r_3 , tels que :

$$\|x_{ref1}(t)\| \leq r_1, \quad \|\dot{x}_{ref1}(t)\| \leq r_2 \text{ et } \|\ddot{x}_{ref1}(t)\| \leq r_3.$$

On note que $\dot{x}_{ref1} = x_{ref2}$, $\ddot{x}_{ref1} = \dot{x}_{ref2}$ et la trajectoire de référence est donnée par:

$$x_{ref} = \begin{bmatrix} x_{ref1} \\ x_{ref2} \end{bmatrix}.$$

4. 4. 1 Commande prédictive non linéaire à un pas

Le robot manipulateur doit suivre une trajectoire d'état prédéfinie par les variables articulaires $(q_{ref} \quad \dot{q}_{ref})$. La commande à synthétiser doit faire coïncider l'état du système (4.17) avec l'état de référence à l'instant $(t+h)$. Le critère à minimiser est alors :

$$J(e, Q, R, \tau) = \frac{1}{2} e(t+h)^T Q e(t+h) + \frac{1}{2} \tau(t)^T R \tau(t) \quad (4.18)$$

où $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & h^2 Q_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ est une matrice définie positive et $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice semi-définie positive.

L'erreur de poursuite est : $e(t+h) = x(t+h) - x_{ref}(t+h) = \begin{pmatrix} e_1(t+h) \\ e_2(t+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t+h) - x_{ref1}(t+h) \\ x_2(t+h) - x_{ref2}(t+h) \end{pmatrix}$

4.4.1.1 Elaboration du couple

Pour évaluer l'état $x(t)$ du système à l'instant $(t+h)$, on utilise le développement de Taylor et on obtient :

$$x(t+h) = \begin{pmatrix} x_1(t+h) \\ x_2(t+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) + h \dot{x}_1(t) + \frac{h^2}{2} \ddot{x}_1(t) \\ x_2(t) + h \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

En utilisant l'équation (4.17), l'état prédit à l'instant $(t+h)$ est :

$$x(t+h) = x(t) + V(x_1, x_2) + A(h) P(x_1) \tau(t),$$

$$\text{où } P(x_1) = M(q)^{-1}, \quad A(h) = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} h x_2 + \frac{h^2}{2} f(x_1, x_2) \\ h f(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

De la même manière, on évalue la trajectoire de référence à l'instant $(t+h)$:

$$x_{ref}(t+h) = \begin{pmatrix} x_{ref1}(t+h) \\ x_{ref2}(t+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{ref1}(t) + h \dot{x}_{ref1}(t) + \frac{h^2}{2} \ddot{x}_{ref1}(t) \\ x_{ref2}(t) + h \dot{x}_{ref2}(t) \end{pmatrix},$$

L'écart de poursuite d'état futur à l'instant $(t+h)$ est donné par :

$$e(t+h) = \begin{bmatrix} e_1(t) + h \dot{e}_1(t) + \frac{h^2}{2} (f(x_1, x_2) - \ddot{x}_{ref1}) + \frac{h^2}{2} P(x_1) \tau(t) \\ e_2(t) + h (f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2}) + h P(x_1) \tau(t) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

La minimisation du critère (4.18) par rapport au couple de commande est donnée par:

$$\tau(t) = -M(x_1) \bar{P}^{-1} \left(\frac{1}{2h^2} Q_1 e_1 + \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} Q_1 + Q_2 \right) e_2 + \left(\frac{1}{4} Q_1 + Q_2 \right) (f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2}) \right) \quad (4.21)$$

où $\bar{P} = \left(\frac{1}{4} Q_1 + Q_2 + h^{-4} M(x_1) R M(x_1) \right)$ est une matrice définie positive.

4. 4. 1. 2 Performance de poursuite

En substituant l'expression du couple de commande (4.21) dans l'équation (4.17), on obtient le modèle dynamique de l'écart de poursuite suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -\frac{1}{h^2} \bar{P}^{-1} Q_1 e_1 - \frac{1}{h} \bar{P}^{-1} \left(\frac{1}{2} Q_1 + Q_2 \right) e_2 + h^{-4} \bar{P}^{-1} M(x_1) R M(x_1) (f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2}) \end{cases} \quad (4.22)$$

Le système d'équation (4.22) peut être réécrit sous forme :

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{h^2} \bar{P}^{-1} Q_1 & -\frac{1}{h} \bar{P}^{-1} \left(\frac{1}{2} Q_1 + Q_2 \right) \end{bmatrix} e(t) + \bar{S}(x, x_{ref}, h),$$

$$\text{où } \bar{S}(x, x_{ref}, h) = \begin{bmatrix} 0 & h^{-4} \bar{P}^{-1} M(x_1) R M(x_1) (f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2}) \end{bmatrix}^T.$$

La dynamique de poursuite est un système affine par rapport à $e(t)$ avec le bruit additif $\bar{S}(x, x_{ref}, h)$ [KHA]. L'origine $e^0 = [0 \ 0]^T$ n'est pas le point d'équilibre du système (4.22).

Puisque le but de la poursuite est d'obtenir des trajectoires $e(t) = [e_1 \ e_2]^T$ se rapprochant de e^0 , nous nous intéressons plus particulièrement à la stabilité de la solution du système d'équation (4.22). En effet, en utilisant les propriétés P₁-P₄, on peut montrer que le terme additif $\bar{S}(x, x_{ref}, h)$ est borné. Par conséquent, la bornitude de la solution du système (4.22) peut être étudiée.

Soit $V(e) = \frac{1}{2h} e_1^T Q_1 e_1 + h e_2^T \bar{P} e_2$ une fonction de Lyapunov dont la dérivée le long de la trajectoire du système (4.22) est :

$$\dot{V} = -e_2^T (Q_1 + 2Q_2) e_2 + 2h^{-3} (f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2})^T M(x_1) R M(x_1) e_2, \quad (4.23)$$

A partir des propriétés P₁-P₄, on peut montrer que la fonction $\dot{V}(e)$ est majorée par:

$$\dot{V}(e) \leq -\lambda_{min}(Q_1 + 2Q_2) \|e_2\|^2 + 2h^{-3} k_p \bar{r} \bar{m}^2 \|e_2\|^2,$$

où $\bar{r} = \lambda_{max}(R)$ et $\|M(q)\| \leq \bar{m}$.

Il suffit de choisir $\lambda_{min}(Q_1 + 2Q_2) > 2h^{-3} k_p \bar{r} \bar{m}^2$, pour que la solution du système (4.22) soit uniformément bornée.

Posons $R=0$ (pas de pénalité sur la commande), l'origine e^0 devient le point d'équilibre du système (4.22) et la dérivée de la fonction de Lyapunov est : $\dot{V}(e) = -e_2^T (Q_1 + 2Q_2) e_2$, qui est définie négative pour tout $e_2 \in \mathbb{R}^n$.

En vertu du théorème d'invariance de La Salle, la solution $e(t)$ tend vers l'origine e^0 qui est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

4. 4. 2 Commande prédictive non linéaire à horizon fini

Il s'agit d'élaborer une commande prédictive par le biais de la minimisation de l'erreur quadratique intégrant l'écart entre l'état futur $x(t+T)$ et l'état de référence $x_{ref}(t+T)$ le long de l'intervalle $[t, t+T]$ avec $0 \leq T \leq h$, ainsi que l'effort de commande le long de l'intervalle $[t, t+h_c]$. Dans ce cas, la fonction coût à minimiser s'écrit :

$$J_2(e, Q, R, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^h e(t+T)^T Q e(t+T) dT + \frac{1}{2} \int_0^{h_c} \tau(t+T)^T R \tau(t+T) dT \quad (4.24)$$

où $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & T^2 Q_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices respectivement définie positive et semi-définie positive. h est l'horizon de prédiction de l'état et h_c est l'horizon de prédiction de la commande.

Le critère (4.24) peut être réécrit sous forme :

$$J_2(e, Q, R, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^h e_f(t+T)^T Q_f e_f(t+T) dT + \frac{1}{2} \int_0^h T^2 e_2^T(t+T) Q_2 e_2(t+T) dT + \frac{1}{2} \int_0^{h_c} \tau^T(t+T) R \tau(t+T) dT$$

Pour éviter la minimisation de ce critère en ligne, nous approximations l'erreur de poursuite future par :

$$\begin{aligned} e_1(t+T) &= e_1(t) + T \dot{e}_1 + \frac{T^2}{2} (f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2}) + \frac{T^2}{2} P(x_1) \tau(t) \\ e_2(t+T) &= e_2(t) + T (f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2}) + T P(x_1) \tau(t) \end{aligned}$$

4. 4. 2. 1 Elaboration du couple

Le couple de commande est supposé constant le long de l'intervalle $[t, t+h_c]$ avec $h_c \ll h$. Par conséquent, la solution optimale du coût quadratique (4.24) est :

$$\tau(t) = -\overline{M}(q) \overline{P}^{-1} \left(\frac{10}{3h^2} Q_1 e_1 + \frac{5}{2h} (Q_1 + 2Q_2) e_2 + (Q_1 + 4Q_2) (f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2}) \right) \quad (4.25)$$

où : $\overline{P} = Q_1 + 4Q_2 + 20h^{-5} h_c M(x_1) R M(x_1)$ est une matrice définie positive.

4. 4. 2. 2 Performance de poursuite

En remplaçant le couple de commande du modèle dynamique (4.17) par la loi de commande (4.25), on obtient la dynamique de poursuite du robot manipulateur :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -\frac{10}{3h^2} \overline{\overline{P}}^{-1} Q_1 e_1 - \frac{5}{2h} \overline{\overline{P}}^{-1} (Q_1 + 2Q_2) e_2 + 20h_c h^{-5} \overline{\overline{P}}^{-1} M(x_1) R M(x_1) (f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2}) \end{cases} \quad (4.26)$$

Ici également, le modèle dynamique de poursuite est affine en $e(t)$ avec le bruit additif

$$S_1(x, x_{ref}, h) = \begin{bmatrix} 0 & 20h_c h^{-5} \overline{\overline{P}}^{-1} M(x_1) R M(x_1) (f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2}) \end{bmatrix}^T.$$

En utilisant les propriétés P₁-P₄, on peut montrer que ce terme est borné. Donc, la stabilité du système (4.26) autour de l'origine peut être analysée.

Considérons la fonction de Lyapunov suivante $V(e) = \frac{2}{3h} e_1^T Q_1 e_1 + \frac{h}{5} e_2^T \overline{\overline{P}} e_2$, dont la dérivée le long de la solution du système (4.26) est :

$$\dot{V}(e) = -e_2^T (Q_1 + 2Q_2) e_2 + 8 \frac{h_c}{h^4} \left[(f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2})^T M(x_1) R M(x_1) e_2 \right]$$

En utilisant les propriétés P₁-P₄, l'expression $\dot{V}(e)$ est majorée par :

$$\dot{V}(e) \leq -\lambda_{\min}(Q_1 + 2Q_2) \|e_2\|^2 + 8h_c h^{-4} k_p \overline{\overline{r}} m^2 \|e_2\|^2,$$

Par conséquent, la solution du système (4.26) est uniformément bornée si et seulement si :

$\lambda_{\min}(Q_1 + 2Q_2) > 8h_c h^{-4} k_p \overline{\overline{r}} m^2$. On peut montrer que lorsque la matrice R tend vers une matrice nulle ou $\overline{r} \rightarrow 0$, le point d'équilibre du système (4.26) tend vers l'origine e^0 . En effet, posons R=0 dans l'équation (4.26), la dérivée de la fonction de Lyapunov $V(e)$ est :

$\dot{V}(e) = -e_2^T (Q_1 + 2Q_2) e_2$ qui est définie négative pour tout $e \neq 0$. La solution $e(t)$ du système (4.26) tend asymptotiquement vers l'origine e^0 .

4. 4. 3 Commande prédictive non linéaire avec contrainte terminale

Cette approche consiste à combiner les deux méthodes de commande (commande prédictive à un pas et commande prédictive à horizon fini) afin de tirer profit des performances des deux méthodes. Par conséquent, le nombre de paramètres à ajuster sera plus important et les performances de poursuite seront maximisées.

L'objectif de commande consiste alors à minimiser l'expression suivante :

$$J_3(e, Q, S, R, \tau) = \frac{1}{2} \|e(t+h)\|_Q^2 + \int_0^h \|e(t+T)\|_S^2 dT + \frac{1}{2} \int_0^{h_c} \|\tau(t+T)\|_R^2 dT \quad (4.27)$$

où: $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & h^2 Q_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ et $S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & T^2 S_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ sont des matrices définies positives.

$R \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ est une matrice semi-définie positive.

Le critère J_3 peut être réécrit sous forme :

$$J_3 = \frac{1}{2} e_1^T(t+h) Q_1 e_1(t+h) + \frac{1}{2} h^2 e_2^T(t+h) Q_2 e_2(t+h) + \frac{1}{2} \int_0^{h_c} \tau^T(t+T) R \tau(t+T) dT + \\ + \frac{1}{2} \int_0^h e_1^T(t+T) S_1 e_1(t+T) + T^2 e_2^T(t+T) S_2 e_2(t+T) dT$$

4. 4. 3. 1 Elaboration du couple

Dans ce cas aussi, on suppose que le couple de commande est constant le long de l'intervalle $[t, t+h_c]$ avec $h_c \ll h$. on a donc : $\tau(t+T) = \tau(t)$ pour $0 \leq T \leq h_c$. La solution au problème de minimisation du coût J_3 , en posant $\frac{\partial J_3}{\partial \tau} = 0$, est:

$$\tau(t) = -M(x_1) \tilde{P}^{-1} \left[\frac{1}{6h} \left(\frac{3}{h} Q_1 + S_1 \right) e_1 + \left[\frac{1}{h} (Q_1 + 2Q_2) + \frac{1}{8} (S_1 + 2S_2) \right] e_2 \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{4} (Q_1 + 4Q_2) + \frac{h}{20} (S_1 + 4S_2) \right] (f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2}) \right] \quad (4.28)$$

où $\tilde{P} = \frac{1}{4} Q_1 + Q_2 + \frac{h}{20} (S_1 + 4S_2) + h_c h^{-4} M(x_1) R M(x_1)$ est une matrice définie positive.

4. 4. 3. 2 Performance de poursuite

Nous remplaçons le couple de commande du modèle (4.17) par la loi de commande (4.28), nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -\frac{1}{6h} \tilde{P}^{-1} \left(\frac{3}{h} Q_1 + S_1 \right) e_1 - \tilde{P}^{-1} \left(\frac{1}{2} Q_1 + Q_2 + \frac{1}{8} (S_1 + 2S_2) \right) e_2 + h^{-4} h_c \tilde{P}^{-1} M(x_1) R M(x_1) (f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2}) \end{cases} \quad (4.29)$$

Ainsi dans ce cas également, l'erreur de trajectoire a une dynamique affine par rapport à $e(t)$ avec un bruit additif :

$$\tilde{S}(x, \dot{x}_{ref}, h, h_c) = \begin{bmatrix} 0 & h_c h^{-4} \tilde{P}^{-1} M(x_1) R M(x_1) (f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2}) \end{bmatrix}^T,$$

donc l'origine n'est pas le point d'équilibre. En tenant compte des propriétés P₁-P₄, on peut montrer que le terme additif (bruit) $\tilde{S}(x, \dot{x}_{ref}, h, h_c)$ est borné. Par conséquent, l'étude de la stabilité du système (4.29) autour de l'origine est possible.

En considérant la fonction de Lyapunov : $V(e) = \frac{1}{6h} e_1^T \left(\frac{3}{h} Q_1 + S_1 \right) e_1 + e_2^T \tilde{P} e_2$

et sa dérivée le long de la solution de l'équation (4.29) est :

$$\dot{V}(e) = -e_2^T \left[\frac{1}{h} (Q_1 + 2Q_2) + \frac{1}{4} (S_1 + 2S_2) \right] e_2 + h^{-4} h_c \left[(f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2})^T M(x_1) R M(x_1) e_2 + e_2^T M(x_1) R M(x_1) (f(x_1, x_2) - \dot{x}_{ref2}) \right]$$

En exploitant les propriétés P₁-P₄, on obtient la majoration suivante :

$$\dot{V}(e) \leq -\lambda_{min} \left[\frac{1}{h} (Q_1 + 2Q_2) + \frac{1}{4} (S_1 + 2S_2) \right] \|e_2\|^2 + 2h^{-4} h_c k_p \overline{r m}^2 \|e_2\|^2.$$

Il en résulte que, pour $\lambda_{min} \left(\frac{1}{h} (Q_1 + 2Q_2) + \frac{1}{4} (S_1 + 2S_2) \right) > 2h^{-4} h_c k_p \overline{r m}^2$, la solution $e(t)$ du système (4.29) est uniformément bornée, et on peut réduire le majorant de la solution en éliminant le terme additif du système (4.29). En effet, posons $R=0$ dans le système (4.29), l'origine e^0 devient le point d'équilibre du système (4.29). La dérivée de la fonction de Lyapunov est :

$$\dot{V}(e) = -e_2^T \left(\frac{1}{h} (Q_1 + 2Q_2) + \frac{1}{4} (S_1 + 2S_2) \right) e_2,$$

qui est définie négative pour tout $e_2 \neq 0$. On conclut alors la stabilité asymptotique de l'écart de poursuite et la solution $e(t)$ du système (4.29) tend asymptotiquement vers l'origine e^0 .

4. 4. 4 Observateur non linéaire

Dans les stratégies de commande prédictive non linéaire présentées dans ce chapitre, une connaissance exacte des positions et vitesses articulaires est nécessaire. Les robots manipulateurs sont équipés de capteurs de haute précision pour la mesure des variables articulaires. Les génératrices tachymétriques utilisées pour mesurer les vitesses articulaires fournissent des signaux entachés d'un bruit de mesure souvent considérable [CAN, NIC]. L'une des façons de résoudre ce problème consiste à utiliser un système dynamique auxiliaire qui reconstruit la vitesse en fonction des entrées et sorties du système. L'observateur de Gauthier [GAU] est utilisé dans ce chapitre pour reconstruire l'état du robot manipulateur.

En introduisant le vecteur d'état $z(t) = [\dots q_i(t) \dot{q}_i(t) \dots] \in \mathbb{R}^{2n}$, le vecteur des entrées $\tau(t) = [\dots \tau_i(t) \dots]^T$ et le vecteur des sorties mesurées $y(t) = [\dots q_i(t) \dots]^T$ pour $i=1,n$. Le modèle dynamique (4.3) peut se mettre sous la forme d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = A z + H f(z) + H P(y) \tau(t), \\ y = C z \end{cases}$$

où $A = \text{diag}(A_i)$, $A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \text{diag}(C_i)$, $C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $H = \text{diag}(H_i)$, $H_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

La dynamique de l'observateur est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = A \hat{z} + H f(\hat{z}) + H P(y) \tau(t) + S_\infty^{-1} C^T (y - \hat{y}), \\ \hat{y} = C \hat{z} \\ \dot{\hat{q}} = [\dots 0 \quad 1 \dots 0 \quad 1] \hat{z} \end{cases} \quad (4.30)$$

où $S_\infty(\theta) = \text{diag}(S_i(\theta))$ et $S_i(\theta) = S_i(\theta)^T > 0$ désigne la solution de l'équation de Lyapunov avec facteur d'oubli suivante :

$$\theta S_i(\theta) + A_i^T S_i(\theta) + S_i(\theta) A_i = C_i^T C_i. \quad (4.31)$$

4.5 Résultats de simulation

Afin de montrer l'efficacité des structures de commande prédictive proposées dans ce chapitre, plusieurs simulation ont été effectuées avec le modèle dynamique d'un robot manipulateur à deux degrés de liberté représenté sur la figure 4.1.

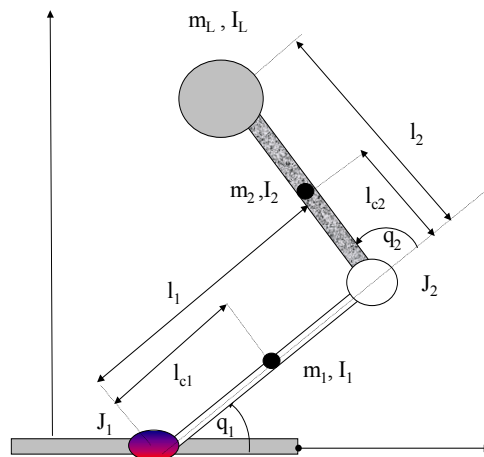


Figure 4. 1 : *Robot manipulateur.*

Le modèle dynamique est décrit par l'équation (4.3) avec les composantes suivantes :

$$\begin{aligned}
m_{11}(q) &= m_2 l_1^2 + m_L l_1^2 + I_1 + I_2 + I_L + J_1 + 2(m_2 l_1(l_{c2} + l_2) + m_L l_1(l_{cl} + l_2)) \cos(q_2). \\
m_{12}(q) &= m_{21}(q) = I_2 + I_L + (m_2 l_1(l_{c2} + l_2) + m_L l_1(l_{cl} + l_2)) \cos(q_2). \quad m_{22}(q) = I_2 + I_L + J_2. \\
C_{11}(q, \dot{q}) &= -\dot{q}_2 (m_2 l_1(l_{c2} + l_2) + m_L l_1(l_{cl} + l_2)) \sin(q_2). \\
C_{12}(q, \dot{q}) &= -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (m_2 l_1(l_{c2} + l_2) + m_L l_1(l_{cl} + l_2)) \sin(q_2). \\
C_{21}(q, \dot{q}) &= \dot{q}_1 (m_2 l_1(l_{c2} + l_2) + m_L l_1(l_{cl} + l_2)) \sin(q_2), \quad C_{22}(q, \dot{q}) = 0. \\
G_1(q) &= (m_2 l_1 + m_1(l_1 + l_{cl}) + m_L l_1) g \cos(q_1) + (m_2(l_2 + l_{c2}) + m_L(l_2 + l_{cl})) g \cos(q_1 + q_2) \\
G_2(q) &= (m_2(l_2 + l_{c2}) + m_L(l_2 + l_{cl})) g \cos(q_1 + q_2).
\end{aligned}$$

où m_L et I_L représentent la masse et l'inertie de l'organe terminal avec une charge nominale. l_{cl} est le centre de gravité de l'organe terminal. J_1 et J_2 représentent l'inertie des moteurs. Les valeurs numériques des paramètres du robot manipulateur sont données dans le tableau ci-dessous [CHU-2].

Axe 1	$l_1=0.45\text{m}$	$m_1=100\text{kg}$	$l_{c1}=0.15\text{m}$	$I_1=6.25\text{kgm}^2$	$J_1=4.77\text{kgm}^2$
Axe 2	$l_2=0.20\text{m}$	$m_2=25\text{kg}$	$l_{c2}=0.10\text{m}$	$I_2=0.61\text{kgm}^2$	$J_2=3.58\text{kgm}^2$
		$m_L=20\text{kg}$	$l_{cl}=0.20\text{m}$	$I_L=7.68\text{kgm}^2$	

Table 4. 1 : Paramètres du robot manipulateur.

Le modèle de référence choisi est $q_{ref} = \begin{bmatrix} q_{ref1} \\ q_{ref2} \end{bmatrix}$.

Un filtre de second ordre est appliqué permettant d'obtenir les trajectoires de référence qui sont dérivables deux fois. On a donc:

$$q_{ref1}(s) = \frac{\omega_1^2}{s^2 + 2\xi\omega_1 s + \omega_1^2} r_1(s) \quad \text{et} \quad q_{ref2}(s) = \frac{\omega_2^2}{s^2 + 2\xi\omega_2 s + \omega_2^2} r_2(s).$$

L'objectif de commande est la poursuite par les positions articulaires $q_1(t)$ et $q_2(t)$ des consignes ci-dessous :

$$r_1(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } 0 \leq t \leq 2.5s \\ 0.9(1 - \cos(1.26t)) & \text{si } t > 2.5s \end{cases}, \quad r_2(t) = \begin{cases} -\pi & \text{si } 0 \leq t \leq 3s \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } t > 3s \end{cases}$$

Les simulations sont effectuées avec l'observateur de Gauthier (4.30) dont la solution de

l'équation de Lyapunov (4.31) est donnée par : $S_i^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} 2\theta & \theta^2 \\ \theta^2 & \theta^3 \end{bmatrix}$ et le facteur d'oubli

est : $\theta=50$.

Initialement le robot manipulateur est à l'origine, c'est-à-dire: $q_1(0)=q_2(0)=0^\circ$, $\dot{q}_1(0)=\dot{q}_2(0)=0$. Le choix du coefficient d'amortissement et de la pulsation propre du filtre est comme suit : $\xi=1, \omega_1=\omega_2=5\text{rad/s}$.

4. 5. 1 Commande prédictive non linéaire à suivi de trajectoire de sortie

La commande prédictive à un pas (4.7) a été simulée avec les paramètres de réglage suivants: $Q=5 \cdot 10^3 I_2$, $R=10^{-6} I_2$ et $h=0.05$. I_2 est la matrice identité de dimension 2×2 .

Dans le cas adapté, les simulations sont faites avec la charge nominale et sans frottement. La figure 4.2 montre les résultats de simulation. Nous remarquons que les positions articulaires q_1 et q_2 du robot manipulateur atteignent les valeurs désirées. La figure 4.3 montre les erreurs d'estimation $\tilde{e}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ sur les positions et vitesses articulaires obtenues via l'observateur de Gauthier.

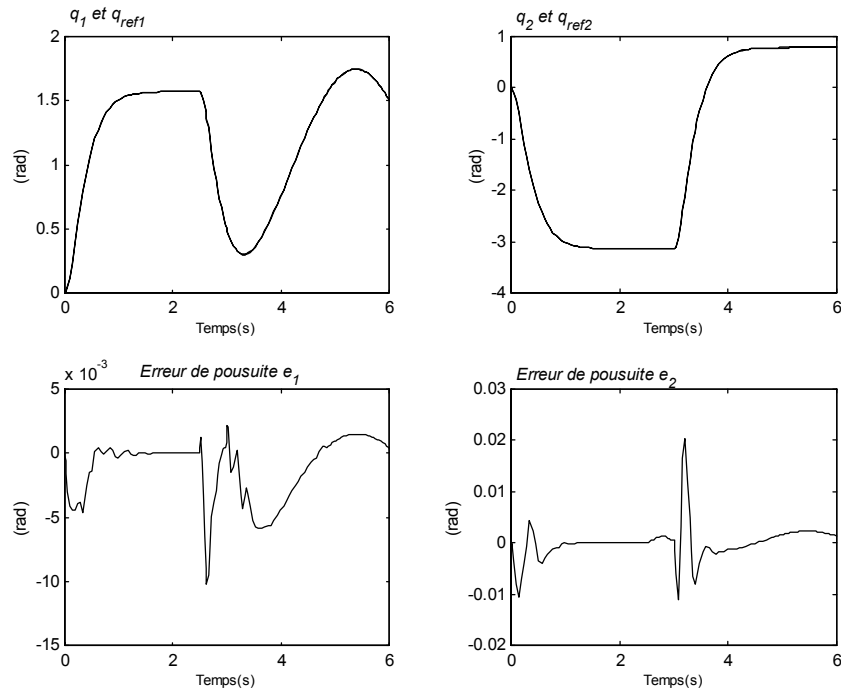


Figure 4. 2 Evolutions des articulations q_1 et q_2 (cas adapté).

Dans le cas désadapté, les simulations sont effectuées avec une variation de la charge de 300% ($m_L=80\text{kg}$ et $I_L=30.72 \text{ kgm}^2$) et avec des frottements donnés par : $f = f_v \dot{q} + f_s \text{sign}(\dot{q})$, où $f_v = \text{diag}(10,10)$ est la matrice diagonale des frottements visqueux et $f_s = \text{diag}(10,10)$ est la matrice diagonale des frottements secs.

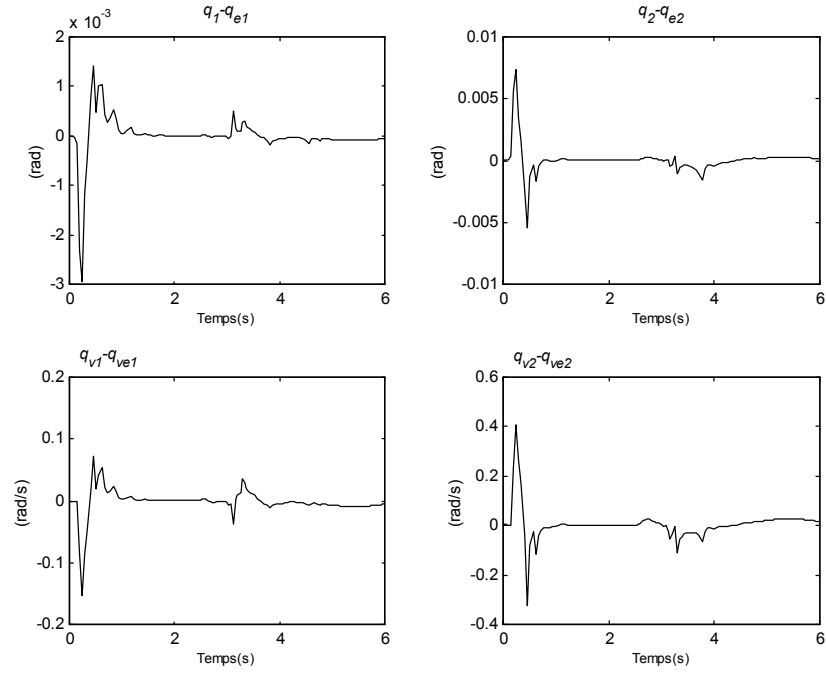


Figure 4. 3 *Erreurs d'observation.*

La figure 4.4 illustre les résultats de simulation. Les positions articulaires suivent bien le signal de référence. Ces résultats prouvent la robustesse de la commande prédictive à un pas vis-à-vis des variations de la charge et des frottements.

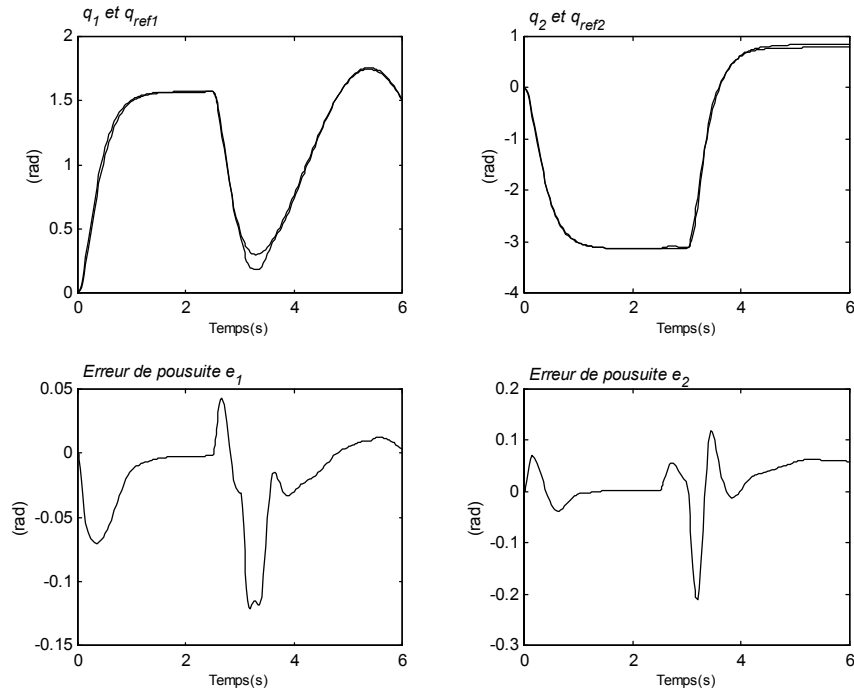


Figure 4. 4 *Dynamique de poursuite (cas désadapté).*

La commande prédictive à horizon fini (4.11) est testée en simulation en utilisant les paramètres de réglage suivants: $Q=5 \cdot 10^3 I_2$, $R=10^{-4} I_2$, $h=0.002$ et $h_c=0.001 h$. La poursuite de la trajectoire est donnée sur la figure 4.5. Une poursuite asymptotique de la trajectoire est constatée. La figure 4.6 montre les résultats de simulation dans le cas désadapté. Nous remarquons que les deux axes du robot manipulateur se positionnent aux valeurs désirées. Par conséquent, la variation de la charge et les frottements n'ont pas d'effet considérable sur la réponse du système bouclé par la commande prédictive à horizon fini.

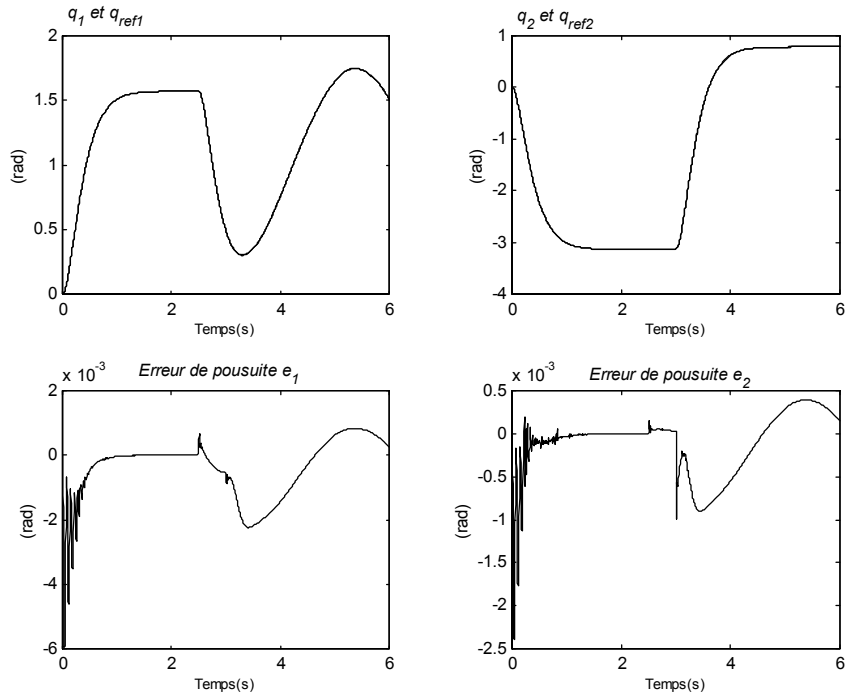


Figure 4. 5 *Evolutions des articulations q_1 et q_2 (cas adapté).*

Par ailleurs, on note que la commande prédictive à horizon fini permet d'obtenir une meilleure convergence de l'erreur de poursuite des positions articulaires par rapport à la commande prédictive à un pas.

L'intégration des deux structures de commande donnée par l'équation (4.15), est testée par simulation avec les paramètres de réglage suivants: $Q=5 \cdot 10^3 I_2$, $R=10^{-6} I_2$, $Q_i=100 I_2$, $h=0.002$ et $h_c=0.001 h$. La figure 4.7 représente les performances de poursuite obtenues dans le cas adapté. Le vecteur de sortie $q(t)$ suit asymptotiquement le vecteur de référence $q_{ref}(t)$. Dans le cas désadapté, la figure 4.8 illustre les résultats de simulation. Dans ce cas également, on note une poursuite asymptotique de la trajectoire de référence par les positions articulaires du robot manipulateur en dépit des variations de la charge et en présence des frottements secs

et visqueux. Il faut noter que la combinaison des deux structures de commande donne de meilleures performances en poursuite dans les deux cas (adapté ou désadapté).

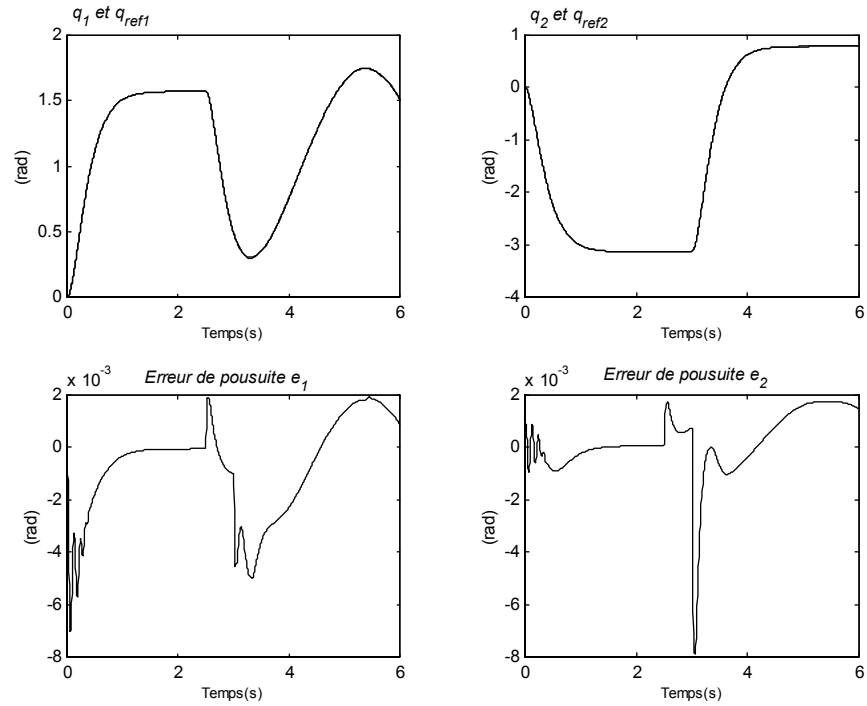


Figure 4. 6 *Dynamique de poursuite (cas désadapté).*

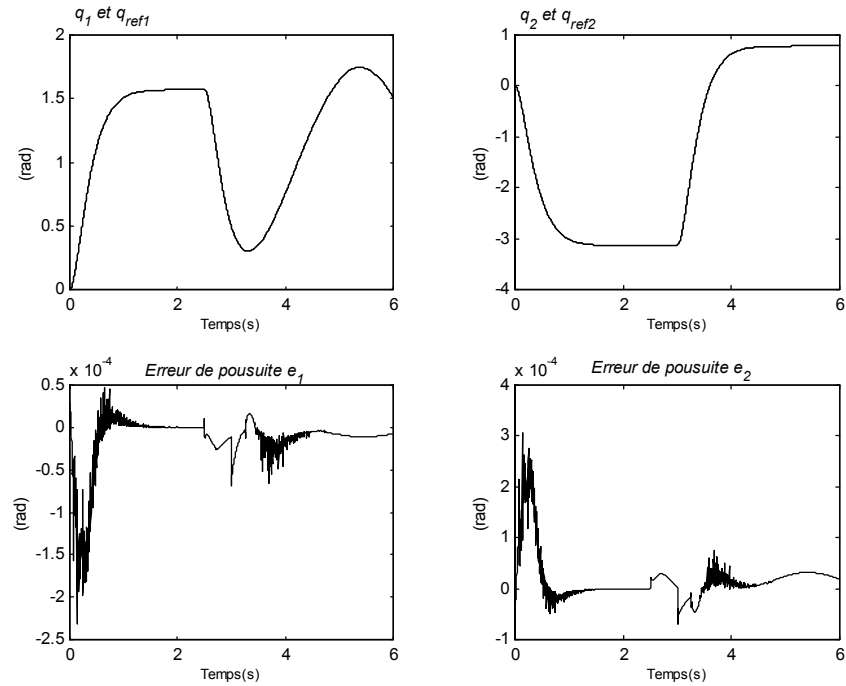


Figure 4. 7 *Evolutions des articulations q_1 et q_2 (cas adapté).*

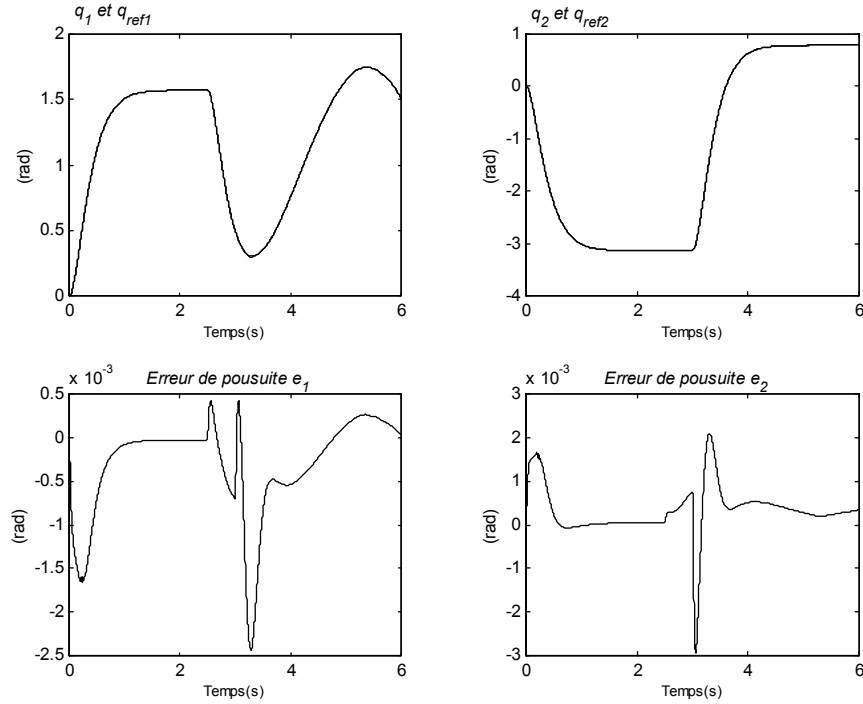


Figure 4. 8 *Dynamique de poursuite (cas désadapté).*

4. 5. 2 Commande prédictive non linéaire à suivi de trajectoire d'état

La commande prédictive non linéaire à un pas (4.21) est testée en utilisant les paramètres suivants : $Q_1=5 \cdot 10^4 I_2$, $Q_2=8 \cdot 10^4 I_2$, $R=10^{-8} I_2$ et $h=0.002$.

Dans un premier temps nous considérons le modèle du robot avec la charge nominale et sans frottements. La figure 4.9 montre les évolutions des articulations (q_1, q_2) ainsi que l'erreur de poursuite des trajectoires de référence. La figure 4.10 montre les vitesses articulaires des deux axes ($\dot{q}_1, \dot{q}_2$) et leurs trajectoires de référence correspondantes ainsi que les erreurs de poursuite (e_1, e_2). A partir de ces figures, nous constatons la convergence asymptotique de l'état du robot manipulateur vers la trajectoire de référence $x_{ref}(t)$.

Dans le cas désadapté, les simulations ont été effectuées avec des frottements secs et visqueux et une variation de la charge de 350% de la charge nominale($m_L=90$ kg et $I_L=34.36$ kgm²). A partir des figures 4.11 et 4.12, on conclut que l'objectif de poursuite est atteint en dépit de la variation de la charge et en présence des frottements. Ces résultats prouvent la robustesse de cette loi de commande vis-à-vis d'incertitudes de la charge et en présence des frottements.

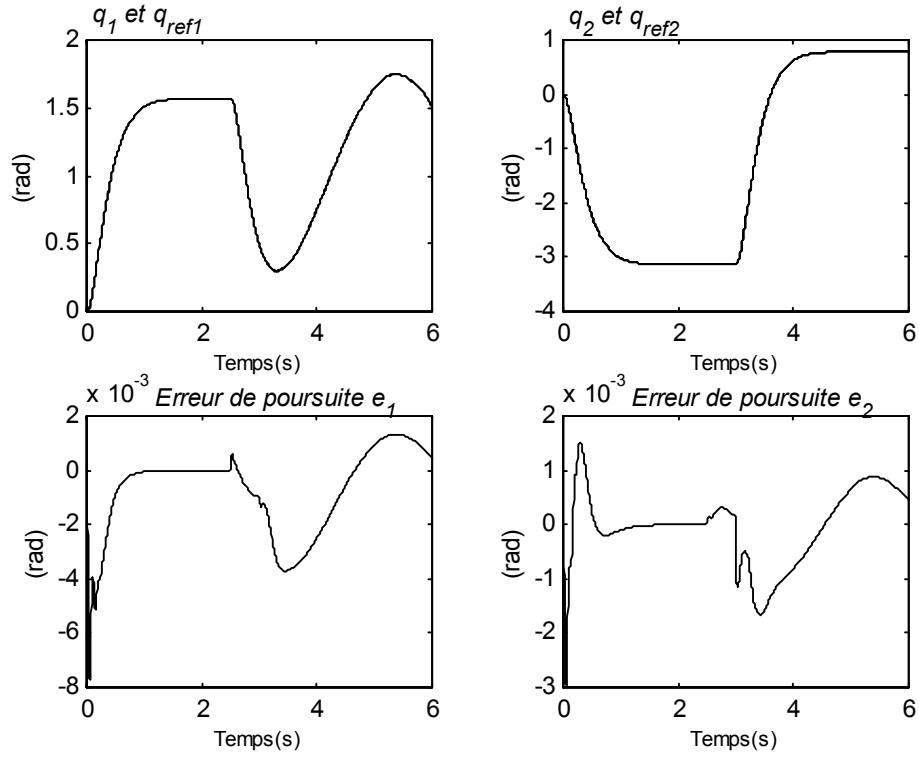


Figure 4. 9 Erreur de poursuite des positions articulaires q_1 et q_2 . (cas adapté)

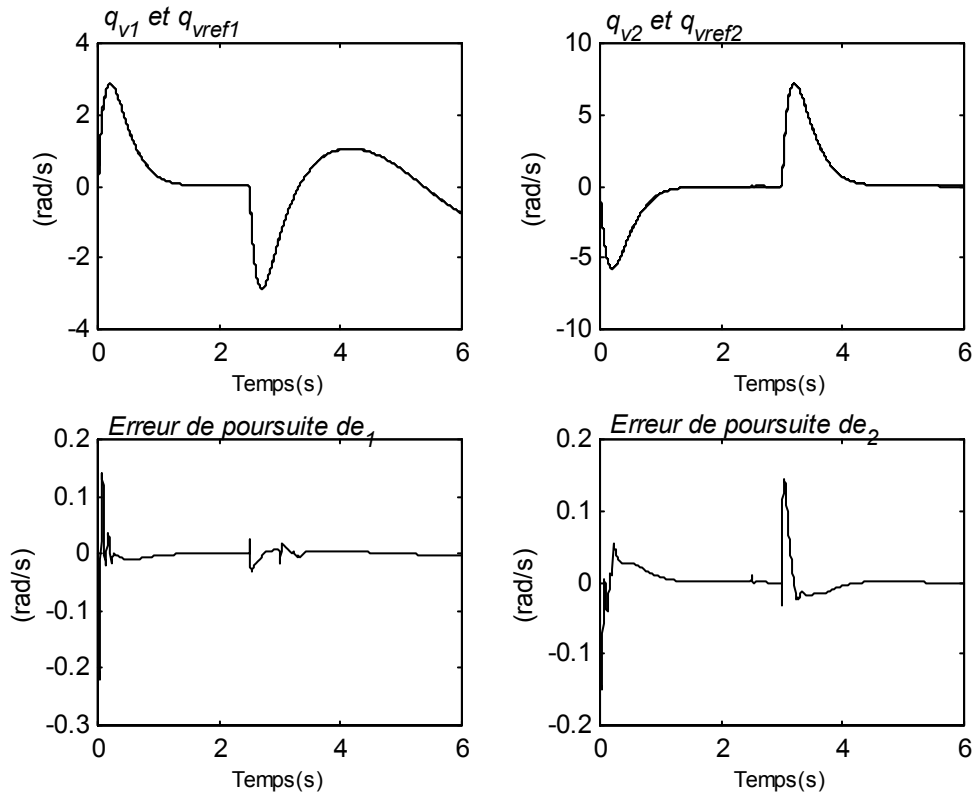


Figure 4. 10 Erreur de poursuite des vitesses articulaires (cas adapté)

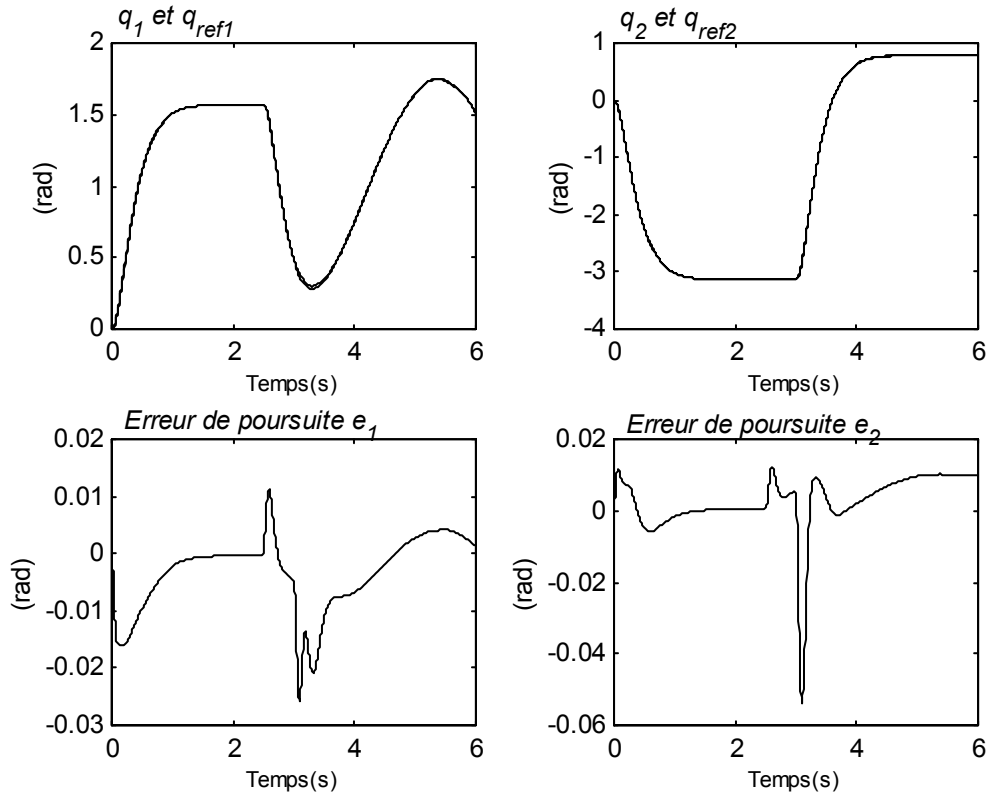


Figure 4. 11 *Performance de poursuite des positions q_1 et q_2 (cas désadapté)*

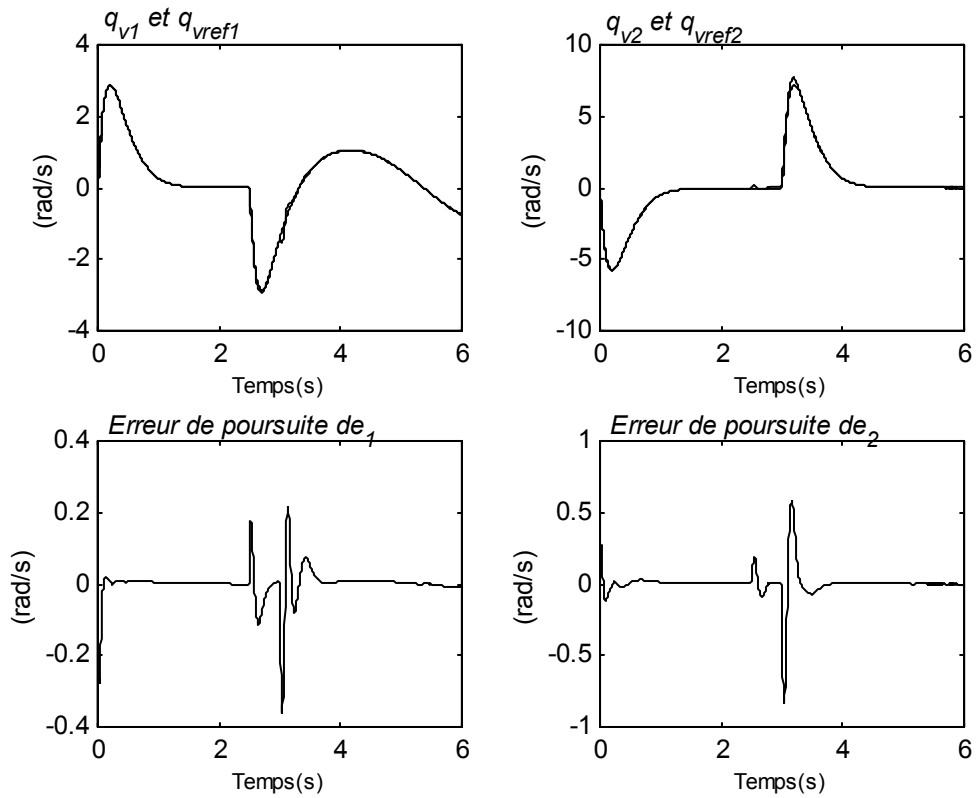


Figure 4. 12 *Performance de poursuite des vitesses $\dot{q}_1$ et $\dot{q}_2$ (cas désadapté)*

Plusieurs simulations ont été effectuées avec le modèle dynamique du robot manipulateur (4.17) bouclé par la commande prédictive non linéaire à horizon fini (4.25). Les paramètres de simulations sont : $Q_1=5 \cdot 10^4 I_2$, $Q_2=8 \cdot 10^4 I_2$, $R=10^{-8} I_2$, $h=0.002$ et $h_c=0.01 h$.

Dans le cas adapté, les résultats de simulation sont illustrés par les figures 4.13 et 4.14. L'état $x(t)$ du robot manipulateur (position et vitesse articulaire) est très proche de la trajectoire de référence $x_{ref}(t)$.

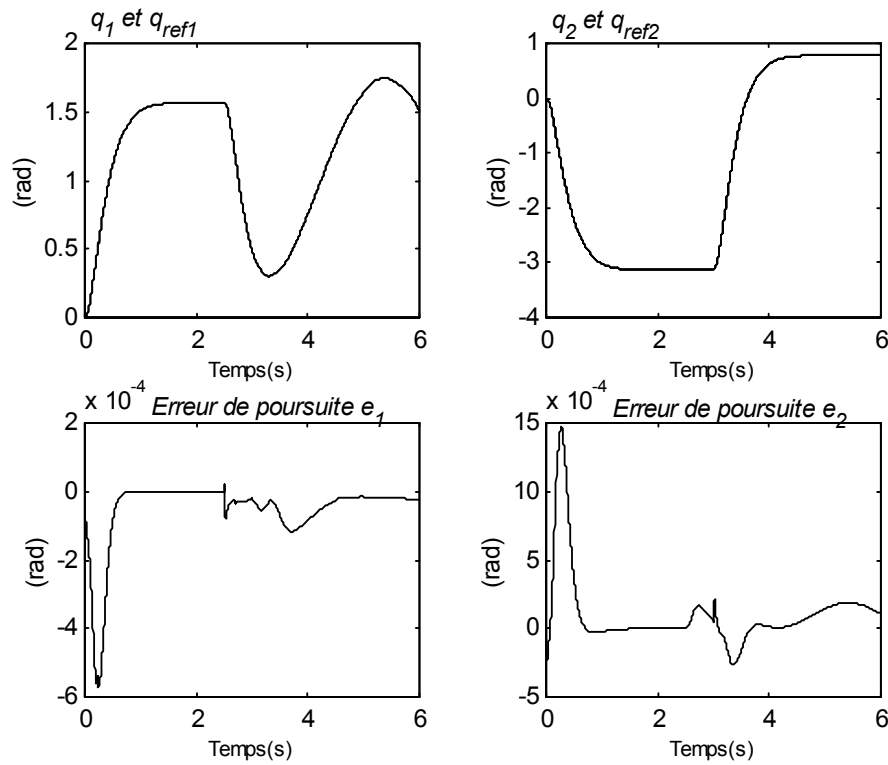


Figure 4. 13 *Erreur des positions articulaires q_1 et q_2 . (cas adapté).*

Les figures 4.15 et 4.16 montrent les résultats de simulation dans le cas désadapté. Dans ce cas également, le robot manipulateur sous la commande prédictive à horizon fini est robuste vis-à-vis des variations de la charge et des frottements. En effet, l'incertitude sur la charge et les frottements n'ont aucun effet sur la dynamique de poursuite. En outre, on note qu'on a obtenu de meilleures performances de poursuite sous la commande prédictive à horizon fini par rapport à ceux obtenues par la commande prédictive à un pas.

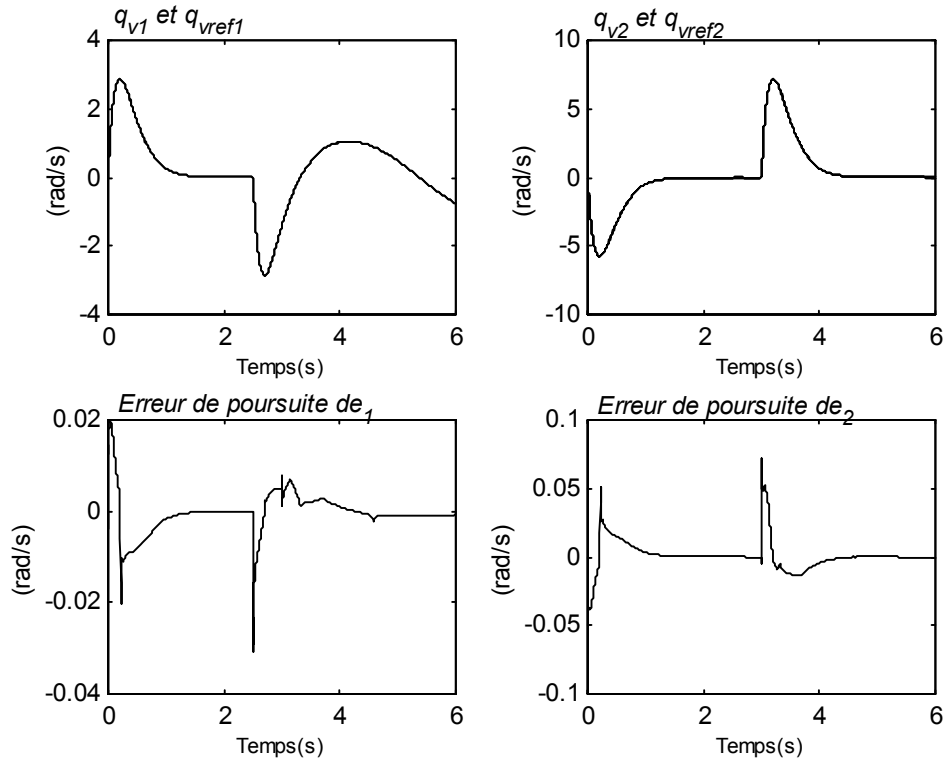


Figure 4. 14 Evolution des vitesses articulaires $\dot{q}_1$ et $\dot{q}_2$ (cas adapté).

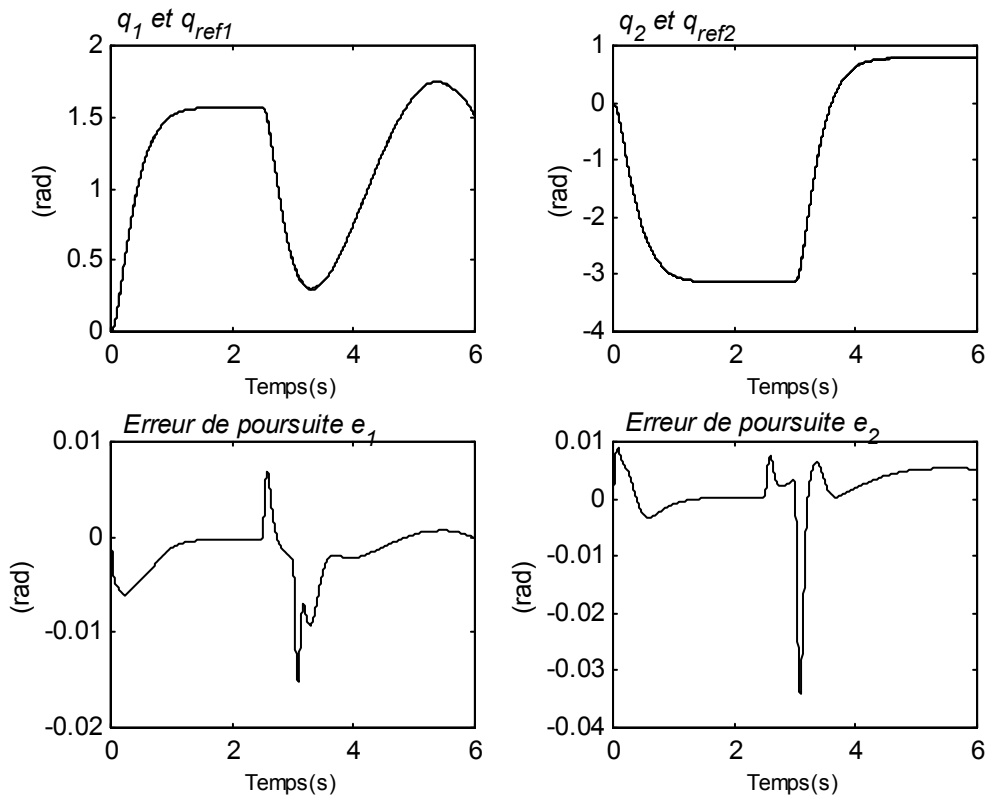


Figure 4. 15 Evolutions des positions articulaires q_1 et q_2 (cas désadapté).

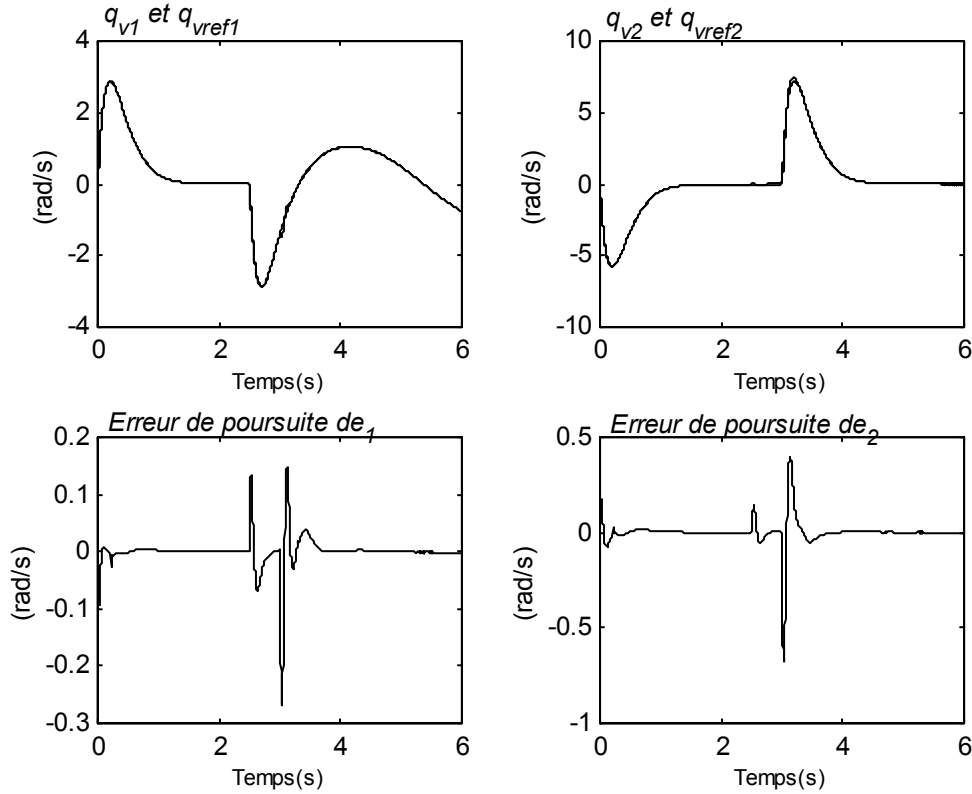


Figure 4. 16 Evolution des vitesses articulaires $\dot{q}_1$ et $\dot{q}_2$ (cas désadapté).

La combinaison des deux structures de commande qui aboutit au couple de commande donné par l'équation (4.28) a été testée en simulation avec les paramètres de réglage suivants :

$$Q_1=5 \cdot 10^4 I_2, Q_2=8 \cdot 10^4 I_2, S_1=10 I_2, S_2=50 I_2, R=10^{-8} I_2, h=0.001 \text{ et } h_c=0.01 h.$$

Les figures 4.17 et 4.18 montrent les performances de poursuite atteintes par cette méthode de commande dans le cas adapté. Le vecteur d'état $x(t)$ du robot manipulateur converge asymptotiquement vers la trajectoire de référence $x_{ref}(t)$. Dans le cas désadapté, les résultats de simulation sont illustrés sur les figures 4.19 et 4.20. Dans ce cas également, on note la robustesse du robot manipulateur sous cette loi de commande vis-à-vis des frottements et des variations de la charge.

Comme il a été cité au chapitre précédent, l'intégration des deux structures de commande maximise les performances de poursuite. En effet, les performances de poursuite obtenues par la commande prédictive non linéaire avec contrainte terminale sont meilleures que celles obtenues par les lois de commande prédictive à un pas ou à horizon fini seules.

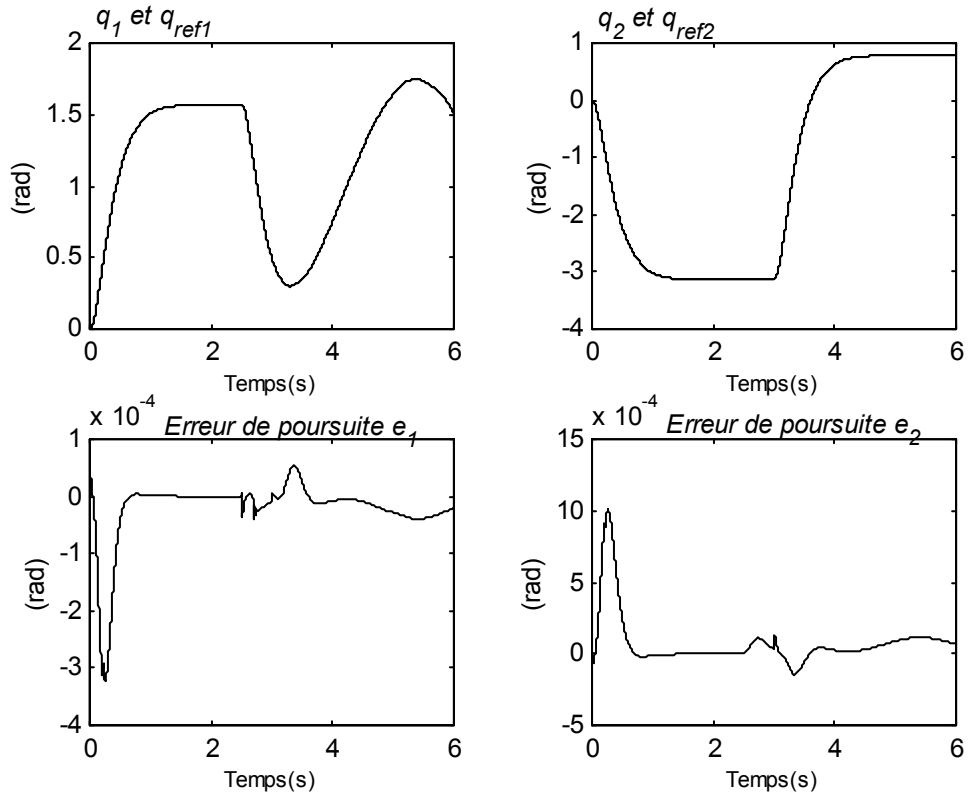


Figure 4. 17 *Erreur de poursuite des positions articulaires q_1 et q_2 (cas adapté).*

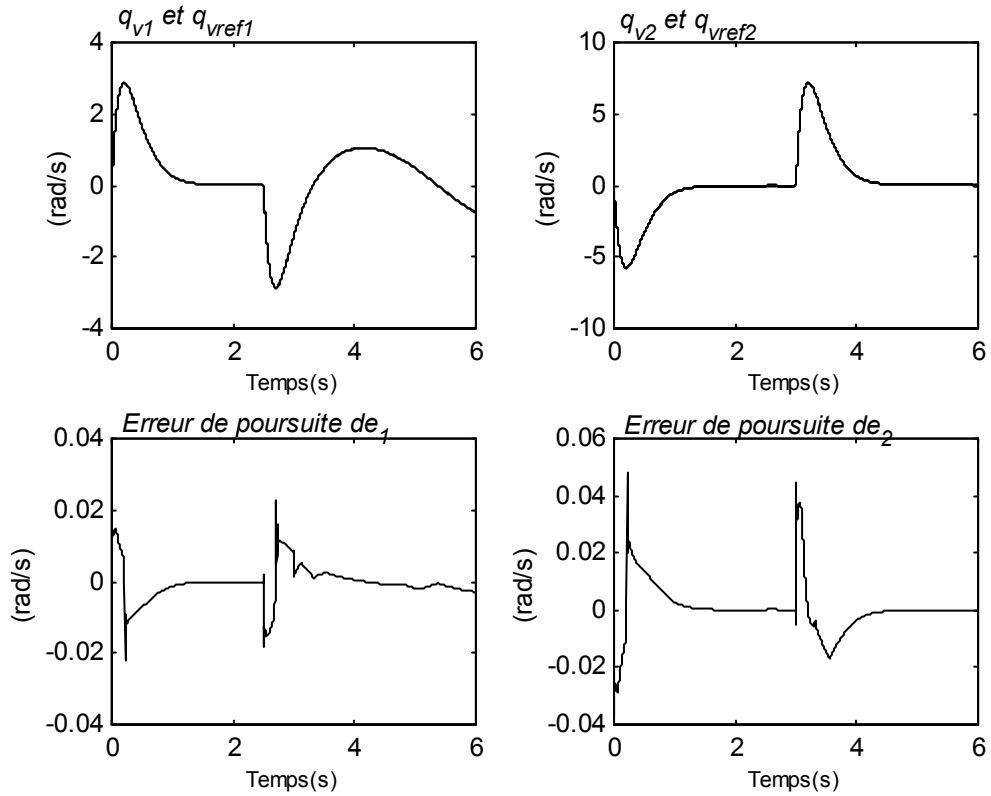


Figure 4. 18 *Erreur de poursuite des vitesses articulaires $\dot{q}_1$ et $\dot{q}_2$ (cas adapté).*

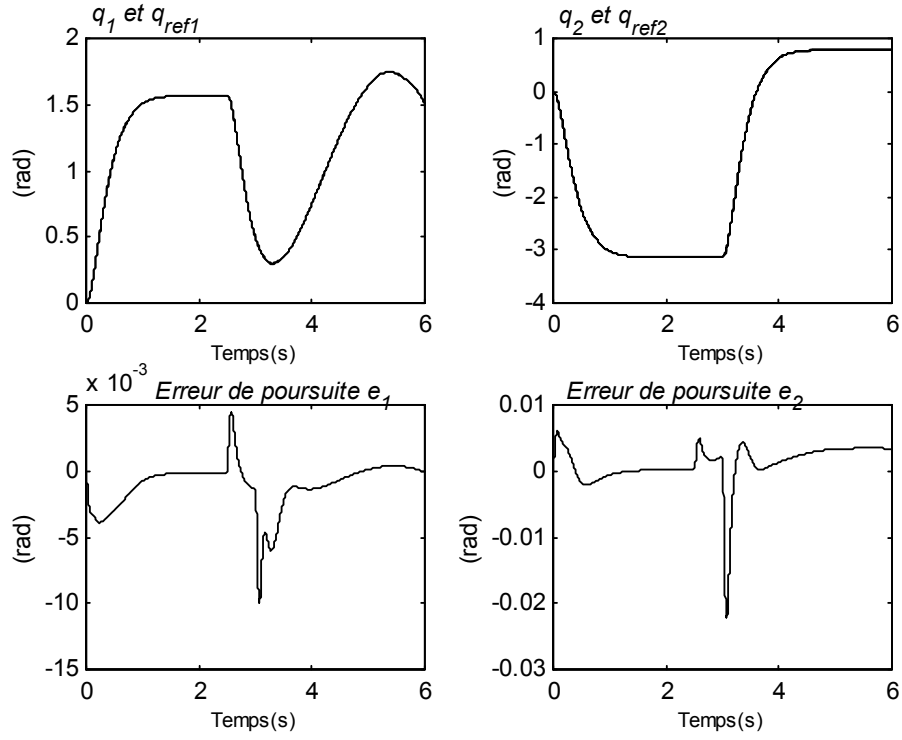


Figure 4. 19 Evolution des positions articulaires q_1 et q_2 (cas désadapté).

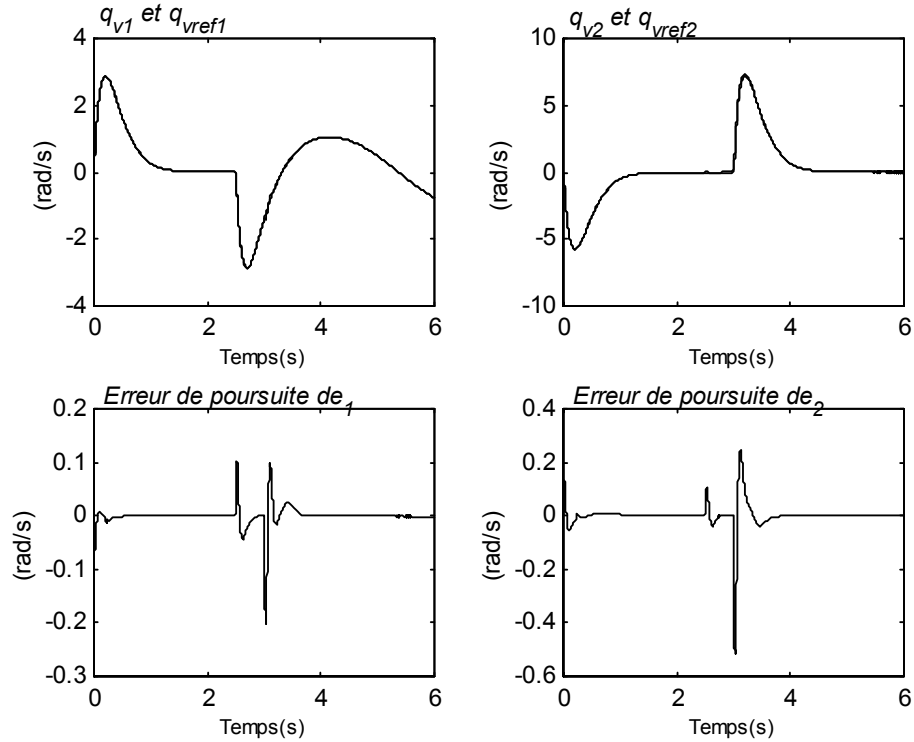


Figure 4. 20 Evolution des vitesses articulaires $\dot{q}_1$ et $\dot{q}_2$ (cas désadapté).

En outre, d'autres simulations ont été effectuées, et nous avons relevé les points suivants :

- Une dynamique rapide du signal de référence induit une augmentation du signal de commande. Pour réduire l'amplitude du signal de commande, il suffit d'augmenter le pas de prédiction h . Cependant à partir d'un certain seuil du pas de prédiction, les performances se dégradent et le mécanisme d'instabilité apparaît. Cela est dû à la non validité de l'approximation utilisée pour la synthèse de la loi de commande.
- Dans le cas désadapté, une augmentation de l'erreur d'estimation ainsi que celle du signal de commande ont été constatées par rapport au cas adapté.
- Dans la commande prédictive à un pas, les performances de poursuite sont très sensibles aux variations du pas de prédiction h .
- La commande prédictive non linéaire avec contrainte terminale sur l'état donne un signal de commande moins énergétique que les deux premières structures de commande.

4. 6 Conclusion

Pour résoudre le problème de poursuite de trajectoire des robots manipulateurs à n degrés de liberté, la commande prédictive non linéaire à suivi de trajectoire a été développée. Elle est établie en minimisant un critère quadratique de l'erreur de poursuite future et du couple de commande. L'avantage de cette approche est que l'optimisation en ligne n'est pas nécessaire. La réduction de pénalité sur la commande entraîne la convergence de l'erreur de poursuite vers l'origine.

Dans la première partie, trois stratégies de commande prédictive à suivi de trajectoire de sortie ont été présentées pour résoudre le problème de poursuite de trajectoires par les positions articulaires du robot manipulateur. Dans la deuxième partie, le problème de poursuite de trajectoires par les positions et vitesses articulaires du robot a été résolu par trois méthodes de commande prédictive non linéaires à suivi de trajectoires d'état.

Ces lois de commande ont été testées en simulation en utilisant un observateur de Gauthier, et on a envisagé aussi bien le cas adapté (avec une charge nominale et sans frottements) que le cas désadapté (avec variation de la charge et en présence des frottements). Les résultats de

simulation ont montré qu'avec un choix adéquat des paramètres de réglage, la commande prédictive non linéaire assure la convergence de l'écart de poursuite vers l'origine. En outre, ces lois de commande sont robustes vis-à-vis des variations de la charge et en présence des frottements.

Il faut noter que les lois de commande prédictives que nous avons proposées (à horizon fini et avec contrainte terminale) ont donné de meilleures performances par rapport à celle développée par Ping Lu.

Chapitre 5

Commande prédictive non linéaire cascade d'une machine asynchrone

5.1 Introduction

En raison de sa fiabilité, robustesse, faible coût et facilité à entretenir, la machine asynchrone, ou machine à induction, représente aujourd'hui le servomoteur de choix pour les applications industrielles. Sa fiabilité mécanique est due à l'absence du collecteur de commutation, ainsi qu'à la présence d'un rotor massif de bobinage. Son domaine d'application est déjà très vaste : nous la trouvons dans les tractions ferroviaires, la propulsion électrique des navires, le pompage, la ventilation, les machines à outils, les laminoirs, et les machines à papier entre autres. Du point de vue commande, elle est plus difficile à commander que le moteur synchrone ou machine à courant continu. En effet, il s'agit d'un système dynamique non linéaire multivariable avec des paramètres variables dans le temps et accès partiel à l'état.

Durant ces dernières années, plusieurs méthodes de commande non linéaires ont été développées et appliquées au moteur asynchrone. L'approche la plus utilisée est la méthode à flux orienté, introduite au début des années 1970 [BLA, LEO, TRZ]. Cette méthode consiste à orienter le flux suivant l'axe q du repère (d,q) tournant.

D'autre part, le développement de la théorie de la commande des systèmes non linéaires [ISI], a permis de concevoir des schémas de commande tenant compte explicitement des non linéarités de la machine asynchrone et de satisfaire des objectifs plus ambitieux. Ainsi donc, la méthode de linéarisation entrée-sortie a été utilisée pour découpler et linéariser le modèle de la machine asynchrone [BOD, CHI-2, KIM, MAA]. Ce qui permet de contrôler indépendamment le couple et le flux.

Récemment Marino *et al* ont intégré un mécanisme d'adaptation à cette approche pour estimer en temps réel la charge et la variation de la constante rotorique [MAR-3]. Djemai *et al* ont résolu le problème de poursuite des variables de la machine asynchrone (vitesse et flux)

par la méthode des perturbations singulières [DJE-1, DJE-2]. La commande fondée sur la théorie de platitude a été appliquée par Maaziz pour la commande du flux, couple et vitesse de la machine asynchrone [MAA-2]. Ortega *et al* [ORT-3] ont synthétisé une loi de commande non linéaire basée sur la théorie de passivité. L'approche Back-stepping a été utilisée pour établir une commande adaptative non linéaire de la machine asynchrone [TAN].

La commande prédictive est connue pour sa robustesse vis-à-vis des dynamiques non modélisées, ainsi que des incertitudes paramétriques. En particulier, pour les machines à induction, les incertitudes paramétriques (rotorique et statorique) posent un problème majeur pour la réalisation d'un contrôleur ou d'un observateur. En effet, la variation de la constante de temps rotorique, due à la variation de la température du rotor lors de son fonctionnement, dégrade considérablement les performances de poursuite et d'estimation [PIE]. Pour cette raison, dans la majorité des commandes non linéaires, l'estimation en ligne de la résistance rotorique est nécessaire.

Dans ce chapitre, nous montrerons comment nous pouvons atteindre les performances de poursuite désirées, par le biais de commandes prédictives non linéaires proposées dans notre thèse, en dépit des variations des résistances rotorique et statorique et sans l'estimation de la résistance rotorique. Ce chapitre est organisé en deux parties. La première partie est consacrée à l'élaboration des trois lois de commande prédictive à suivi de trajectoire (commande prédictive à un pas, commande prédictive à horizon fini et commande prédictive avec contrainte terminale). Le filtre de Kalman est utilisé pour estimer le flux rotorique. La seconde partie concerne les résultats de simulation, ainsi que leurs interprétations. Nous terminons ce chapitre par quelques conclusions et remarques.

5. 2 Modèle de la machine asynchrone

Dans ce paragraphe, nous présentons la modélisation de la machine asynchrone en mettant l'accent sur la représentation d'état utilisée dans plusieurs travaux [DJE-*, BOU-2, MAA-*]. Les équations de Park ont été et sont encore la référence pour l'élaboration du modèle de connaissance traduisant le comportement dynamique des modes électriques et électromagnétiques de la machine. Selon le type de commande que l'on veut réaliser : couple, vitesse, position, selon la nature de la source d'alimentation (tension ou courant), du référentiel de travail ((α, β) ou (d, q)), et enfin des composantes du vecteur (flux, courant) statorique ou rotorique, différents modèles d'états peuvent être formulés.

Nous nous plaçons dans le cas d'une machine asynchrone triphasée et symétrique, alimentée en tension dont le rotor est à cage. Les hypothèses permettant de mettre en place le modèle de Park sont les suivantes :

- Le circuit magnétique est non saturé,
- L'entrefer est parfaitement lisse,
- La densité de courant est uniforme dans les conducteurs élémentaires,
- Les pertes dans le fer sont négligeables.

Sur la base de ces hypothèses, en régime permanent, toute machine à induction possède un circuit équivalent par phase pouvant être représenté par la figure 5.1.

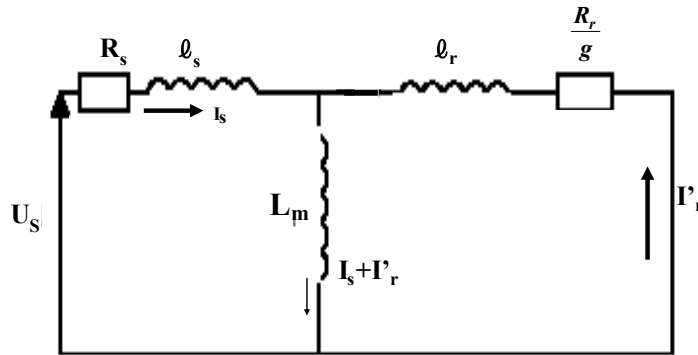


Figure 5.1 *Circuit équivalent par phase de la machine en régime permanent.*

Les équations du circuit sont alors données par :

$$U_s = (R_s + j \varpi_s \ell_s) I_s + j L_m \varpi_s (I_s + I'_r)$$

$$0 = \left(\frac{R_r}{g} + j \ell_r \varpi_s \right) I'_r + j L_m \varpi_s (I_s + I'_r)$$

où $I'_r = I_r e^{jp\theta}$, $\ell_s = L_s - L_m$, $\ell_r = L_r - L_m$, $g = \frac{\varpi_s - \varpi}{\varpi} = \frac{\varpi_r}{\varpi}$ étant le glissement, ϖ_s est la pulsation statorique, ϖ_r est la pulsation rotorique et les autres paramètres seront définies dans le paragraphe suivant.

5. 2. 1 Equation du modèle diphasé de la machine asynchrone

Dans le cas d'un repère tournant, les équations de la machine [BOS, LEO], après transformation de Park, sont données de manière générale par les équations ci-dessous. Dans ce modèle, toutes les grandeurs sont ramenées dans le repère (d,q).

$$\phi_{sd} = L_s I_{sd} + L_m I_{rd} \quad (5.1)$$

$$\phi_{sq} = L_s I_{sq} + L_m I_{rq} \quad (5.2)$$

$$\phi_{rd} = L_r I_{rd} + L_m I_{sd} \quad (5.3)$$

$$\phi_{rq} = L_r I_{rq} + L_m I_{sq} \quad (5.4)$$

$$U_{sd} = R_s I_{sd} + \frac{d\phi_{sd}}{dt} - \phi_{sq} \omega_s \quad (5.5)$$

$$U_{sq} = R_s I_{sq} + \frac{d\phi_{sq}}{dt} + \phi_{sd} \omega_s \quad (5.6)$$

$$U_{rd} = R_r I_{rd} + \frac{d\phi_{rd}}{dt} - \phi_{rq} (\omega_s - \omega) = 0 \quad (5.7)$$

$$U_{rq} = R_r I_{rq} + \frac{d\phi_{rq}}{dt} + \phi_{rd} (\omega_s - \omega) = 0 \quad (5.8)$$

où :

L_s, L_r sont les inductances statorique et rotorique,

L_m est l'inductance mutuelle,

R_r, R_s sont les résistances rotorique et statorique,

I_{sq}, I_{sd} sont les courants statoriques dans le repère (d,q),

I_{rq}, I_{rd} sont les courants rotoriques dans le repère (d,q),

ϕ_{sq}, ϕ_{sd} sont les flux statoriques dans le repère (d,q),

ϕ_{rq}, ϕ_{rd} sont les flux rotoriques dans le repère (d,q),

U_{sq}, U_{sd} sont les tensions d'alimentation dans le repère (d,q).

La vitesse mécanique est donnée par $\Omega = \frac{\omega}{p}$ où p est le nombre de paires de pôles. ω_s donne la

vitesse angulaire du repère (d,q) tournant. Le repère (α, β) n'est qu'un cas particulier du repère (d,q) en prenant $\omega_s = 0$.

L'équation mécanique est donnée par :

$$J \dot{\Omega} = C_{em} - C_{res}$$

où J est l'inertie de la partie tournante,

$C_{em} = p \frac{L_m}{L_r} (\phi_{rd} I_{sq} - \phi_{rq} I_{sd})$ représente le couple de la machine,

$C_{res} = f \Omega + T_L$ représente le couple résistant dû aux frottement ainsi que la charge de la machine.

Le choix des variables d'état dépend des objectifs liés à la commande et à l'observation. Pour le modèle complet, la vitesse mécanique, dont on veut contrôler l'évolution, est une variable d'état. Nous considérons dans notre cas les variables d'état suivantes :

$$x(t) = \begin{bmatrix} I_{sd} & I_{sq} & \phi_{rd} & \phi_{rq} & \Omega \end{bmatrix}^T.$$

Ce choix de variables se justifie d'une part, par le fait que les courants statoriques sont mesurables et d'autre part parce que l'on veut contrôler la norme du vecteur flux rotorique.

Les entrées du modèle de la machine asynchrone sont les tensions de commande U_{sd} et U_{sq} . Pour mettre les équations sous forme de représentation d'état, nous devons modifier les équations (5-1, 5-8) afin d'exprimer l'état $\dot{x}(t)$ en fonction des variables d'état I_{sd} , I_{sq} , ϕ_{rd} , ϕ_{rq} et Ω . Ces modifications permettent d'introduire la notation matricielle de la représentation d'état :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{sd} \\ I_{sq} \\ \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma I_{sd} + \omega_s I_{sq} + \frac{k}{T_r} \phi_{rd} + p \Omega k \phi_{rq} \\ -\omega_s I_{sd} - \gamma I_{sq} - p \Omega k \phi_{rd} + \frac{k}{T_r} \phi_{rq} \\ \frac{L_m}{T_r} I_{sd} - \frac{1}{T_r} \phi_{rd} + (\omega_s - p \Omega) \phi_{rq} \\ \frac{L_m}{T_r} I_{sq} - (\omega_s - p \Omega) \phi_{rd} - \frac{1}{T_r} \phi_{rq} \\ p \frac{L_m}{J L_r} (\phi_{rd} I_{sd} - \phi_{rq} I_{rd}) - \frac{f \Omega + T_L}{J} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{sd} \\ U_{sq} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

où :

$T_r = \frac{L_r}{R_r}$ est la constante de temps rotorique, $\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$ est le coefficient de dispersion

magnétique, $k = \frac{L_m}{\sigma L_s L_r}$, $\gamma = \frac{1}{\sigma L_s} \left(R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2} \right)$.

5.3 Commande prédictive non linéaire cascade d'une machine asynchrone

Pour la commande non linéaire en tension, nous utilisons le modèle dans le repère (α, β) obtenu à partir du modèle (5-9) en prenant $\omega_s = 0$ et $\omega = p \Omega$. Le système d'équations de la machine asynchrone dont le référentiel est lié au stator, s'explicite sous forme condensée :

$$\dot{x} = f(x) + g u \quad (5.10)$$

où :

$$f(x) = \begin{bmatrix} -\gamma x_1 + \frac{k}{T_r} x_3 + p k x_4 x_5 \\ -\gamma x_2 - p k x_3 x_5 + \frac{k}{T_r} x_4 \\ \frac{L_m}{T_r} x_1 - \frac{1}{T_r} x_3 - p x_4 x_5 \\ \frac{L_m}{T_r} x_2 + p x_3 x_5 - \frac{1}{T_r} x_4 \\ p \frac{L_m}{J L_r} (x_2 x_3 - x_1 x_4) - \frac{f}{J} x_5 - \frac{T_L}{J} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } u = \begin{bmatrix} U_{s\alpha} & U_{s\beta} \end{bmatrix}^T, \quad x(t) = \begin{bmatrix} I_{s\alpha} & I_{s\beta} & \phi_{s\alpha} & \phi_{s\beta} & \Omega \end{bmatrix}^T.$$

On associe à ce système non linéaire les sorties suivantes :

$$- \text{ Le couple électromagnétique : } y_1(t) = h_1(x) = p \frac{L_m}{L_r} (x_2 x_3 - x_1 x_4). \quad (5.11)$$

$$- \text{ Le flux rotorique : } y_2(t) = h_2(x) = x_3^2 + x_4^2 = \phi_r^2. \quad (5.12)$$

5. 3. 1 Commande prédictive cascade à un pas [HED-5]

Le problème consiste à élaborer les tensions de commande $U_{s\alpha}$ et $U_{s\beta}$ qui font coïncider la sortie $y(t)$ du système (flux et le couple) avec une trajectoire de référence $y_{ref}(t)$ (y_{ref1} , y_{ref2}) à l'instant $(t+h)$. Ainsi donc, l'erreur de poursuite future est donnée par :

$$e(t+h) = y(t+h) - y_{ref}(t+h).$$

En utilisant le développement de Taylor d'ordre ($r_1=1$ et $r_2=2$) de $e(t+h)$, on obtient :

$$e(t+h) = e(t) + V_y(x,t) - d(t,h) + \Lambda(h)W(x)u \quad (5.13)$$

où

$$W(x) = \begin{bmatrix} L_{g1} h_1 & L_{g2} h_1 \\ L_{g2} L_f h_2 & L_{g2} L_f h_2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda(h) = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{2} \end{bmatrix}, \quad V_y(x,t) = \begin{bmatrix} h L_f h_1 \\ h L_f h_2 + \frac{h^2}{2} L_f^2 h_2 \end{bmatrix},$$

$$d(t,h) = \begin{bmatrix} h \dot{y}_{ref1} \\ h \dot{y}_{ref2} + \frac{h^2}{2} \ddot{y}_{ref2} \end{bmatrix}.$$

La commande optimale prédictive qui minimise le coût quadratique :

$$J_1(y, y_{ref}, Q_1, R_1) = \frac{1}{2} e(t+h)^T Q_1 e(t+h) + \frac{1}{2} u^T(t) R_1 u(t) \quad (5.14)$$

est

$$u = -\left(\Lambda(h)W(x)^T Q_1 \Lambda(h)W(x) + R_1 \right)^{-1} \Lambda(h)W(x)^T \left[e(t) + V_y(x, h) - d(t, h) \right] \quad (5.15)$$

où

$Q_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est une matrice définie positive et $R_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est une matrice semi-définie positive.

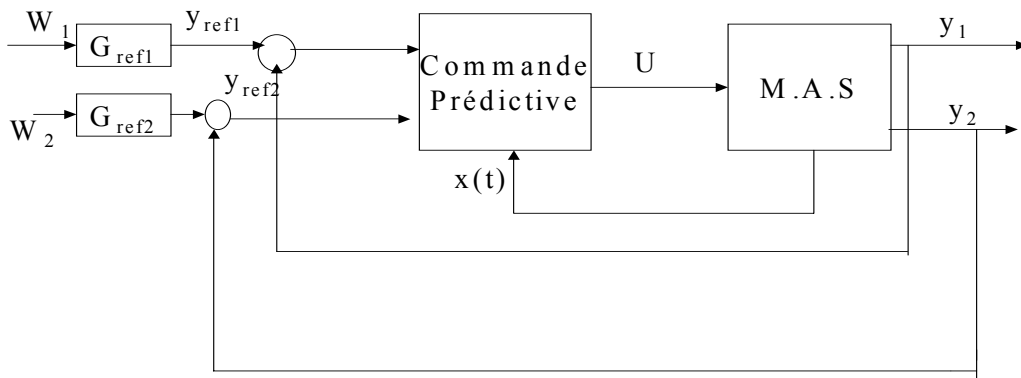


Figure 5.2 *Commande prédictive à un pas du flux et du couple.*

Structure cascade [BOU-2, MAA-2, PAN]

Il faut noter que les machines asynchrones sont très utilisées dans la conduite de processus qui nécessitent des variations à des différents paliers de consignes. Ainsi, pour commander la vitesse $\Omega(t)$ de la machine à induction par la commande prédictive non linéaire, nous allons utiliser l'équation mécanique :

$$\dot{x}_5 = p \frac{L_m}{J L_r} (x_2 x_3 - x_1 x_4) - \frac{f}{J} x_5. \quad (5.16)$$

En utilisant l'opérateur de Laplace $s = \frac{d}{dt}$, l'équation (5.16) peut être réécrite :

$$(J s + f) x_5(s) = y_1(s) \quad \text{ou} \quad \Omega(s) = \frac{1}{J s + f} y_1(s).$$

Donc, on peut agir sur la vitesse à partir du couple y_1 .

Le schéma illustre une architecture de commande en cascade à deux étages. Le premier étage est composé d'un contrôleur $C. P-2$ et d'un processus $C. P-1$. Le second étage est composé d'un Système Interne et d'un Système Externe . Les signaux de commande sont W_1 , W_2 , W_3 , U , y_1 , y_2 , et le signal de sortie est $\Omega(t)$.

Avec $U(t)$ le signal de commande résultant appliqué à la machine asynchrone, W_3 la consigne de vitesse $\Omega(t)$, W_2 la consigne interne de flux y_2 et W_1 consigne interne provenant de la minimisation du critère J_2 de la commande CP-2. Les deux boucles impliquent la synthèse de deux lois de commande et par conséquent la minimisation de deux critères quadratiques. Il est alors nécessaire de définir trois modèles de référence correspondant aux systèmes interne et externe :

- Pour la vitesse $\Omega(t)$: $\Omega_{ref}(s) = \frac{\omega_v^2}{s^2 + 2\xi_v \omega_v s + \omega_v^2} W_3(s)$ (5.19)

120

$$\Omega(s) = \frac{1}{Js + f} y_I(s) \text{ comme } y_I(s) \approx y_{ref I}(s) \Rightarrow \Omega(s) = \frac{\omega_0}{(Js + f)(s + \omega_0)} W_I(s) \quad (5.20)$$

L'erreur de poursuite de la vitesse à l'instant (t+h) est alors :

$$e_v(t+h) = \Omega(t+h) - \Omega_{ref}(t+h) = e_v(t) + Z_v(t,h) - d_v(t,h) + \alpha(h)W_I \quad (5.21)$$

où

$$e_v(t) = \Omega(t) - \Omega_{ref}(t), \quad \alpha(h) = \frac{h^2}{2J} \omega_0, \quad d_v(t,h) = h \dot{\Omega}_{ref} + \frac{h^2}{2} \ddot{\Omega}_{ref},$$

$$Z_v(t,h) = \frac{hf}{J} \left(\frac{hf}{2J} - 1 \right) \Omega(t) + \frac{h}{J} \left(1 - \frac{h}{J} \left(\frac{f}{J} + \omega_0 \right) \right) y_{ref I}(t).$$

La fonction coût à minimiser pour la boucle interne est définie comme suit :

$$J_I(y, y_{ref}, Q_I, R_I, u) = \frac{1}{2} \|y(t+h) - y_{ref}(t+h)\|_{Q_I}^2 + \frac{1}{2} \|U\|_{R_I}^2 \quad (5.22)$$

où

$Q_I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est une matrice définie positive, $R_I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est une matrice semi-définie positive et h est l'horizon de prédiction de la sortie y(t).

La fonction coût à minimiser pour la boucle externe est :

$$J_2(\Omega, \Omega_{ref}, q_I, r_I, W_I) = \frac{1}{2} \|\Omega(t+h_v) - \Omega_{ref}(t+h_v)\|_{q_I}^2 + \frac{1}{2} \|W_I\|_{r_I}^2 \quad (5.23)$$

où

q_I est un scalaire positif non nul, r_I est un scalaire positif et h_v est l'horizon de prédiction de la vitesse mécanique.

A partir de la minimisation des indices de performances J_1 et J_2 , on obtient :

- Pour la boucle externe, les commandes résultantes :

$$\diamond W_2 = \phi_{norm},$$

$$\diamond W_I(t) = q_I \alpha(h_v) \frac{e_v(t) + Z_v(h_v) - d_v(t, h_v)}{q_I \alpha^2(h_v) + r_I} \quad (5.24)$$

- Pour la boucle interne (équation 5.15) :

$$\diamond u(t) = - \left((A(h)W(x))^T Q A(h)W(x) + R \right)^{-1} (A(h)W(x))^T [e(t) + V_y(x, h) - d(t, h)].$$

Les performances de poursuite :

- Pour la boucle externe : En dérivant la vitesse $\Omega(t)$ deux fois, et en utilisant la commande $W_1(t)$ (équation 5.24) avec $r_1=0$, on peut montrer que la dynamique de l'erreur de poursuite de vitesse est :

$$\ddot{e}_v + \frac{2}{h_v} \dot{e}_v + \frac{2}{h_v^2} e_v = 0 \quad (5.26)$$

- Pour la boucle interne : on suppose que la matrice $\left((A(h)W(x))^T Q A(h)W(x) \right)$ est non singulière. En dérivant la sortie y_1 une fois et la sortie y_2 deux fois et en utilisant la commande (5.15) avec $R_1=0$, on aboutit aux équations suivantes :

$$\blacklozenge \text{ Pour le couple : } \dot{e}_l + \frac{1}{h} e_l = 0 \quad (5.27)$$

$$\blacklozenge \text{ Pour le flux : } \ddot{e}_2 + \frac{2}{h} \dot{e}_2 + \frac{2}{h^2} e_2 = 0 \quad (5.28)$$

Les dynamiques de poursuite des variables à contrôler sont linéaires. Par conséquent, la commande prédictive à un pas linéarise le modèle non linéaire de la machine asynchrone et on peut facilement vérifier la stabilité asymptotique du système global en utilisant le critère de Routh.

5. 3. 2 Commande prédictive cascade à horizon fini [HED-6]

Comme nous l'avons vu, dans les deux chapitres précédents, les performances de poursuite obtenues par la commande à un pas peuvent être améliorées en minimisant le critère quadratique J_1 le long de l'intervalle $[0, h]$ pour la sortie $y(t)$ et le critère J_2 le long de l'intervalle $[0, h_v]$ pour la vitesse $\Omega(t)$.

Pour garder la structure cascade, les deux critères quadratiques à minimiser s'écrivent :

- Pour la boucle externe :

$$J_v''(\Omega, \Omega_{ref}, q_2, r_2, W_l) = \frac{1}{2} \int_0^{h_v} q_2 e_v(t+T)^2 dT + \frac{1}{2} \int_0^{h_c} r_2 W_l^2(t+T) dT \quad (5.29)$$

où

q_2 et r_2 sont des scalaires positifs,

h_v et h_c sont les horizons de prédiction de la vitesse et de la commande respectivement.

- Pour la boucle interne :

$$J''(y, y_{ref}, Q_2, R_2, U) = \frac{1}{2} \int_0^h \|e(t+T)\|_{Q_2}^2 dT + \frac{1}{2} \int_0^{h_c} \|U(t+T)\|_{R_2}^2 dT \quad (5.30)$$

où

$Q_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est une matrice définie positive, $R_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est une matrice semi-définie positive, h et h_c sont les horizons de prédiction de la sortie et de la commande respectivement.

Elaboration des commandes :

En supposant que les signaux de commande W_1 et U sont constants le long de l'intervalle $[0, h_c]$, donc $W_1(t+T) \approx W_1(t)$ et $U(t+T) \approx U(t)$ pour $0 \leq T \leq h_c$. Le calcul de la commande prédictive de chaque boucle se fait par minimisation des critères J'_v et J'' en utilisant les modèles prédictifs de l'erreur de poursuite future de sortie (5.13) et de vitesse (5.21). Ainsi, on obtient :

- Pour la boucle externe :

$$\begin{aligned} \blacklozenge W_2(t) &= \phi_{norm}, \\ \blacklozenge W_1(t) &= -q_2 \frac{\beta(h_v) e_v(t) + \gamma(h_v)}{q_2 \lambda(h_v) + r_2 h_c} \end{aligned} \quad (5.31)$$

où

$$\beta(h_v) = \int_0^{h_v} \alpha(T) dT, \quad \gamma(h_v) = \int_0^{h_v} (Z_v(t, T) - d_v(t, T)) \alpha(T) dT, \quad \lambda(h_v) = \int_0^{h_v} \alpha^2(T) dT$$

avec

$$\alpha(T) = \frac{T^2 \omega_0}{2J}, \quad e_v(t) = \Omega(t) - \Omega_{ref}(t), \quad d_v(t, T) = T \dot{\Omega}_{ref} + \frac{T^2}{2} \ddot{\Omega}_{ref},$$

$$Z_v(t, T) = \frac{Tf}{J} \left(\frac{Tf}{2J} - I \right) \Omega(t) + \frac{T}{J} \left(I - \frac{T}{J} \left(\frac{f}{J} + \omega_0 \right) \right) y_{ref1}(t).$$

- Pour la boucle interne :

$$\blacklozenge U(t) = - \left(W(x)^T M(h) W(x) + h_c R_2 \right)^{-1} W^T(x) (K(h) e(t) + T(x, h)) \quad (5.32)$$

où

$$M(h) = \int_0^h \Lambda(T) Q_2 \Lambda(T) dT, \quad K(h) = \int_0^h \Lambda(T) Q_2 dT,$$

$$T(x, h) = \int_0^h \Lambda(T) Q_2 (V_y(x, T) - d(t, T)) dT$$

Performance de poursuite :

- Boucle interne : Si le critère (5.29) est minimisé sans pondération sur la commande ($r_2=0$), alors la commande optimale résultante est :

$$W_I(t) = -\frac{1}{\lambda(h_v)}(\beta(h_v)e_v(t) + \gamma(h_v)). \quad (5.33)$$

En dérivant la vitesse mécanique $\Omega(t)$ deux fois, et en substituant la commande (5.33) dans l'équation résultante, on obtient la dynamique de vitesse de la machine asynchrone comme suit :

$$\ddot{e}_v + \frac{5}{2h_v}\dot{e}_v + \frac{10}{3h_v^2}e_v = 0. \quad (5.34)$$

- Boucle externe : Ici également, la pondération sur la commande est levée en posant $R_2=0$ et on suppose que la matrice $W(x)$ est non singulière. La commande optimale (5.32) devient :

$$U(t) = -W(x)^{-1}M(h)^{-1}(K(h)e(t) + T(x, h)). \quad (5.35)$$

En dérivant la sortie y_1 une fois, la sortie y_2 deux fois et en utilisant la commande (5.35), alors on peut montrer que la dynamique de poursuite est régie par les équations suivantes :

$$\blacklozenge \text{ Pour le couple : } \dot{e}_I + \frac{3}{2h}e_I = 0. \quad (5.36)$$

$$\blacklozenge \text{ Pour le flux : } \ddot{e}_2 + \frac{5}{2h}\dot{e}_2 + \frac{10}{3h^2}e_2 = 0. \quad (5.37)$$

Les dynamiques de l'erreur de poursuite du flux, du couple et de la vitesse sont linéaires et invariantes dans le temps. Pour des horizons de prédiction positifs, on peut montrer grâce au critère de Routh que ces dynamiques sont asymptotiquement stables.

5. 3. 3 Commande prédictive cascade avec contrainte terminale [HED-9]

Notre objectif dans cette section est d'intégrer les deux méthodes vues précédemment (§5.3.1 et §5.3.2) afin d'augmenter le nombre de paramètres de réglage et qui va permettre d'améliorer davantage les performances de poursuite du flux, du couple et de vitesse. Le critère de cette structure de commande cascade est la fonctionnelle suivante :

- Boucle externe :

$$J_v''(\Omega, \Omega_{ref}, q_3, q_{3i}, r_3) = \frac{1}{2} \|e_v(t+h_v)\|_{q_3}^2 + \frac{1}{2} \int_0^{h_v} \|e_v(t+T)\|_{q_{3i}}^2 dT + \frac{1}{2} \int_0^{h_c} \|W_I(t+T)\|_{r_3}^2 dT \quad (5.38)$$

où q_3 , q_{3i} et r_3 sont des scalaires positifs, h_v est l'horizon de prédiction de la vitesse et h_c est l'horizon de prédiction de commande.

- Boucle interne :

$$J''(y, y_{ref}, Q_3, Q_{3i}, R_3) = \frac{1}{2} \|e(t+h)\|_{Q_3}^2 + \frac{1}{2} \int_0^h \|e(t+T)\|_{Q_{3i}}^2 dT + \frac{1}{2} \int_0^{h_c} \|U(t+T)\|_{R_3}^2 dT \quad (5.39)$$

$$\text{où } e_v(t+T) = \Omega(t+T) - \Omega_{ref}(t+T), \quad e(t+T) = \begin{bmatrix} e_1(t+T) \\ e_2(t+T) \end{bmatrix} = y(t+T) - y_{ref}(t+T),$$

$$\text{avec } y(t+T) = \begin{bmatrix} y_1(t+T) & y_2(t+T) \end{bmatrix}^T \text{ et } y_{ref}(t+T) = \begin{bmatrix} y_{ref1}(t+T) & y_{ref2}(t+T) \end{bmatrix}^T.$$

h est l'horizon de prédiction du flux et couple, et h_c est l'horizon de prédiction de commande.

$Q_3 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $Q_{3i} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sont des matrices définies positives, $R_3 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est une matrice semi-définie positive.

Ici également on suppose que les signaux de commande W_1 et U sont constants le long de l'intervalle $[0, h_c]$ et en tenant compte des équations (5.13, 5.20 et 5.21), la solution d'optimisation des deux critères J_v'' et J'' est donnée par :

- Pour la boucle externe :

$$\blacklozenge W_2 = \phi_{norm},$$

$$\blacklozenge W_I = - \frac{\left(q_3 + q_{3i} \frac{h_v}{3} \right) \alpha(h_v) e_v(t) + \gamma(\Omega, h_v) - \beta(\Omega_{ref}, h_v)}{\left(q_3 + q_{3i} \frac{h_v}{5} \right) \alpha^2(h_v) + r_3 h_c}, \quad (5.40)$$

où

$$\gamma(\Omega, h_v) = q_3 Z(t, h_v) \alpha(h_v) + q_{3i} \int_0^{h_v} Z(t, T) \alpha(T) dT$$

$$\beta(\Omega_{ref}, h_v) = q_3 d_v(t, h_v) \alpha(h_v) + q_{3i} \int_0^{h_v} d_v(t, T) \alpha(T) dT.$$

- Pour la boucle interne :

$$\blacklozenge U(t) = - \left(W(x)^T P(h) W(x) + h_c R_3 \right)^{-1} W(x)^T (G(h) e(t) + H(x, h) - D(t, h)), \quad (5.41)$$

où

$$P(h) = A^T(h)Q_3 A(h) + \int_0^h A(T)^T Q_{3i} A(T) dT, \quad G(h) = A^T(h)Q_3 + \int_0^h A^T(T)Q_{3i} dT,$$

$$H(x, h) = A^T(h)Q_3 V_y(x, h) + \int_0^h A^T(T)Q_{3i} V_y(x, T) dT,$$

$$D(t, h) = A^T(h)Q_3 d(t, h) + \int_0^h A^T(T)Q_{3i} d(t, T) dT.$$

Les performances de poursuite :

- Pour la boucle externe, en remplaçant $r_3 = 0$ dans l'équation (5.40), et en dérivant la vitesse $\Omega(t)$ deux fois. On aboutit à la dynamique de poursuite de vitesse suivante :

$$\left(q_3 + q_{3i} \frac{h_v}{5} \right) \frac{h_v^2}{2} \ddot{e}_v + \left(q_3 + q_{3i} \frac{h_v}{4} \right) h_v \dot{e}_v + \left(q_3 + q_{3i} \frac{h_v}{3} \right) e_v = 0. \quad (5.42)$$

- Pour la boucle interne, on suppose que la matrice $W(x)$ est non singulière, et en posant $Q_3 = q I_2$, $Q_{3i} = q_i I_2$ et $R_3 = 0$ dans l'équation (5.41), on obtient :

$$U(t) = -W(x)^{-1} P(h)^{-1} (G(h)e(t) + H(x, h) - D(t, h))$$

Dérivons la sortie y_1 une fois, la sortie y_2 deux fois et en utilisant l'équation de commande précédente, on peut montrer que la dynamique de l'erreur de poursuite est :

$$\text{- Pour le couple : } \left(q + q_i \frac{h}{3} \right) h \dot{e}_1 + \left(q + q_i \frac{h}{2} \right) e_1 = 0 \quad (5.43)$$

$$\text{- Pour le flux : } \left(q + q_i \frac{h}{5} \right) h^2 \ddot{e}_2 + 2 \left(q + q_i \frac{h}{4} \right) h \dot{e}_2 + 2 \left(q + q_i \frac{h}{3} \right) e_2 = 0 \quad (5.44)$$

Les dynamiques de poursuite des variables à contrôler de la machine asynchrone en boucle fermée sont linéaires et invariantes dans le temps. Par conséquent, cette structure de commande conduit aussi à une linéarisation entrée-sortie du modèle non linéaire de la machine et stabilise le flux, le couple et la vitesse autour des trajectoires de références désirées.

5. 3. 4 Dynamique des zéros

Comme on vient de le voir, les trois structures de commande prédictive conduisent à une linéarisation entrée- sortie du système non linéaire (5.10, 5.11 et 5.12). La somme des degrés relatifs du couple ($r_1=1$) et du flux ($r_2=2$) est inférieure au degré $n=5$ du système (5.10). Nous

avons donc une dynamique non observable d'ordre 2. Le changement de coordonnées (difféomorphisme) suivant est effectué :

$$\begin{aligned}
 z_1 &= h_1(x) , \\
 z_2 &= h_2(x) , \\
 z_3 &= L_f h_2(x) , \\
 z_4 &= \arctan\left(\frac{\phi_{r\beta}}{\phi_{r\alpha}}\right) , \\
 z_5 &= \Omega
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

Notons qu'étant dans la configuration où $\sum_{i=1}^p r_i < n$, seules les variables z_1 , z_2 et z_3 sont fixées et les variables z_4 et z_5 sont choisies arbitrairement. Ici, l'approche suivie est celle utilisée par Boucher *et al* en considérant z_4 l'angle du flux rotorique [BOU-2].

Le système (5.10) s'exprime dans les nouvelles coordonnées :

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= L_f h_1(x) + L_g h_1(x)u , \\
 \dot{z}_2 &= L_f h_2(x) = z_3 , \\
 \dot{z}_3 &= L_f^2 h_2(x) + L_g L_f h_2(x)u , \\
 \dot{z}_4 &= p z_5 + \frac{R_r}{p} \frac{z_1}{z_2} , \\
 \dot{z}_5 &= \frac{1}{J} (z_1 - T_L - f z_5) .
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

L'application de la commande par retour d'état permet de linéariser le comportement entrée-sortie du système (5.10).

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f h_1 \\ L_f^2 h_2 \end{bmatrix} + W(x)U \quad \text{avec} \quad W(x) = \begin{bmatrix} L_{g1} h_1 & L_{g2} h_1 \\ L_{g1} L_f h_2 & L_{g2} L_f h_2 \end{bmatrix} .$$

En substituant l'équation précédente par :

$$U(t) = -W(x)^{-1} P(h)^{-1} (G(h)e(t) + H(x, h) - D(t, h))$$

Alors le comportement du couple est régi par l'équation linéaire suivante :

$$\dot{z}_1 = -\alpha_0 z_1 + \alpha_0 y_{ref1} + \dot{y}_{ref1} \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = \frac{q + q_i \frac{h}{2}}{\left(q + q_i \frac{h}{3}\right)h}.$$

Le comportement du flux est régi par la dynamique linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = -\alpha_1 z_3 - \alpha_2 z_2 + \ddot{y}_{ref2} + \alpha_1 \dot{y}_{ref2} + \alpha_2 y_{ref2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \frac{2\left(q + q_i \frac{h}{4}\right)}{\left(q + q_i \frac{h}{5}\right)h} \text{ et } \alpha_2 = \frac{2\left(q + q_i \frac{h}{3}\right)}{\left(q + q_i \frac{h}{5}\right)h^2}.$$

Les dynamiques $\dot{z}_4$ et $\dot{z}_5$ sont rendues inobservables par le retour d'état de la commande prédictive. Il faut alors montrer que la dynamique de ces zéros est stable [ISI]. En choisissant, le point d'équilibre :

$$Z^0 = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{norm} & 0 & z_4^o & z_5^o \end{bmatrix}^T$$

La dynamique des zéros devient :

$$\begin{cases} \dot{z}_4 = p z_5 \\ \dot{z}_5 = \frac{1}{J}(-T_L - f z_5) \end{cases} \quad (5.47)$$

où z_4 est l'angle du flux rotorique compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. La deuxième équation du système

(5.47) est une dynamique linéaire du premier ordre stable (pôle $-\frac{f}{J}$). Par conséquent, la dynamique des zéros (z_4 et z_5) est stable.

Remarque : L'inversion de la matrice $W(x)$ peut en théorie faire apparaître un problème car le déterminant de la matrice $W(x)$ s'exprime en fonction du flux rotorique, $\det W(x) = -2pk^2 R_r (\phi_{r\alpha}^2 + \phi_{r\beta}^2)$. Si ϕ_r^2 est non nul alors la matrice $W(x)$ est inversible. La singularité apparaît donc au démarrage. Cependant, celle-ci peut être levée en utilisant un observateur de flux initialisé à une petite valeur $\hat{\phi}_r(0) \neq 0$.

5. 3. 5 Observateur de flux – Filtre de KALMAN

La commande prédictive non linéaire développée dans cette thèse est un bouclage d'état. Nous avons choisi comme composantes de l'état : les deux composantes du courant statorique, les deux composantes du flux rotorique et la vitesse rotorique. Les courants

statoriques et la vitesse mécanique sont mesurables, les composantes du flux ne le sont pas pour des raisons technologiques. Par conséquent, pour réaliser la commande prédictive non linéaire, l'observateur d'état s'avère nécessaire. L'adoption d'une approche déterministe pour l'estimation de l'état de la machine asynchrone suppose une connaissance exacte de son modèle [ATK, BEL, DJE-1]. Cette approche permet de négliger également les notions d'incertitudes paramétriques et des fluctuations aléatoires. Or toute observation physique est perturbée par des signaux parasites qui ont des causes diverses internes ou externes aux dispositifs de mesures.

Quand les bruits sont faibles et quand les paramètres rotorique et statorique ne varient pas lors du fonctionnement de la machine, l'approche déterministe s'avère suffisante [VER]. En pratique, ce n'est pas le cas, puisque lors du fonctionnement de la machine asynchrone, les résistances rotorique et statorique varient en fonction de la température et peuvent dépasser 100% de la valeur nominale. En plus, des variations des inductances, les mesures du courant statorique et de la vitesse mécanique sont bruitées [PIE] d'où l'approche stochastique adoptée dans ce chapitre. En effet, elle est plus générale et on peut prendre en compte les incertitudes sur le système et les bruits de mesure. Dans la littérature, le terme d'observateur d'état est réservé pour une estimation d'état déterministe et le filtre pour le cas stochastique. Ainsi donc, le filtre de Kalman [SAL] sera utilisé pour estimer l'état de la machine asynchrone.

Le développement d'un observateur peut être effectué à partir de différents modèles. Dans notre cas, le modèle d'état avec flux statorique et rotorique est utilisé. L'équation d'état pour l'observation du système s'écrit alors de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\Omega) x(t) + BU(t) + b_{rs}(t) \\ y(t) = C x(t) + b_{rm}(t) \end{cases} \quad (5.48)$$

où

$x(t) = \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha} & \phi_{s\beta} & \phi_{r\alpha} & \phi_{r\beta} \end{bmatrix}^T$ est le vecteur d'état ,

$U(t) = \begin{bmatrix} u_{s\alpha} & u_{s\beta} \end{bmatrix}^T$ est le vecteur de commande ,

$y(t) = \begin{bmatrix} I_{s\alpha} & I_{s\beta} \end{bmatrix}^T$ est le vecteur de mesure.

avec

$$A(\Omega) = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & k R_s & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & k R_s \\ k R_r & 0 & -\beta & -p\Omega \\ 0 & k R_r & p\Omega & -\beta \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 & -k & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} & 0 & -k \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \frac{R_s}{\sigma L_s}, \quad \beta = \frac{R_r}{\sigma L_r} = \frac{1}{\sigma T_r}, \quad k = \frac{L_r}{R_r}.$$

Les vecteurs $b_{rs}(t)$ et $b_{rm}(t)$ sont donc le bruit du système et le bruit de mesure, qui admettent les propriétés statistiques suivantes :

$$\begin{aligned} - E[b_{rs}(t)] &= 0, \quad E[b_{rm}(t)] = 0, \quad E[b_{rm}(t)b_{rs}^T(t)] = 0, \\ - E[b_{rs}(t)b_{rs}^T(t)] &= Q_o(t)\delta(t-\tau), \quad E[b_{rm}(t)b_{rm}^T(t)] = R_o(t)\delta(t-\tau). \end{aligned}$$

Le filtre de Kalman-Bucy est donné par les équations [BOR, SAL] suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A(\Omega)\hat{x}(t) + BU(t) + K_o(t)(y(t) - C\hat{x}(t)), \\ K_o(t) &= P(t)C^T R_o^{-1}, \\ \dot{P} &= A(\Omega)P A(\Omega)^T + Q_o - K_o(t)C P A^T(\Omega). \end{aligned} \tag{5.49}$$

5.4 Résultats de simulation

Les performances du régulateur prédictif non linéaire cascade (figure 5.3) sont évaluées en simulation. Le processus à contrôler est une machine à induction de 1.5 KW dont les paramètres sont [BOU-2]:

$$\begin{aligned} R_r &= 2.61\Omega, & R_s &= 4.287\Omega, & L_r &= 0.368H, & L_s &= 0.404H, \\ L_m &= 0.368, & J &= 0.0256\text{kgm}, & p &= 2, & f &= 0.0029. \end{aligned}$$

Les valeurs numériques des paramètres des modèles de référence sont choisies comme suit :

- La trajectoire de référence du flux : $\xi_f = 1, \omega_f = 15 \text{ rad} / s$,
- La trajectoire de référence du couple : $\omega_0 = 45 \text{ rad} / s$,
- La trajectoire de référence de la vitesse : $\xi_v = 1, \omega_v = 10 \text{ rad} / s$.

Pour qu'on puisse implémenter le filtre de Kalman sous MATLAB-SIMULINK, les équations (5.49) ont été discrétisées, et le filtre prédictif résultant a pour équations [BOR, MAA-2]:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= A_k \hat{x}_k + B_k U_k + K_k (y_k - C \hat{x}_k), \\ K_k &= A_k P_k C^T (C P_k C^T + R_k)^{-1}, \\ P_{k+1} &= A_k P_k A_k + Q_k - K_k C P_k A_k. \end{aligned} \tag{5.50}$$

où $A_k = e^{A(\Omega)T_e} = \sum_{i=0}^3 \frac{A^i(\Omega)T_e^i}{i!}$, $B_k = \int_0^{T_e} e^{A(\Omega)\tau} B d\tau \approx \sum_{i=0}^3 \frac{A^i(\Omega)T_e^{i+1}}{i!} B$,

$T_e=10^{-3}$ est la période d'échantillonnage.

$Q_k=0.1 I_4$ et $R_k=0.1 I_2$. L'observateur a été initialisé à : $\hat{x}(0) = [0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1]^T$.

L'état initial de la machine asynchrone est : $I_{s\alpha} = I_{s\beta} = \phi_{r\alpha} = \phi_{r\beta} = 0$, ainsi donc l'hypothèse que la matrice $W(x)$ est non singulière n'est pas nécessaire.

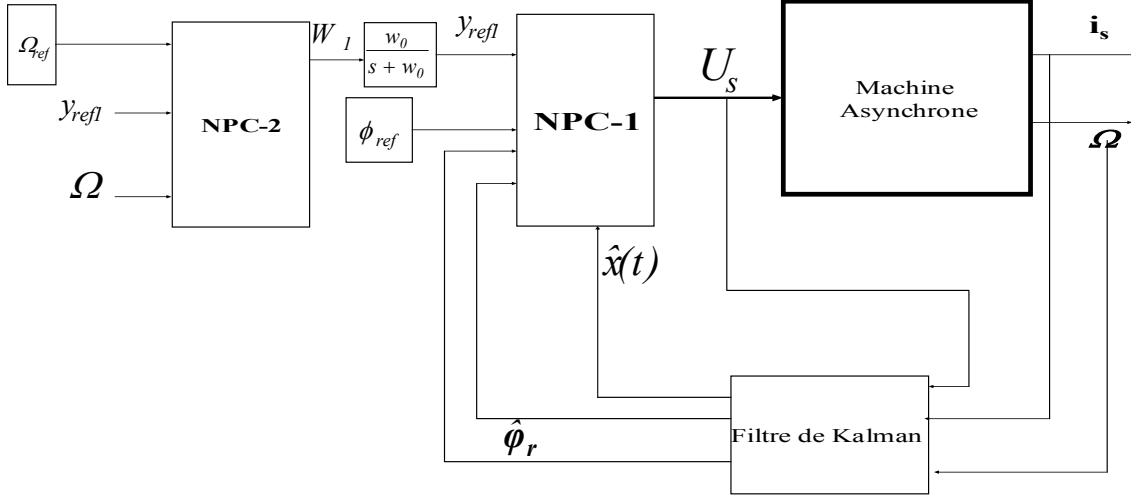


Figure 5.4 Schéma bloc de la commande prédictive non linéaire cascade.

Pour évaluer la dynamique de poursuite du flux et de la vitesse, il a été considéré que le flux doit atteindre une valeur nominale de $\phi_{nom} = 0.75 \text{ Wb}$. La vitesse mécanique doit atteindre le palier de 80 rad/s avant l'instant $t=2\text{s}$, le palier $\Omega_{ref}=140 \text{ rad/s}$ durant l'intervalle $[2\text{s}-4\text{s}]$ et revenir à la vitesse $\Omega_{ref}=70 \text{ rad/s}$ à partir de $t=4\text{s}$.

Initialement, pour chaque structure de commande des simulations ont été effectuées afin d'obtenir les valeurs optimales des paramètres de réglage. Ainsi, pour la commande prédictive à un pas (5.15 et 5.24), les paramètres de réglage obtenus sont :

$$Q_1=10^4 I_2, \quad R_1 = 10^{-3} I_2, \quad q_1= 100, \quad r_1=10^{-3}, \quad h=0.002 \text{ et } h_v = h.$$

La figure 5.5 illustre les performances de poursuite obtenues par la commande prédictive à un pas. Ces résultats montrent une bonne dynamique de poursuite des variables contrôlées (flux, couple et la vitesse).

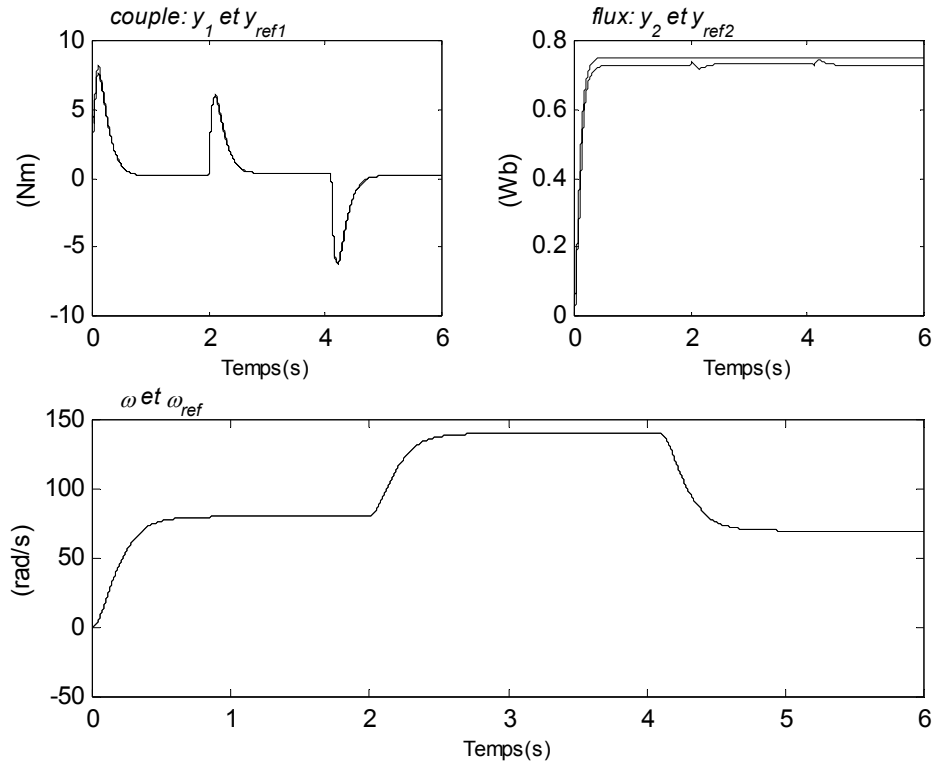


Figure 5.5 *Dynamique de poursuite du flux, couple et la vitesse.*

La figure 5.6 montre les tensions de commande ($U_{s\alpha}$, $U_{s\beta}$) ainsi que le courant I_s statorique dont la norme est à l'intérieur des limites de saturations $|I_s| < 12 A$ [BOU-2]. La figure 5.7 montre également l'erreur de poursuite de vitesse ainsi que les erreurs d'observations du flux rotorique.

Dans le cas désadapté, un couple de charge de 7 Nm est appliqué à la machine asynchrone entre $t=0.8s$ et $t=1.2s$ et à partir de 1.2s le couple de charge descend à 2Nm. En outre, on a envisagé la variation des résistances R_r et R_s qui peuvent atteindre 100% de leurs valeurs nominales. La figure 5.8 illustre ces variations ainsi que celle de la constante de temps rotorique T_r . La figure 5.9 montre les performances de poursuite obtenues. On constate que le couple y_1 suit de près le couple de référence y_{ref1} , ainsi que la convergence de la vitesse $\Omega(t)$ vers $\Omega_{ref}(t)$ avec une erreur statique due au couple de charge. Le flux y_2 évolue autour du flux de référence ϕ_{norm} . Ces résultats montrent la robustesse de la commande prédictive à un pas vis-à-vis de la charge inconnue et des variations des résistances.

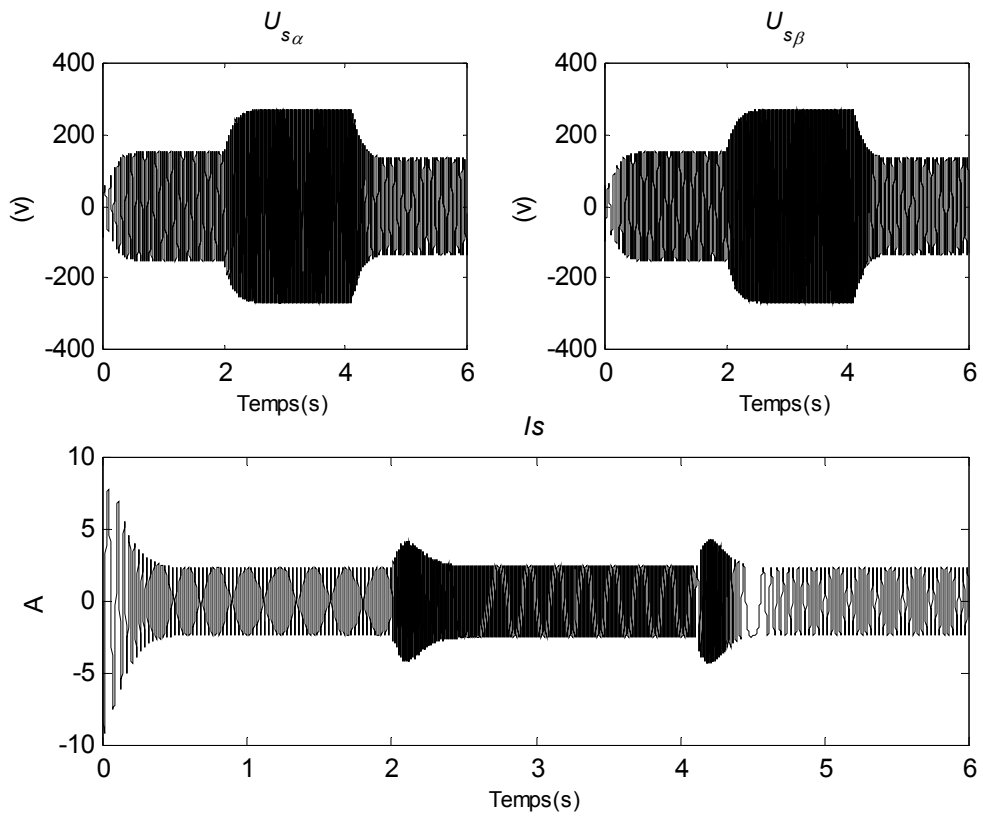


Figure 5.6 Tensions statoriques $U_{s\alpha}$, $U_{s\beta}$ et le courant statorique I_s .

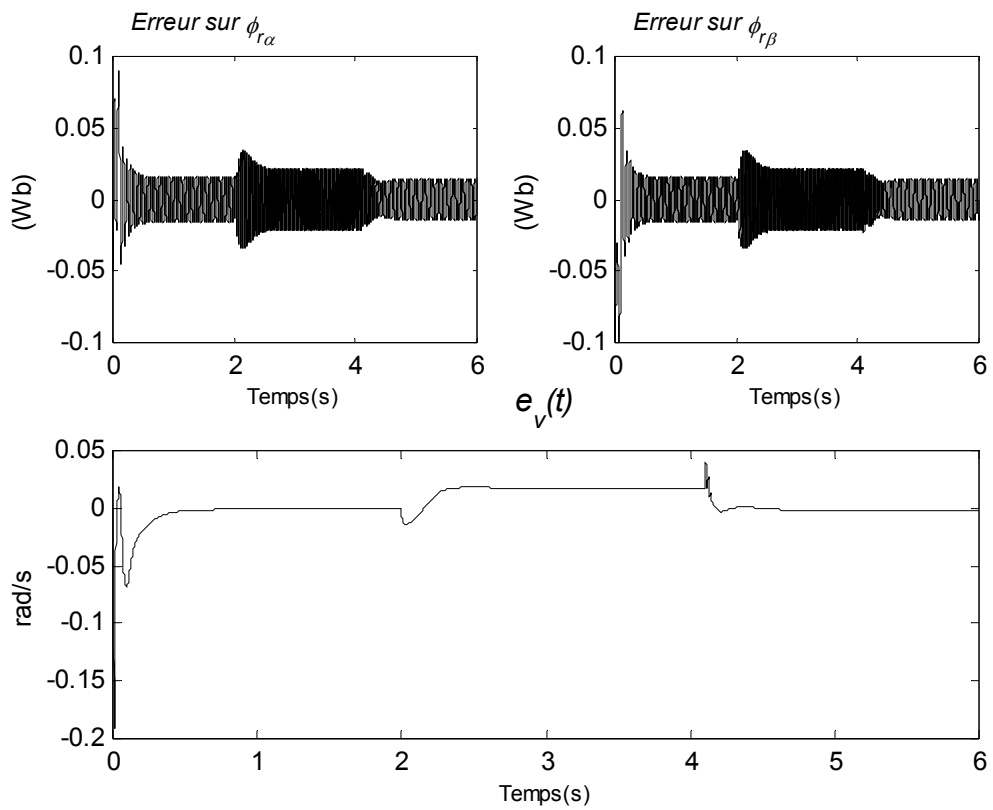


Figure 5.7 Erreurs d'estimations du flux et erreur de poursuite de vitesse.

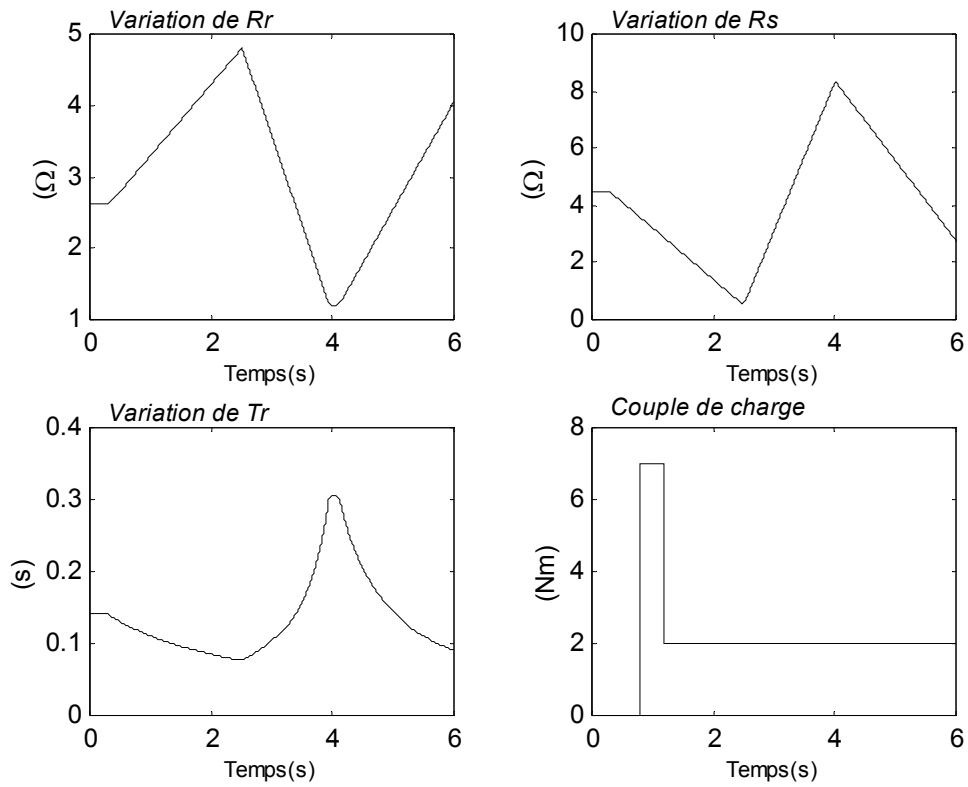


Figure 5.8 Variation des résistances (R_r , R_s), Tr et le couple de charge.

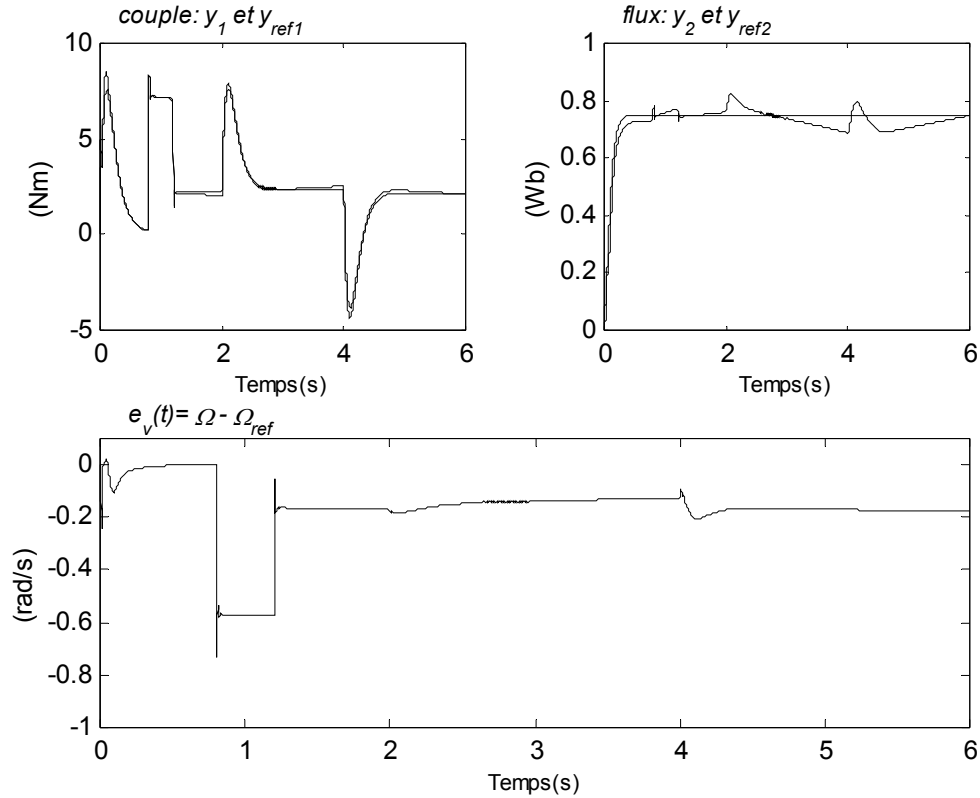


Figure 5.9 Dynamique de poursuite dans le cas désadapté.

Pour la commande prédictive à horizon fini (5.31 et 5.32), les paramètres de réglage obtenus sont : $Q_2=10^4 I_2$, $R_2=9.8 \cdot 10^{-3}$, $q_2=150$, $r_2=5 \cdot 10^{-3}$, $h_v=1.25 h$, $h_c=0.0125 h$, $h=0.002$.

Les résultats de simulation sont représentés sur la figure 5.10.

Nous constatons que les sorties y_1 et y_2 convergent vers les trajectoires de référence y_{ref1} et y_{ref2} (avec une petite erreur statique pour le flux). La vitesse $\Omega(t)$ évolue très près de la vitesse de référence $\Omega_{ref}(t)$. La figure 5.11 illustre les variations des tensions de commande, ainsi que le courant statorique I_s . On constate que le courant I_s évolue à l'intérieur des limites de saturations [BOU-2].

Dans le cas désadapté, la figure 5.12 montre une réjection de la perturbation du couple de charge et une bonne poursuite de trajectoire de vitesse lors des changements de consigne. Ici également, la commande prédictive à horizon fini est robuste vis-à-vis des perturbations de charge avec des frottements et des variations des résistances statorique et rotorique.

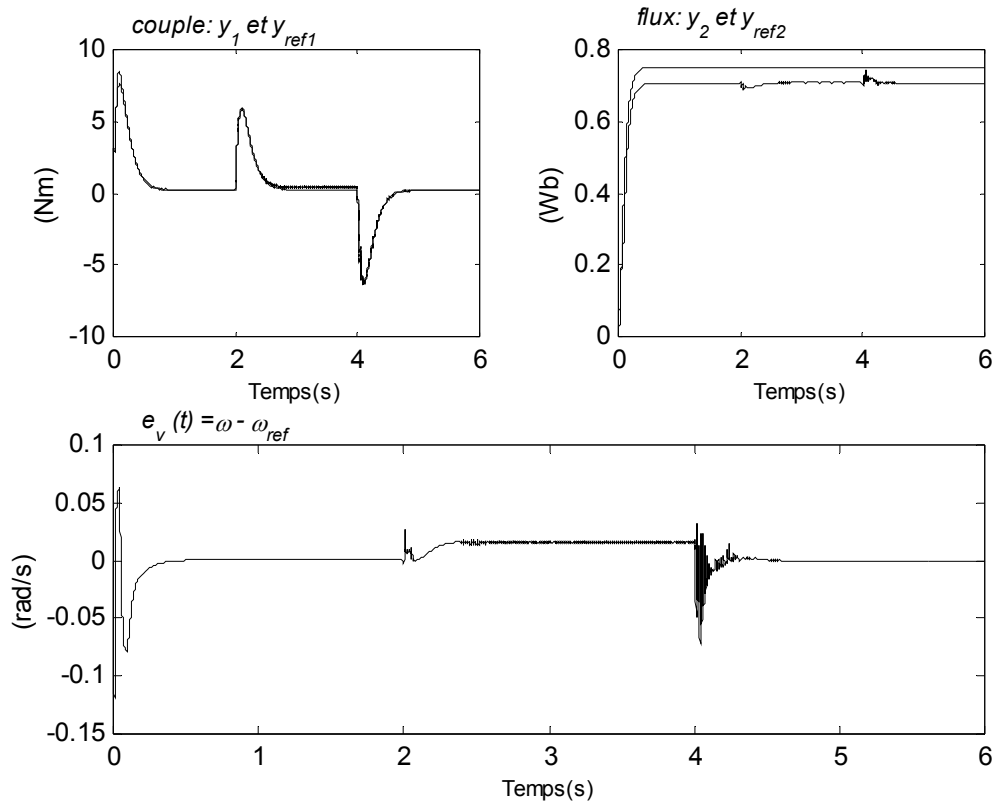


Figure 5.10 Performance de poursuite pour la commande (5.31, 5.32) - cas adapté.

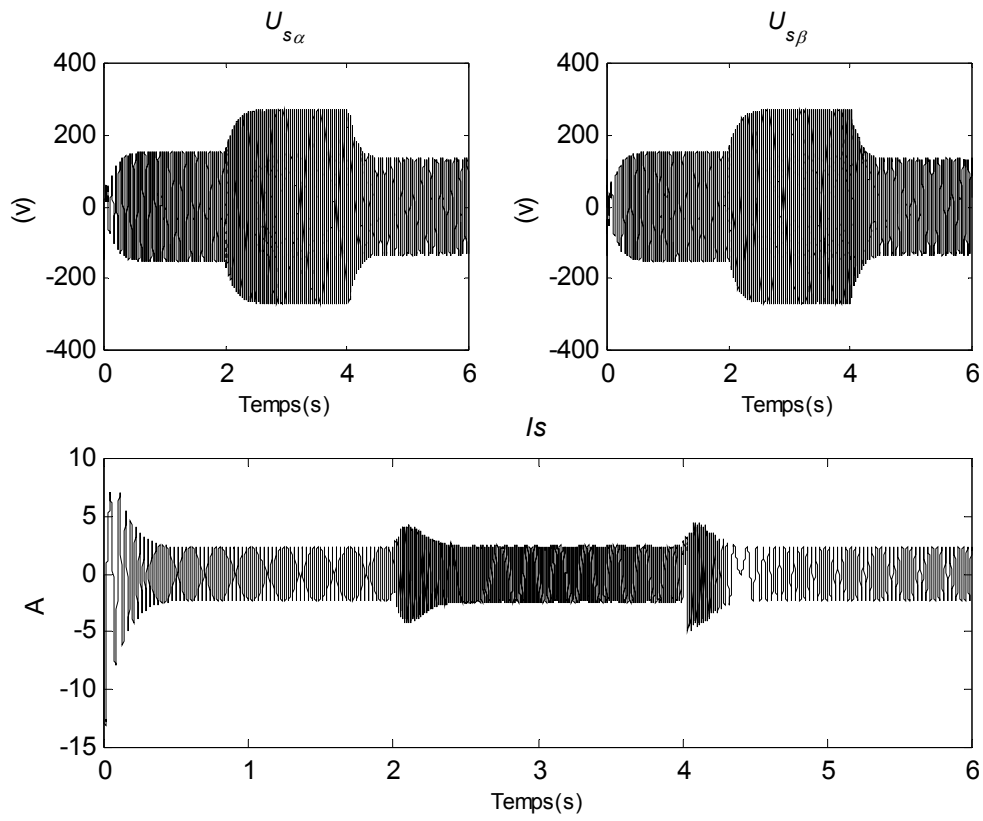


Figure 5.11 Tension d'alimentation et courant statorique.

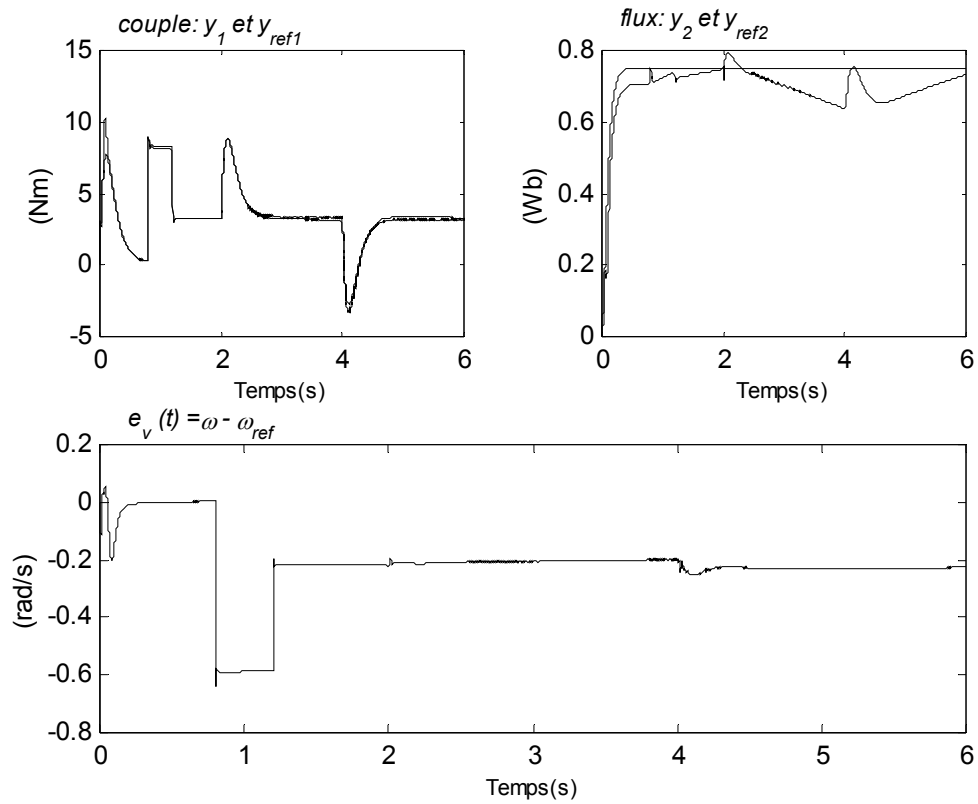


Figure 5.12 Performance de poursuite de la commande à horizon fini (cas désadapté).

Pour la commande prédictive avec contrainte terminale (5.40 et 5.41), les paramètres de réglages optimaux sont :

$$Q_3=10^2 I_2, \quad Q_{3i}=10^3 I_2, \quad R_3=10^{-3} I_2, \quad h=0.004, \quad h_v=h, \quad h_c=0.02 h, \quad q_3=1, \quad q_{3i}=10 \text{ et } r_3=10^{-3}.$$

Les résultats de simulation obtenus par cette structure de commande cascade sont illustrés sur les figures 5.13 et 5.14. La figure 5.13 montre les évolutions du couple, du flux et de l'écart de poursuite de vitesse. Ces résultats montrent que l'objectif de poursuite est bien atteint dans le cas adapté. La norme des courants statoriques est présentée sur la figure 5.14.

Dans le cas désadapté, les profils du flux, du couple et des trajectoires de références sont donnés sur la figure 5.15 ainsi que l'écart de poursuite de la vitesse. On note la robustesse de cette loi de commande vis-à-vis des incertitudes paramétriques et des perturbations de charge.

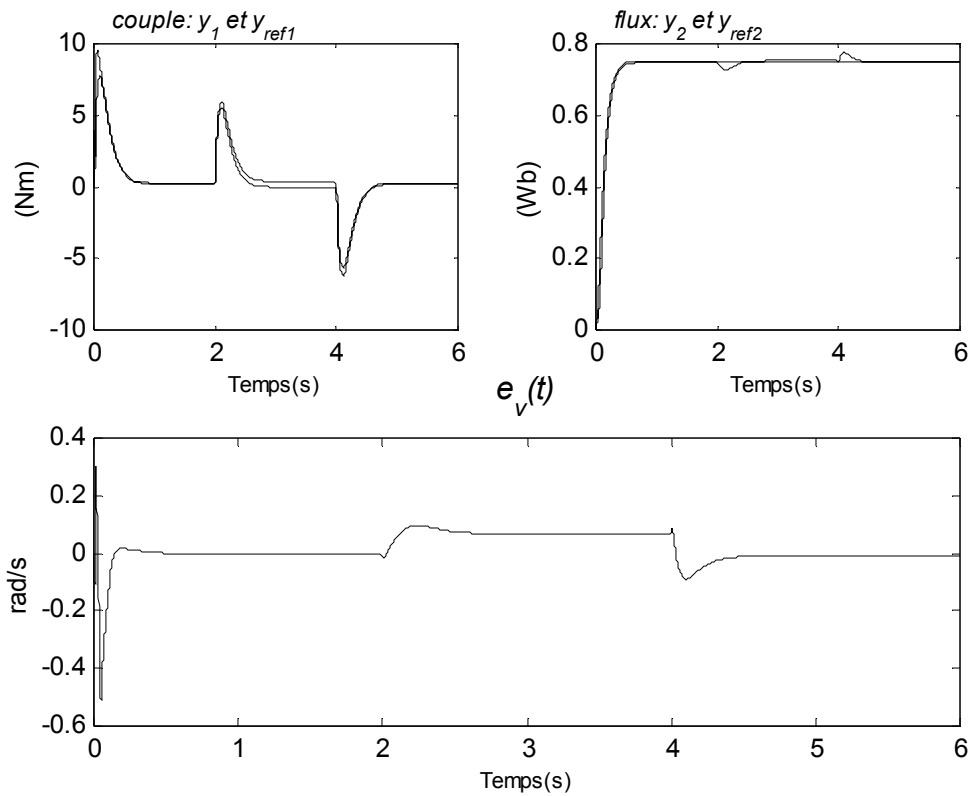


Figure 5.13 Performance de la commande (5.40,5.41) cas adapté.

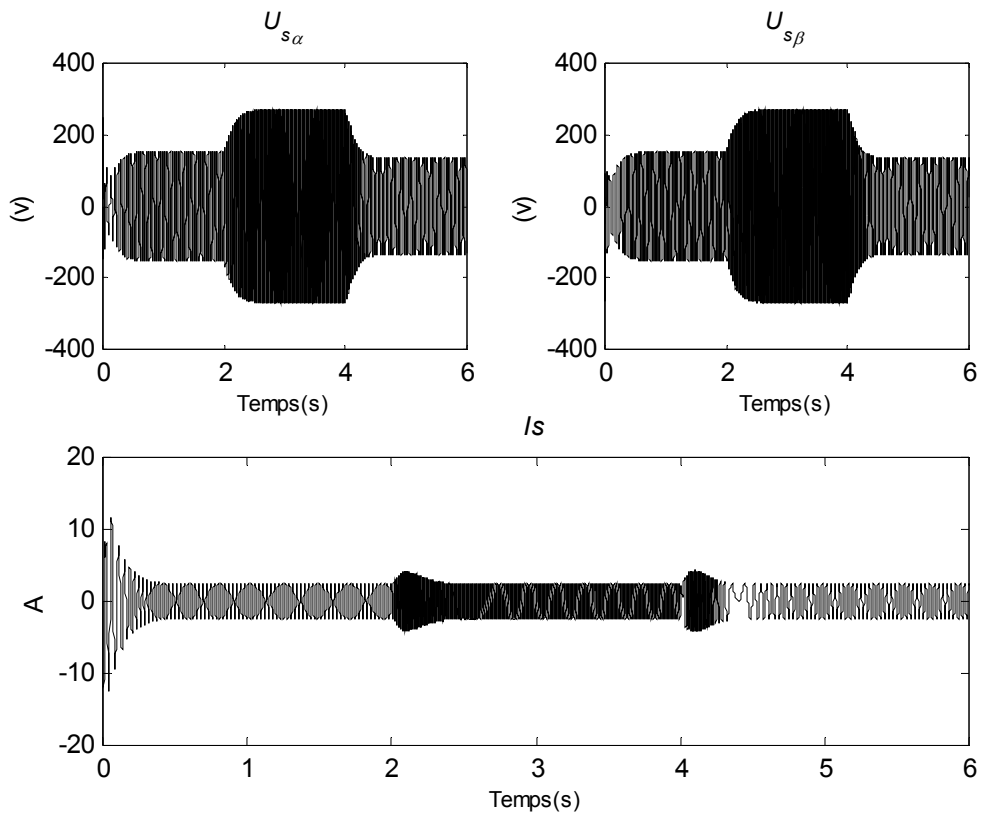


Figure 5.14 *Tension et courant statorique.*

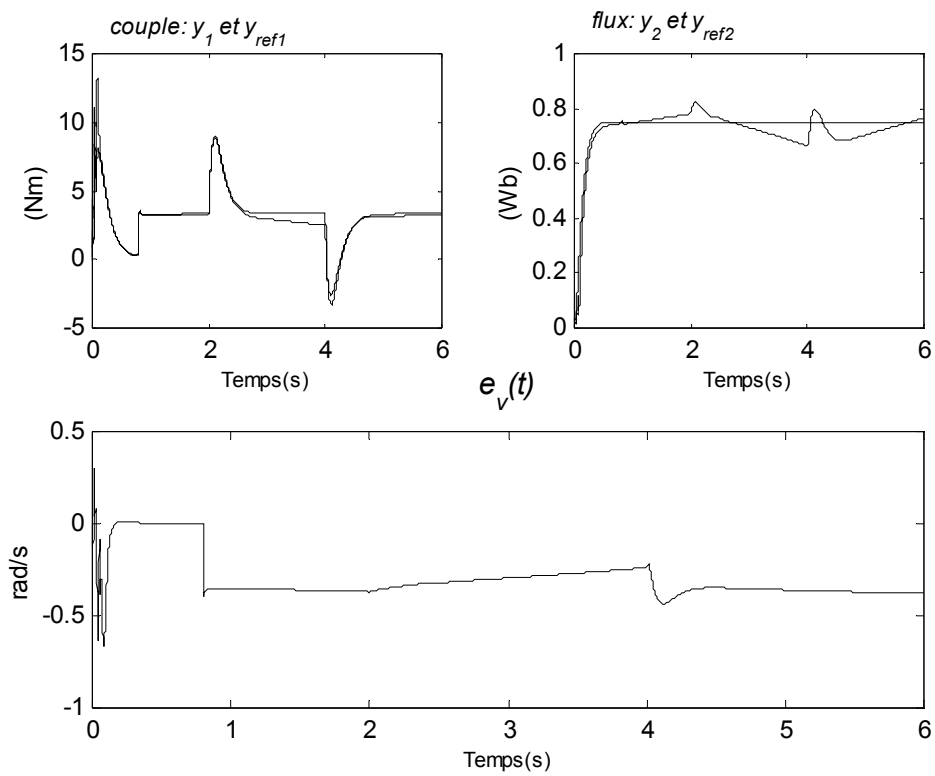


Figure 5.15 *Performances de poursuites de la commande (5.40 et 5.41) (cas désadapté).*

A partir des résultats de simulation, nous avons constaté que les trois structures de commande prédictive avec le filtre de Kalman donnent presque les mêmes performances de poursuite dans le cas désadapté. L'amélioration des performances escomptées par la deuxième et la troisième loi de commande n'a pas eu lieu dans le cas adapté, et cela est dû essentiellement à l'utilisation du filtre de Kalman discret. En effet, en utilisant l'hypothèse que l'état du système est mesurable, on a obtenu de meilleures performances de poursuite par la commande prédictive à horizon fini [HED-6] par rapport à la commande prédictive à un pas [HED-5]. Par ailleurs, on note que ces mêmes performances ont été maintenues en utilisant l'observateur à haut gain de Verghese [VER]. Cependant, ces performances se sont dégradées et le mécanisme d'instabilité est apparu dans le cas désadapté.

D'autres simulations ont été effectuées, et nous avons envisagé le cas des variations des résistances et des inductances en même temps. La figure 5.16 montre ces variations et la figure 5.17 illustre les résultats de simulation avec la première structure de commande. Nous remarquons que le flux n'est pas constant même en régime permanent. Néanmoins, nous avons noté le maintien des performances de poursuite de vitesse et du couple, et la variation du flux n'a pas affecté les performances de poursuite en vitesse.

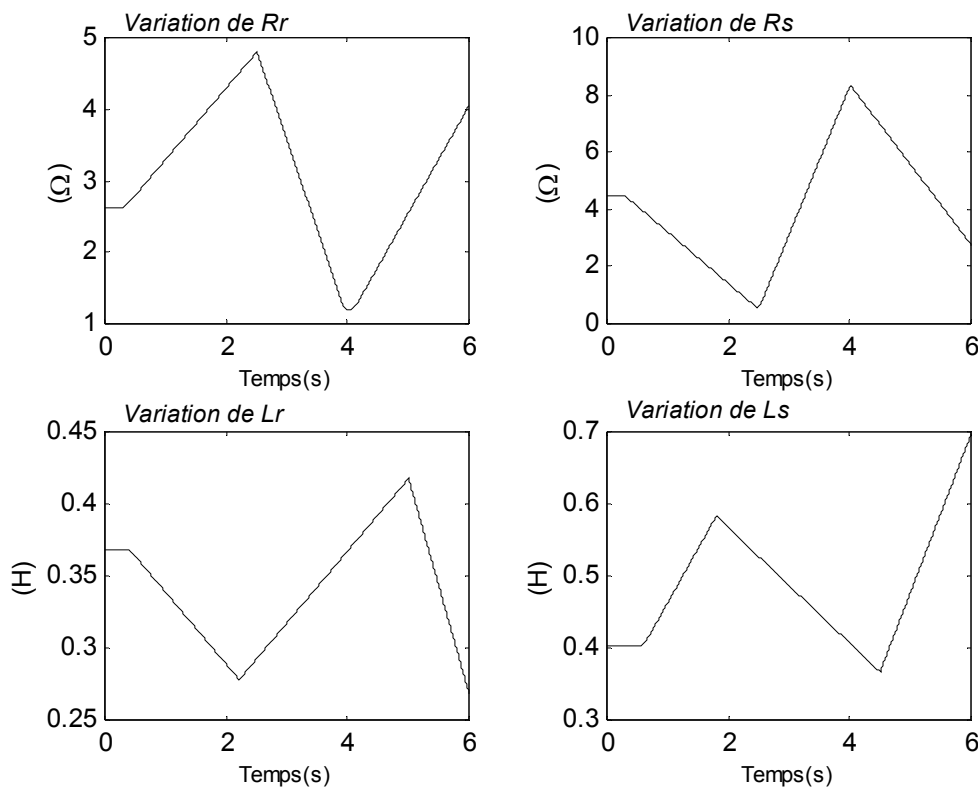


Figure 5.16 Variation des paramètres rotorique et statorique.

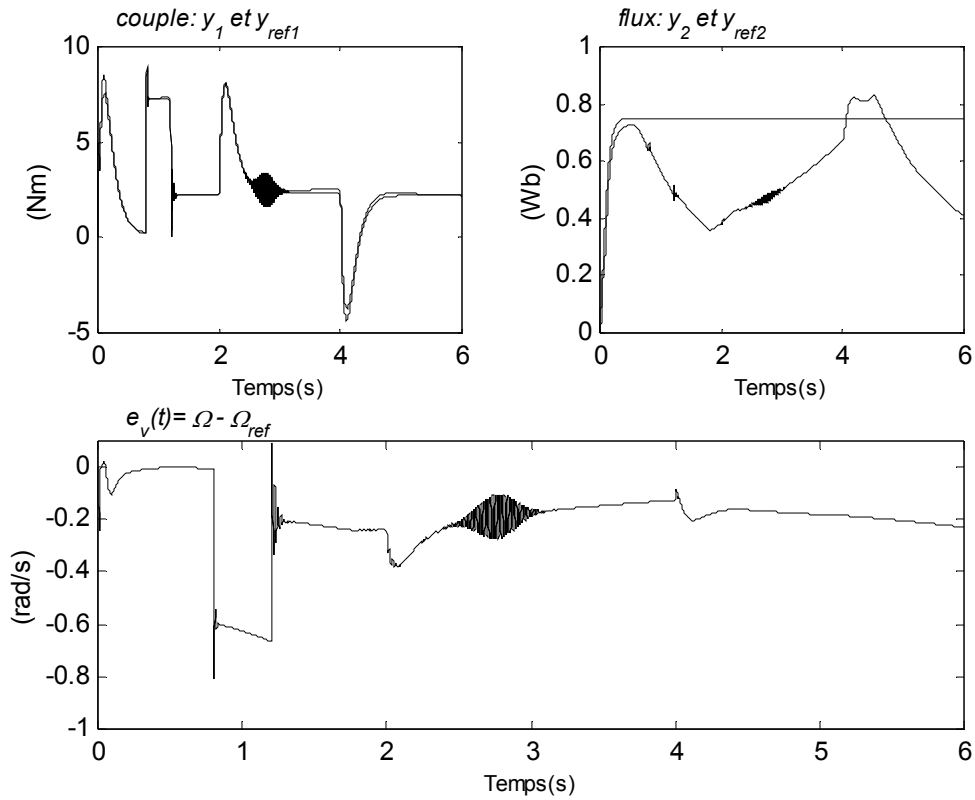


Figure 5.17 *Dynamique de poursuite dans le cas désadapté.*

Ceci nous amène à conclure que la commande prédictive non linéaire développée dans cette thèse est robuste vis-à-vis des variations des paramètres rotoriques et statoriques et l'estimation en ligne de la constante de temps rotorique ou de la résistance rotorique n'est pas nécessaire.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la commande prédictive non linéaire à suivi de trajectoire pour la commande du couple et du flux de la machine asynchrone. L'extension de cette méthode à une structure cascade nous a permis de commander la vitesse mécanique via le signal de référence du couple. Pour établir la loi de commande, nous avons minimisé le coût quadratique de l'écart de poursuite prédit à un pas, à un horizon fini et à horizon fini avec contrainte terminale. On rappelle que le développement de Taylor a été utilisé pour éviter le problème d'optimisation en ligne. Ainsi, la commande prédictive non linéaire obtenue est

définie hors ligne, d'où un temps de calcul de la boucle en temps réel considérablement réduit.

Concernant l'influence de la constante de temps rotorique et de la charge, la commande prédictive non linéaire présente une meilleure robustesse par rapport à la commande à flux orienté [VUC] où il est nécessaire d'estimer en ligne les variations de résistance rotorique. En effet, la boucle de vitesse et du couple ne sont pas affectées par une mauvaise connaissance de T_r . Quant à la boucle du flux rotorique, elle est légèrement affectée.

Par rapport aux variations des inductances et résistances, les trois structures de commande présentent les mêmes aptitudes à rejeter ces incertitudes. Néanmoins, nous avons constaté dans ce cas la variation du flux rotorique qui peut entraîner la perte du découplage. Mais les performances de poursuite en vitesse restent inchangées.

Les résultats de simulation obtenus par les trois stratégies de commande nous permettent de valider les performances de poursuite de trajectoire escomptées dans les chapitres précédents. Ainsi donc, la commande prédictive non linéaire cascade peut résoudre le problème de poursuite des trajectoires de référence du couple, du flux et de vitesse mécanique d'une machine asynchrone. L'objectif de commande est atteint avec une bonne précision. En effet, l'erreur maximale de vitesse est inférieure à 0.8 rad/s dans le cas désadapté.

Il faut noter que la dynamique du filtre de Kalman discret, utilisée pour estimer le flux rotorique, a légèrement dégradé les performances de poursuite en vitesse. En effet, une amélioration notable des performances de ces méthodes de commande a été constatée lorsqu'on a utilisé l'observateur de Verghese. Cependant, ces performances se sont dégradées en présence d'incertitudes paramétriques.

Enfin, le problème majeur de la commande prédictive non linéaire, proposée dans cette thèse, est la nécessité d'effectuer plusieurs simulations pour obtenir les valeurs numériques optimales des paramètres de réglages.

Conclusion et perspectives

Comme nous l'avons vu précédemment, nous avons développé des structures de commande originales, basées sur une stratégie prédictive non linéaire sans le mécanisme d'optimisation en ligne du critère quadratique.

Nous avons commencé cette étude par un rappel de la commande à placement de pôles des systèmes linéaires, puis montré l'effet d'amplification de la variance de régulation lorsque le système est sujet à des perturbations aléatoires. Une sur-paramétrisation du régulateur R-S-T a permis de réduire l'amplitude de cette variance de régulation. Pour augmenter la robustesse vis-à-vis d'incertitudes paramétriques de cette structure de commande, une version adaptative a été développée, ce qui a permis de remettre à jour indirectement les paramètres des polynômes R-S-T du régulateur.

L'algorithme d'adaptation paramétrique qui est non linéaire, peut diverger en présence des perturbations ou / et des dynamiques négligées. Il a été montré que la commande prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel peut résoudre le problème de robustesse vis-à-vis d'incertitudes structurées et non structurées tant que ces incertitudes demeurent raisonnables et sans le mécanisme d'adaptation paramétrique.

Poursuivant cette approche, une extension aux systèmes non linéaires de la commande prédictive CGPC, développée par Demircioglu pour les systèmes linéaires, est proposée. Ainsi, à partir des travaux de Ping Lu, qui consiste à élaborer une commande prédictive à un pas par le biais de la minimisation d'une erreur quadratique ainsi que l'effort de commande exigé, nous proposons de minimiser ce critère sur un horizon fini. Ensuite, pour contourner le problème d'optimisation en ligne du critère, le développement de Taylor a été utilisé.

Poursuivant notre effort dans cet axe, une extension originale permettant de prendre en compte la contrainte terminale dans le critère quadratique à minimiser a été proposée. Par conséquent, le nombre de paramètres de réglage a été augmenté et les performances de poursuite et de robustesse ont été maximisées. La démarche adoptée lors de la mise en œuvre de cette structure de commande avec contrainte terminale reste similaire à la précédente, en utilisant le développement de Taylor pour éviter l'optimisation en ligne du critère. La stabilité est garantie par un choix adéquat des paramètres de réglage.

Il faut noter que plusieurs structures de commande prédictive pour les systèmes non linéaires ont été proposées dans la littérature. Une des difficultés majeures de ces stratégies provient du temps d'optimisation en ligne nécessaire pour aboutir à la solution optimale. En outre, la solution globale du problème d'optimisation (non convexe) n'est pas garantie et le temps d'optimisation introduit un retard lors d'implémentation de la loi de commande. Ce retard peut éloigner davantage le système non linéaire du point d'équilibre.

Ainsi donc le principal avantage des structures de commande prédictives proposées dans notre thèse par rapport à celles développées par plusieurs auteurs [MIC, MAY, SCO...] réside dans un gain en temps de calcul lors d'application temps réel et la solution d'optimisation existe pourvue que le système non linéaire ait un degré relatif fini et des zéros stables.

Notons que le développement d'un observateur non linéaire pour l'estimation asymptotique de l'état du système non linéaire a permis de lever l'hypothèse que l'état du système est mesurable.

La partie applicative, effectuée sur deux types de systèmes très différents, appartenant à de grands domaines industriels, a permis de montrer pour chaque cas l'apport de la stratégie prédictive non linéaire dans la poursuite des trajectoires par rapport à la structure de régulation prédictive avec linéarisation entrée-sortie ou bien aux récentes structures de commande prédictives qui nécessitent la minimisation d'un critère quadratique en ligne.

Pour la première application, un modèle dynamique d'un robot manipulateur à deux degrés de liberté se déplaçant dans le plan vertical a été choisi afin de tester en simulation les résultats des travaux de notre thèse. Nous avons constaté une bonne poursuite de trajectoire de référence aussi bien dans le cas d'un suivi de trajectoire de sortie que dans le cas d'un suivi de trajectoire d'état. On s'aperçoit également que la prise en compte de contrainte terminale dans le critère quadratique améliore encore les performances de poursuite de trajectoire et de robustesse vis-à-vis de la variation de la charge.

La seconde application, a eu pour but d'améliorer les performances d'une machine asynchrone, par l'intermédiaire de la commande prédictive non linéaire cascade à suivi de trajectoire de sortie. Il faut noter que d'une façon générale, la machine asynchrone alimentée en tension est un procédé électrotechnique complexe. Ce système est par nature multivariable,

non linéaire et soumis d'une part, à des perturbations de charge, et d'autre part, à des variations paramétriques importantes lors de son fonctionnement.

A partir des résultats de simulation, on a observé ici encore une amélioration de la réponse en suivi de trajectoire du flux, du couple et de vitesse, et de meilleures performances dans le cas désadapté par rapport à la commande à flux orienté où il est nécessaire d'estimer en temps réel la constante de temps rotorique.

La commande prédictive non linéaire à suivi de trajectoire est donc capable de maintenir un comportement nominal préspecifié en termes de stabilité et robustesse, pour les systèmes non linéaires affines par rapport à la commande en présence d'incertitudes paramétriques. Cette loi de commande est synthétisée hors ligne, rendant ainsi inutile la minimisation en ligne du coût quadratique.

Deux perspectives à ce travail peuvent être envisagées. Une première démarche consiste à élaborer une méthode numérique qui permet le calcul des valeurs optimales des paramètres de réglage (Q , R , h et h_c). En effet, pour les structures de commande prédictive que nous avons proposées dans cette thèse, il est nécessaire d'effectuer plusieurs simulations pour aboutir aux valeurs numériques adéquates des paramètres de réglage répondant aux spécifications désirées.

Enfin, pour poursuivre et étendre les applications développées dans notre travail, il nous apparaît intéressant de vérifier les performances et l'intérêt de la structure prédictive non linéaire de façon expérimentale. Ainsi, nos travaux futurs seront orientés d'abord vers la discrétisation de ces lois de commande non linéaires continues, et leur implémentation sur des microcontrôleurs ou microprocesseurs (DSP) pour la commande de procédés réels tels que le robot manipulateur rigide, la machine asynchrone ou d'autres procédés physiques non linéaires ayant un degré relatif fini et des zéros stables.

Annexe A

Résolution de l'équation Diophantine

Soient $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ et $C(q^{-1})$ des polynômes de $\mathfrak{R}(q^{-1})$, l'équation polynomiale :

$$A(q^{-1}) X(q^{-1}) + B(q^{-1}) Y(q^{-1}) = C(q^{-1}) \quad (A.1)$$

a une solution si et seulement si le p. g. c. d. de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ divise $C(q^{-1})$. La solution est unique si :

$$n_x = n_b - 1, n_y = n_a - 1 \text{ et } n_c \leq n_a + n_b - 1$$

où

$$n_x = \deg(X(q^{-1})), n_y = \deg(Y(q^{-1})), n_a = \deg(A(q^{-1})), n_b = \deg(B(q^{-1})) \text{ et } n_c = \deg(C(q^{-1})).$$

Par ailleurs, une telle équation peut se mettre sous la forme matricielle :

$$M_s(A, B) \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

avec

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n_x} & y_0 & y_1 & \dots & y_{n_y} \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n_c} \end{bmatrix}^T \\ M_s(A, B) &= \begin{bmatrix} a_0 & 0 & . & 0 & b_0 & 0 & . & 0 \\ a_1 & a_0 & . & . & b_1 & b_0 & . & . \\ . & a_1 & . & . & . & b_1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & b_0 \\ . & . & . & a_0 & b_{nb} & . & . & b_1 \\ a_{na} & . & . & a_1 & 0 & b_{nb} & . & . \\ 0 & a_{na} & . & . & . & 0 & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & a_{na} & 0 & 0 & . & b_{nb} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les conditions de solvabilité de l'équation A.2 sont :

1- $|a_r(t)| \geq \delta$ ou $|b_r(t)| \geq \delta$ avec $\delta > 0$ et $r = \max(n_a, n_b)$

2- $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ n'ont pas de facteurs communs (système contrôlable) .

Annexe B

Programme MATLAB pour le calcul des coefficients des polynômes $H(q^{-1})$, $G(q^{-1})$ et $F(q^{-1})$ ainsi que les coefficients des polynômes $S(q^{-1})$ et $R(q^{-1})$.

```
Clear

% Temps de simulation
t=[0:122];
n=length(t)-1;

%Initialisation
Hp=input('Hp=');
Hi=input('Hi=');
Hc=input('Hc=');
lam=input('lamda=');
na=input('degA(q)=');
nb=input('degB(q)=');
d=input('retard d=');
A=zeros(na+2,1)';
B=zeros(na+2,1)';
E=zeros(Hp,1);
F=zeros(Hp,na+2);
H=zeros(Hp,na+2);
G=zeros(Hp,1);
Gm=zeros(Hp-Hi+1,Hc);
s=zeros(1,na+2);
r=zeros(1,na+2);

%le polynôme désiré
P=[1 -1.5 0.56 0];
% Les coeff. Des polynômes  $A(q^{-1})$  et  $B(q^{-1})$ 
for i=1:na+1,
    i
    A(i)=input('coef.de A(q)= ');
end
```

```

for i=1:nb+1,
    i
    B(i)=input('coef de B(q) =');
End

E(1)=P(1);
% Calcul des Coeff. de F(q-1)
for i=1:na+1,
    F(1,i)=P(i+1)-E(1)*(A(i+1)-A(i));
end
for j=2:Hp,
    E(j)=F(j-1,1);
    for i=1:na+1,
        F(j,i)=F(j-1,i+1)-E(j)*(A(i+1)-A(i));
    end
end

G(1)=E(1)*B(1)/P(1);
% Calcul des coeff. du polynôme H(q-1)
for i=1:na+1,
    H(1,i)=E(1)*B(i+1)-P(i+1)*G(1);
end
for j=2:Hp,
    G(j)=(H(j-1,1)+E(j)*B(1))/P(1);
    for i=1:na+1,
        H(j,i)=H(j-1,i+1)-G(j)*P(i+1)+E(j)*B(i+1);
    end
end

%calcul de la matrice G(θ)
if Hi < (Hc+d),
    Gm(:,1)=G(Hi-d:Hp-d)
    for i=2:Hc,
        if i<=(Hi-d),
            Gm(:,i)=G(Hi-d-i+1:Hp-d-i+1);
        else
            Gm(:,i)=[zeros(i-Hi+d,1);G(1:Hp-d-i+1)];
        end
    end
end

```

```

else
    for i=1:Hc,
        Gm(:,i)=G(Hi-d+1-i:Hp-d+1-i);
    end
end
% Le matrice G( $\theta$ ) est
Gm
pause
% Calcul du vecteur Gamma
if Hc==1,
    SIG=inv(Gm'*Gm+lam)*Gm';
else
    SIG=[1;zeros(Hc-1,1)]'*inv(Gm'*Gm+lam*eye(Hc))*Gm';
end

s(1)=P(1);
% Calcul des coeff. du polynôme S( $q^{-1}$ )
for i=2:na+2,
    s(i)=P(i)+SIG*H(Hi-d:Hp-d,i-1);
end

% Calcul des coeff. du polynôme R( $q^{-1}$ )
for i=1:na+1,
    r(i)=SIG*F(Hi:Hp,i);
end

%Calcul des Coeff. du polynôme T( $q^{-1}$ )
AT=A(na+1:-1:1);
BT=[B(nb+1:-1:1) zeros(d+1,1)'];
D=[-1 1];
SD=conv(s(na+2:-1:1),D);
ASD=conv(AT,SD);
BTR=conv(BT,r(na+1:-1:1));
nasd=length(ASD);
nbtr=length(BTR);

if nasd==nbtr,
    T=ASD+BTR;

```

```

elseif nasd>nbtr,
    BR=[zeros(nasd-nbtr,1)' BTR(1:nbtr)];
    T=ASD+BR;
else
    AD=[zeros(nbtr-nasd,1)' ASD(1:nasd)];
    T=AD+BTR;
end
nt=length(T);
j=1;
for i=1:nt,
    if abs(T(i)) > 0.0000,
        nx(j)=i;
        j=j+1;
    end
end

%Les pôles du système en boucle fermée
PC=T(nt:-1:nx(1))
roots(PC)

```

Annexe C

Difféomorphisme et dérivée de Lie

Le lecteur désireux d'approfondir les définitions et les notions de géométrie différentielle peut consulter par exemple la référence [ISI].

C.1 Difféomorphisme

Un difféomorphisme est une transformation permettant de réaliser un changement de coordonnées. Une fonction $\phi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ définie dans un sous espace Δ de $\mathfrak{R}^n$ est appelée difféomorphisme si la fonction ϕ est de classe C^∞ et si son inverse ϕ^{-1} existe et est de classe C^∞ .

L'effet du changement de coordonnées sur un système non linéaire peut être analysé de la manière suivante. On considère le système non linéaire :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{C.1}$$

et le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{aligned}z &= \phi(x) \\ \dot{z} &= \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} [f(x) + g(x)u]\end{aligned}\tag{C.2}$$

Le système non linéaire est transformé en un autre système non linéaire :

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A(z) + \Gamma(z)u \\ y &= G(z)\end{aligned}\tag{C.3}$$

avec

$$A(z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \right], \quad \Gamma(z) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) \right], \quad G(z) = h(\phi^{-1}(z)) \text{ et } x = \phi^{-1}(z).$$

C.2 Calcul des dérivées de Lie

Cette partie concerne le calcul des dérivées de Lie pour la commande non linéaire prédictive cascade de la machine asynchrone du chapitre 5.

On appelle dérivée de Lie de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ dans la direction $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ notée: $L_f h(x)$, la dérivée de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ le long de la courbe intégrale de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, elle est définie :

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i \quad (\text{C.4})$$

◆ Pour la première sortie : $y_1 = h_1(x) = p \frac{L_m}{T_r} (\phi_{r\alpha} i_{s\beta} - \phi_{r\beta} i_{s\alpha})$

$$\dot{y}_1 = \dot{h}_1(x) = L_f h_1(x) + L_g h_1(x)u$$

Calculons $L_f h_1(x)$ et $L_g h_1(x)$

$$- L_f h_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_i} f_i(x) = -p \frac{L_m}{L_r} \left[\left(\gamma + \frac{1}{T_r} \right) (x_2 x_3 - x_1 x_4) + p k (x_3^2 + x_4^2) x_5 + p (x_1 x_3 + x_2 x_4) x_5 \right]$$

$$- L_g h_1(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_1(x)}{\partial x_i} g_i(x) = \begin{bmatrix} -\frac{p L_m}{\sigma L_s T_r} x_4 & \frac{p L_m}{\sigma L_s T_r} x_3 \end{bmatrix}.$$

◆ Pour la deuxième sortie : $y_2 = h_2(x) = \phi_{r\alpha}^2 + \phi_{r\beta}^2 = \phi_r^2$

$$\dot{y}_2 = \dot{h}_2(x) = L_f h_2(x)$$

$$\ddot{y}_2 = \ddot{h}_2 = L_f^2 h_2(x) + L_g L_f h_2(x)u$$

Calculons $L_f h_2(x)$, $L_f^2 h_2(x)$ et $L_g L_f h_2(x)$:

$$- L_f h_2(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_2(x)}{\partial x_i} f_i(x) = 2 \frac{L_m}{L_r} (x_1 x_3 + x_2 x_4) - \frac{2}{T_r} (x_3^2 + x_4^2),$$

$$- L_f^2 h_2(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (L_f h_2)(x)}{\partial x_i} f_i(x) = -2 \frac{L_m}{T_r} \left(\gamma + \frac{1}{T_r} \right) (x_1 x_3 + x_2 x_4) + 2 \left(\frac{L_m}{T_r} \right)^2 (x_1^2 + x_2^2) + \frac{2}{T_r^2} (L_m k + 2) (x_3^2 + x_4^2) + 2 p \frac{L_m}{T_r} (x_2 x_3 - x_1 x_4)$$

$$- L_g L_f h_2(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (L_f h_2)(x)}{\partial x_i} g_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{2 L_m}{\sigma L_s T_r} x_3 & \frac{2 L_m}{\sigma L_s T_r} x_4 \end{bmatrix}$$

Annexe D

Calcul de la commande prédictive non linéaire à un pas :

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad \text{D.1}$$

où $x(t) \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur des variables d'état, $u(t) \in \mathcal{R}^m$ est le vecteur de commande et $y(t) \in \mathcal{R}^m$ est le vecteur de sortie du système.

Le critère de la commande prédictive à un pas à minimiser (eq. 3.3) est :

$$J = \frac{1}{2} \left(y(t+h) - y_{ref}(t+h) \right)^T Q \left(y(t+h) - y_{ref}(t+h) \right) + \frac{1}{2} u(t)^T R u(t) \quad \text{D.2}$$

où $Q \in \mathcal{R}^{m \times m}$ est une matrice définie positive et $R \in \mathcal{R}^{m \times m}$ est une matrice semi-définie positive.

En utilisant le développement de Taylor du signal $y(t)$ à l'instant $(t+h)$, on obtient :

$$y(t+h) = y(t) + V_y(x, h) + \Lambda(h)W(x)u \quad \text{D.3}$$

où $V_y(x, h) = (v_1(x, h) \ v_2(x, h) \ \dots \ v_m(x, h))^T$

avec $v_i(x, h) = h L_f h_i(x) + \frac{h^2}{2!} L_f^2 h_i(x) + \dots + \frac{h^{r_i}}{r_i!} L_f^{r_i} h_i(x)$.

$$\Lambda(h) = \text{diag} \left(\frac{h^{r_1}}{r_1!}, \frac{h^{r_2}}{r_2!}, \dots, \frac{h^{r_m}}{r_m!} \right), \quad W(x) = (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m)^T$$

$$\text{avec } w_i(x) = (L_{g1} L_f^{r_i-1} h_i(x) \ \dots \ L_{gm} L_f^{r_i-1} h_i(x)).$$

Le développement de Taylor du signal de référence $y_{ref}(t)$ à l'instant $(t+h)$ est :

$$y_{ref}(t+h) = y_{ref}(t) + d(t, h) \quad \text{D.4}$$

où $d(t, h) = (d_1(t, h) \ d_2(t, h) \ \dots \ d_m(t, h))^T$ avec $d_i(t, h) = h \dot{y}_{refi} + \frac{h^2}{2!} \ddot{y}_{refi} + \dots + \frac{h^{r_i}}{r_i!} y_{refi}^{(r_i)}$.

Le critère D.2 s'écrit alors :

$$J = \frac{1}{2} \left(y(t) - y_{ref}(t) + V_y(x, h) + \Lambda(h)W(x)u - d(t, h) \right)^T Q \times \\ \left(y(t) - y_{ref}(t) + V_y(x, h) + \Lambda(h)W(x)u - d(t, h) \right) + \frac{1}{2} u^T R u \quad \text{D.5}$$

où

$$\begin{aligned}
J &= \frac{I}{2} [\Xi + \Lambda(h)W(x)u]^T Q [\Xi + \Lambda(h)W(x)u] + \frac{I}{2} u^T R u \\
&= \frac{I}{2} \Xi^T Q \Xi + \frac{I}{2} \Xi^T Q \Lambda(h)W(x)u + \frac{I}{2} u^T W(x) \Lambda(h) Q \Xi + \frac{I}{2} u^T W(x) \Lambda(h) Q \Lambda(h)W(x)u + \frac{I}{2} u^T R u
\end{aligned}$$

où $\Xi = (y(t) - y_{ref}(t) + V_y(x, h) - d(t, h))$.

La commande prédictive optimale s'obtient par minimisation analytique du critère J, par

l'équation $\frac{\partial J}{\partial u} = 0$, la solution est :

$$\begin{aligned}
u^*(t) &= - \left[(\Lambda(h)W(x))^T Q \Lambda(h)W(x) + R \right]^{-1} (\Lambda(h)W(x))^T \Xi \\
&= - \left[(\Lambda(h)W(x))^T Q \Lambda(h)W(x) + R \right]^{-1} (\Lambda(h)W(x))^T (e(t) + V_y(x, h) - d(t, h))
\end{aligned} \tag{D.6}$$