



N° d'ordre : 029-M/PH2004

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE  
USTHB/ALGER  
FACULTE DE PHYSIQUE

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

**Magister**

En physique

Spécialité : Energétique et Mécanique des Fluides

Par

**AKSOUH MOHAMED**

SUJET

**SIMULATION NUMERIQUE DES ECOULEMENTS  
INSTATIONNAIRES POUR DES FLUIDES NON-NEWTONIENS À  
TRAVERS DES CONFIGURATIONS COMPLEXES :**

*Applications aux écoulements sanguins.*

Soutenue publiquement le 12/10/2004 devant le jury composé de :

Mr D. KALACHE	Professeur	USTHB	Président
Mr N. ZERAIBI	Maître de conférence	FHC (Boumerdés)	Directeur de thèse
Mr N. MOULAY MOSTEFA	Professeur	U. MEDEA	Examineur
Mr F. SOUIDI	Maître de conférence	USTHB	Examineur
Mr M. KESSAL	Maître de conférence	FHC (Boumerdés)	Examineur

# ***REMERCIEMENT***

Cette recherche a été réalisée au laboratoire de mécanique des fluides théorique et appliquée (faculté de physique -USTHB).

Je tiens à remercier sincèrement mon professeur Monsieur ***ZERAIBI Nouredine***, le grand mérite lui revient, et à lui exprimer toute ma gratitude pour son assistance, sa gentillesse, sa disponibilité et ses conseils et qui m'ont beaucoup aidés à réaliser ce travail.

Je remercie vivement Monsieur ***KALACHE Djamel*** professeur à l'USTHB et directeur du laboratoire mécanique des fluides théoriques et appliquées qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également Monsieur ***MOULAY MOUSTEFA Nadji*** professeur à l'université de Médéa, Monsieur ***SOUIDI Ferhat*** Maître de conférence à l'USTHB et Monsieur ***KESSAL Mouhand*** Maître de conférence à l'FHC, qui, malgré leurs occupations ont accepté de prendre place parmi les membres de jury.

Je remercie tous mes amis, les membres du laboratoire de mécanique des fluides, les membres du laboratoire de rhéologie de la faculté des hydrocarbures de boumerdés et tous ceux qui ont apporté leur contribution à réaliser ce travail.

# *DEDICACES*

*Je tiens à dédier ce travail à :*

*A mes très chers parents, à qui je dois tout et ne rendrais jamais assez.*

*A ma chère femme Hassina, qui ma soutenu le long de ce travail de recherche.*

*A ma chère sœur Assia et mes deux frères : Mahrez et Youcef.*

*A toute ma famille et ma belle-famille.*

*Aussi, je dédie ce travail à tous mes amis.*

*AKSOUH MOHAMED*

# ***SOMMAIRE***

<b>Introduction générale</b>	1
<b>Chapitre I : Introduction</b>	
I.1. Introduction.....	4
I.2. La sténose.....	4
I.3. L'anévrisme.....	4
I.4. Etude bibliographique.....	5
<b>Chapitre II : Caractérisation des paramètres du fluide sanguin</b>	
II.1. Introduction.....	10
II.2. Définitions et paramètres physiques .....	11
II.2.1. Contrainte de cisaillement .....	11
II.2.2. Déformation de cisaillement .....	11
II.2.3. Vitesse de cisaillement .....	12
II.2.4. Viscosité .....	12
II.2.5. Différentes définitions de la viscosité .....	12
II.3. Classification et comportement rhéologiques des fluides complexes .....	13
II.3.1. Classification des fluides .....	14
II.3.2. Description et comportement des fluides complexes .....	16
a. Les fluides dont la viscosité est indépendante du temps .....	16
b. Les fluides dont la viscosité dépend du temps .....	19
c. Les fluides viscoélastiques .....	19
II.4. Propriétés et comportements rhéologiques du sang .....	20
II.5. Applications .....	22
II.5.1. lois de comportements du sang .....	22
II.5.2. Calcul de la dispersion .....	24
II.5.3. Calcul du coefficient de corrélation de Teil .....	24
II.6. Conclusion .....	26

### Chapitre III : Ecoulement du fluide pseudoplastique a travers une conduite à symétrie axiale

III.1. Introduction .....	27
III.2. Méthode analytique .....	27
III.2.1. Position du problème .....	27
III.2.2. Profils des vitesses axiales dans les conduites cylindriques .....	30
III.3. Méthode numérique .....	31
III.3.1. Position du problème et modèle mathématique .....	31
a) Position du problème .....	31
b) Equations gouvernant le problème .....	32
III.3.2. Formulation adimensionnelle .....	33
III.3.3. Conditions aux limites .....	32
III.3.4. Implantation de la méthode des éléments finis .....	34
a) Approximation et discrétisation par éléments finis .....	35
b) Formulation intégrale .....	37
c) Présentation matricielle de la méthode des éléments finis .....	39
d) Assemblage et stockage de la forme intégrale globale $W^e$ .....	42
e) Intégrations numériques .....	45
f) Procédures de résolution .....	46
III.4. Résultats et discussion .....	49
III.4.1. Profils de vitesse axiale.....	49
III.4.2. Profil de la pression et de la contrainte de cisaillement pariétale .....	51
III.5. Conclusion .....	51

### Chapitre IV : Etude des écoulements sanguins a travers des sténoses et des anévrismes.

IV.1. Introduction .....	53
IV.2. Etude d'un écoulement d'un fluide Newtonien et du fluide sanguin dans une conduite sténosée .....	53
IV.2.1. Position du problème et modèle mathématique .....	53
IV.2.1.1. Géométrie de la configuration .....	53
IV.2.1.2. Formulation mathématique .....	55
IV.2.1.3. Conditions aux limites .....	56

IV.2.2. Etude du profil de la vitesse .....	57
IV.2.2.1. Influence du nombre de Reynolds .....	59
IV.2.2.2. Influence du degré de sténose .....	59
IV.2.2.3. Influence de la longueur de sténose .....	59
IV.2.2.4. Influence de la rhéofluidité.....	63
IV.2.3. Contrainte de cisaillement pariétal .....	66
IV.2.4. Evolution de la longueur de recollement .....	69
IV.2.5. Etude de la perte de la charge singulière .....	70
IV.3. Etude d'un écoulement des deux fluides à travers un anévrisme .....	73
IV.3.1. Position du problème et modèle mathématique .....	73
IV.3.2. Profil de la vitesse axiale .....	74
IV.3.2.1. Influence du nombre de Reynolds .....	74
IV.3.2.2. Influence du rapport d'anévrisme .....	74
IV.3.2.3. Comparaison entre les deux fluides.....	76
IV.3.3. Evolution de la contrainte pariétale .....	77
IV.3.4. Profil de la perte de charge singulière .....	79
IV.4. Conclusion .....	81
<b>Chapitre V : Ecoulement pulsé d'un fluide sanguin à travers une sténose</b>	
V.1. Introduction .....	82
V.2. Ecoulement oscillatoire d'un fluide newtonien à travers une conduite cylindrique.	82
V.3. Ecoulement pulsé d'un fluide sanguin à travers une sténose .....	84
V.3.1. Evolution de la vitesse axiale .....	86
a. Influence de la section .....	89
b. Influence du nombre de Womersley .....	89
V.3.2. Déphasage entre la vitesse et la pression .....	90
V.4. Conclusion .....	93
<b>Conclusion générale</b> .....	94
<b>Bibliographie</b> .....	97

# ***NOMENCLATURE***

$d_{ij}$	Déviateur du tenseur de contrainte
$E_{\psi}$	Ensemble des fonctions de pondérations
$e(x)$	Erreur estimative
$\{f\}$	Vecteur élémentaire des sollicitations
$f$	Facteur de frottement
$[k]$	Matrice élémentaire
$[K]$	Matrice globale
$L$	Longueur de la conduite
$L_s$	Longueur de la sténose
$n$	Indice d'écoulement
$N(\xi)$	Fonctions d'interpolation dans un espace de référence
$P(\xi)$	Fonctions d'approximation dans un espace de référence
$N(X)$	Fonctions d'interpolation dans un espace réel
$P(X)$	Fonctions d'approximation dans un espace réel
$P$	Pression
$\langle P \rangle$	Base polynomiale
$Q$	Débit
$r$	Direction transversale
$R$	Rayon de la conduite
$R_{ava}$	Rayon en aval de la conduite
$R_{amo}$	Rayon en amont de la conduite
$R_{ana}$	Rayon d'anévrisme
$R(u)$	Résidu
$Re$	Nombre de Reynolds
$S_t$	Degrés de sténose.
$S$	Surface
$t$	Temps
$u$	Vitesse axiale
$U_m$	Vitesse débitante
$\{u_n\}$	Vecteur élémentaire des variables aux nœuds.
$\{\delta u_n\}$	Vecteur élémentaire des variations des variables nodales

$u_{ex}(x)$	Fonction approchée
$v$	Vitesse transversale
$V$	Volume
$V^e$	Elément
$W^e$	Forme intégrale élémentaire.
$W$	Forme intégrale
$w_i$	Les coefficients poids
$Z$	Direction axiale
$Z_r$	Point de recollement
$\alpha$	Nombre de Womersley
$\beta$	Grandeur caractéristique dépendant des temps d'orientation, d'alignement et d'agrégation de la particule.
$\chi$	Rapport d'anévrisme.
$\delta(x)$	Distribution de Dirac.
$\delta$	Degrés de liberté de sténose.
$\mu_0$	Caractérise le comportement de la suspension à cisaillement nul,
$\mu_\infty$	Caractérise le comportement de la suspension à cisaillement infini, c'est un paramètre lié à la déformation des globules rouges.
$\tau_{ij}$	Tenseur de contrainte
$\tau_C$	Contrainte de seuil
$\tau_P$	Contrainte pariétale
$\tau_{en}$	Contrainte à l'entrée de la conduite
$\tau^e$	Transformation Eulérienne.
$\Psi$	Fonction de pondération
$\Omega^e$	L'élément de référence.
$\Gamma$	Contour
$\gamma$	La déformation de cisaillement
$\dot{\gamma}$	Vitesse de cisaillement
$\mu_{app}$	Viscosité apparente
$\mu_r$	Viscosité relative
$\mu_{com}$	Viscosité complexe
$\Re$	Coefficient de corrélation de Teil
$\rho$	Masse volumique

A rectangular area with a marbled paper texture, featuring swirling patterns of light grey, white, and beige. The text is centered within this area.

# **INTRODUCTION GENERALE**

L'utilisation de la mécanique des fluides dans le domaine biomédical et dans de nombreuses activités industrielles nécessite souvent la compréhension et la modélisation du transport des fluides dans des réseaux de conduites comportant des singularités (vannes, coudes, rétrécissements, élargissements).

Dans le domaine industriel, la détermination du diamètre optimum des tubes et de la puissance des pompes de transfert passe par une connaissance précise des lois régissant les pertes d'énergie dans les conduites et dans les singularités. Dans les conduites les pertes sont dites linéaires ou régulières, par contre dans les singularités on les appelle des pertes singulières. Ces dernières peuvent être attribuées à la viscosité du fluide et aux perturbations, plus au moins importantes, du champ des vitesses lors des variations de direction ou (et) section.

Dans le domaine biomédical, les pathologies affectant le fonctionnement de l'appareil cardio-vasculaire sont une des causes principales de mortalité ou d'invalidité. La pompe cardiaque peut être incriminée lorsqu'elle ne joue plus son rôle de pompe, ou bien lorsque les vaisseaux n'assurent plus leur fonction de conduction.

Un vaisseau ne remplit plus sa fonction principalement dans deux cas : la rupture (ex. anévrisme) et l'obstruction (ex. sténose). Ces deux types de singularités se rencontrent dans l'organisme humain.

De nombreuses études théoriques et expérimentales ont traité le côté mécanique des sténoses et des anévrismes artériels et les travaux ont été réalisés en assimilant le sang à un fluide Newtonien. Néanmoins, certaines études faites sur le sang ont montré que celui-ci change de comportement suivant sa situation dans le lit vasculaire.

Pour étudier le comportement de l'écoulement d'un fluide sanguin à travers les singularités, en tenant compte du comportement non linéaire du sang, la dynamique des fluides numérique se présente comme un outil très utile pour évaluer le comportement du sang s'écoulant dans les artères normales, dans des veines chirurgicalement reconstruites ou à travers des dispositifs artificiels.

Dans ce travail nous allons étudié numériquement les écoulements laminaires en régime stationnaire et transitoire du fluide sanguin à travers deux singularités vasculaires : la sténose et l'anévrisme. Pour cela nous avons élaboré un programme de calcul utilisant la méthode des éléments finis type formulation mixte ( $\mathbf{u}, p$ ).

Le travail suivant est composé d'une introduction générale, de cinq chapitres et d'une conclusion générale :

Le premier chapitre comprend une étude bibliographique sur les principaux travaux des deux configurations considérées qui sont la sténose et l'anévrisme, ainsi que sur la méthode des éléments finis type formulation mixte. De même, pour mieux discerner le fond du problème nous allons essayer de donner quelques définitions et explications de ces deux singularités et leurs influences sur l'être humain.

Le deuxième chapitre porte sur la rhéologie des fluides complexes avec une étude générale de leur comportement rhéologique et leur classification en fonction des paramètres physiques. Après cela, nous nous sommes intéressés à l'aspect modélisation du comportement du sang humain en déterminant par voie numérique l'équation rhéologique la plus adéquate et les paramètres rhéologiques correspondants suivant plusieurs critères de prise de décision.

Le troisième chapitre concerne l'étude de l'écoulement d'un fluide pseudo plastique à travers une conduite cylindrique avec une présentation de la méthode de résolution numérique et le schéma d'approximation. Nous développons un programme de calcul utilisant la méthode des éléments finis pour prévoir l'influence de la pseudoplasticité du fluide sur l'écoulement et étudier la structure du champ des vitesses. Afin de valider les méthodes de calcul, nous procédons à des comparaisons entre nos valeurs numériques et les solutions analytiques.

L'étude dynamique de l'écoulement à travers des sténoses et des anévrismes est présentée dans le quatrième chapitre. Les profils de vitesses, les zones de recirculation, les longueurs d'établissement et de recollement et les contraintes de cisaillement à la paroi sont étudiés en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement, de la géométrie des singularités et des propriétés rhéologiques des fluides.

Dans le cinquième chapitre, nous examinons l'étude de l'écoulement transitoire pulsé d'un fluide sanguin à travers une conduite sténosiale à symétrie axiale. L'écoulement pulsé est conditionné par un gradient de pression artérielle sanguine. Ce gradient n'est que la conséquence des résultats expérimentaux de McDonald (1954) et Womersley (1955).

Les profils de la vitesse axiale, la pression, l'évolution des zones tourbillonnaires et le déphasage entre les différents paramètres hydrodynamiques, sont étudiés en fonction du nombre de Womersley et du degré de sténose.

Nous terminons notre étude par une conclusion générale dans laquelle nous résumons les principaux résultats et les perspectives qui restent ouvertes dans cette voie.

**CHAPITRE I :**

**INTRODUCTION**

### **I.1. Introduction :**

La physiologie du système vasculaire a été élucidée progressivement dans l'histoire de la recherche. C'est surtout au milieu du 20<sup>ème</sup> siècle que les études ont été approfondies avec des modélisations mathématiques limitées aux modèles de base tel que l'écoulement dans les régions morphologiquement simples [73] ou sur des modèles basés sur l'analogie électrique [32]. Les solutions exactes, ainsi que les simulations numériques, sont très difficiles à obtenir dans les situations générales à cause des interactions fortes non linéaires entre les différentes parties du système et les complexités géométriques de l'anatomie vasculaire de chaque individu.

L'athérosclérose est l'une des premières causes de mortalité à notre époque et cause de plusieurs problèmes cardio-vasculaires. Cette pathologie évolue silencieusement pendant plusieurs décennies avant d'être révélée par un accident grave, dû à l'une de ses complications : infarctus du myocarde, embolie pulmonaire, accident vasculaire cérébral...

### **I.2. La sténose :**

Bien que la formation d'un caillot soit un processus normal, celui-ci se révèle dangereux lorsqu'il se produit d'une façon inappropriée. Si ces caillots parviennent aux poumons ils peuvent provoquer la mort par embolie.

A un stade avancé de la pathologie, son traitement passe par une intervention chirurgicale. Une de ses interventions est l'introduction d'une sonde à ballonnet gonflable dans une artère de la jambe et dirigée via l'aorte dans l'artère coronaire. Le ballonnet se gonfle lorsqu'il atteint l'obstruction, ce qui écrase la sténose et rétablit le débit sanguin.

### **I.3. L'anévrisme :**

Cette pathologie artérielle est une dilatation ou distension anormale modifiant la structure de la paroi d'un vaisseau. L'observation des tissus au niveau d'un anévrisme artériel met en évidence une anomalie de constitution de la zone élastique de la paroi interne. Sur cette paroi fragilisée les chocs dus à la pression sanguine entraînent la formation d'une hernie (distension du vaisseau). L'anévrisme se fait vers l'augmentation inévitable de son calibre, c'est à dire qu'il est menacé d'une rupture. Plus un anévrisme est de grande taille, plus le risque de rupture est important.

Les anévrismes peuvent être traités par un procédé chirurgical [12], appelé anévrisomorphie, qui vise à reconstituer le trajet du vaisseau après ablation de la partie dilatée. Cette dernière peut également être remplacée par un tube synthétique du diamètre du vaisseau.

#### I.4. Etude bibliographique :

L'étude des écoulements à travers des artères sténosées et des anévrismes est l'un des problèmes fondamentaux en hémomécanique. Depuis une vingtaine d'années, de nombreux travaux ont été publiés sur ces phénomènes en utilisant des modèles expérimentaux (in vitro, in vivo)<sup>1</sup>, analytiques et numériques. Dans cette partie, nous allons aborder les principaux travaux qui nous serviront de référence.

Dans les cas des études des écoulements à travers des sténoses, les travaux théoriques et expérimentaux de Young (1973) [75], Seely (1976) [65], Deshpande (1976) [27] et Mc Donald (1979) [50] montrent que les écoulements dépendent de la forme et de la taille de la sténose, du diamètre de l'artère et du nombre de Reynolds. Hutchison (1985) [38] a étudié la zone de recirculation en aval d'une artère sténosée (in vivo). L'étude de Prakash (1988) [60] montre que la variation de la forme et de la taille des sténoses ont une influence significative sur les paramètres d'écoulement. Il est donc important d'analyser l'influence de ces paramètres dans un écoulement.

Azuma (1976) [8], en utilisant de la poudre d'aluminium, Liepsh (1992) [45] et Solzbach (1987) [69] avec une technique photo élastique et Ojha (1988) [55] avec une méthode photo chromatique ont visualisé la région de séparation et de recollement dans des sténoses rectangulaires et circulaires (in vitro). Avec la méthode de perturbation Remeli (1993) [79] a étudié les effets d'une déformation de la paroi sur les champs hydrodynamique et thermique du caloporteur. Elle a constaté que le champ dynamique de l'écoulement est fortement perturbé même en aval de la zone déformée, et ceci quelques soit la position de la déformation.

Les interprétations des signaux Doppler ont permis à M. Dauzat [24] de localiser et d'évaluer le degré de la sténose artérielle, par des signes directs et indirects. Ces perturbations typiques du sonogramme attestent que lorsque le rétrécissement approche 90%, l'écoulement sanguin devient turbulent, ce qui représente une perte considérable d'énergie, de sorte qu'elle se comporte comme une résistance additionnelle en série.

Concernant la propriété non Newtonienne du sang, Nakamura (1988) [53] a étudié l'écoulement laminaire du fluide sanguin dans une sténose à symétrie axiale en utilisant la méthode des éléments finis, et a précisé les variations de points de séparation et de recollement en fonction du nombre de Reynolds.

---

<sup>1</sup> In vivo = expérience directe sur l'homme ou un animal

in vitro = expérience hors de l'organisme

Navidbakhsh (1996) [54] utilisant le code de calcul FIDAP, a considéré l'écoulement laminaire du sang dans des sténoses avec trois formes de géométries différentes : rectangulaire, triangulaire, et arc de cercle. Il a observé qu'une sténose rectangulaire, par sa brutale convergence, a une influence plus forte sur l'écoulement qu'une sténose en arc de cercle ou triangulaire. Seulement, quelle que soit la forme de la géométrie ou le comportement rhéologique du fluide, lorsque le nombre de Reynolds augmente, la vitesse axiale sur l'axe, la longueur de la zone de recirculation, les longueurs d'établissement et de recollement et le coefficient de perte de charge singulière augmentent.

En ce qui concerne les anévrismes ; Scherer (1973) [64], Drexler et Hoffman (1985) [28] et Budwig (1993) [17] constatent expérimentalement que le champ d'écoulement laminaire est caractérisé par un jet de fluide (passant directement à travers l'anévrisme) entouré d'un tourbillon recirculant pouvant favoriser l'apparition de trombe. Budwig a également étudié l'écoulement stationnaire d'un fluide Newtonien dans les anévrismes de l'aorte abdominale avec la méthode des éléments finis en utilisant le code FIDAP.

Sur une patiente de 20 ans ayant un bilan médical donné, Keller (2002) [39] a étudié l'effet d'un anévrisme, causé par l'hypertension artérielle rénovasculaire sur l'artère rénale. Par artériographie, il confirme la présence d'une sténose de 75% précédant un anévrisme de 3,5 cm de diamètre de l'artère rénale droite. Une résection chirurgicale de ces lésions et la réimplantation de l'artère rénale droite sur l'aorte est réalisée.

D'ailleurs, d'après les enregistrements Doppler [25] au niveau de l'anévrisme, la vitesse circulatoire est réduite en propagation inverse de l'augmentation du diamètre, ce qui diminue l'énergie cinétique et augmente la pression locale au pic de l'anévrisme, ce qui va contribuer à entretenir la croissance de l'anévrisme.

Tong & Vawter (1972) [71] ont rapporté, avec la méthode des éléments finis, les solutions d'un écoulement rampant pour plusieurs rapport d'anévrisme, avec une onde artérielle se propagent le long de l'aorte. Cette étude était d'un grand intérêt pour D.Brown & Hung (1977) [15], qui ont simulé par la méthode des différences finis l'écoulement d'un fluide non Newtonien à travers différents rapports d'anévrisme. Leurs résultats ont été en bonne concordance avec les visualisations expérimentales.

Steiger (1990) [70] a étudié un modèle d'anévrisme et Bluth (1990) [14] celui d'un anévrisme de l'aorte abdominale. Ils montrent que les écoulements dans les anévrismes sont parfois laminaires et turbulents (in vivo). Les derniers travaux de P-Y. Lagrée (1998) [42] portent sur les modélisations des écoulements sanguins à travers différentes pathologies cardio-vasculaires on utilisant la méthode couche limite interactive.

Navidbakhsh [54] pour sa thèse de doctorat (1996), en utilisant le code de calcul FIDAP, à trouver que les lignes de courant, de l'écoulement laminaire, montrent qu'un jet de fluide passe directement à travers l'anévrisme et est entouré par une zone de recirculation. Il constate que l'influence du nombre de Reynolds est plus accentuée pour un fluide sanguin que pour un fluide Newtonien. Seulement, les résultats actuels à notre disposition sont principalement des études in vitro, car les données in vivo sont très difficiles à obtenir.

L'existence de nombreux systèmes biologiques et industriels nécessite de connaître le comportement d'un écoulement pulsé dans une conduite cylindrique, afin de l'exploiter dans le secteur de l'industrie biomédicale (dispositifs implantables, imagerie médicale, matériel médical et chirurgical). L'écoulement en question est celui de l'écoulement transitoire pulsé, générer par la pompe cardiaque à travers des artères ou des veines.

Dans le domaine biomédical, l'écoulement pulsé a été étudié pour connaître les modifications de l'écoulement du sang dans des sténoses (Ahmed & Giddens 1984 [2], Navidbakhsh 1996 [54], J.R. Buchanan Jr. 2000[16]), des coudes et des bifurcations (Ku & Giddens 1987 [41]) et des anévrismes (D.Brown & Hung (1977) [15], Sobey 1978 [68], Low 1993 [47], Navidbakhsh 1996 [54]) puis, pour connaître le potentiel nécessaire aux systèmes hautes fréquences, utilisés lors d'interventions chirurgicales et pour les soins intensifs (Gaver 1986 [34], Lorenzetti 2001 [46]).

Plusieurs études expérimentales ont été consacrées à l'analyse de l'effet d'une fonction périphérique pulsée sur les maladies cardio-vasculaires. La plupart de ces études 'in vivo', étant très difficile à réaliser, coûtant chère et de plus les artères faciles étant limitées. Sobey [68] a été le premier à observer les zones tourbillonnaires expérimentalement. Cependant la bonne alternative est d'utiliser les modèles numériques (Porenta 1986 [58], Balar 1989 [10], Almeder 1999).

Etant donné que l'hémodynamique artérielle nécessite des analyses sous forme d'onde de pression et d'écoulement et que ce type de pulsations n'est pas unique, nous avons rencontré plusieurs types de recherche dans ce domaine qui modélisent chacun différentes formes d'ondes dans les écoulements laminaires et turbulents pour connaître les paramètres hydrodynamiques. Nous pouvons citer pour les sténoses, Womersley 1955 [73], Buchanan Jr. 2000 [16] et Mittal 2003 [78].

Néanmoins, ces simulations numériques d'écoulement de fluides non Newtoniens pose des problèmes spécifiques liés au couplage existant entre loi de comportement du fluide et les lois du mouvement, ainsi qu'à la nature des équations.

Les développements récents ont montré que de nombreuses difficultés rencontrées dans la résolution des équations de Navier-Stokes étaient dans : la méthode de résolution ou l'algorithme (convergence et stabilité), dans la manière dont les variables indépendantes ou les équations étaient reliées (couplage), dans le choix de la grille de calcul (génération du maillage) et dans le fait que pour des nombres de Reynolds élevés tous les termes des équations de Navier-Stokes n'avaient pas la même importance (parabolisation, direction privilégiée de l'écoulement, interaction de pression, caractère mathématique des équations).

Compte tenu de la complexité des deux géométries et de l'état rhéologique du fluide, le choix de la méthode pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes s'est porté sur la méthode des éléments finis type formulation mixte.

La méthode des éléments finis (M.E.F) est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : Problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions.

Pour que la M.E.F soit efficace pour des applications industrielles ou biomécaniques, il faut utiliser des programmes d'assistance à la préparation des données et à l'interprétation des résultats. C'est pré- et post- processeurs se développent rapidement en ce moment ; ils utilisent les techniques de l'informatique graphiques et interactives.

Cette méthode numérique est maintenant très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire. Ces derniers temps elle s'est développée dans les applications de la mécanique des fluides : interactions fluide-structure, transport de sédiment, milieux poreux, étude de la marée et surtout dans la biomécanique. De nombreux programmes généraux de calcul sont disponibles pour utiliser la méthode des éléments finis, citons par exemple : NASTRAN, FIDAP, ASKA, ASP, MARC, ANSYS, TITUS, ADINA.

Nous pouvons citer dans ce domaine le travail de Hassan Manouzi [48], qui consiste à l'étude d'une formulation mixte des équations de Navier-Stokes faisant intervenir comme inconnues la vitesse du fluide ainsi que son gradient. Il démontre l'existence et l'unicité, ainsi que les propriétés de convergence d'une solution approchée par la méthode des éléments finis au voisinage d'une solution non singulière de ces équations.

Yong et al. [74] ont considéré le comportement des fluides non Newtonien du sang dans une artère. R.W.G. Shipman et Coll. [66] ont considéré le comportement des fluides non Newtoniens viscoélastiques par un modèle appelé " Falling Plate " extensif, et ils ont comparé trois méthodes différentes d'éléments finis (Galerkin, Streamline-Upwind, Petrov-Galerkin).

Pour sa thèse de doctorat à l'I.N.P.L., Mahdi Navidbakhsh [54] a étudié l'évolution des écoulements permanents et transitoires pour des fluides sanguins, à travers des singularités complexes (sténose et anévrisme) en deux et en trois dimensions. Pour la résolution numérique l'auteur a utilisé une méthode de Galerkin en éléments finis type itératif avec point fixe.

Notre but, est d'étudier numériquement l'influence de deux types de singularités vasculaires, sur les paramètres hydrodynamiques locaux et principalement sur la contrainte de cisaillement pariétale et les pertes de charges singulières.

Dans la première étape de cette étude, on analyse les influences des modèles de sténose et d'anévrisme à symétrie axiale dans une conduite cylindrique sur l'écoulement du fluide newtonien et non newtonien en régime stationnaire.

La deuxième étape est consacrée à l'étude des problèmes en régime transitoire par un écoulement pulsé dans une sténose.

The text is centered on a rectangular area with a marbled, stone-like background. The marbling consists of irregular, swirling patterns of light grey, white, and beige tones.

**CHAPITRE II :**  
**CARACTERISATION DES PARAMETRES**  
**DU FLUIDE SANGUIN**

## **II.1. Introduction :**

D'un point de vue physique, les lois de conservation sont valables pour tous les milieux continus : fluides ou solides. Si le mouvement du milieu est déterminé seulement par les équations qui traduisent les lois de conservation, cela impliquerait que soumis à des efforts identiques, ces milieux continus subissent les mêmes mouvements, ce qui est faux.

Il en résulte que les lois de conservation dont le caractère est universel sont insuffisantes pour étudier les mouvements des milieux continus. On doit les compléter par des lois spécifiques [43] dites lois de comportement qui sont propres à chaque milieu. Ces dernières vont relier les forces de contact aux déformations locales au même point du milieu choisi. Ces forces de contact sont caractérisées en tout point par le tenseur des contraintes.

Avant d'entamer les aspects rhéologiques et leurs lois de comportement, nous allons essayer de donner quelques précisions et définitions des paramètres physiques qui constituent la base de ces derniers.

Après une représentation générale et une classification des fluides complexes, nous allons étudier le comportement du fluide sanguin afin de l'exploiter dans la suite de notre travail en tant que loi de comportement d'un fluide non Newtonien. Pour cela, nous allons déterminer les paramètres de différentes lois de comportement en s'appuyant sur des résultats expérimentaux.

Finalement, par le calcul du coefficient de dispersion et du coefficient de corrélation de Teil pour les quatre lois de comportement, on prendra celle qui représente le mieux le comportement non Newtonien du fluide sanguin.

## II.2. Définitions et paramètres physiques :

### II.2.1. Contrainte de cisaillement :

Du point de vue de la mécanique, la propriété essentielle des fluides est la possibilité de supporter des déformations arbitrairement grandes sans perte de cohésion. Les contraintes engendrées dans un fluide ne dépendent donc pas de l'amplitude de déformation, comme c'est le cas des solides.

Pour un fluide au repos, son tenseur de contrainte est isotrope et ses contraintes tangentielles sont nulles. Sur chacun des axes la contrainte normale est l'opposé de la pression :

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -P \quad (2.1)$$

Par contre pour un fluide en mouvement, le tenseur de contrainte  $\tau_{ij}$  est décomposé en la somme d'une contribution isotrope, que nous connaissons comme pression  $P$ , et d'une contribution anisotrope, due à la viscosité du fluide, tel que :

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + d_{ij} \quad (2.2)$$

$d_{ij}$  Est également appelé déviateur.

La contrainte de cisaillement correspond à la force de frottement par unité de surface qui s'exerce tangentiellement (parallèlement au mouvement) à la surface des strates. Elle varie donc d'une couche à l'autre, mais demeure constante en tout point d'une lamelle donnée.

Elle est défini par :

$$\tau = \frac{dF}{dS} \quad (2.3)$$

Les forces normales exercées par une couche sur sa voisine sont généralement négligées.

### II.2.2. Déformation de cisaillement :

Deux couches d'une substance, situées dans la même section droite à l'instant initial, parcourent une distance  $dx$ , après cisaillement entre un plan fixe et un plan mobile. La distance parcourue dépend de la vitesse propre de chaque couche par rapport au plan immobile.

Dans le cas d'un mouvement unidimensionnel, la déformation de cisaillement est donné par :

$$\gamma = \frac{dx}{dy} \quad (2.4)$$

$dx$  : variation du déplacement

$dy$  : écart entre deux couches voisines.

### II.2.3. Vitesse de cisaillement :

Dans le cas d'un mouvement unidimensionnel la vitesse de cisaillement ou gradient de vitesse est défini par :

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dy} \quad (2.5)$$

Dans la suite de ce chapitre nous examinerons différents types de relations contraintes-déformations qui existent pour des fluides non Newtoniens, qui sont en réalité très nombreuses.

### II.2.4. Viscosité :

La viscosité est une propriété du fluide, qui tend à empêcher ce dernier à se déformer lorsqu'il est soumis à une force tangentielle. Les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement. La viscosité est déterminée par la capacité d'entraînement que possède une couche en mouvement sur les autres couches adjacentes.

D'après l'hypothèse de Newton, la viscosité est une fonction qui relie le tenseur de contrainte à celui des déformations, d'où la loi de Newton :

$$\tau = \mu \frac{d\gamma}{dt} = \mu \dot{\gamma} \Rightarrow \mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (2.6)$$

La viscosité dynamique a pour dimension le produit d'une pression par un temps. Dans le Système International de mesures, la viscosité dynamique s'exprime en poiseilles (1Poiseuille = 1Pa s = 1kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>).

### II.2.5. Différentes définitions de la viscosité :

➤ La viscosité cinématique :  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  [m<sup>2</sup>/s] (  $\rho$  : masse volumique).

➤ La viscosité dynamique ou apparente : par analogie aux fluides Newtoniens on a

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \text{ [Ns/m}^2 \text{ ou Pa.s]}$$

➤ La viscosité relative : souvent cette dernière est utilisée pour l'étude des solutions ou des suspensions :

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_s} \quad \begin{cases} \mu : \text{viscosité dynamique de la solution} \\ \mu_s : \text{viscosité dynamique du solvant} \end{cases}$$

- La viscosité spécifique :

$$\mu_{spe} = \frac{\mu - \mu_S}{\mu_S}$$

- La viscosité intrinsèque :

$$[\mu] = \lim_{C \rightarrow 0} \left( \frac{\mu_{spe}}{C} \right) \quad \text{Où } C \text{ représente la concentration de la solution.}$$

- La viscosité complexe :

$$\mu_{com} = \frac{G''(\omega)}{\omega} + j \frac{G'(\omega)}{\omega} \quad \begin{cases} G'(\omega) \text{ module de conservation} \\ G''(\omega) \text{ module de perte} \end{cases}$$

Cette viscosité intervient pour des contraintes et des déformations sinusoïdales à pulsation  $\omega$ , et des liquides présentant une certaine élasticité.

### **II.3. Classification et comportement rhéologiques des fluides complexes :**

Si le modèle de fluide Newtonien décrit très bien la grande majorité des fluides composés de molécules simples ; il existe un bon nombre de fluides, dont certains sont d'usage très courant, qui ont un comportement plus complexe.

La définition d'un fluide Newtonien est assez restrictive : les contraintes de cisaillement sont proportionnelles au gradient de vitesse, ce qui implique que :

- ❖ Dans un écoulement de cisaillement simple, les seules contraintes créées par l'écoulement sont des contraintes de cisaillement.
- ❖ La viscosité est indépendante de la vitesse de cisaillement.
- ❖ La viscosité est indépendante du temps et les contraintes s'annulent immédiatement lorsque l'écoulement est arrêté.

Toute déviation à ces règles est le signe d'un comportement non Newtonien. La description de ces comportements et leur interprétation en relation avec la structure microscopique du fluide constitue la discipline appelée rhéologie. Cette discipline est assez récente ; elle a connu un développement considérable avec l'apparition des polymères synthétiques.

### II.3.1. Classification des fluides :

La classification des matériaux est établie à partir de différents critères :

- 1) Propriété d'élasticité, viscosité, de plasticité (i.e, notion de seuil de contrainte)
- 2) Comportement linéaire ou non.
- 3) Comportement dépendant du temps ou non (historique du matériau)
- 4) Caractère physique : solide, liquide, pâteux, ...
- 5) Matériaux homogène ou non.
- 6) .....

Généralement, pour le cas d'un comportement du fluide, la classification est faite à partir d'un écoulement de cisaillement simple que l'on traduit par une relation entre la contrainte de cisaillement  $\tau$  et le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ .

- Pour les fluides Newtoniens, ce comportement est décrit par une relation linéaire :

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (2.7)$$

où  $\mu$  représente la viscosité dynamique du fluide.

- Pour des les fluides complexes dits non Newtoniens, la viscosité n'est plus constante à température et pression donnée mais dépend de la vitesse de cisaillement où, plus généralement, de l'historique cinématique du fluide.

D'après TANNER et BIRD, le comportement du fluide est lié aux modifications de structure induites par l'écoulement. Généralement, l'évolution de la viscosité avec le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  (Fig.2.1.), qui en coordonnées logarithmiques à le comportement suivant :

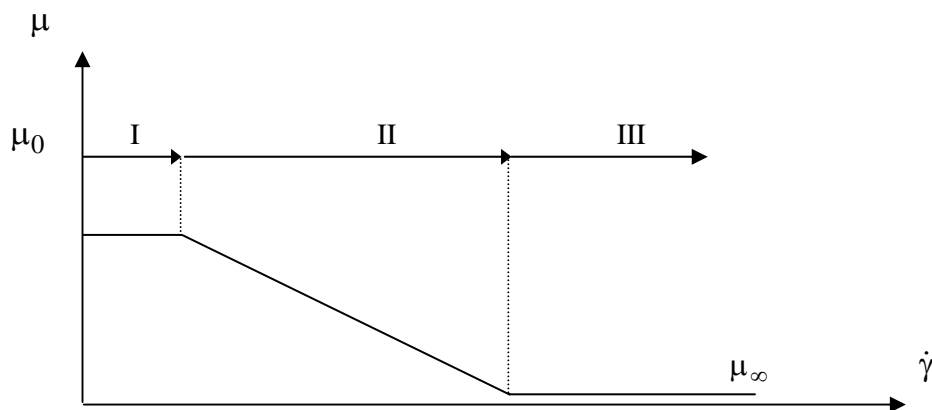


Fig.2.1. Comportement rhéofluidifiant d'un fluide non-Newtonien : separan AP-30 en solution dans eau et glycérine (TANNER).

On peut distinguer trois régions :

- Région I à faible taux de cisaillement, la viscosité tend vers une valeur constante  $\mu_0$  : le fluide à un comportement Newtonien.
- Région II, la viscosité décroît quand le taux de cisaillement augmente, la courbe présente souvent une partie linéaire sur plusieurs décades appelées région de loi de puissance.
- Région III, à taux de cisaillement très élevé ou la viscosité tend vers une valeur constante  $\mu_\infty$ .

A partir de ces observations expérimentales en cisaillement simple, on distingue [52] :

- Les fluides indépendants du temps
- Les fluides dépendant du temps
- Les fluides viscoélastiques.

Nous résumons toutes ses classifications des fluides complexes dans le tableau.2.1.

Constatation expérimentale	Expression formelle de $\tau$	Appellation
$\dot{\gamma} \neq 0$	$\tau = f\left(\dot{\gamma}, \gamma, t\right)$	Fluide viscoélastique ou plastique (linéaire ou non)
$\dot{\gamma} \neq 0$	$\tau = f\left(\dot{\gamma}, t\right)$	Fluides inélastiques dépendants du temps (thixotropes, rhéopexes)
$\dot{\gamma} \neq 0$	$\tau = \mu\left(\dot{\gamma}\right) \cdot \dot{\gamma}$	Fluides visqueux indépendants du temps (non Newtonien)
$\dot{\gamma} \neq 0$	$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (\mu = \text{cte})$	Fluides visqueux linéaires (Newtoniens)
$\dot{\gamma} = 0$	$\tau = 0$	Fluides sans frottement (parfait ou pascalien)

Tableau.2.1. Classification des fluides complexes.

### II.3.2. Description et comportement des fluides complexes :

Lorsque la viscosité n'est plus indépendante du taux de cisaillement, il est nécessaire d'utiliser plusieurs paramètres pour d'écrire le comportement mécanique du fluide. Un certain nombre de modèles empiriques permettent cette description.

Les objectifs de la loi de comportement sont :

- 1) Etre en accord avec des données expérimentales sur une large gamme de contraintes.
- 2) Faire appel à un nombre minimal des constantes indépendantes.
- 3) Calculé aisément ces contraintes, qui doivent avoir une signification physique.

Très souvent, pour les solutions de polymère, la viscosité diminue au fur et à mesure que l'on augmente le taux de cisaillement (gradient de vitesse) auquel est soumis le fluide. C'est le comportement rhéofluidifiant. Ce comportement est également observé dans les suspensions de particules solides, dans les suspensions de vésicules déformables comme le sang.

#### a. Les fluides dont la viscosité est indépendante du temps :

Ce sont des fluides purement visqueux pour lesquels la contrainte de cisaillement  $\tau$  dépend seulement du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  au point considéré.

Trois grands types de comportement de ces fluides peuvent être mis en évidence au vu de leurs rhéogrammes (Fig.2.2.) :

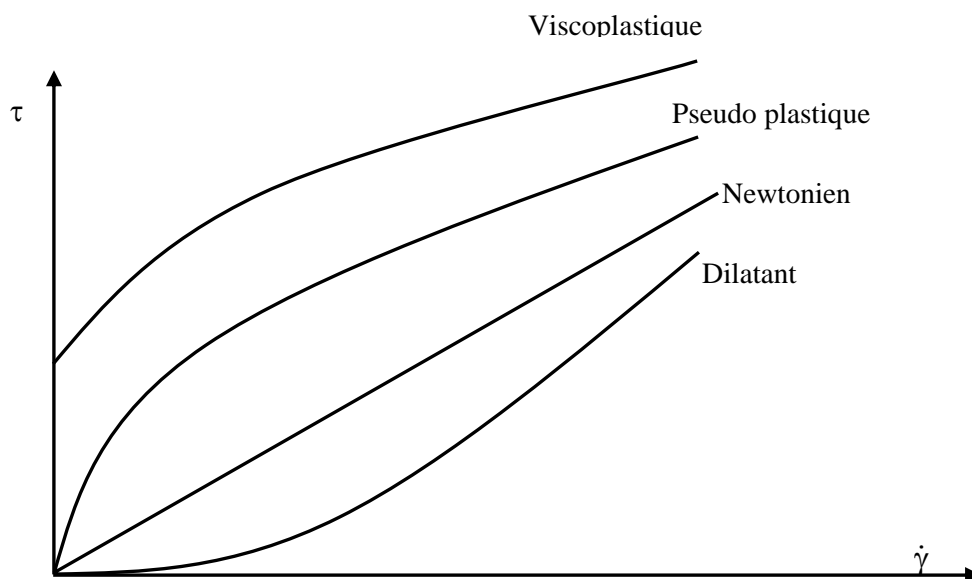


Fig.2.2. Rhéogramme type pour différents fluides dont la viscosité est indépendante du temps

- ⇒ **Les fluides pseudo plastiques** ne présente pas de contraintes seuil pour s'écouler ; le rhéogramme montre que le rapport  $\tau / \dot{\gamma}$ , habituellement appelé viscosité apparente  $\mu_a$  (par analogie avec les fluides Newtoniens), décroît quand le taux de cisaillement augmente. On présente quelques lois de comportements, les plus utilisées dans la mécanique des fluides (le tableau .2.2.).
- ⇒ **Les fluides viscoplastiques (ou fluides a seuil de contraintes)** sont caractérisés par le fait qu'il est nécessaire d'atteindre une contrainte minimale  $\tau_0$  pour qu'il y ait mise en mouvement, quelques lois de comportement sont présentées dans le tableau.2.3.
- ⇒ **Les fluides dilatants** sont caractérisés par une viscosité apparente qui augmente avec le taux de cisaillement.

Modèle	Loi rhéologique Pour : $\tau \geq \tau_c$ $\dot{\gamma} = 0$ si $\tau < \tau_c$	Paramètres
Plastique de bingham [13]	$\tau - \tau_c = \mu_p \dot{\gamma}$	$\tau_c, \mu_p$
Herschel-Buckley [36.37]	$\tau - \tau_c = (k \dot{\gamma})^n$	$\tau_c, k, n$
Casson [20]	$\tau^{1/2} = k_c \dot{\gamma}^{1/2} + \tau_c^{1/2}$ $\tau - \tau_c = \frac{\mu_0 \dot{\gamma}}{1 + c(\tau - \tau_c)^m}$	$k_c, \tau_c$ $\tau_c, \mu_0, m, c$
Skelland [67]	$\tau = \mu_L \left\{ \frac{1.2 + \alpha \left[ (c_1 \tau)^{-0.2} + 1 \right]^3}{1.2 - 2\alpha \left[ (c_1 \tau)^{-0.2} + 1 \right]^3} \right\}$	$c_1$

Tableau.2.2. Lois rhéologique des fluides "indépendants" du temps présentant une contrainte critique.

Modèle	Loi rhéologique	Paramètres
Ostwald de waele [56,26]	$\tau = k (\dot{\gamma})^n$	k, n
Ellis [52]	$\tau = \left[ \frac{\mu_0}{1 + (\tau/\tau_{1/2})^{\alpha-1}} \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \tau_{1/2}, \alpha$
Prandtl-eyring [40,62]	$\tau = \tau_0 \text{sh}^{-1}(t_0 \dot{\gamma})$	$\tau_0, t_0$
Powell-eyring [59]	$\tau = \mu_1 \dot{\gamma} + \frac{\mu_0}{t_0} \text{sh}^{-1}(t_0 \dot{\gamma})$	$\mu_0, \mu_1, t_0$
Sisko [52]	$\tau = \mu_0 \dot{\gamma} + k (\dot{\gamma})^n$	$\mu_0, k, n$
Reiner phillipoff [63]	$\tau = \left[ \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\tau/\tau_S)^2} \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \mu_\infty, \tau_S$
Loi de puissance tronquée de spriggs [57]	$\tau = \mu_0 \dot{\gamma} \quad \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0$ $\tau = \mu_0 (\dot{\gamma} / \dot{\gamma}_0)^{n-1} \dot{\gamma} \quad \dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_0$	$\mu_0, \dot{\gamma}_0, n$
Metzner [51]	$\tau = \mu_0 \left[ \frac{1 + (\tau/\tau_m)^{\alpha-1} (\mu_\infty / \mu_0)}{1 + (\tau/\tau_m)^{\alpha-1}} \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \tau_m, \alpha$
Cross [21]	$\tau = \left[ \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\dot{\gamma} t_1)^P} \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \mu_\infty, t_1, P$
Williams [72]	$\tau = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\left[ 1 + 2 t_1^2 \dot{\gamma}_1^2 \right]^P}$	$\mu_0, \mu_\infty, t_1, P$
Carreau [19]	$\tau = \left[ \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ 1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \mu_\infty, \lambda, n$

Tableau.2.3. lois Rhéologique des fluides indépendants du temps ne présentant pas de contraintes critiques.

**b) Les fluides dont la viscosité dépend du temps :**

Dans cette catégorie de fluide, la viscosité apparente dépend non seulement de la valeur du taux de cisaillement local mais aussi du temps d'application du cisaillement. Leurs équations rhéologiques sont alors de la forme :

$$\tau = \tau(\dot{\gamma}, t) \tag{2.8}$$

Si la contrainte de cisaillement  $\tau$  décroît quand le temps augmente avec  $\dot{\gamma} = \text{constante}$ , le fluide est dit Thixotrope. Certains polymères fondus, des boues de forage, des graisses peuvent présenter ce comportement (voir Fig.2.3.).

Si  $\tau$  croît avec le temps, le fluide est Rhéopexique. Ce phénomène, assez rare, peut s'observer pour des suspensions de bentonite, de gypse.

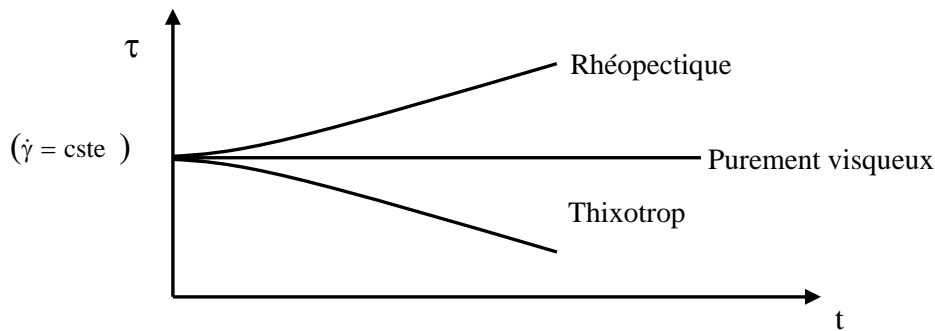


Fig.2.3. Classement des fluides non –Newtonien dépendant du temps

**c) Les fluides viscoélastiques :**

Ces fluides possèdent à la fois des propriétés visqueuses et élastiques mises en évidence lors d'essai de fluage ou de cisaillement oscillant. L'équation rhéologique est de la forme :

$$\tau = \tau(\gamma, \dot{\gamma}, t) \tag{2.9}$$

Un fluide viscoélastique lors d'un essai de fluage, soumis à une contrainte de cisaillement constante, peut se déformer en trois temps : une déformation instantanée due à l'élasticité du fluide suivie d'une déformation élastique amortie par la viscosité puis apparaît une déformation linéaire de pente  $1/\mu_0$  correspondant à un régime d'écoulement purement visqueux.

Lorsqu'un fluide viscoélastique est soumis à une contrainte dynamique sinusoïdale de période T, la déformation est en retard sur la contrainte. Ce déphasage est compris entre zéro (cas d'un solide élastique parfait) et T/4 (cas d'un fluide purement visqueux).

Bien entendu, la classification ainsi effectuée reste quelque peu arbitraire et la réalité est moins simple.

#### **II.4. Propriétés et comportements rhéologiques du sang :**

Le sang est un fluide biologique complexe circulant dans les artères et les veines de l'organisme humain. Il est composé d'un liquide jaunâtre, appelé plasma, dans lequel baignent des millions de cellules notamment les globules rouges qui lui donnent sa couleur. Ces cellules qui constituent les éléments figurés représentent environ 45% du volume du sang total. Le sang a une densité relative comprise entre 1,056 et 1,066. L'organisme d'un adulte en bonne santé contient en moyenne entre 4,5 et 6 litres de sang, soit un onzième du poids du corps.

Quand le plasma est étudié au viscosimètre, il se comporte comme un fluide Newtonien avec un coefficient de viscosité moyen de 1.2cp à 37°. En revanche, le sang présente un comportement non-Newtonien accentué.

Très souvent, pour les solutions de polymère, la viscosité diminue au fur et à mesure que l'on augmente le taux de cisaillement auquel est soumis le fluide. C'est le comportement rhéofluidifiant. Ce comportement est également observé dans les suspensions de particules solides [31] et dans les suspensions de vésicules déformables comme le sang (Fig.2.4.). Un tel comportement peut s'expliquer par l'hypothèse d'un maximum d'interactions globulaires de type adsorption et peut présenter un seuil d'écoulement.

La Fig.2.5. [31] montre la variation de la viscosité du sang en fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  dans un viscosimètre couette. La figure montre que la viscosité du sang (H=45%) diminue en fonction du taux de cisaillement jusqu'à une certaine valeur. Cette dernière demeure constante pour des valeurs importantes du taux de cisaillement.

Lorsque la viscosité n'est plus indépendante du taux de cisaillement, il est nécessaire d'utiliser plusieurs paramètres pour décrire le comportement mécanique du fluide. Les propriétés rhéologiques du sang sont complexes et influencés par de nombreux facteurs :

- L'hématocrite
- La température
- Et la déformabilité des hématies (globules rouges).

Comme notre étude se porte sur des écoulements isothermes du fluide sanguin à l'état normal, c'est-à-dire à un hématocrite de 45%, nous allons caractériser le comportement rhéologique du fluide sanguin par la relation entre contraintes appliquées et vitesse de déformation.

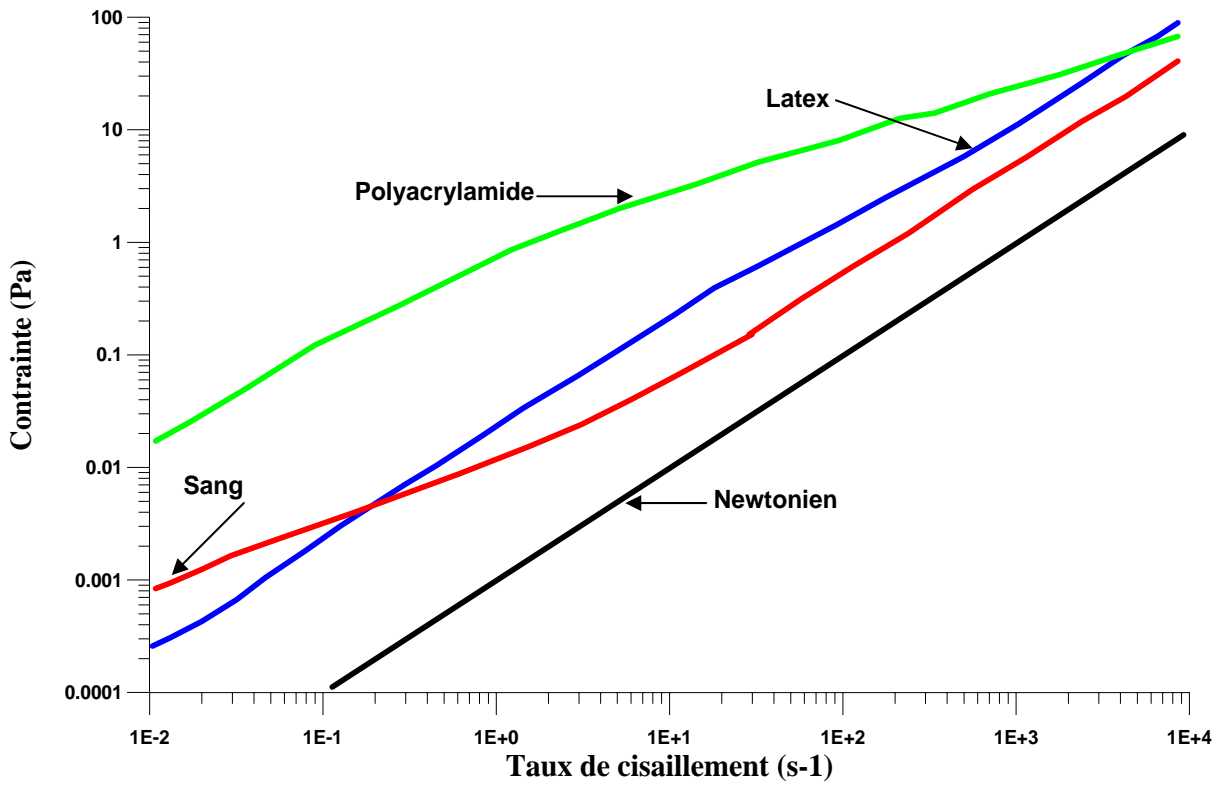


Fig.2.4. Rhéogrammes obtenus pour des fluides rhéofluidifiants par rapport au fluide Newtonien :

- a) Solution aqueuse de polyacrylamide,
- b) Du sang,
- c) Une suspension de particules de polymère (latex) dans l'eau.

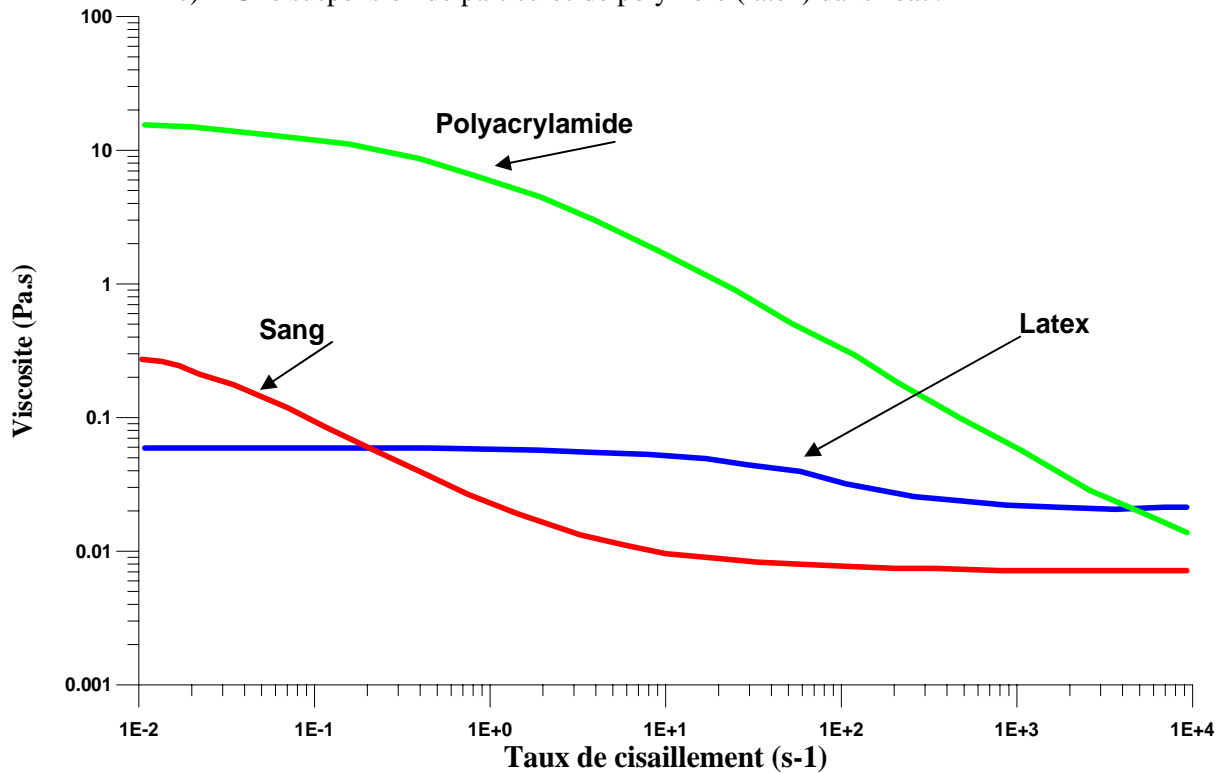


Fig.2.5. Viscosité en fonction du taux de cisaillement pour les trois exemples des fluides rhéofluidifiant.

## **II.5. Applications :**

### **II.5.1. lois de comportements du sang :**

Pour le comportement rhéologique du fluide sanguin, différentes lois de comportement ont été établis afin de le décrire [20, 21, 22]. Ainsi nous déterminons, à partir des résultats expérimentaux de S. Chien [18], la lois de comportement qui représente le mieux les propriétés non Newtoniennes du sang à l'état normal (l'hématocrite = 45%).

Parmi ces lois nous pouvons citer :

- **La loi d'Hershley-Bulkley [2] :**

$$\tau = \tau_c + k \dot{\gamma}^n \quad (2.10)$$

ou  $\tau_c = 25.35$  mPa, contrainte seuil.

$k = 10.7$ , indice de consistance du fluide.

et  $n = 0.78$  indice de structure de l'écoulement.

- **La loi de Casson [54] :**

$$\tau = \tau_c + \mu_\infty \dot{\gamma} + 2 \sqrt{\tau_c \mu_\infty \dot{\gamma}} \quad (2.11)$$

ou :  $\tau_c = 2.25$  m Pa et  $\mu_\infty = 4.08$  m Pa.s

Les valeurs moyennes sont calculées antérieurement au laboratoire [86,87].

- **La loi de Cross [21] :**

$$\tau = \left[ \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\beta \dot{\gamma})^P} \right] \dot{\gamma} \quad (2.12)$$

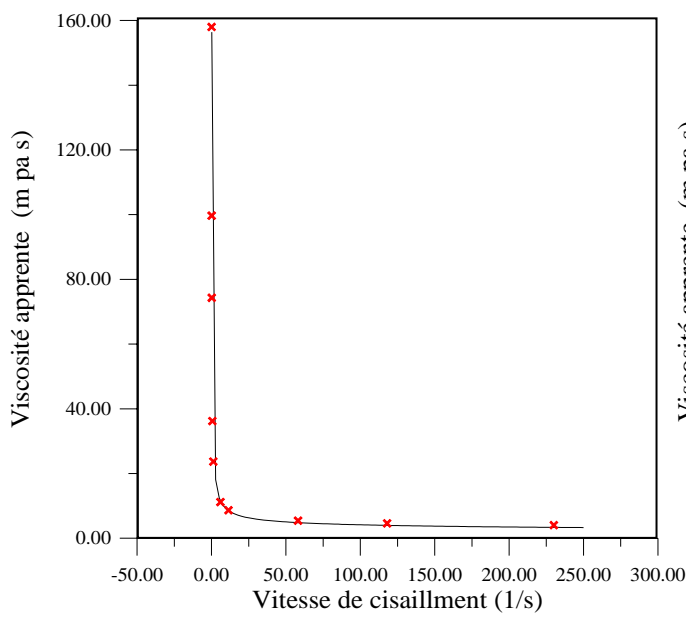
avec :  $\mu_\infty = 4.8$  m Pa.s,  $\mu_0 = 98.13$  m Pa.s,  $\beta = 1.57$  et  $P = 1.197$ .

- **La loi de Williams-Carreau [10] :**

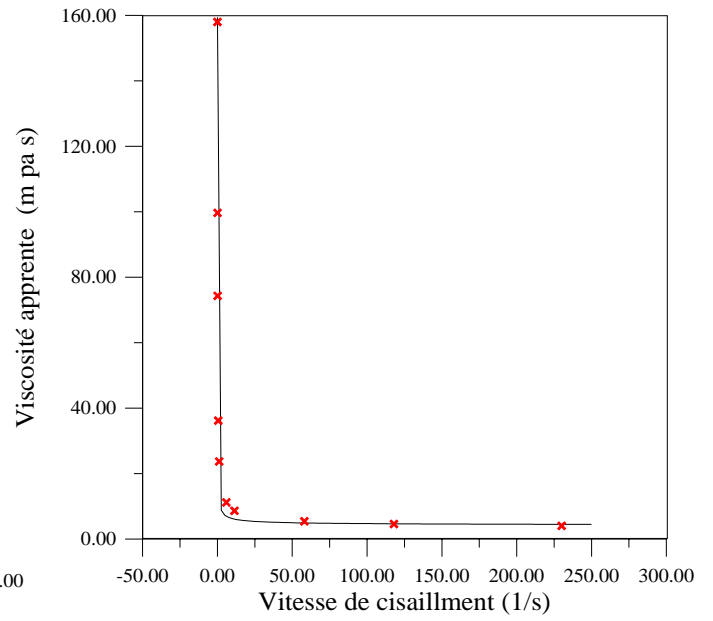
$$\tau = [\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) (1 + (\beta \dot{\gamma})^q)^P] \dot{\gamma} \quad (2.13)$$

ou :  $\mu_\infty = 0.035$  mPa.s,  $\mu_0 = 1.6$  mPa.s,  $\beta = 8.2$ ,  $P = -1.23$  et  $q = 0.64$ .

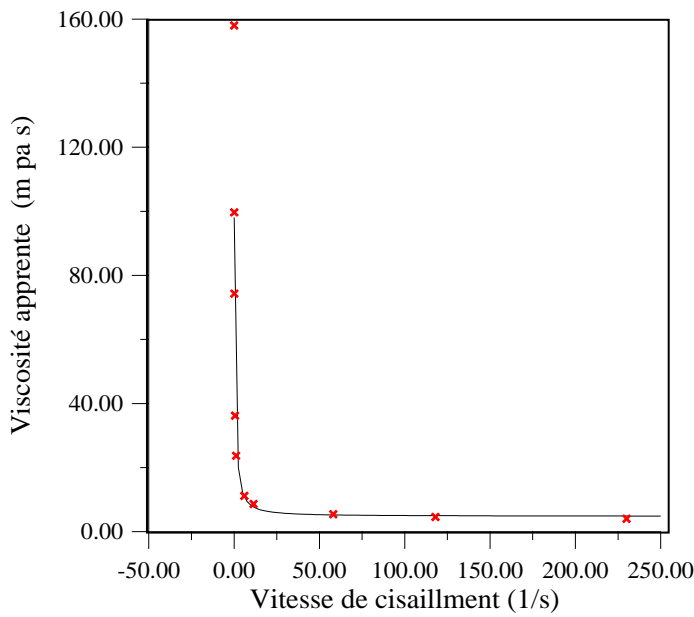
Les courbes comparatives entre les différents modèles en puissance et les résultats expérimentaux sont tracées dans la Fig.2.6.



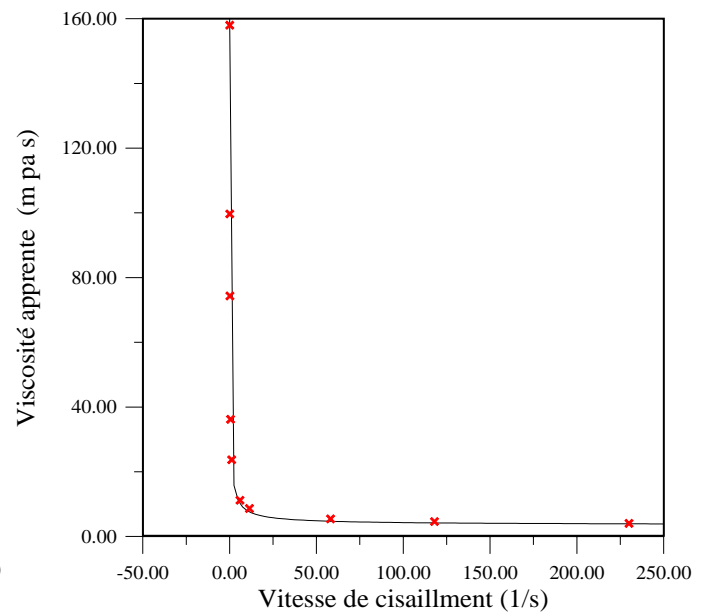
a) Fluide d'Hershey-Bulkley



b) Fluide de Casson



c) Fluide de Cross



d) Fluide de William-Carreau

Fig.2.6. Courbes comparatives entre les différents modèles et les résultats expérimentaux, pour un fluide sanguin à l'état normal (Hématocrite = 45%).

Afin de discerner la loi en puissance que nous allons utiliser dans la suite de notre travail, nous calculons la dispersion et le coefficient de corrélation de Teil.

### II.5.2. Calcul de la dispersion :

Afin d'avoir la meilleure précision sur l'ajustement des points expérimentaux avec les courbes théoriques proposées par différents auteurs, nous calculons la dispersion pour chaque cas ; tel que :

$$\text{Dispersion (\%)} = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N \left( \frac{\mu_{\text{mes}} - \mu_{\text{préd}}}{\mu_{\text{mes}}} \right)^2 \right)^{1/2} \cdot 100 \quad (2.14)$$

N étant le nombre total de points expérimentaux.

Cette relation est utilisée pour calculer la valeur de la viscosité apparente qui en résultera  $\mu_{\text{préd}}$ . Cette dernière est alors soustraite de la valeur effectivement obtenue (valeur expérimentale  $\mu_{\text{mes}}$ ) pour des vitesses de cisaillements appliqués, le tout par rapport à la valeur expérimentale.

Plus la dispersion tend vers zéro, plus le modèle s'ajuste avec les valeurs expérimentales.

### II.5.3. Calcul du coefficient de corrélation de Teil :

Mais avant de calculer la dispersion, il faudrait vérifier l'adéquation des modèles théoriques que nous proposons, pour cela on calcule le coefficient de corrélation de Teil défini par :

$$\mathfrak{R} = \text{Coéf. Teil} = \frac{\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ((\mu_i)_{\text{préd}} - (\mu_i)_{\text{mes}})^2 \right)^{1/2}}{\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mu_i)_{\text{préd}}^2 \right)^{1/2} + \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mu_i)_{\text{mes}}^2 \right)^{1/2}} \quad (2.15)$$

avec  $0 \leq \mathfrak{R} \leq 1$

Si  $\mathfrak{R}$  tend vers 0, le modèle est bon

$\mathfrak{R}$  tend vers 1, le modèle est mauvais.

Pour les quatre lois de comportement rhéologique du sang, nous représentons les résultats des ces deux coefficients dans le tableau.2.4.

D'après les résultats développés dans le tableau 2.4. nous constatons que le coefficient de Teil pour le cas de William-Carreau est plus inférieur (=0.08418428) que les autres modèles et qu'il tend vers zéro plus rapidement. La précision est d'autant plus importante pour le modèle de William-Carreau (dispersion=0.031922). Ce qui rend ce modèle plus adéquat pour représenter le comportement non newtonien du fluide sanguin.

Vitesse de cisaillement (1/s)	Viscosité apparente (P)				
	Résultats expérimentaux (Shu Chien).	Le modèle de Hershley-Bulkley	Le modèle de Casson	Le modèle de Cross	Le modèle de William-Carreau
0.0103	158	2490.44427	282.234629	96.354988	127.84471
0.0599	99.7	443.082298	66.4018794	88.6102428	90.2900511
0.121	74.3	226.532421	40.0954625	80.5887351	71.8254671
0.527	36.2	60.4217501	16.6967498	50.1533391	37.6992543
1.17	23.7	32.0033899	11.6052743	31.5896454	24.8911871
5.99	11.2	11.4489399	6.93155355	10.4548028	10.6486252
11.4	8.62	8.48787116	6.07209755	7.56790704	7.9998782
58.1	5.44	4.81420854	4.91371927	5.21509023	4.84228141
118	4.61	3.96084744	4.65690867	4.97893204	4.28548839
230	4.04	3.34469131	4.48934759	4.88074275	3.97286843
Coefficient de Teil		0.86009197	0.2703099	0.17476712	0.08418428
Dispersion (%)		1.5373	0.132170	0.070845	0.031922

Tableau.2.4. résultats de la dispersion et du coefficient de Teil pour les quatre lois de comportement proposable.

## **II.6. Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons modélisé le comportement rhéologique d'un fluide sanguin à partir des résultats expérimentaux de Shu Chien [18].

Pour l'identification de la loi de comportement du fluide on a utilisé deux approches :

- Une approche phénoménologique utilisant des modèles classiques de comportements : le modèle de Casson et le modèle de Hersheley - bulkley. Ces modèles intègrent un ou plusieurs paramètres caractéristiques du fluide en supposant que la structure des systèmes est théoriquement indépendante du temps.
- Une approche microscopique qui tente de lier la structure du fluide à son comportement : le modèle de Cross et le modèle de Williams–Carreau. Ces modèles font appel à la notion de fraction volumique de la phase dispersée ainsi que l'évolution de la structure sous l'effet du cisaillement par l'intermédiaire du temps caractéristique.

En se basant sur la dispersion et le coefficient de Teil comme critères d'évaluation, notre choix s'est porté sur le modèle de Williams-Carreau à quatre paramètres. Ce modèle traduit bien l'évolution du caractère non newtonien du fluide sanguin sur une très large gamme de vitesse de cisaillement.

**CHAPITRE III :**  
**ÉCOULEMENT DU FLUIDE**  
**PSEUDOPLASTIQUE A TRAVERS UNE**  
**CONDUITE A SYMÉTRIE AXIALE**

### III.1. Introduction :

Dans ce troisième chapitre, nous allons commencer par l'étude analytique de l'écoulement laminaire d'un fluide pseudo plastique à travers une conduite cylindrique. Ensuite, nous allons réétudier le même phénomène mais avec une méthode numérique utilisant la méthode des éléments finis type formulation mixte (u, v, p). Enfin, nous allons comparer les résultats des deux méthodes en traçant les évolutions de différents paramètres physiques en fonction des paramètres de l'écoulement.

### III.2. Méthode analytique :

A partir de cette étude nous allons déterminer analytiquement les relations entre débit et perte de pression, profils de vitesses dans les conduites cylindriques pour un fluide pseudo plastique à différents indices de structure.

Pour notre étude analytique nous supposons que :

- L'écoulement est laminaire.
- La conduite est de symétrie axiale.
- Pas d'effet de glissement à la paroi.
- La vitesse de cisaillement en un point dépend seulement de la contrainte tangentielle en ce point, on est seulement tributaire d'une relation d'écoulement du type  $\dot{\gamma} = f(\tau)$ .

#### III.2.1. Position du problème :

En régime établi, dans un tube supposé infiniment long, le débit net de quantité de mouvement dans la direction z est nul par suite de la conservation du profil de vitesse. Ainsi la résultante des forces extérieures est nulle.

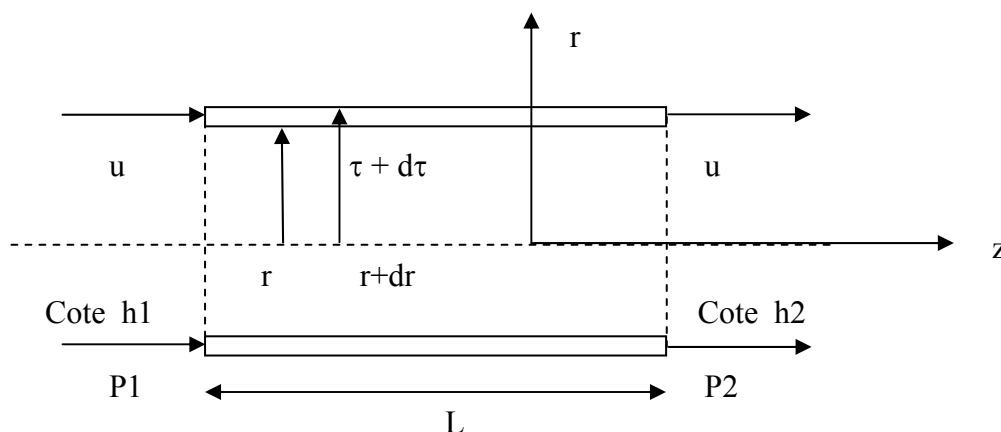


Fig.3.1. Bilan de quantité de mouvement dans une conduite à symétrie axiale

A partir de la Fig.3.1. on écrit le bilan de quantité de mouvement comme suit :

$$2 \pi L (r \tau - (r + dr)(\tau + d\tau)) + (P_1 - P_2) \cdot 2 \pi r dr + \rho g_z 2 \pi r dr L = 0 \quad (3.1)$$

avec :  $\tau + d\tau = \tau + \frac{d\tau}{dr} dr$

$$D'où : \frac{d(r\tau)}{dr} = \left[ \frac{P_1 - P_2}{L} + \rho g_z \right] r \quad (3.2)$$

Par ailleurs ; la figure 3.1. on a :

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 + \rho g_z L &= P_1 - P_2 + \rho g (h_1 - h_2) \\ &= (P_1 + \rho g h_1) - (P_2 + \rho g h_2) \\ &= \hat{P}_1 - \hat{P}_2 \\ &= \Delta P_f \end{aligned}$$

L'indice  $f$  rappelant que l'énergie mécanique perdue par unité de volume de fluide est perdue par frottement.

$$D'où : (3.2) \Rightarrow \frac{d(r\tau)}{dr} = \frac{\Delta P_f}{L} r \quad (3.3)$$

$$\text{Soit : } \tau = \frac{\Delta P_f}{L} \frac{r}{2} + \frac{cte}{r}$$

Comme  $\tau$  n'est pas infini à  $r = 0$ ,  $cte = 0$  on obtient :

$$\frac{\tau}{\tau_p} = \frac{r}{R} \quad , \quad \tau_p = \frac{R}{2} \frac{\Delta P_f}{L} = \frac{D}{4} \frac{\Delta P_f}{L} \quad (3.4)$$

tel que  $\tau_p = \frac{R}{2} \frac{\Delta P}{L}$  est la contrainte de frottement pariétale.

Les relations ainsi obtenues sont valables pour tous les fluides visqueux en écoulement développé dans une conduite cylindrique. Nous pouvons ajouter une équation relative à la géométrie du problème : c'est l'équation du débit axial.

$$Q = \int_0^R 2 \pi r u dr \quad (3.5)$$

Si l'on introduit la loi rhéologique (Tableau.2.1) :  $\dot{\gamma} = -\frac{du}{dr} = f^{-1}(\tau) = f^{-1}\left(\tau_p \frac{r}{R}\right)$  dans l'équation (3.5), et après intégration par partie de cette dernière, on aura :

$$\frac{Q}{\pi} = \left[ r^2 u \right]_0^R - \int_0^R r^2 du = \int_0^R r^2 f\left(\tau_p \frac{r}{R}\right) dr \quad (3.6)$$

Compte tenu de cette relation et de l'équation (3.4), il vient en éliminant  $r = R \frac{\tau}{\tau_p}$  ; la relation de RABINOWITSCH, qui s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_p^3} \int_0^{\tau_p} \tau^2 f(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

⇒ Pour notre cas d'étude, nous utiliserons la loi de comportement d'OSTWALD DE WAELE (Tableau.2.3), tel que :

$$\tau = k \dot{\gamma}^n \quad ; \quad f(\tau) = \left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.8)$$

$$(3.8) \Rightarrow \frac{Q}{\pi R^3} = \frac{n}{3n+1} \left(\frac{\tau_p}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.9)$$

$$\text{on a : } \tau_p = \frac{D}{4} \frac{\Delta P_f}{L}$$

$$\text{d'où } \frac{\Delta P_f}{L} = 2k \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n \frac{U_m^n}{R^{n+1}}$$

Si on conserve la délimitation générale du facteur de frottement :  $f/2 = \frac{\tau_p}{\rho U_m^2}$  on aura :

$$\text{d'où : } f/2 = \left(\frac{6n+2}{n}\right)^n \frac{k}{\rho U_m^{2-n} D^n}.$$

On pose par analogie avec les fluides Newtoniens :

$$f/2 = \frac{8}{\text{Re}_n} \quad , \quad \text{avec } f/2 = \frac{D}{4\rho U_m^2} \frac{\Delta P_f}{L} \quad (3.10)$$

$$\text{Re}_n = 8^{1-n} \left(\frac{4n}{3n+1}\right)^n \frac{\rho U_m^{2-n} D^n}{k} \quad (3.11)$$

### III.2.2. Profils des vitesses axiales dans une conduite cylindrique :

Dans cette partie, nous allons calculer le profil de la vitesse axiale pour un fluide d'Ostwald-De-Waele, tel que :

$$(3.8) \Rightarrow \tau = k \left( -\frac{du}{dr} \right)^n = \tau_p \frac{r}{R}$$

$$\Rightarrow u = \left( \frac{\tau_p}{k R} \right)^{\frac{1}{n}} \int_r^R (r)^{1/n} dr \quad (3.12)$$

Comme nous l'avons vu précédemment, avec  $Q = \frac{\pi D^2}{4} U_m$  :

$$(3.9) \Rightarrow U_m = \frac{nR}{3n+1} \left( \frac{\tau_p}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.13)$$

De (3.12) et (3.13) on a le profil de la vitesse adimensionnelle pour un fluide D'OSTWALD DE WAELE :

$$\Rightarrow \frac{u}{U_m} = \frac{3n+1}{n+1} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right) \quad (3.14)$$

Nous résumons les résultats analytiques pour l'écoulement d'un fluide suivant la loi de comportement D'OSTWALD DE WAELE dans le tableau suivant :

$\frac{u}{U_m} = \frac{3n+1}{n+1} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right) \quad (3.15a)$
$\Delta P_f = \frac{4\rho U_m^2 L}{D} \frac{f}{2} \quad (3.15b)$
avec :
$\frac{f}{2} = \frac{8}{Re_n} \quad , \quad Re_n = 8^{1-n} \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^n \frac{\rho U_m^{2-n} D^n}{k} \quad (3.15c)$

### III.3. Méthode numérique :

De nos jours il subsiste différentes méthodes numériques pour divers problèmes physiques (méthodes des différences finies, des éléments finis, des volumes finis où par des méthodes spectrales). Pour notre simulation numérique nous avons employé la méthode d'éléments finis type formulation mixte en variables primitives ( $u, v, p$ ).

La résolution numérique par la méthode des éléments finis type formulation mixte de ce problème est généralement abordée de deux manières [65]:

- a) La première méthode est basée sur la continuité de la vitesse, alors que la condition d'incompressibilité n'est satisfaite qu'approximativement : c'est la formulation vitesse-pression.
- b) La seconde méthode est de type incompressible. La condition d'incompressibilité est satisfaite exactement par l'introduction de la fonction courant, alors que la continuité de la vitesse tangentielle est relaxée par l'introduction de la fonction tourbillon : c'est la formulation tourbillon fonction de courant.

#### III.3.1. Position du problème et modèle mathématique :

##### a) Position du problème :

Nous nous intéressons à l'écoulement laminaire dans une conduite cylindrique d'un fluide pseudo plastique, (Fig.3.2).

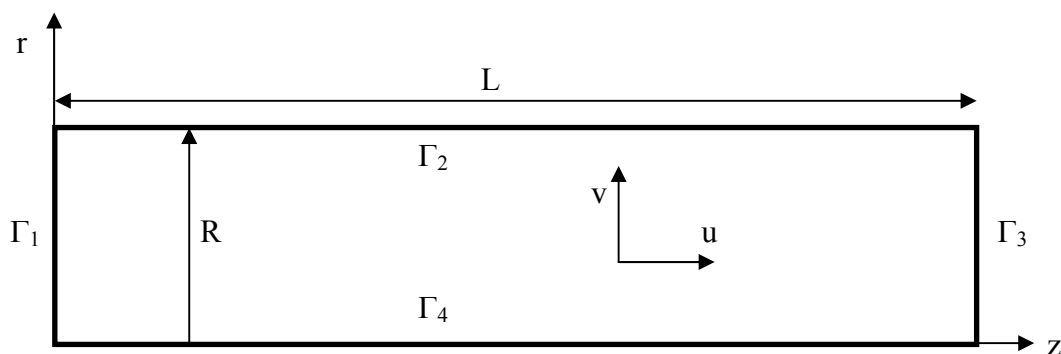


Fig.3.2. représentation selon un plan diamétrale d'un écoulement dans une conduite à symétrie axiale.

Où  $R$  et  $L$  sont respectivement le rayon et la longueur de la conduite.

**b) Equations gouvernant le problème :**

Les équations de conservation générales qui gouvernent l'écoulement isotherme en conduite circulaire s'écrivent sous la forme suivante :

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial(ru)}{\partial z} + \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (3-16a)$$

L'équation de quantité de mouvement suivant z :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu_a \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_a \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3-16b)$$

L'équation de quantité de mouvement suivant r :

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu_a}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_a \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3-16c)$$

Où u et v sont la composante axiale et radiale de la vitesse respectivement,  $\rho$  la masse volumique et P la pression.

- On suppose pour le moment que le régime est stationnaire.
- Nous considérons un fluide pseudo plastique obéissant à une relation en puissance d'Ostwald-De-Waele [11], tel que :

$$\tau = k (\dot{\gamma})^n \quad (3-17)$$

k est appelé indice de consistance et n l'indice de l'écoulement.

Pour  $n = 1 \Rightarrow$  fluide Newtonien.

Pour  $0 < n < 1 \Rightarrow$  fluide rhéofluidifiant. (3-18)

Pour  $n > 1 \Rightarrow$  fluide rhéoépaississant.

Par définition de la viscosité apparente (2.6), et à partir de l'équation (3-17), nous aurons :

$$\mu_{app} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{k \dot{\gamma}^n}{\dot{\gamma}} \Rightarrow \mu_{app} = k \dot{\gamma}^{n-1} \quad (3-19)$$

### III.3.2. Formulation adimensionnelle :

Pour les variables adimensionnelles nous avons utilisé les échelles de vitesse  $U_m$  (vitesse débitante à l'entrée) et de la longueur  $R$ , l'échelle de pression ou de contrainte est choisie égale à la partie visqueuse de la loi de comportement, ce qui nous permet alors d'avoir les

échelles du taux de déformation  $\frac{u_m}{R}$  et de la viscosité  $k \left( \frac{u_m}{R} \right)^{n-1}$ .

$$\text{d'où : } \begin{cases} u^* = \frac{u}{U_m}, v^* = \frac{v}{U_m}, z^* = \frac{z}{R}, r^* = \frac{r}{R} \\ P^* = \frac{P}{k \left( \frac{U_m}{R} \right)^n}, \mu^* = \frac{\mu}{k \left( \frac{U_m}{R} \right)^{n-1}} \end{cases}$$

$Re = \rho R U_m / k \left( \frac{U_m}{R} \right)^{n-1}$  qui est le rapport des effets d'inertie sur les effets visqueux, appelé nombre de Reynolds.

De là, les équations (3-16) gouvernant le problème pour un régime stationnaire  $\partial u / \partial t = 0$ , deviennent alors :

#### Equation de continuité :

$$\frac{\partial (r^* u^*)}{\partial z^*} + \frac{\partial (r^* v^*)}{\partial r^*} = 0 \quad (3.20.a)$$

#### Equation des quantités de mouvement :

$$Re \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \mu_a^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \mu_a^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) \right) \quad (3.20.b)$$

$$Re \left( u^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{\mu_a^*}{r^*} \frac{\partial (r^* v^*)}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \mu_a^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right) \quad (3.20.c)$$

### III.3.3. Conditions aux limites :

D'après le domaine d'étude représenté dans la Fig.3.1. nous avons :

- A l'entrée de la conduite, nous supposons une vitesse unitaire tel que :

$$\text{Sur } \Gamma_1 : u^* = 1, v^* = 0. \quad (3-21.a)$$

- Sur l'axe de symétrie ( $\Gamma_4$ ) : la condition de symétrie est appliquée pour

$$r^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} = 0 \\ v^* = 0 \end{cases} \quad (3-21.b)$$

- Sur les parois de la conduite ( $\Gamma_2$ ) : la condition d'adhérence à la paroi est appliquée :

$$u^* = v^* = 0. \quad (3-21.c)$$

- A la sortie de la conduite ( $\Gamma_3$ ) :  $\frac{\partial u^*}{\partial z^*} = 0$  ,  $v^* = 0$  (3-21.d)

### III.3.4. Implantation de la méthode des éléments finis :

L'objectif de la méthode des éléments finis est de résoudre un système algébrique après avoir ramené le problème continu (de degrés de liberté infinie) à un problème discret (de degrés de liberté fini). Cet objectif passe par différentes étapes qui font les caractéristiques de cette méthode numérique :

1. Tout d'abord avant chaque utilisation de n'importe quelle méthode numérique, la formulation des équations du système physique qui sont généralement des équations aux dérivés partielles (équations de Navier-Stokes, équation de poisson ...) est inévitable.
2. On divise  $V$  en sous-domaine : c'est le maillage. Les sous-domaines sont appelés : *mailles*.
3. On choisit la famille de champs locaux, c'est-à-dire à la fois la position des nœuds dans les sous-domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds (et éventuellement des dérivées). La maille complétée par des informations est appelée : *élément*  $V^e$ .
4. On ramène le problème à un problème discret : c'est la discrétisation. En effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments.
5. A la suite de la transformation de ces équations, on évalue les fonctions inconnues par les éléments finis et l'organisation matricielle par différentes méthodes de stockage, afin d'illustrer le système d'équation algébrique.
6. On résout le problème discret : c'est la résolution.
7. On peut alors construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et en déduire d'autres grandeurs : c'est le post-processus.

Les étapes 1, 2, 3, 4 et 5 sont souvent rassemblées sous le nom de pré-processus.

Nous avons tenté à partir de ces lignes d'exposer les différentes étapes de la méthode des éléments finis, que nous détaillerons dans la suite du chapitre.

**a) Approximation et discrétisation par éléments finis :**

❖ La procédure des éléments finis commence par la division du domaine continu en domaines simples : les éléments  $V^e$ , qui présentent les particularités suivantes :

- L'approximation aux nœuds sur chaque sous-domaine  $V^e$  ne fait intervenir que les variables attachées à des nœuds situés sur  $V^e$  et sur sa frontière.
- Les fonctions approchées  $u_{ex}(x)$  sur chaque sous-domaine  $V^e$  sont construites de manière à être continues sur  $V^e$  et elles satisfont aux conditions de continuité entre les différents éléments.

Le choix de ces derniers est très important pour le développement et la fiabilité d'un programme. Généralement pour l'écoulement d'un fluide isotherme, les éléments sont caractérisés habituellement par l'approximation de la combinaison vitesse-pression [33].

Pour la discrétisation de la conduite à symétrie axiale nous avons exploité un élément triangulaire de haute précision de type Lagrange (de Continuité  $C^0$ ), avec une interpolation quadratique pour la vitesse et une interpolation bilinéaire pour la pression (Fig.3.3).

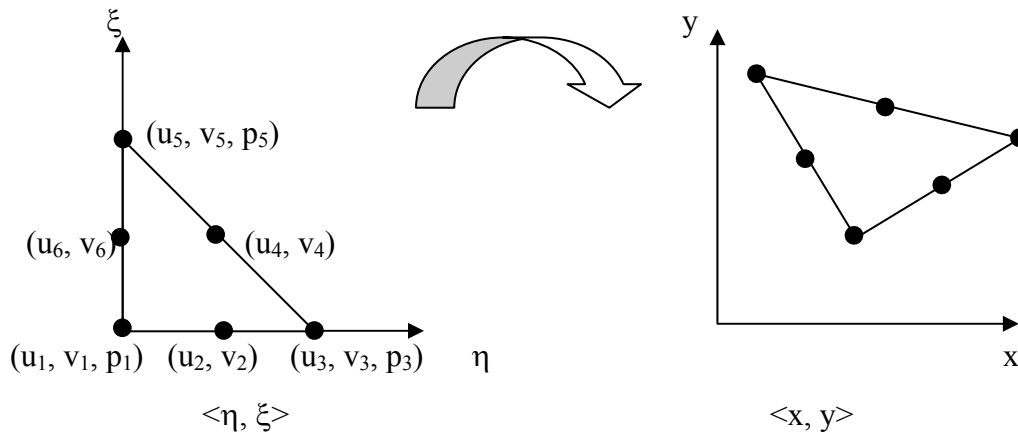


Fig.3.3. Transformation de l'élément de référence vers l'élément réel.

Pour ce genre d'élément nous localisons la vitesse aux nœuds et au milieu des arrêtes de l'élément, et pour la pression ça sera aux sommets du triangle. La procédure se fera pour tous les éléments triangulaires maillés sur la configuration.

❖ De manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, nous introduisons la notion d'élément de référence[24], repéré dans un espace de référence, qui se transformera en chaque élément réel  $V^e$  par une transformation Eulérienne  $\tau^e$  (Fig.3.3).

Cette transformation définit les coordonnées  $x^e$  de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées  $\xi$  du point correspondant de l'élément de référence :

$$\tau^e : \xi \rightarrow x^e = x^e(\xi) \tag{3.22}$$

La base polynomiale de l'élément triangulaire, dans un espace de référence, s'écrit de la manière suivante :

$$\langle P \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \rangle \quad (3.23)$$

Si on écrit les coordonnées de références dans l'espace de référence (Fig.3.3), on obtient :

$$\langle \xi_i \rangle = \left\langle 0 \ 0 ; \frac{1}{2} \ 0 ; 1 \ 0 ; \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} ; 0 \ 1 ; 0 \ \frac{1}{2} \right\rangle \quad (3.24)$$

et pour quelconque élément dans l'espace on a :

$$\langle x_i \rangle = \langle x_1 \ y_1 ; x_2 \ y_2 ; x_3 \ y_3 ; x_4 \ y_4 ; x_5 \ y_5 ; x_6 \ y_6 \rangle$$

d'où l'inversion de la matrice nodale donne :

$$[P_n]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

❖ Les fonctions d'interpolations  $N(\zeta)$  sont définies de la manière suivante [24] :

$$\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1} \quad (3.26)$$

Ces opérations ne sont effectuées qu'une seule fois pour l'ensemble des éléments réels qui possèdent le même élément de référence.

De là, la base des fonctions d'interpolation et les dérivés de celles-ci sont résumés dans le tableau.3.1. :

$\{N\}$	$\{\partial N / \partial \xi\}$	$\{\partial N / \partial \eta\}$
$-\lambda(1-2\lambda)$	$1-4\lambda$	$1-4\lambda$
$4\xi\lambda$	$4(\lambda-\xi)$	$-4\xi$
$-\xi(1-2\xi)$	$-1+4\xi$	$0$
$4\xi\lambda$	$4\eta$	$4\xi$
$-\eta(1-2\eta)$	$0$	$-1+4\eta$
$4\eta\lambda$	$-4\eta$	$4(\lambda-\eta)$

Tab.3.1. Résumé des fonctions d'interpolation et leurs dérivées pour le cas d'une interpolation quadratique

Ou :  $\lambda=1-\xi-\eta$

**b) Formulation intégrale :**

Si l'on représente le système physique continu stationnaire dont le comportement est représenté par les équations (3.16) de la manière suivante :

$$L(u) + f_v = 0 \quad \text{sur le domaine } V \quad (3.27)$$

$$C(u) = f_s \quad \text{conditions aux limites sur la frontière } S. \quad (3.28)$$

et si des fonctions  $u$  constituent une solution du problème d'équilibre et si elles satisfont ces équations, nous appelons résidu la quantité  $R(u)$  définie par :

$$R(u) = L(u) + f_v \quad (3.29)$$

Qui s'annule évidemment quand  $u$  est solution de (3.27) et (3.28). Le résidu est un vecteur lorsque (3.27) est un système d'équations différentielles.

La méthode des résidus pondérés permet de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à une formulation intégrale en utilisant des fonctions de pondérations. Cette méthode consiste à rechercher des fonctions qui annulent la forme intégrale [76] :

$$w(u) = \int_V \langle \psi \rangle \{R(u)\} dV = \int_V \langle \psi \rangle \{L(u) + f_v\} dV \quad (3.30)$$

Pour toute fonction de pondération  $\Psi$  appartenant à un ensemble de fonctions  $E_\psi$ ,  $u$  appartenant à l'ensemble  $E_u$  des solutions admissibles qui satisfont les conditions aux limites (3.28) et qui sont dérivables jusqu'à l'ordre  $m$ . Donc chercher la solution  $u$  revient à annuler la forme intégrale  $w(u)$ . La méthode des résidus pondérés fournit selon le choix des fonctions de pondération tout un ensemble de formulations intégrales.

Pour notre étude nous avons utilisé la méthode de Galerkin [49] ; dans cette dernière, les fonctions  $\psi$  sont constituées par l'ensemble des variations  $\delta u$  des fonctions  $u$  :

$$\psi = \delta u = \langle P \rangle \{ \delta a \} \quad (3.31)$$

ou  $\{ \delta a \}$  sont les variations des paramètres d'approximation  $\{ a \}$ .

L'équation de formulation intégrale devient :

$$\Rightarrow w = \int_V \delta u ( L(u) + f_v ) dV = 0 \quad (3.32)$$

$$\Rightarrow w = \langle \delta a \rangle \int_V \{ P \} \{ L(\langle P \rangle \{ a \}) + f_v \} dV = 0 \quad (3.33)$$

Ce système est symétrique si l'opérateur  $\ell$  est auto-adjoint.

Il existe d'autres méthodes de formulations intégrales, que nous citerons brièvement :

❖ **Collocation par points :**

La fonction  $\psi_i(x)$  est la distribution de Dirac  $\delta(x-x_i)$  au points  $x_i$ , dit point de collocation, la forme intégrale devient :

$$w = \int_v \delta(x-x_i) R(x, u) dV = R(x_i, u) = 0 \quad (3.34)$$

En pratique cette méthode est peu utilisée car elle est difficile à mettre en œuvre avec une approximation par éléments finis, et elle conduit à un système d'équations non symétriques. Elle a l'avantage par contre d'éviter l'intégration sur le volume, ce qui peut être intéressant pour certains problèmes non linéaires.

❖ **Collocation par sous domaine :**

Soit  $n$  sous domaines  $V^i$ , et  $\psi^i$  des fonctions tel que:

$$\psi_i : \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ appartient à } V^i \\ 0 & \text{si } x \text{ n'appartient pas à } V^i \end{cases} \quad (3.35)$$

$$(3.35) \Rightarrow w_i(a) = \int_v (\langle L(P) \rangle \{a\} + f_v) dV \quad (3.36)$$

La précision de la solution dépend du choix des sous domaines  $V^i$ , la méthode est peu utilisée car le choix des sous-domaines est difficile.

❖ **Méthode des moindres carrés :**

La méthode consiste à minimiser l'expression :

$$\pi_m = \int_v R \cdot R dV \quad (3.37)$$

Par rapport aux paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ,  $R$  étant le résidu.

Cette méthode est peu utilisée car elle ne permet pas l'intégration par parties, et impose donc des conditions plus strictes sur l'approximation de  $\mathbf{u}$ . Par contre elle conduit à un système symétrique et défini positif quel que soit l'opérateur  $\ell$ .

**c) Présentation matricielle de la méthode des éléments finis :**

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation par éléments finis des variables  $u$  pour discrétiser la forme intégrale  $W$ , ensuite résoudre le système algébrique.

Si nous remplaçons la formulation intégrale de type Galerkin par une somme d'intégrale sur chaque élément  $V^e$ , nous aurons :

$$W = \sum_{e=1}^{n_{\text{element}}} W^e = \sum_{e=1}^{n=1} \int_{V^e} \delta u^e \left( L(u^e) + f_v \right) dV = 0 \quad (3.38)$$

$W^e$ : forme intégrale élémentaire.

Pour calculer chaque terme  $W^e$  on utilise une approximation par éléments finis de  $u$  et de  $\delta u$  sur chaque éléments  $V^e$ , tel que :

$$u^e = \langle N \rangle \{u_n\} \quad (3.39)$$

$$\delta u^e = \langle N \rangle \{\delta u_n\}$$

Chaque terme  $W^e$  se calcule pour les seuls variables liées à l'élément  $e$ , cette propriété a contribué au succès de la méthode des éléments finis. Donc pour un seul élément nous aurons à partir de (3.38) et (3.39)

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle \left( \int_{V^e} \{N\} L(\langle N \rangle) dV \{u_n\} + \int_{V^e} \{N\} f_v dV \right) \quad (3.40)$$

L'utilisation des intégrations par partie est souvent évidente pour diminuer au maximum l'ordre des dérivées qui interviennent.

Sans négliger le but de la méthode, cette dernière à pour objectif de passer du système intégral vers le système sommation ou matricielle, ou les termes  $W^e$  peuvent alors s'écrire de sous la forme matricielle :

$$W^e = \int_{V^e} \left( \langle \delta(\partial u^e) \rangle [D] \{ \partial u^e \} - \delta u^e f_v \right) dV - \int_{S_f^e} \delta u^e . f_s dS \quad (3.41)$$

ou :

$$\begin{aligned} \langle \partial u^e \rangle &= \left\langle u^e \frac{\partial u^e}{\partial x} \dots \frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2} \dots \right\rangle \\ \langle \delta(\partial u^e) \rangle &= \left\langle \delta u^e \delta \left( \frac{\partial u^e}{\partial x} \right) \dots \delta \left( \frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2} \right) \dots \right\rangle \end{aligned} \quad (3.42)$$

et  $[D]$  : une matrice indépendante de  $u^e$  et de ses dérivées pour les opérateurs  $\ell$  linéaires, et en fonction de  $u^e$  et de ses dérivées pour les opérateurs  $\ell$  non linéaires.

Pour obtenir la forme discrétiser, nous introduisons dans l'équation (3-41) les approximations sur l'élément  $V^e$  de  $u$ ,  $\delta u$  et de leurs dérivées :

$$u = \langle N \rangle \{u_n\} \quad / \quad \delta u = \langle N \rangle \{\delta u_n\} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \{u_n\} \quad / \quad \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \{\delta u_n\} \quad (3.44)$$

Alors :

$$\{\partial u\} = \begin{Bmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N \rangle \\ \langle \frac{\partial N}{\partial x} \rangle \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \{u_n\} = [B] \{u_n\} \quad (3.45)$$

$$\{\delta(\partial u)\} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N \rangle \\ \langle \frac{\partial N}{\partial x} \rangle \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \{\delta u_n\} = [B_\delta] \{\delta u_n\}$$

d'où :

$$(3.41) \Rightarrow W^e = \langle \delta u_n \rangle \left( \int_{V^e} [B_\delta]^T [D] [B] dV \{u_n\} - \int_{V^e} \{N\} f_v dV - \int_{S^e} \{N\} f_s dS \right) \quad (3.46)$$

Finalement, en utilisant les expressions (3.41) et (3.39) nous obtenons l'expression matricielle de  $W^e$  discrétisée :

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle ([k] \{u_n\} - \{f\}) \quad (3.47)$$

ou :  $[k]$  est la matrice élémentaire

$\{f\}$  est le vecteur élémentaire des sollicitations

$\{u_n\}$  est le vecteur élémentaire des variables aux nœuds.

$\{\delta u_n\}$  est le vecteur élémentaire des variations des variables nodales.

En comparant l'équation (3.45) et (3.46) nous obtenons :

$$[k] = \int_{V^e} [B_\delta]^T [D] [B] dV \quad (3.48)$$

$$\{f\} = \int_{V^e} \{N\} f_v dV + \int_{S_f^e} \{N\} f_s dS$$

La forme intégrale globale est obtenue par addition des formes élémentaire, d'où :

$$W = \sum_{v^e} W^e = \langle \delta U_n \rangle ([K] \{U_n\} - \{F\}) \quad (3.49)$$

La construction des termes  $[K]$  et  $\{F\}$  à partir des termes de  $[k]$  et  $\{f\}$  de chaque élément, constitue l'assemblage des éléments, que nous entamerons dans le prochain paragraphe.

Comme  $W$  doit être nul pour tout  $\langle \delta U_n \rangle$ , nous obtenons le système d'équation en  $\{U_n\}$  :

$$[K] \{U_n\} = \{F\} \quad (3.50)$$

Pour les équations (3.20) (3.21), l'équation matricielle s'écrit sous la forme suivante :

$$A(U) U = f$$

$U$  et  $f$  représentent le vecteur solution et le terme libre respectivement :

$$U = \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \\ p_j \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Et la matrice  $A$  qui s'exprime comme suit :

$$A = \begin{vmatrix} k_{uu} & k_{vv} & c_u \\ k_{vu} & k_{vv} & c_v \\ c_u^T & c_v^T & 0 \end{vmatrix} \quad (3.52)$$

Tel que :

$$k_{uu} = \int \left( \left( N_i N_k u_k \frac{\partial N_j}{\partial z} + N_i N_k v_k \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) + \mu \left( 2 \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) \right) d\Omega$$

$$k_{uv} = \int \mu \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega$$

$$k_{vu} = \int \mu \left( \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) d\Omega$$

$$k_{vv} = \int \left( \left( N_i N_k u_k \frac{\partial N_j}{\partial z} + N_i N_k v_k \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) + \mu \left( 2 \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \right) d\Omega$$

$$c_u = - \int \frac{\partial N_i}{\partial z} M_j d\Omega$$

$$c_v = - \int \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} + \frac{N_i}{r} \right) M_j d\Omega$$

$$f_u = \int N_i f_x d\Omega$$

$$f_v = \int N_i f_y d\Omega$$

$$\text{où } d\Omega = r dr dz$$

**d) Assemblage et stockage de la forme intégrale globale  $W^e$  :**

❖ **Assemblage de la matrice globale :**

La forme intégrale globale discrétisée  $W$  (3.49) est la somme des formes élémentaires discrétisée  $W^e$  (3.47), cette opération constitue l'assemblage :

$$W = \sum_e W^e = \sum_e \langle \delta u_n \rangle ([k] \{u_n\} - \{f\}) \quad (3.53)$$

Cette dernière est l'opération qui consiste à construire la matrice élémentaires  $[K]$  et le vecteur globale des sollicitations  $\{F\}$  à partir des matrices élémentaires  $[k]$  et des vecteurs élémentaires des sollicitations  $\{f\}$ .

Le principe est de mettre cette expression sous la forme (3.49) ; pour cela il suffit de réécrire les formes élémentaires  $W^e$  en fonction de  $\{U_n\}$  et  $\langle \delta U_n \rangle$  :

$$W^e = \langle \delta U_n \rangle ([K^e] \{U_n\} - \{F^e\}) \quad (3.54)$$

La matrice  $[K^e]$ , somme des matrices élémentaires étendues, est construite par expansion de la matrice  $[k]$  grâce à des insertions de lignes et de colonnes de zéros.  $[k]$  à pour dimension le nombre de degrés de l'élément, alors que  $[K^e]$  à la dimension du nombre de degrés de liberté total.

La même opération est effectuée sur la somme des vecteurs élémentaires étendues  $\{F^e\}$ .

❖ **Méthodes de stockage :**

Dans de nombreux problèmes les matrices  $[k]$  sont symétriques ; ce qui rend la matrice  $[K]$  symétrique :

$$K_{IJ} = K_{JI}$$

Cette propriété permet également des économies importantes pour le stockage et la résolution du système d'équations. Néanmoins, il existe des matrices qui ne sont pas symétriques, pour cela on doit stocker méthodiquement afin d'économiser sur le temps de calcul et pour l'efficacité de la résolution.

Après plusieurs essais de différentes méthodes de stockage, nous avons opté pour la méthode de stockage sky line (ligne de ciel). C'est une méthode très efficace pour les matrices globales non symétriques. Elle consiste à stocker les termes  $[K]$  par lignes et colonnes de longueur variables. Pour cela, on choisit trois tables de stockage :

Tab1 : contient les termes diagonaux

Tab2 : contient les termes du triangle supérieur de  $[K]$ , organisés par colonnes descendantes (sans les termes diagonaux).

Tab3 : contient les termes du triangle inférieur de  $[K]$ , organisés par lignes de gauche à droite (sans les termes diagonaux).

Pour la matrice :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & 0 \\ 0 & 0 & K_{53} & 0 & K_{55} \end{bmatrix}$$

"Ligne de ciel"

on aura :

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 \\ 0 & 0 & K_{23} & K_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{34} & K_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{55} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{32} & 0 & 0 & 0 \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{53} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Termes placés dans TAB2      Termes placés dans TAB1      Termes placés dans TAB3

La ligne de ciel est l'enveloppe des sommets des colonnes de hauteurs variables. Elle est symétrique, par rapport à la diagonale, de l'enveloppe des extrémités gauche des lignes, que  $[K]$  soit symétrique ou non. Elle est définie par la table des hauteurs des colonnes  $h_j$  :

$$h_j = \text{Max}_e(h_j^e)$$

Les termes nuls de  $[K]$  extérieures aux 2 enveloppes ne sont pas stockés, alors que les termes nuls intérieurs sont stockés.

Si on définit la table de localisation des débuts de colonnes KLD de dimension  $n+1$ , tel que :

$$KLD(1)=1, KLD(2)=1$$

$$KLD(I) = KLD(I-1) + h_j(I-1) \quad I=3,4,\dots,n+1$$

Alors l'espace total de stockage est :

$$n+2 (KLD(n+1)-1)$$

On peut citer différentes méthodes de stockage :

**1. Matrice pleine non symétrique**

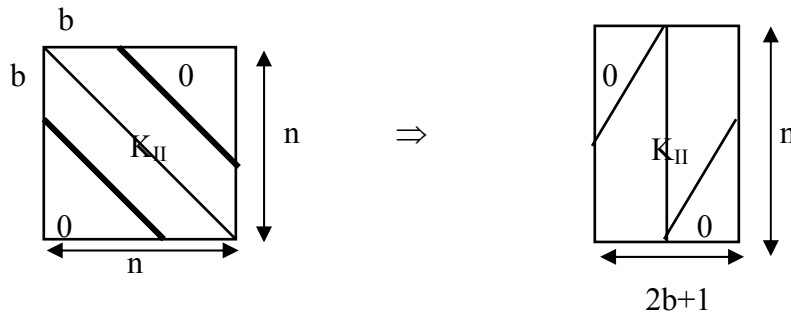
Une matrice pleine, non symétrique, de dimension  $(n \times n)$ , occupe  $n^2$  nombres réels en mémoire d'ordinateur.

**2. Matrice pleine symétrique**

Dans ce cas le stockage se fait seulement par le triangle supérieur de la matrice, le stockage est de  $\frac{n(n+1)}{2}$  pour une matrice de dimension  $(n \times n)$ .

**3. Matrice bande non symétrique:**

Pour une matrice incluant  $b(b+1)$  valeurs nulles inutiles, nous stockons  $n(2b+1)$  mots réels dans une table rectangulaire de dimension  $n(2b+1)$ .



**4. Matrice bande symétrique**

Dans ce cas il faut stocker  $n(b+1)$  mots réels, incluant  $\frac{b(b+1)}{2}$ .

**5. Matrice à ligne de ciel symétrique :**

Le stockage est le même que pour une matrice non symétrique, seulement la table Tab3 n'est pas utilisé.

**6. Matrice à ligne de ciel segmenté sur disque :**

Lorsque la matrice  $[K]$  est très volumineuse où lorsque l'on utilise un ordinateur de capacité réduite, il est nécessaire de décomposer les tables Tab2 et Tab3 en blocs qui sont stockés sur disque. Il suffit de conserver en mémoire, à un instant donné, un ou deux blocs de chacune des tables.

**e) Intégrations numériques :**

Avant d'entamer les méthodes de résolution, nous abordons la méthode d'intégration, une des méthodes clés de la méthode des éléments finis. La méthode d'intégration numérique consiste à construire les matrices et vecteurs élémentaires par intégration sur l'élément de référence.

La matrice élémentaire  $[k]$  et le vecteur des sollicitations élémentaires  $\{f\}$  s'expriment sous la forme intégrale (3.48). Si l'on utilise une intégration sur l'élément de référence, tel que les dérivées  $u_{,x}$ ,  $u_{,y}$ ,  $u_{,z}$ ,  $u_{,xx}$ ,... sont exprimées en fonction de  $u_{,\xi}$ ,  $u_{,\eta}$ ,  $u_{,\zeta}$ ,  $u_{,\xi\xi}$ ,..., ces expressions s'écrivent :

$$\begin{aligned} [k] &= \int_{V^r} [B_{\delta\xi}]^T [Q_{\delta}]^T [D] [Q] [B_{\xi}] \det(J) d_{\xi} d_{\eta} d_{\zeta} \\ \{f\} &= \int_{V^r} \{N\} f_v \det(J) d_{\xi} d_{\eta} d_{\zeta} + \int_{S_f^r} \{N\} f_s J_s dS_1 dS_2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

tel que :

$$[B] = [Q] [B_{\xi}]$$

$[Q]$  est une matrice de transformation contenant les termes de  $[j] = [J]^{-1}$

$[B_{\xi}]$  est une matrice semblable à  $[B]$  mais qui implique des dérivés en  $\xi$  des fonctions  $N(\xi)$  au lieu des dérivées en  $x$  des fonctions  $N(x)$ .

$[J]$  est la matrice jacobéenne de la transformation géométrique.

Pour simplifier l'écriture des équations, on écrit :

$$\begin{aligned} [k^*] &= [B_{\delta\xi}]^T [Q_{\delta}]^T [D] [Q] [B_{\xi}] \det(J) \\ \{f_v^*\} &= \{N\} f_v \det(J) \\ \{f_s^*\} &= \{N\} f_s \end{aligned} \quad (3.56)$$

de là, on aura :

$$\begin{aligned} [k] &= \int_{V^r} [k^*] dV^r \\ \{f\} &= \int_{V^r} [f_v^*] dV^r + \int_{S_f^r} [f_s^*] dS \end{aligned} \quad (3.57)$$

L'intégration numérique a pour principe de passer d'un système continu (intégration) à un système discontinu (sommation).

Pour cela on utilise une intégration numérique de la forme :

$$\begin{aligned}
 [k] &= \sum_{i=1}^r w_i [k^*(\xi_i)] \\
 \{f\} &= \sum_{i=1}^r w_i \{f_v^*(\xi_i)\}
 \end{aligned}
 \tag{3.56}$$

ou :  $w_i$  sont les coefficients poids (ou de pondération)

$\xi_i$  sont les coordonnées des  $r$  points d'intégration qui dépendent de la formule d'intégration et de l'ordre d'intégration.

Le choix du nombre de points d'intégration dépend du type d'élément utilisé et de la matrice élémentaire que l'on construit.

#### f) Procédures de résolution :

La mise en œuvre de la méthode des éléments nécessite l'utilisation de méthodes numériques variées pour construire les matrices élémentaires et résoudre les systèmes d'équations algébriques qui en résultent.

Les procédures de résolution utilisées peuvent être classifiées en deux groupes, suivant que l'écoulement soit stationnaire ou transitoire.

La résolution du système d'équations :

$$[K] \{U_n\} = \{F\}
 \tag{3.57}$$

est une étape importante de la méthode des éléments finis.

Les méthodes de résolution de systèmes linéaires peuvent être classées en deux catégories : la méthode directe et la méthode itérative.

#### ❖ Algorithme stationnaire

##### 1. Méthode d'élimination de Gauss :

Dans notre cas nous avons utilisé la méthode d'élimination de Gauss. Cette méthode qui est utilisée pour des systèmes linéaires est constituée en deux étapes :

A) Triangularisation :

Cette étape consiste à transformer le système d'équation (3.57) en un système triangulaire :

$$\begin{bmatrix} \diagdown & S \\ 0 & \diagup \end{bmatrix} \{U_n\} = \{F\}
 \tag{3.58}$$

B) Résolution du système triangulaire supérieure précédent :

Cette étape consiste à calculer les inconnues  $U_n$ , de la dernière à la première, par résolution du système triangulaire (3.58).

## 2. Méthode de décomposition :

Cette méthode consiste à la décomposition de la matrice  $[k]$  sous la forme :

$$[k] = \begin{bmatrix} & 0 \\ L & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} = [L][S] \quad (3.59)$$

tel que :

$[L]$  : est une matrice triangulaire inférieure à termes diagonaux unités

$[S]$  : est la matrice triangulaire supérieure obtenue par élimination de Gauss.

## 3. Méthode de substitution :

Dans la plupart des problèmes physiques leurs formulations mathématiques contiennent des termes non linéaires. Ces termes sont non linéaires par rapport aux inconnues du problème qui apparaissent dans les équations aux dérivées partielles.

La méthode de substitution est une méthode itérative avec point fixe, qui est utilisée pour des problèmes non linéaires.

La forme générale de cet algorithme est :

$$K(U_i)U_{i+1} = F \quad (3.60)$$

Ici, en posant  $U_i$  connu, on n'a plus de problème non linéaire. Dans chaque itération, on aura un système linéaire et non symétrique à résoudre.

### ❖ Algorithme non stationnaire :

La variation des variables physiques au cours du temps, conduit à un système d'équations différentielles en temps  $t$ , en général du premier ou du second ordre :

Premier ordre :

$$[C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \quad \text{pour } t > t_0 \quad (3.61)$$

$$\text{et } \{U(t_0)\} = \{U_0\}$$

deuxième ordre :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \quad \text{pour } t > t_0 \quad (3.62)$$

$$\text{et } \{U(t_0)\} = \{U_0\} ; \quad \{\dot{U}(t_0)\} = \{\dot{U}_0\}$$

Résoudre ces systèmes d'équations consiste à trouver un ensemble de fonctions qui satisfont ces dernières à tout instant  $t$  ainsi que les conditions initiales imposées à  $t = t_0$ .

Pour la résolution de ces équations nous avons utilisé une méthode d'intégration directe. Cette méthode consiste à construire numériquement, à partir de  $\{U_0\}$ , une suite de valeurs de la solution aux instants successifs  $t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots, t_0 + n\Delta t, \dots$  :

$$\{U(t_0)\} \rightarrow \{U(t_0 + \Delta t)\} \rightarrow \dots \rightarrow \{U(t_n + \Delta t)\}$$

La méthode d'intégration directe utilise des approximations des dérivées  $\{\ddot{U}\}$  et  $\{\dot{U}\}$  de type différence finis. Pour notre cas nous avons utilisé la méthode d'Euler implicite.

Les équations de Navier-Stokes forment un système différentiel du premier ordre, ces équations peuvent être sous la forme générale :

$$\begin{aligned} \{\dot{U}\} &= \{f(\{U\}, t)\} & \text{pour } t > t_0 \\ \{U(t_0)\} &= \{U_0\} \end{aligned} \tag{3.63}$$

et si nous discrétisons  $\{\dot{U}\}$  par la formule de différences finies décentrées à droite :

$$\{\dot{U}_{t+\Delta t}\} \approx \frac{1}{\Delta t} (\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_t\}) \tag{3.64}$$

nous employons cette relation pour discrétiser (3.63) nous obtenons à l'instant  $t$  :

$$\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \Delta t \{f(\{U_{t+\Delta t}\}, t + \Delta t)\} \tag{3.65}$$

### III.4. Résultats et discussion :

Pour tester la validité de notre programme de calcul, nous avons comparé nos résultats numériques avec des solutions analytiques sur le profil de la vitesse axiale. Nous analyserons l'influence de chacun des paramètres gouvernant l'écoulement, à savoir le nombre de Reynolds et l'indice de structure (caractère rhéofluidifiant), sur le profil de la vitesse, sur la distribution de pression et sur la contrainte de cisaillement à la paroi.

#### III.4.1. Profils de vitesse axiale :

Les profils théoriques et numériques de vitesse d'écoulement pour différentes valeurs de l'indice de structure  $n$  et pour un faible nombre de Reynolds sont présentés (Fig.3.4). Ils montrent nettement l'influence de  $n$  sur ces profils. Nous observons que la vitesse axiale dépend de l'indice de structure et que le caractère rhéofluidifiant ( $n$  décroissant) conduit à un aplatissement du profil de vitesse, entraînant de ce fait une variation sur le taux de cisaillement pariétal. Cela aura un impact marqué sur les pertes d'énergies régulières. Nous notons que ces résultats sont en bonne concordance avec les résultats analytiques.

La figure (Fig.3.5) donne la vitesse axiale en fonction du rayon pour différentes valeurs du nombre de Reynolds et pour un indice de structure donné. On observe qu'avec l'augmentation du nombre de Reynolds, les forces de viscosité diminuent et le profil de vitesse s'éloigne légèrement du profil classique de Poiseuille.

La figure (Fig.3.6) montre l'évolution de la vitesse axiale le long de l'axe de symétrie pour une valeur de  $n=0.5$  et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Nous observons que lorsque le nombre de Reynolds augmente la longueur d'établissement de l'écoulement augmente, et cette augmentation est due à l'accroissement de l'intensité de la vitesse radiale dans la zone d'entrée lorsque le nombre de Reynolds augmente.

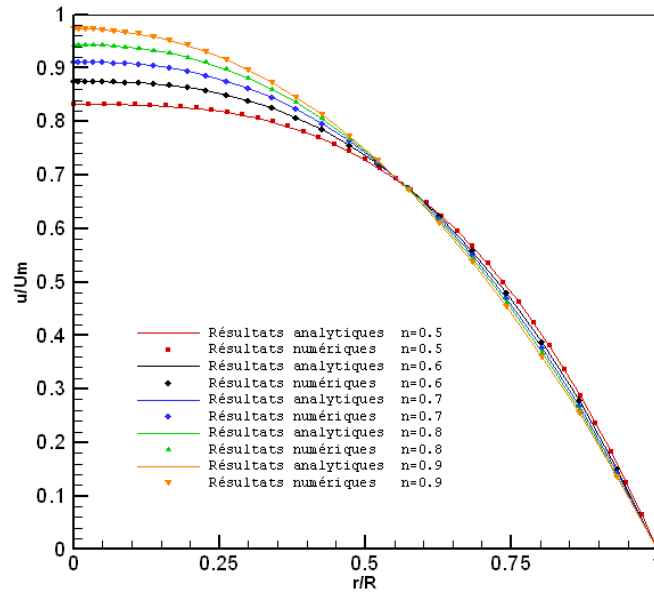


Fig.3.4. Profil de la vitesse axiale à la sortie de la conduite pour différents indices d'écoulement et pour  $Re = 0.5$ .

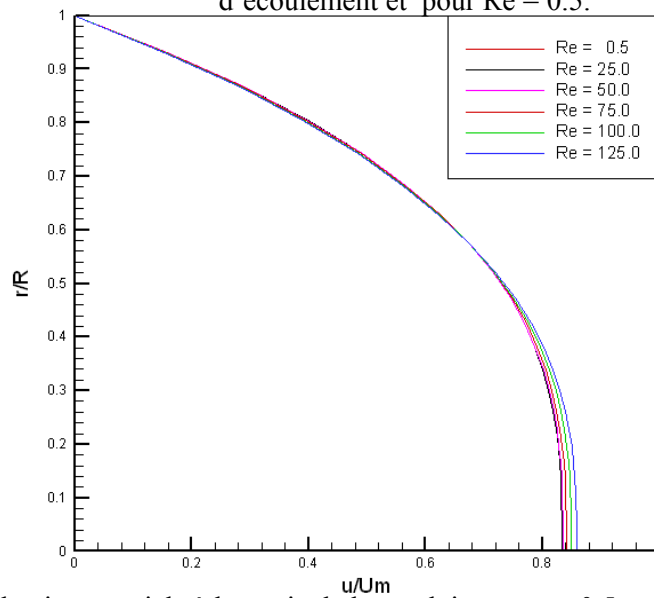


Fig.3.5 Profil de la vitesse axiale à la sortie de la conduite pour  $n=0.5$  et pour différents nombres de  $Re$

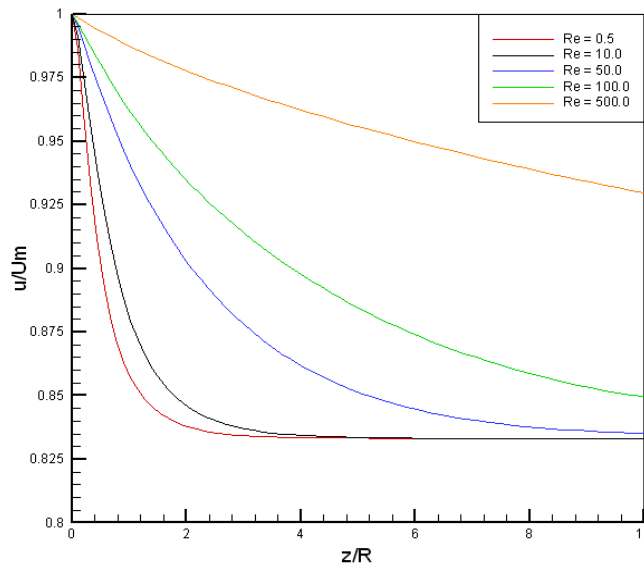


Fig.3.6. Profil de la vitesse axiale le long de l'axe pour  $n= 0.5$  et à différents nombres de Reynolds.

### III.4.2. Profil de la pression et de la contrainte de cisaillement pariétale:

La figure (Fig.3.7) représente l'évolution de la pression le long de l'axe de symétrie pour différentes valeurs d'indice de structure. On remarque que la pression suit une loi quasi linéaire avec  $z^*$ , et que pour les paramètres d'écoulement imposés la chute de pression maximale ( $\Delta P = P_{\text{aval}} - P_{\text{amont}}$ ) décroît avec la diminution de l'indice de structure. Tandis que la contrainte pariétale sur la paroi ( Fig. 3.9) s'établit rapidement à une valeur constante qui est fonction de l'indice d'écoulement. La figure (Fig.3.8) montre l'évolution du profil de pression pour un indice d'écoulement  $n=0.5$  et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. On constate qu'une augmentation du nombre de Reynolds engendre une diminution des forces de viscosités par rapport aux forces d'inertie et ceci se traduit par une diminution de la chute de pression.

En effet, plus on diminue l'indice d'écoulement (jusqu'à  $n=0.5$ ) la valeur de la contrainte de cisaillement à la paroi diminue tandis que l'effet de la zone d'entrée sur la répartition de la contrainte partielle augmente.

### III.5. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté une étude numérique des écoulements dans une conduite de section circulaire pour les fluides non newtoniens pseudoplastiques. Dans cette étude nous avons déterminé avec précision l'aspect mécanique et cinématique en calculant la vitesse axiale et la pression. Le comportement rhéologique du fluide étudié est représenté par la loi de puissance d'Ostwald-de-Waele.

Avant d'aborder l'étude paramétrique de l'écoulement dans la conduite, nous avons donné une description de la méthode numérique utilisée pour la discrétisation du modèle mathématique de ce problème. Le programme de calcul élaboré a permis de mettre au point une procédure de calcul des champs de vitesse et de pression. La validation du programme de calcul est confirmée en comparant les résultats numériques et théoriques de la vitesse axiale pour différents indices d'écoulement.

L'évolution des profils de vitesse et des pertes de charges est fortement dépendante de l'indice de structure et du nombre de Reynolds. L'influence de chacun de ces paramètres d'écoulement sur le champ dynamique (vitesse axiale, longueurs d'établissement) et les pertes d'énergie a été étudiée. Les résultats obtenus sont :

L'augmentation du nombre de Reynolds pour un indice d'écoulement donné entraîne une augmentation de la longueur d'établissement et une légère modification de la loi de distribution de la vitesse axiale suivie d'une diminution de la pression maximale.

La diminution de l'indice de structure ( $n \leq 1$ ), contribue à la diminution de la vitesse axiale et des longueurs d'établissement, ce qui montre l'effet stabilisant de la pseudoplasticité.

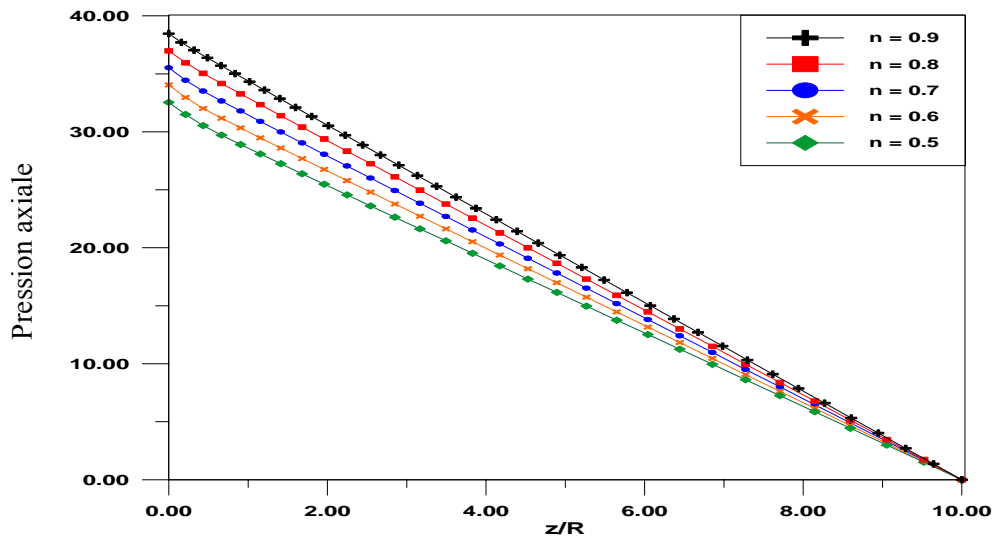


Fig.3.7. Profil de la pression axiale pour  $Re = 0.5$  et à différents indices d'écoulements.

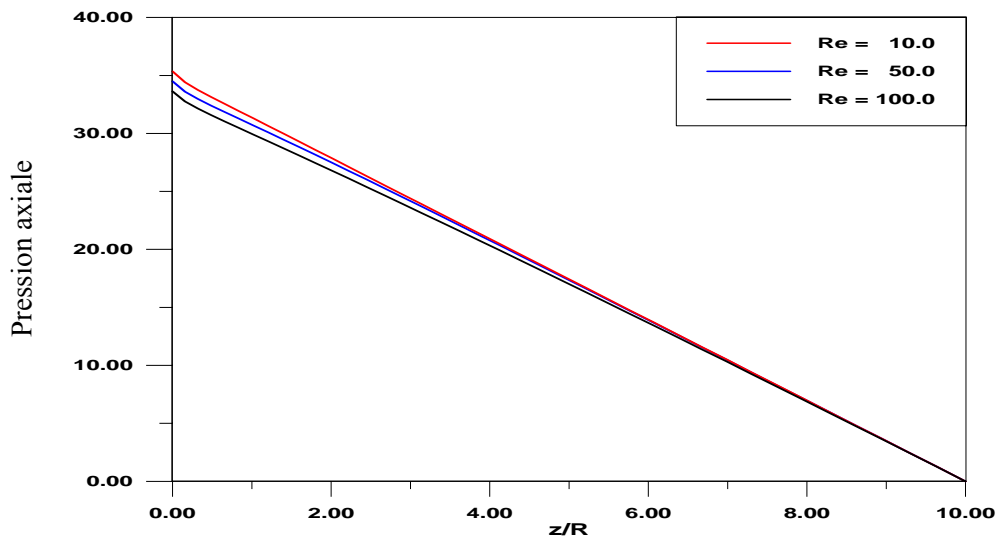


Fig.3.8. Profil de la pression axiale pour  $n = 0.5$  et à différent nombre de Reynolds.

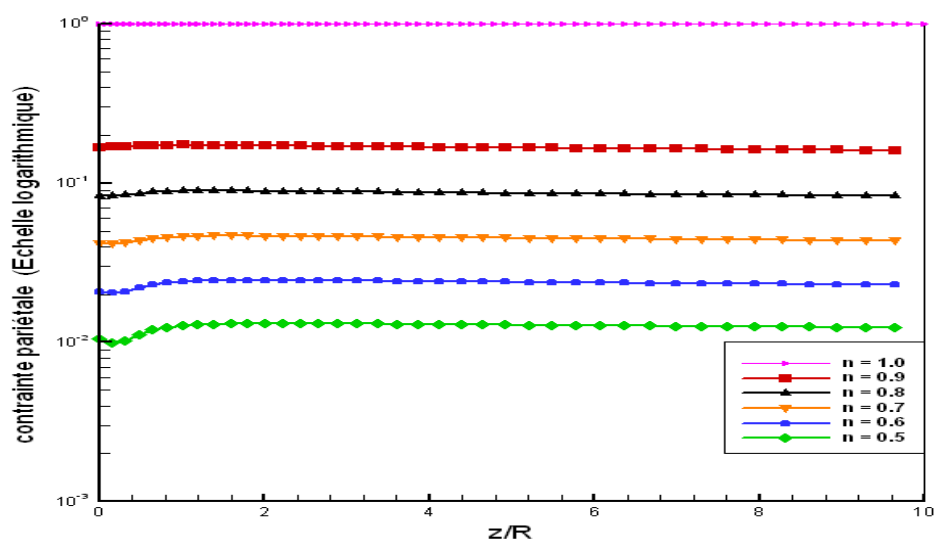
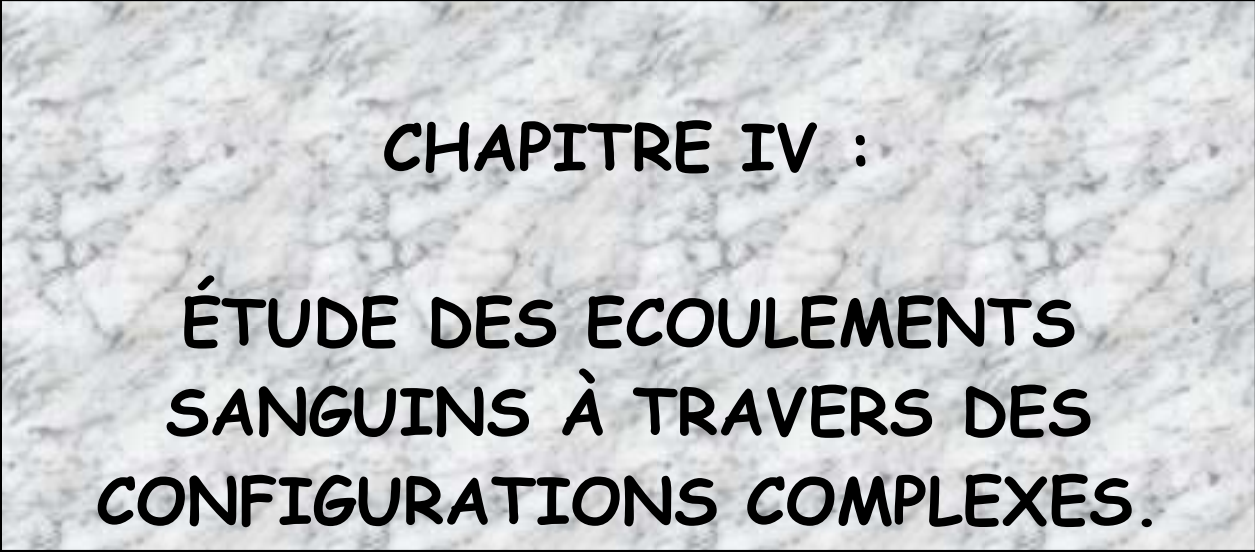


Fig.3.9. Profil de la contrainte de cisaillement pariétale pour  $Re = 0.5$  et à différents indices d'écoulement.

The text is centered on a rectangular background with a marbled, stone-like pattern in shades of grey and white. The text is in a bold, black, sans-serif font.

**CHAPITRE IV :**

**ÉTUDE DES ECOULEMENTS  
SANGUINS À TRAVERS DES  
CONFIGURATIONS COMPLEXES.**

#### IV.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous étudierons deux types de singularités vasculaires génératrices de perturbations cliniques majeures dans les artères. Ces perturbations hémodynamiques observées au cours de pathologie cardio-vasculaire peuvent être en relation directe avec la nature du mouvement sanguin.

Ce chapitre est divisé en deux parties principales :

Dans la première partie, nous analyserons l'écoulement permanent d'un fluide Newtonien et d'un fluide non Newtonien à travers une conduite à symétrie axiale possédant une singularité sous la forme convergente- divergente (sténose).

La forme de la vitesse axiale, l'évolution des zones de recirculation, les longueurs de recollement et la perte de charge singulière seront étudiées en fonction du nombre de Reynolds, de la géométrie de la singularité et des propriétés rhéologiques du sang.

La seconde partie est consacrée aux écoulements permanents à travers quatre rapports d'anévrismes. Identiquement à la première partie, l'influence de la rhéofluidité sur la structure d'écoulement est mise en évidence.

#### IV.2. Etude d'un écoulement d'un fluide Newtonien et du fluide sanguin dans une conduite sténosée :

##### IV.2.1. Position du problème et modèle mathématique :

###### IV.2.1.1. Géométrie de la configuration :

Il s'agit d'effectuer une étude numérique de l'écoulement laminaire d'un fluide Newtonien et d'un fluide sanguin à travers une conduite cylindrique sténosée. Le convergent de la sténose est considéré comme axisymétrique, et la position radiale de la paroi est donnée par cette relation [36,47]:

$$r(z) = \begin{cases} -\delta \left(\frac{z}{\theta}\right)^4 + 2\delta \left(\frac{z}{\theta}\right)^2 + 1 - \delta & \text{si } -\theta < z < \theta \\ 1 & \text{si } z < -\theta \text{ et } z > \theta \end{cases} \quad (4.1)$$

Où  $z$  et  $\theta$  sont respectivement la coordonnée axiale et la longueur du convergent adimensionnées par  $R$ ,

$\delta$  est le degré de liberté de la sténose (i.e. réduction relative du rayon au col), pour plus de précision la géométrie est proposée sur la Fig.4.1.

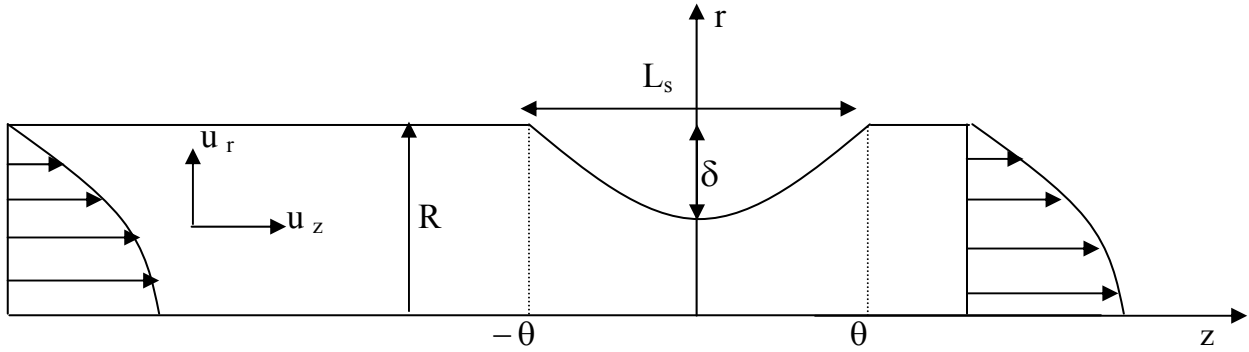


Fig.4.1. Type géométrie de sténose à symétrie axiale étudiée dans une conduite cylindrique.

Dans la plupart des études consacrées aux sténoses, la longueur est prise égale environ à deux fois le diamètre de l'artère [18,59]. Pour notre étude nous avons pris  $L=2D$  et  $\theta = 2$ , et en ce qui concerne l'importance de la sténose, nous la caractérisons par le pourcentage de section de la conduite (degré de la sténose), tel que :

$$S_t = \left[ 1 - \left( \frac{R-\delta}{R} \right)^2 \right] \times 100 \% \quad (4.2)$$

Les cas de pourcentages pris en considération sont :

Modèle	Degré de liberté de sténose $\delta$	Degré de sténose $S_t$
M <sub>1</sub>	0.7	91 %
M <sub>2</sub>	0.6	84 %
M <sub>3</sub>	0.5	75 %
M <sub>4</sub>	0.4	64 %
M <sub>5</sub>	0.3	51 %

Tableau. 4.1. Différents degrés de sténose

Après cela, nous étudierons les effets engendrés par la variation de la longueur de sténose sur la structure d'écoulement. Pour cela, nous prenons différents longueurs de sténose à un degré de sténose  $St=84\%$ , tel que :

Modèle	Longueur de sténose
L <sub>1</sub>	$L_s=2D$
L <sub>2</sub>	$L_s=3D$
L <sub>3</sub>	$L_s=4D$

Tableau. 4.2. Différent cas de longueur de sténose.

#### IV.2.1.2. Formulation mathématique :

Les équations dimensionnelles gouvernant l'écoulement stationnaire, laminaire, incompressible d'un fluide non pesant et non Newtonien en coordonnées cylindriques, sont données par :

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial(ru)}{\partial z} + \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0$$

L'équation de quantité de mouvement suivant z :

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu_a \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_a \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (I)$$

L'équation de quantité de mouvement suivant r :

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu_a}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_a \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Pour rendre comparable les différentes grandeurs physiques du problème, nous considérons les suivantes quantités sans dimension :

$$u' = \frac{u}{U_m}, v' = \frac{v}{U_m}, z' = \frac{z}{R}, r' = \frac{r}{R}, \mu_a' = \frac{\mu_a}{\mu_\infty}, p' = \frac{pR}{U_m \mu_\infty}$$

$U_m$  : vitesse caractéristique, qui est la vitesse maximale sur l'axe à l'entrée.

$R$  : longueur caractéristique, qui le rayon d'entrée de la conduite

$\mu_\infty$  : viscosité Newtonienne (la loi de William-Carreau (2-13))

$$\text{De là : (I)} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial(r'u)}{\partial z'} + \frac{\partial(r'v')}{\partial r'} = 0 & (4-3a) \\ R_e \left( u' \frac{\partial u'}{\partial z'} + v' \frac{\partial u'}{\partial r'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial z'} + \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \mu_a' \frac{\partial u'}{\partial r'} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left( \mu_a' \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) \right) & (4-3b) \\ R_e \left( u' \frac{\partial v'}{\partial z'} + v' \frac{\partial v'}{\partial r'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial r'} + \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{\mu_a'}{r'} \frac{\partial(r'v')}{\partial r'} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left( \mu_a' \frac{\partial v'}{\partial z'} \right) & (4-3c) \end{cases}$$

Tel que :  $Re = \frac{RU_m}{\mu_\infty / \rho}$  *Nombre de Reynolds*, caractérise l'influence relative des forces d'inertie et de viscosité.

$$\text{La contrainte de cisaillement est définie par :} \begin{cases} \tau_{rz} = -\mu_a \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \tau_{rr} = -2\mu_a \frac{\partial v}{\partial r} \\ \tau_{zz} = -2\mu_a \frac{\partial u}{\partial z} \\ \tau_{\theta\theta} = -2\mu_a \frac{v}{r} \end{cases} \quad (4.4)$$

### IV.2.1.3. Conditions aux limites :

Notre domaine d'étude est le suivant :

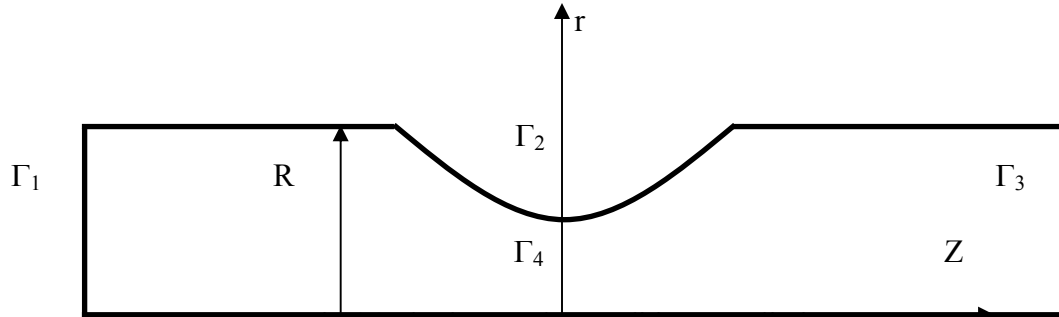


Fig.4.2. Les bornes des conditions aux limites.

A l'entrée de la conduite, nous supposons que le régime dynamique est établi et que le profil de vitesse est complètement développé avec un débit conservé le long de la conduite :

$$\begin{aligned} & u' = \text{profil établi} \\ \Gamma_1 \text{ (Entrée)} & : & (4.5a) \\ & v' = 0 \end{aligned}$$

$$\Gamma_2 \text{ (Paroi)} : u' = v' = 0 \quad (4.5b)$$

$$\Gamma_3 \text{ (Sortie)} : \frac{\partial u'}{\partial z'} = 0, \quad v' = 0 \quad (4.5c)$$

$$\Gamma_4 \text{ (Axe de symétrie)} : \frac{\partial u'}{\partial r'} = v' = 0 \quad (4.5d)$$

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide sanguin, nous calculerons d'abord numériquement le profil de la vitesse établie pour un fluide de Williams-Carreau dans une conduite cylindrique, pour ensuite l'imposer comme condition à l'entrée d'une conduite sténosée.

Pour les différents degrés de sténose (Tableau.4.1.) nous étudierons le profil de la vitesse axiale, les lignes de courants, ainsi que les pertes de charges singulières et les contraintes de cisaillement pariétal.

#### IV.2.2. Etude du profil de la vitesse axiale

Pour une conduite présentant une sténose en arc de cercle  $St = 75\%$  ( $\delta = 0.5$ ) et  $L=2D$ , et pour un nombre de Reynolds  $Re = 150$ , nous avons porté, sur la même figure, les valeurs numériques de l'évolution du profil de vitesse axiale (Fig.4.3), pour différentes abscisses adimensionnelles (Fig.a.). En aval de la sténose cette évolution fait apparaître des écoulements de retour dans une zone secondaire appelée zone de recirculation où la vitesse axiale est négative. La disparition de ces valeurs négatives par diffusion visqueuse indique le rattachement du jet à la paroi à un endroit appelé point de recollement ( $Z_4$ ). La conservation du débit le long de la conduite se traduit par une augmentation importante de la vitesse sur l'axe de la conduite au col de la sténose ( $Z_2$ ).

La forme géométrique de la sténose et le nombre de Reynolds favorise une accélération à l'entrée de la singularité et une décélération à sa sortie, ce qui entraîne une augmentation de l'étendue des zones de recirculation avec le nombre de Reynolds. (Fig.4.4).

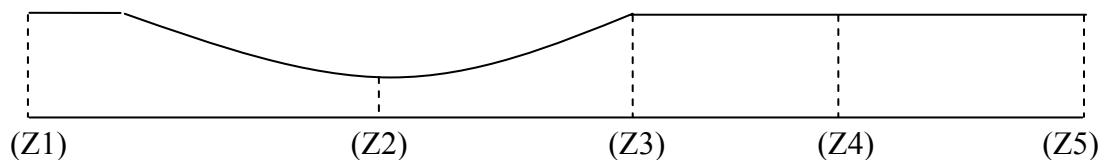


Fig.a. différentes abscisses adimensionnelles pour l'étude du profil de la vitesse axiale.

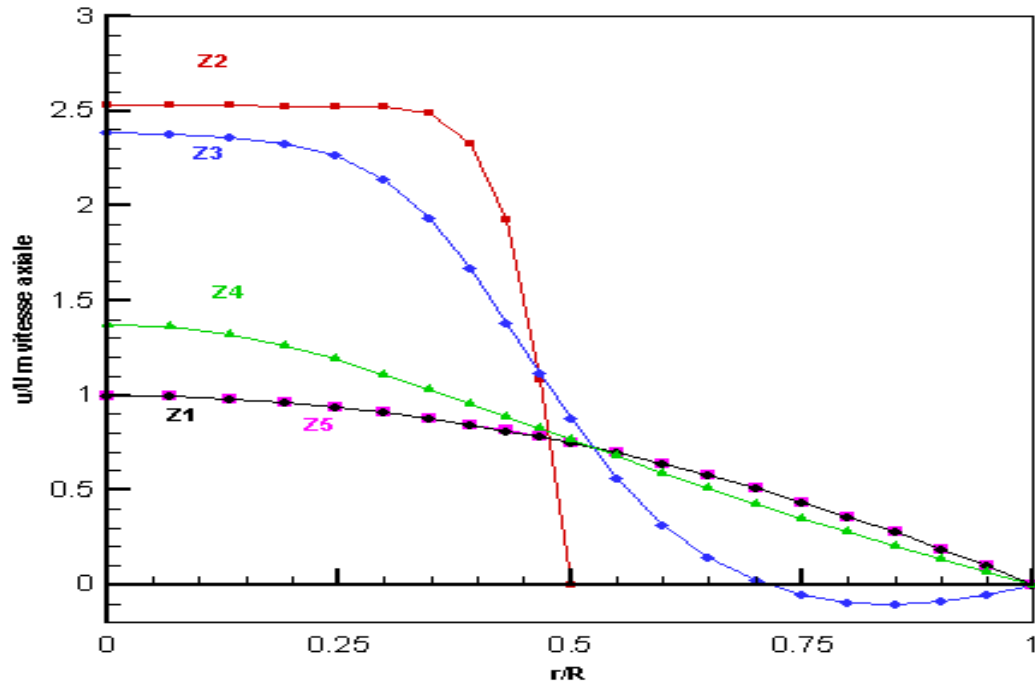


Fig.4.3. Profils de la vitesse axiale pour un écoulement d'un fluide Newtonien à différentes abscisses ( $Re = 150$ ,  $St = 75\%$ ).

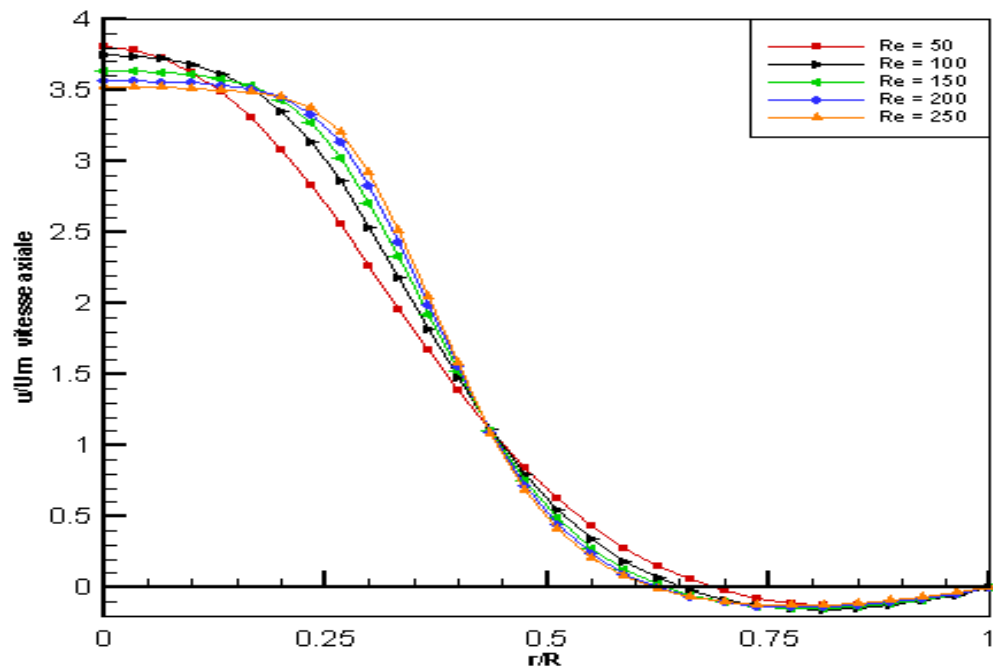


Fig.4.4. Profils de la vitesse axiale pour un écoulement d'un fluide Newtonien à la sortie de la sténose pour différentes valeurs de  $Re$  ( $St = 84\%$ ).

#### **IV.2.2.1. Influence du nombre de Reynolds :**

La (Fig.4.5.), représente l'évolution de la vitesse axiale le long de l'axe de symétrie pour une sténose de degré  $St = 84\%$  et pour différentes valeurs de  $Re$ . Nous remarquons que dès que l'écoulement aborde la sténose sa vitesse axiale commence à croître jusqu'à une valeur maximale et comme nous l'avons vu précédemment cette vitesse est localisée au niveau du col.

L'influence du nombre de Reynolds sur la structure de l'écoulement est très apparente sur la figure (Fig.4.5). En effet, nous observons que l'augmentation du nombre de Reynolds, c'est-à-dire l'augmentation des forces d'inertie entraîne une diminution de la vitesse maximale au col avec toutefois un temps plus lent pour atteindre l'établissement. Dans ce cas là, la zone tourbillonnaire prend de l'ampleur, le point de recollement du jet à la paroi s'éloigne vers l'aval de la sténose alors que la longueur d'établissement de l'écoulement devient plus grande

Pour un nombre de Reynolds élevé, la zone tourbillonnaire présente une surface de contact importante avec le jet central (Fig.4.8). Elle atténue ainsi l'effet de la singularité et permet une expansion progressive du jet.

#### **IV.2.2.2. Influence du degré de sténose :**

L'évolution de la vitesse axiale (Fig.4.6) à travers différents degrés de sténoses (se référer au Tableau.4.1) montre l'importance de la section obstruée sur la structure d'écoulement. En même temps cette figure indique l'abscisse nécessaire pour atteindre un écoulement établi pour chaque degré  $St$ . Nous observons une très rapide augmentation de la vitesse au centre de la sténose ( $z'=0$ ) pour un pourcentage élevé, et juste après une chute rapide liée à la partie divergente de la sténose. Ensuite une chute lente qui correspond à la partie de la conduite où il y a une zone de recirculation.

Cette déformation modifie beaucoup la répartition des vitesses dans la section de la conduite. D'ailleurs, nous observons que plus le degré de sténose est important plus la vitesse axiale au col croît. Cela, engendrera l'amplification des zones de recirculation (Fig.4.9) et mettra aussi en évidence l'ampleur de la portée des tailles de sténose sur le système vasculaire.

#### **IV.2.2.3. Influence de la longueur de sténose :**

La sténose varie d'un patient à un autre, de degré comme de longueur. Pour ce travail nous avons opté pour différents cas de longueur de sténose (Tableau.4.2). Nous traçons sur la Fig.4.7 les résultats de la vitesse axiale le long de l'axe de symétrie pour un  $Re = 200$ . On constate que la longueur  $L_s$  a le même effet sur l'écoulement que le degré  $St$  car elle augmente la vitesse axiale et développe les zones de recirculation. Mais une telle variation est de faible intensité par rapport à l'influence du degré de sténose.

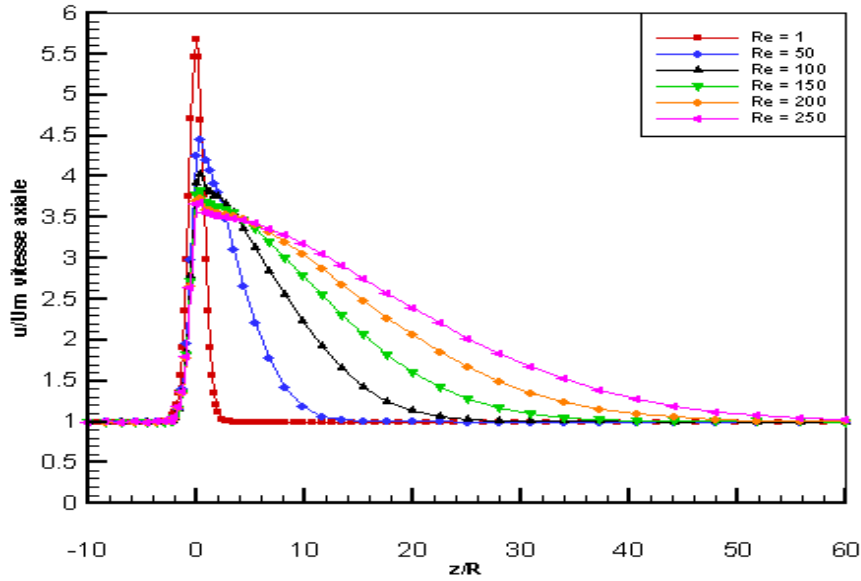


Fig.4.5. Vitesse axiale le long de l'axe de symétrie pour différents nombres de Reynolds ( $St = 84\%$ ).

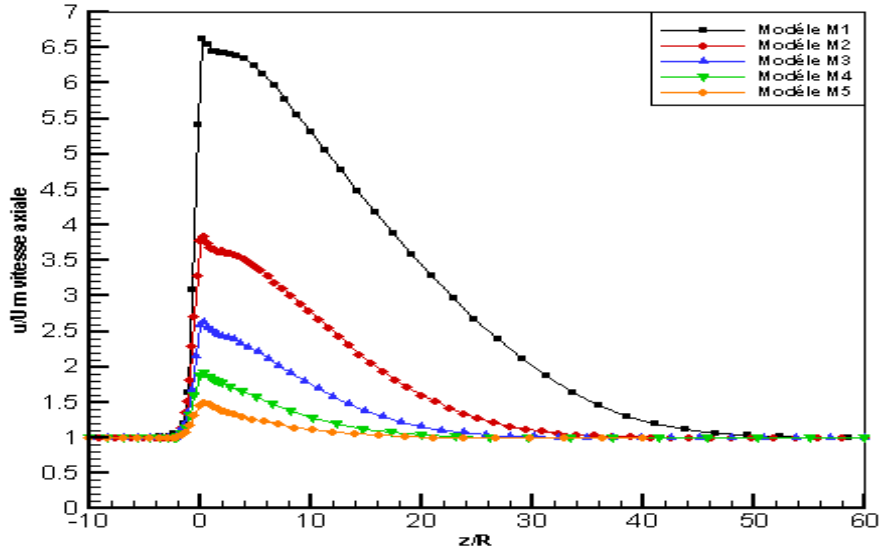


Fig.4.6. L'évolution de la vitesse axiale pour différents degrés de sténose ( $Re = 150$ ).

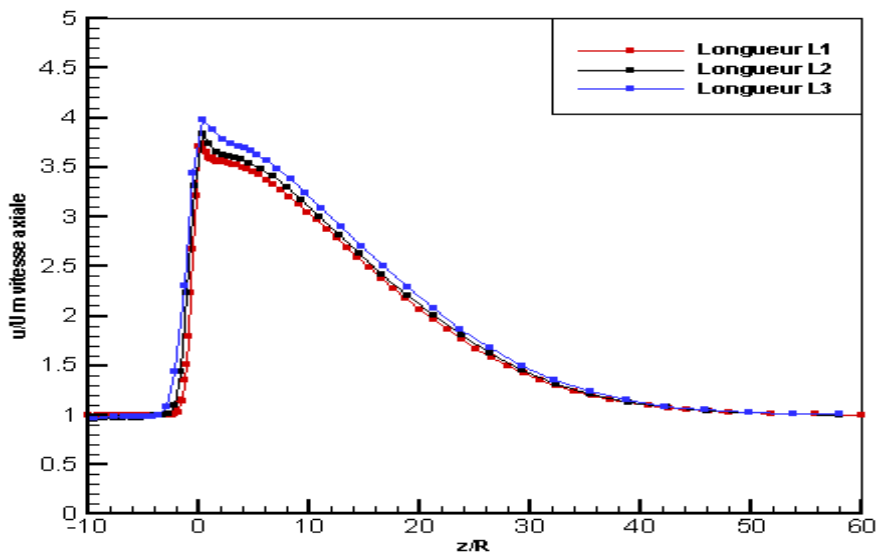


Fig.4.7. L'évolution de la vitesse axiale pour différentes longueurs de sténose ( $Re = 200$ ,  $St = 84\%$ ).

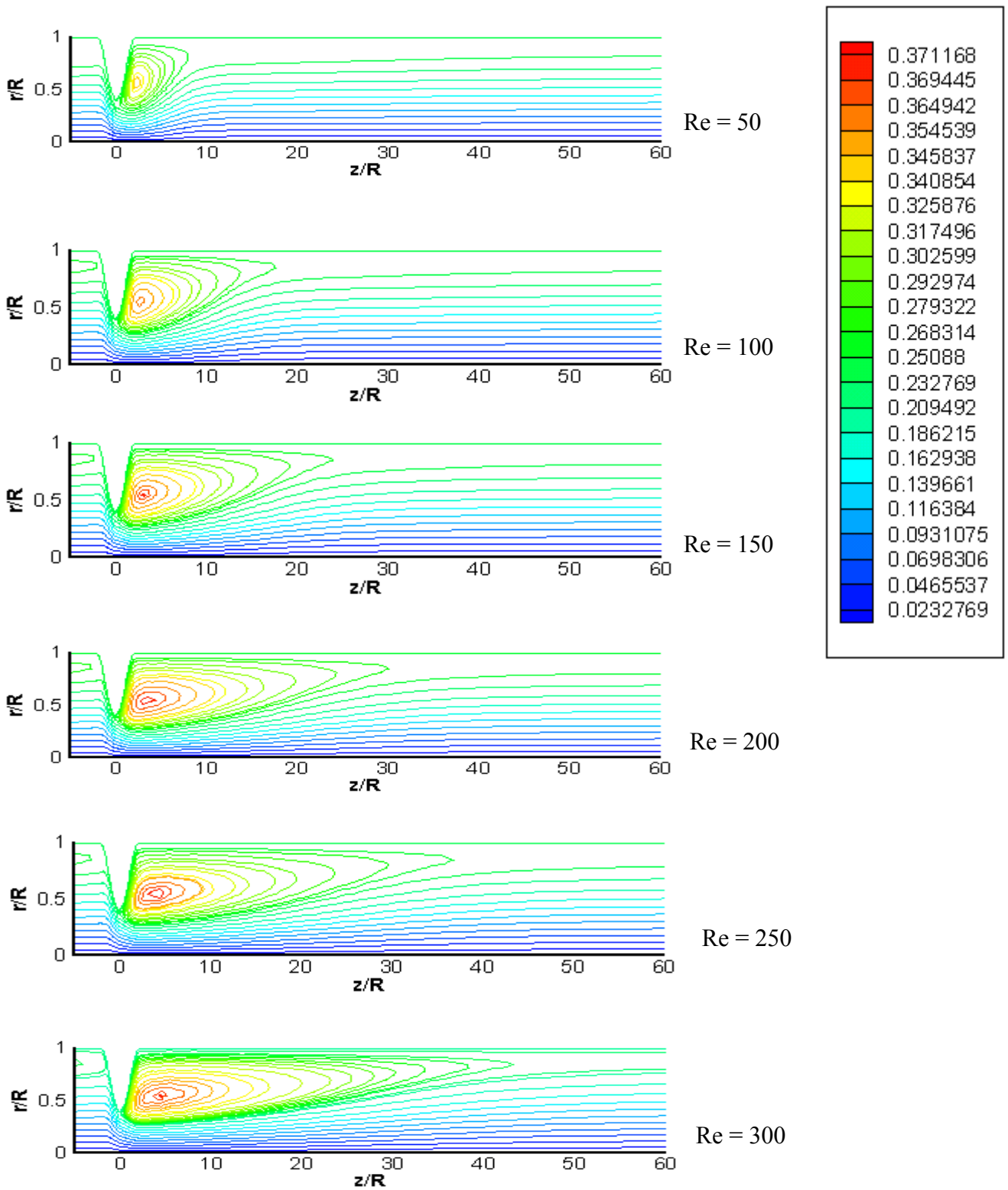


Fig.4.8. Les lignes de courants pour un écoulement d'un fluide Newtonien à travers une sténose de degrés  $St = 84\%$  et à différents nombres de Reynolds.

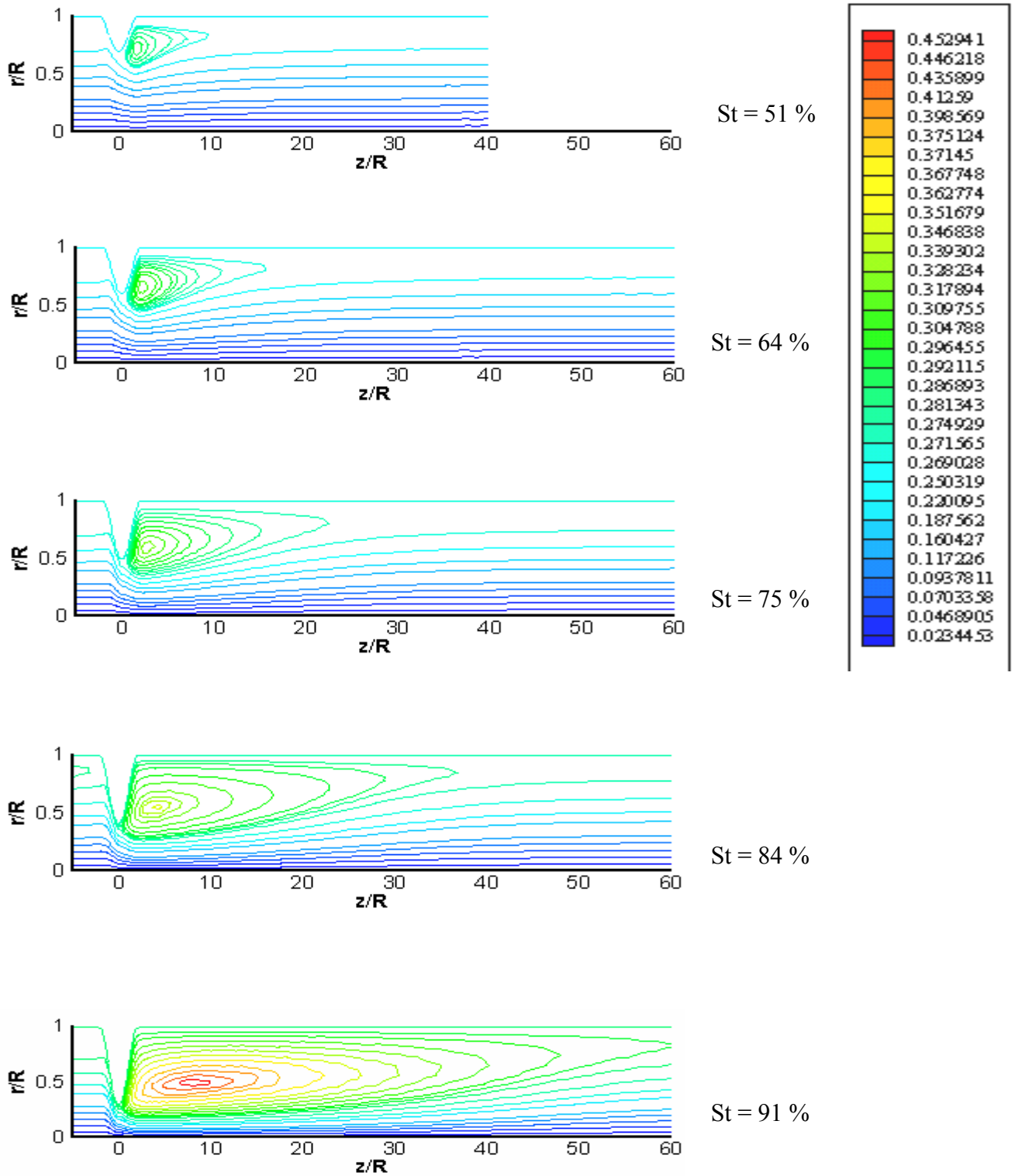


Fig.4.9. Les lignes de courants pour un écoulement du fluide Newtonien pour différents degrés de sténose ( $Re = 250$ ).

#### IV.2.2.4. Influence de la rhéofluidité :

Dans cette partie de notre étude, nous présentons la comparaison entre deux comportements rhéologiques : un cas de fluide Newtonien et un cas de fluide non Newtonien en écoulement dans un modèle de sténose, afin d'analyser l'effet des forces visqueuses sur l'évolution des paramètres hydrodynamiques. Le comportement rhéologique du fluide non Newtonien est décrit par la relation de Williams-carreau  $\mu(\dot{\gamma})$ , et le fluide newtonien par la viscosité minimale  $\mu_{\infty}$ .

D'après les conditions aux limites présentées au paragraphe IV.2.1.3., nous déterminons numériquement le profil établi à l'entrée de la conduite pour le fluide de William-Carreau. Pour cela, nous imposons le même débit que pour l'écoulement d'un fluide Newtonien dans une conduite cylindrique avec une viscosité apparente qui obéit à la loi de comportement de Williams-Carreau. A la sortie de la conduite cylindrique nous aurons le profil de la vitesse axiale établie que nous utiliserons comme condition d'entrée dans la conduite sténosée pour le cas du fluide non Newtonien.

Sur la Fig.4.10.b., nous constatons qu'à la sortie de la sténose pour un nombre de Reynolds donné, les valeurs négatives de la vitesse axiale sont plus importantes pour un fluide Newtonien que pour un fluide non Newtonien. Ceci montre que les zones tourbillonnaires sont plus importantes pour un fluide Newtonien que pour un fluide non Newtonien. Pour illustrer ces zones, nous traçons les lignes de courant pour l'écoulement des deux fluides à travers une sténose de degrés  $St = 64\%$  (Fig.4.11).

La différence dans les profils dynamique est expliqué par la différence de viscosité. Comme la viscosité du fluide Newtonien  $\mu_{\infty}$  reste toujours inférieure à celle en non Newtonien  $\mu(\dot{\gamma})$ , c'est à dire que le fluide non Newtonien est plus visqueux, ce dernier atténue les perturbations en absorbant les zones tourbillonnaires.

A la sortie de la conduite sténosée (Fig.4.10.c), nous avons des profils de vitesses établis pour le fluide Newtonien et le fluide de Williams-Carreau. Cette figure met en évidence le fait que la valeur maximale de la vitesse axiale pour un fluide Newtonien est plus petite que pour un fluide non Newtonien. D'ailleurs, l'aplatissement du profil de la vitesse axiale pour le cas du fluide non Newtonien entraîne une augmentation du taux de cisaillement pariétal, ce qui aura un impact marqué sur les pertes d'énergies régulières.

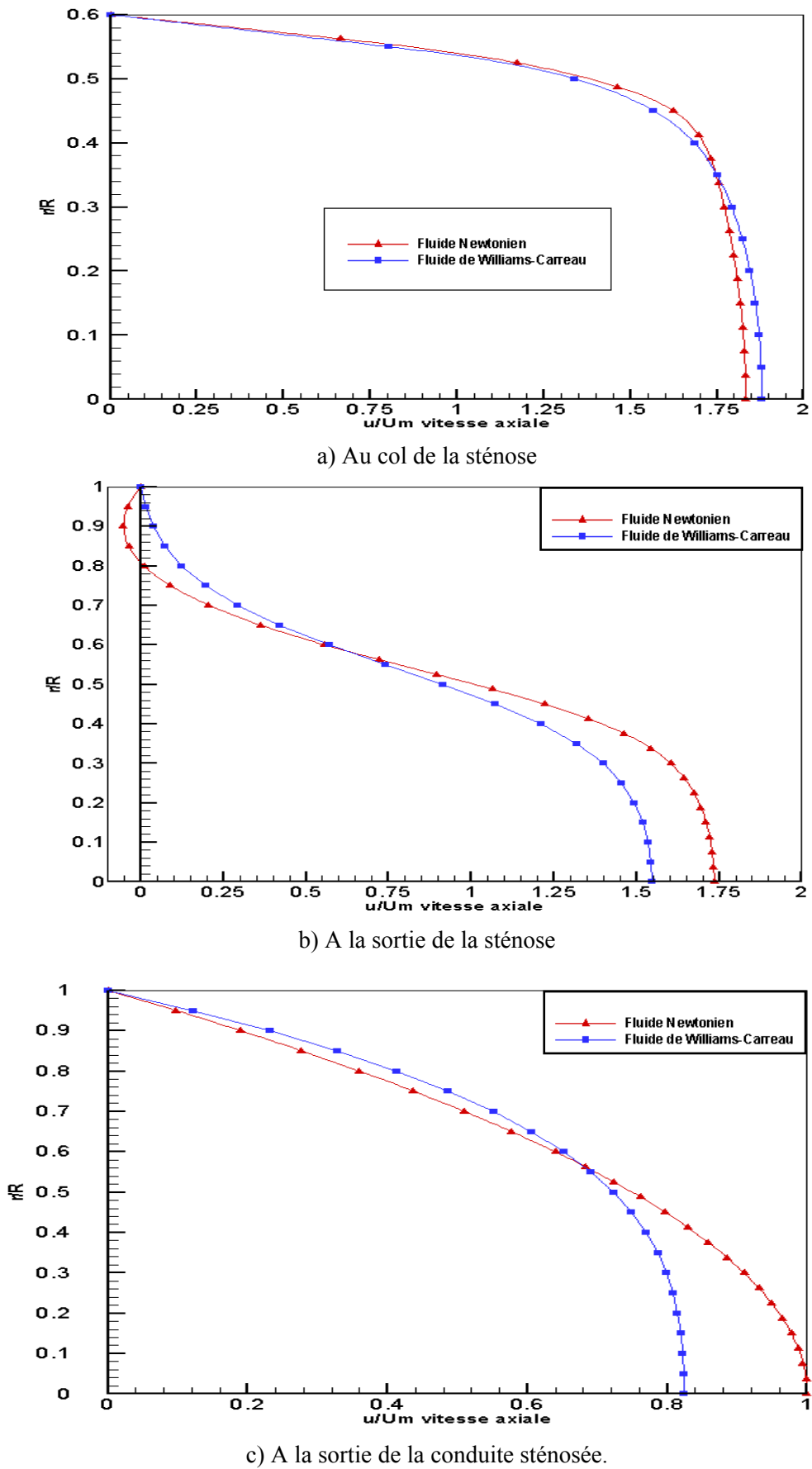


Fig.4.10. Profils des vitesses axiales pour les deux fluides à travers une Sténose  $St = 64\%$  et  $Re=200$ , et pour différentes sections de la conduite.

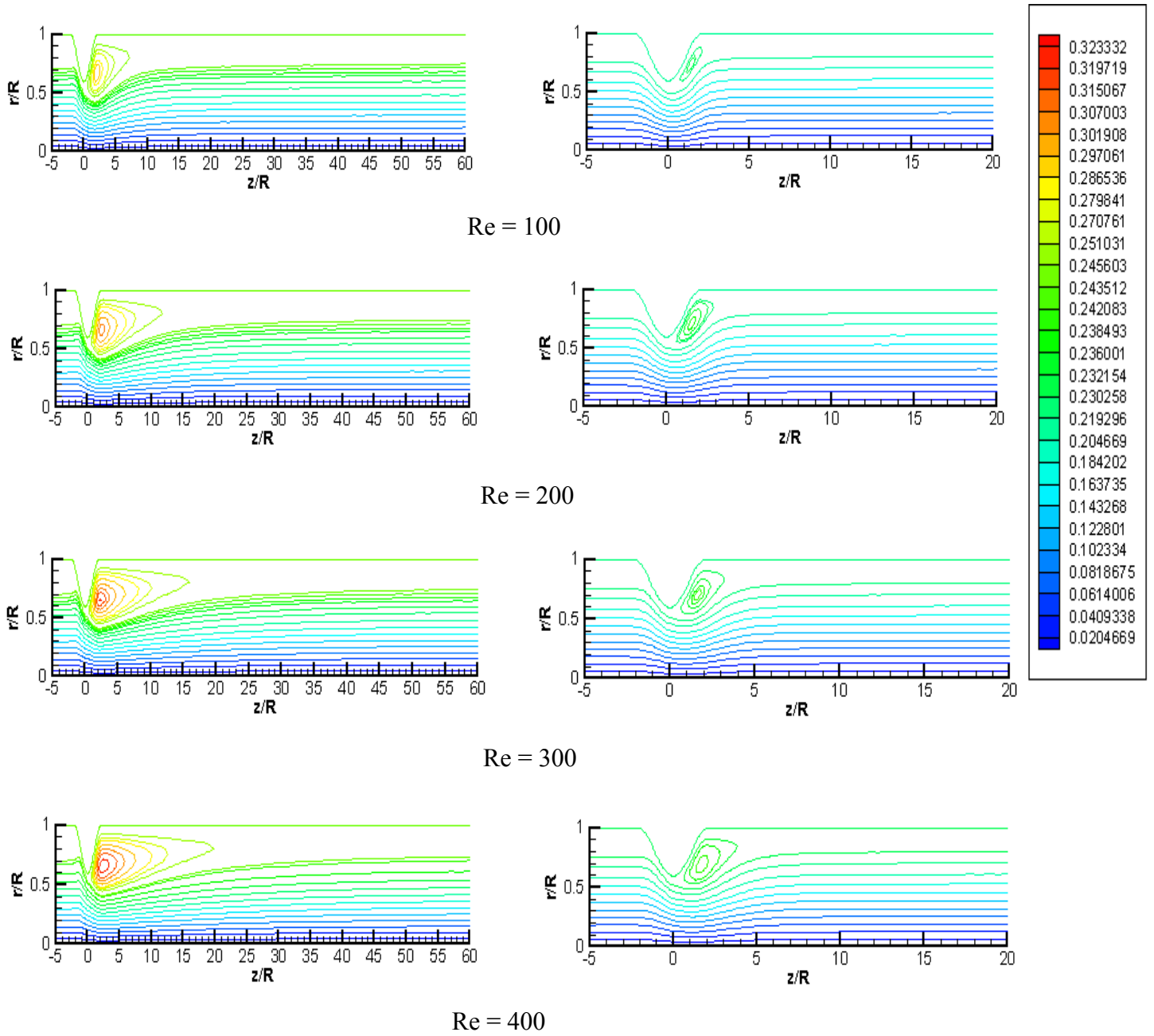


Fig.4.11. Les lignes de courant pour un écoulement des deux fluides à travers une sténose de  $St = 64\%$  et à différent nombre de Reynolds.

### IV.2.3. Contrainte de cisaillement pariétal :

Nous traçons sur la Fig.4.12. la variation de la contrainte de cisaillement pariétale, i.e. le frottement au niveau de la paroi, pour un écoulement d'un fluide Newtonien à travers une sténose de degrés  $S_t = 84\%$  et pour un nombre de Reynolds  $Re = 50$ . Sur cette figure, nous avons considéré la contrainte de cisaillement pariétale réduite par la contrainte de cisaillement à l'infini  $\tau_p(z)/\tau_\infty$ , en fonction de la distance réduite  $z/R$ .

Nous remarquons d'après cette figure que l'évolution du frottement pariétal est perturbé au niveau de la sténose et particulièrement en son col à cause de l'effet de jet issu de la contraction et de l'aplatissement du profil de vitesse. Nous apercevons l'existence d'une zone tourbillonnaire qui se situe entre la partie divergente de la sténose et le point de recollement indiqué par une contrainte nulle. Celui-ci indique la position du point d'arrêt de la ligne de jet, où l'écoulement principal se recolle de nouveau sur la paroi. Cette zone est caractérisée par sa longueur adimensionnelle  $Z_r$  entre le centre de la sténose et le point de recollement.

D'après cette évolution, nous constatons que la contrainte pariétale varie de la même façon que la composante axiale de la vitesse. Cette contrainte croît très rapidement jusqu'à une valeur maximale correspondant au centre de la sténose puis décroît vers le point de contrainte nulle, ensuite elle continue à décroître avec la valeur négative qui correspond à la zone de recirculation. Après cela, elle croît pour s'annuler à nouveau au point de recollement. Finalement, elle continue à croître pour atteindre une valeur limite correspondant à l'écoulement établi.

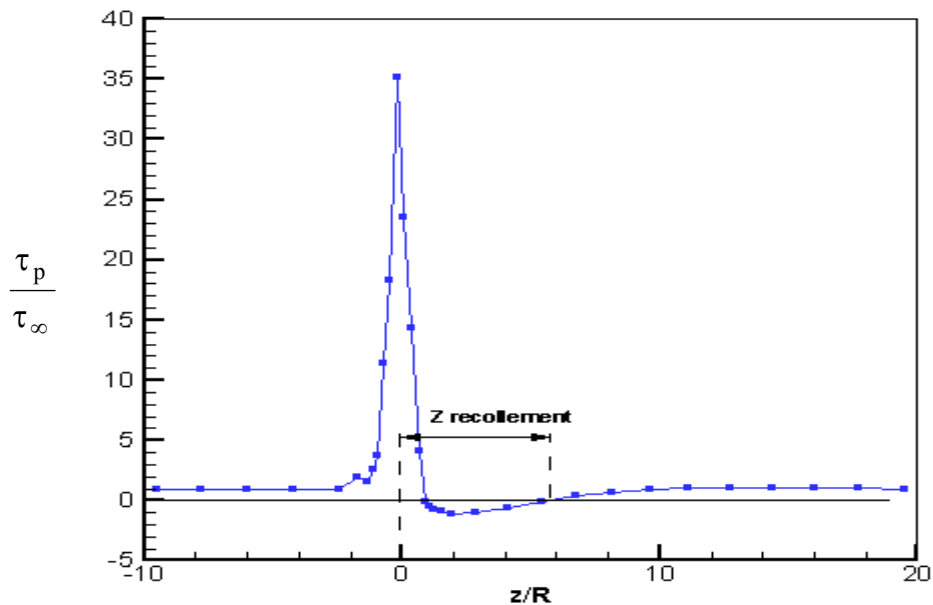


Fig.4.12. Evolution de la contrainte de cisaillement pariétale à travers une sténose de degré  $St=84\%$  et pour  $Re = 50$ .

- ❖ Pour analyser l'effet du nombre de Reynolds sur la contrainte pariétale, nous traçons la variation de cette grandeur le long de l'axe de symétrie pour différents nombres de Reynolds et pour une sténose de degré  $St = 75\%$  (Fig.4.13).

Nous remarquons qu'en augmentant le nombre de Reynolds nous avons l'accroissement de la valeur maximale de la contrainte pariétale au col de la sténose et l'agrandissement des zones tourbillonnaires, ce qui entraîne l'éloignement du point de recollement vers l'aval de la sténose.

- ❖ La Fig.4.14. nous confirme les résultats trouvés précédemment sur le développement de la vitesse axiale pour les différents degrés de sténoses. En fait, la figure nous montre l'accroissement des zones de recirculation, toujours à l'aval de la partie divergente de la sténose, et le surcroît du point de recollement  $Z_r$  en augmentant le degré de sténose.

Nous constatons aussi que l'influence du degré de sténose joue un rôle très important sur la perturbation de la contrainte pariétale et sur la structure de l'écoulement plus que l'influence du nombre de Reynolds.

- ❖ D'après la Fig.4.15. nous observons qu'après le col de la sténose, pour le cas de Williams-Carreau, le point de recollement est beaucoup plus en amont que pour le cas du fluide Newtonien. En effet, cette courbe vérifie les résultats trouvés dans le paragraphe précédent, du fait qu'elle confirme l'affaiblissement des zones tourbillonnaires et du point de recollement pour le cas d'un fluide de Williams-Carreau.

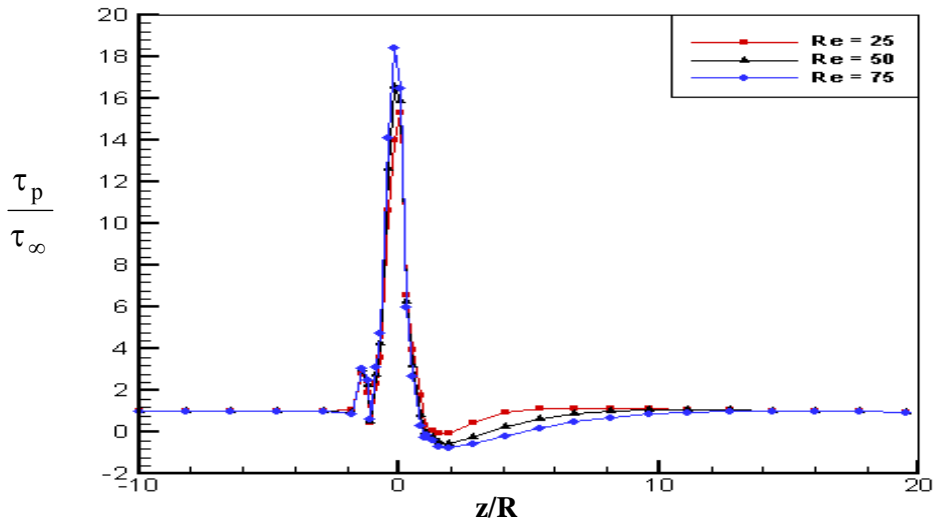


Fig.4.13. Variation du frottement pariétale pour une sténose de  $St = 75\%$  et pour différents nombres de Reynolds.

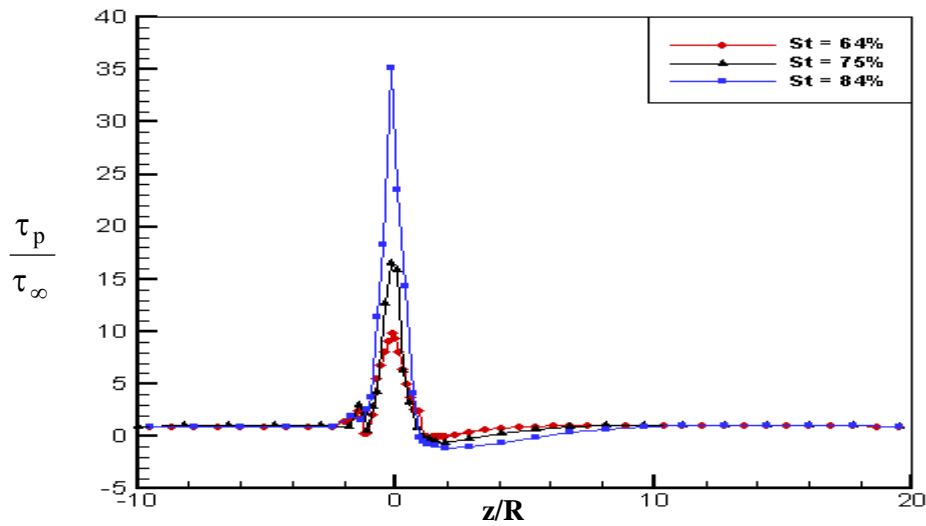


Fig.4.14. Variation du frottement pariétal pour différents degrés de sténose et à  $Re = 50$ .

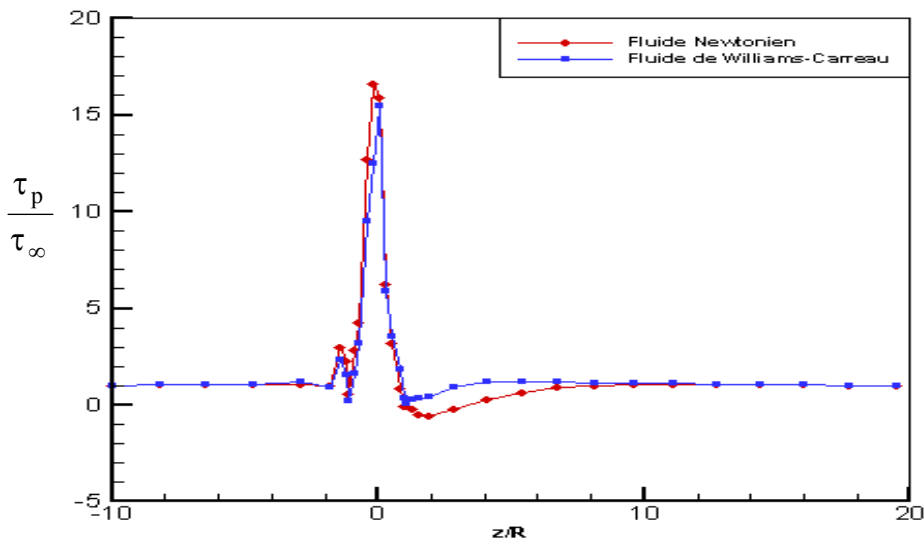


Fig.4.15. Variation de la contrainte de cisaillement pariétale pour un écoulement des deux fluides à travers une sténose de  $St = 75\%$  et à  $Re = 50$ .

#### IV.2.4. Evolution de la longueur de recollement :

Les résultats numériques tracés dans la Fig.4.16 donnent la variation de la longueur de recollement  $Z_r$  en fonction du nombre de Reynolds pour différents degrés de sténose.

Nous observons que la longueur de recollement en aval de la partie divergente de la sténose augmente avec le nombre de Reynolds, ce qui met en évidence l'accroissement des zones tourbillonnaires avec les forces d'inertie. Les résultats montrent également que l'évolution de la longueur de recollement suit une loi linéaire en fonction du nombre de Reynolds. Ces résultats linéaires sont confirmés par les expériences d'Azuma (1976) pour un fluide Newtonien à travers une sténose en arc de cercle [10] et les résultats numériques de Navidbakhsh (1996) pour une sténose en arc de cercle, triangle et carré [59]. Les pentes de ces évolutions linéaires sont d'autant plus importantes en augmentant le degré de sténose. Ce qui explique que la variation de la longueur de recollement est plus rapide pour des pourcentages élevés de la sténose.

La figure (Fig.4.17) représente l'évolution des longueurs de recollement pour l'écoulement des deux fluides (Newtonien et non Newtonien) en fonction du nombre de Reynolds. La figure montre que l'évolution linéaire de la longueur de recollement est valable pour les deux fluides avec une certaine différence qui dépend de la géométrie.

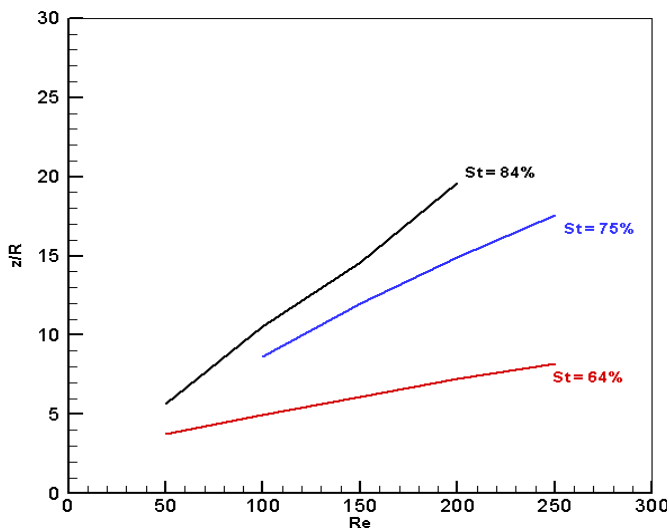


Fig.4.16. Evolution de la longueur de recollement pour différents degrés de sténose pour un écoulement d'un fluide Newtonien.

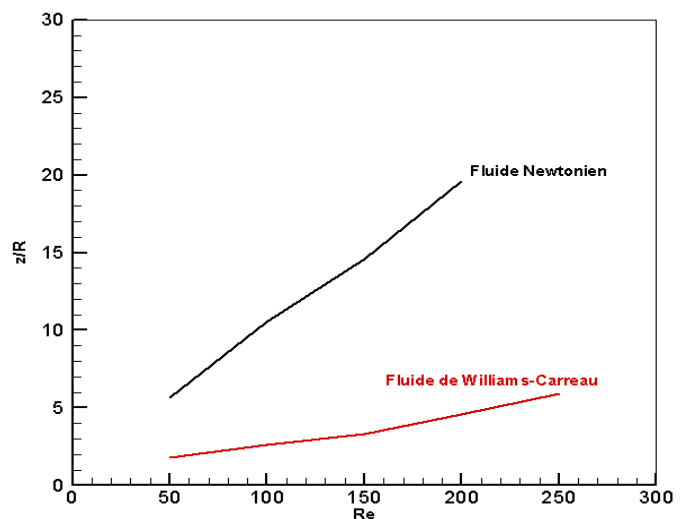


Fig.4.17. Evolution de la longueur de recollement de l'écoulement des deux fluides en fonction du nombre de Reynolds (St=84%).

#### IV.2.5. Etude de la perte de la charge singulière :

L'évolution de la pression en fonction de la longueur adimensionnelle  $Z = z/R$  permet de déterminer la chute de pression  $\Delta P_s$  au passage de la singularité. Celle-ci est obtenue par le prolongement de la ligne droite liée à la partie régulière de la chute de pression, à l'aval jusqu'à l'axe  $z' = Z'_{\text{entrée}}$ . L'intersection de celle-ci avec l'axe  $z' = Z'_{\text{entrée}}$  ( $P_{\text{rég.}}$ ), donne alors la chute de pression réduite :

$$\Delta P_s = P_{\text{rég.}} - P_{\text{calculé}} \quad (4.6)$$

- Pour cela nous traçons l'évolution de la chute de pression le long de la conduite sténosée ( $St = 75\%$ ,  $Re = 250$ ) (Fig.4.18.). Le décollement du fluide à la paroi va engendrer la modification complète de l'écoulement, ce qui va entraîner une nouvelle répartition des forces de frottement et des forces de pression. En abordant la sténose, la pression statique diminue rapidement pour atteindre un minimum correspondant à la partie convergente de la sténose jusqu'au col. Ultérieurement elle augmente avec une partie très rapide qui correspond à la partie divergente de la sténose et une partie moins rapide pour atteindre un maximum qui se situe dans une zone où l'écoulement redevient quasi-établi, puis commence à décroître pareillement à une conduite régulière.

- Les figures (Fig.4.19, 4.20.) montrent l'effet important du nombre de Reynolds sur la perte de charge singulière et nous remarquons que la chute de pression évolue dans le même sens que le nombre de Reynolds. Cette évolution (Fig.4.19) est quasi linéaire pour les différents degrés de sténose, avec des valeurs largement plus grandes pour des sténoses de degrés importants. Les résultats montrent aussi que la pente de ces évolutions pour une sténose de  $St = 84\%$  est beaucoup plus grande que les autres degrés de sténose, cette valeur met en évidence encore le rôle important de l'obstruction de l'artère sur le flux sanguin.

- La figure 4.21. présente la chute de pression en fonction du pourcentage de sténose pour différentes valeurs de  $Re$ . Contrairement à la dernière représentation, l'évolution est non linéaire et l'accroissement de  $\Delta P$  est accéléré quand  $St$  est approximativement supérieur à  $70\%$ , d'où il apparaît que l'effet de la forme géométrique est prédominant sur la chute de pression.

- La figure 4.22. représente la perte de charge singulière en fonction du nombre de Reynolds pour les deux fluides (Newtonien et William Carreau). Nous observons que cette évolution linéaire est acceptable aussi bien pour un fluide de Williams-Carreau que pour un fluide Newtonien. Cependant, Nous constatons que les pertes de charge singulière occasionnées par le changement de section sont moins élevées dans le cas du fluide Newtonien que dans celui du fluide non Newtonien.

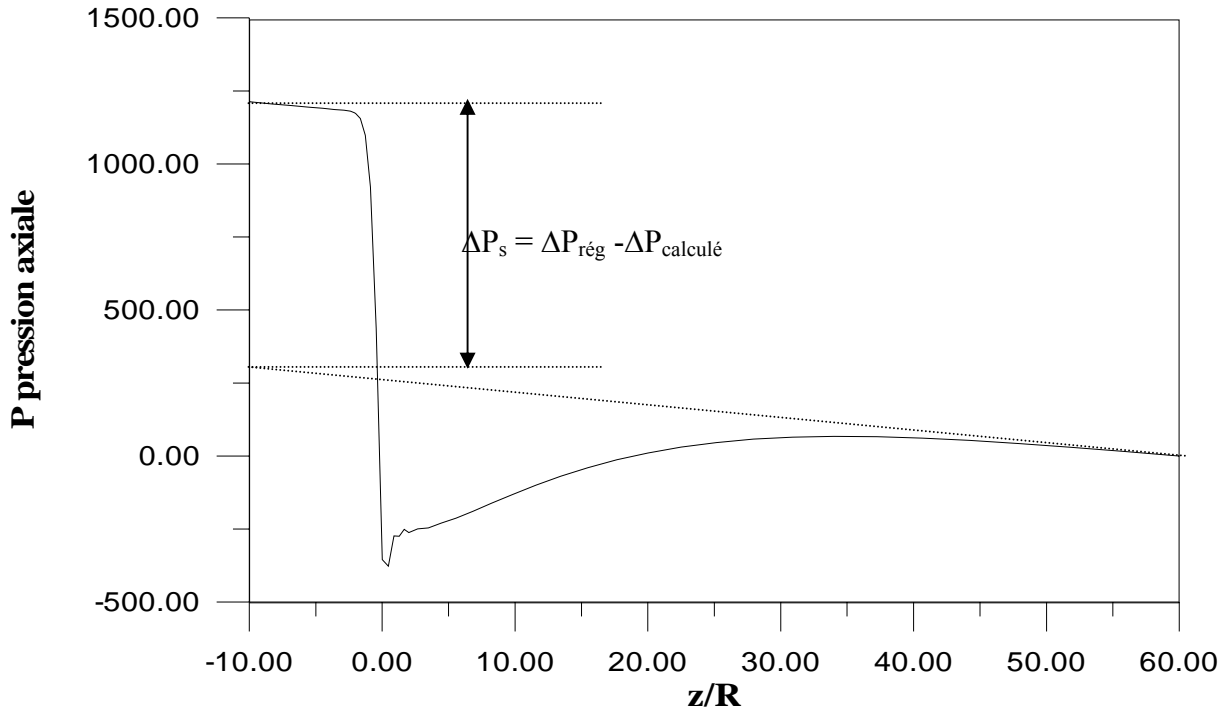


Fig.4.18. Evolution de la pression axiale sur l'axe de la conduite sténosé pour un  $St = 75\%$  et  $Re = 250$ .

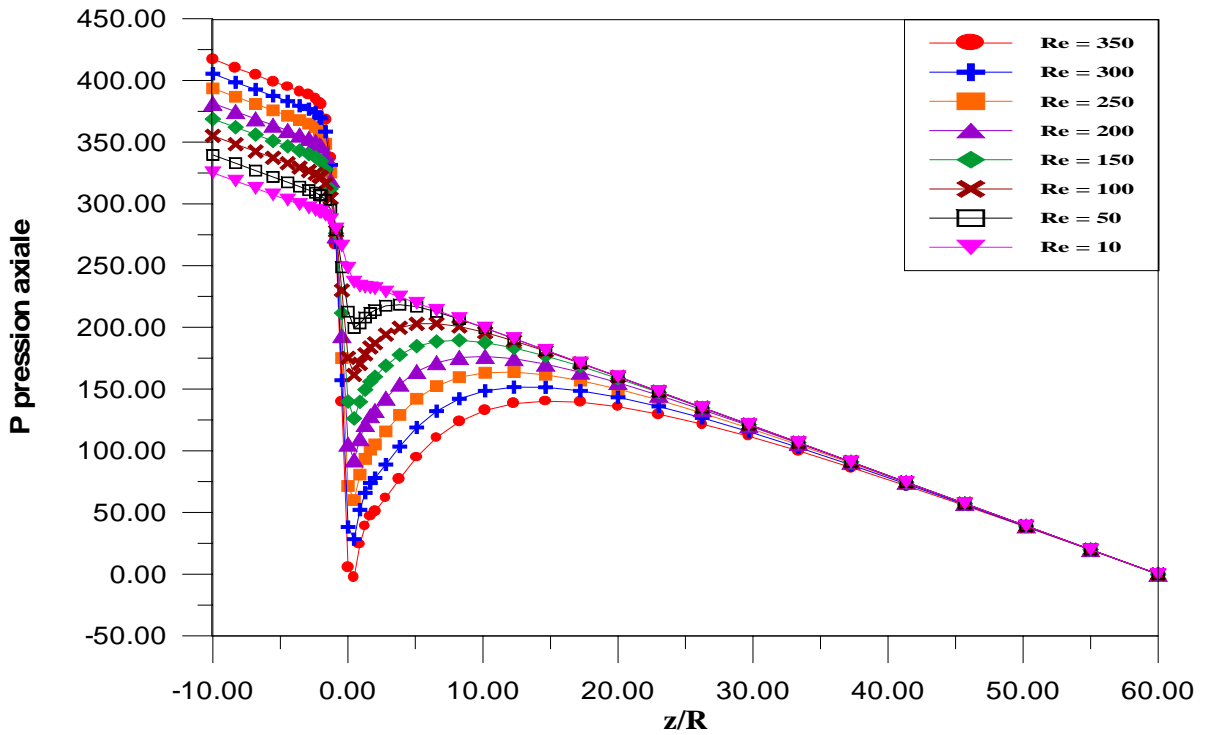


Fig.4.19. Evolution de la pression axiale le long de l'axe de symétrie pour différents nombres de Reynolds ( $St = 64\%$ ).

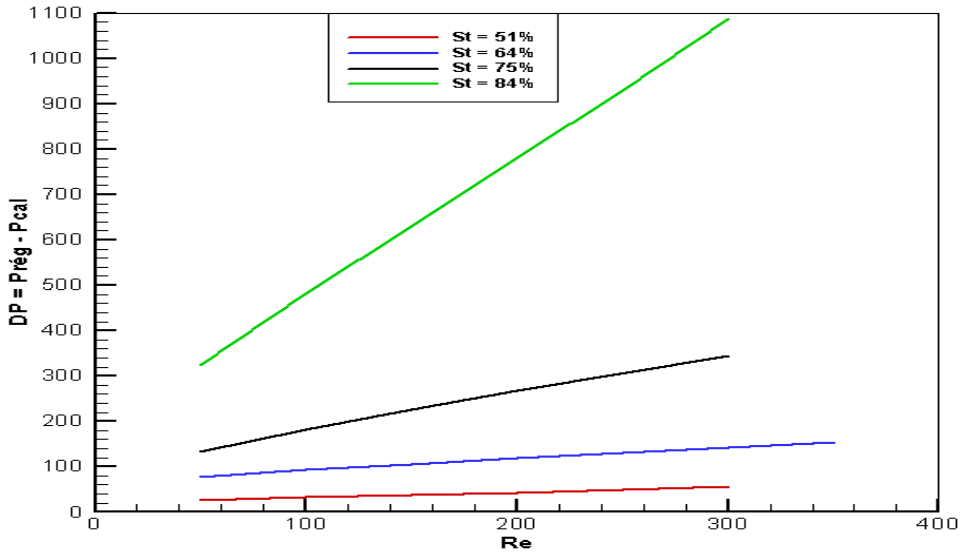


Fig.4.20. Evolution de la chute de pression en fonction du nombre de Reynolds pour différents degrés de sténose

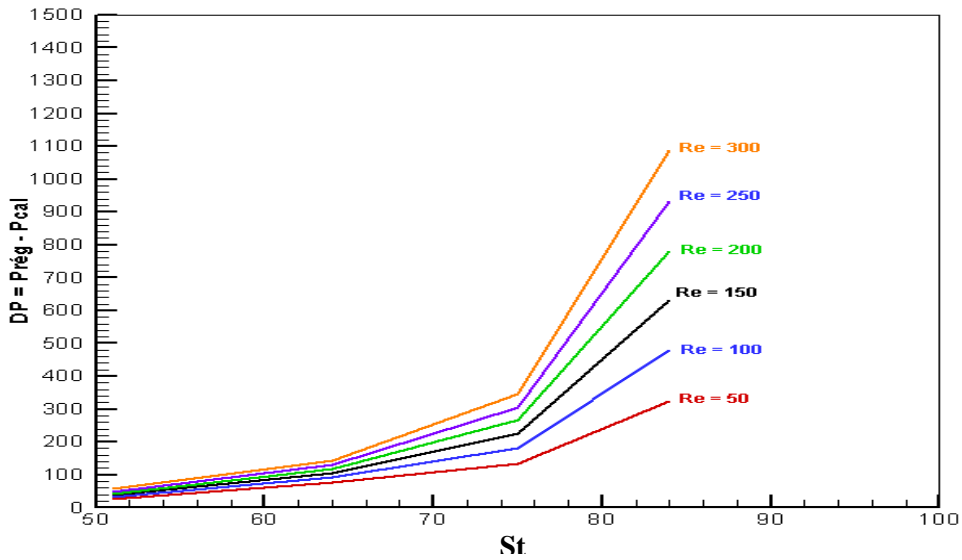


Fig.4.21. Evolution de la chute de pression en fonction du degré sténose pour différents nombres de Reynolds.

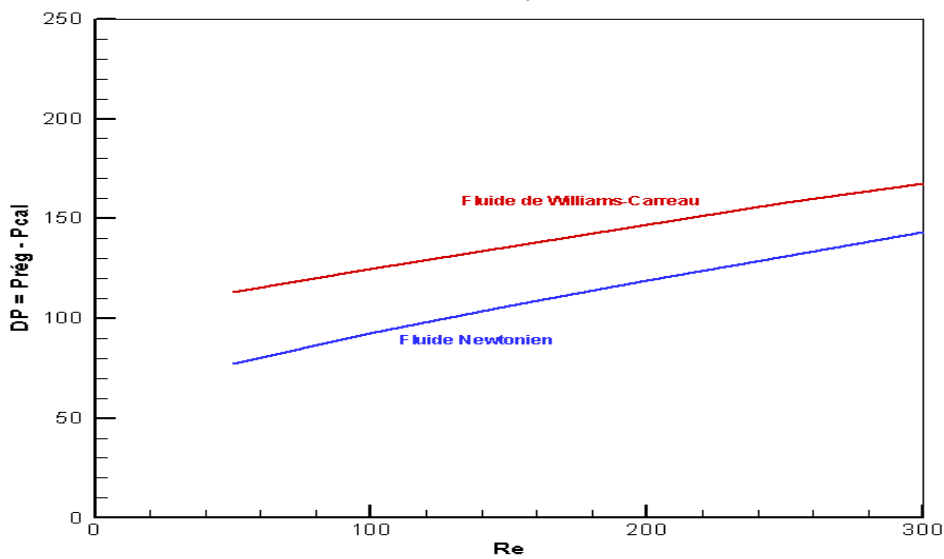


Fig.4.22. Evolution de la chute de pression en fonction du nombre de Reynolds pour un degré de sténose St = 64%.

**IV.3. Etude d'un écoulement des deux fluides à travers un anévrisme :**

**IV.3.1. Position du problème et modèle mathématique :**

Dans cette deuxième partie de notre étude, nous allons effectuer une étude numérique du problème de l'écoulement laminaire en conduite cylindrique à travers quatre diamètres relatifs d'anévrisme  $\chi = R_{anv} / R_{amo}$  (tableau.4.3.). La configuration de la géométrie est donnée par cette expression [5, 75]:

$$r(z) = \begin{cases} 1 + \frac{d}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi z}{\theta} + \pi \right) \right) & \text{si } -\theta < z < \theta \\ 1 & \text{si } z < -\theta \text{ et } z > \theta \end{cases} \quad (4.7)$$

et par cette figure :

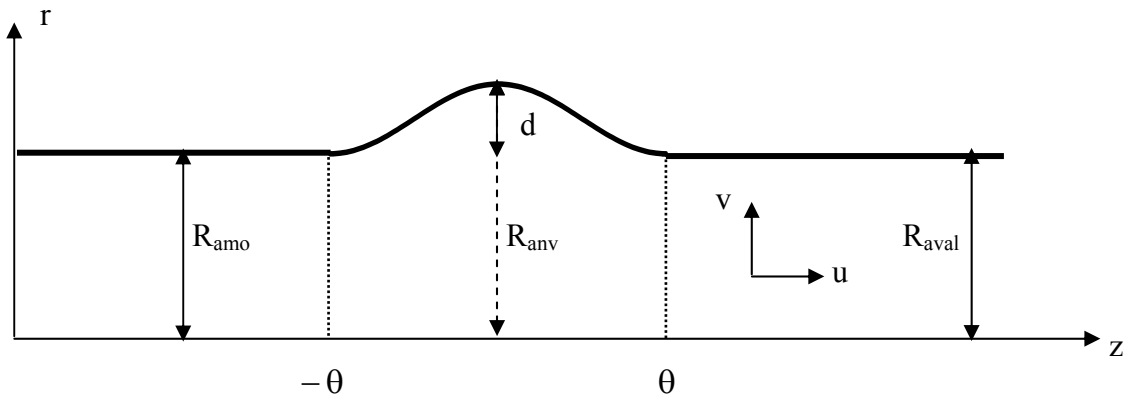


Fig.4.23. Type de géométrie de l'anévrisme.

L'analyse numérique a été effectuée sur les modèles suivants :

Modèle	Rapport d'anévrisme $\chi = R_{anv} / R_{amo}$
$M_1$	1.6
$M_2$	1.5
$M_3$	1.4
$M_4$	1.3

Tableau. 4.3. Différents rayons relatifs d'anévrisme.

L'écoulement laminaire à travers une conduite cylindrique contenant un anévrisme est présenté par les équations de Navier-Stokes (4-3) avec les mêmes conditions aux limites (4-5).

### **IV.3.2. Profil du champ de vitesse :**

#### **IV.3.2.1. Influence du nombre de Reynolds :**

Pour un écoulement d'un fluide Newtonien à travers un anévrisme (Fig.4.24), nous remarquons que le long de l'axe de symétrie la vitesse axiale a tendance à diminuer au niveau de l'anévrisme jusqu'à une valeur minimale (au pic de l'anévrisme). Ce résultat est prévisible vu que le débit est constant le long de la conduite et que la section s'accroît jusqu'au pic de l'anévrisme. Cette valeur minimale de la vitesse au pic augmente dans le même sens que le nombre de Reynolds.

Afin d'examiner l'évolution de la vitesse axiale en fonction du rayon  $r/R$  pour différents nombres de Reynolds, nous traçons les profils des vitesses au pic de l'anévrisme (Fig.4.25) et à la sortie de l'anévrisme (Fig.4.26.) pour le modèle M1.

La Fig.4.25. montre l'apparition des valeurs négatives de la vitesse axiale au centre de l'anévrisme. Elles se traduisent par la génération de zones de recirculation dans la poche l'anévrisme et nous constatons aussi, d'après cette figure, que ces zones de recirculation sont en accroissement avec le nombre de Reynolds. A l'extrémité avale de l'anévrisme (Fig.4.26.) le profil de la vitesse axiale est parabolique sans présences de valeur négative reflétant ainsi la disparition des zones de recirculation à la sortie de l'anévrisme.

#### **IV.3.2.2 Influence du rapport d'anévrisme :**

La figure (Fig.4.28), montre les profils de la vitesse axiale passant par l'axe de la conduite à différentes valeurs du rapport  $\chi$  et un nombre de Reynolds égale à 300. On constate l'apparition des zones tourbillonnaires au niveau de l'anévrisme et leur l'étendue est d'autant plus importante que  $\chi$  est élevé.

Pour ce qui est de la vitesse au centre, elle est constante pour toutes les valeurs de  $\chi$ , un résultat analogue est obtenu pour un fluide de Casson en imposant le même débit [71].

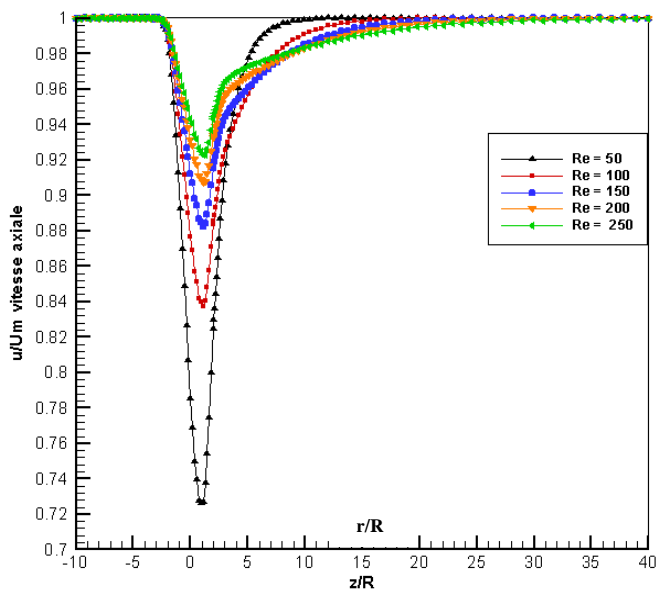


Fig.4.24. Profil de la vitesse axiale le long de l'axe de symétrie pour différents nombres de Reynolds (Modèle M2).

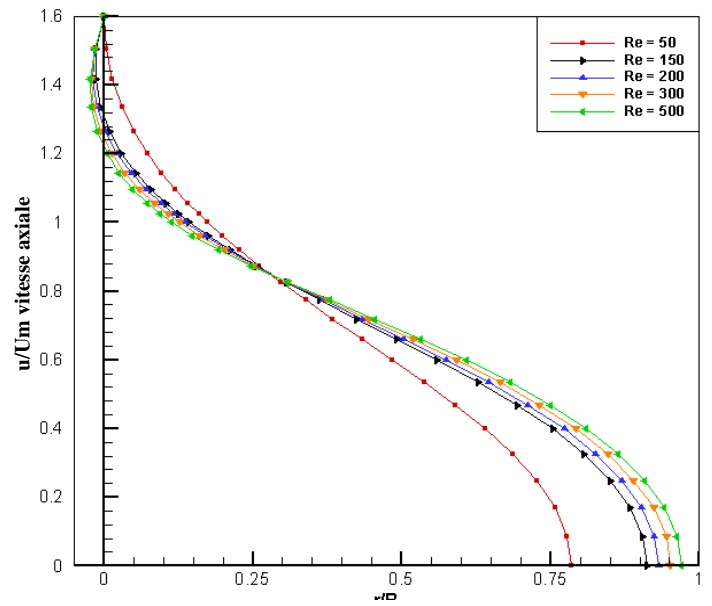


Fig.4.25. Profil de la vitesse axiale pour modèle M1 à différents nombres Reynolds (Pic de l'anévrisme).

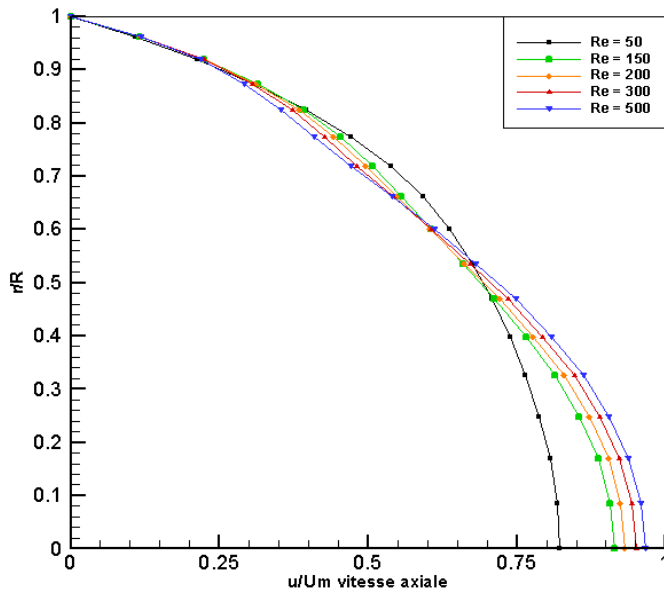


Fig.4.26. Profil de la vitesse axiale pour modèle M1 à différents nombres Reynolds (Sortie de l'anévrisme).

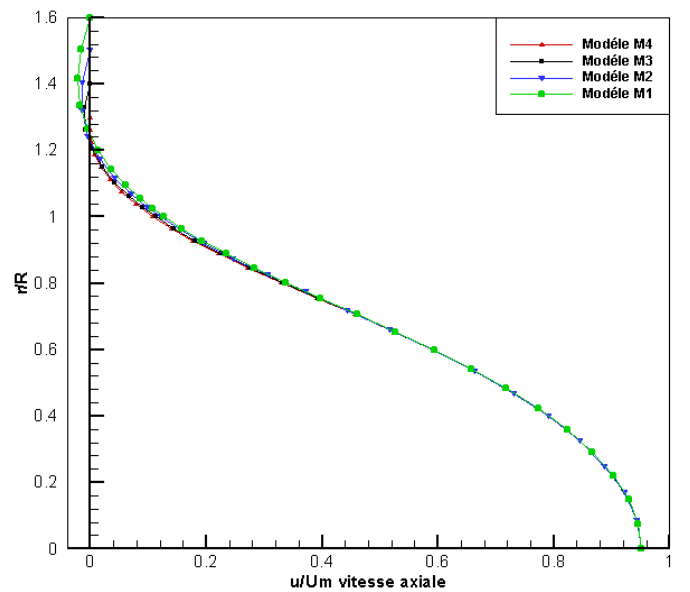


Fig.4.28. Profil de la vitesse axiale pour différents modèles d'anévrismes à Re = 300.

### IV.3.2.3. Comparaison entre les deux fluides :

Pour observer l'effet de la viscosité sur la structure de l'écoulement, nous traçons le profil de la vitesse axiale pour les deux fluides au centre de l'anévrisme (Fig.4.32.). D'après cette figure nous remarquons que la valeur de la vitesse axiale sur l'axe de symétrie pour le fluide Newtonien est supérieure que pour un fluide de Williams-Carreau.

Afin de corroborer l'effet non linéaire de la viscosité du fluide sanguin sur l'écoulement, comme vue sur la sténose, nous traçons les lignes de courant de l'écoulement des deux fluides à travers un rapport d'anévrisme  $\chi = 1.5$  et à un  $Re = 500.0$ .

L'aspect des lignes de courant représentées sur la Fig.4.33 témoigne de l'importance des zones tourbillonnaires pour un fluide Newtonien. Comme vu précédemment, l'effet de la viscosité a tendance à absorber les zones de recirculation vu que le fluide de Williams-Carreau est plus visqueux que le fluide Newtonien.

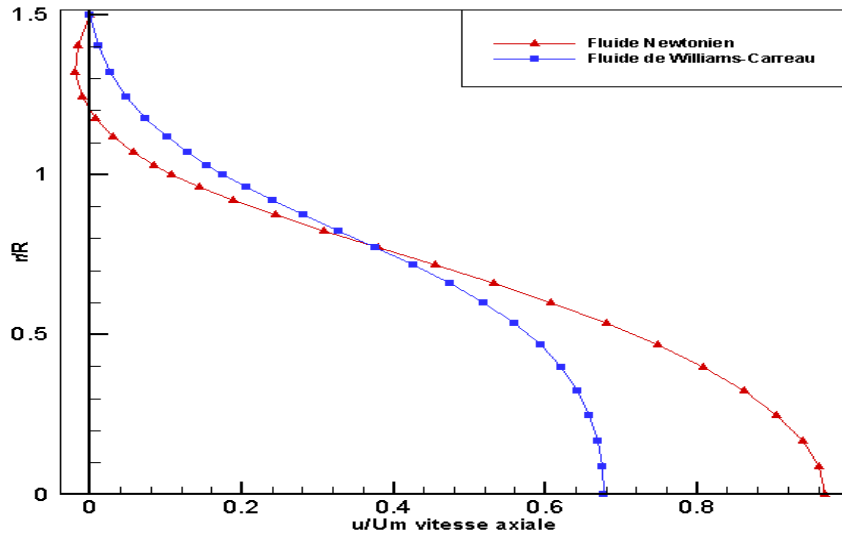


Fig.4.32. Profil de la vitesse axiale pour un écoulement des deux fluides au centre de l'anévrisme pour un modèle M2 et à  $Re = 500$ .

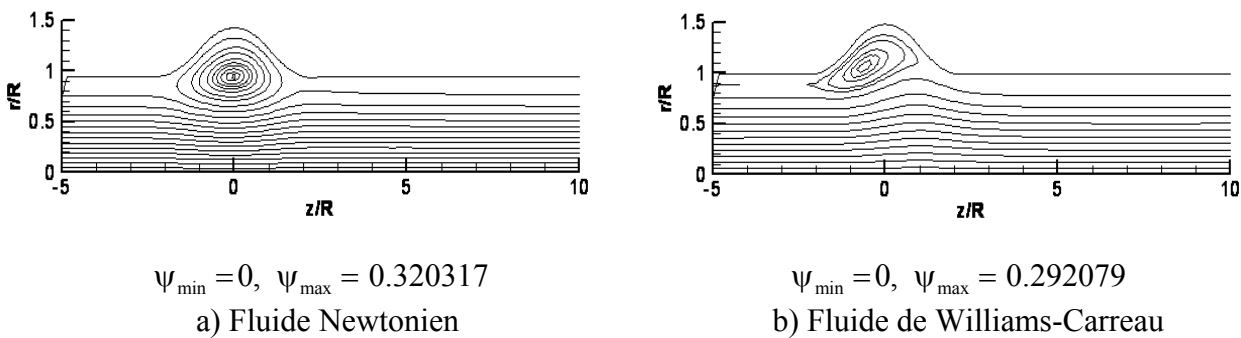


Fig.4.33. Les lignes de courant pour un écoulement des deux fluides un travers un anévrisme (modèle M2) et à  $Re = 500$ .

### IV.3.3. Evolution de la contrainte pariétale :

La contrainte de cisaillement à la paroi est une grandeur physique importante dans l'étude des écoulements à travers des configurations complexes, pour cela nous traçons cette grandeur en fonction de l'axe de symétrie  $z^*=z/R$  pour un rapport d'anévrisme  $\chi = 1.5$  et à un nombre de Reynolds  $Re = 1000$  (Fig.4.34).

A partir de cette figure nous distinguons 5 zones :

- a) La contrainte pariétale diminue passe par zéro et devient négative. Le passage par zéro de la contrainte pariétale traduit un décollement du fluide à la paroi.
- b) La contrainte pariétale augmente légèrement mais reste négative ; ce qui correspond à un écoulement de retour de très faible intensité.
- c) La contrainte pariétale diminue de façon très sensible ; ce qui correspond à l'extrémité aval de la zone tourbillonnaire.
- d) Nous quittons la zone tourbillonnaire pour aller vers le point de recollement où la contrainte pariétale passe par le zéro.
- e) A partir de ce dernier, la contrainte pariétale passe par un maximum pour tendre asymptotiquement vers la valeur initiale.

Afin de d'évaluer l'influence du nombre de Reynolds sur la contrainte pariétale nous traçons cette grandeur pour différents nombres de Reynolds (Fig.4.35). Comme prévu précédemment, on remarque qu'en augmentant les forces d'inertie on a l'accroissement des contraintes de cisaillement à la paroi. Sur la figure, on constate que ces accroissements font allonger la longueur de recollement vers l'aval de la conduite. Nos résultats s'accordent avec les résultats publiés dans [46] et [59].

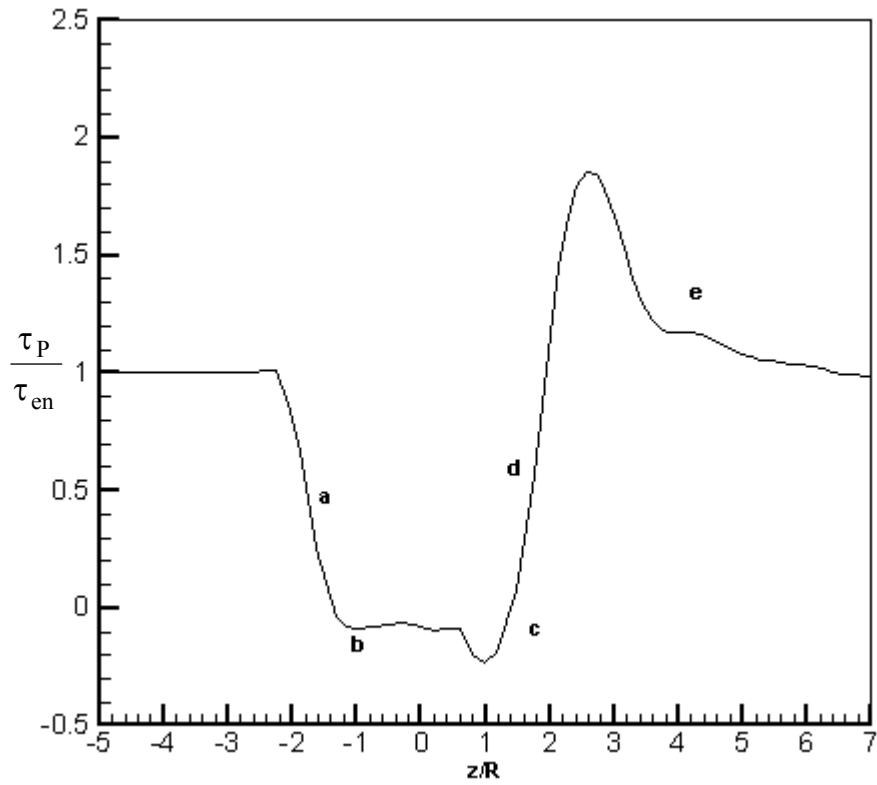


Fig.4.34. Evolution longitudinale de la contrainte de cisaillement pariétale à travers un anévrisme  $\chi = 1.5$  et à un nombre de Reynolds  $Re = 1000$ .

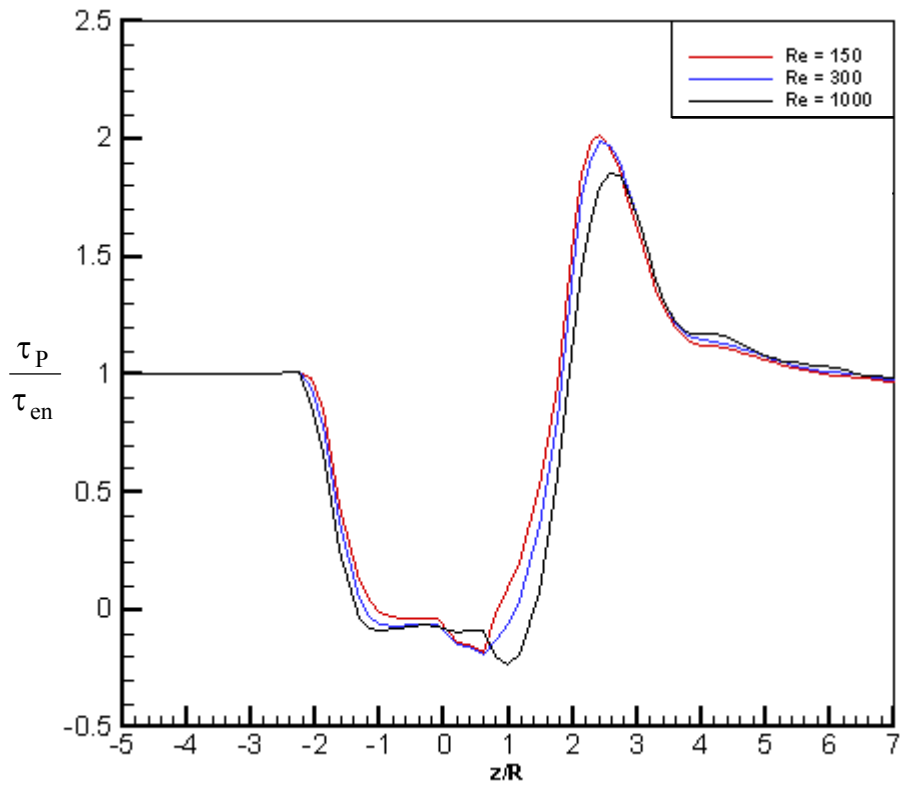


Fig.4.35. Evolution longitudinale de la contrainte de cisaillement pariétale à travers un anévrisme  $\chi = 1.5$  et à différents nombres de Reynolds.

#### IV.3.4. Profil de la perte de charge singulière :

La Fig.4.36. représente les chutes de pression sur l'axe de symétrie d'un anévrisme pour un fluide Newtonien et pour différentes valeurs de Reynolds. Chaque profil comporte 3 parties, 2 parties linéaires avec une pente constante qui correspond à l'écoulement développé et une partie intermédiaire, une intensification marquée de la chute de pression due à l'anévrisme. Cette perte de charge singulière est très petite devant celle engendrée par la sténose. Contrairement à la sténose, l'anévrisme se termine par un convergent. Ce dernier tend à égaliser les vitesses, et la perte de charge dans ce cas là est très petite.

D'ailleurs si nous traçons la perte de charge singulière pour des rapports d'anévrismes donnés (Fig.4.37) en fonction du nombre de Reynolds nous observons deux faits. Le premier est le fait d'augmenter le rapport d'anévrisme cela impliquera l'accroissement de la perte de charge singulière. Mais cet accroissement de la perte de charge singulière au niveau de l'anévrisme est de très faible valeur par rapport à une sténose. La deuxième observation c'est par rapport à l'influence du nombre de Reynolds. Cette influence est dans le sens inverse par rapport à celle impliqué sur la sténose, dans cette figure nous remarquons que les effets d'inertie font diminué les pertes de charges avec une évolution non linéaire. Au début nous avons une diminution rapide mais au delà de  $Re = 250$  ce changement n'est pas important.

Cependant, l'effet de la viscosité reste le même. Pour un rapport d'anévrisme  $\chi = 1.5$  nous confirmons que les pertes de charges singulières pour un fluide non Newtonien sont fortement plus supérieures qu'un fluide Newtonien.

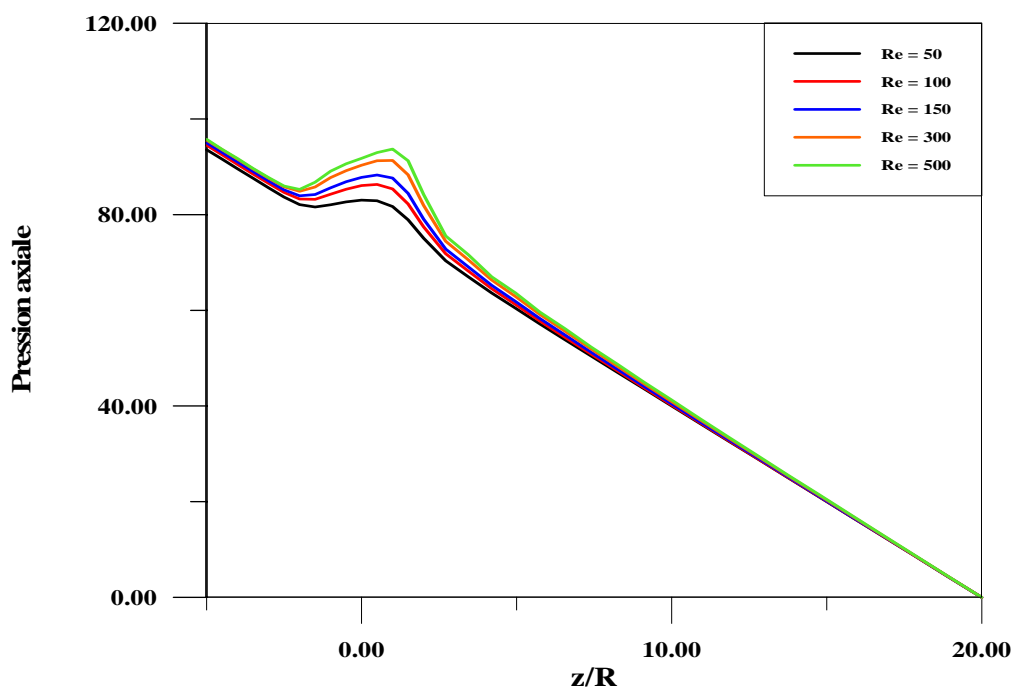


Fig.4.36. Evolution longitudinale de la chute de pression dans un anévrisme (modèle M2), pour un fluide Newtonien et pour différents nombres de Reynolds.

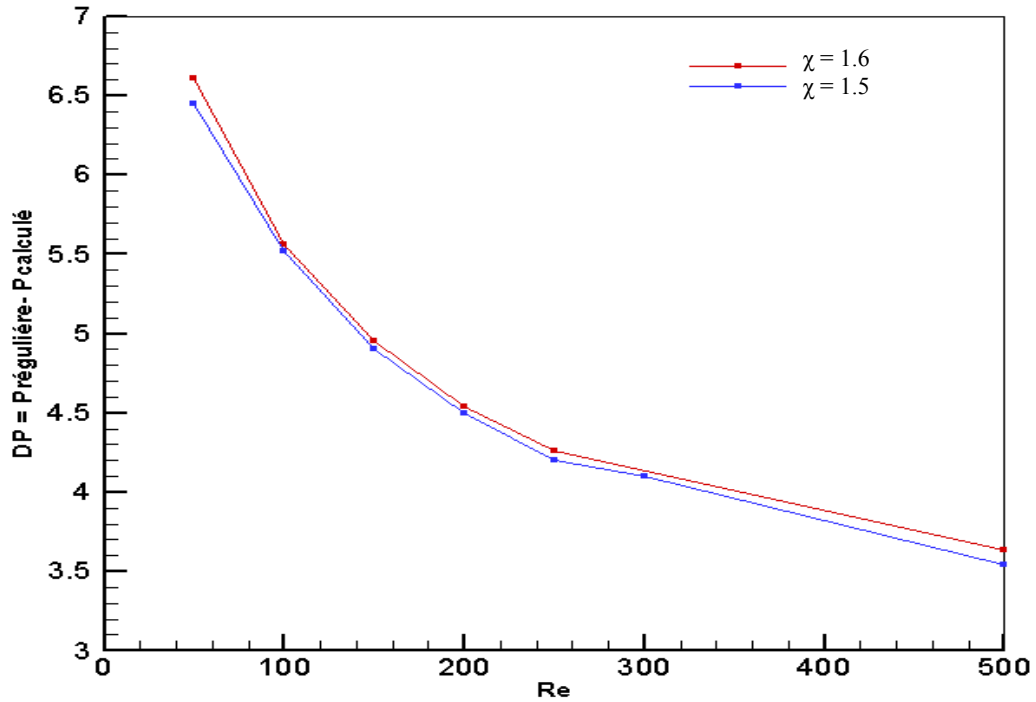


Fig.4.37. Evolution de la perte de charge singulière en fonction du nombre de Reynolds à travers différents modèles d'anévrisme.

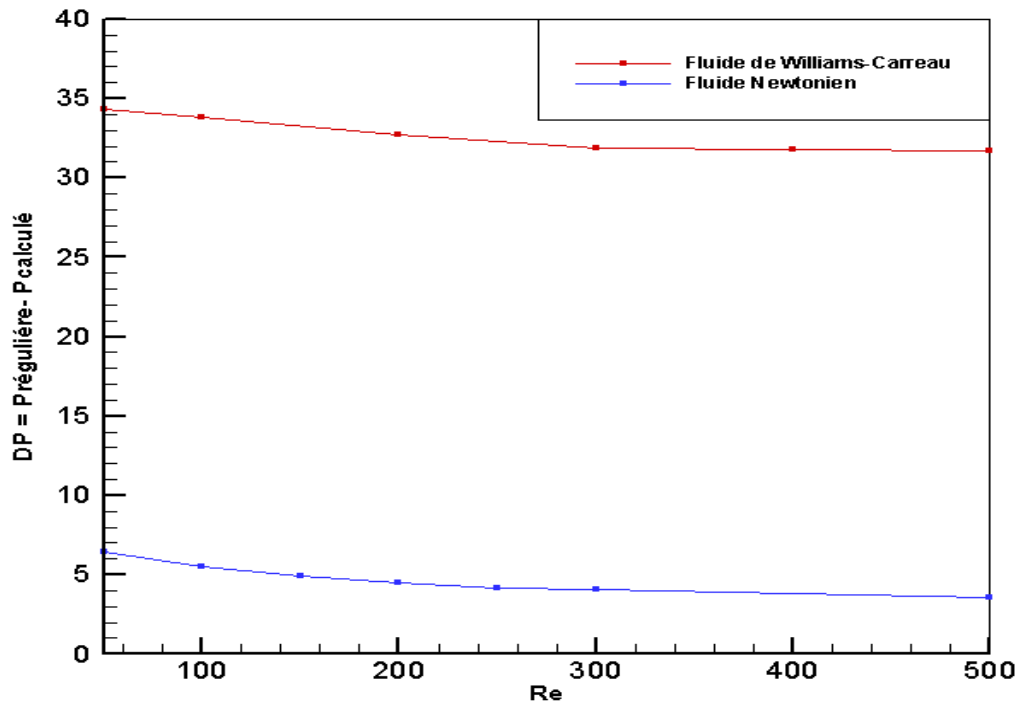


Fig4.38. Evolution de la chute de pression sur l'axe de la conduite pour les deux comportements rhéologiques.

#### **IV.4. Conclusion :**

Dans cette partie de notre étude, nous avons examiné les modifications du champ dynamique de l'écoulement permanent d'un fluide Newtonien et d'un fluide sanguin à travers deux types de singularités complexes qui sont la sténose et l'anévrisme.

En premier lieu, nous avons analysé l'écoulement laminaire d'un fluide Newtonien et d'un fluide sanguin, conformément à la loi de comportement de Williams-Carreau, à travers différentes longueurs et degrés de sténose.

Nous avons observé que quelque soit le comportement rhéologique du fluide lorsque le nombre de Reynolds augmente la vitesse axiale sur l'axe de symétrie augmente et également la taille de la zone de recirculation, les longueurs d'établissement et de recollement et la perte de charge singulière deviennent plus importantes. En plus, l'évolution de la longueur de recollement et la perte de charge singulière semblent suivre des relations linéaires.

Nous avons observé que les forces visqueuses ont tendance à diminuer la valeur de la vitesse maximale sur l'axe de la conduite rendant ainsi la taille des zones de recirculation plus importante et l'éloignement du point de recollement vers l'aval de la sténose dans le cas du fluide Newtonien.

Nous avons également étudié l'écoulement permanent dans un anévrisme avec une enveloppe sinusoïdale pour un fluide ayant des propriétés Newtonienne ou non Newtonienne. Les lignes de courant de l'écoulement laminaire montrent qu'un écoulement de fluide passe directement à travers l'anévrisme et il est entouré par une zone tourbillonnaire.

En ce qui concerne la contrainte pariétale, il existe deux extremums qui varient avec le nombre de Reynolds et le rapport d'anévrisme. Le premier est dans la zone de recirculation juste avant le point de recollement et le deuxième se trouve après le point de recollement sur le point terminal de la déformation.

Comme pour la sténose, le nombre de Reynolds et le rapport d'anévrisme ont le même effet sur l'évolution de la vitesse axiale et sur la contrainte de cisaillement pariétale.

**CHAPITRE V :**

**ÉCOULEMENT PULSÉ D'UN FLUIDE  
SANGUIN À TRAVERS UNE STENOSE**

### V.1. Introduction

Lorsque l'écoulement n'est pas permanent, la présence de la variable temps dans les équations de la dynamique complique beaucoup leur résolution.

L'étude d'un tel écoulement a été abordée par plusieurs auteurs, mais les résultats les plus significatifs ont été apportés par Womersley (1955) et Uchida (1956).

Les expériences de McDonald et Helps (McDonald, 1952, 1955 ; Helps & McDonald, 1953) ont montré que dans les grosses artères de lapin et de chien, il y a un retournement de l'écoulement. La mesure du gradient de pression (Helps & McDonald, 1953) a montré un déphasage entre le gradient de pression et l'écoulement analogue à celui entre le voltage et le courant dans le courant alternatif. Womersley a montré analytiquement l'existence de ce déphasage dans un écoulement pulsé en imposant un simple gradient de pression sous une forme harmonique.

### V.2. Écoulement oscillatoire d'un fluide newtonien à travers une conduite cylindrique :

Soit un tube cylindrique parcouru par un fluide newtonien incompressible. Les équations régissant l'écoulement développé, s'écrivent de la manière suivante :

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (5-1a)$$

L'équation de quantité de mouvement suivant z :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (5-1b)$$

L'équation de quantité de mouvement suivant r :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (5-1c)$$

Dans ce cas la, les lignes de courants sont des droites parallèles à l'axe du cylindre, d'où  $v=0$ .

Pour l'étude de l'écoulement pulsé, le mouvement est créé par une différence de pression exercée le long du cylindre. Ce qui revient à créer un gradient de pression  $\frac{\partial P}{\partial z}$  en fonction périodique du temps, on peut écrire ce gradient de la manière suivante :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = a + b \cos \omega t + c \sin \omega t = a + A e^{i\omega t} \quad (5-2)$$

Le premier terme du troisième membre correspond à l'écoulement de Poiseuille : écoulement permanent sous gradient de pression constante  $a$ .

Le deuxième terme correspond à une solution périodique de vitesse débitante moyenne nulle. C'est cette partie du gradient de pression qui nous intéressera et que nous étudierons.

Si on prend

$$r = \frac{r}{R}, \quad u = Ue^{i\omega t} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = Ae^{i\omega t}$$

on aura :

$$(5-1b) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - i\alpha^2 U = -\frac{AR^2}{\mu} \quad (5-3)$$

Tel que :

$U$  est la vitesse axiale qui n'est que fonction de  $r$ .

$\alpha = R\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$  est le nombre de Womersley.

Où :  $\omega = 2\pi f$  ( $f$  fréquence)

Le nombre de Womersley définit le rapport des forces d'inerties liées à l'accélération locale aux forces visqueuses qui déterminent le mouvement par une échelle de temps égale à la période d'oscillation

D'après les travaux de Womersley sur l'écoulement pulsé, la solution de l'équation différentielle (5-3) est sous la suivante forme de fonction de Bessel :

$$U = \frac{AR^2}{\mu} \frac{1}{i\alpha^2} \left\{ 1 - \frac{J_0(\alpha i^{3/2} r)}{J_0(\alpha i^{3/2})} \right\} \quad (5-4)$$

d'où :

$$u = \frac{AR^2}{\mu} \frac{1}{i\alpha^2} \left\{ 1 - \frac{J_0(\alpha i^{3/2} r)}{J_0(\alpha i^{3/2})} \right\} e^{i\omega t} \quad (5-5)$$

où  $J_0(\alpha i^{3/2})$  est une fonction de Bessel à l'ordre zéro.

La solution de cette équation a une forme complexe, on écrit le terme entre crochet de cette dernière équation sous la forme :

$$1 - \frac{J_0(\alpha i^{3/2} r)}{J_0(\alpha i^{3/2})} = 1 - h_0 e^{-j\delta_0} = M'_0 e^{j\varepsilon_0} \quad (5-6)$$

où :

$$\operatorname{tg} \varepsilon_0 = \frac{h_0 \sin \delta_0}{1 - h_0 \cos \delta_0}, \quad M'_0 = \sqrt{1 + h_0^2 - 2 h_0 \cos \delta_0} \quad (5-7)$$

Les paramètres  $h_0$ ,  $\delta_0$ ,  $\varepsilon_0$  et  $M'_0$  sont fonction de  $\alpha$  et de  $r$ , qui sont données par des tableaux.

Le déphasage entre la vitesse et la pression est donné par :  $\operatorname{tg} \varepsilon_0 = \frac{h_0 \sin \delta_0}{1 - h_0 \cos \delta_0}$ .

### **V.3. Ecoulement pulsé d'un fluide sanguin à travers une sténose :**

D'après les résultats expérimentaux de McDonald (1954) et Womersley (1955), le gradient de pression du sang dans une artère n'est pas constitué d'une simple forme sinusoïdale avec un seul harmonique, mais contient plusieurs harmoniques. D'après les expériences de Womersley (1954) sur l'artère d'un chien, et en utilisant la série de Fourier en quatre harmoniques, on peut écrire le gradient de pression sous la forme suivant :

$$-\frac{\partial P}{\partial Z} = 2,113 + 10,286 \cos(\omega t + 0^\circ 39') + 17,5022 \cos(2\omega t - 82^\circ 45') \\ - 9,874 \cos(3\omega t + 26^\circ 30') - 5,502 \cos(4\omega t - 16^\circ 39') \quad (5-8)$$

Où les coefficients sont en kPa/m et  $\omega$  est la fréquence de pulsation.

Le débit se présente sous la forme suivante [54] :

$$Q = 1,050 + 2,407 \sin(\omega t + 31^\circ 38') + 2,324 \sin(2\omega t - 62^\circ 48') \\ - 0,914 \sin(3\omega t + 42^\circ 19') - 3,98 \sin(4\omega t - 4^\circ 42') \quad (5-9)$$

Pour l'étude de l'écoulement pulsé nous avons imposé ce gradient de pression (5-8) comme condition d'entrée dans la conduite sténosée avec une fréquence  $f=1\text{HZ}$  (Fig.5.1)

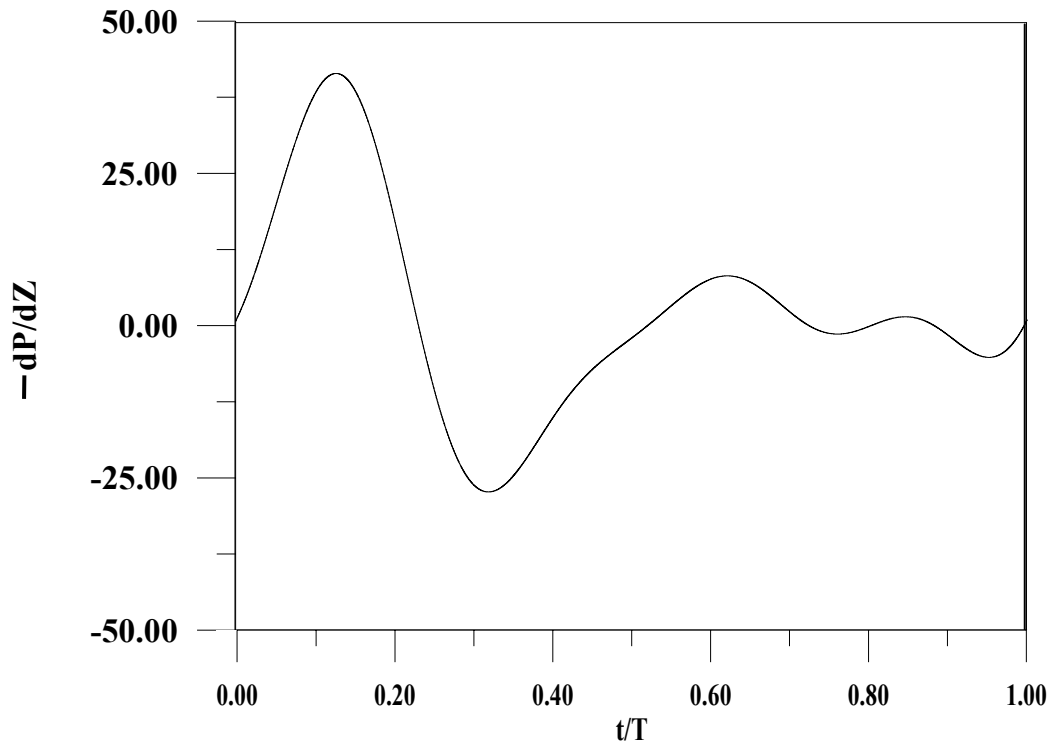


Fig.5.1. Profil de gradient de pression en fonction du temps.

En ce qui concerne le modèle mathématique et la position du problème, nous considérons les équations (3-16) et le domaine d'étude présenté au paragraphe IV.2.1.

Pour la résolution numérique nous allons employer la même méthode des éléments finis type formulation mixte (u, v, p) employé précédemment, avec des éléments triangulaires à 6 nœuds pour mailler la conduite ; l'approximation sera quadratique pour la vitesse et linéaire pour la pression. En ce qui concerne l'algorithme transitoire, nous allons utiliser la méthode implicite avec un pas de temps uniforme.

### V.3.1. Evolution de la vitesse axiale :

Pour un nombre de Womersley  $\alpha = 4$ , nous traçons dans la Fig.5.2. Les évolutions de la vitesse axiale en fonction de l'ordonnée adimensionnelle  $r/R$  et pour huit différents instants dans une période (à  $S_t = 84\%$ ).

A l'entrée et à la sortie de la sténose (Fig.5.2.a. et Fig.5.2.c.), nous observons que l'évolution de la vitesse axiale possède deux profils, un dont les valeurs de la vitesse sont positives et l'autre dont les valeurs sont négatives. Ceci nous informe que l'évolution de la vitesse axiale suit une évolution périodique et que l'écoulement se fait dans les deux sens.

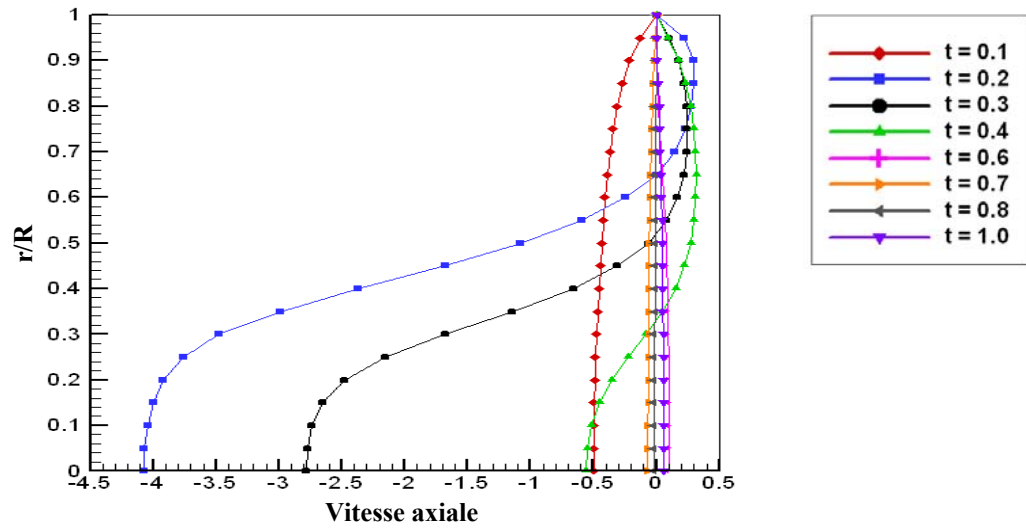
Juste à l'amont et à l'aval de la sténose nous constatons la création des zones de recirculation dans les deux sens de l'écoulement, pour les vitesses positives (Ex  $t=0.2$ ) et les vitesses négatives (Ex  $t=0.6$ ).

Contrairement aux autres sections, au centre de la sténose, nous observons des profils de vitesse bien aplatis dans les deux sens de l'écoulement avec des valeurs supérieures aux autres sections sans aucun écoulement secondaire.

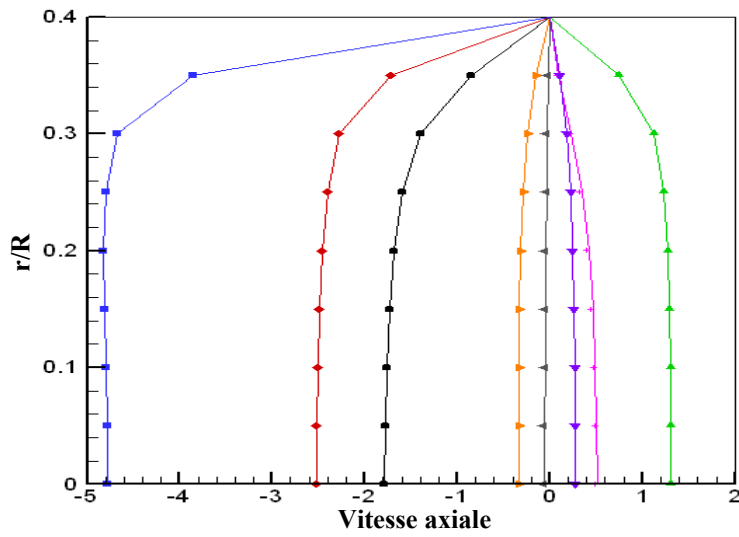
Afin de décrire ces résultats et d'observer le mouvement des zones tourbillonnaires le long d'une période, nous traçons dans la Fig5.3. les lignes de courant d'un fluide de William-Carreau à travers une sténose de  $S_t = 84\%$  et à nombre de Womersley  $\alpha = 7.5$ .

D'après les différentes figures, nous observons très nettement le déplacement des zones tourbillonnaires dans les deux sens de l'écoulement ; ces zones apparaissent au voisinage de la paroi et varient avec le changement du champ de vitesse. Si nous prenons par exemple les lignes de courants à  $t=0.42$  ; la transition de l'écoulement dans les deux sens se fait par l'apparition de deux zones de recirculation au moment du changement de sens du champ de vitesse ; une à l'amont de la sténose et l'autre à son aval.

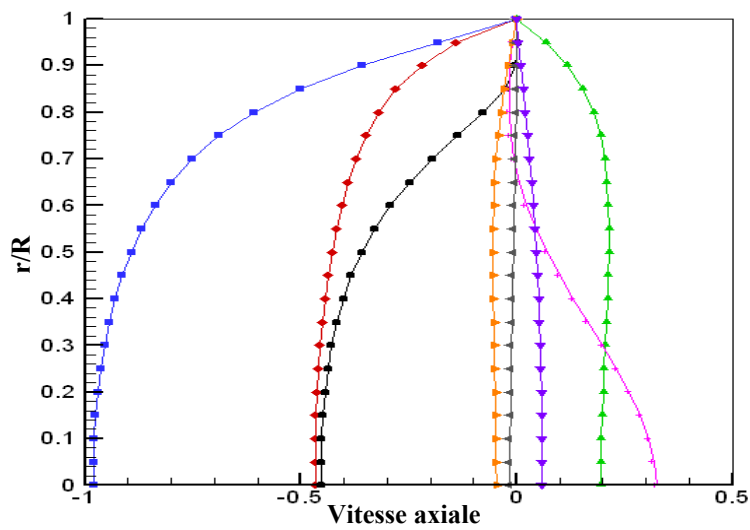
Nous constatons aussi que ces zones tourbillonnaires diminuent de taille au cours d'une période (Ex :  $t= 0.76$ ,  $t= 0.80$ ), ceci est dû aux faibles valeurs de la pression à la fin de cette période.



(a) Juste à l'entrée de la sténose



(b) Au col de la sténose



(c) Juste à la sortie de la sténose

Fig.5.2. Evolution de la vitesse axiale pour différentes sections d'une conduite sténosée à  $St = 84\%$ , pour huit différents instants dans une période.

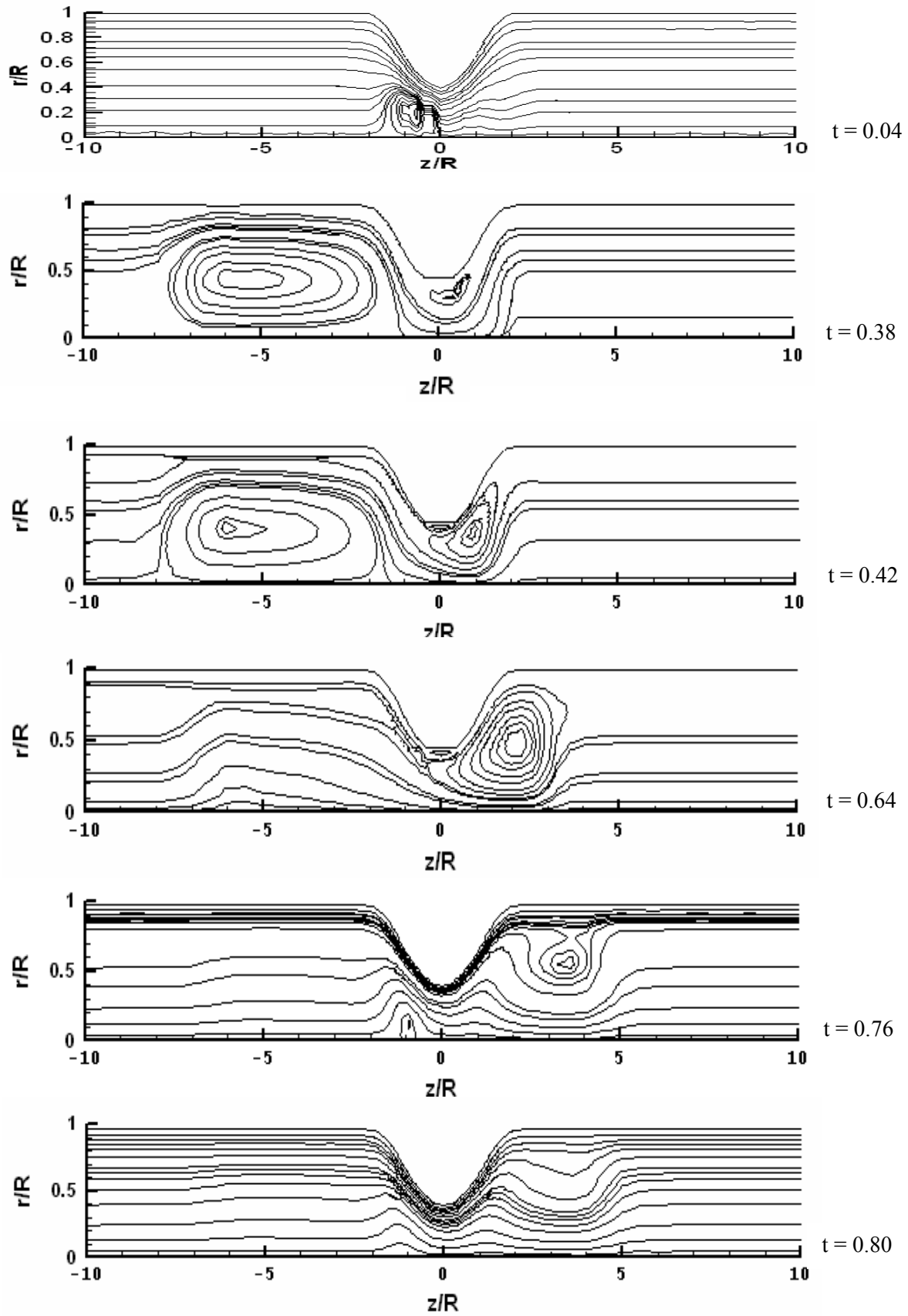


Fig.5.3. Evolution de la fonction de courant le long d'une période ( $2\pi$ ), pour un écoulement à un nombre de Womersley  $\alpha = 7.5$  et pour un degré de sténose  $St=84\%$ .

*a. Influence de la section :*

La Fig.5.4. trace les variations de vitesse axiale au cours d'une période en imposant la même chute de pression donnée par Womersley pour la fréquence 1 HZ. On observe que la vitesse augmente avec l'augmentation du degré de sténose, étant donnée que la chute de pression totale imposée dans tous les cas est la même et que la vitesse axiale augmente en augmentant  $St$  (Paragraphe IV.2.2.2.). Nous constatons aussi un déphasage entre les différentes évolutions sur la figure, ce déphasage se traduit par le fait que pour un  $St = 84\%$  la perturbation de la vitesse axiale est plus avancée dans le temps que pour un  $St=75\%$  ou  $St =64\%$ . Ce phénomène se traduit par l'influence importante du pourcentage de la sténose sur la structure d'écoulement.

*b. Influence du nombre de Womersley :*

D'après la Fig.5.5. nous observons que pour les différents nombres de Womersley le profil de la vitesse axiale demeure fluctuant. On constate aussi que l'accroissement dans la valeur du nombre de Womersley fait diminuer les maxima de la vitesse axiale et engendre une augmentation du déphasage entre les différents profils. Cet accroissement du déphasage est causé par l'augmentation des forces d'inerties instationnaires sur les forces visqueuses.

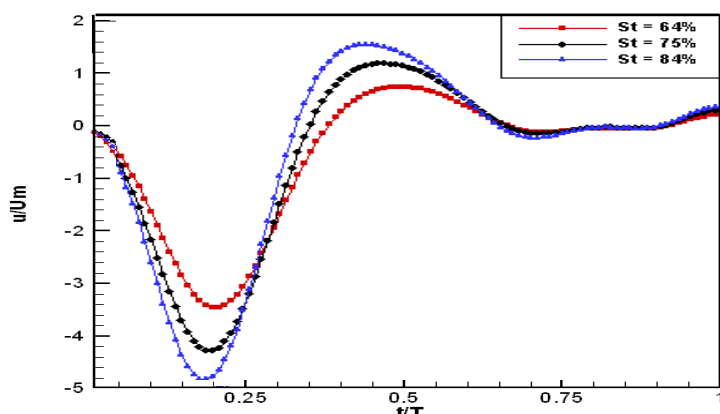


Fig.5.4. Evolution de la vitesse axiale au cours d'une période pour différents degrés de sténose pour la même chute de pression imposée à 1HZ.

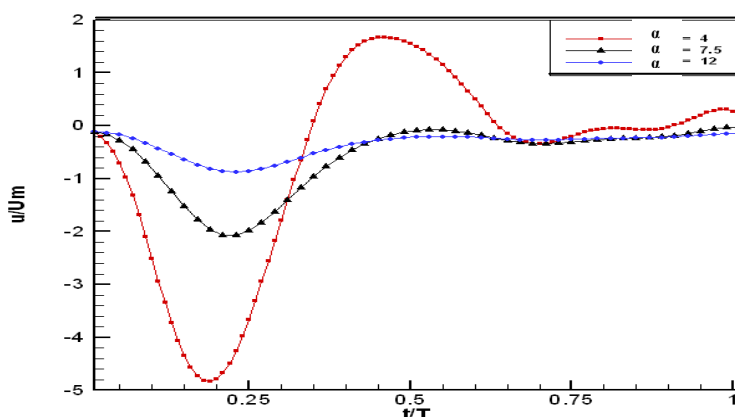


Fig.5.5. Evolution de la vitesse axiale au cours d'une période pour différents nombres de Womersley.

### V.3.3. Déphasage entre la vitesse et la pression :

Sur la Fig.5.6 on trace les évolutions de la vitesse axiale et de la pression le long de l'axe de symétrie en fonction du temps en imposant le même gradient de pression et pour différentes sections de la conduite sténosée.

Cette dernière nous montre, comme vu dans le paragraphe précédent, que le profil de la vitesse suit une évolution périodique dans le temps avec un déphasage important avec le développement de la pression. Nous remarquons que la perturbation de la vitesse axiale se fait avec un retard de  $\Delta T$  par rapport à la pression pour les différentes sections de la conduite sténosée, ceci est dû à la viscosité du fluide.

Seulement ce retard est de faible valeur au centre de la sténose. Et d'après ses résultats on constate que le retard  $\Delta T$  entre les deux évolutions, vitesse et pression, diminue à partir de l'entrée de la conduite jusqu'au col de la sténose pour ensuite s'accroître continuellement jusqu'à la sortie de la conduite sténosée.

La variation de ce déphasage temporelle dépend des paramètres et de la structure de l'écoulement (Fig.5.7) :

- ❖ En premier lieu, la Fig.5.7.a. montre que la variation du déphasage entre la pression et la vitesse, en fonction du degré de sténose suit une loi linéaire. Mais ce dernier a tendance à diminuer en augmentant le degré de sténose.
- ❖ L'évolution du déphasage en fonction du nombre de Womersley Fig.5.7.b. suit toujours une loi linéaire ; mais contrairement au précédent paramètre physique, l'augmentation du nombre de Womersley entraîne une augmentation du déphasage.

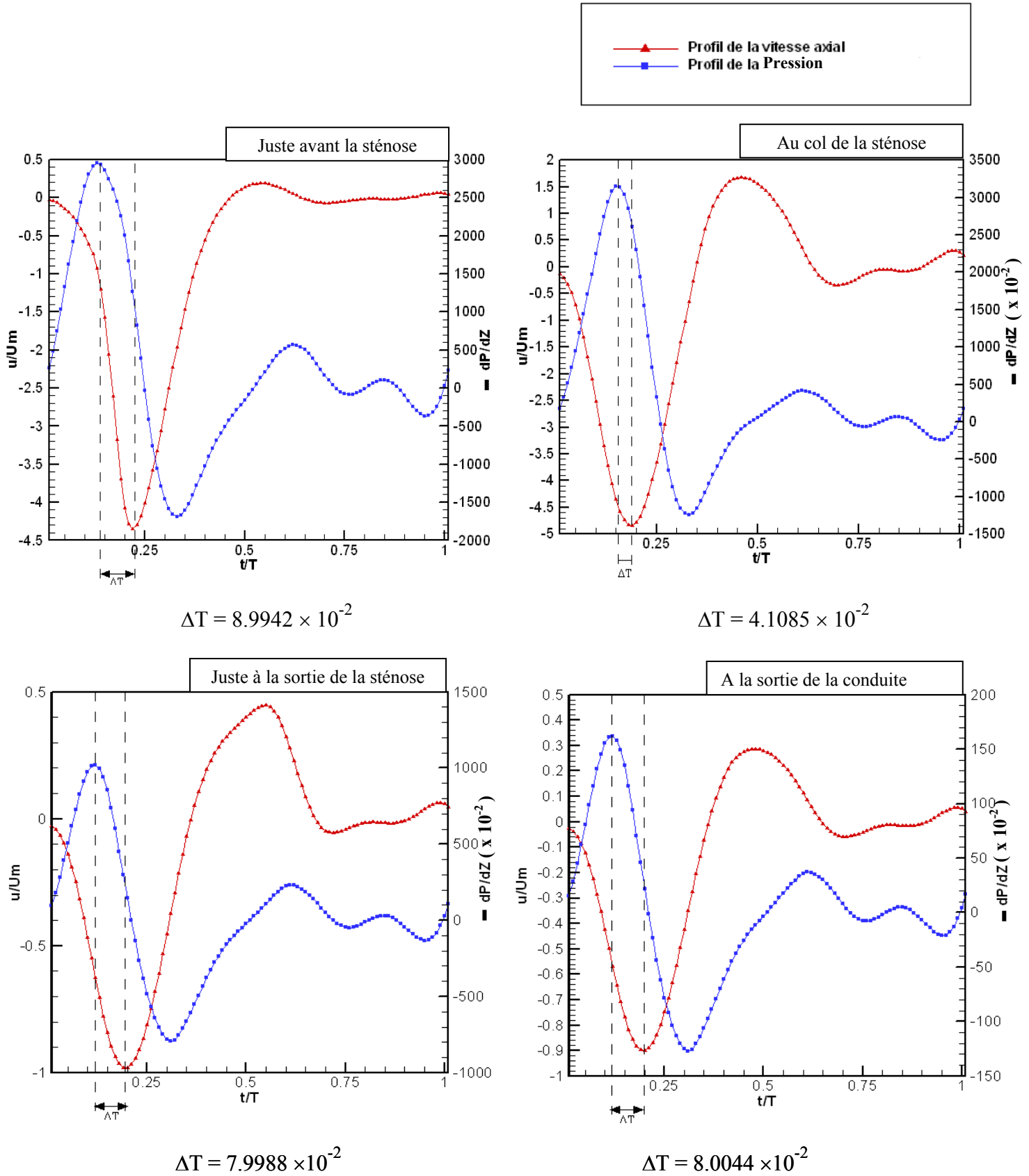
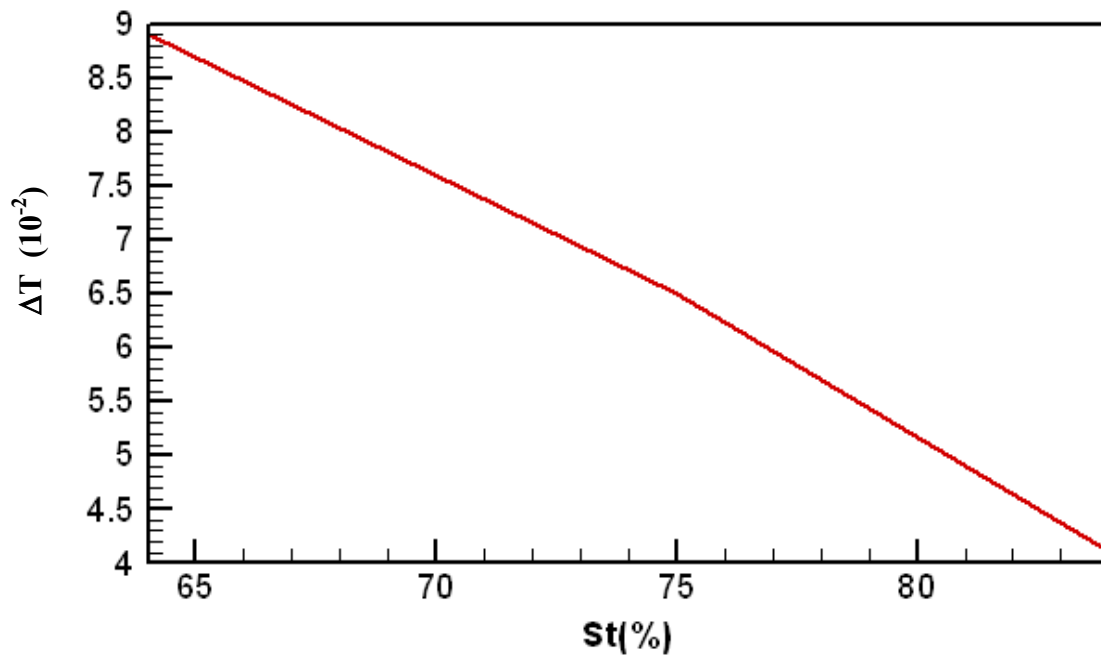
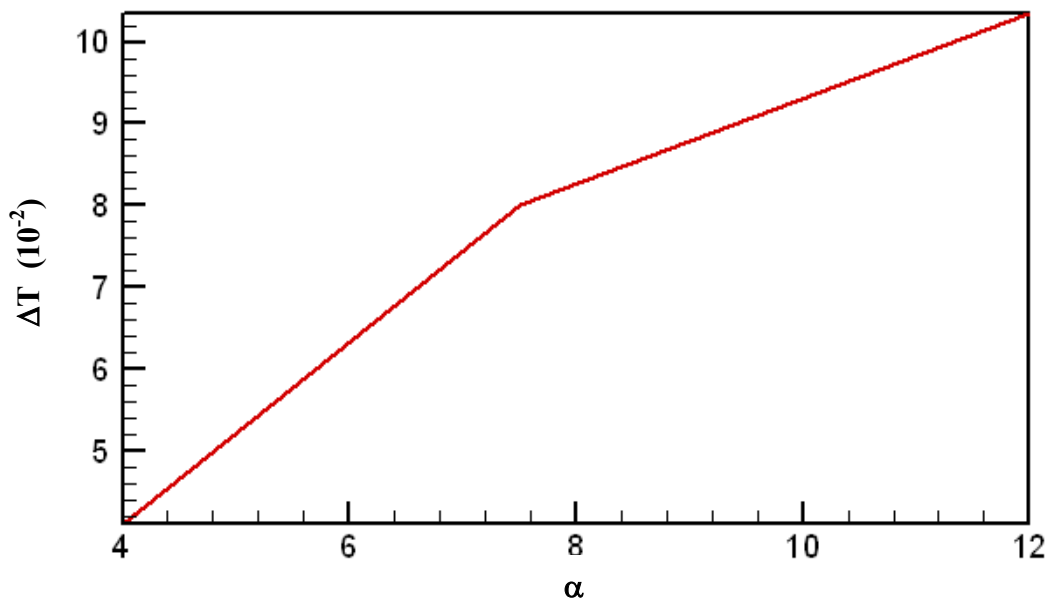


Fig.5.6. Déphasage entre la vitesse axiale et la pression à différentes sections de la conduite sténosée (St=84%) pour un écoulement à  $\alpha = 4$ .



-a-



-b-

Fig.5.7. La variation du déphasage entre la vitesse axiale et la pression en fonction :  
a) du degré de sténose et b) du nombre de Womersley.

#### **V.4. Conclusion :**

Dans ce cinquième chapitre nous avons étudié l'écoulement transitoire d'un fluide sanguin à travers une conduite cylindrique contenant une sténose soumise à un gradient de pression sinusoïdal à plusieurs harmoniques.

Le profil de la vitesse axiale le long d'une période montre une évolution périodique dans le temps avec des écoulements dans les deux sens de la conduite. La représentation de la fonction de courant à différents instants confirme que l'écoulement se fait dans les deux sens avec l'apparition de deux zones de recirculation sur les deux côtés de la sténose.

Nous constatons un déphasage qui est de faible valeur au niveau du col de la sténose entre la vitesse axiale et la pression. Ce déphasage diminue avec le degré de sténose et augmente avec le nombre de Womersley. Cependant l'évolution de ce déphasage en fonction de ces paramètres d'écoulement suit une loi linéaire.

A rectangular area with a marbled background in shades of grey and white. The text "CONCLUSION GENARALE" is centered within this area.

## **CONCLUSION GENARALE**

Dans ce travail, nous avons étudié numériquement les écoulements d'un fluide Newtonien et d'un fluide non Newtonien à travers une conduite à symétrie axiale contenant deux singularités cardio-vasculaires : Sténose et Anévrisme.

Pour cela nous avons utilisé la méthode des éléments finis type formulation mixte (u, v, p) pour la discrétisation du modèle mathématique des différents problèmes envisagés.

### ***Première partie :***

Dans cette première partie, l'étude numérique des écoulements d'un fluide Newtonien et d'un fluide rhéofluidifiant à travers une conduite circulaire a été présentée. Le comportement rhéologique du fluide non Newtonien étudié dans cette première partie est représenté par la loi de puissance d'Ostwald-De-Waele.

Pour cela, nous avons élaboré un code de calcul utilisant la méthode des éléments finis type formulation mixte. Après présentation de la méthode des éléments fins, la validation du code de calcul est confirmée en comparant les résultats numériques et théoriques de la vitesse axiale pour différents indices d'écoulements.

L'évolution des profils de vitesse et des pertes de charges singulières est fortement dépendante de l'indice de structure. Nous avons constaté que lorsque l'indice de structure diminue, la vitesse axiale, la perte de charge singulière et la contrainte pariétale diminuent.

De même, l'augmentation de la valeur de  $Re$  pour un indice d'écoulement donné entraîne une augmentation de la longueur d'établissement avec une légère modification de la vitesse axiale suivi d'une diminution de la pression maximale.

### ***Deuxième partie***

En premier lieu, l'étude s'est portée sur un écoulement laminaire permanent d'un fluide Newtonien et du fluide sanguin.

En deuxième lieu, le problème transitoire a été traité avec un écoulement pulsé en imposant un gradient de pression sous forme sinusoïdal de plusieurs harmoniques sur une conduite sténosée.

#### ***Écoulement Permanent :***

- ❖ Nous avons considéré l'écoulement laminaire à travers différents degrés et longueurs de sténose pour un fluide Newtonien et un fluide sanguin. Ce dernier est représenté par la loi de comportement de Williams-Carreau. Nous avons observé que quelque soit le comportement rhéologique du fluide, lorsque le nombre de

Reynolds augmente, la vitesse axiale sur l'axe, la taille de la zone de recirculation, les longueurs d'établissement et de recollement, et la perte d'énergie singulière augmentent. De plus, l'évolution de la longueur de recollement et la perte de charge singulière semblent suivre des relations linéaires en fonction du nombre de Reynolds, contrairement en fonction du degré de sténose qui s'exprime par des relations non linéaires.

Nous avons observé qu'à cause des forces visqueuses la vitesse axiale sur l'axe de la conduite est moins importante pour un fluide non Newtonien qu'un fluide Newtonien. Ce qui rend les tailles des zones de recirculation plus grandes pour le cas du fluide Newtonien et l'éloignement du point de recollement vers l'aval de la sténose.

- ❖ Pour la deuxième configuration, nous avons considéré quatre rayons relatifs d'anévrisme pour l'écoulement des deux fluides. Les lignes de courants de l'écoulement laminaire montrent qu'un écoulement de fluide passe directement à travers l'anévrisme et est entouré par une zone tourbillonnaire. Ces zones augmentent avec le nombre de Reynolds et le rapport d'anévrisme.

Les résultats montrent l'existence de deux pics sur l'évolution de la contrainte pariétale. Le premier pic est dans la zone de recirculation juste avant le point de recollement tandis que le deuxième se trouve après le point de recollement sur le point où la déformation de l'anévrisme se termine.

Nous avons observé que pour le même problème, la vitesse axiale sur l'axe de la conduite est moins importante pour un fluide sanguin qu'un fluide Newtonien réduisant ainsi la taille des zones de recirculation.

### ***Écoulement transitoire :***

Dans cette partie, nous avons abordé l'écoulement transitoire d'un fluide sanguin à travers une conduite à symétrie axiale contenant une sténose. Pour cela, nous avons imposé un gradient de pression sinusoïdal à plusieurs harmoniques en se basant sur les résultats expérimentaux de Womersley.

Sur l'évolution du champ de vitesse, nous avons observé que sur une période, une et parfois deux zones de recirculation apparaissent sur les cotés de la sténose. Ce résultat indique que l'écoulement se fait dans les deux sens de la conduite.

Egalement, nous constatons un déphasage de faible valeur au niveau du col de la sténose, entre l'évolution de la vitesse axiale et la pression. Ce déphasage diminue avec le degré de sténose  $S_t$  et augmente avec le nombre de Womersley. Cependant l'évolution de ce déphasage en fonction de ses paramètres physiques suit une loi linéaire.

Concernant les perspectives à donner à ce travail nous pensons qu'il est intéressant de considérer une simulation en 3-D de l'écoulement sanguin à travers des sténoses et des anévrismes à symétrie axiale.

The background of the page is a rectangular area filled with marbled paper. The marbling pattern consists of intricate, swirling, and vein-like designs in shades of light grey, beige, and off-white, creating a complex, organic texture. The word "BIBLIOGRAPHIE" is centered horizontally and vertically within this marbled area.

# **BIBLIOGRAPHIE**

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] : **Sir William Harvey** *De Motu Cardis et Sanguinis Animalibus* (1578-1657)
- [2] : **Ahmed, S., Giddens, D.P.**, Pulsatile poststenotic flow studies with laser Doppler anemometry, *J. Biomech.*, 17, 695-705, 1984.
- [3] : **Aksouh. M., Zéraibi. N.** Etude de l'écoulement à seuil de contrainte à travers une sténose. *6ème séminaire international sur la physique énergétique Béchar 2002.*
- [4] : **Aksouh. M., Zéraibi. N.** Simulation numérique de l'écoulement d'un fluide de Carreau à travers une dilatation artérielle. *7ème Journée Pédagogiques et Scientifiques, Institut de Physique-USTHB, Alger 2003.*
- [5] : **Aksouh. M., Zéraibi. N.** Simulation numérique de l'écoulement sanguin à travers une obstruction artérielle. *6ème Congrès de Mécanique de Tanger, Maroc 2003.*
- [6] : **Aksouh. M., Zéraibi. N.** Simulation numérique des fluides non-Newtoniens à travers des configurations complexes. *2<sup>nd</sup> International Symposium on Hydrocarbons and Chimestry. Ghradaia 2004.*
- [7] : **Andrade, E.N. de C.**, *Nature*, 125, 309, 1930.
- [8] : **Azuma, T. Fukushima, T.** Flow patterns in stenotic blood vessel models. *Biorheology*, 13, 337-354, 1976.
- [9] : **Bachelet.C., Dantan. P., Elaud. P.**, Rhéologie et thermorhéologie des fluides complexes et biologiques. *A15.détermination indirecte de la viscosité d'un fluide en écoulement dans une singularité(rétrissement).*
- [10] : **Balar, L.H. and al.** Computer simulation of blood flow in the human arm. *J. Biomechanics*, 22, 691-697, 1989.
- [11] : **Bernardin. D.**, Introduction à la rhéologie des fluides approchés macroscopiques. *Ecole de Printemps. GDR Matériaux Vitreux Mars 2000.*
- [12] : **Berdat, P.A., Shmidi, J., Carrel, T.**, Possibilité de traitement chirurgical des anévrismes et dissections aortiques thoraciques. *Forum Med Suisse N° 3, 15 Janvier 2003- P39.*
- [13] : **Bingham, E.C.**, Fluidity and plasticity, *Mc Graw Hill, 1922.*
- [14] : **Bluth and al.** Color flow Doppler in the evaluation of aortic aneurysms. *Jint, Angio*, 9,8-10, 1990.
- [15] : **Brown.D & Hung**, Computational and experimental investigations of two-dimensional Non-linear peristaltic flows. *J. Fluid. Mech.* 1977.
- [16] : **Buchanan Jr. J.R. , Kleinstreuer, C., Comer, J.K.**, Rheological effects on pulsatile hemodynamics in a stenosed tube. *Computers & Fluids* 29 (2000) 695±724

- 
- [17] : **Budwig, R., Elger, D., Hooper, H. And Slippy, J.** Steady flow in abdominal aortic aneurysm models. *J. Biomechanical Engineering, transactions of the ASME*, 115, 418-423, 1993.
- [18] : **Chien. S., et al.**, Effect of hematocrit and plasma proteins on human blood rheology at low shear rates. *J. Appl. Physics*. 21(1) : 81-87. 1966
- [19] : **Carreau, P.J.**, Ph. D. Thesis, *Univ. of Wisconsin, Madison*, 1968.
- [20] : **Casson, N.**, Rheology of disperse systems, *Pergamon*, 1959.
- [21] : **Cross M.M.**, Polymer systems. Deformation and flow, *Mc Millan*, 1968.
- [22] : **Crowley, P.R. and A.S. Kitzes**, *Ind. Eng. Chem.*, 49,888,1957.
- [23] : **Damay. E.**, Rheology of blood cells in sickle cell disease. *Presented to the graduate school of the university of Florid*. 1997.
- [24] : **Dhatt, G. Touzot, G.**, Une présentation de la méthode des éléments finis. 2<sup>ème</sup> édition 1984.
- [25] : **Dauzat\*, M., Deklunder\*\*, G., Laroche\*\*\*, JP., Vivens\*, F., De Bray\*\*\*\*, JM., Lopez\*, FM.**, Bases d'interprétation des signaux Doppler. \* *CHU Nîmes*, \*\* *CHU Lille*, \*\*\* *CHU Montpellier*, \*\*\*\* *CHU Angers*.
- [26] : **De Waele, A.**, oil and Color Chem. Assoc. J., 6, 33, 1923.
- [27] : **Deshpande, M.D., Giddens, D.P., Mabon, R.F.** Steady laminar flow through modelled vascular stenoses. *J. Biomechanics*, 9, 165-174, 1976.
- [28] : **Drexler, D. J., and Hoffman, A. H.** Steady flow through several aneurysm models. *Proc. Of the Eleventh Annual Northeast Bioengineering Conference*, W. Kuklinski and W. Ohley. Eds., 147-150, 1985.
- [29] : **Duan Huo-Yuan, Liang Guo-Ping**, Analysis of some stabilized Low-order mixed finite element methods for Reissner- Mindlin plates. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191 (2001) 157-179.
- [30] : **Farhoul, M., Zine., A.M.**, A Mixed finit element method for ladyzhenskaya model. *Comput.Method. Appl. Mech. Engrg.* 191. (2002) 4497-4510.
- [31] : **Fermigier, C.**, ESPCI - *Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique Physique*, 2002.
- [32] : **Frank, O.**
- [33] : **Frenandez, G., Hafez. M.**, Stable Finite element solution of the incompressible Navier-Stokes Equations using linear interpolations for velocity and pressure. *Comput. Methods. App. Mech. Engng*191 (2002)545-559.
- [34] : **Gaver, D.P.III., Grothberg, J.B.** An experimental investigation of oscillatory flow in tapered channel. *J. Fluid Mech.*, 172, 47-61, 1986.
-

- 
- [35] : **Hadj-Sadok, A.**, Comportement rhéologique des fluides complexes. *Thèse de magister à l'USTHB 1993.*
- [36] : **Herschell, W.H. and R.Bulkley**, *Kolloid z.*, 39, 291, 1926.
- [37] : **Herschell, W.H. and R.Bulkley**, *Porc. ASTM, Part II*, 26, 621, 1926.
- [38] : **Hutchison, K.J., Karpinski, E.** In vivo demonstration of flow recirculation and turbulence downstream of graded Stenoses in canine arteries. *J. Biomech*, 25, 91-100, 1992.
- [39] : **Keller, A. Schneider, P.-A., Lemoine, R., Terrier, F.** Anévrisme de l'artère rénale et hypertension artérielle rénovasculaire. *Schweiz Med Forum Nr. 46 13. November 2002.*
- [40] : **Kincaid, J.F., H. Eyring and A.E. Stearn**, *chem0 revs*, 28, 301, 1941.
- [41] : **Ku, D.N., Giddens, D.P.** Laser Doppler anemometry measurements of pulsatile flow in a model carotid bifurcation. *J. Biomech*, 20, 407-431, 1987.
- [42] : **Lagrée, P.Y.**, Ecoulements dans un anévrisme : Comparaison de différentes méthodes de type couche limite. Laboratoire de modélisation en Mécanique.
- [43] : **Lorthoisi, S et al.**, Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, *UMR CNRS 5502, 14<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique-Toulouse 99(729)*
- [44] : **Lébouche. M. Lucius, M.** Grandeurs caractéristiques en rhéologie et mécanique. *Proceeding du 2<sup>ème</sup> congré Nancy (INPL) Techniques Avancées en Hémorhéologie.75-131, Nancy, 1983.*
- [45] : **Leipsch, D. Singh, M., Lee, M.** Experimental analysis of the influence of stenotic geometry on steady flow. *Biorheology*, 29, 419-431, 1992.
- [46] : **Lorenzetti, F.**, Blood Flow In Free Micro vascular Flaps. *Helsinki University Press.2001*
- [47] : **Low, M., Perktold, K., Raunig, R.** Hemodynamics in rigid and distensible saccular aneurysms : A numerical study of pulsatile flow characteristics. *Biorheology*, 30, 287-298, 1993.
- [48] : **Manouzi, H.**, Analyse des solutions non singulières d'une formulation mixte des équations de Navier- Stokes. *Ann. SC. math. Québec*, 15 (2), 1991, 177-191.
- [49] : **Maxim A. Olshanskii**, A low order Galerkin finite element method for the Navier–Stokes equations of steady incompressible low : a stabilization issue and iterative methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191 (2002) 5515–5536
- [50] : **McDonald, D.A.** On steady flow through modelled vascular stenoses. *J. Biomech*, 12, 13-20, 1979.
- [51] : **Metzner A.B., R.D. Vaugin and G.L. Houghton**, *AIChE J.*, 92, 3, 1957.
- [52] : **Midoux, M.**, Mécanique et Rhéologie des Fluides. 1993.
-

- 
- [53] : **Nakamura, M. Sawada, T.**, Numerical study on the flow of a Non-Newtonian fluid through an axisymmetric stenosis. *J. Biomech. Engng.* 110, 137-143, 1988.
- [54] : **Navidbakhsh, M.** Résolution numérique d'écoulements de fluides non newtoniens au travers des singularités. *Thèse de doctorat à l'I.N.P.L.*, 1996.
- [55] : **Ojha, M., Cobbold, R.S.C., Johnston, D.W., Hummel, R.** High resolution photochromic dye method for pulsatile flow. *Proc. Intrenat. Symp. Biofluid Mechanics, Rancho Mirage*, 71-74, 1988.
- [56] : **Ostwald, W., Kollid Z.**, 36, 99, 1925.
- [57] : **Phillipoff W.**, Viskosität der Kolloide, *Steinkopff, Leipzig*, 1942.
- [58] : **Porenta, G.P., Young, D.F., Rogge, T.R.** A finite element model of blood flow in arteries including taper, branches, and obstructions. *J. Biomech. Engng*, 108, 161-167, 1986
- [59] : **Powell R.E. and H. Eyring**, *Nature*, 154,427, 1944.
- [60] : **Prakash, B., Gowad, B.H.L., Singh, M.** Theoretical analysis of shape and size of stenosis on steady flow through tubes. *Proc. Intrenat. Symp. Biofluid Mechanics, Rancho Mirage*, 205-211, 1988.
- [61] : **Raviart Pierre-Arnaud**, Les méthodes d'éléments finis en mécanique des fluides. *Collection de la direction des études et recherches d'électricité de France, Editions EYROLLES* 1981.
- [62] : **Ree F.H., T. Ree and H.Eyring**, *ind. Eng. Chem.*, 50, 1036,1958.
- [63] : **Reiner, M.**, Deformation, strain and flow, *Interscience*, 1960.
- [64] : **Scherer, P.W.** Flow in axisymmetrical glass aneurysm models. *J. Biomech.*, 6, 695-700, 1973.
- [65] : **Seely, B.D., Young, D.F.** Effect of geometry on pressure losses across models of arterial stenoses. *J. Biomech.* 9, 439-448, 1976.
- [66] : **Shipman R.W.G., Denn M.M. and Keunigs R.** Mechanics of the "Falling Plate" extensional rheometer. *Vol. 44, pp :281-288*, 1991.
- [67] : **Skelland A.H.**, non-Newtonian flow and heat transfer, *Wiley*, 1967.
- [68] : **Sobey Ian J.**, On flow through furrowed channels. Part 1. Calculated flow patterns. *J. Fluid Mech.* (1980), vol. 96, part 1, pp. 1-26.
- [69] : **Solzbach, U., Wollschläger, H., Zeihen, A., Just, H.** Effect of stenotic geometry on flow behaviour across stenotic models. *J. Medical & Biologic Eng. & Computing*, 25, 543-550, 1987.
-

- 
- [70] : **Steiger, H.J., Poll, A., Liepsh, D., Reulen, H.J.** Haemodynamic stress in lateral saccular aneurysms, an experimental study. *Acta Neurochir (Suppl) (Wien)*. 86, 98-105, 1987.
- [71] : **Tong, P., Vawter, D.**, An analysis of peristaltic pumping. *J. Appl. Mech.* 39. 857-862 (1972).
- [72] : **Williams M.C.**, *A.I.Ch.E. J.*, 12, 1064, 1964.
- [73] : **Womersley, J.R.** Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when pressure gradient is know. *J. Physiol.*, 127, 553-563, 1955.
- [74] : **Yong I.Cho and Kenneth R.K.**, Effects of the non-Newtonian viscosity of blood on flows in a discased arterial vessel. *Part 1 : Steady Flows, Bioreheology, vol.28, pp :241-262, 1991.*
- [75] : **Young, D.F. Tasi, F.Y.** Flow characteristics in models of arterial stenose :  
-I- Steady Flow, *J. Biomech.* 6, 395-410, 1973  
-II- Unsteady Flow, *J. Biomech.* 6, 547-559, 1973.
- [76] : **Zeinkwiesch. O. C., Taylor. C. R.**, The finite element méthode, *Vol 2.1991.*
- [77] : **Zhangxin Chen.** Characteristic mixed discontinnuous finite element methods for advection-dominated diffusion problems. *Comput. Methos. Appl. Engng.*191(2002)2509-2538.
- 
- [78] : **Mittal. R, et Al**, Numerical study of pulsatile flow in a constricted channel. *J. Fluid Mech (2003), vol 485, pp337-378.*
- 
- [79] : **Remli Samia**, Effets d'une déformation de parois sur les propriétés thermohydrauliques d'un écoulement laminaire. *Thésée de magister à l'USTHB. 1993.*