



**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
USTHB / ALGER
FACULTE DE GENIE MECANIQUE ET DE GENIE DES PROCÉDES**

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MAGISTER

EN : CHIMIE INDUSTRIELLE
Spécialité: Energétique des Procédés

Par :

Mlle LARFI Malika

Thème

**ETUDE HYDRODYNAMIQUE D'UN JET
TURBULENT AXISYMETRIQUE PAR
DIFFERENTES METHODES**

Soutenu publiquement le 10/04 / 2005 devant le jury composé de :

M.	S. Belaadi	Professeur, USTHB	Président
M.	K. Y. Benkahla	Maître de conférences, USTHB	Directeur de thèse
M.	D. Chemared	Chargé de cours, USTHB	Co-Directeur de thèse
Mme.	F. Bentahar	Professeur, USTHB	Examinatrice
M.	S. Chikh	Professeur, USTHB	Examinateur
M.	K. Daoud	Maître de conférences, USTHB	Examinateur

Remerciements

Avant toute chose, il m'est très agréable de remercier toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce modeste mémoire.

Le présent travail a été réalisé au laboratoire de phénomènes de transfert du département des génies des procédés, sa directrice Mme F. Bentahar d'avoir bien voulu m'y accueillir.

Je remercie en premier m. Y. K. Benkahla maître de conférence à l'U.S.T.H.B et directeur de l'équipe de simulation des écoulements thermoconvectifs, pour m'avoir proposé ce sujet et guidé tout au long de ce travail.

Que M D. Cherared, chargé de cours à l'U.S.T.H.B, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour l'aide qu'il m'a apporté, ses critiques ô combien constructives, et ses conseils fructueux, je le remercie également pour sa participation au jury.

Je remercie mr. M.S. Belaadi, professeur à l'U.S.T.H.B pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de soutenance, ainsi que Mme F. bentahar Professeur à l'U.S.T.H.B et M.K. Daoud , maître de Conférence, pour leur participation au jury .

Je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance à M.S.Chikh, Professeur à l'U.S.T.H.B , au prés de qui les horizons de mes connaissances se sont vus élargir, je le remercie pour ces conseils, ses encouragements et enfin, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je ne peux me permettre d'oublier deux grands Messieurs, les Professeurs H.Ait Amer ET Fellah, pour leurs soutiens morales ainsi que leurs encouragements.

Enfin, je ne remercie assez toutes les autres personnes qui m'ont aidé de diverses manières , en particulier : M.Y.OULD AMER , M..M..AIT SAADA , Mlle N.KEDAM et M.BELLOUT.

Sommaire

Introduction générale	1
------------------------------	---

Chapitre .I : Revue Bibliographique

I.1.Introduction	4
I.2. Les jets dans les milieux diphasiques	4
I.2.1. Les jets dans les milieux fluidisés	4
I.2.2. Effet de la gravité d'un jet sortant d'un réservoir	5
I.3. Ecoulement monophasique	7
I.4. Description d'un jet libre axisymétrique	9
I.4.1.Cône potentiel	10
I.4.2.Zone de transition	10
I.4.3.Zone principale	11
I.4.4.Zone terminale	14
I.5. Synthèse Bibliographique	14

Chapitre .II : Formulation mathématique

II .Caractéristiques générales des jets libres	16
II.1.Profils semblables des vitesses	16
II.2.Demi largeur du jet $y_{1/2}(x)$	17
II.3.Débit volumique $Q(x)$	18
II.4.Champ des pressions statiques $p(x)$	18
II.5.Flux de quantité de mouvement $M(x)$	18
II.6.Réflexions sur la turbulence	19
II.6.1.Description statistique de la turbulence	19
II.6.2.Classification des modèles	19
II.6.2.1-Modèle de la viscosité turbulente algébrique (Modèle de la longueur de mélange à zéro équation)	20
II.6.2.2.Modèle à une équation	20
II.6.2.3.Modèles à deux équations de transport k-z	21
II.6.2.4. Modèles aux tensions de Reynolds (R.S.M Reynolds Stress Model)	25
II.6.2.5. Modèle aux tensions de Reynolds algébriques (A.S.M : Algébric Stress Modél)	26
II.7.Mise en équation	28
II.8.Hypothèses du problème	29
II.9.Equation intégrale du jet	32
II.10.Méthode différentielle	35
II.10.1. Usage de fonction de courant	36
II.10.2. Conditions aux limites	37
II.11. Modèles de turbulence	38

II.11.1.Modèle de la longueur de mélange	40
II.11.2.Modèle de Prandtl –Tolkien	40
II.11.3.Modèle de Prandtl-Goertler	41
II.11.4.Modèle de Prandtl Reichardt	42
II.12.Conclusion	44
II.13.Équations générales probabilistes des écoulements polyphasiques	44
II.13.1.Position du problème	45
II.13.2.Hypothèses du problème	45
II.14.Modélisation	47
II.15.Recherche des profils semblables	47
II.16.Résolution de l'équation différentielle du jet légèrement particulaire	50
II.16.1.L'approche théorique	50
II.16.2.L'approche empirique	50
II.16.3.L'approche composite	50
II.17.Etude des combinaisons acceptables	50
II.18.Modèles de viscosité équivalente et influence	59
II.19.Conclusion	64

Chapitre .III : Simulation numérique d'un jet turbulent axisymétrique

III.1. Présentation do problème physique	66
III.2. Formulation mathématique	66
III.3. Conditions aux limites	69
III.3.1. Entrée du jet	69
III.3.2. Axe de symétrie	70
III.3.3. Frontière libre horizontale	70
III.3.4. Frontière libre verticale	70
III.3.5. Sortie du jet	70
III.4.Volume d'intégration des différentes variables	71
III 5. Discrétisation des équations de transport	72
III.6. Linéarisation du terme source	75
III.6.1.Algorithmes de résolution du couplage vitesse pression	76
III.6.2.Equations de vitesses	77
III.6.3.Correction des vitesses et pression	77
III.6.4. Correction de la pression	78
III.6.5.Algorithme Simple	79
III.7.Résolution du système d'équation	79
III.7.1. Stabilité et convergence	79
III.7.2.Règles de base de la converge de la méthode des volumes finis	79
III.8.Technique de sous relaxation	80
III.8.1.Critère de convergence	81
III.9.Conclusion	81

Chapitre .IV: Résultats et discussion

IV. Introduction	83
IV.1.Calcul des fonctions caractéristiques en s'accommodant du modèle de Reichardt	83
IV.2.Domaine de validité	88
IV.3.Choix des paramètres numériques	92
IV.4.Zone de cône potentiel	93
IV.6.Zone principale	94
IV.6.1.Profils de vitesses	94
IV.6.2.Vitesse maximale	101
IV.6.3.L'élargissement dynamique	104
IV.6.4.Variation du débit volumique de jet	105
IV.6.5.Variation de flux de quantité de mouvement	106
IV.12.Conclusion	111
Conclusion générale	113

NOTATION

$A_e, \text{ et } A_n$	Les surfaces sur lesquelles la force de pression agit ; I étant les nœuds voisins des nœuds considérés	$[L^2]$
$A(P) :$	Fonction généralisée associé au schémas d'interpolation	$[-]$
$a :$	constante empirique	$[-]$
$a_E, a_W, a_S \text{ et } a_N :$	Coefficients algébriques de système discrétisé	$[-]$
$B :$	échelle de tenseur de fluctuation	$[L^2/T^2]$
$B_{rx} :$	tenseur de fluctuation selon le plan $r\theta x$	$[L^2/T^2]$
$B_{r\theta} :$	tenseur de fluctuation selon le plan $r\theta x \theta$	$[L^2/T^2]$
$B_{x\theta} :$	tenseur de fluctuation selon le plan $x \theta\theta$	$[L^2/T^2]$
$c_1 :$	Constante	$[-]$
$c_2 :$	Constante	$[-]$
$C_{\varepsilon 1} :$	Constante du modèle $k-\varepsilon$	$[-]$
$C_{\varepsilon 2} :$	Constante du modèle $k-\varepsilon$	$[-]$
$C_{\mu} :$	Constante du modèle $k-\varepsilon$	$[-]$
$D_0 :$	diamètre de l'injecteur	$[L]$
$D_i :$	Flux du à la diffusion	$[M/T L]$
$\partial :$	dérivée partielle	$[-]$
$F_1(x), F_2(x) \text{ et } F_3(x) :$	sont des fonctions qui dépendent de η	$[-]$
$F_i :$	Flux convectif	$[M/T]$
$(FI)_x :$	Force d'inertie selon la direction axiale	$[M L/T^2]$
$(FI)_r :$	Force d'inertie selon la direction radiale	$[M L/T^2]$
$(FV)_x :$	Force visqueuse selon la direction axiale	$[M L/T^2]$
$(FV)_r :$	Force visqueuse selon la direction radiale	$[M L/T^2]$
$g_i :$	accélération de pesanteur	$[L/T^2]$
$h(x) :$	Coefficient de l'équation différentielle qui dépend de x	$[-]$
$h_0 :$	Coefficient de l'équation différentielle	$[-]$
$J_i :$	Flux du à la convection et à la conduction à travers l'interface	$[-]$
$k_{int} :$	Condition initiale de l'énergie turbulente	$[L^2/T^2]$
$k(x) :$	Coefficient de l'équation différentielle qui dépend de x	$[-]$
$k_0 :$	Coefficient de l'équation différentielle	$[-]$
$l_m :$	longueur de mélange	$[L]$
$M_0 :$	impulsion de sortie de la buse,	$[M L /T^2]$
$M :$	flux de quantité de mouvement	$[M L /T^2]$
$P^* :$	pression motrice	$[M /T^2 L]$
$P :$	pression totale dans le jet	$[M /T^2 L]$
$P_i :$	<i>nombre de Pecklet</i>	$[-]$
$Q_0 :$	débit du jet à la sortie de l'injecteur	$[L^3/T]$

Q	débit du jet pour un niveau donné de je l'enveloppe de jet	[L ³ /T]
r :	direction radiale	[L]
R ₀ :	rayon de l'injecteur,	[L]
R ϕ :	Résidus de la propriété Φ	[-]
$\sum \overline{F_{ext}}$:	Somme des forces extérieures	[ML/T ²]
$\sum (F_{visq})$:	Somme des forces visqueuses	[ML/T ²]
S ϕ :	Terme source de la variable Φ	[-]
S* :	Les valeurs de \overline{S} à l'itération précédente	[-]
\overline{S}_{ϕ} :	Terme source linéarisé	[-]
S _p :	Pente de terme source	[-]
S _U :	Deuxième terme de terme source linairisé	[-]
t :	la variable temps	[T]
U ;	vitesse moyenne axiale	[L/T]
U _m :	vitesse maximale sur l'axe du jet	[L/T]
U ₀ =: U _{int} :	vitesse du jet à la sortie de l'injecteur	[L/T]
U _{mt} :	vitesse minimale de fluidisation ,	[L/T]
U _r :	vitesse radiale	[L/T]
U _{θ} :	vitesse azimutale,	[L/T]
V :	échelle de vitesse radiale	[L/T]
V _{int} :	Condition initiale de la vitesse radiale	[L/T]
x _p :	longueur de la zone initiale du jet ;	[L]
y :	direction axiale ;	[L]
y _{1/2} (x):	Demi largeur du jet	[L]
y _{1/2} (x ₀):	Demi largeur du jet à la sortie de l'injecteur.	[L]

Lettres Grec :

ρ_g :	densité du fluide hors du jet ;	[M/L ³]
ρ :	densité du gaz à la sortie de l'orifice	[M/L ³]
ν_t :	viscosité turbulente	[L ² /T]
τ_{ij} :	Tenseur des forces visqueuses	[-]
Ψ	Fonction de courant	[L ³ /T]
ϵ_{int} :	taux de dissipation initiale	[L ² /T ³]
η :	Abscisse réduite,	[-]
μ ;	viscosité dynamique du fluide	[M/T L]
μ_{eff} :	Viscosité dynamique effective	[M/T L]
Γ_{ϕ} :	Coefficient de diffusion	[-]
σ :	coefficient de l'équation différentielle	[-]
σ_k ;	Constante du modèle k- ϵ	[-]
σ_{ϵ} :	Constante du modèle k- ϵ	[-]
Φ^* :	Les valeurs de Φ_P à l'itération précédente	[-]
α_S :	Probabilité de présence de la phase solide :	[-]
α' :	Rapport caractéristique de l'entraînement de débit	[-]

β :	Rapport caractéristique de l'entraînement de flux de quantité de mouvement	[-]
α_F :	Probabilité de présence de la phase solide :	[-]
Θ ::	angle d'expansion du jet	[-]
ϕ^* :	Valeur de la variable calculée au cours de l'itération k+1.	[-]
χ :	<i>Constante égale à $\ln(2)$</i>	[-]

Introduction Générale

Les processus hydrodynamiques qui se produisent dans la nature et dans l'industrie, telles que les industries liées à la propulsion, provoquent souvent des écoulements turbulents. Ceci constitue l'un des sujets actuels de génie des procédés.

Les écoulements ouverts ne font pas l'exception à cet égard, en effet les couches de mélanges spatiales et les jets homogènes rencontrés dans de nombreux problèmes industriels et notamment dans le secteur aéronautique comme les jets en sortie de réacteurs d'avions par exemple attirent l'attention des spécialistes des divers domaines de recherche comme la météorologie, l'océanologie. Par conséquent comprendre ces phénomènes physiques nécessite des moyens qui font appel à la mécanique des fluides et aux méthodes numériques.

De ce fait, nul n'a besoin de mentionner les défis prestigieux et les innovations entrevus dans ce domaine. Cependant, nous pensons que l'ordre de complexité des jets est lié à la nature des forces de frottement, qui conditionnent le régime d'écoulement, par conséquent, les méthodes de résolution admises peuvent être analytiques ou numériques.

Une revue de la littérature révèle que sur le plan expérimental, un grand nombre de travaux sur les jets libres turbulents ont été effectués. Quant à la simulation numérique, elle commence à prendre de l'ampleur dans ce domaine.

On se propose donc, dans le présent travail, d'étudier des écoulements de type jet axisymétrique en régime turbulent. Notre attention sera portée sur la zone établie. En effet, il serait intéressant de définir toutes ses caractéristiques hydrodynamiques et énergétiques à savoir, les profils des vitesses axiales, l'élargissement dynamique, le débit volumique et notamment le flux de quantité de mouvement. L'énergie cinétique turbulente, le taux de dissipation, viscosité turbulente et notamment les tensions de Reynolds.

La connaissance de ces caractéristiques impose une modélisation de la viscosité turbulente. En effet, Boussineq avait défini la viscosité turbulente en partant de l'analogie entre le transport de quantité de mouvement par l'agitation turbulente, et par l'agitation moléculaire son idée semblait mal fondée car l'agitation moléculaire subsistait même si le fluide est au repos ; alors que l'agitation turbulente devait son existence au mouvement de fluide.

Il existe dès lors, deux façons d'aborder le problème d'un jet libre axisymétrique incompressible. La première, rend compte de la méthode différentielle qui se base sur la théorie des profils semblables qui a été utilisée pour la première fois par Blasius quand il a étudié les couches limites, notons que cette théorie est très importante pour choisir les conditions d'expérience effectuées sur des modèles réduits, et pour estimer l'importance relative des différents termes des équations de Navier Stokes.

Par ailleurs plusieurs approches ont trouvé leurs applications grâce à la théorie de Boussineq, nous citons par exemple, celle de Prandtl-Tollmien qui solutionna numériquement le problème du jet turbulent.

Plus tard, Prandtl-Görtler développèrent ledit modèle en proposant une nouvelle définition de la viscosité turbulente ainsi une solution analytique a été établie dont l'avantage est la simplicité. Néanmoins, actuellement l'approche de Reichardt est considérée comme

étant incontestablement la plus appropriée étant donnée son bon accord avec les données expérimentales.

Dans notre étude, nous avons exploité les méthodes appliquées pour un jet libre monophasique pour tenter d'étudier un jet particulaire, en se munissant de la modélisation établie par Molodtsov. Ce système présente des difficultés lors de l'étude de leurs paramètres physiques ce qu'il a incité à prendre en plus des considérations introduites pour l'étude d'un jet libre une faible concentration de la phase dispersée. Tenant compte de ces considérations, les équations prennent une forme différentielle, qui doit justifier impérativement la théorie des profils semblables; de ce fait six combinaisons se dégagent. afin de mettre en évidence les profils hydrodynamiques ainsi que les caractéristiques d'un jet légèrement particulaire nous avons étudié et approfondi les six combinaisons.

La seconde méthode d'étude d'un jet libre a pour objectif de raffiner la description du champ dynamique d'un jet en résolvant les équations de Navier Stokes moyennées par la procédure de Favre.

Le modèle de turbulence admis qui est le plus approprié et qui répond au mieux à notre problème est le modèle $k-\varepsilon$ qui a prouvé sa souplesse et sa popularité, une fois discrétiser les équations de transports en utilisant la méthode des volumes finis, nous adaptons le code de calcul TEAM à notre problème, nous passons ensuite à l'étude hydrodynamique de jet turbulent.

Le chapitre premier est consacré, à une étude bibliographique destinée à rassembler les travaux numériques et expérimentaux les plus récents de jets libres axisymétriques.

Dans le chapitre II, nous solutionnons le problème d'un jet turbulent en utilisant la méthode différentielle, cette démarche nécessite une modélisation de tenseur de co-fluctuation, ainsi nous avons testé les différentes approches citées ci-dessus. Cette étude nous a permis d'aborder le problème d'un jet légèrement particulaire en utilisant la méthode différentielle afin d'avoir une idée sur les profils de vitesses ainsi que ces propriétés hydrodynamiques

L'étude numérique de problème a été entamée au chapitre III, en effet la discrétisation de système des équations différentielles se fait moyennant la méthode des volumes finis.

Enfin, conformément à l'usage, une validation des résultats numériques obtenus est effectuée au chapitre IV afin d'examiner l'efficacité du code de calcul. A ce sujet, nous avons été amené à confronter nos résultats à ceux donnés par Badirou (1989), aussi une comparaison a été faite entre nos résultats et ceux trouvés dans la théorie.

Par ailleurs nous montrons que les représentations des profils de vitesses axiales sont significatives et s'accommodent bien avec les données expérimentales. . A ce propos nous pouvons dire que l'hypothèse de l'auto similitudes des champs dynamiques est vérifiée car nous obtenons effectivement une courbe unique et qui est en outre satisfaite quelque soit la distance axiale, c'est donc le résultat fondamental de cette étude.

Ainsi nous confirmons les lois d'évolution axiale des paramètres hydrodynamiques du jet turbulent axisymétrique dans la zone étab

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 Introduction

Le jet libre trouve son application dans divers domaines, comme l'aérodynamique des véhicules aériens, marins ou terrestres, les transferts thermiques et massiques dans les moteurs et les propulseurs et notamment les processus de mélange et de séparation en génie des procédés.

Ce chapitre a pour objet l'analyse et la caractérisation d'un jet libre axisymétrique turbulent. Nous commençons par une revue des travaux qui ont été entrepris dans le domaine des jets dans un milieu diphasique, puis nous passerons à une description détaillée des jets libres axisymétriques et des investigations récentes qui ont été menées à ce sujet.

I.2. Jets dans les milieux diphasiques

Les mécanismes physiques des écoulements diphasiques turbulents sont encore assez mal connus, leur complexité est due essentiellement à l'interaction entre les phases, en effet, leur étude dépend des caractéristiques du jet et des propriétés du milieu dans lequel il est immergé.

I.2.1. Jets dans les milieux fluidisés

On pourrait évidemment envisager l'étude de jets dans des systèmes diphasiques, caractérisés par une phase continue gazeuse, ou liquide et une phase dispersée, composée de particules solides en mouvement. Ces systèmes présentent des difficultés lors de l'étude de leurs paramètres physiques.

a)- jet continu

Afin de convoyer la phase solide, une injection de gaz se fait généralement par une buse ou un distributeur, ce qui donne naissance soit à un phénomène direct de bullage, soit à un phénomène de jet ; la continuité qui apparaît entre ces deux types de phénomène est à l'origine de la difficulté de distinction à la quelle est confronté l'observateur.

Ces phénomènes répondant à des concepts physiques bien trop complexes, ont motivé les chercheurs de tenter de les expliquer moyennant des idées simples et réalistes. En effet, d'après Xuereb [1], Roll et coll [2] différencient ainsi bullage et jets en donnant l'explication suivante : le phénomène de bullage direct est caractérisé par le détachement des bulles au niveau de l'orifice d'alimentation qui se recouvre aussitôt de particules ; dans le cas des jets, la dégénérescence en bulles s'effectue à une certaine distance du point d'injection, laissant apparaître en amont et de façon permanente un degré de vide élevé.

Proche des explications annoncées ci-dessus, Markhevka et Coll [3] ont conçu une explication assez rudimentaire : le jet se développe régulièrement de façon séquentielle. Une cavité de gaz au niveau de l'orifice grossit et s'allonge petit à petit, un rétrécissement apparaît, amorçant la formation d'une bulle. Celle-ci gonfle et finit par se détacher simultanément, le

jet se rétracte sous forme d'une petite flamme qui atteint à ce moment là son volume minimum.

Une troisième opinion vient s'ajouter aux deux premières déjà citées ci-dessus, en effet, Yang et Keairns, [4], Knowlton et Hirson [5] ainsi que Kececiogla et Coll [6] considèrent que le phénomène est plus complexe avec l'apparition de contractions successives au niveau de la cavité du jet en forme de plume ou de flamme, qui divisent le jet en autant d'embryons de futures bulles.

b)- Jet séquentiel

On appelle jet séquentiel la cavité gazeuse dans un lit fluidisé formée par la décharge instantanée d'un certain volume de gaz maintenu en amont de l'installation en état de surpression par rapport au lit ; ce type d'injection est mis en œuvre quand il est nécessaire d'alimenter un lit fluidisé en solide de façon discontinue, la surpression est alors réglée en fonction du type et de la quantité du solide à introduire.

D'autres techniques peuvent être choisies dans le même but, mais celle-ci a l'avantage d'éviter toute infiltration de gaz et de particules fluidisées dans les tuyauteries d'alimentation. entre deux injections, un système de vannes peut isoler le lit du système d'alimentation.

I.2.2. Effet de la gravité d'un jet sortant d'un réservoir

Pour mettre en évidence l'effet de la gravité d'un jet sortant d'un réservoir, Maxime Nicolas [7] a étudié expérimentalement le comportement des systèmes naturels et industriels, en faisant varier la concentration des particules dans une solution depuis l'absence totale de particules jusqu'à une valeur maximale. Cette étude a contribué à la compréhension des mécanismes physiques de base d'interaction entre les particules via le liquide de suspension.

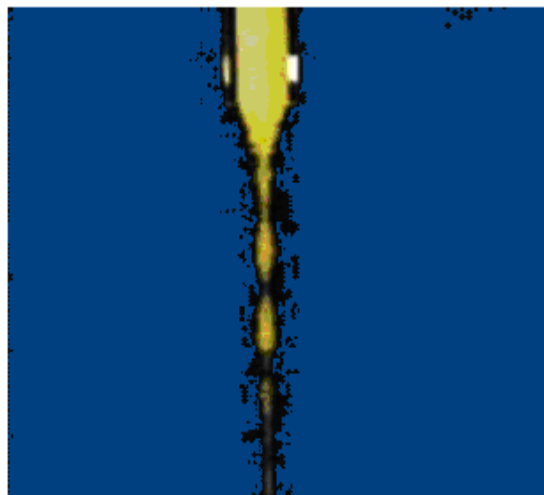


Figure I. 1 : Formation de gouttes (particules de polystyrène
Dans une huile silicone à 20 cSt)

A partir d'un dispositif expérimental très simple, une grande variété de phénomènes ont pu être observés depuis la formation de gouttes (figure I 1), en passant par la formation d'un jet spiral (figure I. 2) jusqu'à une atomisation rapide (figure I. 3). Ce dernier phénomène

s'explique par une rapide dilution des particules dès la sortie du réservoir, ceci en fonction des vitesses de jet, influencées par la masse volumique des particules et la viscosité du fluide qui conditionnent le passage d'un phénomène à l'autre. Pour comprendre ces phénomènes, deux échelles doivent être prises en compte : une échelle de la taille d'une particule (de l'ordre de 100 microns) et une échelle de la taille du jet (de l'ordre de 1 cm, la taille du réservoir)



Figure I.2 : Jet spiral (particules de résine acrylique dans l'eau)

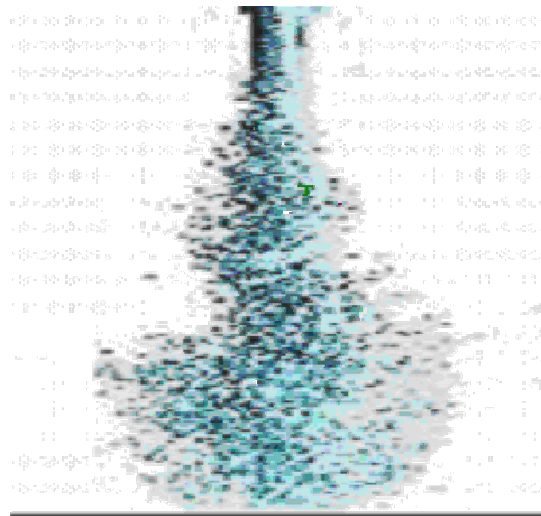


Figure I.3 : Atomisation du jet (particules d'acier dans l'eau)

A ce sujet, Olivier Vermorel [8] a entrepris une étude numérique afin de moduler la turbulence par des particules, en s'appuyant sur des résultats issus de simulations de type Euler/Lagrange qui résolvent directement les équations instantanées de la phase gazeuse et qui effectuent un suivi des trajectoires des particules. La configuration étudiée représente une nappe de particules injectées à une vitesse élevée dans une turbulence homogène isotrope décroissante (où nous constatons une perte progressive de l'influence de l'écoulement moyen du au transfert d'énergie des grosses échelle vers les petites échelles). Le mouvement des particules est supposé uniquement gouverner par la force de traînée visqueuse. Le chargement en particules est présumé suffisamment important pour qu'il ait une influence sur la phase

gazeuse, mais suffisamment faible pour pouvoir négliger les collisions inter particulaires. Une analyse des équations de transport des principales grandeurs moyennes de l'écoulement, est menée pour déterminer les effets directs et indirects des particules sur la turbulence fluide. L'étude des transferts d'énergie entre phases montre que la présence des particules tend à détruire la turbulence gazeuse au centre de la nappe et à l'augmenter à la périphérie. Ce dernier effet est causé par la forte corrélation entre la distribution de particules et la vitesse instantanée du gaz. Le modèle $k-\varepsilon$ est ensuite étudié et la validité de ses hypothèses de fermeture en écoulement diphasique est prouvée à l'aide de tests expérimentaux. Une nouvelle formulation de type viscosité turbulente, qui est une fonction des paramètres diphasiques, est utilisée pour modéliser le tenseur de fluctuation des vitesses du gaz. Une équation diphasique de Langevin est également testée pour modéliser les équations de transport.

I.3. Jets dans les milieux monophasiques

L'analyse physique et la modélisation des écoulements monophasiques, dans des situations dont la complexité provient soit de la présence d'instabilité et de la turbulence, soit des propriétés des fluides étudiés telle qu'une masse volumique variable, ou une rhéologie spécifique. Dans tous les domaines d'application, la connaissance des effets instationnaire stationnaires et des instabilités est une nécessité fondamentale pour aboutir à la prédétermination et au contrôle des écoulements.

Par ailleurs, les problèmes rencontrés par exemple dans une chambre de combustion telles que les instabilités de combustion qui résultent du couplage entre l'écoulement, le dégagement de chaleur dû à la réaction chimique et l'acoustique engendrent des bruits et des vibrations pouvant conduire à la destruction de l'installation. La solution proposée est d'équiper dès le départ l'installation de systèmes de contrôle actif (ou actionneurs) qui pourront être activés si des instabilités sont détectées. Cependant, Vincent Faivre [9] a conçu un dispositif qui consiste à contrôler l'expansion d'un jet non réactif, moyennant quatre petits jets auxiliaires mettant l'écoulement en rotation à l'intérieur de la buse en amont de la sortie du jet. L'effet de leur position, orientation et diamètre ainsi que de la densité du gaz injecté, a été entièrement caractérisé par des campagnes de mesures expérimentales par strioscopie (Schlieren), anémométrie à fil chaud et fluorescence induite par laser, ce qui a permis d'identifier la configuration la plus efficace.

Quant aux qualités de la combustion dans les cylindres moteurs ainsi que les émissions polluantes qui résultent d'un couplage entre le mélange et le niveau élevé de turbulence en fin de compression, les praticiens ont tenté de stratifier le mélange en utilisant la structure non dissipative de type "tumble" afin de transporter le carburant jusqu'à la bougie. Dans ce contexte, Julien Moreau [10] a étudié l'interaction entre un jet d'air et une structure tourbillonnaire compressée. Deux orientations d'injection ont été testées, ce qui a permis d'étudier l'impact du positionnement de l'injecteur dans la configuration industrielle. Trois types d'approches ont été utilisés pour réaliser cette étude. Tout d'abord, une approche "locale" via l'utilisation des champs de fraction massique et de vitesse issus des mesures. Plus tard, une approche dite "intégrale" a permis d'étudier l'évolution d'une quantité globale intégrée sur le champ de mesure pendant la phase de compression. Enfin, une approche POD (Décomposition Orthogonale en Modes Propres) a été utilisée afin d'approfondir l'étude des transferts d'énergie intervenant lors de la compression. Ces campagnes expérimentales par vélocimétrie par visualisation de particules (PIV) ainsi que par fluorescence (PLIF), ont été

menées afin de mesurer le champ de vitesse et le champ de fraction massique de la phase injectée.

François Gallaire et coll [11], par contre se sont intéressés à la déstabilisation du jet observé expérimentalement. Ils ont en effet, étudié un jet tournant pour comprendre ces effets physiques à savoir : la rotation solide du coeur, le cisaillement axial et azimutal et l'effet centrifuge. Dans le même ordre d'idée, une étude de stabilité temporelle d'un jet libre a été entreprise pour différentes valeurs des nombres de Swirl afin de mettre en évidence l'effet de rotation (figure I.4).



Figure I.4 : Visualisation expérimentale de jets en rotation

Signalons toutefois, que la bonne utilisation de la CFD nécessite, le recours à des constantes de modélisation « universelles » dérivées d'expérimentations bien étalonnées. Cependant, Yimer et coll [12] ont tenté de déterminer le nombre de Schmidt d'un jet libre turbulent à symétrie axiale, en se basant sur des données expérimentales de Becker et al. En effet, une valeur moyenne constante de 0,7 est recommandée pour l'utilisation dans des applications CFD visant des écoulements à jet libre à symétrie axiale.

Aussi, pour simuler le phénomène de refroidissement d'une surface plane par un jet d'air, Hadeif [13] a utilisé la méthode des volumes finis pour résoudre les équations de transport régissant les transferts de chaleur et de quantité de mouvement prenant place lors de l'impact. La turbulence est décrite grâce à l'application du modèle de Chien et les résultats obtenus sont comparés à ceux du modèle classique k- ϵ . Cette comparaison révèle l'incapacité de ce dernier à décrire les phénomènes qui prennent place au voisinage des parois solides. Dans le même ordre d'idée, d'autres codes de calculs ont été conçus tel que KIVA [14] qui simule un jet libre axisymétrique tridimensionnel pour étudier les phénomènes de turbulence

Ferreira-Gago [15] a entrepris une étude concernant l'impact des traînées de condensation, des panaches blancs fréquemment observés dans le sillage d'avions, sur l'atmosphère. D'un point de vue aérodynamique, la formation des traînées de condensation se caractérise par l'interaction entre un jet turbulent et un tourbillon de sillage. L'objectif de sa thèse est de contribuer à une meilleure compréhension des phénomènes thermiques et dynamiques mis en jeu dans cet écoulement. Ce travail repose sur la résolution numérique des équations de Navier Stokes, et de conservation de l'énergie, formulées pour le cas d'un écoulement tridimensionnel, instationnaire et compressible. Deux approches sont considérées : la simulation numérique directe et la simulation des grandes échelles. Une

simulation temporelle de la transition à la turbulence d'un jet rond non isotherme est effectuée sans tenir compte du champ tourbillonnaire. A l'issue de cette simulation, un modèle tourbillon de sillage est superposé à l'écoulement de jet.

Sur le plan numérique d'après Kriaa [16], le jet axisymétrique à densité variable en régime turbulent a été analysé par Joly et Sanders [17,18] en adoptant des modèles de turbulence au premier et au second ordre. Les différences observées sur les résultats obtenus par ces différents modèles ont été analysées par Sanders [19], qui a montré que le modèle de fermeture au second ordre décrit le mieux les résultats expérimentaux.

Par ailleurs, Saudreau [20] a analysé la dynamique des jets à densité variable soumis à un écoulement à co-courant périodiquement accéléré, en se basant à la fois sur des données expérimentales obtenues par anémométrie laser doppler bi-composantes, et une approche numérique par résolution des équations de Navier Stokes moyennées (RANS). Outre le test de la pertinence des modèles de fermeture ($k-\epsilon$, Rij- ϵ) en situation instationnaire, cette complémentarité a permis de mener à bien l'analyse dynamique de l'écoulement. Au niveau de la dynamique moyenne, l'instationnarité modifie le flux de quantité de mouvement excédentaire en sortie du jet et impose à l'écoulement un champ d'accélération variable en temps. La réponse du jet à ces deux sollicitations dépend de sa capacité à s'adapter aux changements des conditions initiales. Cette capacité, liée au transport advectif, induit une partition du jet en régions quasi statique en proche sortie de jet et instationnaire jet lointain. La zone quasi-statique répond alors aux caractéristiques d'un jet inertiel tout au long de la pulsation, alors que la zone lointaine se caractérise par des dynamiques variées et très marquées. Une structure à grande échelle comparable au vortex observé en situation de jet accéléré, se développe lors de l'accélération et se traduit par un effet important sur le champ turbulent.

Dans le but de fournir une base de données pour l'évaluation comparative des résultats de la modélisation et notamment pour déterminer si les caractéristiques de la turbulence en zone lointaine sont affectées par le mode de transition absolue du jet, Hermouche et Chassaing [21] ont utilisé une analyse expérimentale, alliant visualisation par interférométrie et mesure locale par fil chaud dans un jet.

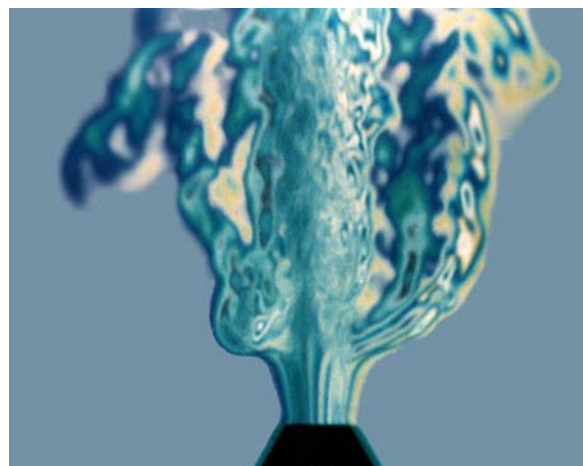


Figure 1.5 : Structures locales et propriétés de jets libres de mélange gazeux binaire.

Kourta [22] a développé une modélisation semi- déterministe apte à prédire les écoulements en explicitant d'une part le rôle de la turbulence «aléatoire» et celui des structures tourbillonnaires organisées. Cette modélisation met en oeuvre une fermeture au premier ordre avec une loi de comportement non linéaire, en effet, la viscosité turbulente dépend des taux de déformation et de rotation du champ organisé.

I.4. Description d'un jet libre axisymétrique

Le jet libre turbulent a fait l'objet d'un nombre important de travaux, son étude s'est avérée fort intéressante sur le plan fondamental, notamment pour développer et tester les performances des modèles de turbulences établis. Les gaz éjectés par les systèmes propulsifs (réacteurs, moteurs de fusées) par exemple, constituent des jets turbulents caractérisés par un nombre de Reynolds élevé, cependant Bejan et Abzar [23,24] divulguent que d'après Schlichting, [25] le nombre de Reynolds de la buse pour lequel on peut encore observer des écoulements laminaires est de 300 au maximum, la transition pouvant se produire pour des nombres de Reynolds bien plus petits.

Selon Padet [26]. Ces conditions limites sont généralement repoussées à l'infini. Cependant, quand les parois d'une conduite se localisent à proximité de la buse, par laquelle débouche le jet, et pour éviter l'influence de cette dernière, sa dimension latérale doit être supérieure à cinq fois la longueur du jet [27], [28]. Abramovich et Schlichting [29] ont étudié le jet libre et ont divisé son étendue en quatre zones distinctes (figure I.10). Ces quatre zones sont les suivantes :

I.4.1.Cône potentiel

C'est une zone proche de l'orifice, elle correspond à l'établissement du régime, à ce niveau là, le jet présente un noyau à écoulement potentiel dont les propriétés (vitesse, température, concentration) sont uniformes et égales à celles du jet à la sortie de l'injecteur. D'après les auteurs, cette zone s'étend jusqu'à trois fois le diamètre de la buse. M.Amielh [30] stipule que cette courte distance est justifiée par l'intensité de turbulence locale élevée dont l'effet immédiat est la réduction de l'épaisseur de quantité de mouvement initiale suivie d'une augmentation du taux d'élargissement de la couche de mélange.

Actuellement, des travaux d'investigation se font, notamment par des simulations numériques directes (DNS) et par la méthode de Fourier pour des faibles valeurs du nombre de Reynolds afin d'analyser le développement spatial et temporel de l'écoulement dans cette zone, ce qui permet d'identifier les modes instables et les structures cohérentes associées (figure I.6).

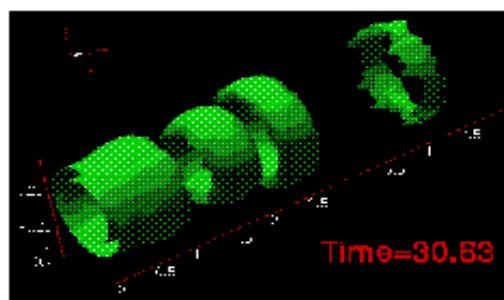


Figure I.6 : Mode axisymétrique dans un jet rond

I.4.2. Zone de transition

C'est une zone de passage d'un écoulement de l'état laminaire (zone initiale) à l'état turbulent (zone principale). Les investigations actuelles mettent l'accent essentiellement sur la modélisation des termes relatifs à la compressibilité qui apparaissent dans les équations de Navier Stokes. En effet, Lejeun [31] a mis en évidence un nouveau modèle défini par trois équations, k - ϵ - ρ , ce dernier s'est avéré satisfaisant lors de son application sur cette zone. Dans le même contexte, Sauvage [32] s'est intéressé à l'analyse de l'influence du nombre de Mach sur les propriétés spatio-temporelles comme les structures organisées et sur l'anisotropie de la turbulence.

Cependant, P.L. Kao et H.A. Minh [33] ont consacré une partie de leurs travaux à la simulation de la zone de mélange en utilisant la méthode semi déterministe afin d'étudier le comportement des instabilités convectives, ainsi que les mouvements cohérents, incohérent et cohérent instationnaire dans celle-ci. Notons que leur code de calcul a été validé pour les couches de mélange non visqueuses ou visqueuses ayant un profil de vitesse en tangente hyperbolique. Les résultats ont été comparés à ceux de Michalke.[]

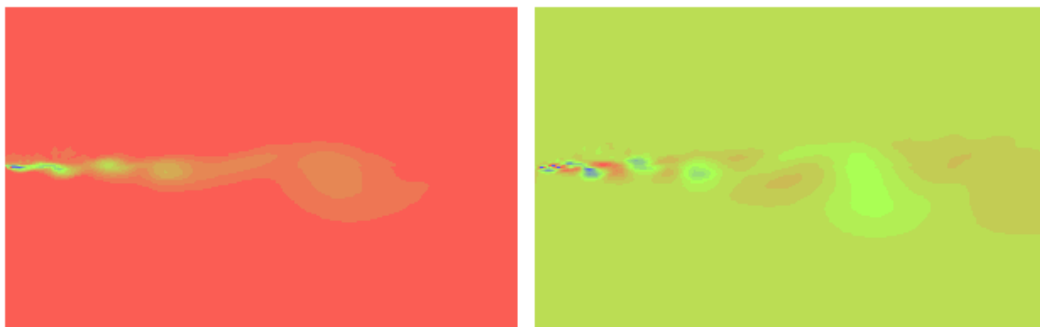


Figure I.7 : (a) Champ de vorticité cohérente.
(b) Champ de vorticité cohérente instationnaire.

I.4.3 Zone principale

D'après Hinze [34] la présence d'une région d'affinité ou zone établie (caractérisée par la superposition des profils de vitesses axiale) dans un écoulement donné n'existe que s'il y'a compatibilité des conditions aux limites avec les évolutions longitudinales des échelles caractéristiques. Il en résulte des lois de variations bien précises qui conditionnent le comportement asymptotique de l'écoulement, en terme de taux d'expansion et d'évolution (l'énergie cinétique turbulente ainsi que le taux de dissipation)

Par ailleurs, en raison de la variabilité des conditions de génération des écoulements en pratique (nature du régime, uniformité du profil de vitesse, développement des couches limites, niveau de turbulence), il n'est pas possible de dégager de l'ensemble des expérimentations une évolution unique de la distance à partir de laquelle s'établiraient systématiquement des distributions conformes à une loi d'auto similitude

Les études expérimentales et théoriques sur les profils semblables ont servi, dès l'origine à la validation des premières analyses phénoménologiques des modèles de la viscosité de turbulence Retenons tout de même qu'il est possible, sous certaines conditions, de

résoudre, parfois même analytiquement, les équations de Reynolds dans la région d'affinité des jets ; le tableau suivant illustre quelques solutions analytiques dans la zone établie.

Tableau 1 : Profil semblable de vitesse moyenne : formes avec viscosité de turbulence constante

Écoulement	Profil	Expression	Valeur du paramètre
Jet plan	$\frac{U}{U_{\max}}$	$\frac{1}{\text{Ch}^2(\alpha\eta)}$	$\alpha = \arg \text{ch}(\sqrt{2}) = 0,88$
Jet rond	$\frac{U}{U_{\max}}$	$\frac{1}{(1 + \alpha\eta^2)^2}$	$\alpha = \sqrt{2} - 1 = 0,414$

Les graphes correspondants sont représentés sur les tracés ci-dessous. Dans l'ensemble, les données expérimentales s'accordent assez bien avec les expressions analytiques classiques. D'après les graphiques nous constatons que l'hypothèse d'affinité ne peut rigoureusement s'observer en jet plan et rond qu'en absence d'écoulement externe.

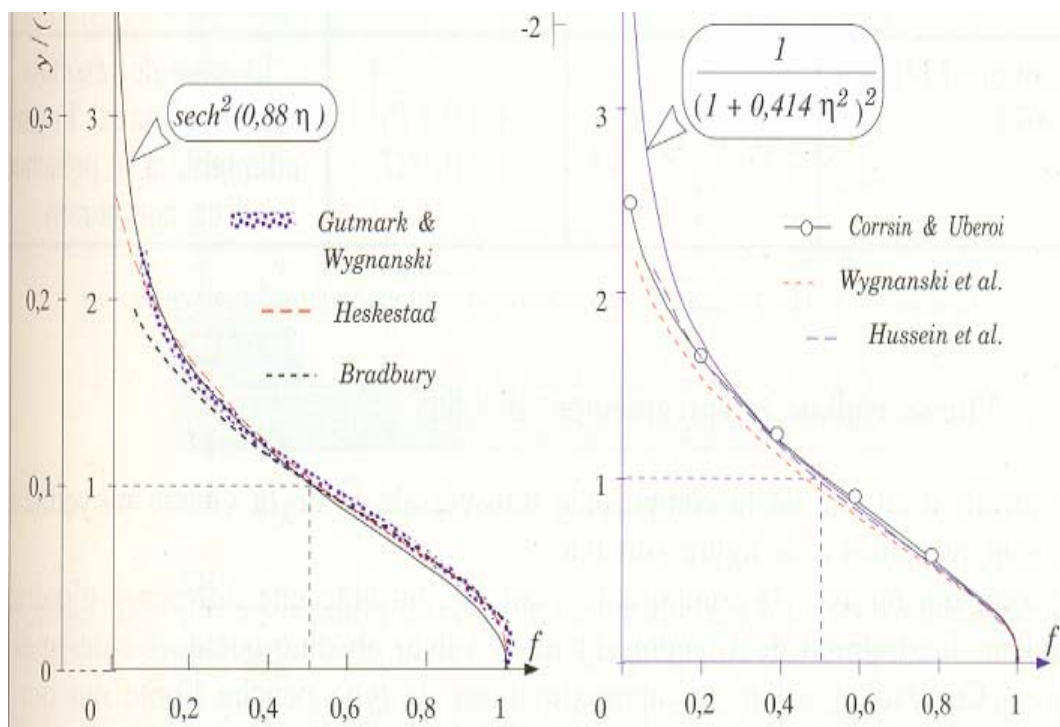


Figure 1.8 : profils d'affinité de vitesse dans les jets libre : a) jet plan ; b) jet rond [35]

Pour le jet rond il existe de nombreuses formulations qui conduisent à des résultats satisfaisants, en effet, le tableau I.2 regroupe les expressions données par différents auteurs, signalons que la variable d'affinité selon Panchapakesan et Lumley[36] vaut $\eta = x/r$

Tableau I.2 : Profils d'affinité de vitesse moyenne :
autres formulations en jet rond. [35]

Auteurs	Expression du profil de vitesse	Valeur de paramètres	Remarques
Reichardt	$e^{-k\eta^2}$	$\ln(2)$	Lissage gaussien de résultats expérimentaux
Panchapakesan et Lumley		$\ln(2)$	Pour une loi d'expansion $y_{1/2}(x) = 0,096x$
Hussein et al		$\ln(2)$	Lissage pour calcul des propriétés intégrales.
Schlichting	$\frac{1}{(1 + \alpha\eta^2)^2}$	$\alpha = 0,414$	Résolution analytique des équations avec viscosité turbulente constante.
Florent	$(1 - \alpha\eta^2)^2$	$\alpha = 0,09$	Relation applicable à la zone de mélange du jet par redéfinition de η
Bradbury	$e^{-k\eta^2(1+\beta\eta^4)}$	$\alpha = 0,675$ $\beta = 0,027$	Lissage de résultats expérimentaux. Forme adaptable à la présence d'un co-courant.

Nous représentons sur la figure I.9 les profils d'affinité de la vitesse moyenne radiale, par comparaison avec la composante axiale, on note une différence d'ordre de grandeur, l'extremum de la vitesse représentant en valeur absolue quelques centimètres de la vitesse axiale. On note aussi le signe de la composante transversale change pour une distance à l'axe pratiquement nulle.

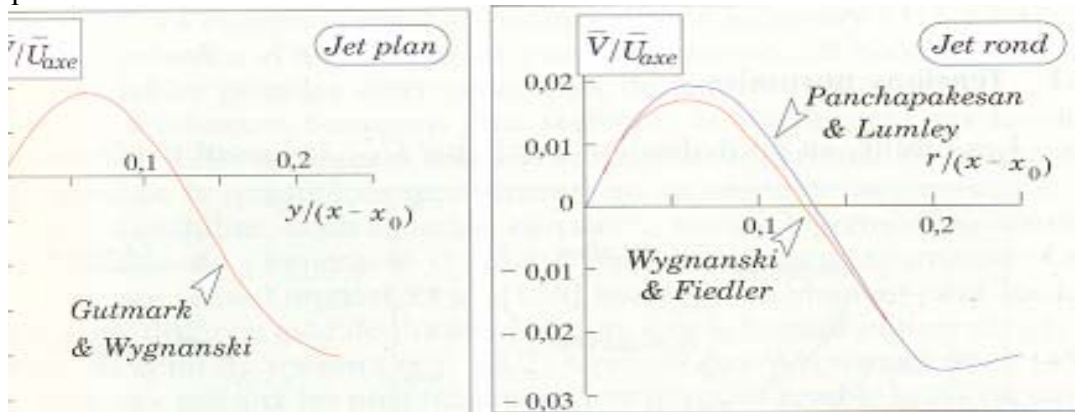
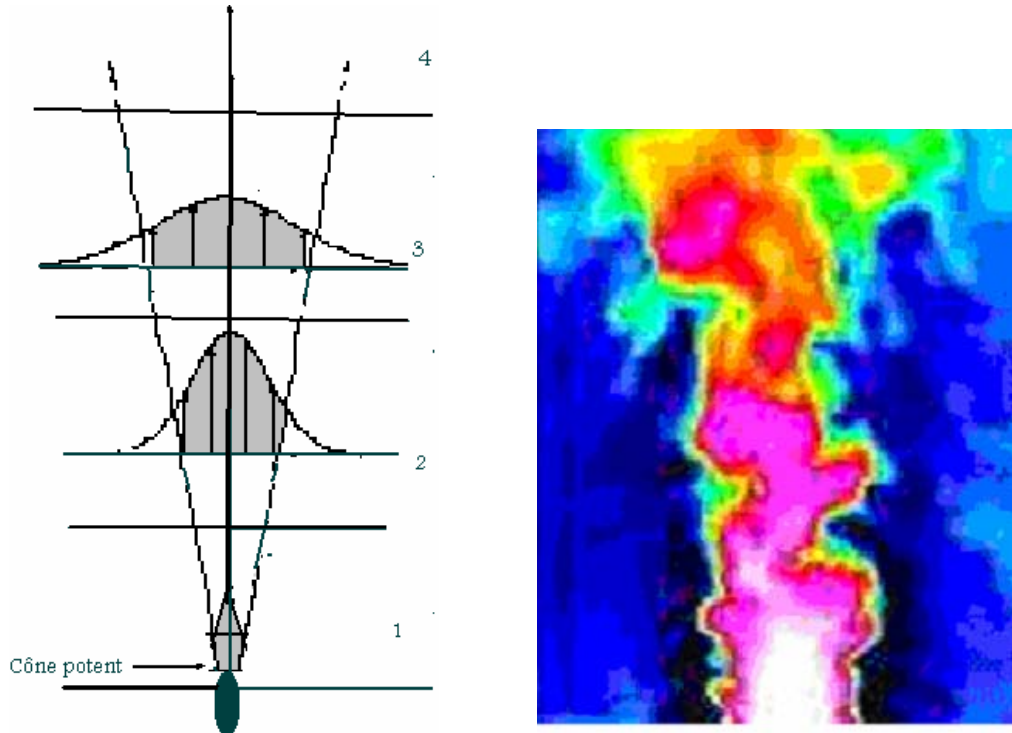


Figure I.9 : les profils d'affinité de la vitesse moyenne radiale

I.4.4-Zone terminale

Dans cette zone, le jet commence à dégénérer les composantes de vitesse qui tendent rapidement vers zéro.



- 1 Zone initiale (régime d'entrée)
2. Réorganisation (zone de mélange)
3. Zone développée (jet établi) pour $x/d > 6$
4. Zone terminale

Figure I.10 : Epanouissement d'un jet libre.

Notons par ailleurs, que l'épanouissement du jet est le résultat du cisaillement entre deux milieux dotés de deux vitesses différentes, ce cisaillement a pour effet de courber les lignes de courant dans le jet et de provoquer simultanément un entraînement du fluide au repos [26]

I.5. Synthèse Bibliographique

Les études expérimentales entreprises sur les jets en milieux particuliers avaient un but principal, qui consistait à comprendre et analyser les caractéristiques morphologiques d'un jet, la circulation interne du gaz et des particules, les échanges avec la phase dense et le mode de dégénérescence. En effet, comprendre ces mécanismes physiques permet de mieux cerner le phénomène du jet.

Néanmoins ces études expérimentales semblaient incomplètes étant donné qu'il leur manque un formalisme mathématique susceptible de les décrire quelque soit le domaine spatiotemporel, à ce sujet plusieurs travaux de simulations numériques ont été mis en œuvre dans le but de moduler la turbulence par des particules, pour déterminer les effets directs et indirects des particules sur la turbulence fluide et d'étudier les transferts d'énergie entre phases

Par ailleurs, les problèmes majeurs rencontrés lors de l'analyse et de la modélisation des écoulements monophasiques sont dus essentiellement à la présence d'instabilité, de la turbulence et aux propriétés des fluides étudiés.

Néanmoins, dans tous les domaines d'application, la connaissance des effets non stationnaires et celles des instabilités est une nécessité fondamentale pour aboutir à la prédétermination et au contrôle des écoulements. En effet de nombreux problèmes industriels tel que les instabilités rencontrées dans une chambre à combustion et la stratification d'un mélange au niveau des cylindres à moteurs ont été solutionnés grâce à l'introduction des jets, en effet il s'est avéré que la position, l'orientation et diamètre ainsi que la densité du gaz injecté peuvent être complètement contrôlés et caractérisés moyennant des approches expérimentales et théoriques. A ce propos, plusieurs approches ont été entreprises telles que l'approche intégrale, l'approche POD (Décomposition Orthogonale en Modes Propres) et l'approche semi-déterministe qui consiste à développer une modélisation apte à prédire ce type d'écoulement.

Cependant, les procédés pratiques entrepris dans l'étude des jets, quelque soit leurs configurations géométriques, restent insuffisants, ce qui a incité les physiciens à faire recours à la théorie.

FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

II. 1. Caractéristiques générales des jets libres

Compte tenu de l'analyse des observations expérimentales du champ de vitesse radiale, il a été constaté que celui-ci restait négligeable devant le champ de vitesse axiale, ce qui incite le jet à se transvaser suivant une seule direction privilégiée; cette particularité s'explique par la faiblesse de force de gravité. C'est pour cette raison que nous nous sommes intéressés dans ce travail, à étudier l'aspect hydrodynamique du jet suivant cette direction, notamment dans la zone établie; c'est-à-dire celle des profils semblables de vitesse.

II.1 1 Profils semblables des vitesses

Bien que l'on soit en écoulement turbulent, l'expérience montre une remarquable similitude des profils des vitesses dans le jet [35], que l'on met en évidence en normalisant les grandeurs physiques locales par deux échelles. En effet, la vitesse locale est rapportée à la vitesse maximale sur l'axe que l'on notera U_m ; quant à la distance à l'axe radial, elle est rapportée à la demi largeur du jet $y_{1/2}(x)$. Ainsi, on définit l'abscisse réduite η par :

$$\eta = \frac{y}{y_{1/2}(x)} \quad (\text{II.1.a})$$

Dans le cas d'un jet axisymétrique, on a :

$$\eta = \frac{r}{y_{1/2}(x)} \quad (\text{II.1.b})$$

En représentant la vitesse axiale réduite en fonction de la variable η , on obtient une courbe unique, appelée profil réduit, caractérisée par une forme gaussienne dont l'expression est la suivante :

$$\frac{U(x,\eta)}{U_m(x)} = \exp\left(-\eta^2 \ln 2\right) \quad (\text{II.2})$$

La forme fonctionnelle de la vitesse maximale $U_m(x)$ suit une tendance décroissante de la distance axial x à l'orifice, elle est donnée par l'expression :

$$\frac{U_m(x)}{U_0} = a \frac{D_0}{x} \quad (\text{II.3})$$

Avec :

- a : constante de proportionnalité dans l'équation (II.3) ;
- U_0 : vitesse du jet à la sortie de l'injecteur (ou vitesse débitante) ;
- D_0 : diamètre de l'orifice.

Notons que pour un jet axisymétrique, Rajaramannet [37] et Labidi [28] estiment la constante de proportionnalité à 6,13. En contrepartie, pour un jet plan, ils définissent une loi racine carrée de la vitesse axiale dont la constante a est estimée à 3,7. Dans ce cas, l'expression de la vitesse maximale est donnée par :

$$\frac{U_m(x)}{U_0} = a \left(\frac{D_0}{x} \right)^{0,5} \quad (\text{II.4})$$

Pour prédire la vitesse axiale des jets turbulents à densité variable, Kataoka [38] propose l'expression empirique suivante :

$$\frac{U_m(x)}{U_0} = 0,16 \left(\frac{\rho_g}{\rho_0} \right)^{0,5} + \left(\frac{D_0}{x - x_p} \right) + 1 \quad (\text{II.5})$$

Avec :

- ρ_g : densité du fluide hors du jet ;
- ρ_0 : densité du gaz à la sortie de l'orifice ;
- D_0 : diamètre de l'injecteur ;
- x : distance axiale comptée à partir de l'injecteur ;
- x_p : longueur de la zone initiale du jet ou zone du cône potentiel.

Cette relation est déterminée pour un fluide incompressible à faible nombre de Mach, c'est-à-dire des nombres de Mach inférieurs à 0,1.

II.1.2 Demi largeur du jet $y_{1/2}(x)$

En pratique, il est extrêmement difficile d'accéder à une valeur précise de l'épaisseur totale du jet, en raison du phénomène d'intermittence de frontière. C'est pourquoi, le taux d'expansion est le plus souvent déduit de l'épaisseur de la vitesse moitié, c'est à dire de la distance transversale où la composante longitudinale de la vitesse moyenne atteint la moitié de sa valeur sur l'axe. Cette définition conduit à une sous estimation du coefficient d'expansion.

Par ailleurs, les chercheurs ont eu du mal à établir des lois empiriques prévoyantes son évolution en fonction de la côte [30], en particulier pour des distances axiales inférieures à huit fois le diamètre de la buse, au-delà de cette distance, les auteurs attribuent une loi de variation linéaire donnée par l'expression suivante :

$$y_{1/2}(x) = c_1 x + y_{1/2}(x_0) \quad (\text{II.6})$$

Où :

- c_1 : demi angle de jet, estimé approximativement à 15° d'après la littérature ;
- $y_{1/2}(x_0)$: demi largeur du jet à la sortie de l'injecteur.

Comme dans le cas de la vitesse axiale, Kataoka [38] propose une relation empirique pour prédire les variations de la demi largeur des jets turbulents compressibles ; elle est exprimée par la forme ci-dessous [1] :

$$\frac{y_{1/2}(x)}{y_{1/2}(x_0)} = 0,09 \left(\frac{\rho_g}{\rho_0} \right)^{0,1} + \left(\frac{x - x_p}{D_0} \right) + 1 \quad (\text{II.7})$$

Cette expression montre que la demi largeur demeure une fonction linéaire de la distance axiale x pour différentes températures.

II.I.3 Débit volumique $Q(x)$

Au cours de son développement, le jet entraîne dans son sillage une quantité de fluide du milieu ambiant qu'il met en mouvement, ce qui augmente son débit avec la distance axiale x ; l'expression de l'évolution du débit est donnée par la relation ci-dessous :

$$\frac{Q(x)}{Q_0} = c_2 \frac{x}{D_0} \quad (\text{II.8})$$

où :

- c_2 : constante de proportionnalité, estimée selon Rajaratman [37] à 0,33 ;
- Q_0 : débit de jet à la sortie de l'injecteur.

II.I.4 Champ de pression statique $p(x)$

La pression est une grandeur physique souvent négligée par les auteurs en comparaison avec les autres forces s'exerçant sur le fluide. En effet, on a généralement considéré la pression statique uniforme et égale à la pression ambiante [29], ce qui se traduit par la conservation du flux de quantité de mouvement longitudinal moyen.

Cependant, ce constat a été corrigé par certains auteurs. En effet, Clark et Kotsovinos [30] affirment que le champ de pression statique peut éventuellement chuter considérablement du seul fait de la turbulence, très élevée dans la région de mélange d'un jet libre.

II.I.5 Flux de quantité de mouvement $M(x)$

Les jets libres turbulents débouchant dans un milieu homogène, conservent leurs flux de quantité de mouvement total. Celui-ci est équivalent à l'impulsion de sortie M_0 . En effet, si nous supposons que la pression qui règne dans l'écoulement est la même que celle du milieu ambiant pris à l'infini, pratiquement au repos, le flux de quantité de mouvement M_0 est déterminé par l'expression suivante :

$$M_0 = \pi \rho R_0^2 U_0^2 = \text{Cte} \quad (\text{II.9})$$

où :

U_0 et R_0 sont respectivement la vitesse débitante du jet et le rayon de l'injecteur.

Signalons à ce sujet, qu'il y'a un désaccord apparent entre la théorie et la pratique, en effet, il ne faut pas se laisser suborner par la théorie car la conservation du flux de quantité de mouvement n'a jamais été validée compte tenu des travaux de Meyer [30] Ce dernier a constaté une augmentation de cette grandeur en fonction de la côte lorsqu'il a effectué ses mesures. Mais dans ses travaux, il n'a pas tenu compte de la présence des courants périphériques de retour du jet puisque les mesures à la périphérie des jets sont imprécises à cause du niveau très élevé de l'agitation dans ces courants de retour.

De ce fait, nous pensons que l'ordre de complexité des jets libres provient essentiellement de son aspect turbulent, cependant trouver un formalisme mathématique pour les corrélations doubles des vitesses fluctuantes a fait l'objet de plusieurs travaux, ce qui nous a incité dans ce qui suit à essayer de comprendre la turbulence et de définir ses caractéristiques.

II.2 Réflexions sur la turbulence

Bâtir une réflexion sur la turbulence a fait l'objet de plusieurs ouvrages En effet, d'après [39] Landau et Lifichitz [40]: «le mouvement turbulent d'un fluide est, pour des valeurs suffisamment grandes du nombre de Reynolds, caractérisé par l'existence d'une variation extrêmement irrégulière et chaotique de la vitesse au cours du temps en chaque point du flux (turbulence développée). La vitesse oscille sans cesse autour d'une certaine valeur moyenne, et indiquons ici même que l'amplitude de ses pulsations n'est pas en générale petite par rapport à la grandeur de la vitesse elle même. L'irrégularité des variations de la vitesse se répète d'un point à l'autre du flux considéré à l'instant donné. Les trajectoires des particules fluides dans le flux turbulent sont extrêmement complexes, d'où un brassage intense du fluide».

II.2.1 Description statistique de la turbulence

Il est extrêmement difficile de décrire analytiquement un écoulement turbulent. Les principales propriétés qui le caractérisent sont :

- ❖ **L'aspect aléatoire :** Les variables physiques telles que la vitesse, la pression, la masse volumique et la température fluctuent autour d'une valeur moyenne.
- ❖ **Aspect rotationnel :** Les écoulements turbulents sont fortement rotationnels ; ils sont constitués par des tourbillons ayant des tailles et des orientations distribués de façon aléatoire.
- ❖ **Aspect dissipatif :** L'énergie cinétique turbulente tirée de l'écoulement moyen est transférée vers les petites structures, où elle est dissipée par les

contraintes visqueuses. L'écoulement turbulent ne peut exister sans un transfert permanent d'énergie [39], [41] et [42].

C'est justement la difficulté principale qui a motivé les chercheurs tel que Reynolds à introduire la notion d'écoulement moyen ; ainsi, les quantités hydrodynamiques d'un écoulement turbulent sont représentées par la somme d'une composante moyenne (régulière) et d'une fluctuation (irrégulière). Cette décomposition donne naissance à une forme de corrélations doubles des vitesses fluctuantes. Il en résulte alors un problème ouvert dont la résolution nous incite à introduire un modèle de viscosité turbulente, d'où la naissance de la théorie de Bousinesq, qui avait défini la viscosité turbulente en partant de l'analogie entre le transport de quantité de mouvement par l'agitation turbulente et par l'agitation moléculaire.

La conférence de Stanford en 1968 [43], a encouragé les chercheurs à établir des modèles de turbulence à partir des équations de l'énergie cinétique et des tensions de Reynolds. Ainsi, une classification des modèles a été faite.

II.2.2 Classification des modèles

Le but des modèles statistiques est de déterminer les tensions de Reynolds afin de résoudre le système d'équations régissant l'écoulement moyen.

J. Boussinesq (1877) a exprimé les tensions de Reynolds en fonction de la viscosité turbulente et les taux de déformation moyens par la formule ci-dessous :

$$B_{ij} = -\overline{u_j' u_i'} = \nu_t \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (\text{II.10})$$

La viscosité turbulente ν_t , contrairement à la viscosité moléculaire ν , n'est pas une propriété du fluide mais de l'écoulement ; elle varie d'un point à l'autre de celui-ci. Le problème de la détermination des tensions de Reynolds est donc transféré sur l'évolution de cette entité, et les modèles de ce type sont classés selon le nombre des équations de transport utilisées pour la décrire.

II.2.2.1 Modèle de la viscosité turbulente algébrique (modèle de la longueur de mélange à zéro équation)

Le modèle de la longueur de mélange, proposé par Prandtl en 1925, appartient à la catégorie des modèles algébriques. Dans ce modèle, la viscosité turbulente est directement reliée au gradient des vitesses moyennes par l'intermédiaire d'une longueur L_m , appelée par Prandtl longueur de mélange.

Généralement, cette grandeur tient compte du type de l'écoulement envisagé. En effet, dans le cas des couches limites turbulentes, elle est proportionnelle à une distance x_2 prise au voisinage de la paroi, sa formule est donc linéaire et s'écrit :

$$L_m = k x_2 \quad (\text{II.11})$$

où :

k : constante de Kramer, sa valeur est de 0,14.

Pour les écoulements internes, on utilise la formule de Nikuradse :

$$L_m = D \left[0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{D} \right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{D} \right)^4 \right] \quad (\text{II.12})$$

où :

D : est la demi largeur du canal ou rayon de l'injecteur ;
 y : distance à la parois

II.2.2.2 Modèle à une équation

Kolmogorov [39] a été plus judicieux dans son calcul de la viscosité turbulente car il a tenu compte de trois considérations principales et qui sont : l'isotropie locale, le sous domaine inertiel et l'intermittence interne ; et en vertu du théorème de Vachy-Buckingham, il a établi une expression de la viscosité turbulente telle que :

$$\mu_t = c_\mu \rho k^{1/2} l \quad (\text{II.13})$$

D'autres modèles ont été proposés parmi lesquels nous pouvons citer celui de Bradshaw Feniss et Atwell (1967) qui utilisent le rapport :

$$-\rho \frac{u_i u_j}{k} = 0,3 \quad (\text{II.14})$$

En ce qui est de l'équation énergétique utilisée elle s'écrit selon l'expression ci dessus :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ u_i' \frac{\overline{u_i' u_j'}}{2} + \frac{\overline{p' u_i}}{\rho} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_i} \right\} - \nu \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.15})$$

II.2.2.3 Modèles à deux équations de transport k-z

Ces modèles utilisent une équation de transport pour l'échelle de la vitesse (équation de l'énergie cinétique de la turbulence k) et une équation de transport pour l'échelle de la longueur. Le choix de z n'est pas nécessairement associé à k . Toute combinaison de la forme $k^m L^n = z$, permet de déduire L connaissant k .

Il existe de nombreux modèles à deux équations de transport, ils ne diffèrent que par le choix du couple d'exposant (n, m). Ils sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

Tableau II.1 Modèles à deux équations [43].

Modèles (k - z)	Auteurs	Années
$k(k^{1/2}/L)$	Kolmogorov	1942
$k\varepsilon = (k^{0.5}/L)$	Marlow-nakayama	1967
$k k L$	Rotta	1968
$k(k/L^2)$	Spalding	1969
(k - ε)	Jones-Launder	1972

❖ **Modèle k-ε**

Ce modèle est devenu plus populaire que les autres, il est attribué à Jones et Launder. Dans la version standard de ce modèle, la viscosité turbulente est définie par :

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{II.16})$$

Avec :

C_μ : constante numérique ;

k et ε sont donnés par la résolution de deux équations de transport.

L'équation traduisant l'évolution exacte de k s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \overline{-u_i' u_j'} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ u_i' \frac{\overline{u_i' u_j'}}{2} + \frac{\overline{p' u_i}}{\rho} - v \frac{\partial k}{\partial x_i} \right\} - v \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.17})$$

Les termes entre accolade traduisent la divergence d'un flux d'énergie à travers les frontières (on parlera de terme de diffusion). Si, pour un volume de contrôle donné, le flux moyen à travers la frontière est nul, ces termes représentent simplement une redistribution de l'énergie à l'intérieur du volume; ils ne participent donc ni à la production, ni à la destruction de l'énergie cinétique.

$v \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)$: traduit la destruction de l'énergie cinétique par dissipation visqueuse.

$\overline{-u_i' u_j'} \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$: est un terme de production, il est directement proportionnel au gradient

de la vitesse moyenne, de telle sorte que, pour un écoulement à vitesse moyenne constante, la turbulence ne peut que décroître ; il contribue alors à un échange d'énergie entre mouvement moyen et fluctuant et ce transfert s'effectue au profit du mouvement fluctuant.

La seule simplification introduite par l'hypothèse des grands nombres de Reynolds dans l'équation (I.16), concerne le terme de diffusion moléculaire ($v \frac{\partial k}{\partial x_i}$) qui peut être négligé.

Les derniers termes de diffusion restants, $u_i' \frac{\overline{u_i' u_j'}}{2}$ et $\frac{\overline{p'}}{\rho} u_i'$, sont modélisés par une hypothèse de diffusion en gradient.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_i' \frac{\overline{u_i' u_j'}}{2} + \frac{\overline{p'}}{\rho} u_i' \right) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.18})$$

L'équation de dissipation se déduit à partir de l'équation associée au mouvement fluctuant qui s'écrit de la manière suivante :

$$E = \frac{\partial u_j'}{\partial t} + U_i \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + u_i' \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} - u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[v \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) \right] \quad (\text{II.19})$$

L'équation de dissipation s'écrit sous la forme:

$$\varepsilon = 2\nu \frac{\partial u_j'}{\partial x_m} \frac{\partial E}{\partial x_m} \quad (\text{II.20})$$

Le développement de celle ci donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} &= -2\nu \underbrace{\left\{ \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_m} \frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right\}}_1 - 2\nu \underbrace{\left[u_i' \frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_m} \right]}_2 \\ &\quad - 2\nu \underbrace{\left[\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \frac{\partial u_j'}{\partial x_m} \frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \right]}_3 - \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\left[u_i' \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_m} \right)^2 \right]}_4 \\ &\quad - 2 \frac{\nu}{\rho} \underbrace{\left[\frac{\partial u_j'}{\partial x_m} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_m \partial x_j} \right]}_5 + \nu \underbrace{\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_i^2}}_6 - 2\nu^2 \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_i \partial x_m} \right)}_7 \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Un calcul d'ordre de grandeur des termes de l'équation (II.20) montre que l'hypothèse des grands nombres de Reynolds permet de négliger les premier, second, troisième et sixième termes. Ainsi que le terme de diffusion moléculaire (septième terme).

Le terme de diffusion restant est modélisé de la même manière que pour l'équation de l'énergie turbulente k , c'est à dire par l'hypothèse de diffusion en gradient.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{v u_i' \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_m} \right)^2} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] \quad (\text{II.22})$$

où, σ_ε est une constante numérique.

Les troisième et septième termes de l'équation (II.20), sont des termes de production et de destruction ; chacun d'eux tend vers l'infini pour des nombres de Reynolds élevés mais leur somme reste bornée. Il est convenable alors de les modéliser ensemble :

$$- 2v \left(\frac{\partial u_j' \partial u_j' \partial u_i'}{\partial x_i \partial x_m \partial x_m} \right) - 2v^2 \left(\frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_i \partial x_m} \right)^2 = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \pi - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{II.23})$$

$C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$ sont des constantes numériques.

Compte tenu des modélisations introduites, les équations de transport k et ε s'écrivent finalement de la manière suivante :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_t}{\sigma_K} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \frac{C_\mu}{2} \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 - \varepsilon \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{C_\mu}{2} k \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{II.25})$$

Extension du modèle k - ε aux faibles nombres de Reynolds

Au voisinage immédiat d'une paroi solide, ce modèle n'est plus valable car l'action des forces visqueuses devient dominante.

La première modification à apporter au modèle k - ε standard, pour étendre sa plage de validité aux faibles nombres de Reynolds, est évidemment de réintégrer les termes de diffusions moléculaire (qui ne demande aucune modélisation).

La généralisation de l'équation k - ε est beaucoup plus délicate, les constante $C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$ sont exprimées en fonction du nombre de Reynolds local, ceci au moyen des fonctions de pondérations $F_{\varepsilon 1}$ et $F_{\varepsilon 2}$. L'expression de la viscosité turbulente s'écrit comme suit:

$$v_t = C_\mu F_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{II.26})$$

Ainsi, la forme généralisée des équations k- ε que nous retiendrons est donc :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + \frac{C_\mu F_\mu}{2} \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 - \varepsilon \quad (\text{II.27})$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_{\varepsilon 1} F_{\varepsilon 1} \frac{C_\mu F_\mu}{2} k \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} F_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{II.28})$$

Les différentes expressions des fonctions de pondération proposées pour $F_{\varepsilon 1}$ et $F_{\varepsilon 2}$ sont :

$$F_{\varepsilon 1} = 1 + \left(\frac{A_{\varepsilon 1}}{F_\mu} \right)^3 \quad (\text{II.29})$$

$$F_{\varepsilon 2} = 1 - A_{\varepsilon 2} \exp \left[- \left(B_{\varepsilon 2} R_T \right)^2 \right] \quad (\text{II.30})$$

où, $A_{\varepsilon 1}$, $A_{\varepsilon 2}$, $B_{\varepsilon 2}$, σ_2 , σ_K sont des constantes numériques.

La forme généralisée de F_μ est établie par Sharma,[39] elle est donnée par :

$$F_\mu = \exp \left[\frac{-A_\mu}{\left(1 + B_\mu R_T \right)^2} \right] \quad (\text{II.31})$$

Avec :

$$R_T = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \quad (\text{II.32})$$

où, A_μ et B_μ sont des constantes numériques.

L'avantage du nouveau modèle est que, tout en conservant la même forme que le modèle standard (la définition de ε n'est pas changée et si l'on prend, $F_\mu = F_{\varepsilon 1} = F_{\varepsilon 2} = 1$ on retrouve le modèle standard), il peut être utilisé en tout point de l'écoulement sans restriction. Les cinq constantes du modèle sont déterminées par rapport à des écoulements turbulents simples servant de référence, ainsi que par optimisation numérique ; les valeurs conseillées par Launder et Spalding sont : $C_\mu = 0,09$; $C_{\varepsilon 1} = 1,44$; $C_{\varepsilon 2} = 1,92$; $\sigma_k = 1$ et $\sigma_\varepsilon = 1,3$.

II.2.2.4 Modèles aux tensions de Reynolds (R.S.M Reynolds Stress Model)

Le modèle (R.S.M) ne fait pas appel à la notion de viscosité turbulente, en effet, les tensions de Reynolds peuvent être déterminées à partir de leurs équations d'évolution qui peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i' u_j'}) + U_k \frac{\partial (\overline{u_i' u_j'})}{\partial x_k} = P_{ij} + \phi_{ij} + D_{ij} - \sum_{ij} \quad (\text{II.33})$$

Les différents termes de cette équation sont explicités dans le tableau suivant

Tableau II.2 : Termes associés aux tensions de Reynolds.

$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i' u_j'})$	Taux de variation temporel nul en régime stationnaire.
$U_k \frac{\partial (\overline{u_i' u_j'})}{\partial x_k}$	Variation convective associée au mouvement moyen, nulle en écoulement homogène.
$P_{ij} = -\overline{u_i' u_k'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \overline{u_j' u_k'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$	Travail des tensions de Reynolds soumises aux gradients des vitesses moyennes.
$\phi_{ij} = \frac{p}{\rho} (\overline{u_{ij}'} + \overline{u_{ji}'})$	Terme relatifs à une redistribution de l'énergie suivant les diverses composantes de la vitesse.
$D_{ij} = -\left(\overline{u_i' u_j' u_k'} - \frac{p}{\rho} (\overline{u_i' \delta_{jk}} + \overline{u_j' \delta_{ik}}) + \nu R_{ijk} \right)$	Terme de diffusion. Les deux premiers termes représentent la diffusion turbulente due aux fluctuations de vitesse et de pression et le dernier terme représente la diffusion moléculaire.

L'inconvénient de ce modèle réside dans la résolution de sept équations de transport pour décrire l'aspect turbulent de l'écoulement (six équations des tensions de Reynolds, et l'équation de transport de ε soit cinq équations supplémentaires à résoudre par rapport au modèle k- ε).

II.2.2.5. Modèle aux tensions de Reynolds algébriques (A.S.M : Algébric Stress Modél)

La voie la plus simple de rendre l'équation de l'évolution des tensions de Reynolds en relations algébriques, est de négliger tous les termes faisant intervenir les dérivées partielles des tensions de Reynolds, à savoir, les termes de convection et de diffusion. L'expression des tensions de Reynolds s'écrit :

$$\begin{aligned}
R_{jl} - \frac{2}{3}k\delta_{jl} &= \frac{k}{\varepsilon} \left[\left(\frac{1 - c_{\phi 2}}{c_{\phi 1} + f_s + \frac{\pi}{3} - 1} \right) \left(\pi_{jl} - \frac{2}{3}\pi\delta_{jl} \right) \right] \\
& - \frac{k}{\varepsilon} \left[\left(\frac{c_{\phi 3}}{c_{\phi 1} + f_s + \frac{\pi}{3} - 1} \right) \left(D_{lj} - \frac{2}{3}\pi\delta_{jl} \right) \right] - \frac{k^2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{c_{\phi 4}}{c_{\phi 1} + f_s + \frac{\pi}{3} - 1} \right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_j} \right) \right]
\end{aligned} \tag{II.34}$$

Les avantages de ce modèle sont évidents puisque d'une part il ne présente plus les inconvénients d'une modélisation par viscosité turbulente isotrope, et d'autre part le nombre d'équations de transport à résoudre n'est pas plus grand que celui du modèle k-ε [44].

II.3 Mise en équations du problème

Généralement, les problèmes mathématiques des jets libres sont en soi compliqués et avant de chercher la solution sous une forme commode pour le calcul et la discussion, on doit effectuer des calculs laborieux, souvent décourageants. Seulement, la solution si elle apparaît quelque peu incommode, a au moins le mérite d'exister, et d'exister en toute rigueur.

Dans notre manière de traiter le problème, nous cherchons à représenter le champ hydrodynamique d'un jet libre axisymétrique dû à l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible moyennant les équations de Navier Stokes en coordonnées cylindriques (O,x,r,θ). Celles-ci s'écrivent explicitement de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& \rho \left[\left(\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_x}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial B_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{rx}) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_{\theta x}}{\partial \theta} \right) \right] \\
& = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_x}{\partial \theta^2} \right]
\end{aligned} \tag{II.35.a}$$

$$\begin{aligned}
& \rho \left[\frac{\partial U_r}{\partial t} + \left(U_x \frac{\partial U_r}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^2}{r} \right) + \left(\frac{\partial B_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{B_{\theta\theta}}{r} \right) \right] \\
& = -\frac{\partial p^*}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 U_r}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right]
\end{aligned} \tag{II.35.b}$$

$$\rho \left[\frac{\partial U_\theta}{\partial t} + \left(U_x \frac{\partial U_\theta}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r U_\theta}{r} \right) + \left(\frac{\partial B_{\theta x}}{\partial x} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{r} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right] \quad (\text{II.35.c})$$

où :

- x désigne la direction axiale, r la direction radiale et θ l'angle azimutal ;
- U_x, U_r, U_θ désignent respectivement les composantes axiale, radiale et azimutale du champ de vitesse ;
- ρ : la masse volumique du fluide ;
- B_{ij} : le tenseur de cofluctuation des vitesses ;
- p^* : la pression motrice du fluide.

II.4 Hypothèses du problème

A priori, la résolution du problème présente quelques difficultés, ce qui nous impose l'introduction de certaines considérations réalistes et cohérentes qui nous permettent de réduire le degré de complexité de problème.

- **L'écoulement est stationnaire en moyenne** : ce qui est expliqué par la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0 \quad (\text{II.36})$$

- **La symétrie de révolution** : Le système physique considéré est un injecteur qui présente une symétrie de révolution, ce qui confère à l'écoulement une configuration axisymétrique. L'expérience montre que cette propriété est conservée même si cette considération n'est pas tout à fait satisfaite, en effet, l'écoulement reconstruira spontanément la symétrie de révolution dans les plans situés à distances axiales supérieures à quelques diamètres de la buse. Cette propriété de symétrie de révolution s'exprime par l'indépendance des champ d'évolution des propriétés physiques tels que la température et les composantes de vitesses par rapport à l'angle azimutal θ :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0 \quad (\text{II.37})$$

- **Moment cinétique nul** : La Troisième hypothèse stipule que le moment cinétique appelé, souvent swirl, s'annule, ce qui entraîne une vitesse tangentielle identiquement nulle :

$$U_\theta \equiv 0 \quad (\text{II.38})$$

Une conséquence intéressante découle des deux hypothèses citées ci-dessus, à savoir, un tenseur de confluctuation nul suivant θ :

$$B_{r\theta} = B_{\theta x} = B_{\theta\theta} = 0 \quad (\text{II.39})$$

On en déduit alors, une écriture simplifiée des équations de l'impulsion données par le système d'équations (II.34) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left[\left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial B_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{rx}) \right) \right] = - \frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{II.40.a}) \\ \rho \left[\left(U_x \frac{\partial U_r}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial B_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{rx}) \right) \right] = - \frac{\partial p^*}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 U_r}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) \right) \right] \quad (\text{II.40.b}) \\ \hspace{15em} = - \frac{\partial p^*}{\partial \theta} \quad (\text{II.40.c}) \end{array} \right.$$

A présent, et afin de simplifier encore plus le problème, nous adoptons une procédure d'estimation des ordres de grandeur, semblable à celle utilisée par Prandtl dans la théorie de la couche limite qui consiste à estimer les ordres de grandeurs des différents termes des équations de l'impulsion (II.39) puis de n'en retenir que ceux ayant degré supérieur.

Soit $y_{1/2}(x)$ et X les échelles (ou ordres de grandeur) transversale et longitudinale et dont le rapport est très inférieur à 1, soit en posant $\varepsilon(x)$, le rapport de $y_{1/2}(x)$ par X :

$$\varepsilon(x) = \frac{y_{1/2}(x)}{X} \ll 1 \quad (\text{II.41})$$

Nous attribuons au produit des vitesses fluctuantes u' et v' un ordre de grandeur égal à B . Examinons de près l'équation de continuité d'un point de vue ordres de grandeur :

$$o\left(\frac{\partial U_x}{\partial x}\right) = o\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r)\right) \quad (\text{II.42})$$

Ceci entraîne :

$$\frac{V}{U} = \frac{y_{1/2}(x)}{x} = \varepsilon \ll 1 \quad (\text{II.43})$$

La projection de l'équation de l'impulsion suivant les directions axiale et radiale, donne respectivement en termes d'ordres de grandeur.

Suivant la direction axiale :

$$\rho \left[\left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial B_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{rx}) \right) \right] = - \frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{II.44.1})$$

$$\rho \left[\left(\begin{array}{cc} U \frac{U}{X} & V \frac{U}{y_{1/2}} \\ \frac{B}{X} & \frac{B}{y_{1/2}} \end{array} \right) o \left(\frac{\partial p^*}{\partial x} \right) \mu \left[\begin{array}{cc} \frac{U}{X^2} & \frac{U}{y_{1/2}^2} \end{array} \right] \right] \quad (\text{II.44.2})$$

$$\rho \left[\frac{U^2}{X} \left(\begin{array}{cc} 1 & \\ & 1 \end{array} \right) \frac{B}{y_{1/2}} (\varepsilon(x) \quad 1) \right] o \left(\frac{\partial p^*}{\partial x} \right) \frac{\mu U}{y_{1/2}^2} \left[\begin{array}{cc} \varepsilon^2 & \\ & 1 \end{array} \right] \quad (\text{II.44.3})$$

Suivant la direction radiale : En procédant de la même façon, nous obtenons :

$$\rho \left[\left(U_x \frac{\partial U_r}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial B_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{rr}) \right) \right] = - \frac{\partial p^*}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 U_r}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) \right) \right] \quad (\text{II.45.1})$$

$$\rho \left[\left(\begin{array}{cc} U \frac{V}{X} & V \frac{V}{y_{1/2}} \\ \frac{B}{X} & \frac{B}{y_{1/2}} \end{array} \right) o \left(\frac{\partial p^*}{\partial r} \right) \mu \left[\begin{array}{cc} \frac{V}{X^2} & \frac{V}{y_{1/2}^2} \end{array} \right] \right] \quad (\text{II.45.2})$$

$$\rho \left[\frac{UV}{X} \left(\begin{array}{cc} 1 & \\ & 1 \end{array} \right) \frac{B}{y_{1/2}} (\varepsilon(x) \quad 1) \right] o \left(\frac{\partial p^*}{\partial x} \right) \frac{\mu V}{y_{1/2}^2} \left[\begin{array}{cc} \varepsilon^2 & \\ & 1 \end{array} \right] \quad (\text{II.45.3})$$

L'estimation de chaque terme de ces équations nous donne à priori une idée sur l'ordre de grandeur des forces d'inertie (FI). En effet, nous constatons que la composante radiale (FI)_r est négligeable par rapport à la composante axiale (FI)_x :

$$o(\text{FI})_x = \frac{\rho U^2}{X} \quad (\text{II.46.1})$$

$$o(\text{FI})_r = \frac{\rho UV}{X} \quad (\text{II.46.2})$$

Ces deux relations entraînent :

$$\frac{o(\text{FI})_r}{o(\text{FI})_x} = \varepsilon(x) \ll 1 \quad (\text{II.47})$$

Dans le même ordre d'idée, nous constatons que les forces visqueuses axiales (FV)_x priment sur les forces visqueuses radiales (FV)_r ceci étant justifié par les relations suivantes :

$$(\text{FV})_x = \frac{\mu U}{y_{1/2}^2} \quad (\text{II.48.1})$$

$$(\text{FV})_r = \frac{\mu V}{y_{1/2}^2} \quad (\text{II.48.2})$$

Le rapport de deux relations donne :

$$\frac{(\text{FV})_r}{(\text{FV})_x} = \varepsilon(x) \ll 1 \quad (\text{II.49})$$

Notons que l'équilibre des forces dans le jet est assuré par les termes qui traduisent l'état turbulent de l'écoulement, leurs ordres de grandeurs s'établissent par les relations suivantes :

$$o(\text{terme turbulent})_x = \frac{\rho B}{Y_{1/2}} \quad (\text{II.50.1})$$

$$o(\text{terme turbulent})_r = \frac{\rho B}{Y_{1/2}} \quad (\text{II.50.2})$$

$$\frac{o(\text{terme turbulent})_r}{o(\text{terme turbulent})_x} = 1 \quad (\text{II.51})$$

Nous devons toute fois remarquer l'épanouissement assez lent du jet ce qui est expliqué par une diffusion axiale négligeable par rapport à la diffusion radiale. Quant à l'estimation des forces de surface (le gradient de pression motrice entre autre) le calcul montre que la composante radiale reste négligeable vis-à-vis de la composante axiale. Cette constatation découle directement des équations évaluées ci-dessus

Enfin, et en vertu des calculs effectués ci-dessus, les équations de l'impulsion se simplifient et s'écrivent comme suit :

$$\left\{ \rho \left[\left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{rx}) \right] = - \frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) \right] \right. \quad (\text{II.52})$$

$$\left. \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{rr}) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial r} \right. \right. \quad (\text{II.53})$$

L'intégration de l'équation (II.53) donne :

$$p^* + \rho r B_{rr} = C_1(x) \quad (\text{II.54})$$

Sachant qu'au centre du jet les fluctuations sont modérées, d'où un tenseur de fluctuation très faible, ceci nous impose une constante d'intégration nulle :

$$\left\{ \rho \left[\left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{rx}) \right] = - \frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) \right] \right. \quad (\text{II.55.a})$$

$$\left. \left\{ 0 = - \frac{\partial p^*}{\partial r} \right. \right. \quad (\text{II.55.b})$$

Pendant, il est implicitement entendu que le terme visqueux est négligeable vis-à-vis du terme turbulent à cause du nombre de Reynolds. En effet, la comparaison des ordres de grandeurs au terme visqueux au terme turbulent donne :

$$\frac{o(FV)_x}{o(\text{terme turbulent})_x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{U^2}{Y_{1/2}} \right) \quad (\text{II.56})$$

Si le rapport d'échelles ($U^2/Y_{1/2}$) et indépendant du nombre de Reynolds, on peut aussi négliger dans la projection axiale de l'Equation de l'impulsion, le terme visqueux vis-à-vis du terme turbulent. Notons que la pratique nous permet d'accepter sans réticence l'idée de renoncer aux forces visqueuses, par rapport aux forces dues à la turbulence, quand il s'agit bien entendu d'une couche de mélange libre pleinement développée. Cependant, nous constatons que en dehors de l'enveloppe du jet, un équilibre hydrostatique s'installe. En définitive, l'équation du jet turbulent s'identifie à l'expression ci après :

$$\rho \left[\left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{rx}) \right] = - \frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{II.57})$$

II.5 Equation intégrale du jet

La résolution de l'équation (II.56) se faire par la méthode intégrale vue sa précision et sa rapidité, elle est utilisée généralement en aérodynamique. Son principe consiste à intégrer cette équation sur un plan transversal infini, après l'avoir multipliée au préalable par $2 \pi r$:

$$2 \pi \rho \int_0^\infty r \left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) dr + 2 \pi \rho \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} (r B_{rx}) dr = 0 \quad (\text{II.58})$$

Développons l'expression ci-dessus :

$$2 \pi \rho \left[\int_0^\infty r U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} dr + \int_0^\infty r U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} dr + \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} (r B_{rx}) dr \right] = 0 \quad (\text{II.59})$$

Effectuant les mises en facteurs et les simplifications pour les différents termes, on obtient :

$$2 \pi \rho \left[\int_0^\infty \frac{r}{2} \frac{\partial U_x^2}{\partial x} dr + \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial r} (r U_r U_x) - U_x \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) \right] dr + [r B_{rx}]_0^\infty \right] = 0 \quad (\text{II.60})$$

Après réarrangement de l'expression (II.60), et en ayant recours à l'équation de continuité pour le réarrangement nous aboutissons à :

$$2 \pi \rho \left[\int_0^\infty \frac{r}{2} \frac{\partial U_x^2}{\partial x} dr + [r U_r U_x]_0^\infty - \int_0^\infty U_x \left(-r \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) dr \right] = 0 \quad (\text{II.61})$$

En écoulement turbulent, l'expression ci-dessus se transforme à :

$$2 \pi \rho \left[\int_0^\infty \frac{r}{2} \frac{\partial U_x^2}{\partial x} dr + \int_0^\infty \frac{r}{2} \frac{\partial U_x^2}{\partial x} dr \right] = 0 \quad (\text{II.62})$$

D'où :

$$2\pi\rho \int_0^\infty r \frac{\partial U_x^2}{\partial x} dr = 0 \quad (\text{II.63})$$

En vertu de la règle de Leibniz sur les dérivations d'intégrales que nous énonçons ci-dessus :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + f(x, b) \frac{\partial b}{\partial x} - f(x, a) \frac{\partial a}{\partial x} \quad (\text{II.64})$$

L'expression (II.63) s'écrit comme suit

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\infty 2\pi\rho r U_x^2(x, r) dr \right] = 0 \quad (\text{II.65})$$

Etant donné que la composante axiale de la force d'impulsion est identiquement nulle, le flux de quantité de mouvement se conserve et se traduit par l'expression ci jointe :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty dM(x, r) = 0 \quad \longrightarrow \quad M(x, r) = M_0 = \text{Cte} \quad (\text{II.66})$$

Le flux de quantité de mouvement est constamment uniforme et sa valeur est obtenue en l'évaluant au niveau de l'embout :

$$M_0 = \pi R_0^2 \rho U_0^2 = M(x, r) = \text{Cte} \quad (\text{II.67})$$

Ce même résultat peut être retrouvé en appliquant le théorème de la quantité de mouvement à un cylindre d'axe xx' et de rayon R , dont les bases sont distantes de Δx

$$\int_v \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) dv + \int_s \rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) ds = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \quad (\text{II.68})$$

En effet en écoulement stationnaire le premier terme de l'équation ci-dessus s'annule nous n'avons donc plus que :

$$\int_s \rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) ds = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \quad (\text{II.69})$$

Ainsi sa projection axiale donne :

$$\int_s \rho U_x (\vec{U} \cdot \vec{n}) ds = \sum (\vec{F}_{\text{ext}})_x \quad (\text{II.70})$$

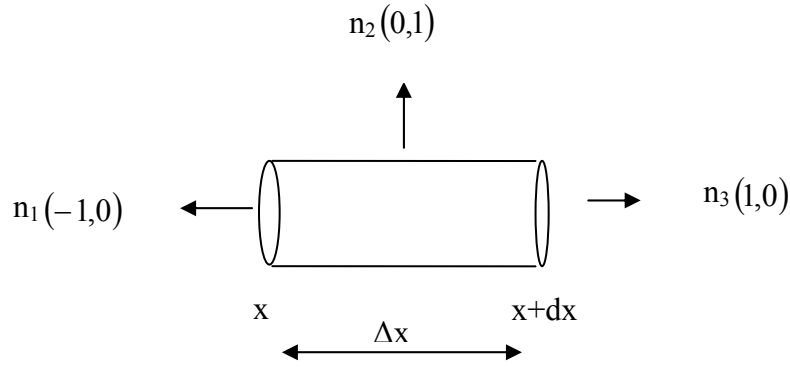


Figure II.1 : Application de théorème de quantité de mouvement à un cylindre
Le flux à la base x est donné par :

$$2\pi\rho\int_0^R U_x(x)(-U_x(x))rdr = -2\pi\rho\int_0^R U_x^2(x)r dr \quad (\text{II.71})$$

Le flux à la base $(x+dx)$ s'écrit :

$$2\pi\rho\int_0^R U_x(x+dx)(U_x(x+dx))r dr = 2\pi\rho\int_0^R U_x^2(x+dx)r dr \quad (\text{II.72})$$

Quant au flux sur la surface latérale, il s'écrit comme suit :

$$2\pi\rho R\int_0^{\Delta x} U_x U_r dx = 2\pi\rho R U_x U_r \Delta x \quad (\text{II.73})$$

Rapportant ces termes dans l'équation (II.70), on trouve :

$$2\pi\rho\left(-\int_0^R U_x^2 r dr + \int_0^R U_x^2(x+dx) r dr\right) + 2\pi R U_x U_r \Delta x = \sum(F_{\text{ext}})_x \quad (\text{II.74})$$

Avec la résultante des forces extérieurs égale à :

$$\sum(F_{\text{ext}})_x = -2\pi\left(\int_0^R P^*(x)(-1) + \int_0^R P^*(x+dx)(1)\right) r dr + \sum(F_{\text{visq}})_x \quad (\text{II.75})$$

En utilisant la convention d'écriture d'Einstein relative à la répétition de l'indice muet, les forces visqueuses, notées F_{visq} s'expriment comme suit :

$$(dF_{\text{visq}})_i = (\tau_{ij} n_j) ds \rightarrow d(F_{\text{visq}})_x = \tau_{xx} n_x ds + \tau_{xr} n_r ds \quad (\text{II.76})$$

Les forces visqueuses ne concernant que la surface latérale $n_r = 1$, ceci entraîne :

$$2\pi R \int_0^{\Delta x} \tau_{xr} dx \quad (\text{II.77})$$

Finalement, on arrive à l'expression intégrale de la résultante des forces extérieures qui se restreint uniquement aux forces des surface (de pression motrice et visqueuses) soit :

$$\sum (F_{\text{ext}})_x = 2\pi \left(\int_0^R P^*(x) + \int_0^R P^*(x + \Delta x) + \int_0^{\Delta x} \tau_{xr} \right) r dr \quad (\text{II.78})$$

Le choix de Δx étant arbitraire, nous avons donc pour $\Delta x \neq 0$ la résultante des forces extérieures qui s'annule. En effet, nous avons d'une part

$$P^*(x) = P^*(x + \Delta x) \quad (\text{II.79a})$$

D'autre par :

$$\tau_{xr} \neq 0 \quad (\text{II.79b})$$

$$M_o = 2\pi\rho \int_0^R U_x^2(x + dx) r dr = \pi \rho R_o^2 U_o^2 = Cte \quad (\text{II.80})$$

II.6.Méthode différentielle

La répartition axiale des vitesses selon les différents plans transversaux du jet confère à l'écoulement l'ensemble des propriétés suivantes :

- Une allure similaire est observée sur chaque plan de l'enveloppe du jet, il s'agit d'une fonction monotone décroissante de la distance radiale à l'axe du jet, qui tend asymptotiquement vers zéro quand r tend vers l'infini
- La vitesse axiale maximale notée $U_m(x)$, décroît au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'orifice.
- Nous définissons une distance radiale du jet notée $y_{1/2}(x)$, celle-ci correspond à la mi-vitesse axiale maximale du jet

Ponctualité intéressante

Les graphiques normalisés des vitesses en fonction de la distance radiale des différents plans transversaux sont auto similaire :

$$\frac{U_x(x)}{U_m(x)} = f\left(\frac{y(x)}{y_{1/2}(x)}\right) \quad (\text{II.81})$$

Dans ce qui suit, notre but sera de solutionner le problème en utilisant la méthode différentielle

II.6.1. Usage de la fonction de courant

Commençons donc par introduire une fonction de courant $\psi(x,r)$, qui n'est qu'un artifice mathématique utilisé généralement pour dégénérer un système contenant plusieurs degrés de

libertés. Cependant, il est implicitement entendu que la fonction de courant doit satisfaire impérativement à l'équation de continuité.

La variable réduite η , introduite précédemment, est destinée à rendre l'équation simplement différentielle :

$$\eta = \frac{r}{y_{1/2}(x)} \quad (\text{II.1b})$$

Les composantes axiale et radiale du champ des vitesses, moyennant la fonction de courant $\psi(x, r)$, s'écrivent respectivement comme:

$$U_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{II.82a})$$

$$U_r = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{II.82b})$$

Tenant compte des expressions (II.1), (II.81) et (II.82), la fonction de courant s'écrit :

$$\psi(x, \eta) = y_{1/2}^2(x) U_m(x) \int_0^\eta \eta f(\eta) d\eta + G_1(x) \quad (\text{II.83})$$

Posons :

$$A(x) = U_m(x) y_{1/2}^2(x) \quad (\text{II.84})$$

où $A(x)$ une fonction ne dépendant strictement de la variable x . De même, définissons par $f(\eta)$ primitive de l'expression suivante :

$$F(\eta) = \int_0^\eta \eta f(\eta) d\eta + \underbrace{\frac{G_1(x)}{A(x)}}_{F(0)} \quad (\text{II.85})$$

On déduit l'expression complète de la fonction de courant :

$$\psi(x, \eta) = A(x) F(\eta) \quad (\text{II.86})$$

Le calcul des composantes axiale et radiale de la vitesse donne :

$$U_x(x, \eta) = \frac{A(x)}{y_{1/2}^2(x)} \frac{F(\eta)'}{\eta} = U_m(x) \frac{F(\eta)'}{\eta} \quad (\text{II.87a})$$

$$U_r(x, \eta) = U_m(x) y_{1/2}'(x) \left(\frac{F(\eta)'}{1} - \frac{F(\eta)}{\eta} \right) \quad (\text{II.87b})$$

Ainsi la nouvelle écriture de l'équation de l'impulsion est :

$$\frac{U_m(x) y_{1/2}'(x)}{y_{1/2}^2(x)} \left\{ \frac{F(\eta)'}{\eta^2} + \frac{F(\eta) F(\eta)''}{\eta^2} - \frac{F(\eta) F(\eta)'}{\eta^3} \right\} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{rx}) \quad (\text{II.88})$$

Afin de résoudre l'équation établie ci-dessus, on propose une stylisation du tenseur des confluctuations. de vitesse B_{ij} qui traduit le caractère aléatoire de l'écoulement Supposons que ce dernier peut se mettre sous la forme suivante :

$$B_{rx} = C(x) H(\eta) \quad (\text{II.89})$$

Injectons ce résultat dans l'expression (II.88), nous aurons en remarquant que le terme entre parenthèses du premier membre de cette équation correspond à la dérivée de FF'/η :

$$\frac{U_m(x) y_{1/2}'(x)}{y_{1/2}^2(x)} \left\{ \frac{F(\eta) F(\eta)'}{\eta} \right\}' = (\eta H(\eta))' \quad (\text{II.90})$$

Posons :

$$\sigma = \frac{U_m(x) y_{1/2}'(x)}{y_{1/2}^2(x)} \quad (\text{II.91})$$

L'intégration de cette équation donne :

$$\sigma \left\{ \frac{F(\eta) F(\eta)'}{\eta} \right\} = \eta H(\eta) \quad (\text{II.92})$$

L'existence des solutions semblables est conditionnée par la constance de σ

II.6.2 Conditions aux limites

Ayant posé les équations associées à un écoulement axisymétrique turbulent, à présent il va falloir définir entièrement le problème d'un jet libre en établissant les conditions aux limites associées à cette configuration et qui doivent de surcroît s'accommoder de la variable η

- **Sur l'axe du jet (η) :**

Le vrai sens de la condition limite qui fixe la nouvelle valeur de la vitesse sur l'axe du jet c'est que cette dernière sera définitivement maintenue quelque soit la demie largeur du jet

$$r=0 \Rightarrow \eta=0 \quad (\text{II.93})$$

Les composantes de la vitesse donnent :

$$U_x(x, \eta) = U_m(x) \Rightarrow \left[\frac{F(\eta)'}{\eta} \right]_{\eta=0} = 1 \quad (\text{II.94})$$

D'où :

$$F'(0) = 0 \quad (\text{II.95})$$

et :

$$U_r(x, 0) = 0 \rightarrow \left[\frac{F(\eta)}{\eta} \right]_{\eta=0} = 0 \quad (\text{II.96})$$

$$F(0) = 0 \quad (\text{II.97})$$

Et enfin :

$$\left[\frac{\partial U_x}{\partial r} \right]_{r=0} = 0 \rightarrow \begin{cases} \left[\frac{F(\eta)'}{\eta} \right]_{\eta=0} = 0 \\ F''(0) \rightarrow \left[\frac{F(\eta)'}{\eta} \right]_{\eta=0} = 1 \end{cases} \quad (\text{II.98})$$

- *A de très grandes distances radiales du jet ($\eta \rightarrow \infty$) :*

$$U_x(x, \infty) = 0 \Rightarrow \left[\frac{F(\eta)'}{\eta} \right]_{\eta=\infty} = 0 \quad (\text{II.99})$$

$$\left[\frac{\partial U_x}{\partial r} \right]_{r=\infty} = 0 \rightarrow \begin{cases} \left[\frac{F(\eta)'}{\eta} \right]_{\eta=\infty} = 0 \\ F(\infty)'' = 0 \end{cases} \quad (\text{II.100})$$

II.7. Modèles de turbulence

Au cours des années 1925-1932, plusieurs tentatives virent le jour qui, s'inspirant des concepts de la théorie cinétique des gaz, visaient à imaginer une phénoménologie macroscopique « d'interaction entre paquets fluides », en transposition de celle entre « chocs » moléculaires. L'objectif majeur de ces travaux était bien sûr de relier la viscosité de

turbulence à des paramètres caractéristiques de l'agitation à l'échelle du continu. Très limités au plan conceptuel, les schémas qui en résultent permettent d'obtenir, dans un cadre applicatif restreint, des résultats significatifs [35].

Dans un cadre purement théorique nous allons étudier le cas l'hypothèse g'une viscosité turbulente uniforme l'équation (II.89) devient en exprimant le tenseur de fluctuation de vitesses B_{ij} comme le produit de la viscosité turbulente ν_t par le gradient radial de la vitesse (modale pseudo laminaire):

$$B_{rx} = \nu_t \frac{\partial U_x}{\partial r} \quad (\text{II.101a})$$

L'équation (II.92) prend la forme suivante :

$$\sigma \left\{ \frac{F(\eta)F(\eta)'}{\eta} \right\} = \eta \quad (\text{II.102})$$

La résolution de cette équation donne :

$$F(\eta) = \sqrt{\frac{2}{3\sigma}} \eta^3 \quad (\text{II.103})$$

Les profils des vitesses axiales pour différentes valeurs de sema (σ), sont donnés par la représentation graphique de la fonction ci-dessous (figure (II.2)) :

$$U_x(\eta) = \frac{F(\eta)'}{\eta} = \sqrt{\frac{3}{2\sigma}} \eta \quad (\text{II.104})$$

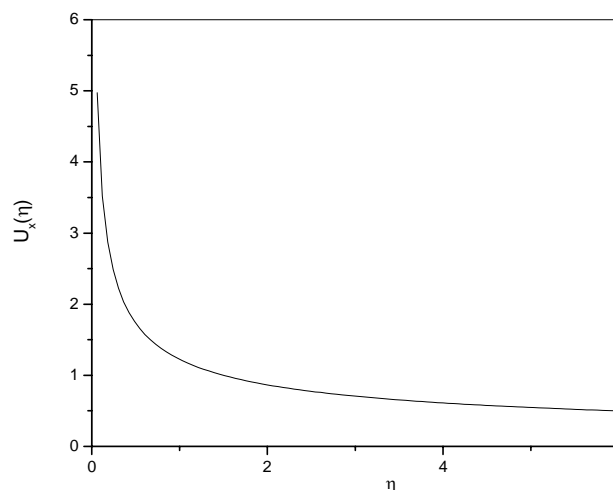


Figure II.2. Profil de vitesse axiale selon le modèle de Bousinesq

Pour le problème dynamique, Boussinesq [45], fut le premier à introduire le concept de la viscosité tourbillonnaire ou viscosité de turbulence en proposant une relation en analogie de

celle de Newton pour les contraintes de viscosité moléculaire. Schématiquement, cela revient à poser, en écoulement cisailé simple, une relation linéaire entre contrainte de cisaillement et gradient de vitesse moyenne, c'est donc l'équation (II.101). Dans cette équation, Bousinesq supposait constant le coefficient de proportionnalité qui représente une viscosité cinématique de turbulence

Par ailleurs ceci est traduit par une courbe qui rampe sur l'axe des η pour les grandes valeurs de η , et, au fur à mesure que l'on se rapproche de l'origine, la courbe présente à un certain moment un maximum de courbure accentué, en deçà duquel, ensuite elle décolle franchement vers une vitesse d'écoulement très grande, ce qui est remis en cause la validité d'un tel schéma. En outre, l'agitation turbulente ne saurait être une constante indépendante des conditions d'écoulement.

II.7.1 Modèle de la longueur de mélange

Un premier palliatif au modèle de Boussinesq consiste donc à faire dépendre la viscosité turbulente du champ de l'écoulement. De simples considérations dimensionnelles montrent alors que :

$$\nu_t = u' l \quad (\text{II.105})$$

Où u' et l désignent respectivement des échelles de vitesse et de longueur représentatives de l'agitation turbulente.

Les premiers schémas de variation de la viscosité introduits reposent sur une dépendance algébrique de cette fonction à une échelle de longueur variable au sein du champ turbulent. Ce sont les schémas dits de « longueur de mélange » largement redevables des travaux de Prandtl et Taylor dans les années 1925-1930, ainsi ces modèles présentent une simplicité et une rapidité point de vue mises en œuvre, ils sont utilisés avec succès dans des configurations classiques de l'aérodynamique de profils simples [35].

II.7.2 Modèle de Prandtl –Tollmien

Dans le cas d'un jet, la longueur de mélange est déterminée par l'échelle locale de l'extension transversale du jet $y_{1/2}(x)$:

$$B_{rx} = -l_m^2 \left[\frac{\partial U_x}{\partial r} \right]^2 = \underbrace{k^2 y_{1/2}^2(x)}_{\nu_t} \left[\frac{\partial U_x}{\partial r} \right] \left[\frac{\partial U_x}{\partial r} \right] \quad (\text{II.106})$$

Le tenseur de co-fluctuation de vitesse s'écrira en fonction de la fonction F et de la variable η comme :

$$B_{rx} = - \frac{k^2 U_m(x)}{y_{1/2}(x)} \left[\frac{F(\eta)'}{\eta} \right]^2 \quad (\text{II.107})$$

Par identification avec l'équation (II.88) nous trouvons :

$$C(x) = - \frac{k^2 U_m(x)}{y_{1/2}(x)} \quad (\text{II.108a})$$

$$H(\eta) = \left[\frac{F(\eta)'}{\eta} \right]'^2 \quad (\text{II.108b})$$

Compte Tenu de ces deux expressions, l'équation différentielle du jet libre s'écrit :

$$\left(\frac{y_{1/2}(x)'}{k^2} \right) \frac{F(\eta) F(\eta)'}{\eta} + \eta \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)'^2 = 0 \quad (\text{II.109})$$

C'est ainsi que Tollmien a pu établir les profils de vitesses axiales.

II.12.3. Modèle de Prandtl-Goertler

Prandtl propose dans son deuxième modèle une combinaison linéaire entre la longueur du mélange et la vitesse axiale maximale du jet :

$$l_m = k y_{1/2}(x) U_m(x) \quad (\text{II.110})$$

L'expression du tenseur de confluctuation s'écrit alors:

$$B_{rx} = k U_m(x)^2 \left[\frac{F(\eta)'}{\eta} \right]' = C(x) H(\eta) \quad (\text{II.111a})$$

où :

$$C(x) = k U_m(x)^2 \quad (\text{II.111b})$$

et

$$H(\eta) = \left[\frac{F(\eta)'}{\eta} \right]' \quad (\text{II.111c})$$

En vertu des transformations établies ci-dessus, l'équation différentielle du jet libre s'écrit

$$\frac{y_{1/2}(x)'}{k} - \frac{F(\eta) F(\eta)'}{\eta} + \eta \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' = 0 \quad (\text{II.112})$$

L'hypothèse des profils semblables stipule que les coefficients de l'équation différentielle doivent être constants ($Y'_{1/2}(x)$ entre autres). Cependant, ceci n'est vrai que si l'on attribue une forme affine à la fonction $Y_{1/2}(x)$. En tenant compte des conditions limites, la résolution de l'équation (II.109a) est donnée par :

$$F(\eta) = \frac{\eta^2}{2(1+0.414\eta^2)} \quad (\text{II.113})$$

La dérivée première de cette dernière nous donne la distribution du champ de vitesse axiale:

$$\frac{F(\eta)'}{\eta} = \frac{1}{(1+0.414\eta^2)^2} \quad (\text{II.114})$$

La représentation graphique de l'équation (II.89) est schématisée à travers la figure (II.3)

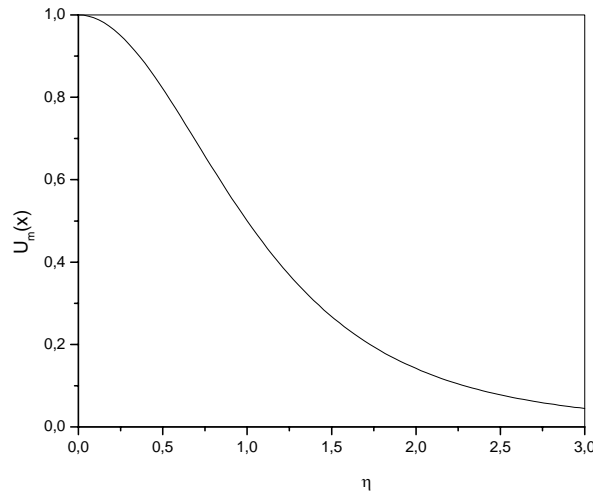


Figure II.3. Évolution de la vitesse axiale selon le modèle de Prandtl–Taylor

II.7.4 Modèle de Prandtl Reichardt

Cette approche consiste à modifier la viscosité turbulente en remplaçant la vitesse maximale par une vitesse moyenne :

$$l_m = y_{1/2}(x) \overline{U}(x) \quad (\text{II.115a})$$

et

$$\overline{U(x)} = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2 \pi r U_x(x, r) dr \quad (\text{II.115b})$$

Le tenseur de cofluctuation de vitesse s'écrit donc comme

$$B_{rx} = v_t \frac{\partial U_x}{\partial r} = y_{1/2}(x) \overline{U(x)} \frac{\partial U_x}{\partial r} = y_{1/2}(x) \left(\frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2 \pi r U_x(x, r) dr \right) \frac{\partial U_x}{\partial r} \quad (\text{II.116})$$

Sachant que B_{rx} est une combinaison linéaire entre deux fonctions, l'une portant strictement sur x et l'autre sur η , on peut les définir par identification :

$$C(x) = 2 U_m^2(x) \quad (\text{II.117a})$$

$$H(\eta) = - \frac{F(\eta)}{\eta^2} \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' \quad (\text{II.117b})$$

Rapportant ces expressions dans l'équation différentielle du jet :

$$\frac{U_m(x) y_{1/2}(x)'}{y_{1/2}^2(x)} \left\{ \frac{F(\eta)F(\eta)'}{\eta} \right\} = \eta \left(\frac{F(\eta)}{\eta^2} \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' \right) \quad (\text{II.118})$$

L'expression s'écrit une fois simplifiée comme suit :

$$\sigma F(\eta)' = - \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' \quad (\text{II.119})$$

avec :

$$\sigma = \frac{U_m(x) y_{1/2}(x)'}{y_{1/2}^2(x)} \quad (\text{II.120})$$

La résolution de cette expression nous permet de représenter les profils de vitesse selon une distribution de Gauss :

$$\left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right) = e^{-\frac{\sigma}{2}\eta^2} \quad (\text{II.121})$$

La figure II.4 donne le graphique du champ hydrodynamique selon l'approche de Reichardt :

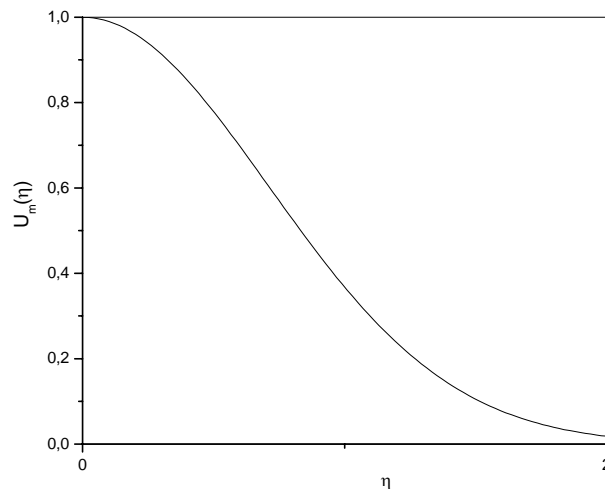


Figure II.4. Évolution de la vitesse axiale selon le modèle de Reichardt

II.8.Conclusion

La résolution du problème du jet libre axisymétrique avec la méthode différentielle a donné une équation différentielle qui dépend de la viscosité turbulente ; ainsi trouver une solution du problème nécessite l'introduction d'un modèle de viscosité. Nous avons donc utilisé les trois modèles, les plus fréquemment utilisés par les chercheurs

La confrontation des modèles établis par les chercheurs a montré que c'est le modèle de Reichardt [27] qui s'accommode mieux avec les données expérimentales.

II.9.Équations générales probabilistes des écoulements polyphasiques

Plusieurs auteurs tel que Mier [46], affirme que les résultats de simulation d'un écoulement polyphasique révèlent une dépendance intime entre les équations de transport de quantité de mouvement de chaque phase, et le modèle de turbulence admis ; en outre, il est raisonnable de valider les résultats dû à la simulation avec les données expérimentales et définir les lois de distribution de la phase dispersée

II.14.1.Position du problème

A présent, nous allons nous intéresser à un cas plus compliqué qui consiste à l'étude d'un jet en présence d'une phase solide. En effet, compte tenu des travaux de Molodtsov [27], et afin d'étudier le comportement hydrodynamique d'un jet ascendant immergeant dans un lit de particules aéré ou fluidisé, nous avons eu recours à l'approche probabiliste qui permet une description rigoureuse des grandeurs physiques moyennes.

Les probabilités de présence notée α , de chaque phase dans un mélange gaz solide satisfont en tout point l'équation suivante :

$$\alpha_F + \alpha_S = 1 \quad (\text{II.122})$$

On attribue à la phase fluide l'indice F; quant à la phase solide on lui associe l'indice S. Ainsi, l'équation de conservation de masse pour la phase fluide s'exprime par la relation indicielle suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_F \rho_F) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_F \alpha_F U_j) = 0 \quad (\text{II.123})$$

Où j désigne les composantes de la vitesse du fluide, et ρ_F sa masse volumique. L'équation indicielle de l'équation de l'impulsion ou de la quantité de mouvement pour la phase fluide est donnée par l'expression :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_F \alpha_F U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_F \alpha_F (U_i U_j + B_{ij})) = \rho_F \alpha_F g_i - \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_F p) - F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_F \tau_{ij}) \quad (\text{II.124})$$

Le premier membre de l'équation (II.124) est constitué par les forces d'inertie, et les composantes du tenseur de co-fluctuation des vitesses, notées B_{ij} dues au caractère aléatoire de l'écoulement. Rappelons que dans les écoulements monophasiques, ce terme s'identifie avec les tensions de Reynolds.

Dans le second membre de cette même équation on retrouve les forces de pesanteur, de pression statique, d'interaction fluide solide F_i et notamment les contraintes visqueuses.

Une forme alternative peut être obtenue en combinant l'équation de continuité multipliée par U_i , avec l'équation de l'impulsion donnée ci-dessus : celle-ci s'écrit donc comme :

$$\begin{aligned} \rho_F \alpha_F \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) &= \rho_F \alpha_F g_i - \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_F p) - F_i \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} [\alpha_F (\tau_{ij} - \rho_F B_{ij})] & \end{aligned} \quad (\text{II.125})$$

II.9.2. Hypothèses du problème

Il est implicitement entendu que le régime est stationnaire présentant une symétrie de révolution. Tenant compte de ces considérations, les équations établies ci-dessus s'écrivent en coordonnées cylindriques comme :

- *Equation de continuité*

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho_F \alpha_F U_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial (\alpha_F \rho_F r U_r)}{\partial r} = 0 \quad (\text{II.126})$$

▪ *Equation de l'impulsion*

$$\begin{aligned} \rho_F \alpha_F \left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) &= -\rho_F \alpha_F g_x - \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_F p) - F_x \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_F (\tau_{xx} - \rho_F B_{xx})) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \alpha_F (\tau_{rx} - \rho_F B_{rx})] \end{aligned} \quad (\text{II.127})$$

Les échelles radiales étant négligeables vis à vis des échelles axiales, les dérivées axiales des tenseurs τ_{ij} et B_{ij} sont alors négligeables vis à vis des dérivées radiales :

$$\rho_F \alpha_F \left[U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} (\alpha_F P^*) - F_x + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \alpha_F (\tau_{rx} - \rho_F B_{rx})] \quad (\text{II.128})$$

Cas extrêmes ou limites de l'équation de l'impulsion :

➤ **Etat de référence**

L'étude expérimentale entreprise par Badirou [27] nous informe qu'au niveau de la grille, sur laquelle repose le lit de particule, délivre une vitesse uniforme d'aération, l'écoulement du gaz est établi et toutes les grandeurs physiques sont indépendantes des coordonnées. L'équation de l'impulsion prend une forme limite qui s'écrit

$$0 = -\alpha_F^0 \frac{\partial p^0}{\partial x_i} - F_x^0 \quad (\text{II.129})$$

L'exposant 0 rappelle qu'il s'agit là des variables du lit de référence.

➤ **Etat limite très loin de la demi largeur du jet**

Les observations notées par Badirou [27] nous révèlent une variation du gradient axial de pression. Cette variation est fonction de l'état de la phase solide. En effet, l'influence détectée est légère si la couche est fluidisée, plus prononcée si le lit est aéré. Quant au gradient radial, celui-ci reste faible, tandis qu'en dehors de l'étendue du jet ; la pression est uniforme. Notons aussi que les compositions de la phase fluide, et de la force d'interaction, sont considérablement modifiées dans la zone du jet quant aux forces visqueuses, celles-ci restent pratiquement négligeables alors que le tenseur de confluctuation de vitesse s'uniformise.

Ainsi, nous pouvons donner une forme asymptotique de l'équation de l'impulsion pour une distance radiale relativement grande par rapport à la demi largeur $y_{1/2}(x)$ du jet :

$$0 = -\alpha_F^\infty \frac{\partial p^\infty}{\partial x_i} - F_x^\infty \quad (\text{II.130})$$

L'indice supérieur ∞ signifie que l'on se place à une distance radiale grande vis à vis de la demi largeur du jet, il en résulte que l'équation appropriée du jet est obtenue en retranchant l'équation asymptotique de l'équation de l'impulsion (II.128). On aura alors :

$$\rho_F \alpha_F \left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\alpha_F p^*) - \alpha_F^\infty \frac{\partial p^\infty}{\partial x} \right] - [F_x - F_x^\infty] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \alpha_F (\tau_{rx} - \rho_F B_{rx})] \quad (\text{II.131})$$

Rappelons qu'il s'agit là d'un jet turbulent ; on peut donc négliger les forces visqueuses vis à vis du tenseur de co-fluctuation de vitesses.

Rappelons aussi que pour aboutir à cette équation, nous avons procédé à des simplifications rigoureuses et largement justifiées par des observations expérimentales.

II.10. Modélisation

Les équations (II.126) et (II.131) définissent l'écoulement d'un fluide dans le lit, la résolution du système nécessite la connaissance du taux de concentration, de la force de volume et du tenseur de co-fluctuation B_{rx} .

L'introduction des équations de la phase solide ne seraient d'aucun secours dans la mesure où elles ne peuvent qu'accroître le degré d'indétermination du système.

Aussi en l'absence de données expérimentales suffisantes sur la répartition des particules dans le jet, nous avons pensé à modéliser le problème d'un jet en se basant sur les propriétés de similitude des profils de vitesses et sur l'hypothèse d'un taux de concentration de la phase solide suffisamment faible

En première approximation nous pouvons écrire :

$$\alpha_F \approx 1 \quad (\text{II.132})$$

Modélisons à présent les forces de volumes et le tenseur de co-fluctuation de vitesses par des fonctions à variables séparables qui s'écrivent respectivement comme :

$$\text{Forces de volumes} = \rho_F B(x)G(\eta) \quad (\text{II.133})$$

$$B_{rx} = -v_t \frac{\partial U}{\partial r} \quad (\text{II.134})$$

II.11 Recherche des profils semblables

Il est évident que les profils semblables imposent une définition appropriée à la fonction de courant. Ainsi comme en monophasique :

$$\psi(x, \eta) = A(x)F(\eta) \quad (\text{II.86})$$

Etablissons à présent les expressions des deux composantes de vitesse en fonction uniquement des variables x et η :

$$U_x(x, \eta) = \frac{A(x)}{y_{1/2}^2(x)} \frac{F(\eta)'}{\eta} \quad (\text{II.87a})$$

$$U_r(x, \eta) = \frac{A(x)y_{1/2}(x)'}{y_{1/2}^2(x)} F(\eta)' - \frac{A(x)'}{y_{1/2}(x)} \frac{F(\eta)'}{\eta} \quad (\text{II.87b})$$

Le long de l'axe du jet ($\eta = 0$), nous pouvons accéder à la vitesse axiale maximale, donnée par la relation suivante :

$$U_m(x, \eta = 0) = U_m(x) = \frac{A(x)}{y_{1/2}^2(x)} \left[\frac{F(\eta)'}{\eta} \right]_{\eta=0} \quad (\text{II.135})$$

Les conditions limites auxquelles doit satisfaire la fonction $F(\eta)$ sont :

$$F(0) = 0 \quad (\text{II.136a})$$

$$\left. \frac{F(\eta)'}{\eta} \right|_{\eta=\infty} = 0 \quad (\text{II.136b})$$

➤ Débit volumique

Le débit qui traverse une section horizontale reste impérativement constant, son calcul se fait à partir de l'expression :

$$Q(x) = \int_0^{\infty} 2\pi r U_x(x, r) dr \quad (\text{II.137})$$

En remplaçant la vitesse axiale par son expression nous obtenons :

$$Q(x) = 2\pi A(x) [F(\infty) - F(0)] \quad (\text{II.138})$$

L'expression ci-dessus se réduit en utilisant la condition limite (II.136a) à :

$$Q(x) = 2\pi A(x) F(\infty) \quad (\text{II.139})$$

Par conséquent, $F(\eta)$ doit tendre vers une limite finie non nulle quand η tend vers l'infinie.

➤ **Flux de quantité de mouvement**

Le flux de quantité de mouvement s'écrit

$$M(x) = \rho_f \int_0^{\infty} 2\pi r U_x^2 dr \quad (\text{II.140})$$

Injectons l'expression de la vitesse axiale dans celle du flux établie ci-dessus :

$$M(x) = \pi \rho_f \frac{A(x)^2}{y_{1/2}^2(x)} \int_0^{\infty} 2\eta \left[\frac{F(\eta)'}{\eta} \right]^2 d\eta \quad (\text{II.141})$$

Sachant que les forces de volumes se calculent par dérivation du flux de quantité de mouvement tel que :

$$\frac{dM}{dx} = \text{Force de volume} = \int_V \rho_F B(x) G(\eta) 2\pi r dr \quad (\text{II.142.1})$$

En remplaçant r par la variable réduite η , l'expression ci-dessus s'écrit :

$$\frac{dM}{dx} = \pi \rho_f B(x) y_{1/2}^2(x) \int_0^{\infty} 2\eta G(\eta) d\eta \quad (\text{II.143})$$

Posons les notations suivantes après avoir identifié les expressions (II.141) et (II.143) :

$$a_1 = \int_0^{\infty} 2\eta G(\eta) d\eta \quad (\text{II.144a})$$

$$a_2 = \int_0^{\infty} 2\eta \left[\frac{F(\eta)'}{\eta} \right]^2 d\eta \quad (\text{II.144b})$$

D'où :

$$B(x) = \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{A(x)^2}{y_{1/2}^2(x)} \right)' \frac{1}{y_{1/2}^2(x)} \quad (\text{II.145})$$

Procédons de la même façon pour modéliser la viscosité turbulente en posant :

$$v_t = N(x) E(\eta) \quad (\text{II.146})$$

Tenant compte des hypothèses (II.130) à (II.132) et des équations (II 133) à (II.146) l'équation de l'impulsion (II.129) du jet fluidisé prend la forme suivante

$$\frac{A(x)'}{N(x)} \left\{ \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)^2 - \frac{F(\eta)}{\eta} \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' - 2 \frac{a_2}{a_1} G(\eta) \right\} - \frac{A(x)y'_{1/2}(x)}{N(x)y_{1/2}(x)} \left\{ 2 \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)^2 - 2 \frac{a_2}{a_1} G(\eta) \right\} = \frac{1}{\eta} \left[\eta E(\eta) \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' \right] \quad (\text{II.147})$$

Nous constatons par ailleurs que cette équation peut se mettre sous la forme de deux fonctions à variables séparées :

$$h(x)F_1(\eta) - k(x)F_2(\eta) = F_3(\eta) \quad (\text{II.148})$$

Où $h(x)$ et $k(x)$ ne dépendent que de la variable x , $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$ et $F_3(\eta)$ sont fonction de la variable η .

Afin de solutionner l'équation ci-dessus, nous envisageons six combinaisons possibles pour n'en retenir, d'entre elles, que celles qualifiées acceptables

II.12. Résolution de l'équation différentielle du jet légèrement particulaire

A priori, nous avons six fonctions inconnues $A(x)$, $y_{1/2}(x)$, $F(\eta)$, $G(\eta)$, $N(x)$ et $E(\eta)$. Notons qu'il existe trois démarches possibles susceptibles d'étudier l'équation établie ci-dessus.

II.12.1. L'approche théorique

L'approche théorique consiste à résoudre le problème afin de prédire le champ dynamique qui peut être comparé aux résultats expérimentaux, c'est à dire calculer les fonctions $A(x)$, $y_{1/2}(x)$ et $F(\eta)$

Ceci nous impose une modélisation judicieuse des fonctions $G(\eta)$, $N(x)$ et $E(\eta)$

II.12.2. L'approche empirique

Elle consiste à définir les fonctions $A(x)$, $y_{1/2}(x)$ et $F(\eta)$ à partir des profils expérimentaux de vitesse axiale $U_x(x, r)$ puis d'injecter ces données dans l'équation de l'impulsion. Ceci nous donne alors accès au champ de force de volume et à l'expression de la viscosité équivalente ν_t

II.12.3.L'approche composite

L'approche composite, que nous avons adoptée lors de cette étude, permet de combiner la démarche empirique et la modélisation dans le but de déterminer trois expressions, les plus facilement accessibles et d'en déduire les trois autres à partir de l'équation de l'impulsion.

II.13.Etude des combinaisons acceptables

Selon la combinaison envisagée, étudions le champ dynamique en s'appuyant sur les différents modèles de la viscosité turbulente, puis essayons de les valider avec les données expérimentales :

Combinaison 1 :

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ k(x) &= k_0 \\ -k_0 F_2(\eta) &= F_3(\eta) \end{aligned}$$

Combinaison 2 :

$$\begin{aligned} h(x) &= h_0 \\ k(x) &= 0 \\ h_0 F_1(\eta) &= F_3(\eta) \end{aligned}$$

Combinaison 3 :

$$\begin{aligned} h(x) &= h_0 \\ k &= k_0 \\ h_0 F_1(\eta) - k_0 F_2(\eta) &= F_3(\eta) \end{aligned}$$

Combinaison 4 :

$$\begin{aligned} h(x) &= h_0 \\ F_2(\eta) &= 0 \\ h_0 F_1(\eta) &= F_3(\eta) \end{aligned}$$

Combinaison 5 :

$$\begin{aligned} F_1(\eta) &= 0 \\ k &= k_0 \\ -k_0 F_2(\eta) &= F_3(\eta) \end{aligned}$$

Combinaison 6 :

$$\begin{aligned} c_0 F_1(\eta) &= F_2(\eta) \\ k &= k_0 \\ c_1 F_1(\eta) &= F_3(\eta) \end{aligned}$$

Les fonctions $h(x)$, $k(x)$, $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$ et $F_3(\eta)$ représentent ici des groupements (dus à l'équation de l'impulsion) leur forme explicite est donnée ci-joint :

$$h(x) = \frac{A(x)'}{N(x)} \quad (\text{II.149})$$

$$k(x) = \frac{A(x)y_{1/2}'}{N(x)y_{1/2}} \quad (\text{II.150})$$

$$F_1(\eta) = \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)^2 - \frac{F(\eta)}{\eta} \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' - 2 \frac{a_2}{a_1} G(\eta) \quad (\text{II.151})$$

$$F_2(\eta) = 2 \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)^2 - 2 \frac{a_2}{a_1} G(\eta) \quad (\text{II.152})$$

$$F_3(\eta) = \frac{1}{\eta} \left[\eta E(\eta) \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' \right] \quad (\text{II.153})$$

❖ **Première combinaison**

La première relation due à la combinaison 1 conduit à :

$$A(x) = \text{Cte} \quad (\text{II.154})$$

En vertu de la relation (II.139), il en résulte que le débit est constant mais il n'est pas nécessairement égal à celui délivré par l'embout ; quant à la deuxième relation, elle donne la relation du taux d'élargissement et la diffusivité équivalente du jet, ce qui est traduit par la relation (II.150) :

$$k_0 \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{y_{1/2}(x)'}{y_{1/2}(x)} \quad (\text{II.155})$$

Cependant les résultats expérimentaux obtenus nous révèlent deux ponctualités à savoir :

- Généralement, le débit d'un jet ne se conserve ceci est justifié par la figure (II.5)
- Un modèle de viscosité équivalente ne peut être défini

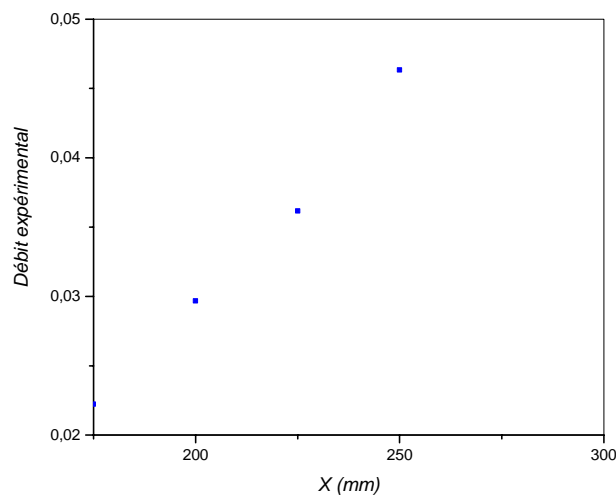


Figure II.5 : Evolution axiale de débit volumique pour une vitesse initiale donnée [27].

Nous concluons cette analyse par le rejet de la première combinaison.

❖ Seconde combinaison

Compte tenu de la deuxième relation associée à la seconde combinaison, nous obtenons un élargissement dynamique uniforme :

$$y_{1/2}(x) = Cte \quad (\text{II.156})$$

Néanmoins cette expression contredit les résultats expérimentaux, ce qui est confirmé par la figure (II.6), ce qui nous conduit à rejeter la seconde combinaison.

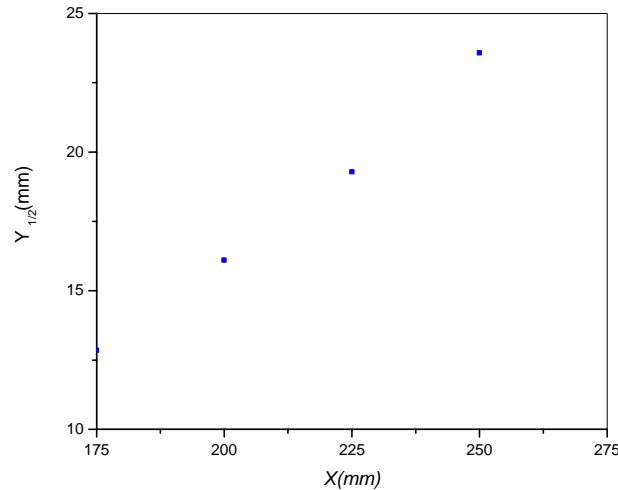


Figure II.6 : Evolution axiale de la demi largeur du jet pour une vitesse initiale 40m/s [27]

❖ Troisième combinaison

Les deux premières relations de la combinaison 3 conduisent respectivement aux relations suivantes :

$$\frac{A(x)'}{N(x)} = h_0 \quad (\text{II.157})$$

$$\frac{A(x)y_{1/2}(x)'}{N(x)y_{1/2}(x)} = k_0 \quad (\text{II.158})$$

Remarquons que la combinaison 3 n'est que l'union des combinaisons une et deux dans la mesure où nous prenons respectivement. :

$$h_0 = 0 \text{ et } k_0 = 0 \quad (\text{II.159})$$

Le rapport des relations (II.157) et (II.158) donne :

$$\frac{A(x)'}{A(x)} \frac{y_{1/2}(x)}{y_{1/2}'(x)} = \frac{h_0}{k_0} \quad (\text{II.160})$$

Il est possible de comparer l'équation (II.160) aux résultats expérimentaux en exprimant $A(x)$ en fonction de demi largeur de jet et de la vitesse axiale ceci moyennant les relations (II.135) et (II.160) la résolution est donnée par l'expression ci-dessous :

$$\ln \left(\frac{U_m(x) y_{1/2}^2(x)}{\left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)_{\eta=0}} \right) = \left(\frac{h_0}{k_0} \right) \ln y_{1/2}(x) + \text{Cte} \quad (\text{II.161})$$

Développons à présent l'expression ci-dessus :

$$\ln(U_m(x)) + \ln y_{1/2}^2(x) - \ln \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)_{\eta=0} = \ln(y_{1/2}(x))^{h_0/k_0} + \text{Cte} \quad (\text{II.162})$$

Pour alléger l'écriture de l'équation (II.162), affectons les notations suivantes aux constantes suivantes

$$K_1 = C + \ln \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)_{\eta=0} \quad (\text{II.163})$$

$$K_0 = \frac{h_0}{k_0} - 2 \quad (\text{II.164})$$

Ainsi, nous obtenons une écriture simplifiée de l'expression (II.162) :

$$\ln(U_m(x)) = K_0 \ln(y_{1/2}(x)) + K_1 \quad (\text{II.165})$$

Dans le cadre de définir les formes fonctionnelles des différentes grandeurs physiques, on s'intéresse à la viscosité turbulente :

$$\frac{A(x)'}{N(x)} = h_0 \quad (\text{II.166})$$

$$\frac{A(x)y_{1/2}(x)'}{N(x)y_{1/2}(x)} = k_0 \quad (\text{II.167})$$

A partir de l'équation (II.160) :

$$\frac{A(x)'}{A(x)} = \frac{h_0}{k_0} \frac{y_{1/2}(x)'}{y_{1/2}(x)} \quad (\text{II.168})$$

Nous arrivons alors à une forme exponentielle de la fonction de courant :

$$A(x) = (y_{1/2}(x))^{h_0/k_0} C_1 \quad (\text{II.169})$$

En définitive, nous obtenons :

$$N(x) = \text{Cte} (y_{1/2}(x))^{k_0+1} y_{1/2}(x)' \quad (\text{II.170})$$

A priori, nous sommes amené à modéliser la viscosité turbulente afin d'accéder à l'expression de la demi largeur du jet et donc de discuter la validité de l'expression (II.165) obtenue

❖ Quatrième combinaison

La première relation de la combinaison quatre stipule que :

$$h = h_0 \quad (\text{II.171})$$

Ceci entraîne :

$$A'(x) = h_0 N(x) \quad (\text{II.172})$$

Intégrons l'équation (II.172) :

$$A(x) = h_0 \int N(x) dx + \text{Cte} \quad (\text{II.173})$$

Nous constatons que le choix d'un modèle de viscosité turbulente est indispensable à l'exploitation de l'expression ci-dessus

Quant à la deuxième relation, elle donne :

$$F_2(\eta) = 0 \rightarrow 2 \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)^2 - 2 \frac{a_2}{a_1} G(\eta) = 0 \quad (\text{II.174})$$

Ce qui entraîne :

$$\left(\frac{F(\eta)'}{\eta}\right)^2 = \frac{a_2}{a_1} G(\eta) \quad (\text{II.175})$$

Rapportons cette expression dans la relation ci-dessous

$$h_0 F_1(\eta) = \frac{1}{\eta} \left[\eta E(\eta) \left(\frac{F(\eta)'}{\eta}\right)' \right] \quad (\text{II.176})$$

Nous aboutissons à :

$$h_0 \frac{F(\eta)F(\eta)'}{\eta} = \eta E(\eta) \left(\frac{F(\eta)'}{\eta}\right)' \quad (\text{II.177})$$

La validité de cette équation repose essentiellement sur les profils de la vitesse réduite et la détermination de la fonction $E(\eta)$ ce qui revient à modéliser la viscosité turbulente.

❖ Cinquième combinaison

D'après la première relation de la cinquième combinaison, nous avons :

$$k_0 = \frac{A(x) y'_{1/2}(x)}{N(x) y_{1/2}(x)} \quad (\text{II.178})$$

La deuxième relation donne :

$$F_1(\eta) = 0 \rightarrow \left(\frac{F(\eta)'}{\eta}\right)^2 - \frac{F(\eta)}{\eta} \left(\frac{F(\eta)'}{\eta}\right)' - 2 \frac{a_2}{a_1} G(\eta) = 0 \quad (\text{II.179})$$

Remplaçons cette équation dans la relation trois de la cinquième combinaison :

$$F_3(\eta) = -k_0 F_2(\eta) \quad (\text{II.180})$$

dont l'écriture explicite est la suivante :

$$-k_0 \left\{ \left(\frac{F(\eta)'}{\eta}\right)^2 - \frac{F(\eta)}{\eta} \frac{F(\eta)''}{\eta} - \frac{F(\eta)F(\eta)'}{\eta^3} \right\} = \frac{1}{\eta} \left[\eta E(\eta) \left(\frac{F(\eta)'}{\eta}\right)' \right] \quad (\text{II.181})$$

❖ **sixième combinaison**

La combinaison six suppose une relation linéaire entre les constantes h et k telle que :

$$h = C_0 k - C_1 \quad (\text{II.182})$$

Remplaçons cette relation dans l'équation (II.147) :

$$(C_0 k - C_1)F_1(\eta) - kF_2(\eta) = F_3(\eta) \quad (\text{II.183})$$

Nous aboutissons ainsi au résultat suivant :

$$(C_0 - 2) \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)^2 + C_0 \left\{ \frac{F(\eta)F(\eta)'}{\eta^3} - \frac{F(\eta)F(\eta)''}{\eta^2} \right\} = 2 \frac{a_2}{a_1} G(C_0 - 1) \quad (\text{II.184})$$

Le réarrangement de l'expression ci-dessus donne :

$$2 \frac{a_2}{a_1} G = \frac{(C_0 - 2)}{(C_0 - 1)} \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)^2 + \frac{C_0}{(C_0 - 1)} \left\{ \frac{F(\eta)F(\eta)'}{\eta^3} - \frac{F(\eta)F(\eta)''}{\eta^2} \right\} \quad (\text{II.185})$$

$$F_1(\eta) = 0 \rightarrow \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)^2 - \frac{F(\eta)}{\eta} \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' = 0 \quad (\text{II.186})$$

Nous exploitons l'expression :

$$\left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)^2 + \frac{F(\eta)F(\eta)''}{\eta} = \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' \quad (\text{II.187})$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{F(\eta)F(\eta)'}{\eta} = \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)^2 - \left(\frac{F(\eta)F(\eta)'}{\eta} \right)' \frac{1}{\eta} \quad (\text{II.188})$$

Injectons cette expression dans l'équation (II.185) :

$$2 \frac{a_2}{a_1} G = \frac{(C_0 - 2)}{(C_0 - 1)} \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)^2 + \frac{C_0}{(C_0 - 1)} \left\{ \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)^2 - \frac{1}{\eta} \left(\frac{F(\eta)F(\eta)'}{\eta} \right)' \right\} \quad (\text{II.189})$$

Ceci entraîne :

$$2 \frac{a_2}{a_1} G = 2 \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)^2 - \frac{C_0}{(C_0-1)} \left(\frac{F(\eta)F(\eta)'}{\eta} \right)' \frac{1}{\eta} \quad (\text{II.190})$$

La troisième relation donne :

$$-c_1 F_1(\eta) = F_3(\eta) \quad (\text{II.191})$$

Qui s'écrit explicitement de la manière suivante :

$$-C_1 \left\{ \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)^2 - \frac{F(\eta)}{\eta} \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' - 2 \frac{a_2}{a_1} G \right\} = \frac{1}{\eta} \left[\eta E(\eta) \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' \right] \quad (\text{II.192})$$

Rapportant l'expression (II.190) dans (II.192) nous aboutissons après simplification à :

$$-C_1 \left(- \left(\frac{F(\eta)F(\eta)'}{\eta} \right)' - \frac{C_0 C_1}{(C_0-1)} \left(\frac{F(\eta)F(\eta)'}{\eta} \right)' \right) = \left[\eta E(\eta) \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' \right] \quad (\text{II.193})$$

La résolution de l'équation ci-dessus sera donc :

$$-C_1 \left(\frac{F(\eta)F(\eta)'}{\eta} \right) = \eta E(\eta) \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' \quad (\text{II.194})$$

Avec la constante C_0 différente de l'unité et la constante C_1 différente de zéro

Notons que la relation due à la combinaison six est identique à celles obtenues par les combinaisons quatre et cinq. Les combinaisons étudiées sont résumées dans le tableau (II.3)

Tableau II.3 : Les combinaisons étudiées et retenues

$h(x)F_1(\eta) - k(x)F_2(\eta) = F_3(\eta)$		
Combinaisons	Commentaires	Conclusion
<u>Combinaison une :</u> $h = 0$ $k = 0$ $-k_0 F_2(\eta) = F_3(\eta)$	Les résultats expérimentaux montrent que le débit ne se conserve pas	Combinaison à rejeter
<u>Combinaison deux :</u> $h = h_0$ $k = 0$ $h_0 F_1(\eta) = F_2(\eta)$	Expérimentalement la demi largeur du jet n'est pas constante	Combinaison à rejeter
<u>Combinaison trois</u> $h = h_0$ $k = k_0$ $h_0 F_1(\eta) - k_0 F_2(\eta) = F_3(\eta)$	Sa validité dépend de la modélisation de la viscosité turbulente	On ne peut rien dire
<u>Combinaison quatre</u> $h = h_0$ $F_2(\eta) = 0$ $h_0 F_1(\eta) = F_3(\eta)$	Ces deux relations nécessitent une modélisation de la viscosité et de force de volume	On ne peut rien dire
<u>Combinaison cinq</u> $k = k_0$ $F_1(\eta) = 0$ $-k_0 F_2(\eta) = F_3(\eta)$	A priori il va falloir penser modéliser la viscosité turbulente	On ne peut rien dire
<u>Combinaison six</u> $h = c_0 k - c_1$ $c_0 F_1(\eta) = F_2(\eta)$ $-c_1 k_0 F_1(\eta) = F_3(\eta)$	La validité de la relation trois repose sur le choix d'un modèle de viscosité	On ne peut rien dire

II.14. Modèles de viscosité équivalente et influence

Comme tout schéma de type gradient, la validité de la relation (II.102) doit assurer les conditions suivantes :

- ❖ L'échelle de longueur caractéristique du transport diffusif par agitation turbulente pendant un temps τ , doit être sensiblement inférieure à la distance sur laquelle la propriété moyenne subit des variations spatiales appréciables ;

❖ L'échelle de temps, caractéristique du transport diffusif par agitation turbulente sur une distance l , doit être supérieure ou à la limite égale à celle du transport advectif par le champ moyen.

▪ **Modèle à zéro équation**

Dans un premier temps nous supposons que la viscosité turbulente est uniforme ce qui est commode, mais souvent assez grossièrement inexact. La forme fonctionnelle que nous pouvons lui associer sera donc :

$$v_t = N(x)E(\eta) = \text{Cte} \Rightarrow (N(x) = N_0; E(\eta)=1) \quad (\text{II.195})$$

Examinons le devenir de l'équation (II 162) selon les différentes combinaisons .en rapportant ces transformations dans l'expression (II.159), nous constatons que l'élargissement dynamique du jet est décrit par une forme exponentielle donnée par :

$$y_{1/2}(x) = \text{Cte} e^{\frac{k_0 N_0 x}{A}} \quad (\text{II.196})$$

Cette représentation est rejetée car elle contredit l'expérience ; de même les combinaisons trois et quatre expriment le fait que le débit suit une tendance linéaire qui augmente indéfiniment ; ce qui est insolite. Cependant la résolution des équations différentielles qui découlent des combinaisons cinq et six a été étudiée Goertler

$$-C_1 \left(\frac{F(\eta)F(\eta)'}{\eta} \right) = \eta \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' \quad (\text{II.197})$$

Tableau II.4. Conséquence d'une viscosité turbulente uniforme sur les six combinaisons

Modèle à zéro équation : $\gamma_t = N(\eta)E(\eta) = \text{Cte} \Rightarrow (N(\eta) = N_0; E(\eta)=1)$	
Combinaison une	Forme exponentielle de demi largeur du jet à rejeter
Combinaison deux	Les caractéristiques hydrodynamiques du jet sont indéfinies
Combinaison trois et quatre	Le débit croit indéfiniment ce qui est absurde à rejeter
Combinaison cinq et six	Les profils réduits de la vitesse sont solutionnés par Goertler

Exploitions les modèles de turbulence couramment utilisés (par Abramovich) ; envisageons tout d'abord la théorie de la longueur de mélange établie par Prandtl, celle-ci est

exprimée par l'équation (II.103) telle que la longueur de mélange est proportionnelle à la demi largeur du jet ; l'exploitation d'une telle relation conduit aux expressions suivantes :

$$N(x) = n_1 \frac{A(x)}{y_{1/2}(x)} \quad (\text{II.198.1})$$

$$E(\eta) = \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' \quad (\text{II.198.2})$$

Ce modèle rejette les trois premières combinaisons, quant aux trois dernières, elles donnent des équations différentielles résolues numériquement par Tollmien

Plus tard Prandtl songea qu'il est plus commode pratiquement de supposer que la diffusivité turbulente est proportionnelle au produit de la vitesse axiale fois la demi largeur du jet ce qui est exprimé par :

$$v_t = U_m(x) y_{1/2}(x) \quad (\text{II.199})$$

Ce qui entraîne :

$$N(x) = n_2 \frac{A(x)}{y_{1/2}(x)} \quad \text{et} \quad E(\eta) = 1 \quad (\text{II.200})$$

Ainsi l'équation différentielle obtenue due aux trois dernières combinaisons moyennant l'expression ci-dessus s'écrit :

$$-F(\eta)F(\eta)' = F(\eta)'' \eta - F(\eta)' \quad (\text{II.201})$$

La résolution complète a été donnée par Gortler :

$$\frac{F(\eta)'}{\eta} = \frac{8 \chi}{(1 + \chi \eta^2)^2} \quad (\text{II.202})$$

Reichardt modifie la diffusivité turbulente établie par Prandtl ; il considère ainsi la vitesse moyenne au lieu de la vitesse maximale axiale, laquelle est calculée grâce à l'expression ci-dessous :

$$\bar{U}(x, r) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2 \pi r U_x(x, r) dr \quad (\text{II.203})$$

Il en résulte :

$$N(x) = n_3 \frac{A(x)}{y_{1/2}(x)} \quad \text{et} \quad E(\eta) = \frac{F(\eta)}{\eta^2} \quad (\text{II.204})$$

Rapportons $E(\eta)$ dans l'équation différentielle due au trois dernières combinaisons, il en résulte :

$$-F(\eta)' = \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' \quad (\text{II.205})$$

Ainsi, la résolution de cette dernière donne l'expression suivante :

$$F(\eta) = \frac{1 - e^{-\lambda\eta^2}}{2\lambda} \quad (\text{II.206})$$

D'où le champ hydrodynamique s'écrit :

$$\frac{F(\eta)'}{\eta} = e^{-\lambda\eta^2} \quad (\text{II.207})$$

Avec $\lambda = \ln(2)$

Notons enfin que la régression linéaire décrite par $N(x)$ est retrouvée dans les trois modèles ; or, ce résultat n'est pas conforme avec les résultats expérimentaux.

Néanmoins les combinaisons quatre, cinq, et six semblent compatibles avec les modèles un, deux et notamment trois ; en effet l'application du modèle un à la quatrième combinaison donne :

$$\ln(A) = h_0 n_1 \int \frac{dx}{y_{1/2}(x)} \quad (\text{II.208})$$

A l'aide de l'équation de débit (II.137) nous tirons l'expression de $A(x)$, puis nous l'injectons dans l'équation (II.179) nous obtenons alors :

$$\ln \frac{Q(x)}{Q_0(x)} = k \int \frac{dx}{y_{1/2}(x)} \quad (\text{II.209})$$

Quant à la combinaison 6, elle nous donne une relation de débit un peu compliquée qui s'écrit :

$$\ln \frac{Q(x)}{Q_0(x)} = k_0 \ln \frac{y_{1/2}(x)}{y_{1/2}(x_0)} + k_1 \int \frac{dx}{y_{1/2}(x)} \quad (\text{II.210})$$

Notons que cette relation se ramène à l'équation (II.199) quand k_0 tend vers zéro.

Dans la figure ci-dessous nous constatons effectivement que la théorie de Reichardt s'accommode mieux avec les données expérimentales

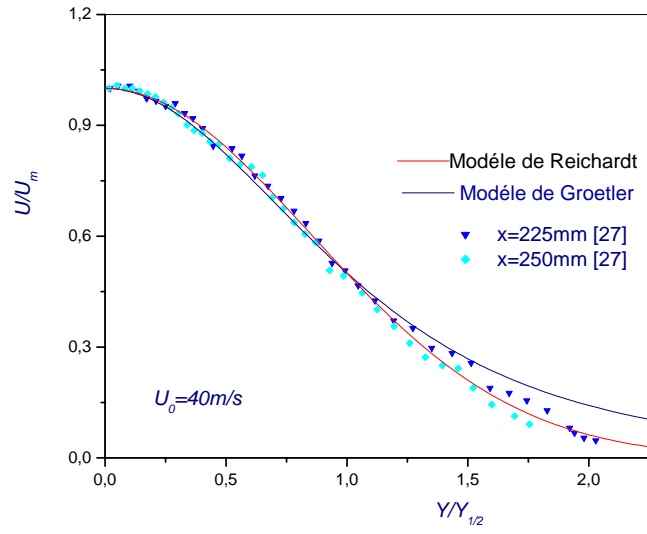


Figure (II.7). Profil hydrodynamique réduit selon les trois approches

Tableau II.5 Les profils hydrodynamiques selon les modèles de viscosité turbulente

<p>Les trois dernières combinaisons retenues ont une même équation différentielle :</p> $-C_1 \left(\frac{F(\eta)F(\eta)'}{\eta} \right)' = \eta E(\eta) \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)'$		
<p>Modèle de Bousinesq : $B_{rx} = -l^2 \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} \right)^2 = -v_t \frac{\partial U_x}{\partial r} \Rightarrow v_t = l^2 \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} \right)$</p>		
Modèle de Prandtl	Modèle de Prandtl –Taylor	Modèle de Reichardt
$l_m = n_0 y_{1/2}(x)$ $N(x) = n_1 \frac{A(x)}{y_{1/2}(x)}$ $E(\eta) = \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)$	$l_m = U_m(x) y_{1/2}(x)$ $N(x) = n_2 \frac{A(x)}{y_{1/2}(x)}$ $E(\eta) = 1$	$l_m = \bar{U}(x, r) y_{1/2}(x)$ avec : $\bar{U}(x, r) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2 \pi r U_x(x, r) dr$ $N(x) = n_3 \frac{A(x)}{y_{1/2}(x)}$ et $E(\eta) = \frac{F(\eta)}{\eta^2}$
Profils numériques de Tollmien	Profils de Gortler	Profils de Reichardt :
$-F(\eta)F(\eta)' = \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' \eta^2$	$\frac{F(\eta)'}{\eta} = \frac{8 \chi}{(1 + \chi \eta^2)^2}$	$\frac{F(\eta)'}{\eta} = e^{-\lambda \eta^2}$ $\ln \frac{Q(x)}{Q_0(x)} = k_0 \ln \frac{y_{1/2}(x)}{y_{1/2}(x_0)} + k_1 \int \frac{dx}{y_{1/2}(x)}$

II.20. Conclusion

A vrai dire, il ne s'agit là que d'un problème stylisé. Si l'on vient au problème réel qui en est une généralisation plus ou moins complexe, il est régi par des équations différentielles qui ne sont même plus linéaires et qui ne peuvent être intégrées qu'avec une méthode appropriée.

La justification de la méthode de calcul utilisée repose en fait sur l'existence des solutions simples et avant de parvenir à ces dernières, nous devons effectuer des stylisations de la viscosité turbulente, paramètre décrivant plutôt le comportement du fluide.

En effet, nous avons soigneusement appliqué les modèles de turbulence couramment utilisés sur les trois dernières combinaisons, l'analyse minutieuse faite nous révèle des formes d'équations différentielles variées, à savoir, celles résolues numériquement par Tollmien, et celle due à Goertler. Cependant, l'équation différentielle étudiée par Gauss semble s'accommoder convenablement avec les données expérimentales et la modélisation entreprise par Reichardt demeure jusqu'à nos jours, la plus forte.

SIMULATION NUMERIQUE D'UN JET TURBULENT AXISYMETRIQUE

III.1. Présentation do problème physique

Notre étude est entreprise sur un fluide newtonien, caractérisée par des propriétés physiques sont constantes .L'écoulement peut être compliqué, mais il présentera tout de même deux propriétés déterminantes à savoir : il privilégiera une seule direction à travers laquelle il répandra, et que sa vitesse sera maximale sur l'axe du jet, notons que celui-ci est fixé au centre de l'injecteur.

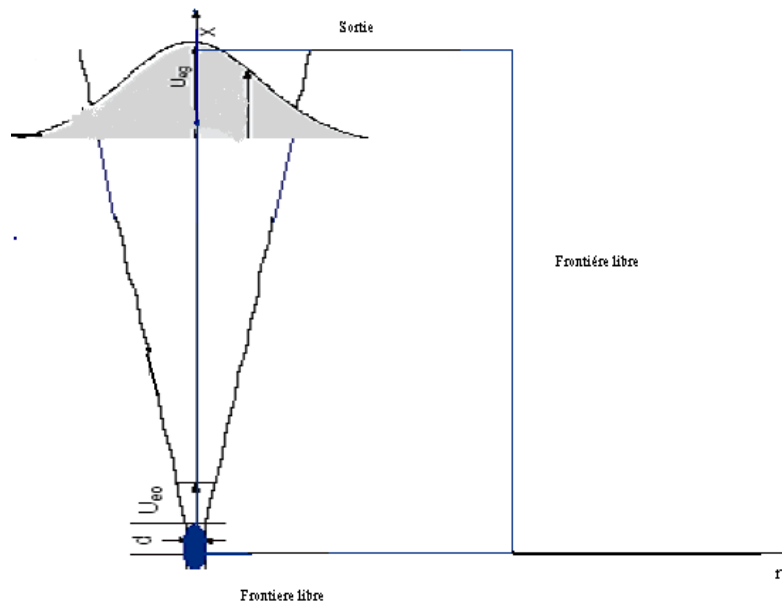


Figure III.1 : Domaine physique d'un jet libre

III.2. Formulation mathématique

Avec les hypothèses développées précédemment dans le chapitre II, le problème se réduit à un écoulement monophasique turbulent axisymétrique dont les propriétés physiques sont uniformes. Cet écoulement étant gouverné par un ensemble d'équations traduisant la conservation de masse et la quantité de mouvement, a cela s'ajoute le modèle de fermeture retenu.

- *Equation de conservation de masse*

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (r\rho U_x) + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho U_r) \right\} = 0 \quad (\text{III.1})$$

- *Equation de conservation de quantité de mouvement suivant la direction axiale*

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (r\rho U_x^2) + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho U_x U_r) \right\} = \left(-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(r\mu_{\text{eff}} \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu_{\text{eff}} \frac{\partial U_r}{\partial x} \right) \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(r\mu_{\text{eff}} \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu_{\text{eff}} \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) \right) \quad (\text{III.2})$$

- *Equation de conservation de quantité de mouvement suivant la direction radiale*

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (r\rho U_x U_r) + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho U_r^2) \right\} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left(r\mu_{\text{eff}} \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu_{\text{eff}} \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) - 2 \frac{\mu_{\text{eff}} U_r}{r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(r\mu_{\text{eff}} \frac{\partial U_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu_{\text{eff}} \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) \right) \quad (\text{III.3})$$

- *Equation de l'énergie cinétique turbulente*

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (r\rho U_x k) + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho U_r k) \right\} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \right) + \mu_t \left(2 \left(\left(\frac{\partial U_x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{U_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial x} \right)^2 \right) \right) - \rho \varepsilon = 0 \quad (\text{III.4})$$

- *Equation du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente*

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (r\rho U_x \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho U_r \varepsilon) \right\} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \mu_t \left(2 \left(\left(\frac{\partial U_x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{U_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial x} \right)^2 \right) \right) - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{III.5})$$

Ces équations peuvent s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (r\rho U_x \phi) + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho U_r \phi) \right\} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(r\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right) + S_\phi \quad (\text{III.6})$$

ϕ Représente les variables du problème (U_s, U_r, k, ε)

Γ_ϕ et S_ϕ Sont respectivement le coefficient de diffusion et le terme source de la variable ϕ considérée.

Le tableau ci dessous regroupe toutes les équations associées à notre problème.

Tableau III.1 : expressions des termes Γ_ϕ S_ϕ associés aux équations de continuité et de transport

Equations	Φ	Γ	S_ϕ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant la direction axiale	U_x	μ_{eff}	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{eff} \frac{\partial U_r}{\partial x} \right)$
Quantité de mouvement suivant la direction radiale	U_r	μ_{eff}	$-\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{eff} \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) - 2 \frac{\mu_{eff} U_r}{r^2}$
Energie cinétique de turbulence	k	$\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k}$	$G - \rho \varepsilon$
Taux de dissipation de l'énergie cinétique de Turbulence	ε	$\frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon}$	$C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} G - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$

Où :

$$G = \mu_t \left(2 \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{U_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (III.7)$$

La viscosité effective μ_{eff} est calculée à partir de la valeur locale de l'énergie cinétique turbulente et du taux de la dissipation

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t \quad (III.8)$$

De même que la viscosité effective, la viscosité turbulente dépend de deux fonctions il s'agit de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation :

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{III.9})$$

Les constantes du modèle de turbulence k-ε sont regroupées dans le tableau ci-dessous

Tableau III.2 Constantes du modèle k-ε.

C_{ε_1}	C_{ε_2}	C_μ	σ_k	σ_ε
1,44	1,92	0,09	1,0	1,22

III.3. Conditions aux limites

Notons que l'équation (III.6) est de type elliptique, elle traduit le phénomène de diffusion du jet, néanmoins le système d'équations aux dérivées partielles conçue reste indéfini, et donc nous ne pouvons espérer trouver une solution complète du problème sauf si celui-ci sera muni des conditions limites sur le domaine d'étude.

Rappelons que dans notre cas il s'agit d'un domaine ouvert dont la frontière n'est pas tout à fait régulière, pour pouvoir résoudre le problème, nous assimilons le domaine physique à une configuration cylindrique à laquelle nous attribuons les conditions limites suivantes :

III.3.1. Entrée du jet

À l'entrée de l'injecteur, le profil des vitesses longitudinal est uniforme ; par contre, la vitesse radiale tend vers zéro, nous adoptons par conséquent, les conditions limites de Dirichlet

Le profil initial de l'énergie cinétique turbulente est rarement connue de façon précise, dans la majorité des cas, l'énergie cinétique turbulente est supposée être proportionnelle au carré de la vitesse axiale moyenne, le coefficient de proportionnalité varie entre 0,1 et 1% [47],[24] .

Quant au taux de dissipation initial, il est estimé à partir d'une expression appropriée, [47], [43]

Par ailleurs, nous exprimons les différentes propriétés à l'entrée du jet moyennant les formules suivantes :

$$U_{x(\text{in})} = U_0 \quad U_{r(\text{in})} = 0 \quad (\text{III.10})$$

$$k_{in} = 1\% U_0^2 \quad \varepsilon_{in} = \frac{k_{in}^{1.5}}{D_o} \quad (III.11)$$

III.3.2. Axe de symétrie

L'axe de symétrie est fixé au centre de la buse, les conditions admises sur cet axe sont de type Newman homogène, ce qui est justifié par un gradient nul de toutes les propriétés étudiées, à savoir, la vitesses axiale, l'énergie turbulente et le taux de dissipation, ce qui est satisfait par l'équation ci-dessous :

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \text{où } \phi = U_x, k, \varepsilon \quad (III.12)$$

Quant à la vitesse radiale elle est identiquement nulle :

$$U_r = 0 \quad (III.13)$$

III.3.3. Frontière libre horizontale

Au niveau de cette frontière, la vitesse axiale et l'énergie cinétique turbulente sont nulles, par contre, les autres grandeurs physiques le taux de dissipation et la vitesse radiale vérifiées la condition limite de type Newman homogène, ceci étant vérifié par l'expression ci jointe :

$$\begin{cases} U_x = 0, k = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \text{ où } \phi = U_r, \varepsilon \end{cases} \quad (III.14)$$

III.3.4. Frontière libre verticale

Nous avons délibérément éloigné cette frontière le plus possible de l'injecteur afin de sortir de l'enveloppe du jet, ainsi, nous pouvons appliquer une condition limite de type de Dirichlet justifiant la valeur nulle des deux composantes de vitesse axiale et radiale, les autres grandeurs par contre, vérifient la condition de type Newman homogène.

$$\begin{cases} U_x = 0, U_r = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{où } \phi = k, \varepsilon \end{cases} \quad (III.15)$$

III.3.5. Sortie du jet

Il est difficile de prévoir exactement la hauteur au-delà de laquelle le jet s'estompe complètement, il est donc raisonnable d'éloigner cette frontière, mais au lieu d'annuler toutes les propriétés hydrodynamiques et turbulentes, nous définissons un gradient nul à ce niveau du domaine physique afin d'écartier toute situation confuse, ce qui est justifié par l'équation ci-dessous :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{où } \phi =, k, \varepsilon, U_x \quad (\text{III.16})$$

Dans le but de rendre l'étude abordable nous avons utilisé une configuration cylindrique ; la méthode de calcul adoptée est celle des volumes finis développée par Patankar, devenue par la suite un code de calcul universel vu ces diverses qualités et sa mise en oeuvre[48]

III.4. Volume d'intégration des différentes variables

Afin de confronter les profils hydrodynamiques obtenus par la méthode numérique, aux données expérimentales, nous avons divisé l'axe vertical noté x , à travers lequel le jet se développe, en cinq zones x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 ; quant à la direction radiale nous l'avons partagée en trois parties : la première représente le rayon du jet, au-delà de celle-ci, deux autres zones sont établies dont la somme des longueurs dépasse l'enveloppe du jet. Chaque partie du domaine est caractérisée par un nombre de nœuds et un pas approprié; le maillage effectué est donc non uniforme, en effet, l'évolution de la propriété étudiée est évaluée à partir d'un maillage décalé dense très proche de l'injecteur (figure III.1).vu la forte variation des différentes propriétés dans cette zone

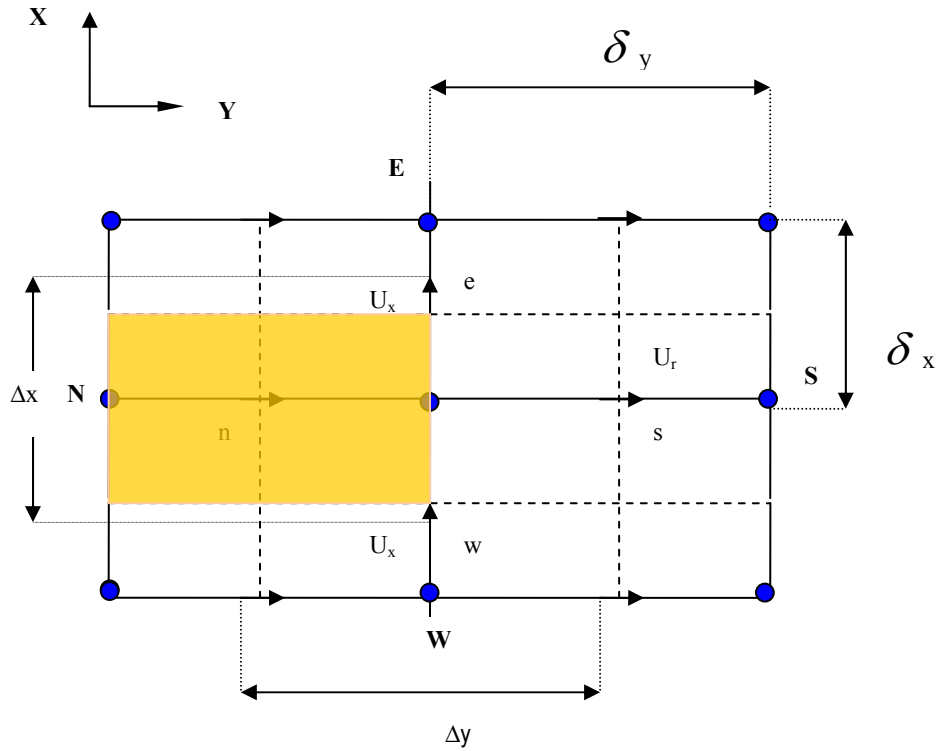


Figure III.2 : Volume de contrôle pour les propriétés U_x et U_r

III. 5. Discrétisation des équations de transport

Nous avons vu dans ce qui a précédé que les variables physiques sont décrites par une équation de transfert dont la forme générale est la suivante :

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (r\rho U_x \phi) + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho U_r \phi) \right\} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(r\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right) + S_\phi \quad (\text{III.6})$$

Intégrons à présent l'équation (III.6) sur le volume de contrôle défini ci-dessous :

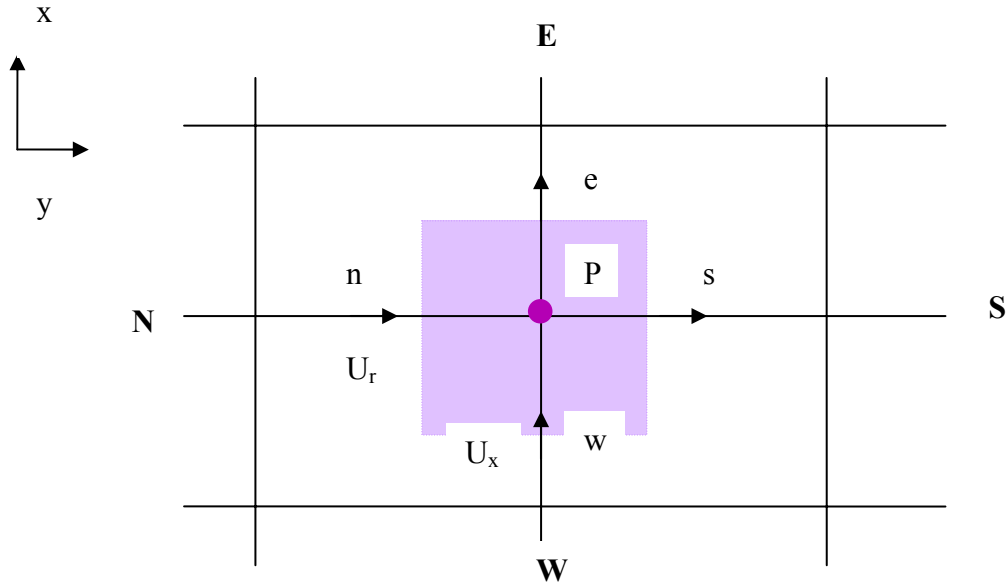


Figure III.3 : Volume de contrôle valable pour les propriétés scalaire: P, k et ε.

Intégrons l'équation (III.6) sur le volume de contrôle schématisé par la figure (III.3) :

$$\int \int_{w_s}^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho r U_x \phi - r \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dr + \int \int_{w_s}^e \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho r U_r \phi - r \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] dr dx = \int_v r S_\phi dv \quad (III.17)$$

L'intégration de l'expression (III.17) donne :

$$\left(\rho r U_x \phi - r \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w^e \Delta r + \left(\rho r U_r \phi - r \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_x^n \Delta x = \int_v r S_\phi dv \quad (III.18)$$

Continuons le développement du premier membre de l'équation (III.18) :

$$\begin{aligned} & (\rho U_x)_e (r_e \Delta r) \phi_e - (r_e \Delta r) \Gamma_{\phi e} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - (\rho U_x)_w (r_w \Delta r) \phi_w + (r_w \Delta r) \Gamma_{\phi w} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w + \\ & (\rho U_r)_n (r_n \Delta x) \phi_n - (r_n \Delta x) \Gamma_{\phi e} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_n - (\rho U_r)_s (r_s \Delta x) \phi_s + (r_s \Delta x) \Gamma_{\phi s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_s \\ & = \int_v r S_\phi dv \end{aligned} \quad (III.19)$$

Les gradients des propriétés scalaires au niveau des interfaces sont évalués moyennant les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_n &= \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta r_n} & \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_e &= \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta r_e} \\
\left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_s &= \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta r_s} & \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_e &= \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta r_e}
\end{aligned} \tag{III.20}$$

Afin d'alléger l'écriture nous adopterons dans ce qui suit les notations suivantes F, D et J, ainsi l'équation (III.19) s'écrit

$$\begin{aligned}
F_e &= (\rho U_x)_e (r_e \Delta r) & D_e &= (r_e \Delta y) \left. \frac{\Gamma_\phi}{\delta x} \right|_e & J_e &= F_e \phi_e - D_e (\phi_E - \phi_P) \\
F_w &= (\rho U_x)_w (r_w \Delta r) & D_w &= (r_w \Delta y) \left. \frac{\Gamma_\phi}{\delta x} \right|_w & J_w &= F_w \phi_w - D_w (\phi_P - \phi_W) \\
F_n &= (\rho U_r)_n (r_n \Delta x) & D_n &= (r_n \Delta x) \left. \frac{\Gamma_\phi}{\delta r} \right|_n & J_n &= F_n \phi_n - D_n (\phi_N - \phi_P) \\
F_s &= (\rho U_r)_s (r_s \Delta x) & D_s &= (r_s \Delta x) \left. \frac{\Gamma_\phi}{\delta r} \right|_s & J_s &= F_s \phi_s - D_s (\phi_P - \phi_S)
\end{aligned} \tag{III.21}$$

Nous constatons que les expressions J_e , J_n , J_w et J_s représentent les flux dus respectivement à la convection et la conduction à travers les interfaces de volume de contrôle. Les expressions géométriques qui apparaissent dans les termes J sont évaluées à partir du maillage, effectué dans le domaine d'étude ; quant au flux massique et que les coefficients de diffusivité à l'interface, ils sont résolus moyennant une interpolation linéaire ou bien en utilisant un schéma d'interpolation approprié.

A présent notre attention sera portée sur le deuxième membre de l'équation (III.19), en effet nous supposons que le terme source est uniforme sur tout le volume de contrôle, ce qui nous permet de l'approcher par l'expression suivante :

$$\overline{S_\phi} = \int r S_\phi dv = S_p \phi + S_u \tag{III.22}$$

Nous substituons maintenant les expressions (III.21) et (III.22) dans l'équation (III.19). Nous aurons alors une écriture simplifiée de cette dernière :

$$J_e - J_w + J_n - J_s = S_p \phi - S_u \tag{III.23}$$

Évaluons l'équation de continuité à partir de l'expression (III.6), en attribuons la valeur 1 à la propriété Φ et zéro un terme source noté S_ϕ , l'intégration sur le volume de contrôle donne :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (\text{III.24})$$

Multiplions l'expression (III.24) par Φp , puis retranchons cette dernière de l'équation (III.23), nous obtenons alors :

$$(J_e - F_e \phi_p) - (J_w - F_w \phi_p) + (J_n - F_n \phi_p) - (J_s - F_s \phi_p) = S_p \phi - S_u \quad (\text{III.25})$$

Le calcul des propriétés à l'interface ce fait en utilisant un schéma d'interpolation, l'équation (III.25) devient :

$$\begin{aligned} J_e - F_e \phi_p &= a_E (\phi_p - \phi_E) & J_w - F_w \phi_p &= a_W (\phi_W - \phi_p) \\ J_n - F_n \phi_p &= a_N (\phi_p - \phi_N) & J_s - F_s \phi_p &= a_S (\phi_S - \phi_p) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

En substituant les expressions formulées par (III.26) dans l'équation (III.25), nous aurons alors :

$$a_{pu} \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{III.27})$$

Les expressions algébriques a_M tel que M égale (N, S, E ou W) sont établies ci-dessous :

$$\begin{aligned} a_E &= D_e A(|P_e|) + \max[-F_e, 0] \\ a_W &= D_w A(|P_w|) + \max[-F_w, 0] \\ a_S &= D_s A(|P_s|) + \max[-F_s, 0] \\ a_N &= D_n A(|P_n|) + \max[-F_n, 0] \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

P_i indique le nombre de Pecklet défini par le rapport $\frac{F_i}{D_i}$ $i=e, n, s, w$:

La fonction $A(|P|)$ est une fonction caractérisant le schéma d'interpolation choisi.

Selon la littérature, nous pouvons attribuer à la fonction généralisée $A(|P|)$ plusieurs schémas d'interpolation, néanmoins, le schéma de puissance (P.L.D.S) que nous utilisons pour la discrétisation des équations est le plus recommandé car il garanti un bon compromis précision, stabilité et rapidité. Comparé aux autres schémas.

Notons que le schéma quadratique (QUICK) est plus précis et moins générateur de diffusion numérique, ne fait pas l'unanimité, ceci ressort des travaux des auteurs de Denuren [49] et de Lacovides [50].

Le tableau ci dessous regroupe les principaux schémas d'interpolation utilisés :

Tableau III.2 : expressions de la fonction $A(|P|)$ pour différents schémas

Schémas d'interpolation	Expressions de $A(P)$
Central Difference	$1 - 0.5 P $
Up -wind	1
Hybride	$\ 0, 1 - 0.5 P \ $
Power -law	$\ 0, (1 - 0.1 P)^5\ $
Exponentiel	$\frac{P}{\exp(P) - 1}$

III. 6. Linéarisation du terme source

Généralement, le terme source est non linéaire et dépend de la propriété dont il s'agit. Cependant, la méthode des volumes finis exige une linéarisation de ce terme en se basant sur l'algèbre linéaire ; en effet le terme source prend la forme linéaire suivante :

$$\bar{S}_\phi = S_U + S_p \phi \quad (\text{III.22})$$

Au cas où les coefficients S_u et S_p sont fonction de la propriété, on utilise la méthode de la tangente :

$$\bar{S} = S^* + \left(\frac{dS}{d\phi} \right)^* (\phi_p - \phi_p^*) \quad (\text{III.29})$$

S^* et ϕ^* indiquent les valeurs de \bar{S} et ϕ_p à l'itération précédente. Les expressions de S_u et S_p relatives aux différentes équations, sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

Tableau III.4 : Forme linéaire du terme source pour chaque propriété

Equation de la variab le Φ	S_p	S_u
U_x	$\mathbf{0}$	$\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{eff} \frac{\partial U_r}{\partial x} \right) \right) \cdot Vol$
U_r	$\left(-2 \frac{\mu_{eff}}{r^2} \right) Vol$	$\left(-\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{eff} \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) \right) Vol$
k	$\left(-\frac{\rho \varepsilon}{k} \right) vol$	$(G) Vol$
ε	$\left(-C_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon}{k} \right) vol$	$\left(+C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} G \right) vol$

III.6.1. Algorithmes de résolution du couplage vitesse pression

L'absence d'une équation explicite appropriée de la pression a créé des difficultés pour aboutir au champ dynamique. Afin de palier à ce problème, différents algorithmes ont été élaborés, nous citons par exemple l'algorithme Simple l'algorithme (1972), Pumpen (1979), Simpler (1980). [51]

D'après l'étude effectuée par Huang et Leschziner [52], il ressort que l'algorithme Simpler est dotée d'une grande performance : du point de vue convergence de la solution et stabilité de calcul numérique comparé à l'algorithme initial simple. Néanmoins, quand il s'agit d'un écoulement complexe autrement dit turbulent l'algorithme Simpler perd ces performances, dans ce cas, l'utilisation de l'algorithme Simple est conseillée

III.6.2. Equations des vitesses

La discrétisation des deux composantes de l'équation du mouvement sur le volume de contrôle de la figure (III.2) donne les expressions algébriques suivantes :

$$\begin{aligned}
a_e U_{x_e} &= \sum_i a_i U_i + A_e (P_P - P_E) + b \\
a_e U_{r_n} &= \sum_i a_i U_{ri} + A_n (P_P - P_N) + b
\end{aligned}
\tag{III.30}$$

Les coefficients A_e et A_n représentent les surfaces sur lesquelles la force de pression agit. ; i étant les nœuds voisins des nœuds considérés. La résolution du système (III.27) se fait d'une manière itérative, ce qui nous impose un choix initial du champ de pression, notons que des corrections pression et des vitesses sont faites à la fin de chaque itération quand les valeurs auxquelles nous aboutissons ne vérifient pas l'équation de continuité.

III.6.3. Correction des vitesses et des pressions

Notre objectif est de corriger la pression approchée notée P^* , tel que les composantes des vitesses obtenues vérifient l'équation de continuité.

Affectons respectivement les notations P et P' à la pression exacte et à sa correction

$$P = P^* + P' \tag{III.31}$$

D'une façon analogue nous écrivons les expressions exactes des composantes des vitesses :

$$\begin{aligned}
U_x &= U_x^* + U_x' \\
U_r &= U_r^* + U_r'
\end{aligned}
\tag{III.32}$$

Nous obtenons donc le système algébrique suivant :

$$\begin{aligned}
a_e U_{x_e}^* &= \sum_i a_i U_{xi} + A_e (P_P^* - P_E^*) + b \\
a_e U_{r_n}^* &= \sum_i a_i U_{ri} + A_n (P_P^* - P_N^*) + b
\end{aligned}
\tag{III.33}$$

Les expressions de correction des vitesses U_x et U_r sont obtenues en retranchant de la vitesse exacte la vitesse estimée, nous aurons alors :

$$\begin{aligned}
a_e U_{x_e}' &= \sum_i a_i U_{xi}' + A_e (P_P' - P_E') \\
a_n U_{r_n}' &= \sum_i a_i U_{ri}' + A_n (P_P' - P_N')
\end{aligned}
\tag{III.34}$$

Pour des raisons de convergence dans le calcul, on néglige la correction apportée aux nœuds voisins, le système se simplifie et devient :

$$a_e U_{xe}' = A_e (P_P' - P_E') \quad U_{xe}' = \frac{A_e}{a_e} (P_P' - P_E') \quad (III.35)$$

$$a_n U_{rn}' = A_n (P_P' - P_N') \quad U_{rn}' = \frac{A_n}{a_n} (P_P' - P_N')$$

Introduisons à présent ces corrections dans les expressions exactes des vitesses :

$$U_x = U_x^* + \frac{A_e}{a_e} (P_P' - P_E') = U_x^* + d_e (P_P' - P_E') \quad (III.36)$$

$$U_r = U_r^* + \frac{A_n}{a_n} (P_P' - P_N') = U_r^* + d_n (P_P' - P_N')$$

III.6.4. Correction de la pression

L'équation de continuité constitue un moyen avec lequel on ajuste la pression. Dans un premier temps, nous effectuons une intégration de l'équation de continuité sur un volume de contrôle, puis nous introduisons les expressions exactes des vitesses, ce qui permet d'obtenir une équation explicite de correction de pressions.

L'équation de continuité intégrée sur un volume de contrôle s'écrit :

$$[(\rho U_x r)_e - (\rho U_x r)_w] \Delta r + [(\rho U_r r)_n - (\rho U_r r)_s] \Delta x = 0 \quad (III.37)$$

Nous substituons les vitesses U_x et U_r par leur expression (III.36), après réarrangement du système nous obtenons une formule de correction de pression qui s'écrit:

$$a_p P_p' = a_e P_E' + a_w P_W' + a_n P_n' + a_s P_s' + b_{p'} \quad (III.38)$$

Où les coefficients a_i et le terme source b associé à l'équation de continuité s'expriment ainsi :

$$\begin{aligned} a_E &= \rho d_e \Delta r & a_W &= \rho d_w \Delta x \\ a_N &= \rho d_n \Delta x & a_S &= \rho d_s \Delta x \\ a_P &= a_E + a_W + a_S + a_N \\ b_{p'} &= (\rho U_x^* A)_w - (\rho U_x^* A)_e + (\rho U_r^* A)_s - (\rho U_r^* A)_n \end{aligned} \quad (III.39)$$

Au cas où le terme $b_{p'}$ est nul, le champ de vitesse vérifie l'équation de continuité, à ce moment là aucune correction n'est nécessaire, ni pour la pression ni pour les vitesses.

III.6.5. Algorithme du régime turbulent Simple

1. on se donne un champ de pression P^* .
2. Calcul du champ de vitesses (U_x^* et U_r^*) par la relation (III.33).
3. Résolution de l'équation de correction de la pression (III.38).
4. Calcul du champ de pression corrigée $P=P^*+P'$.
5. Calcul du champ de vitesse corrigée U_x et U_r en utilisant la correction de pression. (III.36)
6. Calcul des autres variables, tel que : l'énergie cinétique turbulente k et le taux ϵ de dissipation ϵ
7. Prendre la pression P comme étant une nouvelle estimée P^* ($P^*=P$) et reprendre l'exécution à l'étape 2, en répétant toute la procédure jusqu'à ce que la convergence soit atteinte.

III.7. Résolution du système d'équation

Le système algébrique obtenu est résolu par l'algorithme répétitif de balayage ligne par ligne et colonne par colonne, selon l'algorithme de Thomas En effet, à l'itération $k+1$, le système (III.27) peut s'écrire :

$$a_p \phi_p^{k+1} = a_E \phi_E^{k+1} + a_W \phi_W^{k+1} + a_N \phi_N^{k+1} + a_S \phi_S^{k+1} + b \quad (\text{III.40})$$

ϕ^k Désigne la valeur de la variable ϕ au cours de la k ème itération ; la matrice associée aux équations est tridiagonal, la résolution se fait donc par l'algorithme de Thomas.

III.7.1. Stabilité et convergence

Afin d'assurer un comportement physique réaliste, nous nous sommes convenus à vérifier les règles de base qui vérifient à la fois stabilité et convergence.

III.7.2. Règles de base de la convergence de la méthode des volumes finis

Lors de la résolution numérique, il est utile de prendre certaines précautions qui garantissent, des résultats ayant un sens physique, cependant, le schéma de discrétisation doit respecter les règles suivantes :

- **Règle1-** : *Consistance interfaciale* :

Le profil de variation de la propriété physique ϕ dans un volume de contrôle doit être choisi de manière à assurer l'unicité de flux à l'interface.

On entend par unicité de flux à l'interface, l'égalité des valeurs des flux sortantes, d'un volume de contrôle et entrant dans le volume de contrôle voisin.

- **Règle2-** : Les coefficients a_i et a_{nb} de l'équation discrétisée doivent être de même signe :

Des résultats n'ayant pas de sens peuvent être obtenus si cette règle n'est pas respectée.

- **Règle3-** : Lors de la linéarisation du terme source prendre une pente négative de manière à éviter d'obtenir un coefficient a_i négatifs.

- **Règle4-** : Matrice à diagonale dominante :

Lorsqu'il n'y a pas de terme source, si ϕ est la solution de l'équation différentielle, alors ($\phi + \text{constante}$) doit l'être aussi, ceci conduit à :

$$a_p = \sum a_i \quad (\text{III.41})$$

Ou plus généralement :

$$a_p \geq \sum a_i \quad (\text{III.42})$$

III. 8. Technique de sous relaxation

Afin de réduire les variations brutales qui déstabilise la procédure numérique qui se produisent au cours des premières itérations nous avons introduit la technique de sous relaxations pour les différentes variables U_x , U_r , k , ϵ et pour la viscosité turbulente ν_t . L'expression des sous relaxation s'écrit :

$$\phi^{k+1} = \phi^k + \alpha(\phi^* - \phi^k) \quad (\text{III.43})$$

Où :

ϕ^k valeur de la variable à l'itération k ;

ϕ^{k+1} valeur de la variable ϕ à l'itération $k+1$;

ϕ^* valeur de la variable calculée au cours de l'itération $k+1$.

α étant le coefficient de sous relaxation dont la valeur est comprise entre 0 et 1 , ce dernier peut avoir des valeurs distinctes pour les différentes équations où les plus recommandés sont regroupées dans le tableau ci-dessus :

Tableau III.5 : Coefficient de sous relaxation des différentes propriétés

Φ	U_x	U_r	P	k	ϵ	ν_t
α	0,3	0,3	0,6	0,6	0,6	0,5

III.8.1.Critère de convergence

Lorsque les itérations ultérieures ne produisent aucun changement significatif dans les valeurs numériques obtenues, nous pouvons dire que le processus itératif a atteint sa convergence, néanmoins, à la fin de chaque itération nous devons appliquer un test de convergence appelé aussi critère de convergence, celui-ci est défini selon la nature du problème et les objectifs des calculs.

Dans notre cas nous définissons pour chaque volume de contrôle et pour chaque équation algébrique un résidu noté R_ϕ , calculé à partir de l'équation suivante :

$$R_\phi = \sum a_i \phi_i + b - a_p \phi_p \quad (\text{III.44})$$

Ainsi la convergence sera constatée grâce à la valeur résiduelle R_ϕ , et doit donc vérifier l'expression mathématique ci-dessous :

$$\sum_{\Omega} |R_\phi| \leq \varepsilon_\phi \quad (\text{III.45})$$

Où : Ω est le domaine de calcul.

III.9.Conclusion

Nous avons mené notre étude en utilisant le code de calcul TEAM, qui est basé sur la méthode numérique des volumes finis ; en effet ce code tient compte des différentes techniques de stabilisation, notons cependant que la discrétisation des équations de transport utilise le schéma loi de puissance PLDS

Quant au couplage vitesse –pression, il est résolu grâce à l'algorithme simple (semi-implicit Methode for pressure Linked),et enfin, la structure tri diagonale de la matrice associée au système algébrique , obtenue après discrétisation , conduit à l'utilisation de l'algorithme de matrice tri diagonale de Thomas TDMA.

RESULTATS ET DISCUSSION

L'interprétation des caractéristiques hydrodynamiques du jet, les forces de volume, la viscosité turbulente et éventuellement le tenseur de cofluctuation qui résultent de l'application de la méthode différentielle déjà étudiée au chapitre II n'est pas certain à priori, en effet, tracer leur graphique en vue d'une discussion plausible, nécessitera des données littérales, car les expressions compliquées des solutions trouvées ne se prêtaient pas, d'ordinaire, à une discussion probable

IV.1. Calcul des fonctions caractéristiques en s'accommodant du modèle de Reichardt

L'authenticité du champ dynamique décrit spontanément par le jet, qui s'accommode au caractère exponentiel établi par Gauss, est fort convenable étant donné qu'il répond remarquablement aux données expérimentales. Néanmoins, nous devons rappeler qu'une telle allure est due au fait que l'équation différentielle est de type elliptique où le terme de diffusion prime sur les autres termes, à présent, nous établissons les fonctions caractéristiques du jet légèrement particulière

➤ *Calcul du débit volumique*

L'expression du débit est obtenue en faisant tendre η vers l'infinie dans l'équation (II.137.). Ce qui donne :

$$Q(x) = \frac{\pi A(x)}{\lambda} = \frac{\pi A(x)}{\ln(2)} \quad (\text{IV.1})$$

Il est à noter que cette expression dépend directement de la fonction de courant, remarquons tout de même que les deux fonctions débit et ligne de courant s'égalisent à une constante près.

➤ *Flux de quantité de mouvement*

L'expression du flux de quantité de mouvement s'obtient en évaluant l'expression sous signe intégral:

$$\int_0^{\infty} \eta (e^{-\lambda \eta^2})^2 d\eta = -\frac{1}{4\lambda} (e^{-\lambda \eta^2})^2 \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4\lambda} \quad (\text{IV.2})$$

Il semble évident d'après la valeur obtenue, qu'environ 35% du flux total se transvase suivant la direction radiale ; les 65% restant du flux de quantité de mouvement s'étendent dans la direction axiale. L'expression finale de flux de quantité de mouvement s'écrit en définitive comme :

$$M(x) = \frac{\pi \rho_f A(x)^2}{2\lambda y_{1/2}^2(x)} \quad (\text{IV.3})$$

➤ **Vitesse maximale**

En ce qui concerne la vitesse maximale, le calcul montre que cette propriété dépend à la fois de la fonction de courant et de l'inverse du carré de l'élargissement dynamique.

$$U_m(x) = \frac{A(x)}{y_{1/2}^2(x)} \left[e^{-\lambda \eta^2} \right]_{\eta=0} = \frac{A(x)}{y_{1/2}^2(x)} \quad (\text{IV.4})$$

Remarque : Une relation exprimant le flux de quantité de mouvement peut être déduite en combinant les relations (IV.1) et (IV.4) décrivant le comportement du flux de quantité de mouvement en fonction de la vitesse maximale et la fonction de courant, constatons que le long d'une ligne de courant l'augmentation de l'élargissement dynamique correspond à un affaiblissement de la vitesse maximale.

$$M(x) = \frac{\pi \rho_f}{2\lambda} U_m(x) A(x) \quad (\text{IV.5})$$

Or, compte tenu de l'expression (IV.1), le flux de quantité de mouvement peut s'écrire aussi comme :

$$M(x) = 8\lambda \rho_f U_m(x) Q(x) \quad (\text{IV.6})$$

➤ **Forces de volume**

A présent, passons au calcul des forces de volume. Pour ce faire ; la détermination des deux expressions finies a_1 et a_2 demeure inévitable et indispensable :

$$a_2 = \int_0^{\infty} 2\eta (e^{-\lambda \eta^2})^2 d\eta = -\frac{1}{2\lambda} (e^{-\lambda \eta^2})^2 \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\lambda} \quad (\text{IV.7})$$

L'expression a_1 dépend de la fonction $G(\eta)$; son calcul se fait moyennant les trois combinaisons retenues :

$$a_1 = \int_0^{\infty} 2\eta G(\eta) d\eta \quad (\text{IV.8})$$

Établissons tout d'abord la formulation de la fonction $G(\eta)$ selon les combinaisons retenues

Utilisons, dans un premier temps l'expression (II.174) Qui découle de la quatrième combinaison :

$$F_2(\eta) = 0 \quad (\text{IV.9.1})$$

$$\left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)^2 = \frac{a_2}{a_1} G(\eta) \quad (\text{IV.9.2})$$

Dans cette dernière relation, rapportons le champ dynamique réduit, exprimé par la relation (II.207) nous aboutissons alors à :

$$\left(e^{-\lambda\eta^2} \right)^2 = \frac{1}{2\lambda a_1} G(\eta) \quad (\text{IV.10})$$

Il est clair au vu de cette dernière équation, qu'il s'agit d'une équation qui regroupe deux inconnues la constante a_1 et la distribution des forces de volume $G(\eta)$: la détermination respectivement de ces inconnues nécessite l'établissement d'une deuxième équation. Nous effectuons un calcul analogue à celui déjà établi mais en utilisant cette fois-ci la combinaison cinq dont l'une de ces trois relations suppose que la fonction $F_1(\eta)$ est identiquement nulle. Reprenons donc la relation (II.179) dans laquelle nous injectons le profil de vitesses retenu :

$$\left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)^2 - \frac{F(\eta)}{\eta} \left(\frac{F(\eta)'}{\eta} \right)' = 2 \frac{a_2}{a_1} G(\eta) \quad (\text{IV.11})$$

L'expression ci-dessus deviendrait en utilisant le résultat de l'équation (II.207) comme suit :

$$\left(e^{-\lambda\eta^2} \right)^2 + \left(1 - e^{-\lambda\eta^2} \right) \left(e^{-\lambda\eta^2} \right)' = \frac{1}{\lambda a_1} G(\eta) \quad (\text{IV.12})$$

D'où, après simplification :

$$e^{-\lambda\eta^2} = \frac{1}{\lambda a_1} G(\eta) \quad (\text{II.13})$$

Avec les deux expressions qui découlent d'un calcul relativement simple, nous déterminons d'une façon explicite les inconnus du problème. En effet, nous tirons de l'équation (IV.13) la valeur de a_1 puis en la substituant dans l'expression (IV.11), nous aurons respectivement les expressions de a_1 et $G(\eta)$:

$$a_1 = \frac{2}{\lambda} \quad (\text{IV.14.1})$$

$$G(\eta) = 2 e^{-\lambda\eta^2} \quad (\text{IV.14.2})$$

En définitive, les forces de volume s'expriment comme suit :

$$\rho_F B(x)G(\eta) = \frac{\rho_F}{2y_{1/2}^2(x)} \left(\frac{A(x)^2}{y_{1/2}^2} \right)' e^{-\lambda\eta^2} \quad (\text{IV.15})$$

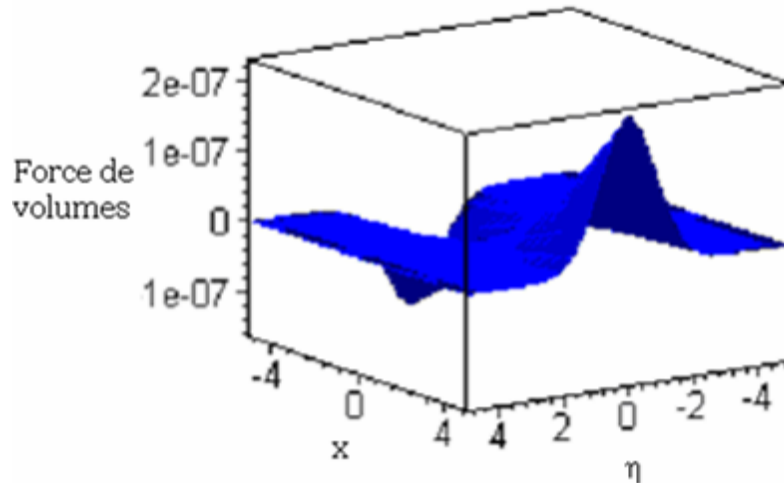


Figure.IV.1 : Représentation des forces de volume

Le calcul complet prévu par la méthode différentielle, aboutit à l'expression des forces de volume qui dépend de deux variables x et η (Figure.IV.1).

Nous distinguerons d'ailleurs deux fonctions, une qui ne dépend strictement que de la variable η , celle-ci indique une distribution de la force de volume, décrite selon une forme exponentielle continue. Quant à la seconde distribution, c'est-à-dire celle qui dépend de la variable x , nous constatons qu'elle est fonction des caractéristiques du jet, à savoir, l'épanouissement du jet et notamment la fonction de courant.

En faite, la continuité de la distribution des forces de volume du fluide qui n'est autre que l'air, vérifie effectivement la faible concentration en solide. Ainsi, l'hypothèse annoncée au paragraphe précédent, reste valide.

A priori, la distribution axiale des forces de volume est une fonction définie et continue, mais est ce suffisant pour prétendre qu'il s'agit bien d'un jet polyphasique ?

Et bien, à vrai dire, la réponse à cette question nous pousse à exprimer cette distribution en utilisant une propriété capitale du jet. Il s'agit du flux de quantité de mouvement que nous pouvons illustrer sous la forme suivante :

$$2\rho_F B(x)G(\eta) = \frac{\lambda}{\pi} (M(x))' \frac{e^{-\lambda\eta^2}}{y_{1/2}^2(x)} \quad (\text{IV.16})$$

Ce qui est important de constater, c'est que la distribution axiale des forces de volume dépend de la sensibilité du flux de quantité de mouvement et éventuellement de

l'élargissement dynamique du jet, néanmoins, l'expression (IV.16) ne nous sera d'aucun secours si le flux est uniforme, c'est-à-dire, lors d'une restriction du système physique, à ce moment là nous nous retrouvons en système monophasique caractéristique d'un jet libre, où le flux est constamment uniforme.

➤ **Fonction de courant**

La fonction de courant est définie complètement une fois que les fonctions $A(x)$ et $F(\eta)$ l'ont été. Ceci dit, voyons ce que l'expérience nous propose quant à la distribution du débit, d'après l'étude expérimentale faite par Badirou [27], la distribution du débit est fonction de la demi largeur du jet, ce qui est illustré à travers la formule (II.207). Or la demi largeur du jet est une fonction affine. Cette propriété a été vérifiée par [27] entre autres et [28] ensuite.

Il est donc légitime de remplacer l'épanouissement du jet par son expression (II.210) :

$$\ln \frac{Q(x)}{Q_0(x)} = k_0 \ln \frac{y_{1/2}(x)}{y_{1/2}(x_0)} + k_1 \int \frac{dx}{y_{1/2}(x)} \quad (\text{II.210})$$

et s'écrira alors comme :

$$\ln \frac{Q(x)}{Q_0(x)} = \ln \left(\frac{n_1 x + n_2}{y_{1/2}(x_0)} \right)^{k_0} (n_1 x + n_2)^{k_1} k_2 \quad (\text{IV.17})$$

Sachant que la fonction de courant axiale $A(x)$ est analogue à celle du débit à une constante près, d'où la fonction de courant s'écrit comme suit:

$$\frac{A(x)}{A_0(x)} = \exp \left(k_0 \ln \frac{y_{1/2}(x)}{y_{1/2}(x_0)} + k_1 \int \frac{dx}{y_{1/2}(x)} \right) \quad (\text{IV.18})$$

.On arrive enfin à l'expression de la fonction de courant :

$$\psi(x, \eta) = \frac{A_0(x)}{2\lambda} \exp \left(k_0 \ln \frac{y_{1/2}(x)}{y_{1/2}(x_0)} + k_1 \int \frac{dx}{y_{1/2}(x)} \right) (1 - e^{-\lambda \eta^2}) \quad (\text{IV.19})$$

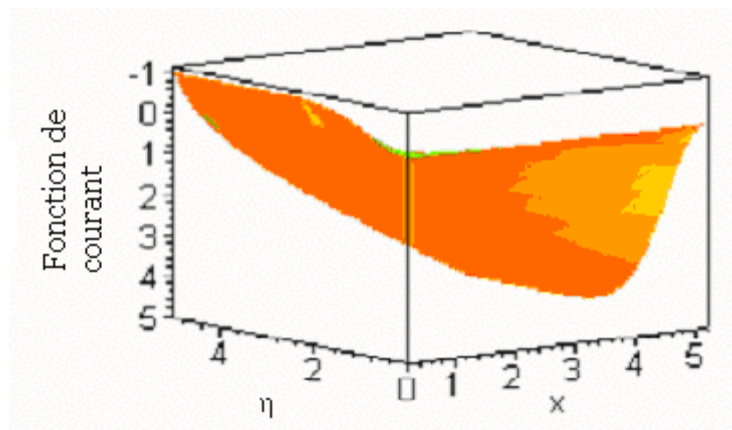


Figure IV.2 : Représentation de la fonction de courant Ψ en fonction de x et de η .

➤ **Viscosité turbulente**

Il est intéressant de rappeler l'expression de la viscosité turbulente qui tire sa forme de la modélisation faite par Reichardt :

$$v_t = E(\eta)N(x) = n_3 \frac{A(x)}{y_{1/2}(x)} \frac{1 - e^{-\lambda\eta^2}}{2\lambda\eta^2} \quad (IV.20)$$

Le succès réalisé par la théorie de Reichardt a permis d'établir le comportement du fluide moyennant sa viscosité turbulente. Cette dernière nous donne accès au tenseur de confluence qui s'écrit :

$$B_{rx} = 2\lambda\eta v_t \frac{A(x)}{y_{1/2}^3(x)} e^{-\lambda\eta^2} \quad (IV.21)$$

Où encore :

$$B_{rx} = n_3 \frac{A(x)^2}{y_{1/2}^4(x)} \frac{1 - e^{-\lambda\eta^2}}{\eta} e^{-\lambda\eta^2} \quad (IV.22)$$

Rapportons les expressions des lignes de courant ainsi que celle de la demi largeur du jet dans l'équation (IV.22) nous obtenons :

$$B_{rx} = n_3 \frac{\left(A_0(x) \exp\left(k_0 \ln \frac{y_{1/2}(x)}{y_{1/2}(x_0)} + k_1 \int \frac{dx}{y_{1/2}(x)} \right) \right)^2}{y_{1/2}^4(x)} \frac{1 - e^{-\lambda\eta^2}}{\eta} e^{-\lambda\eta^2} \quad (IV.23)$$

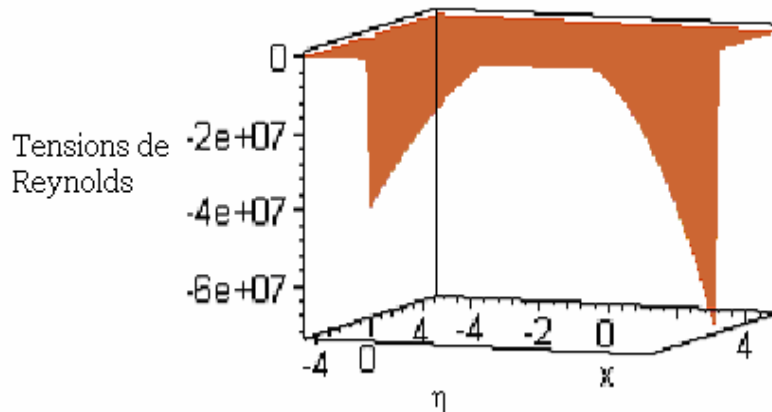


Figure IV.3 : Représentation des tensions de Reynolds

IV.2 Domaine de validité de cette étude

Afin de définir l'intervalle de validité de l'hypothèse principale établie au chapitre deux pour un jet particulaire, nous avons confronté les graphiques expérimentaux obtenus par Badirou et Labidi [27,28] pour un jet particulaire aéré et fluidisé, aux courbes d'un jet libre monophasique, et cela pour deux hauteurs de lits de particules

a) *Jet aéré*

En comparant les graphiques d'un jet aéré à ceux d'un jet libre, à travers la figure IV.4, nous constatons que les deux allures sont approximativement confondues et cela jusqu'à une distance radiale estimée à 1,1. Au delà de cette valeur, les deux courbes divergent. Nous expliquons cet écart par la présence des particules et notamment l'état aéré du lit.

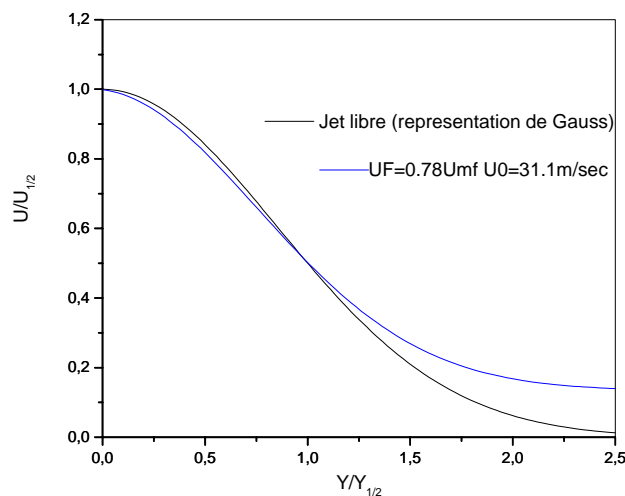


Figure IV.4 : Evolution du champ dynamique d'un jet libre et d'un jet aéré.

b). *Jet fluidisé*

Dans le même ordre d'idée, nous confrontons le champ hydrodynamique d'un jet libre avec celui d'un jet fluidisé, en mettant en évidence l'effet de trois paramètres principaux à savoir : la vitesse initiale la nature des particules et notamment, la viscosité turbulente.

1) Effet de la vitesse initiale U_0

Nous représentons sur la figure IV.5 l'évolution du champ dynamique d'un jet fluidisé en fonction de l'abscisse radiale réduite. D'après les courbes obtenues, nous constatons que l'effet de la vitesse initiale peut entraîner l'apparition d'une zone où les vitesses axiales prennent des valeurs négatives ; ceci peut être expliqué par le phénomène du courant de retour.

Au faite, le jet dans son état fluidisé parcourt une première zone caractérisée par une identification quasiment parfaite des deux champ dynamiques qui s'étale jusqu'à une distance

radiale réduite de 1,5, au-delà de cette valeur, une deuxième zone s'apprête à se définir : c'est la zone où les vitesses prennent des valeurs négatives, un phénomène de courant de retour s'installe, nous l'expliquons par l'apparition d'une force au centre du jet qui aspire le jet et le détourne d'où la naissance de ces courants de retour.

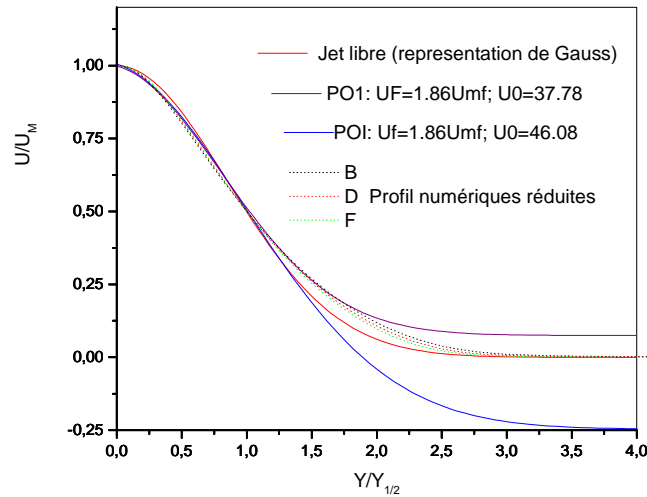


Figure IV.5: Evolution du champ hydrodynamique d'un jet fluidisé à différentes vitesses initiales.

2) Effet de la nature des particules

Afin de mettre en évidence l'effet de la nature des particules, nous avons regroupé dans la figure IV.6 les graphiques hydrodynamiques expérimentales pour deux différentes masses volumiques ainsi que celui d'un jet libre, nous constatons d'après les traces établies que la nature de particule influence le profil hydrodynamique du jet

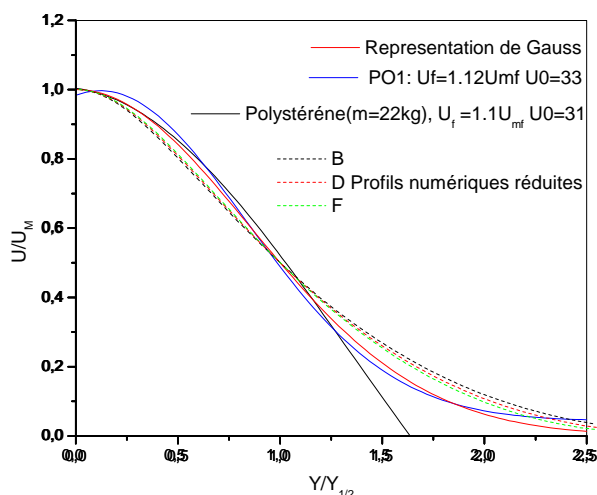


Figure IV.6: Evolution du champ hydrodynamique d'un jet particulaire (Effet de la nature des particules)

A première vue, nous constatons que jusqu'à une distance radiale estimée à 1,25 les trois courbes se ressemblent car l'erreur commise est évaluée à 1,5%. Au-delà de cette distance, l'effet de la nature des particules s'apprête à se mettre en évidence, en effet, les particules moins denses tendent à réduire la vitesse d'écoulement du fluide, quant au particules denses, elles confèrent au jet un champ hydrodynamique très proche de celui d'un jet libre.

3).Effet de la viscosité turbulente

Plusieurs situations expérimentales ont été regroupées dans la figure ci-dessous, afin d'étudier le comportement du jet particulaire, pour cela nous appliquons deux concepts de viscosité turbulente, le premier est relatif au modèle algébrique, quant au second il concerne le modèle statique en un point ($k-\varepsilon$).

Nous constatons d'après les graphiques obtenus que jusqu'à une distance radiale réduite égale à un, quelque soit les conditions opératoires lesquelles est soumis le jet particulaire, (vitesse de fluidisation, vitesse initiale et notamment nature des particules) les profils hydrodynamiques ont la même allure et se rapprochent considérablement de ceux obtenus respectivement par les modèles algébrique et statique en un point ($k-\varepsilon$).

Au-delà de cette distance, le jet fluidisé conserve son comportement. Néanmoins, une différence quantitative est chiffrée en le comparant aux deux modèles de viscosité turbulente, nous justifions cette différence par les conditions auxquelles le jet a été soumis.

A priori, nous pouvons dire que cette analyse, nous révèle que le champ hydrodynamique d'un jet fluidisé, peut être représenté par celui d'un jet libre quelque soit le concept de viscosité turbulente admis.

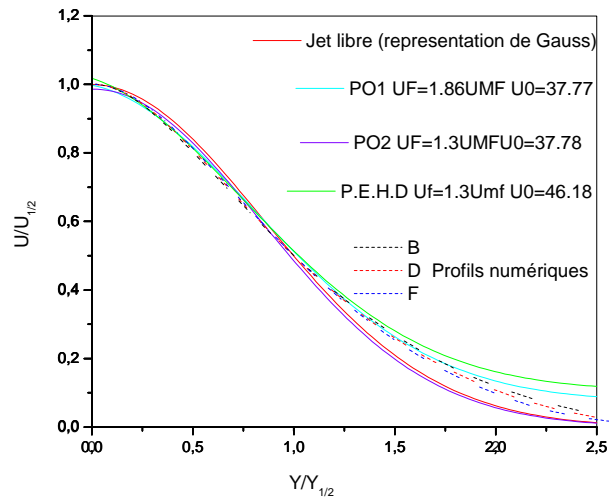


Figure IV.7: Evolution du champ hydrodynamique d'un jet fluidisé

TableauIV1 : Différent paramètres physique qui influence le jet particulaire :

L'état du lit	Jet aéré	Jet fluidisé		
		Vitesse initiale	Nature des particules	Viscosité turbulente
Comparaison des profils hydrodynamiques à ceux d'un jet libre	les profils de vitesse tendent à diverger	Un phénomène de courant de retour	La nature et la masse volumique des particules influencent le comportement du jet.	Les concepts de viscosité turbulente appliqués à un jet libre représentent authentiquement un jet fluidisé
Conclusion	Nous ne pouvons désormais conclure d'une façon précise et juste quant à l'évolution du champ hydrodynamique d'un jet particulaire, car son comportement dépend intimement de différents paramètres à savoir : l'état du lit, la vitesse d'injection et la composition de la phase dispersée ; néanmoins nous pouvons dire que dans des conditions bien déterminées, le jet fluidisé est presque homologué à un jet monophasique			

IV.3.Choix des paramètres numériques

Afin de saisir toute l'étendue du jet, nous avons choisi un domaine de calcul rectangulaire, où, l'injecteur occupe le centre.

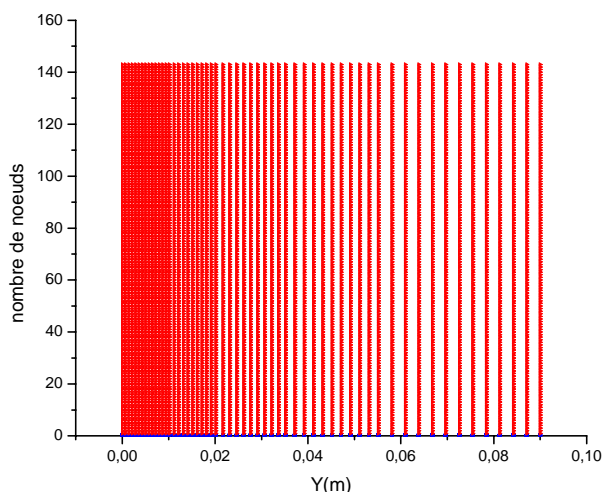


Figure IV.8 : Maillage utilisé

Le calcul est mené avec un maillage structuré, évolutif et raffiné près de l'injecteur. Néanmoins, le nombre de nœuds suivant la direction axiale est de 144 répartis sur une longueur totale égale à vingt fois le diamètre de la buse, quant à la direction radiale, elle est constituée de trois zones dont la longueur totale est estimée à 90mm, sur celle-ci, nous disposons 58 nœuds avec un pas progressif allant d'une valeur estimée à 0,725 mm au niveau de la première zone jusqu'à aboutir à une valeur de 2,9 mm au niveau de la troisième zone (figure IV.8).

Notons que les vitesses initiales sont celles relevées des travaux expérimentaux de Badirou et Labidi [27,28].

Quant aux propriétés turbulentes de l'écoulement, n'ayant aucun moyen expérimental à notre disposition pour le choix du profil initial de l'énergie cinétique turbulente, et notamment celui du taux de dissipation, nous nous sommes rapportés à la littérature qui prévoit un profil initial de l'énergie cinétique turbulente proportionnel au carré de la vitesse axiale, avec une constante de proportionnalité variant entre 0,001 et 0,01. La simulation numérique entreprise pour différentes valeurs de cette constante donne pratiquement les mêmes résultats, alors que la valeur du coefficient de proportionnalité du taux de dissipation a pour valeur égale à 1 [39],

La convergence de la solution globale est considérée atteinte lorsque l'erreur maximale des grandeurs, à savoir, les composantes des vitesses, le taux de dissipation et enfin l'énergie turbulente, est de l'ordre de 10^{-3}

IV.4.Vérification de l'hypothèse d'un jet libre axisymétrique

Tout d'abord nous effectuons une analyse préliminaire qui a pour but de valider l'hypothèse du problème du jet axisymétrique caractérisé par sa diffusion axiale et doté d'un double symétrie à savoir, la symétrie axiale et notamment la symétrie de révolution.

IV.4.1.Diffusion axiale

Généralement, les écoulements libres tels que les jets axisymétriques, sont régis par des équations elliptiques, ce qui explique la forme gaussienne caractérisant leurs profils

dynamiques. Cependant, une direction privilégiée à travers laquelle le jet préfère se répandre nous révèle l'aspect de diffusion qui prime sur les autres phénomènes, le graphique IV.9 interprète l'évolution axiale de la vitesse dans deux situations différentes, l'une prend en compte le terme de diffusion dans les équations du jet, l'autre, au contraire, n'en tient pas compte. La comparaison entre ces deux cas de figure révèle un très faible écart, estimé à 5%.

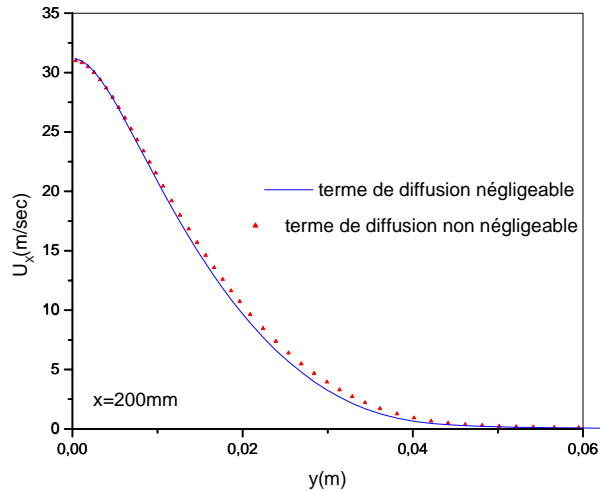


Figure IV.9: Comparaison entre les vitesses axiales obtenues en tenant compte du terme de diffusion dans les équations et celles obtenues en le négligeant.

IV.5.Zone de cône potentiel

Le cône potentiel est la première zone définie dans l'étendue physique du jet, elle est délimitée par une zone de mélange et s'étale jusqu'à une distance estimée à trois fois le diamètre de la buse. D'après la figure IV.10, nous constatons la quasi uniformité du champ des vitesses axiales le long de la distance transversale et en particulier au niveau de la région centrale où la vitesse se rapproche sensiblement de la vitesse d'injection.

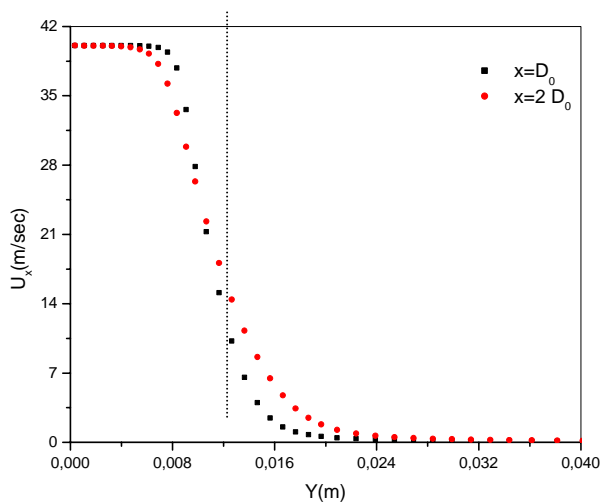


Figure IV.10: Schématisation des profils de vitesse axiale au niveau de la zone du cône potentiel

IV.6.Zone principale

Portons à présent notre attention sur la zone établie, dite également zone auto similaire, et ce afin d'examiner la validité du modèle de turbulence k- ϵ , en confrontant les résultats qui découlent du code du calcul numérique aux données expérimentales.

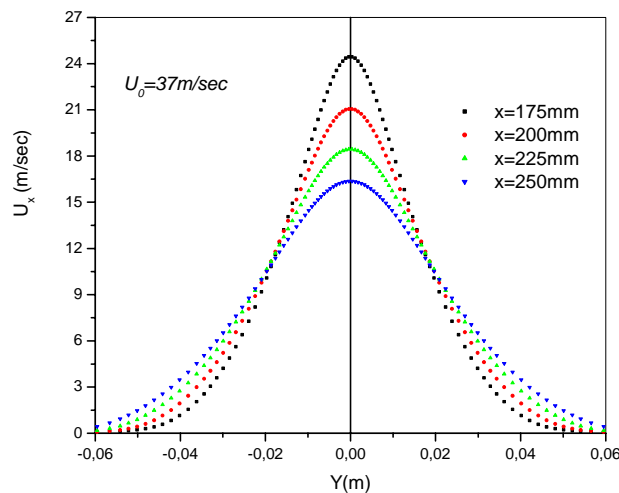
Dans ce qui suit, nous présentons l'analyse des fonctions intrinsèques du jet, et en particulier, les paramètres caractérisant l'hydrodynamique d'un jet axisymétrique, à savoir :

- ❖ Les profils de vitesse,
- ❖ Les vitesses maximales sur l'axe de jet,
- ❖ L'élargissement dynamique du jet,
- ❖ Le débit volumique et le flux de quantité de mouvement.

IV.6.1.Profils des vitesses

A une distance voisine de six fois le diamètre de l'injecteur, une région principale peut clairement être mise en évidence. En effet, une affinité des vitesses est observée d'une section droite horizontale à une autre.

Nous représentons sur les figures (IV.11 a, b et c) les profils de vitesse axiale pour différentes vitesses d'injection en fonction de la distance radiale sur des plans parallèles distants de 25 mm. D'après les allures tracées, nous constatons une allure univoque sous forme d'une cloche où le sommet se situe sur l'axe de jet; la surface occupée par celui-ci augmente au fur et à mesure que nous éloignons de l'injecteur traduisant l'évasement du jet.



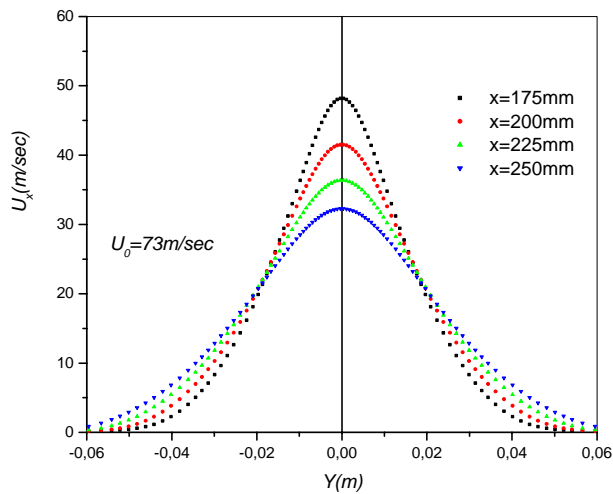
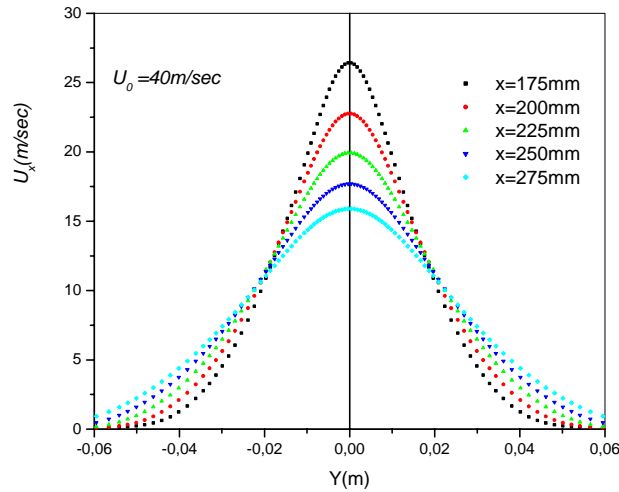


Figure (IV.11 a, b et c) : Profils de vitesse axiale pour différentes vitesses initiales.

Signalons que les résultats expérimentaux semblent en accord avec ceux acquis numériquement, en effet, les figures (IV.12a, b et c) illustrent un écart relativement faible pour les vitesses au dessus de 8 m/s. Celui-ci est estimé à 7,5% et s'élève jusqu'à 14% pour les faibles vitesses.

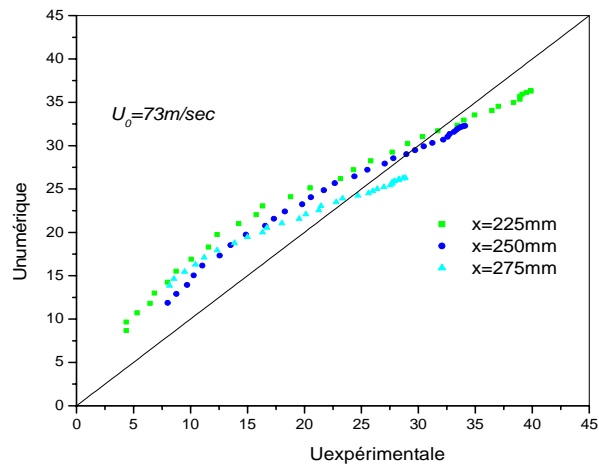
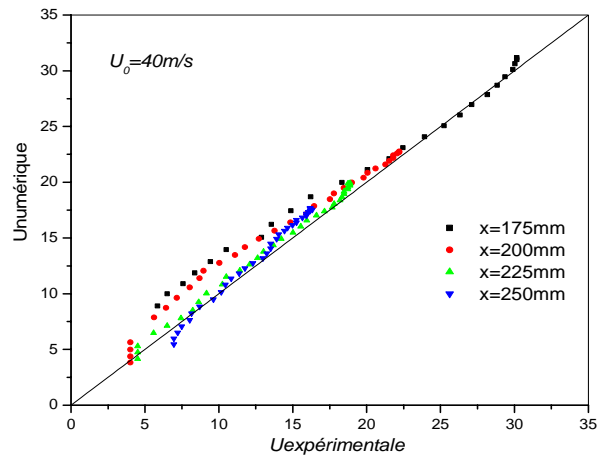
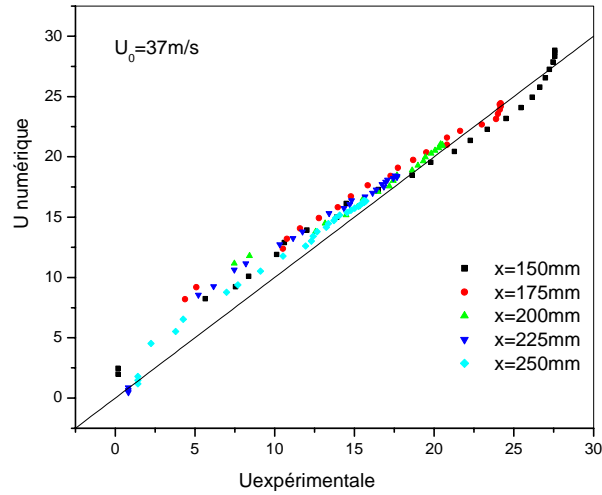


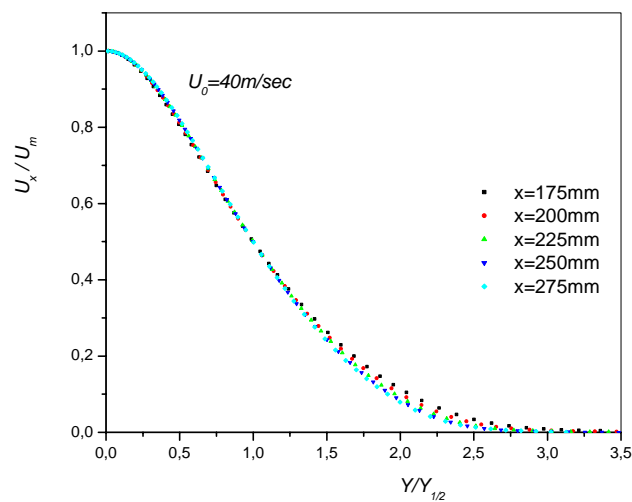
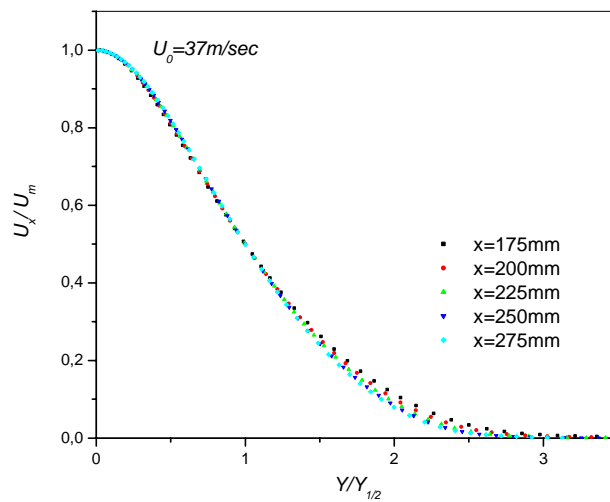
Figure (IV.12 a, b et c) : Comparaisons entre les profils expérimentaux et numériques de vitesses pour différents plans

Cet accroissement de l'écart serait dû aux erreurs expérimentales commises lors des mesures qui ont été effectuées par la sonde de Pitot. [27,28]. En effet, ce dernier n'est pas sensible aux faibles vitesses et ne peut les détecter.

➤ **Similitude des profils des vitesses**

Afin de vérifier la propriété fondamentale de l'auto similitude des profils de vitesse ; nous avons normalisé la vitesse axiale de chaque plan transversal par la vitesse maximale. Quant à la direction transversale, elle a été normalisée par rapport à l'abscisse caractéristique correspondante.

D'après les figures (IV.13a, b et c) nous constatons que l'évolution de ce paramètre demeure l'une des caractéristiques déterminante dans l'étude d'un jet, en outre, ces figures présentent une courbe gaussienne unique quelque soit la vitesse initiale du jet



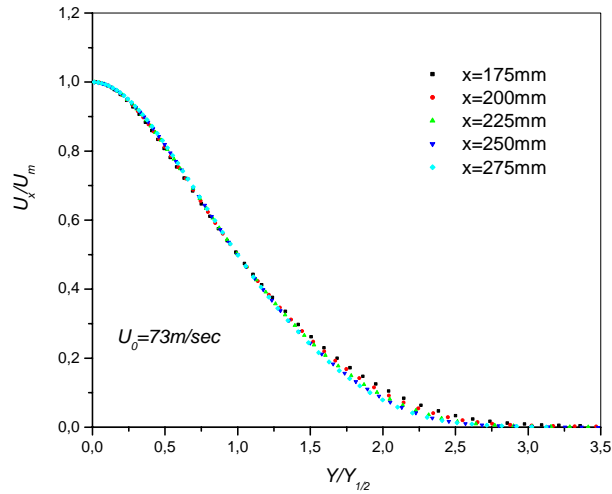
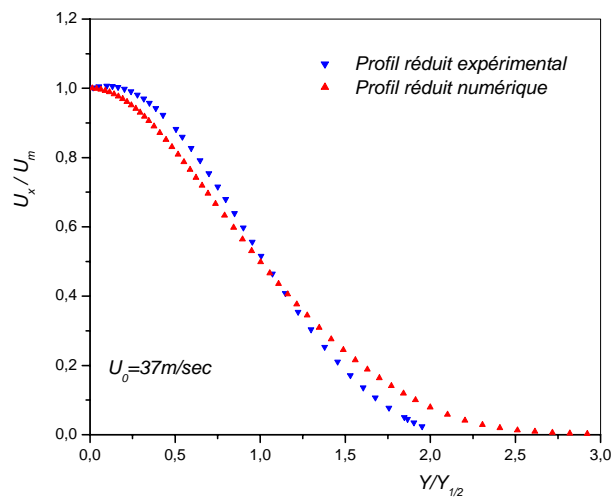


Figure (IV13a, b et c) : Similitude des profils de vitesse axiale dans la région principale du jet

Les courbes (IV.14a, b et c) représentent une comparaison entre un profil réduit expérimental avec son similaire numérique, pour trois vitesses d'injection $U_0=37 \text{ m/s}$, $U_0=40 \text{ m/s}$ et $U_0=73 \text{ m/s}$. Nous constatons que l'écart ne dépasse pas les 10. % ce qui valide en fait notre code de calcul.



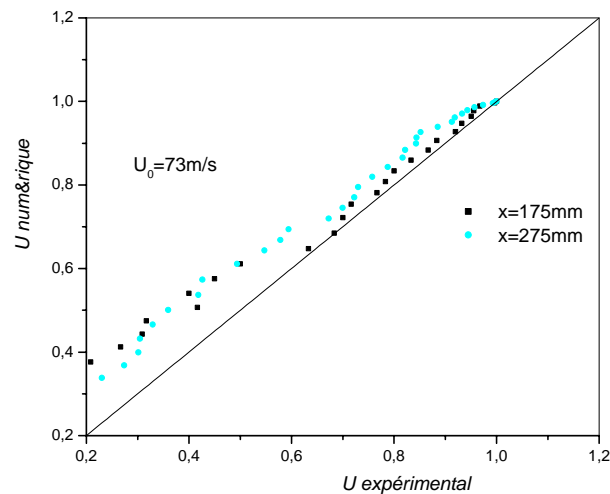
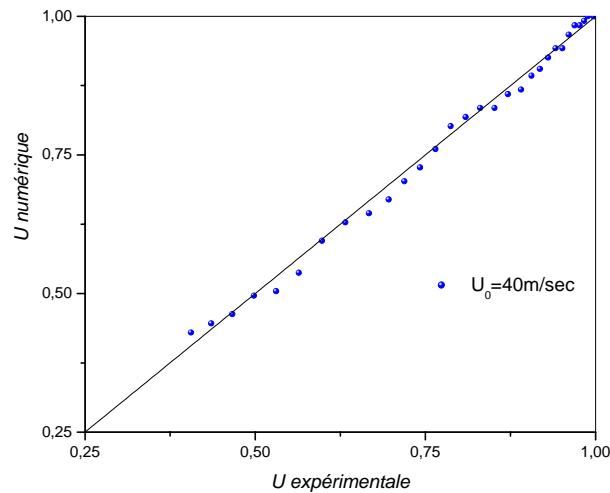


Figure (IV.14 a, b) : Comparaison entre les profils réduits expérimentaux et numériques pour différentes vitesses d'injection

➤ **Comparaison du modèle algébrique au modèle statique en un point**

Les différents formalismes de viscosité turbulente qui découlent des modèles algébriques préconçus, nous révèlent une bonne description du champ dynamique du jet ; en effet nous constatons un bon accord entre les modèles étudiés et présentés dans le chapitre II (Schlichting, Reichardt et Prandtl–Taylor) avec les données expérimentales. Dans ce même contexte, nous avons confronté les profils dynamiques établis numériquement à ceux donnés théoriquement par lesdits chercheurs.

A. Modèle de Schlichting

Abramovich exprime le profil des vitesses réduites par l'équation de Schlichting, la courbe indiquée par la figure IV.15 est une gaussienne dont le sommet coïncide avec l'axe de symétrie. Au fur et à mesure que nous nous écartons de l'enveloppe du jet dans le sens radial,

le profil s'affaiblit pour atteindre une vitesse nulle au bout d'une distance radiale réduite équivalente à 2,5. Il est à noter d'après cette même figure la bonne concordance entre le profil numérique avec celui de Schlichting car l'écart entre les deux est estimé à 4.5%.

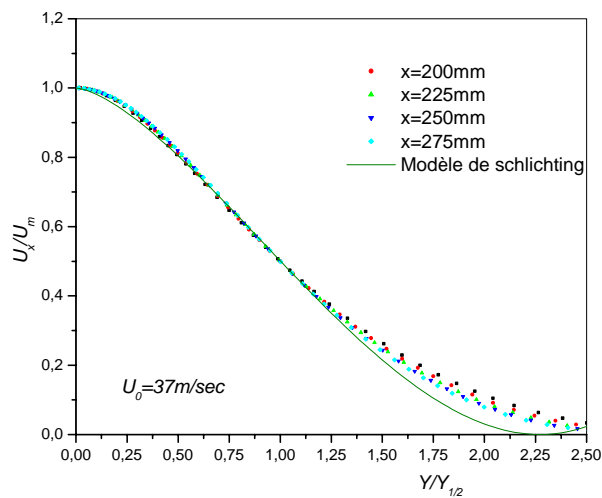


Figure IV.15 : Comparaison des profils réduits numériques avec le modèle de Schlichting.

B. Modèle de Reichardt

De son côté, Reichardt a conçu sa théorie qui consistait à trouver un formalisme de viscosité turbulente, le champ dynamique qui ressort de cette étude représente une bonne description d'un jet libre car l'écart évalué par rapport aux données expérimentales est très faible. Dans le même ordre d'idée, nous avons pensé à comparer les deux concepts de viscosité turbulente, il s'agit donc du modèle de Reichardt à celui de modèle k- ϵ et ceci à travers leurs champs dynamiques; cependant, les courbes décrites par la figure IV.16 ont une allure similaire à celles données par la figure IV.15, néanmoins, nous notons la bonne concordance des deux concepts de viscosité turbulente, approches dues respectivement à Gauss et à k- ϵ .

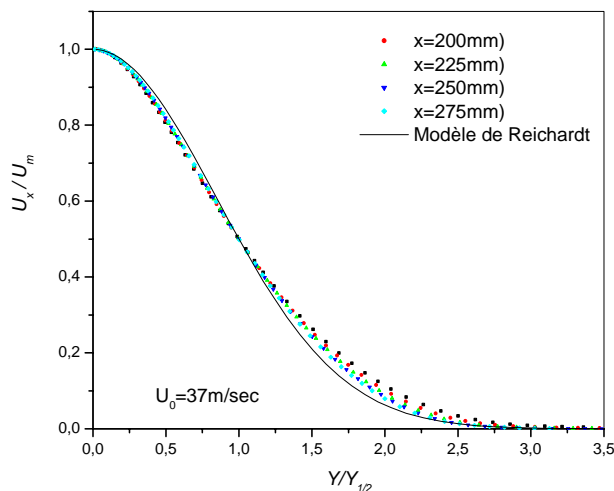


Figure IV.16 : Comparaison des profils réduits numériques avec le modèle de Reichardt

C. Modèle de Prandtl–Taylor

Dans le même ordre d’idée, Goertler a solutionné le problème du jet turbulent en partant de la théorie de Prandtl–Taylor. Ainsi, il a obtenu une expression analytique simple qui répond bien aux données numériques ce qui est traduit par la courbe IV.17.

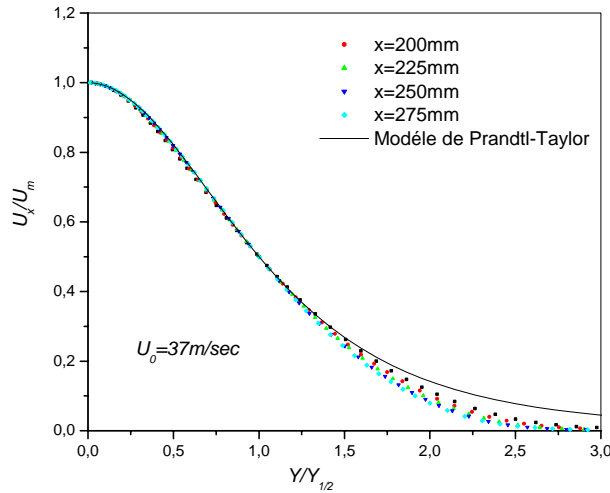


Figure IV.17 : Comparaison des profils réduits numériques avec le modèle Prandtl–Taylor.

IV.6.2.Vitesse maximale

Dans le but d’examiner l’effet de la vitesse initiale U_0 sur l’étendue du jet, nous avons tracé les graphiques de la vitesse maximale en fonction de la distance axiale pour trois différentes vitesses d’injection. Nous constatons d’après la figure IV.18, que les allures sont régressives et sont caractérisées par une longueur assez prononcée pour une vitesse initiale importante qui se réduit en revanche pour une faible vitesse initiale. De ce fait, nous déduisons que l’étendue du jet est contrôlée essentiellement par les conditions d’émission du jet.

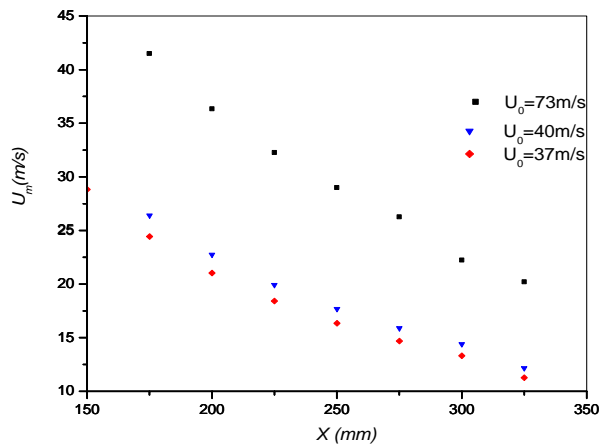


Figure IV.18 : Evolution axiale des vitesses maximales pour différentes vitesses initiales.

Afin d'établir une loi qui régit le comportement de la vitesse maximale en fonction de la direction axiale; il est intéressant de représenter l'évolution adimensionnelle de la vitesse maximale en fonction de la côte réduite. La figure IV.19 nous permet de dégager l'aspect caractéristique de la zone établie car une tendance linéaire unique indépendamment de la vitesse initiale est observée au-delà du plan $x = 175\text{mm}$.

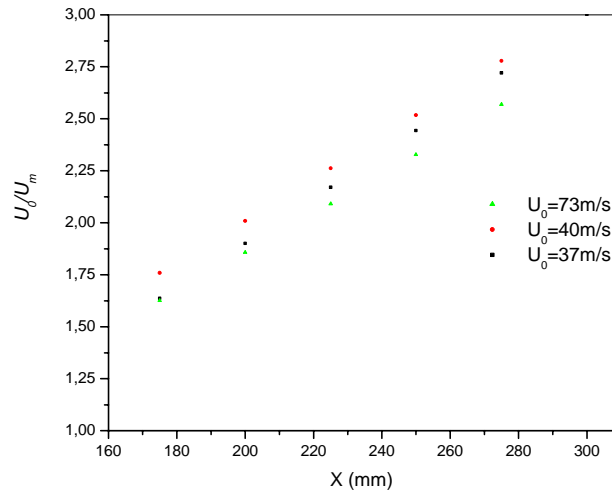
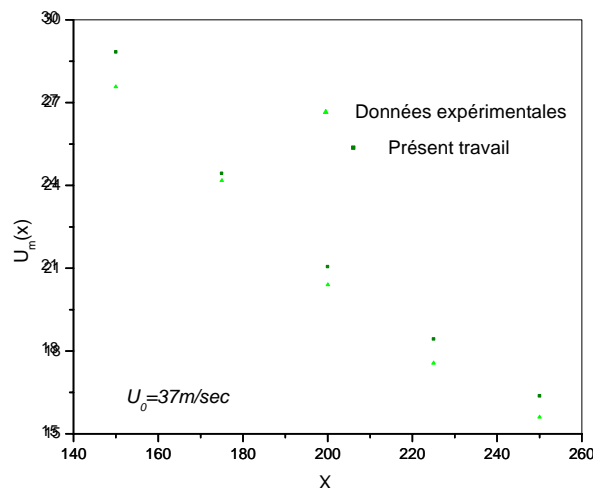


Figure IV.19 : Evolution de l'inverse de la vitesse maximale réduite en fonction de la direction axiale pour différentes vitesses initiales.

Par ailleurs, sur la courbe IV.20 nous présentons les graphiques obtenus pour trois vitesses initiales où nous mettons en évidence l'harmonie entre les approches numérique et expérimentale pour l'évolution de U_m en fonction de la côte x . En effet, l'écart estimé ne dépasse pas les 11,5% pour chaque tracé.



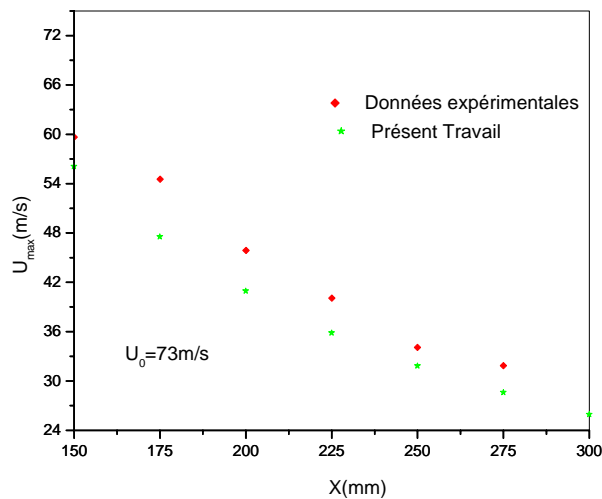
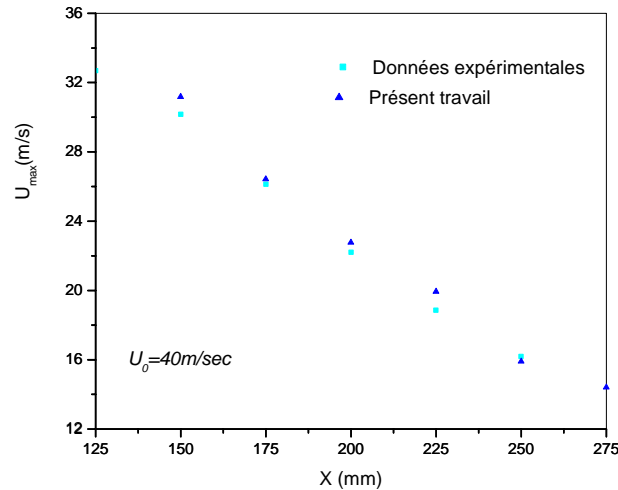


Figure (IV.20a, b et c) : Estimation de l'écart de la vitesse maximale

IV.6.3.Élargissement dynamique

L'élargissement dynamique du jet est considéré parmi l'une de ces propriétés spécifiques. Il est également doté de plusieurs dénominations à savoir : épaisseur de diffusion transversale, demi largeur du jet, épanouissement du jet, élargissement dynamique et éventuellement la plus connue, abscisse caractéristique. Il nous renseigne en réalité sur l'évasement de l'enveloppe du jet défini par une abscisse dont l'ordonnée correspond à la moitié de la vitesse maximale.

Ce paramètre est calculé de deux méthodes, la première, qui est simple et directe, consiste à tracer le champ dynamique et relever par la suite les abscisses correspondantes aux moitiés des vitesses maximales, d'ailleurs c'est ce que nous représentons dans les graphiques ci-joint. La deuxième méthode est issue de l'approche de Reichardt, elle consiste à linéariser l'équation de Gauss, ce qui permet d'identifier deux paramètres à savoir : la demi largeur du jet qui correspond à la pente et l'ordonnée à l'origine qui définit la vitesse maximale. La

figure IV.21 donne l'évolution de l'abscisse caractéristique en fonction de la distance axiale pour trois vitesses initiales différentes. Nous constatons une tendance linéaire au niveau de la zone établie.

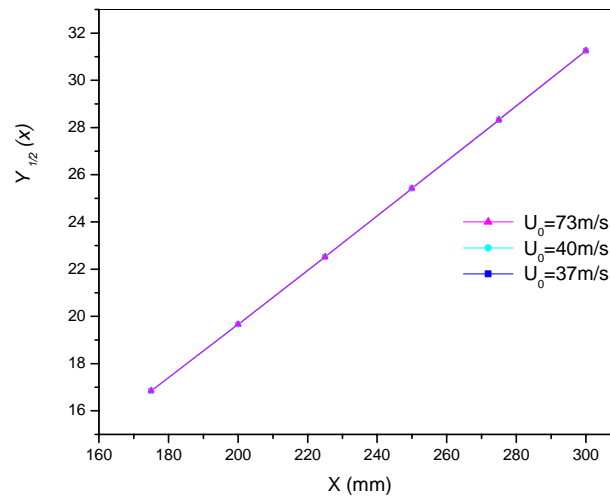


Figure IV.21 : Evolution axiale de la demi largeur du jet pour différentes vitesses d'injection.

Notons que nous pouvons aussi définir le jet par un paramètre subordonné, il s'agit de la sensibilité de l'abscisse caractéristique appelé demi angle du jet, ou encore taux d'élargissement de l'enveloppe du jet, celle-ci est conditionnée par l'intensité de turbulence initiale. En effet, un taux de turbulence initiale à la sortie de la buse entraîne une obtention rapide de la similitude. D'après la littérature [25], sa valeur est estimée à 15°.

Nous avons analysé la validité du code en comparant ses résultats, avec ceux donnés expérimentalement par la littérature [27, 28] ; la représentation graphique indique un assez bon accord entre les deux représentations

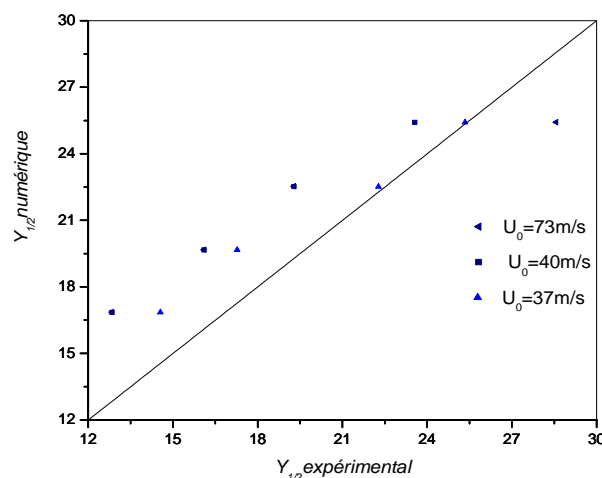


Figure IV.22 : Estimation de l'écart de demi largeur du jet pour trois vitesses initiales

IV.6.4. Variation du débit volumique du jet

Le calcul numérique permet de s'affranchir des problèmes rencontrés lors des essais, puisque toutes les valeurs des vitesses sont affichées quelque soit leur petitesse, contrairement à l'expérience où ces dernières sont inaccessibles à la mesure et sont négligées très souvent à cause de la carence des appareils utilisés. En plus des calculs numériques, les expressions théoriques permettent dans la mesure du possible de compléter les résultats expérimentaux.

En effet, nous avons confronté nos résultats avec ceux proposés par Badirou [27] et Labidi [28] qui ont eu recours à l'expression de Gauss lors du calcul du débit volumique pour les faibles vitesses. Les figures IV.23 illustrent le bon accord entre les deux démarches, étant donnée que l'erreur commise pour les vitesses initiales ne dépasse guère 13%.

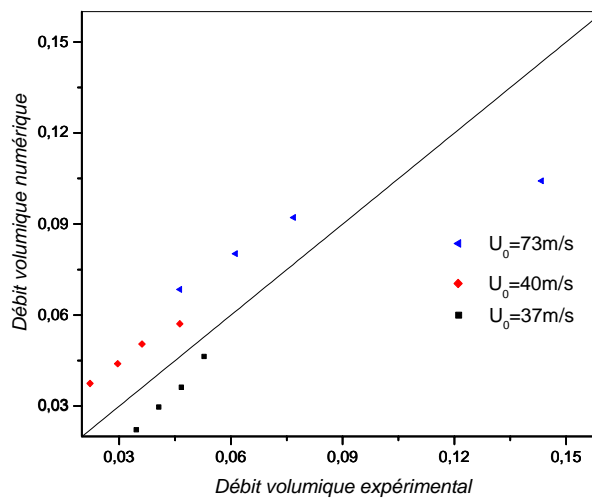


Figure IV.22 : Comparaison entre les Débits numérique et expérimentaux pour trois vitesses initiales données.

Par ailleurs, l'expérience montre que dans la zone établie, la description du débit volumique en fonction de la distance axiale est linéaire croissante, ce qui a été vérifiée également numériquement (Figure IV.24). En effet, au fur et à mesure que nous nous éloignons de l'enveloppe de jet, le débit augmente. Ce comportement résulte de l'entraînement du jet dans son mouvement de l'air périphérique rencontré.

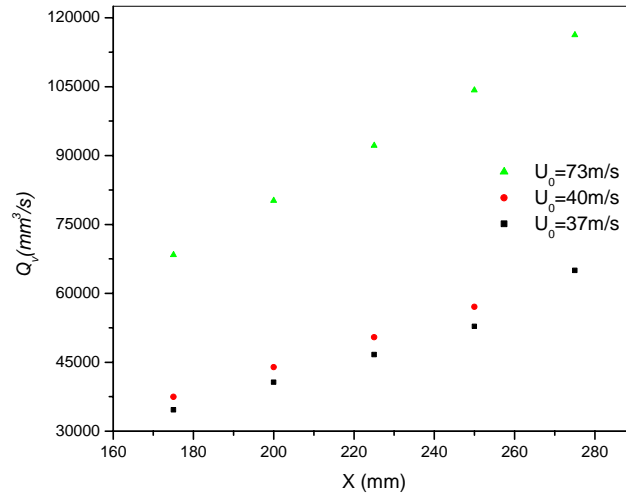


Figure IV.24 : Evolution axiale de débit numérique pour différentes vitesses initiales

En vertu de l'expression du débit, nous définissons le rapport caractéristique de l'entraînement de flux de débit [53], donné par la relation ci-dessous :

$$\alpha' = \int 2 \left(\frac{u}{u_m} \right) \left(\frac{y}{y_{1/2}} \right) d \left(\frac{y}{y_{1/2}} \right) \quad (\text{IV.24})$$

L'expression de débit s'écrit alors :

$$Q = \pi \alpha' U_m(x) y_{1/2}^2(x) \quad (\text{IV.25})$$

Ce rapport d'entraînement a été évalué pour différentes approches. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-joint :

Tableau IV.2 : Estimation du taux d'entraînement du débit par différentes approches

Rapport d'entraînement de débit	Expérimental			Calcul numérique			Gauss	Groetler
	U ₀ =37	U ₀ =40	U ₀ =73	U ₀ =37	U ₀ =40	U ₀ =73		
α'	1,66	1,65	1,62	1,46	1,67	1,66	1,44	2,41
α'_{moyen}	1,64			1,59				

Ce calcul donne une idée sur l'écart entre le débit volumique obtenu par le calcul numérique et celui issu des approches Reichardt et Prandtl-Taylor. Nous avons par ailleurs évalué ce dernier pour les deux cas, celui-ci a pour valeurs respectives 4% et 10% environ d'après la figure IV.25. Nous justifions la surestimation de cet écart dans le cas de Prandtl Taylor par le taux d'entraînement du débit qui vaut environ deux fois celui dû au calcul numérique.

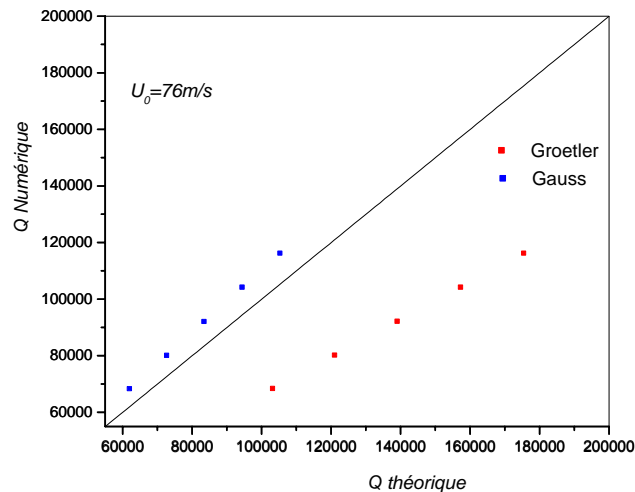


Figure IV.25 : Comparaison entre les Débits volumiques numérique et théoriques pour une vitesse initiale donnée

IV.6.5. Variation de flux de quantité de mouvement

Les constatations expérimentales établies auparavant par Ricou, Spalding et Albertson montrent que le débit de quantité de mouvement se conserve en écoulement monophasique dans chaque plan de la zone d'équilibre ; malheureusement ce constat n'a pas été vérifié par Badirou et Labidi [27, 28] ils expliquent cette divergence par le fait que leurs jet soumis à l'étude expérimentale n'est pas tout à fait pur, en effet, ce dernier contenait probablement des particules en suspension.

Indiquons que dans notre cas nous avons calculé le flux de quantité de mouvement par intégration des profils des vitesses, ensuite, nous avons représenté dans la figure IV.26 la variation axiale du paramètre en question pour différentes vitesses initiales. Ainsi, nous vérifions effectivement les résultats authentiques de Ricou, Spalding et Albertson.

En effet, nous justifions l'uniformité de ce paramètre par une conservation du flux de quantité de mouvement sur toute l'étendue de jet qui est expliqué par l'absence des frottements.

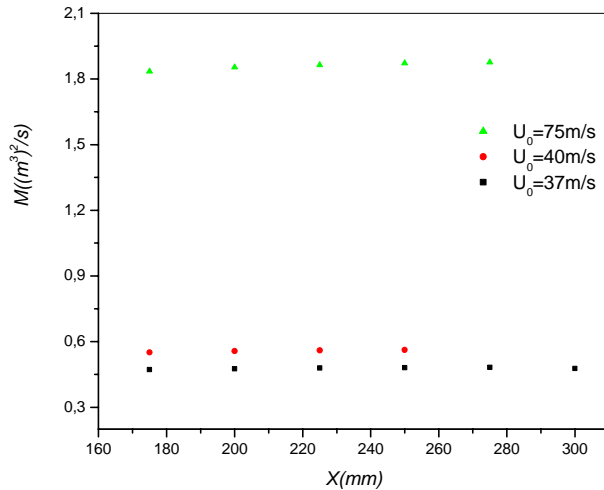


Figure IV.26 : Evolution du flux numérique pour différentes vitesses initiales

Selon l'usage, nous confrontons dans un premier temps les courbes issues du calcul numérique à celles données par l'expérience, la figure IV.27 montre un écart qui dépasse 13%

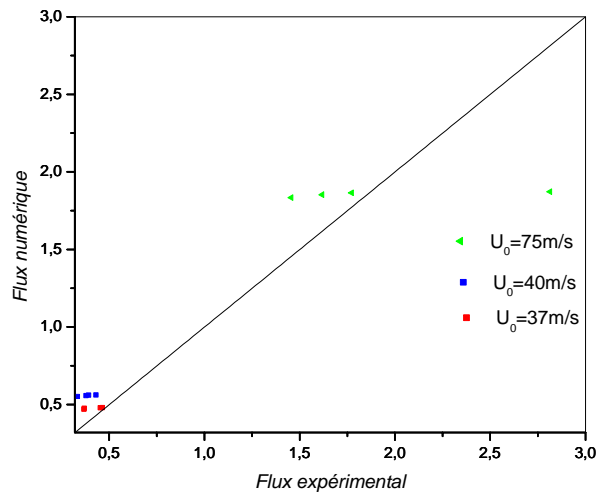


Figure IV.27 : Comparaison entre les Flux numérique et expérimental

Tout comme le taux entraînement du débit du jet α' , nous définissons le taux d'entraînement du flux de quantité de mouvement noté β par l'expression :

$$\beta = \int 2 \left(\frac{u}{u_m} \right)^2 \left(\frac{y}{y_{1/2}} \right) d \left(\frac{y}{y_{1/2}} \right) \quad (\text{IV.26})$$

Le flux de quantité de mouvement s'écrit alors en fonction du taux d'entraînement comme :

$$M(x) = \pi \rho \beta U_m^2(x) y_{1/2}^2 \quad (\text{IV.27})$$

Dans le même ordre d'idée, nous avons regroupé dans le tableau IV.3 les valeurs de ce rapport qui ressortent de l'application des différentes approches

Tableau IV.3 : Estimation du taux d'entraînement du flux par différentes approches

Rapport d'entraînement de quantité de mouvement	Expérimental			Numérique			Gauss	Goertler
	$U_0=37$	$U_0=40$	$U_0=73$	$U_0=37$	$U_0=40$	$U_0=73$		
β	0,75	0,81	0,86	0,75	0,75	0,75	0,72	0,80
β_{moyen}	0,80			0,75			0,72	0,80

A présent, établissons les graphiques comparatifs théoriques et numériques du flux de quantité de mouvement. La figure IV.28 montre que le calcul dû à l'approche de Reichardt (Gaus) et notamment celle de Prandtl Taylor (Goertler) donne pratiquement le même écart par rapport aux courbes numériques. Sa valeur est estimée à 5%, ceci est due aux taux d'entraînement théoriques qui sont voisins de leurs similaires numériques.

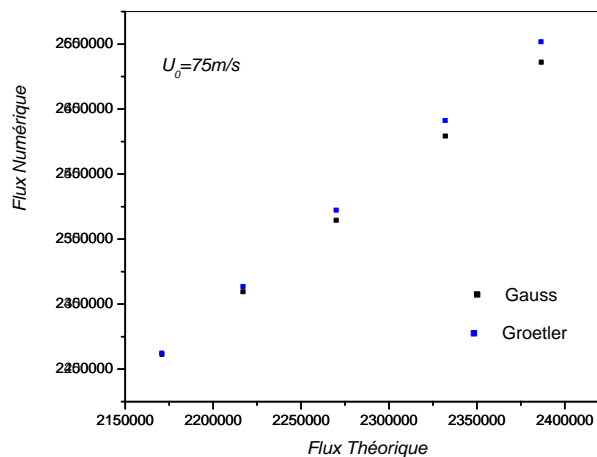


Figure IV.28 : Comparaison entre les Flux numérique et théoriques.

IV.7. Aspect physique d'un jet rond turbulent

D'un point de vu physique, il a été constaté qu'un mécanisme d'interaction entre le mouvement moyen et le mouvement fluctuant, il s'avère que celui-ci est très complexe mais fondamentale pour la définition et la compréhension de la turbulence, l'ordre de cette complexité, nous incite à procéder graduellement à la détermination de toute les propriétés énergétique, à savoir l'énergie cinétique turbulent, le taux de dissipation et notamment les tensions de Reynolds.

IV.7.1. Energie cinétique turbulente

La figure VI.29 représente la distribution radiale de l'énergie cinétique turbulente pour les deux plans axiaux, cette dernière nous révèle une augmentation de l'intensité du pic de la courbe lors de passage à un plan axial supérieur. Notons par ailleurs que cette augmentation est accompagnée par un élargissement de la zone à forte énergie cinétique.

Néanmoins, dans ce graphique, nous mettons en évidence deux zones distinctes, dans la première, le terme de génération l'emporte sur les deux autres termes ce qui entraîne une augmentation de l'énergie cinétique turbulente. Dans la deuxième zone les termes de diffusion et de dissipation l'emportent sur le terme de génération d'où une baisse de l'énergie cinétique turbulente.

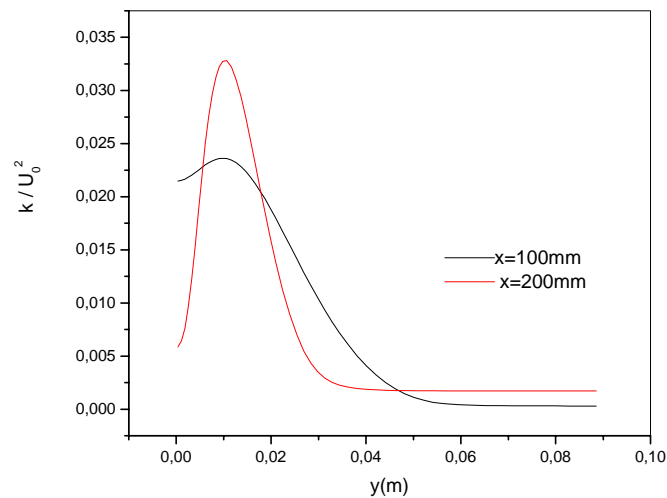


Figure VI.29 : Evolution de l'énergie cinétique turbulente en fonction de la distance radiale pour une vitesse initiale donnée .

IV.7.2. Taux de dissipation

Dans la figure IV.30 nous représentons l'évolution de taux de dissipation en fonction de la distance axiale pour trois plans radiaux, dans l'ensemble, nous remarquons que les courbes obtenues représentent trois zones différentes, la première décrit le terme de diffusion du jet celui-ci s'étale jusqu'à une distance égale à cinq fois le diamètre de l'injecteur, en juxtaposition de cette zone nous mettons en évidence une seconde zone décrite par le terme puis car l'allure de la courbe donne un forme régressive . Ce n'est qu'à partir une distance axial 12 fois le diamètre de l'injecteur où nous quantifions le terme source qui décrit un pic important pour un plan radial égale à 0,75 le diamètre de la buse.

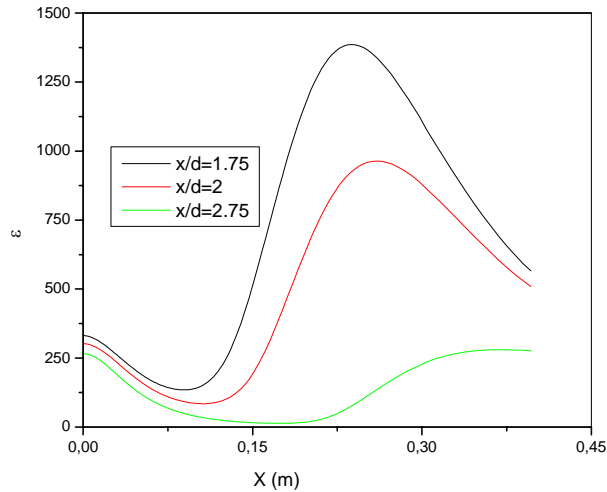


Figure IV.30 : Evolution de taux de dissipation en fonction de la direction axiale pour trois plans radiaux

IV.7.3. Viscosité turbulente

Dans la courbe ci-dessous nous représentons la viscosité turbulente en fonction de la direction radiale, pour deux plans axiaux, constatons dans l'ensemble que son évolution a presque le même aspect que l'énergie cinétique turbulente, en effet nous définissons une première zone où la dissipation l'emporte sur l'énergie cinétique turbulente, celle-ci n'est mise en évidence qu'à partir d'une distance radiale égale au rayon de la buse, ainsi, au-delà d'une distance radiale égale à trois fois le diamètre de la buse, la viscosité turbulente retrouve sa première allure où l'aspect de dissipation réapparaît à nouveau. Il semble clair que la viscosité turbulente dépend essentiellement de deux propriétés énergétiques, il s'agit donc de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation. En conclusion nous pouvons dire que la viscosité turbulente n'est pas une propriété intrinsèque du fluide.

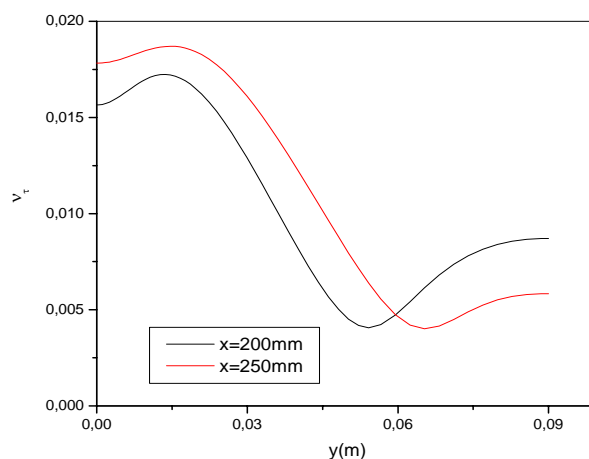


Figure IV.31 : Evolution de la viscosité turbulente en fonction de la direction radiale pour une vitesse d'injection donnée

Quant à la représentation de ce paramètre, en fonction de la direction axiale, pour deux plans radiaux, révèle que la viscosité turbulente est maximale au centre de l'injecteur, au fur et à mesure nous éloignons de l'axe de symétrie vers la zone établie, nous constatons une modération considérable de ce paramètre, se qui est traduit par une courbe uniforme de la viscosité.

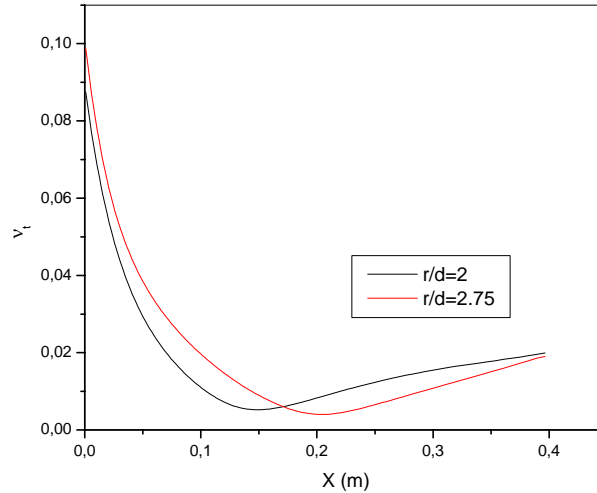


Figure IV.32 : Evolution de la viscosité turbulente en fonction de la direction axiale pour une vitesse d'injection donnée

IV.7.4. Tensions de Reynolds

Le premier résultats à noter est que les profils obtenus sont similaires à ceux donnés dans la littérature. Néanmoins, les évolutions radiales des écarts types u'^2 et $u'v'$ sont représentés sur les figures IV.32 et IV.33, nous remarquons que lorsque nous éloignons de la sortie de l'injecteur les profils se développent ce qui signifie que le champ de turbulence s'amplifie. Notons tout de même que ces profils sont semblables à ceux tracés pour l'énergie cinétique turbulente. Ainsi le champ turbulent se développe d'autant plus rapidement que l'énergie cinétique turbulente augmente.

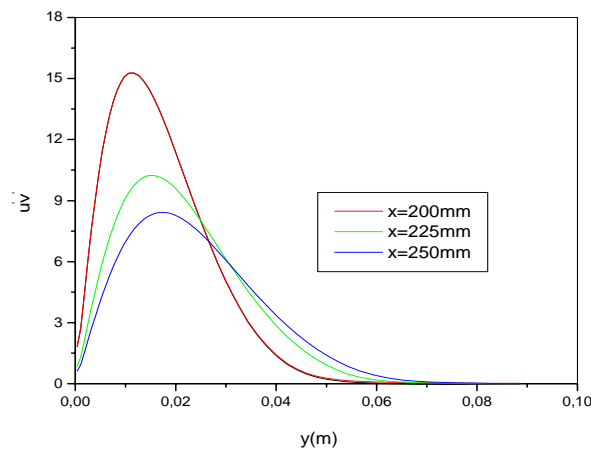


Figure IV.33 : Evolution radiale des tensions de Reynolds au niveau de la zone établie

La distribution des tensions de Reynolds reflète la densité du champ turbulent au sein de l'enveloppe du jet, cet écart type est exprimé par une forme gaussienne, qui commence son évolution à partir des faibles valeurs, jusqu'à atteindre le maximum au centre de l'injecteur ce maximum est observé au même abscisse quelque soit la distance axiale prise au niveau de la zone établie ; ceci est justifiée par une production intense d'énergie cinétique turbulente. Signalons que pour des valeurs supérieures au diamètre de l'injecteur ses tendances s'affaiblissent

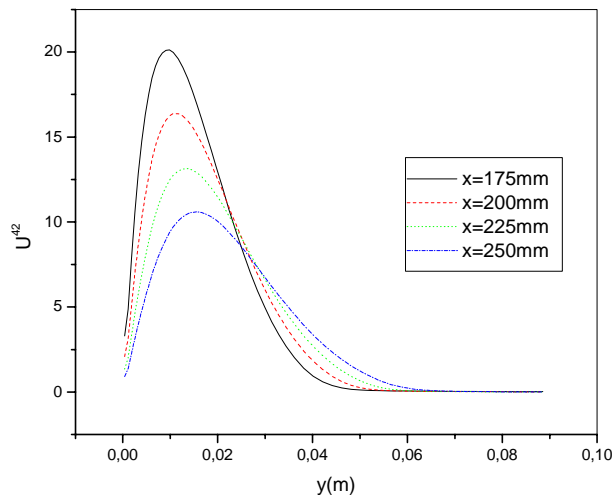


Figure IV.34 : Evolution axiale des tensions de Reynolds au niveau de la zone établie

IV.8.Conclusion

La méthode numérique que nous avons utilisée pour résoudre le problème d'un jet libre turbulent axisymétrique est la méthode des volumes finis celle-ci nous a permis de dégager les constatations suivantes :

La fermeture en un point réalise un bon niveau de compromis entre puissance de calcul et traiter des situations complexes. C'est la raison pour laquelle elle est largement exploitée dans un très grand nombre d'applications pratiques.

Par ailleurs le cône potentiel est mis en évidence à partir des profils des vitesses uniformes sous forme d'un palier.

Par ailleurs, nous montrons que l'établissement du régime n'est réalisé qu'à partir d'une distance d'environ six fois le diamètre de l'injecteur. À ce niveau les représentations des profils des vitesses axiales sont significatives et s'accommodent bien avec les données expérimentales. A ce propos, nous pouvons dire que l'hypothèse de l'auto similitude des champs dynamiques est vérifiée car nous avons obtenu effectivement une courbe unique et qui est en outre satisfaite quelque soit la distance axiale, c'est donc le résultat fondamental de cette étude.

Des résultats satisfaisants sont donnés par le code de calcul car nous avons constaté un faible écart entre les résultats numériques et expérimentaux, aussi, ces mêmes résultats ont été comparés à ceux proposés par la théorie, l'écart semble encore plus faible ce qui nous emmène

à conclure que le modèle de turbulence choisi raffine les résultats du champs dynamique et s'approche beaucoup plus des données théoriques

A partir de notre étude numérique, nous pouvons vérifier les lois d'évolution des différents paramètres dynamiques. En effet, l'inverse de la vitesse maximale est décrite effectivement par une loi parabolique, quant à la demi largeur du jet, s'exprime par une relation linéaire

Le débit volumique croît continuellement du fait de l'ajout de l'air périphérique rencontré par le jet lors de son expansion.

L'hypothèse de conservation de la quantité de mouvement était au fait une conséquence directe de l'uniformité de la pression dans l'enveloppe du jet Ce constat n'est pas toujours vérifié car il a été prouvé que la pression statique peut évoluer notablement dans la région de mélange à cause de la forte turbulence

Les évolutions des grandeurs réduites à savoir l'inverse de la vitesse maximale, la demi largeur de jet, le débit et notamment le flux de quantité de mouvement, donnent une allure unique quelque soit la vitesse initiale

- Néanmoins, nous pouvons conclure quant à l'évolution des propriétés énergétique :
- ❖ L'énergie cinétique turbulente est localisée d'autant plus près de la section de sortie de l'injecteur car à ce niveau présente des maximums où le terme de production est important,
 - ❖ Le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente est intense au niveau

CONCLUSION GENERALE

La théorie des jets libres turbulents, est une science très abstraite qui ne peut guère être correctement pensée et assimilée. En effet, le problème majeur résidait dans la stylisation des tensions de Reynolds ; plusieurs auteurs ont abordé cette difficulté, tel que Boussinesq qui a érigé l'idée si séduisante mais fort extravagante à partir de l'analogie entre le transport de quantité de mouvement par l'agitation turbulente et par l'agitation moléculaire. Seulement, bien que cette idée est mal fondée, elle a tout de même été acceptée. Dès lors, plusieurs modélisations ont émané de cette théorie, nous citons par exemple, les modèles algébriques, appelés aussi modèles à zéro équations et les modèles à deux équations ($k-\epsilon$).

Pour ce qui est des modèles algébriques, plusieurs approches virent le jour, en effet, il y a eu celle de Prandtl–Taylor qui associe à la viscosité turbulente une expression linéaire liant la demi largeur du jet à la vitesse maximale dont la solution a été entreprise par Gortler. Signalons tout de même que cette tentative s'accommode avec les données expérimentales mais dans un domaine restreint.

Plus tard, Reichardt ayant observé avec beaucoup d'insistance, et en analysant le mécanisme dynamique de jets libres turbulents, a trouvé une formulation assez proche du phénomène authentique. Ainsi, il établit une approche considérée incontestablement déterminante, vu son bon accord avec les données expérimentales.

La méthode entreprise pour la résolution des équations émanant de ces modèles algébriques, est la méthode différentielle dont le principe consiste à construire une solution simple du problème donné, cependant, il faut reconnaître que la manœuvre est généralement assez lourde. Celle-ci se base sur l'hypothèse de similitude des profils de vitesse et s'applique à une seule coordonnée de l'espace; on pourra d'ailleurs s'affranchir de l'autre coordonnée en utilisant un artifice mathématique qui consiste en un type de combinaison qui va ramener le problème d'une configuration bidimensionnelle à une configuration unidimensionnelle, dont les résultats sont satisfaisants. Notons tout de même que cette méthode manque d'universalité puisqu'elle dépend du type d'écoulement.

C'est pour cela qu'une théorie plus approfondie avait paru nécessaire, en effet, d'autres propositions furent donc avancées dans l'espoir d'améliorer certains de ces aspects car si l'on vient au problème dont la complexité est plus au moins prononcée, bien qu'il soit régi par des équations qui ne sont même plus linéaires, nous serons amenés inéluctablement à envisager une deuxième méthode moins simpliste, mais répondant tout de même à nos préoccupations.

La procédure appliquée dont nous avons usée est ancienne, et a été utilisée même par Launder, elle consiste à résoudre les équations de Navier–Stokes moyennant un modèle de fermeture ($k-\epsilon$); grâce à cette simple fermeture assez populaire, les résultats s'amélioraient. En effet, il a été constaté que cette procédure est la plus proche de l'expérience.

Nous devons à ce sujet signaler que notre étude a permis de mettre en évidence les paramètres régissant l'hydrodynamique d'un jet turbulent axisymétrique. Tout d'abord, notons l'apparition d'un palier au niveau du cône potentiel dont la rigueur est conditionnée

par l'intensité de turbulence, la géométrie de la buse et notamment les conditions d'émission du jet.

Par ailleurs, nous montrons que l'établissement du régime n'est réalisé qu'à partir d'une distance d'environ six fois le diamètre de l'injecteur. A ce niveau, les représentations des profils de vitesses axiales sont gaussiennes et s'accroissent bien avec les données expérimentales. A ce propos, nous pouvons dire que l'hypothèse de l'auto similitude du champ dynamique est vérifiée car nous avons obtenu effectivement une courbe unique et qui est en outre satisfaisante quelque soit la distance axiale, c'est donc le résultat fondamental de cette étude.

Afin de dégager les lois hydrodynamiques régissant le comportement des caractéristiques physiques, à savoir la vitesse maximale et notamment l'élargissement dynamique, nous avons tracé les graphiques relatifs à chaque grandeur; ainsi une tendance linéaire est obtenue pour chacun de ces paramètres physiques.

Une allure de flux de quantité de mouvement constamment uniforme est obtenue, pour chaque plan transversal de la zone établie, ceci quelque soit la vitesse initiale avec laquelle nous déclenchons le jet. Ce résultat est généralement assez pénible à retrouver expérimentalement, en fait, cette difficulté est liée à la pureté du gaz, car, celui-ci contient souvent des particules en suspension.

Le jet se forme donc d'une phase dispersée et d'une phase continue, on n'est donc face à un problème qui est une généralisation plus au moins complexe. Ce système est régi par des équations différentielles non linéaires qui ne peuvent être intégrées qu'à partir d'une modélisation des fonctions de courant, de la viscosité turbulente et notamment des forces de volume. En effet, les formes fonctionnelles attribuées à ces dernières sont utilisées lors de l'application de la méthode différentielle. La fonction différentielle qui en découle est assez pénible à résoudre, en effet, en se munissant de l'hypothèse fondamentale des profils semblables qui stipule que les coefficients de l'équation différentielle doivent être constants, nous aboutissons alors à une équation différentielle pour laquelle six combinaisons sont proposées, et dont l'étude ne peut être réalisée qu'avec le secours de l'approche composite. De son application, nous retenons trois combinaisons décrites par la même équation différentielle, nous avons adopté, pour sa résolution, les modèles algébriques. Les résultats qui ressortent de cette étude nous révèlent que le modèle de Reichardt épouse parfaitement les données expérimentales issues de la littérature.

Afin de justifier la validité et la pertinence du code de calcul adapté à un jet libre et voir son domaine de validité lors de son application à un jet légèrement particulaire, nous avons comparé les graphiques obtenus expérimentalement à nos résultats numériques. Il a été constaté que l'erreur estimée pour différentes vitesses initiales varie entre 7 à 12%.

Nous avons ensuite étudié les différentes situations qui peuvent se présenter à savoir : les jets aérés et les jets fluidisés. Dans ce dernier cas nous avons envisagé les effets de la vitesse initiale, de la vitesse de fluidisation et notamment de la nature des particules qui constitue la phase dispersée. Nous ne pouvons désormais conclure d'une façon précise et juste, quant à l'évolution du champ hydrodynamique d'un jet particulaire, car son comportement dépend intimement de différents paramètres à savoir : l'état du lit, la vitesse d'injection et la composition de la phase dispersée néanmoins, nous pouvons dire que dans des conditions bien déterminées, le jet fluidisé est presque homologue à un jet monophasique.

Références Bibliographiques

- [1] C.Xuereb, « Analyse du développement de jets horizontaux ou inclinés dans des lits fluidisés par un gaz » Thèse de docteur de INP, Toulouse, Novembre 1989
- [2] P.N. Rowe, H.J Gillivray, D.J Celsman, « Gas discharging from an orifice into a gas fluidized bed » Tran., Inst.Chem.Eng. 57, 1979,194-199
- [3] Markhevka V.L,Basov V A.,Melika-Akhnazarov T.K,Orochko D.I, «The flow of a gas jet into a fluidized bed» Theor .found., Chem.Eng.,5,80-85,1971
- [4] W.C.Yang ,D.L Keairns, «Solid entrainment rate into gas-solid two phase jets in a fluidizedbed », powder Tech. 33(1982) 89-94
- [5] Knowlton,T.M.Hirson, «The effect of bed and jet parameters on vertical jet penetration length in gas fluidized beds», 73rd Annual Aiche Meeting, Chicago,1980.
- [6] Kececiogla, « Fate of solids fed pneumatically through a jet into a fluidized bed», A.I.Ch.j., 30,1,(1984),99-110.
- [7] N. Maxime, « Experimental study of gravity-driven dense suspension jets», Phys. Fluids, 123570, 2002
- [8] O. Vermorel, « Etude numérique et modélisation de la modulation de la turbulence dans un écoulement de nappe chargée en particules » Thèse de Doctorat troisième cycle de l'université de Toulouse 2003
- [9] V. Faivre, « Etude expérimentale et numérique du contrôle actif de jets dans des chambres de combustion » Thèse de Doctorat troisième cycle de l'université de Toulouse 2003
- [10] J. Moreau, « Interaction entre un jet et un tourbillon compressé. Etude expérimentale de l'aérodynamique et du mélange » Thèse de Doctorat troisième cycle de l'université de Toulouse 2003
- [11] F. Gallaire, T.Loiseloux, M chomaz, « Etude d'instabilité temporelles d'un jet tournant » Journée de Dynamique des Fluides sur le Plateau 1999 Université de Paris Sud
- [12] I. Yimer, I. Campbell, L-Y. Jiang., « Estimation of the Turbulent Schmidt Number from Experimental Profiles of Axial Velocity and Concentration for High-Reynolds-Number Jet Flows » Can.Aeronautics and Space J; Vol 48,No 3, pp 195-200,2002
- [13] R.Hadefl, A.Haddad2 et Khadoun, « Comparaison de deux modèles de turbulence dans la simulation d'un jet Turbulent axisymétrique » Revue des énergies renouvelables Vol 3 n°1 Février 2001
- [14] E.M.Amin, I B.Celik,I.Yavuz, « Towards LES Of A Round Turbulent FreeJet Using KIVA –III Code»Proceeding of ASME/FEDSM, Engineering Division SummerMeeting June 1998
- [15] C.Ferreira-Gago, « Simulations numériques d'un jet rond turbulent et de son interaction avec un tourbillon de sillage». Thèse de doctorat soutenue le 25 novembre 2002 à l'Université de Marne la Vallée
- [16] W. Kriaa, H. Mhiri, S. El Golli, G. Le palec et Ph. Bournot, « Etude Numérique d'un Jet Plan à masse volumique variable en régime laminaire » Revue. Energétique. Renouvelable,. Vol. 5 (2002) 93-106
- [17] L. Joly, A Purwanto et G Harran, « Modélisation des jets turbulents subsoniques fortement chauffés » Rev. Gén. Therm. (1997) 36, 99-112.
- [18] H. Sanders, B Sarh et I Gokalp, « Etude numérique des jets turbulents à température élevée » Rev.Gén.Therm, (1996) 35, 232-242.

- [19] H. Sanders, B Sarh et I Gokalp, « A variable density effects in axisymmetric isothermal turbulent jets : a comparison between a first and a second order turbulence model » Int. J. Heat Mass Transfer (1997) 40 (4), 823-842.
- [20] M. Saudreau, « Analyse de la dynamique des jets à densité variable en écoulement co-courant pulsé » Thèse de Docteur INP Toulouse, 2003.
- [21] R.Hermouche, « Structures tourbillonnaires de la zone proche d'un jet d'hélium dans l'air » Thèse de Docteur INP Toulouse, 1995.
- [22] H Kourta, « Le développement de modèle de turbulence pour les écoulements avec structures organisées » Colloque Ecoulements Propulsifs 1995
- [23] A.Bejan, « Convection Heat Transfer » Edition John Willy- et sons ,INC,1984
- [24] N.Abzar,A.Derrar,« Etude théorique et expérimentale d'un jet d'air turbulent axisymétrique » Mémoire d'ingénieur E.N.I.T.A 1988
- [25] H.Schlichting,K.Gersten, « Boundary layer theory » 8th Revised and Enlarged Edition, Springer,2000
- [26] J.Padet « Fluides en écoulement méthodes et modèles » Edition Masson, Barcelone, 1991.
- [27] N.Badirou, « Etude de l'hydrodynamique d'un jet immergé dans un lit de particules » Thèse de Docteur de l'U.T.C. Mai 1992
- [28] F.Labidi, « Etude de la structure d'écoulement d'un jet émergé dans un lit fluidisé et caractérisation des échanges » Thèse de Docteur de l'U.T.C. Décembre 1992
- [29] G.N Abramovich, « The theory of turbulent jet » MiPress,Cambridge,Mass(USA),1963
- [30] M.Amielh, « Etude expérimentale d'un diluer de jet chaud » Thèse Docteur de l'université d'aix –Marseille II, Novembre1989
- [31] C. Lejeune, « Modélisation des écoulements turbulents à grandes vitesses » Thèse Docteur de l'université INP. Toulouse, 1996
- [32] R.Sauvage, « Simulation des écoulements turbulents à grandes vitesses » Thèse Docteur de l'université INP. Toulouse, 2004
- [33] P.L. Kao et HA Ha Minh, « Etude numérique des instabilités convectives et des structures cohérentes dans des couches de mélange libres ou décollées » Congrès Canadien CFD 97
- [34] J.O.Hinze, Turbulence, McGraw Hill,Oxford, first edition,1959
- [35] P.Chassaing, « Turbulence en mécanique des fluides. Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur », Cépadués –éditions, Octobre 2000.
- [36] N.R.Panchapakesan ,J.L Lumley Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helui.part1.Airjet .Jfluid Mech, Vol.249 :pages 197-223,1993.
- [37] N. Rajaratnam, « Turbulent mixing and diffusion of jets » Encyclopedia of Fluid Mechanics of Single , Fluid flows and Mixing,2,39-405,1986
- [38] K Kataoka,«Modeling turbulent jets with variable density » Encyclopedia of Fluid Mechanics of Single , F(luid flows and Mixing,2,512-541,1986
- [39] Thèse mécanique cherarad
- [40] Landau, E. Lifichitz, « Physique Théorie- Tome VI » Mécanique des fluides, Editions Mir, Moscou, 1971
- [41] S.Candel, « Mécanique des fluides » 2ème édition Dunod , Paris,1995 »
- [42] J.Cousteix, « Turbulence Et Couche Limite » Edition Cepadues- septembre 1989
- [43] N.Kadem, « Modélisation Numérique d'un jet rond turbulent frappant perpendiculairement une paroi » Thèse de Magister, U.S.T.H.B 1999
- [44] D.Cherrared, « Modélisation bidimensionnelle de l'interaction jets de refroidissement écoulement principal compressible », Thèse de Magister spécialité (systèmes thermiques industriels) U.S.T.H.B, Décembre 1998.

- [45] J. Boussineq, Essai sur la théorie des eaux courantes. Mémoire des savants étrangers. Ac. Sc. Paris, XXVIII, 1877.
- [46] P. Mier; M. Kraume, «Simulation of the influence of a dispersed solid phase on the internal flow field in jet loop reactors», 2nd European Congress of Chemical Engineering, Montpellier, FR 1999
- [47] S.Habli, H.Mhiri, S.El Golli, G.Le Palec, P.Bournot ; « Etude numérique des conditions d'émission sur un écoulement de type jet axisymétrique turbulent » Int.J.Therm.)40,497-511 Sci. 2001
- [48] S.V.Patankar , « Numerical Heat Transfer and fluid Flow », Mc Graw Hill, New-York, 1980
- [49] M.A.Leschziner, « Modeling turbulent recirculating flows by finite-volume methods, Current status and future directions » Int.J.Heat and Fluid Flow, Vol.3, 1989
- [50] H.Iacovides, I.P.Theofanopoulos, «Turbulence modeling of axisymmetric flow inside rotating cavities», Int J.Heat and Fluid Flow, Vol.12.N1, pp 2-11, 1991.
- [51] B.R.Latimer, A.pollard, « Comparison of pressure velocity coupling solution algorithms », Num Heat Transfer, Vol.8, pp.635-652, 1985
- [52] P.G.Huang , M.A.Leschziner, « An introduction and guide to the computer code TEAM » Rapport TFD/83/9(R), Thermofluids division , dept of Mech Engineering UMIST, 1983
- [53] J.P.Schon, J.Mathieu, D.Jeandel « Théorie des jets » Xiemes Journées Internationales De L'I.F.C.E Tirage Et Dispersion Des Fumées -1975