



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
U.S.T.H.B.

Faculté de Génie Mécanique et de Génie des Procédés

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : Génie des Procédés

Spécialité : Energétique des Procédés

Par :AbdelKader BOUTRAA

THEME

**SIMULATION NUMERIQUE DE L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE DE BINGHAM DANS
UNE CONDUITE HORIZONTALE AVEC TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION**

Soutenu publiquement le : 13/03/2008, devant le jury composé de :

Mme F. BENTAHAR
Mr Y.K. BENKAHLA
Mr M. BELKACEM
Mr A. BENZAOUI
Mme M. AMOURA

Professeur
Maître de Conférences
Professeur
Maître de Conférences
Chargée de cours

Présidente
Directeur de thèse
Examineur
Examineur
Invitée

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je remercie dieu tout puissant de m'avoir permis de mener à bien ce modeste travail.

Ces travaux de thèse ont été effectués au sein du laboratoire de simulation numériques des écoulements de faculté de génie mécanique et génie des procédés, dirigé par **M. BENKAHLA YOUNB KHALED**, Maître de conférence à l'USTHB, Qu'il trouve ici, l'expression de mon profond respect et ma grande gratitude pour m'avoir accueillie au sein de son laboratoire.

Mes remerciements s'adressent spécialement à mon directeur de thèse, **M BENKAHLA YOUNB KHALED**, qui malgré ses activités multiples, s'est tout de même toujours mis à mon entier disposition ces conseils, son savoir et son expérience, mon été très bénéfiques.

Ma profonde reconnaissance et ma très grande gratitude vont aussi à M^{elle} **NABILA, LABSI**, pour ses conseils permanents, sa disponibilité quotidienne, ses encouragements et sa gentillesse, qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier Madame **Fatiha. BENTAHAR**, Professeur à l'USTHB, pour avoir bien voulu accepter de présider le jury de cette thèse.

Mes vifs remerciements à Monsieur le Professeur **Mohamed. BELKACEM**, qui a accepté de juger ce travail.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur **Ahmed. BENZAOUI**, Maître de conférence à l'USTHB ; qui a accepté de juger ce travail.

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma grande gratitude à Madame **Marieme. AMMOURA**, chargé de cours à l'USTHB, pour son aide, ses conseils et également d'avoir bien voulu participer au jury de cette thèse.

J'exprime mes remerciements à tous mes collègues du Laboratoire de simulation numériques des écoulements pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour avoir toujours été serviables à mon égard.

DEDICACES

Je dédie ce travail :

☞ A mes douces maman ZOHRA et OMELKHIER et à mon gentil papa ABDELLAH, auxquels je dois tout le respect et une grande considération pour leurs soutiens et leurs encouragements continus.

Je vous aime et que dieu vous garde pour moi.

☞ A Mon épouse NADIA, pour son soutien moral et son amour.

☞ A mes chères soeurs et frères qui m'ont beaucoup aidée.

☞ A la famille BENAMARA (FOUKA).

☞ A Mes beaux parents, pour leur aide.

☞ A tous mes amis.

A tous ceux qui me sont chers

A. BOUTRAA

SOMMAIRE

Introduction générale	1
Chapitre I : Synthèse bibliographique	3
Introduction	3
I.1 Grandeurs caractéristiques de la rhéologie	3
1. Contrainte de cisaillement.	3
2. Déformation et vitesse de cisaillement.	4
3. La viscosité	5
I.2. Classification des fluides	5
1. Fluides à contrainte critique	6
2. Fluides sans contrainte critique	7
3. Fluides thixotropes	8
I.3 Revue bibliographique	8
Chapitre II : Modélisation mathématique du problème	12
Introduction	12
1. Modèle physique	12
2. Formulation mathématique	13
2.1. Hypothèses simplificatrices	13
2.2. Mise en équations du problème	13
2.3. Adimensionnement des équations	16
2.4. Les conditions aux limites	20
3. Lois de variation des propriétés rhéologiques en fonction de la température	21
Conclusion	21
Chapitre III : Modélisation numérique	23
Introduction	23
1. Principe de la méthode des volumes finis	23
2. Discrétisation de l'équation générale de transport	24

2.1. Intégration de l'équation de transport sans le terme convectif	25
2.2. Traitement du terme de convection	27
2.3. Formulation généralisée	28
2.4. Schémas d'interpolation	30
2.5. L'équation discrétisée pour le cas général	32
3. Discrétisation du champ dynamique	34
3.1. Equation de quantité de mouvement	34
3.2. Equation de pression	35
3.3. Séquence des opérations de l'algorithme SIMPLER	40
4. Critère de convergence et facteurs de relaxation	41
5. Maillage utilisé	42
6. Solution des équations discrétisées	43
6.1. Principe de la méthode	44
6.2. Présentation de la méthode	44
Conclusion	44

Chapitre IV : RESULTAT ET INTERPRETATION

Introduction	46
1. Validation du code de calcul	46
1.1. Ecoulement sans dissipation visqueuse	46
1.2. Ecoulement avec dissipation visqueuse	49
2. Écoulements en mode de convection forcée pure avec propriétés rhéologiques constantes	50
2.1. Etude hydrodynamique	50
a. Influence de la contrainte seuil sur les profils de vitesse établis	50
b. Influence de la contrainte seuil sur les profils de vitesse axiale	51
c. Influence de la contrainte seuil sur le coefficient de frottement	51
d. Influence de nombre de Reynolds sur les profils de vitesse axiale	52
2.1. Etude hydrodynamique	53
a. Influence du nombre de Reynolds sur l'intensité de l'échange thermique	53
b. Influence de la contrainte seuil sur l'échange thermique	53
c. Influence de la dissipation visqueuse sur l'intensité de l'échange thermique	54
3. Écoulement en mode de convection forcée pure avec propriétés rhéologiques variables	57
3.1. Ecoulement avec dissipation visqueuse négligée	57
3.1.1. Viscosité plastique thermodépendante	57
a. Champ de vitesse	57
b. Coefficient de frottement et nombre de Nusselt	60
3.1.2. Contrainte seuil thermodépendante	62
a. Champ de vitesse	62
b. Coefficient de frottement et nombre de Nusselt	65
3.2. Ecoulement en présence de la dissipation visqueuse	67
3.2.1. Viscosité plastique thermodépendante	67
a. Champ de vitesse	67
b. Coefficient de frottement	70
c. Nombre de Nusselt	71

3.2.2. Contrainte seuil thermodépendante	75
a. Champ de vitesse	75
b. Coefficient de frottement	78
c. Nombre de Nusselt	80
4. Ecoulement en mode de Convection Mixte	84
4.1. Cas de propriétés rhéologiques constantes	84
4.1.1. Développement des profils de la vitesse axiale	84
4.1.2. Champ de température	85
4.1.3. Evolution du nombre de Nusselt et du coefficient de frottement	88
4.2. Cas de propriétés rhéologiques thermodépendantes	89
Conclusion générale	92
Références bibliographiques	95
Annexes	
Annexe 1	
Annexe 2	
Annexe 3	
Annexe 4	
Annexe 5	
Annexe 6	

NOMENCLATURE

a	Constante dans l'équation (II.28)	K ⁻¹
b	Constante dans l'équation (II.29)	K ⁻¹
D	Diamètre du tube	m
f _x	Coefficient de frottement, = $2\tau_w / \rho V_0^2$	
Bn	Nombre Bingham, = $\tau_0 R / \mu_0 V_0$	
C _p	Chaleur spécifique à pression constante	J/kg K
Gz ⁻¹	Inverse du nombre de Graetz,	
Gr	Nombre de Grashoff	
L	Longueur de la conduite	m
m	paramètre de croissance exponentielle dans l'équation (II.16)	s
Nu _x	Nombre de Nusselt local, = $\frac{-2}{\phi_m} \frac{\partial \phi}{\partial R} \Big _{R=0}$	
P	Pression adimensionnelle	
Pr	Nombre de Prandtl,	
r	Coordonnée radiale	m
R	Coordonnée radiale adimensionnelle	
Re	Nombre de Reynolds,	
r _w	Rayon de la conduite	m
T	Température	°C
T _w	Température pariétale	°C
T ₀	Température à l'entrée de la conduite	°C
ΔT	Ecart de température (T _w - T ₀)	°C
φ	Température adimensionnelle, (T - T _w) / (T ₀ - T _w)	
φ _m	Température moyenne adimensionnelle, (T _m - T _w) / (T ₀ - T _w)	
U	Composantes adimensionnelles de la vitesse suivant la direction axiale	
V	Composante adimensionnelle de la vitesse suivant la direction radiale	
V _x	Composante du vecteur vitesse suivant la direction axiale	m/s
V _r	Composante du vecteur vitesse suivant la direction radiale	m/s
V _θ	Composante du vecteur vitesse suivant la direction azimutale	m/s
W	Composante adimensionnelle de la vitesse suivant la direction azimutale	
x	Coordonnée axiale	m
X*	Longueur adimensionnelle, = (x / (D Re))	

Symboles grecs

μ_{app}	Viscosité effectif adimensionnelle, = η / μ_0	
μ_0	Viscosité plastique	kg/ms
$\mu_{0\text{ref}}$	Viscosité plastique a la température de référence	kg/ms
ρ	Densité de fluide	kg/m ³
τ	Contrainte de cisaillement	Pa
τ_0	Contrainte seuil	Pa
τ_w	Contrainte de cisaillement à la paroi	Pa
$\tau_{0\text{ref}}$	Contrainte seuil à la température de référence	Pa

Indices

x	valeur locale
w	paroi

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Les fluides à comportement non newtonien se trouvent dans de nombreux secteurs industriels tels que les industries chimiques, agroalimentaires, le secteur pétrolier et celui du traitement des polymères. Les fluides viscoplastiques forment une classe très importante de ces fluides. Ils sont caractérisés par une contrainte seuil à partir de laquelle l'écoulement a lieu. Plusieurs investigations ont été effectuées dans le but de trouver des modèles rhéologiques pour décrire le comportement de ces fluides. Parmi ces modèles, figure celui de Bingham. Ce dernier est décrit par une loi rhéologique linéaire reliant la contrainte de cisaillement à la vitesse de cisaillement par le biais de la viscosité plastique, en présence d'une contrainte seuil d'écoulement.

Le présent travail porte sur la caractérisation numérique de l'écoulement laminaire et du transfert thermique en mode de convection, d'un fluide non newtonien à propriétés rhéologiques thermodépendantes, obéissant au modèle de Bingham, en tenant compte de la dissipation visqueuse. L'écoulement a lieu dans une conduite cylindrique horizontale maintenue à une température pariétale uniforme. Pour mener à bien cette étude, la répartition suivante est considérée :

Le premier chapitre sera consacré à une brève définition des différents comportements rhéologiques des fluides non newtoniens tout en exposant les lois constitutives les plus répandues. Par la suite, un recensement des différentes investigations orientées dans le même axe de recherche et réalisées sur des fluides newtoniens et non newtoniens dans diverses configurations géométriques sera présenté.

La modélisation mathématique du problème physique considéré fera l'objet du deuxième chapitre. Ce dernier comprendra, en effet, les équations de conservation qui régissent ce type d'écoulement, à savoir, l'équation de continuité, les équations de l'impulsion, l'équation de l'énergie en tenant compte de la dissipation visqueuse et enfin la loi constitutive du modèle de Bingham modifié par l'équation rhéologique proposée par Papanastasiou et ce, dans le but d'éviter les instabilités numériques dans la région à faible vitesses de cisaillement. L'introduction de variables réduites dans ces équations fait ressortir des groupements adimensionnels qui sont les nombres de Reynolds, de Prandtl, de Grashoff et de Bingham.

La modélisation numérique des équations de conservation sera abordée dans le troisième chapitre. La méthode des volumes finis sera utilisée pour résoudre les équations de conservation exprimées en variables primitives, c'est-à-dire, en formulation vitesse-pression-température. Le traitement du couplage de ces variables sera réalisé à travers l'utilisation de l'algorithme SIMPLER. C'est ainsi qu'un code de calcul en configuration tridimensionnelle permettant la résolution des équations de transport d'une manière générale en système de coordonnées cartésiennes et cylindriques sera développé.

La validation du code de calcul sera présentée dans le quatrième chapitre qui comprendra, également, les différents résultats de l'analyse du développement hydrodynamique et thermique de l'écoulement du fluide considéré en mode de convection forcée. Cette analyse portera, en premier lieu, sur l'influence de différents paramètres sur les caractéristiques hydrodynamique et thermique de l'écoulement avec et sans dissipation visqueuse. Par la suite, l'influence de la thermodépendance des propriétés rhéologiques du fluide sur les champs hydrodynamique et thermique de l'écoulement en présence et en l'absence de la dissipation visqueuse sera étudiée. Enfin, une étude hydrodynamique et thermique sera menée en mode de convection mixte.

Une conclusion générale sera donnée à la fin de ce mémoire. Elle rassemblera les principaux résultats obtenus lors de cette étude et tracera les perspectives et les extensions à donner à ce travail.

CHAPITRE I :

SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE I : SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

Introduction

La rhéologie est un mot créé en 1929 aux Etats Unis par Eugène Cook Bingham (1878-1945). C'est une discipline qui traite de l'écoulement et des déformations des matériaux sous l'action de contraintes. Elle a été développée pour décrire les propriétés des matériaux aux comportements mal définis et intermédiaires entre ceux du solide élastique parfait et ceux du fluide newtonien.

La section qui suit vise à définir les principaux paramètres rhéologiques ainsi qu'une revue sur les principaux travaux effectués pour l'études des fluides en général et des fluides viscoplastiques en particulier.

I.1 Grandeurs caractéristiques de la rhéologie

I.1.1 Contrainte de cisaillement

La contrainte de cisaillement, notée t , est la grandeur dynamique fondamentale en rhéologie. Au cours d'un mouvement laminaire de cisaillement, deux couches successives au contact l'une de l'autre se déplacent relativement l'une par rapport à l'autre. Il apparaît à l'interface de ces deux couches, des forces de frottement qui s'exercent tangentiellement à la surface de la couche, elles sont appelées *force de cisaillement*, comme le montre la Figure I.1.

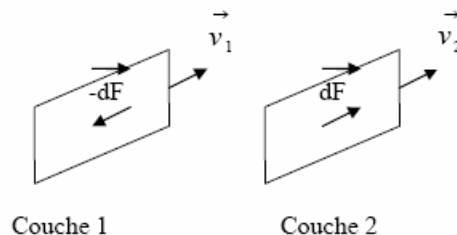


Figure I.1 : Forces agissant sur deux éléments de couches voisines.

En supposant que la couche (1) est animée d'une vitesse V_1 supérieure à la vitesse V_2 de la couche (2), la couche (1) exerce sur la couche (2) une force de cisaillement $d\vec{F}$ parallèle au mouvement et tendant à accélérer la couche (2). Cette dernière exerce pour sa part sur la couche (1), une force de cisaillement $-d\vec{F}$ tendant à la freiner. En rapportant ces forces de cisaillement à l'unité de surface, on définit la contrainte de cisaillement t :

$$\tau = \frac{dF}{dS} \quad (\text{I.1})$$

τ : représente une force par unité de surface, elle s'exprime en N/m^2 ou bien plus commodément en Pascal (Pa)

dS : est la surface élémentaire de l'entité considérée.

Il est à noter que dans le calcul de la résultante des forces, les forces de pression s'exerçant perpendiculairement à la surface ne sont pas prises en compte du fait de leur faible valeur en comparaison avec les forces de cisaillement.

I.1.2 Déformation et vitesse de cisaillement

Ces deux grandeurs constituent les grandeurs cinématiques fondamentales en rhéologie. La définition de la déformation de cisaillement est présentée dans le cas particulier le plus simple d'un mouvement de cisaillement présentant une symétrie plane. Le matériau est cisailé entre deux plans parallèles : l'un mobile et l'autre immobile (figure I.2).

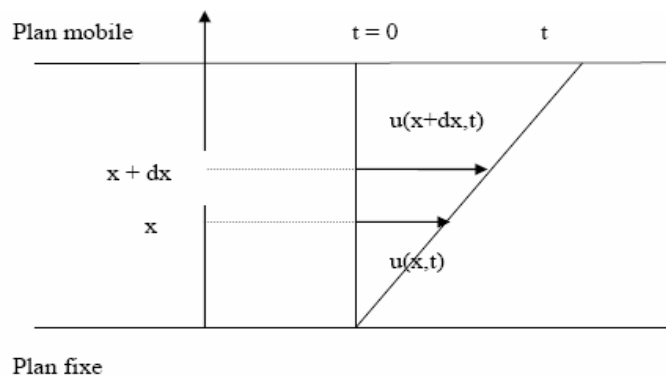


Figure I.2 : Mouvement laminaire de cisaillement entre deux plans parallèles.

On considère arbitrairement que les particules de matière de deux couches adjacentes se trouvent à l'instant $t = 0$ dans une section droite. A l'instant t postérieur, les particules auront parcouru la distance $u(x,t)$ pour la particule située à l'abscisse x et $u(x+dx,t)$ pour la particule située à l'abscisse $x+dx$.

La déformation de cisaillement est définie par l'équation (I.2) :

$$\gamma = \frac{du(x,t)}{dx} \quad (\text{I.2})$$

Cette grandeur est sans dimension, elle ne dépend pas du déplacement $u(x,t)$ lui-même mais de la variation de ce déplacement lorsqu'on passe d'une couche à une couche infiniment voisine.

L'expression de la vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$ est donnée par l'équation (I.3), il s'agit de la dérivée par rapport au temps de la déformation de cisaillement. Par conséquent, elle a la dimension de l'inverse d'un temps (s^{-1}) :

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} \quad (I.3)$$

I.1.3 La viscosité

La viscosité est une grandeur physique d'une importance majeure en rhéologie. Sa connaissance suffit parfois pour caractériser de façon précise le comportement rhéologique des matériaux. On définit différents coefficients de viscosité :

a) Viscosité apparente

Par analogie avec les fluides newtoniens, on introduit la notion de la viscosité apparente (fluide non Newtoniens non élastique) comme étant le rapport entre la contrainte et la vitesse de déformation correspondante. Elle est donnée en $N \cdot s/m^2$ ou $Pa \cdot s$:

$$\mu_{app} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = f(\dot{\gamma}, \tau, T, p) \quad (I.4)$$

b) Viscosité cinématique

Elle est définie par la relation :

$$\nu = \frac{\mu_{app}}{\rho} \quad (I.5)$$

ρ étant la masse volumique du fluide

c) Viscosité relative μ_r

Dans l'étude des solutions ou des suspensions, on utilise souvent la viscosité relative pour déterminer les influences respectives du soluté et du solvant dans le comportement rhéologique. Elle est donnée par l'expression :

$$\mu_r = \frac{\mu_{app}}{\mu_s} \quad (I.6)$$

μ_s représente la viscosité du solvant

I.2 Classification rhéologique des fluides

La majorité des fluides qui se trouvent dans la nature se composent de molécules simples. Ils sont décrits par le modèle newtonien pour lequel la contrainte de cisaillement est reliée à la

vitesse de cisaillement par une loi linéaire, le facteur de liaison étant la viscosité du fluide. Tous les fluides homogènes pour lesquels la dissipation d'énergie est due aux collisions d'espèces moléculaires relativement petites ont un comportement newtonien (gaz, liquides usuels et solutions de molécules de faible poids moléculaire). Il existe néanmoins une grande partie de fluides d'usage très courant qui ont un comportement plus complexe en écoulement et dont la description fait appel à l'utilisation de modèles rhéologiques plus compliqués. Ces fluides sont appelés : *fluides non newtoniens* et sont classés comme suit :

I.2.1 Fluides à contrainte critique

Fluides à contrainte critique ou communément désignés par fluides viscoplastiques, sont des fluides qui ne s'écoulent qu'après avoir appliqué une contrainte de cisaillement minimale, tel qu'il est montré sur la Figure I.3.

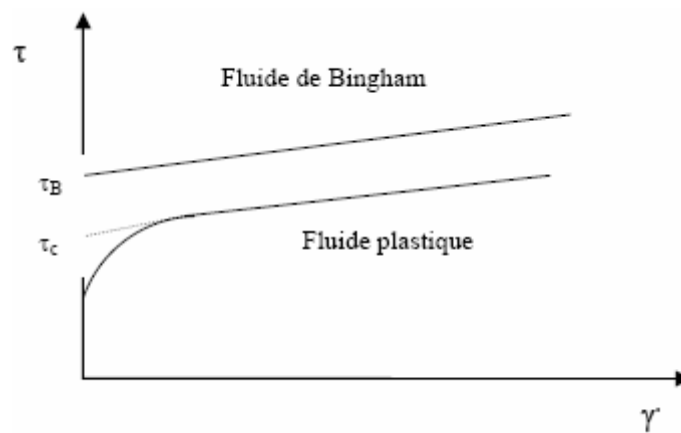


Figure I.3 : Courbes d'écoulement des fluides présentant une contrainte critique.

Le tableau I.1 récapitule les principales lois rhéologiques d'écoulement utilisées pour décrire le comportement de tels fluides.

Modèle	Loi rhéologique
Bingham	$\tau = \tau_0 + \mu_B \gamma$
Herschel-Bulkley	$\tau = \tau_0 + K_H \gamma^n$
Casson généralisé	$\tau^n = \tau_0^n + (K_c \gamma)^n$
Casson	$\tau^{1/2} = \tau_0^{1/2} + (K_c \gamma)^{1/2}$

Tableau I.1 : Lois rhéologiques décrivant l'écoulement des fluides à contrainte critique [1].

Le modèle d'Herschel-Bulkley est le modèle général qui permet de décrire la plupart des fluides plastiques. La courbe d'écoulement de tels fluides finit par devenir rectiligne au-delà d'une certaine contrainte critique appliquée [1].

Le modèle de Bingham représente le modèle le plus simple. Ce modèle permet de décrire le comportement rhéologique de nombreux matériaux tels que les boues de forage, les peintures à l'huile, certaines graisses, etc.

I.2.2 Fluides sans contrainte critique

La figure I.4 présente les courbes d'écoulement des deux principales catégories de fluides sans contrainte critique, à savoir, les *fluides pseudoplastiques* (ou *rhéofluidifiant*) et les *fluides dilatants* (ou *rhéoépaississants*). Pour les fluides pseudoplastiques, le rapport $\mu_{app} = \tau/\dot{\gamma}$ est à peu près constant pour les plus faibles valeurs de la vitesse de cisaillement imposées et vaut μ_0 . Ce rapport décroît ensuite progressivement lorsque la vitesse de cisaillement augmente, d'où le nom de *rhéofluidifiant*, jusqu'à atteindre une valeur de viscosité limite, μ_∞ . Par contre, la viscosité apparente des fluides dilatants croît avec l'augmentation de la vitesse de cisaillement

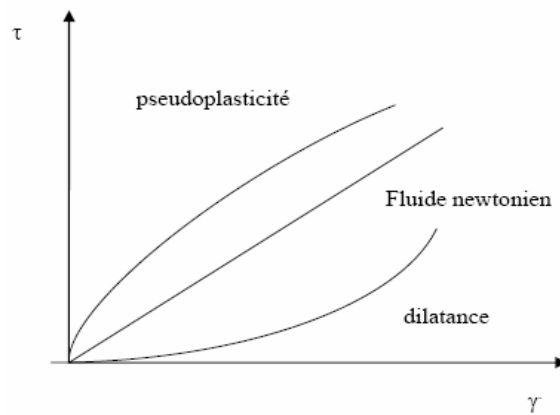


Figure I.4 : Courbes d'écoulement des principales catégories de fluides sans contrainte critique.

Les principales lois rhéologiques décrivant le comportement de tels fluides sont présentées dans le tableau I.2.

Modèle	Loi rhéologique
Ostwald - De Waele	$\tau = K \dot{\gamma}^n$
Ellis	$\tau = \mu_0 / \left(1 + (\tau / \tau_{1/2})^{\alpha-1}\right) \cdot \dot{\gamma}$
Sisiko	$\tau = \mu_0 \dot{\gamma} + K \dot{\gamma}^n$
Reiner Phillipoff	$\tau = \left[\mu_\infty + ((\mu_0 - \mu_\infty) / (1 + (\tau / \tau_s))) \right] \dot{\gamma}$
Prandtl-Eyring	$\tau = \tau_0 s h^{-1} \left(\tau_0 \cdot \dot{\gamma} \right)$
Carreau	$\tau = \left[\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) (1 + (\lambda \dot{\gamma})^2)^{(n-1)/2} \right] \dot{\gamma}$
Cross	$\tau = \left[\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) / (1 + \dot{\gamma}^p) \right] \dot{\gamma}$

Tableau I.2 : Lois rhéologiques de fluides sans contrainte critique [1].

La loi d'Ostwald - De Waele est la plus utilisée parmi ces modèles d'écoulement. Dans ce modèle, K est appelée la *consistance du fluide* et n l'*indice d'écoulement* qui traduit la non perfection visqueuse du fluide considéré.

Pour les fluides présentant un comportement pseudoplastique, l'indice d'écoulement est compris entre 0 et 1 ($0 < n < 1$). Parmi ces fluides, on compte les suspensions de particules asymétriques, les ciments, les colles, certaines peintures, etc.

Les fluides dilatants obéissent également à une loi de puissance d'Ostwald - De Waele mais avec un indice d'écoulement supérieur à 1 ($n > 1$). Cette catégorie de fluides est beaucoup plus rare que les fluides pseudoplastiques, elle caractérise essentiellement les suspensions à forte teneur en matière solide (concentrations volumiques supérieures à 50%). Ce type de comportement peut avoir pour origine une transition ordre-désordre entre les particules constitutives du fluide. Pour les plus faibles vitesses de cisaillement, les particules sont plus ou moins alignées alors que pour les plus fortes valeurs de la vitesse de cisaillement, elles sont dispersées aléatoirement. Ce qui induit une viscosité qui augmente lorsque le désordre s'installe au sein du fluide.

I.2.3 Fluides thixotropes

La consistance de tels fluides dépend aussi bien de la vitesse de cisaillement que de la durée du cisaillement. Dans ces conditions, la viscosité apparente n'est plus fixée pour une valeur donnée de la contrainte ou de la vitesse de cisaillement mais dépend également du temps.

I.2. Revue bibliographique

Le transfert thermique par convection lors des écoulements à travers des conduites a suscité l'intérêt des chercheurs depuis plusieurs décennies en raison de son importance primordiale dans le développement des procédés technologiques. Ces procédés constituent des étapes de production fréquemment rencontrées dans diverses industries. Greatz (1883-1885) a été le premier à effectuer des études dans cet axe de recherche. Il a considéré l'écoulement laminaire et établi d'un fluide newtonien à travers une conduite circulaire soumise à un chauffage pariétal par une température imposée, en mode de convection forcée. En négligeant l'effet de la dissipation visqueuse ainsi que celui de la conduction axiale du fluide, il a abouti à une expression simplifiée de l'équation de l'énergie. Une équation résolue ultérieurement par Nusselt en utilisant la méthode analytique de séparation de variables.

Une série d'investigations expérimentales, analytiques et numériques s'est succédée depuis l'analyse de Greatz, en considérant des géométries plus complexes et des écoulements de fluides aux comportements rhéologiques newtonien et non newtonien sous des conditions moins restrictives. L'écoulement des fluides newtoniens a fait l'objet de plusieurs travaux dont une revue bibliographique faite par Shah et London [2]. Le problème de la convection forcée laminaire des fluides newtoniens en régime dynamique établi et à propriétés physiques constantes était le cas le plus étudié. Parmi les travaux relatifs à ce sujet, citons à titre d'exemple ceux effectués par Basu et Roy [3] qui ont étudié l'effet de la dissipation visqueuse sans conduction axiale dans le cas d'une paroi isotherme et une paroi à flux de chaleur constant. Ils ont trouvé que la valeur asymptotique du nombre de Nusselt dépend du nombre de

Brinkman lorsque la paroi est soumise à un flux de chaleur constant. Récemment, Barletta et Zanchini [4] ont déterminé la condition nécessaire et suffisante sur le comportement asymptotique du flux de chaleur à la paroi pour avoir une région établie thermiquement avec un nombre de Nusselt non nul.

Les fluides viscoplastiques, ou fluides à seuil, font partie des fluides non newtoniens. Ces fluides sont très répandus dans les applications industrielles. Ils sont caractérisés par une contrainte seuil à partir de laquelle le fluide s'écoule. En effet, si la contrainte externe appliquée est inférieure à la contrainte seuil, le matériau se comporte tel un solide rigide, si elle est supérieure, le matériau coule. Les fluides viscoplastiques possèdent une courbe d'écoulement linéaire ou non linéaire, ne passant pas par l'origine. Le fluide dont la variation de la contrainte de cisaillement en fonction de la vitesse de déformation suit une loi linéaire est appelé : *fluide de Bingham*.

L'écoulement des fluides à seuil a soulevé l'intérêt de plusieurs chercheurs entre autres, Dean et al. [5] qui regroupent dans leur revue les différentes méthodes numériques utilisées pour la simulation de l'écoulement des fluides viscoplastiques. Dans une récente recherche faite par Wachs [6], une méthode numérique pour étudier l'écoulement stationnaire d'un fluide obéissant au modèle de Bingham à travers une section droite excentrique annulaire, a été utilisée. Johnston [7] quant à lui, a effectué une recherche dans le but de résoudre le problème de Graetz pour l'écoulement laminaire du même fluide dans un tube avec et sans conduction axiale. Il a conclu que la conduction axiale est négligeable lorsque le nombre de Peclet est supérieur à 1000.

Les fluides à seuil sont fréquemment rencontrés dans les applications liées aux industries plastique, cosmétique, agroalimentaire, pharmaceutique ainsi que les industries du pétrole et de la peinture. Le transfert thermique est d'une importance pratique dans beaucoup de ces applications étant donné que ces procédés nécessitent des situations non isothermes relatives au chauffage ou au refroidissement de ces fluides. Par conséquent, les études dans cet axe n'ont pas omis de traiter la convection thermique. En effet, Vradis et al. [8] ont résolu numériquement le problème du développement simultané des champs hydrodynamique et thermique dans la région d'entrée d'une conduite circulaire pour l'écoulement laminaire du fluide de Bingham, pour lequel les propriétés physiques et rhéologiques sont supposées constantes. Ils ont utilisé la méthode des différences finies. L'effet important des nombres de Bingham et de Brinkman sur les caractéristiques hydrodynamique et thermique de l'écoulement a été démontré dans leur étude. Ils ont trouvé également que négliger la dissipation visqueuse conduit à sous-évaluer le nombre de Nusselt et donc, le transfert thermique. Dans le même contexte, Hammad et Vradis [9] ont réalisé une étude numérique sur le phénomène de transfert de chaleur convectif causé par la dissipation visqueuse associée à l'écoulement pulsatile d'un fluide de Bingham à faibles nombres de Reynolds, à travers une conduite circulaire. Ils ont adopté un modèle de bi-viscosité pour éviter les singularités dues aux valeurs infinies atteintes par la viscosité apparente aux vitesses de déformation nulles. Ils ont considéré les effets de la rhéologie du fluide, caractérisée par le nombre de Bingham, et ont trouvé que les températures moyennes ainsi que les valeurs du nombre de Nusselt augmentaient avec l'accroissement du nombre de Bingham. De plus, l'augmentation du nombre de Prandtl a un grand effet sur l'évolution du nombre de Nusselt donnant lieu à de faibles coefficients de transfert. Quelques années plus tard, Min et al. [10,11] ont étudié numériquement et analytiquement, le développement hydrodynamique et simultané des écoulements laminaires du fluide de Bingham dans une conduite cylindrique. Ils ont trouvé, pour le développement simultané de l'écoulement, que les caractéristiques du transfert de chaleur présentent les mêmes tendances

que celles prédites par la méthode analytique du problème de Graetz. Quant à l'écoulement en développement hydrodynamique, une courte longueur d'entrée était nécessaire pour atteindre un profil de vitesse complètement établi pour les valeurs élevées du nombre de Bingham. En imposant un flux pariétal et en incluant l'effet de la dissipation visqueuse ainsi que celui de la conduction axiale, ils [12] ont montré que cette dernière peut être négligée lorsque la valeur du nombre de Peclet est supérieure à 500 et que la contrainte seuil n'a d'effet considérable sur le transfert thermique que lorsque la dissipation visqueuse est prise en compte. Wissler et Schechter [13] ainsi que Blackwell [14] ont étudié le développement d'un régime thermique en considérant une température pariétale constante et en négligeant l'effet de la dissipation visqueuse ainsi que celui de la conduction axiale. Garrioch et James [15] ont présenté une modélisation numérique de l'écoulement laminaire de fluides newtoniens et non newtoniens à travers un canal conique en utilisant une variété d'angles et des faibles nombres de Reynolds. Un travail similaire a été réalisé par Jay et al [16] pour un fluide viscoplastique de Bingham. En considérant une autre géométrie, Nascimento et al. [17] ont analysé l'écoulement en développement du fluide de Bingham à travers un espace annulaire concentrique. Quatre types de conditions aux limites ont été adoptés pour les parois des cylindres intérieur et extérieur. Les résultats ont montré que le nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation du nombre de Bingham le long de la région d'entrée thermique mais lui est presque insensible dans la zone complètement développée. En plus, lorsque le rapport des rayons des cylindres interne et externe augmente, les valeurs du nombre de Nusselt local aux parois interne et externe tendent vers les mêmes valeurs. En considérant la même géométrie, E. Soares et al. [18] ont analysé le transfert de chaleur dans la région d'entrée d'un écoulement axial laminaire du fluide de Herschel-Bulkley modifié en tenant compte de la diffusion axiale. Les équations générales étaient résolues numériquement par le biais de la méthode des volumes finis. Deux différentes conditions aux limites thermiques à la paroi interne ont été considérées à savoir, flux de chaleur pariétal uniforme et température pariétale uniforme, en maintenant la paroi externe adiabatique. Pour les deux conditions aux limites, il a été noté que l'augmentation du nombre de Bingham et la diminution de l'indice d'écoulement entraînent l'augmentation des valeurs du nombre de Nusselt mais cette sensibilité est plutôt faible. En revanche, les valeurs du nombre de Nusselt n'étaient pas très affectées par la variation du nombre de Reynolds. Khatyr et al. [19, 20] ont étudié le comportement asymptotique (Nusselt et champ de température asymptotiques) de l'écoulement laminaire en convection forcée du fluide de Bingham dans une conduite circulaire exposée à un flux de chaleur variant axialement, puis à une température pariétale constante et enfin, à une convection avec un fluide externe isotherme. La dissipation visqueuse était prise en considération tandis que la conduction axiale était négligée. Ils ont noté que la dissipation visqueuse ainsi que le phénomène de contrainte (le rayon du bouchon et la contrainte seuil) jouaient un rôle prédominant dans la détermination des caractéristiques de l'écoulement thermique complètement développé.

La majorité des liquides rencontrés dans le génie des procédés sont de nature visqueuse et souvent thermodépendant. Supposer des propriétés physiques uniformes revient à sous ou à surestimer les performances hydrothermiques. La thermodépendance des propriétés rhéologiques rajoute à la complexité des équations de continuité, de l'impulsion et de l'énergie. Par conséquent, des techniques numériques sont souvent utiles pour obtenir des solutions, même pour des conditions d'écoulement largement idéalisées [21]. Forrest et Wilkinson [22] ont analysé numériquement le transfert de chaleur pour l'écoulement laminaire du fluide de Herschel-Bulkley à l'intérieur d'une conduite circulaire. Seule la consistance du fluide était supposée thermodépendante. Deux conditions aux limites de température pariétale uniforme et flux pariétal uniforme étaient considérées pour les situations de chauffage et de refroidissement. La conduction axiale ainsi que la dissipation visqueuse étaient négligées.

Selon les auteurs, il a été montré que la diminution de la consistance près de la paroi chauffée entraînait une augmentation du gradient de vitesse pariétal et donc, une augmentation du coefficient de transfert de chaleur. L'article de Duvaut et Lions [23] traitait analytiquement les champs de vitesse et de température d'un fluide de Bingham en tenant compte de la variation de la viscosité en fonction de la température. Ils ont démontré l'existence d'une solution dans le cas d'un écoulement bidimensionnel. M. Soares et al. [24] ont étudié, à l'aide de la méthode des volumes finis, l'écoulement en développement d'un fluide d'Herschel-Bulkley dans les conduites, pour des propriétés constantes et thermodépendantes, en tenant compte de la conduction axiale. Ils ont noté que le nombre de Nusselt dans la région d'entrée est sensiblement affecté par la variation des propriétés rhéologiques en fonction de la température. Nouar [25] a étudié le transfert de chaleur en mode de convection libre et forcé du fluide d'Herschel-Bulkley dans une conduite horizontale chauffée uniformément par un flux de chaleur constant. La conduction axiale ainsi que la dissipation visqueuse étaient négligées. L'objectif de leur étude était de quantifier l'effet de la thermodépendance de la consistance du fluide ainsi que sa densité sur l'ampleur des écoulements secondaires provoqués par ce dernier. Des corrélations utiles pour le nombre de Nusselt local ainsi que pour la contrainte de cisaillement à la paroi ont été données. Ces résultats pourraient être utilisés pour les fluides de Bingham et les fluides d'Oswald-De Weale. Récemment, Viney et al. [26] ont examiné le transport des huiles brutes dans les pipelines, où le pétrole en écoulement est refroidi en raison des conditions de température externe extrêmes. La situation était simulée numériquement en considérant les écoulements non isothermes transitoires du fluide de Bingham dans une conduite, pour lequel la viscosité et la contrainte seuil variaient en fonction de la température. Pour résoudre les équations générales, les auteurs ont proposé un algorithme de résolution. Les équations de continuité, de l'impulsion et de l'énergie ainsi que l'équation constitutive étaient discrétisées en utilisant la méthode des volumes finis sur un maillage décalé. Ils ont trouvé que dans la situation où les paramètres rhéologiques dépendaient de la température, la variation rapide du champ de température dans la direction de l'écoulement principal provoquait l'écoulement du fluide et la zone du bouchon n'existait pas.

CHAPITRE II :

**MODELISATION
MATHEMATIQUE DU PROBLEME**

CHAPITRE II : FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

Introduction

Dans ce chapitre nous proposerons la mise en équations du problème considéré : équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Ces équations ainsi que les conditions aux limites qui régissent le phénomène seront données sous leurs formes générales, puis sous leurs formes adimensionnelles.

II.1 Modèle physique

Considérons une conduite cylindrique de longueur L et de rayon r_w , disposée horizontalement et à l'intérieur de laquelle s'écoule un fluide non newtonien incompressible. Ce fluide est caractérisé par des propriétés rhéologiques qui dépendent de la température. La paroi de la conduite est supposée isotherme, c'est-à-dire que la température pariétale est uniforme.

La figure II.1 représente la configuration géométrique du problème étudié. Le système de coordonnées adéquat est le système de coordonnées cylindriques (r, θ, x) . Ainsi, au point $M(r, \theta, x)$, le vecteur vitesse \vec{V} est défini par les trois composantes (V_r, V_θ, V_x) . Ces composantes sont respectivement, les vitesses radiale, azimutale et axiale. Sur la même figure, une coupe transversale de la conduite dans laquelle le plan de symétrie $(\theta = 0, \theta = \pi)$ est mis en évidence, est illustrée.

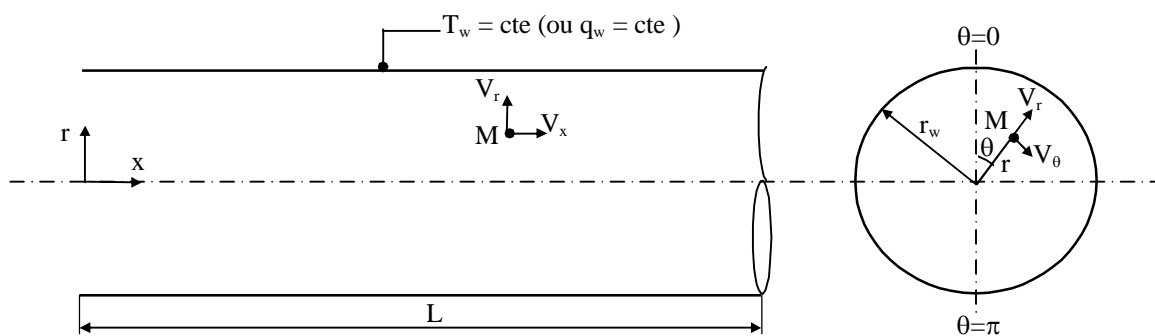


Figure II.1 : Configuration géométrique du problème considéré.

II.2 Formulation mathématique

Dans cette partie, nous exposerons les différentes étapes de la formulation mathématique nécessaires pour aboutir au système d'équations final régissant les phénomènes de conservation cités précédemment.

II.2.1 Hypothèses simplificatrices

Un ensemble d'hypothèses est retenu dans cette étude afin de simplifier la modélisation du problème. Ces hypothèses sont relatives à l'écoulement d'un liquide dans une conduite horizontale avec transfert de chaleur :

1. Conduite cylindrique, horizontale et rectiligne ;
2. le fluide en mouvement est un liquide visqueux non newtonien de masse volumique constante sauf dans l'expression des forces de poussée d'Archimède où l'on adopte l'hypothèse de Boussinesq. Cette hypothèse stipule que la masse volumique dans le terme de poussée varie seulement en fonction de la température mais pas en fonction de la pression (variation négligeable).

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta \Delta T) \quad (\text{II.1})$$

Où :

ρ_0 : masse volumique déterminée à une température de référence T_0 , caractéristique du problème étudié.

β : coefficient de dilatation thermique donné par l'expression :

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (\text{II.2})$$

- 4- les propriétés physiques du fluide sont supposées constantes et uniformes à l'exception de la viscosité et de la contrainte seuil pour lesquelles nous tiendrons compte de leurs caractères thermodépendants ;
- 5- les champs de vitesse et de température sont supposés indépendants du temps ; en d'autres termes, l'écoulement est supposé stationnaire : $(\partial/\partial t \equiv 0)$;
- 6- le mode de transfert thermique par rayonnement est négligé ;

II.2.2 Mise en équations du problème

Compte tenu des hypothèses citées précédemment, les équations de conservation régissant le phénomène s'écrivent comme suit (voir Annexe 1 pour plus de détails) :

- **Equation de conservation de la masse**

Elle est donnée par l'expression :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j) = 0 \quad (\text{II.3})$$

Après simplifications, cette équation s'écrit en coordonnées cylindriques comme :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.4})$$

• **Equations de l'impulsion**

Le mouvement du fluide est régi par l'équation de l'impulsion suivante :

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II.5})$$

ρg_i : force de volume due au champ de pesanteur. Elle a pour composantes :

$$\begin{cases} \rho g_r = -\rho g \cos \theta \\ \rho g_\theta = \rho g \sin \theta \\ \rho g_x = 0 \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

En introduisant la pression motrice p^* :

$$p^* = p + \rho_0 g r \cos \theta \quad (\text{II.7})$$

En considérant la variation de la viscosité avec la température, les projections de l'équation de l'impulsion s'écrivent suivant r , θ et x , respectivement, comme suit:

Suivant r :

$$\begin{aligned} \rho_0 \left[V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{V_\theta^2}{r} \right] &= -\frac{\partial p^*}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} - \frac{\mu V_r}{r^2} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + r \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_r}{r} \right) \\ &+ \rho_0 \beta \Delta T g \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Suivant θ :

$$\begin{aligned} \rho_0 \left[V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_\theta}{\partial x} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial V_\theta}{\partial x} \right) + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{\mu V_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + 2 V_r \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_\theta \right) \\ &- \rho_0 \beta \Delta T g \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Suivant x :

$$(\text{II.10})$$

$$\rho_0 \left[V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial V_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial V_x}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial x}$$

• Equation de conservation de l'énergie

Cette équation exprime la conservation de l'énergie totale du système ; elle s'écrit comme :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \quad (\text{II.11})$$

Posons :

$$\varphi = \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \quad (\text{II.12})$$

Où :

φ désigne la fonction de dissipation visqueuse qui représente la dégradation des forces intérieures en chaleur.

$\varphi = \mu \dot{\gamma}^2$ avec $\dot{\gamma}^2 = D_{II}$ qui représente le second invariant du tenseur de déformation.

En remplaçant dans l'équation (II.11) nous obtenons :

$$V_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] + \mu \dot{\gamma}^2 \quad (\text{II.13})$$

Avec :

$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$: la diffusivité thermique du fluide.

$\mu \dot{\gamma}^2$: le terme source pour l'équation (II.13), traduit la contribution de la viscosité et du taux de déformation.

• Equation constitutive

Dans cette étude, nous considérons le cas d'un fluide obéissant à la loi de comportement de Bingham. Cette loi relie la contrainte de cisaillement τ au taux de cisaillement, en tenant compte de l'existence d'un seuil de contrainte, τ_0 . Elle est donnée par la relation :

$$\begin{cases} \tau = \mu_p \dot{\gamma} + \tau_0 & \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \tau < \tau_0 \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Avec :

μ_p : viscosité plastique du fluide.

$\dot{\gamma}$: taux de cisaillement.

Afin d'introduire l'effet rhéologique du fluide dans la structure de l'écoulement (équation du mouvement), l'équation constitutive (II.14) est formulée de sorte à exprimer la viscosité apparente du fluide en fonction du gradient de vitesse. Ce qui donne lieu à la relation suivante :

$$\mu_{app} = \begin{cases} \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \mu_p & \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \tau < \tau_0 \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Il est à noter que pour ce type de fluide, la zone caractérisée par des taux de cisaillement inférieures à τ_0 ($\dot{\gamma} = 0$) ne subit aucune déformation et s'écoule en bloc formant ainsi un écoulement bouchon. Dans le but d'éviter la discontinuité de cette loi dans la zone de l'écoulement bouchon et pour pouvoir décrire le comportement du fluide de Bingham dans cette zone et dans celle correspondant à l'écoulement cisailé, une autre approche de l'équation constitutive est utilisée. Il s'agit de la relation proposée par Panapastasiou [27] en 1987 :

$$\mu_{app} = \mu_p + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} (1 - \exp(-m\dot{\gamma})) \quad (\text{II.16})$$

m étant le paramètre de croissance exponentielle dont la valeur dépend de τ_0 et μ_p .

L'équation (II.16), utilisée par plusieurs chercheurs, s'avère satisfaisante et représentative d'un fluide de Bingham idéal. Une meilleure approximation du comportement de ce fluide dépend du choix du paramètre m [28], selon la figure II.2. Plusieurs chercheurs [11, 29] proposent une valeur pour m égale à 1000 s.

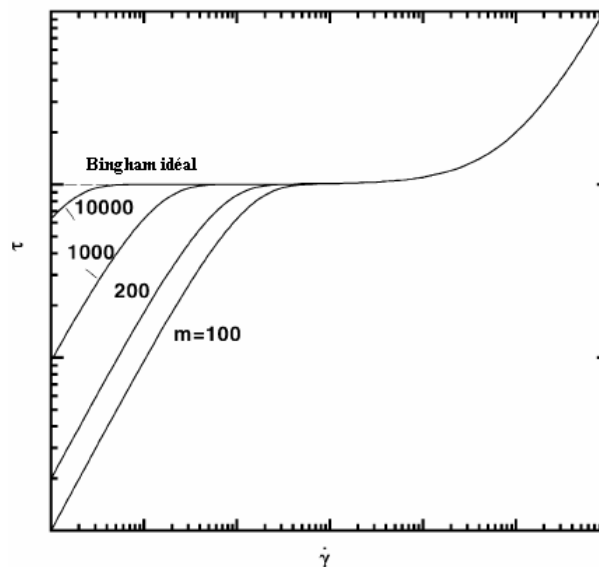


Figure II.2 : Courbes représentatives du comportement rhéologique pour différentes valeurs du paramètre m [28].

II.2.3 Adimensionnement des équations

Afin de généraliser les résultats issus du modèle mathématique régissant le phénomène physique, il est nécessaire d'écrire les équations sous une forme adimensionnelle. Pour cela, introduisons les variables réduites suivantes :

$$R = \frac{r}{D} \quad ; \quad X = \frac{x}{D} \quad ; \quad U = \frac{V_x}{V_0} \quad ; \quad V = \frac{V_r}{V_0} \quad ; \quad W = \frac{V_\theta}{V_0} \quad ; \quad P^* = \frac{P}{\rho V_0^2}$$

Concernant la température adimensionnelle, deux expressions peuvent être adoptées :

- Température pariétale constante : $\phi = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}$
- Flux pariétal constant : $\phi = \frac{T - T_0}{\left[\frac{q_w k}{D} \right]}$

Où :

D : diamètre de la conduite ;
 V₀ : vitesse moyenne ou vitesse débitante ;
 T₀ : température du fluide à l'entrée de la conduite ;
 T_w : température de la paroi ;
 q_w : flux de chaleur à la paroi.

En introduisant ces variables réduites dans les équations de conservation (II.4, II.8, II.9, II.10, II.13 et II.16), nous aboutissons aux équations adimensionnelles suivantes :

- **Equation de continuité**

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RV)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad (\text{II.17})$$

- **Equations de l'impulsion**

Suivant r :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} \frac{\partial(RVV)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial(WV)}{\partial \theta} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} - \frac{W^2}{R} = -\frac{\partial P^*}{\partial R} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\mu_{app} R \frac{\partial V}{\partial R} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_{app} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu_{app} \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{V}{R} \frac{\partial}{\partial R} \mu_{app} - \mu_{app} \frac{V}{R^2} - \frac{2}{R^2} \mu_{app} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial X} (\mu_{app}) \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial \theta} (\mu_{app}) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{W}{R} \right) + R \frac{\partial}{\partial R} (\mu_{app}) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{V}{R} \right) \right] - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \phi \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Suivant θ :

$$(\text{II.19})$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{R} \frac{\partial(R V W)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial(W W)}{\partial \theta} + \frac{\partial(U W)}{\partial X} + \frac{V W}{R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\mu_{app} R \frac{\partial W}{\partial R} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_{app} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu_{app} \frac{\partial W}{\partial X} \right) \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{2}{R^2} \mu_{app} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \mu_{app} \frac{W}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu_{app} \right) \frac{\partial U}{\partial \theta} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_{app} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} + 2V \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\mu_{app} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} - W \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \phi \sin \theta
 \end{aligned}$$

Suivant X :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{R} \frac{\partial(R V U)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial(W U)}{\partial \theta} + \frac{\partial(U U)}{\partial X} = -\frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\mu_{app} R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_{app} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu_{app} \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(\mu_{app} \right) \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_{app} \right) \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu_{app} \right) \frac{\partial U}{\partial X} \right] \quad (\text{II.20})
 \end{aligned}$$

• **Equation de conservation de l'énergie :**

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{R} \frac{\partial(R V \phi)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial(W \phi)}{\partial \theta} + \frac{\partial(U \phi)}{\partial X} = \frac{1}{\text{Pr Re}} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right] \\
 & + \mu_{app} \frac{\text{Br}}{\text{Pr Re}} \dot{\gamma}^2 \quad (\text{II.21})
 \end{aligned}$$

• **Equation constitutive**

$$\mu_{app} = 1 + \frac{\text{Bn}}{\dot{\gamma}} \left[1 - \exp(-m^* \dot{\gamma}^*) \right] \quad (\text{II.22})$$

m^* étant la forme adimensionnelle du paramètre de croissance exponentielle dans l'expression de Papanastasiou.

L'introduction des variables réduites dans les équations générales fait apparaître les nombres adimensionnels suivants :

$$\text{Nombre de Grashof :} \quad Gr = \frac{g \beta (T_w - T_0) D^3}{\mu_p^2}$$

$$\text{Nombre de Prandtl :} \quad \text{Pr} = \frac{\mu_p C_p}{k}$$

$$\text{Nombre de Reynolds :} \quad \text{Re} = \frac{V_0 D}{\nu_0}$$

$$\text{Nombre de Brinckman :} \quad Br = \frac{\mu_p V_0^2}{k(T_0 - T_p)}$$

$$\text{Nombre de Bingham :} \quad Bn = \frac{\tau_0 D}{\mu_0 V_0}$$

Les équations (II.17), (II.18), (II.19), (II.20) et (II.21) forment le système d'équations qui régit le présent problème. Remarquons que toutes ces équations peuvent se présenter sous la forme d'une équation générale de transport, donnée par :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(R\rho V\phi)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho W\phi)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho U\phi)}{\partial X} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Gamma_{\phi}}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + S_{\phi} \quad (\text{II.23})$$

Où :

- ϕ : variable dépendante ;
- Γ_{ϕ} : coefficient de diffusion ;
- S_{ϕ} : terme source.

Le Tableau II.1 regroupe les expressions du coefficient de diffusion et du terme source relatifs à la variable indépendante ϕ , par identification avec le système d'équations précédent.

Tableau II.1 : Identification des équations de conservation par rapport à l'équation générale de transport.

Equations		ϕ	Γ_{ϕ}	S_{ϕ}
de continuité (II.17)		1	0	0
de l'impulsion	Selon r (II.18)	V	$\frac{1}{\text{Re}} \mu_{app}$	S_V
	Selon θ (II.19)	W	$\frac{1}{\text{Re}} \mu_{app}$	S_W
	Selon x (II.20)	U	$\frac{1}{\text{Re}} \mu_{app}$	S_U
de l'énergie (II.21)		ϕ	$\frac{1}{\text{Pr Re}}$	S_{ϕ}

Les termes sources présentés dans le Tableau II.1 sont donnés par les expressions suivantes :

$$S_V = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{V}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\mu_{app}) - \mu_{app} \frac{V}{R^2} - \frac{2}{R^2} \mu_{app} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial X} (\mu_{app}) \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial \theta} (\mu_{app}) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{W}{R} \right) \right. \\ \left. + R \frac{\partial}{\partial R} (\mu_{app}) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{V}{R} \right) \right] - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \phi \cos \theta + \frac{W^2}{R} - \frac{\partial P^*}{\partial R} \quad (\text{II.24})$$

(II.25)

$$S_w = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{2}{R^2} \mu_{app} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \mu_{app} \frac{W}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial X} (\mu_{app}) \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mu_{app}) \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} + 2V \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\mu_{app}) \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} - W \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \phi \sin \theta - \frac{VW}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial P^*}{\partial \theta}$$

$$S_U = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial R} (\mu_{app}) \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mu_{app}) \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} (\mu_{app}) \frac{\partial U}{\partial X} \right] - \frac{\partial P^*}{\partial X} \quad (\text{II.26})$$

$$S_\phi = \mu_{app} \frac{\text{Br}}{\text{Pr Re}} \dot{\gamma}^2 \quad (\text{II.27})$$

II.2.4 Conditions aux limites

Le système d'équations obtenu est parabolique dans la direction axiale et elliptique dans les directions radiale et azimutale. Il doit être résolu sous des conditions aux limites bien déterminées. Ces conditions correspondent aux caractéristiques du problème de convection dans une conduite cylindrique horizontale. Par conséquent, le problème présente une symétrie par rapport au plan vertical et donc, notre étude se limitera à la moitié de la conduite ; c'est-à-dire, $0 \leq \theta \leq \pi$.

- **A l'entrée de la conduite :** $x = 0$; $0 \leq r \leq r_w$; $0 \leq \theta \leq \pi$

Le fluide entre dans la conduite avec une vitesse axiale et une température uniformes. Par conséquent :

$$V_x = V_0 \quad ; \quad V_r = V_\theta = 0$$

$$T = T_0$$

- **A la paroi :** $r = r_w$; $0 \leq x \leq L$; $0 \leq \theta \leq \pi$

La condition d'adhérence impose :

$$V_x = V_\theta = 0$$

Si le flux et la température pariétaux sont uniformes, nous aurons :

$$\begin{cases} T = T_w \\ \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_w} = \frac{q_w}{k} \end{cases}$$

La condition de non-pénétration donne :

$$V_r = 0$$

- **Sur le plan de symétrie** : $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$; $0 \leq x \leq L$; $0 \leq r \leq r_w$

La condition de symétrie permet d'écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial V_x}{\partial \theta} = \frac{\partial V_r}{\partial \theta} = V_\theta = 0$$

En introduisant les variables réduites, les conditions aux limites deviennent :

- **A l'entrée de la conduite** : $X = 0$; $0 \leq R \leq 0,5$; $0 \leq \theta \leq \pi$

$$V = W = 0 ; U = 1 \quad ; \text{ pour le développement simultané}$$

$$\begin{cases} \phi = 1 & ; \text{ si } T_w = cte \\ \phi = 0 & ; \text{ si } q_w = cte \end{cases}$$

- **A la paroi** : $R = 0,5$; $0 \leq X \leq XL$; $0 \leq \theta \leq \pi$

$$U = V = W = 0 ; \begin{cases} \phi = 0 & ; \text{ si } T_w = cte \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial R} \right|_{R=0,5} = 1 & ; \text{ si } q_w = cte \end{cases}$$

- **Sur le plan de symétrie** : $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$; $0 \leq X \leq XL$; $0 \leq R \leq 0,5$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = W = 0$$

II.3 Lois de variation des propriétés rhéologiques en fonction de la température

Les propriétés rhéologiques du fluide de Bingham, c'est-à-dire la viscosité plastique et la contrainte seuil, sont supposées variables en fonction de la température. Cette dépendance est obtenue à partir de données expérimentales. Dans le présent travail, nous considérons les résultats de l'étude expérimentale entreprise par Ibarz et al. [30] qui étudièrent le comportement rhéologique des jus de pruneau avec des faibles contenances en pulpe et en pectine. Les fonctions de variation de la viscosité plastique μ_0 et de la contrainte seuil τ_0 tirées de leur étude sont de forme exponentielle et sont données par les relations suivantes :

$$\mu_0 = \mu_{0ref} \exp[-a (T - T_{ref})] \quad (II.28)$$

$$\tau_0 = \tau_{0ref} \exp[-b (T - T_{ref})] \quad (II.29)$$

μ_{0ref} et τ_{0ref} étant respectivement, les valeurs de la viscosité plastique et de la contrainte seuil à la température de référence. Cette dernière est prise comme étant la température de la paroi [24].

Conclusion

Le système d'équations établi ainsi que les conditions aux limites associées constituent la formulation mathématique de notre problème physique et cela, en tenant compte des hypothèses citées précédemment. C'est un système fortement couplé qui a pour inconnues P^* , U , V , W et ϕ . Étant donné la difficulté de trouver une solution analytique à un tel système, les équations de conservation seront résolues par l'intermédiaire d'une méthode numérique qui permet la transformation des équations aux dérivées partielles en des équations algébriques plus simple à résoudre. Ceci fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE III :

MODELISATION NUMERIQUE

CHAPITRE III : MODELISATION NUMERIQUE

Introduction

Les équations de conservation régissant le phénomène de convection sont des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires et couplées. En raison de leur complexité, ces équations ne peuvent être résolues qu'à l'aide de techniques numériques. Plusieurs méthodes numériques sont disponibles dans la littérature, citons à titre d'exemples :

- **La méthode des différences finies** : elle est basée sur la notion des séries de Taylor. Elle peut être adoptée de façon à prendre en considération la forme des géométries non rectangulaires.
- **La méthode des éléments finis** : elle permet de générer des maillages qui épousent parfaitement la forme de la géométrie étudiée et ce, quelque soit sa complexité.
- **La méthode des volumes finis** : c'est une hybridation des deux méthodes précédentes. En effet, à partir de la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis peut être considérée comme une technique intégrale appliquée aux équations différentielles et à partir de la méthode des éléments finis, elle peut être considérée comme un cas particulier de la méthode des résidus pondérés dans laquelle les fonctions de pondération sont égales à l'unité dans le volume de contrôle et zéro par ailleurs.

Dans la présente étude, nous avons opté pour la méthode des volumes finis présentée par Patankar [31], pour résoudre notre système d'équations couplées qui gouverne le phénomène de convection et qui satisfait les conditions aux limites retenues. Cette méthode, basée sur l'approche de type volume de contrôle, est simple à comprendre et à interpréter physiquement. Ce qui justifie son utilisation, et avec succès, par plusieurs auteurs. D'autre part, l'approche aux volumes finis offre plus d'avantages en comparaison avec les deux autres approches à savoir, différence finies et éléments finis. En effet, à travers l'intégration sur un volume de contrôle, la méthode des volumes finis garantit la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans les équations discrétisées de la même manière que les équations aux dérivées partielles de départ qui sont valides pour tout élément infinitésimal.

III.1 Principe de la méthode des volumes finis

Le principe de cette méthode consiste à intégrer l'équation considérée sur un volume de contrôle entourant le point de calcul tel que c'est présenté sur la figure III.1. Ainsi, le domaine de calcul sera divisé en un certain nombre de volumes et pour pouvoir évaluer ces intégrales, des profils par morceaux (*piecewise profiles*) traduisant la variation de la variable dépendante ϕ entre les nœuds, doivent être choisis.

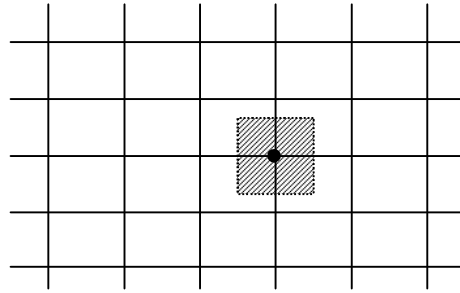


Figure III.1 : Représentation d'un volume de contrôle entourant le point de calcul.

Nous obtenons donc, des équations discrétisées contenant les valeurs de la variable dépendante ϕ pour un ensemble de nœuds. Les équations discrétisées, ainsi obtenues, expriment le principe de conservation de la variable dépendante pour chaque volume de contrôle, exactement comme le font les équations différentielles pour un volume de contrôle infinitésimal.

L'aspect le plus attrayant de cette formulation basée sur le volume de contrôle est que la solution vérifie la conservation intégrale des quantités telles que la masse, la quantité de mouvement et l'énergie pour un ensemble quelconque de volumes de contrôle, et bien sûr pour l'ensemble du domaine de calcul. Une conséquence directe de cette caractéristique est l'utilisation de maillage plus large en comparaison avec la méthode des différences finies classique.

III.2 Discrétisation de l'équation générale de transport

Les phénomènes physiques de l'écoulement d'un fluide et le transfert thermique sont régis par les équations de conservation (masse, quantité de mouvement et énergie). Ces dernières peuvent être mises sous une forme générale du type transport-diffusion, soit :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi)}_I + \underbrace{\frac{\partial(\rho u\Phi)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v\Phi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho w\Phi)}{\partial \theta}}_{II} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Gamma}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)}_{III} + \underbrace{S}_{IV} \quad (III.1)$$

Avec :

- u, v et w : composantes du vecteur vitesse suivant x, r et θ , respectivement,
- Φ : Variable dépendante,
- Γ : Coefficient de diffusion,
- S : Terme source.

L'équation de transport (III.1) comporte quatre termes représentant les processus par lesquels la variable Φ peut changer.

- I Variation temporelle au sein du volume de contrôle.
- II Convection à travers les faces du volume de contrôle.
- III Diffusion à travers les faces du volume de contrôle.
- IV Génération ou destruction au sein du volume de contrôle.

Pour obtenir la forme discrétisée de l'équation (III.1), un maillage du domaine de calcul doit être défini en premier lieu, tel qu'il est montré sur la figure III.2. En configuration tridimensionnelle, le point P aura comme voisins le point E (East), W (West), N (North), S (South), T (Top) et B (Bottom). Les lignes en pointillés constituent les limites ou interfaces des volumes de contrôle.

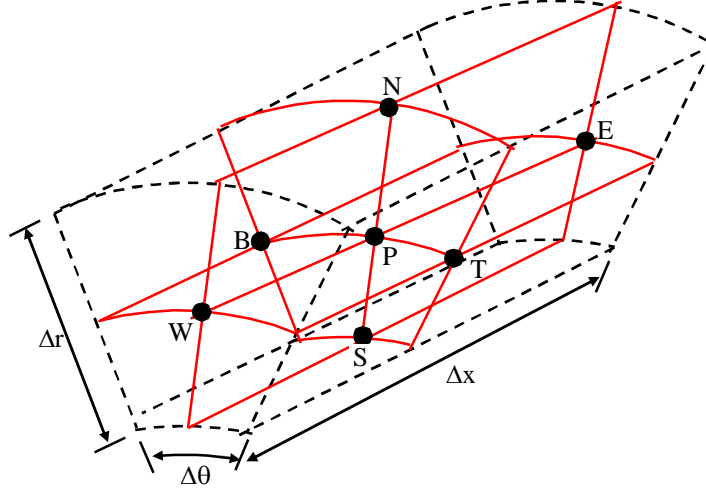


Figure III.2 : Volume de contrôle en coordonnées cylindriques.

III.2.1 Intégration de l'équation de transport sans le terme convectif

Dans un premier temps, l'intégration de l'équation (III.1) sans le terme convectif est considérée ; elle se ramène donc à l'équation suivante :

$$\frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Gamma r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + S \quad (\text{III.2})$$

En intégrant l'équation (III.2) sur le volume de contrôle et suivant le temps, nous obtenons :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_b^t \int_s^n \frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial t} r \, dr \, d\theta \, dx \, dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_b^t \int_s^n \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Gamma r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right] r \, dr \, d\theta \, dx \, dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_b^t \int_s^n S \, r \, dr \, d\theta \, dx \, dt \quad (\text{III.3})$$

Cette équation donnera donc :

$$\begin{aligned} \rho(\Phi_P^1 - \Phi_P^0) r_m \Delta r \Delta \theta \Delta x &= \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w \right] r_m \Delta r \Delta \theta dt \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\Gamma r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_n - \left(\Gamma r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_s \right] \Delta \theta \Delta x dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\Gamma}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_t - \left(\frac{\Gamma}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_b \right] \Delta r \Delta x dt \\ &+ \bar{S} r_m \Delta r \Delta \theta \Delta x \Delta t \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Afin d'évaluer les dérivées de la variable Φ aux interfaces, un profil de variation de cette variable entre les nœuds doit être choisi. Si nous évaluons les dérivées à partir d'un profil linéaire, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \rho(\Phi_P^1 - \Phi_P^0) r_m \Delta r \Delta \theta \Delta x &= \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\Gamma_e r_e (\Phi_E - \Phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma_w r_w (\Phi_P - \Phi_W)}{(\delta x)_w} \right] \Delta r \Delta \theta dt \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\Gamma_n r_n (\Phi_N - \Phi_P)}{(\delta r)_n} - \frac{\Gamma_s r_s (\Phi_P - \Phi_S)}{(\delta r)_s} \right] \Delta \theta \Delta x dt \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\Gamma_t (\Phi_T - \Phi_P)}{r_t (\delta \theta)_t} - \frac{\Gamma_b (\Phi_P - \Phi_B)}{r_b (\delta \theta)_b} \right] \Delta r \Delta x dt + \bar{S} r_m \Delta r \Delta \theta \Delta x \Delta t \end{aligned} \quad (III.5)$$

Où \bar{S} représente la valeur moyenne du terme source S dans le volume de contrôle. Ce terme est généralement fonction de la variable Φ . Cependant, nous pouvons considérer uniquement une forme linéarisée (voir Annexe 2). Ainsi, nous exprimons \bar{S} sous la forme :

$$\bar{S} = S_c + S_p \Phi_P \quad (III.6)$$

S_p doit être négatif afin de répondre aux règles de la méthode des volumes finis [31] et faciliter ainsi la convergence du système (la diagonale de la matrice du système à résoudre devient dominante).

Après traitement des termes instationnaires (voir Annexe 3), l'équation (IV.5) s'écrit comme :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + a_T \Phi_T + a_B \Phi_B + b \quad (III.7a)$$

$$a_P \Phi_P = \sum [a_{nb} \Phi_{nb}] + b \quad (III.7b)$$

Tels que :

Φ : variable dans l'équation concernée (V_θ , V_R , V_Z ou T)
 nb : nœuds voisins du nœud principal désigné par la lettre P.

et avec :

$$a_E = \frac{\Gamma_e r_e \Delta r \Delta \theta}{(\delta x)_e}; \quad a_W = \frac{\Gamma_w r_w \Delta r \Delta \theta}{(\delta x)_w}; \quad a_N = \frac{\Gamma_n r_n \Delta \theta \Delta x}{(\delta r)_n}; \quad a_S = \frac{\Gamma_s r_s \Delta \theta \Delta x}{(\delta r)_s};$$

$$a_T = \frac{\Gamma_t \Delta r \Delta x}{r_t (\delta \theta)_t}; \quad a_B = \frac{\Gamma_b \Delta r \Delta x}{r_b (\delta \theta)_b}; \quad a_P^0 = \frac{\rho \Delta v}{\Delta t}$$

$$b = S_c \Delta v + a_P^0 \Phi_P^0$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + a_P^0 - S_p \Delta v$$

$\Delta v = r_m \Delta r \Delta \theta \Delta x$: volume occupé par le volume de contrôle,

r_m : le rayon moyen donné par l'expression :

$$r_m = 0,5 (r_n + r_s) \quad (III.8)$$

III.2.2 Traitement du terme de convection

Nous nous intéressons dans ce qui suit, au traitement des termes convectifs de l'équation (III.1). La convection étant générée par un écoulement de fluide, notre but à ce stade est d'obtenir la solution Φ en présence de cet écoulement. Puisque le terme convectif est lié au terme de diffusion, les deux termes seront manipulés ensemble. Ainsi, l'équation (III.1) pourra s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_\theta}{\partial \theta} = S \quad (\text{III.9})$$

Où :

J_x , J_r , et J_θ : flux de convection-diffusion dans les directions x , r et θ , respectivement. Ils sont donnés par les expressions :

$$\begin{aligned} J_x &= \rho u \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ J_r &= r \rho v \Phi - \Gamma r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ J_\theta &= \rho w \Phi - \frac{\Gamma}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Notons également que le champ d'écoulement doit satisfaire l'équation de continuité, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \quad (\text{III.10})$$

Etant donné que le traitement des termes convection-diffusion est similaire pour les trois directions, nous considérons par exemple le terme suivant la direction x :

$$\frac{d}{dx}(\rho u \Phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right) \quad (\text{III.11})$$

Puisque le flux total J est tel que :

$$J = \rho u \Phi - \Gamma \frac{d\Phi}{dx} \quad (\text{III.12})$$

Alors, l'équation (III.11) implique :

$$\frac{dJ}{dx} = 0 \Rightarrow J_e - J_w = 0 \quad (\text{III.13})$$

Le problème qui se pose à présent est l'évaluation des termes J_e et J_w qui nécessite un certain nombre d'approximations. Cela est effectué en utilisant des profils d'interpolation donnant l'évolution de la variable Φ entre les nœuds du maillage (aux interfaces des volumes de contrôle).

III.2.3 Formulation généralisée

Les schémas de discrétisation du terme convection–diffusion diffèrent entre eux par le choix du profil adapté pour approximer la solution du problème. Ces schémas ne sont, en réalité, que des cas particuliers d’une formulation générale.

Considérons les nœuds i et $i+1$ de la figure III.3 séparés par une distance δ . Le flux traversant l’interface (en pointillés) entre ces deux nœuds peut être écrit comme :

$$J^* = \frac{J \delta}{\Gamma} = P \Phi - \frac{d\Phi}{d(x/\delta)} \quad (\text{III.14})$$

Dans cette expression, P représente le nombre de Peclet qui désigne le rapport du transfert par convection au transfert par diffusion. Il est défini par :

$$P = \frac{\rho u}{(\Gamma/\delta)} = \frac{F}{D} \quad (\text{III.15})$$

Avec :

$F = \rho u$: le débit d’écoulement,

$D = \frac{\Gamma}{\delta}$: la conductance de diffusion.

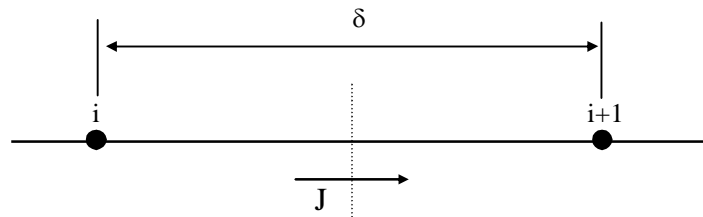


Figure III.3 : Représentation du flux à l’interface.

La valeur de ϕ à l’interface est considérée comme une moyenne pondérée entre Φ_i et Φ_{i+1} , alors que le gradient $\frac{d\Phi}{d(x/\delta)}$ est proportionnel à $(\Phi_{i+1}-\Phi_i)$. D’où J^* s’écrira sous la forme suivante :

$$J^* = P [\alpha \Phi_i + (1 - \alpha) \Phi_{i+1}] - \beta (\Phi_{i+1} - \Phi_i) \quad (\text{III.16})$$

Avec α et β des facteurs adimensionnels de pondération dépendant de P .

L’équation (III.16) peut encore s’écrire sous la forme :

$$J^* = B \Phi_i - A \Phi_{i+1} \quad (\text{III.17})$$

Où A et B sont des coefficients dépendant de P . Par conséquent, le choix d’un schéma d’interpolation donné revient au choix approprié des coefficients A et B dans l’équation (III.17).

- **Propriétés des coefficients A et B**

Si $\Phi_i = \Phi_{i+1}$, le terme de diffusion s'annule. Par conséquent, le flux total sera fonction seulement du flux de convection. Alors :

$$J^* = P \Phi_i = P \Phi_{i+1} \quad (\text{III.18})$$

En combinant cette équation avec l'équation (IV.17), nous obtenons :

$$B = A + P \quad (\text{III.19})$$

Un changement dans le sens de l'axe de coordonnées modifie P en $-P$, alors que les rôles de A et B seront permutés. Soit donc :

$$\begin{cases} A(-P) = B(P) \\ B(-P) = A(P) \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

Si nous considérons l'équation (III.19), alors, pour des valeurs de P négatives, nous pourrions écrire :

$$A(P) = B(P) - P = A(-P) - P = A(|P|) - P \quad (\text{III.21})$$

Et donc, pour P quelconque positif ou négatif, $A(P)$ peut être écrit sous la forme compacte suivante :

$$A(P) = A(|P|) + \|-P, 0\| \quad (\text{III.22})$$

où $\|a, b\|$ désigne le maximum de a et b.

De la même manière, nous avons :

$$B(P) = A(|P|) + \|P, 0\| \quad (\text{III.23})$$

Ainsi, en combinant les équations (IV.17) et (IV.19), nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} J^* - P \Phi_i = A(\Phi_i - \Phi_{i+1}) \\ J^* - P \Phi_{i+1} = B(\Phi_i - \Phi_{i+1}) \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

En multipliant maintenant les équations précédentes par $D = \Gamma/\delta$ et en appliquant la relation (III.17) aux interfaces e et w, nous obtenons la formulation convection-diffusion suivante :

$$a_p \Phi_p = a_e \Phi_e + a_w \Phi_w \quad (\text{III.25})$$

Avec :

$$\begin{aligned} a_E &= D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \\ a_W &= D_w A(|P_w|) + \|F_w, 0\| \\ a_P &= a_E + a_W + (F_e - F_w) \end{aligned}$$

Où :

$$\begin{aligned} F_e &= (\rho u)_e \text{ et } F_w = (\rho u)_w : \text{débits d'écoulement aux interfaces e et w,} \\ D_e \text{ et } D_w &: \text{conductances de diffusion correspondantes.} \end{aligned}$$

III.2.4 Schémas d'interpolation

Afin d'évaluer la variable dépendante Φ à une interface du volume de contrôle, une analyse des différents schémas d'approximation est nécessaire pour définir les expressions de la fonction du nombre de Peclet, $A(|P|)$. Le choix du schéma d'interpolation joue un rôle très important dans la précision de la solution du problème convection-diffusion :

a) Schéma aux différences centrées (central difference scheme)

La fonction d'interpolation de ce schéma est donnée par la relation :

$$A(|P|) = 1 - 0,5 |P|$$

Etant donné que les coefficients a_e , a_w , a_n et a_s dépendent de la fonction du nombre de Peclet, cette dernière doit être positif. Par conséquent, nous déduisons pour ce schéma que :

$$|P| < 2$$

b) Schéma décentré amont (Upwind)

C'est une alternative aux différences centrées. La fonction d'interpolation de ce schéma est donnée par :

$$A(|P|) = 1$$

Ce schéma est moins précis que celui aux différences centrées pour les écoulements qui ne sont pas à convection dominée.

c) Schéma hybride

Ce schéma est une combinaison des deux schémas précédents. Il se réduit à l'approximation centrée lorsque $|P| < 2$ et il devient identique au schéma Upwind lorsque $|P| > 2$. La fonction d'interpolation de ce schéma est donnée par :

$$A(|P|) = \max\| 0, (1 - 0,5|P|)\|$$

L'inconvénient majeur du schéma hybride est l'erreur introduite au voisinage de $|P| = 2$, voir Figure III.4.

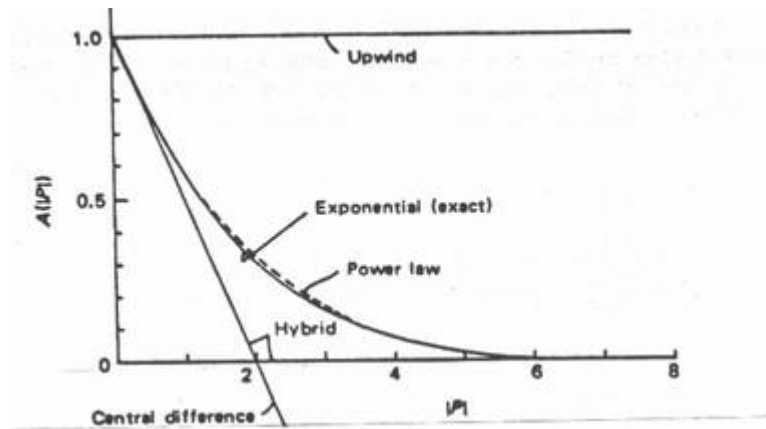


Figure III.4 : La fonction $A(|P|)$ pour chacun des schémas.

d) Schéma exponentiel (exact)

La fonction d'interpolation de ce schéma est donnée par l'expression :

$$A(|P|) = \frac{|P|}{\exp(|P|) - 1}$$

Ce schéma s'adapte mieux à un écoulement monodimensionnel. Par contre, son utilisation pour des écoulements bi et tridimensionnels n'est pas souhaitable. De plus, la présence du terme exponentiel augmente le temps de calcul.

e) Schéma en loi de puissance (Power law)

Le schéma en loi de puissance est le plus recommandé dans la littérature, aussi nous l'adapterons dans notre travail. Notons aussi que le temps de calcul pour ce schéma est légèrement plus important que le schéma hybride. Par ailleurs, les schémas préalablement définis peuvent être vus comme des choix particuliers de la fonction $A(|P|)$. La fonction d'interpolation de ce schéma est donnée par la relation :

$$A(|P|) = \left\| 0, (1 - 0,1|P|)^5 \right\|$$

Les schémas cités précédemment peuvent être résumés dans le tableau suivant :

Tableau III.1 : Expression de la fonction $A(|P|)$ pour chaque schémas.

Schémas	Expressions de $A(P)$
Centré	$1 - 0,5 P $
Upwind	1
Hybride	$\ 0, (1 - 0,5 P) \ $
Loi de puissance	$\ 0, (1 - 0,1 P)^5 \ $
Exponentiel	$ P / [\exp(P) - 1]$

III.2.5 Equation discrétisée pour le cas général

A ce stade, nous disposons des outils nécessaires permettant d'écrire l'équation générale de transport (III.9) sous forme discrétisée. Ainsi, par intégration sur le volume de contrôle de la figure III.6, l'équation (III.9) devient :

$$\frac{\rho_P \Phi_P - \rho_P^0 \Phi_P^0}{\Delta t} \Delta v + J_e - J_w + J_n - J_s + J_t - J_b = (Sc + Sp \Phi_P) \Delta v \tag{III.26}$$

Et cela, en procédant à la linéarisation du terme source et en considérant, pour le terme instationnaire, que ρ_P et ϕ_P prévalent le long du volume de contrôle.

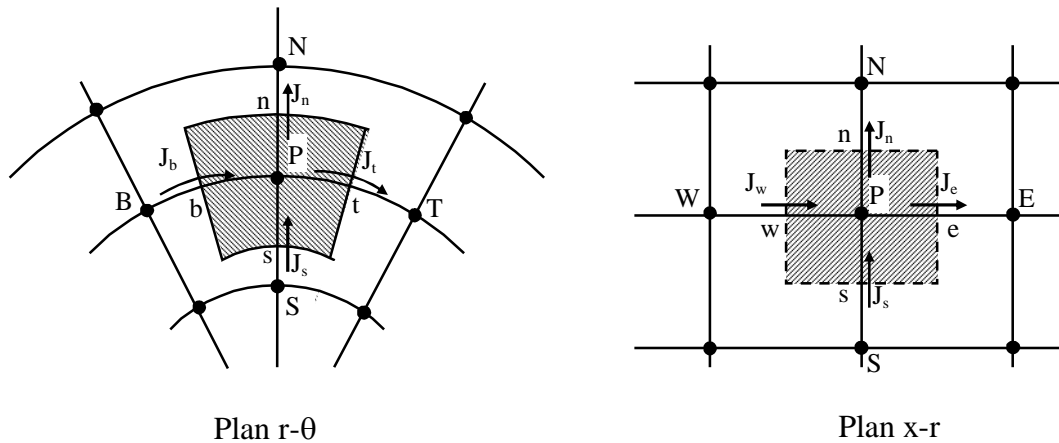


Figure III.6 : Volume de contrôle pour une configuration tridimensionnelle.

Dans l'équation (III.26), les termes $J_e, J_w, J_n, J_s, J_t,$ et J_b représentent les flux totaux intégrés le long des interfaces e, w, n, s, t et b , respectivement. Ils sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 J_e &= \int_b^t \int_s^n (J_x)_e r dr d\theta = \left[\rho u \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_e r_m \Delta r \Delta \theta \\
 J_w &= \int_b^t \int_s^n (J_x)_w r dr d\theta = \left[\rho u \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_w r_m \Delta r \Delta \theta \\
 J_n &= \int_b^t \int_w^e (J_r)_n dx d\theta = \left[\rho v \Phi - \Gamma r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]_n \Delta x \Delta \theta \\
 J_s &= \int_b^t \int_w^e (J_r)_s dx d\theta = \left[\rho v \Phi - \Gamma r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]_s \Delta x \Delta \theta \\
 J_t &= \int_w^e \int_s^n (J_\theta)_t dr dx = \left[\rho w \Phi - \frac{\Gamma}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right]_t \Delta r \Delta x \\
 J_b &= \int_w^e \int_s^n (J_\theta)_b dr dx = \left[\rho w \Phi - \frac{\Gamma}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right]_b \Delta r \Delta x
 \end{aligned}$$

De la même manière, l'intégration de l'équation de continuité (III.10) donne :

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^0) \Delta v}{\Delta t} + F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b = 0 \quad (\text{III.27})$$

Tels que :

F_e, F_w, F_n, F_s, F_t et F_b : les débits d'écoulement à travers les faces du volume de contrôle. Leurs expressions respectives sont :

$$\begin{aligned}
 F_e &= (\rho u)_e r_e \Delta r \Delta \theta & ; & & F_w &= (\rho u)_w r_w \Delta r \Delta \theta \\
 F_n &= (\rho r v)_n \Delta x \Delta \theta & ; & & F_s &= (\rho r v)_s \Delta x \Delta \theta \\
 F_t &= (\rho w)_t \Delta x \Delta r & ; & & F_b &= (\rho w)_b \Delta x \Delta r
 \end{aligned}$$

En multipliant l'équation (III.27) par Φ_P et en la retranchant de l'équation (IV.26), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (\Phi_P - \Phi_P^0) \rho_P^0 \frac{\Delta v}{\Delta t} + (J_e - F_e \Phi_P) - (J_w - F_w \Phi_P) + (J_n - F_n \Phi_P) \\
 - (J_s - F_s \Phi_P) + (J_t - F_t \Phi_P) - (J_b - F_b \Phi_P) = (S_c + S_p \Phi_P) \Delta v
 \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

L'hypothèse de l'uniformité le long des faces du volume de contrôle permet d'écrire l'équation générale sous forme discrétisée :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + a_T \Phi_T + a_B \Phi_B + b \quad (\text{III.29})$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 a_E &= D_e A(|P_e|) + \| -F_e, 0 \| \\
 a_W &= D_w A(|P_w|) + \| F_w, 0 \|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_N &= D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\| \\
 a_S &= D_s A(|P_s|) + \|F_s, 0\| \\
 a_T &= D_t A(|P_t|) + \|-F_t, 0\| \\
 a_B &= D_b A(|P_b|) + \|F_b, 0\| \\
 P_i &= \frac{F_i}{D_i} \\
 a_p^0 &= \rho_p^0 \frac{\Delta v}{\Delta t} \\
 b &= Sc \Delta v + a_p^0 \Phi_p^0 \\
 a_p &= a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + a_p^0 - Sp \Delta v
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 D_e &= \frac{\Gamma_e r_e \Delta r \Delta \theta}{(\delta x)_e} & ; & & D_w &= \frac{\Gamma_w r_w \Delta r \Delta \theta}{(\delta x)_w} \\
 D_n &= \frac{\Gamma_n r_n \Delta x \Delta \theta}{(\delta r)_n} & ; & & D_s &= \frac{\Gamma_s r_s \Delta x \Delta \theta}{(\delta r)_s} \\
 D_t &= \frac{\Gamma_t \Delta r \Delta x}{r_t (\delta \theta)_t} & ; & & D_b &= \frac{\Gamma_b \Delta r \Delta x}{r_b (\delta \theta)_b}
 \end{aligned}$$

L'équation (III.29) peut être écrite sous une forme plus compacte, soit :

$$a_p \phi_p = \sum a_{nb} \Phi_{nb} + b \quad (III.30)$$

III.3 Discrétisation du champ dynamique

Nous avons présenté la méthode de discrétisation de l'équation générale de transport pour une variable indépendante Φ en présence d'un champ d'écoulement donné. Mais le problème qui se pose à présent est comment ce champ d'écoulement peut-il être obtenu ?

III.3.1 Equation de quantité de mouvement

Pour la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement, nous procéderons d'une manière analogue à celle de l'équation générale de transport (III.1). Malheureusement, ces équations sont non-linéaires et fortement couplées. Cela nécessite donc d'autres considérations. Cependant, les projections de l'équation de quantité de mouvement peuvent être écrites sous la forme de l'équation générale de transport, soit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho v \Phi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho w \Phi)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u \Phi)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \\
 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\Gamma r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\Gamma}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right] &+ S
 \end{aligned} \quad (III.31)$$

Où la variable indépendante Φ représente l'une des composantes u , v ou w de la vitesse et Γ représente la viscosité dynamique μ_{app} . Le terme source S contiendra donc les termes restants en incluant les gradients de pression.

Les formes intégrales des équations sont obtenues en utilisant un schéma d'interpolation approprié aux interfaces des volumes de contrôle. Ainsi, la forme finale de ces équations se présente comme :

$$a_p \Phi_p = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + a_T \Phi_T + a_B \Phi_B + S \tag{III.32}$$

Lors de la détermination de la forme discrétisée de l'équation de l'impulsion, la technique d'évaluation de la pression sera cruciale. En effet, si nous utilisons un maillage décalé (*staggered grid*), en raison d'une représentation plus pratique du champ de pression, alors chaque composante de la vitesse sera décalée suivant sa direction par rapport au maillage principal, comme le montre la figure III.6.

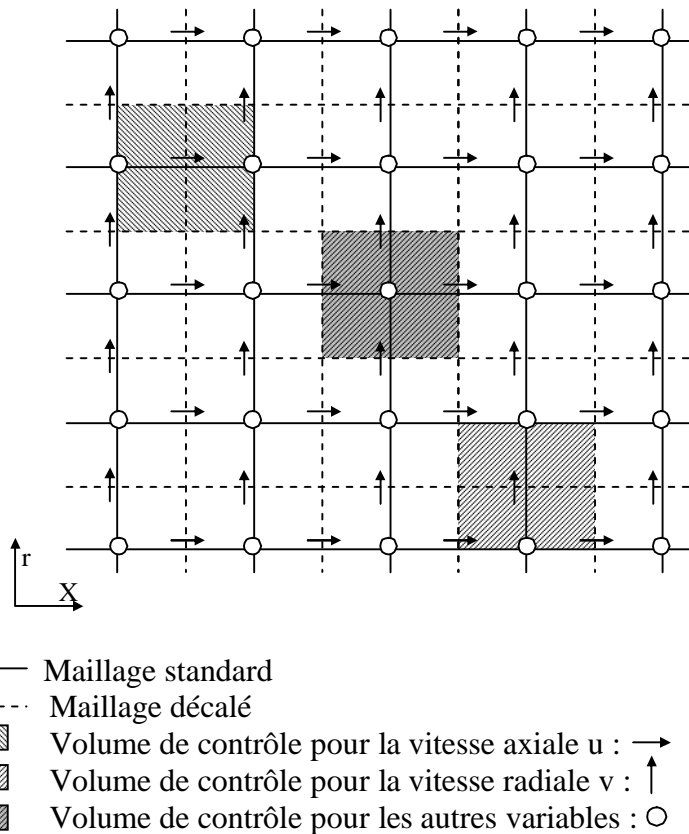


Figure III.6 : Représentation du maillage décalé.

Ainsi pour la vitesse u , par exemple, nous obtenons l'équation discrétisée suivante :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_e (P_p - P_E) \tag{III.33}$$

Avec :

nb : nœuds voisins.

$A_e (P_p - P_E)$: la force de pression agissant sur la face du volume de contrôle,

A_e : aire de la surface sur laquelle agit la différence de pression,

b : terme source, gradient de pression exclu.

Des équations similaires peuvent être obtenues pour les composantes v et w .

III.3.2 Equation de la pression

L'équation de quantité de mouvement ne peut être résolue qu'une fois le champ de pression donné ou au moins estimé. En effet, il existe trois approches principales utilisées dans la littérature pour le calcul du champ de pression.

a) Utilisation d'une équation implicite pour la pression

Il est possible de tirer une équation implicite pour la pression statique à partir de la divergence de l'équation de quantité de mouvement. L'équation résultante est présentée sous la forme d'une équation de Poisson pour la pression, elle s'écrit comme suit [32]:

$$\nabla^2 P = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (V_i V_j) - \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{Re} \nabla^2 D \quad (\text{III.34})$$

D, étant le terme de dilatation défini par :

$$D = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (\text{III.35})$$

Cette forme de l'équation de pression a été utilisée par Cheng et Armfield [33] pour des écoulements incompressibles. L'inconvénient majeur de cette procédure est que les conditions aux limites pour la pression doivent être spécifiées, ce qui n'est pas facile pour les problèmes complexes.

b) Utilisation de la compressibilité artificielle

On introduit une dérivée artificielle de la pression par rapport au temps dans l'équation de continuité pour le cas d'un écoulement permanent et incompressible, soit :

$$\beta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho v)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho w)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.36})$$

Où le facteur β est relatif à une vitesse de son.

La solution transitoire n'a pas de sens physique, elle doit être considérée comme un artifice pour atteindre le régime stationnaire.

c) Méthodes de correction de la pression

Les équations de quantité de mouvement sont couplées entre elles par l'intermédiaire du champ de pression. La difficulté du couplage vitesse-pression vient de l'absence d'une équation explicite qui gouverne le champ de pression. Ce problème est résolu en introduisant un champ de vitesse, supposé connu, permettant de déterminer le champ de pression à partir

de l'équation de continuité. On utilise alors une procédure itérative de correction de pression jusqu'à ce que l'équation de continuité soit satisfaite.

L'une des premières méthodes de correction de pression est la méthode **SIMPLE** (*Semi-Implicite Method for Pressure Linked Equations*) développée par Patankar et Spalding [32]. Un nombre de méthodes alternatives a été proposé afin d'améliorer les propriétés de convergence de SIMPLE, il s'agit des procédures SIMPLEC et SIMPLER qui seront présentées par la suite.

- **Algorithme SIMPLE**

L'algorithme SIMPLE peut être obtenu en considérant d'abord les équations de quantité de mouvement sous la forme discrétisée. Elles s'écrivent pour les différentes composantes de la vitesse sur les faces positives (East, North, Top) du volume de contrôle comme :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_e (P_P - P_E) \quad (\text{III.37a})$$

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b + A_n (P_P - P_N) \quad (\text{III.37b})$$

$$a_t w_t = \sum a_{nb} w_{nb} + b + A_t (P_P - P_T) \quad (\text{III.37c})$$

Pour un champ de pression estimé, P^* , il résultera un champ de vitesse intermédiaire u^* , v^* et w^* qui satisfait l'équation de quantité de mouvement mais pas l'équation de continuité. Ainsi, pour la composante de vitesse u nous aurons :

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + A_e (P_P^* - P_E^*) \quad (\text{III.38})$$

En retranchant l'équation (III.38) de l'équation (III.37a) nous obtenons :

$$a_e u_e' = \sum a_{nb} u_{nb}' + A_e (P_P' - P_E') \quad (\text{III.39})$$

Dans cette équation $u' = u - u^*$ et $P' = P - P^*$ représentent les formules de correction de la vitesse et de la pression, respectivement. Il est à noter que des équations similaires peuvent être obtenues de la même manière pour les composantes v^* et w^* .

L'algorithme SIMPLE définit la correction des vitesses en utilisant l'équation précédente mais en négligeant le terme $\sum a_{nb} u_{nb}'$. Par conséquent, la forme finale de correction des vitesses sera :

$$u_e = u_e^* + d_e (P_P' - P_E') \quad (\text{III.40a})$$

$$v_n = v_n^* + d_n (P_P' - P_N') \quad (\text{III.40b})$$

$$w_t = w_t^* + d_t (P_P' - P_T') \quad (\text{III.40c})$$

Avec :

$$d_i = \frac{A_i}{a_i} ; \quad i = e, n, t$$

L'équation de correction de la pression est établie en substituant les équations de correction des vitesses dans l'équation de continuité. Nous obtenons alors la forme discrétisée suivante :

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + a_T P'_T + a_B P'_B + b \quad (\text{III.41})$$

Où :

$$a_E = \rho_e d_e r_e \Delta r \Delta \theta \quad (\text{III.42a})$$

$$a_W = \rho_w d_w r_w \Delta r \Delta \theta \quad (\text{III.42b})$$

$$a_N = \rho_n d_n r_n \Delta x \Delta \theta \quad (\text{III.42c})$$

$$a_S = \rho_s d_s r_s \Delta x \Delta \theta \quad (\text{III.42d})$$

$$a_T = \rho_t d_t \Delta x \Delta r \quad (\text{III.42e})$$

$$a_B = \rho_b d_b \Delta x \Delta r \quad (\text{III.42f})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B \quad (\text{III.42g})$$

$$b = [(\rho u^*)_w r_w - (\rho u^*)_e r_e] \Delta r \Delta \theta + [(\rho v^*)_s r_s - (\rho v^*)_n r_n] \Delta x \Delta \theta \\ + [(\rho w^*)_b - (\rho w^*)_t] \Delta r \Delta x + (\rho_P^0 - \rho_P) \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (\text{III.42h})$$

Une fois la correction de la pression déterminée, les champs de vitesse et de pression peuvent être corrigés.

L'algorithme SIMPLE sera donc défini par les étapes suivantes :

- 1- Estimer le champ de pression.
- 2- Résoudre les équations de quantité de mouvement pour obtenir u^* , v^* et w^* .
- 3- Résoudre l'équation en P' et cela en utilisant u^* , v^* et w^* .
- 4- Calculer le champ de pression P et les champs de vitesses u , v et w à partir de leurs expressions de correction en utilisant P' .
- 5- Résoudre l'équation discrétisée pour d'autres variables dépendantes ϕ (température, concentration, etc.) s'ils influencent le champ d'écoulement.
- 6- Traiter la pression P comme un nouveau champ de pression estimé P^* , et revenir à l'étape 2 pour répéter la même procédure jusqu'à convergence.

- **Algorithme SIMPLEC**

L'algorithme **SIMPLEC** (*SIMPLE Consistent*) est établi d'une façon similaire à celle de l'algorithme SIMPLE. La différence principale entre ces deux schémas réside dans le traitement du terme négligé dans la correction des vitesses.

Dans la procédure SIMPLEC, on soustrait des deux membres de l'équation (III.39), la quantité $(u'_e \sum a_{nb})$ donnant :

$$u'_e \left(a_e - \sum a_{nb} \right) = \left(\sum a_{nb} u'_{nb} - \sum a_{nb} u'_e \right) + A_e (P'_P - P'_E) \quad (\text{III.43})$$

Le terme $\left(\sum a_{nb} u'_{nb} - \sum a_{nb} u'_e \right)$ est alors moins significatif et pourra être négligé. Par conséquent, les expressions de correction des vitesses auront la même forme que celles établies pour SIMPLE avec les coefficients d_i définis par :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e - \sum a_{nb}} \quad ; \quad d_n = \frac{A_n}{a_n - \sum a_{nb}} \quad ; \quad d_t = \frac{A_t}{a_t - \sum a_{nb}}$$

Il est à noter que cette approche peut être utilisée seulement si on effectue une sous-relaxation de l'équation de quantité de mouvement. Cependant, il a été montré que l'algorithme SIMPLEC offre une amélioration dans la vitesse de convergence par rapport au schéma SIMPLE pour la plupart des problèmes étudiés.

- **L'algorithme SIMPLER**

L'algorithme **SIMPLER** (*SIMPLE Revised*) a été développé par Patankar [31] dans le but d'améliorer la convergence du schéma SIMPLE. Pour cela, écrivons les équations (III.37) sous la forme :

$$u_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b}{a_e} + d_e (P_P - P_E) \quad (\text{III.44a})$$

$$v_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b}{a_n} + d_n (P_P - P_N) \quad (\text{III.44b})$$

$$w_t = \frac{\sum a_{nb} w_{nb} + b}{a_t} + d_t (P_P - P_T) \quad (\text{III.44c})$$

Avec :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e}, \quad d_n = \frac{A_n}{a_n} \quad \text{et} \quad d_t = \frac{A_t}{a_t}.$$

Définissons les pseudo-vitesses par :

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b}{a_e} \quad (\text{III.45a})$$

$$\hat{v}_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b}{a_n} \quad (\text{III.45b})$$

$$\hat{w}_t = \frac{\sum a_{nb} w_{nb} + b}{a_t} \quad (\text{III.45c})$$

Alors les équations (IV.44) deviennent :

$$u_e = \hat{u}_e + d_e (P_p - P_E) \quad (\text{III.46a})$$

$$v_n = \hat{v}_n + d_n (P_p - P_N) \quad (\text{III.46b})$$

$$w_t = \hat{w}_t + d_t (P_p - P_T) \quad (\text{III.46c})$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation de continuité (III.27), on obtient l'équation discrétisée du champ de pression, soit :

$$a_p P_p = a_p P_p + a_w P_w + a_n P_n + a_s P_s + a_t P_t + a_b P_b + b \quad (\text{III.57})$$

Les coefficients a_i sont donnés par les expressions (III.42) sauf pour le terme b dont l'expression sera donnée par :

$$b = \frac{(\rho_p^0 - \rho_p) \Delta v}{\Delta t} + [(\rho \hat{u})_w r_w - (\rho \hat{u})_e r_e] \Delta r \Delta \theta + [(\rho \hat{v})_s r_s - (\rho \hat{v})_n r_n] \Delta x \Delta \theta + [(\rho \hat{w})_b - (\rho \hat{w})_t] \Delta x \Delta r \quad (\text{III.48})$$

L'algorithme SIMPLER sera utilisé dans notre étude car il nécessite moins d'itérations pour atteindre la convergence en comparaison avec les deux schémas SIMPLE et SIMPLEC.

III.3.3 Séquence des opérations de l'algorithme SIMPLER

Après avoir exposé la méthode de discrétisation des différentes équations, nous présenterons les différentes étapes de l'algorithme SIMPLER pour la résolution des champs dynamique (vitesse, pression) et thermique (température) pour le mode de convection. Ces étapes se résument en huit :

Etape 1 : proposition d'un champ de vitesse estimé.

Etape 2 : calculer les coefficients de l'équation de la quantité de mouvement et déterminer les pseudo-vitesses \hat{u} , \hat{v} et \hat{w} d'après les équations (III.45).

- Etape 3 :** calculer les coefficients de l'équation de pression (III.47) et la résoudre pour obtenir le champ de pression.
- Etape 4 :** prendre ce champ de pression comme P^* et résoudre les équations de quantité de mouvement pour obtenir u^* , v^* et w^* .
- Etape 5 :** calculer le terme source b à partir de l'équation (III.42h) et par la suite résoudre l'équation (III.41) afin d'obtenir le champ de correction de pression P' .
- Etape 6 :** corriger le champ de vitesse à l'aide des équations de correction des vitesses (III.40). Notons que la pression n'est pas corrigée.
- Etape 7 :** résoudre l'équation de l'énergie pour obtenir le champ de température.
- Etape 8 :** revenir à l'étape 2 pour répéter la procédure jusqu'à la convergence.

Quoique le nombre d'itérations pour atteindre la convergence soit réduit avec l'utilisation de l'algorithme SIMPLER, un effort considérable est dépensé pour chaque itération à cause de la résolution de l'équation de pression et de l'équation de correction de pression en comparaison avec les schémas SIMPLE et SIMPLEC. Néanmoins, l'avantage principal de l'algorithme SIMPLER est qu'au cours de son établissement, aucun terme n'a été négligé, le terme de sommation $\sum a_{nb} u_{nb}$ en l'occurrence. Dans les algorithmes SIMPLE et SIMPLEC, un choix initial adéquat du champ de pression joue un rôle important, ce qui n'est pas nécessaire pour le SIMPLER car il est plus facile d'estimer un champ de vitesse raisonnable dans la majorité des problèmes. Par ailleurs, l'utilisation de la sous-relaxation dans l'équation de pression est facultative dans la procédure SIMPLER.

III.4 Critère de convergence et facteurs de relaxation

On dit qu'un processus itératif a atteint la convergence, lorsque les itérations ne produisent aucun changement significatif des valeurs des variables dépendantes. En pratique, on exprime cette convergence par un test d'arrêt du processus itératif qui dépend de la nature du problème et des objectifs de calcul.

Le critère de convergence le plus utilisé dans la littérature porte sur les résidus de quantité de mouvement, de masse et de l'énergie. Ainsi, pour que la solution converge, le résidu doit diminuer pour toutes les variables au cours du processus itératif. Le résidu local peut être défini par :

$$R_\phi = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b - a_p \Phi_p \quad (\text{III.49})$$

Ce critère de convergence peut se traduire par l'inégalité suivante :

$$\sum_{\Omega} |R_\phi| < \varepsilon \quad (\text{III.50})$$

Avec :

Ω : domaine de calcul,

ε : valeur infiniment petite caractérisant l'erreur sur la solution obtenue.

Ho et Tu [34] ont utilisé dans leur étude un critère de convergence basé sur l'erreur absolue. Cette dernière est de l'ordre de 10^{-7} , soit :

$$\text{Max} \left| \Phi_p - \Phi_p^* \right| < \varepsilon \quad (\text{III.51})$$

Où Φ_p est la valeur actuelle de la variable dépendante et Φ_p^* représente la valeur de ϕ à l'itération précédente.

Dans l'étude entreprise par Orfi et al. [35], un autre critère de convergence est proposé. Il s'agit d'un test basé essentiellement sur la masse résiduelle résultant de l'intégration de l'équation de conservation de la masse sur un volume de contrôle. Cette masse ne doit pas dépasser la valeur 10^{-7} dans tous les cas analysés. Hwang et al. [36] emploient un autre test de convergence, il est défini par rapport à la température relative. Il s'exprime par :

$$\left| \frac{T_p - T_p^*}{T_p^*} \right| < 10^{-4} \quad (\text{III.52})$$

Afin de contrôler la convergence d'un processus itératif, nous utilisons la technique de relaxation car une divergence peut avoir lieu lors de la résolution du système d'équations couplées à caractère non-linéaire. Pour éviter cette divergence, le processus de convergence est ralenti entre deux itérations au moyen de la sous-relaxation. Elle consiste à introduire un facteur de sous-relaxation α_p compris entre 0 et 1 dans l'équation (III.30) :

$$\Phi_p = \Phi_p^* + \alpha_p \left[\frac{\sum a_{nb} \Phi_{nb} + b}{a_p} - \Phi_p^* \right] \quad (\text{III.53})$$

Avec :

Φ_p^* désigne la valeur de la variable Φ obtenue à l'itération précédente,
 Φ_p désigne la valeur actuelle de la variable Φ .

Il n'existe pas de règles générales pour le choix de la bonne valeur du coefficient α_p . Sa valeur optimale dépend de plusieurs facteurs [31] tels que la nature du problème, le nombre de nœuds, l'espacement de la grille et de la méthode itérative utilisée.

III.5 Maillage utilisé

Afin de suivre avec précision toutes variations dans les champs thermique et hydrodynamique, particulièrement dans la région proche de la paroi et également dans la zone immédiate à l'entrée de la conduite étudiée, nous adopterons un maillage qui possède des incréments uniformes circonférentiellement mais non uniformes radialement et axialement.

Shome et al. [37] ont utilisé dans leur étude une loi de puissance pour générer la grille radialement, cette loi est donnée par l'expression :

$$(\text{III.54})$$

$$R_j = 0,5 - 0,5 [(N - j) / N]^{1,5}$$

Où N représente le nombre de nœuds suivant la direction radiale.

Concernant la direction axiale ils proposent une grille évoluant selon une suite géométrique de raison 1,1 telle que :

$$\Delta X_{k+1} = 1,1 \Delta X_k \tag{III.55}$$

Dans la présente étude, le maillage utilisé est représenté sur la figure III.8. Ce maillage se compose d'une grille standard qui coïncide avec les frontières du domaine de calcul et d'une grille décalée définissant les volumes de contrôle pour les vitesses.

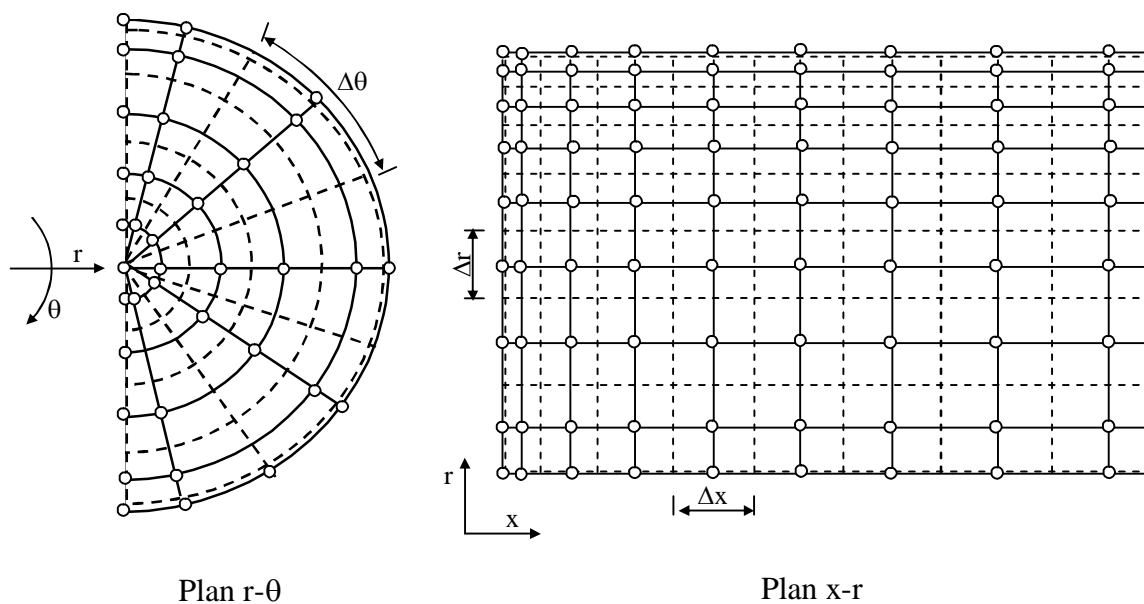


Figure III.8 : Représentation du maillage utilisé.

Suivant la direction radiale, la grille standard est générée en employant l'expression (III.54) tandis que suivant la direction axiale, nous utilisons l'expression (III.55) mais avec l'introduction d'une raison de la suite géométrique égale à 1,2 pour les zones proches de l'entrée de la conduite, le maillage continue ensuite avec des incréments uniformes.

III.6 Solution des équations discrétisées

La résolution des équations algébriques (III.29) obtenues après discrétisation par la méthode des volumes finis, est effectuée en utilisant une méthode itérative. Ceci est dû à la commodité de ces méthodes à traiter les non-linéarités. Il existe plusieurs méthodes itératives, la plus simple étant celle de Gauss-Seidel qui présente comme inconvénient la lenteur de convergence particulièrement lorsque la grille est composée d'un nombre important de points. Afin de remédier à ces difficultés, une combinaison entre la méthode de Gauss-Seidel et de la méthode directe TDMA (*Tridiagonal Marix Algorithm*) (Annexe 4) est réalisée. Il s'agit de la méthode ligne par ligne (*line by line method*).

III.6.1 Principe de la méthode

La méthode ligne par ligne consiste à employer l'algorithme TDMA le long de toutes les lignes dans la direction axiale, en supposant que les valeurs de la variable Φ sur les lignes voisines (suivant r et θ) sont connues à partir de leurs valeurs précédentes. Cette procédure est ensuite répétée pour les lignes suivant les directions r et θ . Ainsi, comme les nouvelles valeurs de Φ sont calculées le long d'une ligne, elles seront utilisées comme des valeurs estimées Φ^* dans la résolution pour la ligne suivante.

Cette méthode de résolution est applicable aux cas bi et tridimensionnels et converge plus rapidement que celle de Gauss-Seidel. Par ailleurs, le choix de la direction de traverse et de balayage des lignes peut dans certains cas influencer d'une façon importante sur la vitesse de convergence [31]. La séquence dans laquelle les lignes sont parcourues peut être dictée par la géométrie et les propriétés du problème considéré.

III.6.2 Présentation de la méthode

Si dans l'équation discrétisée (III.29), les valeurs voisines ϕ_N et ϕ_S dans la direction r ainsi que ϕ_T et ϕ_B dans la direction θ sont connues, alors, cette équation aura seulement trois inconnues, ϕ_P , ϕ_E et ϕ_W . Si de telles équations sont écrites le long des lignes dans la direction x , leur forme sera :

$$a_i \Phi_i = b_i \Phi_{i+1} + c_i \Phi_{i-1} + d_i \quad (\text{III.56})$$

Où :

Φ_i , Φ_{i+1} , et Φ_{i-1} représentent Φ_P , Φ_E et Φ_W , respectivement. Les différents coefficients sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} a_i = a_P \\ b_i = a_E \\ c_i = a_W \\ d_i = a_N \Phi_N^* + a_S \Phi_S^* + a_T \Phi_T^* + a_B \Phi_B^* + b \end{cases} \quad (\text{III.57})$$

Φ^* représente une valeur estimée déterminée à partir de l'itération précédente. L'ensemble des équations forme un système linéaire à matrice tridiagonale. Celui-ci est résolu par l'algorithme TDMA.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la procédure numérique choisie afin de simuler l'écoulement et le transfert thermique dans une conduite cylindrique horizontale en mode de convection. Pour cela, nous avons opté pour la méthode des volumes finis avec un schéma en loi de puissance (*Power law*). L'algorithme SIMPLER est adopté pour traiter le couplage pression-vitesse et la méthode ligne par ligne est exploitée pour résoudre les équations discrétisées.

Le code de calcul que nous avons développé se présente comme une extension du code SIMPLER qui est conçu pour traiter les phénomènes d'écoulement, de transfert thermique et de transfert de masse en situations bidimensionnelles seulement. Notre code est établi dans le but de résoudre les problèmes tridimensionnels en coordonnées cylindriques (r, θ, x) et en coordonnées cartésiennes (x, y, z). Evidemment notre code reste aussi applicable aux configurations bidimensionnelles.

Le chapitre suivant sera consacré à la validation du code de calcul ainsi qu'à la présentation des différents résultats qui en découlent.

CHAPITRE IV :

RESULTAT ET INTERPRETATION

CHAPITRE IV : RESULTATS ET DISCUSSION

Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation et la discussion des résultats obtenus par le code de calcul utilisé. Comme toute étude numérique, la validation de ce dernier est nécessaire. A cet effet, une comparaison entre les résultats obtenus et ceux tirés des travaux antérieurs sera effectuée dans un premier temps. Par la suite, l'influence de la variation des principaux paramètres sur les caractéristiques hydrodynamique et thermique de l'écoulement de notre fluide en mode de convection forcée sera présentée, en maintenant les propriétés rhéologiques constantes et uniformes et ce, en présence et en l'absence de la dissipation visqueuse. L'impact de la thermodépendance de ces propriétés sur les caractéristiques de l'écoulement sera testée par la suite. Enfin, la même étude sera menée en prenant en compte les forces de flottabilité c'est-à-dire en mode de convection mixte.

IV.1 Validation du code de calcul

Le code de calcul est validé après comparaison avec les résultats issus des travaux de Vradis et al. [8] et Min et al. [10], pour un écoulement en mode de convection forcée pure dans une conduite cylindrique maintenue à température pariétale uniforme. Les propriétés physiques et rhéologiques du fluide sont supposées indépendantes de la température. Il est à signaler que la méthode des différences finies a été utilisée par les auteurs cités précédemment pour la discrétisation des équations différentielles.

IV.1.1 Ecoulement sans dissipation visqueuse

Les figures IV.1 et IV.2 illustrent la comparaison des profils de vitesse axiale en développement, obtenus par la présente étude avec ceux obtenus par Vradis et al. [8] et ce, dans le cas d'un écoulement le long d'une paroi isotherme pour des positions axiales égales à 0,27 et 9, respectivement. Une très bonne concordance est observée entre les deux résultats puisque l'écart ne dépasse pas 4 %.

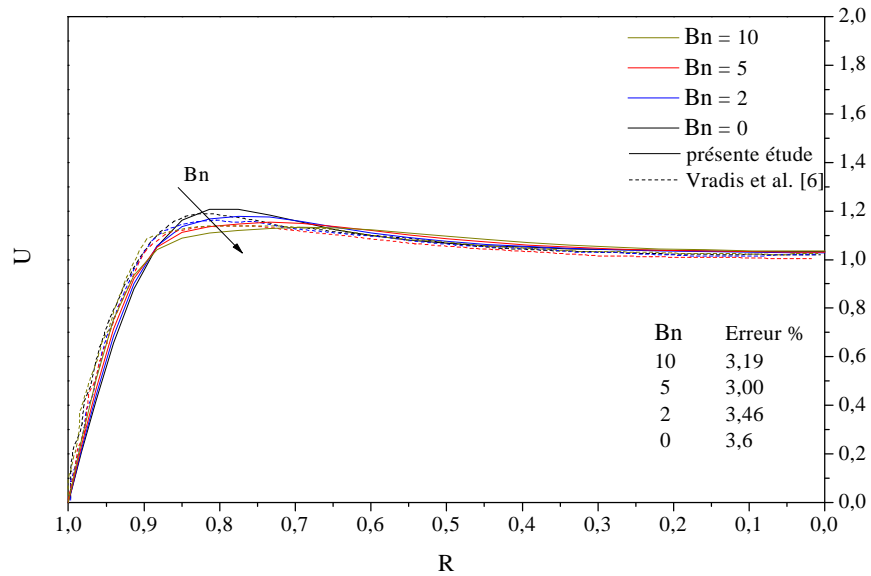


Figure IV.1 : Développement de la vitesse axiale pour différentes valeurs du nombre de Bingham $X = 0,27$; $Re = 50$; $Br = 0$.

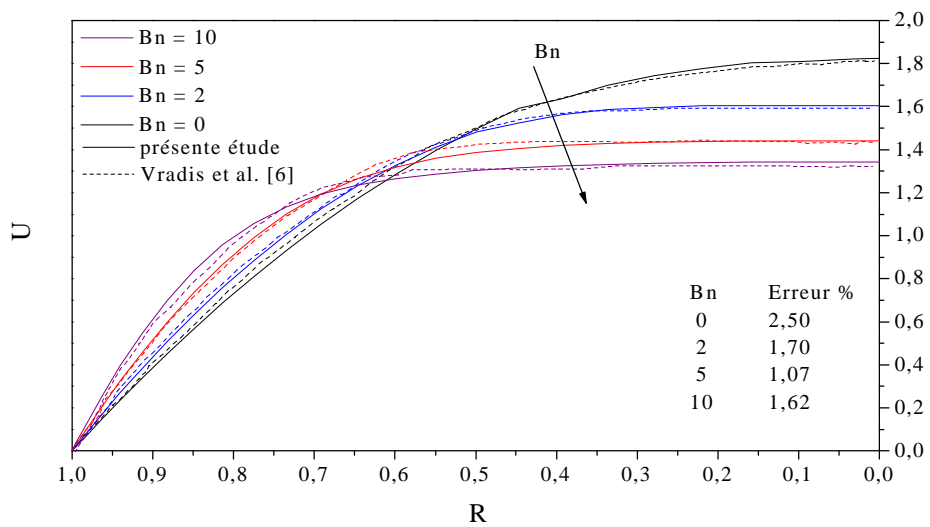


Figure IV.2 : Développement des profils de vitesse pour différentes valeurs du nombre de Bingham $X = 9$; $Re = 50$; $Br = 0$.

La figure IV.3 représente la comparaison entre la variation du nombre de Nusselt en fonction des nombres de Graetz et de Reynolds, obtenue par le présent modèle avec celle de Min et al. [10], pour un écoulement sans dissipation visqueuse. Les résultats sont également très satisfaisants étant donné que l'erreur ne dépasse pas 3 %.

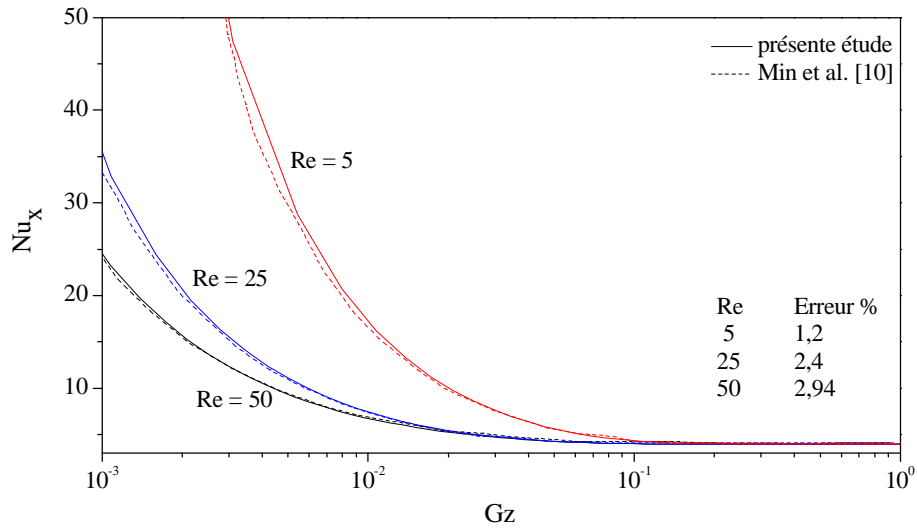


Figure IV.3 : Evolution du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. $Pr = 1$; $Bn = 1,99$; $Br = 0$.

La figure IV.4 montre l'évolution axiale du nombre de Nusselt pour différentes valeurs du nombre de Bingham, pour un écoulement sans dissipation visqueuse. Les résultats obtenus montrent une bonne concordance avec ceux de Vradis et al. [8]. En effet, l'erreur entre les deux courbes ne dépasse pas 4 %

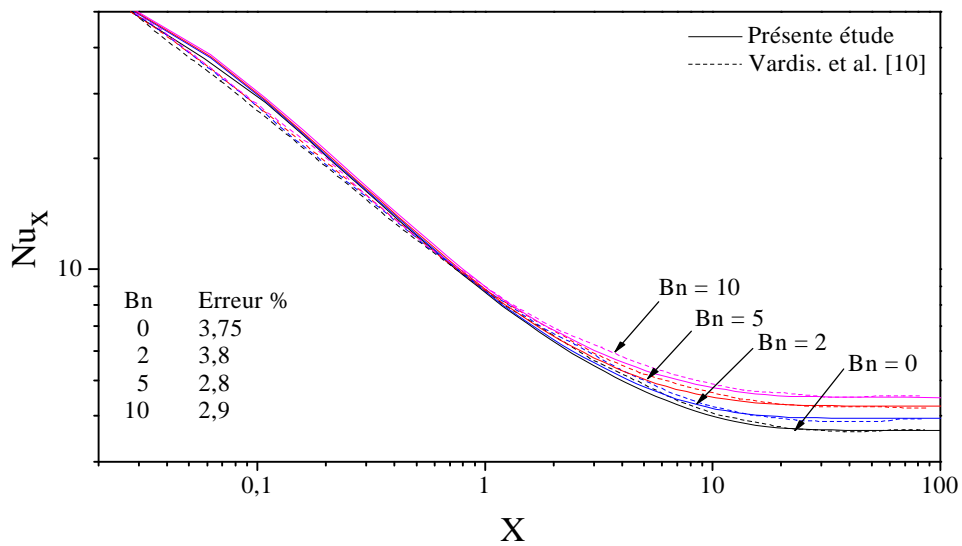


Figure IV.4 : Evolution du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du nombre de Bingham. $Re = 50$; $Pr = 1$; $Br = 0$.

IV.1.2 Ecoulement avec dissipation visqueuse

Pour le cas de l'écoulement avec la prise en compte de la dissipation visqueuse, les courbes portées sur la figure IV.5 traduisent la variation du nombre de Nusselt en fonction de la longueur de la conduite pour différentes valeurs du nombre de Brinckman. Les résultats obtenus sont également en bon accord avec ceux tirés de l'étude de Min et al. [10], avec une erreur relative ne dépassant pas 4 %.

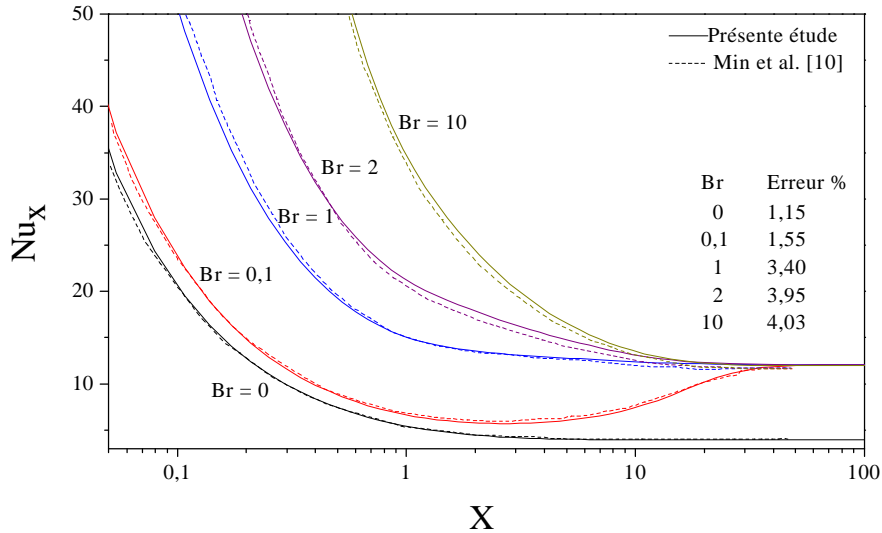


Figure IV.5 : Evolution du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du nombre de Brinckman. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$.

Les figures IV.6 et IV.7 présentent la comparaison entre l'évolution axiale de la température moyenne du fluide obtenue par le présent code de calcul avec celle obtenue par Min et al. [10] ainsi que celle de Vradis et al. [8], respectivement là aussi, Les courbes obtenues montrent une bonne concordance entre les deux résultats. Ce qui valide le présent code de calcul.

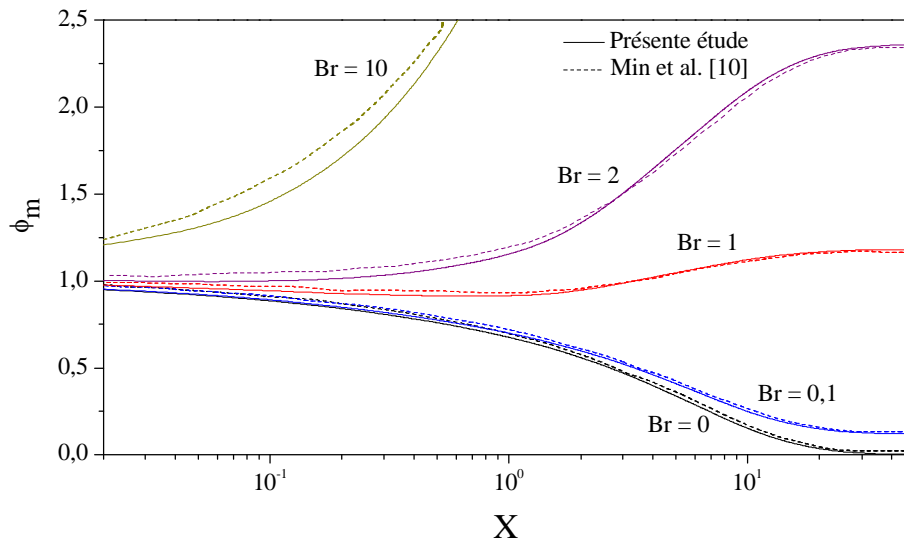


Figure IV.6 : Evolution axiale de la température moyenne du fluide. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$.

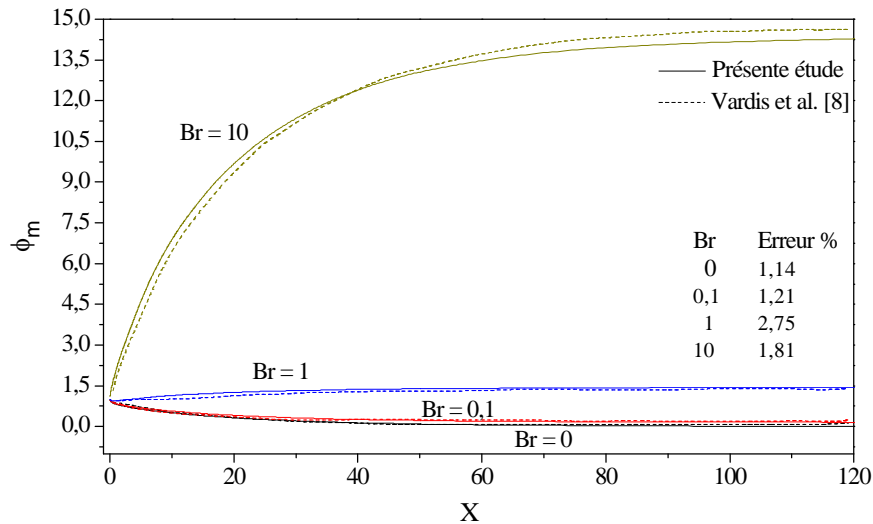


Figure IV.7 : Evolution axiale de la température moyenne du fluide.
 $Re = 50$; $Pr = 1$; $Bn = 5$.

IV.2 Ecoulement en mode de Convection Forcée pure avec propriétés rhéologiques constantes

IV.2.1 Etude hydrodynamique

Ce paragraphe est consacré à l'étude de l'influence exercée par la variation du nombre de Reynolds et celle de la contrainte seuil (nombre de Bingham) sur le champ de vitesses.

a) Influence de la contrainte seuil sur les profils de vitesse établis

La figure IV.8 présente les profils de vitesse en régime hydrodynamique établi pour un nombre de Reynolds égal à 25 et pour différentes valeurs du nombre de Bingham. Nous constatons que, mis à part le cas de $Bn = 0$ (correspondant au fluide newtonien), les courbes manifestent l'existence de deux zones distinctes :

- **Zone I :** située près de la paroi. Elle présente une distribution parabolique de la vitesse.
- **Zone II :** localisée de part et d'autre de l'axe de symétrie. Elle est caractérisée par une forme aplatie traduisant l'uniformité de la distribution de la vitesse. Au sein de cette zone, les contraintes de cisaillement restent inférieures à la contrainte seuil τ_0 . Par conséquent, le fluide résiste à la déformation et se déplace en bloc formant ainsi un bouchon.

En outre, nous remarquons que l'accroissement de la valeur du nombre de Bingham entraîne d'une part, la diminution de la vitesse du fluide et d'autre part, l'augmentation de l'étendue du bouchon, qui tend à envahir une grande partie de la section de l'écoulement. Compte tenu de la conservation du débit volumique, la zone I, qui représente la partie cisailée du fluide, subit par conséquent, une augmentation de la vitesse lorsque le nombre de Bingham augmente.

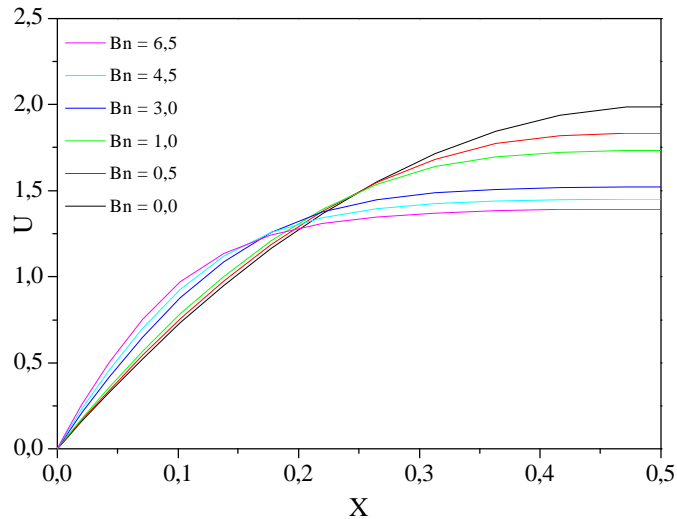


Figure IV.8 : Profils de vitesse en écoulement établi pour différentes valeurs de Bingham.
 $Re = 25$; $Pr = 1$; $Br = 0$

b) Influence de la contrainte seuil sur les profils de vitesse axiale

La figure IV.9 illustre l'évolution axiale de la vitesse centrale du fluide. Il est à noter que pour les valeurs élevées du nombre de Bingham une faible longueur d'entrée est nécessaire pour l'établissement hydrodynamique de l'écoulement.

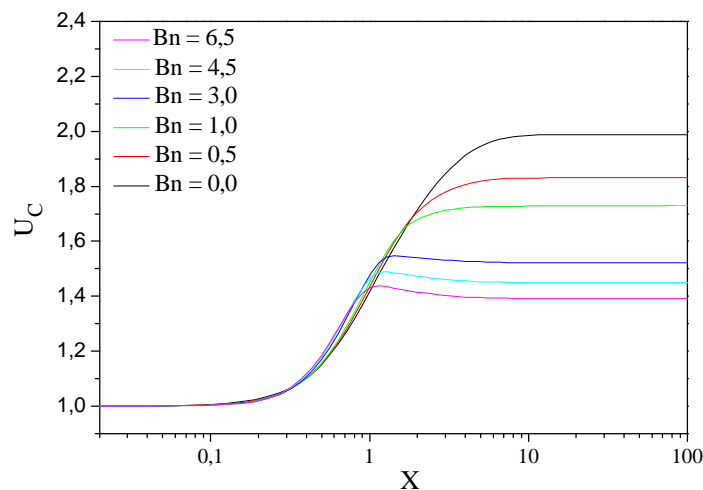


Figure IV.9 : Evolution axiale de la vitesse centrale pour différentes valeurs de Bingham.
 $Re = 25$; $Pr = 1$; $Br = 0$.

c) Influence de la contrainte seuil sur le coefficient de frottement

La Figure IV.10 présente l'évolution axiale du coefficient de frottement local de Fanning f multiplié par le nombre de Reynolds Re , pour différentes valeurs du nombre de Bingham. Il est à noter que les courbes suivent la même allure. En effet, en s'enfonçant dans la conduite, les profils de vitesses se déforment depuis forme rectangulaire (correspondant à

une profils de vitesse uniforme) jusqu'au profil correspondant à l'écoulement établi. Les gradient de vitesse (et f_{Re_x} par conséquent) diminuent en conséquence. Lorsque le régime établi, le produit ($f_x Re$) atteint sa valeur asymptotique (Annexe 5). De plus, l'effet de la variation du nombre de Bingham sur le coefficient de frottement est bien visible. Ce dernier augmente lorsque le nombre de Bingham augmente.

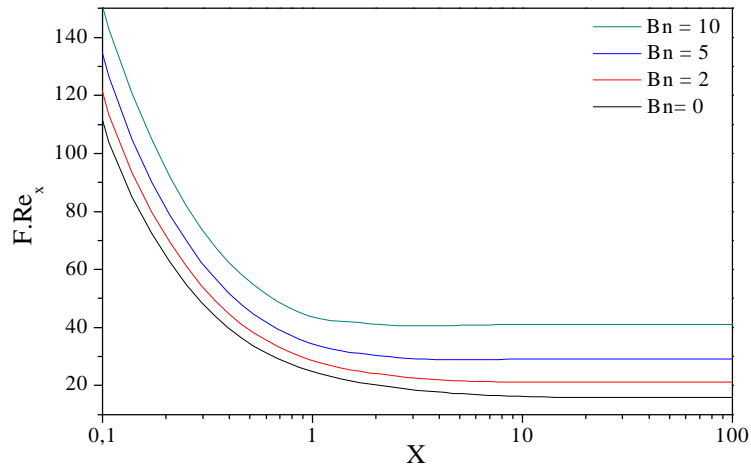


Figure IV.10 : Evolution axiale du coefficient de frottement de Fanning dans le cas du développement hydrodynamique. $Re=25$; $Pr=1$.

d) Influence de nombre de Reynolds sur les profils de vitesse axiale

La figure IV.11 présente l'évolution de la vitesse centrale, pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Nous remarquons que les courbes suivent la même allure : une croissance progressive suivant l'axe de l'écoulement jusqu'à atteindre une valeur constante de la vitesse, qui se traduit par l'établissement hydrodynamique. Il est à noter également que l'augmentation du nombre de Reynolds entraîne la diminution de la vitesse centrale d'une part, et l'augmentation de la longueur d'établissement hydrodynamique d'autre part.

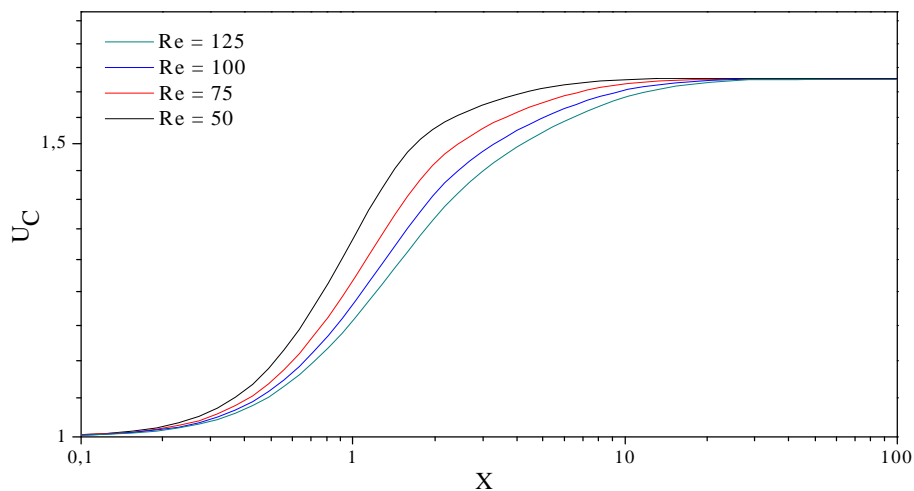


Figure IV.11: Evolution de la vitesse centrale pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. $Pr = 1$; $Bn = 1,99$; $Br = 0$.

IV.2.2 Etude thermique

Ce paragraphe porte sur l'analyse de l'influence du nombre de Reynolds, de la contrainte seuil, représentée par le nombre de Bingham, et de la dissipation visqueuse sur l'évolution du champ thermique.

a) Influence du nombre de Reynolds sur l'intensité de l'échange thermique

L'évolution axiale du nombre de Nusselt est présentée sur la figure IV.12 pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Toutes les courbes présentent le même aspect : une diminution aigüe localisée au niveau de la zone d'entrée caractérisée par un fort gradient de température, puis une évolution vers une valeur limite qui traduit l'établissement du régime thermique.

Nous constatons que l'influence de la variation du nombre de Reynolds n'est ressentie qu'au niveau de la zone d'entrée où l'accroissement du nombre de Reynolds provoque une intensification de l'échange thermique et un prolongement de la zone en question. Par contre, la valeur asymptotique du nombre de Nusselt correspondant au régime thermique établi ($Nu_{\infty} = 3,99$) reste insensible aux variations du nombre de Reynolds.

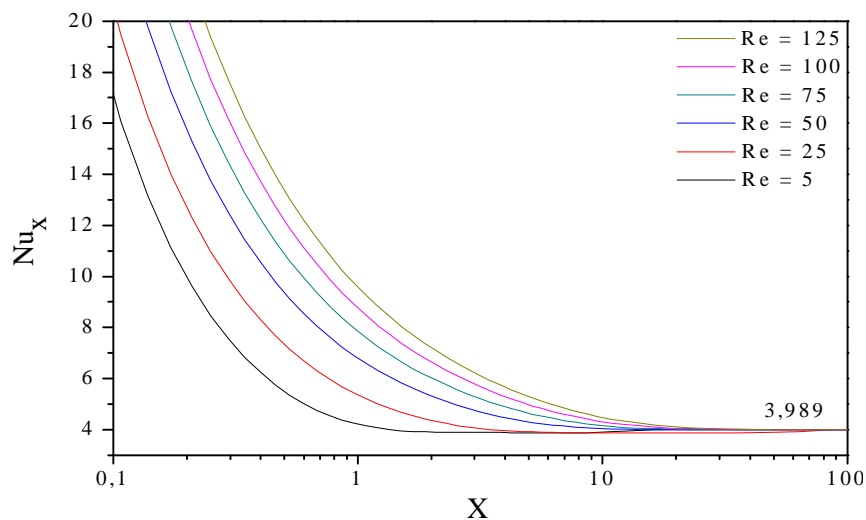


Figure IV.12 : Evolution axiale du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. $Pr = 1$; $Bn = 1,99$; $Br = 0$.

b) Influence de la contrainte seuil sur l'intensité de l'échange thermique

La figure IV.13 illustre l'évolution des profils de température pour des valeurs du nombre de Bingham égales à 0, 1,99 et 5,65. Nous remarquons une diminution de la température du fluide jusqu'à l'égalité avec la température de la paroi, et ce dans le cas où la dissipation visqueuse est négligée.

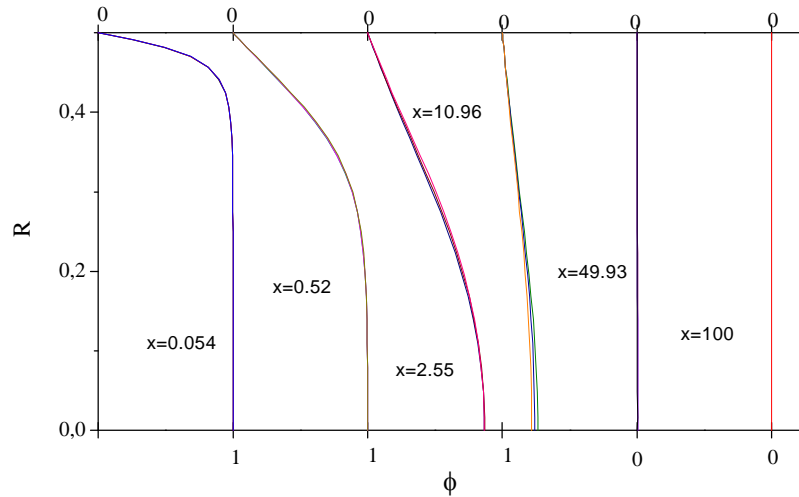


Figure IV.13 : Profils de température pour différentes valeurs du nombre de Bingham.
 $Re = 25$; $Br = 0$; $Bn = 0$; 1,99 et 5,65.

L'intensité de l'échange thermique est présentée sur la figure IV.14 où les courbes traduisant l'évolution du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du nombre de Bingham, montrent une légère amélioration de l'échange thermique lorsque celui-ci augmente.

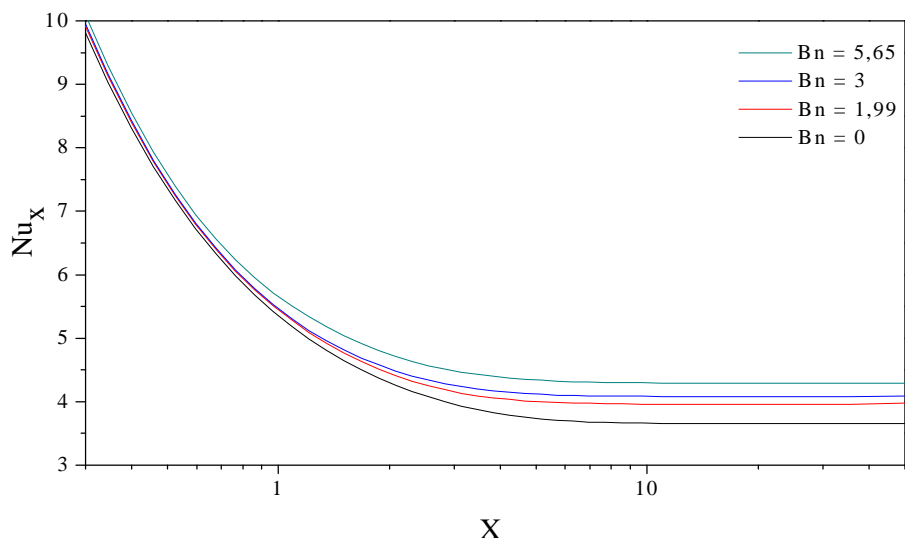


Figure IV.14 : Evolution du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du nombre de Bingham. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Br = 0$.

c) Influence de la dissipation visqueuse sur l'intensité de l'échange thermique

L'évolution des profils de température suivant l'axe de symétrie dans d'un nombre de Brinckman positif ($Br > 0$) est présentée sur la figure IV.15.

Nous remarquons que les profils de température manifestent un retard dans leurs évolutions par rapport aux profils correspondant à une valeur nulle du nombre de Brinckman. Ce retard est ressenti fortement à partir du moment où la température de la couche fluide en contact avec la paroi se rapproche de celle de la paroi.

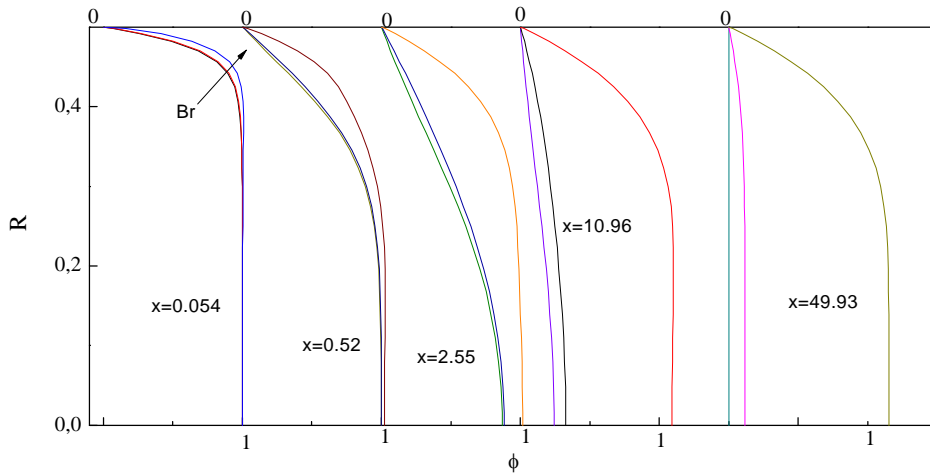


Figure IV.15 : Profils de température pour différentes valeurs du nombre de Brinckman. $Re = 25, Bn = 1,99 ; Br = 0 ; 0,1 \text{ et } 1.$

La figure IV.16 montre l'évolution axiale de la température moyenne, lorsque la dissipation visqueuse est prise en considération et ce, pour différentes valeurs du nombre de Brinckman. Les courbes obtenues présentent la même tendance que celles issues des résultats analytiques de la référence [11].

- Pour $X < 10^{-1}$, l'influence de la prise en compte de la dissipation visqueuse n'est pas ressentie, la température moyenne ne dépasse pas 1.
- Pour $X > 10^{-1}$, en s'éloignant de l'entrée, l'effet de la dissipation s'intensifie et la température moyenne dépasse alors 1.

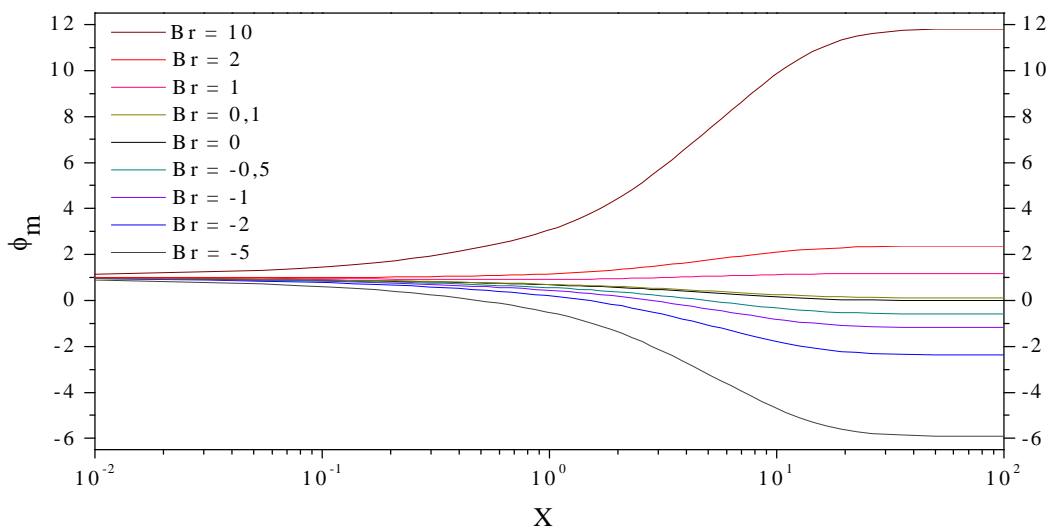


Figure IV.16 : Evolution de la température moyenne pour différentes valeurs du nombre de Brinckman. $Re = 25 ; Pr = 1 ; Bn = 1,99.$

La figure IV.17 illustre la variation de l'intensité de l'échange thermique fluide-paroi. Nous notons que les courbes représentant le nombre de Nusselt local tendent vers une valeur limite égale à 12,42 qui est trois fois supérieure à celle obtenue lorsque la dissipation visqueuse n'est pas prise en compte. Cette valeur asymptotique traduit l'établissement du régime thermique. Notons également que l'augmentation du nombre de Brinkman améliore le transfert de chaleur étant donné que la dissipation visqueuse est une chaleur supplémentaire issue de la transformation de l'énergie mécanique en énergie thermique.

Pour les valeurs négatives du nombre de Brinkman. Les courbes présentent une discontinuité qui apparaît lorsque la température moyenne du fluide devient très proche de celle de la paroi, engendrant ainsi, un état d'indétermination. Les courbes tendent, ensuite, vers la même valeur asymptotique, qui est de 12,42, traduisant l'établissement du régime thermique. Nous remarquons en outre, l'existence de valeurs négatives du nombre de Nusselt qui s'explique par le fait que lorsque la température du fluide est inférieure à celle de la paroi, le flux de chaleur change de direction et le fluide se refroidit.

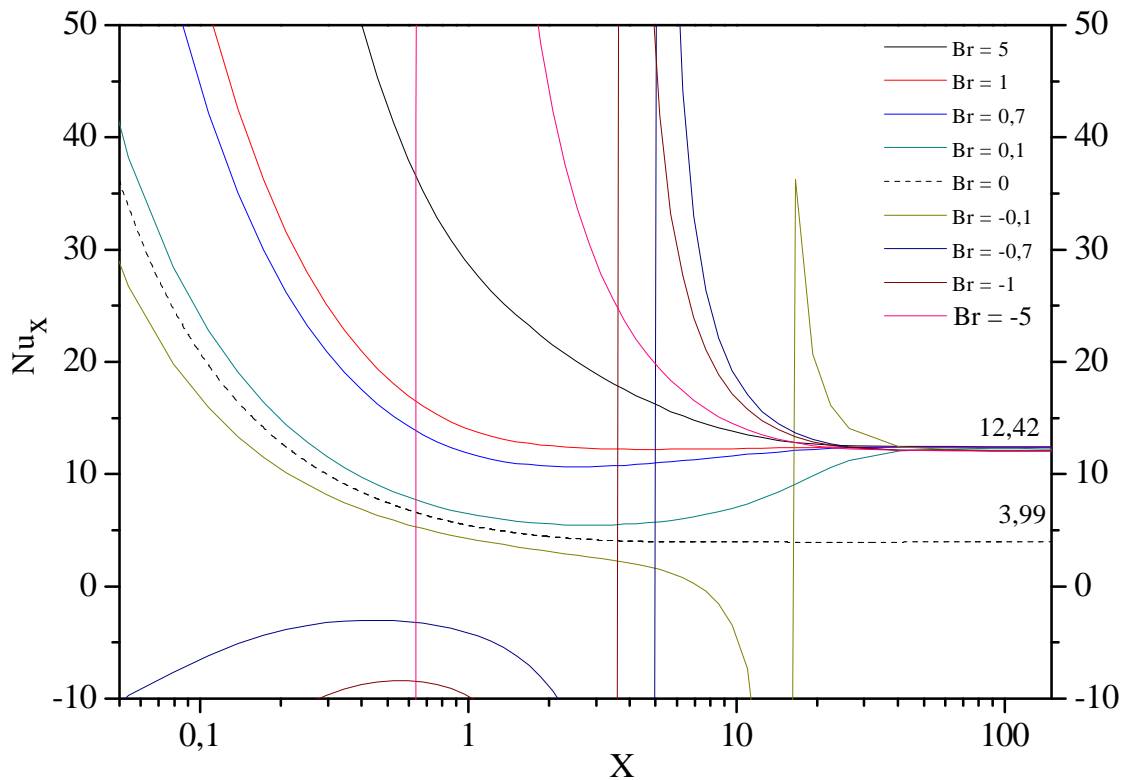


Figure IV.17 : Evolution axiale du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du nombre de Brinkman. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$.

IV.3 Ecoulement en mode de Convection Forcée pure avec propriétés rhéologiques variables

IV.3.1 Ecoulement avec dissipation visqueuse négligée

IV.3.1.1 Viscosité plastique thermodépendante

a) Champ de vitesse

- Cas du chauffage :

Les figures IV.18 et IV.19 présentent l'évolution du profil de vitesse pour différentes sections droites de la conduite, dans le cas où la contrainte seuil τ_0 est maintenue constante et la viscosité μ_0 variable et ce, pour des différences de température égales à $+15\text{ °C}$ et $+45\text{ °C}$, respectivement. On remarque les profils se déforment et tendent vers une valeur asymptotique à partir d'une section droite correspondant à $X = 15,38$.

On note également que la vitesse centrale augmente dans les premières sections droites pour atteindre une valeur maximale puis diminue. Inversement, étant donné la conservation du débit, le gradient de vitesse pariétal diminue puis augmente en $X = 2,42$. Dans la région de l'écoulement hydrodynamiquement complètement établi, le profil de vitesse se rétracte étant donné que les couches fluides adjacentes à la paroi s'accélèrent sous l'effet de la diminution de la viscosité. Il est à noter également que près de l'entrée (en $X = 0,15, 0,49$ et $0,81$), les profils passent par un maximum près de la paroi et un minimum au centre de la conduite. Ce comportement disparaît au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'entrée de la conduite. Le même résultat a également été reporté par Min et al. [10].

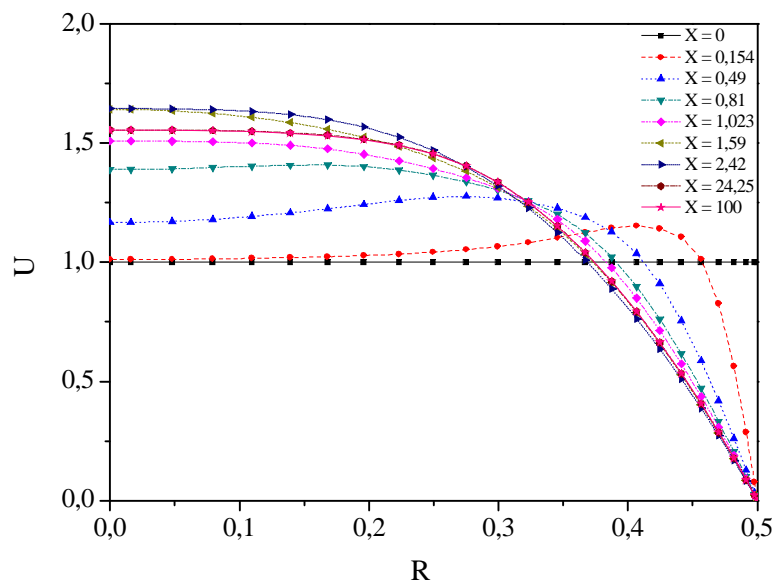


Figure IV.18 : Développement des profils de vitesse axiale pour différentes sections droites de la conduite dans le cas d'une viscosité thermodépendante.

$Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$; $\Delta T = +15\text{ °C}$.

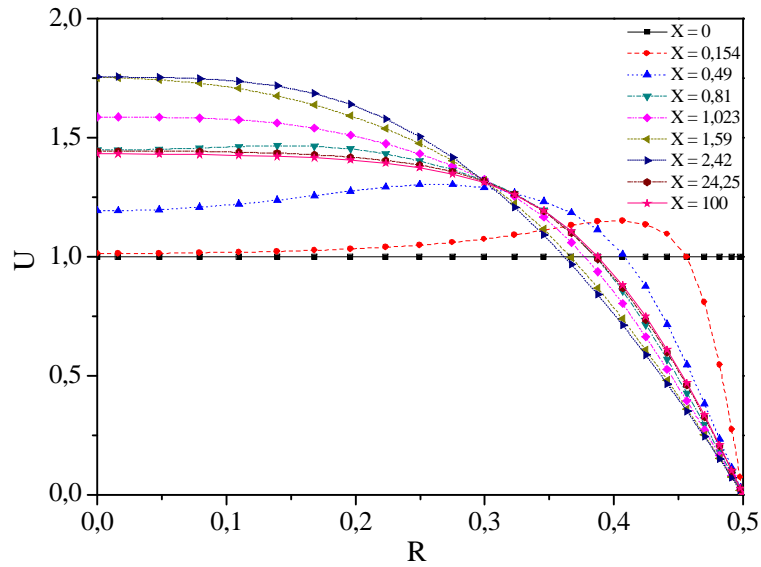


Figure IV. 19 : Développement des profils de vitesse axiale pour différentes sections droites de la conduite dans le cas d’une viscosité thermodépendante.
 $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$; $\Delta T = +45$ °C.

• **Cas du refroidissement :**

Sur les figures IV.20 et IV.21, correspondant au refroidissement du fluide au furet à mesure de son écoulement, nous observons que les profils de vitesse axiale se développent progressivement jusqu’à atteindre la structure de l’écoulement établi et ce à partir de la section droite $X = 15,38$.

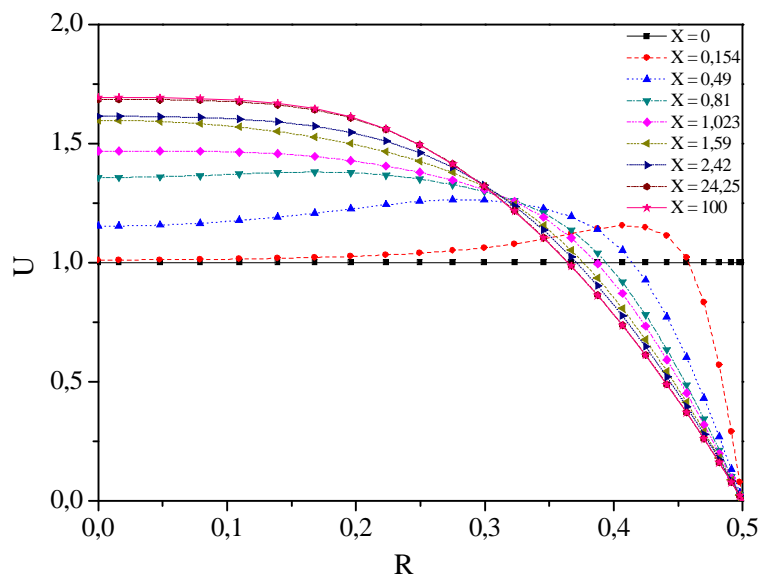


Figure IV.20 : Développement des profils de vitesse pour différentes sections droites, dans le cas d’une viscosité thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$; $\Delta T = -15$ °C.

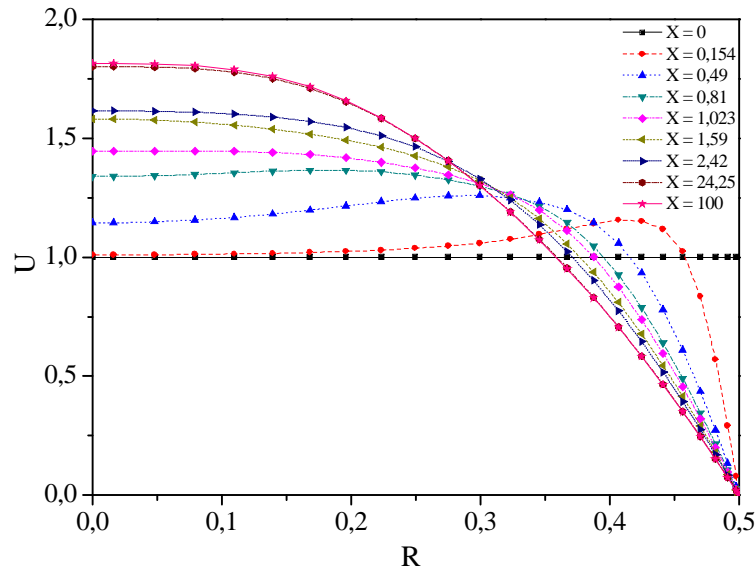


Figure IV.21 : Développement des profils de vitesse pour différentes sections droites, dans le cas d'une viscosité thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$; $\Delta T = -45$ °C.

L'effet de la variabilité de la viscosité en fonction de la température sur les profils de vitesse établie pour le cas du chauffage et du refroidissement est illustré à travers la figure IV.22. Nous observons une distorsion des profils, en comparaison avec le cas isovisqueux ($\Delta T = 0$). En effet, le chauffage ou le refroidissement des couches fluides pariétales entraînent respectivement, une lubrification pariétale ou un freinage de ces couches fluides. Par conséquent, une contraction ou une extension du profil de vitesse a lieu pour assurer la conservation du débit d'écoulement. De plus, l'augmentation de la différence de température de +15 °C à +45 °C conduit à une augmentation de l'étendue du bouchon positionné au niveau de la partie centrale de la conduite. Inversement, pour le cas du refroidissement, lorsque la différence de température passe de -15 °C à -45 °C, le fluide des régions centrales s'écoule plus rapidement et l'étendu du bouchon devient faible.

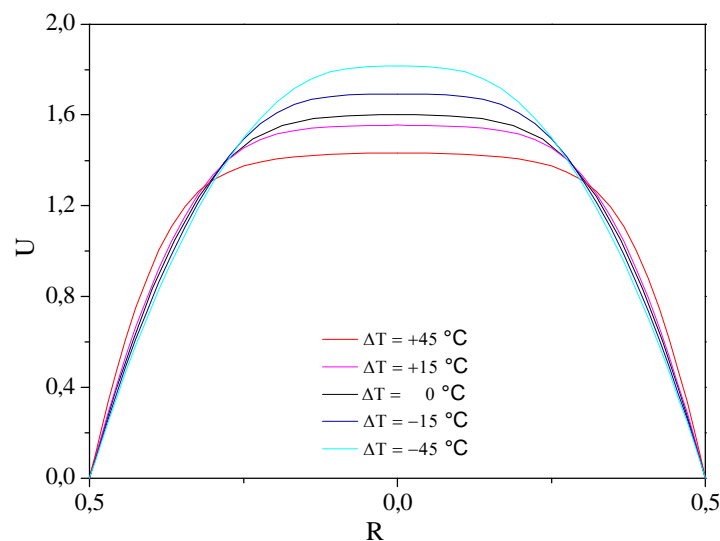


Figure IV.22 : Profils de vitesse établie dans le cas d'une viscosité thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$.

La figure IV.23 illustre l'évolution axiale de la vitesse centrale dans le cas du chauffage et du refroidissement. Dans le cas du chauffage, cette vitesse varie depuis celle de l'entrée ($U_c = 1$) jusqu'à une valeur correspondant à l'écoulement établi, en passant par un maximum. Par contre, dans le cas du refroidissement, nous assistons à une augmentation graduelle de la vitesse centrale jusqu'à atteindre celle du régime établi.

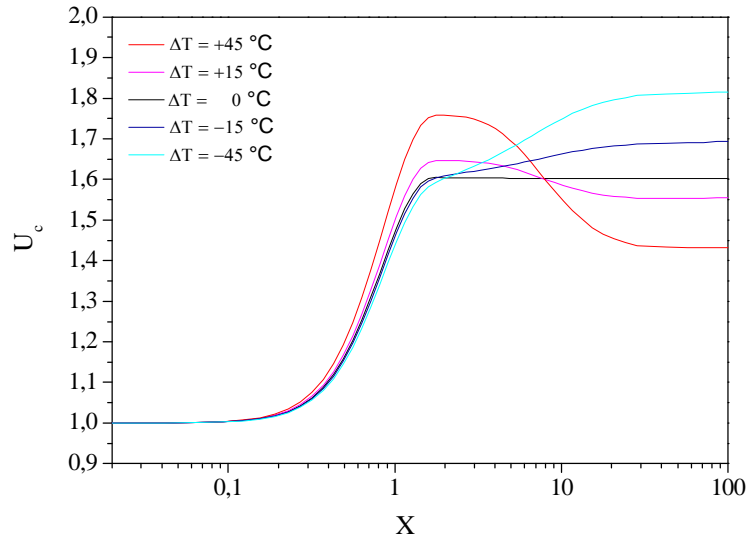


Figure IV.23 : Evolution axiale de la vitesse centrale dans le cas d'une viscosité thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$.

b) Coefficient de frottement et nombre de Nusselt

Etant donné que la variabilité de la viscosité en fonction de la température conduit à des effets importants sur le développement des profils de vitesses axiales, cela se répercute directement sur les frottements et par conséquent, les pertes de charge ainsi que sur le transfert de chaleur travers le nombre de Nusselt. Les figures IV.24 et IV.25 illustrent l'évolution axiale du coefficient de frottement ($f.Re$) et du nombre de Nusselt local, respectivement pour différents écarts de température.

Nous constatons sur la figure IV.24 l'existence d'écarts considérables par rapport au cas isovisqueux, en particulier dans la zone de l'écoulement établi. Ces écarts atteignent des valeurs relatives égales à 10,60 %, 5,50 %, 4,40 % et 22,16 % pour des différences de température égales respectivement à -45 °C, -15 °C, +15 °C et +45 °C, pour $X = 100$, tels que présentés sur le tableau IV.1. De plus, nous remarquons que l'augmentation de la différence de température dans le cas du chauffage, pour la région de l'écoulement établi conduit à l'augmentation du coefficient de frottement étant donné que le gradient pariétal de vitesse augmente en raison de la diminution de la viscosité près de la paroi, (figure IV.22). Pour le cas du refroidissement, la viscosité près de la paroi augmente lorsque la paroi est refroidie. Par conséquent, le gradient pariétal de vitesse décroît comme l'illustre la figure IV.22 et par conséquent, le coefficient de frottement diminue.

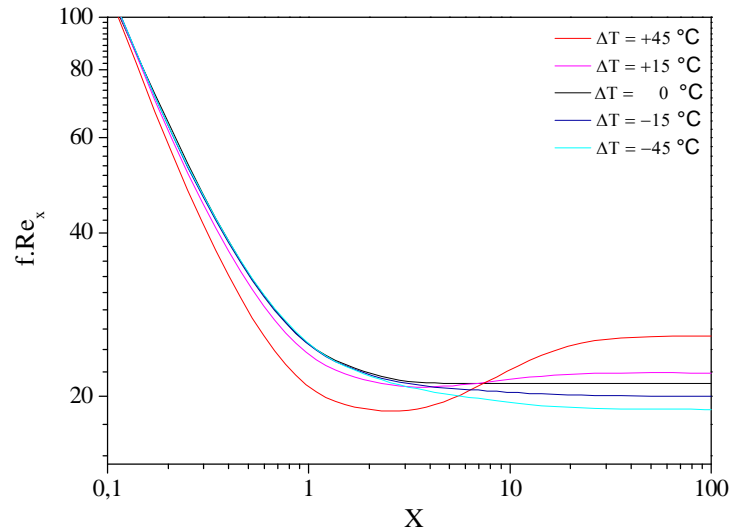


Figure IV.24: Evolution axiale du coefficient de frottement dans le cas d'une viscosité thermodépendante, pour différents écarts de température. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$.

Tableau IV.1 : Ecart entre les valeurs du coefficient de frottement obtenues dans le cas de viscosité thermodépendante et le cas isovisqueux.

ΔT (°C)	Ecart (%) $\left \left(\frac{f_{\Delta T} - f_0}{f_0} \right) \right 100$
- 45	10,60
- 15	5,50
+ 15	4,40
+ 45	22,16

Concernant l'effet de la thermodépendance de la viscosité sur les caractéristiques thermiques de l'écoulement, nous constatons sur la figure IV.25 qu'en régime établi l'augmentation de la différence de température pour le cas du chauffage, entraîne l'augmentation du nombre de Nusselt. Cela est dû au fait que l'augmentation de la différence de température réduit la viscosité près de la paroi et par conséquent augmente le gradient pariétal de vitesse, tel que présenté sur la figure IV.22. Dans le cas du refroidissement, plus la paroi est refroidie moins est grande la valeur du gradient pariétal de vitesse, (figure IV.22), et donc moins est important le transfert de thermique (étant donné que la viscosité près de la paroi augmente). Les écarts calculés entre les valeurs du nombre de Nusselt obtenues pour le cas de viscosité thermodépendante et celles du cas isovisqueux sont de 5,30 %, 2,60 %, 2,90 % et 7,90 % pour des différences de température égales à -45 °C, -15 °C, + 15°C et +45 °C, respectivement tel que présenté sur le tableau IV.2.

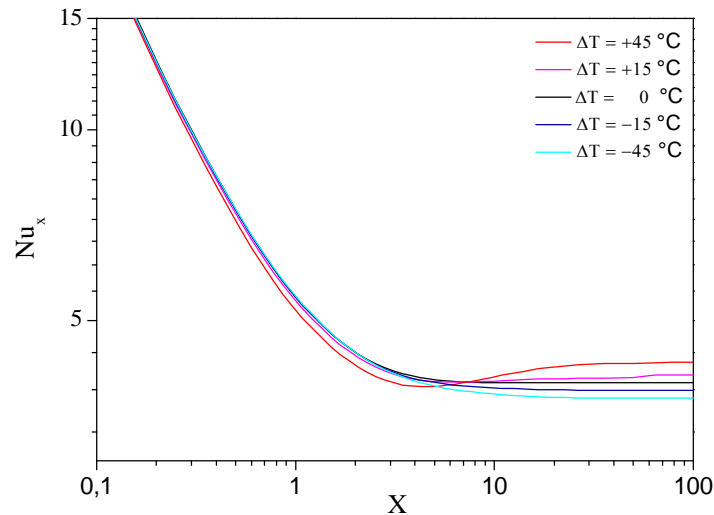


Figure IV.25: Evolution axiale du nombre de Nusselt dans le cas d'une viscosité thermodépendante, pour différents écarts de température. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$.

Tableau IV.2 : Ecart entre les valeurs du nombre de Nusselt obtenues pour le cas de viscosité thermodépendante et le cas isovisqueux.

ΔT (°C)	Ecart (%) $\left(\left \frac{Nu_{\Delta T} - Nu_0}{Nu_0} \right \right) 100$
- 45	5,30
- 15	2,60
+ 15	2,90
+ 45	7,90

IV.3.1.2 Contrainte seuil thermodépendante

a) Champ de vitesse

- **Cas du chauffage :**

Les figures IV.26 et IV.27 illustrent l'évolution du profil de vitesse dans le cas du chauffage ($\Delta T = +15$ °C et $\Delta T = +45$ °C), pour différentes sections droites de la conduite, dans le cas où la contrainte seuil varie en fonction de la température. Nous remarquons un comportement identique à celui observé précédemment dans le cas d'un refroidissement et pour une viscosité variable (figure IV.20 et IV.21), c'est à dire une augmentation progressive de la vitesse jusqu'à atteindre une valeur maximale correspondant à l'établissement du régime hydrodynamique. Il est à noter également que l'augmentation de la différence de température (de +15 °C à +45 °C) entraîne l'augmentation de la vitesse maximale et la diminution de l'étendue du bouchon.

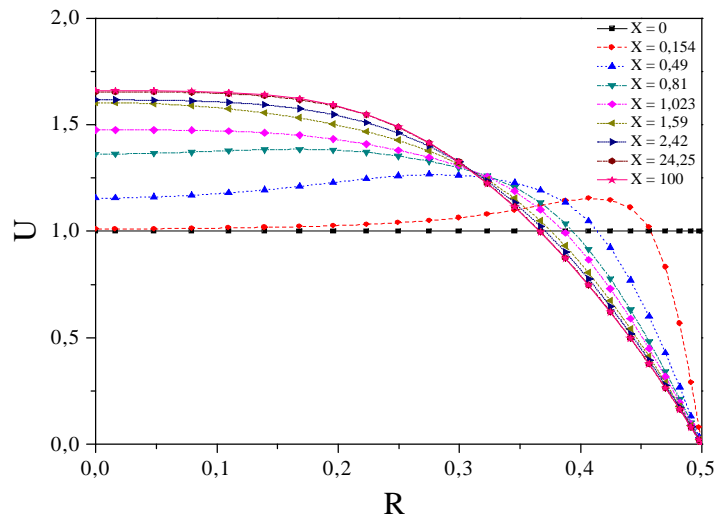


Figure IV.26 : Profils de vitesse pour différentes sections droites, dans le cas d’une contrainte seuil thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$; $\Delta T = +15$ °C.

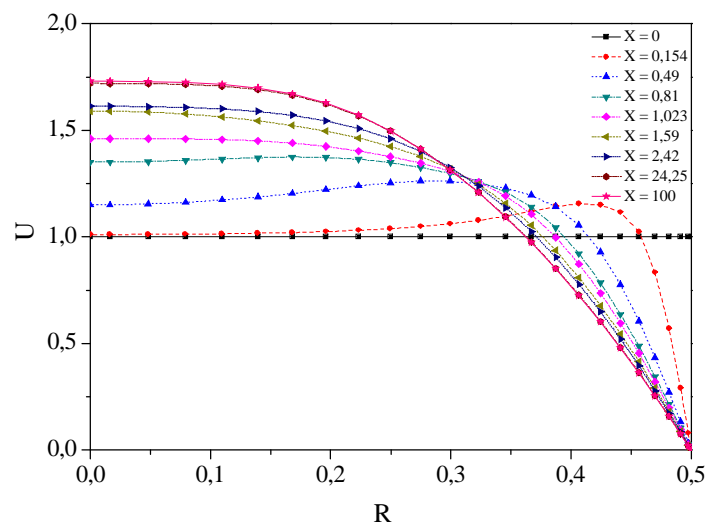


Figure IV.27 : Profils de vitesse pour différentes sections droites, dans le cas d’une contrainte seuil thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$; $\Delta T = +45$ °C.

• **Cas du refroidissement :**

Les figures IV.28 et IV.29 représentent le développement du profil de vitesse dans le cas du refroidissement pour $\Delta T = -15$ °C et -45 °C, respectivement. Un comportement similaire que celui obtenu pour le cas d’un chauffage lorsque la viscosité varie en fonction de la température est observé (figure IV.18 et figure IV.19). Il est à noter que Vinay et al. [26] ont obtenu le même résultat concernant le transport des paraffines dans les pipelines.

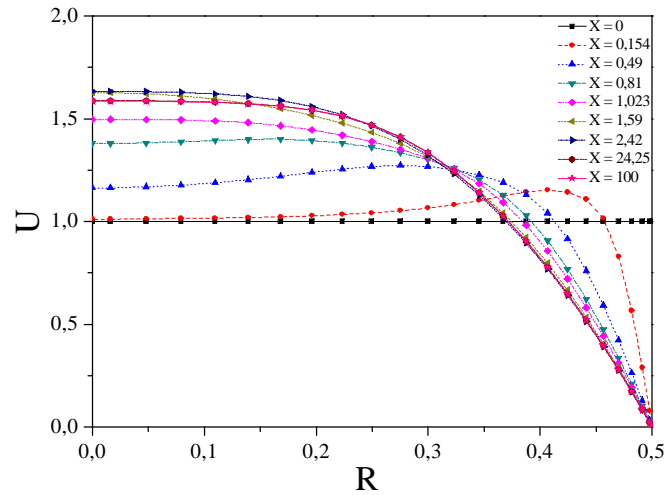


Figure IV.28 : Profils de vitesse pour différentes sections droites, dans le cas d’une contrainte seuil thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$; $\Delta T = -15$ °C.

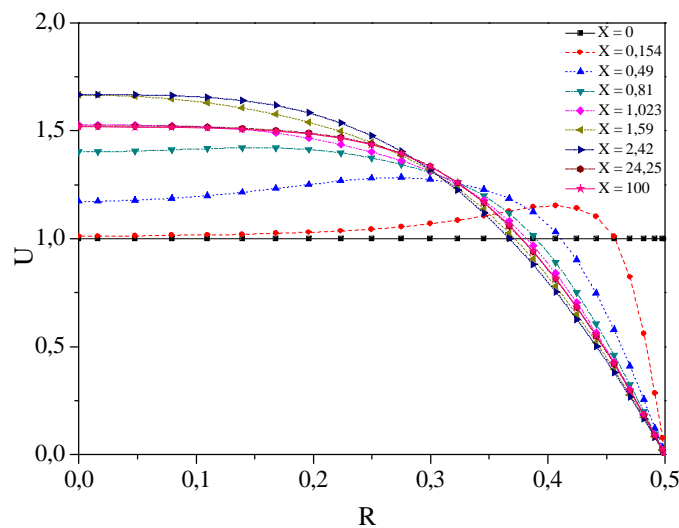


Figure IV.29 : Profils de vitesse pour différentes sections droites, dans le cas d’une contrainte seuil thermodépendante. $Re = 25$, $Pr = 1$, $Bn = 1,99$, $\Delta T = -45$ °C.

La figure IV.30 schématise le profil de vitesse en régime hydrodynamique établi pour le cas d’un chauffage et d’un refroidissement. Nous remarquons que pour le cas du chauffage que l’augmentation de la différence de température entraîne d’une part l’augmentation de la vitesse et d’autre part, la diminution de l’étendue du bouchon. En effet, l’augmentation de la température entraîne la diminution de la valeur de la contrainte seuil. On tend alors asymptotiquement vers la loi rhéologique du fluide newtonien qui se traduit par la structure de l’écoulement de Poiseuille. Par contre, dans le cas du refroidissement, nous remarquons que l’étendue du bouchon augmente et la vitesse centrale diminue lorsque la différence de température passe de -15 °C à -45 °C.

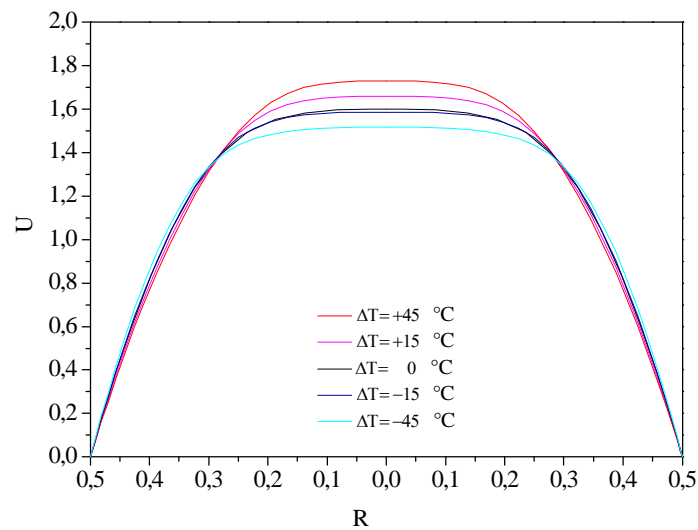


Figure IV.30 : Profils de vitesse établie dans le cas d’une contrainte seuil thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$.

La figure IV.31 montre la variation de la vitesse centrale. Nous constatons que le comportement inverse que celui du cas de viscosité variable a lieu.

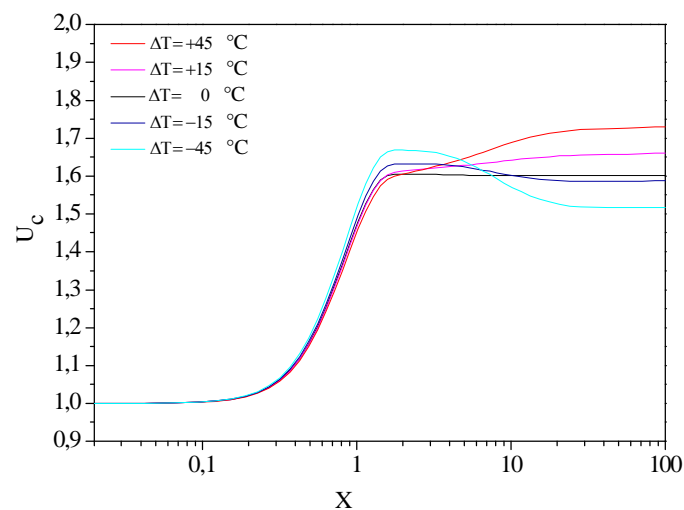


Figure IV.31 : Evolution axiale de la vitesse centrale dans le cas d’une contrainte seuil thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$.

b) Variation du coefficient de frottement et du nombre de Nusselt

L’évolution axiale du coefficient de frottement est illustrée à travers la figure IV.32. L’augmentation de la différence de température dans le cas du chauffage conduit à la diminution du coefficient de frottement dans la région de l’écoulement établi. En effet, lorsque la différence de température augmente, le gradient de vitesse pariétal décroît selon la

figure IV.30. Dans le cas du refroidissement, lorsque la différence de température passe de -15 °C à -45 °C, le coefficient de frottement augmente étant donné que le gradient de vitesse pariétal augmente (figure IV.30). L'effet de la variabilité en fonction de la température de la contrainte seuil est bien visible sur le tableau IV.3 qui présente l'écart entre les valeurs du coefficient de frottement obtenues dans le cas où la contrainte seuil varie en fonction de la température et celles où elle est maintenue constante. Ces écarts sont de 8,45 %, 1,50 %, 3,70 % et 7,30 % pour des différences de température de -45 °C, -15 °C, +15 °C et +45 °C, respectivement.

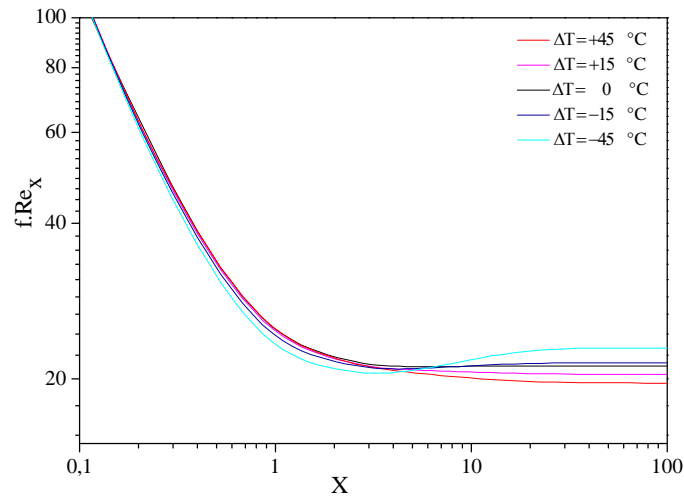


Figure IV.32 : Evolution axiale du coefficient de frottement dans le cas d'une contrainte seuil thermodépendante, en fonction de la différence de température. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$.

Tableau IV.3 : Ecarts entre les valeurs du coefficient de frottement obtenues pour le cas de contrainte seuil thermodépendant et le cas de contrainte seuil constante.

ΔT (°C)	Ecart (%) $\left \left(\frac{f_{\Delta T} - f_0}{f_0} \right) \right 100$
- 45	7,30
- 15	1,50
+ 15	3,70
+ 45	8,45

Contrairement à ce qui a été trouvé pour le cas de la viscosité variable (figure IV.25), nous constatons sur la figure IV.33, qui représente l'évolution axiale du nombre de Nusselt correspondant au cas où la contrainte seuil varie en fonction de la température, que le transfert thermique dans la région établie est meilleur dans le cas du refroidissement ($\Delta T < 0$). De même, l'augmentation de la différence de température pour le cas du chauffage entraîne une décroissance du nombre de Nusselt, étant donné que le gradient de vitesse à la paroi diminue lorsque la différence de température augmente (figure IV.30). Les écarts relatifs entre les

valeurs du Nusselt obtenues lorsque la contrainte seuil varie en fonction de la température et celles obtenues lorsqu'elle est prise constante sont de 3,50 %, 1,01 %, 1,30 % et 3,60 % pour des différences de température de -45 °C, -15 °C, +15 °C et +45 °C, respectivement.

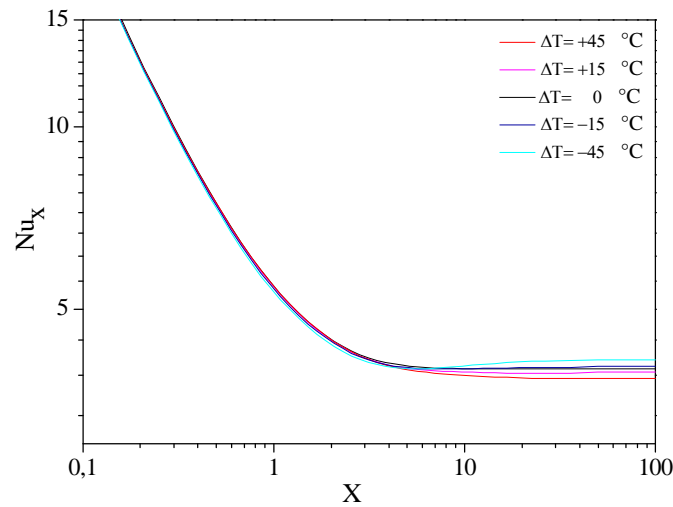


Figure IV.33 : Evolution axiale du nombre de Nusselt dans le cas d’une contrainte seuil thermodépendante, pour différents écarts de température. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$.

Tableau IV.4 : Ecart entre les valeurs du nombre de Nusselt obtenues pour le cas de contrainte seuil thermodépendante et le cas de contrainte seuil constante.

ΔT (°C)	Ecart (%) $\left(\frac{Nu_{\Delta T} - Nu_0}{Nu_0} \right) * 100$
- 45	3,50
- 15	1,01
+ 15	1,30
+ 45	3,60

IV.3.2 Ecoulement en présence de la dissipation visqueuse

IV.3.2.1 Viscosité plastique thermodépendante

a) Champs de vitesse

La figure IV.34 montre les profils de vitesse établie dans le cas où la viscosité plastique du fluide varie en fonction de la température et ce, pour différentes valeurs du nombre de Brinckman. Nous obtenons les mêmes profils que ceux relevés dans le cas isovisqueux c’est-à-dire, l’existence de la région correspondant à l’écoulement cisailé et celle relative à l’écoulement piston ou bouchon.

Notons que l'augmentation du nombre de Brinckman engendre l'extension des profils de vitesse. Effectivement, lorsque ce nombre augmente, nous assistons à un refroidissement du fluide puisque sa température moyenne augmente et dépasse l'unité à cause des frottements entre les couches centrales du fluide, ce qui donne lieu à une chaleur supplémentaire. Par conséquent, les couches fluides pariétales voient leur viscosité augmenter, ce qui va freiner leur écoulement et donc, accélérer les couches centrales, par conservation du débit volumique et par conséquent, diminuer l'étendue l'écoulement de la zone en bouchon.

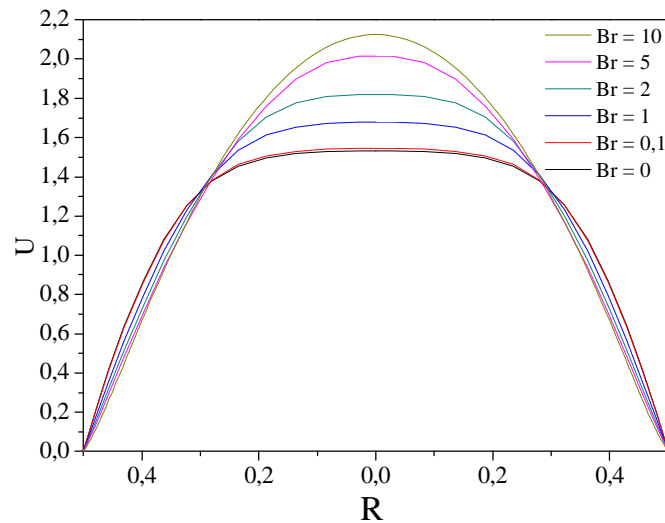


Figure IV.34 : Profils de vitesse établie pour différentes valeurs du nombre de Brinckman, dans le cas d'une viscosité plastique thermodépendante.
 $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $\Delta T = 15$ °C.

Ceci est visible également sur la figure IV.35 qui traduit l'évolution axiale de la vitesse centrale pour le cas de viscosité plastique variable, en prenant en compte de la dissipation visqueuse.

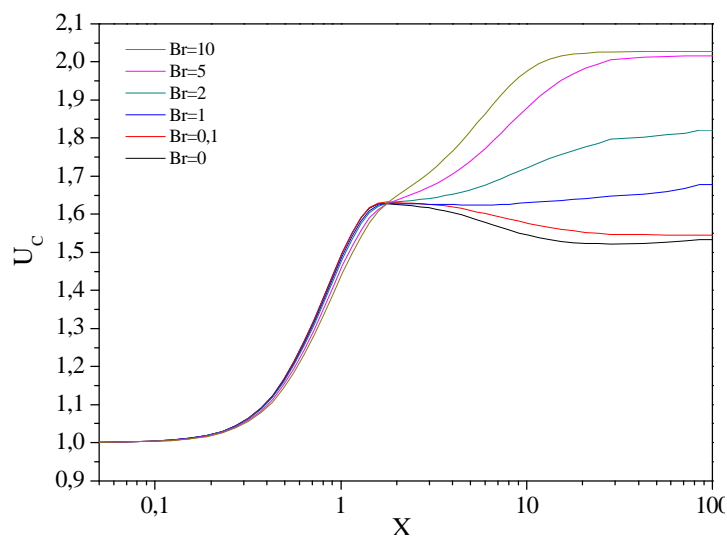


Figure IV.35 : Evolution axiale des profils de vitesse pour différence Brinckman.
 $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $\Delta T = 15$ °C

L'effet de la variabilité de la viscosité plastique du fluide en fonction de la température, traduite par la variation de l'écart de température, sur l'évolution axiale de la vitesse centrale en présence de la dissipation visqueuse est illustré sur la figure IV.36. Il est à noter que l'augmentation de l'écart de température entraîne celle de la vitesse centrale, dans la zone d'établissement. En effet, la prise en compte de la dissipation visqueuse conduit à des valeurs de la température moyenne du fluide qui dépassent l'unité et qui deviennent, par conséquent, supérieures à celle de la paroi, comme montré clairement sur la figure IV.46 où l'on voit que la température moyenne augmente avec l'augmentation de l'écart de température. La masse fluide et les couches pariétales en particulier subissent en conséquence un refroidissement qui s'intensifie avec l'accroissement de l'écart de température ce qui entraîne une augmentation de la viscosité du fluide et des couches pariétales en particulier, la vitesse centrale augmente à cause du ralentissement de l'écoulement au niveau de la paroi.

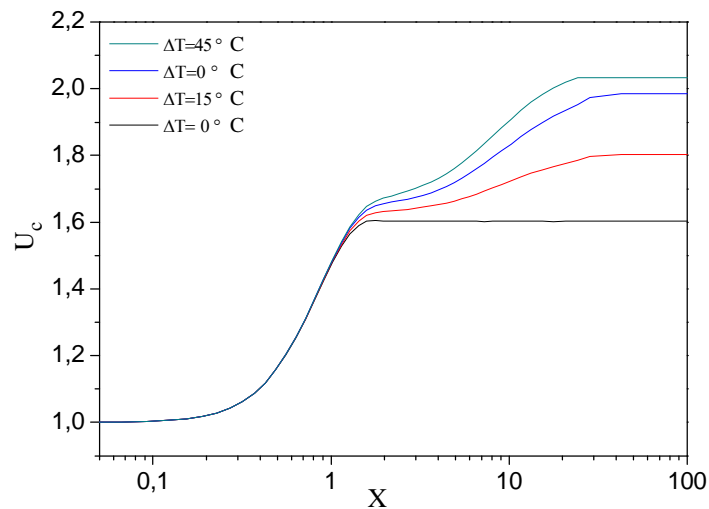


Figure IV.36 : Evolution axiale de la vitesse centrale en fonction de l'écart de température, pour le cas d'une viscosité plastique thermodépendante.

$$Re = 25 ; Pr = 1 ; Bn_0 = 1,99 \text{ et } Br = 2.$$

L'effet de la variabilité de la viscosité plastique en fonction de la température, sur le profil de vitesse en présence de la dissipation visqueuse est inverse à celui observé sur les courbes obtenues lorsque la dissipation visqueuse était négligée. Ceci est visible également sur la figure IV.37. En effet, lorsque la dissipation visqueuse est négligée ($Br = 0$), la température moyenne du fluide ne dépasse pas l'unité, le fluide est alors chauffé par la paroi. Plus l'écart de température augmente, plus le chauffage des couches fluides pariétales est intense. Ainsi, la viscosité de ces couches fluide diminue et le fluide subit alors une accélération au niveau de la paroi : les profils de vitesses se contractent.

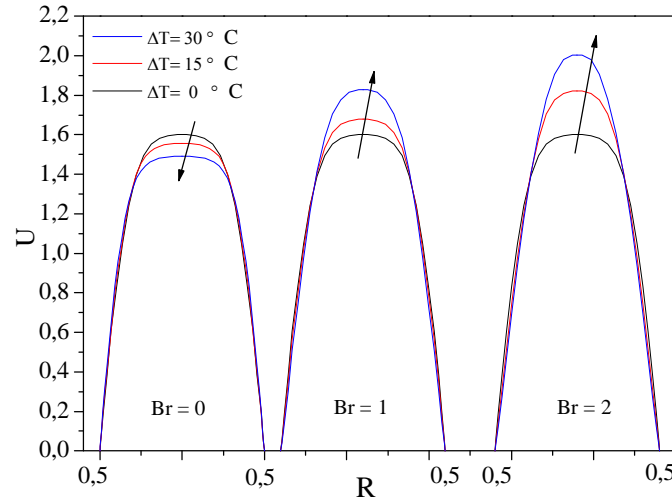


Figure IV.37 : Effet de la thermodépendance de la viscosité plastique du fluide sur les profils de vitesse, en fonction de l'écart de température et pour différentes valeurs du nombre de Brinckman. $Re = 25$; $Pr = 1$ et $Bn_0 = 1,99$.

b) Coefficient de frottement

La figure IV.38 représente l'évolution axiale du coefficient de frottement dans le cas d'une viscosité plastique thermodépendante, en fonction du nombre de Brinckman. Nous remarquons que l'augmentation du nombre de Brinckman engendre la diminution du coefficient de frottement et par conséquent la diminution du gradient de vitesse pariétal, tel qu'illustré sur la figure IV.34.

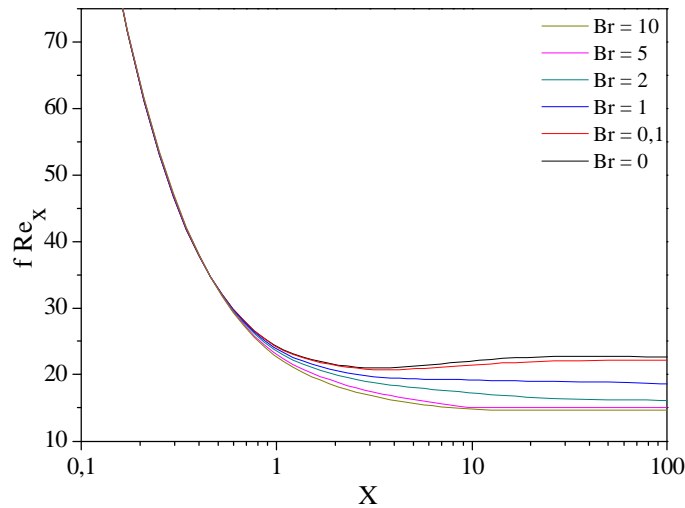


Figure IV.38 : Evolution axiale du coefficient de frottement dans le cas d'une viscosité plastique thermodépendante pour différentes valeurs du nombre de Brinckman. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $\Delta T = 15$ °C.

Quant à l'effet de la variation de la viscosité plastique en fonction de la température, en présence de la dissipation visqueuse, nous notons sur la figure IV.39 que l'augmentation de l'écart de température conduit à la diminution du coefficient de frottement, pour une valeur donnée du nombre de Brinckman. En effet, étant donné que le coefficient de frottement est directement proportionnel au gradient de vitesse pariétal, la diminution de celui-ci sous l'effet de l'augmentation de l'écart de température (figures IV.36 et 37) entraîne la diminution du coefficient de frottement.

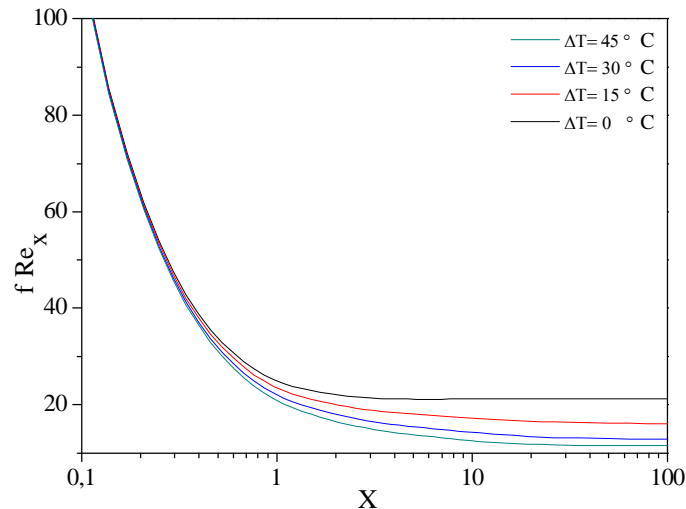


Figure IV.39 : Evolution axiale du coefficient de frottement dans le cas d'une viscosité plastique thermodépendante pour différent écarts de température.
 $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $Br = 2$.

c) Nombre de Nusselt

L'effet de la dissipation visqueuse sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt dans le cas où la viscosité plastique varie en fonction de la température, est présenté sur la figure IV.40. Rappelons que l'expression du nombre de Nusselt se traduit par la compétition entre deux fonctions : le groupement $(1/\phi_m)$ et le gradient de température à la paroi $(\partial\phi/\partial R)|_{R=0,5}$.

L'examen de la figure IV.40, montre l'existence de deux comportements : à l'entrée, l'augmentation du nombre de Brinckman améliore le transfert de chaleur une fois que le régime établi atteint, un comportement opposé a lieu. En effet l'accroissement du nombre de Brinckman fait diminuer le nombre de Nusselt.

Ce comportement peut être expliqué en représentant $(1/\phi_m)$ et $(\partial\phi/\partial R)|_{R=0,5}$. D'après la figure IV.41, nous constatons, au niveau de la zone d'entrée, que l'augmentation du nombre de Brinckman entraîne celle de la température moyenne du fluide et donc, la diminution de l'inverse de cette température (figure IV.42). Le gradient de température pariétal augmente également (figure IV.43). Par conséquent, le produit des deux fonctions conduit à l'augmentation du nombre de Nusselt dans cette zone.

A l'inverse, en s'approchant de la sortie de la conduite, les valeurs de l'inverse de la température moyenne (figure IV.42) sont inférieures à un pour les valeurs du nombre de

Brinckman dépassant 0,1. Ainsi, l'effet de l'inverse de la température moyenne l'emporte sur celui du gradient pariétal de température. Par conséquent, l'augmentation du nombre de Brinckman conduit à la diminution du nombre de Nusselt.

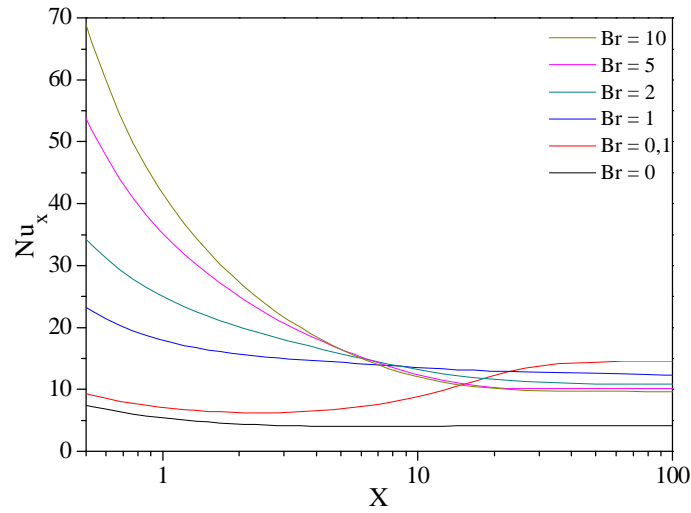


Figure IV.40 : Evolution axiale du nombre de Nusselt dans le cas d'une viscosité thermodépendante, pour différentes valeurs du nombre de Brinckman.
 $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $\Delta T = 15$ °C.

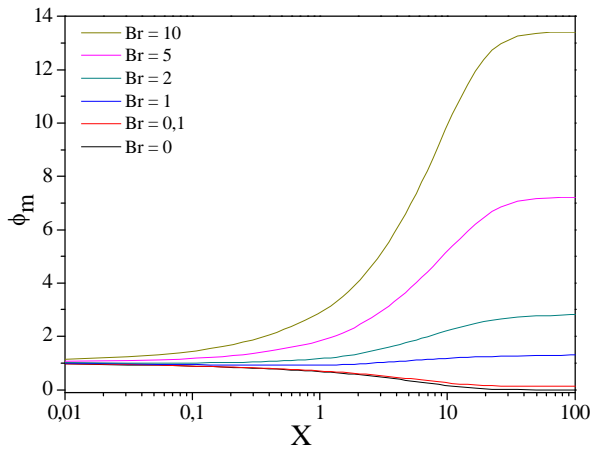


Figure IV.41 : Evolution axiale de la température moyenne du fluide en fonction du nombre de Brinckman, dans le cas d'une viscosité thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $\Delta T = 15$ °C.

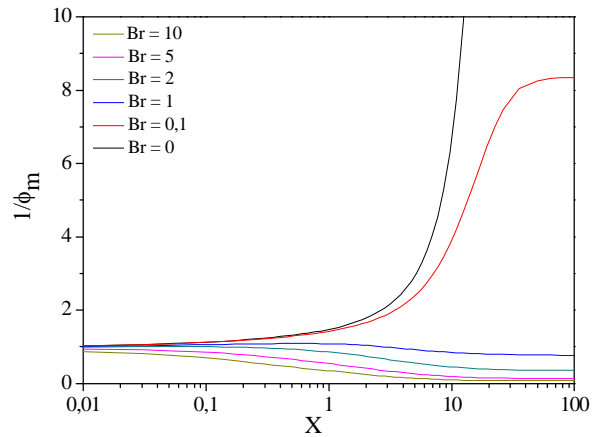


Figure IV.42 : Evolution axiale de l'inverse de la température moyenne du fluide en fonction du nombre de Brinckman, dans le cas d'une viscosité thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $\Delta T = 15$ °C.

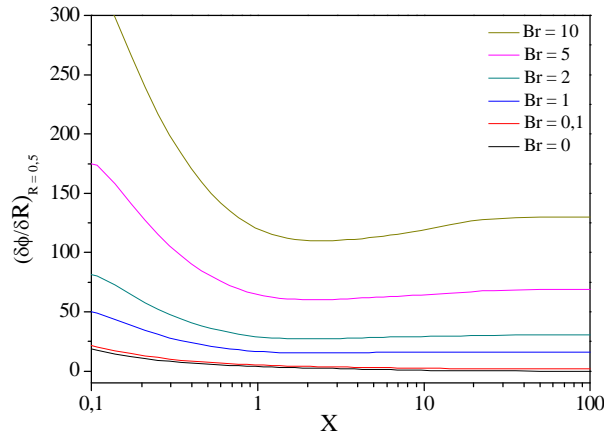


Figure IV.43 : Evolution axiale du gradient pariétal de température en fonction du nombre de Brinckman, dans le cas d’une viscosité plastique thermodépendante.
 $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $\Delta T = 15$ °C.

La figure IV.44 illustre l’effet de la variabilité de la viscosité plastique en fonction de la température, sur l’évolution axiale du nombre de Nusselt. Les courbes présentent une décroissance depuis l’entrée et une stabilisation ou fur et à mesure que l’enfance dans la conduite. Effectivement, à l’entrée de la conduite, nous remarquons une décroissance du gradient pariétal de température (figure IV.47) et également une décroissance de l’inverse de la température moyenne (figure IV.48). on assiste alors à une décroissance du nombre de Nusselt.

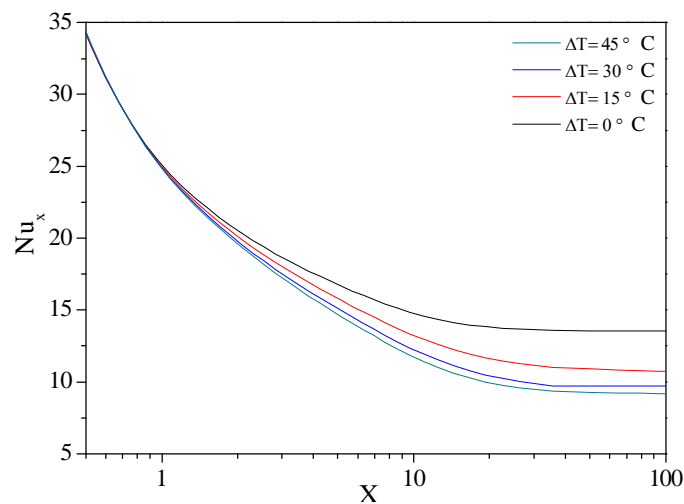


Figure IV.44 : Evolution axiale du nombre de Nusselt dans le cas d’une viscosité plastique thermodépendante, pour différents écarts de température.
 $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $Br = 2$.

L’effet de l’écart de température, quant à lui, apparaît depuis l’entrée. Nous constatons que l’augmentation de l’écart de température entraîne la diminution du nombre de Nusselt. En effet, Le gradient pariétal de température ainsi que l’inverse de la température moyenne,

(figure IV.47 et .48, respectivement), décroissent lorsque l'écart de température augmente. La prise en compte de la dissipation visqueuse provoque l'accroissement de la température moyenne du fluide pour atteindre des valeurs supérieures à l'unité. Le fluide subit donc un refroidissement puisque la température moyenne devient supérieure à celle de la paroi. L'augmentation de l'écart de température augmente la température moyenne du fluide, le fluide se refroidit de plus en plus, ralentissent ainsi l'écoulement pariétal. Par conséquent, le transfert thermique se trouver donc amoindri et le nombre de Nusselt diminue donc.

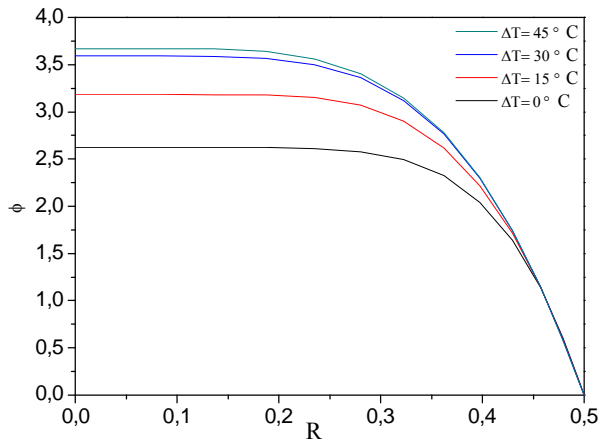


Figure IV.45 : Profils de température pour différentes valeurs de ΔT , dans le cas d'une viscosité plastique thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $Br = 2$.

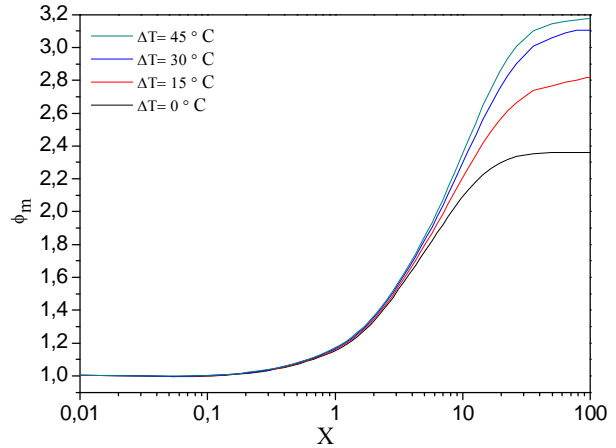


Figure IV.46 : Evolution axiale de la température moyenne pour différentes valeurs de ΔT , dans le cas d'une viscosité plastique thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $Br = 2$.

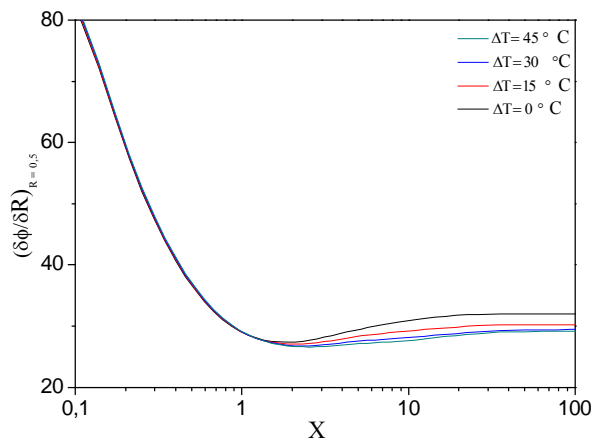


Figure IV.47 : Evolution axiale du gradient de température pariétal pour différents ΔT , dans le cas d'une viscosité plastique thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $Br = 2$.

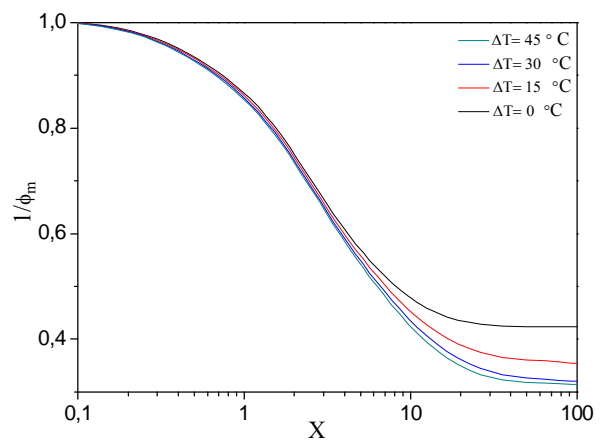


Figure IV.48 : Evolution axiale de l'inverse de la température moyenne pour différents ΔT , dans le cas d'une viscosité plastique thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $Br = 2$.

Il est intéressant de noter d'après la figure IV.44 que l'effet de la variabilité de la viscosité plastique avec la température en présence de la dissipation visqueuse est opposé à celui obtenu lorsque l'on néglige la dissipation visqueuse, comme c'est illustré à travers la figure IV.25. Pour ce dernier cas, l'augmentation de l'écart de température engendre celle du nombre de Nusselt et conduit donc, à l'amélioration du transfert thermique. En effet, la température moyenne du fluide s'accroît en fonction de l'augmentation de l'écart de température (figure IV.49) mais ne dépasse jamais l'unité. Ainsi, le fluide subit un chauffage étant donné que la température de la paroi reste supérieure à celle du fluide et la viscosité plastique du fluide diminue par conséquent. Les frottements à la paroi diminuent alors et le fluide s'écoule plus rapidement lorsque l'écart de température augmente. Le gradient de vitesse pariétal sera donc de plus en plus élevé, figure IV.37 et le transfert de chaleur entre la paroi et le fluide sera donc, amélioré.

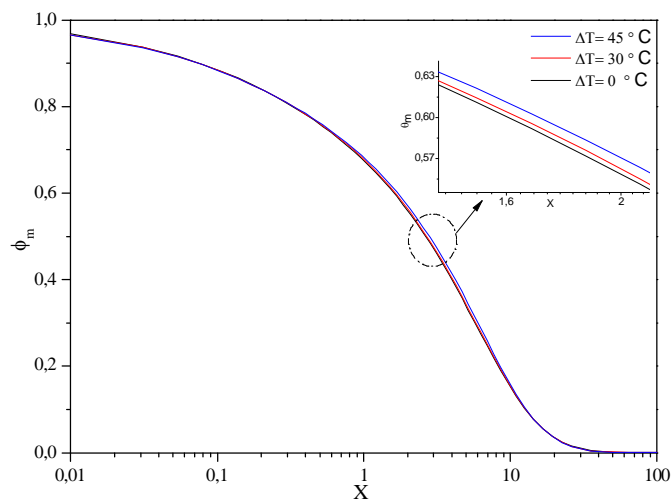


Figure IV.49 : Evolution axiale de la température moyenne dans le cas d'une viscosité plastique thermodépendante, pour différents écarts de température et pour une dissipation visqueuse négligée. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $Br = 0$.

IV.3.2.2 Contrainte seuil thermodépendante

a) Champ de vitesse

La figure IV.50 illustre les différents profils de vitesse établie relatifs aux différentes valeurs du nombre de Brinckman, dans le cas où la contrainte seuil varie en fonction de la température. La première constatation à faire, est que le profil de vitesse est identique à celui observé dans le cas où les propriétés rhéologiques du fluide (μ_0 et τ_0) étaient maintenues constantes et uniformes. En effet, nous remarquons l'existence des deux régions : une la première, correspondant à l'écoulement cisailé, et la seconde correspondant à l'écoulement en bouchon (écoulement piston).

L'effet de la dissipation visqueuse est visible sur le profil de vitesse étant donné que le système d'équations est devenu couplé (l'équation de l'énergie et les équations de l'impulsion) à cause de la variabilité de la contrainte seuil en fonction de la température (et donc, la variabilité de la viscosité apparente).

Notons, également, que l'augmentation de la valeur du nombre de Brinckman entraîne la diminution de la vitesse centrale et par conséquent, l'augmentation du gradient pariétal de vitesse.

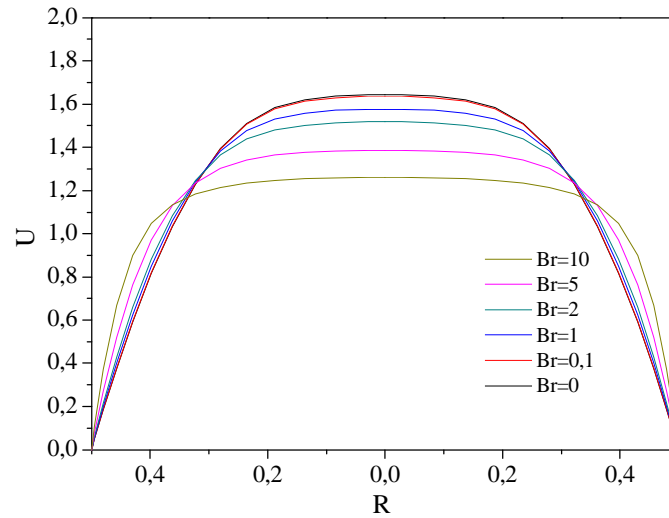


Figure IV.50 : Profils de vitesse établie pour différents nombres de Brinckman, dans le cas d'une contrainte seuil thermodépendante.
 $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $\Delta T = 15^\circ C$.

Ceci est clairement mis en évidence à travers la figure IV.51 qui représente l'évolution axiale de la vitesse centrale pour différentes valeurs du nombre de Brinckman. Il est intéressant de constater que pour des valeurs positives du nombre de Brinckman, ces courbes présentent des pics, et ce avant d'atteindre la zone d'établissement du régime hydrodynamique, pour des valeurs positives du nombre de Brinckman. Ces pics sont de plus en plus visibles pour les valeurs les plus élevées du nombre de Brinckman.

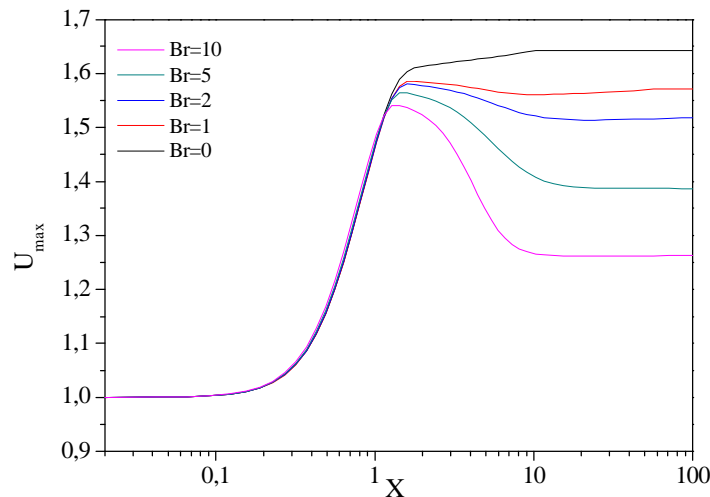


Figure IV.51 : Evolution axiale de la vitesse centrale pour différents nombres de Brinckman, dans le cas d'une contrainte seuil thermodépendante.
 $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $\Delta T = 15^\circ C$.

L'effet de la variation de l'écart de température ΔT sur l'évolution axiale de la vitesse centrale dans le cas où la dissipation visqueuse est prise en compte est présenté sur la figure IV.52. Nous remarquons que l'augmentation de l'écart de température entraîne la diminution de la vitesse centrale ($X > 1$). En effet, l'introduction de la dissipation visqueuse engendre l'augmentation de la température moyenne du fluide qui devient supérieure à 1, ce qui fait que le fluide subit un refroidissement au niveau de la paroi étant donné que la température de cette dernière devient inférieure à celle du fluide. Ce refroidissement est de plus en plus intense lorsque l'écart de température augmente. Par conséquent, la contrainte seuil s'accroît et le bouchon tendra à envahir la section droite de la conduite. Ce qui provoque la distorsion du profil de vitesse et pour conséquent, la diminution de la vitesse centrale.

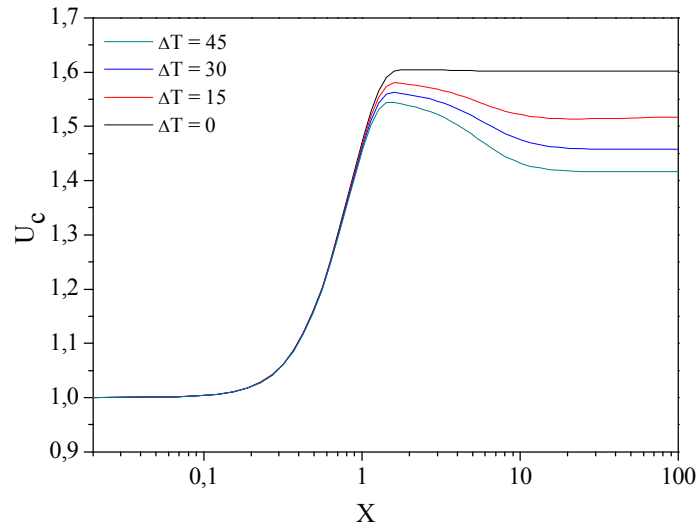


Figure IV.52 : Evolution axiale des profils de vitesse pour différents écarts de température, dans le cas d'une contrainte seuil thermodépendante.

$Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $Br = 2$.

La figure IV.53 illustre l'effet de l'écart de température sur les profils de vitesse établie dans le cas où la dissipation visqueuse est négligée ($Br = 0$) et dans le cas où elle est prise en compte ($Br = 1$ et 2). Nous observons un comportement différent selon que la dissipation visqueuse est prise en compte ou pas. En effet, puisque la température moyenne du fluide ne dépasse pas l'unité dans le cas où la dissipation visqueuse est négligée, on assiste à un chauffage des couches fluides pariétales lorsque l'écart de température, ΔT , augmente. Ce chauffage va conduire à la réduction de la valeur de la contrainte seuil et donc, provoquer l'extension du profil de vitesse.

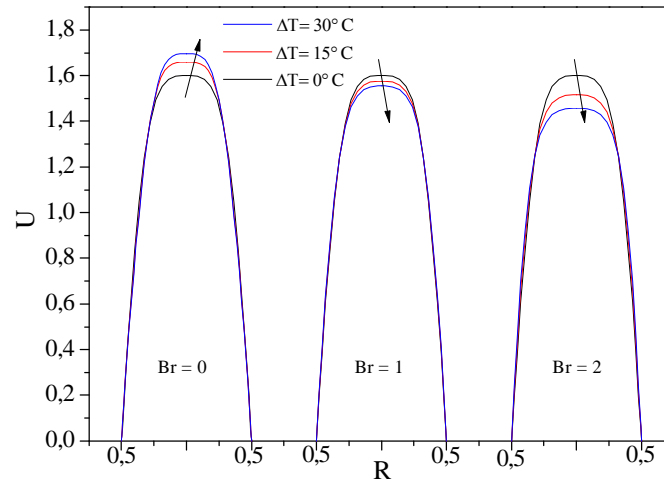


Figure IV.53 : Profils de vitesse établie pour différents écarts de température, avec et sans dissipation visqueuse, dans le cas d'une contrainte seuil thermodépendante.

$Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $Br = 2$.

b) Coefficient de frottement

Les courbes de la figure VI.54, représentant l'évolution axiale du coefficient de frottement, montrent une décroissance aigue du coefficient de frottement à l'entrée de la conduite qui se stabilise et atteint une valeur asymptotique correspondant au nombre de Brinckman dans la zone de l'écoulement établi.

Pour les valeurs du nombre de Brinckman supérieures à 1, nous remarquons que les courbes passent par un minimum dans la zone allant de l'entrée jusqu'à $X = 6$ puis se stabilisent à la sortie de la conduite. Ceci est évident étant donné que, comme on l'a montré les courbes représentant la vitesse centrale, passaient par des maximums figure IV.51 par conséquent, les gradients pariétaux de vitesse passent par un minimum et ce, par conservation du débit volumique.

Notons également que l'augmentation des valeurs du nombre de Brinckman entraîne l'augmentation du coefficient de frottement. En effet, plus la valeur du nombre de Brinckman est grande (et donc, plus la dissipation est importante), plus la température moyenne du fluide est élevée et devient supérieure à la température de la paroi. On assiste, par conséquent, à un refroidissement du fluide. Ce qui fait que la contrainte seuil augmente ainsi que l'étendue du bouchon. Il y'aura, alors, distorsion des profils de vitesse (figure IV.50) et donc, augmentation du coefficient de frottement.

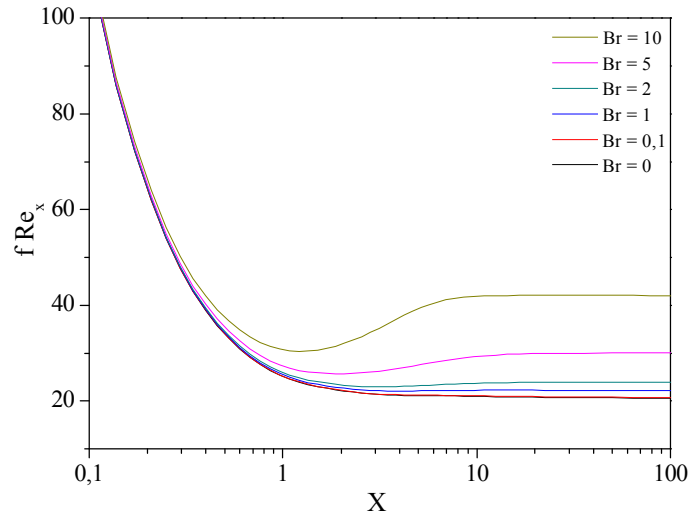


Figure IV.54 : Evolution axiale du coefficient de frottement pour différents nombres de Brinckman, dans le cas d'une contrainte seuil thermodépendante.
 $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $\Delta T = 15$ °C.

Concernant l'effet de la dissipation visqueuse sur l'évolution du coefficient de frottement, présenté sur la figure VI.55, nous observons que quelque soit l'écart de température les courbes sont caractérisées par une décroissance puis une stabilisation loin de l'entrée de la conduite. Effectivement, pour un écart donné de température en présence de la dissipation visqueuse ($Br \neq 0$), la température moyenne du fluide augmente le long de la conduite, qui c'est illustré sur la figure VI.56. Ce qui entraîne la diminution de l'écart de température à la paroi dans la zone proche de l'entrée de la conduite et donc, celle de l'étendue du bouchon (car τ_0 diminue) et par conséquent, la diminution du gradient de vitesse pariétal et donc la diminution du coefficient de frottement.

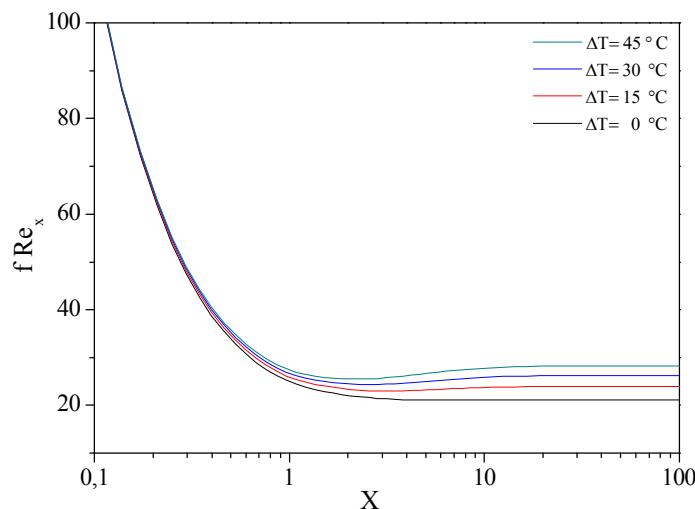


Figure IV.55 : Evolution axiale du coefficient de frottement pour différents écarts de température, dans le cas d'une contrainte seuil thermodépendante.
 $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $Br = 2$.

Remarquons également que l'augmentation de l'écart de température, entraîne l'augmentation du coefficient de frottement. En effet, l'augmentation de ΔT engendre la diminution de la température moyenne du fluide (figure VI.57). Le fluide subit un refroidissement, d'où l'augmentation de la contrainte seuil et par conséquent, celle de l'étendue du bouchon. On assiste alors à l'augmentation du gradient de vitesse pariétal (figure IV.50). Etant donné que le coefficient de frottement est directement proportionnel à la contrainte de cisaillement à la paroi (et donc, au gradient de vitesse pariétal), l'augmentation de ce dernier provoque l'augmentation du coefficient de frottement.

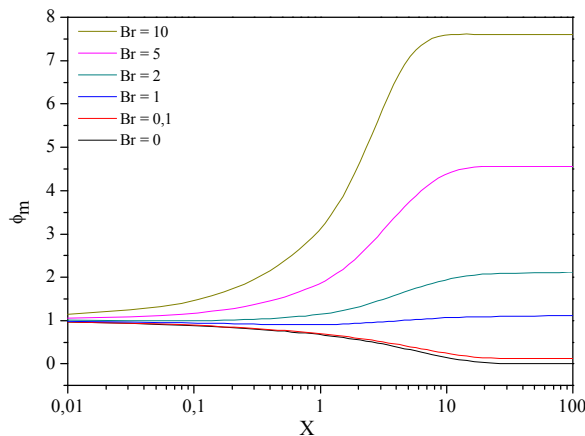


Figure IV.56 : Evolution axiale de la température moyenne en fonction du nombre de Brinckman, dans le cas d'une contrainte seuil thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $\Delta T = 15$ °C.

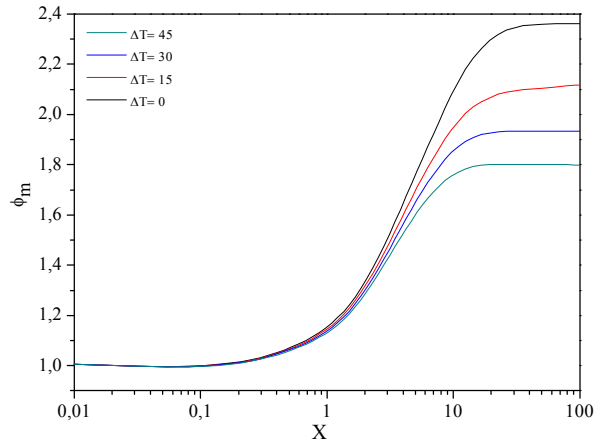


Figure IV.57 : Evolution axiale de la température moyenne en fonction de l'écart de température, dans le cas d'une contrainte seuil thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $Br = 2$.

L'effet de l'écart de température sur l'évolution axiale du coefficient de frottement (figure VI.55) dans le cas où la dissipation visqueuse est prise en compte est opposé à celui obtenu lorsque la dissipation était négligée (figure VI.32). Effectivement, la température moyenne pour un nombre de Brinckman nul, varie entre 0 et 1. Le fluide subit donc un chauffage pariétal croissant qui va faire diminuer la valeur de la contrainte seuil et donc, rétrécir l'étendue du bouchon. Ce qui provoquera l'extension de la vitesse centrale et donc, la diminution du gradient pariétal de vitesse. Par conséquent, l'augmentation de l'écart de température entraîne la diminution du coefficient de frottement.

c) Nombre de Nusselt

La figure VI.58 illustre l'évolution axiale du nombre de Nusselt pour différentes valeurs du nombre de Brinckman. Toutes les courbes présentent le même comportement de l'entrée vers la sortie : une décroissance puis une stabilisation en se rapprochant de la sortie de la conduite, à l'exception de la courbe obtenue pour une valeur du nombre de Brinckman égale à 0,1 pour laquelle nous remarquons une évolution ascendante à partir de $X = 5$ pour atteindre une valeur asymptotique du nombre de Nusselt à partir de $X = 13$. Selon la figure VI.56, la température moyenne augmente pour des valeurs du nombre de Brinckman supérieures ou à la limite égales à 1 et donc, $(1 / \phi_m)$ diminue le long de X . D'un autre côté, le gradient de température pariétal est plus élevé à l'entrée puis, chute loin de celle-ci, (la figure VI.60). Ceci explique, la décroissance du nombre de Nusselt dans la zone proche de l'entrée de la conduite.

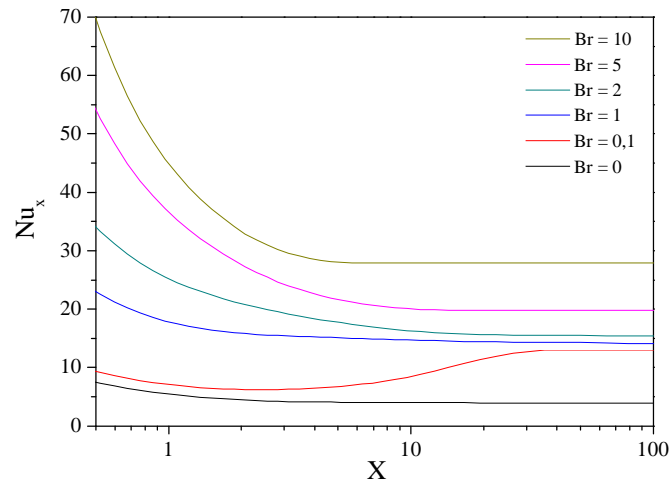


Figure IV.58 : Evolution axiale du nombre de Nusselt pour différents nombres de Brinckman, dans le cas d’une contrainte seuil thermodépendante.
 $Re = 25 ; Pr = 1 ; Bn_0 = 1,99$ et $\Delta T = 15^\circ C$.

Nous notons, en outre, que l’augmentation du nombre de Brinckman entraîne l’augmentation du nombre de Nusselt. Ceci s’explique par le fait que plus la valeur du nombre de Brinckman est grande, plus la température moyenne est élevée (figure VI.56 ou encore la figure IV.62), et plus le gradient pariétal de température est grand (figure la figure VI.60). Il en ressort alors que l’effet du gradient pariétal de température l’emporte devant celui de $(1 / \phi_m)$, par conséquent, le nombre de Nusselt augmente.

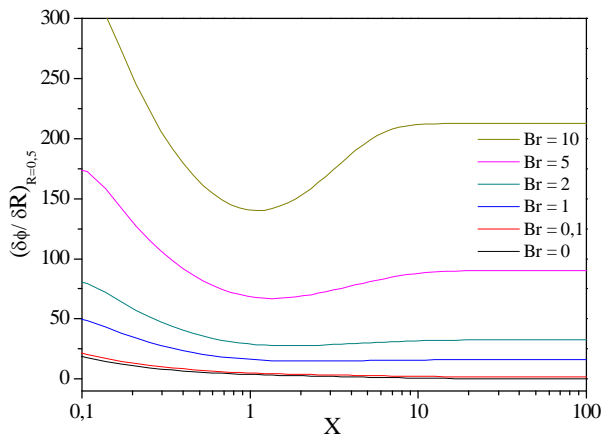


Figure IV.60 : Evolution axiale du gradient de température pariétal en fonction du nombre de Brinckman, dans le cas d’une contrainte seuil thermodépendante. $Re = 25 ; Pr = 1 ; Bn_0 = 1,99$ et $\Delta T = 15^\circ C$.

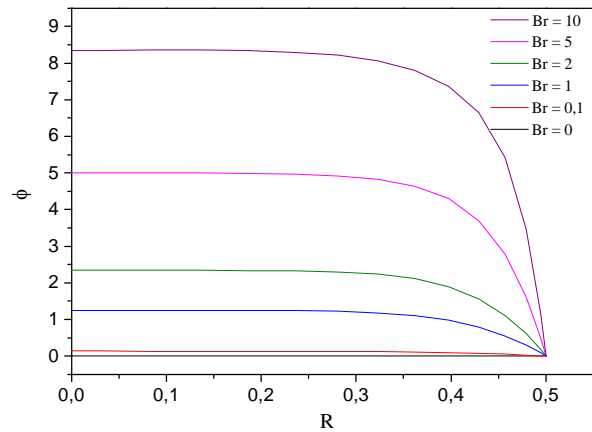


Figure IV.61 : Evolution axiale de la température en fonction du nombre de Brinckman, dans le cas d’une contrainte seuil thermodépendante. $Re = 25 ; Pr = 1 ; Bn_0 = 1,99$ et $\Delta T = 15^\circ C$.

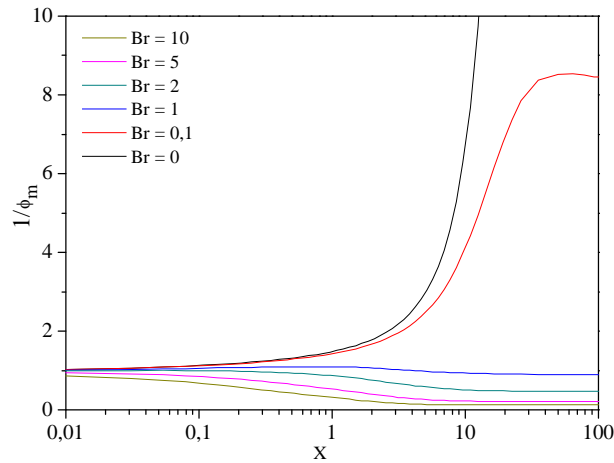


Figure IV.62 : Evolution axiale de l'inverse de la température moyenne différents nombres de Brinckman, dans le cas d'une contrainte seuil thermodépendante.
 $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $\Delta T = 15^\circ C$.

La figure VI.63 représente l'évolution axiale du nombre de Nusselt pour différents écarts de température, en tenant compte de la dissipation visqueuse. Les courbes présentent une décroissance à partir de l'entrée de la conduite à cause du gradient de température qui tend vers à l'infini, puis une stabilisation loin de l'entrée. Il est à noter que l'augmentation de l'écart de température entraîne l'amélioration du transfert thermique étant donné que les valeurs du nombre de Nusselt deviennent de plus en plus élevées. En effet, selon la figure VI.57, la température moyenne dans la zone d'établissement diminue lorsque l'écart de température augmente, par conséquent $(1 / \phi_m)$ augmente et d'autre part, le gradient pariétal de température reste pratiquement constant (figure VI.64). Par conséquent, le nombre de Nusselt.

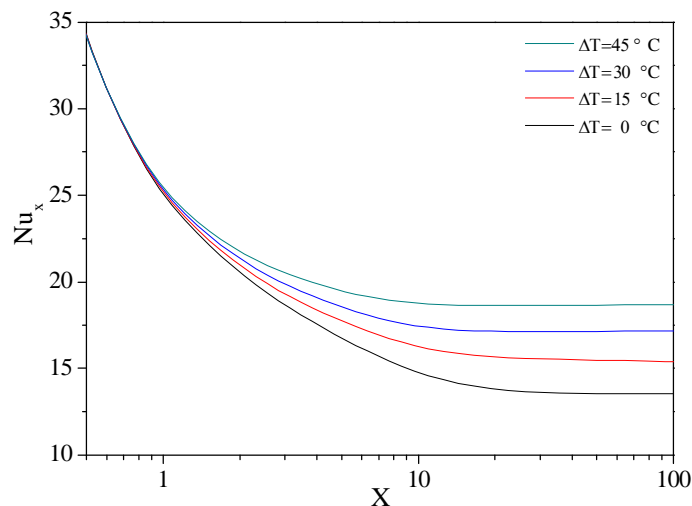


Figure IV.63 : Evolution axiale du nombre de Nusselt pour différents écarts de température, dans le cas d'une contrainte seuil thermodépendante.
 $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $Br = 2$.

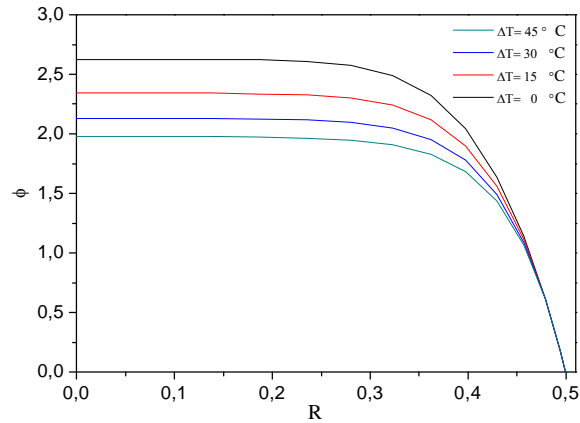


Figure IV.64 : Evolution axiale de la température du fluide en fonction de l'écart de température, dans le cas d'une contrainte seuil thermodépendante.

$Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $Br = 2$.

Il est intéressant également de noter l'apport de la prise en compte de la dissipation visqueuse dans le cas de propriétés rhéologiques thermodépendantes. En effet, les résultats obtenus dans ce cas s'opposent à ceux obtenus dans le cas où la dissipation visqueuse était négligeable (figure VI.33). Pour ce dernier cas ($Br = 0$), l'augmentation de l'écart de température entraîne le chauffage du fluide et donc, l'augmentation de la température moyenne et donc la diminution de l'inverse de cette température comme c'est illustré sur la figure IV.65 alors que le gradient de température pariétal reste pratiquement insensible à la variation de l'écart de température tel que le montre la figure IV.66. Par conséquent, l'augmentation de l'écart de température entraîne la diminution du nombre de Nusselt.

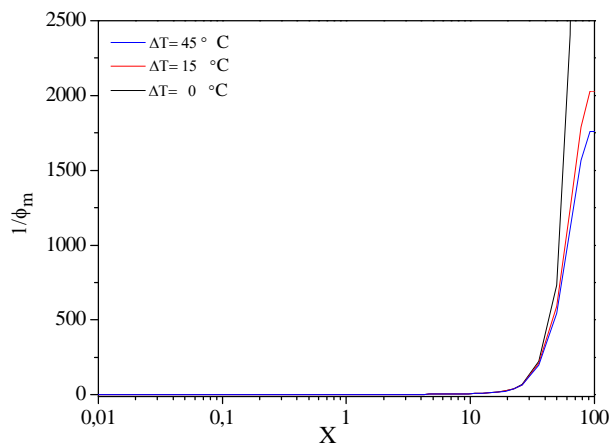


Figure IV.65 : Evolution axiale de l'inverse de la température moyenne en fonction de l'écart de température, dans le cas d'une contrainte seuil thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $Br = 0$.

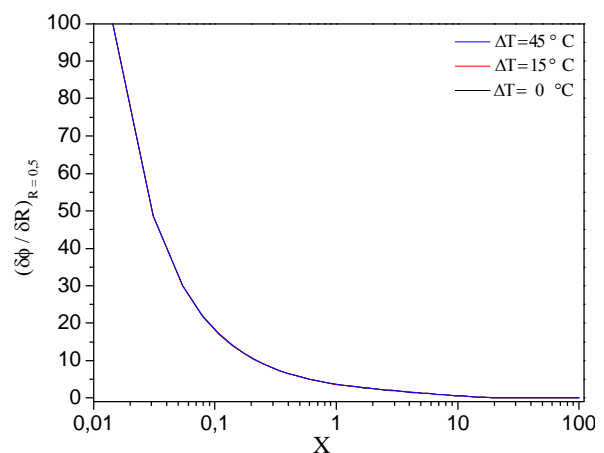


Figure IV.66 : Evolution axiale du gradient de température pariétal en fonction de l'écart de température, dans le cas d'une contrainte seuil thermodépendante. $Re = 25$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$ et $Br = 0$.

IV.4 Ecoulement en mode de Convection Mixte

Cette partie est consacrée à l'impact de la convection mixte sur la structure de l'écoulement ainsi que sur les caractéristiques du transfert thermique. Nous considérerons dans un premier temps, les propriétés rhéologiques du fluide binghamien (viscosité plastique et contrainte seuil) constantes et uniformes. Par la suite la variabilité en fonctions de la température de ces dernières sera prise en compte.

IV.4.1 Cas de propriétés rhéologiques constantes

IV.4.1.1 Développement des profils de la vitesse axiale

- **Cas du chauffage**

La figure VI.67 montre l'évolution des profils de vitesse axiale pour différentes positions axiales de la section droite dans la conduite. Notons que près de l'entrée ($X < 0.35$), les profils sont symétriques par rapport à l'axe de celle-ci. Par contre, ils ne le sont plus, lorsque l'on s'enfonce un peu plus dans la conduite et se décalent plutôt vers le bas, sous l'effet des courants de convection naturelle. Très loin de l'entrée ces profils regagnent par la suite le centre de la conduite et redeviennent symétriques par rapport à son axe et ce, dans la zone de l'écoulement établi.

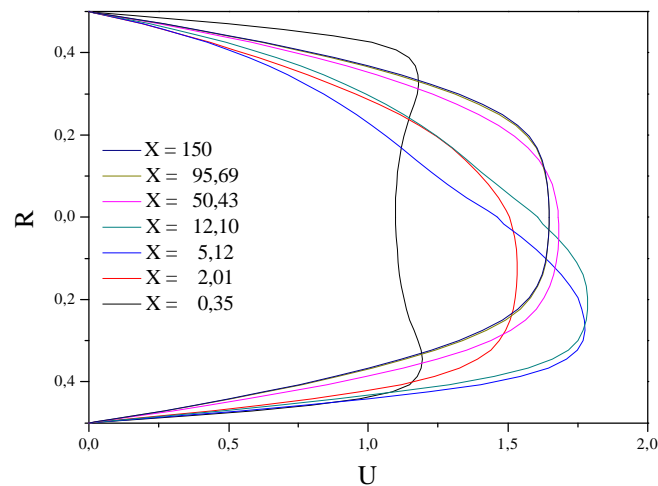


Figure IV.67 : Développement des profils de vitesse axiale pour différentes positions axiales dans le cas d'un chauffage pariétale.

$$Re = 150 ; Br = 0 ; Bn = 1,99 ; Pr = 1 \text{ et } Gr = +10^5$$

- **Cas du refroidissement**

Contrairement au cas du chauffage, le refroidissement, illustré à travers la figure VI.68, est caractérisé par des profils de vitesse localisés au niveau de la partie supérieure de la conduite et ce, à des sections droites se situant loin de l'entrée ($0.35=X=50$). Ceci est dû au déplacement du fluide de la région centrale vers la haut sous l'effet des courants secondaires.

En amont et en aval de cette zone, les profils sont symétriques et sont similaires à ceux obtenus dans le cas de la convection forcée.

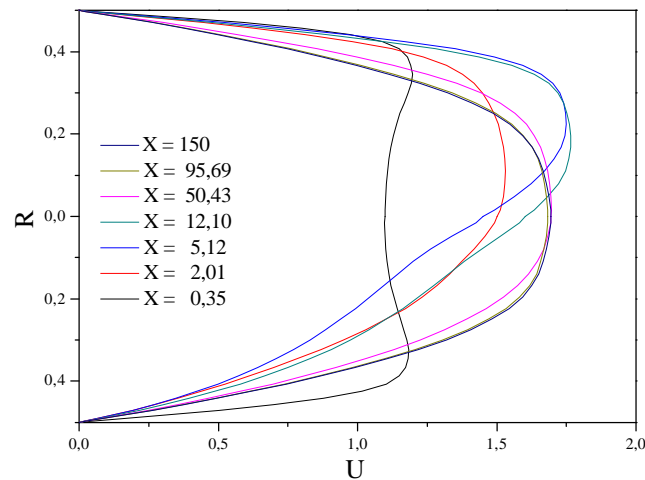


Figure IV.68 : Développement des profils de vitesse axiale pour différentes positions axiales dans le cas d'un refroidissement.

$$Re = 150 ; Br = 0 ; Bn = 1,99 ; Pr = 1 \text{ et } Gr = -10^5$$

IV.4.1.2 Champ de température

- **Cas du chauffage**

La figure VI.69 montre l'évolution des profils de température pour différentes positions axiales dans la conduite. Les profils obtenus sont différents de ceux trouvés dans le cas de la convection forcée pure. Nous remarquons en effet, qu'ils présentent une asymétrie par rapport à l'axe de la conduite et subissent une distorsion, contrairement à ce qui a été relevé pour le cas de la convection forcée. Effectivement, sous l'effet de la convection naturelle, le fluide se trouvant au voisinage de la paroi se chauffe et monte continuellement vers la partie supérieure de la conduite créant ainsi des courants secondaires ascendants. Par contre, le fluide froid de la région centrale se déplace vers le bas dans un mouvement descendant. Par conséquent, le fluide dans la partie supérieure de la conduite devient plus chaud que celui se trouvant dans la partie inférieure et le minimum de température se positionne en bas de la conduite, contrairement au cas de la convection forcée pure.

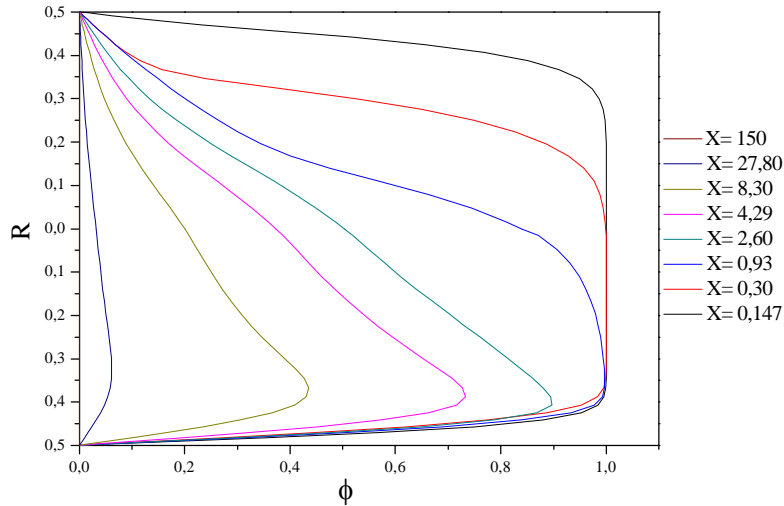


Figure IV.69 : Profils de température en mode de convection mixte pour le cas du chauffage. $Re = 150$; $Pr = 1$; $Br = 0$; $Bn = 1,99$ et $Gr = +10^6$.

Ce phénomène est également observé sur les isothermes à différentes positions axiales de la figure VI.70. Nous constatons que les courants secondaires commencent à perturber le champ de température à partir de la position $X = 0,3$. Dans la partie supérieure de la section droite, les isothermes sont de plus en plus espacées le long de la conduite et le fluide chaud envahit d'avantage celle-ci. Le fluide froid se trouve alors, confiné dans un espace très réduit dans la partie inférieure de la section droite pour disparaître totalement très loin de l'entrée ($X > 4.29$).

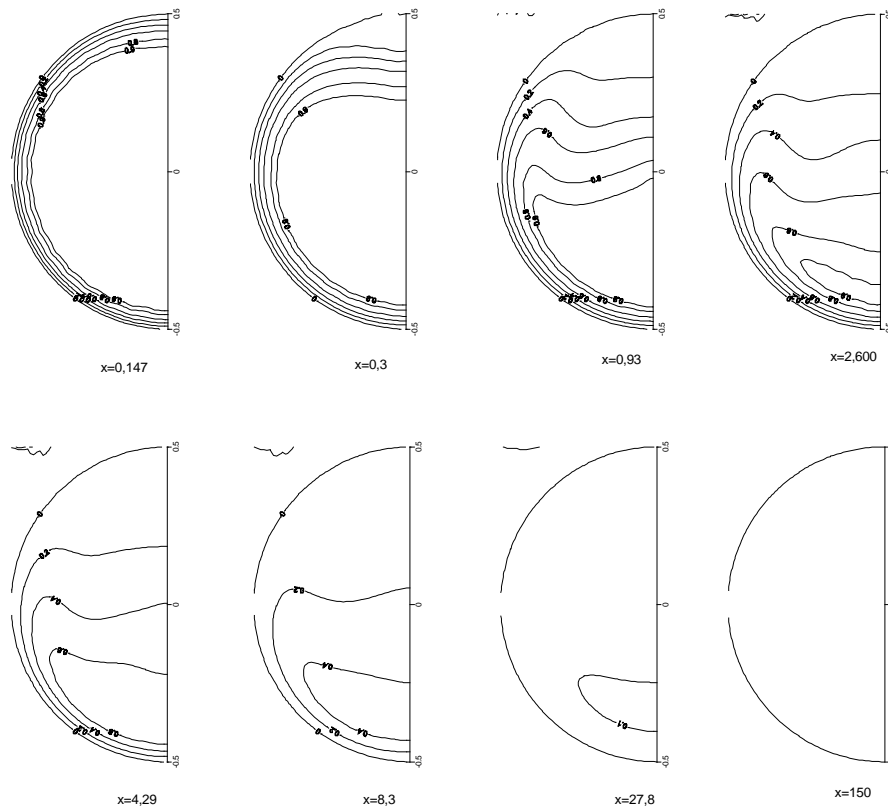


Figure IV.70 : Développement du champ thermique pour le cas du chauffage en mode de convection mixte. $Re = 150$; $Pr = 1$; $Br = 0$; $Bn = 1,99$ et $Gr = +10^6$

• Cas du refroidissement

Dans le cas du refroidissement, nous remarquons à partir de la figure VI.71, que le fluide de la partie inférieure de la conduite devient plus froid que celui se trouvant dans la partie supérieure et que le minimum de température se trouve en bas. Ceci est visible sur la figure VI.72 où nous pouvons constater que le fluide froid tend à envahir par le bas toute la section droite de la conduite et ce, le long de la zone se situant plus loin de l'entrée.

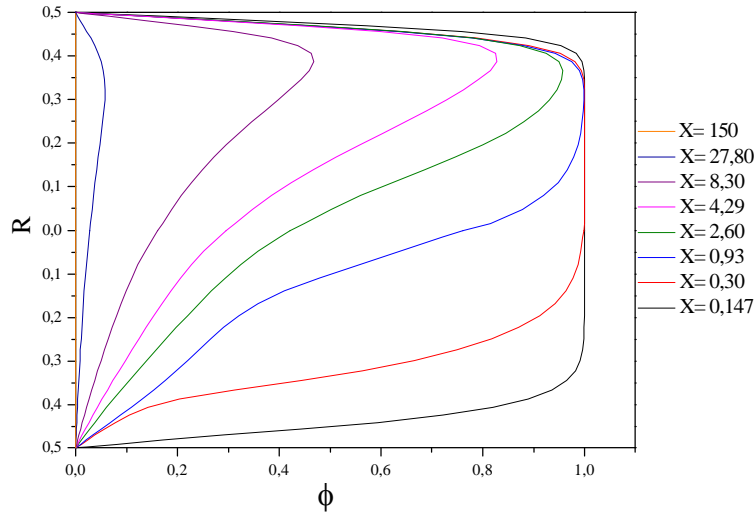


Figure IV. : Evolution des profils de température pour le cas du refroidissement en mode de convection mixte. $Re = 150$; $Pr = 1$; $Br = 0$; $Bn = 1,99$ et $Gr = -10^6$.

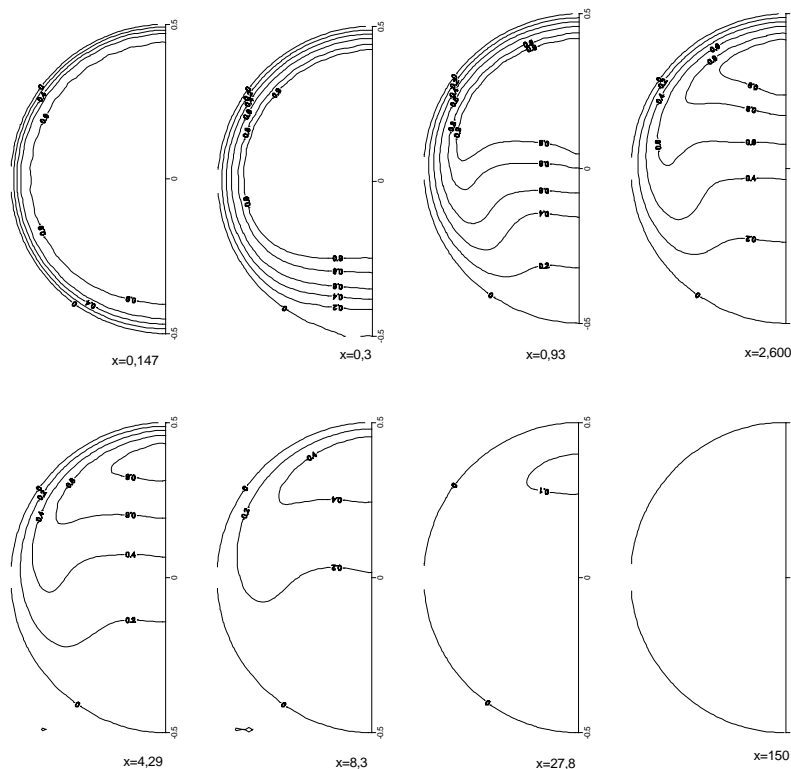


Figure IV.72 : Développement du champ thermique pour le cas du refroidissement en mode de convection mixte. $Re = 150$; $Pr = 1$; $Br = 0$; $Bn = 1,99$ et $Gr = -10^6$

IV.4.1.3 Evolution du nombre de Nusselt et du coefficient de frottement

L'effet de la convection mixte, traduite par le nombre de Grashoff (Gr), sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt, présentée sur la figure VI.73, montre que les valeurs du nombre de Nusselt sont confondues avec celles de la convection forcée ($Gr/Re^2 = 0$), dans la zone proche de l'entrée de la conduite ($X > 0,35$). Au de là, l'allure des courbes devient influencée par la valeur du nombre de Grashoff et l'effet de la convection naturelle est de plus en plus visible. A la sortie de la conduite, les courbes se rencontrent une fois de plus pour tendre vers une valeur asymptotique du nombre de Nusselt correspondant au mode de convection forcée pure.

D'un autre côté, il est à noter que le transfert thermique est amélioré lorsque l'intensité de convection naturelle est important, c'est-à-dire lorsque le nombre de Grashoff augmente.

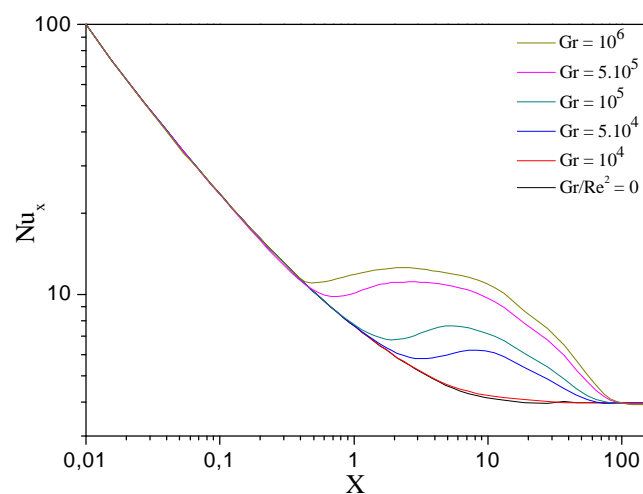


Figure IV.73 : Evolution axiale du nombre de Nusselt local en fonction du nombre de Grashoff. $Re = 150$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$ et $Br = 0$

Concernant l'influence du nombre de Grashoff et par conséquent celle de la convection naturelle, sur l'évolution du coefficient de frottement apparent, illustrée sur la figure IV.74, nous remarquons que lorsque le nombre de Grashoff augmente suite à l'importante quantité de chaleur fournie au fluide, les déformations des courbes apparaissent loin de l'entrée correspondant à ($X > 0,35$). Ceci est dû à l'apparition des courants secondaires qui provoquent une augmentation du coefficient de frottement par rapport au cas la convection forcée. En continent à s'enfoncer dans la conduite, les valeurs d coefficient de frottement s'écartent du plateau, déclinent et finissent par rejoindre le cas de la convection forcée. En effet les courants secondaires deviennent négligeables, et les courbes tendent vers la valeur asymptotique. En effet , à cette endroit c'est le mode de convection naturelle qui dominant, et les courbes s'écartent de la courbe traduisant la convection forcée pure ($Gr/Re^2 = 0$). Un plateau apparaît et son étendue augmente avec celle de nombre de Grashoff.

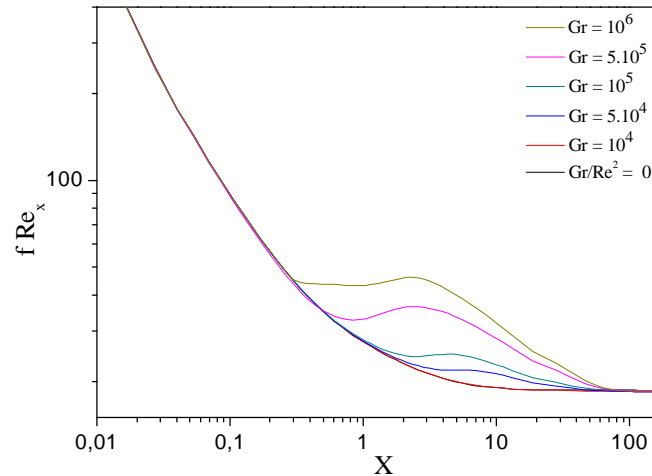


Figure IV.74 : Evolution axiale du coefficient de frottement apparent en fonction du nombre de Grashoff. $Re = 150$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$ et $Br = 0$

IV.4.2 Propriétés rhéologiques thermodépendantes

La figure IV.75 illustre l'effet de la variation avec la température de la viscosité plastique et de la contrainte seuil sur le transfert thermique en mode de convection mixte. Les cas du chauffage ($\Delta T > 0$, $Gr > 0$) et du refroidissement ($\Delta T < 0$, $Gr < 0$) ont été pris en considération. Nous remarquons que l'augmentation de l'écart de température dans le cas du chauffage améliore le transfert thermique et le diminue légèrement, dans le cas du refroidissement ($\Delta T < 0$, $Gr < 0$).

Le tableau IV.5 regroupe les écarts relatifs entre les valeurs du nombre de Nusselt calculées pour le cas de propriétés rhéologiques constantes et uniformes et celui où ces dernières varient avec la température.

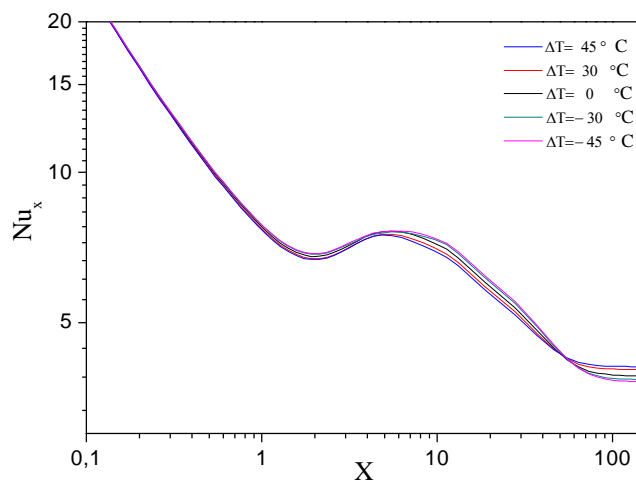


Figure IV.75 : Evolution axiale du nombre de Nusselt pour différents écarts de température. $Re = 150$; $Pr = 1$; $Bn = 1,99$; $Br = 0$ et $|Gr| = 10^5$

Tableau IV.5 : Ecart entre les valeurs du nombre de Nusselt obtenues pour le cas de propriétés rhéologiques variant et restent uniformes en fonction de la température.

ΔT (°C)	Ecart (%)
- 45	2,50
- 30	1,68
+ 30	3,07
+ 45	4,30

Ce qui est notable à travers la figure VI.75 et le tableau IV.5, c'est la faible sensibilité du nombre de Nusselt vis-à-vis de la variation des propriétés rhéologiques en fonction de la température, dans le cas de la convection mixte. En effet, les courbes sont presque confondues et ceci est visible à travers les écarts calculés (tableau IV.5) qui ne dépassent pas 5% par rapport au cas relatif aux propriétés constantes.

Rappelons que les modèles de variation des propriétés rhéologiques du fluide de Bingham (viscosité plastique et contrainte seuil) en fonction de la température traduites par les équations (II.28) et (II.29) sont spécifiques à un produit bien particulier, le jus de pruneau en l'occurrence. D'après les courbes de variation de ces propriétés en fonction de la température données en Annexe 6, nous constatons que l'effet de l'augmentation de la température sur ces paramètres n'est pas très important étant donné les faibles valeurs des constantes a et b. Ceci se répercute sur l'impact insignifiant de la thermodépendance de la viscosité plastique et de la contrainte seuil sur les caractéristiques de l'écoulement et sur l'évolution du nombre de Nusselt, en particulier.

L'influence de la thermodépendance des propriétés rhéologiques sur l'évolution axiale du coefficient de frottement apparent, en mode de convection mixte est présentée sur la figure IV.75. L'effet est plus appréciable par rapport à celui observé précédemment (figure IV.74). En effet, nous constatons que l'augmentation de l'écart de température dans le cas du chauffage engendre l'accroissement du coefficient de frottement. Par contre, dans le cas du refroidissement, nous obtenons des valeurs plus petites pour des écarts de températures allant de -30 °C à -45 °C .

Notons également que l'effet de la thermodépendance des propriétés rhéologiques du fluide est assez appréciable puisque les écarts relatifs entre les valeurs du coefficient de frottement pour le cas thermodépendant et le cas constant, regroupés dans le tableau IV.6 pour différents écarts de température, sont relativement considérables étant donné que l'écart peut atteindre 15,52% pour un écart de température égale +45 °C.

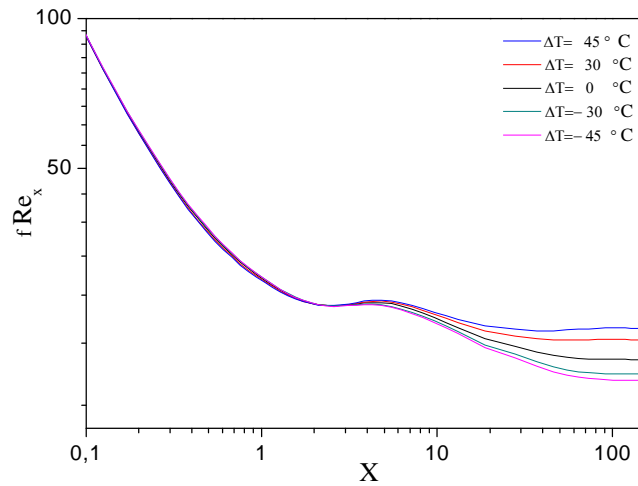


Figure IV.75 : Evolution axiale du coefficient de frottement apparent pour différents écarts de température. $Re = 150$; $Pr = 1$; $Bn_0 = 1,99$; $Br = 0$ et $|Gr| = 10^5$

Tableau IV.6 : Ecart relatif entre les valeurs du coefficient de frottement obtenues pour le cas de propriétés rhéologiques variant et restent uniformes en fonction de la température

ΔT ($^\circ\text{C}$)	Ecart (%)
- 45	9,04
- 15	6,41
+ 15	9,63
+ 45	15,52

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Une étude sur l'écoulement laminaire d'un fluide incompressible thermodépendant obéissant au modèle rhéologique de Bingham, dans une conduite cylindrique maintenue à une température pariétale uniforme a été entreprise dans le présent mémoire. La méthode numérique utilisée est basée sur celles des volumes finis. Dans le but d'éviter les instabilités numériques dans la région à faibles vitesses de cisaillement, un modèle de viscosité proposé par Papanastasiou a été adopté pour décrire le comportement du fluide en question dans cette région. La validation du code de calcul a été confirmée suite à la comparaison des présents résultats avec ceux issus de la littérature. L'analyse de l'influence occasionnée par les caractéristiques rhéologiques de ce fluide sur la structure de son écoulement ainsi que sur l'intensité de l'échange thermique ont constitué les principaux objectifs de notre étude.

Nous avons procédé dans un premier temps, à une description détaillée de la méthode des volumes finis, technique numérique que nous avons adoptée pour l'élaboration de notre code de calcul, qui permet la discrétisation du modèle mathématique. Cette partie est précédée de celle de la mise en équations de notre problème et les précautions à prendre quant à la prise en compte du mode de convection naturelle d'une part, et de la fonction de dissipation d'autre part. Elle a été suivie par les différents résultats obtenus par le code de calcul élaboré. Parmi les principales constatations et conclusions tirées de cette étude, l'apparition au niveau de l'axe de symétrie d'une zone dépourvue de déformation, qui forme un bouchon de fluide se déplaçant en bloque. Ce bouchon est engendré par l'existence de la contrainte seuil. D'ailleurs, c'est la caractéristique principale des fluides viscoplastiques. De part et d'autre de cette zone, le profil de vitesse est parabolique schématisant l'écoulement du fluide dans cette région.

Les constatations faites en considérant en premier lieu, le cas de propriétés rhéologiques uniformes en l'absence de la fonction de dissipation sont comme suit :

1. La longueur nécessaire à l'établissement du régime hydrodynamique diminue avec l'accroissement de la contrainte seuil représentée par le nombre adimensionnel de Bingham.
2. L'augmentation du nombre de Bingham entraîne d'une part, la diminution de la vitesse centrale et par conséquent, l'augmentation du gradient pariétal de vitesse ce qui conduit à l'augmentation du coefficient de frottement dans la zone de l'écoulement établi. De plus, le bouchon tend à envahir toute la section droite de la conduite pour des valeurs élevées du nombre de Bingham. D'autre part, cette augmentation conduit à une légère amélioration du transfert thermique.
3. L'augmentation du nombre de Reynolds entraîne d'un côté, l'augmentation de la longueur d'entrée hydrodynamique et de l'autre côté, la diminution de la longueur d'entrée thermique.
4. L'échange thermique s'intensifie avec l'élévation du nombre de Reynolds et les courbes représentant l'évolution axiale du nombre de Nusselt tendent vers une valeur

asymptotique égale à 3,99, correspondant au régime thermique établi. Cette valeur reste insensible aux variations du nombre de Reynolds.

L'introduction de la fonction de dissipation dans l'équation de l'énergie, représentée par le nombre de Brinckman, améliore fortement le transfert de chaleur et influe sensiblement sur le champ de température. En effet, la valeur asymptotique atteinte par le nombre de Nusselt devient trois fois plus grande que celle obtenue lorsque la dissipation visqueuse n'est pas prise en compte.

Les résultats obtenus dans le cas de la prise en compte de la thermodépendance des propriétés rhéologiques du fluide, à savoir, la viscosité plastique et la contrainte seuil, mettent en valeur l'impact important de la variation en fonction de la température des ces propriétés sur les caractéristiques hydrodynamique et thermique de l'écoulement dans le cas du chauffage et du refroidissement pariétal. En effet, les écarts relatifs calculés entre les valeurs du nombre de Nusselt et du coefficient de frottement pour le cas de propriétés constantes et thermodépendantes sont assez importants, malgré le fait que les fonctions de variation avec la température tirées des données expérimentales, présentent de faibles variations. De plus, un comportement inverse du fluide a été observé entre le cas de viscosité variable et de contrainte seuil variable. En effet, le transfert de chaleur et le coefficient de frottement sont améliorés dans le cas du chauffage pour une viscosité variable et dans le cas du refroidissement pour une contrainte seuil thermodépendante.

L'introduction de la dissipation visqueuse en tenant compte de la variabilité des propriétés rhéologiques agit de façon remarquable sur les caractéristiques de l'écoulement hydrodynamique et thermique du fluide de Bingham. Les résultats obtenus montrent que l'augmentation du nombre de Brinckman engendre un refroidissement du fluide puisque la température moyenne de ce dernier augmente suite aux frottements entre ses couches centrales, et dépasse la température de la paroi. A cet effet, l'augmentation de la viscosité plastique conduit à la diminution du nombre de Nusselt et du coefficient de frottement. L'augmentation de la contrainte seuil conduit, par contre à l'amélioration du transfert thermique et l'accroissement du coefficient de frottement.

La dernière partie de ce mémoire à été consacrée à l'étude de l'impact de la convection mixte sur les caractéristiques hydrodynamiques et thermiques de l'écoulement. Les résultats ont montré qu'en régime de convection mixte, trois régions successives apparaissent tout le long de la conduite. Dans la première, l'écoulement est gouverné essentiellement par le mode de convection forcée. Dans la deuxième, les courants secondaires engendrent un brassage important du fluide favorisant ainsi l'échange thermique et augmentent le frottement pariétal en chauffage. Enfin, loin de l'entrée, l'écoulement s'établit entièrement pour atteindre les solutions asymptotiques trouvées dans le cas de la convection forcée pure.

L'analyse des champs thermique et dynamique montre une distorsion des profils de température et de vitesse produisant une distribution différente de celle correspondant à l'écoulement en mode de convection forcée pure. La nature de cette distorsion dépend fortement du nombre de Grashoff et donc, de l'importance de la convection naturelle. En effet, quand il y a chauffage, le maximum de la vitesse axiale se déplace vers la partie inférieure de la section droite se situant pas très loin de l'entrée de la conduite sous l'influence des courants secondaires, pour revenir ensuite au centre de la conduite loin de l'entrée. Le même phénomène a été observé sur le champ de température. Quant à l'impact de la thermodépendance des propriétés rhéologiques sur l'écoulement en mode de convection

mixte, il a été noté que l'effet est moins ressenti sur les courbes donnant le nombre de nu Nusselt mais il est en revanche, plus visible sur l'évolution du coefficient de frottement apparent.

**REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES**

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] N. Midoux. (1988) Mécanique et rhéologie des fluides en génie chimique. Technique et documentation (Lavoisier), 2^{ème} édition, 513p.
- [2] R.K. Shah and A.L. London, “Laminar flow forced convection in ducts”, Academic Press, New York (1978).
- [3] T. Basu and D.N. Roy, “Laminar heat transfer in a tube with viscous dissipation”. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 28 (1985), pp. 699-701.
- [4] A. Barletta and E. Zanchini, “The existence of an asymptotic thermally developed region for laminar forced convection in a circular duct”. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 39 (1996), pp. 2735-2744.
- [5] E.J. Dean, R. Glowinski and G. Guidoboni, “On the numerical simulation of Bingham viscoplastic flow: old and new results”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 142 (2007), pp. 36-62.
- [6] A. Wachs, “Numerical simulation of steady Bingham flow through an eccentric annular cross-section by distributed Lagrange multiplier/fictitious domain and augmented Lagrangian methods”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 142 (2007), pp. 183-198.
- [7] P.R. Johnston, “Axial conduction and the Graetz problem for a Bingham plastic in laminar tube flow”, *J. Heat and Mass Transfer*, 34 (4/5) (1991), pp. 1209-1217.
- [8] G.C. Vradis, J. Dougher and S. Kumar, “Entrance pipe flow and heat transfer for a Bingham plastic”, *J. Heat and Mass Transfer*, 36 (3) (1993), pp. 543-552.
- [9] K.J. Hammad and G.C. Vradis, “Viscous dissipation and heat transfer in pulsatile flows of a yield stress fluid”, *Int. Comm. Heat and Mass Transfer*, 23 (5) (1996), pp. 599-612.
- [10] T. Min, H.G. Choi, J.Y. Yoo and H. Choi, “Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in a circular pipe II. Numerical approach hydrodynamically developing flow and simultaneously developing flow”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 40 (15) (1997), pp. 3689-3701.
- [11] T. Min, J.Y. Yoo and H. Choi, “Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in a circular pipe – I. Analytical approach – thermally developed flow and thermally developing flow (the Graetz problem extended)”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 40 (1997), pp. 3025–3037
- [12] T. Min, and J.Y. Yoo, “Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in a circular pipe with uniform wall heat flux, the Graetz problem extended”. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 121 (1997), pp. .

- [13] E.H. Wissler, and R.S. Schechter, "The Graetz-Nusselt problem (with extension) for a Bingham plastic", *Chemical Engineering Progress Symposium*, Series 29, 55 (1959), pp. 203-208.
- [14] B.F. Blackwell, "Numerical solution of the Graetz problem for a Bingham plastic in laminar tube flow with constant wall temperature", *J. of Heat Transfer*, 107 (1985), pp. 466-468.
- [15] S.H. Garrioch and D.F. James, "A finite-element study of Newtonian and power-law fluids in conical channel flow", *J. of Fluids Engineering*, 119 (1997), pp. 341-345.
- [16] P. Jay, A. Magnin and J.M. Piau, "Numerical simulation of viscoplastic fluid flows through an axisymmetric contraction", *J. Fluids Eng.*, 124 3 (2002), pp. 700-705
- [17] U.C.S. Nascimento, E.N. Macêdo and J.N.N. Quaresma, "Thermal entry region analysis through the finite integral transform technique in laminar flow of Bingham fluids within concentric annular ducts", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 45 (2002), pp. 923-929.
- [18] E.J. Soares, M.F. Naccache, P.R. Souza Mendes, "Heat transfer to viscoplastic materials flowing axially through concentric annuli", *Int. J. Heat Fluid Flow*, 24 (2003), pp. 762-773.
- [19] R. Khatyr, D. Ouldhadda and A. Il Idrissi, "Approche analytique de la convection forcée des fluides de Bingham dans un tube", *C. R. Mecanique*, 330 (2002), pp. 69-75.
- [20] R. Khatyr, D. Ouldhadda and A. Il Idrissi, "Viscous dissipation effects on the asymptotic behaviour of laminar forced convection for Bingham plastics in circular ducts", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 46 (2003), pp. 589-598.
- [21] R.P. Chhabra and J.F. Richardson, "Non-Newtonian flow in the process industries: Fundamental and engineering applications", *Butterworth-Heinemann Edt.*, (1999).
- [22] G. Forrest and W.L. Wilkinson, "Laminar heat transfer to temperature-dependent Bingham fluids in tubes", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 16 (1973), pp. 2377-2391.
- [23] G. Duvaut, J.L. Lions, "Transfert de chaleur dans un fluide de Bingham dont la viscosité dépend de la température", *J. Funct. Anal.*, 11 (1972), pp. 93-110.
- [24] M. Soares, M.F. Naccache and P.R. Souza Mendes, "Heat transfer to viscoplastic materials flowing laminarly in the entrance region of tubes", *Int. J. Heat Fluid Flow*, 20 (1999), pp. 60-67.
- [25] C. Nouar, "Thermal convection for a thermo-dependent yield stress fluid in an axisymmetric horizontal duct", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 48 (2005), pp. 5520-5535.

- [26] G. Vinay, A. Wachs and J.F. Agassant, "Numerical simulation of non-isothermal viscoplastic waxy crude oil flows", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 128 (2005), pp. 144-162.
- [27] T.C. Papanastasiou, "Flows of materials with yield", *J. of rheology*, 31 (1987), pp. 385-404.
- [28] M. Evan and R.R. Huilgol, "Entry flows of Bingham plastics in expansions", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 122 (2004), pp. 45-54.
- [29] E. Mitsoulis, "On creeping drag flow of a viscoplastic fluid past a circular cylinder: wall effects", *Chem. Eng. Sci.*, 59 (2004), pp. 789-800.
- [30] A. Ibarz, A. Garvin and J. Costa, "Rheological behaviour of Sloe (*Prunus Spinosa*) fruit juices", *J. Food Eng.*, 27 (1996), pp. 423-430.
- [31] S.V. Patankar, "Numerical heat transfer and fluid flow", *McGraw-Hill, New York*, (1980).
- [32] K. Loubar, "Simulation numérique de l'écoulement de liquides dans les conduites horizontales avec transfert de chaleur par convection mixte", Thèse de Magister, Ecole Militaire Polytechnique, (2000).
- [33] L. Cheng and S. Armfield, "A Simplified marker and cell method for unsteady flows on non-staggered grids", *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, 21 (1) (1995), pp. 15-34.
- [34] C.J. Ho and F.J. Tu, "Laminar convection on cold water in a vertical annulus with constant heat flux on the inner wall", *ASME J. Heat Transfer*, 112 (1990), pp. 117-123.
- [35] J. Orfi, N. Galanis and C.T. Nguyen, "Développement simultané hydrodynamique et thermique d'un écoulement laminaire dans un tube incliné en régime de convection mixte", *Rev. Gén. Therm.*, 36 (1997), pp. 83-92.
- [36] G.J. Hwang and H.C. Lai, "Laminar convective heat transfer in a horizontal isothermal tube for high Rayleigh numbers", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 37 (1994), pp. 1631-1640.
- [37] B. Shome and K. Jensen, "Mixed convection laminar flow and heat transfer of liquids in isothermal horizontal circular ducts", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 38 (11) (1995), pp. 1945-1956.

Annexes

ANNEXE 1 : EQUATIONS DE BASE

Cette annexe est consacrée au traitement des équations de base qui expriment les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, gouvernant les phénomènes de transfert dans un milieu fluide.

1. Equation de conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse est appliqué au volume connexe (v). A l'instant t , la masse vaut :

$$m(t) = \int_v \rho_t \, dv \quad (\text{A1.1})$$

A l'instant $(t + dt)$, la masse devient :

$$m(t + dt) = \int_v \rho_{t+dt} \, dv + \int_s \rho (\mathbf{V}_j \cdot \mathbf{n}_j) \, dt \, ds \quad (\text{A1.2})$$

Le principe de conservation de la masse impose que : $m(t) = m(t + dt)$. Alors l'équation (A1.1) sera égale à l'équation (A1.2), soit :

$$\int_v (\rho_t - \rho_{t+dt}) \, dv = \int_s \rho (\mathbf{V}_j \cdot \mathbf{n}_j) \, dt \, ds \quad (\text{A1.3})$$

Le développement limité de la quantité ρ_{t+dt} donne :

$$\rho_{t+dt} = \rho_t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dt + o(dt) \quad (\text{A1.4})$$

En injectant cette équation dans l'équation (A1.3), on trouve :

$$\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv + \int_s \rho (\mathbf{V}_j \cdot \mathbf{n}_j) \, ds = 0 \quad (\text{A1.5})$$

En appliquant le théorème de la divergence (ou théorème d'Ostrogradski) à l'intégrale de surface de l'équation (A1.5), on obtient :

$$\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_v \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j) dv = 0 \quad (\text{A1.6})$$

ou :

$$\int_v \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j) \right) dv = 0 \quad (\text{A1.7})$$

En faisant tendre le volume vers zéro, on obtient la relation ponctuelle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j) = 0 \quad (\text{A1.8})$$

Cette équation s'écrit en coordonnées cylindriques comme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A1.9})$$

❖ Cas particuliers :

a) Ecoulement en régime stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) :

Dans ce cas, l'équation (A1.9) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A1.10})$$

b) Fluide incompressible ($\rho = \text{cte}$) :

L'équation (A1.9) se réduit alors à :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{A1.11})$$

2. Equation de conservation de la quantité de mouvement

Cette équation exprime le deuxième principe de Newton : le taux de variation de la quantité de mouvement du fluide contenu dans le système Ω est égale à la résultante des forces qui lui sont appliquées.

A l'instant t , la quantité de mouvement est :

$$\int_{\mathbf{v}} (\rho V_i)_t dv \quad (\text{A1.12})$$

A l'instant $(t + dt)$, la quantité de mouvement devient :

$$\int_{\mathbf{v}} (\rho V_i)_{t+dt} dv + \int_{\mathbf{s}} (\rho V_i) V_j n_j dt ds \quad (\text{A1.13})$$

La variation de la quantité de mouvement entre l'instant (t) et $(t + dt)$ est donnée par :

$$\int_{\mathbf{v}} d(\rho V_i) dv = \int_{\mathbf{v}} [(\rho V_i)_{t+dt} - (\rho V_i)_t] dv + \int_{\mathbf{s}} (\rho V_i) V_j n_j dt ds \quad (\text{A1.14})$$

En effectuant le développement limité de la quantité $(\rho V_i)_{t+dt}$, on aura :

$$(\rho V_i)_{t+dt} = (\rho V_i)_t + \frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} dt + o(dt) \quad (\text{A1.15})$$

En injectant l'équation (A1.15) dans l'équation (A1.14) et en réarrangeant les termes, nous obtenons :

$$\int_{\mathbf{v}} d(\rho V_i) dv = \int_{\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) dt dv + \int_{\mathbf{s}} (\rho V_i) V_j n_j dt ds \quad (\text{A1.16})$$

et en appliquant le théorème de la divergence à l'intégrale de surface de l'équation (A1.16), on aura :

$$\int_{\mathbf{v}} \frac{d}{dt} (\rho V_i) dv = \int_{\mathbf{v}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_i V_j) \right] dv \quad (\text{A1.17})$$

Remarque :

Cette dernière expression est souvent appelée *formule de Leibnitz* ou théorème de transport de Reynolds. Elle s'écrit pour un champ scalaire ψ (ou vectoriel) comme :

$$\int_{\mathbf{v}} \frac{d}{dt} (\psi) dv = \int_{\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial t} (\psi) dv + \int_{\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\psi V_j) dv \quad (\text{A1.18})$$

D'autre part, en vertu du deuxième principe de Newton :

$$\int_{\mathbf{v}} \frac{d}{dt} (\rho V_i) dv = \sum (F)_i = \sum (F_{\text{ext}})_i + \sum (F_{\text{int}})_i \quad (\text{A1.19})$$

or, le principe de l'action et de la réaction impose :

$$\sum (\mathbf{F}_{\text{int}})_i = 0 \quad (\text{A1.20})$$

Les forces extérieures sont de deux types :

- **Forces de volume :**

Ces forces résultent de l'action d'un champ de forces auxquelles les particules fluides sont soumises. Si g_i représente la projection de l'accélération de la pesanteur \vec{g} sur l'axe Ox_i , on aura :

$$\mathbf{F}_{\text{vol}} = \int_v (\rho g_i) dv \quad (\text{A1.21})$$

- **Forces de surface :**

L'action du milieu extérieur sur le fluide contenu dans le système se traduit par l'existence, au sein de celui-ci, d'un tenseur de contraintes que nous noterons σ_{ij} :

$$\mathbf{F}_{\text{surf}} = \int_s \sigma_{ij} n_j ds \quad (\text{A1.22})$$

D'où :

$$\sum (\mathbf{F}_{\text{ext}})_i = (\mathbf{F}_{\text{vol}})_i + (\mathbf{F}_{\text{surf}})_i = \int_v \frac{d}{dt} (\rho V_i) dv \quad (\text{A1.23})$$

Donc :

$$\int_v \frac{d}{dt} (\rho V_i) dv = \int_v \rho g_i dv + \int_s \sigma_{ij} n_j ds \quad (\text{A1.24})$$

En appliquant le théorème de la divergence à l'intégrale de surface de l'équation (A1.24), on obtient :

$$\int_v \frac{d}{dt} (\rho V_i) dv = \int_v \left[\rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}) \right] dv \quad (\text{A1.25})$$

Le tenseur des contraintes σ_{ij} est donné par :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{A1.26})$$

Où p représente la pression statique au sein du fluide et τ_{ij} le tenseur des contraintes visqueuses.

En égalisant les équations (A1.17) et (A1.26), on obtient :

$$\int_v \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_i V_j) \right] dv = \int_v \left[\rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] dv \quad (\text{A1.27})$$

Pour avoir la relation ponctuelle, faisons tendre le volume vers zéro, soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_i V_j) = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A1.28})$$

En injectant l'expression du tenseur σ_{ij} dans l'équation (A1.28), on aura :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_i V_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A1.29})$$

Cette équation peut s'écrire aussi comme :

$$\rho \left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A1.30})$$

Tel que :

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{dV_i}{dt} \quad (\text{A1.31})$$

où : $\frac{dV_i}{dt}$ représente la dérivée particulière ou totale.

Pour un fluide newtonien, le tenseur des contraintes est donné par :

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right] + \eta \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (\text{A1.32})$$

où : μ est la viscosité de cisaillement,
 η est la viscosité de dilatation.

Dans le cas d'un fluide incompressible ($\rho = \text{cte}$), l'expression (A1.32) se réduit à :

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{A1.33})$$

En coordonnées cylindriques, les composantes du tenseur τ_{ij} s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= 2 \mu \frac{\partial V_r}{\partial r} & ; \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} &= \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \\
\tau_{\theta\theta} &= 2 \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right] & ; \quad \tau_{\theta x} = \tau_{x\theta} &= \mu \left[\frac{\partial V_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} \right] \\
\tau_{xx} &= 2 \mu \frac{\partial V_x}{\partial x} & ; \quad \tau_{rx} = \tau_{xr} &= \mu \left[\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right]
\end{aligned}$$

Ainsi, les projections de l'équation (A1.29) s'écrivent :

- **Suivant r :**

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (V_\theta V_r)}{\partial \theta} + \frac{\partial (V_x V_r)}{\partial x} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(2 r \mu \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \right] &- \frac{1}{r} \left[2 \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right]
\end{aligned} \tag{A1.34-a}$$

- **Suivant θ :**

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r V_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (V_\theta V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (V_x V_\theta)}{\partial x} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \right] &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2 \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial x} \right) \right] + \rho g_\theta
\end{aligned} \tag{A1.34-b}$$

- **Suivant x :**

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r V_x)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (V_\theta V_x)}{\partial \theta} + \frac{\partial (V_x V_x)}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[2 \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right) \right] \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right] &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} \right) \right] +
\end{aligned} \tag{A1.34-c}$$

Par ailleurs, si la viscosité du fluide était constante, on retrouve les équations de Navier-Stokes.

3. Equation de conservation de l'énergie

Nous déduirons l'équation de conservation de l'énergie à partir du premier principe de la thermodynamique. Le taux de variation de la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique d'un système Ω est égale à la somme de la puissance mécanique fournie à Ω par les forces extérieures (de volume et de surface) et de la puissance calorifique fournie à Ω par l'extérieur, on a donc :

$$\frac{d}{dt} \int_v \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv = \dot{W}_{vol} + \dot{W}_{surf} + \dot{q} \tag{A1.35}$$

avec :

- \dot{W}_{vol} : puissance des forces de volume,
- \dot{W}_{surf} : puissance des forces de surface,
- \dot{q} : puissance calorifique,
- u : énergie interne.

Ajoutant et retranchant la puissance des forces intérieures \dot{W}_{int} au second membre, soit :

$$\frac{d}{dt} \int_v \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv = \dot{W}_{\text{vol}} + \dot{W}_{\text{surf}} + \dot{q} + (\dot{W}_{\text{int}} - \dot{W}_{\text{int}}) \quad (\text{A1.36})$$

Or, de l'équation (A1.19), on a :

$$\int_v \frac{d}{dt} (\rho V_i) dv = \sum (F_{\text{ext}})_i + \sum (F_{\text{int}})_i \quad (\text{A1.37})$$

En multipliant l'équation ci-dessus par V_i , on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_v \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv = \dot{W}_{\text{vol}} + \dot{W}_{\text{surf}} + \dot{W}_{\text{int}} \quad (\text{A1.38})$$

L'équation (A1.38) constitue l'énoncé du théorème de l'énergie cinétique. En retranchant de l'équation de l'énergie (A1.36) l'équation (A1.38), on trouve :

$$\frac{d}{dt} \int_v (\rho u) dv = \dot{q} - \dot{W}_{\text{int}} \quad (\text{A1.39})$$

a) Puissance des forces intérieures :

En appliquant la formule de Leibnitz au premier terme du membre de gauche de l'équation (A1.38), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_v \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv = \int_v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv + \int_s \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) (V_j n_j) dS \quad (\text{A1.40})$$

En vertu du théorème de la divergence, que l'on applique au deuxième terme du second membre, on aura :

$$\frac{d}{dt} \int_v \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv = \int_v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv + \int_v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 V_j \right) dv \quad (\text{A1.41})$$

Les expressions des forces de volume et de surface étant connues, le second membre de l'équation (A1.38) devient :

$$\dot{W}_{\text{ext}} + \dot{W}_{\text{int}} = \left[\int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{V}_i \, dv + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \cdot \mathbf{V}_i) \, dv \right] + \dot{W}_{\text{int}} \quad (\text{A1.42})$$

L'équation (A1.38) devient alors égale à :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{V}^2 \right) \, dv + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{V}^2 \cdot \mathbf{V}_j \right) \, dv = \int_{\mathcal{V}} \left(\rho \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{V}_i + \mathbf{V}_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j} \right) \, dv + \dot{W}_{\text{int}} \quad (\text{A1.43})$$

Revenons maintenant à l'équation de l'impulsion, et multiplions la par \mathbf{V}_i , on aura :

$$\left[\rho \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + \rho \mathbf{V}_j \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j} = \rho \mathbf{g}_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] \mathbf{V}_i \quad (\text{A1.44})$$

d'où :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) + \rho \mathbf{V}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) = \rho \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{V}_i + \mathbf{V}_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A1.45})$$

De même, si on multiplie l'équation de continuité (A1.8) par $\frac{1}{2} \mathbf{V}^2$, on obtient :

$$\left(\frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \mathbf{V}_j) = 0 \quad (\text{A1.46})$$

Sommons les équations (A1.45) et (A1.46) et réarrangeant les termes, on obtient après intégration :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{V}^2 \right) \, dv + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{V}^2 \cdot \mathbf{V}_j \right) \, dv = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{V}_i \, dv + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{V}_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \, dv \quad (\text{A1.47})$$

En identifiant l'équation (A1.43) avec (A1.47), on obtient l'expression de \dot{W}_{int} :

$$\dot{W}_{\text{int}} = - \int_{\mathcal{V}} \sigma_{ij} \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j} \, dv \quad (\text{A1.48})$$

En introduisant l'expression du champ des contraintes, l'équation (A1.48) devient :

$$\dot{W}_{\text{int}} = \int_{\mathcal{V}} p \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_i} \, dv - \int_{\mathcal{V}} \tau_{ij} \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j} \, dv \quad (\text{A1.49})$$

b) Echange de chaleur

Le flux de chaleur directionnel résultant du transfert thermique et donné par la loi de Fourier :

$$\dot{q} = \int_v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dv \quad (\text{A1.50})$$

Où :

\dot{q} : représente le flux de chaleur directionnel donné par la loi de Fourier,
 k : représente le coefficient de conductivité thermique local.

Remplaçons les équations (A1.49) et (A1.50) par leurs expressions dans l'équation (A1.39) et réarrangeons les termes. On obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_v (\rho u) dv = \int_v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dv + \int_v p \frac{\partial V_i}{\partial x_i} dv - \int_v \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dv \quad (\text{A1.51})$$

En faisant tendre le volume de référence vers zéro, on aura la relation ponctuelle, soit :

$$\frac{d}{dt} (\rho u) + p \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (\text{A1.52})$$

Quelques réarrangements donnent :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} + p \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{dp}{dt} \quad (\text{A1.53})$$

Ainsi on obtient, pour un fluide incompressible, l'expression analytique de l'équation de l'énergie. Celle-ci s'écrit comme :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (\text{A1.54})$$

ANNEXE 2 : LINEARISATION DU TERME SOURCE

Il est fréquent que le terme source S soit une fonction non linéaire de la variable dépendante ϕ . Il convient ainsi dans ce cas, d'exprimer cette dépendance sous une forme linéarisée. Ceci est justifié d'une part, par le fait que le système à résoudre se ramène à un système algébrique linéaire. D'autre part, le choix d'une forme linéaire est meilleur que le traitement de S comme une constante. Cependant, il existe différentes façons de linéariser le terme S et le choix du profil de S_p et S_c est d'une importance capitale. En effet, le terme source est en général à l'origine des divergences pouvant se produire lors des calculs numériques et le choix d'un profil convenable du terme source permet en général d'atteindre la convergence. Ainsi, l'expression de linéarisation recommandée [29] s'écrit comme suit :

$$S = S^* + \left(\frac{dS}{dT} \right) (T_p - T_p^*) \quad (\text{A2.1})$$

Exemple :

Soit le terme source suivant :

$$S = 4 - 5 T^3 \quad (\text{A2.2})$$

parmi les formes linéarisées possibles, on peut écrire :

- $S_c = 4 - 5 T_p^{*3}$; $S_p = 0$
- $S_c = 4$; $S_p = -5 T_p^{*3}$
- $S_c = 4 + 10 T_p^{*3}$, $S_p = -15 T_p^{*3}$

Il est à noter que, conformément aux règles de la méthode des volumes finis, le terme S_p ne doit pas être positif.

ANNEXE 3 : TRAITEMENT DU TERME INSTATIONNAIRE

On s'intéresse dans ce qui suit au traitement des termes instationnaires. Pour cela, on considère l'équation suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (\text{A3.1})$$

En intégrant sur le volume de contrôle de la Figure A3.1 et sur l'intervalle de temps de t à $t+\Delta t$, on obtient :

$$\int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt \quad (\text{A3.2})$$

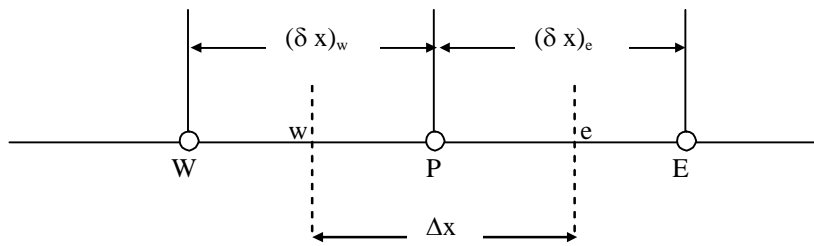


Figure A3-1 : Volume de contrôle considéré.

Pour le terme $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, on suppose que la variable dépendante ϕ reste égale à ϕ_P dans tout le volume de contrôle. Ainsi, on a :

$$\int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt dx = \Delta x (\phi_P^1 - \phi_P^0) \quad (\text{A3.3})$$

où l'indice 1 désigne le temps $t+\Delta t$ et l'indice 0 le temps t .

Pour le terme $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ on suivra la même démarche que pour le régime permanent. On aura donc :

$$(\text{A3.4})$$

$$\Delta x (\phi_P^1 + \phi_P^0) = \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\Gamma_e (\phi_E - \phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma_w (\phi_P - \phi_W)}{(\delta x)_w} \right] dt$$

A ce stade, on doit choisir le profil d'évolution de ϕ_P , ϕ_E et ϕ_W entre t et $t+\Delta t$. Cependant, plusieurs profils sont possibles. Certains peuvent se mettre sous la forme :

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi_P dt = [f \phi_P^1 + (1-f) \phi_P^0] \Delta t \quad (\text{A3.5})$$

f étant le facteur de poids compris entre 0 et 1.

D'autre part, en utilisant la même formule d'intégration pour ϕ_E et ϕ_W , et après réarrangement, on obtient :

$$a_P \phi_P = a_E [f \phi_E^1 + (1-f) \phi_E^0] + a_W [f \phi_W^1 + (1-f) \phi_W^0] + [a_P^0 - (1-f) a_E - (1-f) a_W] \quad (\text{A3.6})$$

avec :

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e}, \quad a_W = \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w}, \quad a_P^0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad a_P = f a_E + f a_W + a_P^0$$

Pour des valeurs spécifiques du facteur de pondération f , l'équation discrétisée (A3.6) se réduit à l'un des schémas connus pour les équations paraboliques. Ainsi, on distingue suivant la valeur de f , trois schémas :

- 1- Schéma explicite ($f = 0$) :** ϕ_P garde une valeur constante égale à ϕ_P^0 durant le pas de temps,
- 2- Schéma totalement implicite ($f = 1$) :** au temps t , ϕ_P passe subitement de ϕ_P^0 à ϕ_P^1 et reste constante durant le pas de temps Δt .
- 3- Schéma de Crank Nicolson ($f = 0,5$) :** pour ce schéma, ϕ_P varie linéairement suivant le temps entre ϕ_P^0 et ϕ_P^1 .

ANNEXE 5 : LES VALEURS ASYMPTOTIQUES DE COEFFICIENT DE FROTTEMENT (F_{Re}) POUR DIFFERENTS NOMBRES DE BINGHAM

B_n	F_{Re}
0	15.998
2	21.239
5	29.075
10	41.074

ANNEXE 6 : COURBES DE VARIATION DE LA VISCOSITE PLASTIQUE ET DE CONTRAINTE SEUIL DU JUS DE PRUNELLE

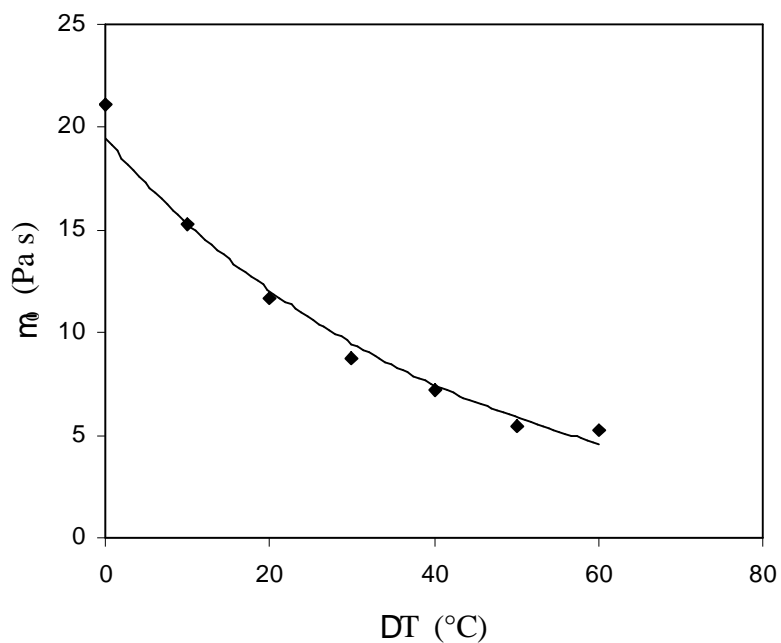


Figure A6.1 : Variation de la viscosité plastique du jus de prunelle à une concentration de 35 °Bx, en fonction de la température.

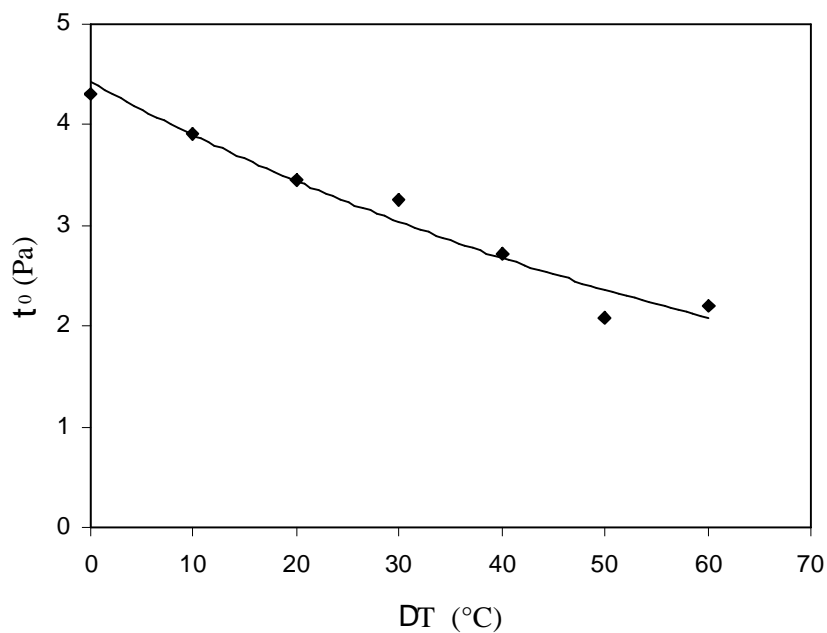


Figure A6.2 : Variation de la contrainte seuil du jus de prunelle à une concentration de 35 °Bx, en fonction de la température.