

N° d'ordre : 20/2012-M/MT

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en mathématiques
Spécialité : Analyse (Modélisations Mathématiques et Numériques)

Par

BIOUT Sara

THÈME

**Les inégalités "Doubling"
pour
les solutions des systèmes elliptiques**

Soutenu publiquement le 15 / 01 / 2012, devant le jury composé de :

Mr	R.BEBBOUCHI	Professeur	U.S.T.H.B	Président
Mr	A.KESSAB	Maître de Conférences	U.S.T.H.B	Directeur de thèse
Mr	A.KESSI	Professeur	U.S.T.H.B	Examineur
Mr	A.KHEMMOUDJ	Maître de Conférences	U.S.T.H.B	Examineur
Mr	A.TOUZALINE	Maître de Conférences	U.S.T.H.B	Examineur

Table des matières

Remerciements	1
Introduction	2
1 Rappels de quelques résultats fondamentaux	6
1.1 Espaces $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$, $H^{-k}(\Omega)$	6
1.2 Inégalités/Injections de Sobolev	9
1.3 Opérateur de trace. Espace de traces	10
1.4 Inégalité de Poincaré	11
1.5 Les espaces de Hölder	11
1.6 la transformation rigide	12
2 Position du problème	14
2.1 Introduction	14
2.2 Réduction du système de Lamé à un système différentiel d'ordre 4	17
3 Estimations quantitatives pour des systèmes elliptiques à partie principale diagonale	26
3.1 Introduction	26
3.2 Inégalité des trois sphères	27
3.3 Propagation Lipschitz de la petitesse	39
4 les inégalités "Doubling" pour les systèmes elliptiques	44
4.1 Introduction:	44

4.2	l'inégalité "Doubling" locale (la solution vit dans une boule de Ω)	45
4.3	L'inégalité "Doubling" (la solution vit dans Ω)	57
5	L'inégalité "doubling" globale pour les solutions du système de Lamé	60
5.1	Introduction	60
5.2	Existence et unicité de la solution du problème au limite	61
5.2.1	Le théorème de Lax-Milgram	61
5.3	L'inégalité "Doubling" globale	64
	Conclusion et perspectives	67
	Bibliographie	68

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur A. KESSAB mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissante pour la confiance qu'il m'a accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur R. BEBBOUCHI, Professeur à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie vivement Messieurs A. KESSI, Professeur à l'U.S.T.H.B, A. KHEMMOUDJ, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B et A. TOUZALINE, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B, qui ont bien voulu faire partie du jury.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir, mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents, mon frère Mohamed et mes soeurs pour leur soutien tout au long de mes études.

Introduction

Dans l'étude des équations aux dérivées partielles, la difficulté n'est pas uniquement de trouver des solutions mais aussi de connaître le comportement des solutions, à titre d'exemple "le principe de prolongement unique". En général, pour prouver que la solution d'une E.D.P admet un prolongement unique, on utilise souvent des inégalités de type Carleman (Inégalité avec poids). Carleman est le premier qui a introduit ces inégalités en 1939 pour montrer la propriété du prolongement unique pour l'opérateur de Schrodinger $H = \Delta + V$ dans $\mathbb{R}^2$, où V est un potentiel borné (en fait, les inégalités de type Carleman peuvent être utilisées dans plusieurs démonstrations, à titre d'exemple, on a utilisé dans ce mémoire ces inégalités pour établir la preuve du Théorème de l'inégalité des trois sphères et l'inégalité "Doubling" locale (voir chapitre 3 et 4)). En 1987, N. Garofalo et F.H Lin présentent dans [GL87] une approche géométrique au prolongement unique pour l'équation:

$$Lu = -\operatorname{div}(A(x) \nabla u) + b(x) \cdot \nabla(x) + V(x) u$$

où A est une matrice symétrique à valeurs réelles sur Ω satisfaisant les hypothèses suivantes:

(i) Il existe un $\lambda \in (0,1)$ tel que pour tout $x \in \Omega$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\lambda |x|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda^{-1} |x|^2$$

(ii) Il existe une constante $\Gamma > 0$ telle que, pour tout $x, y \in \Omega$, on a:

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \Gamma |x - y|$$

Pour les coefficients $b(x)$ et $V(x)$, on exige:

(iii) pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe $r_0 > 0$ telle que: f est décroissante sur $(0, r_0)$, $\int_0^{r_0} \frac{dr}{rf(r)} < +\infty$ et pour tout $x \in \Omega \cap B_{r_0}(x_0)$, où $B_{r_0}(x_0) = \{y \in \Omega \mid |x_0 - y| < r_0\}$, nous avons:

$$|b(x)| \leq \frac{C}{|x - y| f(|x - y|)}, \quad |V(x)| \leq \frac{C}{|x - y|^2 f(|x - y|)}$$

On dit que L a la propriété du prolongement unique fort dans Ω , si $u \equiv 0$ est l'unique solution de $Lu = 0$ dans $H_{loc}^{1,2}(\Omega)$, qui s'annule à un ordre infini en $x_0 \in \Omega$. (une fonction $u \in L_{loc}^2$ s'annule à un ordre infini en un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si $\int_{|x-x_0|<r} u^2 dx = O(r^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ qd $r \rightarrow 0$).

Pour prouver l'unicité du prolongement, on utilise la propriété "Doubling":

Les conditions "Doubling": Soit $u \in H_{loc}^{1,2}(\Omega)$ est une solution de $Lu = 0$ dans Ω , avec L satisfaisant (i), (ii) et (iii) ci-dessus. Soit $x_0 \in \Omega$ où $r_0 > 0$ est le nombre dans (iii). Sans perdre de généralité, on peut supposer que $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$. Alors il existe deux nombres $C, \bar{r} > 0$, avec C dépendant de u, n, λ, Γ et les propriétés locales de b et V en x_0 telles que pour toute boule B_r , pour laquelle $\bar{B}_{2r} \subset B_{\bar{r}}(x_0)$, on a:

$$\int_{B_{2r}} |u|^2 \leq K \int_{B_r} |u|^2$$

où Γ et λ sont les paramètres introduits dans (i) et (ii). Une conséquence de cette inégalité est que l'opérateur Lu admet la propriété du prolongement unique.

La propriété "Doubling" est un concept de base de la théorie de la mesure ([GCRDF85],[H01]. Par la suite, elle s'est avérée être un outil important pour obtenir des estimations elliptiques convenables, dans les problèmes inverses [ABRV01, V08, MR04, MR05] et dans certains problèmes aux limites. En effet, considérons l'équation elliptique:

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0, \text{ dans } \Omega \tag{0.0.1}$$

où Ω est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$, de frontière suffisamment lisse notée $\partial\Omega$, $\sigma(x) = \{\sigma_{ij}\}$ est une matrice symétrique satisfaisant la condition d'ellipticité uniforme et telle que $\sigma_{ij} \in C^{0,1}$. Soit la solution de (0.1.1), satisfaisant la condition de Dirichlet.

$$u = g, \text{ sur } \partial\Omega \tag{0.0.2}$$

Alors la propriété "Doubling" précise que pour tout sous ensemble G de Ω et pour toutes

boules $B_r, B_{2r} \subset G$ ($B_r = \{x \in \Omega \mid |x| < r\}$), on a:

$$\int_{B_{2r}} |u|^2 \leq K \int_{B_r} |u|^2 \quad (0.0.3)$$

où K est une constante dépendant de Ω , de G , de la régularité, de l'ellipticité des coefficients σ_{ij} et de u . Avec cette inégalité, on peut obtenir l'inégalité de propagation Lipschitz de la petitesse:

$$\int_{B_r} |u|^2 \geq C \int_{\Omega} |u|^2$$

L'inégalité "Doubling" pour l'équation (0.0.1) est une conséquence de l'inégalité d'Harnack (voir [ChiarFab86]).

Pour le système de Lamé d'élasticité isotrope (voir définitions dans les prochains chapitres):

$$\operatorname{div} \left(\mu \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) \right) + \nabla (\lambda \operatorname{div} u) = 0, \text{ dans } \Omega \quad (0.0.4)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert borné et connexe, les coefficients de Lamé $\mu = \mu(x)$, $\lambda = \lambda(x)$ sont dans $C^{1,1}$ et satisfaisant la condition d'ellipticité :

$$\mu \geq \alpha_0 > 0, 2\mu + \lambda \geq \beta_0 > 0$$

pour des constantes α_0, β_0 données. L'inégalité "Doubling" de la forme :

$$\int_{B_{2r}} |u|^2 + |\operatorname{div} u|^2 \leq K \int_{B_r} |u|^2 + |\operatorname{div} u|^2, \forall 0 < r \leq \bar{r} \quad (0.0.5)$$

a été prouvée dans [AM01], où $\bar{r}$ dépendent de $\alpha_0, \beta_0, \|\mu\|_{C^{1,1}}, \|\lambda\|_{C^{1,1}}$.

Plus récemment, les inégalités "Doubling" ont été étudiées pour des systèmes avec une partie principale diagonale (s'écrit sous la forme $\Delta^l + (\dots)$) comme le Laplacien Δ [LnKW08] ou bien le Laplacien itéré [LngW08].

Le but de ce travail est d'établir une inégalité "Doubling" pour le problème suivant:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mu (\nabla u + (\nabla u)^T)) + \nabla (\lambda \operatorname{div} u) = 0, \text{ dans } \Omega \\ ((\mu (\nabla u + (\nabla u)^T)) + (\lambda \operatorname{div} u) I_n) \nu = \varphi, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (0.0.6)$$

où Ω est un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ Lipschitzienne, $\mu, \lambda \in C^{2,1}(\bar{\Omega})$ et I_n matrice identité. En ce qui concerne la démonstration de ce résultat, on utilise une méthode différente de

celle utilisée dans les articles indiqués précédemment. Afin d'atteindre l'objectif attendu, on partage notre travail en 5 chapitres:

On présente dans le premier chapitre des rappels sur les espaces de Sobolev et quelques résultats fondamentaux utiles aux chapitres ultérieurs. Dans le deuxième chapitre, nous définissons le système de Lamé, sa signification physique et mathématique, et, nous allons voir comment, on peut réduire ce système à un système d'ordre 4:

$$|\Delta^2 u^i| \leq K_0 \sum_{|\alpha|=1}^3 |D^\alpha u|, i = 1, \dots, n$$

On généralise ensuite ce résultat jusqu'à l'ordre l c'est-à-dire :

$$|\Delta^l u^i| \leq K_0 \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u|, i = 1, \dots, n \tag{0.0.7}$$

Dans le troisième chapitre, on s'inspire de [LngW08] pour prouver l'inégalité des trois sphères pour le système (0.0.7) et la démonstration de [AMR02] pour prouver l'inégalité de propagation de la petitesse.

Dans le chapitre 4, on démontre les inégalités "Doubling" pour le système (0.0.7).

Enfin dans le cinquième chapitre, on établit la preuve de l'existence et de l'unicité des solutions du problème au limite (0.0.6), et l'inégalité "Doubling" globale pour ce problème.

Chapitre 1

Rappels de quelques résultats fondamentaux

L'essentiel du contenu de ce paragraphe provient des références [Bre83], [Ada75] et de [FBOR09].

1.1 Espaces $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$, $H^{-k}(\Omega)$

Définition 1.1.1 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour tout entier $k \geq 0$, on définit l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ de la façon suivante

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq k\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

De façon évidente, on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et $H^{k+1}(\Omega) = \{u \in H^k(\Omega), \nabla u \in (H^k(\Omega))^d\}$. On définit enfin $H_0^k(\Omega)$, l'adhérence dans $H^k(\Omega)$ de $D(\Omega)$, ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans Ω .

Proposition 1.1.1 *Les espaces $H^k(\Omega)$ et $H_0^k(\Omega)$ ainsi définis sont des espaces de Hilbert et de plus, si Ω est Lipschitzien, alors l'ensemble $C^\infty(\bar{\Omega})$ des fonctions régulières jusqu'au bord de Ω est dense dans $H^k(\Omega)$.*

Il est possible de caractériser le dual topologique de l'espace $H_0^k(\Omega)$ de la façon suivante.

Définition 1.1.2 *Pour tout $k \geq 1$, on définit le sous espace des distributions suivant:*

$$H^{-k}(\Omega) = \left\{ f \in D'(\Omega), f = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha f_\alpha, \text{ avec } f_\alpha \in L^2(\Omega) \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H^{-k}(\Omega)} = \inf \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|f_\alpha\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

La borne inférieure étant pris sur toutes les décompositions possibles de f sous la forme intervenant dans la définition de H^{-k} .

Pour tout $k \geq 1$, l'espace $H^{-k}(\Omega)$ ainsi défini est un espace de Hilbert qui, de plus, est isomorphe au dual topologique de $H_0^k(\Omega)$. De façon plus précise, le crochet de dualité s'exprime de la façon suivante

$$\langle f, u \rangle_{H^{-k}, H_0^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f_\alpha \partial^\alpha u dx, \forall f \in H^{-k}, \forall u \in H_0^k(\Omega)$$

On vérifie que cette formule ne dépend pas de la décomposition de f en somme des $\partial^\alpha f_\alpha$.

Remarque 1.1.1 *le dual topologique de $H^k(\Omega)$ n'est pas un espace de distributions et ne possède donc pas de caractérisation aussi simple.*

Remarque 1.1.2 *L'exemple le plus simple à retenir, et le plus utile pour la suite de ce mémoire, est que tout élément f de $H^{-1}(\Omega)$ s'écrit, au sens des distributions, sous la forme*

$$f = u + \operatorname{div} G, \text{ avec } u \in L^2(\Omega) \text{ et } G \in (L^2(\Omega))^d$$

Concluons ce paragraphe par le théorème de dérivation des fonctions composées dans les espaces de Sobolev.

Théorème 1.1.1 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$ et toute fonction $T : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1 à dérivée bornée nous avons

$$T(u) \in H^1(\Omega) \text{ et } \nabla T(u) = T'(u) \nabla u$$

De plus:

$$u \in H^1(\Omega) \mapsto T(u) \in H^1(\Omega)$$

est continue

Preuve. 1. On raisonne par densité en approchant $u \in H^1(\Omega)$, par une suite $(u_n)_n$ de fonctions régulières. Pour ces fonctions u_n , le théorème de dérivation des fonctions composées s'applique et on a donc $\nabla(T(u_n)) = T'(u_n) \nabla u_n$.

En prenant une fonction test $\Phi \in (C_c^\infty(\Omega))^d$, on a donc

$$\int_{\Omega} T(u_n) \operatorname{div} \Phi dx = \int_{\Omega} T'(u_n) \nabla u_n \cdot \Phi dx.$$

Il faut donc vérifier que l'on peut passer à la limite dans cette formule pour montrer le résultat.

- Tout d'abord, comme T est à dérivée bornée :

$$|T(u_n) - T(u)| \leq \|T'\|_{\infty} |u_n - u|$$

et donc $T(u_n)$ converge vers $T(u)$ dans $L^2(\Omega)$, ce qui permet de passer à la limite dans le premier terme.

- Pour le second terme, on utilise le fait que, quitte à extraire une sous-suite de $(u_n)_n$ on peut supposer que u_n converge presque partout vers u (et donc $T'(u_n)$ converge presque partout vers $T'(u)$ puisque T' est continue). Par convergence dominée, on en déduit que $T(u_n)$ converge vers $T(u)$ dans $L^2(\Omega)$, et comme par ailleurs ∇u_n converge vers ∇u dans $L^2(\Omega)$, on a bien justifié le passage à la limite dans l'égalité proposée.

2. Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions de $H^1(\Omega)$ qui converge vers $u \in H^1(\Omega)$.

- On a tout d'abord

$$\|T(u_n) - T(u)\|_{L^2} \leq \|T'\|_{\infty} \|u_n - u\|_{L^2}$$

et donc $T(u_n)$ converge vers $T(u)$ dans L^2 .

- Il faut maintenant regarder les gradients.

$$\begin{aligned}
 \|\nabla T(u_n) - \nabla T(u)\|^2 &= \|T'(u_n) \nabla u_n - T'(u) \nabla u\|^2 \\
 &= \int_{\Omega} |T'(u_n) \nabla u_n - T'(u) \nabla u|^2 dx \\
 &= \int_{\Omega} |T'(u_n) \nabla u_n - T'(u_n) \nabla u + T'(u_n) \nabla u - T'(u) \nabla u|^2 dx \\
 &\leq \int_{\Omega} |T'(u_n) (\nabla u_n - \nabla u)|^2 dx + \int_{\Omega} |(T'(u_n) - T'(u)) \nabla u|^2 dx \\
 &\leq \|T'\|_{\infty}^2 \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} |T'(u_n) - T'(u)|^2 |\nabla u|^2 dx
 \end{aligned}$$

Nous trouvons donc:

$$\|\nabla T(u_n) - \nabla T(u)\|^2 \leq \|T'\|_{\infty}^2 \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} |T'(u_n) - T'(u)|^2 |\nabla u|^2 dx$$

Le premier terme de l'inégalité ci dessus tend clairement vers 0. Quand au second terme, on va montrer que sa limite supérieure α est nulle. Pour cela, on considère une sous-suite $u_{\varphi(n)}$ qui réalise la valeur α . Comme $(u_n)_n$ converge dans $L^2(\Omega)$ et quitte à extraire encore une fois une sous-suite, on peut supposer que $u_{\varphi(n)}$ converge vers u presque partout. Dans ces conditions, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et obtenir

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |T'(u_{\varphi(n)}) - T'(u)|^2 |\nabla u|^2 dx = 0$$

En réalité, on peut montrer que cette propriété est encore vraie si T est seulement Lipschitzienne et C^1 par morceaux par exemple. ■

1.2 Inégalités/Injections de Sobolev

On se contente ici de donner les résultats concernant l'espace $H^1(\Omega)$ même si des résultats similaires peuvent être démontrés pour les espaces $H^k(\Omega)$ ou les espaces $W^{1,p}(\Omega)$, avec $p \neq 2$.

Théorème 1.2.1 *Soit Ω un ouvert borné Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. • Si $d = 1$: on a l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans l'espace de Hölder $C^{0, \frac{1}{2}}(\Omega)$. • Si $d = 2$: on a l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans l'espace $L^p(\Omega)$ pour tout $p < +\infty$. Par contre, on n'a pas l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$. • Si $d \geq 3$: on a l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans l'espace $L^{p^*}(\Omega)$ avec $p^* = \frac{2d}{d-2}$.*

Dans le cas non borné, les résultats sont essentiellement les mêmes (à part quelques variantes du fait que les espaces L^p ne sont pas emboîtés dans ce cas). La différence essentielle est que la compacité des injections de Sobolev n'est plus vérifiée.

1.3 Opérateur de trace. Espace de traces

Définition 1.3.1 (*Régularité Lipshitzienne*) [AMRV08]: Etant donné un domaine Ω , on dit que $\partial\Omega$ est de classe Lipshitzienne avec les constantes r_0, M_0 , si, pour toute $x_0 \in \partial\Omega$, il existe une transformation rigide de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ sous lesquelles nous avons $x_0 = 0$ et

$$\Omega \cap B_{r_0}(0) = \{x \in B_{r_0}(0) \mid x_n > \Psi(x')\}$$

où $B_{r_0}(0) = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |y| \leq r_0\}$, $x \in \mathbb{R}^n, x = (x', x_n)$, avec $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \in \mathbb{R}$ et où Ψ est une fonction de $\mathbb{R}^{n-1}$, continue Lipshitzienne sur $B_{r_0}(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ satisfaisant $\Psi(0) = 0$ et $\|\Psi\|_{C^{0,1}(B_{r_0}(0))} \leq r_0 M_0$. où $\|\Psi\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})} = \|\Psi\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|\Psi(x) - \Psi(y)|}{|x - y|}$

On sait qu'une fonction Lipschitzienne définie sur un ouvert Ω peut se prolonger par continuité jusqu'au bord de Ω , ce qui permet de donner un sens à la notion de trace de la fonction sur le bord. On va montrer que l'on peut, dans une certaine mesure, faire une construction équivalente dans le cas de fonctions moins régulières.

Théorème 1.3.1 Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. L'application $\gamma_0 : u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$, se prolonge de manière unique, et de façon continue à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. On appelle l'opérateur γ_0 ainsi obtenu : l'application de traces. L'opérateur γ_0 n'est pas surjectif sur $L^2(\partial\Omega)$. L'image de γ_0 est un espace de Sobolev fractionnaire appelé $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et qui est un Hilbert pour la norme

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf_{u \in H^1(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \\ \text{tq: } \gamma_0 u = v$$

Dans ces conditions, il existe un opérateur linéaire continu $R_0 : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \mapsto H^1(\Omega)$, dit de relèvement, qui vérifie

$$\gamma_0 \circ R_0 = Id_{\partial\Omega}$$

N.B. : Dans le théorème précédent, l'espace $L^2(\partial\Omega)$ est défini par le biais de cartes locales.

Proposition 1.3.1 *L'opérateur de traces ainsi construit permet d'écrire une formule d'intégration par parties (Green-Riemann)*

$$\forall u \in H^1(\Omega), \forall \Phi \in (H^1(\Omega))^d, \int_{\Omega} u \operatorname{div} \Phi \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \Phi \, dx = \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u) (\gamma_0 \Phi) \cdot \nu \, ds$$

1.4 Inégalité de Poincaré

Théorème 1.4.1 *(Inégalité de Poincaré) Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}, \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Théorème 1.4.2 *Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$*

1. *Soit Γ^D une partie fermée d'intérieur non vide dans $\partial\Omega$ (pour la topologie induite).*

On note

$$H_D^1 = \{u \in H^1(\Omega), \gamma_0(u) = 0, \text{ sur } \Gamma^D\}$$

Alors il existe $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}, \forall u \in H_D^1(\Omega)$$

2. *On note*

$$H_m^1 = \left\{ u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u \, dx = 0 \right\}.$$

Alors il existe $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}, \forall u \in H_m^1(\Omega)$$

1.5 Les espaces de Hölder

Définition 1.5.1 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha \leq 1$ et $m \in \mathbb{N}$*

1. On définit l'espace $C_B^m(\Omega)$ par l'ensemble des fonction $C^m(\Omega)$ telle que toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à m sont bornées. On munit l'espace $C_B^m(\Omega)$ de la norme $\|\cdot\|_{C_B^m(\Omega)}$ définie par:

$$\|u\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0 \leq \alpha \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|$$

2. De même, on définit l'espace $C^m(\bar{\Omega})$ par:

$C^m(\bar{\Omega}) = \{u \in C^m(\Omega) / D^\alpha u \text{ s'étend par continuité à } \bar{\Omega}, \forall 0 \leq \alpha \leq m\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})}$ définie par:

$$\|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \|\cdot\|_{C_B^m(\Omega)}$$

3. (Espaces de Hölder): Une fonction u est dite Hölder-continue d'exposant ν sur Ω s'il existe une constante C telle que:

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\nu, x, y \in \Omega$$

On note $C^{m, \alpha}(\bar{\Omega})$ l'espace de toutes les fonctions u satisfaisant la condition précédente sur Ω .

De même on note:

$$C^{m, \alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^m(\bar{\Omega}) / D^\alpha u \in C^{0, \nu}(\bar{\Omega}), \forall 0 \leq \alpha \leq m\}$$

On muni les espaces de Hölder de la norme $\|\cdot\|_{C^{m, \nu}(\bar{\Omega})}$ définie par:

$$\|u\|_{C^{m, \nu}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} + \max_{0 \leq \alpha \leq m} \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\nu}$$

1.6 la transformation rigide

Soit un repère orthonormé cartésien noté $R = (O, x_1, \dots, x_n)$. La position d'un point M est donnée par un nombre n de coordonnées. On choisit par commodité de représenter ces coordonnées par un vecteur m de $\mathbb{R}^n$, sous la forme d'une matrice colonne:

$$m = \begin{pmatrix} m_{x_1} \\ \vdots \\ m_{x_n} \end{pmatrix}$$

Le mouvement du point est la courbe paramétrée $m(t)$ de $\mathbb{R}^n$ donnant sa position au cours du temps. Le support du mouvement est la trajectoire du point.

Un solide Ω est dit indéformable si, pour toute paire de points de ce solide de coordonnées m et n , $\|m(t) - n(t)\| = \text{constante}$ au cours du temps.

Définition 1.6.1 *Soit Ω un solide indéformable. Le mouvement rigide de ce solide, considéré comme un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ est le mouvement de chacun de ses points.*

On appelle transformation rigide le résultat d'un mouvement rigide amenant le solide d'une situation initiale à une situation finale. Une transformation rigide est représentée par une application unique qui transforme les coordonnées des points du solide Ω de leur position initiale vers leur position finale.

A l'inverse, une application représentera une transformation rigide si elle conserve à la fois les distances et l'orientation.

Chapitre 2

Position du problème

2.1 Introduction

Les équations de l'élasticité linéaire modélisent les déformations d'un solide sous les hypothèses de petites déformations et de petits déplacements (hypothèse qui permet d'obtenir des équations linéaires, d'où le nom d'élasticité linéaire). On considère les équations stationnaires de l'élasticité, c'est à dire indépendantes du temps. Parmi ces équations, on considère le système de Lamé.

Il s'agit ici de plusieurs équations couplées entre elles. Pour obtenir ce système, on suppose que le solide est homogène isotrope (le solide est dit isotrope s'il ne présente pas de directions privilégiée). Le solide au repos occupe un domaine Ω de l'espace $\mathbb{R}^n$. Sous l'action d'une force f il se déforme et chaque point x se déplace en $x + u(x)$. La force $f(x)$ est une fonction vectorielle de Ω dans $\mathbb{R}^n$, comme le déplacement $u(x)$.

La modélisation mécanique fait intervenir le tenseur des déformations, noté $e(u)$ qui est une fonction à valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques.

$$e(u) = \frac{1}{2} \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right), 1 \leq i, j \leq n$$

ainsi que le tenseur des contraintes σ (une autre fonction à valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques) qui est relié à $e(u)$ par la loi de Hooke :

$$\sigma = 2\mu e(u) + \lambda \operatorname{tr}(e(u)) Id,$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé, caractéristiques du matériau homogène isotrope qui occupe Ω . Pour des raisons de thermodynamique les coefficients de Lamé vérifient:

1. les conditions de convexité: $\exists \alpha_0 > 0, \gamma_0 > 0$ des constantes tel que: $\mu(x) \geq \alpha_0$,
 $2\mu(x) + n\lambda(x) \geq \gamma_0$, dans $\bar{\Omega}$, où $n = \dim \Omega$
2. les conditions d'ellipticité: $\exists \alpha_0 > 0, \beta_0 > 0$ des constantes tel que: $\mu(x) \geq \alpha_0$,
 $2\mu(x) + \lambda(x) \geq \beta_0$, dans $\bar{\Omega}$.

En fait il s'agit de l'ellipticité forte: cette condition est imposée pour que :

$$\langle Lu, u \rangle \geq \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

où L = un opérateur de Lamé = $\operatorname{div}(\mu(\nabla + \nabla^T)) + \nabla(\lambda \operatorname{div})$ et α est une constante positive.

En effet, nous considérons le système d'équations de Lamé suivant:

$$L_i u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) + \lambda (\operatorname{div} u) \delta_{i,j} \right), \text{ dans } \Omega$$

Ensuite, on multiplie chaque équation ci-dessus par une fonction test $v_i \in H^1(\Omega)$ tq $\int_{\Omega} v \, dx = 0$ et nous intégrons par parties pour obtenir:

$$\langle L_i u, v_i \rangle = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) + \lambda (\operatorname{div} u) \right) \frac{\partial v^i}{\partial x_j} dx$$

Nous sommions ces équations pour $i = 1, \dots, n$ afin de faire apparaître la divergence de la fonction $v = (v_1, \dots, v_n)$ et de simplifier la première intégrale car:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v^i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v^i}{\partial x_j} + \frac{\partial v^j}{\partial x_i} \right) \\ &= 2e(u)e(v) \quad \text{où } e(u) = \frac{1}{2} \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) \end{aligned}$$

Comme $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, on obtient alors:

$$\langle Lu, v \rangle = \int_{\Omega} \mu e(u) e(v) \, dx + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v \, dx$$

En remplaçant v par u , nous obtenons:

$$\langle Lu, u \rangle = \int_{\Omega} \mu |e(u)|^2 \, dx + \int_{\Omega} \lambda |\operatorname{div} u|^2 \, dx$$

et comme L est elliptique donc:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2\mu |e(u)|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda |\operatorname{div} u|^2 dx &\geq \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \Rightarrow \int_{\Omega} (2\mu |e(u)|^2 + \lambda |\operatorname{div} u|^2) dx &\geq \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

On prend : $e(u) = e^T(u) + (\operatorname{div} u) I_n$ tel que: $|e(u)|^2 = |e^T(u)|^2 + |\operatorname{div} u|^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\Omega} \left(2\mu \left(|e^T(u)|^2 + |\operatorname{div} u|^2 \right) + \lambda |\operatorname{div} u|^2 \right) dx &\geq \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \Rightarrow \int_{\Omega} \left(2\mu |e^T(u)|^2 + (2\mu + \lambda) |\operatorname{div} u|^2 \right) dx &\geq \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Caccioppoli[AMR02], nous trouvons: $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$, donc, nous déduisons: $\int_{\Omega} 2\mu |e^T(u)|^2 dx \geq \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \Rightarrow \exists \alpha_0 > 0$ telle que $2\mu \geq \alpha_0$ et $\int_{\Omega} (2\mu + \lambda) |\operatorname{div} u|^2 dx \geq \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \Rightarrow \exists \beta_0 > 0$ telle que $2\mu + \lambda \geq \beta_0$.

En fait, la condition de convexité implique la condition d'ellipticité, avec $\beta_0 = \min(2\alpha_0, \gamma_0)$. En effet, nous supposons que la condition de convexité est vérifiée, c'est à dire: $\exists \alpha_0 > 0, \gamma_0 > 0$ des constantes telles que: $\mu(x) \geq \alpha_0, 2\mu(x) + n\lambda(x) \geq \gamma_0$ donc $\lambda(x) \geq \frac{\gamma_0 - 2\alpha_0}{n} \Rightarrow 2\mu(x) + \lambda(x) \geq \beta_0$ $\Rightarrow \lambda(x) \geq 2\alpha_0 + \frac{\gamma_0 - 2\alpha_0}{n} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } \gamma_0 - 2\alpha_0 \geq 0, \text{ il existe } \beta_0 = 2\alpha_0 \geq 0 \text{ telle que } 2\mu(x) + \lambda(x) \geq \beta_0 \\ \text{si } \gamma_0 - 2\alpha_0 \leq 0, \text{ il existe } \beta_0 = \gamma_0 \geq 0 \text{ telle que } 2\mu(x) + \lambda(x) \geq \beta_0 \end{cases} \Rightarrow \exists \beta_0 = \min(2\alpha_0, \gamma_0)$ telle que $2\mu(x) + \lambda(x) \geq \beta_0$

On ajoute à cette loi constitutive le bilan des forces dans le solide.

$$\operatorname{div} \sigma = f \text{ dans } \Omega$$

où par définition, la divergence de σ est le vecteur de composantes:

$$\operatorname{div} \sigma = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \right)_{1 \leq j \leq n}$$

Utilisant le fait que $\operatorname{tr}(e(u)) = \operatorname{div} u$, on en déduit les équations pour $1 \leq i \leq n$:

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) \right) - \lambda (\operatorname{div} u) \delta_{ij} = f_i \text{ dans } \Omega.$$

avec f_i et u_i , pour, $1 \leq i \leq n$, les composantes de f et u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$,

$$\delta_{ij} \text{ est le symbole de Kronecker } (\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases})$$

Dans ce mémoire, on prend $f = 0$, i.e le cas où le corps est en équilibre, donc l'équation ci-dessus devient :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) \right) + \lambda (\operatorname{div} u) \delta_{ij} = 0, \text{ dans } \Omega$$

On prend le cas $f = 0$ pour pouvoir réduire l'égalité ci-dessus à un système d'ordre 4 (voir la proposition (2.2.1)).

2.2 Réduction du système de Lamé à un système différentiel d'ordre 4

Proposition 2.2.1 *Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Soit $\mu, \lambda \in C^{2,1}(\bar{\Omega})$ les coefficients de Lamé satisfaisant les conditions d'ellipticité:*

$$\mu(x) \geq \alpha_0 > 0, 2\mu(x) + \lambda(x) \geq \beta_0 > 0 \quad \text{pour toute } x \in \bar{\Omega} \quad (2.2.1)$$

et la condition suivante (dite de la norme supérieure)

$$\|\mu\|_{C^{2,1}(\bar{\Omega})} + \|\lambda\|_{C^{2,1}(\bar{\Omega})} \leq M \quad (2.2.2)$$

où α_0, β_0, M sont des constantes positives. Alors, il existe une constante positive K_0 dépendant uniquement de: n, α_0, β_0, M telle que, pour toute solution $u \in H_{loc}^4(\Omega, \mathbb{R}^n)$ du système de Lamé on ait :

$$\operatorname{div}(\mu(\nabla u + (\nabla u)^T)) + \nabla(\lambda \operatorname{div} u) = 0, \text{ dans } \Omega \quad (2.2.3)$$

De plus:

$$|\Delta^2 u^i| \leq K_0 \sum_{|\alpha|=1}^3 |D^\alpha u|, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2.4)$$

preuve de la proposition (2.2.1). Soit $u = (u^1, \dots, u^n) \in H_{loc}^4(\mathbb{R}^n)$ solution de (2.2.3), ∇u est une matrice de dimension $n \times n$ telle que $\nabla u = (\partial_i u^j)_{i,j=1}^n$ et son transposé $\nabla^T u = (\partial_j u^i)_{i,j=1}^n$, $\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial x_i}$, où $n = \dim u$. On note $(\nabla \mu \quad \nabla \lambda) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mu}{\partial x_n}, \frac{\partial \lambda}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right)$ et $\begin{pmatrix} A \\ \dots\dots\dots \\ B \end{pmatrix}$ la matrice bloc, où A =matrice de dimension $n \times k$, où $k = 1, \dots, n$ (resp B le deuxième bloc). Donc, (2.2.3) s'écrit:

$$\operatorname{div} \left[\begin{pmatrix} \mu \frac{\partial u^1}{\partial x_1} & \dots & \mu \frac{\partial u^n}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu \frac{\partial u^1}{\partial x_n} & \dots & \mu \frac{\partial u^n}{\partial x_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \frac{\partial u^1}{\partial x_1} & \dots & \mu \frac{\partial u^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu \frac{\partial u^n}{\partial x_1} & \dots & \mu \frac{\partial u^n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \right] + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} (\lambda \operatorname{div} u) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} (\lambda \operatorname{div} u) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve: pour chaque $j = 1, \dots, n$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u^1}{\partial x_j} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\mu \frac{\partial u^n}{\partial x_j} \right) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u^j}{\partial x_1} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\mu \frac{\partial u^j}{\partial x_n} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda \operatorname{div} u) = 0$$

$$\Rightarrow \mu \Delta u^j + (\mu + \lambda) (\operatorname{div} u)_{x_j} = - \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \frac{\partial u^k}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \frac{\partial u^j}{\partial x_k} \right) - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right) \operatorname{div} u$$

On remarque que $\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \frac{\partial u^k}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \frac{\partial u^j}{\partial x_k} = \nabla \mu \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) e_j$ et $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right) \operatorname{div} u = \frac{1}{2} \nabla \lambda \left(\operatorname{tr} \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) \right) I_n e_j$, on a utilisé le fait que: $\operatorname{div} u = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) I_n$

$\Rightarrow$

$$\mu \Delta u^j + (\mu + \lambda) (\operatorname{div} u)_{x_j} = \frac{1}{2} (\nabla \mu \quad \nabla \lambda) \begin{pmatrix} -2 \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) e_j \\ \dots\dots\dots \\ - \left(\operatorname{tr} \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) \right) I_n e_j \end{pmatrix} \quad (2.2.5)$$

On dérive (2.2.5) par rapport x_j :

$$\mu \Delta \frac{\partial u^j}{\partial x_j} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\operatorname{div} u) = - \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \Delta u^j - \frac{\partial (\mu + \lambda)}{\partial x_j} (\operatorname{div} u)_{x_j}$$

$$+ \frac{1}{2} (\nabla \mu \quad \nabla \lambda) \begin{pmatrix} -2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) e_j \\ \dots\dots\dots \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\operatorname{tr} \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) \right) I_n e_j \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \nabla \mu \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \nabla \lambda \right) \begin{pmatrix} -2 \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) e_j \\ \dots\dots\dots \\ - \left(\operatorname{tr} \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right) \right) I_n e_j \end{pmatrix}$$

En faisant la somme, on trouve:

$$\mu \Delta (\operatorname{div} u) + (\mu + \lambda) \Delta (\operatorname{div} u) = - \nabla \mu \Delta u - \nabla (\mu + \lambda) \nabla (\operatorname{div} u)$$

$$+ \frac{1}{2} (\nabla \mu \quad \nabla \lambda) \begin{pmatrix} -2 (\Delta u + \nabla \operatorname{div} u) \\ \dots\dots\dots \\ -2 \nabla (\operatorname{div} u) \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} (\nabla^2 \mu \quad (\Delta \lambda) I_n) \begin{pmatrix} -2 \nabla u \\ \dots \\ - (\operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, on obtient:

$$(2\mu + \lambda) \Delta (\operatorname{div} u) = (\nabla \mu \quad \nabla \lambda) \begin{pmatrix} -2(\Delta u + \nabla \operatorname{div} u) \\ \dots \\ -2\nabla (\operatorname{div} u) \end{pmatrix} + (\nabla^2 \mu \quad (\Delta \lambda) I_n) \begin{pmatrix} -2\nabla u \\ \dots \\ -(\operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

Ainsi, on dérive l'équation (2.2.6) par x_j :

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta (\operatorname{div} u) &= -\frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu + \lambda) \Delta (\operatorname{div} u) \\ &+ (\nabla \mu \quad \nabla \lambda) \begin{pmatrix} -2\frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta u + \nabla \operatorname{div} u) \\ \dots \\ -2\nabla \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{div} u) \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \mu \quad \nabla \lambda) \begin{pmatrix} -2(\Delta u + \nabla \operatorname{div} u) \\ \dots \\ -2\nabla (\operatorname{div} u) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla^2 \mu \quad (\Delta \lambda) I_n) \begin{pmatrix} -2\nabla u \\ \dots \\ -(\operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} + (\nabla^2 \mu \quad (\Delta \lambda) I_n) \begin{pmatrix} -2\nabla \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ \dots \\ -\frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Après les calculs, on obtient:

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda) \nabla \Delta (\operatorname{div} u) &= -(\nabla \mu \quad \nabla \lambda) \begin{pmatrix} 2(\nabla \Delta u + \nabla^2 \operatorname{div} u + (\Delta \operatorname{div} u) I_n) \\ \dots \\ 2\nabla^2 (\operatorname{div} u) + (\Delta \operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \\ &- (\nabla^2 \mu \quad (\Delta \lambda) I_n) \begin{pmatrix} 2\nabla^2 u \\ \dots \\ \nabla (\operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} - (\nabla^2 \mu \quad \nabla^2 \lambda) \begin{pmatrix} 2(\Delta u + \nabla \operatorname{div} u) \\ \dots \\ 2\nabla (\operatorname{div} u) \end{pmatrix} \\ &- (\nabla^3 \mu \quad \nabla ((\Delta \lambda) I_n)) \begin{pmatrix} 2\nabla u \\ \dots \\ (\operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \quad (2.2.7) \end{aligned}$$

On applique maintenant le Laplacien sur (2.2.5), les calculs donnent :

$$\begin{aligned}
 \mu \Delta^2 u^j + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta (\operatorname{div} u)) &= -2 \nabla u \nabla \Delta u^j - \Delta \mu \Delta u^j - 2 \nabla (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_j} \nabla (\operatorname{div} u) \\
 &\quad - \Delta (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{div} u) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \left(\Delta \frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \Delta \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) \Delta \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right) \\
 &\quad - 2 \sum_{i=1}^n \nabla \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) \nabla \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right) \\
 &\quad - \Delta (\operatorname{div} u) \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} - (\operatorname{div} u) \Delta \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right) \\
 &\quad - 2 \nabla (\operatorname{div} u) \nabla \frac{\partial \lambda}{\partial x_j}
 \end{aligned}$$

Dans le cas général, l'inégalité ci-dessus devient:

$$\begin{aligned}
 \mu \Delta^2 u + (\mu + \lambda) \nabla (\Delta (\operatorname{div} u)) &= -4 \nabla u \nabla \Delta u - 2 \nabla (\mu + \lambda) \nabla^2 (\operatorname{div} u) - \Delta (\operatorname{div} u) \nabla \lambda - \Delta \mu \Delta u \\
 &\quad - \Delta (\mu + \lambda) \nabla (\operatorname{div} u) - 4 \nabla^2 \mu \nabla^2 u \\
 &\quad - 2 \nabla (\operatorname{div} u) \nabla^2 \lambda - 2 \nabla u \nabla \Delta \mu - (\operatorname{div} u) \nabla \Delta \lambda
 \end{aligned}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}
 \mu \Delta^2 u + (\mu + \lambda) \nabla \Delta (\operatorname{div} u) &= -(\nabla \mu \quad \nabla \lambda) \begin{pmatrix} 2(2 \nabla \Delta u + \nabla^2 \operatorname{div} u) \\ \dots \\ 2 \nabla^2 (\operatorname{div} u) + (\Delta \operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \\
 &\quad - (\nabla^2 \mu \quad \nabla^2 \lambda) \begin{pmatrix} 4 \nabla^2 u \\ \dots \\ 2 \nabla (\operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} - (\Delta \mu \quad \Delta \lambda) \begin{pmatrix} (\Delta u + \nabla \operatorname{div} u) \\ \dots \\ \nabla (\operatorname{div} u) \end{pmatrix} \\
 &\quad - (\nabla (\Delta \mu) \quad \nabla (\Delta \lambda)) \begin{pmatrix} 2 \nabla u \\ \dots \\ (\operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \tag{2.2.8}
 \end{aligned}$$

On remplace $\nabla (\Delta (\operatorname{div} u))$ dans l'équation (2.2.8) par son expression (2.2.7), on obtient

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 u \leq & \frac{1}{2\mu+\lambda} (\nabla \mu \quad \nabla \lambda) \begin{pmatrix} 2 \frac{(\mu+\lambda)}{\mu} (\Delta \operatorname{div} u) I_n + 2 \frac{(3\mu+\lambda)}{\mu} \nabla \Delta u + 2 \nabla^2 \operatorname{div} u \\ \dots \\ (\Delta \operatorname{div} u) I_n + 2 \nabla^2 (\operatorname{div} u) \end{pmatrix} \\
 & + \frac{1}{2\mu+\lambda} (\nabla^2 \mu \quad \nabla^2 \lambda) \begin{pmatrix} 2 \frac{(\mu+\lambda)}{\mu} (\Delta u + \nabla (\operatorname{div} u)) - 2 \frac{(3\mu+\lambda)}{\mu} \nabla^2 u \\ \dots \\ -2 \nabla (\operatorname{div} u) \end{pmatrix} \\
 & + (\Delta \mu \quad \Delta \lambda) \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} (\Delta u + \nabla (\operatorname{div} u)) \\ \dots \\ \frac{1}{2\mu+\lambda} \nabla (\operatorname{div} u) \end{pmatrix} \\
 & + (\nabla (\Delta \mu) \quad \nabla (\Delta \lambda)) \begin{pmatrix} \frac{2}{\mu} \nabla u \\ \dots \\ \frac{1}{2\mu+\lambda} (\operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} + \frac{2(\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)} \nabla^3 \mu \nabla u
 \end{aligned}$$

On utilise la condition d'ellipticité (2.2.1) pour majorer les quantités $\frac{1}{\mu}, \frac{1}{2\mu+\lambda}$ (i.e $\mu(x) \geq \alpha_0 > 0 \Rightarrow \frac{1}{\mu} \leq \frac{1}{\alpha_0}$ et $2\mu(x) + \lambda(x) \geq \beta_0 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2\mu+\lambda} \leq \frac{1}{\beta_0}$), on trouve:

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 u \leq & \frac{1}{\beta_0} (\nabla \mu \quad \nabla \lambda) \begin{pmatrix} 2 \frac{(\mu+\lambda)}{\alpha_0} (\Delta \operatorname{div} u) I_n + 2 \frac{(3\mu+\lambda)}{\alpha_0} \nabla \Delta u + 2 \nabla^2 \operatorname{div} u \\ \dots \\ (\Delta \operatorname{div} u) I_n + 2 \nabla^2 (\operatorname{div} u) \end{pmatrix} \\
 & + \frac{1}{\beta_0} (\nabla^2 \mu \quad \nabla^2 \lambda) \begin{pmatrix} 2 \frac{(\mu+\lambda)}{\alpha_0} (\Delta u + \nabla (\operatorname{div} u)) + 2 \frac{(3\mu+\lambda)}{\alpha_0} \nabla^2 u \\ \dots \\ 2 \nabla (\operatorname{div} u) \end{pmatrix} \\
 & + (\Delta \mu \quad \Delta \lambda) \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_0} (\Delta u + \nabla (\operatorname{div} u)) \\ \dots \\ \frac{1}{\beta_0} \nabla (\operatorname{div} u) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$+ (\nabla (\Delta \mu) \quad \nabla (\Delta \lambda)) \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha_0} \nabla u \\ \dots \\ \frac{1}{\beta_0} (\operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} + \frac{2(\mu+\lambda)}{\alpha_0 \beta_0} \nabla^3 \mu \nabla u$$

L'hypothèse (2.2.2), donne:

$$\begin{aligned} |\Delta^2 u| &\leq \frac{1}{\beta_0} M \left(\frac{2M}{\alpha_0} |\Delta \operatorname{div} u| + \frac{6M}{\alpha_0} |\nabla \Delta u| + 2 |\nabla^2 \operatorname{div} u| + |\Delta \operatorname{div} u| + 2 |\nabla^2 (\operatorname{div} u)| \right) \\ &\quad + \frac{1}{\beta_0} M \left(\frac{2M}{\alpha_0} |\Delta u| + |\nabla (\operatorname{div} u)| + \frac{6M}{\alpha_0} |\nabla^2 u| + 2 |\nabla (\operatorname{div} u)| \right) \\ &\quad + M \left(\frac{|\Delta u|}{\alpha_0} + \frac{|\nabla (\operatorname{div} u)|}{\alpha_0} + \frac{|\nabla (\operatorname{div} u)|}{\beta_0} \right) + M \left(\frac{2}{\alpha_0} |\nabla u| + \frac{M}{\beta_0} |\operatorname{div} u| \right) + \frac{2M^2}{\alpha_0 \beta_0} |\nabla u| \\ \Rightarrow |\Delta^2 u| &\leq \frac{1}{\beta_0} M \left(\frac{2M}{\alpha_0} \sum_{|\alpha|=3} |D^\alpha u| + \frac{6M}{\alpha_0} \sum_{|\alpha|=3} |D^\alpha u| + 2 \sum_{|\alpha|=3} |D^\alpha u| + \sum_{|\alpha|=3} |D^\alpha u| + 2 \sum_{|\alpha|=3} |D^\alpha u| \right) \\ &\quad + \frac{1}{\beta_0} M \left(\frac{2M}{\alpha_0} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u| + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u| + \frac{6M}{\alpha_0} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u| + 2 \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u| \right) \\ &\quad + M \left(\frac{\sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|}{\alpha_0} + \frac{\left| \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u| \right|}{\alpha_0} + \frac{\sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|}{\beta_0} \right) + M \left(\frac{2}{\alpha_0} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u| + \frac{M}{\beta_0} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u| \right) \\ &\quad + M \left(\frac{2}{\alpha_0} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u| + \frac{M}{\beta_0} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u| \right) \\ \Rightarrow |\Delta^2 u| &\leq \left(\frac{8M^2}{\alpha_0 \beta_0} + \frac{5M}{\beta_0} \right) \sum_{|\alpha|=3} |D^\alpha u| + \left(\frac{8M^2}{\alpha_0 \beta_0} + \frac{4M}{\beta_0} + \frac{2M}{\alpha_0} \right) \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u| + \left(\frac{M^2}{\beta_0} + \frac{2M}{\alpha_0} \right) \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u| \\ \Rightarrow |\Delta^2 u| &\leq \max \left[\left(\frac{8M^2}{\alpha_0 \beta_0} + \frac{5M}{\beta_0} \right), \left(\frac{8M^2}{\alpha_0 \beta_0} + \frac{4M}{\beta_0} + \frac{2M}{\alpha_0} \right), \left(\frac{M^2}{\beta_0} + \frac{2M}{\alpha_0} \right) \right] \sum_{|\alpha|=1}^3 |D^\alpha u| \end{aligned}$$

Finalement, on trouve pour chaque composante u_i l'inégalité suivante:

$$|\Delta^2 u^i| \leq K_0 \sum_{|\alpha|=1}^3 |D^\alpha u|, \quad i = 1, \dots, n$$

où K_0 dépendant de : n, α_0, β_0 , ■

Si l'on prend $u \in H^{2l}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et on refait le même travail, mais cette fois si on applique le Laplacien plusieurs fois sur le système de Lamé, on trouve:

$$|\Delta^l u^i| \leq K_0 \sum_{|\alpha|=1}^{\left[\frac{3}{2}l\right]} |D^\alpha u|, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2.9)$$

Exemple 2.2.1 Si $l = 3$, on prend $u \in H^6(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\mu, \lambda \in C^{3,2}(\bar{\Omega})$. On applique Δ sur (2.2.7) on trouve:

$$\begin{aligned}
 & (2\mu + \lambda) \nabla \Delta^2 (\operatorname{div} u) = -\nabla (2\mu + \lambda) \nabla \Delta (\operatorname{div} u) \\
 & - (\nabla \mu \quad \nabla \lambda) \begin{pmatrix} 2(\nabla \Delta^2 u + \nabla^2 \Delta \operatorname{div} u + (\Delta^2 \operatorname{div} u) I_n) \\ \dots \\ 2\nabla^2 \Delta (\operatorname{div} u) + (\Delta^2 \operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \\
 & - (\nabla^2 \mu \quad (\Delta \lambda) I_n) \begin{pmatrix} 2\nabla^2 \Delta u \\ \dots \\ \nabla (\Delta \operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \\
 & - (\nabla \Delta \mu \quad \nabla \Delta \lambda) \begin{pmatrix} 2(\nabla \Delta u + \nabla^2 \operatorname{div} u + (\Delta \operatorname{div} u) I_n) \\ \dots \\ 2\nabla^2 (\operatorname{div} u) + (\Delta \operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \\
 & - (\nabla^2 \mu \quad \nabla^2 \lambda) \begin{pmatrix} 2(\Delta^2 u + \nabla \Delta \operatorname{div} u) \\ \dots \\ 2\nabla (\Delta \operatorname{div} u) \end{pmatrix} \\
 & - (\nabla^3 \mu \quad \nabla ((\Delta \lambda) I_n)) \begin{pmatrix} 2\nabla \Delta u \\ \dots \\ (\Delta \operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \\
 & - (\nabla^2 \Delta \mu \quad (\Delta^2 \lambda) I_n) \begin{pmatrix} 2\nabla^2 u \\ \dots \\ \nabla (\operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \\
 & - (\nabla^2 \Delta \mu \quad \nabla^2 \Delta \lambda) \begin{pmatrix} 2(\Delta u + \nabla \operatorname{div} u) \\ \dots \\ 2\nabla (\operatorname{div} u) \end{pmatrix} - (\nabla^3 \Delta \mu \quad \nabla ((\Delta^2 \lambda) I_n)) \begin{pmatrix} 2\nabla u \\ \dots \\ (\operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Ensuite, on applique Δ sur (2.2.8)

$$\begin{aligned}
 \mu \Delta^3 u + (\mu + \lambda) \nabla \Delta^2 (\operatorname{div} u) &= -\nabla \mu \Delta^2 u - \nabla (\mu + \lambda) \nabla \Delta (\operatorname{div} u) \\
 &\quad - (\nabla \mu \quad \nabla \lambda) \begin{pmatrix} 2(2\nabla \Delta^2 u + \nabla^2 \Delta \operatorname{div} u) \\ \dots \\ 2\nabla^2 (\Delta \operatorname{div} u) + (\Delta^2 \operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \\
 &\quad - (\nabla^2 \mu \quad \nabla^2 \lambda) \begin{pmatrix} 4\nabla^2 \Delta u \\ \dots \\ 2\nabla (\Delta \operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \\
 &\quad - (\Delta \mu \quad \Delta \lambda) \begin{pmatrix} (\Delta^2 u + \nabla \Delta \operatorname{div} u) \\ \dots \\ \nabla \Delta (\operatorname{div} u) \end{pmatrix} \\
 &\quad - (\nabla \Delta \mu \quad \nabla \Delta \lambda) \begin{pmatrix} 2(2\nabla \Delta^2 u + \nabla^2 \Delta \operatorname{div} u) \\ \dots \\ 2\nabla^2 (\Delta \operatorname{div} u) + (\Delta^2 \operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \\
 &\quad - (\nabla (\Delta \mu) \quad \nabla (\Delta \lambda)) \begin{pmatrix} 2\nabla \Delta u \\ \dots \\ (\Delta \operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \\
 &\quad - (\nabla^2 \Delta \mu \quad \nabla^2 \Delta \lambda) \begin{pmatrix} 4\nabla^2 u \\ \dots \\ 2\nabla (\operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \\
 &\quad - (\Delta^2 \mu \quad \Delta^2 \lambda) \begin{pmatrix} (\Delta u + \nabla \operatorname{div} u) \\ \dots \\ \nabla (\operatorname{div} u) \end{pmatrix} \\
 &\quad - (\nabla (\Delta^2 \mu) \quad \nabla (\Delta^2 \lambda)) \begin{pmatrix} 2\nabla u \\ \dots \\ (\operatorname{div} u) I_n \end{pmatrix} \tag{2.2.11}
 \end{aligned}$$

On remplace $\nabla \Delta^2 (\operatorname{div} u)$ dans l'équation (2.2.11). Ensuite, on utilise les conditions d'ellipticité (2.2.1) et le fait que

$$\|\mu\|_{C^{3,2}(\bar{\Omega})} + \|\lambda\|_{C^{3,2}(\bar{\Omega})} \leq M$$

comme dans la preuve de la proposition (2.2.1)

Finalement, on obtient:

$$|\Delta^3 u^i| \leq K_0 \sum_{|\alpha|=1}^5 |D^\alpha u|, \quad i = 1, \dots, n$$

Dans les chapitres suivants, on va appliquer des estimations quantitatives et des inégalités "Doubling" sur les solutions de système (2.2.9).

Chapitre 3

Estimations quantitatives pour des systèmes elliptiques à partie principale diagonale

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on montre les estimations quantitatives ((3.2.3), (3.3.1), voir plus loin) pour les solutions des systèmes elliptiques ayant le Laplacien itéré comme partie principale diagonale:

$$|\Delta^l u^i| \leq K_0 \sum_{|\alpha| \leq \frac{3l}{2}} |D^\alpha u|, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1.1)$$

Définition 3.1.1 *La partie principale diagonale d'un système elliptique est une partie diagonale d'une matrice contenant les dérivées d'ordre le plus élevé et elle s'écrit sous la forme $\Delta^l + (\dots)$*

Exemple 3.1.1 *Soit L un opérateur différentiel tel que $L = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha D^\alpha$. On note la partie principale de L par L^* donc, $L^* = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha D^\alpha$*

Exemple 3.1.2 *La partie principale diagonale du système de Lamé suivant:*

$$\operatorname{div}(\mu (\nabla u + (\nabla u)^T)) + \nabla (\lambda \operatorname{div} u) = 0, \quad \text{dans } \Omega$$

est définie par $\mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u$.

Dans ce travail, on considère Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, de frontière $\partial\Omega$ de classe Lipshitzienne avec les constantes r_0 , M_0 citées dans le rappel.

3.2 Inégalité des trois sphères

L'histoire des inégalités des trois sphères est étroitement lié au principe du prolongement unique. L'inégalité des trois sphères pour les équations elliptiques scalaires est un résultat assez classique, datant de Landis [Land63], qui a généralisé le célèbre théorème des trois cercles d'Hadamard aux solutions des équations elliptiques. L'inégalité des trois sphères avec des normes intégrales pour les équations elliptiques scalaires sont introduites au début par Garofalo et Lin [GL86], [GL87] et plus tard développé par Kukavika [Kuk98]. Récemment, Alessandrini et Morassi [AM01] ont obtenu l'inégalité des trois sphères pour le système d'élasticité isotrope.

Proposition 3.2.1 *si u est une solution de (3.1.1) alors u est une solution de*

$$|\Delta^2 u| \leq K_0 \sqrt{n} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u|, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2.1)$$

Preuve. Soit u une solution de (3.1.1), donc on a:

$$\begin{aligned} |\Delta^l u^1| &\leq K_0 \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u| \Rightarrow |\Delta^l u^1|^2 \leq K_0^2 \left(\sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u| \right)^2 \\ |\Delta^l u^2| &\leq K_0 \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u| \Rightarrow |\Delta^l u^2|^2 \leq K_0^2 \left(\sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u| \right)^2 \\ &\vdots \\ |\Delta^l u^n| &\leq K_0 \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u| \Rightarrow |\Delta^l u^n|^2 \leq K_0^2 \left(\sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u| \right)^2 \\ |\Delta^l u|^2 &= |\Delta^l u^1|^2 + |\Delta^l u^2|^2 + \dots + |\Delta^l u^n|^2 \leq K_0^2 n \left(\sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u| \right)^2 \end{aligned}$$

où u est définie par $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$, donc :

$$|\Delta^l u| \leq K_0 \sqrt{n} \left(\sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u| \right) \quad (3.2.2)$$

■

Théorème 3.2.1 [AMRV08] (Inégalité des trois sphères) Soient $u \in H^{2l}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ solution de (3.1.1) et $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq R\} \subset \Omega$. Il existe $v \in \mathbb{R}$, $0 < v < e^{-\frac{1}{2}}$ ne dépendant que

de n, l et K_0 vérifiant $\forall r_1, r_2, r_3 : 0 < r_1 < r_2 < r_3, r_3 < R$ et tel que:

$$\int_{B_{r_2}} |u|^2 dx \leq c \left(\int_{B_{r_1}} |u|^2 dx \right)^\delta \left(\int_{B_{r_3}} |u|^2 dx \right)^{1-\delta} \quad (3.2.3)$$

où c et δ sont des constantes positives telles que $0 < \delta < 1, c > 0$, ne dépendant que de

u, l, K_0, r_1, r_2, r_3 et $B_{r_i} = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq r_i\}, i = 1, 2, 3$.

Pour démontrer le théorème (3.2.1) on va suivre les mêmes étapes que dans [LNW08], la proposition (3.2.1) et l'inégalité de Carleman utilisée dans [Lin08].

Avant de commencer la preuve, on va introduire l'inégalité de Carleman, avec poids: $\varphi_\beta = \varphi_\beta(x) = \exp\left(\frac{\beta}{2}(\log|x|)^2\right)$ donnée dans [Lin08].

Théorème 3.2.2 (Inégalité de Carleman): Il existe un nombre suffisamment grand $\beta_0 > 0$ et un nombre suffisamment petit $R_0 > 0$ dépendant de n, l , tels que pour toute $u \in U_{R_0}$ avec $0 < R_0 < e^{-1}, \beta \geq \beta_0$, on ait :

$$\sum_{|\alpha| \leq 2l} \beta^{3l-2|\alpha|} \int \varphi_\beta |x|^{2|\alpha|-n} (\log|x|)^{2l-2|\alpha|} |D^\alpha u|^2 dx \leq \tilde{C}_0 \int \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} |\Delta^l u|^2 dx \quad (3.2.4)$$

où $U_{R_0} = \{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n / \{0\}) : \text{supp } u \subset B_{R_0}\}$ et $\tilde{C}_0$ est une constante positive ne dépendant que de n, l .

Remarque 3.2.1 L'inégalité (3.2.4) dans le théorème (3.2.2) reste valable si on suppose $u \in H_{loc}^{2l}(\mathbb{R}^n / \{0\})$ avec un support compact. On peut obtenir l'inégalité facilement par utilisation d'une fonction troncature.

La preuve du théorème (3.2.1) se fait en plusieurs lemmes.

Lemme 3.2.1 Soit alors $\zeta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant : $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ et

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| \leq r_1/e \\ 1, & \text{si } r_1/2 \leq |x| \leq er_2 \\ 0, & \text{si } |x| \geq 3r_2 \end{cases}$$

où $0 < r_1 < r_2 < \frac{1}{e}$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\begin{cases} |D^\alpha \zeta| = O\left(r_1^{-|\alpha|}\right) & \text{pour toute } r_1/e \leq |x| \leq r_1/2 \\ |D^\alpha \zeta| = O\left(r_2^{-|\alpha|}\right) & \text{pour toute } er_2 \leq |x| \leq 3r_2 \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Lemme 3.2.2 Soit $u \in H^{2l}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, alors il existe une constantes C' indépendante de n et u telle que :

$$\int_{a_1 r < |x| < a_2 r} \left| |x|^{|\alpha|} D^\alpha u \right|^2 dx \leq C' \int_{a_3 r < |x| < a_4 r} |u|^2 dx \quad , |\alpha| \leq 2l \quad (3.2.6)$$

pour tout $0 < a_3 < a_1 < a_2 < a_4$, telle que, $B_{a_4 r} \subset \Omega$

Preuve. voir corollaire [17.1.4] dans [Hör] ■

Preuve. (preuve du théorème 3.2.1) Soit R' une constante positive telle que $0 < r_1 < r_2 < R' < \frac{1}{e}$ et $B_{R'} \subset \Omega$ (la constante R' peut être choisie plus tard). Nous commençons la preuve par appliquer l'inégalité de Carleman sur ζu (la fonction $\zeta(x)$ est définie dans le lemme (3.2.1)), on trouve:

$$\sum_{|\alpha| \leq 2l} \beta^{3l-2|\alpha|} \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{2|\alpha|-n} (\log |x|)^{2l-2|\alpha|} |D^\alpha u|^2 dx \quad (3.2.7)$$

$\leq$

$$\sum_{|\alpha| \leq 2l} \beta^{3l-2|\alpha|} \int \varphi_\beta^2 |x|^{2|\alpha|-n} (\log |x|)^{2l-2|\alpha|} |D^\alpha (\zeta u)|^2 dx$$

$\leq$

$$\tilde{C}_0 \int \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} |\Delta^l (\zeta u)|^2 dx$$

$\leq$

$$2\tilde{C}_0 \int \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} \zeta^2 |\Delta^l u|^2 dx + 2\tilde{C} \int \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} |[\Delta^l, \zeta] u|^2 dx$$

$$(\text{rappelons que } \Delta^l (\zeta u) = \zeta \Delta^l u + [\Delta^l, \zeta] u) \quad (3.2.8)$$

$\leq$

$$2\tilde{C}_0 \int \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} \zeta^2 \left(K_0 \sqrt{n} \left(\sum_{|\alpha| \leq [\frac{3}{2}l]} |D^\alpha u| \right) \right)^2 + 2\tilde{C} \int \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} |[\Delta^l, \zeta] u|^2 dx$$

(Notant que le commutateur $[\Delta^l, \zeta] u$ est un opérateur différentiel d'ordre $(2l-1)$)

$$\begin{aligned} |[\Delta^l, \zeta] u|^2 &= \left| \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} C_{2l-1}^\alpha D^{2l\alpha-1-|\alpha|} \zeta D^\alpha u \right|^2 \\ &\leq 2^{N_1} \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} |D^{2l-1-|\alpha|} \zeta|^2 |D^\alpha u|^2 \end{aligned}$$

Par l'utilisation de (3.2.5), on trouve:

$$\begin{aligned}
 |[\Delta^l, \zeta] u|^2 &\leq 2^{N_1} \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} \left| O\left(r_1^{2|\alpha|-4l+2}\right) 1_{r_1/e \leq |x| \leq r_1/2} + O\left(r_2^{2|\alpha|-4l+2}\right) 1_{er_2 \leq |x| \leq 3r_2} \right|^2 |D^\alpha u|^2 \\
 &\leq 2^{N_1+1} \left(C_1 \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} r_1^{2|\alpha|-4l+2} |D^\alpha u|^2 1_{r_1/e \leq |x| \leq r_1/2} + C_2 \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} r_2^{2|\alpha|-4l+2} |D^\alpha u|^2 1_{er_2 \leq |x| \leq 3r_2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

On utilise (3.2.8) pour majorer la quantité $|[\Delta^l, \zeta] u|^2$ dans (3.2.7),

$$\begin{aligned}
 &\sum_{|\alpha| \leq 2l} \beta^{3l-2|\alpha|} \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{2|\alpha|-n} (\log |x|)^{2l-2|\alpha|} |D^\alpha u|^2 dx \\
 &\leq \\
 &2^{N+1} \tilde{C}_0 K_0^2 n \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u|^2 \\
 &+ 2^{N_1+2} \tilde{C} C_1 \int_{r_1/e \leq |x| \leq r_1/2} \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} r_1^{2|\alpha|-4l+2} |D^\alpha u|^2 dx \\
 &+ 2^{N_1+2} \tilde{C} C_2 \int_{er_2 \leq |x| \leq 3r_2} \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} r_2^{2|\alpha|-4l+2} |D^\alpha u|^2 \\
 &\leq \\
 &2^{N+1} \tilde{C}_0 K_0^2 n \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u|^2 dx \\
 &+ 2^{N_1+2} \tilde{C} C_1 r_1^2 \int_{r_1/e \leq |x| \leq r_1/2} \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} (e|x|)^{2|\alpha|-4l} |D^\alpha u|^2 dx \\
 &+ 2^{N_1+2} \tilde{C} C_2 r_2^2 \int_{er_2 \leq |x| \leq 3r_2} \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} |x/e|^{2|\alpha|-4l} |D^\alpha u|^2
 \end{aligned}$$

Après les calculs, on trouve:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{|\alpha| \leq 2l} \beta^{3l-2|\alpha|} \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{2|\alpha|-n} (\log |x|)^{2l-2|\alpha|} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & \leq \\
 & 2^{N+1} \tilde{C}_0 K_0^2 n \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & + 2^{N_1+2} \tilde{C} C_1 \int_{r_1/e \leq |x| \leq r_1/2} \varphi_\beta^2 \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} |x|^{2|\alpha|-n} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & + 2^{N_1+2} \tilde{C} C_2 \int_{er_2 \leq |x| \leq 3r_2} \varphi_\beta^2 \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} |x|^{2|\alpha|-n} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & \leq \\
 & \tilde{C}_1 \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & + \tilde{C}_1 \int_{r_1/e \leq |x| \leq r_1/2} \varphi_\beta^2 \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} |x|^{2|\alpha|-n} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & + \tilde{C}_1 \int_{er_2 \leq |x| \leq 3r_2} \varphi_\beta^2 \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} |x|^{2|\alpha|-n} |D^\alpha u|^2 dx
 \end{aligned}$$

Nous prenons $\tilde{C}_1 = \max \left(2^{N+1} \tilde{C}_0 K_0^2 n, 2^{N_1+2} \tilde{C} C_1, 2^{N_1+2} \tilde{C} C_2 \right)$, où $N = \text{cardinal}\{\alpha \mid |\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]\} = 1 + \sum_{1 \leq |k| \leq [\frac{3l}{2}]} ([\frac{3l}{2}] - k + 1) C_n^k$, $N_1 = \text{cardinal}\{\alpha \mid |\alpha| \leq 2l-1\} = 1 + \sum_{1 \leq |k| \leq 2l-1} (2l-k) C_n^k$.

Ainsi, on utilise le fait que, φ_β^2 est décroissante sur les intervalles $]r_1/e, r_1/2[,]er_2, 3r_2[$:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{|\alpha| \leq 2l} \beta^{3l-2|\alpha|} \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{2|\alpha|-n} (\log |x|)^{2l-2|\alpha|} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & \leq \\
 & \tilde{C}_1 \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & + \tilde{C}_1 e^n r_1^{-n} \varphi_\beta^2(r_1/e) \int_{r_1/e \leq |x| \leq r_1/2} \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} |x|^{2|\alpha|-n} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & + \tilde{C}_1 e^{-n} r_2^{-n} \varphi_\beta^2(er_2) \int_{er_2 \leq |x| \leq 3r_2} \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} |x|^{2|\alpha|-n} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & \leq \\
 & \tilde{C}_2 \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & + \tilde{C}_2 r_1^{-n} \varphi_\beta^2(r_1/e) \int_{r_1/e \leq |x| \leq r_1/2} \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} \left(|x|^{|\alpha|} |D^\alpha u| \right)^2 dx \\
 & + \tilde{C}_2 r_2^{-n} \varphi_\beta^2(er_2) \int_{er_2 \leq |x| \leq 3r_2} \sum_{|\alpha| \leq 2l-1} \left(|x|^{|\alpha|} |D^\alpha u| \right)^2 dx
 \end{aligned}$$

avec $\tilde{C}_2 = \max(\tilde{C}_1, \tilde{C}_1 e^n, \tilde{C}_1 e^{-n})$. Par une application du (3.2.6) avec le choix suivant de $a_1 = r_1/e$, $a_2 = r_1/2$, $a_3 = r_1/4$ et $a_4 = r_1$ et la même chose pour la deuxième intégrale, on trouve:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{|\alpha| \leq 2l} \beta^{3l-2|\alpha|} \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{2|\alpha|-n} (\log |x|)^{2l-2|\alpha|} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & \leq \tilde{C}_2 \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & + \tilde{C}_2 c'_1 (2l-1) r_1^{-n} \varphi_\beta^2(r_1/e) \int_{r_1/4 \leq |x| \leq r_1} |u|^2 dx \\
 & + \tilde{C}_2 c'_2 (2l-1) r_2^{-n} \varphi_\beta^2(er_2) \int_{2r_2 \leq |x| \leq 4r_2} |u|^2 dx
 \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{|\alpha| \leq 2l} \beta^{3l-2|\alpha|} \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{2|\alpha|-n} (\log |x|)^{2l-|\alpha|} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & \leq \tilde{C}_3 \left(\int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u|^2 dx + r_1^{-n} \varphi_\beta^2(r_1/e) \int_{r_1/4 \leq |x| \leq r_1} |u|^2 dx \right. \\
 & \quad \left. + r_2^{-n} \varphi_\beta^2(er_2) \int_{2r_2 \leq |x| \leq 4r_2} |u|^2 dx \right)
 \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

On prend $\tilde{C}_3 = \max \left(\tilde{C}_2, \tilde{C}_2 c'_1 (2l-1), \tilde{C}_2 c'_2 (2l-1) \right)$. Remarquons que l'on peut minorer le premier membre de l'inégalité (3.2.9), comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} \beta^{3l-2|\alpha|} \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{2|\alpha|-n} (\log |x|)^{2l-2|\alpha|} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & \leq \\
 & \sum_{|\alpha| \leq 2l} \beta^{3l-2|\alpha|} \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{2|\alpha|-n} (\log |x|)^{2l-2|\alpha|} |D^\alpha u|^2 dx
 \end{aligned}$$

Choisissons, maintenant $r_0 < e^{-\varepsilon^{-1}([\frac{3l}{2}])^{-1}}$ avec $0 < \varepsilon < 1$, suffisamment petit tel que $(\log(er_0))^{-2} \leq \frac{1}{2\tilde{C}_3}$. En prenant $R' \leq r_0$ et $\beta \geq \beta_0 \geq \max \left\{ 2\tilde{C}_3, 1 \right\}$, on peut absorber l'intégrale du deuxième membre de l'inégalité (3.2.9) de la manière suivante en tenant compte de la remarque précédente:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} \beta^{3l-2|\alpha|} \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{2|\alpha|-n} (\log |x|)^{2l-2|\alpha|} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & \quad - \tilde{C}_3 \int_{r_1/2 < |x| < er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{4l-n} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & \leq \\
 & \tilde{C}_3 \left(r_1^{-n} \varphi_\beta^2(r_1/e) \int_{r_1/4 \leq |x| \leq r_1} |u|^2 dx + r_2^{-n} \varphi_\beta^2(er_2) \int_{er_2 \leq |x| \leq 3r_2} |u|^2 dx \right)
 \end{aligned}$$

Comme $\beta \geq 2\tilde{C}_3$ (d'après l'hypothèse) $\Rightarrow \beta^{3l-2|\alpha|} \geq (2\tilde{C}_3)^{3l-2|\alpha|}$. D'autre part: $(\log |x|)^{2l-2|\alpha|} \leq (\log(er_2))^{2l-2|\alpha|}$, $r_1 \leq r_2 \leq R'$ et $R' \leq r_0 \Rightarrow er_2 \leq er_0$ donnent:

$$(2\tilde{C}_3)^{l-|\alpha|} \leq (\log(er_0))^{2l-2|\alpha|} \leq (\log |x|)^{2l-2|\alpha|}$$

Donc:

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| \leq \frac{3}{2}l} \int_{\frac{r_1}{2} \leq |x| \leq er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{2|\alpha|-n} |D^\alpha u|^2 \left((2\tilde{C}_3)^{4l-3|\alpha|} - \tilde{C}_3 \right) \\ & \leq \\ & \left(r_1^{-n} \varphi_\beta^2(r_1/e) \int_{r_1/4 \leq |x| \leq r_1} |u|^2 dx + r_2^{-n} \varphi_\beta^2(er_2) \int_{2r_2 \leq |x| \leq 4r_2} |u|^2 dx \right) \end{aligned}$$

Nous minorons $\left((2\tilde{C}_3)^{4l-3|\alpha|} - \tilde{C}_3 \right)$: comme

$$\begin{aligned} |\alpha| \leq \left[\frac{3}{2}l \right] & \Rightarrow 4l - 3|\alpha| \geq 4l - 3 \\ & \Rightarrow \left[\frac{3}{2}l \right] \tilde{C}_3^{4l-3\left[\frac{3}{2}l \right]} \leq \tilde{C}_3^{4l-3|\alpha|} \\ \Rightarrow \tilde{C}_3 & \leq \left((2\tilde{C}_3)^2 - \tilde{C}_3 \right) \leq \left((2\tilde{C}_3)^{4l-3\left[\frac{3}{2}l \right]} - \tilde{C}_3 \right) \leq \left((2\tilde{C}_3)^{4l-3|\alpha|} - \tilde{C}_3 \right) \\ \Rightarrow & \\ & \sum_{|\alpha| \leq \left[\frac{3}{2}l \right]} \int_{\frac{r_1}{2} \leq |x| \leq er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{2|\alpha|-n} |D^\alpha u|^2 dx \tag{3.2.11} \\ & \leq \tilde{C}_4 \left(r_1^{-n} \varphi_\beta^2(r_1/e) \int_{r_1/4 \leq |x| \leq r_1} |u|^2 dx + r_2^{-n} \varphi_\beta^2(er_2) \int_{2r_2 \leq |x| \leq 4r_2} |u|^2 dx \right) \text{ avec } \tilde{C}_4 = \frac{1}{\tilde{C}_3} \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0$ l'inégalité (3.2.10) devient:

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{r_1}{2} \leq |x| \leq er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{-n} |D^\alpha u|^2 dx \\ & \leq \\ & \tilde{C}_4 \left(r_1^{-n} \varphi_\beta^2(r_1/e) \int_{r_1/4 \leq |x| \leq r_1} |u|^2 dx + r_2^{-n} \varphi_\beta^2(er_2) \int_{2r_2 \leq |x| \leq 4r_2} |u|^2 dx \right) \end{aligned}$$

On observe que :

$$\begin{aligned} & r_2^{-n} \varphi_\beta^2(r_2) \int_{\frac{r_1}{2} \leq |x| \leq r_2} |u|^2 dx \\ & \leq \\ & \int_{\frac{r_1}{2} \leq |x| \leq r_2} \varphi_\beta^2 |x|^{-n} |u|^2 dx \\ & \leq \\ & \int_{\frac{r_1}{2} \leq |x| \leq er_2} \varphi_\beta^2 |x|^{-n} |u|^2 dx \end{aligned}$$

Par suite:

$$r_2^{-n} \varphi_\beta^2(r_2) \int_{\frac{r_1}{2} \leq |x| \leq r_2} |u|^2 dx \leq \tilde{C}_4 \left(r_1^{-n} \varphi_\beta^2(r_1/e) \int_{r_1/4 \leq |x| \leq r_1} |u|^2 dx + r_2^{-n} \varphi_\beta^2(er_2) \int_{2r_2 \leq |x| \leq 4r_2} |u|^2 dx \right) \quad (3.2.12)$$

Divisant les deux membres de (3.2.11) par $r_2^{-n} \varphi_\beta^2(r_2)$:

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{r_1}{2} \leq |x| \leq r_2} |u|^2 dx \\ & \leq \\ & \tilde{C}_4 ((r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(r_1/e) / \varphi_\beta^2(r_2)] \int_{r_1/4 \leq |x| \leq r_1} |u|^2 dx + [\varphi_\beta^2(er_2) / \varphi_\beta^2(r_2)] \int_{2r_2 \leq |x| \leq 4r_2} |u|^2 dx) \\ & = \\ & \tilde{C}_4 ((r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(r_1/e) / \varphi_\beta^2(r_2)] \left[\int_{|x| < r_1} |u|^2 dx - \int_{|x| < r_1/4} |u|^2 dx \right] \\ & + [\varphi_\beta^2(er_2) / \varphi_\beta^2(r_2)] \left[\int_{|x| < 4r_2} |u|^2 dx - \int_{|x| < 2r_2} |u|^2 dx \right]) \end{aligned}$$

On fait un changement de variable dans l'intégrale $\int_{|x| < r_1/4} |u|^2 dx$, on pose:

$$y = 4x \Rightarrow dy = 4^n dx \Rightarrow \int_{|x| < r_1/4} |u(x)|^2 dx = \frac{1}{4^n} \int_{|x| < r_1} |u(y)|^2 dy$$

Comme y est une variable muette, nous récupérons $\frac{1}{4^n} \int_{|x| < r_1} |u(x)|^2 dx$. Pour l'intégrale $\int_{|x| < 2r_2} |u|^2 dx$, on procède de la même manière: on pose $z = 2x$, l'intégrale devient alors: $2^{-n} \int_{|z| < 4r_2} |u|^2 dz$ donc nous récupérons $2^{-n} \int_{|x| < 4r_2} |u|^2 dx \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{r_1}{2} \leq |x| \leq r_2} |u|^2 dx \\ & \leq \\ & \tilde{C}_4 (r_2/r_1)^{-n} [\varphi_\beta^2(r_1/e) / \varphi_\beta^2(r_2)] \left[\int_{|x| < r_1} |u|^2 dx - 4^{-n} \int_{|x| < r_1} |u|^2 dx \right] \\ & + \tilde{C}_4 [\varphi_\beta^2(er_2) / \varphi_\beta^2(r_2)] \left[\int_{|x| < 4r_2} |u|^2 dx - 2^{-n} \int_{|x| < 4r_2} |u|^2 dx \right] \\ & \leq \\ & \tilde{C}_4 (r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(r_1/e) / \varphi_\beta^2(r_2)] \int_{|x| < r_1} |u|^2 dx \\ & + \tilde{C}_4 (r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(er_2) / \varphi_\beta^2(r_2)] \int_{|x| < 4r_2} |u|^2 dx \end{aligned}$$

En tenant compte des hypothèses données dans le théorème (3.2.1) : $r_1 < r_2 < vr_3 < e^{-\frac{1}{2}}r_3 \Rightarrow \frac{r_1}{r_1} < \frac{r_2}{r_1} < \frac{vr_3}{r_1} < \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{r_1} \Rightarrow 1 < \frac{r_2}{r_1} < \frac{vr_3}{r_1} < \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{r_1} \Rightarrow (1 - 2^{-n}) < 1 < \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{r_1}{2} \leq |x| \leq r_2} |u|^2 dx &\leq \tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(r_1/e) / \varphi_\beta^2(r_2)] \int_{|x| < r_1} |u|^2 dx \\ &\quad + \tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(er_2) / \varphi_\beta^2(r_2)] \int_{|x| < 4r_2} |u|^2 dx \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

où $\tilde{C}_5 = \max(\tilde{C}_4, 1)$ avec un tel choix de $\tilde{C}_5$, on peut voir que : $\tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(r_1/e) / \varphi_\beta^2(r_2)] > 1$, car: d'après les hypothèses:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_5 &= \max(\tilde{C}_4, 1) \geq 1 \\ \frac{r_2}{r_1} > 1 &\Rightarrow \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n > 1 \\ \frac{\varphi_\beta^2(r_1/e)}{\varphi_\beta^2(r_2)} &= \frac{\left(\exp\left(\frac{\beta}{2}(\log(r_1/2))\right)\right)^2}{\left(\exp\left(\frac{\beta}{2}(\log(r_2))\right)\right)^2} = \exp \beta (\log(r_1/e) - \log(r_2))^2 > 1 \end{aligned}$$

Donc $\tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(r_1/e) / \varphi_\beta^2(r_2)] > 1$ pour toute $0 < r_1 < r_2$. Ajoutant maintenant aux deux membres de (3.2.12) la quantité $\int_{|x| < r_1/2} |u|^2 dx$. Ceci donne:

$$\begin{aligned} &\int_{|x| < r_1/2} |u|^2 dx + \int_{\frac{r_1}{2} \leq |x| \leq r_2} |u|^2 dx \\ &\leq \\ &\int_{|x| < r_1/2} |u|^2 dx + \tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(r_1/e) / \varphi_\beta^2(r_2)] \int_{|x| < r_1} |u|^2 dx \\ &\quad + \tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(er_2) / \varphi_\beta^2(r_2)] \int_{|x| < 4r_2} |u|^2 dx \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\int_{|x| \leq r_2} |u|^2 dx \\ &\leq \\ &\int_{|x| < r_1/2} |u|^2 dx + \tilde{C}_5 \left((r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(r_1/e) / \varphi_\beta^2(r_2)] \int_{|x| < r_1} |u|^2 dx \right) \\ &\quad + \tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(er_2) / \varphi_\beta^2(r_2)] \int_{|x| < 4r_2} |u|^2 dx \end{aligned}$$

Comme $r_1 < r_2$:

$$\int_{|x| < r_1/2} |u|^2 dx < \int_{|x| < r_1} |u|^2 dx$$

et comme $\tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(er_2)/\varphi_\beta^2(r_2)] > 1 \Rightarrow$

$$\int_{|x|<r_1/2} |u|^2 dx < \int_{|x|<r_1} |u|^2 dx < \tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(r_1/e)/\varphi_\beta^2(r_2)] \int_{|x|<r_1} |u|^2 dx$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \int_{|x|<r_1/2} |u|^2 dx + \tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(r_1/e)/\varphi_\beta^2(r_2)] \int_{|x|<r_1} |u|^2 dx \\ & \leq \\ & 2\tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(r_1/e)/\varphi_\beta^2(r_2)] \int_{|x|<r_1} |u|^2 dx \end{aligned}$$

Considérons maintenant le terme $\int_{|x|<4r_2} |u|^2 dx$: $\int_{|x|<4r_2} |u|^2 dx \leq \int_{|x|<1} |u|^2 dx$, car on choisit $r_2 = \min \{r_0, \frac{1}{4}\} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_{|x|\leq r_2} |u|^2 dx & \leq 2\tilde{C}_5 \left((r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(r_1/e)/\varphi_\beta^2(r_2)] \int_{|x|<r_1} |u|^2 dx \right) \\ & + 2\tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n [\varphi_\beta^2(er_2)/\varphi_\beta^2(r_2)] \int_{|x|<1} |u|^2 dx \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Notons : $A = \beta^{-1} \log [\varphi_\beta^2(r_1/e)/\varphi_\beta^2(r_2)] = (\log r_1 - 1)^2 - (\log r_2)^2 \geq 0$; $B = -\beta^{-1} \log [\varphi_\beta^2(er_2)/\varphi_\beta^2(r_2)] = -1 - 2 \log r_2 > 0$; On utilise les notations ci-dessus dans (3.2.13):

$$\int_{|x|\leq r_2} |u|^2 dx \leq 2\tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n \left(\exp(A\beta) \int_{|x|<r_1} |u|^2 dx + \exp(-B\beta) \int_{|x|<1} |u|^2 dx \right) \quad (3.2.15)$$

Ainsi, on considère trois cas :

1. si $\int_{|x|<r_1} |u|^2 dx \neq 0$ et $\exp(A\beta_0) \int_{|x|<r_1} |u|^2 dx < \exp(-B\beta_0) \int_{|x|<1} |u|^2 dx$.alors, on peut prendre $\beta > \beta_0$ telle que: $\exp(A\beta) \int_{|x|<r_1} |u|^2 dx = \exp(-B\beta) \int_{|x|<1} |u|^2 dx$.

Pour un tel β , on trouve:

$$\begin{aligned} \int_{|x|\leq r_2} |u|^2 dx & \leq 2\tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n \left(\exp(A\beta) \int_{|x|<r_1} |u|^2 dx + \exp(A\beta) \int_{|x|<r_1} |u|^2 dx \right) \\ & = 4\tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n \exp(A\beta) \int_{|x|<r_1} |u|^2 dx \\ & = 4\tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n \exp(A\beta) \left(\int_{|x|<r_1} |u|^2 dx \right)^{\frac{B+A}{A+B}} \\ & = 4\tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n \left(\int_{|x|<r_1} |u|^2 dx \right)^{\frac{B}{A+B}} \left(\exp(-A\beta - B\beta) \int_{|x|<1} |u|^2 dx \right)^{\frac{A}{A+B}} \\ & = 4\tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n \left(\int_{|x|<r_1} |u|^2 dx \right)^{\frac{B}{A+B}} \exp(A\beta) \exp(-A\beta) \left(\int_{|x|<1} |u|^2 dx \right)^{\frac{A}{A+B}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\int_{|x| \leq r_2} |u|^2 dx \leq 4\tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n \left(\int_{|x| < r_1} |u|^2 dx \right)^{\frac{B}{A+B}} \left(\int_{|x| < 1} |u|^2 dx \right)^{\frac{A}{A+B}} \quad (3.2.16)$$

2. Si $\int_{|x| < r_1} |u|^2 dx = 0$, alors de (3.2.15) on a: $\int_{|x| < r_2} |u|^2 dx = 0$, comme on peut prendre β arbitraire grand, l'inégalité des trois sphères est évidemment vérifiée.

3. si $\exp(-B\beta_0) \int_{|x| < 1} |u|^2 dx \leq \exp(-(A\beta_0)) \int_{|x| < r_1} |u|^2 dx$, on obtient alors:

$$\begin{aligned} \int_{|x| < r_1} |u|^2 dx &\leq \int_{|x| < 1} |u|^2 dx \\ &= \left(\int_{|x| < 1} |u|^2 dx \right)^{\frac{B+A}{A+B}} \\ &= \left(\int_{|x| < 1} |u|^2 dx \right)^{\frac{B}{A+B}} \left(\int_{|x| < 1} |u|^2 dx \right)^{\frac{A}{A+B}} \\ &\leq \left(\exp(B\beta_0 + A\beta_0) \int_{|x| < r_1} |u|^2 dx \right)^{\frac{B}{A+B}} \left(\int_{|x| < 1} |u|^2 dx \right)^{\frac{A}{A+B}} \end{aligned}$$

(car $r_2 < 1$). Donc, on a obtient:

$$\int_{|x| < r_2} |u|^2 dx \leq \exp(\beta_0 B) \left(\int_{|x| < r_1} |u|^2 dx \right)^{\frac{B}{A+B}} \left(\int_{|x| < 1} |u|^2 dx \right)^{\frac{A}{A+B}} \quad (3.2.17)$$

Combinant (3.2.15), (3.2.16) et prenant $\tilde{C}_6 = \max \left\{ 4\tilde{C}_5 (r_2/r_1)^n, \exp(\beta_0 B) \right\}$, on arrive à :

$$\int_{|x| < r_2} |u|^2 dx \leq \tilde{C}_6 \left(\int_{|x| < r_1} |u|^2 dx \right)^{\frac{B}{A+B}} \left(\int_{|x| < 1} |u|^2 dx \right)^{\frac{A}{A+B}} \quad (3.2.18)$$

Maintenant, pour le cas général, on prend $v = R'$ et considérant $0 < r_1 < r_2 < r_3$, avec $0 < \frac{r_1}{r_3} < \frac{r_2}{r_3} < v < e^{-\frac{1}{2}}$. Faisons le changement de variable suivant

$$\begin{aligned} x = r_3 y &\Rightarrow r_3 \int_{|y| < \frac{r_2}{r_3}} |u|^2 dy \leq \tilde{C}_6 \left(r_3 \int_{|y| < \frac{r_1}{r_3}} |u|^2 dy \right)^{\frac{B}{A+B}} \left(r_3 \int_{|x| < \frac{1}{r_3}} |u|^2 dx \right)^{\frac{A}{A+B}} \\ &\Rightarrow \int_{|y| < \frac{r_2}{r_3}} |u|^2 dy \leq \frac{\tilde{C}_6}{r_3} \left(\int_{|y| < \frac{r_1}{r_3}} |u|^2 dy \right)^{\frac{B}{A+B}} \left(\int_{|x| < \frac{1}{r_3}} |u|^2 dx \right)^{\frac{A}{A+B}} \\ &\Rightarrow \int_{|y| < \frac{r_2}{r_3}} |u(r_3 y)|^2 dy \leq \frac{\tilde{C}_6}{r_3} \left(\int_{|y| < \frac{r_1}{r_3}} |u(r_3 y)|^2 dy \right)^{\frac{B}{A+B}} \left(\int_{|x| < \frac{1}{r_3}} |u(r_3 y)|^2 dx \right)^{\frac{A}{A+B}} \end{aligned}$$

Posons maintenant:

$$\hat{u}(y) = u(r_3 y) \int_{|y| < \frac{r_2}{r_3}} |\hat{u}(y)|^2 dy \leq \tilde{C}_6 \left(\int_{|y| < \frac{r_1}{r_3}} |\hat{u}(y)|^2 dy \right)^{\frac{B}{A+B}} \left(\int_{|x| < \frac{1}{r_3}} |\hat{u}(y)|^2 dx \right)^{\frac{A}{A+B}}$$

$$\int_{|y| < \frac{r_2}{r_3}} |\hat{u}|^2 dy \leq c \left(\int_{|y| < \frac{r_1}{r_3}} |\hat{u}|^2 dy \right)^\tau \left(\int_{|x| < \frac{1}{r_3}} |\hat{u}|^2 dx \right)^{1-\tau} \quad (3.2.19)$$

où $\tau = B/(A+B)$ avec $A = A\left(\frac{r_1}{r_3}, \frac{r_2}{r_3}\right) = (\log(r_1/r_3) - 1)^2 - (\log(r_2/r_3))^2$; $B =$

$B\left(\frac{r_2}{r_3}\right) = -1 - 2\log\left(\frac{r_2}{r_3}\right)$; et $c = \max\left\{4\tilde{C}_5(r_2/r_1)^n, \exp(\beta_0 B)\right\}$, notant que $\tilde{C}_5$ peut

être choisi indépendamment du facteur scalaire r_3 à condition que: $r_3 < 1$. Remplaçant la variable $y = x/r_3$ dans (3.2.18) donne:

$$\int_{|x| < r_2} |u|^2 dx \leq c \left(\int_{|x| < r_1} |u|^2 dx \right)^\tau \left(\int_{|x| < r_3} |u|^2 dx \right)^{1-\tau}$$

■

3.3 Propagation Lipschitz de la petitesse

Théorème 3.3.1 (AMRV08) (*Propagation Lipschitz de la petitesse*): Sous les hypothèses du théorème (3.2.1), $\forall \rho > 0$, $\forall x \in \Omega_{\frac{4\rho}{\nu}}$ où $\Omega_{\frac{4\rho}{\nu}} = \{x \in \Omega / \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{4\rho}{\nu}\}$. On a:

$$\int_{B_\rho(x)} |u|^2 dx \geq C_\rho \int_\Omega |u|^2 dx \quad (3.3.1)$$

où ν est introduit dans le théorème (3.2.1) et C_ρ dépendant uniquement de $n, l, K_0, M_0, r_0, |\Omega|$ et $\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} / \|u\|_{L^2(\Omega)}$.

Preuve. On suit les mêmes étapes que dans [AMR02, proposition (4.1)].

Fixons ρ_0 dépendant uniquement de r_0, M_0 telle que: $\forall \rho \leq \rho_0$, $\Omega_{\frac{4\rho}{\nu}}$ soit connexe. Etant donné $y \in \Omega_{\frac{4\rho}{\nu}}$, soit γ un arc qui relie les deux points x et y ; $\forall x \in \Omega_{\frac{4\rho}{\nu}}$. Nous définissons la famille $\{x_i\}$, $i = 1, \dots, L$, comme suit: $x_1 = x$, $x_{i+1} = \gamma(t_i)$, où $t_i = \max\{t / |\gamma(t) - x_i| = 2\rho\}$ si $|x_i - y| > 2\rho$, sinon, soit $i = L$ et dans ce cas $x_{L+1} = y$. Alors, par construction, les boules $B_\rho(x_i)$ où $B_\rho(x_i) = \{z / |x_i - z| < \rho\}$ sont deux à deux disjointes, en effet, montrons le par l'absurde: supposons que $B_\rho(x_i) \cap B_\rho(x_{i+1}) \neq \emptyset$ alors il existe un élément $z \in B_\rho(x_i) \cap B_\rho(x_{i+1}) \Rightarrow |z - x_i| < \rho$ et $|z - x_{i+1}| > \rho \Rightarrow 2\rho = |x_i - x_{i+1}| = |(x_i - z) - (x_{i+1} - z)| \leq |(x_i - z)| + |(x_{i+1} - z)| < 2\rho$: contradiction, donc les boules sont deux à deux disjointes, $|x_i - x_{i+1}| = 2\rho$, $|x_L - y| \leq 2\rho$.

Comme $x_i \in \Omega_{\frac{4\rho}{v}}$ car pour $i = 1$, $x_1 = x$ et $x \in \Omega_{\frac{4\rho}{v}}$ d'après l'hypothèse du théorème (3.3.1), pour $i \neq 1$, on a $x_{i+1} = \gamma(t_i)$ pour $i = 1, \dots, L$, et d'après l'hypothèse $\gamma \in \Omega_{\frac{4\rho}{v}} \Rightarrow x \in \Omega$, donc on peut appliquer le théorème (3.2.1) en prenant $R = 4\rho_0$, $v > \frac{1}{2}$, $x = x_i$, $r_1 = \rho$, $r_2 = 2\rho$, $r_3 = 4\rho$, pour $i = 1 \dots L - 1$ donc:

$$\int_{|x| < 2\rho} |u|^2 dx_i \leq C \left(\int_{|x_i| < \rho} |u|^2 dx_i \right)^\delta \left(\int_{|x_i| < 4\rho} |u|^2 dx_i \right)^{1-\delta}$$

où $C > 0$, $0 < \delta < 1$, dépendant uniquement de n , l , K_0 , ρ . D'autre part, on utilise les inégalités: $\|u\|_{\|L^2(B_\rho(x_{i+1}))\|}^2 \leq \|u\|_{\|L^2(B_{2\rho}(x_i))\|}^2$ (car $B_\rho(x_{i+1}) \subset B_{2\rho}(x_i)$), $\|u\|_{\|L^2(B_\rho(x_{i+1}))\|}^2 \leq \|u\|_{\|L^2(B_{2\rho}(x_i))\|}^2$ et le fait que: $B_{4\rho}(x_i) \subset \Omega$, $0 < \delta < 1$. pour trouver:

$$\begin{aligned} \left(\int_{|x_i| < 4\rho} |u|^2 dx_i \right)^{1-\delta} &\leq \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx_i \right)^{1-\delta} \\ \int_{|x| < \rho} |u|^2 dx_i &\leq C \left(\int_{|x_i| < \rho} |u|^2 dx_i \right)^\delta \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx_i \right)^{1-\delta} \end{aligned}$$

Combinant les deux inégalités, on obtient:

$$\frac{\|u\|_{L^2(B_\rho(x_{i+1}))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \leq C \left(\frac{\|u\|_{L^2(B_\rho(x_i))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right)^\delta \quad (3.3.2)$$

où C dépend uniquement de K_0 , ρ , n , l . Notre objectif maintenant est de montrer l'inégalité :

$$\frac{\|u\|_{L^2(B_\rho(x_{i+1}))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \leq C^{\frac{1}{1-\delta}} \left(\frac{\|u\|_{L^2(B_\rho(x_i))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right)^{\delta^l}$$

Pour cela notre, on fait varier l'indice i dant (3.3.2) de $1, \dots, L$:

Pour $i = 1$

$$\frac{\|u\|_{L^2(B_\rho(x_2))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \leq C \left(\frac{\|u\|_{L^2(B_\rho(x_1))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right)^\delta$$

Pour $i = 2$

$$\frac{\|u\|_{L^2(B_\rho(x_3))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \leq C^{1+\delta} \left(\frac{\|u\|_{L^2(B_\rho(x_1))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right)^{\delta^2}$$

Pour $i = 3$

$$\frac{\|u\|_{L^2(B_\rho(x_4))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \leq C^{1+\delta+\delta^2} \left(\frac{\|u\|_{L^2(B_\rho(x_1))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right)^{\delta^3}$$

$\vdots$

Pour $i = L - 1$

$$\frac{\|u\|_{L^2(B_\rho(x_L))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \leq C^{1+\delta+\delta^2+\dots+\delta^{L-2}} \left(\frac{\|u\|_{L^2(B_\rho(x_1))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right)^{\delta^{L-1}}$$

Pour $i = L$

$$\frac{\|u\|_{L^2(B_\rho(x_{L+1}))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \leq C^{1+\delta+\delta^2+\dots+\delta^{L-1}} \left(\frac{\|u\|_{L^2(B_\rho(x_1))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right)^{\delta^L}$$

Comme: $x_1 = x$, $x_{L+1} = y$, et $1 + \delta + \delta^2 + \dots + \delta^{L-1} = \frac{1-\delta^L}{1-\delta}$, on a $0 < \delta < 1$
 $\Rightarrow \delta^L < \delta < 1 \Rightarrow C^{\frac{1-\delta^L}{1-\delta}} < C^{\frac{1}{1-\delta}}$, on obtient:

$$\frac{\|u\|_{L^2(B_\rho(y))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \leq C^{\frac{1}{1-\delta}} \left(\frac{\|u\|_{L^2(B_\rho(x))}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right)^{\delta^L} \quad (3.3.3)$$

Notant que $L \leq \frac{|\Omega|}{\omega_n \rho^n}$

Nous couvrons maintenant l'intérieur $\Omega_{\frac{5\rho}{v}}$ par des cubes fermées de côté $l = \frac{2\rho}{\sqrt{nv}}$, un tel cube est inclus dans une boule de rayon ρ et de centre dans $\Omega_{\frac{4\rho}{v}}$ car ces cubes sont des boules de centre x dans $\Omega_{\frac{5\rho}{v}}$ et de rayon l , donc $d(x, \partial\Omega) > \frac{5\rho}{v} > \frac{4\rho}{v}$ et pour n très grand, on a: $l \leq \rho$ Comme $\Omega_{\frac{5\rho}{v}} \subset \Omega$ Le nombre des cubes dans $\Omega_{\frac{5\rho}{v}}$ ne dépasse pas $N = \frac{|\Omega|}{l^n} = \frac{|\Omega| n^{\frac{n}{2}} v^n}{2^n \rho^n}$ donc $\Omega_{\frac{5}{v}} \subset \cup_{i=1}^N B_\rho(x_i) \Rightarrow \|u\|_{\Omega_{\frac{5\rho}{v}}}^2 \leq N \|u\|_{B_\rho(x_i)}^2$.

Pour $i = L + 1$, on a $x_{L+1} = y$ donc l'inégalité ci-dessus devient:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \|u\|_{\Omega_{\frac{5\rho}{v}}} \leq \|u\|_{B_\rho(y)} \quad (3.3.4)$$

On utilise l'inégalité (3.3.4) dans (3.3.3), on trouve:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\|u\|_{\Omega_{\frac{5\rho}{v}}}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \leq C^{\frac{1}{1-\delta}} \left(\frac{\|u\|_{B_\rho(y)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right)^{\delta^L} \\ \Rightarrow & \frac{\|u\|_{L^2(\Omega_{\frac{5\rho}{v}})}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \leq \frac{\sqrt{|\Omega| n^{\frac{n}{2}} v^n}}{\sqrt{2^n \rho^n}} C^{\frac{1}{1-\delta}} \left(\frac{\|u\|_{B_\rho(y)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right)^{\delta^L} \\ \Rightarrow & \frac{\|u\|_{L^2(\Omega_{\frac{5\rho}{v}})}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \leq \frac{C}{\rho^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{\|u\|_{B_\rho(y)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right)^{\delta^L} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

avec $L \leq \frac{|\Omega|}{\omega_n \rho^n}$, les constantes $C > 0$ et δ , $0 < \delta < 1$, dépendent uniquement de n, l, K_0 .

Ainsi, on écrit le rapport $\frac{\|u\|_{L^2(\Omega_{\frac{5\rho}{v}})}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}}$ sous une autre manière:

$$\frac{\|u\|_{L^2(\Omega_{\frac{5\rho}{v}})}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\|u\|_{L^2(\Omega)} - \|u\|_{L^2(\Omega/\Omega_{\frac{5\rho}{v}})}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} = 1 - \frac{\|u\|_{L^2(\Omega/\Omega_{\frac{5\rho}{v}})}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \quad (3.3.6)$$

En utilisant l'inégalité d'Hölder : "Si $1 < p < \infty$ et $u \in L^p(\Omega)$, $w \in L^{p'}(\Omega)$, alors

$uv \in L^1(\Omega)$ et $\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}$, posant $u = u, v = 1, p = \frac{n}{n-1}, q = n$,
 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega/\Omega_{\frac{5\rho}{V}})}^2 &\leq \left(\int_{\Omega/\Omega_{\frac{5\rho}{V}}} |u|^{2(\frac{n}{n-1})} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_{\Omega/\Omega_{\frac{5\rho}{V}}} (1)^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \left| \Omega/\Omega_{\frac{5\rho}{V}} \right|^{\frac{1}{n}} \left(\left(\int_{\Omega/\Omega_{\frac{5\rho}{V}}} |u|^{2(\frac{n}{n-1})} \right)^{\frac{n-1}{2n}} \right)^2 \\ \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega/\Omega_{\frac{5\rho}{V}})}^2 &\leq \left| \Omega/\Omega_{\frac{5\rho}{V}} \right|^{\frac{1}{n}} \|u\|_{L^{2n/(n-1)}(\Omega/\Omega_{\frac{5\rho}{V}})}^2 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Pour l'étape suivante, on va utiliser le théorème (7.57) dans [AD75] page 217, et on peut l'appliquer car Ω est borné et sa frontière est lipschitzienne, prenant $s = \frac{1}{2}, p = 2, r = \frac{2n}{n-1} \Rightarrow \forall n \geq 1, Id: H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \rightarrow L^{\frac{2n}{n-1}}(\Omega)$ est continu $\Rightarrow$

$$\|u\|_{L^{2n/(n-1)}(\Omega)}^2 \leq C \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)}^2 \quad (3.3.8)$$

On a donc:

$$\|u\|_{L^{2n/(n-1)}(\Omega/\Omega_{\frac{5\rho}{V}})}^2 \leq C \left| \Omega/\Omega_{\frac{5\rho}{V}} \right|^{\frac{1}{n}} \|u\|_{H^{1,2}(\Omega)}^2 \quad (3.3.9)$$

où C dépend uniquement de r_0, M_0 et $|\Omega|$

De plus:

$$\left| \Omega/\Omega_{\frac{5\rho}{V}} \right| \leq C\rho \quad (3.3.10)$$

où C dépend uniquement de r_0, M_0 et $|\Omega|$, (voir l'estimation [A₃] dans [AR98] pour les détails)).

Utilisant (3.3.7), (3.3.9), (3.3.10) et $\frac{\|u\|_{L^2(\Omega_{\frac{5\rho}{V}})}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \geq \left(1 - \frac{cst\rho^{\frac{1}{n}}\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right) \Rightarrow$ il existe $\bar{\rho} > 0$,

dépendant uniquement de $r_0, M_0, |\Omega|$, et $\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)}^2 / \|u\|_{L^2(\Omega)}$ telle que $\frac{cst\rho^{\frac{1}{n}}\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \leq \frac{1}{2}$

Par suite:

$$\frac{\|u\|_{L^2(\Omega_{\frac{5\rho}{V}})}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \geq \frac{1}{2} \quad (3.3.11)$$

pour toute $0 < \rho \leq \bar{\rho}$.

De (3.3.5), (3.3.11), on déduit :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\|u\|_{L^2(\Omega_{\frac{5\rho}{V}})}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \leq \frac{C}{\rho^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{\|u\|_{B_{\rho}(y)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right)^{\delta^l} \Rightarrow \left(\frac{\rho^{\frac{n}{2}}}{2C} \right)^{\frac{1}{\delta^l}} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{B_{\rho}(x)}, \text{ pour toute } \rho, 0 < \rho \leq \bar{\rho}$$

En prenant $C_\rho = \left(\frac{\rho^{\frac{n}{2}}}{2C}\right)^{\frac{1}{\delta l}}$ on obtient:

$$\int_{B_\rho(x)} |u|^2 dx \geq C_\rho \int_{\Omega} |u|^2 dx \quad (3.3.12)$$

où C_ρ dépend uniquement de : $n, l, K_0, r_0, M_0, |\Omega|, \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} / \|u\|_{L^2(\Omega)}$ et ρ . ■

Chapitre 4

les inégalités "Doubling" pour les systèmes elliptiques

4.1 Introduction:

Dans ce chapitre, nous traitons les inégalités "Doubling" (locale et globale: (4.2.1) et (4.3.1)) pour les solutions du système elliptique suivant:

$$|\Delta^l u^i| \leq K_0 \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u|, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1.1)$$

L'inégalité "Doubling" locale peut s'appliquer sur (4.1.1) mais pour des solutions $u \in H^{2l}(B_1, \mathbb{R}^n)$ de (4.1.1), c'est-à-dire des solutions qui vivent dans la boule unité $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ (voir théorème (4.2.1)). On définit cette inégalité par:

$$\int_{B_{2r}} |u|^2 dx \leq K \int_{B_r} |u|^2 dx, \text{ pour toute, } 0 < r \leq v^*$$

les constantes v^* , K dépend de n , l , K_0 et du rapport:

$$F_{loc} = \frac{\|u\|_{L^2(B_{R_0^2})}}{\|u\|_{L^2(B_{R_0^4})}}$$

où $R_0 \in (0, 1)$ dépend de n , l , K_0 .

La preuve de cette inégalité a été établie par C-Lin, S-Nagayasu, et J. N Wang ([LN_g W08], théorème (1.3)). Leurs preuves sont basées sur les inégalités de type Carleman. Notre preuve est basée sur [LN_g W08] mais avec des expressions plus explicites pour R_0 , v^* et K .

Dans la deuxième section, on généralise l'inégalité "Doubling" locale i.e au lieu de prendre des solutions dans B_1 , on prend des solutions qui vivent dans tout l'espace Ω (Ω est un ouvert borné de frontière de classe Lipschitzienne). L'inégalité "Doubling" globale est définie par:

$$\int_{B_{2r}(x_0)} |u|^2 dx \leq K \int_{B_r(x_0)} |u|^2 dx, \text{ pour toute, } 0 < r \leq \frac{v}{2} \bar{r}$$

$\bar{r} > 0$ et $x_0 \in \Omega_{\bar{r}}$, K ne dépendant que de $n, l, K_0, r_0, M_0, |\Omega|, \bar{r}$ et $\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \setminus \|u\|_{L^2(\Omega)}$.

Pour la preuve de la version globale de l'inégalité "Doubling", on utilise l'inégalité "Doubling" locale et l'article [AMRV08].

4.2 l'inégalité "Doubling" locale (la solution vit dans une boule de Ω)

Théorème 4.2.1 (AMRV08) (l'inégalité "Doubling" locale). Soit $u \in H^{2l}(B_1, \mathbb{R}^n)$ une solution non triviale de (4.1.1) dans $B_1 \subset \mathbb{R}^n$, où $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. Il existe une constante $R_0 \in (0, 1)$, $v^* \in (0, \frac{1}{2})$, $K > 0$ telle que :

$$\int_{B_{2r}} |u|^2 dx \leq K \int_{B_r} |u|^2 dx, \text{ pour toute, } 0 < r \leq v^* \quad (4.2.1)$$

R_0 dépend de n, l, K_0 , alors que v^*, K dépend de n, l, K_0 et du rapport:

$$F_{loc} = \frac{\|u\|_{L^2(B_{R_0^2})}}{\|u\|_{L^2(B_{R_0^4})}} \quad (4.2.2)$$

Remarque 4.2.1 Le rapport (4.2.2) est souvent appelé la fonction de fréquence. Garofalo et Lin [GL86] ont attribué ce concept à Almgren [Al79]. En général, on prend la norme de numérateur plus élevé que la norme de dénominateur.

preuve de théorème (4.1.1). On commence d'abord par une version légèrement modifiée de l'inégalité de Carleman donnée dans le théorème (3.2.2): $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et pour toute $m \in \{k + 1/2, k \in \mathbb{N}\}$, on a l'inégalité suivante

$$\sum_{|\alpha| \leq 2l} \int m^{2l-2|\alpha|} |x|^{2m+2|\alpha|-n} |D^\alpha u|^2 dx \leq C_0 \int |x|^{-2m+4l-n} |\Delta^l u|^2 dx \quad (4.2.3)$$

où C_0 dépend de la dimension n et la puissance l .

On peut utiliser (4.2.3) pour $u \in H^{2l}(B_1, \mathbb{R}^n)$ qui a un support compact dans $\mathbb{R}^n$ en utilisant une fonction de troncature donc on peut appliquer (4.2.3) à la fonction χu avec $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Ainsi, on définit $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ comme:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq \delta/3, \\ 1 & \text{sur } \delta/2 \leq |x| \leq (R_1 + 1) R_1 R_2 / 4 = r_4 R_2 \\ 0 & \text{si } 2r_4 R_2 \leq |x| \end{cases}$$

où $\delta \leq R_1^2 R_2 / 4$, $R_2 < 1$ est suffisamment petit, $r_4 < 1$, le nombre R_2 est donné par $R_2 = (\gamma m)^{-l/2\epsilon}$, où $\gamma > 0$ est une constante que l'on déterminera plus tard. Utilisant l'estimation (4.2.3) et l'équation (4.1.1), on peut déduire que :

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| \leq 2l} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} m^{2l-2|\alpha|} |x|^{2m+2|\alpha|-n} |D^\alpha u|^2 dx \\ & \leq \\ & \sum_{|\alpha| \leq 2l} \int m^{2l-2|\alpha|} |x|^{-2m+2|\alpha|-n} |D^\alpha (\chi u)|^2 dx \\ & \leq \\ & C_0 \int |x|^{-2m+4l-n} |\Delta^l (\chi u)|^2 dx \\ & \leq \\ & C_0 \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} |x|^{-2m+4l-n} |\Delta^l u|^2 dx + C_0 \int_{r_4 R_2 < |x| < 2r_4 R_2} |x|^{-2m+4l-n} |\Delta^l (\chi u)|^2 dx \\ & \quad + C_0 \int_{\delta/3 < |x| < \delta/2} |x|^{-2m+4l-n} |\Delta^l (\chi u)|^2 dx \end{aligned}$$

Ainsi, on a:

$$\begin{aligned}
 & C_0 \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} |x|^{-2m+4l-n} |\Delta^l u|^2 dx + C_0 \int_{r_4 R_2 < |x| < 2r_4 R_2} |x|^{-2m+4l-n} |\Delta^l (\chi u)|^2 dx \\
 & + C_0 \int_{\delta/3 < |x| < \delta/2} |x|^{-2m+4l-n} |\Delta^l (\chi u)|^2 dx \\
 & = \\
 & C_0 2^N n K_0^2 \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |x|^{2|\alpha|-n-2m} |x|^{4l-2|\alpha|} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & + C_0 \int_{r_4 R_2 < |x| < 2r_4 R_2} |x|^{-2m+4l-n} |\Delta^l (\chi u)|^2 dx \\
 & + C_0 \int_{\delta/3 < |x| < \delta/2} |x|^{-2m+4l-n} |\Delta^l (\chi u)|^2 dx
 \end{aligned}$$

Donc:

$$\sum_{|\alpha| \leq 2l} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} m^{2l-2|\alpha|} |x|^{2m+2|\alpha|-n} |D^\alpha u|^2 dx \leq C' K_0^2 \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |x|^{2|\alpha|-n-2m} |D^\alpha u|^2 dx \quad (4.2.4)$$

$$\begin{aligned}
 & + C_0 \int_{r_4 R_2 < |x| < 2r_4 R_2} |x|^{-2m+4l-n} |\Delta^l (\chi u)|^2 dx \\
 & + C_0 \int_{\delta/3 < |x| < \delta/2} |x|^{-2m+4l-n} |\Delta^l (\chi u)|^2 dx
 \end{aligned}$$

où $C' = C_0 2^N n$ et $N = \text{cardinal}\{\alpha \setminus |\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]\} = 1 + \sum_{1 \leq |k| \leq [\frac{3l}{2}]} ([\frac{3l}{2}] - k + 1) C_n^k$

Notons bien que $|x|^{4l-2|\alpha|} \leq (\frac{\delta}{2})^{4l-2|\alpha|} < 1$. Maintenant, notre but est de débarrasser du terme $C' K_0^2 \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |x|^{2|\alpha|-n-2m} |D^\alpha u|^2 dx$ du 2^{ème} membre de l'inégalité (4.2.4). Pour cela, on va choisir m telle que $m^2 > 2C' K_0^2$ i.e:

$$\begin{aligned}
 & C' K_0^2 \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |x|^{2|\alpha|-n-2m} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & \leq \\
 & \frac{m^2}{2} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |x|^{2|\alpha|-n-2m} |D^\alpha u|^2 dx \\
 & \leq \\
 & \frac{m^2}{2} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} \sum_{|\alpha| \leq 2l} |x|^{2|\alpha|-n-2m} |D^\alpha u|^2 dx
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \frac{m^2}{2} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} \sum_{|\alpha| \leq 2l} |x|^{2|\alpha| - n - 2m} |D^\alpha u|^2 dx \\ & \leq \\ & \frac{1}{2} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} \sum_{|\alpha| \leq 2l} m^{2l-2|\alpha|} |x|^{2|\alpha| - n - 2m} |D^\alpha u|^2 dx \end{aligned}$$

Finalement, on trouve:

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| \leq 2l} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} m^{2l-2|\alpha|} |x|^{2m+2|\alpha| - n} |D^\alpha u|^2 dx - C' K_0^2 \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} \sum_{|\alpha| \leq \left[\frac{3l}{2}\right]} |x|^{2|\alpha| - n - 2m} |D^\alpha u|^2 dx \\ & \geq \\ & \sum_{|\alpha| \leq 2l} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} m^{2l-2|\alpha|} |x|^{2m+2|\alpha| - n} |D^\alpha u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} \sum_{|\alpha| \leq 2l} m^{2l-2|\alpha|} |x|^{2|\alpha| - n - 2m} |D^\alpha u|^2 dx \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité et (4.2.4) donnent:

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| \leq 2l} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} m^{2l-2|\alpha|} |x|^{2|\alpha| - n - 2m} |D^\alpha u|^2 dx \\ & \leq 2C_0 \int_{r_4 R_2 < |x| < 2r_4 R_2} |x|^{-2m+4l-n} |\Delta^l(\chi u)|^2 dx + 2C_0 \int_{\delta/3 < |x| < \delta/2} |x|^{-2m+4l-n} |\Delta^l(\chi u)|^2 dx \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

D'après la définition de χ , il est facile de voir que pour tout multi indice α on a :

$$\begin{cases} |D^\alpha \chi| = O(\delta^{-|\alpha|}) & \text{pour toute } \delta/3 < |u| < \delta/2 \\ |D^\alpha \chi| = O((r_4 R_2)) & \text{pour toute } r_4 R_2 < |u| < 2r_4 R_2 \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Ainsi, on minore la quantité: $\sum_{|\alpha| \leq 2l} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} m^{2l-2|\alpha|} |x|^{2|\alpha| - n - 2m} |D^\alpha u|^2 dx$ comme suit:

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| \leq 2l} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} m^{2l-2|\alpha|} |x|^{2|\alpha| - n - 2m} |D^\alpha u|^2 dx \\ & \geq \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} m^{2l} |x|^{-n-2m} |u|^2 dx \quad (\text{on a pris } \alpha = 0) \\ & \geq m^2 \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} |x|^{-n-2m} |u|^2 dx \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise le fait que:

$$\begin{aligned} & m^2 \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} |x|^{-n-2m} |u|^2 dx \\ &= m^2 \int_{\delta/2 \leq |x| \leq 2\delta} |x|^{-n-2m} |u|^2 dx + m^2 \int_{2\delta \leq |x| \leq r_4 R_2} |x|^{-n-2m} |u|^2 dx \end{aligned}$$

Donc, on trouve:

$$\begin{aligned} & m^2 \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} |x|^{-n-2m} |u|^2 dx \\ & \geq m^2 \int_{\delta/2 \leq |x| \leq 2\delta} |x|^{-n-2m} |u|^2 dx + m^2 \int_{2\delta \leq |x| \leq R_1^2 R_2} |x|^{-n-2m} |u|^2 dx \\ & \geq m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq 2\delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_2)^{-2m-n} \int_{2\delta \leq |x| \leq R_1^2 R_2} |u|^2 dx \end{aligned}$$

Notons que $R_1^2 < r_4$ à condition que $R_1 \leq 1/3$. Par ailleurs, utilisant (4.2.6) dans (4.2.5), il vient que:

$$\begin{aligned} & m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq 2\delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_2)^{-2m-n} \int_{2\delta \leq |x| \leq R_1^2 R_2} |u|^2 dx \\ & \leq \sum_{|\alpha| \leq 2l} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq r_4 R_2} m^{2l-2|\alpha|} |x|^{2|\alpha|-n-2m} |D^\alpha u|^2 dx \\ & \leq 2C_0 \int_{r_4 R_2 < |x| < 2r_4 R_2} |x|^{-2m+4l-n} |\Delta^l(\chi u)|^2 dx + 2C_0 \int_{\delta/3 < |x| < \delta/2} |x|^{-2m+4l-n} |\Delta^l(\chi u)|^2 dx \\ & \leq 2^{N_1+1} C_0 \int_{r_4 R_2 < |x| < 2r_4 R_2} |x|^{-2m+4l-n} \sum_{|\alpha| \leq 2l} |D^{2l-|\alpha|} \chi|^2 |D^\alpha u|^2 dx + \\ & + 2^{N_1+1} C_0 \int_{\delta/3 < |x| < \delta/2} |x|^{-2m+4l-n} |D^{2l-|\alpha|}(\chi)|^2 |D^\alpha u|^2 dx \\ & \leq 2^{N_1+1} C_0 c_1 \sum_{|\alpha| \leq 2l} (r_4 R_2)^{-4l+2|\alpha|} \int_{r_4 R_2 < |x| < 2r_4 R_2} |x|^{-2m+4l-n} |D^\alpha u|^2 dx \\ & + 2^{N_1+1} C_0 c_2 \sum_{|\alpha| \leq 2l} (\delta)^{-4l+2|\alpha|} \int_{\delta/3 < |x| < \delta/2} |x|^{-2m+4l-n} |D^\alpha u|^2 dx \\ & \leq C''' \sum_{|\alpha| \leq 2l} (r_4 R_2)^{-4l+2|\alpha|} \int_{r_4 R_2 < |x| < 2r_4 R_2} |x|^{-2m+4l-n} |D^\alpha u|^2 dx \\ & + C''' \sum_{|\alpha| \leq 2l} (\delta)^{-4l+2|\alpha|} \int_{\delta/3 < |x| < \delta/2} |x|^{-2m+4l-n} |D^\alpha u|^2 dx \end{aligned}$$

Ainsi, on utilise l'inégalité précédante et (3.2.6), on obtient:

$$\begin{aligned}
& m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq 2\delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_2)^{-2m-n} \int_{2\delta \leq |x| \leq R_1^2 R_2} |u|^2 dx \\
& \leq \\
& C'' \sum_{|\alpha| \leq 2l} \int_{r_4 R_2 < |x| < 2r_4 R_2} |x|^{-2m+4l-n} |x|^{2|\alpha|-4l} |D^\alpha u|^2 dx \\
& + C'' \sum_{|\alpha| \leq 2l} \int_{\delta/3 < |x| < \delta/2} |x|^{-2m+4l-n} |x|^{2|\alpha|-4l} |D^\alpha u|^2 dx \\
& \leq C'' \sum_{|\alpha| \leq 2l} \int_{r_4 R_2 < |x| < 2r_4 R_2} |x|^{-2m+4l-n} |x|^{2|\alpha|-4l} |D^\alpha u|^2 dx + \\
& + C'' \sum_{|\alpha| \leq 2l} \int_{\delta/3 < |x| < \delta/2} |x|^{-2m+4l-n} |x|^{2|\alpha|-4l} |D^\alpha u|^2 dx \\
& \leq C'' \sum_{|\alpha| \leq 2l} \int_{r_4 R_2 < |x| < 2r_4 R_2} |x|^{-2m-n} |x|^{2|\alpha|} |D^\alpha u|^2 dx + \\
& + C'' \sum_{|\alpha| \leq 2l} \int_{\delta/3 < |x| < \delta/2} |x|^{-2m-n} |x|^{2|\alpha|} |D^\alpha u|^2 dx \\
& \leq C'' \sum_{|\alpha| \leq 2l} (r_4 R_2)^{-2m-n} \int_{r_4 R_2 < |x| < 2r_4 R_2} |x|^{2|\alpha|} |D^\alpha u|^2 dx + \\
& + C'' \sum_{|\alpha| \leq 2l} (\delta/3)^{-2m-n} \int_{\delta/3 < |x| < \delta/2} |x|^{2|\alpha|} |D^\alpha u|^2 dx \\
& \leq \tilde{C}' (\delta)^{-2m-n} \int_{\delta/4 < |x| < \delta} |u|^2 dx + C'' (r_4 R_2)^{-2m-n} \int_{R_1^2 R_2 < |x| < 3r_4 R_2} |u|^2 dx
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq 2\delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_2)^{-2m-n} \int_{2\delta \leq |x| \leq R_1^2 R_2} |u|^2 dx \\
& \leq \tilde{C}' (\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq \delta} |u|^2 dx + C'' (r_4 R_2)^{-2m-n} \int_{|x| \leq R_1 R_2} |u|^2 dx \quad (4.2.7)
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que : $R_1 \leq 1/3 \Rightarrow 3r_4 R_2 = 3(R_1 + 1) R_1 R_2 / 4 \leq 3 \times \frac{4}{3} R_1 R_2 / 4 = R_1 R_2$

$\tilde{C} = C''' 3^{2m+n}$ où $C''' = \max(2^{N_1+1} C_0 c_1, 2^{N_1} C_0 c_2)$, où $N_1 = \text{cardinal}\{\alpha \setminus |\alpha| \leq 2l\} = 1 + \sum_{1 \leq |k| \leq 2l} (2l - k + 1) C_n^k$

On ajoute aux deux membres de l'inégalité (4.2.7) la quantité $m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq \delta/2} |u|^2 dx$, ce qui donne:

$$\begin{aligned}
 & m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{\delta/2 \leq |x| \leq 2\delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_2)^{-2m-n} \int_{2\delta \leq |x| \leq R_1^2 R_2} |u|^2 dx + m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq \delta/2} |u|^2 dx \\
 &= m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq 2\delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_2)^{-2m-n} \int_{2\delta \leq |x| \leq R_1^2 R_2} |u|^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq 2\delta} |u|^2 dx + \frac{1}{2} m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq 2\delta} |u|^2 dx \\
 &+ m^2 (R_1^2 R_2)^{-2m-n} \int_{2\delta \leq |x| \leq R_1^2 R_2} |u|^2 dx \\
 &\geq \frac{1}{2} m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq 2\delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_2)^{-2m-n} \int_{|x| \leq 2\delta} |u|^2 dx \\
 &+ m^2 (R_1^2 R_2)^{-2m-n} \int_{2\delta \leq |x| \leq R_1^2 R_2} |u|^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq 2\delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_2)^{-2m-n} \int_{|x| \leq R_1^2 R_2} |u|^2 dx
 \end{aligned}$$

et d'autre part, on a:

$$\begin{aligned}
 & \tilde{C}'(\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq \delta} |u|^2 dx + C''(r_4 R_2)^{-2m-n} \int_{|x| \leq R_1 R_2} |u|^2 dx + m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq \delta/2} |u|^2 dx \\
 &\leq \tilde{C}'(\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq \delta} |u|^2 dx + C''(r_4 R_2)^{-2m-n} \int_{|x| \leq R_1 R_2} |u|^2 dx + m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq \delta} |u|^2 dx \\
 &= \tilde{C}''(\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq \delta} |u|^2 dx + C''(r_4 R_2)^{-2m-n} \int_{|x| \leq R_1 R_2} |u|^2 dx \\
 &= \tilde{C}''(\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq \delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1 R_2)^{-2m-n} C'' m^{-2} \left(\frac{R_1^2}{r_4} \right)^{2m+n} \int_{|x| \leq R_1 R_2} |u|^2 dx
 \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq 2\delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_2)^{-2m-n} \int_{|x| \leq R_1^2 R_2} |u|^2 dx \\
 &\leq \tilde{C}''(\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq \delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1 R_2)^{-2m-n} C'' m^{-2} \left(\frac{R_1^2}{r_4} \right)^{2m+n} \int_{|x| \leq R_1 R_2} |u|^2 dx \quad (4.2.8)
 \end{aligned}$$

avec $\tilde{C}'' = \tilde{C}' + 2^{-2m-n} m^2$

D'abord, on remarque que:

$$C'' m^{-2} \left(\frac{R_1^2}{r_4} \right)^{2m+n} = C'' m^{-2} \left(\frac{4R_1}{R_1 + 1} \right)^{2m+n} \leq C'' m^{-2} (4R_1)^{2m+n} \leq \exp(-2m)$$

pour toute $R_1 \leq \frac{1}{16}$ et $m^2 \geq C''$. Donc:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq 2\delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_2)^{-2m-n} \int_{|x| \leq R_1^2 R_2} |u|^2 dx \\ & \leq \tilde{C}'' (\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq \delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_2)^{-2m-n} \exp(-2m) \int_{|x| \leq R_1 R_2} |u|^2 dx \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Il est important de noter que (4.2.9) est valable pour toute $m = j + \frac{1}{2}$ avec $j \in \mathbb{N}$ et $j \geq j_0$, où j_0 dépend de n, l, ϵ , et K_0 . On prend $R_j = (\gamma(j + \frac{1}{2}))^{-1/2\epsilon}$ et utilisant la relation $m = (\gamma)^{-1} (R)^{-2\epsilon/l}$, on déduit de (4.2.9) que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq 2\delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_j)^{-2m-n} \int_{|x| \leq R_1^2 R_j} |u|^2 dx \\ & \leq \tilde{C}'' (\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq \delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_j)^{-2m-n} \exp(-2cR_j^{-2\epsilon/l}) \int_{|x| \leq R_1 R_j} |u|^2 dx \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

pour toute $j \geq j_0$, et $c = \gamma^{-1}$. Choisissons j_0 suffisamment grand, tel que:

$$R_{j+1} < R_j < 2R_{j+1} \text{ pour toute } j \geq j_0 \quad (4.2.11)$$

Donc, si $R_{j+1} < R_2 < R_j$ pour $j \geq j_0$, on a:

$$\int_{|x| \leq R_1^2 R_2} |u|^2 dx \leq \int_{|x| \leq R_1^2 R_j} |u|^2 dx$$

D'après les hypothèses précédentes et le fait que $R_1 \leq \frac{1}{16}$ donc

$$R_1 R_j \leq \frac{1}{16} R_j < R_{j+1} \quad (4.2.12)$$

D'autre part, en utilisant (4.2.11) et (4.2.12), on obtient:

$$\int_{|x| \leq R_1 R_j} |u|^2 dx \leq \int_{|x| \leq R_2} |u|^2 dx$$

Notre objectif maintenant est de montrer que $\exp(-2cR_j^{-2\epsilon/l}) \leq \exp(-cR_2^{-2\epsilon/l})$

Pour cela, on utilise toujours l'inégalité (4.2.11) et (4.2.12), on déduit, donc:

$$\frac{1}{16} R_j < R_2 \implies \left(\frac{1}{16} R_j\right)^{-2\epsilon/l} \geq (R_2)^{-2\epsilon/l} \implies -c \left(\frac{1}{16} R_j\right)^{-2\epsilon/l} \leq -c (R_2)^{-2\epsilon/l}$$

Comme $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ et pour l suffisamment grand on a: $\left(\frac{1}{16}\right)^{-2\epsilon/l} \leq 1 \implies$

$$\begin{aligned} & \left(-2cR_j^{-2\epsilon/l}\right) \leq \left(-\left(\frac{1}{16}\right)^{-2\epsilon/l} cR_j^{-2\epsilon/l}\right) \leq \left(-cR_2^{-2\epsilon/l}\right) \implies \\ & \implies \exp\left(-2cR_j^{-2\epsilon/l}\right) \leq \exp\left(-cR_2^{-2\epsilon/l}\right) \end{aligned}$$

Finalement, on conclut que :

$$\begin{cases} \int_{|x| \leq R_1^2 R_2} |u|^2 dx \leq \int_{|x| \leq R_1^2 R_j} |u|^2 dx \\ \exp\left(-2cR_j^{-2\epsilon/l}\right) \int_{|x| \leq R_1 R_j} |u|^2 dx \leq \exp\left(-cR_2^{-2\epsilon/l}\right) \int_{|x| \leq R_2} |u|^2 dx \end{cases} \quad (4.2.13)$$

On utilise (4.2.13) dans (4.2.10), on trouve:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq 2\delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_j)^{-2m-n} \int_{|x| \leq R_1^2 R_2} |u|^2 dx \\ & \leq \tilde{C}''(\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq \delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_j)^{-2m-n} \exp\left(-cR_2^{-2\epsilon/l}\right) \int_{|x| \leq R_2} |u|^2 dx \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Supposons qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que :

$$R_{j+1} < R_1^{2s} < R_j \text{ pour tout } j \geq j_0, \quad (4.2.15)$$

En remplaçant R_2 par R_1^{2s} dans (4.2.14) on obtient:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq 2\delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_j)^{-2m-n} \int_{|x| \leq R_1^{2s+2}} |u|^2 dx \\ & \leq \tilde{C}''(\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq \delta} |u|^2 dx + m^2 (R_1^2 R_j)^{-2m-n} \exp\left(-cR_1^{-4s\epsilon/l}\right) \int_{|x| \leq R_1^{2s}} |u|^2 dx \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

On déterminera plus tard les valeurs de s et R_1 . L'astuce maintenant est de trouver un s qui convient, R_1 satisfaisant (4.2.15) et l'inégalité ci-dessous. Pour un tel choix

$$\exp\left(-cR_1^{-4s\epsilon/l}\right) \int_{|x| \leq R_1^{2s}} |u|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{|x| \leq R_1^{2s+2}} |u|^2 dx \quad (4.2.17)$$

On va maintenant utiliser l'inégalité (3.2.3). Pour cela, on choisit:

$$\begin{aligned} & r_1 = R_1^{2k+2}, r_2 = R_1^{2k}, r_3 = R_1^{2k-2} \text{ pour toute } k \geq 1, \text{ et remarquons que, } r_1/r_3 < r_2/r_3 \leq \\ & R_1^2 \leq v. \text{ Par suite (3.2.3) implique : } \int_{B_{R_1^{2k}}} |u|^2 dx \leq C \left(\int_{B_{R_1^{2k+2}}} |u|^2 dx \right)^\tau \left(\int_{B_{R_1^{2k-2}}} |u|^2 dx \right)^{1-\tau} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \int_{B_{R_1^{2k}}} |u|^2 dx \leq C \left(\int_{B_{R_1^{2k+2}}} |u|^2 dx \right)^\tau \left(\int_{B_{R_1^{2k-2}}} |u|^2 dx \right)^{1-\tau} \\ & \Rightarrow \left(\int_{B_{R_1^{2k}}} |u|^2 dx \right)^{\tau-\tau+1} \leq C \left(\int_{B_{R_1^{2k+2}}} |u|^2 dx \right)^\tau \left(\int_{B_{R_1^{2k-2}}} |u|^2 dx \right)^{1-\tau} \Rightarrow \left(\int_{B_{R_1^{2k}}} |u|^2 dx \right)^\tau \leq \\ & C \left(\int_{B_{R_1^{2k+2}}} |u|^2 dx \right)^\tau \left(\int_{B_{R_1^{2k-2}}} |u|^2 dx \right)^{1-\tau} \left(\int_{B_{R_1^{2k}}} |u|^2 dx \right)^{1-\tau} \\ & \Rightarrow \left(\int_{B_{R_1^{2k}}} |u|^2 dx \right)^\tau \leq C \left(\int_{B_{R_1^{2k+2}}} |u|^2 dx \right)^\tau \left(\int_{B_{R_1^{2k-2}}} |u|^2 dx \right)^{1-\tau} \Rightarrow \\ & \int_{B_{R_1^{2k}}} |u|^2 dx \left/ \int_{B_{R_1^{2k+2}}} |u|^2 dx \right. \leq C^{1/\tau} \left(\int_{B_{R_1^{2k-2}}} |u|^2 dx \left/ \int_{B_{R_1^{2k}}} |u|^2 dx \right. \right)^a \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

$$\text{où } C = \max\{C_0 R_1^{-2n}, \exp(\beta_0(-1 - 4 \log R_1))\} \text{ et } a = \frac{1-\tau}{\tau} = \frac{A}{B} = \frac{(\log(r_1 \setminus r_3) - 1)^2 - (\log(r_2 \setminus r_3))^2}{-1 - 2 \log(r_2 \setminus r_3)} \\ = \frac{(4 \log R_1 - 1)^2 - (2 \log R_1)^2}{-1 - 4 \log R_1}$$

On vérifie que :

$$\begin{cases} 1 < C \leq C_0 R_1^{-\beta_1} \\ 2 < a \leq -4 \log R_1 \end{cases} \quad (4.2.19)$$

où $\beta_1 = \max\{2n, 4\beta_0\}$ et si R_1 est suffisamment petit, e.g $R_1 \leq e^{-4}$. Ainsi, on majore le terme à gauche de (4.2.18) par un terme qui dépend de R_1^2 et R_1^4 au lieu de R_1^{2k-2} et R_1^{2k} .

$$\begin{aligned} \int_{B_{R_1^{2s}}} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^{2s+2}}} |u|^2 dx &\leq C^{1/\tau} \left(\int_{B_{R_1^{2s-2}}} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^{2s}}} |u|^2 dx \right)^a \\ &\leq C^{1/\tau} \left(C^{1/\tau} \left(\int_{B_{R_1^{2s-4}}} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^{2s-2}}} |u|^2 dx \right)^a \right)^a \\ &\leq C^{1/\tau} \left(C^{1/\tau} \left(C^{1/\tau} \left(\int_{B_{R_1^{2s-6}}} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^{2s-4}}} |u|^2 dx \right)^a \right)^a \right)^a \\ &\vdots \\ &\leq C^{1/\tau \left(\frac{1-a^{s-1}}{1-a} \right)} \left(\int_{B_{R_1^2}} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^4}} |u|^2 dx \right)^{a^{s-1}} \\ \int_{B_{R_1^{2s}}} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^{2s+2}}} |u|^2 dx &\leq C^{\frac{a^{s-1}-1}{\tau(a-1)}} \left(\int_{B_{R_1^2}} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^4}} |u|^2 dx \right)^{a^{s-1}} \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

On prend maintenant $s \geq 1$. De la définition de a , on tire $\tau = 1/(a+1)$. Il s'en suit que:

$$\frac{a^{s-1} - 1}{\tau(a-1)} = \frac{a+1}{a-1} (a^{s-1} - 1) \leq 3a^{s-1}$$

Il découle de (4.2.19) que:

$$\begin{aligned} \int_{B_{R_1^{2s}}} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^{2s+2}}} |u|^2 dx &\leq C^{3(-4 \log R_1)^{s-1}} \left(\int_{B_{R_1^2}} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^4}} |u|^2 dx \right)^{a^{s-1}} \implies \\ \int_{B_{R_1^{2s}}} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^{2s+2}}} |u|^2 dx &\leq \left(C_0^3 (R_1)^{-3\beta_1} \right)^{(-4 \log R_1)^{s-1}} \left(\int_{B_{R_1^2}} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^4}} |u|^2 dx \right)^{a^{s-1}} \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

On multiplie l'inégalité (4.2.21) par $\exp(-cR_1^{-4s\epsilon/l}) \int_{B_{R_1^{2s+2}}} |u|^2 dx$.

$$\begin{aligned} \exp(-cR_1^{-4s\epsilon/l}) \int_{B_{R_1^{2s}}} |u|^2 dx &\leq \exp(-cR_1^{-4s\epsilon/l}) \left(C_0^3 (R_1)^{-3\beta_1} \right)^{(-4 \log R_1)^{s-1}} \\ &\times \left(\int_{B_{R_1^2}} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^4}} |u|^2 dx \right)^{a^{s-1}} \times \int_{B_{R_1^{2s+2}}} |u|^2 dx \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Posons $\mu = -\log R_1$, alors si $R_1 (\leq \min \{e^{-4}, \sqrt{v}\})$ est suffisamment petit, i.e., μ est suffisamment grand, on a:

$$\begin{aligned}
 4t\epsilon\mu/l &> (t-1)\log(4\mu) + \log(\log C_0^3 + 3\beta_1\mu) - \log(c/4) \\
 \text{pour tout } t \in \mathbb{N}. \text{ Autrement, on a que pour tout } R_1 \text{ petit} \\
 \log(\log C_0^3 + 3\beta_1\mu) &\leq \log(c/4) - (t-1)\log(4\mu) + 4t\epsilon\mu/l \\
 (\log C_0^3 + 3\beta_1\mu) &\leq \exp(\log(c/4) - (t-1)\log(4\mu) + 4t\epsilon\mu/l) \\
 &= \exp(\log(c/4) - (t-1)\log(-4\log R_1) - 4t\epsilon/l \log R_1) \\
 &= \exp\left(\log(c/4) - \log(-4\log R_1)^{t-1} + \log R_1^{-4t\epsilon/l}\right) \\
 &= \exp\left(\log\left(\frac{R_1^{-4t\epsilon/l} c/4}{(-4\log R_1)^{t-1}}\right)\right) = \left(\frac{R_1^{-4t\epsilon/l} c/4}{(-4\log R_1)^{t-1}}\right) \\
 \Rightarrow \exp(\log C_0^3 - 3\beta_1 \log R_1) &\leq \exp\left(\frac{R_1^{-4t\epsilon/l} c/4}{(-4\log R_1)^{t-1}}\right) \\
 \Rightarrow \left(C_0^3 R_1^{-3\beta_1}\right)^{(-4\log R_1)^{t-1}} &\leq \exp\left(\frac{R_1^{-4t\epsilon/l} c/4 (-4\log R_1)^{t-1}}{(-4\log R_1)^{t-1}}\right) \\
 \left(C_0^3 (R_1)^{-3\beta_1}\right)^{(-4\log R_1)^{s-1}} &< \exp\left(-cR_1^{-4s\epsilon/l}/4\right) < (1/2) \exp\left(-cR_1^{-4s\epsilon/l}/2\right) \quad (4.2.23)
 \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{N}$.

Ainsi, on fixe un R_1 telle que (4.2.23) soit vérifiée et

$$-\frac{4\epsilon}{l} \log R_1 - 2 \log a > 0. \quad (4.2.24)$$

L'étape clefs dans notre preuve est de trouver une constante R_1 vérifiant (4.2.24). Après la fixation de R_1 , on définit alors le nombre t_0 , dépendant de R_1 et u . comme suit:

$$\begin{aligned}
 t_0 &= \left(\log 2 - \log(ac) + \log \log \left(\int_{B_{R_1}^2} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1}^4} |u|^2 dx\right)\right) \times \left(-\frac{4\epsilon}{l} \log R_1 - \log a\right)^{-1}. \\
 \forall t \geq t_0 \Rightarrow &\left(\log 2 - \log(ac) + \log \log \left(\int_{B_{R_1}^2} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1}^4} |u|^2 dx\right)\right) \\
 &\quad \times \left(-\frac{4\epsilon}{l} \log R_1 - \log a\right)^{-1} \leq t \\
 \Rightarrow &\left[\log \log \left(\int_{B_{R_1}^2} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1}^4} |u|^2 dx\right) + \log 2 - \log(ac)\right] \\
 &\leq t \left(-\frac{4\epsilon}{l} \log R_1 - \log a\right) \\
 &= \log R_1^{-4t\epsilon/l} - \log a^t \\
 \Rightarrow &\log \log \left(\int_{B_{R_1}^2} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1}^4} |u|^2 dx\right) \\
 &\leq \log R_1^{-4t\epsilon/l} - \log a^t - \log 2 + \log(ac) \\
 &= \log R_1^{-4t\epsilon/l} - \log a^t + \log\left(\frac{ac}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \log \log \left(\int_{B_{R_1}^2} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^4}} |u|^2 dx \right) \leq \log \left(R_1^{-4t\epsilon/l} \frac{a^{1-t}c}{2} \right) \\ &\Rightarrow \left(\int_{B_{R_1}^2} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^4}} |u|^2 dx \right) \leq \exp \left(R_1^{-4t\epsilon/l} \frac{a^{1-t}c}{2} \right) \\ &\Rightarrow \left(\int_{B_{R_1}^2} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^4}} |u|^2 dx \right)^{a^{t-1}} \leq \left(\exp \left(R_1^{-4t\epsilon/l} \frac{a^{t-1}c}{2} \right) \right)^{a^{t-1}} = \exp \left(c R_1^{-4t\epsilon/l} / 2 \right) \end{aligned}$$

Avec le choix de t_0 , on peut voir que

$$\left(\int_{B_{R_1}^2} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^4}} |u|^2 dx \right)^{a^{s-1}} \leq \exp \left(-c R_1^{-4s\epsilon/l} / 2 \right) \quad (4.2.25)$$

pour tout $t \geq t_0$.

Soit s_1 est le plus petit entier positif tel que $s_1 \geq t_0$.

Si

$$R_1^{2s_1} \leq R_{j_0} = (\gamma (j_0 + 1/2))^{-l/2\epsilon}, \quad (4.2.26)$$

alors, on peut trouver $j_1 \in \mathbb{N}$ avec $j_1 \geq j_0$ tel que (4.2.15) soit vérifiée, i.e.,

$$R_{j_1+1} \leq R_1^{2s_1} \leq R_{j_1}$$

D'autre part, si

$$R_1^{2s_1} > R_{j_0} \quad (4.2.27)$$

Alors, on choisit le plus petit entier positif $s_2 > s_1$ tel que $R_1^{2s_2} \leq R_{j_0}$ et donc on peut aussi trouver $j_1 \in \mathbb{N}$ avec $j_1 \geq j_0$ pour lequel (4.2.15) est vérifiée. Maintenant, on définit

$$s = \begin{cases} s_1 & \text{si (4.2.26) est vérifié} \\ s_2 & \text{si (4.2.27) est vérifié} \end{cases}$$

Il est important de noter qu'avec un tel s , (4.1.15) est vérifiée pour certains j_1 et (4.2.24), (4.2.25) sont satisfaites. Donc, on pose $m_1 = n + 2(j_1 + 1/2)$ et $m = (m_1 - n)/2$. Combinant (4.2.23), (4.2.24) et (4.2.25) i.e:

$$\begin{aligned} &\exp \left(-c R_1^{-4s\epsilon/l} \right) \int_{B_{R_1^{2s}}} |u|^2 dx \\ &\leq \exp \left(-c R_1^{-4s\epsilon/l} \right) \left(C_0^3 (R_1)^{-3\beta_1} \right)^{(-4 \log R_1)^{s-1}} \left(\int_{B_{R_1}^2} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{R_1^4}} |u|^2 dx \right)^{a^{s-1}} \int_{B_{R_1^{2s+2}}} |u|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{B_{R_1^{2s+2}}} |u|^2 dx \end{aligned}$$

qui est (4.2.17). Utilisant (4.2.17) dans (4.2.16). on obtient

$$\frac{1}{2} m^2 (2\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq 2\delta} |u|^2 dx + \frac{1}{2} m^2 (R_1^2 R_{j_1})^{-2m-n} \int_{|x| \leq R_1^{2s+2}} |u|^2 dx \leq \tilde{C}''(\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq \delta} |u|^2 dx \quad (4.2.28)$$

De (4.2.28), il vient que:

$$\frac{1}{2}m^2(2\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq 2\delta} |u|^2 dx \leq \tilde{C}''(\delta)^{-2m-n} \int_{|x| \leq \delta} |u|^2 dx$$

Ceci donne:

$$\int_{|x| \leq 2\delta} |u|^2 dx \leq \frac{8\tilde{C}''}{(m_1 - n)^2} 2^{m_1} \int_{|x| \leq \delta} |u|^2 dx \quad (4.2.29)$$

L'estimation (4.2.29) est valable pour tout $\delta \leq R_1^{2s}/4$. Donc (4.2.1) est vérifiée pour $v^* = R_1^{2s+2}/8$ et $K = \frac{8\tilde{C}''}{(m_1 - n)^2} 2^{m_1}$. Ce qui termine la preuve du Théorème (4.2.1). ■

4.3 L'inégalité "Doubling"(la solution vit dans Ω)

Théorème 4.3.1 (AMRV08) (*Inégalité "Doubling"*) Soit Ω un borné dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, dont la frontière est de classe Lipshitzienne avec des constantes r_0, M_0 et soit $u \in H^{2l}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ une solution non triviale de (4.1.1). Alors, il existe une constante v , $0 < v < 1$, ne dépendant que de n, l et de K_0 telle que: pour toute $\bar{r} > 0$ et pour $x_0 \in \Omega_{\bar{r}}$, on a:

$$\int_{B_{2r}(x_0)} |u|^2 dx \leq K \int_{B_r(x_0)} |u|^2 dx, \text{ pour toute, } 0 < r \leq \frac{v\bar{r}}{2} \quad (4.3.1)$$

où $K > 0$ ne dépend que de $n, l, K_0, r_0, M_0, |\Omega|, \bar{r}$ et de $\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} / \|u\|_{L^2(\Omega)}$.

Preuve. Comme u est une solution régulière non triviale de (4.1.1) dans Ω (car $u \in H^{2l}(\Omega, \mathbb{R}^n)$), alors d'après le principe du prolongement unique u est une solution non triviale dans n'importe quelle région de Ω et évidemment dans $B_{\bar{r}}(x_0) \subset \Omega$, où $\bar{r} > 0$ et $x_0 \in \Omega_{\bar{r}} = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \bar{r}\}$

Donc, nous pouvons maintenant travailler avec des solutions dans $B_{\bar{r}}(x_0)$: soit $v(y) = u(\bar{r}y + x_0) \Rightarrow (\bar{r}y + x_0) \in B_{\bar{r}} \Rightarrow y \in B_1 \Rightarrow v \in H^{2l}(B_1, \mathbb{R}^n)$

Comme u est une solution de (4.1.1): $u(\bar{r}y + x_0)$ est une solution de (4.1.1).

Il s'en suit que:

$$\begin{aligned} |\Delta^l v^i((y))| &= |\Delta^l u^i(\bar{r}y + x_0)| \leq K_0 \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha u(\bar{r}y + x_0)| \\ &\Rightarrow |\Delta^l v^i((y))| \leq K_0 \left[1 + \sum_{k \leq [\frac{3l}{2}]} (C_n^1 + \dots + C_n^k) \bar{r}^k \right] \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha v(y)| \end{aligned}$$

Donc

$$|\Delta^l v^i((y))| \leq \tilde{K}_0 \sum_{|\alpha| \leq [\frac{3l}{2}]} |D^\alpha v(y)| \quad (4.3.2)$$

où $\tilde{K}_0 = K_0 \left[1 + \sum_{k \leq [\frac{3l}{2}]} (C_n^1 + \dots + C_n^k) \bar{r}^k \right]$

Comme $v \in H^{2l}(B_1, \mathbb{R}^n)$ est une solution non triviale de (4.3.2). on peut appliquer le théorème (4.2.1) sur v : il existe des constantes $R_0 \in (0, 1)$, $v^* \in (0, \frac{1}{2})$, $K > 0$, telle que

$\int_{B_{2r}} |v|^2 dx \leq K \int_{B_r} |v|^2 dy$, pour toute, $0 < r \leq v^*$. Ceci entraîne que:

$\int_{B_{2r}} |u(\bar{r}y + x_0)|^2 dy \leq K \int_{B_r} |u(\bar{r}y + x_0)|^2 dy$, pour toute, $0 < r \leq \tilde{v}$, posant $x =$

$\bar{r}y + x_0 \Rightarrow dy = \frac{dx}{\bar{r}^n}$. Par suite:

$$\int_{| \frac{x-x_0}{\bar{r}} | \leq 2r} |u|^2 dx \leq K \int_{| \frac{x-x_0}{\bar{r}} | \leq r} |u|^2 dx \Rightarrow \int_{|x-x_0| \leq 2r\bar{r}} |u|^2 dx \leq K \int_{|x-x_0| \leq r\bar{r}} |u|^2 dx \Rightarrow \int_{B_{2s}(x_0)} |u|^2 dx \leq K \int_{B_s(s_0)} |u|^2 dx, \text{ avec } s = r\bar{r} \leq \bar{r}v^*$$

$\Rightarrow$

$$\int_{B_{2s}(x_0)} |u|^2 dx \leq K \int_{B_s(s_0)} |u|^2 dx, \text{ pour toutes, } s \leq v^*\bar{r} \quad (4.3.3)$$

avec $v^* \in (0, 1)$, $K > 0$ dépendant uniquement de $n, l, K_0, \bar{r}$ et:

$$\tilde{F}_{loc} = \frac{\|u\|_{L^2(B_{R_0^2\bar{r}})}}{\|u\|_{L^2(B_{R_0^4\bar{r}})}} \quad (4.3.4)$$

voir théorème (4.2.1)

Soit $v \in (0, 1)$ la constante introduite dans le théorème (3.2.1). Si $v^* \geq \frac{v}{2}$, alors (4.3.3) est vérifiée pour $s \leq \frac{v}{2}\bar{r}$, sinon, on prend $s \in (v^*\bar{r}, \frac{v}{2}\bar{r})$, et par l'application du théorème (3.2.1) avec $r_1 = v^*\bar{r}$, $r_2 = 2s$, $r_3 = \bar{r}$. Il est clair que $r_1 \leq r_2 \leq vr_3 = v\bar{r}$ car $s \in (v^*\bar{r}, \frac{v}{2}\bar{r}) \Rightarrow 2s > v^*\bar{r}$, et $2s < v\bar{r}$:

$$\int_{B_{2s}(x_0)} |u|^2 dx \leq C \left(\int_{B_{v^*\bar{r}}(x_0)} |u|^2 dx \right)^\delta \left(\int_{B_{\bar{r}}(x_0)} |u|^2 dx \right)^{1-\delta} \quad (4.3.5)$$

avec $\delta \in (0, 1)$, $C > 0$ dépend uniquement de $n, l, K_0, \frac{r_1}{r_3} = v^*, \frac{r_2}{r_3} = \frac{2s}{\bar{r}}$. Notons que la constante C dépendant de $\frac{r_2}{r_3} = \frac{2s}{\bar{r}} < v$. Comme v dépend de n, l, K_0 , C dépend de $\frac{r_2}{r_3} = \frac{2s}{\bar{r}} < v$. Comme v dépend de n, l, K_0 , C dépend de n, l, K_0, v^* . On peut écrire (4.3.5) sous une autre forme:

$$\begin{aligned} \int_{B_{2s}(x_0)} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{v^*\bar{r}}(x_0)} |u|^2 dx &\leq C \left(\int_{B_{\bar{r}}(x_0)} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{v^*\bar{r}}(x_0)} |u|^2 dx \right)^{1-\delta} \\ &\leq C \left(\int_{B_{\bar{r}}(x_0)} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_{v^*\bar{r}}(x_0)} |u|^2 dx \right) \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

car $0 < \delta < 1$ donc $1 - \delta < 1$

Comme $v^* \bar{r} < s$, on a:

$$\begin{aligned} \int_{B_{v^* \bar{r}}(x_0)} |u|^2 dx &\leq \int_{B_s(x_0)} |u|^2 dx \Rightarrow \int_{B_{2s}(x_0)} |u|^2 dx \Big/ \int_{B_s(x_0)} |u|^2 dx \leq C \frac{\|u\|_{L^2(B_{\bar{r}}(x_0))}}{\|u\| \|u\|_{L^2(B_{v^* \bar{r}}(x_0))}} \\ \Rightarrow \\ \int_{B_{2s}(x_0)} |u|^2 dx &\leq C \frac{\|u\|_{L^2(B_{\bar{r}}(x_0))}}{\|u\| \|u\|_{L^2(B_{v^* \bar{r}}(x_0))}} \int_{B_s(x_0)} |u|^2 dx \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

pour toute s , $v^* \bar{r} < s < \frac{v}{2} \bar{r}$.

On va estimer Maintenant $\tilde{F}_{loc}$. Soit $\rho = \min \{R_0^4 \bar{r}, \frac{v}{4} \bar{r}\}$, on applique le théorème (3.3.2):

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{loc} &= \frac{\|u\|_{L^2(B_{R_0^2 \bar{r}}(x_0))}}{\|u\| \|u\|_{L^2(B_{R_0^4 \bar{r}}(x_0))}} \leq \frac{\|u\|_{L^2(B_{R_0^2 \bar{r}}(x_0))}}{\|u\| \|u\|_{L^2(B_\rho(x_0))}} \leq \frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}}{\|u\| \|u\|_{L^2(B_\rho(x_0))}} \leq \frac{1}{\sqrt{C_\rho}} \Rightarrow \\ \tilde{F}_{loc} &= \frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}}{\|u\| \|u\|_{L^2(B_\rho(x_0))}} \leq \frac{1}{\sqrt{C_\rho}} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

avec C_ρ dépendant de $n, l, K_0, r_0, M_0, |\Omega|, \bar{r}$ et $\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \Big/ \|u\|_{L^2(\Omega)}$

Donc v^* et la constante C dans (4.3.7) dépendent des constantes: $n, l, K_0, r_0, M_0, |\Omega|, \bar{r}$ et $\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \Big/ \|u\|_{L^2(\Omega)}$. On peut maintenant estimer la quantité: $\frac{\|u\|_{L^2(B_{\bar{r}}(x_0))}}{\|u\| \|u\|_{L^2(B_{v^* \bar{r}}(x_0))}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\|u\|_{L^2(B_{\bar{r}}(x_0))}}{\|u\| \|u\|_{L^2(B_{v^* \bar{r}}(x_0))}} &\leq \frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}}{\|u\| \|u\|_{L^2(B_\rho(x_0))}} \leq \frac{1}{\sqrt{C_\rho}} \text{ donc } \int_{B_{2s}(x_0)} |u|^2 dx \leq \frac{C}{\sqrt{C_\rho}} \int_{B_s(x_0)} |u|^2 dx \\ \Rightarrow \\ \int_{B_{2s}(x_0)} |u|^2 dx &\leq K \int_{B_s(x_0)} |u|^2 dx \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

avec $K = \frac{C}{\sqrt{C_\rho}}$ ■

Chapitre 5

L'inégalité "doubling" globale pour les solutions du système de Lamé

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous terminons la démonstration de l'inégalité "Doubling" pour le problème au limites:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mu(\nabla u + (\nabla u)^T)) + \nabla(\lambda \operatorname{div} u) = 0, & \text{dans } \Omega \\ \left((\mu(\nabla u + (\nabla u)^T)) + (\lambda \operatorname{div} u) I_n \right) \nu = \varphi, & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.1.1)$$

où $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\mu, \lambda \in C^{2,1}(\bar{\Omega})$ (les coefficients de Lamé), Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, avec une frontière de classe Lipshitzienne avec des constantes r_0, M_0 , I_n est la matrice identité et ν la normale extérieure à $\partial\Omega$. On suppose que $\varphi \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ définit le champ de traction au bord satisfaisant la condition de compatibilité:

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \cdot r = 0 \quad (5.1.2)$$

pour tout déplacement r tel que $r(x) = c + Wx$ où c est un vecteur constant, x un vecteur qui n'est pas constant et W est une matrice constante $n \times n$ tel que: $W = -W^T$

Rappelons qu'on ne peut pas, en général, se contenter d'une condition aux limites de Dirichlet sur l'intégralité du bord $\partial\Omega$ car elle s'interprète comme le fait que le solide est fixé et immobile sur son bord. En pratique, tout le bord n'est pas bloqué et souvent des

forces surfaciques sont appliquées sur lui. Ce cas de figure est modélisé par une condition aux limites de Neumann qui s'écrit ici:

$$\left((\mu (\nabla u + (\nabla u)^T)) + (\lambda \operatorname{div} u) I_n \right) \nu = \varphi, \quad \text{sur } \partial\Omega$$

On peut analyser le problème (5.1.1) grâce aux conditions de convexité, normalisation ($\int_{\Omega} u = 0$, $\int_{\Omega} (\nabla u - (\nabla^T u)) = 0$), compatibilité (5.1.2).

Pour prouver que ce problème est bien posé, c'est-à-dire qu'il admet une solution unique et dépendante continûment des données, nous utilisons l'approche variationnelle et les espaces de Sobolev introduit au chapitre 1.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la section 5.2 nous démontrons des résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème au limite (5.1.1). Dans la section 5.3, on démontre l'inégalité "Doubling" pour ce problème.

5.2 Existence et unicité de la solution du problème au limite

5.2.1 Le théorème de Lax-Milgram

Cadre abstrait:

Nous décrivons une théorie abstraite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert. On note V un espace de Hilbert réel de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme $\| \cdot \|$. Nous considérons une formulation variationnelle de type: trouver $u \in V$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout fonction } v \in V \tag{5.2.1}$$

Les hypothèses sur a et L sont:

1. $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur V .
2. $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur V .

3. $a(., .)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que:

$$|a(w, v)| \leq M \|w\| \|v\| \text{ pour tout } w, v \in V \quad (5.2.2)$$

4. $a(., .)$ est coercive (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $N > 0$ tel que

$$a(v, v) \geq N \|v\|^2 \text{ pour tout } v \in V$$

Comme nous le verrons au cours de cette sous-section, toutes les hypothèses ci-dessus sont nécessaires pour pouvoir résoudre (5.2.1). En particulier, la coercivité de $a(., .)$ est essentielle.

Théorème 5.2.1 (Lax-Milgram) *Soit V un espace de Hilbert réel $L(.)$ une forme linéaire continue sur V , $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue coercive sur V . Alors, la formulation variationnelle (5.2.1) admet une unique solution dépendant continûment de la forme linéaire L .*

Pour trouver la formulation variationnelle du problème au limite, qui nous intéresse, on écrit (5.1.1) pour chaque: $1 \leq i \leq n$, on obtient:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) + \lambda (\operatorname{div} u) \delta_{ij} \right) = 0, \text{ dans } \Omega \\ \sum_{j=1}^n \left(\mu \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) + \lambda (\operatorname{div} u) \delta_{ij} \right) v_i = \varphi_i, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Ensuite, on multiplie chaque terme du problème ci-dessus par une fonction test $v_i \in (H^1(\Omega))^n$ telle que $\int_{\Omega} v = 0$, $\int_{\Omega} (\nabla v - (\nabla v)^T) = 0$ et on intègre par partie pour obtenir:

$$\int_{\Omega} \mu \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v^i}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} \lambda (\operatorname{div} u) \frac{\partial v^i}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} \varphi_i v_i dx$$

On somme ces équations pour $i = 1, \dots, n$ afin de faire apparaître la divergence de la fonction $v = (v^1, \dots, v^n)$ et de simplifier la première intégrale car:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v^i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v^i}{\partial x_j} + \frac{\partial v^j}{\partial x_i} \right) = 2e(u)e(v), \text{ où } e(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T)$$

Comme $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, on obtient alors la formulation variationnelle: trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que:

$$\int_{\Omega} \mu e(u) e(v) dx + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v dx = \int_{\partial\Omega} \varphi v dx, \forall v \in H^1(\Omega) \quad (5.2.4)$$

On vérifie aisément que chaque terme de (5.2.4) a bien un sens.

Proposition 5.2.1 *Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, avec une frontière de classe Lipshitzienne avec des constantes r_0, M_0 . Soit $\mu, \lambda \in C^{2,1}(\bar{\Omega})$ vérifiant les conditions de convexité:*

$$\mu(x) \geq \alpha_0 > 0, \quad 2\mu(x) + n\lambda(x) \geq \gamma_0, \quad \text{dans } \bar{\Omega} \quad (5.2.5)$$

alors il existe une unique solution (faible) $u \in H^1(\Omega)$ du problème au limite (5.1.1) telle que:

$$\int_{\Omega} u = 0, \quad \int_{\Omega} (\nabla u - (\nabla u)^T) = 0$$

Preuve. Pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram, la seule hypothèse délicate à vérifier est la coercivité de la forme bilinéaire $\int_{\Omega} \mu e(u) e(v) dx + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v dx$. On procède en trois étapes. Premièrement, montrer que

$$\int_{\Omega} \mu |e(v)|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda |\operatorname{div} v|^2 dx \geq C \int_{\Omega} |e(v)|^2 dx, \quad \text{où } C = \min(2\alpha_0, \gamma_0)$$

Pour cela, on utilise une inégalité algébrique: si on note $A.B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$ le produit

scalaire usuel des matrices symétriques, on peut décomposer toute matrice réelle symétrique A sous la forme $A = A^d + A^h$ avec $A^d = A - \frac{1}{n} \operatorname{tr} A I_n$ et $A^h = \frac{1}{n} \operatorname{tr} A I_n$ de telle manière que $A^d A^h = 0$ et $|A|^2 = |A^d|^2 + |A^h|^2$, où $|A| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$, (la norme de Shur). En fait

A représente le tenseur de déformation, A^d est une matrice sans diagonale (i.e $\operatorname{tr} A^d = 0$). La décomposition précédente est une propriété utilisée en mécanique (des milieux continus) sous la forme suivante: Si $\sigma = \sigma^d + \sigma^h$ où σ^d et σ^h sont appelés:

σ^d : deviateur de σ

σ^h : partie sphérique de σ

dû à des rotations qui n'influent pas sur la "déformation"

On a alors: $2\mu |A|^2 + \lambda (\text{tr} A)^2 = 2\mu |A^d|^2 + (2\mu + n\lambda) |A^h|^2 \geq \min(2\mu, 2\mu + n\lambda) |A|^2 \geq \min(\alpha_0, \gamma_0) |A|^2 = C |A|^2$, avec $C = \min(\alpha_0, \gamma_0)$, ce qui donne le résultat pour $A = e(u)$. Le fait que $C > 0$ n'est pas un hasard: les arguments mécaniques et thermodynamiques qui conduisent aux inégalités $\mu \geq \alpha_0 > 0$ et $(2\mu + n\lambda) > 0$ sont précisément les mêmes. Deuxièmement, on utilise l'inégalité de Korn qui donne une constante C' telle que: $\int_{\Omega} |e(v)|^2 dx \geq C' \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$ pour tout $v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $\int_{\Omega} (\nabla v - (\nabla v)^T) = 0$. Troisièmement, on utilise l'inégalité de Poincaré qui donne une constante $C'' > 0$ telle que pour tout v vérifie $\int_{\Omega} v = 0$ et $v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\int_{\Omega} |v|^2 dx \leq C'' \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$$

Au totale, ces trois inégalités et le fait que $\int_{\partial\Omega} \varphi r = 0$ conduisent à la coercivité

$$\int_{\Omega} 2\mu |e(v)|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda |\text{div} v|^2 dx \geq C''' \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

■

Remarque 5.2.1 L'interprétation mécanique de l'inégalité de Korn est la suivante. L'énergie élastique, proportionnelle à la norme du tenseur des déformations $e(u)$ dans $L^2(\Omega)$, contrôle la norme du déplacement u dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, à l'addition près de la norme de u dans $L^2(\Omega)$.

5.3 L'inégalité "Doubling" globale

On montre l'inégalité "Doubling" pour le problème au limite (5.1.1)

Théorème 5.3.1 [AMRV08] (l'inégalité "Doubling" globale). Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, avec une frontière de classe Lipshitzienne. Soit $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ une solution faible du problème au limite (5.1.1) satisfaisant les conditions de normalisation:

$$\int_{\Omega} u = 0, \quad \int_{\Omega} (\nabla u - (\nabla u)^T) = 0$$

Soit $\mu, \lambda \in C^{2,1}(\bar{\Omega})$ vérifiant les conditions de régularité:

$$\|\mu\|_{C^{2,1}(\bar{\Omega})} + \|\lambda\|_{C^{2,1}(\bar{\Omega})} \leq M \tag{5.3.1}$$

et les conditions de convexité :

$$\mu(x) \geq \alpha_0 > 0, 2\mu(x) + n\lambda(x) \geq \gamma_0, \text{ dans } \bar{\Omega} \quad (5.3.2)$$

Alors, il existe une constante v , $0 < v < 1$, dépendant de n , α_0 , γ_0 et de M , telles que pour toute $\bar{r} > 0$ et pour toute $x_0 \in \Omega_{\bar{r}}$, où $\Omega_{\bar{r}} = \{x \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq \bar{r}\}$, on ait:

$$\int_{B_{2r}} |u|^2 dx \leq K \int_{B_r} |u|^2 dx, \text{ pour toute, } 0 < r \leq \frac{v}{2} \bar{r} \quad (5.3.3)$$

où K dépend de n , α_0 , β_0 , M , r_0 , M_0 , $|\Omega|$, $\bar{r}$ et de $\|\varphi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} / \|\varphi\|_{H^{-1}(\partial\Omega)}$.

Preuve. Comme $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ est une solution faible du problème aux limites :

$$\begin{cases} \text{div}(\mu(\nabla u + (\nabla u)^T)) + \nabla(\lambda \text{div} u) = 0, \text{ sur } \Omega \\ ((\mu(\nabla u + (\nabla u)^T)) + (\lambda \text{div} u) I_n) \nu = \varphi, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et $\mu, \lambda \in C^{2,1}(\bar{\Omega})$ alors par des estimations de régularité à l'intérieur, on a aussi $u \in H_{loc}^{4l}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. (voir, [C80]). D'après la proposition (2.2.1), le problème ci-dessus est équivalent à:

$$|\Delta^2 u^i| \leq K_0 \sum_{|\alpha|=1}^3 |D^\alpha u|, i = 1, \dots, n$$

L'inégalité ci-dessus est valable pour toute solution faible du problème au limite, donc on peut appliquer le théorème (4.3.1) sur u , i.e:

$$\int_{B_{2r}(x_0)} |u|^2 dx \leq K \int_{B_r(x_0)} |u|^2 dx, \text{ pour toute, } 0 < r \leq \frac{v}{2} \bar{r}$$

donc, on peut prendre aussi $x_0 = 0$, on trouve:

$$\int_{B_{2r}} |u|^2 dx \leq K \int_{B_r} |u|^2 dx, \text{ pour toute, } 0 < r \leq \frac{v}{2} \bar{r} \quad (5.3.4)$$

où K dépend de M , n , α_0, β_0, l , $K_0, r_0, M_0, |\Omega|, \bar{r}$ et de $\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} / \|u\|_{L^2(\Omega)}$

Notre but dans cette preuve est de majorer la quantité $\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} / \|u\|_{L^2(\Omega)}$ par le rapport $\|\varphi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} / \|\varphi\|_{H^{-1}(\partial\Omega)}$.

Par la formulation faible du problème aux limites (5.1.1) et les conditions de normalisation. on a d'abord:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \quad (5.3.5)$$

où C dépend de n , r_0 , M_0 , $|\Omega|$, α_0, γ_0 . De plus l'inégalité d'interpolation suivante est vérifiée.:

$$\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)}^2 \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \quad (5.3.6)$$

On a ensuite l'inégalité de trace (voir [Gr;85, théorème 1.5.1.10]) suivante:

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad (5.3.7)$$

où C dépend de $r_0, M_0, |\Omega|$ et l'estimation du lemme (4.10) dans [AMR03]

$$\|\varphi\|_{H^{-1}(\partial\Omega)} \leq \tilde{C} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \quad (5.3.8)$$

où $\tilde{C}$ dépend de $M, r_0, M_0, |\Omega|, \alpha_0, \gamma_0$

Donc:

$$\frac{\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq \frac{\|u\|_{H^1(\Omega)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \leq C \frac{\|u\|_{H^1(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2} \leq C \frac{\|\varphi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)}^2}{\|\varphi\|_{H^{-1}(\partial\Omega)}^2} \quad (5.3.9)$$

où $C > 0$ dépendant du $n, \alpha_0, \gamma_0, M, r_0, M_0, |\Omega|$ donc notre inégalité (5.3.4) devient:

$$\int_{B_{2r}} |u|^2 dx \leq C^\star \int_{B_r} |u|^2 dx, \text{ pour toute, } 0 < r \leq \frac{v}{2} \bar{r} \quad (5.3.10)$$

où $C^\star$ dépend de $n, \alpha_0, \beta_0, M, r_0, M_0, |\Omega|, \bar{r}$ et $\|\varphi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} / \|\varphi\|_{H^{-1}(\partial\Omega)}$. Il suffit de prendre alors: $K = C^\star$ ■

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons prouvé l'inégalité "Doubling" globale pour le problème cité ci-dessous:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mu (\nabla u + (\nabla u)^T)) + \nabla (\lambda \operatorname{div} u) &= 0, \text{ dans } \Omega \\ \left((\mu (\nabla u + (\nabla u)^T)) + (\lambda \operatorname{div} u) I_n \right) \nu &= \varphi, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Ce qui est intéressant dans la preuve c'est bien l'utilisation du système des inégalités différentielles et des inégalités d'interpolation. En effet, nous avons réduit le système de Lamé à un système d'ordre 4:

$$|\Delta^2 u^i| \leq K_0 \sum_{|\alpha|=1}^3 |D^\alpha u|, i = 1, \dots, n$$

Ainsi, on a généralisé ce dernier système à un système d'ordre $\left[\frac{3l}{2}\right]$:

$$|\Delta^l u^i| \leq K_0 \sum_{|\alpha| \leq \left[\frac{3l}{2}\right]} |D^\alpha u|, i = 1, \dots, n$$

Pour ce faire, on a utilisé le théorème des trois sphères, la propagation Lipschitz de la petitesse, l'inégalité "Doubling" locale, et l'inégalité "Doubling" globale.

La preuve du théorème de l'inégalité "Doubling" globale pour les solutions des problèmes aux limites est basée sur: le système d'ordre 4 et l'inégalité "Doubling" globale pour ce dernier.

Notons en guise de perspectives que l'inégalité "Doubling" pour les solutions du système de Lamé isotrope est un problème ouvert dans le cas: $\mu, \lambda \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ (le système de Lamé isotrope).

Enfin, on propose d'établir cette inégalité pour le système de Lamé anisotrope, les équations paraboliques et hyperboliques.

Bibliographie

Bibliographie

- [Ad75] R.A.Adams. Sobolev spaces. Academic Press, New York, 1975.
- [ABRV01] IG. Alesandrini , E. Bretta, E. Rosset and S. Vessella. Optimal stability for inverse elliptic boundary value problems with unknown boundary. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci.4XXIX(2001) , 755-806. (2001).
- [Al79] [Al79] F. J. Almgren, Jr.. Dirichlet's problem for multiple valued functions and the regularity of mass minimizing integral currents, in Minimal submanifolds and geodesics (Proc. Japan-United States Sem., Tokyo, 1977), 1–6, North–Holland, Amsterdam–New York, 1979.
- [AM01] G. Alesandrini and A. Morassi. Strong unique continuation for the Lamé system of elasticity. Comm. Partial Differential Equations 26 (2001) 98210, 1787-1810.
- [AMR02] G. Alesandrini , A. Morassi and E.Rosset. Detecting an inclusion in an elastic body by boundary measurements. SIAM J. Math. Anal.33 (2002), 6 , 1247-1268.
- [AMR03] G. Alessandrini, A. Morassi and E. Rosset. Size estimates, in Inverse Problems: Theory and Applications, G. Alessandrini and G. Uhlmann, eds., Contemp. Math. 333, 1-33, AMS, Providence, RI, 2003.
- [AMRV08] G. Alessandrini, A. Morassi, E. Rosset and S. Vessella. On doubling inequalities for elliptic systems, arxiv: 0810.01115v1 [math.AP] 1Oct 2008.

- [AR98] [AR98] G. Alessandrini and E. Rosset. The inverse conductivity problem with one measurement: bounds on the size of the unknown object. *SIAM J. Appl. Math.*, 58 (1998), 4, 1060–1071.
- [Bre83] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983
- [C80] S. Campanato. *Sistemi ellittici in forma divergenza. Regolarità all'interno*. Quaderni Scuola Normale Superiore Pisa, Pisa, 1980.
- [ChiarFab86] F. Chiarenza, E. B. Fabes and N. Garofalo "Harnack's inequality for Schrödinger operators and the continuity of solutions, *Proc. Amer. Soc* 98(1986), 415-425.
- [FBOR09] Franck Boyer "Analyse numérique des EDP elliptiques", Master 2ième année - Mathématiques et Applications, Université Paul Cézanne, 1er décembre 2009.
- [GCRDF85] j. Garcia-Curva, and J. L. Rubio De Francia. *Weighted norm inequalities and related topics*. North Holland, Amsterdam, 1985.
- [GL86] N. Garofalo and F-H. Lin. Monotonicity properties of variational integrals, A_p weights and unique continuation. *Indiana Univ. Math. J.*, 35(1986), 245-268.
- [GL87] N. Garofalo and F-H. Lin. unique continuation for elliptic operators: A geometric- variational approach. *Comm. Pure Appl. Math.*, 40(1987), 247-266.
- [Gri85] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Monographs and studies in Mathematics 24. Pitman, Boston, 1985.
- [H01] J. Heinonen. *lectures on metric spaces*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Hör] L. Hörmander, "The analysis of linear partial differential operators". Vol. 3, Springer-Verlag, Berlin / New York, 1985.
- [Kuk98] I. Kukavika, Quantitative uniqueness for second-order elliptic operators, *Duke Math. J.*, 91 (1998), pp. 225-240.

- [Land63] E. M. Landis, A three-sphere theorem, Dokl. Akad. Nauk SSSR 148 (1963) 277C279, translated in Sov. Math. 4 (1963), pp. 76-78.
- [Lin07] C.L. Lin, Strong unique continuation for m-th powers of a Laplacian operator with singular coefficients, Proc. of AMS, 135 (2007), 569-578.
- [LM72] J.L. Lions and E. Magenes. Non-homogeneous boundary value problems and Applications I. Springer, Berlin, 1972.
- [LNgW08] C-L. Lin, S. Nagayasu and J-N. Wang. Quantitative uniqueness for the power of Laplacian with singular coefficients. Preprint (2008), <http://arxiv.org/abs/0803.1012>.
- [LNkW08] C-L. Lin, G. Nakamura and J-N. Wang. Quantitative uniqueness for second order elliptic operators with strongly singular coefficients. Preprint (2008), <http://arxiv.org/abs/0802.1983>.
- [MR04] A. Morassi and E. rosset . Stable determination of cavities in elastic bodies. *Inverse Problems* , 20(2004), 453-480.
- [MR05] A. Morassi and E. rosset . Uniqueness and stability in determining a rigid inclusion in an elastic body. MCM. Amer. Math. Soc., to appear.
- [V08] S. Vessella. Quantitative estimates of unique continuation for parabolic equations, determination of unknown time-varying boundaries and optimal stability estimates. *Inverse Problems*, 24 (2008), 2 , 1-81.