

N° D'ORDRE : 01/2013-M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de Mathématiques



MÉMOIRE
PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MAGISTER
EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse (Systèmes Dynamiques)

Par : Meriem GUECHI

*Formes normales des equations de
reaction-diffusion*

Soutenu publiquement le 08 /09 /2013 devant le jury composé de :

M^r	Rachid	BEBBOUCHI	Professeur	à l'USTHB	Président
M^r	Brahim	ABBACI	Maître de Conférences/A	à l'USTHB	Directeur de Mémoire
M^r	Arezki	KESSI	Professeur	à l'USTHB	Examineur
M^{me}	Tounsia	BENZEKRI	Maître de Conférences/A	à l'USTHB	Examineur

Table des matières

Liste des figures	IV
Introduction générale	1
1 Rappels d'analyse fonctionnelle et systèmes dynamiques	4
1.1 Notions d'analyse fonctionnelle	5
1.1.1 Espaces complet et espace de de Banach	5
1.1.2 Espaces de Hilbert	5
1.1.3 Projection Orthogonale	7
1.1.4 Les espaces de Sobolev	8
1.2 Introduction aux systèmes dynamiques	10
1.2.1 La notion de Système dynamique	11
1.2.2 Le flot d'un système différentiel	13
1.2.3 L'existence et l'unicité locale des solutions	15
1.2.4 Conjugaison et équivalence des flots [11] [18]	16
1.2.5 Linéarisation des systèmes dynamiques	16
2 Variétés invariantes et Feuilletages au voisinage d'un point fixe hyperbo-	

lique	18
2.1 Variétés différentielles	19
2.1.1 Variétés topologiques	19
2.1.2 Sous-variétés de \mathbb{R}^n	19
2.1.3 Variétés différentiables	20
2.2 Fibré tangent	22
2.2.1 Sous-espaces tangents d'une sous-variété de \mathbb{R}^n [12]	22
2.2.2 Fibre tangent[8]	24
2.2.3 Champs de vecteurs	24
2.2.4 Flot d'un champ de vecteurs sur une variété	25
2.3 Variétés invariantes	25
2.3.1 L'ensemble invariant	25
2.3.2 Les théorèmes de la variété stable et instable	28
2.4 Feuilletages	30
2.4.1 Feuilletages au voisinage d'un point fixe hyperbolique	31
3 Théorème de Hartman-Grobman pour les équations de réaction-diffusion	34
3.1 Hypothèse et Notation	35
3.2 Existence de variétés invariantes	36
3.3 Existence d'un feuilletage invariant	42
3.3.1 Le théorème de Hartman-Grobman	48
3.4 Démonstration du théorème de Hartman-Grobman	49
3.4.1 Transformation sur M_1^n	49
Conclusion générale	55
Bibliographie	56

Table des figures

2.1	Une sous-variété de dimension 1 du plan.	20
2.2	Un sous-espace tangent à \mathbb{S}_2	23
2.3	Les sous-espace stables et instables	28
2.4	M_s et M_u au voisinage V d'un point fixe hyperbolique a	29
2.5	Atlas de cartes feuilletées	31

Notations

Symbole	signification
φ	Le flot d'un système.
\mathfrak{F}	Le feuilletage.
M	Une variété.
S	La variété stable.
U	La variété instable.
E_s	Sous-espace stable.
E_u	Sous-espace instable.

Remerciements

Premièrement, je remercie Dieu le Miséricordieux, pour m'avoir donné la volonté et la force pour accomplir ce modeste travail, elhamdou li Allah.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Mr B. ABBACI pour la confiance qu'il m'a faite en acceptant de diriger mes recherches, et pour ses précieux conseils et orientations, ainsi que pour l'intérêt particulier qu'il a accordé à ce travail.

Je remercie le Professeur R. BEBBOUCHI pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également le Professeur A. KESSI pour avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie également le Professeur T. BENZEKRI pour avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie tous mes collègues et amies pour leurs aide et soutien et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, El Djouher, Fatah, Sarah , ...

Je n'oublierai pas de remercier ma famille, Ouided et son mari Halim qui m'ont toujours encouragé et soutenu.

De manière, plus particulière, mes pensées les plus intimes vont à ma mère (la voix de la sagesse et de l'amour), je sais bien que je ne pourrais jamais lui rendre ce que elle m'a donné.



Je dédie ce travail :

À la mémoire de mon père et de ma grand-mère.

À ma mère .

À mes Frères et Sœurs.

À Ouided, Halim et El-Djouher.

À toutes mes amies.

Meriem.

Introduction générale

"Le commencement est la moitié de tout".

Pythagore (vers 580-495 av. J.-C.)

Contexte historique

Newton, en travaillant sur la loi de la gravitation universelle, utilise pour la première fois les équations différentielles (deuxième loi de Newton). Beaucoup de phénomènes sont modélisés, par un système d'équations différentielles (ou d'équations aux dérivées partielles) : l'électromagnétisme, la dynamique des fluides, la météorologie, les fluctuations boursières, la dynamique des populations, . . .

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle, sous des hypothèses de régularité assez faibles. Pourtant, on ne connaît pas de solution explicite pour la plupart de ces équations. Motivé principalement par cette difficulté, Poincaré, au cours de son étude du problème des trois corps, met en place une théorie nouvelle pour l'étude de ces équations : l'étude qualitative des systèmes dynamiques. Il propose d'étudier le comportement topologique asymptotique des orbites du champ de

vecteurs associé à l'équation différentielle, cela sans connaître explicitement ses trajectoires [11]. Les systèmes de réaction-diffusion sont représentés par des équations aux dérivées partielles paraboliques semi-linéaires; ces équations sont des modèles mathématiques en biologie, chimie et physique.

L'un des premiers modèles de processus biologiques qu'on connaisse est sans doute celui proposé par Léonard de Pise (Fibonacci), dans son "liber abbaci" (1228), qui a construit les suites bien connues en réfléchissant sur la dynamique d'une population de lapins. Il remarquait notamment que les jeunes lapins ne pouvaient pas se reproduire immédiatement après leurs naissance mais n'étaient matures qu'après un certain temps, d'où la notion de ce qu'on appelle aujourd'hui les classes d'âges [21].

En physique théorique, l'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles, introduite initialement en 1811 par Fourier pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. C'est l'exemple le plus simple d'une équation parabolique.

Considérons l'équation scalaire parabolique suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), 0 < x < \pi, t > 0 \quad (1)$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$u(0) = 0, u(\pi) = 0 \quad (2)$$

où $u(0) = 0, u(\pi) = 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable.

Et soit φ une solution stationnaire hyperbolique de problème (1), (2).

Un des problèmes fondamentaux dans les systèmes dynamiques est le suivant :

Est-ce-que le problème non linéaire (1), (2) est topologiquement conjugué à un problème linéaire dans un voisinage d'une solution stationnaire φ ?

Hartman et Grobman prouvent qu'on peut déterminer un homéomorphisme qui conjugue le problème non linéaire (1),(2) à un problème linéaire dans un voisinage d'une solution stationnaire hyperbolique [24], [14].

Pour réaliser notre travail, nous allons commencer par quelques rappels d'analyse fonctionnelle et de systèmes dynamiques.

Dans le deuxième chapitre nous étudions les ensembles invariants , les notions de base de variétés invariantes, le feuilletage, quelques théorèmes de variétés invariantes et feuilletages au voisinage d'un point fixe hyperbolique.

Dans le dernier chapitre nous analysons le théorème de Hartman-Grobman pour les problèmes (1), (2), au voisinage d'une solution stationnaire hyperbolique $\varphi(u)$.

La raison justifiant de travailler dans un espace de Hilbert ou de Banach est l'étude de l'opérateur linéaire.

Chapitre 1

RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELLE ET SYSTÈMES DYNAMIQUES

"Les propositions mathématiques sont reçues comme vraies parce que personne n'a intérêt qu'elles soient fausses".

Montesquieu(1689-1755).

Introduction

Ce premier chapitre a pour but de présenter (ou de rappeler) un certain nombre d'outils d'analyse fonctionnelle et de systèmes dynamiques qui seront utilisés dans la suite de ce mémoire .

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espaces complet et espace de Banach

On considère, un espace métrique (E, d) .

Suite de Cauchy

Définition 1.1 Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de E . On dit que c'est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

Définition 1.2 Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente. Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

1.1.2 Espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel.

Définition 1.3 On appelle produit scalaire sur H une forme bilinéaire symétrique définie positive, notée $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, et vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (i) symétrie : $\forall v, u \in H, B(u, v) = B(v, u)$
- (ii) positivité : $\forall v \in H, B(v, v) \geq 0$,
- (iii) $B(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Proposition Soit B un produit scalaire sur H .

L'application $x \in H \rightarrow \|x\|_H = \sqrt{B(u, u)}$ est une norme (norme induite). Elle vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall u, v \in H, B(u, v) \leq \|u\|_H \|v\|_H$$

Définition 1.4 On dit que (H, B) est un espace de Hilbert si, muni de la norme associée à la forme bilinéaire B , H est complet.

Soient E et F deux espaces de Hilbert réels.

Définition 1.5 On appelle opérateur toute application linéaire continue $A : E \rightarrow F$.

On définit la norme de A comme suit :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F$$

Adjoint d'un opérateur

Soient E et F deux espaces de Hilbert, $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F .

Théorème 1 Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ Alors il existe un unique opérateur $A^* \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $\forall x \in E, \forall y \in F, \langle Ax, y \rangle_F = \langle x, A^*y \rangle_E$ l'opérateur A^* s'appelle l'adjoint de A .

Définition 1.6 (opérateur auto-adjoint) si $A \in \mathcal{L}(E, E)$ est tel que $A = A^*$, on dit que l'opérateur A est auto-adjoint (ou Hermitien).

Les opérateurs auto-adjoints ont des propriétés particulièrement importantes que nous allons maintenant rappeler.

Soit E un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E, E)$ un opérateur.

Théorème 2 (Norme d'un opérateur auto-adjoint) Si A est auto-adjoint, alors

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$$

Corollaire Si $\dim E < \infty$ et si $A \in \mathcal{L}(E, E)$ est auto-adjoint, alors A est diagonalisable.

Théorème 3 Si A est auto-adjoint, les valeurs propres de A sont réelles et les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont deux à deux orthogonaux (Autrement dit les sous-espaces propres correspondant à des valeurs propres $\lambda_1 \neq \lambda_2$, sont orthogonaux) .

Proposition Soit $A \in \mathcal{L}(E, E)$ un opérateur auto-adjoint et soit F un sous-espace de E . Si F est invariant par A , alors F^\perp est aussi invariant par A .

Théorème 4 Si A est un opérateur compact auto-adjoint, alors il admet une valeur propre λ telle que $|\lambda| = \|A\|$.

Pour ceux qui veulent voir en détails des démonstrations de cette section vous pouvez consulter [6] et [9].

1.1.3 Projection Orthogonale

Soit E un espace de Hilbert, $x \in E$ et F une partie non vide de E .

Définition 1.7 Deux éléments x et y d'un espace de Hilbert E sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$, on écrit alors $x \perp y$. On dit que deux parties F et G de E sont orthogonales si tout élément de F est orthogonal à tout élément de G , on écrit alors $F \perp G$. L'orthogonal d'une partie F de E , noté F^\perp , est l'ensemble des éléments de E orthogonaux à F .

Théorème 5 (projection sur un sous-espace de Hilbert) Soient E un espace de Hilbert, F un sous-espace de Hilbert et x un élément de E . Il existe un unique élément $a_x \in F$ tel que $\|x - a_x\| = d(x, F)$.

De plus, a_x est l'unique élément de F tel que $x - a_x$ soit orthogonal à F ; il est noté $P_F(x)$ et est appelé la projection orthogonale de x sur F .

Corollaire Soient E un espace de Hilbert et F un sous-espace de Hilbert de E . Alors les sous-espaces F et F^\perp sont supplémentaires dans E , c'est-à-dire que : $E = F \oplus F^\perp$.

Preuve Le sous-espace $F \cap F^\perp$ est réduit à 0 parce que le produit scalaire est non dégénéré ; de plus, pour tout élément x de E on a évidemment $x = x - P_F(x) + P_F(x)$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$ où $P_F(x)$ est la projection orthogonale de x sur F .

Proposition L'application P_F est un opérateur linéaire de E dans F qui vérifie, pour tout x et tout y dans E , $\|P_F x\| \leq \|x\|$, $\langle P_F x, y \rangle = \langle x, P_F y \rangle$ et $P_F(P_F x) = P_F x$

Théorème 6 Tout élément x de E s'écrit de façon unique sous la forme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + x_0$ où, pour tout entier $n \geq 1$, x_n désigne la projection orthogonale de x sur E_n et x_0 sa projection orthogonale sur $\ker(A)$. De plus, on a $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n, \forall x \in E$.

1.1.4 Les espaces de Sobolev

Avant de définir l'espace de Sobolev nous allons commencer par :

Espace L^p

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 1.8 soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on appelle L^p l'espace des fonctions u mesurables, de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $M(|u|^p) < \infty$ où M est une mesure sur Ω .

On appelle norme L^p et on note $\|\cdot\|_{L^p}$, l'application définie par $\|u\|_{L^p} = [\int_{\Omega} |u|^p dx]^{\frac{1}{p}}$.

On désigne pour $p = 2$ l'espace L^2 des fonctions de carré intégrable sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} .

Les fonctions intégrables ou les fonctions de carré intégrable ne sont pas forcément dérivables (exemple des fonctions en escalier qui ne sont même pas continues). Il va pourtant falloir considérer leurs dérivées.

Dérivation faible

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

On définit l'espace $D(\Omega)$ par :

$$D(\Omega) = C_c^\infty = \{ \text{fonction de classe } C^\infty \text{ à support compact dans } \Omega \}$$

Soit φ une fonction dans $D(\Omega)$. Etant dans $C^\infty(\Omega)$ on peut la dériver à tout ordre. Soit $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{N}^n$, on note $|\alpha| = \sum_{i=1, \dots, n} \alpha_i$, et :

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x)$$

Définition 1.9 Soit u une fonction de $L^2(\Omega)$.

On dit que u est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe des fonctions $w_i \in L^2(\Omega)$, pour $i \in 1, \dots, N$, telle que, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a :

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} w_i(x) \phi(x) dx.$$

chaque w_i est appelée la i -ème dérivée partielle faible de u , et notée $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Espace $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 1.10 On définit l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ par :

$H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) \text{ telle que } \forall i \in [1, n], \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \}$, où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est une dérivée partielle de u au sens faible.

Proposition $H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

et de norme

$$\|u\|_{H^1} = \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

C'est un espace de Hilbert.

Espace $H^2(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 1.11 De la même façon que dans la définition 1.10, on définit les espaces de Sobolev H^2 par

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2 : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq 2\}$$

On le munit de la norme naturelle :

$\|u\|_{H^2} = ((\int_{\Omega} |u|^2 dx)^{\frac{1}{2}} + [\sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\Omega} |D^\alpha(u)|^2 dx]^{\frac{1}{2}})$ où D^α est une dérivée partielle de u au sens faible .

Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.12 $H_0^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur le bord de Ω .

Pour ceux qui veulent voir en détails des démonstrations de cette section vous pouvez consulter [5],[6] et [9].

1.2 Introduction aux systèmes dynamiques

Avant de définir de manière précise la notion de système dynamique, nous allons essayer d'en donner une idée intuitive. Considérons un système physique (par exemple, le système solaire) dont l'état varie en fonction du temps. Une origine du temps et une unité de temps étant choisies, l'ensemble des temps sera identifié à l'ensemble \mathbb{R} des réels. Supposons que l'état du système, à un instant donné, puisse être représenté mathématiquement par un point d'un ensemble Ω .

Supposons aussi que lorsque l'état du système, à un instant t_1 , est un point x_1 de Ω , son

état x_2 à tout autre instant postérieur $t_2 \geq t_1$, s'il existe, est entièrement déterminé par le point x_1 et par la durée $t_2 - t_1$ de l'intervalle de temps considéré.

1.2.1 La notion de Système dynamique

Définition 1.13 (Système dynamique à temps continu) On appelle système dynamique à temps continu sur un ensemble Ω une famille d'applications $\{\varphi_t; t \in \mathbb{R}^+\}$, ou $\{\varphi_t; t \in \mathbb{R}\}$, paramétrée soit par l'ensemble \mathbb{R}^+ des réels positifs ou nuls, soit par l'ensemble \mathbb{R} de tous les réels, vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) Chaque application φ_t est définie sur une partie U_t de Ω , et à valeurs dans Ω .
- (ii) L'application φ_0 , définie sur Ω entier, est id_Ω .
- (iii) Si $0 \leq t_1 \leq t_2$, alors $U_{t_2} \subset U_{t_1}$.
- (iv) Soient t et s deux éléments de l'ensemble (\mathbb{R}^+ ou \mathbb{R}) qui paramètre la famille d'applications considérée. Soit $x \in U_s$. Alors $\varphi_s(x)$ est élément de U_t si et seulement si x est élément de U_{s+t} et, lorsque c'est le cas,

$$\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{s+t}(x).$$

L'ensemble Ω est appelé espace des phases du système dynamique.

Définition 1.14 (Système dynamique à temps discret) On appelle système dynamique à temps discret sur un ensemble Ω une famille d'applications $\{\varphi_n; n \in \mathbb{N}\}$, ou $\{\varphi_{tn}; n \in \mathbb{Z}\}$, paramétrée soit par l'ensemble \mathbb{N} , soit par l'ensemble \mathbb{Z} , vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) Chaque application φ_n est définie sur une partie U_n de Ω , et à valeurs dans Ω .
- (ii) L'application φ_0 , définie sur Ω entier est $id(\Omega)$.
- (iii) Si $0 \leq n_1 \leq n_2$, alors $U_{n_2} \subset U_{n_1}$.
- (iv) Soient n et m deux éléments de l'ensemble (\mathbb{N} ou \mathbb{Z}) qui paramètre la famille d'applications considérée. Soit $x \in U_m$. Alors $\varphi_m(x) \in U_n$ si et seulement si $x \in U_{n+m}$ et, lorsque

c'est le cas ,

$$\varphi_n(\varphi_m(x)) = \varphi_{n+m}(x).$$

Trajectoire et orbite

L'étude qualitative des solutions de ce système est l'étude de l'ensemble des solutions (ou trajectoires) d'un point de vue géométrique : on s'intéresse non pas à une solution particulière mais à l'ensemble des solutions [2], [3].

Nous considérons dans cette section un système dynamique à temps continu $\varphi_t; t \in \mathbb{R}$ sur un espace des phases Ω , paramétré par l'ensemble \mathbb{R} .

Définition 1.15 Soit $\{\varphi_t; t \in \mathbb{R}\}$ un système dynamique à temps continu sur un espace des phases Ω . Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on note U_t la partie de Ω sur laquelle l'application φ_t est définie. Pour tout point $x \in \Omega$, on note I_x l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $x \in U_t$, c'est-à-dire tels que $\varphi_t(x)$ soit défini.

1. On appelle **trajectoire** d'un point $x \in \Omega$ l'application, définie sur I_x et à valeurs dans Ω , $t \mapsto \varphi_t(x)$.
2. On appelle **orbite** d'un point $x \in \Omega$ la partie $\{\varphi_t(x); t \in I_x\}$ de l'espace des phases Ω .
3. Un élément $x \in \Omega$ est dit point fixe, ou point d'équilibre du système dynamique si son orbite est x .
4. L'orbite d'un point $x \in \Omega$ est dite périodique si x n'est pas un point d'équilibre et s'il existe un élément T de I_x , vérifiant $T > 0$ et $\varphi_T(x) = x$. On dit alors que T est une période de l'orbite périodique considérée.

Générateur (infinitésimal) d'un système dynamique [8]

Nous allons montrer qu'un système dynamique à temps continu est déterminé par la donnée d'un champ de vecteurs, appelé générateur infinitésimal de ce système.

Définition 1.16 Soit $\{\varphi_t; t \in \mathbb{R}\}$ un système dynamique à temps continu sur un ensemble Ω . Nous faisons les deux hypothèses suivantes :

A - l'ensemble Ω est un ouvert d'un espace affine réel de dimension finie ;

B - pour tout point $x \in \Omega$, l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $x \in U_t$ contient un intervalle ouvert centré sur l'origine, et l'application $t \mapsto \varphi_t(x)$ est différentiable à l'origine.

Posons, pour tout $x \in \Omega$,

$$X(x) = \left. \frac{d\varphi_t(x)}{dt} \right|_{t=0},$$

Le champs de vecteurs X ainsi défini sur Ω est appelé générateur infinitésimal du système dynamique [8].

1.2.2 Le flot d'un système différentiel

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 1.17 Le flot du système différentiel est la famille à un paramètre d'applications $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de U dans lui-même définies par

$$\varphi_t(x_0) = x(t, x_0), \forall x_0 \in U$$

où $x(t, x_0)$ est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Le théorème suivant affirme que les solutions d'un système différentiel dépendent de manière différentiable des conditions initiales et que le flot est un groupe à un paramètre de difféomorphismes.

Théorème 7 *L'application φ_t est différentiable sur U . Le flot $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ vérifie les propriétés suivantes :*

$$\varphi_{t_0} = Id \text{ (Id est l'identité de } E)$$

$$\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2} \text{ pour tout } t_1, t_2 \text{ dans } \mathbb{R} \text{ (Loi de composition).}$$

Voir démonstration dans [13]. Du théorème d'existence et d'unicité on déduit que pour chaque $t \in \mathbb{R}$: φ_t est un difféomorphisme de E et que $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$.

Donc on a : $\varphi_t(x_0) = x(t, x_0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $x_0 \in E$.

Remarque 1 il ne faut pas confondre le flot $\varphi_t(x_0)$ et la solution $x(t, x_0)$:

- Pour chaque $(x_0) \in U$ la solution $x(\cdot, x_0) : \mathbb{R} \rightarrow E$, donne l'état du système $x(t, x_0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, tel que $x(0, x_0) = x_0$.

- Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, le flot $\varphi_t : U \rightarrow U$ donne l'état du système $\varphi_t(x_0)$ à l'instant t , pour tout $(x_0) \in U$.

Par définition du flot on a : $\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(x_0) = f(x_0)$.

Pour un système linéaire $\dot{x} = Ax$, le flot est donné par : $\varphi_t(x_0) = e^{At}(x_0)$ ou la matrice exponentielle e^{At} est définie par la série :

$$e^{At} = I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \dots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \dots$$

Point d'équilibre

Les points d'équilibre (états stationnaires, points fixes, ou points singuliers) d'un système jouent un rôle important dans la description des propriétés du système.

Définition 1.18 Un point x^* est un point d'équilibre du système (1.1), s'il satisfait $f(x^*) = 0$ ou bien de manière équivalente si $\varphi_t(x^*) = x^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1.2.3 L'existence et l'unicité locale des solutions

Théorème 8 (Cauchy-Lipschitz) [23]

Soient $f \in (I \times U; E)$, ou I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et U un ouvert d'un espace de Banach E , et $(t_0, x_0) \in I \times U$. On suppose qu'il existe un voisinage de $(t_0, x_0) \in I \times U$ et $L > 0$ tel que pour tous (t, x) et (t, y) dans ce voisinage $(f(t, x) - f(t, y)) \leq L(x - y)$. Alors on a les propriétés suivantes :

Existence

Il existe τ et $u \in C^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau], U)$ solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Unicité

Si v est une autre solution de (1.1), elle coïncide avec u sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.

Définition 1.19 (d'une application lipschitzienne) Soit E un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $k \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $u(t, x)$ une application $u : U \rightarrow E$.

On dit que u est lipschitzienne dans U par rapport à la seconde variable x si pour tout couple $(t, x_1), (t, x_2)$ appartenant à U , on a : $\|u(t, x_1) - u(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$.

On dit que u est une contraction si $k < 1$.

Théorème 9 (Banach–Picard)[23]

Soit E un espace de Banach et $u : E \rightarrow E$, si u est contractante alors il existe un unique point fixe, c'est à dire un unique $x \in E$ tel que $u(x) = x$.

1.2.4 Conjugaison et équivalence des flots [11] [18]

Définition 1.20 Deux champs de vecteurs X et Y de classe C^k sont dits topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme h qui envoie les orbites de X sur les orbites de Y en préservant l'orientation. Autrement dit, si on désigne par $\phi(t, u)$ et $\psi(t, u)$ les flots de X et de Y , étant donné un point p et un réel $\delta > 0$, il existe donc un ε tel que pour t , $0 < t < \delta$ et un t' , $0 < t' < \varepsilon$ tels que $h(\phi(t, x)) = \psi(t', h(x))$.

1.2.5 Linéarisation des systèmes dynamiques

Considérons le système dynamique non linéaire défini par :

$$\dot{X} = F(X), X = (x_1, x_2, \dots, x_n), F = (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (1.2)$$

et soit x^* un point d'équilibre de ce système. Supposons qu'une petite perturbation $\varepsilon(t)$ soit appliquée au voisinage du point fixe. La fonction F peut être développée en série de Taylor au voisinage du point x^* comme suit :

$$\varepsilon(\dot{t}) + \dot{x}^* = F(\varepsilon(t) + x^*) \quad (1.3)$$

$$= F(x^*) + D_F(x^*)\varepsilon(t) + O(|\varepsilon|^2). \quad (1.4)$$

comme ε est petit, alors les termes d'ordre supérieur à 1 deviennent négligeables devant le terme d'ordre 1, et on peut ainsi écrire :

$$F(x^*) + D_F(x^*)\varepsilon(t) + O(|\varepsilon|^2) \cong F(x^*) + D_F(x^*)\varepsilon(t).$$

avec $D_F(x^*)$ est la matrice Jacobienne de la fonction F définie par :

$$D_F(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Comme $F(x^*) = \dot{x}^*$, alors l'équation (1.2) redevient :

$$\varepsilon'(t) = D_F(x^*)\varepsilon(t) \tag{1.6}$$

L'écriture (1.6) veut dire que le système (1.2) est linéarisé [7].

Chapitre 2

VARIÉTÉS INVARIANTES ET FEUILLETAGES AU VOISINAGE D'UN POINT FIXE HYPERBOLIQUE

"En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue."

John von Neumann(1903-1957).

Introduction

L'étude des systèmes dynamiques passe par la connaissance de leurs objets invariants. Nous verrons dans ce chapitre que les variétés invariantes et le feuilletage, en particulier variétés stables, instables, jouent un rôle important pour la description des éléments d'un espace des phases.

2.1 Variétés différentielles

2.1.1 Variétés topologiques

Avant de définir les variétés topologiques, nous proposons d'abord ce théorème d'invariance du domaine de Brouwer.

Pour tout n dans \mathbb{N} on a,

Théorème 10 [12] Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et injective. Alors $f(U)$ est ouvert, et $f : U \rightarrow f(U)$ est un homéomorphisme.

Définition 2.1 Une variété topologique est un espace topologique M tel que :

- L'espace M soit séparé et à base dénombrable,
- Tout point de M admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert d'un espace \mathbb{R}^n .

Pour tout n dans \mathbb{N} , une variété topologique est dite de dimension n si tout point admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n .

Exemple

1. Les variétés topologiques de dimension 0 sont les espaces discrets dénombrables.
2. Une courbe est une variété topologique de dimension 1.
3. Une surface est une variété topologique de dimension 2.

2.1.2 Sous-variétés de \mathbb{R}^n

Définition 2.2 [10] Soit M un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . On dit que M est une sous-variété, si et seulement si en chaque point x_0 de M il existe un voisinage U de x_0 et un difféomorphisme local φ tel que l'on ait

$$\varphi(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times 0) \cap \varphi(U).$$

L'entier $p (p \leq n)$ est appelé dimension de M en x_0 .

Si $p = 1, 2, n - 1$, on dit que M est une courbe, surface, hypersurface (différentiable) de \mathbb{R}^n respectivement.

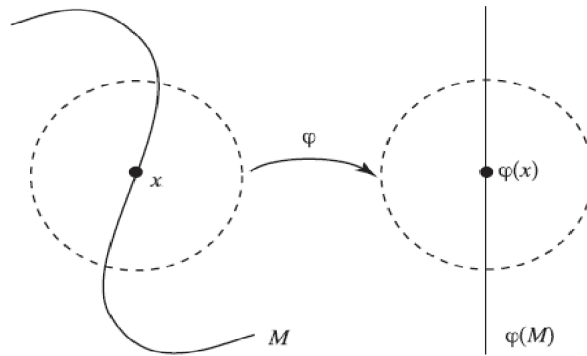


FIGURE 2.1 – Une sous-variété de dimension 1 du plan.

Proposition La dimension en un point x d'une variété est définie de manière unique, et notée $dim_x M$. Si la variété M est connexe, cette dimension ne dépend pas du point choisi.

Preuve [10]

2.1.3 Variétés différentiables

Cartes, Atlas [17]

Définition 2.3 a) Une carte d'une variété topologique M est la donnée d'un couple (U, φ) formé d'un ouvert U de M (le domaine de la carte) et d'un homéomorphisme φ de U sur un ouvert de \mathbb{R}^n .

b) Un atlas de M est une famille $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ (pas nécessairement finie) de cartes, dont les domaines U_i recouvrent M .

Exemple

La surface de la terre est une sphère \mathbb{S}^2 , que l'on peut considérer comme une variété de dimension 2.

Les cartes sont des représentations planes, forcément partielles (un espace compact ne pouvant être homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n), et un atlas d'au moins deux cartes sont nécessaires si on veut représenter toute la terre.

Définition 2.4 1. Un atlas $(U_i, \varphi_i), i \in I$ d'une variété topologique M de dimension n

est dit différentiable de classe C^p (avec p entier ≥ 1 , ou $p = \infty$) si pour tout couple (i, j) tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'application $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est différentiable de classe C^p .

2. Deux atlas (U_i, φ_i) et (U'_j, φ'_j) , de classe C^p , de la même variété topologique M , sont dits C^p – équivalents si leur réunion est encore un atlas de classe C^p , c'est-à-dire si pour tout couple (i, j) tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ les applications $\varphi'_j \circ \varphi_i^{-1}$ et $\varphi_i \circ \varphi'^{-1}_j$ sont différentiables de classe C^p .

Définition 2.5 Une variété différentiable de dimension n et de classe C^p (avec p entier ≥ 1 , ou $p = \infty$) est une variété topologique de dimension n munie d'une classe d'équivalence (au sens de la C^p – équivalence) d'atlas de classe C^p .

Exemple

Si M et M' sont des variétés différentiables de classe C^p , de dimension respectives n et n' , le produit M et M' est une variété de classe C^p , de dimension $n + n'$. En effet, si les $(U_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forment un atlas de M et les $(V_j, \psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$, un atlas de M' , les $(U_i \times V_j, (\varphi_i, \psi_j))$,

forment un atlas de $M \times M'$. Par exemple, le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ est une variété différentiable de dimension 2.

2.2 Fibré tangent

Considérons une variété différentiable M . Il est très souhaitable de pouvoir définir la notion de vecteur attaché à un point x de la variété M (on dira vecteur tangent à M au point x). Cela permettra, par exemple, de considérer des équations différentielles sur la variété M ou de généraliser aux variétés la notion de champ de vecteurs sur un ouvert de \mathbb{R}^n .

2.2.1 Sous-espaces tangents d'une sous-variété de \mathbb{R}^n [12]

Soient $p \leq n$ dans \mathbb{N} , M une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe C^1 et de dimension p , et x un point de M .

Un vecteur v de \mathbb{R}^n est dit tangent à M en x s'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une courbe $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , à valeurs dans M , telle que

$$c(0) = x \text{ et } c'(0) = v.$$

On note $T_x M$ l'ensemble des vecteurs tangents à M en x .

Définition 2.6 Si U est un voisinage ouvert de x dans \mathbb{R}^n , si V est un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme tels que $f(x) = 0$ et $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times 0)$, alors

$$T_x M = df_x^{-1}(\mathbb{R}^p \times 0).$$

Donc l'ensemble $T_x M$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension p , appelé le sous-espace vectoriel tangent à M en x . On appelle $x + T_x M$ le sous-espace affine tangent à M en x .

Exemple

- le sous-espace tangent à \mathbb{S}_n en x est le noyau de l'application linéaire $v \mapsto \langle v, x \rangle$ i.e. $T_x \mathbb{S}_n$ est l'orthogonal de x (pour le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n).

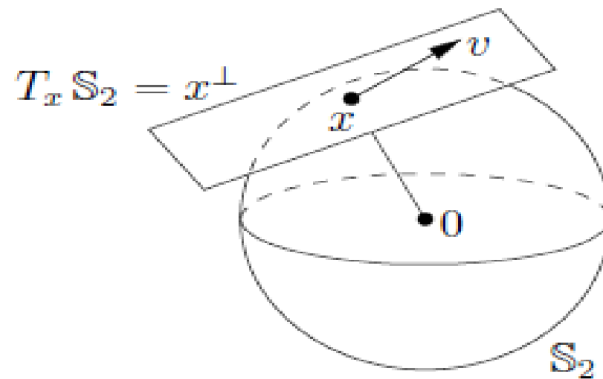


FIGURE 2.2 – Un sous-espace tangent à \mathbb{S}_2

- si M est localement défini comme le graphe d'une application $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ dans une décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ de coordonnées (x, y) , alors l'équation du sous-espace affine tangent en $(x_0, y_0 = f(x_0))$ est $y - y_0 = df_{x_0}(x - x_0)$.
Donc si $(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0))_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n-p}$ est la matrice jacobienne de f en x_0 , un système d'équations du sous-espace affine tangent est

$$\forall j, 1 \leq j \leq n - p, Y_j - (y_0) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)(X_i - (x_0)_i)$$

Proposition Soit M une sous-variété de classe C^{p+1} de \mathbb{R}^n . Soit $F = F_M$ le sous-ensemble

de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ formé des couples (x, v) de $M \times \mathbb{R}^n$ tels que $v \in T_x M$, alors F est une sous-variété de classe C^p de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$.

2.2.2 Fibre tangent [8]

Définition 2.7 On appelle fibre tangent à la variété M , et on note TM , la réunion $\bigcup_{x \in M} T_x M$ des espaces tangents à M en tous ses points, considérés comme deux à deux disjoints.

2.2.3 Champs de vecteurs

Définition 2.8 [4]

- On appelle champs de vecteurs sur une variété différentiable M une application X de M dans le fibré tangent TM qui à tout point x de M , associe le couple $(x, X'(x))$ où $X'(x)$ est un vecteur tangent à M au point x .
- Soit X un champ de vecteurs sur la variété différentiable M . On appelle équation différentielle associée à X , l'équation

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)). \quad (2.1)$$

Cette équation différentielle est dite autonome. Une solution de cette equation est une application différentiable $\varphi : I \rightarrow M$ d'un intervalle ouvert I de \mathbb{R} dans M .

- On appelle champ de vecteurs dépendant du temps sur la variété M une application $Y : \Omega \rightarrow TM$ définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times M$ et à valeurs dans TM , telle que pour tout $(t, x) \in \Omega$, $Y(t, x)$ soit élément de l'espace vectoriel $T_x M$, tangent en x à la variété M .
- Soit $Y : \Omega \rightarrow TM$ un champ de vecteurs dépendant du temps sur la variété M , défini

sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times M$. On appelle équation différentielle associée à Y , l'équation

$$\psi'(t) = Y(t, \psi(t)). \quad (2.2)$$

Cette équation différentielle est dite non autonome. Une solution de cette équation est une application différentielle $\psi : I \rightarrow M$ d'un intervalle ouvert I de \mathbb{R} dans M .

2.2.4 Flot d'un champ de vecteurs sur une variété

Définition 2.9 Soit M une variété différentiable. Le théorème de Cauchy-Lipschitz est applicable à l'équation différentielle autonome associée à un champ de vecteurs différentiable de classe C^p sur M , on peut définir le flot du champ de vecteurs X , exactement comme on l'avait fait dans le chapitre 1, lorsque la variété était un ouvert d'un espace de dimension finie.

2.3 Variétés invariantes

2.3.1 L'ensemble invariant

Définition 2.10 [22]

Un ensemble A est dit invariant sous le flot φ_t d'un champ de vecteurs X (ou bien par le système $x' = f(x)$ correspondant) s'il contient son image par le flot pour tout $t \geq 0$, autrement dit si $X \subset A$ pour tout $t \geq 0$. Ainsi, si A est invariant, les trajectoires partant d'un point de A restent dans A pour tous les temps.

Exemple

Pour un espace des phases à une dimension, le type possible de variété invariante est un point fixe du système dynamique .

Ensemble stable et instable d'un point d'équilibre

Soit $\varphi_t; t > 0$ un système dynamique sur un ouvert Ω d'un espace de Banach E . Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre.

- Définition 2.11**
1. On appelle ensemble stable (ou bassin d'attraction) du point a l'ensemble des éléments x de Ω tel que pour tout $t > 0, \varphi_t(x)$ soit défini, et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x) = a$.
 2. On appelle ensemble instable (ou bassin de répulsion) du point a l'ensemble des éléments x de Ω tel que pour tout $t > 0, \varphi_t(x)$ soit défini, et que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = a$.

Point d'équilibre hyperbolique

Définition 2.12 Soit X un champs de vecteurs différentiable de classe C^p défini sur un ouvert Ω d'un espace de Banach E , un point d'équilibre $a \in \Omega$ de ce champ de vecteurs est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de $DX(a)$ ont une partie réelle non nulle. Donc pour un point fixe hyperbolique, on a trois cas possibles :

1. toutes les valeurs propres sont de partie réelle strictement positive, le point "a" est un puits.
2. toutes les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative, le point "a" est une source.
3. Il existe une valeur propre de partie réelle positive et une valeur propre de partie réelle négative, le point "a" est un point-selle.

Les sous-espaces stables et instables [25]

On appelle sous-espace stable le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n engendré par tous les vecteurs propres associés à des valeurs propres de parties réelles strictement inférieures à

0. ie : $E^s = \bigoplus_{\operatorname{Re}\lambda < 0} E_\lambda$.

On appelle sous-espace instable le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n engendré par tous les vecteurs propres associés à des valeurs propres de parties réelles strictement supérieures à 0. ie :

$E^u = \bigoplus_{\operatorname{Re}\lambda > 0} E_\lambda$.

Exemple

Soit a un équilibre d'une équation différentielle dans le plan

$$\dot{x} = f(x), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$x \in \mathbb{R}^2, f(a) = 0$.

Au voisinage de a , on a

$$f(x) = A(x - a) + \dots, \text{ avec}$$

$A = df(a)$. Si A a deux valeurs propres λ, μ tel que $\lambda < 0 < \mu$ les sous-espaces stables E^s et instables E^u sont représentés par :

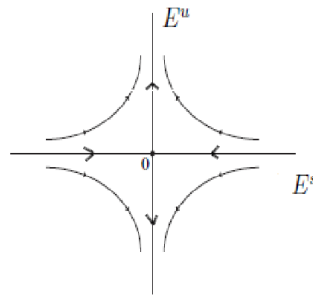


FIGURE 2.3 – Les sous-espace stables et instables .

2.3.2 Les théorèmes de la variété stable et instable

Soit X un champ de vecteurs différentiable de classe C^p défini sur un ouvert Ω d'un espace de Banach E , $a \in \Omega$ un point d'équilibre de ce champ de vecteurs.

Définition 2.13 [1] Les ensembles stables et instables du point " a ", pour le système dynamique formé par le flot (φ_t) de X , sont des variétés différentiables de classe C^p ; on les appelle variété stable et instable du point " a ". Les espaces tangents, au point " a ", à la variété stable et à la variété instable, sont le sous-espaces stable et le sous-espace instable de l'origine pour le système linéarisé de générateur infinitésimal.

autrement dit si V est voisinage ouvert de a dans E on définit les variétés stable et instable comme suit :

$$M_s = \{x \in V \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x) \rightarrow a, t \rightarrow \infty\}$$

$$M_u = \{x \in V \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{-t}(x) \rightarrow a, t \rightarrow \infty\}$$

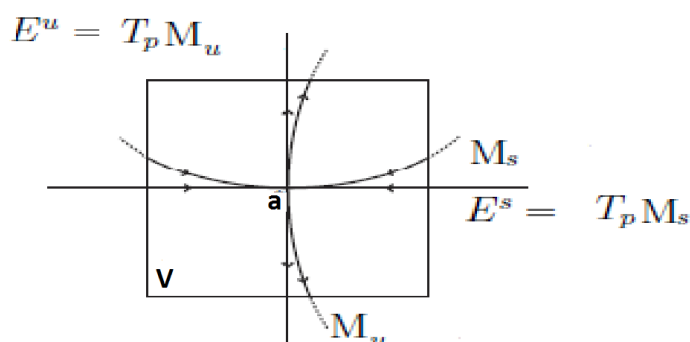


FIGURE 2.4 – M_s et M_u au voisinage V d'un point fixe hyperbolique a .

Remarque

Les ensembles M_s et M_u qui contiennent le point fixe a sont invariants sous le flot φ_t d'un champ de vecteurs, ie : $\varphi(M_s) = M_s$ et $\varphi(M_u) = M_u$

Théorème 11 (i) Si a est un puit, alors il existe un voisinage V de a tel que $M_s = V$ et $M_u = \{a\}$.

(ii) Si a est une source, alors il existe un voisinage V de a tel que $M_u = V$ et $M_s = \{a\}$.

Voir preuve dans [20].

Théorème 12 (Théorème de variété stable-instable)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difféomorphisme de classe $C^p, p \geq 1$, Supposons que $a = (0,0)$ soit un point fixe hyperbolique de f avec

$$df(0,0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, |\lambda| < 1, |\mu| > 1.$$

Alors il existe un voisinage carré $V = [-\delta, \delta] \times [-\delta, \delta]$ de $(0,0)$ sur lequel la variété stable locale M_s de $(0,0)$ dans V est donnée par le graphe d'une fonction de classe C^p ; c'est-à-dire qu'il existe une fonction $g(x)$ sur $[-\delta, \delta]$ de classe C^p telle que

$$M_s = \{(x, g(x)) : x \in [-\delta, \delta]\}$$

De plus, $g'(0) = 0$. De même la variété instable locale M_u de $(0,0)$ dans V est le graphe d'une fonction $h(y)$ de classe C^p :

$$M_u = \{(y, h(y)) : y \in [-\delta, \delta]\}$$

et $h'(0) = 0$.

Voir preuve dans [20].

2.4 Feuilletages

Nous introduisons dans cette partie la notion de feuilletage et les propriétés les plus élémentaires qui seront utilisées dans le reste de ce travail.

Soit k un élément de $\mathbb{N} \cup \infty$, et $p \leq n$ dans \mathbb{N} .

Soit M une variété de dimension n et de classe C^k .

Définition 2.14 (atlas feuilleté) Un atlas de cartes feuilletées C^k sur M est un atlas de cartes A de classe C^k de M , tel que

- pour chaque carte (U, φ) de A , on a $\varphi(U) = V \times T$ avec V un ouvert de \mathbb{R}^p et T un ouvert de \mathbb{R}^{n-p} ,
- pour toutes les cartes $\varphi : U \rightarrow V \times T$ et $\varphi' : U' \rightarrow V' \times T'$ dans A , le changement de cartes est localement de la forme

$$(x, y) \mapsto (f(x, y), g(y))$$

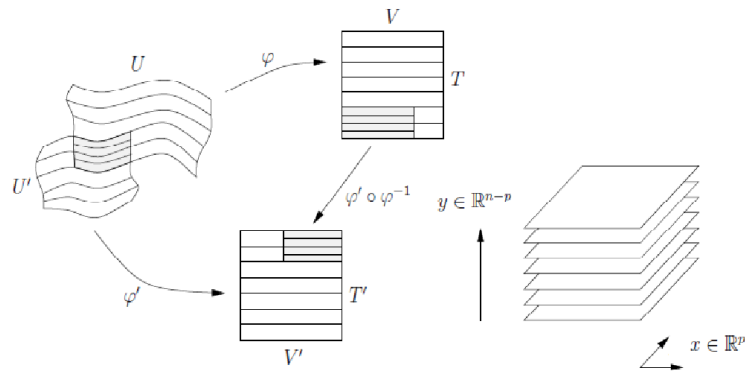


FIGURE 2.5 – Atlas de cartes feuilletées

Définition 2.15 Un feuilletage \mathfrak{F} de classe C^k , de dimension p , et de codimension $n - p$, dans M est un atlas de cartes feuilletées C^k de M . Une variété feuilletée (M, \mathfrak{F}) de classe C^k est une variété M de classe C^k munie d'un feuilletage C^k .

Définition 2.16 On appelle feuille du feuilletage \mathfrak{F} passant par un point x de M , et on note \mathfrak{F}_x , la composante connexe de x dans M . En particulier, les feuilles de \mathfrak{F} forment une partition de M . En général, l'ensemble des feuilles est non dénombrable.

Exemple

Soit X un champ de vecteurs C^k ne s'annulant pas sur une variété M de classe C^{k+1} , M admet un feuilletage de classe C^k , dont les feuilles sont les courbes intégrales de X .

2.4.1 Feuilletages au voisinage d'un point fixe hyperbolique

Notation

Nous supposons que :

$$x' = Ax + F(x), A = \frac{\partial f}{\partial x}(0), \text{ et } F(0) = 0, DF(0) = 0.$$

et E^s, E^u le sous-espace stable, instable tel que :

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u, \dim E^s = k \text{ et } \dim E^u = n - k$$

Soient P et Q des projections, tel que :

$$P : \mathbb{R}^n \rightarrow E^s, Q : \mathbb{R}^n \rightarrow E^u \text{ avec } Q = I - P.$$

et M_s, M_u , sont les variétés locales stables et instables à 0.

Théorème 13 (Feuilletage des variétés stables)

Il existe $\beta > 0$ et un voisinage V de 0 dans E_s tel que $\forall \xi \in M_u$ il existe une fonction

$$h_\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tel que $h_\xi(\eta)$ sont continue en ξ et η , dérivable en η , et une variété

$$M_{loc}^s(\xi) = \{\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n / \bar{\xi} = h_\xi(\eta), \eta \in V\}$$

est un graphe sur V , telles que les propriétés suivantes soient satisfaites pour $\bar{\xi} \in M_{loc}^s(\xi)$:

$$x(t, \bar{\xi}) = h_{x_u}(t, \xi)(P_x(t, \bar{\xi})), t \geq 0 \tag{2.4}$$

et

$$\sup_{t \geq 0} |x(t, \bar{\xi}) - x_u(t, \xi)| e^{\beta t} < \infty \tag{2.5}$$

à condition que la solution reste dans un voisinage de 0. Ici, pour chaque $\xi \in M_u$, $x_u(t, \xi)$ est la solution qui passe par ξ , et reste sur M_u (M_u est invariant).

(voir [20] pour la démonstration de ce théorème).

Remarque 2 1 La variété $M_{loc}^s(\xi)$, $\xi \in M_u$ forme un feuilletage d'un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n , ($M_{loc}^s(\xi)$ peut être considéré comme des feuilles), tel que, si nous commençons une solution par $\bar{\xi} \in M_{loc}^s(\xi)$, alors après un temps t , la solution est sur la feuille $M_{loc}^s(\xi)(x_u(t, \bar{\xi}))$. En plus l'orbite de $(x(t, \bar{\xi}))$ converge vers la variété instable M_u si $t \rightarrow \infty$.

2 Si $\xi = 0$, $M_{loc}^s(\xi)$ est une variété stable locale de M_s au voisinage de 0. Nous savons que $h_\xi(\eta)$ est continue en ξ et η , dérivable en η , si $\xi \rightarrow 0$, les feuilles M_{loc}^s convergent vers M_s .

Chapitre 3

THÉORÈME DE HARTMAN-GROBMAN POUR LES ÉQUATIONS DE RÉACTION-DIFFUSION

”Les mathématiques consistent à prouver une chose évidente par des moyens complexes”.

George Pòlya(1887-1985.)

Introduction

L’objectif de ce chapitre consiste à déterminer, à quelle condition il existe un changement de coordonnées qui transforme localement les trajectoires du système non linéaire en des trajectoires de son linéarisé tangent. Si l’on prend les homéomorphismes comme changements de coordonnées, le théorème d’Hartman et Grobman conduit à une classification utilisant la notion d’hyperbolicité. Pour plus de précisions, on pourra se reporter à [15], [19].

3.1 Hypothèse et Notation

Considérons l'équation scalaire parabolique suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)u + f(x, u), 0 < x < \pi, t > 0. \quad (3.1)$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$u(0) = 0, u(\pi) = 0. \quad (3.2)$$

où a est une fonction de classe C^0 , f est une fonction de classe C^1 , $f(x, 0) = 0$ et $f'(x, 0) = 0$.

Soit $X = L^2(0, \pi)$ et $Au = -(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a(x))u$ pour chaque $u \in H_0^1$.

A est un opérateur auto-adjoint de domaine : $D(A) = H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi)$ dans X .

Soit $E = H_0^1(0, \pi)$.

Nous définissons $f^x = f(x, u)$ pour chaque $u \in E$. Soit $f^x : U \rightarrow E$ est C^1 avec, $f^x(0) = 0$ et $Df^x(0) = 0$, où U est un voisinage ouvert de 0 dans E et D est un opérateur différentiel.

Soit θ une fonction de troncature : $\theta : [0, \infty[\rightarrow [0, 1]$ (en anglais C^∞ cut-off function) avec :

$$\begin{aligned} \theta(s) &= 1 \text{ pour } 0 \leq s \leq 1, \\ \theta(s) &= 0 \text{ pour } s \geq 2 \text{ et } \sup_{s \geq 0} |\theta'(s)| \leq 2. \end{aligned}$$

Nous supposons que $\theta_\rho(s) = \theta(\frac{s}{\rho})$ pour $\rho > 0$, et $F_\rho(u) = \theta_\rho(\|u\|)f^x(u)$, où $\|\cdot\|$ est la norme usuelle de l'espace E . Il est clair que F_ρ est de classe C^1 de E dans E .

Soit K la constante de Lipschitz de F_ρ .

Nous considérons l'équation suivante :

$$u' = -Au + F_\rho(u) \quad (3.3)$$

On note que le problème (3.1), (3.2) est le même que (3.3) dans la boule :

$$B_\rho = \{u \in E / \|u\| \leq \rho\}.$$

A partir de maintenant , nous allons étudier (3.3) au lieu de (3.2) , (3.1).

Nous savons à partir de la théorie de Sturm-Liouville, que le spectre $\sigma(A)$ contient seulement des valeurs propres simples . $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n \dots$ et des fonctions propres correspondantes $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ qui forment une base de E. De plus :

$$\lambda_n = n^2 + o(1), n \rightarrow \infty. (\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - n^2}{1} \rightarrow 0) \quad (3.4)$$

Soient

$$\alpha_n = \min\left\{\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{2}, \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{2}\right\}, n > 1 \quad (3.5)$$

et

$$\alpha = \min_{n > 1} \alpha_n \quad (3.6)$$

et on a $\frac{n}{\alpha_n} = O(1)$ si $n \rightarrow \infty$.

Soit

$$E_n = \langle e_n \rangle,$$

$$E_n^\perp = \langle e_1, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, \dots \rangle.$$

$$E_m^n = \langle e_n, \dots, e_m \rangle. \text{ pour } m > n,$$

et P_n, P_n^\perp, P_n^m les projections du E_n , E_n^\perp , E_m^n , $A_n^m = A \setminus E_n^m$ et nous écrivons $u \in E$ si $u = \sum_{n=1}^\infty u_n$ où $u_n \in E_n$ et K est une constante de Lipschitz pour l'équation F_ρ

3.2 Existence de variétés invariantes

Dans cette section nous choisissons ρ convenablement, pour démontrer :

- 1- L'existence d'une infinité de variétés invariantes de dimension 1.
- 2- L'existence d'une variété invariante de dimension n, pour l'équation (3.3), nous montrons également l'existence de variété invariante de dimension 1 pour le flot dans les variétés invariantes de dimension n.

Théorème 14 Soit $\rho > 0$ tel que $\frac{5}{\alpha}K < 1$, alors pour chaque n il existe une variété invariante de dimension 1 pour (3.3) qui est donnée par :

$$M_n = \{u_n + h_n(u_n) \mid u_n \in E_n\}$$

où $h_n : E_n \rightarrow E_n^\perp$ est lipschitzienne avec une constante de Lipschitz H qui satisfait :

$$h_n(0) = 0 \text{ et } H \leq \frac{2K}{\alpha_n - 3K} < 1.$$

Preuve On définit l'espace de Banach C_{α_n} par :

$$C_{\alpha_n} = \{u \mid u : \mathbb{R} \rightarrow E \text{ est continue et } \sup_{t \in \mathbb{R}} \|e^{\lambda_n t - \alpha_n |t|}\| < \infty\}$$

avec la norme $\|u\|_{\alpha_n} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|e^{\lambda_n t - \alpha_n |t|}\|$.

Désignons par $u(t, u^0)$ la solution de (3.3) avec des données initiales $u(0, u^0) = u^0$.

Soit

$$M_n = \{u^0 \mid u(t, u^0) \text{ est définie pour tout les } t \in \mathbb{R} \text{ et } u = u(t, u^0) \in C_{\alpha_n}\}$$

On a $0 \in M_n$ donc M_n est non vide, et invariante sous le flot de l'équation (3.3). Nous allons montrer que M_n est donné par le graphe d'une fonction $C^{0,1}$ (lipschitzienne) sur E_n .

Lemme 3.1 $u^0 \in M_n \Leftrightarrow u(\cdot) \in C_{\alpha_n}$ avec $u(0) = u^0$ et satisfait

$$u = e^{-\lambda_n t} \xi + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} P_n F_\rho(u) ds + \int_\infty^t e^{-A_1^{n-1}(t-s)} P_1^{n-1} F_\rho(u) ds + \int_{-\infty}^t e^{-A_{n+1}^\infty(t-s)} P_{n+1}^\infty F_\rho(u) ds, \quad (3.7)$$

où : $\xi = P_n u^0$.

Preuve '⇒' : par la formule de variation des constantes , nous savons que :

$$P_n u(t, u^0) = e^{-\lambda_n t} P_n u^0 + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} P_n F_\rho(u) ds, \quad (3.8)$$

$$P_1^{n-1} u(t, u^0) = e^{-A_1^{n-1}(t-\tau)} P_1^{n-1} u(\tau, u^0) + \int_\tau^t e^{-A_1^{n-1}(t-s)} P_1^{n-1} F_\rho(u) ds. \quad (3.9)$$

$$P_{n+1}^\infty u(t, u^0) = e^{-A_{n+1}^\infty(t-\tau)} P_{n+1}^\infty u(\tau, u^0) + \int_\tau^t e^{-A_{n+1}^\infty(t-s)} P_{n+1}^\infty F_\rho(u) ds. \quad (3.10)$$

Comme $u \in C_{\alpha_n}$ nous avons pour $t < \tau, 0 < \tau$

$$\begin{aligned} & \|e^{-A_1^{n-1}(t-\tau)} P_1^{n-1} u(\tau, u^0)\| \\ & \leq e^{-\lambda_{n-1}(t-\tau)} e^{-\lambda_n \tau + \alpha_n \tau} |u|_{\alpha_n} \\ & \leq e^{-\lambda_{n-1}t} e^{-\alpha_n \tau} |u|_{\alpha_n} \rightarrow 0 \text{ si } \tau \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

si nous prenons la limite quand $\tau \rightarrow +\infty$ de (3.9) nous avons :

$$P_1^{n-1} u(t, u^0) = \int_\infty^t e^{-A_1^{n-1}(t-s)} P_1^{n-1} F_\rho(u) ds \quad (3.11)$$

De même, nous avons pour $\tau < t, \tau < 0$.

$$\begin{aligned} & \|e^{-A_{n+1}^\infty(t-\tau)} P_{n+1}^\infty u(\tau, u^0)\| \\ & \leq e^{-\lambda_{n+1}(t-\tau)} e^{\lambda_{n+1}\tau - \alpha_n \tau} |u|_{\alpha_n} \\ & = e^{-\lambda_{n+1}t} e^{(\lambda_{n+1} - \lambda_n - \alpha_n)\tau} |u|_{\alpha_n} \leq e^{-\lambda_{n+1}t} e^{-\alpha_n \tau} |u|_{\alpha_n} \rightarrow 0 \text{ si } \tau \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

si nous prenons la limite quand $\tau \rightarrow -\infty$ dans (3.10) nous avons :

$$P_{n+1}^\infty u(t, u^0) = \int_{-\infty}^t e^{-A_{n+1}^\infty(t-s)} P_{n+1}^\infty F_\rho(u) ds \quad (3.12)$$

si nous faisons la somme de (3.8), (3.11) et (3.12) nous trouvons (3.7).

Pour démontrer ' \Leftarrow ' Nous suivons les mêmes étapes.

Soit $J_n(u, \xi)$ la partie droite de (3.7). nous voyons que $J_n(u, \xi) : C_{\alpha_n} \times E_n \rightarrow C_{\alpha_n}$.

Pour tout $u, \bar{u} \in C_{\alpha_n}$ nous avons :

$$\begin{aligned}
 & |J_n(u, \xi) - J_n(\bar{u}, \xi)|_{\alpha_n} \\
 & \leq \sup\{e^{\lambda_n t - \alpha_n |t|} (\| \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} P_n(F_\rho(u) - F_\rho \bar{u}) ds \\
 & \quad + \int_\infty^t e^{-A_1^{n-1}(t-s)} P_1^{n-1}(F_\rho(u) - F_\rho \bar{u}) ds \\
 & \quad + \int_{-\infty}^t e^{-A_{n+1}^\infty(t-s)} P_{n+1}^\infty(F_\rho(u) - F_\rho \bar{u}) ds \|, \} \\
 & \leq \frac{3K}{\alpha_n} |u - \bar{u}|_{\alpha_n}.
 \end{aligned}$$

Nous notons que J_n est lipschitzienne en ξ .

Par hypothèse de ce théorème, nous savons que $\frac{3K}{\alpha_n} < 1$. donc J_n est une contraction par rapport au paramètre ξ .

Par le principe des fonctions contractantes et pour chaque $J_n \in E_n$, $J_n(\cdot, \xi)$ a un unique point fixe $u(\cdot, \xi) \in C_{\alpha_n}$, $u(\cdot, \cdot)$ est lipschitzienne de $E_n \rightarrow C_{\alpha_n}$ et satisfait :

$$|u(\cdot, \bar{\xi}) - u(\cdot, \xi)|_{\alpha_n} \leq \frac{\alpha_n}{\alpha_n - 3K} \|\bar{\xi} - \xi\| \quad (3.13)$$

Soit

$$h_n(\xi) = P_n^\perp(0, \xi) = \int_0^0 e^{-A_1^{n-1}(t-s)} P_1^{n-1} F_\rho(u(s, \xi)) ds + \int_{-\infty}^0 e^{-A_{n+1}^\infty(t-s)} P_{n+1}^\infty F_\rho(u(s, \xi)) ds,$$

Alors $h_n(0) = 0$, h_n est lipchizienne et satisfait :

$$\|h_n(\xi) - h_n(\bar{\xi})\| \leq \frac{2K}{\alpha_n - 3K} \|\bar{\xi} - \xi\|.$$

Par (3.7) nous avons

$$M_n = \{u_n + h_n(u_n) \mid u_n \in E_n\}.$$

Théorème 15 Soit $\rho > 0$ tel que $\frac{3}{\alpha} K < 1$, alors pour chaque n il existe une variété invariante de dimension n pour (3.3) qui est donnée par :

$$M_1^n = \{p + h_1^n(p) \mid p \in E_1^n\}$$

où $h_n : E_1^n \rightarrow E_{n+1}^\infty$ est lipschitzienne avec une constante de Lipschitz H' qui satisfait :
 $h_1^n(0) = 0$, $H' \leq \frac{K}{\alpha_n - 2K}$ et

$$\|h_1^n(p)\| \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \sup_{u \in E} \|F_\rho(u)\|, \text{ si } \lambda_{n+1} > 0$$

Pour la démonstration voir [19].

Maintenant nous considérons le flot dans la variété invariante M_1^n . On l'écrit comme suit :

$$\dot{p} = -A_1^n p + P_1^n F_\rho(p + h_1^n(p)), \quad (3.14)$$

où $p \in E_1^n$.

Les théorèmes suivants démontrent l'existence d'une variété invariante de dimension 1 et k , ($1 \leq k \leq n$) pour l'équation (3.14).

Théorème 16 [19] :

Soit $\rho > 0$ tel que $\frac{10K}{\alpha} < 1$, alors pour chaque k ($1 \leq k \leq n$), il existe une variété invariante de dimension 1 pour (3.14) qui est donnée par :

$$M_k^{k,n} = \{\xi + l_k^{k,n}(\xi) \mid \xi \in E_k\}$$

où $l_k^{k,n} : E_k \rightarrow E_1^{k-1} \oplus E_{k+1}^n$ est lipschitzienne avec une constante de Lipschitz L , qui satisfait :

$$L \leq \frac{4K}{\alpha_K - 6K} < 1.$$

Théorème 17 [19] :

Soit $\rho > 0$ tel que $\frac{6K}{\alpha} < 1$, alors pour chaque k , ($1 \leq k \leq n$) il existe une variété invariante de dimension k pour (3.14) qui est donnée par :

$$M_1^{k,n} = \{\xi + l_1^{k,n}(\xi) \mid \xi \in E_1^k\}$$

où $l_1^{k,n}(0) = 0$, $l_n^{k,n} : E_1^k \rightarrow E_{k+1}^n$ est lipschitzienne avec une constante de Lipschitz L' , qui satisfait :

$$L' \leq \frac{2K}{\alpha_k - 4K}, \text{ et } \|l_1^{k,n}(\xi)\| \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \sup_{u \in E} \|F_\rho\|, \text{ si } \lambda_{k+1} > 0$$

Corollaire Soit $n \geq k$ nous avons :

i) $u_k^0 \in E_k$, alors $u_k(t, u_k^0)$ est une solution de :

$$\dot{u}_k = -\lambda_k u_k + P_k F_\rho(u_k + h_k(u_k)) \quad (3.15)$$

si et seulement si $u_k(t, u_k^0)$ satisfait :

$$\dot{u}_k = -\lambda_k u_k + P_k F_\rho(u_k + l_k^{k,n}(u_k) + h_1^n(u_k + l_k^{k,n}(u_k))), \quad (3.16)$$

et $(u_k + h_k(u_k)) = u_k + l_k^{k,n}(u_k) + h_1^n(u_k + l_k^{k,n}(u_k))$.

ii) soit $p^0 \in E_1^k$ alors $p(t, p^0)$ est une solution de

$$\dot{p} = -A_1^k p + P_1^k F_\rho(p + h_1^k(p)) \quad (3.17)$$

si et seulement si

$$\dot{p} = -A_1^k p + P_1^k F_\rho(p + l_1^{k,n}(p) + h_1^n(p + l_1^{k,n}(p))) \quad (3.18)$$

et $p + h_1^k = (p + l_1^{k,n}(p) + h_1^n(p + l_1^{k,n}(p)))$.

Preuve $u_k(t, u_k^0)$ est une solution de (3.15) avec les données initiales $u_k(0, u_k^0) = u_k^0$.

Comme M_1^k est invariante, nous avons $u(t) = u_k(t, u_k^0) + h_k(u_k(t, u_k^0))$ qui est une solution de (3.3) et $u(\cdot) \in C_{\alpha k}$. On a $C_{\alpha k} \in C_{\alpha n}$ donc $u(0) \in M_1^n$.

Il existe donc une $p^0 \in E_1^k$ telle que $u(0) = p^0 + h_1^n(p^0)$.

Soit $p(t, p^0)$ une solution de (3.14) avec les données initiales $p(0, p^0) = p^0$.

Par l'invariance de la variété M_1^n , nous savons que $p(t, p^0) + h_1^n(p(t, p^0))$ est une solution de (3.3).

Par l'unicité des solutions nous savons que $u(t) = p(t, p^0) + h_1^n(p(t, p^0))$ et $u(\cdot) \in C_{\alpha k}$ implique que $p^0 \in M_k^{k,n}$ donc il existe $p_k^0 \in E_k$ tel que $p^0 = p_k^0 + l_k^{k,n}(p_k^0)$.

Comme $M_k^{k,n}$ est invariante et par l'existence et l'unicité des solutions, nous savons que $p(t, p^0) = p_k(t, p_k^0) + l_k^{k,n}(p_k(t, p_k^0))$, ou $p_k(t, p_k^0)$ est une solution de (3.16) avec les conditions initiales $p_k(0) = p_k^0$ donc ;

$$u(t) = p(t, p^0) + h_1^n(p(t, p^0)) = p(t, p^0) + l_k^{k,n}(p_k(t, p_k^0)) + h_1^n(p_k(t, p_k^0) + l_k^{k,n}(p_k(t, p_k^0))).$$

Cela implique que $p_k(t, p_k^0) = u_k(t, u_k^0)$.

Nous utilisons les mêmes arguments pour démontrer (ii).

3.3 Existence d'un feuilletage invariant

Dans cette section nous allons montrer l'existence de feuilletage invariant pour les équations (3.3),(3.14).

Théorème 18 Soit $\rho > 0$ tel que $\frac{3}{\alpha}K < 1$, alors pour chaque n il existe un feuilletage invariant pour (3.3), où sa feuille est donnée par :

$$\mathfrak{F}_{n+1}^\infty(u^0) = \{\phi_{n+1}^\infty(q, u^0) + q \mid q \in E_{n+1}^\infty\}$$

$u^0 \in E$ et $\phi_{n+1}^\infty : E_{n+1}^\infty \times E \rightarrow E_1^n$ est lipschitzienne avec une constante de Lipschitz C , tel que

$$C \leq \frac{2K}{\alpha_n - 2K} < 1. \tag{3.19}$$

en plus ,

$$\phi_{n+1}^\infty(q, u^0) = P_1^n(u^0) + R_{n+1}^\infty(q, u^0)$$

R_{n+1}^∞ satisfait :

$$\|R_{n+1}^\infty(q, u^0)\| < \frac{K}{\alpha_n - 2K} < 1, \quad (3.20)$$

$$\|R_{n+1}^\infty(q, u^0)\| < \frac{2}{|\lambda_n|} \sup_{u \in E} \|F_\rho(u)\|_1, \text{ si } \lambda_n < 0. \quad (3.21)$$

et $\mathfrak{F}_{n+1}^\infty(u^0) \cap M_1^n$ contient un unique point $\xi + h_1^n(\xi)$, ou $\xi \in E_1^n$ est déterminé uniquement par u^0 et $\xi = \xi(u^0)$ est continue.

Remarque 3 En peut constater que chaque feuille est une sous variété de classe C^1 , et transversale à la variété invariante M_1^n [16].

Preuve On définit l'espace de Banach $C_{\alpha_n}^+$ par :

$$C_{\alpha_n}^+ = \{u \setminus u : \mathbb{R}^+ \rightarrow E \text{ est continue et } \sup_{t \geq 0} \|e^{\lambda_n t + \alpha_n t} u(t)\| < \infty\}$$

avec la norme $\|u\|_{\alpha_n} = \sup_{t \geq 0} \|e^{\lambda_n t + \alpha_n t} u(t)\|$.

Désignons par $u(t, u^0)$ la solution de(3.3), nous recherchons toutes les solutions de (3.3) tel que

$$w(t) = u(t) - u(t, u^0) \in C_{\alpha_n}^+$$

$w(t)$ satisfait :

$$\begin{aligned} w(t) &= e^{-A_{n+1}^\infty t} q + \int_0^t e^{-A_{n+1}^\infty(t-s)} P_{n+1}^\infty (F_\rho(w + u(s, u^0)) - F_\rho(u(s, u^0))) ds \\ &\quad + \int_\infty^t e^{-A_1^n(t-s)} P_1^n (F_\rho(w + u(s, u^0)) - F_\rho(u(s, u^0))) ds \end{aligned} \quad (3.22)$$

où : $q = P_{n+1}^\infty w(0)$. Nous savons que pour tout $(q, u^0) \in E_{n+1}^\infty \times E$, l'équation a une unique solution dans $C_{\alpha_n}^+$.

Pour voir ça ,soit $J_{n+1}^\infty(w, q, u^0)$ la partie droite de (3.22). Nous voyons que

$$J_{n+1}^\infty : C_{\alpha_n}^+ \times E_{n+1}^\infty \rightarrow C_{\alpha_n}^+.$$

Pour tout $w, \bar{w} \in C_{\alpha_n}^n$ nous avons :

$$|J_{n+1}^\infty(w, q, u^0) - J_{n+1}^\infty(\bar{w}, q, u^0)|_{\alpha_n}^+ \leq \frac{2K}{\alpha_n} |w - \bar{w}|_{\alpha_n}^+ \quad (3.23)$$

Nous notons que J_{n+1}^∞ est lipschitzienne en q , mais on ne sait pas si J_{n+1}^∞ est continue en u^0 .

Par le principe de contraction uniforme, nous savons que pour chaque $(q, u^0) \in E_{n+1}^\infty \times E$, (3.22) a une solution unique $w(\cdot, q, u^0) \in C_{\alpha_n}^+$ qui satisfait :

$$|w(\cdot, q, u^0) - w(\cdot, \bar{q}, u^0)| \leq \frac{\alpha_n}{\alpha_n - 2K} \|q - \bar{q}\|. \quad (3.24)$$

Nous voyons que w est continue en u^0 , nous choisissons $\gamma > 0$ tel que :

$$0 < \gamma < \alpha_n \text{ et } \frac{2K}{\alpha_n - \gamma} < 1.$$

Nous avons pour tout $w, \bar{w} \in C_{\alpha_n + \gamma}^+$:

$$|J_{n+1}^\infty(w, q, u^0) - J_{n+1}^\infty(\bar{w}, q, u^0)|_{\alpha_n + \gamma}^+ \leq \frac{2K}{\alpha_n - \gamma} |w - \bar{w}|_{\alpha_n + \gamma}^+.$$

Par le principe de contraction uniforme, nous savons que pour tout $(q, u^0) \in E_{n+1}^\infty \times E$, l'équation (3.22) a une solution unique $w_\gamma(\cdot, q, u^0) \in C_{\alpha_n + \gamma}^+$, puisque $C_{\alpha_n + \gamma}^+ \subset C_{\alpha_n}^+$, par l'unicité des solutions de (3.22), nous avons $w = w_\gamma$.

Donc $w(\cdot, q, u^0) \in C_{\alpha_n + \gamma}^+$. Pour montrer que $w(\cdot, q, \cdot)$ est continue de $E \rightarrow C_{\alpha_n}^+$ pour tout q fixé, il suffit de montrer que : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ telle que si $\|\bar{u}^0 - u^0\| < \delta$ alors

$$|w(\cdot, q, \bar{u}^0) - w(\cdot, q, u^0)|_{\alpha_n} \leq \varepsilon.$$

Soit $\phi_{n+1}^\infty(q, u^0) = P_1^n u^0 + P_1^n w(0, q - P_{n+1}^\infty u^0, u^0)$ et :

$$\begin{aligned} R_{n+1}^\infty(q, u^0) &= P_1^n u^0 + P_1^n w(0, q - P_{n+1}^\infty u^0, u^0) = \\ &= \int_\infty^0 e^{A_1^n s} P_1^n [F_\rho(w(s, q - P_{n+1}^\infty u^0, u^0) + u(s, u^0)) - F_\rho(u(s, u^0))] ds. \end{aligned}$$

Alors $\phi_{n+1}^\infty(q, u^0)$ et $R_{n+1}^\infty(q, u^0)$ sont continues.

Nous utilisons (3.24), nous avons

$$C \leq \frac{K}{\alpha_n - 2K} < 1,$$

$$\|R_{n+1}^\infty(q, u^0)\| \leq \frac{K}{\alpha_n - 2K} \|q\|$$

et $\|R_{n+1}^\infty(q, u^0)\| \leq \frac{2}{|\lambda_n|} \sup_{u \in E} \|F_\rho(u)\|$, si $\lambda_n < 0$.

Soit :

$$\mathfrak{F}_{n+1}^\infty(u^0) = \{\bar{u}^0 \setminus u(\cdot, \bar{u}^0) - u(\cdot, u^0) \in C_{\alpha_n}^+\}$$

Si nous utilisons (3.22), nous avons

$$\mathfrak{F}_{n+1}^\infty(u^0) = \{\phi_{n+1}^\infty(q, u^0) + q \mid q \in E_{n+1}^\infty\}$$

Dans cette partie nous montrons que : $\mathfrak{F}_{n+1}^\infty(u^0) \cap M_1^n$ contient un unique point.

Supposons que $u \in \mathfrak{F}_{n+1}^\infty(u^0) \cap M_1^n$. Alors il existe $p \in E_1^n$ et $q \in E_{n+1}^\infty$ tel que :

$$u = p + h_1^n(p) \text{ et } u = \phi_{n+1}^\infty(q, u^0) + q.$$

Cela implique :

$$p = \phi_{n+1}^\infty(q, u^0)$$

et $q = h_1^n(p)$.

D'autre part , comme $C < 1$ et $L' < 1$,

$$p = \phi_{n+1}^\infty(h_1^n(p), u^0)$$

a une solution unique $p \in E_1^n$, et $p = p(u^0)$ est continue en u^0 , par le principe de contraction uniforme. Cela implique $\mathfrak{F}_{n+1}^\infty(u^0) \cap M_1^n$ contient un unique point. Il est facile de voir que

$$\text{graph} \phi_{n+1}^\infty(\cdot, u^0) = \text{graph} \phi_{n+1}^\infty(\cdot, p + h_1^n(p))$$

$$\text{et } E = \cup_{p \in E_1^n} \text{graph} \phi_{n+1}^\infty(\cdot, p + h_1^n(p))$$

est un feuilletage de classe C^0 . Finalement, nous prouvons que ce feuilletage est invariant sous le flot de (3.3).

Pour voir ça, nous prendrons toute feuille = graph $\phi_{n+1}^\infty(\cdot, p^0 + h_1^n(p^0))$, nous montrons que $u(\tau, \cdot)$ transforme cette feuille par une autre feuille.

En prenant un point quelconque $u^0 \in \text{graph } \phi_{n+1}^\infty(\cdot, p + h_1^n(p))$, nous avons que $u(\cdot, u^0) - u(\cdot, p^0 + h_1^n(p^0)) \in C_{\alpha_n}^+$.

Comme l'équation (3.3) est autonome et M_1^n est invariante,

$u(\cdot, u(\tau, u^0)) - u(\cdot, p(\tau)) + h_1^n(p(\tau)) \in C_{\alpha_n}^+$, ou $p(t)$ est une solution de (3.14) avec les conditions initiales $p(0) = p^0$. Cela implique que $u(\tau, u^0) \in \text{graphe } \phi_{n+1}^\infty(\cdot, p(\tau)) + h_1^n(p(\tau))$ pour toute $u^0 \in \text{graph } \phi_{n+1}^\infty(\cdot, p^0 + h_1^n(p^0))$

Maintenant nous avons construit un feuilletage invariant pour le flot sur une variété invariante de dimension n M_1^n .

Le flot en M_1^n est décrit par l'équation suivante :

$$\dot{p} = -A_1^n p + P_1^n F_\rho(p + h_1^n(p))$$

où $p \in E_1^n$. Pour simplifier les choses on suppose que, $F_\rho^n(p) = P_1^n F_\rho(p + h_1^n(p))$

$$\dot{p} = -A_1^n p + F_\rho^n(p). \tag{3.25}$$

Théorème 19 Soit $\rho > 0$ tel que $\frac{6}{\alpha} K < 1$, alors pour chaque $1 \leq k \leq n$ il existe un feuilletage invariant pour (3.14), sa feuille est donnée par :

$$\mathfrak{F}_{k+1}^{n,n}(p^0) = \{\phi_{k+1}^{n,n}(\eta, p^0) + \eta \mid \eta \in E_{k+1}^n\},$$

où $(p^0) \in E_1^n$, $\phi_{k+1}^{n,n} : E_{k+1}^n \times E_1^n \rightarrow E_1^k$ est lipschitzienne avec une constante de Lipschitz C' , avec

$$C' < \frac{2K}{\alpha_n - 4K} < 1. \tag{3.26}$$

en plus, $\phi_{k+1}^{n,n}(\eta, p^0) = P_1^k(p^0) + R_{k+1}^{n,n}(\eta, p^0)$

ou $R_{k+1}^{n,n}$ satisfait :

$$\|R_{k+1}^{n,n}(\eta, p^0)\| \leq \frac{2K}{ha_k - 4K} \|\eta\|, \quad (3.27)$$

$$\|R_{k+1}^{n,n}(\eta, p^0)\| \leq \frac{2}{|\lambda_k|} \sup_{u \in E} \|F_\rho(u)\|, \lambda_k < 0 \quad (3.28)$$

et $\mathfrak{F}_{k+1}^{n,n}(p^0) \cap M_1^{k,n} = \xi^k + l_1^{k,k}(\xi^k)$, ou $\xi \in E_1^k$ est unique, déterminé par p^0 et $\xi^k = \xi^k(P^0)$

est continue.

Soit $H_{k+1}^{n,n}(\eta) = \phi_{k+1}^{n,n}(\eta, 0)$. Alors

$$M_{k+1}^{n,n} = \{H_{k+1}^{n,n}(\eta) + \eta \mid \eta \in E_{k+1}^n\}.$$

est une variété invariante pour (3.25).

la preuve est la même que le théorème précédent, pour plus d'information consulter [19].

Théorème 20 [19] Soit $\rho > 0$ tel que $\frac{6}{\alpha}K < 1$, alors pour chaque $1 \leq k \leq n$ il existe un feuilletage invariant pour (3.14), sa feuille est donnée par :

$$\mathfrak{F}_1^{k,n}(p^0) = \{\phi_1^{k,n}(\xi, p^0) + \xi \mid \xi \in E_1^k\},$$

où $(p^0) \in E_1^n$, $\phi_1^{k,n} : E_1^k \times E_1^n \rightarrow E_{k+1}^n$ est lipschitzienne avec une constante de Lipschitz c ,

où

$$c < \frac{2K}{\alpha_n - 4K} < 1. \quad (3.29)$$

en plus, $\phi_1^{k,n}(\xi, p^0) = P_{k+1}^n(p^0) + R_1^{k,n}(\xi, p^0)$

où $R_1^{k,n}$ satisfait :

$$\|R_1^{k,n}(\xi, p^0)\| \leq \frac{2K}{\alpha_k - 4K} \|\xi\|, \quad (3.30)$$

$$\|R_1^{k,n}(\xi, p^0)\| \leq \frac{2}{\lambda_{k+1}} \sup_{u \in E} \|F_\rho(u)\|, \text{ si } \lambda_k > 0 \quad (3.31)$$

et $\mathfrak{F}_1^{k,n}(p^0) \cap M_{k+1}^{n,n}$ contient un unique point $H_{k+1}^{n,n}(\eta) + \eta$, où $\eta = \eta(P^0)$ est continue.

3.3.1 Le théorème de Hartman-Grobman

Nous considérons l'équation scalaire parabolique suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)u + g(x, u), 0 < x < \pi, t > 0 \quad (3.32)$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$u(0) = 0, u(\pi) = 0. \quad (3.33)$$

où a, g sont des fonctions différentielles avec $g(x, 0) = 0$ et $g'(x, 0) = 0$.

Nous définissons $g^x(u) = g(x, u)$ pour chaque $u \in H_0^1$.

Théorème 21 Supposons que $a(x) \in C^0((0, \pi))$, $g^x : U \rightarrow H_0^1(0, \pi)$ est une fonction de classe C^1 avec : $g^x(0) = 0$ et $g'^x(0) = 0$. où U est un voisinage ouvert de 0 dans H_0^1 et D un opérateur différentiel. Il existe alors un voisinage ouvert V de 0 dans H_0^1 et un homéomorphisme $\phi : V \rightarrow \phi(V) \subset H_0^1$ de telle sorte que si $u(t, \cdot) \in V$ est une solution de (3.32), (3.33), Alors $\phi(x(t, x))$ est une solution de l'équation linéaire :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a(x)w, 0 < x < \pi, t > 0. \quad (3.34)$$

avec

$$w(0) = 0, w(\pi) = 0. \quad (3.35)$$

et si $w(t, \cdot) \in \phi(V)$ est une solution de (3.34), (3.35) alors nous pouvons dire que $\phi^{-1}(w(t, x))$ est une solution de (3.32), (3.33).

3.4 Démonstration du théorème de Hartman-Grobman

3.4.1 Transformation sur M_1^n

Nous Considérons l'équation différentielle suivante qui décrit le flot de (3.1) sur M_1^n :

$$\dot{p} = -A_1^n p + p_1^n F_\rho(p + h_1^n(p)) \quad (3.36)$$

Théorème 22 Soit $\rho > 0$ tel que $\frac{10}{\alpha}K < 1$. Alors il existe un homéomorphisme Φ_n de $E_1^n \mapsto E_1^n$ tel que l'application Φ_n transforme les solutions de (3.36) en solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_1 = -\lambda_1 v_1 + P_1 F_\rho(v_1 + h_1(v_1)) \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dot{v}_n = -\lambda_n v_n + P_n F_\rho(v_n + h_n(v_n)) \end{array} \right. \quad (3.37)$$

et ϕ_n^{-1} transforme les solutions de (3.37) en solutions de (3.36). En plus $\Phi_n(0) = 0$ et

$$|\Phi_n(p) - p| \leq C^s, \quad (3.38)$$

où C^s est une constante indépendante de n .

Preuve La démonstration de ce théorème s'étale sur 4 étapes .

Etape 1 : construction de Φ_n

Soit $1 \leq k \leq n$ et $p^0 \in E_1^n$, nous désignons par $p(t, p^0)$ la solution de (3.36) avec la condition initiale $p(0) = p^0$ et par $v_k(0) = v_k^0$ la solution de

$$\dot{v}_k = -\lambda_k v_k + P_k F_\rho(v_k + h_k(v_k))$$

avec les condition initiale $v_k(0) = v_k^0$.

(i) $k = 1$. D'après le théorème 20 $\mathfrak{F}_2^{n,n}(p^0) \cap M_1^{1,n}$ contient un unique point $v_0^1 + l_1^{1,n}(v_0^1)$, ou $(v_0^1) \in E_1, v_1^0 = v_1(p^0)$ est continue et satisfait

$$v_1^0 = P_1 p_0 + R_2^{n,n}(l_1^{1,n}(v_0^1), p^0) \quad (3.39)$$

Par l'invariance des feuilletage et des variétés, nous savons que

$$v_1(t, v_1^0) = \phi_2^{n,n}(l_1^{1,n}(v_1(t, v_1^0)), p(t, p^0)) .$$

(ii) $k = n$. D'après le théorème 21, $\mathfrak{F}_1^{n-1}(p^0) \cap M_1^{n,n}$ contient un unique point $H_n^{n,n}(v_n^0) + (v_n^0)$, ou $(v_n^0) \in E_n, v_n^0 = v_n(p^0)$ est continue et satisfait

$$v_n^0 = P_n p_0 + R_1^{n-1}(h_n^{n,n}(v_n^0), p^0). \quad (3.40)$$

En plus nous savons par l'invariance de feuilletage et de variété invariante que :

$$v_n(t, v_n^0) = \phi_1^{n-1}(h_n^{n,n}(v_n(t, v_n^0)), p(t, p^0)) .$$

(iii) $1 < k < n$. D'après le théorème 20, $\mathfrak{F}_{k+1}^{n,n}(p^0) \cap M_1^{k,n}$ contient un unique point $l_1^{k,n}(\xi^k) + (\xi^k)$, ou $(\xi^k) \in E_1^k$, et $\xi^k = \xi^k(p^0)$ est continue et satisfait :

$$\xi^k = P_1^k p_0 + R_{n,n}^{k+1}(l_1^{k,n}(\xi^k), p^0). \quad (3.41)$$

D'après le théorème 22, $\mathfrak{F}_1^{k-1,k}(\xi^k) \cap M_k^{k,k}$ contient un unique point $H_k^{k,k}(v_k^0) + (v_k^0)$, ou $(v_k^0) \in E_k, v_k^0 = v_k^0(\xi^k)$ est continue et satisfait

$$v_k^0 = P_k \xi^k + R_1^{k-1}(H_k^{k,k}(v_k^0), \xi^k) \quad (3.42)$$

Pour cette raison $v_k^0 = v_k^0(\xi^k(p^0))$ est continue et satisfait

$$v_k^0 = P_k p^0 + P_k R_{k+1}^{n,n}(l_1^{k,n}(\xi^k), p^0) + R_1^{k-1,k}(H_k^{k,k}(v_k^0), \xi^k). \quad (3.43)$$

Nous savons par l'invariance de feuilletage et de variété invariante que :

$$v_k(t, v_k^0) = \phi_1^{k-1,k}(H_k^{k,k}(v_k(t, v_k^0)), \xi(p(t, p^0)))$$

Nous définissons $\Phi_n(p^0) = \sum_{k=1}^n v_k^0$, il est clair que Φ_n est continue et $\Phi_n(0) = 0$. On note $\sum_{k=1}^n v_k^0$ par v^n .

Par (3.39),(3.40),(3.43) et les théorème 20, 21 on a

$$\Phi_n(p^0) = v^n = p^0 + R_2^{n,n}(l_1^{1,n}(v_1^0), p^0) + R_1^{n-1,n}(H_n^{n,n}(v_n^0), p^0) + \sum_{k=2}^{n-1} (P_k R_{k+1}^{n,n}(l_1^{k,n}(\xi^k), p^0) + R_1^{k-1,k}(H_k^{k,k}(v_k^0), \xi^k)) \quad (3.44)$$

et

$$|\Phi_n(p^0) - (p^0)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{|\lambda_k|} \sup_{u \in E} F_{\rho}(u) = C^s.$$

Notez que cette série infinie est convergente puisque $\lambda_k = k^2 + o(1)$. Donc nous avons que Φ transforme la solution de (3.1) en la solution de (3.36).

Etape 2 Φ_n est injective

Lemme 3.2 Pour $m > n$

$$P_1^n \Phi_m(p^0 + l_1^{n,m}(p^0)) = \Phi_n(p^0) \quad (3.45)$$

Preuve Soit $P_1^n \Phi_m(p^0 + l_1^{n,m}(p^0)) = \sum_{k=1}^n \bar{v}_k^0$ et $\Phi_n(p^0) = \sum_{k=1}^n v_k^0$. Nous allons montrer que $\bar{v}_k^0 = v_k^0$.

(i) $k = 1$, d'après la construction de Φ_m et Φ_n nous savons que $\bar{v}_1^0 + l_1^{1,m}(\bar{v}_1^0) \in \mathfrak{F}_2^{m,m}(p^0 + l_1^{n,m}(p^0)) \cap M_1^{1,m}$ et $v_1^0 + l_1^{1,n}(v_1^0) \in \mathfrak{F}_2^{n,n}(p^0) \cap M_1^{1,n}$.

De (3.22) nous avons $v_1^0 + l_1^{1,n}(v_1^0) + l_1^{n,m}(v_1^0 + l_1^{1,n}(v_1^0)) \in M_1^{1,m}$.

Dans l'intervalle, $v_1^0 + l_1^{1,n}(v_1^0) + l_1^{n,m}(v_1^0 + l_1^{1,n}(v_1^0)) \in \mathfrak{F}_2^{m,m}(p^0 + l_1^{n,m}(p^0))$.

par conséquent $v_1^0 = \bar{v}_1^0$ puisque $\mathfrak{F}_2^{m,m}(p^0 + l_1^{n,m}(p^0)) \cap M_1^{1,m}$ contient un unique point.

(ii) $k = n$. Il est trivial.

(iii) $1 < k < n$ d'après la constructions de Φ_m et Φ_n nous avons $\bar{\xi}^k = \xi^k$.

Ce qui implique que $\bar{v}_k^0 = v_k^0$. Donc $P_1^n \Phi_m(p^0 + l_1^{n,m}(p^0)) = \Phi_n(p^0)$

Maintenant nous allons prouver que Φ_n est injective.

Soit $P^0 \neq \bar{p}^0$ pour ça, nous considérons les trois cas suivants :

- (1) Si $p(\cdot, p^0) - p(\cdot, \bar{p}^0)$ n'appartient pas à $C_{\alpha_k}^+$ pour $k = 1, \dots, n$. Cela signifie qu'il n'y a pas de feuille sur laquelle p^0 et \bar{p}^0 restent en même temps. Ce qui implique que $\bar{v}_1^0 \neq v_1^0$.
- (2) Si $p(\cdot, p^0) - p(\cdot, \bar{p}^0) \in C_{\alpha_{n-1}}^+$, alors $\bar{v}_1^0 \neq v_1^0$ puisque $p^0 \neq \bar{p}^0$.
- (3) $p(\cdot, p^0) - p(\cdot, \bar{p}^0) \in C_{\alpha_k}^+$ mais n'appartient pas à $C_{\alpha_{k+1}}^+$, pour $1 \leq k < n - 1$. Donc par le théorème 20 nous avons :

$$\xi^{k+1}(p^0) \neq \xi^{k+1}(\bar{p}^0) \in E_1^{k+1},$$

où ξ^k est donnée par (3.41), En utilisant (2), nous savons que $P_{k+1}\Phi_{n+1}(\xi^{k+1}(p^0)) \neq P_{k+1}\Phi_{n+1}(\xi^{k+1}(\bar{p}^0))$.

Et si on utilise (3.45), nous avons que $P_{k+1}\Phi_n(\xi^{k+1}(p^0) + l_1^{k+1,n}(\xi^{k+1}(p^0))) \neq P_{k+1}\Phi_n(\xi^{k+1}(\bar{p}^0) + l_1^{k+1,n}(\xi^{k+1}(\bar{p}^0)))$. C'est-à-dire que $v_{k+1}^0 \neq \bar{v}_{k+1}^0$. Donc Φ_n est injective.

Etape 3 Φ_n est surjective

Nous le prouvons par récurrence

- (i) $n = 1$. Il est trivial.
- (ii) Supposons que c'est vrai pour $n - 1$.
- (iii) Nous montrons que Φ_n est surjective. Pour tout $v^n = \sum_{k=1}^n v_k^0$, et par hypothèse de récurrence, il existe un unique $p^{n-1} \in E_1^{n-1}$ tel que

$$\Phi_{n-1}(p^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} v_k = v^{n-1}$$

nous savons par le principe de fonctions contractante que

$$\mathfrak{F}_1^{n-1,1}(v_n + H_n^{n,n}(v_n)) \cap \mathfrak{F}_n^{n,n}(p_{n-1} + l_1^{n-1,n}(p_{n-1}))$$

contient un unique point p^n .

De (3.45) et la construction de Φ_n nous avons $\Phi_n(p^n) = v^n$. Donc Φ_n est surjective.

Etape 4 Φ_n^{-1} est continue

Comme E^n est un espace de dimension infini et Φ_n est continue et satisfait (3.38), par le théorème d'inversion locale nous avons que Φ_n^{-1} est continue.

Par l'unicité des solutions, Φ_n^{-1} transforme les solutions de (3.37) en solutions de (3.36).

La transformation d'équation (3.3)

Dans cette section nous démontrons le théorème (21)

Théorème 23 [19] *Soit $\rho > 0$ tel que $\frac{10}{\alpha}K < 1$. Alors il existe un homéomorphisme Φ_n de $E \mapsto E$ tel que l'application Φ_n transforme les solutions de (3.3) en solution de :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_1 = -\lambda_1 v_1 + P_1 F_\rho(v_1 + h_1(v_1)) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dot{v}_n = -\lambda_n v_n + P_n F_\rho(v_n + h_n(v_n)) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \tag{3.46}$$

et ϕ_n^{-1} transforme la solution de (3.37) en solution de (3.46). En plus $\Phi_n(0) = 0$ et

$$|\Phi_n(u) - u| \leq C^s, \tag{3.47}$$

Voir preuve dans [19]. (les mêmes étapes de preuve que le théorème 22).

Théorème 24 *Il existe un homéomorphisme $\Psi : E \mapsto E$ tel que Ψ transforme les solutions de (3.46) en solutions de*

$$\dot{w} = -Aw \tag{3.48}$$

et Ψ^{-1}

transforme les solutions de (3.48) en solutions de (3.46).

Preuve Nous avons l'équation suivante :

$$\dot{v}_n = -\lambda_n v_n + P_n F_\rho(v_n + h_1^n(v_n)) \quad (3.49)$$

une équations différentielle de dimension 1. Puisque $\lambda_n \neq 0$, nous savons qu'il existe un homéomorphisme ψ_n de $E_n \rightarrow E_n$ qui est donné par :

$$\psi_n(v_n) = v_n + H_n(v_n) \quad (3.50)$$

tel que :

$$\|H_n\| \leq \frac{2}{|\lambda_n|} \sup_{u \in E} F\rho(u)$$

et transforme (3.50) en

$$\dot{w} = -\lambda_n w_n \quad (3.51)$$

Et comme $\lambda_n = n^2 + o(1)$ si $n \rightarrow \infty$, nous savons que $\sum_{n=1}^{\infty} H_n(v_n)$ est uniformément convergente.

H_n est continue donc $\sum_{n=1}^{\infty} H_n(P_n v_n)$ est continue en v , cela implique que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(P_n v_n)$$

est convergente et continue en v . Soit

$$w = \Psi(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(P_n v_n)$$

Comme ψ_n est un homéomorphisme donné par (3.51), nous savons que $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^{-1}(P_n v_n)$ est convergente et continue en w , c'est l'inverse de Ψ . Pour $V = B_\rho(0)$, ρ est un réel et tel que $\frac{10}{\alpha} < 1$ par les théorèmes 23, 24 et, on note que $\Phi^* = \Psi \cdot \Phi$, alors $\Phi^* = \Psi \cdot \Phi$ est un homéomorphisme de $V \rightarrow \Phi^*(V)$ transforme (3.32), (3.33) en (3.34), (3.35).

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons étudié une méthode de linéarisation des équations de réaction-diffusion basée sur la théorie de variété invariante et du feuilletage invariant. Nous avons utilisé les variétés invariantes de dimension 1 pour tracer des nouveaux axes et le feuilletage invariant afin de tracer de nouvelles coordonnées, donc nous pouvons complètement dissocier le problème (3.32), (3.33) en un nombre infini de systèmes de dimension 1.

Ensuite, nous linéarisons chaque problème à une dimension, les mettons ensemble pour obtenir une C^0 théorie de linéarisation pour le problème (3.32) , (3.33).

Et nous suggérons qu'un travail supplémentaire traite des exemples (le cercle par exemple).

Bibliographie

- [1] ALE, J. Invariant manifolds near hyperbolic fixed points. *IMP Preprint Series 686, September (2006)*.
- [2] ARNOLD, V. *Equations différentielle ordinaire*. Mir, 1974.
- [3] ARNOLD, V. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Mir, 1980.
- [4] BEBBOUCHI, R. *Équations différentielles ordinaires*. OPU, Alger, 1995.
- [5] BENOÎT, P. *Topologie et analyse différentielle*. L'ecole Normale Supérieure, 2005.
- [6] BREZIS, H. *Analyse fonctionnelle théorie et applications*. Mason, Paris, 1983.
- [7] BRICMONT, J. *Introduction à la dynamique non linéaire*. PHYS 2111, 2009-2010.
- [8] CHARLES-MICHEL, M. *Systèmes dynamiques Une introduction*. ellipses, 2003.
- [9] CHEBLI, H. *Analyse hilbertienne*. Centre de Puplication Universitaire, Tunis, 2001.
- [10] CLAUDE, V. *Notes de cours de Géométrie différentielle*. L'ecole Normale Supérieure, 2012.
- [11] DUFRAINE, E. Équivalence topologique de champs de vecteurs en présence de connexions. Master's thesis, Thèse Université de Bourgogne, 2011.

-
- [12] FRÉDÉRIC, P. *Géométrie différentielle élémentaire*. L'ecole Normale Supérieure, 2006-2007.
- [13] GEORGE.R, AND SELL.Y. *Dynamics of evolutionary equations*. Springer, New York, 2002.
- [14] GERALD, T. *Ordinary differential equations and Dynamical systems*. American Mathematical society providence,(<http://www.ams.org/bookstore>), 2012.
- [15] HARTMAN, P. *Ordinary differential equations*. Weiley-Interscience, 1964.
- [16] HIRCH, M., AND SHUB, M. *Invariant Manifold*. Springer.N.Y, 1977.
- [17] JACQUE, L. *"Introductions aux variétés différentielles"*. EDP Science, Paris, 1996.
- [18] JEAN-PIERRE, D. *Methodes d'analyse globale en algebre et en optimisation*. MIP, Département de Mathématiques Université Paul Sabatier,Toulouse, (dedieu@mip.ups-tlse.fr), 2004.
- [19] KENING, L. **A Hartman-Grobman theorem for scalar reaction-diffusion equations**, *IMP Preprint Series 686, September (1990)*.
- [20] MICHAEL, L. *Graduate ODE lecture notes*. Departement of Mathematical and Statistical Sciences ,University of Alberta, 2009.
- [21] RIZZO, K. *Dynamique adaptative modélisation du principe de divergence de Darwin*. L2. Mathématiques tipe, 2008.
- [22] STEPHEN, W. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and Chaos*. Springer, New York, 2003.
- [23] SYLVIE, B.-G. *Calcul différentiel et équations différentielles*. Dunod,Paris, 2010.
- [24] ZHEN, M. *Numerical bifurcation analysis for reaction-diffusion equations*. Springer, 2000.

- [25] ZHENDER, M. *Lectures on Dynamical Systems*. European Mathematical Society, 2010.

Résumé

Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude d'une méthode géométrique (basée sur l'existence de variété invariante et feuilletage invariant) pour la détermination des formes normales des équations d'évolution de type réaction-diffusion au voisinage des solutions stationnaires hyperboliques.

Mots clés : Equation de réaction-diffusion, linéarisation, systèmes dynamique, géométrie différentielle, variété stable-instable, feuilletage au voisinage d'un point fixe hyperbolique

Abstract

The objective of this work is the study of a geometric method (based on the invariant manifold theory and the invariant foliation theory) for the determination of normal forms of evolution equations of reaction-diffusion type in the neighborhood of hyperbolic stationary solution.

Keywords : Reaction-diffusion equation, linearization, dynamic systems, differential geometry, stable and unstable manifolds, foliation of an ODE near a hyperbolic fixed point.

