

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
(ALGER)**



THESE

Présentée pour l'obtention du **diplôme de Doctorat d'état en Mathématiques**

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par : DERBAL Abdallah

Thème :

Quelques Fonctions Arithmétiques et Hypothèse de Riemann

Soutenue le : 27/02/2005, devant le jury composé de

Mr. B. BENZAGHOU, Professeur, USTHB	Président
Mr. A. SMATI Maître de Conférences, Univ. Limoges	Dteur de thèse
Mr. M. N. BENKAFADAR, Professeur, Univ. Constantine	Examineur
Mr. K. BETINA, Professeur, USTHB	Examineur
Mr. A. MOVAHHEDI, Professeur, Univ. Limoges	Examineur
Mr. M. Zitouni, Professeur, USTHB	Examineur
Mr. A. SALINIER, Maître de Conférences, Univ. Limoges	Examineur

DEDICACES

À la mémoire de mon père défunt Mohamed Tahar

À ma mère

À ma petite famille :

*ma femme, mes filles et fils Rima, Khadidja, Boutheyna,
Mohamed Tahar et Aïman*

REMERCIEMENTS

J'adresse ma profonde reconnaissance et mes sincères remerciements aux professeurs Abdelhakim SMATI, Guy ROBIN, Jean-Louis NICOLAS et Mohamed ZITOUNI qui ont accepté de diriger cette thèse et qui m'ont permis de m'inscrire à maintes reprises en doctorat d'état à l'Université de Sciences et de la Technologie de Bab Ezzour (Alger). Leur sympathie et leur encouragement ont été très stimulants pour moi durant la préparation de cette thèse. Leur parfaite connaissance du domaine de la théorie des nombres m'a aidé à mieux comprendre les problèmes étudiés et à les aborder avec confiance.

Monsieur le Professeur Abdelhakim SMATI, depuis qu'il a été mon directeur de thèse (après le départ du Professeur G. ROBIN à la retraite) n'a jamais montré d'hésitation, bien au contraire, sa gentillesse, son accueil chaleureux au laboratoire Laco de Mathématiques de l'Université de Limoges, ses encouragements et son aide ont été pour moi d'un grand soutien et me donnaient du courage pour poursuivre le travail de recherche et terminer cette thèse. Qu'il reçoie, pour cela, ma profonde gratitude et ma sincère reconnaissance.

Monsieur le Professeur Benali BENZAGHOU a accepté avec gentillesse de présider le jury de cette thèse. Pour cet honneur qu'il me fait, je le remercie chaleureusement.

Messieurs les Professeurs Kamel BETINA (USTHB, Bab Ezzouar, Alger), **Mohamed Naceredine BENKAFADAR** (Université Mentouri-Constantine), **Abbas MOVAHHEDI** (Université de Limoges France), **Alain SALINIER** (Université de Limoges France), **Mohamed ZITOUNI** (USTHB, Bab Ezzouar, Alger), me font l'honneur de faire partie du jury de cette thèse. Je les en remercie.

Enfin je tiens à adresser mes profonds remerciements à TOUT le personnel du laboratoire Laco et du Département de Mathématiques (professeurs, enseignants-chercheurs, administratifs) de l'Université de Limoges, pour sa gentillesse et son bon accueil durant tous mes séjours, longs ou courts. Il ne laisse, en moi, pas le moindre doute que j'étais comme chez moi, dans mon propre pays. Que tous trouvent ici toute ma gratitude.

SOMMAIRE

Notations	5
Introduction	6
Chapitre 1 Les fonctions $L(s, \chi)$ de Dirichlet	9
Les caractères modulaires	10
Évaluation des fonctions $L(s, \chi)$ de Dirichlet	16
Les zéros des fonctions $L(s, \chi)$ de Dirichlet sur l'axe $\Re(s) = 1/2$	17
Les tables des premiers zéros complexes de partie imaginaire ≥ 0 des fonctions $L(s, \chi)$ de Dirichlet pour les caractères modulo $k = 1, \dots, 20, 22, 23, 26, 30, 34, 38, 46, 73$	19
Chapitre 2 Étude des fonctions $R(x; k, l)$ et $J(x; k, l)$	22
Chapitre 3 Estimation des fonctions	
$\prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$ et $\prod_{\sqrt{2x} < p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$	33
Chapitre 4 Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs unitaires dans les progressions arithmétiques $(\sigma_{k,l}^*(n))$	39
Chapitre 5 Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs dans les progressions arithmétiques $(\sigma_{k,l}(n))$	42
Chapitre 6 Grandes valeurs de la fonction $\sigma_{k,l}(n)/\sigma_{k,l}^*(n)$	48
Chapitre 7 Le nombre des diviseurs d'un entier dans les progressions arithmétiques	63
Chapitre 8 Une version effective d'un théorème de Bateman	72
Bibliographie	82

NOTATIONS

Les lettres p , n , x et $s = \sigma + it$ désignent successivement un nombre premier, un nombre entier positif, un nombre réel et un nombre complexe de partie réelle $\Re(s) = \sigma$ et de partie imaginaire $\Im(s) = t$

$\varphi(n)$ la fonction d'Euler qui compte les résidus inversibles modulo $n \geq 1$

$$\varphi(n) = \sum_{1 \leq l \leq n, (l,n)=1} 1 = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

k et l désignent deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$

$$\begin{aligned} \theta(x; k, l) &= \sum_{p \leq x, p \equiv l(k)} \ln p, & \theta(x) &= \theta(x; 1, 1) = \sum_{p \leq x} \ln p \\ \psi(x; k, l) &= \sum_{p^m \leq x, p^m \equiv l(k)} \ln p, & \psi(x) &= \psi(x; 1, 1) = \sum_{p^m \leq x} \ln p \\ S(x; k, l) &= \theta(x; k, l) - \frac{x}{\varphi(k)}, & R(x; k, l) &= \psi(x; k, l) - \frac{x}{\varphi(k)} \\ g(x) &= \frac{1 + \ln x}{x^2 \ln^2 x}, & J(x; k, l) &= \int_x^{+\infty} R(t; k, l) g(t) dt, \\ K(x; k, l) &= \int_x^{+\infty} S(t; k, l) g(t) dt, & L(x; k, l) &= \int_x^{+\infty} (\psi(t; k, l) - \theta(t; k, l)) g(t) dt \\ \pi(x; k, l) &= \sum_{p \leq x, p \equiv l(k)} 1, & \pi(x; 1, 1) &= \pi(x) \end{aligned}$$

$p_1 = p_1(k, l)$ le premier nombre premier congru à l modulo k

χ un caractère de Dirichlet modulo k

$\widehat{G}(k)$ = l'ensemble des $\varphi(k)$ caractères de Dirichlet χ modulo k

$L(s, \chi)$ la fonction de Dirichlet associée au caractère χ modulo k définie dans le demi plan complexe $\Re(s) = \sigma > 1$ par $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi(n)/n^s$

$Z(\chi)$ l'ensemble des zéros complexes de la fonction de Dirichlet $L(s, \chi)$

$\widehat{Z}(k)$ la réunion des $\varphi(k)$ ensembles $Z(\chi)$

$HRG(k)$ = l'Hypothèse de Riemann Généralisée pour k qui conjecture que tous les zéros complexes $\rho \in \widehat{Z}(k)$ sont sur la droite $x = 1/2$

$P_{k,l}$ le produit

$$P_{k,l} = \prod_{p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \quad \left(P_{1,1} = \frac{6}{\pi^2}, \quad P_{2,1} = \frac{8}{\pi^2}\right)$$

γ la constante d'Euler définie par $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.57721566 \cdots$

$\mathbb{N}$ = l'ensemble des nombres entiers naturels

$\mathbb{Z}$ = l'ensemble des nombres entiers rationnels

$\mathbb{R}$ = l'ensemble des nombres réels

$\mathbb{C}$ = l'ensemble des nombres complexes.

INTRODUCTION.

Soient k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$, $\{l + km\}$ la progression arithmétique de premier élément l et de raison k et n un nombre entier plus grand ou égal à 2.

Le travail présenté dans cette thèse porte essentiellement sur l'étude des fonctions arithmétiques suivantes :

$\sigma_{k,l}(n)$ = somme des diviseurs de n dans la progression arithmétique $\{l + km\}$.

$\sigma_{k,l}^*(n)$ = somme des diviseurs unitaires dans la progression arithmétique $\{l + km\}$.

Un diviseur d de n est dit unitaire s'il est premier avec n/d .

$\sigma_{k,l}(n)/\sigma_{k,l}^*(n)$ = quotient de $\sigma_{k,l}(n)$ et $\sigma_{k,l}^*(n)$.

$d_{k,l}(n)$ = nombre des diviseurs de n dans la progression arithmétique $\{l + km\}$.

Mais aussi sur l'étude des fonctions $L(s, \chi)$ de Dirichlet dont la position de leurs zéros complexes intervient dans le comportement des grandes valeurs des fonctions $\sigma_{k,l}(n)$ et $\sigma_{k,l}^*(n)$ et enfin la répartition effective des valeurs de la fonction $\varphi(n)$ d'Euler.

Pour, $n = \prod_{p^\alpha \parallel n} p^\alpha \geq 2$, on pose par définition

$$\begin{aligned} \sigma_{k,l}(n) &= \prod_{p^\alpha \parallel n, p \equiv l(k)} (1 + \dots + p^\alpha), & \sigma_{1,1}(n) = \sigma(n) &= \sum_{d|n} d = \prod_{p^\alpha \parallel n} (1 + \dots + p^\alpha) \\ \sigma_{k,l}^*(n) &= \prod_{p^\alpha \parallel n, p \not\equiv l(k)} (1 + p^\alpha), & \sigma_{1,1}^*(n) = \sigma^*(n) &= \sum_{d|n, (d, n/d)=1} d = \prod_{p^\alpha \parallel n} (1 + p^\alpha) \\ d_{k,l}(n) &= \prod_{p^\alpha \parallel n, p \equiv l(k)} (\alpha + 1), & d_{1,1}(n) = d(n) &= \sum_{d|n} 1 = \prod_{p^\alpha \parallel n} (\alpha + 1) \end{aligned}$$

et, pour tout nombre réel $x \geq 0$

$$\Phi(x) = \sum_{\varphi(n) \leq x} 1.$$

Pour $k \geq 1$, χ un caractère modulo k et $s = \sigma + it$ un nombre complexe tel que $\Re(s) > 1$, on pose

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

La fonction $L(s, \chi)$ se prolonge dans tout le plan complexe en une fonction holomorphe sauf si le caractère χ est principal. Dans ce cas elle admet un pôle simple en $s = 1$ et le résidu y est $\varphi(k)/k$.

Les fonctions $L(s, \chi)$ de Dirichlet

Le calcul des fonctions $L(s, \chi)$ de Dirichlet et de leurs zéros complexes ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherches ([8], [28], [32]). Dans le premier chapitre de cette thèse, on établit une méthode de calcul de ces fonctions et de leurs premières racines complexes. Cette méthode est un raffinement de celle décrite par D. Davies et C. B. Haselgrove dans [8].

Le deuxième et le troisième chapitre

Ils sont consacrés à l'étude des fonctions

$$R(x; k, l), \quad J(x; k, l), \quad K(x; k, l), \quad L(x; k, l), \quad \prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}, \quad \prod_{p > x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

pour lesquelles on a donné des formules asymptotiques et des majorations explicites numériquement appliquées aux cas $k = 1, 2, 3$. L'étude de ces fonctions est fondamentale pour celle des fonctions $\sigma_{k,l}(n)$, $\sigma_{k,l}^*(n)$ et $\sigma_{k,l}(n)/\sigma_{k,l}^*(n)$.

La fonction $\sigma_{k,l}^*(n)$

On a montré que son ordre maximum est égal à

$$a_{k,l} P_{k,l} n (\ln(\varphi(k) \ln n))^{1/\varphi(k)}$$

où $a_{k,l}$ est un nombre réel strictement positif effectivement calculable explicité dans [35] page 356. Voici, à titre d'exemples, les valeurs numériques des nombres $a_{k,l}$ pour $k = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= e^\gamma = 1.781071 \dots, & a_{2,1} &= e^\gamma/2 = 0.890536 \dots \\ a_{3,1} &= \left((2\sqrt{3}\pi P_{3,2} e^\gamma) / 27 \right)^{1/2} = 0.712515 \dots, & a_{3,2} &= \left((8\sqrt{3}\pi P_{3,1} e^\gamma) / 27 \right)^{1/2} = 1.666463 \dots \\ a_{4,1} &= ((\pi P_{4,3} e^\gamma) / 8)^{1/2} = 0.773811 \dots, & a_{4,3} &= ((\pi P_{4,1} e^\gamma) / 4)^{1/2} = 1.150843 \dots \end{aligned}$$

Pour $k = 1, \dots, 20, 22, 23, 26, 30, 34, 38, 46, 73, 146$, on a montré qu'il existe une infinité de nombres entiers n tels que

$$\sigma_{k,l}^*(n) > a_{k,l} P_{k,l} n (\ln(\varphi(k) \ln n))^{1/\varphi(k)}.$$

La fonction $\sigma_{k,l}(n)$

Pour la fonction $\sigma_{k,l}(n)$, on a précisé le théorème principal de [25] dans les cas $k = 2, 3$ en montrant

$$\begin{aligned} (HRG(3) \text{ est vraie}) \Rightarrow & \quad \sigma_{3,2}(n) < a_{3,2} n (\ln(2 \ln n))^{1/2} \quad \text{pour } n \geq 5 \\ & \quad \sigma_{2,1}(n) < a_{2,1} n (\ln(\ln n)) \quad \text{pour } n \geq 3^4 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times \dots \times 67. \end{aligned}$$

La réciproque s'obtient comme dans le cas $k = 1$ dans [24]. On a aussi donné des majorations explicites de $\sigma_{2,1}(n)$ et $\sigma_{3,1}(n)$. Les nombres $\sigma_{k,l}$ —colossalement abondants ($\sigma_{k,l} - c.a.$) définis et étudiés dans [1], [13], [24], [25] sont à la base de l'étude des grandes valeurs de la fonction $\sigma_{k,l}(n)$. Nous les avons aussi étudié et établi des programmes en fortran pour les calculer effectivement.

La fonction $\sigma_{k,l}(n)/\sigma_{k,l}^*(n)$

On a prouvé que $\sigma_{k,l}(n)/\sigma_{k,l}^*(n)$ prend ses grandes valeurs sur des nombres voisins des nombres $\sigma_{k,l}$ —colossalement abondants qu'on a appelé $\sigma_{k,l}^*$ —colossalement abondants. Nous les avons étudié et établi des programmes en fortran pour les calculer effectivement. À l'aide de ces nombres on a montré que l'ordre maximum de $\sigma_{k,l}(n)/\sigma_{k,l}^*(n)$ est égal à

$$a_{k,l} (\ln(\varphi(k) \ln n))^{1/\varphi(k)}$$

et, contrairement à $\sigma_{k,l}(n)$, on a montré que pour tout $k \geq 1$

$$\frac{\sigma_{k,l}(n)}{\sigma_{k,l}^*(n)} < a_{k,l} (\ln(\varphi(k) \ln n))^{1/\varphi(k)} \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Ensuite, on a établi les majorations explicites suivantes

$$\begin{aligned} \sigma(n)/\sigma^*(n) &< e^\gamma (\ln \ln n) && \text{pour } n \geq 17 \\ \sigma_{2,1}(n)/\sigma_{2,1}^*(n) &< (e^\gamma/2) (\ln \ln n) && \text{pour } n \geq 676 \\ \sigma_{3,1}(n)/\sigma_{3,1}^*(n) &< a_{3,1} (\ln(2 \ln n))^{1/2} && \text{pour } n \geq 8282 \\ \sigma_{3,2}(n)/\sigma_{3,2}^*(n) &< a_{3,2} (\ln(2 \ln n))^{1/2} && \text{pour } n \geq 4. \end{aligned}$$

Pour cela on a utilisé les estimations effectives des fonctions sommatoires des nombres premiers dans les progressions arithmétiques données dans [9] et [23], le calcul effectif des nombres $\sigma_{k,l}^*$ —colossalement abondants et les valeurs numériques des nombres $a_{k,l}$ pour $k = 1, 2, 3$.

La fonction $d_{k,l}(n)$

Les résultats obtenus sur la fonction $d_{k,l}(n)$ généralisent ceux obtenus par J. L. Nicolas et G. Robin sur la fonction $d(n)$ dans [20]. On a introduit les nombres $d_{k,l}$ —hautement composés supérieurs qui généralisent ceux définis par Ramanujan et qui maximise la fonction $d_{k,l}(n)$, on a donné leur structure et écrit des programmes en fortran pour les calculer effectivement. À l'aide de ces nombres on a montré que l'ordre maximum de $\ln(d_{k,l}(n))$ est égal à

$$(\ln 2) \frac{\ln n}{\ln(\varphi(k) \ln n)}$$

et obtenu des estimations effectives de $d_{k,l}(n)$ dans les cas $k = 1, \dots, 13$.

La fonction $\Phi(x)$

Pour la fonction $\Phi(x)$ nous avons donné une version effective du théorème de Batemann ([6]), comparable à celle obtenue par A. Smati dans [31].

CHAPITRE 1

LES FONCTIONS $L(s, \chi)$ DE DIRICHLET

Résumé

Soient $k \geq 3$, k un nombre entier, χ un caractère primitif modulo k et $L(s, \chi)$ la fonction de Dirichlet associée au caractère χ définie dans le demi plan complexe $\Re(s) > 1$ par

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Dans ce chapitre, on établit des formules qui permettent d'évaluer et prolonger analytiquement la fonction $L(s, \chi)$ à tout le plan complexe $\mathbb{C}$ et calculer ses premiers zéros complexes. Notre méthode est inspirée de celle de Davies et Haselgrove dans [8].

1.1 Introduction

Soient $k \geq 3$, k un nombre entier, χ un caractère primitif modulo k et $L(s, \chi)$ la fonction de Dirichlet associée au caractère χ . Pour $s = \sigma + it$ un nombre complexe, r et N deux nombres entiers tels que $\sigma > -2r + 1$ et $N > |s| + 2r$, nous établirons les formules suivantes :

$$(1.1) \quad L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{kN} \frac{\chi(n)}{n^s} - \sum_{m=1}^r C_{2m-1} \prod_{j=0}^{2m-2} \left(\frac{s+j}{(kN)^{s+1}} \right) + R_1(s) \quad \text{si } \chi(-1) = +1$$

$$(1.2) \quad L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{kN} \frac{\chi(n)}{n^s} - \frac{C_0}{(kN)^s} - \sum_{m=1}^r C_{2m} \prod_{j=0}^{2m-1} \left(\frac{s+j}{(kN)^{s+1}} \right) + R_2(s) \quad \text{si } \chi(-1) = -1$$

où les nombres $C_r = C_r(\chi)$ sont effectivement calculables à partir des relations (1.3) qui les lient avec les fonctions complexes $\varphi_r(x, \chi)$ à variable réelle x définies par

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \varphi_0(x, \chi) &= S(x, \chi) + C_0 & \text{où } S(x, \chi) &= \sum_{n \leq x} \chi(n) \\ \varphi_{r+1}(x, \chi) &= \int_0^x \varphi_r(t, \chi) dt + C_{r+1} & \text{pour } r &= 0, 1, 2, \dots \\ \int_0^k \varphi_r(x, \chi) dx &= 0 & \text{pour } r &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

et les restes $R_1(s)$ et $R_2(s)$ sont respectivement majorés par les expressions

$$|R_1(s)| \leq \frac{2|s| \sqrt{k} \zeta(2r)}{(2r + \sigma - 1) (2\pi)^{2r} (kN)^\sigma} \prod_{j=1}^{2r-1} \left(\frac{|s+j|}{N} \right) \quad \text{et} \quad |R_2(s)| \leq \frac{2|s| \sqrt{k} \zeta(2r+1)}{(2r + \sigma) (2\pi)^{2r+1} (kN)^\sigma} \prod_{j=1}^{2r} \left(\frac{|s+j|}{N} \right).$$

La fonction $L(s, \chi)$ vérifie l'équation fonctionnelle $L(s, \chi) = \xi(s, \chi) L(1-s, \bar{\chi})$ ([8] page 123) où

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \xi(s, \chi) &= \left(\frac{2\pi}{k} \right)^s \times \frac{E(\chi)}{\pi} \times \Gamma(1-s) \times \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right), \quad E(\chi) = \sum_{m=1}^k \chi(m) \cos\left(\frac{2\pi m}{k}\right) \quad \text{si } \chi(-1) = +1 \\ \xi(s, \chi) &= \left(\frac{2\pi}{k} \right)^s \times \frac{E(\chi)}{\pi} \times \Gamma(1-s) \times \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), \quad E(\chi) = \sum_{m=1}^k \chi(m) \sin\left(\frac{2\pi m}{k}\right) \quad \text{si } \chi(-1) = -1. \end{aligned}$$

On considère la fonction $Z(t, \chi)$ définie par

$$(1.5) \quad Z(t, \chi) = L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \exp(i\theta(t, \chi)) \quad \text{où} \quad \theta(t, \chi) = -\frac{1}{2} \arg\left(\xi\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)\right).$$

A l'aide de l'équation fonctionnelle on vérifie que $Z(t, \chi)$ est une fonction réelle de t vérifiant

$$(1.6) \quad Z(t, \chi) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad L(1/2 + it, \chi) = 0.$$

Soit $T \geq 1$. On note par $N(T, \chi)$ le nombre de zéros complexes de $L(s, \chi)$ dans le rectangle R_T dont les sommets sont les points d'affixes $-\frac{1}{2} - iT$, $\frac{3}{2} - iT$, $\frac{3}{2} + iT$, $-\frac{1}{2} + iT$. D'après [17] page 268, on a

$$(1.7) \quad 2\pi N(T, \chi) = T \ln\left(\frac{k}{\pi}\right) + 4\Im\left(\ln\left(\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2} + i\frac{T}{2}\right)\right)\right) + 2\Delta_C \arg(L(s, \chi))$$

où $a = (\chi(1) - \chi(-1))/2$ et $\Delta_C \arg(L(s, \chi))$ est la variation de l'argument de $L(s, \chi)$ sur le contour C qui est la partie de R_T avec $\sigma \geq 1/2$.

De (1.6) on déduit que l'hypothèse de Riemann généralisée pour k est vraie jusqu'à la hauteur T si et seulement si pour $|t| \leq T$, le nombre de changements de signe de $Z(t, \chi)$ est égal à $N(T, \chi)$ ce qui est le cas pour $k = 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 23, 73$ et $T = 50$. Les calculs sont faits par le fortran et, pour le calcul effectif des zéros des fonctions $L(s, \chi)$ on a utilisé la méthode numérique dichotomie.

1.2 Les caractères modulaires

Définition 1.1 Soit $k \geq 2$ un nombre entier. On considère les groupes abéliens suivants $G(k)$ le groupe multiplicatif des classes modulo k , $\mathbb{C}^*$ le groupe multiplicatif des nombres complexes et $\text{Hom}(G(k), \mathbb{C}^*)$ le groupe des homomorphismes de $G(k)$ dans $\mathbb{C}^*$.

Pour tout $f \in \text{Hom}(G(k), \mathbb{C}^*)$, on définit la fonction arithmétique $\mathbb{Z} \xrightarrow{\chi_f} \mathbb{C}$ par

$$\chi_f(n) = f(\bar{n}) \quad \text{si} \quad (n, k) = 1 \quad \text{et} \quad \chi_f(n) = 0 \quad \text{si} \quad (n, k) \neq 1.$$

χ_f est appelé caractère modulo k associé à f .

L'ensemble des caractères modulo k est noté par $\widehat{G}(k)$, la loi de composition

$$(\chi\chi')(n) = \chi(n)\chi'(n) \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{Z}$$

le munit d'une structure de groupe abélien dont l'élément neutre est le caractère principal χ_0 défini par $\chi_0(n) = 1$ si $(n, k) = 1$ et 0 si $(n, k) \neq 1$.

Les caractères modulo un entier $k \geq 2$ vérifient un certain nombre de propriétés élémentaires qui découlent directement de la définition et qu'on rassemble dans le

Théorème 1.1 ([11] page 233) Soit $k \geq 2$ un nombre entier.

1. Les groupes abéliens $G(k)$, $\widehat{G}(k)$ et $\text{Hom}(G(k), \mathbb{C}^*)$ sont isomorphes.

2. Soit $\chi \in \widehat{G}(k)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ premier avec k , $\chi(n)$ est une racine $\varphi(k)$ -ième de l'unité dans $\mathbb{C}^*$ (φ désigne la fonction d'Euler).

3. Les caractères modulo k sont des fonctions complètement multiplicatives et périodiques de période égale à k .

4. Quels que soient $\chi \in \widehat{G}(k)$ et $N \in \mathbb{Z}$ on a

$$\sum_{m=0}^k \chi(kN + m) = \varphi(k) \quad \text{si } \chi = \chi_0 \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^k \chi(kN + m) = 0 \quad \text{si } \chi \neq \chi_0.$$

5. Pour tout nombre entier $n \in \mathbb{Z}$, n premier avec k on a

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}(k)} \chi(n) = \varphi(k) \quad \text{si } n \equiv 1 (k) \quad \text{et } 0 \quad \text{sinon.}$$

6. Pour χ et χ' deux caractères modulo k on a

$$\sum_{n=0}^k \chi(n) \chi'(n) = \varphi(k) \quad \text{si } \chi' = \bar{\chi} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^k \chi(n) \chi'(n) = 0 \quad \text{si } \chi' \neq \bar{\chi}$$

où $\bar{\chi}$ est le caractère conjugué de χ . Il est défini par $\bar{\chi}(n) = \overline{\chi(n)}$.

1.2.1 Détermination des caractères modulo $k \geq 2$

Pour $k = 2$, on a un seul caractère c'est le caractère principal χ_0 .

Soit $k \geq 3$. De la décomposition, $k = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$, de k en facteurs premiers tels que $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$ résultent les isomorphismes canoniques suivants

$$G(k) \simeq G(p_1^{\alpha_1}) \times \dots \times G(p_r^{\alpha_r}) \quad \text{et} \quad \widehat{G}(k) \simeq \widehat{G}(p_1^{\alpha_1}) \times \dots \times \widehat{G}(p_r^{\alpha_r})$$

qui nous permettent de vérifier que

$$\chi \in \widehat{G}(k) \iff \chi = \chi_1 \cdots \chi_r \quad \text{où } \chi_i \in \widehat{G}(p_i^{\alpha_i}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, r.$$

Alors pour déterminer $\widehat{G}(k)$ il suffit de déterminer $\widehat{G}(p^\alpha)$ pour $p \geq 2$ premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

1.2.1.1 Les caractères modulo 2^α où $\alpha \in \mathbb{N}^*$

On distinguera trois cas :

Lorsque $\alpha = 1$, $\widehat{G}(2)$ est restrict au caractère principal χ_0 .

Lorsque $\alpha = 2$, $\widehat{G}(4) = \{\chi_0, \chi\}$ tel que χ est défini de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$\chi(n) = 1 \quad \text{si } n \equiv 1 (4) \quad \text{et} \quad \chi(n) = -1 \quad \text{si } n \equiv 3 (4).$$

Lorsque $\alpha \geq 3$, le groupe $G(2^\alpha)$ est le produit direct de ses deux sous groupes cycliques H et K engendrés respectivement par $-1 + 2^\alpha \mathbb{Z}$ et $5 + 2^\alpha \mathbb{Z}$. L'ordre de H est 2 et celui de K est $m_1 = 2^{\alpha-2}$. Alors pour tout entier impair n il existe un couple unique de nombres $(\nu_1, \nu_2) \in \{0, 1\} \times \{0, 1, \dots, m_1 - 1\}$ tel que $n \equiv (-1)^{\nu_1} 5^{\nu_2} (2^\alpha)$. On en déduit que

$$\widehat{G}(2^\alpha) = \{\chi_{b,a}\} \quad \text{tel que} \quad (b, a) \in \{0, 1\} \times \{0, 1, \dots, 2^{\alpha-2} - 1\}$$

tel que pour tout (b, a) , $\chi_{b,a}$ est défini de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$\chi_{b,a}(n) = \exp\left(i\pi b\nu_1 + \frac{i\pi a\nu_2}{2^{\alpha-3}}\right) \quad \text{si } (n, 2) = 1 \quad \text{et} \quad \chi_{b,a}(n) = 0 \quad \text{si } (n, 2) > 1.$$

1.2.1.2 Les caractères modulo p^α où $p \geq 3$ premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$

Soit $r + p^\alpha\mathbb{Z}$ tel que $1 < r < p^\alpha$ et $(r, p) = 1$ un générateur du groupe cyclique $G(p^\alpha)$ qui est d'ordre $m = \varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$, alors pour tout nombre entier n premier à k il existe un nombre unique ν , $0 \leq \nu < m$ tel que $n \equiv r^\nu(p^\alpha)$. On en déduit que $\widehat{G}(p^\alpha) = \{\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{m-1}\}$ où, pour $a = 0, 1, \dots, m-1$, χ_a est défini de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$\chi_a(n) = \exp\left(\frac{2i\pi a\nu}{m}\right) \quad \text{si } (n, p) = 1 \quad \text{et} \quad \chi_a(n) = 0 \quad \text{si } (n, p) > 1.$$

1.2.2 Le caractère primitif et le caractère primitif induit

Définition 1.2 Soient $k \geq 2$, k un nombre entier et $d \geq 2$ un diviseur de k . Deux caractères $\chi \in \widehat{G}(k)$ et $\chi' \in \widehat{G}(d)$ sont dits équivalents si et seulement si $\chi(n) = \chi'(n)$ pour tout entier n premier avec k . On écrit $\chi \sim \chi'$.

Lemme 1.1 Soient $k \geq 2$, $d \geq 2$ un diviseur de k , $\chi \in \widehat{G}(k)$ et $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}(d)$.

On a $(\chi \sim \chi_1 \quad \text{et} \quad \chi \sim \chi_2) \implies (\chi_1 = \chi_2)$.

Démonstration. Soit n un nombre entier. Si $(n, d) > 1$ on a $\chi_1(n) = \chi_2(n) = 0$. Si $(n, d) = 1$, on considère le nombre $m = n + qd$, où q est le produit de tous les facteurs premiers de k qui ne divisent pas n , m est premier à k par construction. On a alors $\chi_1(m) = \chi_1(n)$ et $\chi_2(m) = \chi_2(n)$ car les caractères χ_1 et χ_2 sont de période d . D'autre part $\chi_1(m) = \chi(m)$ et $\chi_2(m) = \chi(m)$ car $\chi_1 \sim \chi$ et $\chi_2 \sim \chi$ et $(m, k) = 1$. Il en vient $\chi_1(n) = \chi_2(n)$.

Définition 1.3 Soit $k \geq 3$ un nombre entier. Un caractère non principal $\chi \in \widehat{G}(k)$ est dit primitif si et seulement si quel que soit $d \geq 3$ un diviseur de k , χ n'est équivalent à aucun caractère modulo d .

Lemme 1.2 ([3] page 168) Soient $k \geq 2$ un nombre entier. Un caractère χ modulo k est primitif si et seulement si pour tout diviseur $d \geq 1$ de k il existe deux nombres entiers a et b vérifiant $(a, k) = (b, k) = 1$, $a \equiv b(d)$ et $\chi(a) \neq \chi(b)$.

Définition 1.4.

Soient $k \geq 3$ et χ un caractère non principal et non primitif modulo k . Soit $d \geq 3$ le plus petit diviseur de k pour lequel il existe un caractère χ^* modulo d tel que $\chi \sim \chi^*$. En tenant compte du lemme 1.1, χ^* est l'unique caractère primitif équivalent à χ . Il est appelé le caractère primitif induit de χ .

Remarques 1.1 Soit $k \geq 2$ un nombre entier.

Si $k = 2$, $\widehat{G}(k) = \{\chi_0\}$; χ_0 est non primitif car il est principal.

Si $k \geq 3$ est premier, alors tous les caractères non principaux modulo k sont primitifs.

Si $k = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i} \geq 3$, alors tout caractère non principal $\chi \in \widehat{G}(k)$ est de la forme $\chi = \chi_{i_1} \chi_{i_2} \cdots \chi_{i_s}$ où $1 \leq s \leq r$ où χ_{i_j} est un caractère non principal modulo $p_{i_j}^{\alpha_{i_j}}$ et on a χ est primitif si et seulement si χ_{i_j}

est primitif pour $j = 1, \dots, s$. Si χ n'est pas primitif, son caractère primitif induit est $\chi^* = \chi_{i_1}^* \chi_{i_2}^* \cdots \chi_{i_s}^*$ où $\chi_{i_j}^*$ est le caractère primitif induit de χ_{i_j} .

1.2.3 Les sommes de Gauss associées aux caractères

Définition 1.5 Soient $k \geq 3$ un entier, χ un caractère non principal modulo k . Pour tout nombre entier n on pose

$$E(n, \chi) = \sum_{m=1}^k \chi(m) \frac{\cos \left(\frac{2nm\pi}{k} \right)}{\sin \left(\frac{2nm\pi}{k} \right)} \quad \text{pour} \quad \chi(-1) = \begin{matrix} +1 \\ -1. \end{matrix}$$

Le nombre $E(\chi) = E(1, \chi)$ est appelé la somme de Gauss associée au caractère χ .

Lemme 1.3 ([3] page 166) Soient $k \geq 3$ un nombre entier et χ un caractère primitif modulo k .

Pour tout nombre entier n , on a $E(n, \chi) = \bar{\chi}(n) E(\chi)$ et si n est premier avec k on a

$$|E(n, \chi)|^2 = |E(\chi)|^2 = k.$$

1.3 Étude des fonctions $\varphi_r(x, \chi)$

Proposition 1.1 Soient $k \geq 3$ et χ un caractère non principal modulo k .

1. La fonction $S(x, \chi) = \sum_{n \leq x} \chi(n)$ est périodique de période k .

2. Pour toute fonction f définie de $[0, k[$ dans $\mathbb{C}$ et admet une primitive g , on a

$$(1.8) \quad \int_0^k S(t, \chi) f(t) dt = - \sum_{m=1}^{k-1} g(m) \chi(m).$$

3. Si χ est primitif, le développement de $S(x, \chi)$ en série de Fourier est donné par

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \frac{S(x-, \chi) + S(x+, \chi)}{2} &= \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k-1} m \chi(m) + \frac{E(\chi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\bar{\chi}(n)}{n} \sin\left(\frac{2n\pi x}{k}\right) \quad \text{si } \chi(-1) = +1 \\ \frac{S(x-, \chi) + S(x+, \chi)}{2} &= \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k-1} m \chi(m) - \frac{E(\chi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\bar{\chi}(n)}{n} \cos\left(\frac{2n\pi x}{k}\right) \quad \text{si } \chi(-1) = -1. \end{aligned}$$

Démonstration.

1. Pour tout nombre entier N , on a

$$S(x + Nk, \chi) = \sum_{n \leq x + Nk} \chi(n) = \sum_{n \leq x} \chi(n + Nk) = \sum_{n \leq x} \chi(n) = S(x, \chi)$$

cela prouve que $S(x, \chi)$ est périodique de période k .

2. On a

$$\begin{aligned} \int_0^k S(t, \chi) f(t) dt &= \sum_{m=0}^{k-1} \left\{ (\chi(0) + \cdots + \chi(m)) \int_m^{m+1} f(t) dt \right\} \\ \int_0^k S(t, \chi) f(t) dt &= \sum_{m=0}^{k-1} \{ (\chi(0) + \cdots + \chi(m)) (g(m+1) - g(m)) \}. \end{aligned}$$

En arrangeant convenablement la dernière somme on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^k S(t, \chi) f(t) dt = & - \sum_{m=1}^{k-1} \chi(m) g(m) + \chi(1) g(2) + \sum_{m=2}^{k-1} (\chi(1) + \cdots + \chi(m)) g(m+1) \\ & - \sum_{m=2}^{k-1} (\chi(1) + \cdots + \chi(m-1)) g(m). \end{aligned}$$

On remarque que

$$\sum_{m=2}^{k-1} (\chi(1) + \cdots + \chi(m)) g(m+1) = \sum_{m=3}^{k-1} (\chi(1) + \cdots + \chi(m-1)) g(m)$$

d'où

$$\chi(1) g(2) + \sum_{m=2}^{k-1} (\chi(1) + \cdots + \chi(m)) g(m+1) = \sum_{m=2}^{k-1} (\chi(1) + \cdots + \chi(m-1)) g(m)$$

par suite

$$\int_0^k f(t) S(t, \chi) dt = - \sum_{m=1}^{k-1} \chi(m) g(m).$$

3. La série de Fourier associée à la fonction $S(x, \chi)$ est donnée par

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{k}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{k}\right) \right\}$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{k} \int_0^k S(t, \chi) dt = -\frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k-1} m \chi(m) \\ a_n &= \frac{2}{k} \int_0^k S(t, \chi) \cos\left(\frac{2n\pi t}{k}\right) dt = \frac{-1}{n\pi} \sum_{m=1}^{k-1} \chi(m) \sin\left(\frac{2nm\pi}{k}\right) \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{k} \int_0^k S(t, \chi) \sin\left(\frac{2n\pi t}{k}\right) dt = \frac{1}{n\pi} \sum_{m=1}^{k-1} \chi(m) \cos\left(\frac{2nm\pi}{k}\right) \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Si $\chi(-1) = 1$, on pose $\theta = (2n\pi)/k$ pour $n \geq 1$ et l'on a

$$a_n = \frac{-1}{n\pi} \sum_{m=1}^{k-1} \chi(m) \sin(m\theta) = -\frac{1}{n\pi} \sum_{m=1}^{k-1} \chi(k-m) \sin((k-m)\theta).$$

Puisque $\chi(k-m) = \chi(m)$ et $(k-m)\theta = 2n\pi - m\theta$, pour $m = 1, \dots, k-1$, alors

$$\frac{-1}{n\pi} \sum_{m=1}^{k-1} \chi(m) \sin(m\theta) = \frac{-1}{n\pi} \sum_{m=1}^{k-1} \chi(k-m) \sin((k-m)\theta) = \frac{1}{n\pi} \sum_{m=1}^{k-1} \chi(m) \sin(m\theta)$$

ce qui implique $a_n = 0$. Nous vérifions que $a_0 = 0$ en remarquant qu'on a

$$\sum_{m=1}^{k-1} m \chi(m) = \sum_{m=1}^{k-1} (k-m) \chi(k-m) = k \sum_{m=1}^{k-1} \chi(m) - \sum_{m=1}^{k-1} m \chi(m) = - \sum_{m=1}^{k-1} m \chi(m).$$

Si $\chi(-1) = -1$, on montre de la même façon que $b_n = 0$ pour $n = 1, 2, \dots$

En tenant compte de la définition 1.5 et le lemme 1.3, on obtient pour $n = 1, 2, \dots$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} E(\chi) \bar{\chi}(n) \quad \text{si } \chi(-1) = 1 \quad \text{et} \quad a_n = -\frac{1}{n\pi} E(\chi) \bar{\chi}(n) \quad \text{si } \chi(-1) = -1$$

d'où les formules (1.9).

Proposition 1.2 Soit χ un caractère primitif modulo $k \geq 3$.

1. Pour $r = 1, 2, \dots$, la fonction $\varphi_r(x, \chi)$ est continue périodique de période k .

2. Les développements en séries de Fourier des fonctions $\varphi_r(x, \chi)$ sont donnés par les formules suivantes :

$$(1.10) \quad \frac{\varphi_0(x+, \chi) + \varphi_0(x-, \chi)}{2} = \pm \frac{E(\chi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\bar{\chi}(n)}{n} \frac{\sin\left(\frac{2n\pi x}{k}\right)}{\cos\left(\frac{2n\pi x}{k}\right)} \quad \text{si } \chi(-1) = \begin{matrix} +1 \\ -1. \end{matrix}$$

Pour $r = 1, 2, \dots$

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \varphi_{2r-1}(x, \chi) &= (-1)^r \frac{E(\chi)}{\pi} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{2r-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\bar{\chi}(n)}{n^{2r}} \cos\left(\frac{2n\pi x}{k}\right)\right) \\ \varphi_{2r}(x, \chi) &= (-1)^r \frac{E(\chi)}{\pi} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{2r} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\bar{\chi}(n)}{n^{2r+1}} \sin\left(\frac{2n\pi x}{k}\right)\right) \end{aligned} \quad \text{si } \chi(-1) = +1$$

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \varphi_{2r-1}(x, \chi) &= (-1)^r \frac{E(\chi)}{\pi} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{2r-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\bar{\chi}(n)}{n^{2r}} \sin\left(\frac{2n\pi x}{k}\right)\right) \\ \varphi_{2r}(x, \chi) &= (-1)^r \frac{E(\chi)}{\pi} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{2r} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\bar{\chi}(n)}{n^{2r+1}} \cos\left(\frac{2n\pi x}{k}\right)\right) \end{aligned} \quad \text{si } \chi(-1) = -1.$$

3. Les nombres $C_r = C_r(\chi)$ sont explicités par les formules suivantes :

Si $\chi(-1) = +1$

$$(1.13) \quad \begin{aligned} C_{2r} &= 0 \quad \text{pour } r = 0, 1, \dots \\ C_1 &= -\frac{1}{2k} \sum_{m=1}^{k-1} m^2 \chi(m) \\ C_{2r-1} &= -\sum_{m=1}^{r-1} \frac{k^{2r-2m} \times C_{2m-1}}{(2r-2m+1)!} - \frac{1}{k \times (2r)!} \sum_{m=1}^{k-1} m^{2r} \chi(m) \quad \text{pour } r = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Si $\chi(-1) = -1$

$$(1.14) \quad \begin{aligned} C_{2r-1} &= 0 \quad \text{pour } r = 1, 2, \dots \\ C_0 &= \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k-1} m \chi(m) \\ C_{2r} &= -\sum_{m=0}^{r-1} \frac{k^{2r-2m} \times C_{2m}}{(2r-2m+1)!} + \frac{1}{k \times (2r+1)!} \sum_{m=1}^{k-1} m^{2r+1} \chi(m) \quad \text{pour } r = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Démonstration.

1. Il est clair que les fonctions $\varphi_r(x, \chi)$ pour $r = 1, 2, \dots$ sont continues car elles sont primitives de fonctions continues par morceaux. Les propriétés des caractères et les formules (1.3) permettent de montrer par récurrence que pour tout $N \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_{Nk}^{(N+1)k} \varphi_r(x, \chi) dx = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_r(x + Nk, \chi) = \varphi_r(x, \chi)$$

ce qui prouve que les fonctions $\varphi_r(x, \chi)$ sont périodiques de période k .

2. Les formules (1.10), (1.11) et (1.12) s'obtiennent par intégrations successives de (1.9) en tenant

compte des formules (1.3).

3. Les formules (1.11) et (1.12) montrent qu'on a pour $r = 1, 2, \dots$

$$C_{2r} = \varphi_{2r}(0, \chi) = 0 \quad \text{si } \chi(-1) = +1 \quad \text{et} \quad C_{2r-1} = \varphi_{2r-1}(0, \chi) = 0 \quad \text{si } \chi(-1) = -1.$$

D'après la troisième formule de (1.3), on a

$$\begin{aligned} C_0 &= -\frac{1}{k} \int_0^k S(x, \chi) dx = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k-1} m \chi(m) = 0 \quad \text{si } \chi(-1) = +1 \\ C_1 &= \frac{1}{k} \int_0^k x \varphi_0(x, \chi) dx = \frac{C_0}{k} \int_0^k x dx + \frac{1}{k} \int_0^k x S(x, \chi) dx = \frac{k C_0}{2} - \frac{1}{2k} \sum_{m=1}^{k-1} m^2 \chi(m). \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 2, 3, \dots$

$$(1.15) \quad C_\alpha = \frac{1}{k} \int_0^k x \varphi_{\alpha-1}(x, \chi) dx.$$

En intégrant $\alpha - 1$ fois successives par parties le membre droit de (1.15) on trouve

$$C_\alpha = \frac{1}{k} \left(\sum_{m=2}^{\alpha} \frac{(-1)^m k^m}{m!} C_{\alpha-m+1} + \frac{(-1)^{\alpha+1}}{\alpha!} \int_0^k x^\alpha \varphi_0(x, \chi) dx \right).$$

D'autre part, on a

$$\int_0^k x^\alpha \varphi_0(x, \chi) dx = C_0 \int_0^k x^\alpha dx + \int_0^k x^\alpha S(x, \chi) dx = C_0 \frac{k^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} - \frac{1}{(\alpha+1)} \sum_{m=1}^{k-1} m^{\alpha+1} \chi(m).$$

Il en vient

$$(1.16) \quad C_\alpha = \sum_{m=2}^{\alpha+1} \frac{(-1)^m k^{m-1}}{m!} C_{\alpha-m+1} + \frac{(-1)^\alpha}{(\alpha+1)! \times k} \sum_{m=1}^{k-1} m^{\alpha+1} \chi(m).$$

Si $\chi(-1) = +1$, on obtient les formules (1.13) en posant, $\alpha = 2r - 1$ dans (1.16) et en tenant compte de $C_{2r} = 0$.

Si $\chi(-1) = -1$, on obtient les formules (1.14) en posant, $\alpha = 2r$ dans (1.16) et en tenant compte de $C_{2r-1} = 0$.

Remarque 3.1 Pour tout caractère primitif χ modulo $k \geq 3$, $\varphi_r(x, \bar{\chi}) = \overline{\varphi_r(x, \chi)}$ pour tout nombre entier $r \geq 0$ et tout nombre réel x . Donc $C_r(\bar{\chi}) = \overline{C_r(\chi)}$.

Voici à titre d'exemples les premiers nombres $C_{2r}(\chi)$ où χ est le primitif réel modulo 11.

$$C_0 = -1, \quad C_2 = 3, \quad C_4 = -\frac{425}{44}, \quad C_6 = \frac{1207}{40}, \quad C_8 = -\frac{124975}{1344}, \quad C_{10} = \frac{172614341}{604800}$$

1.4 Évaluation des fonctions $L(s, \chi)$ de Dirichlet

Soient $k \geq 3$ un entier, χ un caractère primitif modulo k et r et N deux nombres entiers strictement positifs tels que $\Re(s) = \sigma > 1 - 2r$ et $N > |s| + 2r$. On écrit

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{kN} \frac{\chi(n)}{n^s} + \sum_{n > kN} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

La formule sommatoire d'Abel ([11] page 11) nous permet d'obtenir

$$(1.17) \quad \sum_{n > kN}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = s \int_{kN}^{+\infty} \frac{S(t, \chi)}{t^{s+1}} dt = -\frac{C_0}{(kN)^s} + s \int_{kN}^{+\infty} \frac{\varphi_0(t, \chi)}{t^{s+1}} dt.$$

Si $\chi(-1) = +1$, on obtient la formule (1.1) avec

$$R_1(s) = s(s+1) \cdots (s+2r-1) \int_{kN}^{+\infty} \frac{\varphi_{2r-1}(t, \chi)}{t^{s+2r}} dt$$

en intégrant $2r-1$ fois par parties l'intégrale du membre droit de (1.17), en tenant compte de $\varphi_m(kN, \chi) = C_m(\chi) = C_m$ et les formules (1.13).

Si $\chi(-1) = -1$, on obtient la formule (1.2) avec

$$R_2(s) = s(s+1) \cdots (s+2r) \int_{kN}^{+\infty} \frac{\varphi_{2r}(t, \chi)}{t^{s+2r+1}} dt$$

en intégrant $2r$ fois par parties l'intégrale du membre droit de (1.17), en tenant compte de $\varphi_m(kN, \chi) = C_m(\chi) = C_m$ et les formules (1.14).

Les majorations des restes $R_1(s)$ et $R_2(s)$ viennent des formules (1.11) et (1.12).

1.5 Les zéros des fonctions $L(s, \chi)$ sur l'axe $\Re(s) = 1/2$

Soient $k \geq 3$ un nombre entier, χ un caractère primitif modulo k , $L(s, \chi)$ la fonction de Dirichlet associée à χ et $T \geq 7$ un nombre réel. Le calcul des zéros de $L(s, \chi)$ sur l'axe $\Re(s) = 1/2$ avec $|t| \leq T$ nécessite le calcul de la fonction $Z(t, \chi)$, définie par les formules (1.5) et (1.4), l'étude de ses changements de signe et le calcul du nombre $N(T, \chi)$ défini par la formule (1.7).

1.5.1 Calcul de la fonction $Z(t, \chi)$

Pour calculer $Z(t, \chi)$ il suffit d'évaluer $\theta(t, \chi)$ car $L(1/2 + it, \chi)$ est explicitée par les formules (1.1) et (1.2). Pour $t \geq 7$, les formules (1.5), (1.4) et la formule de Stirling appliquée à $\arg(\Gamma(1/2 - it))$ nous donnent

$$\theta(t, \chi) = \frac{t}{2} \log \left(\frac{kt}{2\pi} \right) - \frac{t}{2} - \frac{\arg(E(\chi))}{2} + \frac{g(t)}{2} - \chi(-1) \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\arctan(e^{-\pi t})}{2} \right) + g_1(t).$$

où

$$g(t) = \frac{1}{24t} + \frac{7}{2880t^3} + \frac{31}{40320t^5} + \frac{127}{215040t^7} + \frac{511}{608256t^9} + \frac{1414477}{738017280t^{11}} + \frac{8191}{1277952t^{13}} \quad \text{et} \quad |g_1(t)| \leq \frac{4}{t^{15}}.$$

Pour $0 \leq t < 7$, on évalue $\theta(t, \chi)$ par la formule suivante

$$\theta(t, \chi) = \frac{t}{2} \log \left(\frac{k}{2\pi} \right) - \frac{\arg(E(\chi))}{2} + \frac{h(t)}{2} - \chi(-1) \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\arctan(e^{-\pi t})}{2} \right) + h_1(t)$$

où

$$h(t) = \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{2} \right) t + \sum_{n=0}^M \left(\frac{t}{n+1/2} - \arctan \left(\frac{t}{n+1/2} \right) \right)$$

avec

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{2} \right) = -1.963510026021423 \quad \text{et} \quad |h_1(t)| \leq \frac{t^3}{6(M+1/2)^2}.$$

1.5.2 Calcul du nombre $N(T, \chi)$.

Pour $T \geq 7$, on évalue $4\Im \left(\log \Gamma \left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2} + i\frac{T}{2} \right) \right)$ par la formule de Stirling, et on obtient de la formule (1.7) les expressions suivantes :

Si $\chi(-1) = +1$

$$(1.18) \quad N(T, \chi) = \frac{1}{\pi} \left(T \log \left(\frac{kT}{2\pi e} \right) - \frac{1}{2} \arctan(2T) + F_1(T) + \Delta_C \arg(L(s, \chi)) \right) + F_2(T).$$

Si $\chi(-1) = -1$

$$(1.19) \quad N(T, \chi) = \frac{1}{\pi} \left(T \log \left(\frac{kT}{2\pi e} \right) + \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2T}{3} \right) + F_3(T) + \Delta_C \arg(L(s, \chi)) \right) + F_4(T).$$

avec

$$\begin{aligned} F_1(T) &= -\frac{5}{24T} + \frac{67}{2880T^3} - \frac{19}{8064T^5} + \frac{247}{215040T^7} \quad \text{et} \quad |F_2(T)| < \frac{10}{T^9} \\ F_3(T) &= \frac{19}{24T} - \frac{1613}{2880T^3} + \frac{30649}{40320T^5} - \frac{262313}{215040T^7} \quad \text{et} \quad |F_4(T)| < \frac{27}{T^9}. \end{aligned}$$

Pour $k = 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 23, 73$ et χ un caractère primitif modulo k , on a vérifié par calcul direct, que la fonction $L(s, \chi)$ ne s'annule pas sur le contour R_T pour $T = 50$. Alors la variation de l'argument $\Delta_C \arg(L(s, \chi))$ des formule (1.18) et (1.19) est donnée par

$$\Delta_C \arg(L(s, \chi)) = \Delta_C \arg(L(s, \bar{\chi})) = \arg(L(1/2 + iT, \chi)) + \arg(L(1/2 + iT, \bar{\chi})).$$

Cela nous a permis de calculer le nombre $N(50, \chi)$ et vérifier qu'il est égal au nombre de changements de signe de $Z(t, \chi)$ dans la bande $0 < \sigma < 1$ et $|t| \leq 50$, ce qui prouve que l'hypothèse de Riemann généralisée pour ces valeurs de k est vraie jusqu'à la hauteur $T = 50$. Ensuite on a utilisé la méthode numérique dichotomie et calculé les premiers zéros complexes de partie imaginaire ≥ 0

1.6 Les tables

Dans les tables suivantes on donne le nombre $N(50, \chi_n)$ des racines de $L(s, \chi_n)$ dans la bande $0 < \sigma < 1$ et $|T| \leq 50$ ainsi que les premières racines ρ_0 de partie imaginaire ≥ 0 de $L(s, \chi_n)$ où χ_n est le n -ième caractère primitif modulo $k = 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 23, 73$.

$k = 3$ (et 6)

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
1	34	$t_0 = 8.039737$

$k = 4$

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
1	40	$t_0 = 6.020948$

$k = 8$

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
1	50	$t_0 = 3.576154$
2	50	$t_0 = 4.899973$

$k = 5$ (et 10)

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
1	43	$t_0 = 6.183578$
2	42	$t_0 = 6.648453$
3	43	$t_0 = 4.132903$

$k = 7$ (et 14)

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
1	49	$t_0 = 5.198116$
2	47	$t_0 = 4.356401$
3	48	$t_0 = 4.475738$
4	47	$t_0 = 6.201230$
5	49	$t_0 = 2.509374$

$k = 9$ (et 18)

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
1	52	$t_0 = 4.575735$
2	52	$t_0 = 5.319575$
4	52	$t_0 = 3.444093$
5	52	$t_0 = 2.901994$

$k = 11$ (et 22)

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
1	56	$t_0 = 3.547041$
2	55	$t_0 = 5.133699$
3	55	$t_0 = 5.070316$
4	55	$t_0 = 4.629353$
5	56	$t_0 = 2.477243$
6	55	$t_0 = 2.696004$
7	55	$t_0 = 1.231188$
8	55	$t_0 = 3.610040$
9	56	$t_0 = 3.414921$

$k = 12$

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
1	56	$t_0 = 3.804627$

$k = 13$ (et 26)

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
1	58	$t_0 = 4.244609$
2	57	$t_0 = 4.454853$
3	59	$t_0 = 3.743821$
4	58	$t_0 = 4.938590$
5	58	$t_0 = 0.883960$
6	58	$t_0 = 3.119341$
7	58	$t_0 = 3.329832$
8	58	$t_0 = 2.273131$
9	59	$t_0 = 2.195553$
10	57	$t_0 = 3.660974$
11	58	$t_0 = 2.345468$

$k = 15$ (et 30)

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
1	60	$t_0 = 2.734603$
2	60	$t_0 = 3.057018$
3	60	$t_0 = 4.406700$

 $k = 16$

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
1	61	$t_0 = 2.842441$
2	61	$t_0 = 3.772196$
3	62	$t_0 = 3.346219$
4	62	$t_0 = 1.585583$

 $k = 20$ (et 34)

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
1	64	$t_0 = 3.531095$
2	66	$t_0 = 2.358934$
3	64	$t_0 = 2.439704$

 $k = 17$ (et 34)

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
1	63	$t_0 = 2.767094$
2	62	$t_0 = 3.030850$
3	63	$t_0 = 2.345022$
4	62	$t_0 = 3.387643$
5	62	$t_0 = 4.451507$
6	62	$t_0 = 4.851474$
7	62	$t_0 = 3.967330$
8	62	$t_0 = 3.728142$
9	62	$t_0 = 1.554269$
10	62	$t_0 = 2.122170$
11	62	$t_0 = 0.391314$
12	62	$t_0 = 1.894562$
13	63	$t_0 = 1.718797$
14	62	$t_0 = 3.732345$
15	63	$t_0 = 3.167110$

 $k = 19$ (et 38)

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
1	64	$t_0 = 2.392764$
2	64	$t_0 = 4.270623$
3	65	$t_0 = 3.922337$
4	62	$t_0 = 3.637151$
5	64	$t_0 = 0.018956$
6	63	$t_0 = 4.408834$
7	65	$t_0 = 2.809644$
8	64	$t_0 = 2.138180$
9	64	$t_0 = 1.516083$
10	64	$t_0 = 2.874547$
11	65	$t_0 = 1.460088$
12	63	$t_0 = 1.573208$
13	64	$t_0 = 3.494471$
14	62	$t_0 = 3.098780$
15	65	$t_0 = 1.844820$
16	64	$t_0 = 2.733275$
17	64	$t_0 = 3.007290$

 $k = 23$ (et 46)

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
1	68	$t_0 = 2.354111$
2	67	$t_0 = 4.107576$
3	67	$t_0 = 3.608107$
4	67	$t_0 = 2.695063$
5	67	$t_0 = 2.103409$
6	66	$t_0 = 3.011974$
7	68	$t_0 = 2.422807$
8	67	$t_0 = 2.044762$
9	67	$t_0 = 0.595428$
10	66	$t_0 = 3.461093$
11	68	$t_0 = 2.871339$
12	66	$t_0 = 3.180067$
13	67	$t_0 = 4.312231$
14	67	$t_0 = 4.121681$
15	68	$t_0 = 1.379784$
16	66	$t_0 = 1.276538$
17	67	$t_0 = 0.689271$
18	67	$t_0 = 2.470391$
19	67	$t_0 = 1.233777$
20	67	$t_0 = 1.969771$
21	68	$t_0 = 2.473712$

$k = 73$ (et 146)

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$	$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$	$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
1	87	$t_0 = 2.615965$	13	86	$t_0 = 1.706786$	25	86	$t_0 = 2.310318$
2	86	$t_0 = 2.774136$	14	85	$t_0 = 2.611849$	26	86	$t_0 = 2.321079$
3	86	$t_0 = 2.517690$	15	86	$t_0 = 2.186265$	27	85	$t_0 = 2.932190$
4	85	$t_0 = 1.750638$	16	85	$t_0 = 2.438964$	28	85	$t_0 = 3.380998$
5	85	$t_0 = 1.677712$	17	85	$t_0 = 1.022740$	29	85	$t_0 = 3.510473$
6	85	$t_0 = 1.105548$	18	85	$t_0 = 2.389461$	30	84	$t_0 = 0.631266$
7	86	$t_0 = 1.538300$	19	85	$t_0 = 2.705922$	31	85	$t_0 = 0.421825$
8	85	$t_0 = 1.521707$	20	85	$t_0 = 2.450907$	32	84	$t_0 = 2.108565$
9	86	$t_0 = 1.835485$	21	85	$t_0 = 1.403566$	33	85	$t_0 = 1.376850$
10	86	$t_0 = 2.491796$	22	85	$t_0 = 1.592299$	34	85	$t_0 = 0.991251$
11	86	$t_0 = 1.981864$	23	86	$t_0 = 4.220098$	35	86	$t_0 = 1.186195$
12	85	$t_0 = 2.219104$	24	85	$t_0 = 2.016684$	36	86	$t_0 = 2.901010$

$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$	$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$	$\underline{n}$	$N(50, \chi_n)$	$\rho_0 = \frac{1}{2} + it_0$
37	86	$t_0 = 2.553207$	49	86	$t_0 = 1.917890$	61	86	$t_0 = 1.286565$
38	85	$t_0 = 3.461212$	50	85	$t_0 = 1.626459$	62	86	$t_0 = 2.186073$
39	85	$t_0 = 0.598099$	51	85	$t_0 = 0.576952$	63	86	$t_0 = 1.859807$
40	84	$t_0 = 0.001349$	52	85	$t_0 = 0.901259$	64	85	$t_0 = 2.897183$
41	85	$t_0 = 1.030361$	53	85	$t_0 = 0.240843$	65	86	$t_0 = 0.709801$
42	84	$t_0 = 1.652654$	54	85	$t_0 = 1.593508$	66	85	$t_0 = 1.624834$
43	85	$t_0 = 0.110198$	55	85	$t_0 = 1.636098$	67	85	$t_0 = 0.549264$
44	85	$t_0 = 1.211614$	56	85	$t_0 = 0.898303$	68	85	$t_0 = 1.322604$
45	85	$t_0 = 0.856474$	57	86	$t_0 = 0.448401$	69	86	$t_0 = 0.439129$
46	86	$t_0 = 2.101255$	58	85	$t_0 = 1.040143$	70	86	$t_0 = 1.786945$
47	86	$t_0 = 0.536369$	59	86	$t_0 = 1.281425$	71	87	$t_0 = 1.490285$
48	85	$t_0 = 1.606426$	60	85	$t_0 = 1.549233$	/	/	/

Remarque. Le nombre de zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann dans la bande $0 < \sigma < 1$ et $|t| \leq 50$ est 17 et son premier zéro de partie imaginaire > 0 est $\rho_0 = 1/2 + i14.134725$.

CHAPITRE 2

ÉTUDE DES FONCTIONS $R(x; k, l)$ ET $J(x; k, l)$

Résumé

Soient k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$, $p_1 = p_1(k, l)$ = le premier nombre premier dans la progression arithmétique $\{l + mk\}$. On considère, pour $x \geq p_1$, les fonctions classiques (de Tchebycheff) de la théorie analytique des nombres

$$\begin{aligned} \theta(x; k, l) &= \sum_{p \leq x, p \equiv l(k)} \ln p, & \theta(x) &= \theta(x; 1, 1) = \sum_{p \leq x} \ln p \\ \psi(x; k, l) &= \sum_{p^m \leq x, p^m \equiv l(k)} \ln p, & \psi(x) &= \psi(x; 1, 1) = \sum_{p^m \leq x} \ln p \\ S(x; k, l) &= \theta(x; k, l) - \frac{x}{\varphi(k)}, & R(x; k, l) &= \psi(x; k, l) - \frac{x}{\varphi(k)} \\ g(x) &= \frac{1 + \ln x}{x^2 \ln^2 x}, & J(x; k, l) &= \int_x^{+\infty} R(t; k, l) g(t) dt, \\ K(x; k, l) &= \int_x^{+\infty} S(t; k, l) g(t) dt, & L(x; k, l) &= \int_x^{+\infty} (\psi(x; k, l) - \theta(x; k, l)) g(t) dt. \end{aligned}$$

Dans ce chapitre, on étudie les changements de signe des fonctions $R(x; k, l)$ et $J(x; k, l)$, on établit des formules asymptotiques des fonctions $J(x; k, l)$, $K(x; k, l)$ et $L(x; k, l)$ et des majorations explicites qui seraient plus fines si l'hypothèse de Riemann généralisée pour k est vraie.

2.1 Notations, propriétés et définition

Pour tout nombre entier $k \geq 1$, on note $\widehat{G}(k)$ = l'ensemble des $\varphi(k)$ caractères modulo k . Pour tout caractère $\chi \in \widehat{G}(k)$, on note $Z(\chi)$ = l'ensemble des zéros complexes de la fonction $L(s, \chi)$ et $\widehat{Z}(k) = \bigcup_{\chi \in \widehat{G}(k)} Z(\chi)$. Si $\chi(-1) = 1$ les zéros triviaux de la fonction $L(s, \chi)$ sont les nombres entiers négatifs pairs $0, -2, -4, \dots$. Si $\chi(-1) = -1$, les zéros triviaux de la fonction $L(s, \chi)$ sont les nombres entiers strictement négatifs impairs $-1, -3, \dots$. Si χ est non principal et non primitif et $\chi_1 \in \widehat{G}(k_1)$ est son caractère primitif induit modulo k_1 qui est un diviseur de k , alors les fonctions $L(s, \chi)$ et $L(s, \chi_1)$ sont liées, pour $\Re(s) > 1$, par les relations

$$L(s, \chi) = L(s, \chi_1) \prod_{p|k, p \nmid k_1} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right) \quad \text{et} \quad \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi_1)} + \sum_{p|k, p \nmid k_1} \frac{\chi_1(p) \ln p}{p^s - 1}$$

par conséquent $Z(\chi) = Z(\chi_1)$. Si $\chi = \chi_0$ le caractère principal, la fonction $L(s, \chi_0)$ est liée à la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, pour $\Re(s) > 1$, par les relations

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \quad \text{et} \quad \frac{L'(s, \chi_0)}{L(s, \chi_0)} = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \sum_{p|k} \frac{\chi_1(p) \ln p}{p^s - 1}$$

d'où $Z(\chi_0) = Z(\zeta) =$ l'ensemble des zéros de $\zeta(s)$. Enfin on pose $a = (\chi(1) - \chi(-1))/2$.

Définition 2.1 Soit $\rho \in \widehat{Z}(k)$ et $\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_r}$ les r caractères tels que ρ est zéro de $L(s, \chi_{i_j})$ avec un ordre de multiplicité égal à $m_j \geq 1$ ($1 \leq r \leq \varphi(k)$). Pour tout nombre entier l premier avec k tel que $1 \leq l \leq k$, on pose

$$m_{\rho, l} = \sum_{j=1}^r m_j \overline{\chi_{i_j}}(l) \quad \text{où } \overline{\chi_{i_j}} \text{ désigne le caractère conjugué de } \chi_{i_j}.$$

$m_{\rho, l}$ est appelé l'ordre de multiplicité composé de la racine ρ relatif à l .

2.2 Étude des fonctions $R(x; k, l)$ et $J(x; k, l)$

2.2.1 Oscillation des fonctions $R(x; k, l)$ et $J(x; k, l)$.

Nous étudions l'oscillation des fonctions $R(x; k, l)$ et $J(x; k, l)$ en utilisant la position des premières racines complexes des fonctions $L(s, \chi)$ de Dirichlet et le théorème de Landau ([11] page 192) que nous rappelons :

Théorème de Landau Soit $A(x)$ une fonction positive localement intégrable pour $x \geq 1$. On suppose qu'il existe un nombre réel a tel que l'intégrale

$$F(s) = \int_1^{+\infty} \frac{A(x)}{x^{s+1}} dx$$

soit définie pour $\Re(s) > a$. Soit $b < a$. Si la fonction F peut être prolongée analytiquement en tout point du segment $]b, a]$, alors

(a) l'intégrale converge dans le demi-plan $\Re(s) > b$ et représente une fonction holomorphe dans cette région

(b) pour tout t et tout $\sigma > b$, on a $|F(\sigma + it)| \leq F(\sigma)$.

Maintenant on considère la fonction complexe $G(s) = G(s; k, l)$ définie, pour $\Re(s) > 1$, par

$$(2.1) \quad G(s) = G(s; k, l) = \int_2^{+\infty} \left(\frac{R(x; k, l)}{x^{s+1}} \right) dx.$$

Proposition 2.1 La fonction $G(s)$ se prolonge dans tout le plan complexe, en une fonction méromorphe, par la formule

$$(2.2) \quad G(s) = -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\rho \in Z(k)} \frac{m_{\rho, l}}{\rho(s - \rho)} + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \in \widehat{G}(k)} \overline{\chi}(l) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n + a)(s + 2n + a)} \\ - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left\{ \frac{\overline{\chi}(l)}{s(s + a)} \right\} + \frac{E(s)}{s}, \quad E(s) \text{ est une fonction entière.}$$

Démonstration.

1. D'après ([24] page 346), on a pour tout nombre complexe s tel que $\Re(s) > 1$

$$(2.3) \quad G(s) = -\frac{1}{\varphi(k)(s-1)} - \frac{1}{\varphi(k)s} \sum_{\chi \in \widehat{G}(k)} \left\{ \bar{\chi}(l) \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right\} + \frac{1}{\varphi(k)} \int_1^2 \frac{dx}{x^s}.$$

Pour tout caractère primitif χ modulo k , on a

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{\rho \in Z(\chi)} \frac{s}{\rho(s - \rho)} + \frac{1}{s + a} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{(2n + a)(s + 2n + a)} + D(\chi) \quad ([7] \text{ page 83})$$

$D(\chi)$ est une constante qui dépend de χ , donnée par l'expression

$$(2.4) \quad D(\chi) = \frac{\gamma}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{2n(2n + a)} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{k}{\pi} \right) + B(\chi).$$

où $B(\chi)$ est une constante qui dépend de χ et γ la constante d'Euler. Si χ n'est pas primitif, et χ_1 est son caractère primitif induit modulo le diviseur k_1 de k , on a

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{\rho \in Z(\chi)} \frac{s}{\rho(s - \rho)} + \frac{1}{s + a} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{(2n + a)(s + 2n + a)} + \sum_{p|k, p \nmid k_1} \frac{\chi_1(p) \log p}{p^s - 1} + D(\chi_1)$$

où

$$D(\chi_1) = \frac{\gamma}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{2n(2n + a)} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{k_1}{\pi} \right) + B(\chi_1).$$

Alors, pour tout caractère non principal χ , on a

$$E(s, \chi) = -\frac{\bar{\chi}(l) D(\chi)}{\varphi(k)} \quad \text{est une constante.}$$

Si χ est non principal et non primitif et χ_1 est le caractère primitif induit modulo k_1

$$E(s, \chi) = -\frac{\bar{\chi}(l)}{\varphi(k)} \left(D(\chi_1) + \sum_{p|k, p \nmid k_1} \frac{\chi_1(p) \log p}{p^s - 1} \right) \quad \text{est une fonction entière.}$$

Si $\chi = \chi_0$ le caractère principal, on a

$$(2.6) \quad -\frac{\bar{\chi}_0(l)}{\varphi(k)s} \frac{L'(s, \chi_0)}{L(s, \chi_0)} = -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\rho \in Z(\chi_0)} \frac{1}{\rho(s - \rho)} + \frac{1}{\varphi(k)(s-1)} - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(s+2n)} \\ - \frac{1}{\varphi(k)s} \left(\log 2\pi + \sum_{p|k} \frac{\log p}{p^s - 1} \right).$$

Les formules (2.3), (2.5) et (2.6), nous donnent la formule (2.2), avec

$$E(s) = \sum_{\chi \neq \chi_0} E(s, \chi) - \frac{\log 2\pi}{\varphi(k)} - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{p|k} \frac{\log p}{p^s - 1} + \frac{s}{\varphi(k)} \int_1^2 \frac{dx}{x^s}.$$

Proposition 2.2

1. Soient k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$. On suppose que :

(a) Aucune des $\varphi(k)$ fonctions de Dirichlet $L(s, \chi)$ ne s'annule dans l'intervalle $]0, 1]$.

(b) Il existe $\rho \in \widehat{Z}(k)$ tel que son ordre de multiplicité composé $m_{\rho,l}$ relative à l est $\neq 0$.

Alors les fonctions réelles $R(x; k, l)$ et $J(x, k, l)$ oscillent indéfiniment autour de 0.

2. Pour $k = 1, 2, \dots, 20, 22, 23, 26, 30, 34, 38, 46, 73, 146$ et $1 \leq l \leq k$ avec $(l, k) = 1$, les fonctions $R(x; k, l)$ et $J(x; k, l)$ oscillent indéfiniment autour de 0.

Démonstration.

1. Soient $\delta = \min_{\rho \in Z(k)} (|\Im(\rho)|)$ et W_δ l'ouvert simplement connexe :

$$W_\delta = \{s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(s) > 1\} \cup \{s \in \mathbb{C} \text{ tel que } 0 < \Re(s) \leq 1 \text{ et } |\Im(s)| < \delta\}.$$

La formule (2.2) et les hypothèses (a) et (b) impliquent que la fonction $G(s)$ est analytique dans l'ouvert simplement connexe W_δ et possède au moins un pôle simple dans le demi plan $\Re(s) > 0$. Alors, d'après le théorème de Landau, la fonction $R(x; k, l)$ oscille indéfiniment autour de 0.

On considère

$$H(s) = \int_2^{+\infty} \frac{J(x; k, l)}{x^s} dx \quad \text{pour } \Re(s) > 1.$$

On calcule $H(s)$ par parties :

$$\begin{aligned} U &= J(x; k, l), & dV &= x^{-s} dx \\ dU &= -\frac{R(x; k, l)(1 + \log x)}{x^2 \log^2 x} dx, & V &= -\frac{1}{(s-1)x^{s-1}}. \end{aligned}$$

On obtient, pour $\Re(s) > 1$

$$(2.7) \quad H(s) = \frac{h(s)}{s-1} \quad \text{où} \quad h(s) = \frac{J(2; k, l)}{2^s} - \int_2^{+\infty} \frac{R(x; k, l)(1 + \ln x)}{x^{s+1} \ln^2 x} dx \quad \text{avec } h(1) = 0.$$

La fonction $G(s)$ étant analytique dans W_δ qui est un ouvert simplement connexe, alors elle y possède des primitives. Notons par $G_1(s)$ et $G_2(s)$ la première et la deuxième primitive de $G(s)$ dans W_δ . Soient λ et μ deux nombres complexes, on a

$$\frac{d}{ds} \left(-\int_2^{+\infty} \frac{R(x; k, l)}{x^{s+1} \log x} dx + \lambda \right) = G(s) \quad \text{pour } \Re(s) > 1$$

et

$$\frac{d}{ds} \left(\int_2^{+\infty} \frac{R(x; k, l)}{x^{s+1} \log^2 x} dx + \lambda s + \mu \right) = -\int_2^{+\infty} \frac{R(x; k, l)}{x^{s+1} \log x} dx + \lambda \quad \text{pour } \Re(s) > 1$$

donc

$$G_1(s) = -\int_2^{+\infty} \frac{R(x; k, l)}{x^{s+1} \log x} dx + \lambda \quad \text{et} \quad G_2(s) = \int_2^{+\infty} \frac{R(x; k, l)}{x^{s+1} \log^2 x} dx + \lambda s + \mu.$$

La formule (2.7) devient alors

$$(2.8) \quad H(s) = \frac{1}{s-1} (G_1(s) - G_2(s) + h_1(s))$$

avec

$$h_1(s) = \frac{J(2; k, l)}{2^{s-1}} + \lambda s + \mu - \lambda \quad \text{une fonction entière.}$$

La fonction $(G_1(s) - G_2(s) + h_1(s))$, est analytique dans W_δ , nulle en $s = 1$ donc la fonction

$$\frac{1}{s-1} (G_1(s) - G_2(s) + h_1(s))$$

est analytique dans W_δ alors $H(s)$ se prolonge en une fonction sans singularité sur le segment $0 < \sigma \leq 1$. Supposons que $J(x; k, l)$ garde un signe constant pour x assez grand. Alors d'après le théorème de Landau la fonction $H(s)$ serait analytique dans le demi plan $\Re(s) > 0$ ce qui impliquerait, d'après la formule (2.8), que les fonctions $G_1(s) - G_2(s)$ et $G_1''(s) - G_2''(s)$ sont aussi analytiques dans le demi plan $\Re(s) > 0$. Or, ceci est impossible, car d'après l'hypothèse **(b)** et la formule (2.2), la fonction $G(s)$ possède un pôle simple ρ dans le demi plan $\Re(s) > 0$ et au voisinage de ρ on a

$$G_1''(s) - G_2''(s) = G'(s) - G(s) \sim \frac{m_{\rho,l}}{\varphi(k)} \times \frac{(1+s-\rho)}{\rho(s-\rho)^2}.$$

Donc ρ est un pôle d'ordre 2 de $G_1''(s) - G_2''(s)$ dans le demi plan $\Re(s) > 0$.

2. Les tables du paragraphe 1.6 pages 19, 20 et 21, montrent que les conditions **(a)** et **(b)** de l'assertion 1 sont vérifiées pour toutes les valeurs de k citées d'où le résultat annoncé de l'assertion.

2.2.2 Estimation de $J(x; k, l)$ sous $HRG(k)$

Dans ce paragraphe on suppose que $HRG(k)$ est vraie.

Pour $k \geq 1$ et χ un caractère modulo k , on note par $Z(\chi)$ l'ensemble des zéros complexes de la fonction de Dirichlet $L(s, \chi)$. Si $\chi = \chi_0$ est le caractère principal, alors $Z(\chi_0) = Z(\zeta) =$ l'ensemble des zéros complexes de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. On note par $\widehat{Z}(k)$ la réunion des $\varphi(k)$ ensembles $Z(\chi)$ et par C_k la somme de la série convergente $C_k = \sum_{\rho \in \widehat{Z}(k)} 1/|\rho|^2$. On a

$$C_1 = C_2 = \gamma + 2 - \ln 4\pi = 0.04619 \quad ([10] \text{ page } 83).$$

Pour $k \geq 3$, les nombres C_k se calculent à partir du

Lemme 2.1 (dédié des formules (17) et (18) de [7] page 83)

Soit $k \geq 3$ et χ un caractère primitif modulo k . On a

$$\sum_{\rho \in Z(\chi)} \frac{1}{|\rho|^2} = \ln \left(\frac{k}{\pi} \right) - \gamma + \frac{a-1}{2} \ln 2 + 2\Re \left(\frac{L'(1, \chi)}{L(1, \chi)} \right) \quad \text{où } a = \frac{\chi(1) - \chi(-1)}{2}.$$

D'après [24] page 345, on a les valeurs suivantes arrondies par excès à la troisième décimale

$$\begin{aligned} C_3 &= 0.160, \quad C_4 = 0.202, \quad C_5 = C_{10} = 0.610, \quad C_8 = 0.754, \quad C_9 = C_{18} = 1.412 \\ C_{11} &= C_{22} = 4.262, \quad C_{12} = 0.646, \quad C_{13} = C_{26} = 6.456, \quad C_{15} = C_{30} = 1.998 \\ C_{16} &= 5.776, \quad C_{17} = C_{34} = 13.022, \quad C_{19} = C_{38} = 18.166, \quad C_{20} = 2.400 \end{aligned}$$

Lemme 2.2 ([23] page 195) Pour x un nombre réel, $x \geq 2$ et ρ un nombre complexe on pose

$$F_\rho(x) = \int_x^{+\infty} t^\rho \frac{1 + \ln t}{t^2 \ln^2 t} dt$$

1. Si $\Re(\rho) = 1/2$

(a) on a

$$F_\rho(x) = \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \frac{x^{i\Im(\rho)}}{\sqrt{x} \ln x} + r_\rho(x) \quad \text{avec} \quad r_\rho(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x} \ln^2 x} \right)$$

(b) Pour $x \geq 25000$, on a

$$|F_\rho(x)| < \frac{1}{|\rho|} \left(\frac{1}{\sqrt{x} \ln x} + \frac{1.395}{\sqrt{x} \ln^2 x} \right).$$

2. Pour $x \geq 25000$, on a

$$F_{1/2}(x) < \frac{2}{\sqrt{x} \ln x} - \frac{1.210}{\sqrt{x} \ln^2 x} \quad \text{et} \quad F_{1/3}(x) < \frac{2.810}{\sqrt{x} \ln^2 x}.$$

Lemme 2.3

1. Pour tout $k \geq 1$ et χ un caractère modulo k , on a

$$\sum_{\rho \in Z(\chi)} \frac{1}{|\rho(2-\rho)|} < \sum_{\rho \in Z(\chi)} \frac{1}{|\rho|^2}.$$

2. On a

$$\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} < \frac{5}{2} - \ln 2\pi + 2 \sum_{\rho \in Z(\chi_0)} \frac{1}{|\rho|^2}.$$

Démonstration.

1. Il suffit de vérifier que $|\rho(2-\rho)| > |\rho|^2$. Or, pour $\rho = 1/2 + it$ on a

$$|\rho(2-\rho)| = |\rho|^2 \left| 1 + \frac{1}{\bar{\rho}} \right| = |\rho|^2 \left| \frac{1+\bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right| = |\rho|^2 \frac{|3/2 - it|}{|1/2 - it|} > |\rho|^2.$$

2. On a

$$\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} = \ln 2\pi - 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2+2n} - \frac{1}{2n} \right) + \sum_{\rho \in Z(\chi_0)} \frac{2}{\rho(2-\rho)} \quad ([7] \text{ pages 80 et 81}).$$

L'inégalité annoncée vient alors du fait que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2+2n} - \frac{1}{2n} \right) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{5}{2} > \ln 2\pi \quad \text{et} \quad \sum_{\rho \in Z(\chi_0)} \frac{2}{|\rho(2-\rho)|} < \sum_{\rho \in Z(\chi_0)} \frac{2}{|\rho|^2}.$$

Proposition 2.3 Soient k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$ et $x \geq 2$.

Si $\text{HRG}(k)$ est vraie alors

1. On a

$$J(x; k, l) = \frac{C_{k,l}(x)}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln x} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x} \ln^2 x} \right) \quad \text{où} \quad C_{k,l}(x) = - \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{\rho \in Z(\chi)} \frac{x^{i\Im(\rho)}}{\rho(1-\rho)}$$

$C_{k,l}(x)$ est une fonction réelle de x qui dépend de k et l .

Pour $x \geq 25000$, on a

$$|J(x; k, l)| \leq \frac{C_k}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln x} + \frac{\Delta_k}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln^2 x} \quad \text{où} \quad C_k = \sum_{\rho \in \hat{Z}(k)} \frac{1}{|\rho|^2},$$

$$\Delta_k = 1.395 C_k + \varphi(k) \quad (0.000002 + 0.515 \ln k + 0.065 d(k))$$

avec $d(1) = \ln 2\pi$, $d(2) = \ln 2\pi - (\ln 2)/2$ et, pour $k \geq 3$

$$d(k) = \frac{1}{\varphi(k)} \left(\left| \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{p|k} \ln p \right| \right) + \left(\frac{7}{2} - \ln 2\pi + \frac{k}{4} \ln k + \frac{2C_k}{\varphi(k)} \right).$$

2. Pour $k = 1, 2$ et 3 , on a les valeurs $\Delta_1 = 0.184$, $\Delta_2 = 0.519$ et $\Delta_3 = 1.782$.

Démonstration. On part de la formule explicite de la théorie des nombres premiers dans les progressions arithmétiques ([17] page 271), valable pour tout $x \geq 2$

$$\psi_1(x; k, l) = \int_1^x \psi(t; k, l) dt = \frac{x^2}{2\varphi(k)} - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \left\{ \bar{\chi}(l) \sum_{\rho \in Z(\chi)} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right\} + g_1(x)$$

où

$$g_1(x) = -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \left\{ \bar{\chi}(l) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{-2n+1-a}}{2n(2n-1+2a)} \right\} + d_1 x + d_2 x \log x + d_3 \log x + d_4$$

expression dans laquelle

$$a = \frac{\chi(1) - \chi(-1)}{2}, \quad d_1 = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \in \hat{G}(k)} \bar{\chi}(l) (m(\chi) - b(\chi)), \quad d_2 = -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) m(\chi)$$

$$d_3 = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi(-1)=-1} \bar{\chi}(l), \quad d_4 = \frac{1}{\varphi(k)} \left(\sum_{\chi(-1)=1} \bar{\chi}(l) \frac{L'(-1, \chi)}{L(-1, \chi)} + \sum_{\chi(-1)=-1} \bar{\chi}(l) (c(\chi) + 1) \right)$$

$m(\chi)$ est l'ordre de multiplicité de la racine 0 de la fonction de Dirichlet $L(s, \chi)$

$b(\chi)$ une constante, qui dépend de χ , explicitée dans [17] page 274

$c(\chi)$ est la constante dans le développement en série de Laurent de $L'(s, \chi)/L(s, \chi)$ au voisinage de $s = -1$.

La série, dans l'expression de $g_1(x)$, et sa dérivée obtenue en dérivant terme à terme sont uniformément convergentes alors $g'_1(x) = g_2(x; k, l) + d_3/x + d_2 \ln x + d_5$ où

$$g_2(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+a-1)x^{-2n-a}}{2n(2n+2a-1)} \text{ et } d_5 = d_1 + d_2 = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} b(\chi).$$

Puisque la série

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \left\{ \bar{\chi}(l) \sum_{\rho \in Z(\chi)} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right\}$$

est uniformément convergente alors, la méthode de [19] page 381, est applicable pour tout $k \geq 1$ et nous donne

$$J(x; k, l) = g_3(x; k, l) + \int_x^{+\infty} g'_1(t) \frac{1 + \ln t}{t^2 \ln^2 t} dt \quad \left(g'_1(t) = g_2(t; k, l) + \frac{d_3}{t} + d_2 \ln t + d_5 \right)$$

où

$$g_3(x; k, l) = -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \left\{ \bar{\chi}(l) \sum_{\rho \in Z(\chi)} \left(\frac{1}{\rho} \int_x^{+\infty} \left(\frac{t^{\rho}(1 + \ln t)}{t^2 \ln^2 t} \right) dt \right) \right\} = -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{\rho \in Z(\chi)} \frac{F_{\rho}(x)}{\rho}.$$

Le lemme 2.2 assertion 1 (a), nous donne

$$g_3(x; k, l) = \frac{C_{k,l}(x)}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln x} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x} \ln^2 x}\right) \text{ où } C_{k,l}(x) = -\sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{\rho \in Z(\chi)} \frac{x^{i\Im(\rho)}}{\rho(1-\rho)}.$$

$C_{k,l}(x)$ est réel car c'est une somme de nombres complexes conjugués deux à deux et on a

$$|C_{k,l}(x)| \leq \sum_{\rho \in \hat{Z}(k)} \frac{1}{|\rho|^2} = C_k.$$

On a aussi, d'après le lemme 2.2 assertion 1 (b),

$$|g_3(x; k, l)| \leq \frac{C_k}{\varphi(k) \sqrt{x} \log x} + \frac{1.394 C_k}{\varphi(k) \sqrt{x} \log^2 x}.$$

Pour évaluer $g_2(x; k, l)$, on considère d'abord les cas $k = 1$ et $k = 2$ où l'on a

$$0 < g_2(x; k, l) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{-2n}}{2n} < \frac{2}{3x^2}.$$

Pour $k \geq 3$, on écrit

$$g_2(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi(-1)=1} \bar{\chi}(l) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{-2n}}{2n} + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi(-1)=-1} \bar{\chi}(l) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{-2n-1}}{2n+1}.$$

En tenant compte de

$$\sum_{\chi(-1)=1} 1 = \sum_{\chi(-1)=-1} 1 = \frac{\varphi(k)}{2} \text{ on obtient } |g_2(x; k, l)| < \frac{2}{3x^2}.$$

L'expression de d_3 implique

$$|d_3| = \left| -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi(-1)=-1} \bar{\chi}(l) \right| \leq \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi(-1)=-1} 1 = \frac{1}{2}.$$

Pour majorer d_2 , nous remarquons d'abord que $\zeta(0) = -1/2$ et $L(0, \chi) \neq 0$ pour tout caractère non principal χ tel que $\chi(-1) = -1$, alors d'après (3.1) de [17] page 271 on a

$$|d_2| = \left| \frac{-1}{\varphi(k)} \sum_{\chi(-1)=1, \chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(l) m(\chi) \right| \leq \frac{\ln k}{\varphi(k) \ln 2} \sum_{\chi(-1)=1} 1 = \frac{\ln k}{2 \ln 2}.$$

Pour $k \geq 3$, l'expression de $d(k)$ annoncée est définie par $|d_5| \leq d(k)$ et obtenue par application des formules qui évaluent le nombre $b(\chi)$ dans [17] page 274 et le lemme 2.3. Les évaluations de $g_3(x; k, l)$, $g_2(t; k, l)$, d_3 , d_2 et d_5 impliquent

$$J(x; k, l) = \frac{C_{k,l}(x)}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln x} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x} \ln^2 x}\right)$$

et

$$|J(x; k, l)| \leq \frac{C_k}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln x} + \frac{D(x, k)}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln^2 x} \text{ pour } x \geq 2$$

où

$$D(x, k) = 1.395 C_k + \varphi(k) \left(\frac{(4+3x) \ln x}{6x^2 \sqrt{x}} + \frac{\ln k}{2 \ln 2} \left(\frac{(1+\ln x) \ln x}{\sqrt{x}} \right) + d(k) \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right).$$

La décroissance de la fonction $D(x, k)$, pour $x \geq 25000$, permet de terminer la preuve.

2. Application numérique de l'assertion 1 en tenant compte des valeurs $C_1 = C_2 = 0.04619$ et $C_3 = 0.160$.

2.3 Étude des fonctions $K(x; k, l)$ et $L(x; k, l)$

Soit $x_0 \geq p_1$, x_0 un nombre réel suffisamment grand. D'après le théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, il existe une constante strictement positive $\delta = \delta(k, x_0)$ qui dépend de x_0 et k telle que

$$(2.9) \quad 0 < \left(1 - \frac{\delta}{\ln x}\right) \frac{x}{\varphi(k)} \leq \theta(x; k, l) \leq \left(1 + \frac{\delta}{\ln x}\right) \frac{x}{\varphi(k)} \quad \text{pour } x \geq x_0.$$

La constante δ est effective (voir [3] chapitre 3). Pour $k = 1$ et $k = 3$ on a

$$(2.10) \quad \left(1 - \frac{0.006788}{\ln x}\right) x \leq \theta(x) \leq \left(1 + \frac{0.006788}{\ln x}\right) x \quad \text{pour } x \geq 1054411 \quad ([3] \text{ page } 14)$$

$$(2.11) \quad \left(1 - \frac{0.524}{\ln x}\right) \frac{x}{2} \leq \theta(x; 3, l) \leq \left(1 + \frac{0.524}{\ln x}\right) \frac{x}{2} \quad \text{pour } x \geq 215 \quad ([3] \text{ page } 114).$$

De l'encadrement (2.10) et le calcul direct sur ordinateur pour $25000 \leq x \leq 10544111$ on obtient

$$(2.12) \quad \left(1 - \frac{0.007}{\ln x}\right) x < \theta(x; 2, 1), \quad \theta(x) < \left(1 + \frac{0.007}{\ln x}\right) x \quad \text{pour } x \geq 10544111$$

et

$$(2.13) \quad \left(1 - \frac{0.106}{\ln x}\right) x \leq \theta(x; 2, 1), \quad \theta(x) \leq \left(1 + \frac{0.106}{\ln x}\right) x \quad \text{pour } x \geq 25000$$

2.3.1 Majoration de la fonction $K(x; k, l)$

Lemme 2.4 (Application de l'encadrement (2.9))

Pour x_0 et δ de l'encadrement (2.9), on a

$$|K(x; k, l)| \leq \left(\frac{\delta(1 + \ln x_0)}{\ln x_0}\right) \frac{1}{\varphi(k) \ln x} \quad \text{pour } x \geq x_0$$

2.3.2 Majoration de la fonction $L(x; k, l)$

Lemme 2.5 (Hardy page 98) Soit k et l deux entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$. On note par $s = s(k)$ le nombre de solution de l'équation de congruence $x^2 \equiv l(k)$.

On écrit $k = 2^\alpha k'$ et on pose $n(k') =$ le nombre de facteurs premiers de k' .

1. Si l est non résidu quadratique modulo k , alors $s = 0$.

2. Si l est résidu quadratique modulo k alors on a

$$s = 2^{n(k')} \quad \text{si } \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1, \quad s = 2^{n(k')+1} \quad \text{si } \alpha = 2 \quad \text{et} \quad s = 2^{n(k')+2} \quad \text{si } \alpha \geq 3.$$

Lemme 2.6 Pour $x \geq 2$, on a

$$\psi(x) - \theta(x) \leq \sqrt{x} + \frac{0.014\sqrt{x}}{\ln x} + 1.324628 x^{\frac{1}{3}}.$$

Démonstration. On étudie trois cas : $2 \leq x \leq 10^{11}$, $10^{11} \leq x \leq 10^{22}$ et $x \geq 10^{22}$. Dans le premier cas, un programme écrit en fortran calcule en très peu de temps le maximum de la fonction $(\psi(x) - \theta(x) - \sqrt{x}(1 + 0.014/\ln x))/x^{1/3}$, ce maximum est égal à $1.324627\dots$, il est atteint en $x = 283^2$. Donc

$$\psi(x) - \theta(x) < \sqrt{x} + \frac{0.014\sqrt{x}}{\ln x} + 1.324628x^{1/3} \quad \text{pour } 2 \leq x \leq 10^{11}$$

Dans le deuxième cas on écrit

$$\psi(x) - \theta(x) \leq \theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + 2\left(\psi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

et on utilise l'inégalité $\theta(x) \leq x$ pour $x \leq 10^{11}$ ([28] page 360) et le calcul du premier cas. On obtient

$$(\psi(x) - \theta(x)) < \sqrt{x} + 1.281460 x^{1/3}.$$

Dans le troisième cas, on écrit

$$\psi(x) - \theta(x) = \sum_{n \geq 2} \theta\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \leq \theta(\sqrt{x}) + \theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \theta\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + \left(\frac{\ln x}{\ln 2} - 4\right) \theta\left(x^{\frac{1}{5}}\right).$$

Alors les encadrement (2.12) et (2.13) nous donnent

$$\psi(x) - \theta(x) \leq \sqrt{x} + \frac{0.014\sqrt{x}}{\ln x} + (A_1(x)) x^{1/3}$$

où

$$A_1(x) = \left(1 + \frac{0.042}{\ln x}\right) + \frac{1}{x^{1/12}} \left(1 + \frac{0.424}{\ln x}\right) + \frac{1}{x^{2/15}} \left(\frac{\ln x}{\ln 2} - 4\right) \left(1 + \frac{0.530}{\ln x}\right) < 1.097017.$$

Proposition 2.4 Soient k et l deux entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$.

1. Pour x suffisamment grand, on a

$$L(x; k, l) = \frac{2s}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln x} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x} \ln^2 x}\right) \quad (s \text{ du lemme 2.5})$$

2. Si l est résidu quadratique modulo k et $x \geq 25000$ on a

$$L(x; k, l) \leq L(x; 1, 1) < \frac{2}{\sqrt{x} \ln x} + \frac{2.541}{\sqrt{x} \ln^2 x}$$

3. Si l est non résidu quadratique modulo k et $x \geq 2$, on a

$$L(x; k, l) \leq \frac{2.810\lambda_k}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln^2 x} \quad \text{où} \quad \lambda_k = \max_{x \geq 2, 1 \leq l \leq k} \left(\frac{\psi(x; k, l) - \theta(x; k, l)}{x^{1/3}/\varphi(k)} \right).$$

4. Pour $k = 3$, on a la valeur $\lambda_3 = 1.561$.

Démonstration.

1. On a

$$(2.14) \quad 0 \leq \psi(x; k, l) - \theta(x; k, l) = \sum_{m \geq 1} \sum_{r^m \equiv l(k)} \theta\left(x^{\frac{1}{m}}; k, r\right).$$

Alors, le théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, nous permet d'obtenir

$$\psi(x; k, l) - \theta(x; k, l) = \frac{s\sqrt{x}}{\varphi(k)} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\right)$$

Ensuite, on applique l'assertion 2 du lemme 2.2.

2. On utilise le lemme 2.2 et l'inégalité

$$0 \leq \psi(x; k, l) - \theta(x; k, l) \leq \psi(x) - \theta(x) < \sqrt{x} + \frac{0.014\sqrt{x}}{\ln x} + 1.324628x^{1/3}.$$

3. Si l est non résidu quadratique modulo k , la formule (2.14) devient

$$(2.15) \quad 0 \leq \psi(x; k, l) - \theta(x; k, l) = \sum_{m \geq 1} \sum_{r^{2m+1} \equiv l(k)} \theta\left(x^{\frac{1}{2m+1}}; k, r\right).$$

Il s'en suit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\psi(x; k, l) - \theta(x; k, l)}{x^{1/3}/\varphi(k)} \right) = s_3 = \text{le nombre de solution de l'équation } x^3 \equiv l(k)$$

donc la fonction $(\varphi(k)(\psi(x; k, l) - \theta(x; k, l)))/x^{1/3}$ est majorée et on note λ_k son maximum absolu pour $x \geq 2$. On a donc

$$(\psi(x; k, l) - \theta(x; k, l)) \leq \frac{\lambda_k}{\varphi(k)} x^{1/3} \quad \text{pour } x \geq 2.$$

On applique ensuite l'assertion 2 du lemme 2.2

4. Pour $2 \leq x \leq 10^{15}$, on a vérifié par calcul direct sur ordinateur que

$$\max_{2 \leq x \leq 10^{15}} \frac{\psi(x; 3, 2) - \theta(x; 3, 2)}{x^{1/3}/2} \leq \frac{\psi(2^7; 3, 2) - \theta(2^7; 3, 2)}{2^{7/3}/2} = 1.463932 \dots$$

Pour $x \geq 10^{15}$, la formule (2.15) et l'encadrement (2.11) impliquent

$$(\psi(x; 3, 2) - \theta(x; 3, 2)) \leq (A_2(x)) x^{1/3}/2$$

où

$$A_2(x) = \left(1 + \frac{1.572}{\ln x}\right) + \frac{1}{x^{2/15}} \left(\frac{\ln x}{\ln 2} - 2\right) \left(1 + \frac{2.62}{\ln x}\right) < 1.561.$$

CHAPITRE 3

ESTIMATION DES FONCTIONS

$$\prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}, \quad \prod_{\sqrt{2x} < p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

Résumé

On étudie le comportement asymptotique de ces deux fonctions et on établit des majorations explicites qu'on appliquera numériquement aux cas $k = 1, 2, 3$. On utilisera les résultats du chapitre 2.

3.1 Estimation de $\prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$

Lemme 3.1. Pour $x \geq p_1 =$ le premier nombre premier congru à l modulo k , on a

$$(3.1) \quad \prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = a_{k,l} (\ln x)^{\frac{1}{\varphi(k)}} \exp \left\{ \frac{S(x; k, l)}{x \ln x} - K(x; k, l) + u(x; k, l) \right\}$$

$$(3.2) \quad \prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = a_{k,l} (\ln(\varphi(k) \theta(x; k, l)))^{\frac{1}{\varphi(k)}} \exp \{ \beta(x; k, l) + u(x; k, l) \}$$

expressions dans lesquelles $a_{k,l}$ est un nombre réel, $a_{k,l} > 0$, explicité dans [35] théorème 1 page 356,

$$\beta(x; k, l) = -K(x; k, l) + \frac{(S(x; k, l))^2 g(\xi)}{2} = -J(x; k, l) + L(x; k, l) + \frac{(S(x; k, l))^2 g(\xi)}{2}$$

$$\text{où } g(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2 \ln^2 x} \text{ et } \xi = \xi(x) \text{ est une fonction comprise entre } x \text{ et } \varphi(k) \theta(x; k, l),$$

$$u(x; k, l) = \sum_{p > x, p \equiv l(k)} \left(\frac{1}{p} + \ln \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right) < 0, \quad u(x; k, l) = O \left(\frac{1}{x \ln x} \right).$$

Les fonctions $K(x; k, l)$, $L(x; k, l)$ et $J(x; k, l)$ sont définies et étudiées au chapitre 2.

Démonstration. On écrit

$$(3.3) \quad \prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \exp \left\{ -A_{k,l} + \sum_{p \leq x, p \equiv l(k)} \frac{1}{p} + u(x; k, l) \right\}$$

où

$$A_{k,l} = \sum_{p \equiv l(k)} \left(\frac{1}{p} + \ln \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right) \quad \text{et} \quad u(x; k, l) = \sum_{p > x, p \equiv l(k)} \left(\frac{1}{p} + \ln \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right).$$

La formule sommatoire d'Abel ([11] page 11) nous permet d'obtenir

$$(3.4) \quad \sum_{p \leq x, p \equiv l(k)} \frac{1}{p} = \int_2^x \frac{d(\theta(t; k, l))}{t \ln t} = B_{k,l} + \frac{\ln \ln x}{\varphi(k)} + \frac{S(x; k, l)}{x \ln x} - K(x; k, l)$$

où $B_{k,l} = 1/(2 \ln 2) - (\ln(\ln 2))/2 + K(2; k, l)$. En substituant (3.4) dans (3.3) on obtient l'expression (3.1) avec $a_{k,l} = \exp \{ B_{k,l} - A_{k,l} \}$. Maintenant la formule de Taylor appliquée à la fonction $\ln \ln x$

donne

$$\frac{S(x; k, l)}{x \ln x} = \frac{\ln \ln (\varphi(k) \theta(x; k, l))}{\varphi(k)} - \frac{\ln \ln x}{\varphi(k)} + \frac{\varphi(k) (S(x; k, l))^2 g(\xi)}{2} \quad \text{où } g(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2 \ln^2 x}$$

et $\xi = \xi(x)$ est une fonction de x comprise entre x et $\varphi(k) \theta(x; k, l)$. Il en vient

$$(3.5) \quad \sum_{p \leq x, p \equiv l(k)} \frac{1}{p} = B_{k,l} + \frac{\ln(\ln(\varphi(k) \theta(x; k, l)))}{\varphi(k)} - K(x; k, l) + \frac{\varphi(k) (S(x; k, l))^2 g(\xi(x))}{2}.$$

En substituant (3.5) dans (3.3) on obtient l'expression (3.2) avec

$$\beta(x; k, l) = -K(x; k, l) + \frac{\varphi(k) (S(x; k, l))^2 g(\xi)}{2}.$$

On obtient la deuxième expression de $\beta(x; k, l)$, en écrivant $-K(x; k, l) = L(x; k, l) - J(x; k, l)$.

On donne, à titre d'exemples, les valeurs numériques des nombres $a_{k,l}$ pour $k = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= e^\gamma = 1.781071 \dots, & a_{2,1} &= e^\gamma / 2 = 0.890536 \dots \\ a_{3,1} &= \left((2\sqrt{3}\pi P_{3,2} e^\gamma) / 27 \right)^{1/2} = 0.712515 \dots, & a_{3,2} &= \left((8\sqrt{3}\pi P_{3,1} e^\gamma) / 27 \right)^{1/2} = 1.666463 \dots \\ a_{4,1} &= ((\pi P_{4,3} e^\gamma) / 8)^{1/2} = 0.773811 \dots, & a_{4,3} &= ((\pi P_{4,1} e^\gamma) / 4)^{1/2} = 1.150843 \dots \end{aligned}$$

Lemme 3.2

Soient $x_0 \geq 25000$, δ la constante de l'encadrement (2.9) (ch. 2, §3) et ξ du lemme 3.1.

1. Il existe une constante $v_k > 1$ qui dépend de x_0 et k telle que pour $x \geq x_0$

$$g(\xi) = \frac{1 + \xi}{\xi^2 \ln^2 \xi} < \frac{v_k + \ln x}{x^2 \ln^2 x} \quad \text{avec} \quad v_k = \frac{1 + Z(x_0, \delta)}{T(x_0, \delta)}$$

où

$$\begin{aligned} Z(x, \delta) &= 2\delta - 2 \ln \left(1 - \frac{\delta}{\ln x} \right) - \frac{2\delta^2}{\ln^2 x} \ln \left(1 - \frac{\delta}{\ln x} \right) + \frac{2\delta}{\ln^2 x} \ln^2 \left(1 - \frac{\delta}{\ln x} \right) \\ T(x, \delta) &= \left(\left(1 - \frac{\delta}{\ln x} \right) \left(1 + \frac{1}{\ln x} \ln \left(1 - \frac{\delta}{\ln x} \right) \right) \right)^2. \end{aligned}$$

2. Pour $x \geq x_0$, on a

$$\frac{\varphi(k) (S(x; k, l))^2 g(\xi)}{2} \leq \frac{\delta^2 (v_k + \ln x)}{2\varphi(k) \ln^4 x} \quad (v_k \text{ de la première assertion}).$$

3. Pour $k = 1, 2, 3$ et $x_0 = 25000$, on a les valeurs $v_1 = v_2 = 1.262$ et $v_3 = 2.422$.

Démonstration.

1. Pour majorer $g(\xi)$, on étudie deux cas : $x \leq \xi \leq \varphi(k) \theta(x; k, l)$

et $\varphi(k) \theta(x; k, l) \leq \xi \leq x$. Dans le premier cas, la décroissance de $g(x)$ implique

$$g(\xi) \leq g(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2 \ln^2 x}.$$

Dans le deuxième cas, l'encadrement (2.9) (ch. 2, §3) et la décroissance de $g(x)$ nous permettent d'obtenir

$$g(\xi) \leq \frac{\ln x}{x^2 \ln^2 x} \left(\frac{1}{T(x, \delta)} \right) \quad \text{où} \quad T(x, \delta) = \left(\left(1 - \frac{\delta}{\ln x} \right) \left(1 + \frac{1}{\ln x} \ln \left(1 - \frac{\delta}{\ln x} \right) \right) \right)^2.$$

L'expression de $T(x, \delta)$ implique $(\ln x)(1 - T(x, \delta)) < Z(x, \delta)$ où

$$Z(x, \delta) = 2\delta - 2 \ln \left(1 - \frac{\delta}{\ln x} \right) - \frac{2\delta^2}{\ln^2 x} \ln \left(1 - \frac{\delta}{\ln x} \right) + \frac{2\delta}{\ln^2 x} \ln^2 \left(1 - \frac{\delta}{\ln x} \right).$$

On a

$$0 < T(x, \delta) < 1, \quad T(x, \delta) \text{ croissante} \quad \text{et} \quad Z(x, \delta) > 0 \text{ décroissante.}$$

Alors, en écrivant

$$g(\xi) < \left(\frac{\ln x}{x^2 \ln^2 x} \right) \left(1 + \frac{1}{\ln x} \left(\frac{1 + Z(x, \delta)}{T(x, \delta)} \right) \right)$$

on obtient

$$g(\xi) \leq \frac{v_k + \ln x}{x^2 \ln^2 x} \quad \text{où} \quad v_k = \frac{1 + Z(x_0, \delta)}{T(x_0, \delta)} > 1.$$

2. Application de l'encadrement (2.9) (ch. 2, §3) et la première assertion.

3. Les encadrements (2.11) et (2.13) du chapitre 2 §3 donnent les valeurs de v_1, v_2, v_3 annoncées.

Lemme 3.3 *Si l'hypothèse de Riemann généralisée pour k est vraie on a*

1. Pour $x \geq k$, il existe une constante $\eta_k > 0$ qui dépend de k , telle que

$$\frac{\varphi(k) (S(x; k, l))^2 g(\xi)}{2} \leq \frac{\eta_k}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln^2 x} \quad (g(x) \text{ et } \xi \text{ du lemme 3.1}).$$

2. Soient $k \leq 8, x \geq 25000$ et v_k la constante du lemme 3.2. On a uniformément pour l

$$\eta_k = (\varphi(k))^2 \max \left\{ \frac{(0.021 \ln^2 25000)^2 (v_k + \ln 25000)}{2\sqrt{25000}}, \frac{(0.082 \ln^2 10^{10})^2 (v_k + 10 \ln 10)}{2 \times 10^5} \right\}$$

3. Pour $k = 1, 2, 3$, on a les valeurs $\eta_1 = \eta_2 = 0.230$ et $\eta_3 = 0.962$.

Démonstration.

1. ([7] page 125).

2. On étudie deux cas : $25000 \leq x \leq 10^{10}$ et $x \geq 10^{10}$.

Dans le premier cas on utilise le théorème 2 de [23] page 398 qui nous donne

$|S(x; k, l)| \leq 0.021 \sqrt{x} \ln^2 x$. Alors de la première assertion du lemme 2.7 vient

$$\frac{\varphi(k) (S(x; k, l))^2 g(\xi)}{2} \leq \left(\frac{(\varphi(k))^2 \left((0.021 \ln^2 x)^2 \right) (v_k + \ln x)}{2\sqrt{x}} \right) \frac{1}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln^2 x}.$$

Pour $x \geq 10^{10}$, l'assertion 1 du théorème 3.7 de [9] page 114 et le lemme 2.6 impliquent

$|S(x; k, l)| \leq 0.082 \sqrt{x} \ln^2 x$. En appliquant une deuxième fois l'assertion 1 du lemme 3.2, on obtient

$$\frac{\varphi(k) (S(x; k, l))^2 g(\xi)}{2} \leq \left(\frac{(\varphi(k))^2 \left((0.082 \ln^2 x)^2 \right) (v_k + \ln x)}{2\sqrt{x}} \right) \frac{1}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln^2 x}.$$

L'étude de ces deux cas fournit le résultat annoncé de l'assertion.

3. C'est une application numérique de l'assertion 2 en tenant compte des valeurs $v_1 = v_2 = 1.262$ et $v_3 = 2.422$.

Proposition 3.1 Soient $x \geq x_0 \geq 25000$, x_0 et δ de l'encadrement (2.9) (Ch. 2, §3).

1. (a) On a uniformément pour l

$$\prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} < a_{k,l} (\ln x)^{1/\varphi(k)} \exp \left\{ \frac{\beta'_k}{\varphi(k) \ln x} \right\}$$

$$\prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} < a_{k,l} (\ln (\varphi(k) \theta(x; k, l)))^{1/\varphi(k)} \exp \left\{ \frac{\beta_k}{\varphi(k) \ln x} \right\}$$

où

$$\beta'_k = \frac{\delta(1 + \ln x_0)}{\ln x_0} + \frac{\delta}{\ln x_0}, \quad \beta_k = \frac{\delta(1 + \ln x_0)}{\ln x_0} + \frac{\delta^2(v_k + \ln x_0)}{2 \ln^3 x_0}$$

(b) Pour $k = 1, 2, 3$ et $x \geq x_0 = 25000$, on a les valeurs

$$\beta'_1 = \beta'_2 = 0.127, \quad \beta'_3 = 0.628 \quad \text{et} \quad \beta_1 = \beta_2 = 0.117, \quad \beta_3 = 0.578$$

2. Si l'hypothèse de Riemann généralisée pour k est vraie on a

(a) Pour $k \in \{1, 2\}$, $l = 1$ et $x \geq 25000$, on a

$$\prod_{p \leq x, p \equiv 1(k)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} < a_{k,1} \ln(\theta(x; k, 1)) \exp \left\{ \frac{2.04619}{\sqrt{x} \ln x} + \frac{3.290}{\sqrt{x} \ln^2 x} \right\}.$$

(b) Pour $k \geq 3$ et l non résidu quadratique modulo k

$$\prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} < a_{k,l} (\ln (\varphi(k) \theta(x; k, l)))^{\frac{1}{\varphi(k)}} \exp \left\{ \frac{C_k}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln x} + \frac{\Delta_k + \eta_k + 2.810\lambda_k}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln^2 x} \right\}$$

(c) Pour $k = 3$, $l = 2$ et $x \geq x_0 = 25000$, on a

$$\prod_{p \leq x, p \equiv 2(3)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} < a_{3,2} (\ln (2\theta(x; 3, 2)))^{1/2} \exp \left\{ \frac{0.160}{2\sqrt{x} \ln x} + \frac{7.131}{2\sqrt{x} \ln^2 x} \right\}$$

Démonstration.

1. Est une conséquence des lemmes 3.1, 2.4, 3.2 et les encadrements (2.11), (2.13) du chapitre 2 §3.
2. Les trois assertions s'obtiennent en appliquant successivement le lemme 3.1, les propositions 2.3, 2.4 et le lemme 3.3 et en tenant compte des valeurs $C_1 = C_2 = 0.04619$ et $C_3 = 0.160$.

3.2 Estimation de $\prod_{\sqrt{2x} < p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$

On utilise dans ce paragraphe les encadrements (2.11), (2.12) et (2.13).

Lemme 3.4 Pour $x \geq 2$, on a

$$\prod_{\sqrt{2x} < p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \exp \left\{ \sum_{p > x, p \equiv l(k)} \frac{1}{p^2} - \sum_{p > \sqrt{2x}, p \equiv l(k)} \frac{1}{p^2} - \sum_{n \geq 2} \sum_{p > x, p \equiv l(k)} \frac{1}{np^{2n}} \right\}.$$

Lemme 3.5 Pour $x \geq 2$, On a

$$\begin{aligned} \sum_{p > x, p \equiv l(k)} \frac{1}{p^2} &= \frac{I(x)}{\varphi(k)} - \frac{S(x; k, l)}{x^2 \ln x} + \int_x^{+\infty} \frac{S(t; k, l) (1 + 2 \ln t)}{t^3 \ln^2 t} dt \quad \text{où} \quad I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \ln t} \\ - \sum_{p > \sqrt{2x}, p \equiv l(k)} \frac{1}{p^2} &= -\frac{I(\sqrt{2x})}{\varphi(k)} + \frac{S(\sqrt{2x}; k, l)}{x^2 \ln 2x} - \int_{\sqrt{2x}}^{+\infty} \frac{S(t; k, l) (1 + 2 \ln t)}{t^3 \ln^2 t} dt. \end{aligned}$$

Démonstration. La formule sommatoire d'Abel ([11] page 11) nous donne

$$\sum_{p > x, p \equiv l(k)} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{\varphi(k)} \int_x^{+\infty} \frac{d(\theta(t; k, l))}{t^2 \ln t}.$$

Puisque $\theta(t; k, l) = S(t; k, l) + t/\varphi(k)$ alors

$$\sum_{p > x, p \equiv l(k)} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{\varphi(k)} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \ln t} - \frac{S(x; k, l)}{x^2 \ln x} + \int_x^{+\infty} \frac{S(t; k, l) (1 + 2 \ln t)}{t^3 \ln^2 t} dt.$$

On obtient la deuxième égalité du lemme en remplaçant x par $\sqrt{2x}$ dans la dernière expression.

Lemme 3.6 Pour $x > e^2$, on a

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{x \ln^2 x} + 2 \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \ln^3 t}, \quad \frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{x \ln^2 x} < I(x) < \frac{1}{x \ln x} \\ I(\sqrt{2x}) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x} \ln x} - \frac{\sqrt{2}(2 + \ln 2)}{\sqrt{x} \ln^2 x} + V(x) \end{aligned}$$

où

$$V(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x} \ln x} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{-\ln 2}{\ln x} \right)^n + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x} \ln^2 x} \sum_{n \geq 1} (-1)^n (n+1) \left(\frac{\ln 2}{\ln x} \right)^n + 2 \int_{\sqrt{2x}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \ln^3 t}$$

Démonstration. On obtient l'expression de $I(x)$ en intégrant deux fois par parties. Pour obtenir l'expression de $I(\sqrt{2x})$, on écrit

$$\frac{1}{\sqrt{2x} \ln \sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{2x} \ln^2 \sqrt{2x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x} \ln x} \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln x}\right)^{-1} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x} \ln^2 x} \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln x}\right)^{-2}$$

et on utilise les égalités

$$\left(1 + \frac{\ln 2}{\ln x}\right)^{-1} = 1 - \frac{\ln 2}{\ln x} + \sum_{n \geq 2} \left(\frac{-\ln 2}{\ln x} \right)^n \quad \text{et} \quad \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln x}\right)^{-2} = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n (n+1) \left(\frac{\ln 2}{\ln x} \right)^n.$$

Observons que $V(x) > 0$ et $V(x) = O(1/(\sqrt{x} \ln^3 x))$.

Proposition 3.2

1 Pour $k \geq 1$, on a pour x suffisamment grand

$$\prod_{\sqrt{2x} < p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \exp \left\{ \frac{-\sqrt{2}}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln x} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x} \ln^2 x}\right) \right\}$$

2 Pour $k = 1, 2, 3$ et $x \geq 25000$, on a

$$\begin{aligned} \prod_{\sqrt{2x} < p \leq x, p \equiv 1(2)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) &= \prod_{\sqrt{2x} < p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) < \exp \left\{ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{x} \ln x} + \frac{3.874}{\sqrt{x} \ln^2 x} \right\} \\ \prod_{\sqrt{2x} < p \leq x, p \equiv l(3)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) &< \exp \left\{ \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{x} \ln x} + \frac{8.329}{2\sqrt{x} \ln^2 x} \right\} \quad \text{uniforme pour } l. \end{aligned}$$

Démonstration.

1. Conséquence des lemmes 3.4 et 3.6 et le théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques sous la forme $S(x; k, l) = O(x/\ln x)$.

2. Pour $k = 1$, on étudie deux cas $25000 \leq x \leq 10544111^2/2$ et $x \geq 10544111^2/2$. Dans le premier cas on écrit

$$\prod_{\sqrt{2x} < p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2} \prod_{p \leq \sqrt{2x}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \prod_{p > x} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}.$$

Un programme écrit en fortran nous a permis de vérifier que

$$\frac{6}{\pi^2} \prod_{p \leq \sqrt{2x}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} < \exp \left\{ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{x} \ln x} + \frac{3.792}{\sqrt{x} \ln^2 x} \right\}.$$

Sachant que

$$\prod_{p > x} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} < \exp \left\{ \frac{x^2}{x^2 - 1} \sum_{p > x} \frac{1}{p^2} \right\},$$

les lemmes 3.5, 3.6 et l'encadrement (2.13) impliquent

$$\prod_{p > x} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} < \exp \left\{ \frac{0.067}{\sqrt{x} \ln^2 x} \right\}.$$

Il en vient

$$\prod_{\sqrt{2x} < p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) < \exp \left\{ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{x} \ln x} + \frac{3.859}{\sqrt{x} \ln^2 x} \right\}.$$

Dans le deuxième cas ($x \geq 10544111^2/2$), on utilise les lemmes 3.4, 3.5, 3.6 et l'encadrement (2.12), on obtient

$$\prod_{\sqrt{2x} < p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) < \exp \left\{ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{x} \ln x} + \frac{3.874}{\sqrt{x} \ln^2 x} \right\}.$$

Pour $k = 3$, on utilise les lemmes 3.4, 3.5, 3.6 et l'encadrement (2.11).

CHAPITRE 4

GRANDES VALEURS DE LA FONCTION SOMME DES DIVISEURS UNITAIRES DANS LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES $(\sigma_{k,l}^*(n))$

Résumé

Soient k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$. Pour $n = \prod_{p^\alpha \parallel n} p^\alpha \geq 2$, on pose

$$\sigma_{k,l}^*(n) = \prod_{p^\alpha \parallel n, p \equiv l(k)} (1 + p^\alpha) \quad \text{et} \quad g^*(n; k, l) = \frac{\sigma_{k,l}^*(n)}{n (\ln(\varphi(k) \ln n))^{1/\varphi(k)}}$$

où $\varphi(k)$ est la fonction d'Euler. Nous montrons que l'ordre maximum de la fonction $\sigma_{k,l}^*(n)$ est égal à

$$a_{k,l} P_{k,l} n (\ln(\varphi(k) \ln n))^{1/\varphi(k)}$$

où $a_{k,l} > 0$ est un nombre réel effectivement calculable explicité dans [35] théorème 1 page 356.

Pour $k = 1, 2, 3, 4$, on a les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= e^\gamma = 1.781071 \dots, & a_{2,1} &= e^\gamma / 2 = 0.890536 \dots \\ a_{3,1} &= \left((2\sqrt{3}\pi P_{3,2} e^\gamma) / 27 \right)^{1/2} = 0.712515 \dots, & a_{3,2} &= \left((8\sqrt{3}\pi P_{3,1} e^\gamma) / 27 \right)^{1/2} = 1.666463 \dots \\ a_{4,1} &= ((\pi P_{4,3} e^\gamma) / 8)^{1/2} = 0.773811 \dots, & a_{4,3} &= ((\pi P_{4,1} e^\gamma) / 4)^{1/2} = 1.150843 \dots \end{aligned}$$

et

$$P_{k,l} = \prod_{p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \quad \text{à titre d'exemples} \quad P_{1,1} = \frac{6}{\pi^2} \quad \text{et} \quad P_{2,1} = \frac{8}{\pi^2}.$$

On a étudié les grandes valeurs de $\sigma_{k,l}^*(n)$ et obtenu les résultats suivants :

Théorème 4.1 Pour k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$, on a

1. $\limsup_{n \rightarrow +\infty} g^*(n; k, l) = a_{k,l} P_{k,l}$
2. Pour tout $k \in \{1, \dots, 20, 22, 23, 26, 30, 34, 38, 46, 73, 146\}$, il existe une infinité de nombres entiers n tels que

$$\sigma_{k,l}^*(n) > a_{k,l} P_{k,l} n (\ln(\varphi(k) \ln n))^{1/\varphi(k)}.$$

4.1 Étude de la fonction $\sigma_{k,l}^*(n)$

Lemme 4.1 Soient k et l deux entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$. On considère la suite ordonnée $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ des nombres premiers congrus à l modulo k et on pose $N_m = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_m$ pour $m = 1, 2, \dots$. Pour tout nombre entier $n \geq N_1 = p_1$, on a

$$N_m \leq n < N_{m+1} \Rightarrow g_{k,l}^*(n) \leq g_{k,l}^*(N_m).$$

Démonstration. Soit $n \geq p_1$ et $m \geq 1$ tel que $N_m \leq n < N_{m+1}$. Le nombre de facteurs premiers $p \equiv l(k)$ de n est $\leq m$, cela implique

$$\frac{\sigma_{k,l}^*(n)}{n} \leq \prod_{p|n, p \equiv l(k)} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \frac{\sigma_{k,l}^*(N_m)}{N_m}$$

par suite

$$g^*(n; k, l) = \frac{\sigma_{k,l}^*(n)}{n (\ln(\varphi(k) \ln n))^{\frac{1}{\varphi(k)}}} \leq \frac{\sigma_{k,l}^*(N_m)}{N_m (\ln(\varphi(k) \ln N_m))^{\frac{1}{\varphi(k)}}} = g^*(N_m; k, l).$$

Pour les nombres n tels que $2 \leq n < p_1$, on a

$$g_{k,l}^*(n) = \frac{1}{(\ln(\varphi(k) \ln n))^{1/\varphi(k)}} \leq \frac{1}{(\ln(\varphi(k) \ln 2))^{1/\varphi(k)}}.$$

Lemme 4.2 Soient k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$, $N = N_{k,l}(x) = \prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} p$ où $x \geq p_1$ et $\beta(x; k, l)$ la fonction étudiée au chapitre 3 (lemme 3.1). On a

$$g^*(N; k, l) = a_{k,l} P_{k,l} \exp\{\beta(x; k, l) + u_1(x)\}$$

où

$$u_1(x) = \sum_{p > x, p \equiv l(k)} \left(\frac{1}{p} - \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right) > 0 \quad \text{avec} \quad u_1(x) = O\left(\frac{1}{x \ln x} \right).$$

Démonstration. On a

$$(4.1) \quad \frac{\sigma_{k,l}^*(N)}{N} = \prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 + \frac{1}{p} \right) = \prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} \prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right).$$

D'après le lemme 3.1 (chapitre 3), on a

$$\prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} = a_{k,l} (\ln(\varphi(k) \theta(x; k, l)))^{\frac{1}{\varphi(k)}} \exp\{\beta(x; k, l) + u(x; k, l)\}$$

où

$$(4.2) \quad u(x; k, l) = \sum_{p > x, p \equiv l(k)} \left(\frac{1}{p} + \ln \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right).$$

Ensuite on écrit

$$(4.3) \quad \prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) = P_{k,l} \exp \left\{ - \sum_{p > x, p \equiv l(k)} \left(\ln \left(1 - \frac{1}{p} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right) \right\}.$$

Les formules (4.1), (4.2) et (4.3) impliquent

$$\frac{\sigma_{k,l}^*(N)}{N} = a_{k,l} P_{k,l} (\ln(\varphi(k) \theta(x; k, l)))^{\frac{1}{\varphi(k)}} \exp\{\beta(x; k, l) + u_1(x)\}.$$

Sachant que $(\ln(\varphi(k) \ln N))^{1/\varphi(k)} = (\ln(\varphi(k) \theta(x; k, l)))^{1/\varphi(k)}$, on obtient l'égalité énoncée.

Pour vérifier que $u_1(x) > 0$ et que c'est un $O(1/x \ln x)$, il suffit d'observer

$$u_1(x) = \sum_{p > x, p \equiv l(k)} \left(\frac{1}{p} - \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right) = \sum_{p > x, p \equiv l(k)} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{3p^3} + \dots \right)$$

d'où

$$0 < u_1(x) < \sum_{p > x, p \equiv l(k)} \frac{1}{p^2} = O\left(\frac{1}{x \ln x}\right) \quad \text{d'après les lemmes 3.5 et 3.6 page 37.}$$

4.2 Démonstration du théorème 4.1

1. D'après le lemme 4.1, on a $\limsup_{n \rightarrow +\infty} g^*(n; k, l) = \limsup_{m \rightarrow +\infty} g^*(N_m; k, l)$. Or, pour tout nombre entier $m \geq 1$ et x un nombre réel tels que $p_m \leq x < p_{m+1}$, on a $N_m = N_{k,l}(x)$. Donc

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} g^*(n; k, l) = \limsup_{x \rightarrow +\infty} g^*(N_{k,l}(x); k, l) = a_{k,l} P_{k,l} \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\beta(x; k, l) + u_1(x)) = 0.$$

2. D'après le lemme 3.1, On a

$$\beta(x; k, l) + u_1(x) = -J(x; k, l) + L(x; k, l) + \frac{(S(x; k, l))^2 g(\xi)}{2} + u_1(x) > -J(x; k, l).$$

Donc, pour tout $N = N_{k,l}(x)$, on a

$$g^*(N; k, l) > a_{k,l} P_{k,l} \exp\{-J(x; k, l)\}.$$

D'après l'assertion 2 de la proposition 2.2 (chapitre 2 pages 24 et 25), pour tout

$$k \in \{1, \dots, 20, 22, 23, 26, 30, 34, 38, 46, 73, 146\}$$

la fonction $-J(x; k, l)$ est > 0 une infinité de fois donc $g^*(N; k, l) > a_{k,l} P_{k,l}$ pour une infinité de nombres $N = N_{k,l}(x)$.

CHAPITRE 5

GRANDES VALEURS DE LA FONCTION SOMME DES DIVISEURS DANS LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES $(\sigma_{k,l}(n))$

Résumé

Soient k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$ et $n = \prod_{p^\alpha \parallel n} p^\alpha \geq 2$. On pose

$$\sigma_{k,l}(n) = \prod_{p^\alpha \parallel n, p \equiv l(k)} (1 + p + \cdots + p^\alpha) \quad \text{et} \quad f_{k,l}(n) = \frac{\sigma_{k,l}(n)}{n (\ln(\varphi(k) \ln n))^{1/\varphi(k)}}.$$

Les grandes valeurs de la fonction $\sigma_{k,l}(n)$ sont étudiées par G. Robin dans [25] où l'auteur a montré que l'ordre maximum de la fonction $\sigma_{k,l}(n)$ est égal à

$$a_{k,l} n (\ln(\varphi(k) \ln n))^{1/\varphi(k)} \quad (\text{les nombres } a_{k,l} \text{ sont cités au chapitre 4})$$

et établi un théorème sur le comportement relatif de $\sigma_{k,l}(n)$ et de son ordre maximum.

Dans ce chapitre nous donnons des estimations effectives de $\sigma_{k,l}(n)$ pour $k = 2$ et $k = 3$ et nous précisons le théorème de [25] pour ces deux valeurs de k . La méthode utilisée est applicable à tout $k \geq 1$. Elle est basée sur la structure des nombres $\sigma_{k,l}$ —colossalement abondants et leur calcul effectif. Ces nombres généralisent les nombres colossalement abondants définis et étudiés dans [1], [13], [24] et [25]. Nous résumons les résultats obtenus dans le :

Théorème 5.1

I. Pour $k = 2$ et $k = 3$, on a

1. $\sigma_{2,1}(n) < 14.178 n \ln(\ln n)$ pour $n \geq 3$

2. $\sigma_{2,1}(n) < 0.982 n \ln(\ln n)$ pour $n \geq 45045$

3. $\sigma_{3,1}(n) < 0.981 n (\ln(2 \ln n))^{1/2}$ pour $n \geq 2$

4. $\sigma_{3,2}(n) < 2.625 n (\ln(2 \ln n))^{1/2}$ pour $n \geq 2$

5. $\sigma_{3,2}(n) < 1.715 n (\ln(2 \ln n))^{1/2}$ pour $n \geq 20$.

II. Si l'hypothèse de Riemann généralisée pour $k = 3$ est vraie alors

1. $\sigma_{2,1}(n) < (e^\gamma/2) n (\log(\log n))$ pour $n \geq 3^4 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times \cdots \times 67$.

2. $\sigma_{3,2}(n) < a_{3,2} n (\log(2 \log n))^{1/2}$ pour $n \geq 20$ $\left(a_{3,2} = ((8\sqrt{3}\pi P_{3,1} e^\gamma)/27)^{1/2} = 1.666463 \cdots \right)$.

Nous considérons dans ce chapitre la fonction $a(x; k, l)$ définie par

$$a(x; k, l) = \theta(x; k, l) + \sum_{i \geq 3} \theta\left((x^2/2)^{1/i}; k, l\right) \quad \text{où} \quad \theta(x; k, l) = \sum_{p \leq x, p \equiv l(k)} \ln p.$$

D'après le théorème des nombres premiers dans les progressions, il existe $\mu = \mu(k)$ qui dépend de k tel que

$$(5.1) \quad 0 < \mu \leq 1 \quad \text{et} \quad a(x; k, l) \geq \mu \frac{x}{\varphi(k)} \quad \text{pour} \quad x \geq 215.$$

Les résultats de ([9] pages 14 et 144), ([23] page 398) et le calcul direct sur ordinateur pour les petites valeurs de x ($215 \leq x \leq 10544111$) permettent d'obtenir

$$(5.2) \quad a(x; 2, 1) > 0.999 x \quad \text{pour} \quad x \geq 215$$

$$(5.3) \quad a(x; 3, l) > 0.949 (x/2) \quad \text{pour} \quad x \geq 215.$$

5.1 Les nombres $\sigma_{k,l}$ — colossalement abondants ($\sigma_{k,l} - c.a.$)

Lemme 5.1 (et définition). Soient k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un unique nombre $N = N_\varepsilon$ vérifiant

$$\frac{\sigma_{k,l}(n)}{n^{\varepsilon+1}} \leq \frac{\sigma_{k,l}(N)}{N^{\varepsilon+1}} \quad \text{pour} \quad n \leq N \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_{k,l}(n)}{n^{\varepsilon+1}} < \frac{\sigma_{k,l}(N)}{N^{\varepsilon+1}} \quad \text{pour} \quad n > N.$$

Démonstration. La limite de la fonction $(\sigma_{k,l}(n))/n^\varepsilon$ étant nulle, elle atteint son maximum en un nombre fini d'entiers. N est alors le plus grand. Le nombre N est appelé $\sigma_{k,l} - c.a.$ associé à ε .

Lemme 5.2 (et définition) Pour tout entier $\alpha \geq 1$ et $x > 1$, on pose

$$F(x, \alpha) = \frac{1}{\ln x} \ln \left(1 + \frac{1}{x + \dots + x^\alpha} \right) \quad \text{qui est une fonction décroissante pour } x \text{ et } \alpha.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation $F(x, \alpha) = \varepsilon$ admet une unique solution $x_\alpha > 1$. On définit ainsi une suite $(x_\alpha)_{\alpha \geq 1}$ dans l'intervalle $]1, +\infty[$ on notera $x_1 = x$. Cette suite est strictement décroissante et possède les propriétés

$$(P) \quad \begin{aligned} & x_\alpha > x^{1/\alpha} \quad \text{pour} \quad x > 1 \quad \text{et} \quad \alpha \geq 2 \\ & \sqrt{2x} \left(1 - \frac{\ln 2}{2 \ln x} \right) < x_2 < \sqrt{2x} \quad \text{pour} \quad x \geq 1925. \end{aligned}$$

Lemme 5.3 Soient k et l deux entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$, $\varepsilon > 0$ et $N = N_\varepsilon$ le nombre $\sigma_{k,l}$ —colossalement abondant associé à ε .

1. Tout diviseur premier p de N est congru à l modulo k .

2. Pour tout diviseur premier $p \equiv l(k)$ de N avec exposant $\alpha \geq 1$ on a

$F(p, \alpha) < \varepsilon \leq F(p, \alpha + 1)$ et $x_{\alpha+1} < p \leq x_\alpha$ où x_α et $x_{\alpha+1}$ sont les termes d'indice α et $\alpha + 1$ de la suite de la définition 5.2.

3. Si $\varepsilon > \varepsilon_1$, tel que $\varepsilon_1 = F(p_1, 1)$ où $p_1 = p_1(k, l)$ est le premier nombre premier congru à l modulo

k . Alors $N = 1$.

4. La structure de N est donnée par

$$(5.4) \quad N = \prod_{x_2 < p \leq x, p \equiv l(k)} p \times \prod_{x_3 < p \leq x_2, p \equiv l(k)} p^2 \times \cdots \times \prod_{x_{m+1} < p \leq x_m, p \equiv l(k)} p^m.$$

On dit aussi que N est associé à x et on le note par $N_{k,l}(x)$.

5. Pour tout $p \equiv l(k)$ on pose

$$E_p = \{F(p, \alpha) \text{ où } \alpha \geq 1\} \quad \text{et} \quad E = \bigcup_{p \equiv l(k)} E_p.$$

On range les éléments de E en une suite décroissante $\varepsilon_1 = F(p_1, 1) > \varepsilon_2 > \cdots$. Alors l'ensemble des nombres $\sigma_{k,l}$ -colossalement abondants est

$$\{1\} \cup \{N_{\varepsilon_i} \text{ tel que } \varepsilon_i \in E\} \quad \text{et on a } 1 < N_{\varepsilon_1} < N_{\varepsilon_2} < N_{\varepsilon_3} < \cdots.$$

Voici à titre d'exemple les sept premiers nombres $\sigma_{k,l}$ - c.a. pour $k = 1, 2, 3$.

$k = 1$ et $l = 1$

ε	$N = N_\varepsilon$	$\sigma_{1,1}(N)$	$f_{1,1}(N)$
$\varepsilon > \varepsilon_1 = F(2, 1) = 0.584962$	1	1	indéfinie
$\varepsilon_1 \geq \varepsilon > \varepsilon_2 = 0.261859$	2	3	-4.092625
$\varepsilon_2 \geq \varepsilon > \varepsilon_3 = 0.222392$	2×3	12	3.429366
$\varepsilon_3 \geq \varepsilon > \varepsilon_4 = 0.113282$	$2^2 \times 3$	28	2.563440
$\varepsilon_4 \geq \varepsilon > \varepsilon_5 = 0.099535$	$2^2 \times 3 \times 5$	168	1.986369
$\varepsilon_5 \geq \varepsilon > \varepsilon_6 = 0.072858$	$2^3 \times 3 \times 5$	360	1.915700
$\varepsilon_6 \geq \varepsilon > \varepsilon_7 = 0.062621$	$2^3 \times 3^2 \times 5$	1170	1.833470.

$k = 2$ et $l = 1$

ε	$N = N_\varepsilon$	$\sigma_{2,1}(N)$	$f_{2,1}(N)$
$\varepsilon > \varepsilon_1 = F(3, 1) = 0.261859$	1	1	indéfinie
$\varepsilon_1 \geq \varepsilon > \varepsilon_2 = 0.113282$	3	4	14.177183
$\varepsilon_2 \geq \varepsilon > \varepsilon_3 = 0.072858$	3×5	24	1.296674
$\varepsilon_3 \geq \varepsilon > \varepsilon_4 = 0.068621$	$3^2 \times 5$	78	1.132201
$\varepsilon_4 \geq \varepsilon > \varepsilon_5 = 0.036286$	$3^2 \times 5 \times 7$	624	1.030010
$\varepsilon_5 \geq \varepsilon > \varepsilon_6 = 0.028892$	$3^2 \times 5 \times 7 \times 11$	7488	0.981274
$\varepsilon_6 \geq \varepsilon > \varepsilon_7 = 0.023045$	$3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$	104832	0.966653.

$k = 3$ et $l = 1$

ε	$N = N_\varepsilon$	$\sigma_{3,1}(N)$	$f_{3,1}(N)$
$\varepsilon > \varepsilon_1 = F(7, 1) = 0.068621$	1	1	indéfinie
$\varepsilon_1 \geq \varepsilon > \varepsilon_2 = 0.028892$	7	8	0.980396
$\varepsilon_2 \geq \varepsilon > \varepsilon_3 = 0.017420$	7×13	112	0.829853
$\varepsilon_3 \geq \varepsilon > \varepsilon_4 = 0.009245$	$7 \times 13 \times 19$	2240	0.788142
$\varepsilon_4 \geq \varepsilon > \varepsilon_5 = 0.009095$	$7 \times 13 \times 19 \times 31$	71680	0.761904
$\varepsilon_5 \geq \varepsilon > \varepsilon_6 = 0.007385$	$7^2 \times 13 \times 19 \times 31$	510720	0.755661
$\varepsilon_6 \geq \varepsilon > \varepsilon_7 = 0.006112$	$7^2 \times 13 \times 19 \times 31 \times 37$	19407360	0.747990.

$k = 3$ et $l = 2$

ε	$N = N_\varepsilon$	$\sigma_{3,2}(N)$	$f_{3,2}(N)$
$\varepsilon > \varepsilon_1 = F(2, 1) = 0.262458$	1	1	indéfinie
$\varepsilon_1 \geq \varepsilon > \varepsilon_2 = 0.222392$	2	3	2.624583
$\varepsilon_2 \geq \varepsilon > \varepsilon_3 = 0.113282$	2^2	7	1.732943
$\varepsilon_3 \geq \varepsilon > \varepsilon_4 = 0.099535$	$2^2 \times 5$	42	1.569466
$\varepsilon_4 \geq \varepsilon > \varepsilon_5 = 0.047305$	$2^3 \times 5$	90	1.591599
$\varepsilon_5 \geq \varepsilon > \varepsilon_6 = 0.036286$	$2^4 \times 5$	186	1.578073
$\varepsilon_6 \geq \varepsilon > \varepsilon_7 = 0.020836$	$2^4 \times 5 \times 11$	2232	1.570838.

Lemme 5.4 ([25] page 340) Soient $3 \leq N_1 \leq n \leq N_2$, N_1 et N_2 étant deux nombres $\sigma_{k,l}$ - c.a. Alors $f_{k,l}(n) \leq \max(f_{k,l}(N_1), f_{k,l}(N_2))$.

Lemme 5.5 Soient $x \geq 2$ et $N = N_{k,l}(x)$ le nombre $\sigma_{k,l}$ - c.a. associé à x . On a

$$f_{k,l}(N) < (\log(\varphi(k) \log N))^{-\frac{1}{\varphi(k)}} \prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \prod_{\sqrt{2x} < p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Démonstration. Dédution directe de la formule (5.4) et les propriétés (P).

Lemme 5.6 ([25] page 339) Pour $N = N_{k,l}(x)$ $\sigma_{k,l}$ - c.a. associé à x assez grand on a

$$(\log(\varphi(k) \log N))^{-1/\varphi(k)} = ((\log(\varphi(k) \theta(x; k, l))))^{-1/\varphi(k)} \exp \left(\frac{-\sqrt{2}}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln x} + O \left(\frac{1}{\sqrt{x} \ln^2 x} \right) \right).$$

Pour les évaluations effectives nous aurons besoin du résultat précis suivant

Lemme 5.7 Soit $N = N_{k,l}(x)$ le nombre $\sigma_{k,l}$ - c.a. associé à $x \geq y = 25000$, δ la constante de l'encadrement 2.9 du chapitre 2 page 30 et μ de l'inégalité (5.1).

1. On a

$$(\ln(\varphi(k) \ln N))^{-\frac{1}{\varphi(k)}} < (\ln(\varphi(k) \theta(x; k, l)))^{-\frac{1}{\varphi(k)}} \exp \left\{ \frac{-\alpha \sqrt{2}}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln x} + \frac{(\alpha \ln 2) / \sqrt{2}}{\varphi(k) \sqrt{x} \ln^2 x} \right\}$$

où $\alpha = \alpha(k)$ est une constante donnée par les relations suivantes

$$\alpha = \alpha_3 \left(1 - \frac{\alpha_3}{\sqrt{2y} \ln y} \right), \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_2 \ln^2 y}{\delta + \ln^2 y}, \quad \alpha_2 = \alpha_1 \left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt{2y}} \right) \text{ et } \alpha_1 = \frac{\mu \ln y}{\delta + \ln y}.$$

2. Pour $k = 2$ et $k = 3$, on a les valeurs $\alpha(2) = 0.982$ et $\alpha(3) = 0.918$.

Démonstration.

1. De la formule (5.4) vient

$$\ln(\varphi(k) \ln N) \geq \ln(\varphi(k) \theta(x; k, l)) \exp \left(\ln \left(1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{a(x_2; k, l)}{\theta(x; k, l)} \right)}{\ln(\varphi(k) \theta(x; k, l))} \right) \right).$$

Il suffit alors de minorer l'expression de l'exponentielle.

Les formules (5.1) et (2.9) et les propriétés (P) impliquent

$$\frac{a(x_2; k, l)}{\theta(x; k, l)} > \frac{\mu \sqrt{2}}{(1 + \delta / \ln x) \sqrt{x}} \left(1 - \frac{\ln 2}{2} \right) > \frac{\alpha_1 \sqrt{2}}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{(\ln 2) / 2}{\ln x} \right) \quad \text{où } \alpha_1 = \frac{\mu \ln y}{\delta + \ln y}.$$

Alors l'inégalité $\ln(1+t) > t - t^2/2$ pour $t > 0$, nous permet d'obtenir

$$\ln \left(1 + \frac{a(x_2; k, l)}{\theta(x; k, l)} \right) > \frac{\alpha_2 \sqrt{2}}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{(\ln 2)/2}{\ln x} \right) \quad \text{où} \quad \alpha_2 = \alpha_1 \left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt{2y}} \right).$$

On a

$$\ln(\varphi(k) \theta(x; k, l)) < \ln x \left(1 + \frac{\delta}{\ln^2 x} \right) < \left(1 + \frac{\delta}{\ln^2 y} \right) \ln x$$

d'où

$$\frac{\ln \left(1 + \frac{a(x_2; k, l)}{\theta(x; k, l)} \right)}{\ln(\varphi(k) \theta(x; k, l))} > \frac{\alpha_3 \sqrt{2}}{\sqrt{x} \ln x} \left(1 - \frac{(\ln 2)/2}{\ln x} \right) \quad \text{où} \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_2 \ln^2 y}{\delta + \ln^2 y}.$$

On utilise une deuxième fois, l'inégalité $\ln(1+t) > t - t^2/2$ pour $t > 0$, on obtient

$$\ln \left(1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{a(x_2; k, l)}{\theta(x; k, l)} \right)}{\ln(\varphi(k) \theta(x; k, l))} \right) > \frac{\alpha \sqrt{2}}{\sqrt{x} \ln x} \left(1 - \frac{(\ln 2)/2}{\ln x} \right) \quad \text{où} \quad \alpha = \alpha_3 \left(1 - \frac{\alpha_3}{\sqrt{2y} \ln y} \right).$$

2. C'est une application numérique de l'assertion 1 et les inégalités (5.2), (2.13), (5.3) et (2.11).

5.2 Démonstration du théorème 5.1

5.2.1 Démonstration de la première partie du théorème

Soit $k \in \{2, 3\}$ et $N = N_{k,l}(x)$ le nombre $\sigma_{k,l} - c.a$ associé à $x \geq 25000$.

Les lemmes 5.5, 5.7, l'assertion 1 de la proposition 3.1 et la proposition 3.2 nous donnent

$$(5.5) \quad f_{2,1}(N) < \frac{e^\gamma}{2} \exp \left\{ \frac{-2.803}{\sqrt{x} \ln x} + \frac{4.356}{\sqrt{x} \ln^2 x} + \frac{0.117}{\ln x} \right\} < 0.900$$

$$(5.6) \quad f_{3,1}(N) < a_{3,1} \exp \left\{ \frac{-1.356}{\sqrt{x} \ln x} + \frac{4.390}{\sqrt{x} \ln^2 x} + \frac{0.289}{\ln x} \right\} < 0.733$$

$$(5.7) \quad f_{3,2}(N) < a_{3,2} \exp \left\{ \frac{-1.356}{\sqrt{x} \ln x} + \frac{4.354}{\sqrt{x} \ln^2 x} + \frac{0.289}{\ln x} \right\} < 1.714.$$

Ensuite on a calculé

tous les nombres $N \quad \sigma_{2,1} - c.a. \leq N_{2,1}(25000) \quad (2834 \text{ nombres})$

tous les nombres $N \quad \sigma_{3,2} - c.a. \leq N_{3,2}(25000) \quad (1440 \text{ nombres})$

tous les nombres $N \quad \sigma_{3,1} - c.a. \leq N_{3,1}(25000) \quad (1401 \text{ nombres})$

et on a constaté que

$$(5.8) \quad f_{2,1}(N) < e^\gamma/2 \quad \text{pour} \quad N_0 = 3^4 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times \cdots \times 67 \leq N \leq N_{2,1}(25000)$$

$$(5.9) \quad f_{2,1}(N) < f_{2,1}(45045) = \frac{104832}{45045 \ln(\ln(45045))} = 0.981 \cdots \quad \text{pour} \quad 45045 \leq N < N_0$$

$$(5.10) \quad f_{2,1}(N) < f_{2,1}(3) = \frac{4}{3 \ln(\ln(3))} = 14.177 \cdots \quad \text{pour} \quad 3 \leq N < 45045$$

$$(5.11) \quad f_{3,1}(N) < f_{3,1}(7) = \frac{8}{7 \ln(2 \ln(7))^{1/2}} = 0.980 \cdots \quad \text{pour} \quad 7 \leq N \leq N_{3,1}(25000)$$

$$(5.12) \quad f_{3,2}(N) < a_{3,2} \quad \text{pour} \quad 2^2 \times 5 = 20 \leq N \leq N_{3,2}(25000).$$

Pour $k = 3$, $2 \leq n \leq 7$ et $2 \leq n < 20$ on a terminé les calculs à la main et on a obtenu

$$\begin{aligned} f_{3,1}(n) &< f_{3,1}(7) = \frac{8}{7(\ln(2(\ln 7)))^{1/2}} = 0.980 \dots \quad \text{pour } 2 \leq n \leq 7 \\ f_{3,2}(n) &< f_{3,2}(2) = \frac{3}{2(\ln 2(\ln 2))^{1/2}} = 2.624 \dots \quad \text{pour } 2 \leq n \leq 20. \end{aligned}$$

En tenant compte du lemme 5.4, on obtient enfin

$$\begin{aligned} f_{2,1}(n) &< f_{2,1}(3) = \frac{4}{3 \ln(\ln(3))} = 14.177 \dots \quad \text{pour } n \geq 3 \\ f_{2,1}(n) &< f_{2,1}(45045) = \frac{104832}{45045 \ln(\ln(45045))} = 0.981 \dots \quad \text{pour } n \geq 45045 \\ f_{3,1}(n) &< f_{3,1}(7) = \frac{8}{7(\ln(2(\ln 7)))^{1/2}} = 0.980 \dots \quad \text{pour } n \geq 2 \\ f_{3,2}(n) &< f_{3,2}(2) = \frac{3}{2(\ln 2(\ln 2))^{1/2}} = 2.624 \dots \quad \text{pour } n \geq 2 \\ f_{3,2}(n) &< 1.715 \quad \text{pour } n \geq 20 \end{aligned}$$

d'où les assertions de la première partie du théorème.

5.2.2 Démonstration de la deuxième partie du théorème

Soient $k \in \{2, 3\}$ et $N = N_{k,l}(x)$ le nombre $\sigma_{k,l} - c.a.$ associé à $x \geq 25000$.

Les lemmes 5.5, 5.7, l'assertion 2 de la proposition 3.1 et la proposition 3.2 nous donnent

$$f_{2,1}(N) < \frac{e^\gamma}{2} \exp \left\{ \frac{-0.75581}{\sqrt{x} \ln x} + \frac{7.646}{\sqrt{x} \ln^2 x} \right\} < \frac{e^\gamma}{2} \text{ et } f_{3,2}(N) < a_{3,2} \exp \left\{ \frac{-2.552}{2\sqrt{x} \ln x} + \frac{15.910}{2\sqrt{x} \ln^2 x} \right\} < a_{3,2}$$

donc

$$(5.13) \quad f_{2,1}(N) < e^\gamma/2 \quad \text{pour tout nombre } N \text{ } \sigma_{2,1} - c.a. \text{ } N \geq N_{2,1}(25000)$$

$$(5.14) \quad f_{3,2}(N) < a_{3,2} \quad \text{pour tout nombre } N \text{ } \sigma_{3,2} - c.a., \text{ } N \geq N_{3,2}(25000).$$

Maintenant les inégalités (5.8), (5.12), (5.13), (5.14) et le lemme 5.4 nous donnent les deux assertions de la deuxième partie du théorème.

Remarques 5.1

1. Les nombres $N_{2,1}(25000)$, $N_{3,1}(25000)$ et $N_{3,2}(25000)$ sont

$$\begin{aligned} N_{2,1}(25000) &= 3^{10} \times 5^7 \times 7^5 \times (11 \times 13 \times 17)^4 \times \prod_{19 \leq p \leq 37} p^3 \times \prod_{41 \leq p \leq 211} p^2 \times \prod_{223 \leq p \leq 24989} p \\ N_{3,1}(25000) &= 7^5 \times 13^4 \times (19 \times 31 \times 37)^3 \times \prod_{43 \leq p \leq 211, p \equiv 1(3)} p^2 \times \prod_{223 \leq p \leq 24979, p \equiv 1(3)} p \\ N_{3,2}(25000) &= 2^{17} \times 5^7 \times (11 \times 17)^4 \times (23 \times 29)^3 \times \prod_{41 \leq p \leq 197, p \equiv 2(3)} p^2 \times \prod_{227 \leq p \leq 24989, p \equiv 2(3)} p. \end{aligned}$$

2. Pour $k = 2$, on a trouvé 23 nombres $\sigma_{2,1} - c.a.$ $N < 3^4 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times \dots \times 67$ tels que $f_{2,1}(N) > e^\gamma/2$.

CHAPITRE 6

GRANDES VALEURS DE LA FONCTION $\sigma_{k,l}(n)/\sigma_{k,l}^*(n)$

Résumé

Soient k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$. Pour un nombre entiers $n = \prod_{p^\alpha \parallel n} p^\alpha \geq 2$, on considère les fonctions

$$\sigma_{k,l}(n) = \prod_{p^\alpha \parallel n, p \equiv l(k)} (1 + p + \cdots + p^\alpha), \quad \sigma_{k,l}^*(n) = \prod_{p^\alpha \parallel n, p \equiv l(k)} (1 + p^\alpha) \quad \text{et} \quad f_{k,l}^*(n) = \frac{\sigma_{k,l}(n)}{\sigma_{k,l}^*(n) (\ln(\varphi(k)) \ln n)^{1/\varphi(k)}}$$

où $\varphi(k)$ est la fonction d'Euler. $\varphi(k)$. Dans ce chapitre, nous introduisons et étudions les nombres $\sigma_{k,l}^*$ -colossalement abondants ($\sigma_{k,l}^* - c.a.$) qui, par définition, maximisent la fonction $f_{k,l}^*(n)$. La structure de ces nombres ainsi que le théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques et les résultats du chapitre 3 nous permettent d'obtenir les résultats suivants :

Théorème 6.1

Pour k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$, on a

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup f_{k,l}^*(n) = a_{k,l}$ (les nombres $a_{k,l}$ sont cités au chapitre 3).

2. Il existe $n_0 = n_0(k, l)$, assez grand, qui dépend de k et l tel que

$$\frac{\sigma_{k,l}(n)}{\sigma_{k,l}^*(n)} < a_{k,l} (\ln(\varphi(k) \ln n))^{1/\varphi(k)} \quad \text{pour} \quad n \geq n_0.$$

3. Pour $k = 1, 2, 3$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{1,1}(n)}{\sigma_{1,1}^*(n)} &< a_{1,1} (\ln(\ln n)) && \text{pour } n \geq 17 && (n_0(1, 1) = 17) \\ \frac{\sigma_{2,1}(n)}{\sigma_{2,1}^*(n)} &< a_{2,1} (\ln(\ln n)) && \text{pour } n \geq 676 && (n_0(2, 1) = 676) \\ \frac{\sigma_{3,1}(n)}{\sigma_{3,1}^*(n)} &< a_{3,1} (\ln(2 \ln n))^{1/2} && \text{pour } n \geq 8282 && (n_0(3, 1) = 8282) \\ \frac{\sigma_{3,2}(n)}{\sigma_{3,2}^*(n)} &< a_{3,2} (\ln(2 \ln n))^{1/2} && \text{pour } n \geq 4 && (n_0(3, 2) = 4). \end{aligned}$$

On rappelle que :

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= e^\gamma = 1.781071 \dots, & a_{2,1} &= e^\gamma / 2 = 0.890536 \dots \\ a_{3,1} &= \left((2\sqrt{3}\pi P_{3,2} e^\gamma) / 27 \right)^{1/2} = 0.712515 \dots, & a_{3,2} &= \left((8\sqrt{3}\pi P_{3,1} e^\gamma) / 27 \right)^{1/2} = 1.666463 \dots. \end{aligned}$$

6.1 Les nombres $\sigma_{k,l}^*$ —colossalement abondants ($\sigma_{k,l}^* - c.a.$)

Lemme 6.1 (et définition) Pour k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$ et $\varepsilon > 0$, il existe un unique nombre $N = N_{k,l}(\varepsilon)$ qui dépend de k , l et ε tel que

$$\frac{\sigma_{k,l}(n)}{n^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(n)} \leq \frac{\sigma_{k,l}(N)}{N^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(N)} \quad \text{pour } n \leq N \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_{k,l}(n)}{n^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(n)} < \frac{\sigma_{k,l}(N)}{N^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(N)} \quad \text{pour } n > N.$$

Ce nombre est appelé $\sigma_{k,l}^*$ —colossalement abondant associé à ε .

Démonstration. La limite, quand $n \rightarrow +\infty$, de la fonction $\sigma_{k,l}(n) / \left(n^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(n) \right)$ étant nulle, alors elle atteint son maximum en un nombre fini de nombres entiers. N est alors le plus grand.

Lemme 6.2 (et définition) Pour tout nombre entier $\alpha \geq 0$ et tout nombre réel $x > 1$, on pose

$$G(x, \alpha) = (\ln(1 + g_\alpha(x))) / \ln x \quad \text{où} \quad g_\alpha(x) = x^\alpha / \left(\sum_{m=0}^{\alpha} x^{2m} \right).$$

1. Pour tout nombre entier $\alpha \geq 0$ fixé, la fonction $G(x, \alpha)$ est continue, strictement décroissante de $+\infty$ à 0 sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

2. Pour tout $x \in]1, +\infty[$ fixé, $G(x, \alpha + 1) < G(x, \alpha)$ pour tout $\alpha \geq 0$.

Démonstration.

1. Pour tout nombre réel $x > 1$ et α un nombre entier, $\alpha \geq 1$, on a

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} \left(1 + \sum_{m=1}^{\alpha/2} (x^{2m} + 1/x^{2m}) \right)^{-1} & \text{si } \alpha \text{ est pair} \\ \left(\sum_{m=0}^{(\alpha-1)/2} (x^{2m+1} + 1/x^{2m+1}) \right)^{-1} & \text{si } \alpha \text{ est impair.} \end{cases}$$

Dans les deux cas $g'_\alpha(x) < 0$. Il en résulte

$$G'(x, \alpha) = \frac{\frac{g'_\alpha(x)}{1+g_\alpha(x)} \ln x - \frac{1}{x} \ln(1 + g_\alpha(x))}{(\ln x)^2} < 0.$$

Pour $x > 1$, $G(x, 0) = \ln 2 / \ln x$ est continue, strictement décroissante de $+\infty$ à 0.

2. Pour tout nombre réel $x \in]1, +\infty[$ fixé et α un nombre entier $\alpha \geq 0$, on a

$$g_\alpha(x) - g_{\alpha+1}(x) = \frac{x^\alpha + \sum_{m=1}^{\alpha+1} (x^{2m+\alpha} - x^{2m+\alpha-1})}{\left(\sum_{m=0}^{\alpha} x^{2m} \right) \left(\sum_{m=0}^{\alpha+1} x^{2m} \right)} > 0 \quad \text{ce qui implique} \quad G(x, \alpha) > G(x, \alpha + 1).$$

Lemme 6.3 (et définition) Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ et α un nombre entier, $\alpha \geq 1$, l'équation $G(x, \alpha) = \varepsilon$ admet une unique solution x_α dans l'intervalle $]1, +\infty[$. On définit ainsi une suite $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$ dans $]1, +\infty[$. On pose $x_1 = x$ et on a

1. La suite $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

2. Pour tout $\alpha \geq 2$ et $x > 1$ on a $x^{1/\alpha} < x_\alpha < \sqrt{2x}$.

3. Pour tout $\alpha \geq 2$ on a

$$x_\alpha = (\alpha x)^{1/\alpha} \left(1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha \ln x} + \frac{(2\alpha + (\alpha + 1)) \ln \alpha}{2\alpha^2 (\ln^2 x)} + o\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right) \right).$$

4. Pour $x \geq e^2$ on a

$$\sqrt{2x} \left(1 - \frac{\ln 2}{2 \ln x} \right) < x_2.$$

Démonstration.

1. On a $\varepsilon = G(x, 1) = G(x_\alpha, \alpha) = G(x_{\alpha+1}, \alpha + 1)$. Puisque la fonction G est décroissante par rapport à ses deux variables, alors $G(x_\alpha, \alpha) = G(x_{\alpha+1}, \alpha + 1) < G(x_{\alpha+1}, \alpha)$ par suite $x_\alpha > x_{\alpha+1}$.

2. Pour $\alpha \geq 2$ et $x > 1$ on pose $t = x^{1/\alpha}$. Puisque $x > 1$ alors $t > 1$ et $t^2 + \dots + t^{2\alpha} < \alpha t^{2\alpha}$ par suite

$$\left(1 + \frac{t^\alpha}{1 + t^2 + \dots + t^{2\alpha}} \right)^\alpha > 1 + \frac{\alpha t^\alpha}{1 + t^2 + \dots + t^{2\alpha}} > 1 + \frac{\alpha t^\alpha}{1 + \alpha t^{2\alpha}} > 1 + \frac{t^\alpha}{1 + t^{2\alpha}}.$$

Puisque $\alpha t^\alpha = \alpha x$ et $\alpha t^{2\alpha} = \alpha x^2$ alors

$$\left(1 + \frac{t^\alpha}{1 + t^2 + \dots + t^{2\alpha}} \right)^\alpha > 1 + \frac{x}{1 + x^2}.$$

En prenant le logarithme des deux membres de la dernière inégalité et en divisant par $\ln x$, on obtient

$$G(t, \alpha) > G(x, 1) \text{ soit } G(x^{1/\alpha}, \alpha) > G(x, 1) = G(x_\alpha, \alpha) \text{ d'où } x^{1/\alpha} < x_\alpha < \sqrt{2x}.$$

3. Pour $\alpha \geq 2$, on pose $y = x_\alpha$. Le développement limité généralisé de $G(x, \alpha)$ et $G'(x, \alpha)$ au voisinage de $+\infty$ nous donne

$$(6.1) \quad G(x, \alpha) = \frac{1}{x^\alpha \ln x} - \frac{1}{2x^{2\alpha} \ln x} + o\left(\frac{1}{x^{\alpha+1} \ln x}\right) \text{ et } G'(x, \alpha) \sim \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1} \ln x}.$$

De (6.1) vient

$$G(y, \alpha) \sim \frac{1}{y^\alpha \ln y} \text{ et } G(x, 1) \sim \frac{1}{x \ln x}.$$

Puisque $G(x, 1) = G(y, \alpha)$ alors $y^\alpha \ln y \sim x \ln x$ ce qui permet d'obtenir

$$(6.2) \quad y \sim (\alpha x)^{1/\alpha}.$$

Soit f la fonction définie, de $[1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$, par

$$(f(x))^\alpha \ln(f(x)) = x \ln x.$$

La fonction $w(y) = y^\alpha \log y$ étant croissante de $[1, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ admet une fonction réciproque w^{-1} . Donc $f(x) = w^{-1}(x \ln x)$; $f(x)$ est une fonction strictement croissante de 1 à $+\infty$ sur $[1, +\infty[$.

Pour simplifier les notations, on écrit

$$(6.3) \quad f^\alpha \ln f = x \ln x.$$

De (6.3) on obtient

$$(6.4) \quad f \sim (\alpha x)^{1/\alpha}.$$

Posons $u(x) = G(x, \alpha)$ pour $x > 1$. Des formules (6.1), (6.2), (6.3) et (6.4) on obtient

$$u(f) = \frac{1}{f^\alpha \ln f} + o\left(\frac{1}{f^{\alpha+1} \ln f}\right) \quad \text{et} \quad u(y) = G(x, 1) = \frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{2x^2 \ln x} + o\left(\frac{1}{x^2 \ln x}\right)$$

d'où vient

$$(6.5) \quad u(y) - u(f) = o\left(\frac{1}{x^{1+1/\alpha} \ln x}\right).$$

D'autre part on a

$$(6.6) \quad u(y) - u(f) = (y - f) u'(\xi)$$

où ξ est une fonction de x comprise entre y et f . Puisque les deux fonctions f et y sont équivalentes à $(\alpha x)^{1/\alpha}$ donc $\xi \sim (\alpha x)^{1/\alpha}$, alors de la formule (6.1) on obtient

$$(6.7) \quad u'(\xi) \sim \frac{-\alpha}{\xi^{\alpha+1} \ln(\xi)} \sim \frac{-\alpha}{(\alpha x)^{1+1/\alpha} \ln x}.$$

Les formules (6.5), (6.6) et (6.7) nous donnent

$$(6.8) \quad y - f = o(1).$$

Le développement limité de f s'obtient par itération. D'après (6.4) on pose

$$f = (\alpha x)^{1/\alpha} (1 + o(1))$$

d'où

$$(6.9) \quad \ln f = \frac{1}{\alpha} \ln x + \frac{1}{\alpha} \ln \alpha + o(1).$$

Par définition

$$(6.10) \quad f = ((x \ln x) / \ln f)^{1/\alpha}.$$

Des formules (6.9) et (6.10) on obtient

$$(6.11) \quad f = (\alpha x)^{1/\alpha} \left(1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha \ln x} + o\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right).$$

On remplace, dans la formule (6.10), $\ln f$ par son expression déduite de (6.11) et on fait un développement limité généralisé à l'ordre 2 de l'expression de f obtenue on trouve

$$(6.12) \quad f = (\alpha x)^{1/\alpha} \left(1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha \ln x} + \frac{(2\alpha + (\alpha + 1)) \ln \alpha}{2\alpha^2 (\ln^2 x)} + o\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)\right).$$

Les formules (6.8) et (6.12) nous permettront alors de conclure.

4. Pour $x \geq e^2$, on pose

$$z = \sqrt{2x} \, g(x) \quad \text{où} \quad g(x) = 1 - \frac{\ln 2}{2 \ln x} \quad \left(z > 1 \quad \text{car} \quad x \geq e^2 > \sqrt{2} \right)$$

et on montre $G(x_2, 2) < G(z, 2)$ ce qui permettra de conclure car la fonction G est décroissante par rapport à ces deux variables. On a

$$\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) > (x + 1/2)^{-1} \quad \text{pour tout} \quad x > 0$$

ce qui implique

$$G(z, 2) = \frac{1}{\ln z} \log \left(1 + \frac{z^2}{1 + z^2 + z^4} \right) > \frac{2z^2}{(2 + 3z^2 + z^4) \ln z}.$$

D'autre part, on a

$$G(x_2, 2) = G(x, 1) = \frac{1}{\ln x} \ln \left(1 + \frac{x}{1 + x^2} \right) < \frac{1}{x \ln x}$$

alors

$$\frac{\ln z}{x \ln x} < \frac{2z^2}{2 + 3z^2 + z^4} \quad \text{impliquera} \quad G(x_2, 2) < G(z, 2).$$

Remarquons que

$$\frac{\ln z}{x \ln x} < \frac{d(x)}{2x} \quad \text{où} \quad d(x) = 1 + \frac{\ln 2}{\ln x} - \frac{\ln 2}{\ln^2 x}.$$

Alors

$$\frac{d(x)}{2x} < \frac{2z^2}{2 + 3z^2 + z^4} \quad \text{entraînera} \quad G(x_2, 2) < G(z, 2).$$

Or, comme $z = \sqrt{2x} \, g(x)$, on a l'équivalence

$$\frac{1}{2x} d(x) < \frac{2z^2}{2 + 3z^2 + z^4} \iff D(x) < 0$$

où

$$D(x) = \left(\left(d(x) \frac{(g(x))^2}{2} - 1 \right) x^2 + \left(\frac{3d(x)}{4} \right) x + \frac{d(x)}{4(g(x))^2} \right).$$

Nous devons donc démontrer $D(x) < 0$. La fonction

$$d(x) = 1 + \frac{\ln 2}{\ln x} - \frac{\ln 2}{\ln^2 x} \quad \text{est décroissante pour} \quad x \geq e^2$$

et on a

$$1 < d(x) < (1 + \ln 2) / 4 < 1.174 \quad \text{pour} \quad x \geq e^2.$$

La fonction $g(x) = 1 - \ln 2 / (2 \ln x)$ est croissante pour $x > 1$, et on a

$$0.826 < 1 - (\ln 2) / 4 < g(x) < 1 \quad \text{pour} \quad x \geq e^2$$

par suite

$$0.341 < (g(x))^2 / 2 < 1/2 \quad \text{pour} \quad x \geq e^2.$$

Les majorations explicites des fonctions $d(x)$ et $g(x)$ permettent d'obtenir

$$D(x) = \left(\frac{1.174}{2} - 1 \right) + \left(\frac{3 \times 1.174}{4e^2} \right) + \frac{1.174}{2.728e^2} < -0.286 \quad \text{pour } x \geq e^2.$$

Nous avons vu que $D(x) < 0$ implique $G(x_2, 2) < G(z, 2)$ d'où

$$z = \sqrt{2x} \left(1 - \frac{\ln 2}{2 \ln x} \right) < x_2 \quad \text{pour } x \geq e^2.$$

Remarque 6.1 On peut améliorer l'assertion 4 du lemme de la façon suivante : En posant

$$z = \sqrt{2x} g(x) \quad \text{où} \quad g(x) = 1 - \frac{\ln 2}{2 \ln x} + \frac{4 + 3 \ln 2}{8 \ln^2 x}$$

la fonction $d(x)$ devient

$$d(x) = 1 + \frac{\ln 2}{\ln x} - \frac{\ln 2}{\ln^2 x} + \frac{4 + 3 \ln 2}{8 \ln^3 x}.$$

La fonction $g(x)$ est alors croissante pour $x \geq 81$ et on a $0.960 < g(x) < 1$ pour $x \geq 81$ d'où

$$0.461 < (g(x))^2 / 2 < 1/2 \quad \text{pour } x \geq 81.$$

La fonction $d(x)$ est décroissante pour $x \geq e$ alors pour $x \geq 81$

$$1 < d(x) < 1.131.$$

Ces majorations donnent

$$D(x) < -0.423 \quad \text{pour } x \geq 81$$

d'où

$$x_2 > \sqrt{2x} \left(1 - \frac{\ln 2}{2 \ln x} + \frac{4 + 3 \ln 2}{8 \ln^2 x} \right) \quad \text{pour } x \geq 81.$$

Lemme 6.4 Soient $\varepsilon \in R_+^*$, k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$ et $N = N_{k,l}(\varepsilon)$ le nombre $\sigma_{k,l}^*$ -colossalement abondant associé à ε .

1. Tout diviseur premier p de N est congru à l modulo k et, son exposant α est ≥ 2 .

2. Pour tout diviseur premier $p \equiv l(k)$ de N avec exposant $\alpha \geq 2$ on a

(a) $G(p, \alpha) < \varepsilon \leq G(p, \alpha - 1)$.

(b) $x_\alpha < p \leq x_{\alpha-1}$ où x_α et $x_{\alpha-1}$ sont les termes d'indice α et $\alpha - 1$ de la suite de la définition 6.3.

3. Pour tout $\varepsilon > \varepsilon_1$, tel que $\varepsilon_1 = G(p_1, 1)$ où $p_1 = p_1(k, l)$ est le premier nombre premier congru à l modulo k , on a $N = 1$.

Démonstration.

1. Supposons que N admet un diviseur premier p non congru à l modulo k , alors $N = p^\alpha N'$ avec $(p, N') = 1$ et $\alpha \geq 1$. On a

$$N' < N \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_{k,l}(N)}{N^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(N)} = \frac{\sigma_{k,l}(N')}{p^{\alpha\varepsilon} (N')^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(N')} < \frac{\sigma_{k,l}(N')}{(N')^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(N')}$$

cela prouve que N n'est pas $\sigma_{k,l}^*$ -colossalement abondant.

Supposons qu'il existe $p \equiv l(k)$ un diviseur premier de N , avec exposant $\alpha = 1$, alors $N = pN'$ et $(p, N') = 1$. On aura

$$N' < N \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_{k,l}(N)}{N^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(N)} = \frac{\sigma_{k,l}(N')}{p^\varepsilon (N')^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(N')} < \frac{\sigma_{k,l}(N')}{(N')^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(N')}$$

ce qui montre que N n'est pas $\sigma_{k,l}^*$ -colossalement abondant.

2. (a) Soit $p \equiv l(k)$ un diviseur premier de N , avec exposant $\alpha \geq 2$, $N = p^\alpha N'$ avec $(p, N') = 1$.

On considère $pN = p^{\alpha+1}N' > N$. Par définition on a

$$(6.13) \quad \frac{\sigma_{k,l}(pN)}{(pN)^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(pN)} < \frac{\sigma_{k,l}(N)}{(N)^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(N)}$$

d'où

$$\frac{(1+p+\dots+p^{\alpha+1})(1+p^\alpha)}{(1+p+\dots+p^\alpha)(1+p^{\alpha+1})} < p^\varepsilon.$$

Puisque

$$\frac{(1+p+\dots+p^{\alpha+1})(1+p^\alpha)}{(1+p+\dots+p^\alpha)(1+p^{\alpha+1})} = 1 + g_\alpha(p)$$

alors

$$(6.14) \quad \varepsilon = G(x_\alpha, \alpha) > G(p, \alpha).$$

Ensuite on considère le nombre N/p qui est plus petit que N , alors on a

$$\frac{\sigma_{k,l}(N/p)}{(N/p)^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(N/p)} \leq \frac{\sigma_{k,l}(N)}{(N)^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(N)}.$$

On en déduit comme de (6.13)

$$(6.15) \quad G(x_{\alpha-1}, \alpha-1) = \varepsilon \leq G(p, \alpha-1).$$

(b) L'inégalité (6.14) implique $x_\alpha < p$ et l'inégalité (6.15) implique $p \leq x_{\alpha-1}$.

3. Soit $\varepsilon > \varepsilon_1$. Supposons que $N > 1$. D'après la première assertion et **(a)** de la deuxième assertion, p_1 diviserait N avec exposant $\alpha \geq 2$ et alors $\varepsilon \leq G(p_1, \alpha-1) \leq G(p_1, 1) = \varepsilon_1$ contradiction avec $\varepsilon > \varepsilon_1$.

Lemme 6.5 Soient ε tel que $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, $x = x_1$ le premier terme de la suite de la définition 6.3, défini par $G(x, 1) = \varepsilon$ et $N = N_{k,l}(\varepsilon)$ le nombre $\sigma_{k,l}^*$ -colossalement abondant associé à ε .

1. Si $p \equiv l(k)$ est un facteur premier de N , alors son exposant α vérifie

$$\alpha \sim \ln x / \ln p \quad \text{lorsque} \quad x \rightarrow +\infty.$$

2. Le nombre N a la structure suivante

$$N = \prod_{x_2 < p \leq x, p \equiv l(k)} p^2 \times \prod_{x_3 < p \leq x_2, p \equiv l(k)} p^3 \times \dots \times \prod_{x_{m+1} < p \leq x_m, p \equiv l(k)} p^{m+1}$$

m est le plus grand indice tel que $x_m \geq p_1 > x_{m+1}$ où $p_1 = p_1(k, l)$ est le plus petit nombre premier congru à l modulo k ; $m \sim \ln x / \ln p_1$ pour x assez grand. On dit aussi que N est associé à x et on le note par $N_{k,l}^{(x)}$.

Démonstration.

1. On a $G(p, \alpha) < \varepsilon$, cela est équivalent à

$$p^2 (p^\varepsilon - 1) x^2 - (p^2 - 1) x - (p^\varepsilon - 1) > 0 \quad \text{avec} \quad x = p^\alpha > 1.$$

La fonction polynomiale $p^2 (p^\varepsilon - 1) x^2 - (p^2 - 1) x - (p^\varepsilon - 1)$ pour $x > 0$ est strictement positive si et seulement si x est strictement plus grand que la racine positive de l'équation

$$p^2 (p^\varepsilon - 1) x^2 - (p^2 - 1) x - (p^\varepsilon - 1) = 0$$

il en vient

$$(6.16) \quad h(p, \varepsilon) = \frac{\ln \left(\frac{(p^2-1) + \sqrt{(p^2-1) + 4p^2(p^\varepsilon-1)^2}}{2p^2(p^\varepsilon-1)} \right)}{\ln p} < \alpha.$$

De la même façon on déduit, de $\varepsilon \leq G(p, \alpha - 1)$, l'inégalité

$$(6.17) \quad \alpha \leq h(p, \varepsilon) + 1.$$

Les inégalités (6.16) et (6.17) montrent que

$$\alpha = [h(p, \varepsilon) + 1] = \text{la partie entière de } h(p, \varepsilon) + 1.$$

En posant $y = p^\varepsilon - 1$ dans $h(p, \varepsilon)$ on obtient

$$h(p, \varepsilon) = \frac{\ln \left(\left(\frac{p^2-1}{2p^2} \frac{1}{y} \right) \left(1 + \sqrt{\frac{1}{p^2-1} + \frac{4p^2 y^2}{(p^2-1)^2}} \right) \right)}{\ln p}$$

on en déduit

$$h(p, \varepsilon) = \frac{\ln \left(\frac{p^2-1}{2p^2} \right) - \ln y + \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1}{p^2-1} + \frac{4p^2 y^2}{(p^2-1)^2}} \right)}{\ln p}.$$

Sachant que

$$\varepsilon = G(x, 1) = \frac{\ln(1 + x/(1 + x^2))}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x} (1 + o(1))$$

alors lorsque $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow 0$ et $-\ln y = \ln x + \ln \ln x + o(1)$, il en résulte

$$h(p, \varepsilon) \sim \ln x / \log p \quad \text{par suite} \quad \alpha \sim \ln x / \ln p.$$

2. La structure annoncée de $N_{k,l}(\varepsilon)$ est une conséquence immédiate de l'assertion 2 (b) du lemme 6.4. Puisque $m + 1$ est l'exposant de p_1 alors $m + 1 \sim \ln x / \ln p_1$ d'où $m \sim \ln x / \ln p_1$.

Lemme 6.6 Soient k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$. Pour tout nombre premier $p \equiv l(k)$ on pose

$$E_p = \{G(p, \alpha) \quad \text{où} \quad \alpha \geq 1\} \quad \text{et} \quad E = \bigcup_{p \equiv l(k)} E_p.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de E supérieurs à ε . On range les éléments de E en une suite décroissante $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$ avec $\varepsilon_1 = G(p_1, 1)$.

1. Soient ε_i et ε_{i+1} deux éléments successifs de E . Alors quel que soit $\varepsilon \in E$ tel que $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon \leq \varepsilon_i$ on a $N_{k,l}(\varepsilon) = N_{k,l}(\varepsilon_i)$

2. L'ensemble des nombres $\sigma_{k,l}^*$ -colossalement abondants est

$$\{1\} \cup \{N_{k,l}(\varepsilon_i) \quad \text{tel que} \quad \varepsilon_i \in E\} \quad \text{et on a} \quad 1 < N_{k,l}(\varepsilon_1) < N_{k,l}(\varepsilon_2) < N_{k,l}(\varepsilon_3) < \dots.$$

Démonstration.

1. Il suffit de montrer que, pour tout nombre premier $p \equiv l(k)$ et $\alpha \geq 2$, on a

$$G(p, \alpha) < \varepsilon \leq G(p, \alpha - 1) \iff G(p, \alpha) < \varepsilon_i \leq G(p, \alpha - 1)$$

c'est à dire que $N_{k,l}(\varepsilon)$ et $N_{k,l}(\varepsilon_i)$ ont les mêmes diviseurs premiers avec les mêmes exposants.

On a $(G(p, \alpha) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \varepsilon \leq \varepsilon_i) \implies G(p, \alpha) < \varepsilon_i$ et

$$\left(\begin{array}{c} \varepsilon_{i+1} < \varepsilon \leq G(p, \alpha - 1) \\ \text{et } G(p, \alpha - 1) \in E, \varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i \text{ successifs dans } E \end{array} \right) \implies \varepsilon_i \leq G(p, \alpha - 1).$$

Alors

$$G(p, \alpha) < \varepsilon \leq G(p, \alpha - 1) \implies G(p, \alpha) < \varepsilon_i \leq G(p, \alpha - 1).$$

Par le même raisonnement on montre l'implication réciproque.

2. Si $\varepsilon > \varepsilon_1$, alors d'après le lemme 6.4, on a $N_{k,l}(\varepsilon) = 1$. Si $\varepsilon_1 \geq \varepsilon$ d'après l'assertion 1, on a $N_{k,l}(\varepsilon) = N_{k,l}(\varepsilon_i)$ où ε_i est le plus grand élément de E tel que $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon \leq \varepsilon_i$. Alors l'ensemble des nombres $\sigma_{k,l}^*$ -colossalement abondants est

$$1, N_{k,l}(\varepsilon_1), N_{k,l}(\varepsilon_2), \dots$$

Soient $\varepsilon_i > \varepsilon_{i+1}$ deux éléments successifs de E et $N_{k,l}(\varepsilon_i)$ et $N_{k,l}(\varepsilon_{i+1})$ les nombres $\sigma_{k,l}^*$ -colossalement abondants qui leur sont associés. Soit $p \equiv l(k)$ un diviseur premier de $N_{k,l}(\varepsilon_{i+1})$ avec un exposant $\alpha \geq 2$. Supposons que p divise $N_{k,l}(\varepsilon_i)$ et soit $\beta \geq 2$ son exposant.

Puisque $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i$ sont successifs dans E , alors les inégalités

$$G(p, \alpha + 1) < \varepsilon_{i+1} \leq G(p, \alpha) \quad \text{et} \quad G(p, \beta + 1) < \varepsilon_i \leq G(p, \beta)$$

impliquent

$$G(p, \alpha + 1) < \varepsilon_{i+1} \leq G(p, \beta).$$

Comme la fonction $G(x, \alpha)$ est décroissante alors $\alpha \geq \beta$. Donc $N_{k,l}(\varepsilon_i)$ divise $N_{k,l}(\varepsilon_{i+1})$ par suite $N_{k,l}(\varepsilon_i) \leq N_{k,l}(\varepsilon_{i+1})$. Montrons qu'en fait cette inégalité est stricte. Puisque $\varepsilon_{i+1} \in E$ alors il existe un nombre premier $p \equiv l(k)$ et $\alpha \geq 1$ tel que $\varepsilon_{i+1} = G(p, \alpha)$. D'après l'assertion 2 (a) du lemme 6.4, α est l'exposant de p dans la décomposition de $N_{k,l}(\varepsilon_{i+1})$. Si p ne divise pas $N_{k,l}(\varepsilon_i)$ on aura $N_{k,l}(\varepsilon_i) < N_{k,l}(\varepsilon_{i+1})$. Supposons que p divise $N_{k,l}(\varepsilon_i)$ avec exposant $\beta \geq 2$. Dans ce cas on a

$$G(p, \beta + 1) < \varepsilon_i \leq G(p, \beta).$$

Puisque $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i$ alors la dernière inégalité implique

$$\varepsilon_{i+1} = G(p, \alpha) < \varepsilon_i \leq G(p, \beta) \quad \text{ce qui implique} \quad \alpha > \beta \quad \text{donc} \quad N_{k,l}(\varepsilon_i) < N_{k,l}(\varepsilon_{i+1}).$$

Dans les tables suivantes on trouve les listes des sept premiers nombres $\sigma_{k,l}^*$ -colossalement abondants N pour les valeurs $k = 1, 2, 3$ ainsi que les valeurs de $f_{k,l}^*(N)$. le calcul est fait par ordinateur en utilisant le fortran.

$k = 1, l = 1$

Valeurs de ε	$N = N_{1,1}(\varepsilon)$	$f_{1,1}^*(N)$
$\varepsilon > \varepsilon_1 = G(2, 1)$	1	indéfini
$0.485426 \dots = \varepsilon_1 = G(2, 1) \geq \varepsilon > \varepsilon_2$	2^2	$4.286139 \dots$
$0.251538 \dots = \varepsilon_2 = G(2, 2) \geq \varepsilon > \varepsilon_3$	2^3	$2.276557 \dots$
$0.238814 \dots = \varepsilon_3 = G(3, 1) \geq \varepsilon > \varepsilon_4$	$2^3 \times 3^2$	$1.490989 \dots$
$0.129767 \dots = \varepsilon_4 = G(2, 3) \geq \varepsilon > \varepsilon_5$	$2^4 \times 3^2$	$1.478492 \dots$
$0.109285 \dots = \varepsilon_5 = G(5, 1) \geq \varepsilon > \varepsilon_6$	$2^4 \times 3^2 \times 5^2$	$1.344175 \dots$
$0.085845 \dots = \varepsilon_6 = G(3, 2) \geq \varepsilon > \varepsilon_7$	$2^4 \times 3^3 \times 5^2$	$1.344175 \dots$

$k = 2, l = 1$

Valeurs de ε	$N = N_{2,1}(\varepsilon)$	$f_{2,1}^*(N)$
$\varepsilon > \varepsilon_1 = G(3, 1)$	1	indéfini
$0.238814 \dots = \varepsilon_1 = G(3, 1) \geq \varepsilon > \varepsilon_2$	3^2	$1.651433 \dots$
$0.109285 \dots = \varepsilon_2 = G(5, 1) \geq \varepsilon > \varepsilon_3$	$3^2 \times 5^2$	$0.917498 \dots$
$0.085845 \dots = \varepsilon_3 = G(3, 2) \geq \varepsilon > \varepsilon_4$	$3^3 \times 5^2$	$0.908879 \dots$
$0.067335 \dots = \varepsilon_4 = G(7, 1) \geq \varepsilon > \varepsilon_5$	$3^3 \times 5^2 \times 7^2$	$0.828949 \dots$
$0.036001 \dots = \varepsilon_5 = G(11, 1) \geq \varepsilon > \varepsilon_6$	$3^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^2$	$0.777833 \dots$
$0.029488 \dots = \varepsilon_6 = G(3, 3) \geq \varepsilon > \varepsilon_7$	$3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^2$	$1.344175 \dots$

$k = 3, l = 1$

Valeurs de ε	$N = N_{3,1}(\varepsilon)$	$f_{3,1}^*(N)$
$\varepsilon > \varepsilon_1 = G(7, 1)$	1	indéfini
$0.067335 \dots = \varepsilon_1 = G(7, 1) \geq \varepsilon > \varepsilon_2$	7^2	$0.795817 \dots$
$0.028728 \dots = \varepsilon_2 = G(13, 1) \geq \varepsilon > \varepsilon_3$	$7^2 \times 13^2$	$0.721521 \dots$
$0.017373 \dots = \varepsilon_3 = G(19, 1) \geq \varepsilon > \varepsilon_4$	$7^2 \times 13^2 \times 19^2$	$0.700953 \dots$
$0.010172 \dots = \varepsilon_4 = G(7, 2) \geq \varepsilon > \varepsilon_5$	$7^3 \times 13^2 \times 19^2$	$0.702391 \dots$
$0.009235 \dots = \varepsilon_5 = G(31, 1) \geq \varepsilon > \varepsilon_6$	$7^3 \times 13^2 \times 19^2 \times 31^2$	$0.692181 \dots$
$0.007380 \dots = \varepsilon_6 = G(37, 1) \geq \varepsilon > \varepsilon_7$	$7^3 \times 13^2 \times 19^2 \times 31^2 \times 37^2$	$0.687598 \dots$

$k = 3, l = 2$

Valeurs de ε	$N = N_{3,2}(\varepsilon)$	$f_{3,2}^*(N)$
$\varepsilon > \varepsilon_1 = G(2, 1)$	1	indéfini
$0.485426 \dots = \varepsilon_1 = G(2, 1) \geq \varepsilon > \varepsilon_2$	2^2	$1.386355 \dots$
$0.251538 \dots = \varepsilon_2 = G(2, 2) \geq \varepsilon > \varepsilon_3$	2^3	$1.396058 \dots$
$0.129767 \dots = \varepsilon_3 = G(2, 3) \geq \varepsilon > \varepsilon_4$	2^4	$1.393295 \dots$
$0.109287 \dots = \varepsilon_4 = G(5, 1) \geq \varepsilon > \varepsilon_5$	$2^4 \times 5^2$	$1.379655 \dots$
$0.066152 \dots = \varepsilon_5 = G(2, 4) \geq \varepsilon > \varepsilon_6$	$2^5 \times 5^2$	$1.413570 \dots$
$0.036016 \dots = \varepsilon_6 = G(11, 2) \geq \varepsilon > \varepsilon_7$	$2^5 \times 5^2 \times 11^2$	$1.401754 \dots$

Lemme 6.7 Soient k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$ et soient N et N' deux nombres $\sigma_{k,l}^*$ -colossalement abondants successifs tels que $3 \leq N < N'$.

Pour tout nombre entier n tel que $N \leq n \leq N'$, on a

$$f_{k,l}^*(n) \leq \max (f_{k,l}^*(N), \quad f_{k,l}^*(N')).$$

Démonstration. Les nombres N et N' étant successifs, alors il existe $\varepsilon_i > \varepsilon_{i+1}$ successifs dans E tels que $N = N_{k,l}(\varepsilon_i)$ et $N' = N_{k,l}(\varepsilon_{i+1})$. Soit ε le nombre réel défini par

$$\frac{\sigma_{k,l}(N)}{N^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(N)} = \frac{\sigma_{k,l}(N')}{(N')^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(N')} \Leftrightarrow \left(\frac{N'}{N} \right)^\varepsilon = \frac{\sigma_{k,l}(N') \times \sigma_{k,l}^*(N)}{\sigma_{k,l}(N) \times \sigma_{k,l}^*(N')}.$$

Par définition on a

$$\frac{\sigma_{k,l}(N)}{N^{\varepsilon_{i+1}} \sigma_{k,l}^*(N)} \leq \frac{\sigma_{k,l}(N')}{N'^{\varepsilon_{i+1}} \sigma_{k,l}^*(N')} \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{N'}{N} \right)^{\varepsilon_{i+1}} \leq \frac{\sigma_{k,l}(N') \times \sigma_{k,l}^*(N)}{\sigma_{k,l}(N) \times \sigma_{k,l}^*(N')} = \left(\frac{N'}{N} \right)^\varepsilon$$

ce qui implique $\varepsilon_{i+1} \leq \varepsilon$. De même on a

$$\frac{\sigma_{k,l}(N')}{(N')^{\varepsilon_i} \sigma_{k,l}^*(N')} < \frac{\sigma_{k,l}(N)}{N^{\varepsilon_i} \sigma_{k,l}^*(N)} \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{N'}{N} \right)^{\varepsilon_i} > \frac{\sigma_{k,l}(N') \times \sigma_{k,l}^*(N)}{\sigma_{k,l}(N) \times \sigma_{k,l}^*(N')} = \left(\frac{N'}{N} \right)^\varepsilon$$

ce qui implique $\varepsilon < \varepsilon_i$. Alors $\varepsilon_{i+1} \leq \varepsilon < \varepsilon_i$. Puisque N et N' sont successifs alors $N_{k,l}(\varepsilon) = N$ ou $N_{k,l}(\varepsilon) = N'$, on en déduit, pour $N \leq n \leq N'$,

$$\frac{\sigma_{k,l}(n)}{n^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(n)} \leq \frac{\sigma_{k,l}(N')}{(N')^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(N')} = \frac{\sigma_{k,l}(N)}{N^\varepsilon \sigma_{k,l}^*(N)}$$

par suite

$$f_{k,l}^*(n) \leq \left(\frac{n}{N} \right)^\varepsilon \left(\frac{\ln(\varphi(k) \ln N)}{\ln(\varphi(k) \ln n)} \right)^{1/\varphi(k)} f_{k,l}^*(N)$$

et

$$f_{k,l}^*(n) \leq \left(\frac{n}{N'} \right)^\varepsilon \left(\frac{\ln(\varphi(k) \ln N')}{\ln(\varphi(k) \ln n)} \right)^{1/\varphi(k)} f_{k,l}^*(N').$$

Alors pour que $f_{k,l}^*(n) \leq \max (f_{k,l}^*(N), \quad f_{k,l}^*(N'))$ il suffit que

$$(6.18) \quad \left(\frac{n}{N} \right)^\varepsilon \left(\frac{\ln(\varphi(k) \ln N)}{\ln(\varphi(k) \ln n)} \right)^{1/\varphi(k)} \leq 1 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{n}{N'} \right)^\varepsilon \left(\frac{\ln(\varphi(k) \ln N')}{\ln(\varphi(k) \ln n)} \right)^{1/\varphi(k)} \leq 1.$$

Or les inégalités (6.18) sont équivalentes à

$$(6.19) \quad h(\ln n) \leq h(\ln N) \quad \text{ou} \quad h(\ln n) \leq h(\ln N')$$

avec $h(x) = \varepsilon x - (1/\varphi(k)) \ln(\ln(\varphi(k)x))$. Les inégalités (6.19) sont vraies car $1 < \ln N \leq \ln n \leq \ln N'$ et la fonction $h(x)$ est convexe pour $x > 1$.

6.2 Démonstration du théorème 6.1

6.2.1 Démonstration des deux premières assertions du théorème

Soit $N = N_{k,l}^{(x)}$ le nombre $\sigma_{k,l}^*$ -colossalement abondant associé à $x \geq p_1$ et à $\varepsilon = G(x, 1)$. On a

$$N = \prod_{x_2 < p \leq x, p \equiv l(k)} p^2 \times \prod_{x_3 < p \leq x_2, p \equiv l(k)} p^3 \times \cdots \times \prod_{x_{m+1} < p \leq x_m, p \equiv l(k)} p^m, \quad m \sim \frac{\ln x}{\ln p_1}$$

d'où

$$(6.20) \quad f_{k,l}^*(N) = \prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \frac{\prod_{\alpha=1}^m \left\{ \prod_{x_{\alpha+1} < p \leq x_{\alpha}, p \equiv l(k)} \left(\left(1 - \frac{1}{p^{\alpha+2}}\right) \left(1 + \frac{1}{p^{\alpha+1}}\right)^{-1} \right) \right\}}{(\ln(\varphi(k) \ln N))^{1/\varphi(k)}}.$$

Nous estimons chaque facteur de la formule (6.20).

Le lemme 3.1 du chapitre 3 page 36 et le théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques impliquent

$$(6.21) \quad \prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \sim a_{k,l} (\ln x)^{1/\varphi(k)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)\right).$$

Pour $x_{\alpha+1} < p \leq x_{\alpha}$, l'assertion 2 du lemme 6.3 implique

$$p^{\alpha+2} > p^{\alpha+1} \geq x_{\alpha+1}^{\alpha+1} > x \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha+2}}\right) \left(1 + \frac{1}{p^{\alpha+1}}\right)^{-1} > \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2.$$

Il s'ensuit que

$$1 \geq \prod_{\alpha=1}^m \left\{ \prod_{x_{\alpha+1} < p \leq x_{\alpha}, p \equiv l(k)} \left(\frac{1 - \frac{1}{p^{\alpha+2}}}{1 + \frac{1}{p^{\alpha+1}}} \right) \right\} \geq \prod_{p \leq x, p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \geq \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x}$$

avec

$$(6.22) \quad \prod_{\alpha=1}^m \left\{ \prod_{x_{\alpha+1} < p \leq x_{\alpha}, p \equiv l(k)} \left(\frac{1 - \frac{1}{p^{\alpha+2}}}{1 + \frac{1}{p^{\alpha+1}}} \right) \right\} = \exp \left\{ O\left(\frac{1}{x \ln x}\right) \right\} = 1 + O\left(\frac{1}{x \ln x}\right).$$

Pour évaluer $\ln(\varphi(k) \ln N)$, on écrit

$$\ln N = 2\theta(x; k, l) + \theta(x_2; k, l) + \cdots + \theta(x_m; k, l)$$

et on applique le théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques et l'assertion 3 du lemme 6.3, on obtient

$$(6.23) \quad (\ln(\varphi(k) \ln N))^{1/\varphi(k)} = (\ln x)^{1/\varphi(k)} \left(1 + \frac{\ln 2}{\varphi(k) \ln x} + O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)\right).$$

Les formules (6.20), (6.21), (6.22), (6.23) nous donnent

$$(6.24) \quad f_{k,l}^*(N) = a_{k,l} \left(1 - \frac{\ln 2}{\varphi(k) \ln x} + O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)\right).$$

Maintenant, le lemme 6.7 et la formule (6.24) impliquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup f_{k,l}^*(n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_{k,l}^*(N_{k,l}^{(x)}) = a_{k,l}$$

et la formule (6.24) montre que $f_{k,l}^*(N) < a_{k,l}$ pour $x \geq x_0$ assez grand.

Alors si on note $n_0 = N_{k,l}(x_0)$ le nombre $\sigma_{k,l}^*$ -colossalement abondant associé à x avec . De la

$$\frac{\sigma_{k,l}(n)}{\sigma_{k,l}^*(n)} < a_{k,l} (\ln(\varphi(k) \ln n))^{1/\varphi(k)} \quad \text{pour } n \geq n_0.$$

6.2.2 Démonstration de la troisième assertion du théorème

Soit $k \in \{1, 2\}$, $l = 1$ et $N = N_{k,l}^{(x)}$ le nombre $\sigma_{k,l}^*$ -colossalement abondant associé à x avec . De la formule (6.20) vient

$$f_{1,1}^*(N) < (\ln(\ln N))^{-1} \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \quad \text{et} \quad f_{2,1}^*(N) < (2 \ln(\ln N))^{-1} \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

D'après ([24] page 205)

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} < e^\gamma \log x \left(1 + \frac{0.2}{\log^2 x}\right) \quad \text{pour } x \geq 10^4$$

d'où

$$\frac{1}{2} \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} < \frac{e^\gamma}{2} \log x \left(1 + \frac{0.2}{\log^2 x}\right) \quad \text{pour } x \geq 10^4$$

par suite, pour $x \geq 10^4$

$$(6.25) \quad f_{1,1}^*(N) < \frac{e^\gamma \ln x \left(1 + \frac{0.2}{\log^2 x}\right)}{\ln \ln N} \quad \text{et} \quad f_{2,1}^*(N) < \frac{\frac{e^\gamma}{2} \ln x \left(1 + \frac{0.2}{\ln^2 x}\right)}{\ln \ln N}.$$

Minoration de $\ln(\ln N)$. On a

$$\begin{aligned} \ln N &= \left(2\theta(x) + \sum_{i=2}^m \theta(x_i, 2, 1)\right) > 2\theta(x) \quad \text{si } k = 1 \\ &= \left(-2 \ln 2 + 2\theta(x) + \sum_{i=2}^m \theta(x_i, 2, 1)\right) > 2\theta(x) - 2 \ln 2 \quad \text{si } k = 2 \end{aligned}$$

D'après ([29] page 359) on a

$$\theta(x) > x(1 - 1/(8 \ln x)) \quad \text{pour } x \geq 19421.$$

Alors pour $x \geq 19421$, $2\theta(x) > 2\theta(x) - 2 \ln 2 > 1.974x$ par suite

$$(6.26) \quad \ln(\ln N) > (\ln x)(1 + 0.68/\ln x)$$

Les formules (6.25) et (6.26) impliquent

$$f_{1,1}^*(N) < e^\gamma \quad \text{et} \quad f_{2,1}^*(N) < e^\gamma/2 \quad \text{pour } x \geq 19421.$$

Alors d'après le lemme 6.7

$$f_{1,1}^*(n) < e^\gamma \quad \text{pour } n \geq N_{1,1}^{(19421)} \quad \text{et} \quad f_{2,1}^*(n) < e^\gamma/2 \quad \text{pour } n \geq N_{2,1}^{(19421)}.$$

$N_{1,1}^{(19421)}$ est le nombre $\sigma_{1,1}^*$ —colossalement abondant associé à 19421

$N_{2,1}^{(19421)}$ est le nombre $\sigma_{2,1}^*$ —colossalement abondant associé à 19421.

En utilisant les résultat du §6.1 on établi un programme en fortran qui calcule les nombres $\sigma_{1,1}^*$ —colossalement abondants N tels que $1 < N \leq N_{1,1}^{(19421)}$ ils sont en nombre de 2283 et on constate que $f_{1,1}^*(N) < e^\gamma$ pour $N \geq 72$ ce qui permet de conclure pour $n \geq 72$ ensuite on termine le calcul pour $2 \leq n \leq 71$. On fait de même pour la fonction $f_{2,1}^*(n)$. Les nombres $\sigma_{2,1}^*$ —colossalement abondants N tels que $1 < N \leq N_{2,1}^{(19421)}$ sont en nombre de 2226 et on a $f_{2,1}^*(N) < e^\gamma/2$ pour $N \geq 33075$.

Pour $k = 3$ et $N = N_{3,l}^{(x)}$ le nombre $\sigma_{k,l}^*$ —c.a. associé à x , on a d'après la formule (6.20)

$$(6.27) \quad f_{3,l}^*(N) < (\ln(2 \ln(N)))^{-\frac{1}{2}} \prod_{p \leq x, p \equiv l(3)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

D'après la proposition 3.1 assertion 1 page 39, on a

$$\prod_{p \leq x, p \equiv l(3)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} < a_{k,l} (\ln x)^{1/\varphi(k)} \exp \left\{ \frac{0.314}{\ln x} \right\}.$$

Sachant que $(n+1)! > 2^n$ pour tout nombre entier $n \geq 2$, on a

$$\exp \left(\frac{0.315}{\ln x} \right) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{0.314}{\ln x} \right)^n < 1 + \frac{0.314}{\ln x} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{0.314}{2 \ln x} \right)^n$$

Pour $x \geq 19421$, on a

$$\frac{0.314}{2 \ln x} < 0.015955 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\delta}{2 \ln x} \right)^n < 1.016214.$$

On obtient enfin

$$(6.28) \quad \prod_{p \leq x, p \equiv l(3)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} < a_{3,l} (\ln x)^{1/2} \left(1 + \frac{0.3202}{\ln x}\right).$$

De la même manière on obtient

$$(6.29) \quad \prod_{p \leq x, p \equiv l(3)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} < a_{3,l} (\ln x)^{1/2} \left(1 + \frac{0.2866}{\ln x}\right) \quad \text{pour } x \geq 10^{10}.$$

Minoration de $(\ln(2 \ln N))^{1/2}$. On a $\ln(2 \ln N) > 2\theta(x; 3, l)$. D'après ([23] page 398)

$$\theta(x; 3, l) > \left(\frac{1}{2} - \frac{2.072}{\sqrt{19421}} \right) x \quad \text{pour } 19421 \leq x \leq 10^{10}$$

et

$$\theta(x; 3, l) > \left(\frac{1}{2} - \frac{0.00456}{2} \right) x \quad \text{pour } x \geq 10^{10}.$$

Il en résulte

$$(6.30) \quad (\ln(2 \ln N))^{1/2} > (\ln x)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{0.32591}{\ln x} \right) \quad \text{pour } 19421 \leq x \leq 10^{10}$$

et

$$(\log(2 \ln N))^{1/2} > (\ln x)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{0.34171}{\ln x} \right) \quad \text{pour } x \geq 10^{10}.$$

Les formules (6.27), (6.28), (6.29) et (6.30) impliquent

$$f_{3,l}^* \left(N_{3,l}^{(x)} \right) < a_{3,l} \quad \text{pour } x \geq 19421$$

cela prouve que

$$f_{3,1}^*(n) < a_{3,1} \quad \text{pour } n \geq N_{3,1}^{(19421)} \quad \text{et} \quad f_{3,2}^*(n) < a_{3,2} \quad \text{pour } n \geq N_{3,2}^{(19421)}.$$

$N_{3,1}^{(19421)}$ est le nombre $\sigma_{3,1}^*$ —colossalement abondant associé à 19421

$N_{3,2}^{(19421)}$ est le nombre $\sigma_{3,2}^*$ —colossalement abondant associé à 19421.

Ensuite on a calculé par ordinateur

tous les nombres $\sigma_{3,1}^*$ —colossalement abondants $N \leq N_{3,1}^{(19421)}$ (1119 nombres)

tous les nombres $\sigma_{3,2}^*$ —colossalement abondants $N \leq N_{3,2}^{(19421)}$ (1154 nombres).

On a constaté que $f_{3,1}^*(N) < a_{3,1}$ pour les nombres $\sigma_{k,l}^*$ —c.a. N tels que $7^2 \times 13^2 \times 19^2 = 2989441 \leq N \leq N_{3,1}^{(19421)}$ et on a terminé le calcul pour les nombres n tels $2 \leq n < 2989441$.

Pour $l = 2$, on a trouvé $f_{3,2}^*(N) < a_{3,2}$ pour les nombres $\sigma_{k,l}^*$ —c.a. N tels que $4 \leq N \leq N_{3,2}^{(19421)}$ et $f_{k,l}^*(2) = 1.749 \dots > a_{3,2}$ et $f_{k,l}^*(3) = 1.127 \dots < a_{3,2}$.

Remarques 6.2

1. $f_{1,1}^*(n) > e^\gamma$ pour $n = 3, 4, 5, 8, 16$.
2. $f_{2,1}^*(n) > e^\gamma/2$ pour $n = 3, \dots, 25, 27, 36, 45, 63, 72, 81, 108, 135, 162, 225, 675$.
3. $f_{3,1}^*(n) > a_{3,1}$ pour $n = 2, \dots, 36, 49, 98, 147, 196, 245, 294, 343, 392, 441, 490, 539, 588, 637, 686, 1029, 8281$.
4. $f_{3,2}^*(2) = 1.749 \dots > a_{3,2}$.
5. Pour $k = 1, 2, 3$, les nombres $\sigma_{k,l}^*$ —colossalement abondants $N_{k,l}^{(19421)}$ sont

$$\begin{aligned} N_{1,1}^{(19421)} &= 2^{18} \times 3^{11} \times 5^8 \times 7^6 \times 11^5 \times 13^5 \times (17 \times \dots \times 37)^4 \times \prod_{41 \leq p \leq 191} p^3 \times \prod_{193 \leq p \leq 19421} p^2 \\ N_{2,1}^{(19421)} &= 3^{11} \times 5^8 \times 7^6 \times 11^5 \times 13^5 \times (17 \times \dots \times 37)^4 \times \prod_{41 \leq p \leq 191} p^3 \times \prod_{193 \leq p \leq 19421} p^2 \\ N_{3,1}^{(19421)} &= 7^6 \times 13^5 \times (19 \times 31 \times 37)^4 \times \prod_{41 \leq p \leq 191, p \equiv 1(3)} p^3 \times \prod_{193 \leq p \leq 19421, p \equiv 1(3)} p^2 \\ N_{3,2}^{(19421)} &= 2^{18} \times 5^8 \times 11^5 \times (17 \times 23 \times 29)^4 \times \prod_{41 \leq p \leq 191, p \equiv 2(3)} p^3 \times \prod_{193 \leq p \leq 19421, p \equiv 2(3)} p^2. \end{aligned}$$

CHAPITRE 7

LE NOMBRE DES DIVISEURS D'UN ENTIER DANS LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES $(d_{k,l}(n))$

Résumé

Soient k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$. Pour un nombre entier $n = \prod_{p^\alpha \parallel n} p^\alpha \geq 2$, on considère les fonctions

$$d_{k,l}(n) = \prod_{p^\alpha \parallel n, p \equiv l(k)} (\alpha + 1) \quad \text{et} \quad F(n; k, l) = \frac{(\ln(d_{k,l}(n))) (\ln(\varphi(k) \ln n))}{(\ln 2) (\ln n)}$$

où $\varphi(k)$ est la fonction d'Euler. Nous introduisons, étudions et donnons la structure des nombres $d_{k,l}$ -hautement composés supérieurs ($d_{k,l}$ -h.c.s.). Ces nombres généralisent ceux définis par S. Ramanujan [4] (voir l'article de synthèse de J. L. Nicolas [21] pour davantage d'information et une abondante bibliographie sur le sujet). Nous prouvons que le maximum absolu de $F(n; k, l)$ est atteint sur ces nombres et nous le donnons explicitement pour $k = 1, 2, \dots, 13$. Les résultats obtenus généralisent ceux de J. L. Nicolas et G. Robin dans [20]. Nous les résumons dans le :

Théorème 7.1

Pour k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$, on a

- 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup F(n; k, l) = 1$ et il existe une infinité de nombres $n \geq 2$ tels que $F(n; k, l) > 1$.*
- 2. La fonction $F(n; k, l)$ atteint son maximum absolu en un nombre $d_{k,l}$ -hautement composé supérieur.*
- 3. Pour $k = 1, 2, \dots, 13$, le maximum absolu $\lambda(k)$ de $F(n; k, l)$ est donné dans la table de la page 71*

7.1 Les nombres $d_{k,l}$ – hautement composés supérieurs ($d_{k,l}$ – h.c.s.)

Lemme 7.1 (et définition) Pour k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$ et ε un nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un unique nombre entier $N = N_{k,l}^h(\varepsilon)$ qui vérifie

$$\frac{d_{k,l}(n)}{n^\varepsilon} \leq \frac{d_{k,l}(N)}{N^\varepsilon} \quad \text{pour } n \leq N \quad \text{et} \quad \frac{d_{k,l}(n)}{n^\varepsilon} < \frac{d_{k,l}(N)}{N^\varepsilon} \quad \text{pour } n > N.$$

Démonstration. La limite, lorsque $n \rightarrow +\infty$, de la fonction $d_{k,l}(n)/n^\varepsilon$ étant nulle alors elle atteint son maximum en un nombre fini d'entiers. N est alors le plus grand. Le nombre N est appelé $d_{k,l}$ – h.c.s.

Lemme 7.2 (et définition) Pour tout nombre entier $\alpha \geq 1$ et x réel $x > 1$, on pose

$$H(x, \alpha) = \frac{1}{\ln x} \ln \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha} \right).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation $H(x, \alpha) = \varepsilon$ possède une unique racine $x_\alpha > 1$. On définit ainsi une suite $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$ dans $]1, +\infty[$. On note $x_1 = x$ et on a

1. La suite $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
2. Pour $x \geq 60$, on a $x_2 > \sqrt{2x}$
3. Pour $\alpha \geq 2$ on a

$$x_\alpha = x^{v(\alpha)} \quad \text{où} \quad v(\alpha) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{\alpha})}{\ln 2} \quad \text{et} \quad x^{\frac{1}{\alpha}} < x_\alpha < x^{\frac{1}{\alpha \ln 2}}$$

Démonstration.

1. On a $\varepsilon = H(x, 1) = H(x_\alpha, \alpha) = H(x_{\alpha+1}, \alpha + 1)$. Puisque la fonction $H(x, \alpha)$ est décroissante par rapport à ses deux variables, alors $H(x_\alpha, \alpha) = H(x_{\alpha+1}, \alpha + 1) < H(x_{\alpha+1}, \alpha)$ par suite $x_\alpha > x_{\alpha+1}$.
2. On a

$$H(\sqrt{2x}, 2) - H(x, 1) = \frac{2 \ln(3/2)}{\ln 2 + \ln x} - \frac{\ln 2}{\ln x} > 0 \quad \text{pour } x \geq 60.$$

Donc $H(\sqrt{2x}, 2) > H(x, 1) = H(x_2, 2)$ d'où $x_2 > \sqrt{2x}$.

3. De l'égalité $H(x_\alpha, \alpha) = H(x, 1)$ vient $x_\alpha = x^{v(\alpha)}$ et

$$\frac{1}{\alpha} < v(\alpha) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{\alpha})}{\ln 2} < \frac{1}{\alpha \ln 2} \quad \text{pour } \alpha \geq 2 \quad \text{implique} \quad x^{\frac{1}{\alpha}} < x_\alpha < x^{\frac{1}{\alpha \ln 2}}.$$

Lemme 7.3 Soient $\varepsilon > 0$ et $N = N_{k,l}^h(\varepsilon)$ le nombre $d_{k,l}$ – h.c.s. associé à ε .

1. Tout diviseur premier p de N est congru à l modulo k .
2. Pour tout diviseur premier $p \equiv l(k)$ de N avec exposant $\alpha \geq 1$ on a

$$H(p, \alpha + 1) < \varepsilon \leq H(p, \alpha) \quad \text{et} \quad x_{\alpha+1} < p \leq x_\alpha$$

3. Si $\varepsilon > \varepsilon_1$ tel que $\varepsilon_1 = H(p_1, 1)$, (p_1 est le premier nombre premier congru à l modulo k) alors $N = 1$.

Démonstration. Analogie à la démonstration du lemme 6.4 chapitre 6 page 53.

Lemme 7.4 Soient ε tel que $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ et $N = N_{k,l}^h(\varepsilon)$ le nombre $d_{k,l}$ - h.c.s. associé à ε .

1. Soit $p \equiv l(k)$ un facteur premier de N avec exposant $\alpha \geq 1$. On a

$$\alpha = E\left(\frac{1}{p^\varepsilon - 1}\right) \sim \frac{\ln x}{(\ln 2)(\ln p)} \quad (x \rightarrow +\infty) \quad \text{et} \quad \alpha \leq \frac{\ln x}{(\ln 2)(\ln p)}.$$

$E(t)$ désigne la partie entière de t .

2. Soit $x = x_1$ le premier terme de la suite de la définition 7.2 qui est défini par $H(x, 1) = (\ln 2) / \ln x = \varepsilon$. Le nombre $N = N_{k,l}^h(\varepsilon)$ a la structure suivante

$$N = \prod_{p \equiv l(k), x_2 < p \leq x} p \times \prod_{p \equiv l(k), x_3 < p \leq x_2} p^2 \times \cdots \times \prod_{p \equiv l(k), x_{m+1} < p \leq x_m} p^m$$

m est le plus grand indice tel que $x_{m+1} < p_1 \leq x_m$

$$m = E\left(\frac{1}{p_1^\varepsilon - 1}\right) \sim \frac{\ln x}{(\ln 2)(\ln p_1)} \quad (x \rightarrow +\infty) \quad \text{et} \quad m \leq \frac{\ln x}{(\ln 2)(\ln p_1)}.$$

On dit aussi que N est associé à x et le note par $N_{k,l}^h(x)$.

Démonstration. Dédution directe du lemme 7.3.

Lemme 7.5 Pour tout $p \equiv l(k)$ on pose

$$E_p = \{H(p, \alpha) \quad \text{où} \quad \alpha \geq 1\} \quad \text{et} \quad E = \bigcup_p E_p.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de E supérieurs à ε . On range les éléments de E en une suite décroissante $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ avec $\varepsilon_1 = H(p_1, 1)$.

1. Soient ε_i et ε_{i+1} deux éléments successifs de E . Alors quel que soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon_i \geq \varepsilon > \varepsilon_{i+1}$ on a $N_{k,l}^h(\varepsilon) = N_{k,l}^h(\varepsilon_i)$.

2. L'ensemble des nombres $d_{k,l}$ -hautement composés supérieurs est

$$\{1\} \cup \left\{ N_{k,l}^h(\varepsilon_i) \quad \text{tel que} \quad \varepsilon_i \in E \right\} \quad \text{et on a} \quad 1 < N_{k,l}^h(\varepsilon_1) < N_{k,l}^h(\varepsilon_2) < \cdots.$$

Démonstration. Analogue à celle du lemme 6.6 chapitre 6 page 56.

Voici à titre d'exemples les premiers nombres $d_{k,l}$ - h.c.s. pour $k = 1, 2$ et 3 .

$k = 1$ et $l = 1$

ε	N_ε	$d_{k,l}(N_\varepsilon)$	$F(N_\varepsilon; k, l)$
$\varepsilon > \varepsilon_1 = 1$	1	1	indéfinie
$\varepsilon_1 \geq \varepsilon > \varepsilon_2 = 0.630929 \dots$	2	2	$-0.528766 \dots$
$\varepsilon_2 \geq \varepsilon > \varepsilon_3 = 0.584962 \dots$	2×3	4	$0.650978 \dots$
$\varepsilon_3 \geq \varepsilon > \varepsilon_4 = 0.430676 \dots$	$2^2 \times 3$	6	$0.946886 \dots$
$\varepsilon_4 \geq \varepsilon > \varepsilon_5 = 0.415037 \dots$	$2^2 \times 3 \times 5$	12	$1.234235 \dots$
$\varepsilon_5 \geq \varepsilon > \varepsilon_6 = 0.369070 \dots$	$2^3 \times 3 \times 5$	16	$1.308415 \dots$
$\varepsilon_6 \geq \varepsilon > \varepsilon_7 = 0.356207 \dots$	$2^3 \times 3^2 \times 5$	24	$1.380756 \dots$

$k = 2$ et $l = 1$

ε	N_ε	$d_{k,l}(N_\varepsilon)$	$F(N_\varepsilon; k, l)$
$\varepsilon > \varepsilon_1 = H(3, 1) = 0.630929 \dots$	1	1	indéfinie
$\varepsilon_1 \geq \varepsilon > \varepsilon_2 = 0.430676 \dots$	3	2	0.0856060 $\dots$
$\varepsilon_2 \geq \varepsilon > \varepsilon_3 = 0.369070 \dots$	3×5	4	0.735753 $\dots$
$\varepsilon_3 \geq \varepsilon > \varepsilon_4 = 0.356207 \dots$	$3^2 \times 5$	6	0.907738 $\dots$
$\varepsilon_4 \geq \varepsilon > \varepsilon_5 = 0.289064 \dots$	$3^2 \times 5 \times 7$	12	1.090367 $\dots$
$\varepsilon_5 \geq \varepsilon > \varepsilon_6 = 0.270238 \dots$	$3^2 \times 5 \times 7 \times 11$	24	1.180250 $\dots$
$\varepsilon_6 \geq \varepsilon > \varepsilon_7 = 0.261859 \dots$	$3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$	48	1.236140 $\dots$

$k = 3$ et $l = 1$

ε	N_ε	$d_{k,l}(N_\varepsilon)$	$F(N_\varepsilon; k, l)$
$\varepsilon > \varepsilon_1 = H(7, 1) = 0.356207 \dots$	1	1	indéfinie
$\varepsilon_1 \geq \varepsilon > \varepsilon_2 = 0.270238 \dots$	7	2	0.698324 $\dots$
$\varepsilon_2 \geq \varepsilon > \varepsilon_3 = 0.235408 \dots$	7×13	4	0.975261 $\dots$
$\varepsilon_3 \geq \varepsilon > \varepsilon_4 = 0.208367 \dots$	$7 \times 13 \times 19$	8	1.087309 $\dots$
$\varepsilon_4 \geq \varepsilon > \varepsilon_5 = 0.201849 \dots$	$7^2 \times 13 \times 19$	12	1.118816 $\dots$
$\varepsilon_5 \geq \varepsilon > \varepsilon_6 = 0.191958 \dots$	$7^2 \times 13 \times 19 \times 31$	24	1.159293 $\dots$
$\varepsilon_6 \geq \varepsilon > \varepsilon_7 = 0.184288 \dots$	$7^2 \times 13 \times 19 \times 31 \times 37$	48	1.186273 $\dots$

$k = 3$ et $l = 2$

ε	N_ε	$d_{k,l}(N_\varepsilon)$	$F(N_\varepsilon; k, l)$
$\varepsilon > \varepsilon_1 = H(2, 1) = 1$	1	1	indéfinie
$\varepsilon_1 \geq \varepsilon > \varepsilon_2 = 0.584962 \dots$	2	2	0.471233 $\dots$
$\varepsilon_2 \geq \varepsilon > \varepsilon_3 = 0.430676 \dots$	2^2	3	1.165925 $\dots$
$\varepsilon_3 \geq \varepsilon > \varepsilon_4 = 0.415037 \dots$	$2^2 \times 5$	6	1.544848 $\dots$
$\varepsilon_4 \geq \varepsilon > \varepsilon_5 = 0.321928 \dots$	$2^3 \times 5$	8	1.625265 $\dots$
$\varepsilon_5 \geq \varepsilon > \varepsilon_6 = 0.289064 \dots$	$2^4 \times 5$	10	1.645533 $\dots$
$\varepsilon_6 \geq \varepsilon > \varepsilon_7 = 0.263034 \dots$	$2^4 \times 5 \times 11$	20	1.661929 $\dots$
$\varepsilon_7 \geq \varepsilon > \varepsilon_8 = 0.251929 \dots$	$2^5 \times 5 \times 11$	24	1.659266 $\dots$
$\varepsilon_8 \geq \varepsilon > \varepsilon_9 = 0.244650 \dots$	$2^5 \times 5 \times 11 \times 17$	48	1.641937 $\dots$

7.2 Lemmes préparatifs

Lemme 7.6 Soient a et $b \geq 2$ deux constantes. On considère les fonctions

$$A_a(T) = \ln T + a \frac{\ln T}{T} \quad \text{et} \quad B_b(T) = \frac{T}{\ln T} - \frac{b-1}{b^2} T.$$

1. (a) Si $a \leq e^2$, alors la fonction $A_a(T)$ est croissante dans l'intervalle $[e, +\infty]$.

(b) Si $a > e^2$, alors la fonction $A_a(T)$ est convexe dans l'intervalle $[e^2, +\infty]$.

2. La fonction $B_b(T)$ est croissante dans l'intervalle $[e^2, e^b]$ et décroissante dans l'intervalle $[e^b, +\infty]$.

Démonstration. Élémentaire.

Lemme 7.7 Soient $\exp(e^2/\varphi(k)) \leq N_1 \leq n \leq N_2$ où $N_1 < N_2$ sont deux nombres $d_{k,l}$ -hautement composés supérieurs successifs. Alors

$$F(n; k, l) \leq \max(F(N_1; k, l), F(N_2; k, l)).$$

Démonstration. D'après le lemme 7.5, il existe deux éléments de E successifs $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i$ tels que $N_1 = N_{k,l}^h(\varepsilon_i)$ et $N_2 = N_{k,l}^h(\varepsilon_{i+1})$. Soit $\varepsilon > 0$ défini par

$$\frac{d_{k,l}(N_1)}{N_1^\varepsilon} = \frac{d_{k,l}(N_2)}{N_2^\varepsilon} \quad \varepsilon \text{ est donné par } \varepsilon = \frac{\ln((d_{k,l}(N_2)) / (d_{k,l}(N_1)))}{\ln(N_2/N_1)}.$$

Par définition on a

$$\frac{d_{k,l}(N_2)}{N_2^{\varepsilon_i}} < \frac{d_{k,l}(N_1)}{N_1^{\varepsilon_i}} \quad \text{et} \quad \frac{d_{k,l}(N_1)}{N_1^{\varepsilon_{i+1}}} \leq \frac{d_{k,l}(N_2)}{N_2^{\varepsilon_{i+1}}}$$

ce qui implique $\varepsilon_{i+1} \leq \varepsilon < \varepsilon_i$. Si $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon < \varepsilon_i$, le nombre N_1 serait égal, d'après le lemme 7.5, à N_ε ce qui entraîne

$$\frac{d_{k,l}(N_1)}{N_1^\varepsilon} = \frac{d_{k,l}(N_2)}{N_2^\varepsilon} < \frac{d_{k,l}(N_1)}{N_1^\varepsilon} \quad \text{absurde.}$$

Donc $\varepsilon = \varepsilon_{i+1}$ et il en vient

$$\ln(d_{k,l}(N_2)) - \varepsilon_{i+1} \ln(N_2) = \ln(d_{k,l}(N_1)) - \varepsilon_{i+1} \ln(N_1).$$

Maintenant on a

$$\ln(d_{k,l}(n)) \leq \varepsilon_{i+1} \ln n + \ln(d_{k,l}(N_2)) - \varepsilon_{i+1} \ln(N_2)$$

ce qui donne

$$F(n; k, l) \leq \frac{\varepsilon_{i+1}}{\ln 2} \left(\ln(\varphi(k) \ln n) + a \frac{\ln(\varphi(k) \ln n)}{\varphi(k) \ln n} \right) = \frac{\varepsilon_{i+1}}{\ln 2} A_a(\varphi(k) \ln n)$$

où

$$A_a(T) = \ln T + a \frac{\ln T}{T} \quad (\text{notation du lemme 7.6})$$

avec

$$a = \varphi(k) \frac{\ln(d_{k,l}(N_2)) - \varepsilon_{i+1} \ln(N_2)}{\varepsilon_{i+1}} = \varphi(k) \frac{\ln(d_{k,l}(N_1)) - \varepsilon_{i+1} \ln(N_1)}{\varepsilon_{i+1}}.$$

Puisque $e^2 \leq \varphi(k) \ln N_1 \leq \varphi(k) \ln n \leq \varphi(k) \ln N_2$, alors d'après le lemme 7.6, si $a \leq e^2$

$$F(n; k, l) \leq \frac{\varepsilon_{i+1}}{\ln 2} A_a(\varphi(k) \ln N_2) = F(N_2; k, l) \leq \max(F(N_1; k, l), F(N_2; k, l))$$

et si $a > e^2$

$$F(n; k, l) \leq \max(A_a(\varphi(k) \ln N_1), A_a(\varphi(k) \ln N_2)) = \max(F(N_1; k, l), F(N_2; k, l)).$$

Lemme 7.8 Soit $N_0 = N_{k,l}^h(\varepsilon_0)$ le premier nombre $d_{k,l}$ -hautement composé supérieur qui vérifie $\exp(e^2/\varphi(k)) \leq N_0$. On a

$$F(n; k, l) \leq F(N_0; k, l) \quad \text{pour } 2 \leq n \leq N_0.$$

Démonstration. Par définition on a

$$\frac{d_{k,l}(n)}{n^{\varepsilon_0}} \leq \frac{d_{k,l}(N_0)}{N_0^{\varepsilon_0}}$$

d'où

$$F(n; k, l) \leq \frac{\varepsilon_0}{\ln 2} \left(\ln(\varphi(k) \ln n) + a \frac{\ln(\varphi(k) \ln n)}{\varphi(k) \ln n} \right) = \frac{\varepsilon_0}{\ln 2} A_a(\varphi(k) \ln n)$$

où

$$a = a(k, l) = \varphi(k) \frac{\ln(d_{k,l}(N_0)) - \varepsilon_0 \ln(N_0)}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad A_a(T) = \ln T + a \frac{\ln T}{T}.$$

Pour k tel que $\varphi(k) \geq 12$, on a $\exp(e^2/12) < 1.8512$, alors d'après le lemme 7.5, on a

$$N_0 = p_1(k, l) = p_1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_0 = H(p_1, 1) = \frac{\ln 2}{\ln p_1}$$

p_1 = le premier nombre premier congru à l modulo k d'où

$$a = \varphi(k) \frac{\ln 2 - \ln 2}{\varepsilon_0} = 0.$$

Puisque $\varphi(k) \ln n \leq \varphi(k) \ln N_0$ alors

$$F(n; k, l) \leq \frac{\varepsilon_0}{\ln 2} \ln(\varphi(k) \ln N_0) = \frac{d_{k,l}(N_0) \ln(\varphi(k) \ln N_0)}{(\ln 2) (\ln N_0)} = F(N_0; k, l).$$

Pour les nombres k tels que $1 \leq \varphi(k) \leq 10$ qui sont les éléments de l'ensemble

$$\kappa = \{1, \dots, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 24, 30\}$$

on a calculé les nombres N_0 correspondants et vérifié que

$$\max_{k \in \kappa, 1 \leq l \leq k, (l,k)=1} a(k, l) = a(14, 3) = 4.676866 \dots < e^2.$$

Alors d'après le lemme 7.6, on a pour ces valeurs de k

$$F(n; k, l) \leq \frac{\varepsilon_0}{\ln 2} A_a(\varphi(k) \ln N_0) = F(N_0; k, l) \quad \text{pour} \quad e < \varphi(k) \ln n \leq \varphi(k) \ln N_0.$$

Ensuite, on a terminé le calcul pour les nombres n tels que $2 \leq n \leq \exp(e/\varphi(k))$.

Lemme 7.9 ([20] pages 489 et 490) *Soit*

$$\lambda = \lambda(k, l) = \max_{n \geq 2} (F(n; k, l)) = F(N; k, l).$$

Alors N est le nombre $d_{k,l}$ -hautement composé supérieur associé à

$$\varepsilon = \lambda (\ln 2) \frac{\ln(\varphi(k) \ln N) - 1}{\ln^2(\varphi(k) \ln N)}.$$

Démonstration. D'après le lemme 7.8 on a $N \geq N_0 = N_{k,l}(\varepsilon_0)$. Alors

$$\varphi(k) \ln N \geq \varphi(k) \ln N_0 \geq e^2.$$

Pour montrer que N est le nombre $d_{k,l}$ -hautement composé supérieur associé à ε , il suffit de montrer les deux inégalités suivantes

$$\ln(d_{k,l}(n)) - \varepsilon \ln n < \ln(d_{k,l}(N)) - \varepsilon \ln N \quad \text{pour } n > N$$

$$\ln(d_{k,l}(n)) - \varepsilon \ln n \leq \ln(d_{k,l}(N)) - \varepsilon \ln N \quad \text{pour } n \leq N.$$

Ecrivons

$$\ln(d_{k,l}(n)) - \varepsilon \ln n = \left(\ln(d_{k,l}(n)) - \lambda \frac{(\ln 2) \ln n}{\ln(\varphi(k) \ln n)} \right) + \left(\lambda \frac{(\ln 2) \ln n}{\ln(\varphi(k) \ln n)} - \varepsilon \ln n \right).$$

La première parenthèse est ≤ 0 , quant à la deuxième parenthèse on l'écrit, avec les notations du lemme 7.6, sous la forme

$$\frac{\lambda \ln 2}{\varphi(k)} B_b(T) \quad \text{avec} \quad b = \ln(\varphi(k) \ln N) \geq e^2 \quad \text{et} \quad T = \varphi(k) \ln n.$$

L'assertion 2 du lemme 7.6 et l'égalité

$$\frac{\lambda \ln 2}{\varphi(k)} B_b(e^b) = \ln(d_{k,l}(N)) - \varepsilon \ln N$$

nous permettent d'obtenir

$$\ln(d_{k,l}(n)) - \varepsilon \ln n < \ln(d_{k,l}(N)) - \varepsilon \ln N \quad \text{pour} \quad n > N$$

et

$$\ln(d_{k,l}(n)) - \varepsilon \ln n \leq \ln(d_{k,l}(N)) - \varepsilon \ln N \quad \text{pour} \quad N_0 \leq n \leq N.$$

Nous devons vérifier la dernière inégalité pour $2 \leq n \leq N_0$. Puisque N_0 est $d_{k,l}$ -hautement composé supérieur associé à ε_0 alors

$$\frac{d_{k,l}(N)}{(N)^{\varepsilon_0}} \leq \frac{d_{k,l}(N_0)}{(N_0)^{\varepsilon_0}} \quad \text{d'où} \quad \frac{d_{k,l}(N)}{d_{k,l}(N_0)} \leq \left(\frac{N}{N_0}\right)^{\varepsilon_0}.$$

On a aussi

$$\frac{d_{k,l}(N_0)}{(N_0)^\varepsilon} \leq \frac{d_{k,l}(N)}{N^\varepsilon} \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{N}{N_0}\right)^\varepsilon \leq \frac{d_{k,l}(N)}{d_{k,l}(N_0)}.$$

On obtient alors

$$\left(\frac{N}{N_0}\right)^\varepsilon \leq \left(\frac{N}{N_0}\right)^{\varepsilon_0} \quad \text{ce qui implique} \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Soit $n \leq N_0$. On a

$$\frac{d_{k,l}(n)}{n^{\varepsilon_0}} \leq \frac{d_{k,l}(N_0)}{(N_0)^{\varepsilon_0}} \quad \text{d'où} \quad d_{k,l}(n) \leq \left(\left(\frac{n}{N_0}\right)^{\varepsilon_0}\right) d_{k,l}(N_0)$$

ce qui implique

$$\frac{d_{k,l}(n)}{n^\varepsilon} \leq \left(\left(\frac{n}{N_0}\right)^{\varepsilon_0}\right) \left(\left(\frac{N_0}{n}\right)^\varepsilon\right) \left(\frac{d_{k,l}(N_0)}{(N_0)^\varepsilon}\right) = \left(\left(\frac{n}{N_0}\right)^{\varepsilon_0 - \varepsilon}\right) \left(\frac{d_{k,l}(N_0)}{(N_0)^\varepsilon}\right).$$

Puisque

$$n \leq N_0, \quad \varepsilon_0 - \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d_{k,l}(N_0)}{(N_0)^\varepsilon} \leq \frac{d_{k,l}(N)}{N^\varepsilon}$$

alors

$$\frac{d_{k,l}(n)}{n^\varepsilon} \leq \frac{d_{k,l}(N)}{N^\varepsilon} \quad \text{qui équivaut à} \quad \ln(d_{k,l}(n)) - \varepsilon \ln n \leq \ln(d_{k,l}(N)) - \varepsilon \ln N.$$

Lemme 7.10 Soit x_2 le deuxième terme de la suite de la définition 7.2. D'après le lemme 7.2 on a $x_2 = x^\delta$ où $\delta = \ln(3/2)/\ln 2$. Pour $k = 1, 2, \dots, 13$ et $x \geq 25000$, on a uniformément pour l

$$0.842746 \frac{x}{\varphi(k)} < \theta(x; k, l) < 1.157254 \frac{x}{\varphi(k)}$$

$$0 \leq \theta(x^\delta; k, l) < 2.286045 \frac{x^\delta}{\varphi(k)}$$

et

$$0 \leq \frac{\theta(x_2; k, l)}{\theta(x; k, l)} = \frac{\theta(x^\delta; k, l)}{\theta(x; k, l)} < \frac{2.712615}{x^{1-\delta}}.$$

Démonstration. C'est une simple application numérique des théorèmes 1 et 2 de [23] page 398.

7.3 Démonstration du théorème 7.1

1. D'après le lemme 7.7, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup F(n; k, l) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup F(N; k, l) \quad \text{où } N \text{ est } d_{k,l} - h.c.s.$$

Soit $N = N_{k,l}^h(x)$ un nombre $d_{k,l}$ -hautement composé supérieur associé à x . Du lemme 7.4 vient

$$F(N; k, l) = \frac{F_1(x; k, l)}{F_2(x; k, l)}$$

où

$$\begin{aligned} F_1(x; k, l) &= \frac{1}{\ln 2} \left(\sum_{\alpha=1}^m \pi(x_\alpha; k, l) \ln \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) \right) \left(\ln \left(\varphi(k) \left(\sum_{\alpha=1}^m \theta(x_\alpha; k, l) \right) \right) \right) \\ F_2(x; k, l) &= \sum_{\alpha=1}^m \theta(x_\alpha; k, l) \quad (\pi(x_1; k, l) = \pi(x; k, l) \quad \text{et} \quad \theta(x_1; k, l) = \theta(x; k, l)). \end{aligned}$$

Le théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques

$$\pi(x; k, l) \sim \frac{x}{\varphi(k) \ln x} \quad \text{et} \quad \theta(x; k, l) \sim \frac{x}{\varphi(k)}$$

et l'assertion 3 du lemme 7.2 nous permettent de vérifier que

$$\frac{F_1(x; k, l)}{F_2(x; k, l)} \sim 1 \quad \text{d'où} \quad F(N; k, l) \sim 1 \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty.$$

On a aussi

$$\frac{F_1(x; k, l)}{F_2(x; k, l)} > \frac{(\pi(x; k, l)) (\ln(\varphi(k) \theta(x; k, l)))}{\theta(x; k, l) + \theta(x_2; k, l) + \dots}.$$

Alors en écrivant

$$\pi(x; k, l) = \frac{x}{\varphi(k) \ln x} \left(1 + \frac{1}{\ln x} + O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right) \right) \quad \text{et} \quad \theta(x; k, l) = \frac{x}{\varphi(k)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right) \right)$$

l'assertion 3 du lemme 7.2 nous permet d'obtenir

$$\frac{(\pi(x; k, l)) (\ln(\varphi(k) \theta(x; k, l)))}{\theta(x; k, l) + \theta(x_2; k, l) + \dots} = 1 + \frac{1}{\ln x} + O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right) > 1 \quad \text{pour } x \text{ assez grand.}$$

Donc il existe une infinité de nombres N pour lesquels $F(N; k, l) > 1$.

2. Est une conséquence immédiate des lemmes 7.7 et 7.8.

3. Nous remarquons d'abord que pour $x \geq 25000$, le nombre $N = N_{k,l}(x) > N_0$ (N_0 est le nombre décrit au lemme 7.8). Si le maximum absolu $\lambda(k, l)$ de $F(n; k, l)$ est atteint en un nombre $N = N_{k,l}(x)$ avec $x \geq 25000$. Alors par application des lemmes 7.9, 7.4 et 7.2 on obtient

$$\lambda(k, l) \leq f_{\max}(x; k, l)$$

où

$$f_{\max}(x; k, l) = \frac{\ln(\varphi(k) \theta(x; k, l))}{\ln x} + \frac{\theta(x^\delta; k, l)}{\theta(x; k, l)} \frac{1}{(\ln 2)(\ln p_1)} + \frac{1}{(\ln x)(\ln(\varphi(k) \theta(x; k, l)) - 1)} \quad \text{avec } \delta = \ln(3/2)/\ln 2.$$

D'après le lemme 7.10 on a pour $x \geq 25000$

$$f_{\max}(x; k, l) < 1.109866 \quad \text{uniformément pour } l.$$

Alors

$$\lambda(k, l) \leq \max \left(1.109866, \max_{N \leq N_{k,l}^h(25000)} (F(N; k, l)) \right).$$

Pour toutes les valeurs k du théorème et l premier avec on a calculé les nombres $d_{k,l}$ —hautement composés supérieurs $N \leq N_{k,l}^h(25000)$ et vérifié que

$$\lambda(k, l) \leq \max_{N \leq N_{k,l}^h(25000)} (F(N; k, l)).$$

Dans la table suivante on trouve les valeurs de $\lambda(k) =$ le maximum absolu de $F(n; k, l)$ uniforme pour l pour $k = 1, \dots, 13$.

k	$\lambda(k)$	l_0	$N = N_{k,l}(\varepsilon)$	ε	$d_{k,l_0}(N)$	Σ
1	1.537939...	1	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	0.235408...	2304	2896
2	1.348897...	1	$3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 43$	0.184288...	46080	2876
3	1.661929...	2	$2^4 \cdot 5 \cdot 11$	0.289064...	20	1464
4	1.448428...	3	$3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23$	0.2106472...	64	1453
5	2.071053...	2	$2^3 \cdot 7$	0.356207...	8	743
6	1.298412...	5	$5^3 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 71$	0.162608...	3072	1444
7	2.427439...	2	2^3	0.415037...	4	487
8	1.646895...	3	$3^3 \cdot 11$	0.261859...	8	734
9	2.427439...	2	2^3	0.4150337...	4	500
10	1.614755...	3	$3^3 \cdot 13$	0.261859...	8	727
11	2.228805...	3	3^2	0.369070...	3	290
12	1.383712	5	$5^3 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 53$	0.174583...	64	726
13	3.214459...	2	2^2	0.584962...	3	264

Σ désigne le nombre des nombres $d_{k,l} - h.c.s. \leq N_{k,l}(25000)$.

Autre méthode. On peut utiliser les lemmes 7.7 et 7.8. Alors on majore, pour $x \geq 25000$, la fonction $F(N; k, l) = F_1(x; k, l)/F_2(x; k, l)$ où $N = N_{k,l}^h(x)$.

$$F_1(x; k, l) = \frac{1}{\ln 2} \left(\sum_{\alpha=1}^m \pi(x_\alpha; k, l) \ln \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right) \right) \left(\ln \left(\varphi(k) \left(\sum_{\alpha=1}^m \theta(x_\alpha; k, l) \right) \right) \right)$$

$$F_2(x; k, l) = \sum_{\alpha=1}^m \theta(x_\alpha; k, l) \quad (\pi(x_1; k, l) = \pi(x; k, l) \text{ et } \theta(x_1; k, l) = \theta(x; k, l)).$$

ensuite on fait le calcul pour les nombres N tels que $N_0 \leq N \leq N_{k,l}^h(25000)$.

CHAPITRE 8

UNE VERSION EFFECTIVE D'UN THÉORÈME DE BATEMAN

Résumé

On désigne par $\varphi(n)$ la fonction arithmétique d'Euler qui compte le nombre des résidus inversibles modulo n et on pose pour tout nombre réel $x \geq 0$

$$\Phi(x) = \sum_{\varphi(n) \leq x} 1 \quad (\Phi(x) = 0 \text{ pour } 0 \leq x < 1).$$

Plusieurs mathématiciens ont étudiés la fonction $\Phi(x)$.

ERDÖS, en 1945 dans [12], a montré que $\Phi(x) \sim A \times x$ quand $x \rightarrow +\infty$ pour une constante convenable A , cette constante fut calculée par la suite, elle est donnée par $A = (\zeta(2)\zeta(3))/\zeta(6) = 1.943596436$. Bateman en 1972 dans [6] a entrepris l'étude du reste $R(x) = \Phi(x) - Ax$. Par une méthode analytique basée sur l'intégration sur un contour dans le plan complexe il montre que

$$(8.1) \quad R(x) = O\left(x \exp\left(- (1 - \varepsilon) \sqrt{\frac{(\ln x) \ln(\ln x)}{2}}\right)\right) \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

SMATI, en 1992 dans [31], obtenait l'estimation effective suivante : Pour $x \geq 3$

$$(8.2) \quad |R(x)| \leq 1.4x \ln x \ln \ln x \exp\left\{-\left(1 - \frac{\ln(\ln(\ln x)) + 4 - \log 2}{\ln(\ln x)}\right) \sqrt{\frac{(\ln x) \ln(\ln x)}{2}}\right\}.$$

Stankus, dans [33] en 1996, a montré que

$$(8.3) \quad R(x) = O\left(x \exp\left\{-\left(1 + C \frac{\ln(\ln(\ln x))}{\ln(\ln x)}\right) \sqrt{\frac{(\ln x) \ln(\ln x)}{2}}\right\}\right) \text{ pour } C > 0.$$

Balazard et Tenenbaum, dans [5] en 1998, ont amélioré (8.1). Ils ont obtenu

$$R(x) = O\left(x \exp\left(-a \frac{(\ln x)^{3/5}}{(\ln(\ln x))^{1/5}}\right)\right) \text{ pour une constante positive } a.$$

Dans ce chapitre nous allons démontrer le

Théorème 8.1

1. Pour $x \geq 10^6$

$$|R(x)| < 3775 x \exp\left\{-\frac{1}{20} \sqrt{\frac{(\ln x) \ln(\ln x)}{2}}\right\}.$$

2. Pour $x \geq \exp(\exp(10))$

$$|R(x)| < 0.972 x \exp\left\{-\left(1 - \frac{8.126}{\ln(\ln x)}\right) \sqrt{\frac{(\ln x) \ln(\ln x)}{2}}\right\}.$$

3. Pour $x \geq \exp(\exp(\exp(30)))$

$$|R(x)| < 0.972 x \exp\left\{-\left(1 + 0.179 \frac{\ln(\ln(\ln x))}{\ln(\ln x)}\right) \sqrt{\frac{(\ln x) \ln(\ln x)}{2}}\right\}.$$

8.1 Définitions et notations

On considère les fonctions à variable complexe $s = \sigma + it$ suivantes

$$\begin{aligned} G(s) &= \prod_p (1 + w_p(s)) \quad \text{où} \quad w_p(s) = \frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s} \quad \text{pour } \Re(s) > 0 \\ \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad \text{pour } \Re(s) > 1 \\ Z(s) &= G(s) \zeta(s) \quad \text{pour } \Re(s) > 1. \end{aligned}$$

La fonction $Z(s)$ se prolonge analytiquement dans le demi plan complexe $\Re(s) > 0$ avec un seul pôle simple en $s = 1$ de résidu égal à A .

Pour x un nombre réel on note par $E(x)$ la partie entière de x et par $\pi(x)$ la fonction qui compte les nombres premiers $p \leq x$. Pour $n \geq 1$ on désigne par $p(n)$ le n ème nombre premier. Pour les fonctions $\pi(x)$ et $p(n)$ on a les résultats suivants

$$(8.4) \quad 0.921 \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < 1.10555 \times \frac{x}{\ln x} \quad \text{pour } x \geq 30 \quad ([34] \text{ page 11})$$

$$(8.5) \quad \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < 1.058 \frac{x}{\ln x} \quad \text{pour } x \geq 10^8 \quad ([9] \text{ page 40})$$

$$(8.6) \quad p(n) > n \ln n \quad \text{pour } n \geq 16 \quad ([9] \text{ page 14}).$$

8.2 Lemmes Préliminaires

Lemme 8.1 Soient $t, \alpha, \beta, \sigma_0$ et v des nombres réels tels $t \geq t_0 \geq 10^9, \alpha > 1$

$$\beta = \beta(t) = 1 - \frac{\ln \ln t}{\ln t} \geq \sigma_0 = 1 - \frac{\ln \ln t_0}{\ln t_0} \quad \text{et} \quad 1 < v \leq Y_1 = \exp\left(\frac{2 \ln t}{\ln \ln t}\right) \leq \alpha Y = \frac{\alpha t}{\ln t}.$$

On pose

$$J(t, v, \alpha) = \int_v^{\alpha Y} \frac{du}{(u \ln u)^\beta}.$$

On a

$$J(t, v, \alpha) < \left(\frac{\exp(2) - 1}{(\ln v)^{\sigma_0}} + \frac{2 \times \alpha^{1-\sigma_0} \times \ln t_0}{\ln t_0 - \ln \ln t_0 + \ln \alpha} \right) \frac{\ln t}{\ln \ln t} - \exp(2).$$

Démonstration. On écrit

$$J(t, v, \alpha) = J_1 + J_2 \quad \text{où} \quad J_1 = \int_v^{Y_1} \frac{du}{(u \ln u)^\beta} \quad \text{et} \quad J_2 = \int_{Y_1}^{\alpha Y} \frac{du}{(u \ln u)^\beta}.$$

Pour obtenir le résultat annoncé il suffit de majorer J_1 et J_2 . On a

$$J_1 \leq \frac{1}{(\ln v)^{\sigma_0}} \left(\frac{1}{1-\beta} \right) (Y_1^{1-\beta} - v^{1-\beta}) < \frac{\exp(2) - 1}{(\ln v)^{\sigma_0}} \times \frac{\ln t}{\ln \ln t}.$$

Pour majorer J_2 on remarque que

$$(u \geq Y_1 \quad \text{et} \quad t \geq t_0 \geq 100) \Rightarrow 1 < 2 \left(1 - \left(\frac{\beta}{1-\beta} \right) \frac{1}{\ln u} \right).$$

Alors

$$J_2 < 2 \int_{Y_1}^{\alpha Y} \left(1 - \frac{\beta}{1-\beta} \times \frac{1}{\ln u} \right) \frac{du}{(u \ln u)^\beta} = \frac{2}{1-\beta} \left(\frac{(\alpha Y)^{1-\beta}}{\ln^\beta(\alpha Y)} \right) - \frac{2}{1-\beta} \left(\frac{Y_1^{1-\beta}}{\ln^\beta Y_1} \right).$$

On a

$$\frac{2}{1-\beta} \left(\frac{(\alpha Y)^{1-\beta}}{\ln^\beta(\alpha Y)} \right) = \left(\frac{2 \alpha^{1-\beta}}{1-\beta} \right) \left(\frac{\ln t}{\ln t - \ln \ln t + \ln \alpha} \right)^\beta \leq \frac{2 \alpha^{1-\sigma_0} \ln t_0}{\ln t_0 - \ln \ln t_0 + \ln \alpha} \left(\frac{\ln t}{\ln(\ln t)} \right)$$

et

$$-\frac{2}{1-\beta} \left(\frac{Y_1^{1-\beta}}{\ln^\beta Y_1} \right) = -\frac{2 \ln t}{\ln(\ln t)} \left(\frac{\exp(2)}{\left(\frac{2 \ln t}{\ln \ln t} \right)^\beta} \right) = -\exp(2) \left(\frac{2 \ln t}{\ln \ln t} \right)^{1-\beta} < -\exp(2)$$

alors

$$J_2 < \left(\frac{2 \alpha^{1-\sigma_0} \ln t_0}{\ln t_0 - \ln \ln t_0 + \ln \alpha} \right) \frac{\ln t}{\ln(\ln t)} - \exp(2).$$

Lemme 8.2 Soient

$$b = 1.000001, \quad t_0 = 100, \quad \beta = \beta(|t|) = 1 - \frac{\ln \ln |t|}{10 \ln |t|} \quad \text{et} \quad \sigma_0 = 1 - \frac{\ln \ln t_0}{10 \ln t_0}.$$

1. Pour $s = \sigma + it$ tel que $\sigma_0 \leq \beta = \beta(|t|) \leq \sigma \leq b$ et $|t| \geq t_0$ on a

$$\frac{|Z(s)|}{|t|^2} < 2.515 \frac{\ln |t|}{|t|^{1.185}}.$$

2. Pour $s = \sigma_0 + it$ avec $|t| \leq 100$ on a $|Z(s)| < 1668.803$.

Démonstration. Pour chaque assertion du lemme on doit majorer $G(s)$ et $\zeta(s)$.

1. Les inégalités

$$(8.7) \quad |w_p(s)| \leq \frac{2}{(p-1)^\sigma} \quad \text{pour } p \leq |t| \quad \text{et} \quad |w_p(s)| \leq \frac{|s|}{(p-1)^{\sigma+1}} \quad \text{pour } p > |t|$$

nous permettent d'écrire $|G(s)| \leq \exp \{ \sum_1 + \sum_2^t + \sum_3^t \}$ où

$$\sum_1 = \sum_{p \leq 99} \ln \left(1 + \frac{1}{(p-1)^{\sigma_0}} + \frac{1}{p^{\sigma_0}} \right) = 3.573884 \dots$$

$$\sum_2^t = 2 \left(\frac{99}{98} \right) \sum_{99 < p \leq |t|} \frac{1}{p^\beta}$$

$$\sum_3^t = \left(1 + \frac{b}{|t|} \right) \left(\frac{|t|}{|t|-1} \right)^2 |t| \sum_{p > |t|} \frac{1}{p^{1+\beta}}.$$

On a

$$\sum_{99 < p \leq |t|} \frac{1}{p^\beta} \leq |t|^{1-\beta} \sum_{99 < p \leq |t|} \frac{1}{p} = |t|^{1-\beta} \left(\sum_{p \leq |t|} \frac{1}{p} - \sum_{p \leq 99} \frac{1}{p} \right).$$

Sachant que

$$\sum_{p \leq 99} \frac{1}{p} = 1.802817 \dots \quad \text{et} \quad \sum_{p \leq |t|} \frac{1}{p} \leq \ln(\ln |t|) + 0.3 \quad (\text{théorèmes 5 et 20 de [27]})$$

on obtient

$$\sum_2^t = (2.020408 \dots) \left((\ln |t|)^{\frac{1}{10}} \right) (\ln (\ln |t|)) - 3.537282 \dots$$

La formule sommatoire d'Abel ([11] page 11) et l'inégalité (8.4) nous donne

$$|t| \sum_{p > |t|} \frac{1}{p^{1+\beta}} < \frac{2.2111}{\sigma_0 (\ln |t|)^{9/10}} \quad \text{par suite} \quad \sum_3^t \leq 0.596189 \dots$$

Nous obtenons en fin

$$|G(s)| \leq (1.882860 \dots) \exp \left\{ (2.020408 \dots) \left((\ln |t|)^{\frac{1}{10}} \right) (\ln (\ln |t|)) \right\}.$$

Pour majorer $|\zeta(s)|$ on utilise la formule habituelle

$$(8.8) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{1}{(s-1)N^{s-1}} - \frac{1}{2N^s} - s \int_N^{+\infty} \frac{B(u)}{u^{s+1}} du$$

valable pour tout $s \neq 1$ avec $\Re(s) > 0$ et $N \geq 1$ un entier et $B(u) = u - E(u) - 1/2$ est une fonction périodique de période 1 qui vérifie $|B(u)| \leq 1/2$ pour tout $u \geq 0$.

De la formule (8.8) vient

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\beta} + \frac{N^{1-\beta}}{|t|} + \frac{N^{-\beta}}{2} + \frac{(|t| + b) N^{-\beta}}{2 \times \beta}.$$

Puisque

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\beta} \leq N^{1-\beta} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = (N^{1-\beta}) \ln N + N^{1-\beta}$$

alors

$$|\zeta(s)| \leq (N^{1-\beta} \ln N) \left(1 + \frac{1}{\ln N} + \frac{1}{|t| \ln N} + \frac{1}{2N \ln N} + \frac{|t| + b}{2\beta N \ln N} \right).$$

En posant $N = E(|t|)$ dans la dernière inégalité et en tenant compte du fait que $|t| \geq 100$ et $99 \leq |t| - 1 < N \leq |t|$ on obtient

$$|\zeta(s)| \leq (1.335714 \dots) (\ln |t|)^{\frac{11}{10}}.$$

Les majorations de $G(s)$ et $\zeta(s)$ nous donnent

$$|Z(s)| < 2.514963 \ln |t| \exp \left\{ \left(\frac{1}{10} + 2.020409 (\ln |t|)^{\frac{1}{10}} \right) \ln (\ln |t|) \right\}.$$

Remarquons que pour $|t| \geq 100$

$$\left(\frac{1}{10} + 2.020409 (\ln |t|)^{\frac{1}{10}} \right) (\ln (\ln |t|)) - 0.815 \ln |t| < 0$$

alors

$$\frac{|Z(s)|}{|t|^2} < 2.514963 \frac{\ln |t|}{|t|^{2-0.815}} < 2.515 \frac{\ln |t|}{|t|^{1.185}}.$$

2. On a $|G(s)| \leq \exp \{ \sum_1^{t_0} + \sum_2^{t_0} + \sum_3^{t_0} \}$. Pour la la somme $\sum_3^{t_0}$ on peut écrire

$$\sum_3^{t_0} \leq \left(1 + \frac{b}{t_0} \right) \left(\frac{t_0}{t_0 - 1} \right)^2 \left(-\frac{\pi(t_0)}{t_0^{\sigma_0}} + \frac{2.2111}{\sigma_0 (\ln 100)^{9/10}} \right).$$

Sachant que $\pi(t_0) = \pi(100) = 25$ on obtient $\sum_3^{t_0} \leq 0.296055 \dots$. On a aussi

$$\sum_2^{t_0} \leq (2.020408 \dots) \left((\ln 100)^{\frac{1}{10}} \right) (\ln (\ln 100)) - 3.537282 \dots \leq 0.057344 \dots$$

alors

$$|G(s)| \leq \exp \{3.573884 \dots + 0.057344 \dots + 0.296055 \dots\} \leq 50.768851 \dots$$

Pour majorer $\zeta(s)$ on utilise la formule (8.8). Pour $s = \sigma_0 + it$ et $|t| \leq 1$, on pose $N = 1$ dans la formule (8.8) on obtient

$$|\zeta(s)| \leq Z(1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{1 - \sigma_0} + \frac{\sigma_0 + 1}{2\sigma_0} < 32.870606 \dots$$

Pour $s = \sigma_0 + it$ avec $N - 1 < |t| \leq N$ et $N = 2, 3, \dots, 100$ on a

$$|\zeta(s)| \leq Z(N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\sigma_0}} + \frac{N^{1-\sigma_0}}{\sqrt{(1-\sigma_0)^2 + (N-1)^2}} + \frac{1}{2N^{\sigma_0}} + \frac{\sigma_0 + N}{2\sigma_0 N^{\sigma_0}}.$$

Alors pour $s = \sigma_0 + it$ avec $|t| \leq 100$ on a

$$|\zeta(s)| \leq \max_{N=1, \dots, 100} \{Z(N)\} = Z(1) \leq 32.870606 \dots$$

On obtient en fin $|Z(s)| \leq 32.870606 \dots \times 50.768851 \dots = 1668.802898 \dots$.

Lemme 8.3 Soient

$$b = 1.000001, \quad t_0 = \exp(\exp(5.6)), \quad \beta = \beta(|t|) = 1 - \frac{\ln \ln |t|}{\ln |t|} \quad \text{et} \quad \sigma_0 = 1 - \frac{\ln \ln t_0}{\ln t_0}.$$

1. Pour $s = \sigma + it$ tel que $\sigma_0 \leq \beta = \beta(|t|) \leq \sigma \leq b$ et $|t| \geq t_0$ on a

$$\frac{|Z(s)|}{|t|^2} < \frac{\exp\{-8\}}{|t| \ln^2 |t|} \exp \left\{ 5.559 \frac{\ln |t|}{\ln (\ln |t|)} - \ln |t| \right\}.$$

2. Pour $s = \sigma_0 + it$ et $|t| \leq t_0$ on a $|Z(s)| < \exp\{250\}$.

Démonstration. Pour chaque assertion du lemme, on doit majorer $G(s)$ et $\zeta(s)$.

1. Les inégalités (8.7) nous permettent d'écrire

$$|G(s)| \leq \exp \left\{ \sum_1 + \sum_2^t + \sum_3^t \right\} \quad \text{expression dans laquelle}$$

$$\sum_1 = \sum_{p \leq 10^7} \ln \left(1 + \frac{1}{(p-1)^{\sigma_0}} + \frac{1}{p^{\sigma_0}} \right) = 6.505955 \dots$$

$$\sum_2^t = \frac{2 \times 10^7}{10^7 - 1} \sum_{10^7 < p \leq |t|} \frac{1}{p^\beta}$$

$$\sum_3^t = \left(1 + \frac{b}{|t|} \right) \left(\frac{|t|}{|t| - 1} \right)^2 |t| \sum_{p > |t|} \frac{1}{p^{1+\beta}}.$$

Sachant que $p(664580) = 10^7 + 19$, les inégalités (8.5) et (8.6) nous permettent d'obtenir

$$\sum_2^t \leq \left(\frac{2 \times 10^7}{10^7 - 1} \right) J(t, v, \alpha) \quad \text{où} \quad v = 664579 \quad \text{et} \quad \alpha = 1.058.$$

Par application du lemme 8.1 on obtient

$$\sum_2^t \leq (5.094218 \dots) \frac{\ln |t|}{\ln(\ln |t|)} - 14.778113 \dots$$

La formule sommatoire d'Abel et l'inégalité (8.5) nous donnent

$$|t| \sum_{p>|t|} \frac{1}{p^{1+\beta}} \leq -1 + \left(\frac{2 \times 1.058}{\ln |t|} \right) \frac{|t|^{1-\beta}}{\sigma_0} = -1 + \frac{2 \times 1.058}{\sigma_0} \quad (|t|^{1-\beta} = \ln |t|).$$

Alors

$$\sum_3^t \leq \left(1 + \frac{b}{t_0} \right) \left(\frac{t_0}{t_0 - 1} \right)^2 \left(-1 + \frac{2 \times 1.058}{\sigma_0} \right) = 1.160744 \dots$$

On obtient en fin

$$|G(s)| \leq \exp \left\{ (5.094218 \dots) \frac{\ln |t|}{\ln(\ln |t|)} - 7.111414 \dots \right\}.$$

Pour majorer $\zeta(s)$ on utilise la formule (8.8) qui nous donne

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\beta} + \frac{N^{1-\beta}}{|t|} + \frac{N^{-\beta}}{2} + \frac{(|t| + b) N^{-\beta}}{2\beta}.$$

On a

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\beta} \leq 1 + \int_1^N \frac{du}{u^\beta} = 1 + \frac{N^{1-\beta} - 1}{1 - \beta} < \frac{N^{1-\beta}}{1 - \beta}$$

il s'en suit

$$|\zeta(s)| \leq \frac{N^{1-\beta}}{\beta(1-\beta)} \times \left(\beta + \frac{\beta(1-\beta)}{|t|} + \frac{\beta(1-\beta)}{2N} + \frac{(|t| + b)(1-\beta)}{2N} \right).$$

En posant $N = E(|t|)$ dans la dernière inégalité on obtient

$$|\zeta(s)| \leq \frac{|t|^{1-\beta}}{\beta(1-\beta)} \left(\beta + \frac{\beta(1-\beta)}{|t|} + \frac{(1-\beta)(\beta + b + |t|)}{2(|t| - 1)} \right).$$

Ensuite on vérifie que

$$\frac{|t|^{1-\beta}}{\beta(1-\beta)} \leq \frac{(\ln |t|)^2}{\sigma_0 (\ln(\ln t_0))} = \frac{\exp \{2 \ln \ln |t|\}}{\sigma_0 (\ln(\ln t_0))}$$

et

$$\beta + \frac{\beta(1-\beta)}{|t|} + \frac{(1-\beta)(\beta + b + |t|)}{2(|t| - 1)} \leq \frac{3t_0^2 + (1+b)t_0 - 2}{2t_0(t_0 - 1)}$$

d'où

$$|\zeta(s)| \leq \exp \{-1.296376 \dots\} \exp \{2 \ln(\ln |t|)\}.$$

On obtient donc

$$|Z(s)| \leq \exp \{-8.407790 \dots\} \exp \left\{ (5.094218 \dots) \frac{\ln |t|}{\ln(\ln |t|)} + 2 \ln(\ln |t|) \right\}.$$

Nous obtenons enfin l'assertion du lemme en écrivant

$$\frac{|Z(s)|}{|t|^2} \leq \frac{\exp \{-8.407790 \dots\}}{|t| \ln^2 |t|} \exp \left\{ \left(5.094218 \dots + \frac{4 \ln^2(\ln t_0)}{\ln t_0} \right) \frac{\ln |t|}{\ln(\ln |t|)} - \ln t \right\}.$$

2. On a $|G(s)| \leq \exp \{ \sum_1 + \sum_2^{t_0} + \sum_3^{t_0} \} \leq \exp \{ 238.890563 \dots \}$. Pour $\zeta(s)$, on pose $N = E(t_0)$ dans la formule (8.8) on obtient

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^{t_0} \frac{1}{n^{\sigma_0}} + \frac{t_0^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0} + \frac{1}{2(t_0-1)^{\sigma_0}} + \frac{t_0 + \sigma_0}{2\sigma_0(t_0-1)^{\sigma_0}}.$$

On a

$$\sum_{n=1}^{t_0} \frac{1}{n^{\sigma_0}} \leq 1 + \int_1^{t_0} \frac{du}{u^{\sigma_0}} = 1 + \frac{t_0^{1-\sigma_0} - 1}{1-\sigma_0} = \frac{t_0^{1-\sigma_0} - \sigma_0}{1-\sigma_0}$$

d'où $|\zeta(s)| \leq \exp \{ 10.173850 \dots \}$. On obtient en fin $|Z(s)| \leq \exp \{ 249.064413 \}$.

Lemme 8.4 Pour $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$, $x \geq 100$ et $t \geq 20$ on a

$$\ln x \frac{\ln \ln t}{\ln t} + \frac{\ln t}{n} > \sqrt{\frac{2 \ln x \ln \ln x}{n}}.$$

Démonstration. Pour $20 \leq t \leq 1700$, on vérifie l'inégalité par calcul direct sur ordinateur. Pour $t \geq 1700$, on considère la fonction

$$f_{n,x}(t) = \ln x \frac{\ln \ln t}{\ln t} + \frac{\ln t}{n}$$

qui atteint son minimum en $t = t(x)$ qui vérifie $\ln x = \ln^2 t / (n(\ln \ln t - 1))$ pour lequel

$$\frac{f_{n,x}(t)}{\sqrt{\frac{2}{n} \ln x \ln \ln x}} = \frac{1 + \frac{\ln \ln t}{\ln \ln t - 1}}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{\ln \ln t - 1} (2 \ln \ln t - \ln(n(\ln \ln t - 1)))}}.$$

Sachant que $\log(n(\ln \ln t - 1)) > 0$ pour $t \geq 1700$, on peut écrire

$$\frac{f_{n,x}(t)}{\sqrt{\frac{2}{n} \ln x \ln \ln x}} > \frac{y^2 + 1}{2y} \quad \text{où } y = \sqrt{\frac{\ln \ln t}{\ln \ln t - 1}} > 1.$$

L'inégalité $y^2 + 1 > 2y$ pour $y > 1$ permet d'obtenir le résultat annoncé.

Lemme 8.5 On considère, pour $t \geq \exp(\exp(5.6))$, la fonction réelle suivante

$$v_x(t) = \ln x \frac{\ln(\ln t)}{\ln t} + \ln t - 5.559 \frac{\ln t}{\ln(\ln t)}$$

1. Pour $x \geq \exp(\exp(9.999))$, on a

$$v_x(t) > v_2(x) = \left(1 - \frac{8.126}{\ln \ln x}\right) \sqrt{2(\ln x) \ln(\ln x)} \quad \text{avec} \quad -\frac{5.6}{\exp(5.6)} \ln x < -264 - v_2(x).$$

2. Pour $x \geq \exp(\exp(\exp(29)))$, on a

$$v_x(t) > v_3(x) = \left(1 + 0.179 \frac{\ln(\ln(\ln x))}{\ln \ln x}\right) \sqrt{2(\ln x) \ln(\ln x)} \quad \text{avec} \quad \frac{-5.6 \ln x}{\exp(5.6)} < -264 - v_3(x).$$

Démonstration.

1. La fonction $v_x(t)$ atteint son minimum en $t = t(x)$ qui vérifie l'égalité

$$(8.9) \quad \ln x = f(t) = \frac{\ln^2 t}{\ln \ln t - 1} \left(1 - \frac{5.559}{\ln \ln t} + \frac{5.559}{\ln^2 \ln t}\right).$$

Pour $x \geq (\exp(\exp(9.999)))$ il existe un unique $t = t(x) > \exp(\exp(5.6))$ qui vérifie (8.9) en lequel $v_x(t)$ atteint son minimum et l'on a

$$v_x(t) \geq \ln t \left(\frac{\ln \ln t}{\ln \ln t - 1} \left(1 - \frac{5.559}{\ln \ln t} + \frac{5.559}{\ln^2 \ln t} \right) + 1 - \frac{5.559}{\ln \ln t} \right)$$

ce qui implique

$$(8.10) \quad v_x(t) > 2 \ln t \left(1 - \frac{5.059}{\ln \ln t} + \frac{0.5}{\ln^2 \ln t} + \frac{0.5}{\ln^3 \ln t} \right).$$

De (8.9) on a

$$\ln t = \sqrt{\ln x} \sqrt{\ln \ln t} \left(1 - \frac{1}{\ln \ln t} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{5.559}{\ln \ln t} + \frac{5.559}{\ln^2 \ln t} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Le développement limité généralisé au voisinage de 0 de la fonction

$$\left((1-x)^{\frac{1}{2}} \right) \left((1-5.559x+5.559x^2)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

nous permet d'obtenir

$$(8.11) \quad \ln t > \sqrt{\ln x} \sqrt{\ln \ln t} \left(1 + \frac{2.2795}{\ln \ln t} + \frac{7.294180375}{\ln^2 \ln t} + \frac{25.6921402746875}{\ln^3 \ln t} \right).$$

Les formules (8.10) et (8.11) nous donnent

$$(8.12) \quad v_x(t) > 2\sqrt{\ln x} \sqrt{\ln \ln t} \left(1 - \frac{4.465}{\ln \ln t} \right).$$

L'égalité (8.9) nous permet d'obtenir

$$(8.13) \quad \ln \ln x < 2 \ln \ln t - \ln \ln \ln t \quad \text{et} \quad \ln \ln \ln x < \ln 2 + \ln \ln \ln t$$

ce qui implique

$$(8.14) \quad \ln \ln t > \frac{\ln \ln x}{2} \left(1 + \frac{\ln \ln \ln x - \ln 2}{\ln \ln x} \right) > \frac{\ln \ln x}{2} \left(1 + \frac{1.609}{\ln \ln x} \right).$$

Les formules (8.12) et (8.14) impliquent

$$v_x(t) > \sqrt{2 \ln x \ln \ln x} \left(1 + \frac{1.609}{\ln \ln x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{8.93 \frac{1}{\ln \ln x}}{\left(1 + \frac{1.609}{\ln \ln x} \right)} \right).$$

Sachant que

$$(1 + 1.609y)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{8.93y}{1 + 1.609y} \right) > 1 - 8.126y \quad \text{pour } 0 < y < 1$$

on a

$$v_x(t) > v_2(x) = \left(1 - \frac{8.126}{\ln \ln x} \right) \sqrt{2 \ln x \ln \ln x}.$$

Pour la deuxième inégalité, on a pour $x \geq \exp(\exp(9.999))$

$$-\frac{5.6}{\exp(5.6)} \ln x + 264 + v_2(x) = \ln x \left(-\frac{5.6}{\exp(5.6)} + \frac{264}{\ln x} + \frac{v_2(x)}{\ln x} \right) < 0.$$

2. De la formule (8.13) vient

$$\ln \ln t > \frac{\ln \ln x}{2} \left(1 + \left(1 - \frac{\ln 2}{\ln \ln \ln x} \right) \frac{\ln \ln \ln x}{\ln \ln x} \right) > \frac{\ln \ln x}{2} \left(1 + 0.976 \frac{\ln \ln \ln x}{\ln \ln x} \right).$$

En tenant compte de l'inégalité

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \text{ pour } 0 < x < 8$$

on obtient

$$\sqrt{\ln \ln t} > \sqrt{\frac{1}{2} \ln \ln x} \left(1 + \left(\frac{0.976}{2} - \frac{0.976^2}{8} \times \frac{\ln \ln \ln x}{\ln \ln x} \right) \frac{\ln \ln \ln x}{\ln \ln x} \right)$$

d'où

$$(8.15) \quad \sqrt{\ln \ln t} > \sqrt{\frac{1}{2} \ln \ln x} \left(1 + 0.487 \frac{\ln \ln \ln x}{\ln \ln x} \right).$$

Les formules (8.12), (8.14) et (8.15) impliquent

$$v_x(t) > \sqrt{2 \ln x \ln \ln x} \left(1 + 0.487 \frac{\ln \ln \ln x}{\ln \ln x} \right) \left(1 - \frac{8.93}{\ln \ln x} \right)$$

d'où

$$v_x(t) > v_3(x) = \left(1 + 0.179 \frac{\ln \ln \ln x}{\ln \ln x} \right) \sqrt{2 \ln x \ln \ln x}.$$

Pour la deuxième inégalité, on a pour $x \geq \exp(\exp(\exp(29)))$

$$-\frac{5.6}{\exp(5.6)} \ln x + 264 + v_3(x) = \ln x \left(-\frac{5.6}{\exp(5.6)} + \frac{264}{\ln x} + \frac{v_3(x)}{\ln x} \right) < 0.$$

Lemme 8.6 Soient, pour $x \geq x_1 \geq 10^5$, $\Delta(x)$ une fonction réelle strictement décroissante et strictement comprise entre 0 et 1 et $\lambda' > 0$ une constante telles que

$$(8.16) \quad R_1(x) = \left| \int_1^x \Phi(u) du - A \frac{x^2}{2} \right| \leq \lambda' x^2 \Delta(x) \quad \text{pour } x \geq x_1.$$

Pour $x \geq x_0 \geq x_1$ tel que $x \left(1 - \sqrt{\Delta(x)} \right) \geq x_1$, on a

$$|\Phi(x) - Ax| \leq \lambda x \sqrt{\Delta(x)} \quad \text{où } \lambda = \frac{A}{2} + \lambda' \left(1 + \left(1 + \sqrt{\Delta(x_0)} \right)^2 \right)$$

Démonstration. On pose $h = h(x) = x\sqrt{\Delta(x)}$. On a $x - h$ est strictement croissante. Soit $x_0 \geq x_1$ tel que l'on ait $x - h \geq x_1$ pour $x \geq x_0$. Puisque la fonction $\Phi(u)$ est croissante alors

$$(8.17) \quad \frac{1}{h} \int_{x-h}^x \Phi(u) du \leq \Phi(x) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \Phi(u) du.$$

Les inégalités (8.16) et (8.17) et les propriétés de la fonction $\Delta(x)$ nous permettent d'obtenir l'assertion du lemme.

8.3 Démonstration du théorème 8.1

On part de la formule

$$\int_1^x \Phi(u) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \zeta(s) G(s) x^{s+1} \frac{ds}{s(s+1)} \quad ([5] \text{ page 242})$$

avec $b = 1.000001$ en tenant compte du fait que

$$\text{résidu} \left(\frac{Z(s)x^{s+1}}{s(s+1)}, s = 1 \right) = \frac{A}{2} x^2.$$

1. En vertu du lemme 8.2, on déplace le chemin d'intégration de la ligne $\sigma = b$ au contour

$$L_1 = \left\{ s \text{ tel que } s = \sigma + it \text{ où } \sigma = 1 - \frac{\ln \ln (\max \{|t|, 100\})}{10 \ln (\max \{|t|, 100\})} \right\}.$$

On obtient

$$R_1(x) \leq \frac{2.515}{\pi} x^2 I_1(x) + \frac{1668.803}{\pi} x^2 \exp \left\{ -\frac{\ln (\ln 100)}{10 \ln 100} \ln x \right\}$$

où

$$I_1(x) = \int_{100}^{+\infty} \exp \left(-\ln x \frac{\ln \ln t}{10 \ln t} \right) \frac{\ln t}{t^{1.185}} dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{100} \frac{dt}{\sigma_0^2 + t^2} < 1.615.$$

En écrivant

$$\exp \left(-\ln x \frac{\ln \ln t}{10 \ln t} \right) \frac{\ln t}{t^{1.185}} = \exp \left\{ -\frac{1}{10} \left(\ln x \frac{\ln \ln t}{\ln t} + \frac{\ln t}{4} \right) \right\} \frac{\ln t}{t^{1.16}}$$

on obtient, par application du lemme 8.4

$$I_1(x) < 32.473 \Delta(x) \quad \text{où} \quad \Delta(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{10} \sqrt{\frac{\ln x \ln \ln x}{2}} \right\}.$$

En remarquant que

$$\left(-\ln x \frac{\ln \ln 100}{10 (\ln 100)} + \frac{1}{10} \sqrt{\frac{\ln x \times \ln \ln x}{2}} \right) < 0 \quad \text{pour } x \geq 10^5$$

on peut écrire

$$\exp \left\{ -\frac{\ln \ln 100}{10 \ln 100} \ln x \right\} < \Delta(x).$$

Alors $|R_1(x)| \leq 883.879 x^2 \Delta(x)$. Le lemme 8.6 nous permet alors de conclure.

2. On déplace le chemin d'intégration de la ligne $\sigma = b$ au contour

$$L_2 = \left\{ s = \sigma + it \text{ où } \sigma = 1 - \frac{\ln \ln (\max \{|t|, t_0\})}{\ln (\max \{|t|, t_0\})} \right\} \quad \text{où } t_0 = \exp(\exp(5.6)).$$

En tenant compte du lemme 8.3 on obtient

$$|R_1(x)| \leq \frac{\exp \{-8\}}{\pi} x^2 I_3(x) + \exp \{250\} I_4 x^2 \exp \left\{ -\frac{5.6 \ln x}{\exp(5.6)} \right\}$$

où

$$(8.18) \quad I_3(x) = \int_{t_0}^{+\infty} \exp \{-v_x(t)\} \frac{dt}{t \ln^2 t} \quad \text{et} \quad I_4 = \frac{1}{\pi} \int_0^{t_0} \frac{dt}{t^2 + \sigma_0^2} < 1.$$

Le lemme 8.5 et la fomule (8.18) nous permet d'obtenir

$$|R_1(x)| \leq \exp(-13) x^2 \exp \{-v_2(x)\} \quad \text{pour } x \geq \exp(\exp(9.999))$$

ensuite on applique le lemme 8.6.

3. Le lemme 8.5 et la fomule (8.18) impliquent

$$|R_1(x)| \leq \exp \{-13\} x^2 \exp \{-v_3(x)\} \quad \text{pour } x \geq \exp(\exp(\exp(29)))$$

l'assertion vient alors par application du lemme 8.6.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. ALAOGLU et P. ERDÖS, On Highly Composite and Similar Numbers, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 56, (1944), 448–469.
- [2] R. J. ANDERSON et H. M. STARK, Oscillation Theorems, Lectures Notes, n° 899, (1980) 79 – 106.
- [3] T. M. APOSTOL “Introduction to Analytic Number Theory,” Springer-Verlag, New- york, Heidelberg Berlin 1976.
- [4] M. BALAZARD and A. SMATI, Elementary Prouf of a theorem of Batemann, Analytic Number Theory, Proc. Conf. in Honor of P. Batemann, Allerton Parck, III., 1989, Progr. Math. 85, Birkhauser, Boston (1990), 41 – 46.
- [5] M. BALAZARD et G. TENENBAUM, Sur la Répartition des Valeurs de la Fonction d’Euler, Compositio Mathematica 110, 239 – 250 (1998).
- [6] P. BATEMAN, The Distribution of Values of the Euler Function, Acta Arith. 21 (1972), 329 – 345.
- [7] H. DAVENPORT “Multiplicative Number Theory”, Second Edition, revised by Hugh L. Montgomery. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin.
- [8] D. DAVIES and C.B. HASELGROVE, the evaluation of Dirichlet L functions, Proc. Roy. Ser. A 264, (1961), 122-132.
- [9] P. DUSART, Autour de la Fonction π , thèse de doctorat de l’université de Limoges en Mathématiques appliquées et théorie des nombres, juin (1998).
- [10] H. M. EDWARD “Riemann’s zeta function”, Academic Press, New York and London, 1974.
- [11] W. J. ELLISON et M. MENDES-FRANCE, “Les Nombres Premiers,” Hermann Paris, 1975, actualités scientifiques et industrielles n°1366.
- [12] P. ERDÖS, Some Remarks on Euler’s φ Function and Some other related problems, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 540 – 544.
- [13] P. ERDÖS et J.-L. NICOLAS, Répartition des Nombres Superabondants, Bulletin de la Société Mathématique de France, 103, N°1, (1975), 65–90.
- [14] E. GROSSWALD, Oscillation Theorems, Conf on the Theory of Arithmetic Functions, Springer Lecture Notes, vol. 251, (1971).
- [15] G. H. HARDY et E. M. WRIGHT, “An Introduction to the Theory of Numbers,” Oxford 1960.
- [16] A. IVIĆ, Two Inequalities For the Sum of Divisors Functions, Univ. u. Novom. Sadu. Zb. Rad. Prirod. Math. Fak. 7, (1977), 17 – 22
- [17] K. S. McCURLEY, Explicit Estimates for the Error term in the Prime number theorem for Arithmetic Progressions, Math. comp. volume 42 number 165, january (1984), 265 – 285.

- [18] J. L. NICOLAS, Distribution des Valeurs de la Fonction d'Euler, *L'Enseignement Math.* 30, (1984), 331 – 338
- [19] J.-L. NICOLAS, Petites valeurs de la fonction d'Euler, *Journal of number theory*, 17, (1983), 375 – 388.
- [20] J. L. NICOLAS et G. ROBIN, Majorations Explicites pour le Nombre des Diviseurs de n , *Cand. Math. Bull. Vol. 26 (4)*, (1983), 485 – 492.
- [21] J. L. NICOLAS, On Highly Composite Numbers, in : *RAMANUJAN Revisited*, Proceedings of the Centenary Conference, University of Illinois 1987, Ed. by G. E. Andrews and Al., 215-244.
- [22] S. RAMANUJAN, Highly Composite Numbers, *Proc. London Math. Soc. Serie 2*, 14, (1915), 347 – 400 et Collected paper, (1962), 78 – 128, Chelsea.
- [23] O. RAMARÉ et R. RUMELY, Primes in Arithmetic Progressions, *Math of Computation*, vol. 65, N° 213, (1996), 397–425.
- [24] G. ROBIN, Grandes Valeurs de la Fonction Somme des Diviseurs et Hypothèse de RIEMANN, *J. Math. pures et appl.*, 63, (1984), 187–213.
- [25] G. ROBIN, Grandes Valeurs de la Fonction Somme des Diviseurs dans les Progressions Arithmétiques, *J. Math. pures et appl.*, 66, (1987), 337–349
- [26] J. B. ROSSER et L. SCHOENFELD, Approximate Formulas for the Some Functions of Prime Numbers, *Illinois Jour. Math.*, (1962), t. 6, p. 64 – 94.
- [27] J. B. ROSSER et L. SCHOENFELD, Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$, *Math. of Comp.*, vol. 29, Numb. 129, (1975).
- [28] R. RUMELY, Numerical Computations Concerning the ERH, *Math of Computation*, vol. 62, (1993), 415 – 440.
- [29] L. SCHOENFELD, Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$ ' II, *Math. of Comp.* vol. 30, numb. 134, (1976), 337–360.
- [30] A. SMATI, Répartition des Valeurs de la Fonction d'Euler, *L'Enseignement Math.* 35, (1989), 61 – 76.
- [31] A. SMATI, Evaluation effective du nombre d'entiers n tels que $\varphi(n) \leq x$, *Acta Arithmetica* LXI.2 (1992).
- [32] R. SPIRA, calculation of Dirichlet L functions, *Math. comp.* 23, (1969), 489 – 498.
- [33] E. STANKUS, On Some Generalized Numbers, *Liet. Mat. Rink* 36 (1996), N°1, 144 – 154.
- [34] G. TENENBAUM, Introduction à la Théorie Analytique et Probabiliste des nombres, Unité associée au CNRS URA 750 Analyse Globale.
- [35] K. S. WILLIAMS, Mertens' Theorem for Arithmetic Progressions, *Journal of number theory* 6, (1974), 353 – 359.

RÉSUMÉ

Soient k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leq l \leq k$, $\{l + km\}$ la progression arithmétique de premier élément l et de raison k et n un nombre entier plus grand ou égal à 2.

Le travail présenté dans cette thèse porte principalement sur l'étude des fonctions arithmétiques suivantes :

$\sigma_{k,l}(n)$ = somme des diviseurs de n dans la progression arithmétique $\{l + km\}$.

$\sigma_{k,l}^*(n)$ = somme des diviseurs unitaires dans la progression arithmétique $\{l + km\}$.

On rappelle qu'un diviseur d de n est dit unitaire s'il est premier avec n/d .

$\sigma_{k,l}(n)/\sigma_{k,l}^*(n)$ = quotient de $\sigma_{k,l}(n)$ et $\sigma_{k,l}^*(n)$.

$d_{k,l}(n)$ = nombre des diviseurs de n dans la progression arithmétique $\{l + km\}$.

Il s'agit d'étudier le comportement relatif des grandes valeurs de ces fonctions et leurs ordres maximaux qui seraient déterminés de façon explicite. Les résultats obtenus généralisent et précisent les travaux, publiés en 1983, 1984 et 1987, par J. -L. Nicolas et G. Robin qui s'ajoutaient à une suite de contributions de S. Ramanujan, P. Erdős et L. Alaoglu.

Suivant l'idée de S. Ramanujan, ces fonctions atteignent leurs grandes valeurs sur des suites de nombres entiers particuliers dont la structure est fondamentale dans les méthodes utilisées.

Le comportement des grandes valeurs des fonctions $\sigma_{k,l}(n)$ et $\sigma_{k,l}^*(n)$ est lié à la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques et à la position des zéros complexes des fonctions L de Dirichlet. Cela nous a conduit à établir une méthode de calcul de ces fonctions et de leurs premiers zéros complexes. Cette méthode est inspirée de celle de D. Davies et C. B. Haselgrove en 1961.

La dernière partie de cette thèse est consacrée à la fonction $\Phi(x)$ qui, pour un nombre réel $x \geq 0$, compte le nombre d'entiers positifs n tels que $\varphi(n) \leq x$ où φ est l'indicateur d'Euler. Pour cette fonction, on a établi une évaluation effective comparable à celle obtenue par A. Smati en 1992.

Mots clés : Progressions Arithmétiques, Zéros des fonctions L de Dirichlet, Nombres Colossalement Abondants, Nombres Hautement composés Supérieurs, Oscillation de fonctions arithmétiques.