

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENE »



FACULTE D'ELECTRONIQUE ET D'INFORMATIQUE

Mémoire Présenté pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

En : Electrotechnique

Spécialité : Systèmes Electro-énergétique

Par : **ABDI AMMAR**

Sujet

Modélisation d'un dispositif de chauffage par induction

Soutenu publiquement le 02/11/2011

Mr. M. BOUDOUR	Professeur	à L'USTHB	Président
Mr. L. HADJOUT	Maître de Conférences /A	à L'USTHB	Examineur
Mr. S. BOUAZABIA	Maître de Conférences /A	à L'USTHB	Examineur
Mr. Y. OUAZIR	Maître de Conférences /A	à L'USTHB	Rapporteur
Mr. H. BENSAIDANE	MAA	à L'USTHB	Invité

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné durant tous ces années d'études

*Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein du laboratoire des systèmes électriques et industriels de l'USTHB sous la direction de Monsieur **YUCEF OUAZIR**, Maître de conférences et Chef de Département Electrotechnique à l'USTHB. Je tiens à le remercier pour son aide, son orientation judicieuse et sa disponibilité, aussi pour la confiance, la patience et la compréhension qu'il m'a toujours manifesté.*

*Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **MOHAMED BOUDOUR**, Professeur et directeur de l'laboratoire LSEI à L'USTHB, pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de soutenance.*

*Mes remerciements vont particulièrement, et à qui j'exprime ma gratitude et ma reconnaissance aux membres de jury, d'avoir accepté de participer aux jurys et d'en faire le rapport scientifique: Monsieur **L. HADJOUT**, Maître de Conférences à l'USTHB, et Chef d'équipe de recherche conception des machines électriques, Monsieur **S. BOUAZABIA**, Maître de Conférences, et Chef d'équipe de recherche Modélisation des Décharges électriques à l'USTHB*

*Un remerciement spécial est transmis à monsieur **H.BENSAIDANE** Chargé des Cours à l'USTHB Pour son aide, ces conseils, et le suivi de travail au cours de l'année.*

Mes vifs remerciements vont également à :

Mes enseignants tout au long de ma formation à l'université des sciences et technologies houari Boumediene, pour leur savoir, aide, et très grandes qualité humaines

Dédicaces

A mes très chers parents. Que Dieu les protège.

A mes chers frères et sœurs

A ma grande famille.

Et à tous mes amis.

TABLE DES MATIERE

Introduction générale	1
 Chapitre I : Généralités su le chauffage par induction	
I.1.Introduction	3
I.2.Historique	3
I.3. Définition et principe de fonctionnement	3
I.3.1. Composantes du chauffage par induction.....	4
I.3.2. Induction électromagnétique.....	5
I.3.2.1 Loi de Faraday.....	5
I.3.2.2 Courants de Foucault.....	5
I.3.3 Effet Joule.....	5
I.3.3.1. Loi de Joule.....	6
I.4. Caractéristiques du chauffage par induction	6
I.4.1. Profondeur de pénétration.....	6
I.4.2. Puissance dissipée dans la charge.....	7
I.4.3.Rendement électrique.....	7
I.5. Paramètres de réglage	7
I.5.1. Fréquence.....	8
I.5.2. Amplitudes des courants inducteurs.....	8
I.5.3. Temps d'exposition.....	8
I.6. Avantages technologiques du chauffage par induction	8
I.7. Applications industrielles	8
I.7.1. Fusion.....	9
a- Four à creuset.....	9
b- Four à canal.....	10
I.7.2. Soudage.....	10
I.7.3. Brasage.....	11
I.7.4. Collage.....	11

a- Conduction.....	26
b- Convection.....	26
c- Rayonnement.....	26
II.3.4 Equation de conduction.....	26
II.3.4.1 loi de Fourier.....	26
II.3.4.2 Génération et stockage d'énergie.....	26
II.3.5.équation de la diffusion thermique	27
II.3.6.Conditions initiales et aux limites.....	27
II.3.6.1.Conditions aux limites de type (Dirichlet)	27
II.3.6.2. Conditions aux limites de type (Neumann).....	27
II.4. Couplage magnétothermique.....	27
II.4.1. Ordre de grandeurs des deux phénomènes	28
II.4.2. Termes de couplage	29
II.4.3. Problèmes de non linéarités	29
II.4.3.1. Variation de la conductivité électrique avec la température.....	29
II.4.3.2 Variation de la conductivité thermique avec la température	30
II.4.3.3 Variation de la chaleur massique avec la température.....	31
II.5. Outils de résolution.....	32
II.5.1. méthodes numériques	32
II.5.1.1. méthode des différences finies MDF	33
II.5.1.2. méthode des volumes finis MVF.....	33
II.5.1.3. méthode des éléments finis MEF.....	33
II.5.2. la méthode nodale	34
II.5.3. méthodes analytiques	35
II.5.3.1 Méthode séparation de variables.....	35
II.5.3.1 Méthode de résolution par les fonctions de Green	35
II.6.Conclusion.....	36

Chapitre III : **Résolution analytique du modèle magnétothermique**

III.1. introduction.....	37
III.2.présentation du système étudié.....	37

III.3.Résolution analytique du problème électromagnétique	38
III.3.1. Equation de la magnétodynamique et hypothèses d'étude	38
III.3.2 Domaine d'étude	39
III.3.2.1. Modèle de nappe de courant.....	39
III.3.2.2 Modèle géométrique du problème électromagnétique.....	42
III.3.3 Expression du potentiel vecteur magnétique.....	43
III.3.4. Densité de courant induit.	45
III.3.5 Densité de puissance de chauffe.....	45
III.4.méthode analytique pour le problème thermique	46
III.4.1.Equation de diffusion thermique avec source en mouvement.....	46
III.4.2. Domaine d'étude et conditions initiale et aux limites.....	47
III.4.3. Fonctions de Green associées aux problèmes de Conduction de la Chaleur.....	48
III.4.4. Résolution analytique par la méthode de fonction de GREEN.....	49
III.4.4.1 solution homogène à variables séparés.....	50
III.4.4.2 détermination des constantes par la méthode des fonctions Orthogonales.....	50
III.3.3.3.Fonction de Green du problème étudié.....	51
III.3.3.4 Solution générale du problème thermique.....	52
III.5.Conclusion	54

Chapitre IV :

Application pour le chauffage des plaques d'aluminium et validation par la méthode des éléments finies

IV.1.Introduction	55
IV.2. Description du dispositif utilisé pour l'application	55
IV.3. Présentation de l'outil de validation (logiciel COMSOL)	56
IV.4 Résultats du modèle électromagnétique	57

IV.4.1 Induction et potentiel vecteur magnétique.....	57
IV.4.2 Densité des courants induits	61
IV.4.3 Densité de puissance et la puissance totale de chauffe.....	65
IV.4.4. Influence des paramètres géométriques et électriques.....	69
a. Effet de la distance entre l'inducteur et la pièce conductrice.....	69
b. Effet de la distance entre deux bobines	70
	71
IV.5. Résultats du problème thermique.....	
IV.5.1 Evolution dans le temps de la température de la plaque.....	71
IV.5.2 Distribution spatiale de la température de la plaque.....	74
IV.5.3 Influence de la vitesse et de la fréquence sur la température de la plaque.....	76
	78
IV.6. Conclusion.....	
 Conclusion générale	 79
Références bibliographiques.....	81

Liste des figures et Tableaux

Fig. I.1 un système typique de chauffage par induction	4
Fig. I.2 autres formes de chauffage par induction.....	4
Fig. I.3. Schéma représentatif d'un four à creuset.....	9
Fig. I.4. Schéma représentatif d'un four à canal.....	10
Fig. I.5 Torche à plasma inductif à cage froide métallique.....	12
Fig. I.6 différentes modes de chauffage par induction	14
Fig. I.7 chauffage a cœur d'une billette en mouvement	14
Fig. I.8 chauffage avant formage des pièces conductrices en mouvement.....	16
Fig. II.1. Courbes d'aimantation à différentes températures de l'acier 20MoCrS4.....	21
Fig. II.2. Surface et volume d'intégration entre deux milieux.....	22
Fig. II.3. Isotherme et gradient thermique.....	25
Fig. II.4. Schématisation de la différence d'ordre de grandeur.....	29
Fig. II.5. Variation de la conductivité électrique avec la température.....	30
Fig. II.6. Variation de la conductivité thermique avec la température pour divers métaux purs....	31
Fig. II.7. Variation de la chaleur spécifique avec la température.....	31
Fig. III.1. Géométrie du dispositif d'étude.....	37
Fig. III.2. Géométrie du domaine d'étude.....	39
Fig. III.3. Approximation du bobinage réel avec une nappe de courant.....	40
Fig. III.4. Répartition de courant superficielle en fonction de x.....	40
Fig. III.5. Répartition de la densité de courant équivalente.....	41
Fig. III.6. Fondamental de la densité surfacique équivalente.....	42
Fig. III.7. Modèle géométrique du problème magnétodynamique.....	42
Fig. III.8. Domaine d'étude thermique.....	47
Fig. IV.1 Dispositif de chauffage par induction à flux transverse (TFIH).....	55
Fig. IV.2 Contour de potentiel vecteur magnétique pour différents valeurs de fréquence.....	57
Fig. IV.3 Contour du potentiel vecteur magnétique A et surface de l'induction B	58
Fig. IV.4. variation de potentiel vecteur magnétique suivant les coordonnées x et y	58
Fig. IV.5. Variation du Potentiel vecteur magnétique suivant x en différentes valeur du y.....	59
Fig. IV.6 Composante tangentielle de l'induction magnétique B_x en fonction de x et y.....	59
Fig. IV.7 Composante normale de l'induction magnétique B_y en fonction de x et y.....	60
Fig. IV.8 Induction magnétique B en fonction de la longueur de la plaque x.....	60
Fig. IV.9. Induction magnétique B en fonction de l'épaisseur de la plaque y.....	61

Fig. IV.10 Contour des courants induits dans la pièce à chauffer.....	61
Fig. IV.11 Contours des courants induits dans la pièce à chauffer pour $f=1$ kHz et $V=0.25$ m/s..	62
Fig. IV.12 Densité des courants induits en fonction de x pour ($y=y_1$, $V=0.25$ m/s et $f=50$ Hz).....	62
Fig. IV.13 Densité des courants induits en fonction de y pour ($x=0$, $V=0.25$ m/s, $f=50$).....	63
Fig. IV.14 Densité de courant induit en fonction de x pour différentes fréquences	63
Fig. IV.15 Densité de courant induit en fonction de y pour différentes fréquences.....	64
Fig. IV.16 Densité de courant induit en fonction x pour différentes vitesses.....	64
Fig. IV.17 Densité de courant induit en fonction de y pour différentes vitesses.....	65
Fig. IV.18 Densité de puissance en fonction de x pour ($f=50$ Hz, $V=0.25$ m/s).....	65
Fig. IV.19 Densité de puissance en fonction de l'épaisseur de la plaque y	66
Fig. IV.20 Densité de puissance en fonction de la fréquence pour différente valeur de y	67
Fig. IV.21 Puissance totale de chauffe en fonction de la fréquence pour ($V=0.25$ m/s).....	67
Fig. IV. 22 Densité de puissance en fonction de y pour différents matériaux.....	68
Fig. IV.23 Puissance totale de chauffe en fonction de la vitesse pour ($f=50$ Hz)	68
Fig. IV.24 Puissance totale de chauffe en fonction du rapport $(y_2+e/2)/y_1$ pour différentes f	69
Fig. IV.25. Puissance totale de chauffe en fonction du rapport $(y_2+e/2)/y_1$ pour différentes v	69
Fig. IV.26 Puissance totale de chauffe en fonction de la distance entre deux bobines b	70
Fig. IV.27. Puissance totale de chauffe en fonction de la distance entre deux bobines b	70
Fig. IV.28. Dimensions de la plaque métallique.....	71
Fig. IV. 29 Répartition de la température dans la plaque à l'instant $t=5$ s	72
Fig. IV.30 répartition de la température dans la plaque à l'instant $t=50$ s	72
Fig. IV.31 Evolution de la température en fonction du temps à la surface de la plaque.....	73
Fig. IV.32 Evolution de la température en fonction du temps au centre de la plaque.....	73
Fig. IV.33 Evolution de la température en fonction du temps au point situé au milieu	74
Fig. IV.34 Profil de la température en fonction de l'épaisseur de la plaque y	74
Fig. IV.35 Profil de la température en fonction de l'épaisseur de la plaque y à $t=50$ s (Zoom).....	75
Fig. IV.36 Profil de la température en fonction de la longueur de la plaque x	75
Fig. IV.37 Profil de la température en fonction de la longueur de la plaque x à $t=50$ s (Zoom).....	76
Fig. IV.38 Température au centre de la plaque en fonction de la vitesse	77
Fig. IV.39 Température au centre de la plaque en fonction de la fréquence.....	77
Tableau. II.1 analogie thermoélectrique.....	34
Tableau. IV.1 paramètres géométriques et physiques du dispositif étudié	56

Liste des symboles

$\vec{E}(X,t)$: Champ électrique (V/m)

$\vec{D}(X,t)$: Induction électrique (Coulomb/m²)

$\vec{H}(X,t)$: Champ magnétique (A/m)

$\vec{B}(X,t)$: Induction magnétique (T)

$\vec{A}(X,t)$: Potentiel vecteur magnétique (w/m)

$\vec{J}$: Densité des courants induits (A/m³)

J_{sn} : La densité superficielle de courant équivalente (A/m)

R : Résistance électrique (Ω)

I : Intensité de courant (A)

f : Fréquence de la source d'alimentation (Hz)

τ : définit le pas polaire

ω : Pulsation électrique (Rad/s)

$k = \frac{\pi}{\tau}$ Représente la pulsation spatiale (rad/m)

ρ_s : Densité de charge volumique (coulomb/m³)

μ_0 : Perméabilité magnétique du vide. (H.m⁻¹)

ε_0 : Permittivité électrique du vide. (F. m⁻¹)

χ_m : Susceptibilité magnétique (H .m⁻¹)

χ_e : Susceptibilité électrique (F. m⁻¹)

v : vitesse linéaire de translation du corps métallique (m/s)

σ : Conductivité électrique du matériau (S)

ρ : Masse volumique (kg/m³)

C_p : Chaleur massique J/ (kg.K)

T : Température (°C)

k : Conductivité thermique du milieu (W/ (m .K))

P : Densité de puissance générée par effet Joule (W/m³)

h_c : Coefficient de transfert de chaleur par convection

η : Constante de Stephan-Boltzmann

γ : Facteur d'émission de la surface

δ : désigne l'impulsion de Dirac.

G : est la fonction de Green.

$[G]$: Matrice des conductances thermique.

$[\theta]$: Le vecteur des températures inconnues.

$[Q]$: Le vecteur de source de chaleur.

Abréviations

TW: flux transverse

TWIH: transverse waves induction heating

Introduction générale

Introduction générale

Le chauffage par induction est de plus en plus utilisé pour les procédés industriels nécessitant des opérations de chauffage. Il constitue un thème de recherche et développement d'actualité grâce au développement de nouvelles structures de chauffage liées à des technologies modernes. Des approches de modélisation et d'analyse des systèmes de chauffage par induction sont alors nécessaires. Plusieurs travaux se sont déjà préoccupés du comportement des dispositifs classiques de chauffage par induction [1], [2], [3].

Le principe du chauffage par induction consiste à chauffer des objets métalliques au moyen de l'effet Joule ; résultant des courants induits créés par un champ magnétique variable établi par un inducteur. Les applications sont très nombreuses, qu'il s'agisse de traitement thermique de surface, ou de procédés de formage. La mise au point de ces procédés de chauffage nécessite l'apport de la modélisation, qui fait intervenir plusieurs phénomènes physiques. L'efficacité de ce genre de procédés est liée à la puissance transférée de l'inducteur à l'objet à chauffer et à la résistivité et à la perméabilité magnétique du matériau traité. Pour les matériaux à base de l'acier magnétique, le rendement peut atteindre 80 à 90 % au-dessous de la température de curie et reste relativement important (environ 65 à 70%) au-dessus de cette température [2]. Contrairement, au chauffage des pièces non magnétiques à base de matériaux conducteurs comme l'aluminium et le cuivre, le rendement n'est que de 50% [3]. En effet, il est difficile de chauffer des matériaux bons conducteurs avec les dispositifs classiques de chauffage (alimentation à fréquence variable).

Un nouveau concept a été récemment proposé où la plaque conductrice est soumise au mouvement de translation dans un champ magnétique variable dans le temps [3, 4]. En plus de l'effet de la variation du champ dans le temps, la translation de la plaque crée aussi des courants induits et engendre une puissance thermique par effet Joule [5]-[6]-[7]. Dans ce mémoire de magister, nous proposons d'analyser une structure de chauffage par induction de plaque d'aluminium en utilisant un inducteur à enroulements triphasés. Dans cette topologie, la plaque est soumise à un mouvement de translation linéaire à l'intérieur de l'inducteur plan. L'apport de notre travail réside dans la modélisation des deux phénomènes électromagnétique et thermique en considérant un couplage faible. Les modèles qu'on cherche à développer doivent être simples, précis et peuvent être facilement intégrés dans des processus de conception et d'optimisation.

La topologie de la structure étudiée permet d'imaginer des modèles basés sur des résolutions analytiques pour déterminer : les courants induits et la puissance de chauffe (Problème Magnétodynamique) et le profil de la température dans la pièce à chauffer thermique (Problème thermique). Les modèles analytiques ainsi développés seront validés par la méthode des éléments finis.

Notre mémoire est structuré en quatre chapitres:

Le premier chapitre dressera tout d'abord un panel des principaux types de chauffage par induction. Puis nous présenterons l'architecture, le principe de fonctionnement ainsi que les principaux modes de chauffage par induction. Les caractéristiques et les paramètres de réglage seront aussi rappelés ainsi que les avantages apportés par cette technique.

Dans le deuxième chapitre nous détaillons, dans une première partie, la géométrie et la physique du dispositif à étudier. En utilisant les équations de maxwell et moyennant quelques hypothèses, nous établissons les formulations mathématiques régissant le modèle magnétique. De même pour l'équation de la diffusion thermique, une formulation du problème est donné en bidimensionnelle. Ensuite nous citons quelque outil de résolution de ces équations.

Au troisième chapitre nous présentons une méthode de résolution basées sur des solutions analytiques des équations décrivant le comportement magnétothermique des dispositifs de chauffage par induction à structure plane. Le travail consiste à développer une résolution analytique du modèle magnétodynamique pour déterminer les courants induits dans la pièce à chauffer. C'est à travers la densité de puissance de chauffe, qui en résulte et constituant le terme source du problème thermique, que le modèle magnétodynamique sera faiblement couplé au modèle thermique donnant ainsi le profil de la température dans la pièce à chauffer.

Dans le quatrième chapitre, la validation et l'exploitation des modèles analytiques développés sur une application de chauffage par induction à flux transverse (TFIH) est abordé. Nous présentons quelques résultats donnant l'évolution des différentes grandeurs électromagnétiques et thermiques, qui constituent les caractéristiques du dispositif de chauffage étudié.

Nous achevons notre mémoire par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre I

Généralités sur le chauffage par induction

I.1.Introduction

L'industrie cherche toujours à tirer les meilleurs avantages des traitements thermiques. C'est pourquoi on s'intéresse aujourd'hui de plus en plus au traitement thermique obtenu entre autres avec le chauffage par induction. Ce dernier, qui est de plus en plus utilisé dans les procédés industriels nécessite l'apport de la modélisation, qui fait intervenir plusieurs phénomènes physiques comme l'électromagnétisme et la thermique. Par conséquent, un rappel de notions générales sur le chauffage par induction est essentiel afin de bien formuler l'idée sur l'intérêt et la place de cette étude.

Dans ce chapitre, nous présentons le principe de base du fonctionnement d'un dispositif de chauffage par induction, les caractéristiques et les paramètres de réglage ainsi que les avantages économiques apportés par ce type de chauffage. A partir des différentes applications industrielles du chauffage par induction, nous donnons la problématique retenue dans ce travail.

I.2. Historique

Les premiers brevets de chauffage par induction semblent remonter à 1893, avec le four de Ferranti. Il s'agissait, au départ, d'usages essentiellement destinés à la métallurgie. A la fin de la première guerre mondiale, on obtint par ce procédé des températures de l'ordre de 3000°C , ce qui permit de développer le traitement thermique des pièces métalliques, la cémentation, la trempe des pièces d'acier, ou encore la soudure et la brasure par induction [8].

Par la suite l'induction gagna les industries chimiques et alimentaires : on se mit à fabriquer des colles, des vernis et même du caramel dans les réacteurs à induction, sortes de grandes cuves qui chauffent à leur tour les matières qu'elles contiennent.

Enfin, les cuisines ont vu l'apparition récente des plaques à induction, qui chauffent les casseroles tout en restant froides.

I.3. Définitions et principe de fonctionnement

Le chauffage par induction électromagnétique fait partie des techniques électrothermiques qui permettent de chauffer un matériau sans contact direct avec une source d'énergie électrique [9]. Son principe est essentiellement basé sur deux phénomènes physiques bien connus [10] :

- L'induction électromagnétique ;
- L'effet joule.

Tout objet conducteur parcouru par un courant variable dans le temps crée un champ magnétique. Si on met dans ce champ un autre conducteur, il deviendra à son tour le siège d'un courant induit, qui produira de la chaleur par effet Joule. Tout se passe comme si l'induction injectait de l'énergie dans un matériau conducteur, mais sans contact. Par différents modes de transfert de chaleur, le conducteur voit après une période transitoire sa distribution permanente de la température.

I.3.1 Composants du chauffage par induction

En pratique, dans une installation de chauffage par induction, le composant chauffé, appelé aussi charge ou induit, est plongé dans un champ électromagnétique créé par un courant excitateur circulant dans un inducteur (Fig. I.1) [11].



Fig. I.1 un système typique de chauffage par induction

Les applications du chauffage par induction ne se limitent pas au cas, certes le plus courant, d'un corps placé à l'intérieur d'un solénoïde, mais peuvent faire appel à des configurations très variées d'inducteurs et de positions relatives de la pièce à chauffer par rapport à l'inducteur (Fig. I.2) [12].



a- Chauffage d'un trou oblong avec inducteur à mandrin elliptique



b- Chauffage d'un raccord avec inducteur à tunnel

Fig. I.2 autres formes de chauffage par induction [12]

I.3.2 Induction électromagnétique

Les phénomènes d'induction électromagnétique furent découverts par Faraday en 1831. Les courants permanents produisent des champs magnétiques, et c'est en cherchant expérimentalement à mettre en évidence, Faraday découvrit l'effet des variations de flux magnétique à travers un circuit [13].

I.3.2.1 Loi de Faraday

La loi de Faraday s'énonce ainsi : un circuit fermé traversé par un flux magnétique variable ϕ est le siège d'une force électromotrice d'induction [14]:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (\text{I.1})$$

Le signe moins traduit la loi de Lenz : le courant induit s'oppose par ses effets à la variation de flux qui lui a donné naissance.

I.3.2.2 Courants induits

Ces courants prennent naissance dans un volume conducteur qui est :

- Soit mobile dans un champ magnétostatique ;
- Soit fixe dans un champ magnétique variable.

Le volume conducteur peut être considéré comme formé d'une infinité de petits circuits dans lesquels prennent naissance des courants induits. Alors, si on suppose le volume conducteur immobile et placé dans un champ magnétique variable, le champ électromoteur est :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \vec{B} \quad (\text{I.2})$$

$\vec{A}$: Potentiel vecteur magnétique introduit plus tard.

Soit $\vec{J}$ la densité des courants induits, donnée par :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}_m = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{I.3})$$

Où σ représente la conductivité électrique du volume conducteur.

On voit ainsi que les courants induits sont d'autant intenses que le matériau est conducteur.

Les effets des courants induits sont de deux natures :

- Effets mécaniques
- Effets calorifiques

I.3.3 Effet Joule

Cet effet est la cause directe de l'effet calorifique cité précédemment. En fait, le

courant électrique est assuré par le déplacement des charges libres, ces charges sont obstruées par les atomes constitutifs du milieu dans lequel elles se déplacent, en résultant des chocs et des frottements qui produisent un dégagement de chaleur [14].

On dénomme pertes Joule ou pertes ohmiques l'énergie thermique produite dans un conducteur par le passage d'un courant électrique.

I.3.3.1 Loi de Joule

La puissance électrique transformée en chaleur par un courant circulant dans une résistance est proportionnelle au carré de ce courant, et à la valeur de cette résistance :

$$P = R.I^2 \quad (I.4)$$

Avec :

P : Puissance dissipée par effet Joule

R : Résistance électrique

I : Intensité de courant

I.4. Caractéristiques du chauffage par induction

Dans une application de chauffage par induction, l'efficacité thermique et énergétique est caractérisée par les différentes grandeurs essentielles suivantes:

I.4.1. Profondeur de pénétration

Une caractéristique générale des courants alternatifs est de ne pas utiliser toute la surface utile des conducteurs pour circuler. Il apparaît, en effet, qu'ils se concentrent sur la périphérie des conducteurs : c'est l'effet de peau. Ainsi, les courants induits dans le matériau à chauffer sont plus importants en périphérie qu'au coeur de l'objet.

Une profondeur de pénétration est donc définie comme l'épaisseur de la couche surfacique dans laquelle circule 87% de la puissance générée [10], elle permet en effet de quantifier l'importance de ce phénomène qui dépend des propriétés physiques du matériau et de la fréquence d'alimentation:

$$\sqrt{\frac{1}{\pi \cdot f \cdot \sigma \cdot \mu}} \quad (I.5)$$

Avec :

μ : Perméabilité magnétique

f : Fréquence de la source d'alimentation

I.4.2. Puissance dissipée dans la charge

En parallèle à la profondeur de pénétration, il est nécessaire de s'intéresser à la puissance dissipée dans la charge, dans le cas général, la densité volumique de la puissance instantanée dissipée par effet Joule peut être exprimée, en fonction de la densité des courants induits, par l'expression suivante [12]:

$$P(t) = \frac{1}{\sigma} |J(t)|^2 \quad (I.6)$$

La moyenne de cette densité est donnée par :

$$P_m = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(t) dt \quad (I.7)$$

Ces formules montrent que la puissance augmente avec l'augmentation de la fréquence. Elle dépend aussi du carré du courant induit, donc du carré du courant inducteur. Ainsi, la puissance totale dissipée par effet Joule au niveau de la charge à chauffer sera :

$$P_{tot} = \iiint_v P(t) dv \quad (I.8)$$

I.4.3. Rendement électrique

Le rendement électrique est défini par [10]:

$$\eta_e = \frac{p}{p + p_i} \quad (I.9)$$

Ou p et p_i représentent respectivement la puissance induite dans la charge et la puissance dissipée dans l'inducteur. Dans le cas d'une charge cylindrique, ce rendement est fortement influencé par la relation diamètre/profondeur de pénétration. Ainsi, la géométrie et la nature de l'inducteur sont importantes, pour cela, des points essentiels sont suivis :

- Pour l'inducteur, l'utilisation d'un matériau de faible résistance est convenable. Le cuivre est généralement utilisé.
- La distance entre l'inducteur et la charge -entrefer- soit le plus petit possible.
- Les spires soient les plus jointifs possibles.

I.5. Paramètres de réglage

Selon l'application voulue, on dispose dans le procédé de chauffage par induction de certains paramètres accessibles à l'utilisateur et qu'on appelle paramètres de réglage :

a- La fréquence

Le chauffage par induction nécessite un réglage de la fréquence durant le traitement thermique. On distingue habituellement les plages de fréquence suivantes [9] :

- Basse fréquence : de 50 Hz à 1000 Hz
- Moyenne fréquence : de 1 kHz à 35 kHz
- Haute fréquence : de 35 kHz à 5 MHz

b- Amplitudes des courants inducteurs

Etant donné que la puissance dissipée dans la charge dépend du carré des courants induits. De cet effet, le réglage de l'intensité des courants inducteurs apparaît essentiel pour chaque application du traitement thermique.

c- Temps d'exposition

Le temps d'exposition ou d'échauffement est un facteur essentiel dans le chauffage par induction, on peut le changer selon le type d'application. Ainsi, il peut dépendre du matériau traité et de la fréquence utilisée.

I.6. Avantages technologiques et économiques du chauffage par induction

Parmi les avantages qui ont poussés les industriels à utiliser des installations de chauffage par induction on peut citer [16]:

- *la capacité à créer de haute intensité de chaleur très rapidement à des endroits bien précis sur la pièce;*
- *les systèmes à induction nécessitent habituellement beaucoup moins du temps de démarrage et d'arrêt et de moindre coût du travail pour les opérateurs ;*
- *D'autres facteurs importants du chauffage par induction incluent une assurance de la qualité, une capacité d'automatisation, une haute fiabilité, et une facilité de maintenance de l'équipement ;*
- *le chauffage par induction peut être utilisé en ligne avec d'autres opérations technologiques. Cela permet d'économiser le temps de transport des pièces chauffées d'une partie de l'usine à l'autre ;*

I.7. Applications industrielles

La technologie de chauffage par induction permet de chauffer des zones sélectionnées dans une partie, ou un élément ciblé, ou bien toute la pièce. Nous citons dans ce paragraphe les différentes applications industrielles du chauffage par induction.

I.7.1. Fusion

La fusion est le passage d'un corps solide à l'état liquide sous l'action de la chaleur.

A ce stade, un point d'actualité que les progrès de l'électronique de puissance permettent l'usage de fours à différentes valeurs de la fréquence, dont les plus répandus sont [17], [18]:

a- Four à creuset

Il est constitué essentiellement d'une bobine inductrice refroidie par circulation d'eau entourant un garnissage en matériau réfractaire qui forme un creuset, dans le quel se trouve la masse métallique à fondre (figure I.3).

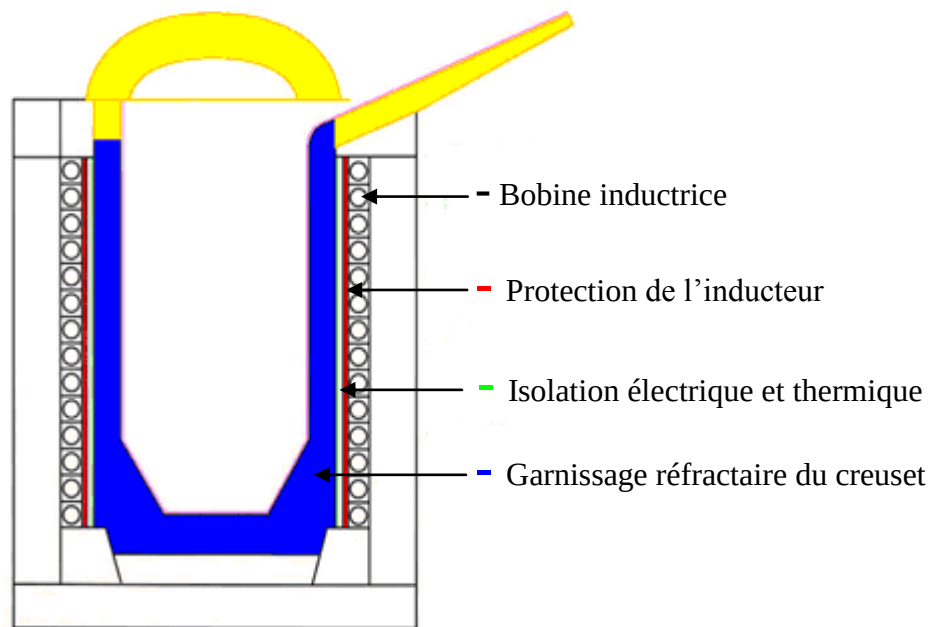


Fig. I.3. Schéma représentatif d'un four à creuset

Le four doit présenter des caractéristiques prenant en compte les exigences de rentabilité inhérentes au type de fonctionnement choisi. En effet, les fours à bobine longue (80 % de la hauteur) sont utilisés plus particulièrement pour la fusion d'aciers spéciaux ou d'alliages de cuivre ou d'aluminium, tandis que les fours à bobine courte sont réservés au maintien en température du métal liquide. Ainsi, la puissance de ce four va de quelques kW (fusion des métaux précieux) jusqu'à une dizaine de MW, comme il peut atteindre des capacités de plusieurs dizaines de tonnes.

Nous signalons encore que le creuset et la bobine inductrice peuvent être placés dans une enceinte sous vide ou sous atmosphère contrôlée, pour la réalisation de coulées spéciales.

b- Four à canal

Ce type de four utilise un transformateur possédant un noyau de fer qui entoure un canal rempli du métal fondu, comme l'indique la figure I.4. Dans ce four, le canal est constitué d'un tuyau en céramique monté en dessous du bac de métal fondu. Le primaire du transformateur est excité par une source d'alimentation et le courant secondaire I_2 circule dans le canal et dans le bain, qui agissent comme une spire en court-circuit. Il est particulièrement utilisé pour le maintien de la température de l'acier et de la fonte et pour la fusion des alliages cuivreux ou d'aluminium.

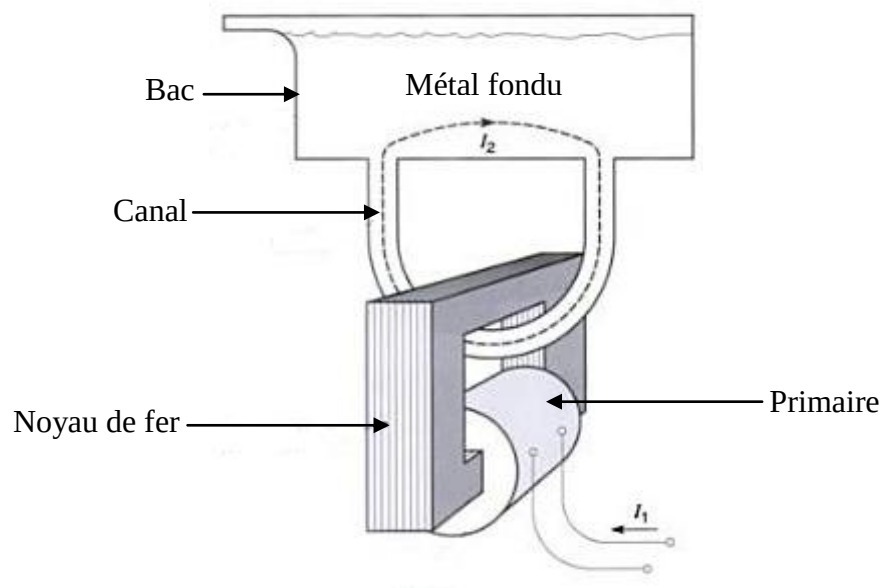


Fig. I.4. Schéma représentatif d'un four à canal

I.7.2. Soudage

Le soudage consiste à ramollir suffisamment par chauffage la couche de surface des deux pièces à réunir pour favoriser leur interpénétration et leur assemblage lors du refroidissement [19]. A ce stade, le phénomène d'induction est utilisé principalement pour le soudage des tubes.

Le procédé du soudage par induction consiste, en effet, à intercaler entre les deux parties à assembler deux rivets. Seuls ces deux rivets subissent l'action de chauffage par induction. En fusionnant les deux pièces chauffées à la surface intérieure en contact avec les deux rivets l'assemblage ainsi obtenu après refroidissement est similaire à celui résultant d'une soudure par points.

En effet, la moyenne et la haute fréquence sont utilisées dans cette technique. Cependant, l'utilisation de la haute fréquence permet d'obtenir une localisation du chauffage en surface des rivets à souder, ce qui donne des vitesses de soudure élevées et des cordons de

soudure très réduits avec des puissances surfaciques comprises entre 100 et 1000 MW/m² [19].

I.7.3. Brasage

Le chauffage par induction est largement utilisé pour le brasage, qui consiste à joindre des pièces avec matière d'apport ayant une température de fusion inférieure à celui des métaux à braser. Il permet en effet de localiser avec précision l'effet thermique nécessaire à la fusion du métal d'apport.

Les métaux peuvent être brasés fortement ou tendrement. Le brasage fort utilise des baguettes d'argent, de cuivre, laiton..., comme métal d'apport selon usage. Leur point de fusion varie de 600 à 900 °C selon la nature de la brasure. Dans le brasage tendre, les métaux sont assemblés à l'aide d'un métal d'apport à base d'étain caractérisé par un point de fusion inférieur à 450° C. Ainsi, il est à noter que les joints obtenus par un brasage tendre sont moins solides que ceux réalisés en brasage fort.

Les applications du brasage par induction sont nombreuses : assemblage de différentes pièces en construction électrique, électronique et mécanique de précision. Les avantages de ce procédé sont plus importants lorsque les composantes à assembler sont de faibles dimensions ou les opérations répétitives sont facilitées par l'automatisation [19].

I.7.4. Collage

Le collage par induction devient une méthode d'assemblage de plus en plus courante. Le principe consiste à accélérer la polymérisation de la colle en chauffant par induction les parties à coller. Les températures à atteindre sont généralement faibles (150 à 300°C). La température et la durée de maintien déterminent la solidité du lien créé. Ce procédé est aujourd'hui très largement utilisé dans la fabrication des pièces de carrosserie automobile (portes, capots, hayons...). Des liaisons métal-polyester peuvent être également traitées par induction.

I.7.5. Séchage et chauffage de corps non conducteurs d'électricité

Le séchage repose sur deux mécanismes : le transfert d'eau et le transfert thermique. Pour les corps non conducteurs d'électricité, il est possible de les chauffer indirectement en utilisant un susceptible conducteur d'électricité. Le matériau le plus utilisé comme susceptible est le graphite, mais des métaux peuvent également être employés. Comme exemple d'application, des cylindres chauffés par induction sont utilisés pour le séchage de papier de très haute qualité ou de textiles spéciaux [20].

I.7.6. Plasma inductif

Le plasma est un gaz ionisé qui est considéré comme le quatrième état de la matière suivant les états solides, liquides et gazeux. L'ionisation d'un gaz enveloppant un arc électrique, produit entre deux électrodes, est l'un des procédés industriels utilisé pour générer un plasma, on parle du plasma d'arc [15].

Le plasma inductif est caractérisé par une absence totale d'électrodes, le transfert d'énergie de la source au plasma étant effectué par couplage inductif. Le principe de fonctionnement est tout à fait similaire à celui du chauffage des métaux par induction. Cependant, la charge, c'est-à-dire le gaz plasmagène, a une conductivité électrique nettement plus basse que celle de la majorité des métaux [20]. L'absence de contact entre le plasma et les parois solides de l'enceinte fait du plasma inductif un outil idéal pour le travail de produits de haute pureté.

La figure (I.5) représente un exemple d'une torche à plasma. Elle est constituée de doigts de cuivre creux dans lesquels circulent de l'eau pour assurer le refroidissement.

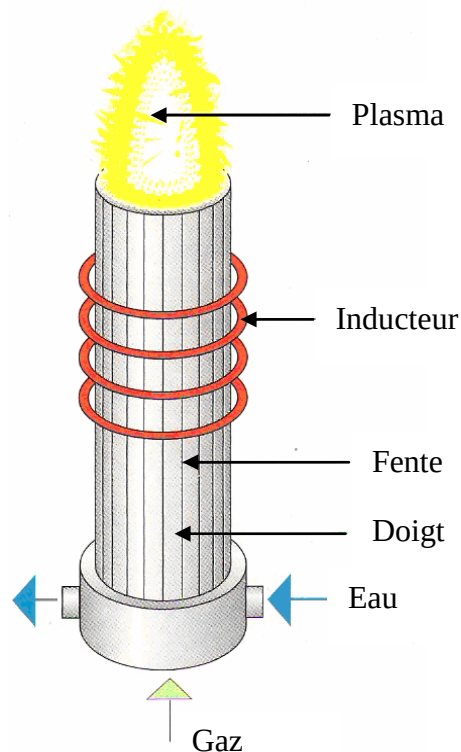


Fig. I.5 Torche à plasma inductif à cage froide métallique

Cette technique s'applique dans des cas très particuliers : par exemple aux surfaces convexes telles que les points, les dents, les aiguilles, ... etc.

I.7.7. Industrie chimique

Depuis une vingtaine d'années, l'induction est utilisée comme moyen de chauffage des parois de réacteurs chimiques [17]. Les inducteurs alimentés à 50 ou à 1000 Hz sont répartis sur le fond et les parois du réacteur. Celles-ci sont en acier inoxydable massif ou en acier émaillé à l'intérieur. Le système classique de double enveloppe est remplacé par une circulation d'eau dans des tubes en inox en forme de demi-coquilles soudés sur la paroi. On trouve ce type de réacteur dans la fabrication des résines, des cosmétiques et dans l'industrie pharmaceutique.

I.7.8. Cuisson

La cuisson à induction est utilisée largement au cours des dix dernières années. Elle fonctionne, par définition, grâce à un inducteur placé sous forme de bobines de cuivre, en dessous d'une plaque en vitrocéramique. L'inducteur est alimenté par une source de puissance à moyenne fréquence (20 kHz) produisant un champ électromagnétique, ce qui induit des courants dans le métal du récipient posé sur la plaque. Ce récipient se trouve donc chauffer par effet Joule.

Même si elle nécessite un investissement initial relativement coûteux, cette technique de cuisson présente des avantages nombreux, elle allie en plus de la sécurité : la rapidité, la précision, la souplesse, l'économie, le confort de travail et un nettoyage facile et rapide.

I.7.9. Autres applications

Les principales applications du chauffage par induction sont décrites précédemment. Néanmoins, ils restent plusieurs d'autres, on cite par exemple :

- Traitement des déchets nucléaires
- Fabrication de semi-conducteurs et de fibres optiques
- Thermoformage des plastiques
- Graphitisation (balais de machines électriques)

I.8. Différentes modes de chauffage

I.8.1 Traitement thermique d'un objet fixe ou mobile

Le traitement thermique par induction est un procédé répandu et important. En effet, il permet aussi bien le chauffage à cœur des métaux et leur traitement superficiel (Fig. I.6). Ces opérations sont valables quelque soit l'état de l'induit (fixe au mobile).



a- chauffage des tubes métalliques en mouvement

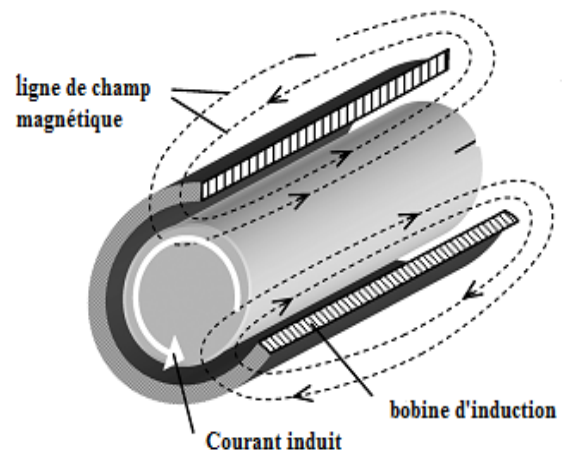
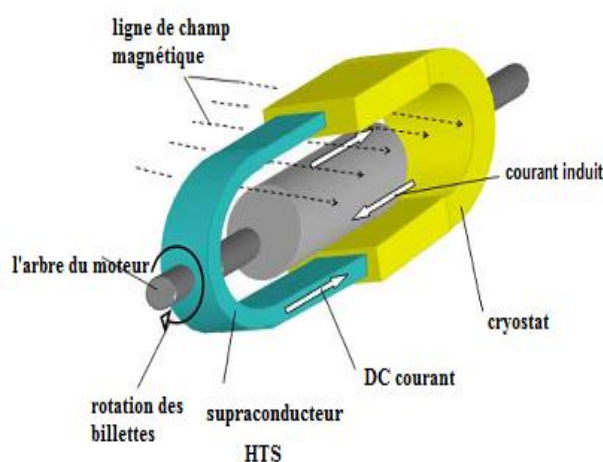
b- chauffage des plaques métalliques en mouvement

Fig. I.6 Différentes modes de chauffage par induction

a- Traitement thermique à cœur

Ce type de chauffage s'effectue normalement à la fréquence minimale autorisant encore un bon rendement du procédé inductif. La fréquence nécessaire est ainsi d'autant plus basse que la pièce est plus volumineuse. D'une façon générale, en chauffage à cœur, la pénétration de la chaleur par conduction thermique est un phénomène primordial. Parmi ces traitements, il faut signaler le recuit en continu des soudures des tubes longitudinal, le recuit et le chauffage avant la trempe de barres.

Les puissances mises en jeu peuvent être importantes, de l'ordre de 1000 à 2000 kW pour des tubes de 10 à 12 mm d'épaisseur et des vitesses de traitement de l'ordre de 20 à 30 m/min.



a- Chauffage avec charge en mouvement et supraconducteur

b- Chauffage classique à alimentation variable

Fig. I.7 Chauffage à cœur d'une billette en mouvement

Pour le chauffage à cœur l'induction présente les avantages particuliers suivants :

- Bon réglage et précision de la température ;
- Rapidité de chauffe avec oxydation réduite ;
- Meilleure régularité de chauffe ;
- Productivité rapide et économique avec une meilleure qualité.

b- Traitement de surface

Le procédé du traitement de surface par induction s'effectue essentiellement à l'aide de générateurs à haute ou moyenne fréquence. Il permet de développer dans la couche superficielle des pièces à traiter, des densités de puissance maximales de l'ordre de $1\,000\text{ W/cm}^2$, à comparer aux 25 W/cm^2 , d'un chauffage par rayonnement classique. Il en résulte des vitesses de montée en température relativement rapides [21].

La forme de l'inducteur s'adapte généralement à la forme de la pièce ou à une zone de celle-ci que l'on désire tremper superficiellement. La trempa peut se faire au défilé ou statiquement. Au défilé, l'inducteur est composé d'une seule spire et en statique il couvre toute la surface à tremper.

Les caractéristiques les plus marquantes du traitement de surface par induction sont les suivantes :

- Echauffement limité à la pièce à traiter et même à certaines parties de la pièce ;
- Chauffage local de pièces de forme compliquée ;
- Régularité assurée par la possibilité de régler avec précision le temps et la température.

I.8.2 préformage avec et sans mouvement de l'induit

Les effets thermiques et mécaniques engendrés dans les circuits magnétiques de certaines machines électriques comme les transformateurs, constituent une contrainte sévère du fonctionnement normal. Ils sont à l'origine de pertes et de vibrations qu'il faut minimiser. Par contre, pour d'autres machines, comme les moteurs à induction, les courants induits sont souhaitables pour produire des forces magnétiques. Dans certaines applications, ces pertes sont utilisées pour produire de la chaleur comme le chauffage par induction et dans d'autres ces deux effets sont combinés, c'est le cas de chauffage avant formage ou les courants sont induits pour produire de la chaleur. Une fois le matériau devenu déformable les forces répulsives produites, de la même manière que la chaleur, lui donnent la forme désirée.

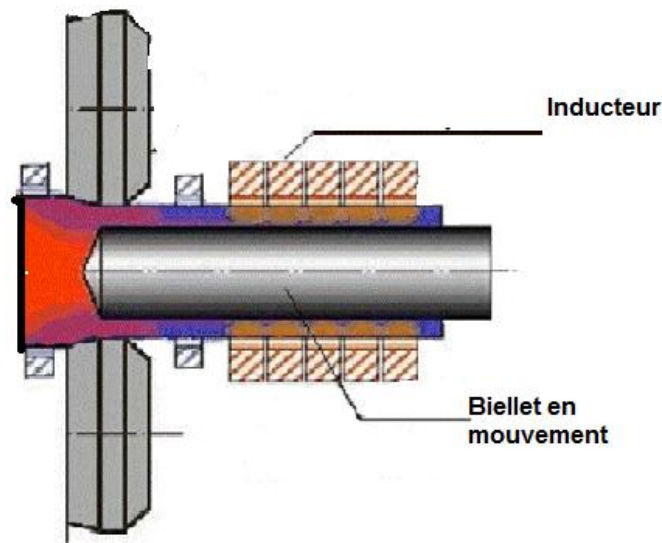


Fig. I.8 Chauffage avant formage des pièces conductrices en mouvement

I.8.3 Durcissement des matériaux (Cas des matériaux magnétique)

Les aciers dont le pourcentage de carbone est supérieur à 0,3% sont adaptés aux traitements de durcissement de surface. La pièce est d'abord portée à une température de 900°C puis brusquement refroidie. Cette technique est utilisée pour le durcissement des aciers des pignons de boîte à vitesses, des vilebrequins, des soupapes, des lames de scie, des rails et bien d'autres applications. Les densités de puissance mises en jeu pour les applications de durcissement par induction sont de l'ordre de 1.5 à 5kW/cm² [10].

Le durcissement par induction est particulièrement appliqué pour les procès automatisés avec des volumes de production élevés. Grâce au chauffage par induction, une production constante et de bonne qualité peut être atteinte. La consommation énergétique et les pertes de production sont plus faibles que pour les techniques de chauffage conventionnelles.

I.9. Problématique retenue

D'après les modes de chauffage cité précédemment, pour les matériaux à base de l'acier magnétique, le rendement peut atteindre 80 à 90 % au-dessous de la température de curie et reste relativement important (environ 65 à 70%) au-dessus de cette température [2]. Contrairement, au chauffage des pièces non magnétiques à base de matériaux conducteurs comme l'aluminium et le cuivre, le rendement n'est que de 50% [3]. En effet, il est difficile de chauffer des matériaux bons conducteurs avec les dispositifs classiques de chauffage (alimentation à fréquence variable).

Afin d'améliorer le rendement de ce procédé de chauffage par induction des pièces amagnétiques, plusieurs techniques basées sur l'utilisation des supraconducteurs ont été proposées à savoir:

- Remplacer l'inducteur à base de cuivre par des supraconducteurs créant un champ variable et l'objet à chauffer reste fixe ;
- Remplacer l'inducteur à base de cuivre par des supraconducteurs créant un champ constant et soumettre l'objet à chauffer au mouvement.

Cependant, l'utilisation des supraconducteurs reste une technologie compliquée et non maîtrisée.

Dans notre travail nous proposons de modéliser des structures de chauffage par induction à flux transverse. En effet, il s'agit de structures dans lesquelles le flux magnétique est perpendiculairement à la surface des pièces à chauffer.

Nous exploitons dans ce travail l'effet combiné d'un champ magnétique variable créé par un inducteur classique (à base de cuivre) dans lequel se trouve l'objet à chauffer en mouvement. En effet, le mouvement crée des courants induits qui s'ajoute à ceux créés par la variation du champ. Les deux effets engendrent ainsi une puissance thermique par effet Joule.

Dans notre travail, nous nous intéressons à cette configuration de chauffage par induction pour chauffer des structures planes.

I.10. Conclusion

Ce chapitre est consacré à des généralités sur l'utilisation et les applications du chauffage par induction. La synthèse bibliographique effectuée nous a permis de mettre en évidence l'intérêt et l'importance des dispositifs de chauffage par induction dans le domaine industriel.

A partir des types de chauffage existant nous avons retenus une problématique qui consiste à combiner deux effets, pour chauffer des plaques amagnétiques conductrices, le mouvement de la pièce à chauffer et la variation dans le temps du champ inducteur.

Le prochain chapitre fera l'objet des équations mathématiques régissant les phénomènes physiques mis en jeu dans un dispositif de chauffage par induction.

Chapitre II

Equations de la magnétothermique et outils de Résolution

II.1. Introduction

Comme tout système physique, l'étude de dispositifs électrotechniques nécessite généralement l'utilisation d'un modèle mathématique. Il est souvent obtenu sur la base des équations décrivant les phénomènes physiques intervenant. Néanmoins, un nombre d'équations réduit est souvent obtenu au prix d'hypothèses simplificatrices qui, pour certaines applications, ne peuvent être acceptables.

Dans le cas d'un dispositif de chauffage par induction, deux phénomènes fortement couplés sont à étudier :

- la magnétodynamique;
- La thermique (diffusion de la chaleur par conduction).

Dans ce chapitre, nous nous intéressons, d'abord, à la mise en équation de la magnétothermique (équations de diffusions) dans le cas d'une structure de chauffage par induction constitué d'une pièce conductrice en mouvement à l'intérieur d'un inducteur alimenté par une source variable dans le temps. Ensuite, nous donnons l'essentiel des méthodes et techniques de résolution de ces équations.

II.2. Equation de la magnétodynamique

II.2.1 Phénomène électromagnétique

Jusqu'au milieu du 19ème siècle, électricité et magnétisme formaient deux théories distinctes et différenciées de la physique. Il revient à James Clerk Maxwell (1831-1879), physicien écossais d'avoir unifié en 1865 ces deux théories en une seule et unique théorie dite « électromagnétisme ». Mais il serait injuste d'oublier plusieurs physiciens, prédécesseurs de Maxwell, qui ont ouvert la voie à la formulation de la théorie de l'électromagnétisme [22].

Dérivant de la loi de coulomb, le théorème de gauss - loi découvrit en électrostatique - apparaît comme une loi générale. Même chose se dit dans la magnétostatique pour la loi de conservation du flux magnétique qui dérive de la loi de Biot et Savart. Au contraire de ces deux lois générales qui concernent les divergences des champs électrique et magnétique, les relations exprimant les rotationnels de ces deux champs avaient un autre chemin avec les phénomènes dépendants du temps.

II.2.2 Equations de Maxwell

La découverte expérimentale des phénomènes d'induction électromagnétique et l'hypothèse du courant de déplacement de Maxwell ont permis à celui-ci de donner une

formulation générale des lois de l'électromagnétisme sous la forme du groupe d'équations connue sous le nom d'équations de Maxwell [23], [24] :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(X, t) = -\frac{\partial \vec{B}(X, t)}{\partial t} \quad \text{Loi de Maxwell_ Faraday} \quad (\text{II.1})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}(X, t) = \vec{J}_c(X, t) + \frac{\partial \vec{D}(X, t)}{\partial t} \quad \text{Loi de Maxwell_ Ampère} \quad (\text{II.2})$$

$$\text{div} \vec{B}(X, t) = 0 \quad \text{Loi de conservation du flux magnétique} \quad (\text{II.3})$$

$$\text{div} \vec{D}(X, t) = \rho_{\text{libre}}(X, t) + \rho_{\text{liée}}(X, t) \quad \text{Loi de Maxwell_ Gauss} \quad (\text{II.4})$$

Avec :

$\vec{E}(X, t)$: Champ électrique

$\vec{D}(X, t)$: Induction électrique

$\vec{H}(X, t)$: Champ magnétique

$\vec{B}(X, t)$: Induction magnétique

$\vec{J}_c(X, t)$: Densité de courant de conduction

$\frac{\partial \vec{D}(X, t)}{\partial t}$: Densité de courant de déplacement

$\rho_{\text{libre}}(X, t)$: Densité de charge libre

$\rho_{\text{liée}}(X, t)$: Densité de charge de polarisation

Etant donné que ces grandeurs dépendent du temps et de l'espace, par la suite et dans un souci de lisibilité, nous omettrons l'écriture de cette dépendance.

II.2.2.1 Equations constitutives

Les équations de Maxwell sont générales et s'appliquent à tous les milieux. Cependant, elles ne nous permettront pas de définir la situation électromagnétique dans un milieu. De nouvelles relations doivent donc venir compléter ces équations en fonction des propriétés spécifiques des milieux auxquels on les appliquera. De telles relations sont appelées "équations constitutives" [24], [25].

Dans le vide même dans l'air, l'induction et le champ magnétiques, ainsi que l'induction et le champ électriques sont liés par :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{II.5})$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad (\text{II.6})$$

Avec :

μ_0 : Perméabilité magnétique du vide.

ε_0 : Permittivité électrique du vide.

Dans un milieu matériel, les coefficients de proportionnalité dépendent du matériau. On définit le vecteur de l'aimantation $\vec{M}$ et le vecteur de polarisation $\vec{P}$, qui se superposent avec le champ magnétique et électrique pour exprimer l'induction magnétique et électrique dite loi d'aimantation et de polarisation :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad (\text{II.7})$$

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (\text{II.8})$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{II.9})$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{II.10})$$

Avec :

μ : Perméabilité magnétique absolue

ε : Permittivité électrique absolue

$\mu_r = 1 + \chi_m$: Perméabilité magnétique relative

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$: Permittivité électrique relative

χ_m : Susceptibilité magnétique

χ_e : Susceptibilité électrique.

De la nature d'étude, les matériaux peuvent être classés à la base de leur valeur de la susceptibilité, image de la perméabilité relative. A ce stade le diamagnétisme qui a une faible susceptibilité négative se différencie nettement des autres formes, paramagnétisme et ferromagnétisme [26].

- **Matériaux paramagnétiques** : Ils sont caractérisés par une faible susceptibilité positive (donc $\mu_r > 1$). Dans ces matériaux, les moments magnétiques permanents s'alignent sous l'effet d'un champ magnétique. Mais cette orientation ne compense pas l'agitation thermique qui reste prépondérante. En conséquence l'aimantation globale reste faible.

- **Matériaux ferromagnétiques** : Dans cette catégorie, la susceptibilité χ_m est élevée ($\mu_r \gg 1$), positive et variable avec l'excitation magnétique. D'autre part la température influence particulièrement χ_m : au delà de la température de Curie, un matériau ferromagnétique se comporte comme un matériau paramagnétique (figure II.1).

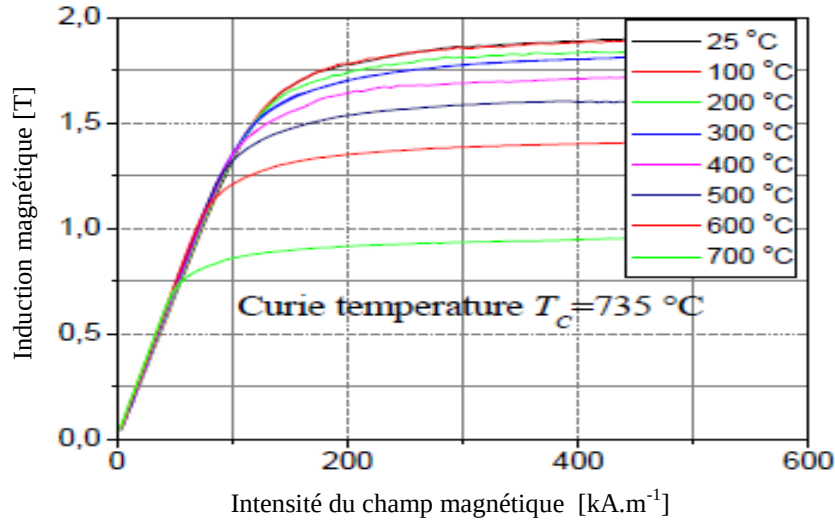


Fig. II.1. Courbes d'aimantation à différentes températures de l'acier 20MoCrS4 [27]

En tenant compte du mouvement des milieux conducteurs, la loi d'ohm locale s'écrit comme :

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{II.11})$$

avec : $\vec{v} = V \cdot \vec{u}$

Elle est connue sous le nom de la loi de Lorentz, avec :

V : vitesse linéaire de translation du corps métallique.

σ : Conductivité électrique du matériau.

Comme ils peuvent être des scalaires, les coefficients de proportionnalité μ, ϵ, σ peuvent être aussi des tenseurs dans le cas des matériaux anisotropes $\overline{\overline{\mu}}, \overline{\overline{\epsilon}}, \overline{\overline{\sigma}}$ [4].

II.2.2.2 Conditions aux interfaces

La figure II.2 présente une surface localement plane, qui sépare deux milieux 1 et 2, qui contient une densité de charge surfacique ρ_s ou une densité de courant surfacique J_s . A la base des équations de Maxwell dans leur forme intégrale, les conditions de passage d'un milieu à un autre peuvent être déduites [28]:

- La relation de continuité de la composante normale de l'induction magnétique $\vec{B}$:

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (\text{II.12})$$

- La relation de discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique $\vec{H}$:

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \quad (\text{II.13})$$

- La relation de discontinuité de la composante normale de l'induction électrique $\vec{D}$:

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \quad (\text{II.14})$$

- La relation de continuité de la composante tangentielle du champ électrique $\vec{E}$:

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (\text{II.15})$$

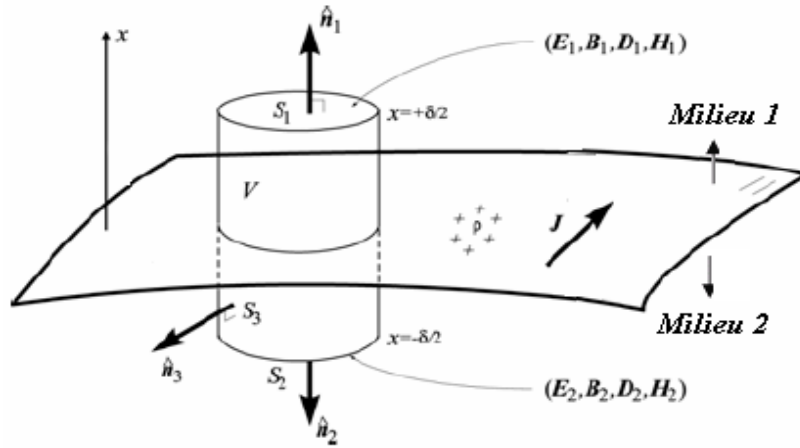


Fig. II.2. Surface et volume d'intégration entre deux milieux

II.2.3 Formulation mathématique du modèle magnétodynamique

Les équations de maxwell décrivent globalement tous les phénomènes électromagnétiques. Mais, à l'heure actuelle, dans la plupart des cas, on ne peut pas les résoudre directement. D'autre part, suivant les dispositifs que l'on étudie, certains phénomènes deviennent négligeables, les équations se découplent alors donnant naissance à des modèles plus simples [30].

La condition de régime quasi-stationnaire réduit le phénomène électromagnétique à un phénomène seulement d'induction. Les équations restent tout de même toujours globales. Dans la plupart des cas, suivant la géométrie des dispositifs que l'on étudie, un choix approprié de la variable nous permet de réduire ce nombre. Les équations se regroupent alors en donnant naissance à des modèles plus simples.

II.2.3.1. Courants induits et courants imposés

Etant décrit précédemment que J_c représente la densité des courants de conduction. Ces derniers peuvent être des courants induits dans la charge ou imposés dans l'inducteur. Cette constatation avec l'approximation des régimes quasi-permanents, qui consiste à négliger les courants de déplacement $\frac{\partial D}{\partial t}$, nous permet de réécrire l'équation (II.2) comme [31], [32]:

$$\vec{rot} \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_s \quad (II.16)$$

Où $\vec{J}$ et $\vec{J}_s$ représentent respectivement la densité de courants induits et la densité de courants sources.

II.2.3.2. Equation de diffusion en termes de potentiel vecteur magnétique et scalaire électrique

Compte tenu de la loi de conservation du flux magnétique (II.3), on peut déduire que l'induction magnétique est le rotationnel d'un vecteur appelé potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ [29], [33] :

$$\vec{B} = \vec{rot} \vec{A} \quad (II.17)$$

Passant par l'équation constitutive (II.8), nous introduisons le potentiel vecteur dans l'équation de Maxwell-Ampère (II.16) :

$$\vec{rot} \left(\frac{1}{\mu} \vec{rot} \vec{A} \right) = \vec{J} \quad (II.18)$$

De même, on peut introduire ce potentiel dans l'équation de Maxwell-Faraday (II.1) :

$$\vec{rot} \vec{E} = -\vec{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (II.19)$$

Cette dernière peut être écrite sous la forme :

$$\vec{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (II.20)$$

Cette équation implique que le terme entre parenthèses dérive d'un gradient d'un scalaire qu'on appellera potentiel scalaire électrique :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{grad} V \quad (II.21)$$

Le champ électrique est alors la somme d'une partie induite (dépendante du potentiel vecteur magnétique) et d'une partie créée par une différence de potentiel électrique (tension) :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V \quad (\text{II.22})$$

Des équations (II.18) et (II.22) en considérant que le potentiel scalaire électrique est nul, ainsi que la loi d'ohm (II.11), on peut aboutir à l'équation de la magnétodynamique. Si nous considérons le mouvement de du milieu conducteur, l'équation généralisée de diffusion électromagnétique s'écrit:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{II.23})$$

La résolution de cette équation ne peut pas se faire sans la considération des conditions aux limites.

II.2.3.3 Conditions aux limites naturelles

Les valeurs d'un champ X à la frontière du domaine satisfait principalement deux relations simples. Il peut être soit de valeur connue soit normal à la surface ce qui se traduit par [29]:

- **Condition de type Dirichlet** : La composante normale de l'induction magnétique ou celle de l'induction électrique est imposée :

$$n \cdot \vec{B} = n \cdot \vec{B}_{ext} \quad (\text{II.24})$$

$$n \cdot \vec{D} = n \cdot \vec{D}_{ext} \quad (\text{II.25})$$

- **Condition de type Neumann** : La composante tangentielle du champ magnétique ou celle du champ électrique est imposée :

$$n \times \vec{H} = n \times \vec{H}_{ext} \quad (\text{II.26})$$

$$n \times \vec{E} = n \times \vec{E}_{ext} \quad (\text{II.27})$$

Ces grandeurs sont, soit naturellement, soit choisies nulles sur certaines frontières particulières.

En termes de potentiel vecteur [30], on annule généralement ce potentiel sur les limites suffisamment éloignées. Sur les plans de symétrie la condition $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ exprime que les lignes de flux sont orthogonales à ces plans. Finalement, le potentiel vecteur impose sa continuité à l'interface de deux milieux de nature différente.

II.3. Equation de la thermique

Le transfert de chaleur est déterminé à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température T . La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Deux grandeurs sont souvent utilisées dans l'étude du transfert de chaleur [37].

II.3.1 Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme (Fig. II.5). La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :

$$\text{grad} \vec{T} = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{II.28})$$

Où $\vec{n}$ représente la normale à la surface isotherme et $\frac{\partial T}{\partial n}$ la dérivée de la température le long de la normale.

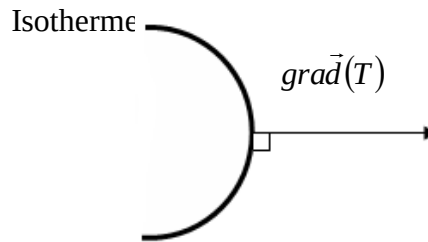


Fig. II.5. Isotherme et gradient thermique

II.3.2 Densité de flux de chaleur

La chaleur s'écoule, sous l'influence d'un gradient de température, par conduction des hautes températures vers les basses. La quantité de chaleur Q transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur ϕ :

$$\phi = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} \quad (\text{II.29})$$

Où S représente l'aire de la surface.

II.3.3. Différents modes de transfert de chaleur

Dans l'étude du transfert thermique, on distingue trois modes de transmission de la chaleur [37], [38]:

a- Conduction

La conduction correspond à un transfert de chaleur sans déplacement de matière entre deux points, à l'intérieur d'un solide, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction s'effectue selon deux mécanismes distincts :

- Une transmission par les vibrations des atomes ou molécules.
- Une transmission par les électrons libres.

b- Convection

Le transfert de chaleur par convection se manifeste entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide.

c- Rayonnement

C'est l'échange d'énergie par le biais d'un rayonnement électromagnétique considéré du point de vue thermique, c'est-à-dire, comme un flux de chaleur. La longueur d'onde de ce rayonnement se situe en général entre 1mm et 0,1 μ m, c'est à dire des infrarouges et jusqu'à l'approche des ultraviolets.

***Remarque :** Généralement, la convection et le rayonnement interviennent comme conditions aux limites dans l'équation de conduction [12].*

II.3.4 Equation de conduction

II.3.4.1 loi de Fourier

La théorie de la conduction obéit à la loi dite de Fourier établie mathématiquement par Jean-Baptiste Biot en 1804, puis expérimentalement par Fourier en 1822. La densité de flux est proportionnelle au gradient de température [39]:

$$\vec{\phi} = -k \text{ grad}(T) \quad (\text{II.30})$$

où k représente la conductivité thermique du milieu.

II.3.4.2 Génération et stockage d'énergie

Une génération d'énergie intervient dans un corps lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. Il est bien établi que dans une application de chauffage par induction, une énergie électrique est convertie en énergie thermique. Ainsi, un stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps. Alors (à pression constante et en l'absence de changement d'état) la densité de flux de chaleur stocké ϕ_{st} est [37]:

$$\phi_{st} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.31})$$

Où ρ et C_p représente respectivement la masse volumique la chaleur massique du corps.

II.3.5 Equation de diffusion thermique

Appliquons le premier principe de la thermodynamique, le bilan énergétique local d'un corps est donné par [4], [37]:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k \text{grad}(T)) + Q \quad (\text{II.32})$$

Si on considère que le corps à chauffer est en mouvement, l'équation régissant le phénomène de transfert de chaleur s'écrit comme suit [2] :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \text{div}(k \text{grad}(T)) + Q \quad (\text{II.33})$$

Le terme $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T$ représente le terme convectif dû au mouvement du corps.

L'équation de diffusion thermique (II.33) s'applique à tous les matériaux. Certains d'entre eux peuvent avoir des propriétés qui dépendent de la température. Ils ont alors un comportement non linéaire [35]. Ainsi, dans le cas des matériaux anisotropes, la conductivité thermique k n'est plus un scalaire, elle devienne un tenseur $\overline{\overline{k}}$ [30].

II.3.6. Conditions initiales et aux limites

Pour la résolution de l'équation (II.33), des conditions initiales et aux limites adéquates sont nécessaires. Les conditions initiales spécifient la distribution de la température à l'instant initiale (début de chauffage $T = T_0$). Les conditions aux limites spécifient les conditions thermiques aux frontières du domaine de calcul. Par exemple, sur une frontière, on peut spécifier la distribution de la température, ou la distribution de la densité du flux thermique, ou un transfert thermique par convection et/ou rayonnement avec le milieu ambiant [40].

II.3.6.1. Conditions aux limites de type Dirichlet

Cette condition revient à imposer une valeur de température sur une frontière donnée:

$$T = T_{\text{imposée}} \quad (\text{II.34})$$

C'est une condition d'isotherme.

II.3.6.2. Conditions aux limites de type Neumann-densité du flux thermique imposé

La condition aux limites de type Neumann correspond à imposer une valeur pour le flux de l'inconnue sur la frontière en question :

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \phi \quad (\text{II.35})$$

Pour une frontière adiabatique (isolée thermiquement) ou un axe de symétrie, on posera $\phi = 0$. Ce type de condition permet aussi de représenter le transfert de chaleur avec le milieu ambiant

- **Echange thermique par convection**

$$\phi = h_c (T_p - T_\infty) \quad (\text{II.36})$$

Avec :

h_c : Coefficient de transfert de chaleur par convection

T_p : Température de surface

T_∞ : Température du milieu environnant

- **Echange thermique par rayonnement**

$$\phi = \eta \gamma (T_p^4 - T_\infty^4) \quad (\text{II.37})$$

Avec :

η : Constante de Stephan-Boltzmann

γ : Facteur d'émission de la surface

T_p : Température de la surface

T_∞ : Température du milieu environnant

II.4. Couplage magnétothermique

La simulation du processus du chauffage par induction s'intéresse au couplage des phénomènes électromagnétique et thermique.

II.4.1. Ordre de grandeurs des deux phénomènes

Le temps d'une période du phénomène électromagnétique peut varier de 10^{-2} s pour une fréquence de 100Hz à 10^{-6} s pour une fréquence de 1MHz. En comparant à l'ordre de grandeur d'un pas de temps du phénomène thermique (de l'ordre de la seconde), nous pouvons dire que le temps caractéristique du phénomène électromagnétique est très petit devant le temps caractéristique du phénomène thermique (Figure II.6). Donc, le du couplage des phénomènes électromagnétique et thermique peut être représenté par un modèle de couplage dit faible. Ce dernier est basé sur une résolution séparée des deux équations régissant ces deux phénomènes.

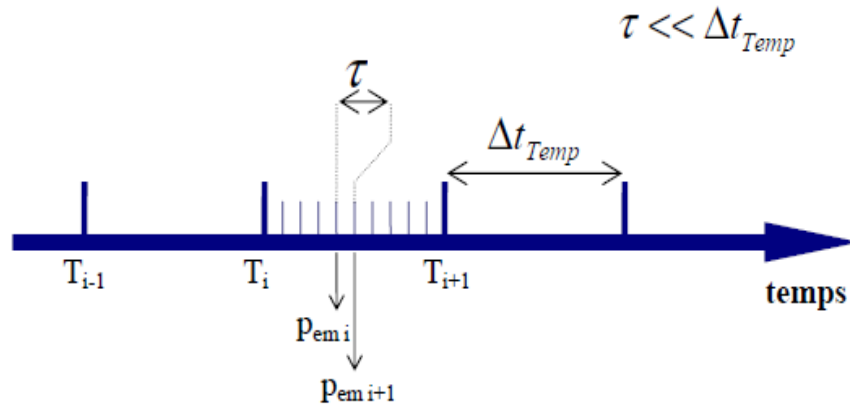


Fig. II.6. Schématisation de la différence d'ordre de grandeur des temps caractéristiques des phénomènes électromagnétique et thermique

II.4.2. Termes de couplage

Etant donné que l'étude du problème magnétothermique dans un chauffage par induction se traduit mathématiquement par la résolution des deux équations de diffusion électromagnétique et thermique. Chacune de ces deux dernières équations influent sur l'autre. Ces deux influences représentent les termes de couplage [41] [42] :

- **Influence de l'équation électromagnétique sur l'équation thermique**

La résolution de l'équation électromagnétique permet de déduire la densité de puissance dissipée par effet Joule, cette dernière représente le terme source de l'équation thermique.

- **Influence de l'équation thermique sur l'équation électromagnétique**

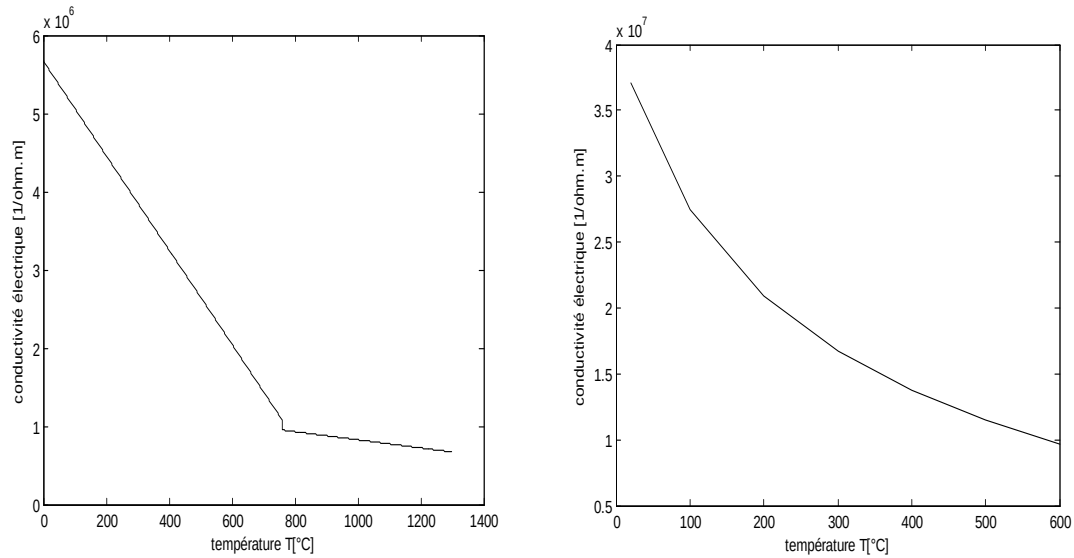
Cette influence est définie par la variation de la conductivité électrique de la charge avec la température. Autrement dit, la résolution de l'équation thermique donne de nouvelles valeurs de la température, à la base de ces dernières, la conductivité électrique est calculée donnant donc une nouvelle équation électromagnétique à résoudre.

II.4.3 Problèmes de non linéarités

II.4.3.1. Variation de la conductivité électrique avec la température

La conductivité électrique est en fait la propriété caractéristique de chaque corps. Elle représente la facilité du passage des électrons à travers ces corps. Une caractéristique plus importante des métaux est la variation de la conductivité en fonction de la température.

Lorsque la température d'un métal augmente, l'agitation de ses atomes s'accroît. L'opposition au déplacement des électrons (courant) augmente parce que les collisions entre les électrons et les atomes se multiplient. C'est ce qui explique la diminution de la conductivité des métaux avec la température (Fig. II.7) [20].



a- pour l'aluminium [42]

b- pour l'acier ST 44-3

Fig. II.7. Variation de la conductivité électrique avec la température [43]

A ce stade, différentes expressions pour l'évolution de la conductivité électrique en fonction de la température peuvent être trouvées dans la littérature. Par exemple, dans [43] les auteurs proposent deux expressions différentes suivant qu'il s'agisse du cuivre ou de l'acier ST44-3. Le cuivre est approximé par une fonction polynomiale du 3^{ème} degré alors que l'acier est approximé par une fonction affine dont les paramètres changent au passage de la température de Curie. La référence [44] propose également une fonction affine pour un acier mais sans changement de paramètres. Ainsi on peut trouver différentes caractéristiques de la conductivité en fonction de la température selon la nature du matériau étudié.

II.4.3.2 Variation de la conductivité thermique avec la température

Le comportement des corps face à la propagation de chaleur par conduction est caractérisé par la conductivité thermique k . Elle représente une grandeur thermo physique importante caractéristique pour chaque substance. Elle joue un rôle extrêmement important pour le transfert thermique par conduction. Cette grandeur dépend d'une multitude de facteurs ; la température, la pression, l'humidité, etc.

Dans le cas des solides, le facteur qui influence de plus sur la conductivité thermique est la température. En général, pour les corps solides homogènes, cette dépendance peut être exprimée par une relation linéaire :

$$k = k_0(1 + \beta T) \quad (\text{II.38})$$

Avec :

k_0 : Conductivité thermique du corps à la température 0°C

β : Coefficient caractéristique de chaque matériau

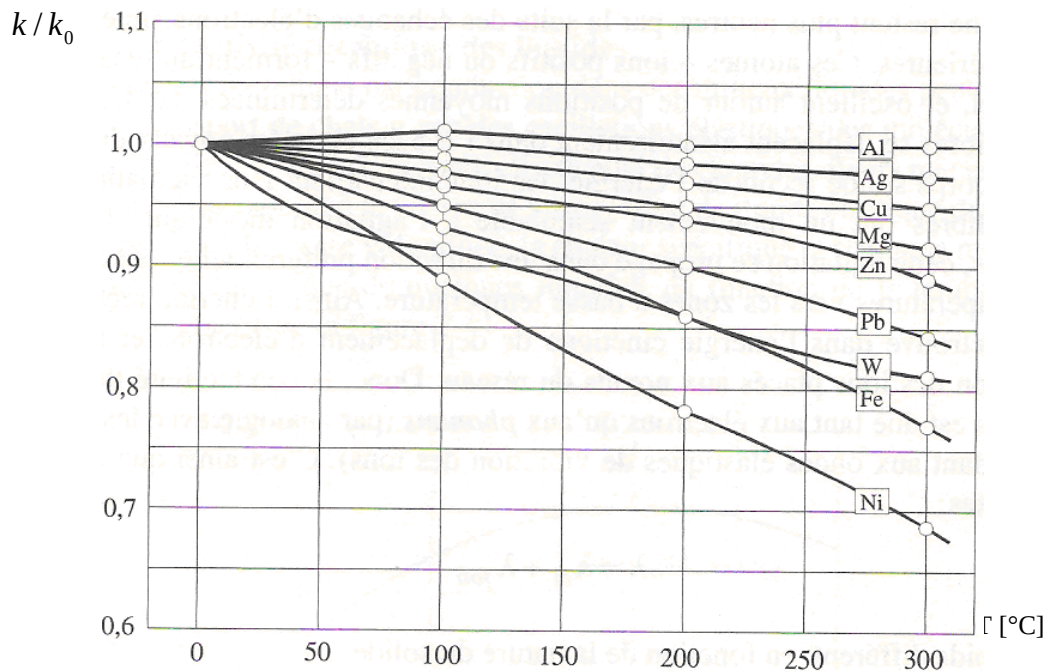


Fig. II.9. Variation de la conductivité thermique avec la température pour divers métaux purs

II.4.3.3 Variation de la chaleur massique avec la température

Si l'on chauffe un corps, on lui fournit de la chaleur et sa température s'élève ; il restitue cette chaleur si l'on abaisse sa température. Le corps a donc une certaine capacité thermique.

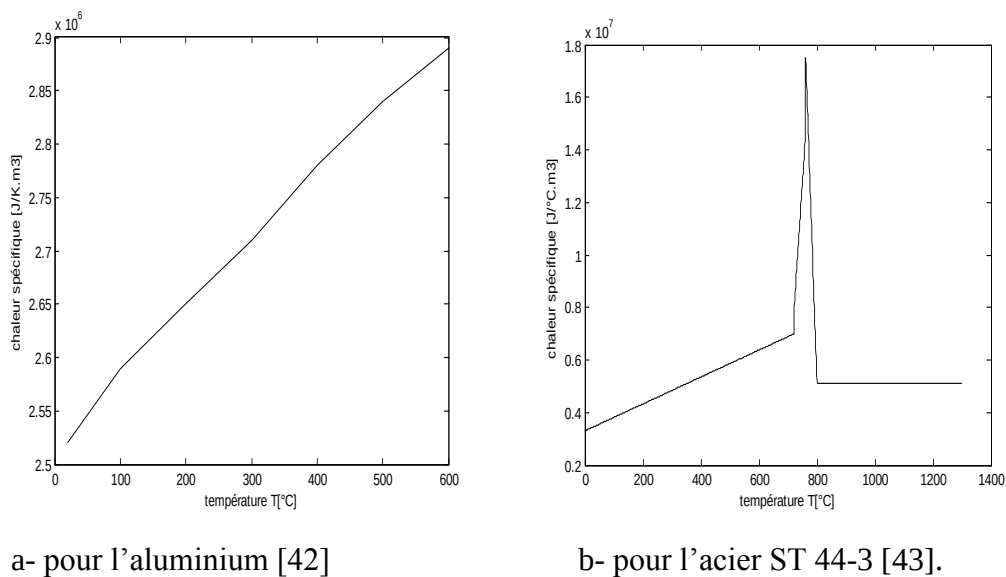


Fig. II.8 Variation de la chaleur spécifique avec la température

Cette capacité thermique est le produit de la masse du corps par sa chaleur spécifique. La chaleur spécifique reflète l'aptitude d'un corps à s'échauffer lorsqu'on lui fournit de l'énergie.

Elle dépend en effet de la température (Fig. II.8) [42], [43]. Cette dépendance varie d'un matériau à un autre.

D'autres types de non linéarité peuvent lors de [4] :

- La variation de la perméabilité magnétique des matériaux ferromagnétiques avec le champ magnétique.
- La transition du comportement des aciers au passage de la température de Curie, c'est à dire lorsqu'il passe d'un état ferromagnétique à un état paramagnétique.
- La variation des conditions aux limites thermiques avec la température.

II.5. Outils de résolution des équations de la magnétothermique

On peut envisager de résoudre ces équations:

- *De manière analytique* : Dans quelques configurations géométriques simples et en présence de matériaux homogènes et isotropes. Si la résolution analytique des équations de diffusion est possible, la solution sera exacte contrairement aux solutions déterminées par les méthodes numériques. De plus, les temps de calcul nécessaires sont extrêmement faibles.
- *De manière numérique* : les méthodes numériques peuvent considérer des géométries complexes et des non linéarités des matériaux, mais les temps de calcul nécessaires sont très élevés.
- Parfois, on utilise des méthodes qui combinent des solutions analytiques avec des aspects numériques, ce sont les méthodes semi analytiques.
- Une méthode très utilisée pour la résolution des problèmes thermiques, c'est la méthode des circuits thermiques équivalents.

II.5.1. Méthodes numériques

Toutes les méthodes numériques utilisées pour trouver la solution ont les aspects communs suivants :

1. approximation : la fonction ou ses dérivées sont approximées.
2. domaine de résolution est le domaine d'approximation dans lequel la solution est valable.
3. les conditions aux limites qui doivent être satisfaites.
4. l'approximation transforme les équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques linéaires (ou non linéaire) qui peut être résolu par des méthodes directes ou itératives.

On distingue les différentes méthodes suivantes :

II.5.1.1. Méthode des différences finies MDF

La première méthode utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP) était la méthode des différences finies. Elle s'applique directement à la forme différentielle des équations en s'appuyant sur un développement en série de Taylor pour discrétiser les dérivées associées aux variables. La méthode des différences finies est basée sur la transformation de l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial}$ à un opérateur aux différences $\frac{\Delta}{\Delta}$ où chaque dérivée est remplacée par des différences finies c'est à dire que lors de la dérivation, la distance entre deux points ne tend pas vers zéro [44].

Un avantage important de cette méthode est la simplicité de sa mise en œuvre et elle permet d'obtenir de manière relativement simple des schémas de discrétisation de précision élevée. Cependant elle nécessite un maillage structuré convenable seulement pour les géométries simples, ce qui limite son application pour des problèmes à géométries complexes.

II.5.1.2. Méthode des volumes finis MVF

Le principe de la méthode des volumes finis est basé sur le calcul de la forme intégrale de l'équation aux dérivées partielles. Elle a une simplicité de mise en œuvre par rapport à la méthode des éléments finis et une souplesse pour la représentation des géométries complexes. Ainsi la méthode garantit la propriété de conservation qui peut être absente dans les deux autres méthodes.

II.5.1.3. Méthode des éléments finis MEF

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes numériques les plus utilisées actuellement pour résoudre d'une manière efficace les équations aux dérivées partielles des problèmes physiques.

La grande souplesse d'adaptation de cette méthode à modéliser des phénomènes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, dans des géométries complexes, a permis la généralisation de son utilisation.

Cette méthode consiste à subdiviser le volume ou la surface constituant le domaine de résolution en éléments finis interconnectés de formes diverses. Elle est basée sur une formulation intégrale du problème aux limites. Parmi les formulations intégrales utilisées, on peut citer la méthode des résidus pondérés et la formulation variationnelle qui consiste à construire une fonctionnelle représentant l'état énergétique du système [45].

La solution globale, est alors construite sur chacun des éléments du maillage et elle doit vérifier les équations aux dérivées partielles, ainsi que ses conditions aux limites. Sur chaque

élément fini, la solution est décrite par une interpolation polynomiale, en fonction des valeurs nodales de l'inconnue.

II.5.2. Méthode nodale (Circuits thermiques équivalents)

Cette méthode de modélisation des problèmes physiques (thermiques, magnétiques) très ancienne, consiste à ramener l'étude de comportement d'un système physique à un schéma équivalent électrique en utilisant des éléments électriques passifs ou actifs [46].

Nous rappelons par exemple, sur le tableau II.1, l'analogie thermoélectrique.

Grandeurs thermiques	Grandeurs électriques
Puissance calorifique	Courant électrique
Température	Tension
Conductance thermique	Conductance électrique
Capacité calorifique	Capacité électrique

Tableau. II.1 Analogie thermoélectrique

Une première approximation, consiste à schématiser le dispositif étudiée par des corps, qu'on peut considérer homogène de point de vue thermique. Dans le chauffage par induction les pertes sont particulièrement réparties dans la charge. Ce qui permet d'utiliser des modèles a un seul corps.

Dans chaque direction, un nombre bien défini de nœuds et de résistances thermiques est issu de la résolution analytique de l'équation de chaleur en régime permanent. Ces nœuds sont ensuite raccordés à un nœud central représentant la température moyenne du bloc. En absence du temps (régime permanent), les températures aux nœuds du circuit thermique équivalent sont obtenues en résolvant un système d'équation de la forme suivant :

$$[G][\theta] = [Q] \quad (\text{II.39})$$

Avec :

$[G]$ Est la matrice des conductances thermique.

$[\theta]$ Est le vecteur des températures inconnues.

$[Q]$ Le vecteur de source de chaleur.

Des modèles de complexité moyenne (une dizaine de nœuds) peuvent être établis avec une évolution rapide des températures en régime transitoire ou en régime permanent [47]. La méthode nodale est donc plus efficace car elle présente :

- Un temps court pour la définition de problème (les phénomènes sont introduits d'une façon simple)

- Calcul précis avec des temps d'exécution très réduits
- Facilite l'exploitation des résultats
- Coûts réduits de prototype

II.5.3. Méthodes analytique

Les méthodes analytiques de modélisation des problèmes physiques d'une façon générale adaptées à l'étude des vibrations, de la propagation des ondes et le transfert de chaleur. On les retrouve donc dans différents domaines de la science : l'électromagnétisme, la thermique, sismique, hydrodynamique, mécanique, etc.

Le grand intérêt des méthodes analytiques est de conduire assez souvent à des formules explicites capables d'extraire les paramètres physiques pertinents, ce qui facilite l'analyse et l'interprétation des résultats observés. De ce fait, elles jouent un «rôle pédagogique» et servent souvent de guide pour interpréter les résultats issus de simulations numériques.

II.5.3.1 Méthode séparation de variables

Pour les configurations géométriques simples et en présence des matériaux homogènes et isotropes, la résolution analytique des équations aux dérivées partielles par la méthode de séparation de variable est possible. La solution obtenue sous forme d'une expression mathématique est facile à programmer. De plus, les temps de calcul nécessaire sont extrêmement faibles. Les problèmes de transfert multidirectionnel de la chaleur peuvent dans certains cas être traités comme en unidirectionnel par séparation de variables.

II.5.3.2 Méthode de résolution par les fonctions de Green

L'utilisation des fonctions de Green pour la modélisation des problèmes physiques, est couramment utilisée. Ces dernières sont basées sur le développement de modèles théoriques décrivant la répartition spatio-temporelle de la l'inconnu dans le domaine d'étude. Cette méthode de résolution, est très adaptée à l'étude des régimes transitoires et permanents.

En général, il existe plusieurs fonctions de Green associées au même problème, celles-ci diffèrent par leurs conditions aux limites. Pour définir de façon unique la fonction de Green associée au problème il faut préciser :

- l'équation aux dérivées partielles.
- les conditions aux limites
- les conditions initiales.

II.6. Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la représentation mathématique des phénomènes électromagnétique et thermiques. Sur la base des équations de Maxwell, l'équation de diffusion régissant le phénomène électromagnétique est abordée. De même pour l'équation de la diffusion thermique, une formulation du problème basé sur la conduction thermique en régime transitoire et en tenant compte du mouvement a été présentée.

Parmi les outils de résolution cités précédemment, nous proposons de décrire dans le chapitre suivant la résolution des équations de la magnétothermique en 2D en utilisant des méthodes analytiques.

Chapitre III

Résolution analytique du modèle magnétothermique en 2D

III.1. Introduction

Nous présentons dans ce chapitre, une méthode de résolution basée sur des solutions analytiques des équations décrivant le comportement magnétothermique en 2D des dispositifs de chauffage par induction à flux transverse.

Le travail consiste à développer une solution analytique du modèle magnétique, basée sur la méthode de séparation de variables, déterminant les courants induits et la puissance de chauffe. La solution ainsi obtenue sera faiblement couplée au modèle thermique. La solution thermique en régime transitoire, donnant le profil de la température dans la pièce à chauffer, est obtenue en utilisant une méthode analytique basée sur les fonctions de Green.

III.2 Présentation du système étudié

L'étude concerne un dispositif de chauffage par induction à flux transverse (Fig. III.1), dans lequel la pièce à chauffer est une plaque mince placée à l'intérieur d'un inducteur, portant un enroulement triphasé, alimenté par une source d'énergie à variation sinusoïdale dans le temps. L'inducteur est donc de structure linéaire, constitué de bobines en cuivre montées sur un support amagnétique et isolant. La plaque mince conductrice se déplace linéairement à une basse vitesse V . Ce qui engendre une partie des courants induits dans la plaque.

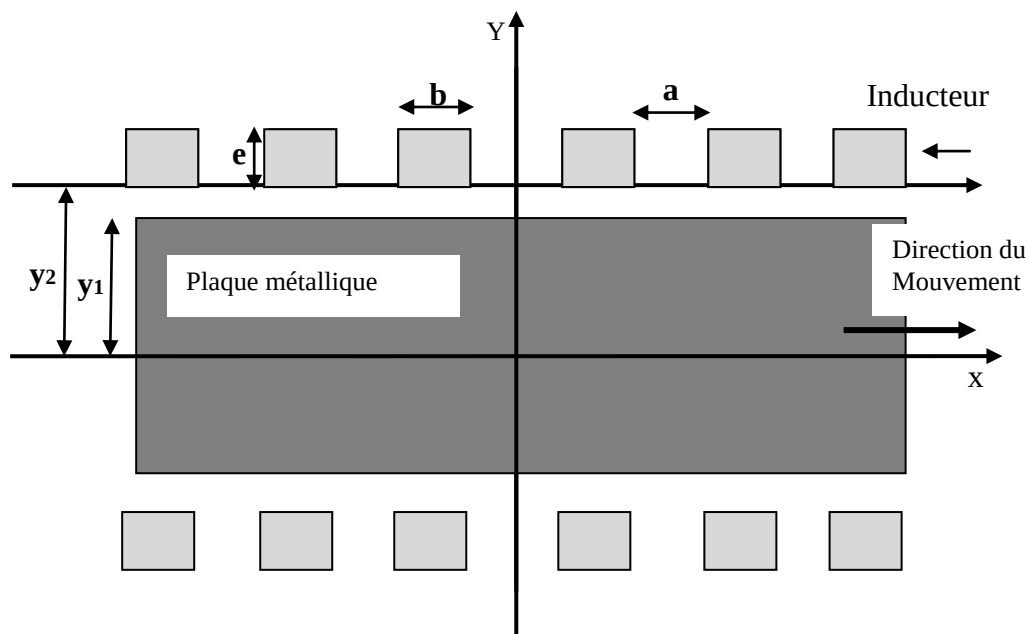


Fig. III.1 Géométrie du dispositif d'étude.

III.3. Résolution analytique du problème électromagnétique

III.3.1 Equation de la magnétodynamique et hypothèses d'étude

Le problème électromagnétique considéré ici est du type magnétodynamique. Quelle que soit sa formulation, certaines hypothèses sont récurrentes :

- On considère généralement les propriétés électromagnétiques du matériau isotropes.
- Les courants induits ne sont pas calculés dans le circuit inducteur.
- On s'intéresse seulement à l'étude des matériaux présentant une perméabilité magnétique constante.
- L'effet de bord suivant l'axe x est négligé en supposant que la longueur du dispositif est infinie.

D'après la structure géométrique du dispositif étudié, une étude en coordonnées cartésiennes (x, y, z) est appropriée. En revanche, si on néglige l'élécité des spires, les courants sont généralement perpendiculaires au plan (x, y) (Fig. III.1), le potentiel n'a plus alors qu'une seule composante A_z orthogonale au plan d'étude et ne dépend que de x et y , donc les grandeurs électriques et magnétiques seront indépendantes de z , de plus la condition $\text{div } \vec{A} = 0$ est naturellement vérifiée. Les composantes des grandeurs électromagnétiques se limitent donc à :

$$\vec{J} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_z \end{bmatrix} \quad \vec{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_z \end{bmatrix} \quad \vec{B} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'équation de diffusion du champ électromagnétique (II.23) établie dans le chapitre précédent est réécrite comme suit :

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A}_z \right) = \sigma \left(-\frac{\partial \vec{A}_z}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (\text{III.1})$$

Si nous considérons la perméabilité magnétique du matériau constante (supposition posée dans III.2.1), cette grandeur peut sortir du rotationnel, et l'équation (III.1) devienne donc :

$$\text{rot} \left(\text{rot} \vec{A}_z \right) = \sigma \mu \left(-\frac{\partial \vec{A}_z}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (\text{III.2})$$

En 2D et en coordonnées cartésiennes elle s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = \sigma \mu \frac{\partial A_z}{\partial t} + \sigma V \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (\text{III.3})$$

Pour commodité d'écriture, on notera la composante A_z simplement A . Finalement l'équation de diffusion électromagnétique à résoudre s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \sigma \mu \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma V \frac{\partial A}{\partial x} \quad (\text{III.4})$$

III.3.2 Domaine d'étude

De la figure (III.1), on remarque que le plan ($y=0$) est un plan de symétrie géométrique, on considère que le système invariant suivant (z) et d'une longueur infinie ce qui nous permet de réduire le domaine d'étude à la moitié du dispositif. La figure (III.2) représente le modèle électromagnétique à analyser où la plaque est d'une épaisseur y_1 et de longueur axiale infinie soumise à un mouvement linéaire, à une vitesse constante V , suivant la direction Ox .

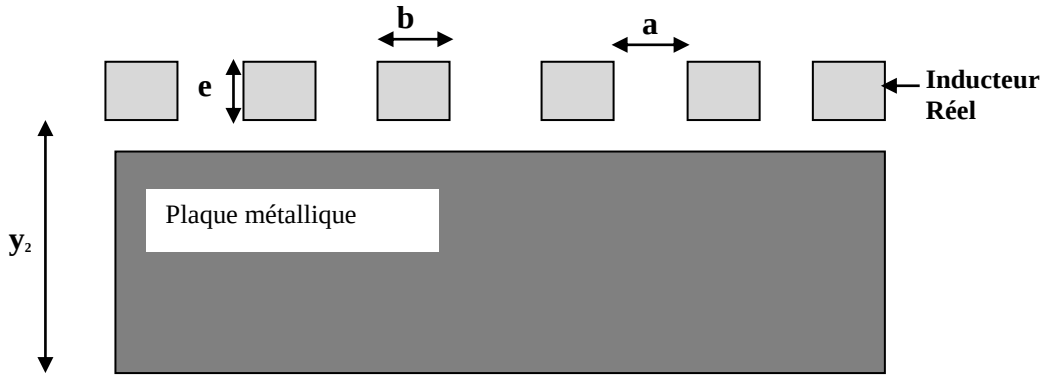


Fig. III.2 Géométrie du domaine d'étude.

Afin de simplifier le modèle électromagnétique l'inducteur du dispositif étudié est remplacé par une nappe de courant.

III.3.3. Modèle de nappe de courant

La méthode de nappe de courant consiste à remplacer la densité de courant réel dans l'inducteur (bobinage triphasé) par une densité superficielle équivalente (nappe de courant) répartie sur une surface équivalente située au milieu des bobines, c.à.d. à une distance $y_2 + e/2$ [34], [35].

Le bobinage triphasé est excité par une densité volumique de courant de valeur efficace J , chaque phase est donc traversé par un courant donné par :

$$I = J.b.e \quad (\text{III.5})$$

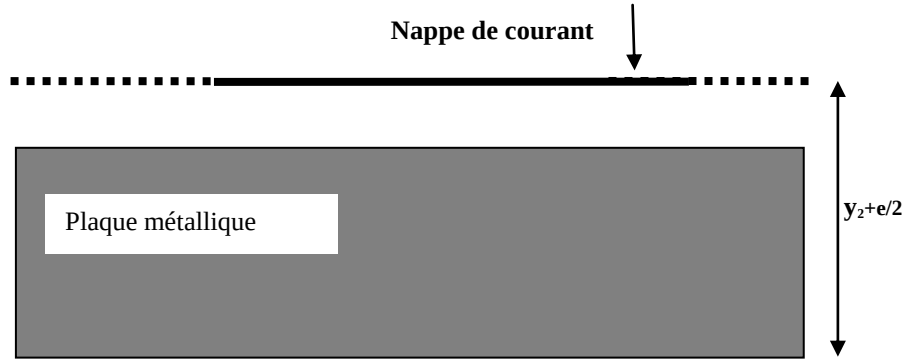


Fig. III.3. Approximation du bobinage réel avec une nappe de courant

La densité de courant superficielle correspondante pour chaque phase en A/m est:

$$J_s = J.e \quad (III.6)$$

L'expression des courants des trois phases est donnée par les formules suivantes :

$$\begin{cases} I_a = \Re \{ I e^{i\omega t} \} \\ I_b = \Re \{ I e^{i(\omega t - 2\pi/3)} \} \\ I_c = \Re \{ I e^{i(\omega t + 2\pi/3)} \} \end{cases} \quad (III.7)$$

Les densités de courants superficiels équivalents correspondantes s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} J_{sa} = \Re \{ J_s e^{i\omega t} e^{-ikx} \} \\ J_{sb} = \Re \{ J_s e^{i(\omega t - 2\pi/3)} e^{-i(kx - 2\pi/3)} \} \\ J_{sc} = \Re \{ J_s e^{i(\omega t + 2\pi/3)} e^{-i(kx + 2\pi/3)} \} \end{cases} \quad (III.8)$$

Où J et J_s possède une seule composante dirigée suivant z . La figure (III.4) donne la distribution de la densité superficielle en fonction de x .

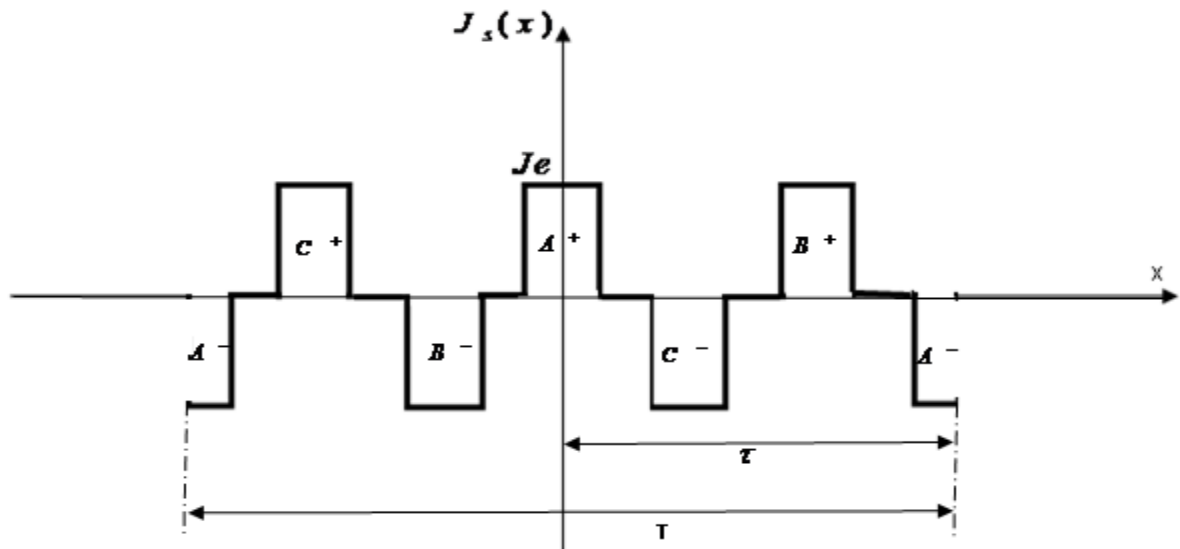


Fig. III.4 Répartition de courant superficielle en fonction de x

Dans l'analyse du problème par le modèle analytique, la densité superficielle de courant équivalente est représentée par son développement en série de Fourier, donné par :

$$\overrightarrow{J_s(x)} = (J_{sd}(x) + J_{sb}(x) + J_{sc}(x))\overrightarrow{u_z} \quad (\text{III.9})$$

$$\overrightarrow{J_s(x,t)} = \sum_n J_{sn} \cos(nkx + v\omega t)\overrightarrow{u_z} \quad (\text{III.10})$$

Avec :

$$v = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 6m + 1 \\ +1 & \text{si } n = 6m - 1 \end{cases}$$

Où J_{sn} représente l'amplitude de l'harmoniques d'espace de rang n , donnée par :

$$J_{sn} = \frac{3}{2} \frac{eJ4}{n\pi} \sin \frac{nka}{2} \quad (\text{III.11})$$

Sachant que la période spatiale de la densité superficielle de courant est $2\tau = 6(a+b)$. Où τ représente le pas polaire et $k = \frac{\pi}{\tau}$ représente la pulsation spatiale. Du fait que la distance entre la nappe de courant et la pièce est importante, seul le fondamental de la densité de courant est considéré dans cette étude. Son expression s'écrit alors:

$$J_s(x,t) = J_{s1} \cos(\omega t - kx) \quad (\text{III.12})$$

L'amplitude densité du courant équivalent :

$$J_{s1} = \frac{3}{2} \frac{eJ4}{\pi} \sin \frac{ka}{2} \quad (\text{III.13})$$

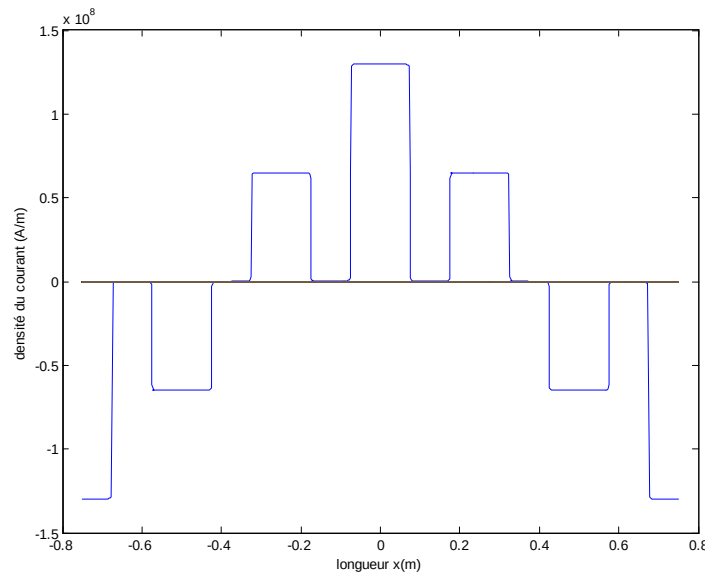


Fig. III.5. Répartition de la densité de courant équivalente.

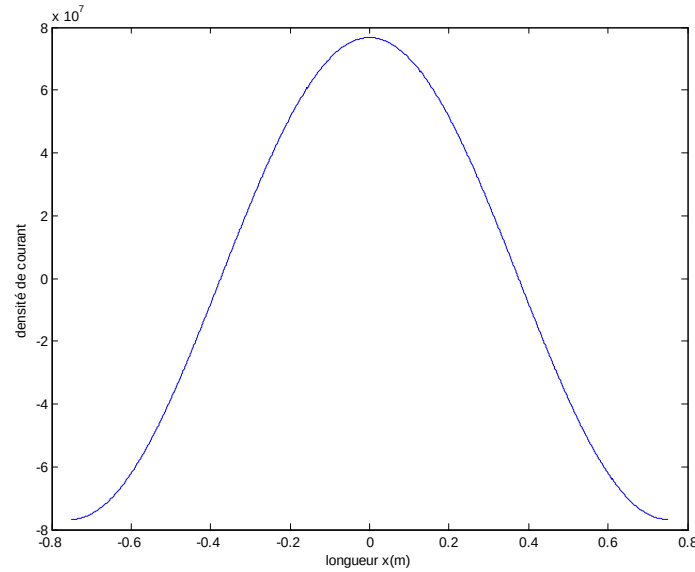


Fig. III.6. Fondamental de la densité surfacique équivalente

La répartition de cette densité de courant et son fondamental, sur un pas polaire, sont représentés respectivement sur les figures (III.5) et (III.6).

III.3.4 Modèle géométrique du problème électromagnétique

La figure (III.7) représente le modèle géométrique du problème électromagnétique à analyser où la plaque est d'une épaisseur y_1 et de longueur axiale infinie soumise à un mouvement linéaire, à une vitesse constante V , suivant la direction Ox .

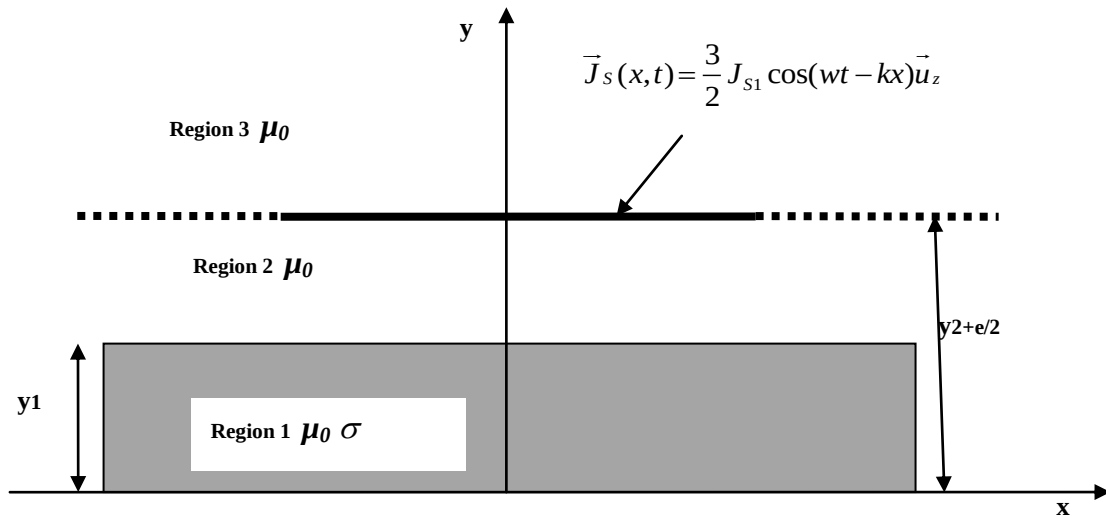


Fig. III.7. Modèle géométrique du problème magnétodynamique

Pour une résolution analytique, trois régions sont définies :

- La région 1, correspond à la plaque métallique (pièce à chauffer). Le potentiel vecteur vérifie l'équation de diffusion ;

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \sigma \mu \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \mu V \frac{\partial A}{\partial x} \quad (\text{III.14})$$

- La région 2 est un entrefer qui sépare la plaque métallique et la nappe de courant ;

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{III.15})$$

- La région 3 à l'extérieur de la nappe

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{III.16})$$

A ces équations s'ajoute les conditions aux limites et de passage entre les différentes régions.

$$\text{à } y = y_1 : \quad \overline{A_1} = \overline{A_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overline{A_1}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{A_2}}{\partial y} \quad (\text{III.17})$$

$$\text{à } y = y_2 + \frac{e}{2} : \quad \overline{A_2} = \overline{A_3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overline{A_2}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{A_3}}{\partial y} + \mu_0 J_{s1} \quad (\text{III.18})$$

$$\text{Au plan de symétrie } y = 0 : \quad \overline{A_1}(y) = \overline{A_1}(-y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overline{A_1}}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.19})$$

III.3.5 Expression du potentiel vecteur magnétique

La résolution analytique des équations donnant la répartition du potentiel vecteur, dans les différentes régions d'étude, est effectuée par la méthode de séparation de variables. Cette dernière consiste à représenter la solution sous la forme de produit de fonction. Sachant que la forme du potentiel vecteur suit la forme de la densité superficielle du courant (III.12), qui constitue la source du champ, il peut se mettre alors sous la forme [48] :

$$\vec{A}(x, y, t) = A(y) \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z \quad (\text{III.20})$$

En notation complexe, on peut écrire l'expression du potentiel vecteur comme suit :

$$A(x, y, t) = \Re \left\{ \overline{A}(y) e^{-jkx} e^{j\omega t} \right\} \quad (\text{III.21})$$

En injectant cette dernière dans (III.14) à (III.16) et après simplifications nous obtenons pour la région de la plaque:

$$\frac{\partial^2 \overline{A}}{\partial y^2} - (k^2 + j\sigma\mu_0(kV - \omega)) \overline{A} = 0 \quad (\text{III.22})$$

L'équation (III.22), donnant la répartition du potentiel vecteur dans la plaque métallique (région 1) admet comme solution générale la forme suivante :

$$A_1(y) = (a_1 e^{\lambda y} + b_1 e^{-\lambda y}) \quad (\text{III.23})$$

$$\text{avec: } \lambda = \sqrt{k^2 + j\sigma\mu_0(kV - \omega)}$$

Dans l'entrefer (région2) la conductivité électrique est nulle, la solution générale est donnée comme suit :

$$A_2(y) = (a_2 e^{\lambda_1 y} + b_2 e^{-\lambda_1 y}) \quad (\text{III.24})$$

Avec: $\lambda_1 = k$

Et en fin dans la région 3 en considérant A_3 est fini quand $y \rightarrow \infty$, le potentiel vecteur s'écrit :

$$A_3(y) = b_3 e^{-\lambda_1 y} \quad (\text{III.25})$$

Donc l'expression finale du potentiel vecteur dans la plaque métallique s'écrit comme suit :

$$A_1(x, y, t) = \Re \{ a_1 (e^{\lambda_1 y} + e^{-\lambda_1 y}) e^{-jkx} e^{j\omega t} \} \quad (\text{III.26})$$

Avec a_1 , a_2 , b_2 et b_3 sont des constantes à déterminer en utilisant les conditions de passage définit précédemment. Ils sont donnés par les expressions suivantes :

$$a_1 = \frac{\mu_0 J_s e^{k(y_1 - y_2)}}{(\lambda_1 + \lambda)(e^{\lambda_1 y_1}) + (\lambda_1 - \lambda)(e^{-\lambda_1 y_1})}$$

$$\lambda = \sqrt{k^2 + j\sigma\mu_0(\omega - kV)}$$

$$b_1 = a_1$$

$$a_2 = \frac{\mu_0 J_s}{2\lambda_2 e^{\lambda_1 y_2}} \quad b_2 = (e^{(\lambda_1 + \lambda)y_1} + e^{(\lambda_1 - \lambda)y_1}) - a_2 e^{(\lambda_1 - \lambda)y_1}$$

$$b_3 = \frac{-a_2 + b_2 + \mu_0 J_s}{\lambda_1 e^{-\lambda_1 y_2}}$$

III.3.6 Densité des courants induits

La densité volumique des courants induits dans la plaque conductrice peut être obtenue en utilisant la relation du comportement des milieux conducteurs. On peut écrire :

$$\vec{J}_{total}(x, y, t) = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_1) \quad (\text{III.27})$$

En notation complexe, elle s'écrit :

$$\vec{J}_{total}(x, y, t) = j\mu_0 \sigma (kV - \omega) \vec{A}_1(x, y, t) \quad (\text{III.28})$$

Et l'expression finale est la suivante:

$$J_{total}(x, y, t) = \Re \{ j\mu_0 \sigma (kV - \omega) \vec{A}_1(y) e^{j\omega t} e^{-jkx} \} \quad (\text{III.29})$$

III.3.7 Densité de puissance de chauffe

La densité de puissance, due aux courants induits, qui sert au chauffage de la plaque conductrice est exprimée par [2], [14]:

$$P(x, y, t) = \frac{1}{\sigma} \left(J_{total}(x, y, t) \right)^2 \quad (III.30)$$

Injectant (III.29) dans (III.30), la densité de puissance instantanée de chauffe due aux courants induits devient comme suit :

$$P(x, y, t) = \frac{1}{\sigma} \left(\Re \left\{ j\mu_0\sigma(kV - \omega)\bar{A}_1(y)e^{j(\omega t - kx)} \right\} \right)^2 \quad (III.31)$$

La puissance de chauffe total, due aux courants induits peut être évaluée par l'intégration de (III.31) sur le volume de la pièce. Elle est exprimée par la relation :

$$P(t) = \frac{1}{\sigma} \int_0^{z_1} \int_{-y_1}^{y_1} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\Re \left\{ j\mu_0\sigma(kV - \omega)\bar{A}_1(y)e^{j(\omega t - kx)} \right\} \right)^2 dx dy dz \quad (III.32)$$

Finalement, l'expression de la puissance totale de chauffe s'écrit comme suit :

$$P(t) = cnst_1(AA + BB.\sin(2\omega t) + CC.\cos(2\omega t)) \quad (III.33)$$

La moyenne de cette puissance est donnée par la relation suivante :

$$P = cnst_1.AA \quad (III.34)$$

Les constants sont donnés par :

$$\begin{aligned} cnst_1 &= \frac{z_1}{2} \left(\frac{\mu_0 J_s e^{k(y_1 - y_2)}}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} (kV - \omega) \right)^2 \\ \alpha_1 &= \left(e^{p_r y_1} (k + p_r) + e^{-p_r y_1} (k - p_r) \right) (\cos(p_m y_1)) - \left(e^{p_r y_1} + e^{-p_r y_1} \right) (p_m \sin(p_m y_1)) \\ \beta_1 &= \left(e^{p_r y_1} (k + p_r) - e^{-p_r y_1} (k - p_r) \right) (\sin(p_m y_1)) + \left(e^{p_r y_1} - e^{-p_r y_1} \right) (p_m \cos(p_m y_1)) \\ \varphi &= -\arctg \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} \right) \\ md &= \sqrt{p_r^2 + p_m^2} \quad , \quad p_r = \text{real}(\lambda) \quad , \quad p_m = \text{img}(\lambda) \\ AA &= 2L \left(\frac{\sinh(2p_r y_1)}{p_r} + \frac{\sin(2p_m y_1)}{p_m} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 BB &= \left(\frac{1}{kmd^2} \right) \left(2y_1 md^2 + p_r \sinh(2p_r y_1) \cos(2p_m y_1) + p_m \cosh(2p_r y_1) \sinh(2p_m y_1) \right) \\
 & \left(\sin(kl + 2\varphi) - \sin(kl - 2\varphi) \right) - \left(p_r \cosh(2p_r y_1) \sin(2p_m y_1) + p_m \sinh(2p_r y_1) \cos(2p_m y_1) \right) \\
 & \left(\cos(kl - 2\varphi + \pi) - \cos(-kl - 2\varphi + \pi) \right) \\
 CC &= \left(\frac{1}{kmd^2} \right) \left(2y_1 md^2 + p_r \sinh(2p_r y_1) \cos(2p_m y_1) + p_m \cosh(2p_r y_1) \sinh(2p_m y_1) \right) \\
 & \left(\cos(kl - 2\varphi + \pi) - \cos(-kl - 2\varphi + \pi) \right) + \left(p_r \cosh(2p_r y_1) \sin(2p_m y_1) + p_m \sinh(2p_r y_1) \cos(2p_m y_1) \right) \\
 & \left(\sin(kl + 2\varphi) - \sin(kl - 2\varphi) \right)
 \end{aligned}$$

III.4. Résolution analytique du problème thermique

III.4.1. Equation de diffusion thermique avec source en mouvement

Nous nous sommes limités jusqu'ici à l'étude de système électromagnétique. Nous nous intéresserons dans cette partie à la résolution analytique du problème thermique. Ce dernier est formulé par l'équation de diffusion thermique (II.33) établie au chapitre précédent. En 2D et en coordonnées cartésiennes, (II.33) peut s'écrire comme suit :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + p(x, y, t) \quad (III.31)$$

Dans le problème étudié la plaque est mobile et la source est fixe. Le terme convectif dû au mouvement rend la résolution analytique de l'équation de diffusion difficile.

Afin de simplifier l'étude, nous supposons dans tout ce qui va suivre que la source est mobile et la plaque à chauffer est fixe. Pour cela, un changement de repère est effectué ($x' = x - Vt$). La conséquence est l'annulation du terme convectif dû au mouvement de la plaque. L'expression de la densité de puissance instantanée dans le nouveau repère sera :

$$p(x, y, t) = \frac{1}{\sigma} \left(\Re \left\{ j \mu_0 \sigma (kV + \omega') \bar{A}_1(y) e^{j(\omega' t - kx)} \right\} \right)^2 \quad (III.32)$$

Avec $\omega' = \omega + kV$ la nouvelle valeur de la pulsation électrique associée au mouvement de la source.

En considérant ce changement de repère, l'équation (III.31) s'écrit :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + p(x, y, t) \quad (III.33)$$

Cette équation décrit le régime transitoire de la température dans la pièce à chauffée. Sa résolution ne peut pas se faire sans les conditions initiales et les conditions aux limites.

III.4.2. Domaine d'étude et conditions initiale et aux limites

Le domaine dans lequel le problème thermique sera étudié est représenté sur la figure III.8. Il consiste à une plaque conductrice fixe, de longueur L et d'épaisseur $2y_1$, soumise à une source de chaleur représentée par la densité de puissance donnée par (III.32).

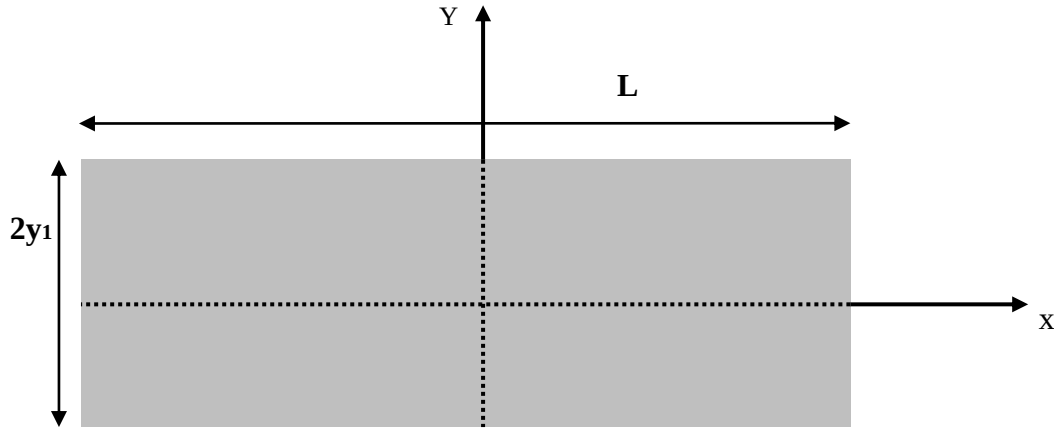


Fig. III.8 Domaine d'étude thermique

Dans cette étude nous considérons que la conductivité thermique du matériau est constante, et nous supposons que le flux de chaleur est nul sur les surfaces externes de la plaque (adiabatique). Pour la condition initiale, nous supposons que la température de la plaque, à l'instant initiale, est la même que celle du milieu ambiant. Dans ces conditions, le problème aux limites en termes de température est défini dans la pièce à chauffer comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{p(x, y, t)}{\rho C_p} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=y_1} &= \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=-y_1} = 0 \quad -y_1 < y < y_1 \\ \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L/2} &= \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=-L/2} = 0 \quad -L/2 < x < L/2 \\ T(x, y, 0) &= f(x, y) = T_0 \quad \text{avec } T_0 = 30^\circ\text{C} \end{aligned} \tag{III.34}$$

Avec :
$$a = \frac{k}{\rho C_p}$$

C'est l'équation de la diffusion de la chaleur en régime transitoire, que nous allons résoudre analytiquement en utilisant les fonctions de Green.

III.4.3. Fonctions de Green associées aux problèmes de conduction de la chaleur

Nous considérons le système d'équations classique de conduction de la chaleur donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta T(x, y, t) - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{-p(x, y, t)}{k} \\ (k \frac{dT}{dn_i} + hT)_{s_i} = f_i(x_i, y_i, t) \\ T(x, y, 0) = f(x, y) \end{array} \right. \quad (\text{III.35})$$

Où h représente le coefficient d'échange thermique et s_i la $i^{\text{ème}}$ frontière. La source peut être constante ou variables. Pour résoudre ce système en régime transitoire, on considère le système équivalent en terme de fonction de Green défini comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta G(M, t / M', t') - \frac{1}{a} \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{-\delta(M - M')\delta(t - t')}{k} \\ (k \frac{dG}{dn_i} + hG)_{s_i} = 0 \\ G(M, t / M', t') = 0, \text{ si } (t < t') \end{array} \right. \quad (\text{III.36})$$

Avec M, M' désigne des points de l'espace définis respectivement par les coordonnées (x, y) et (x', y') , δ désigne l'impulsion de Dirac et G la fonction de Green.

Ce problème élémentaire correspond à la dissipation instantanée au temps t' d'une quantité de chaleur localisée en un point M' , où les sources externes sont toutes nulles ; c'est à dire sans action. La fonction traduit la réponse en température à une impulsion de chaleur localisée. Le langage généralement employé consiste à parler d'effet en (M, t) due à la cause en (M', t') .

L'effet est nul si $t < t'$ puisque la cause ne s'est pas produite. En fait l'origine t' est arbitraire si bien que, dans la fonction G , apparaisse par le groupement $t - t'$ qui est la durée entre le moment, où se produit la cause et le moment où on examine l'effet.

D'autre part les fonctions de Green obéissent à la relation de réciprocité de la cause et de l'effet à savoir, si la cause est produite en M , l'effet sera identique en M' , à condition évidemment, de respecter la durée $(-t' - (-t) = t - t')$.

La solution générale de problème thermique dans le domaine Ω , peut être représentée en termes de la fonction de Green, définie dans l'équation, par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} T(M, t) = & \int_{\Omega} f(M') G(M, t / M', t' = 0) d\Omega' + \frac{a}{k} \int_0^t dt' \int_{\Omega} p(M, t / M', t') G(M, t / M', t') d\Omega \\ & + a \int_0^t dt' \sum_i \iint_{s_i} \left[\frac{f_i(M'_i, t') G(M, t / M'_i, t')}{k} - T(M'_i, t') \frac{\partial G(M, t / M'_i, t')}{\partial n'_i} \right] dS'_i \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

III.4.4. Résolution analytique par la méthode de fonction de GREEN

La méthode générale de résolution par les fonctions de Green ne peut être envisagée sans posséder une bonne maîtrise préalable de la technique de séparation de variables, et le développement en série de fonctions orthogonales. Cette méthode repose sur les étapes suivantes :

- Dans un premier temps, la méthode consiste à chercher une solution à variables séparées, c'est à dire sous la forme :

$$T(x, y, t) = X(x)Y(y)H(t) \quad (III.38)$$

- Dans un deuxième temps, le système d'équations étant linéaire, on cherche une solution sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions propres.
- Le dernier temps consiste à une solution sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions propres. et puis la fonction de GREEN

III.4.4.1 Solution homogène à variables séparés

Pour obtenir la solution homogène, nous injectons la forme de la solution (III.34) dans le système (III.34) sans la considération du terme source. On obtient :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{a} \frac{H'(t)}{H(t)} = -\alpha^2 \quad (III.39)$$

Le choix du signe devant α^2 est imposé par le fait que $T(x, y, t)$ c'est à dire $H(t)$ doit rester fini quelque soit t ; cette remarque impose à la direction spatiale d'être homogène pour conduire à une infinité de valeurs propres.

En considérant les conditions aux limites données dans (III.34) et après séparation de variables, on obtient les fonctions propres:

$$\begin{cases} X_n(x) = \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) \\ Y_m(y) = \cos\left(\frac{m\pi}{y_1}y\right) \\ H_{nm}(t) = \exp\left(-a\left(\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{y_1}\right)^2\right)t\right) \end{cases} \quad (III.40)$$

Le système d'équations étant linéaire, on remplace ce dernier (III.40) dans (III.38), on trouvera une solution sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions propres, donné comme suit :

$$T(x, y, t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1}y\right) \exp\left(-a\left(\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{y_1}\right)^2\right)t\right) \quad (\text{III.41})$$

C'est la solution homogène de l'équation thermique, où C_0 correspond à $n=0, m=0$ et $(T(x, y, t) = C_0)$

III.4.4.2 Détermination des constantes par la méthode des fonctions orthogonales

En exploitant l'orthogonalité des fonctions propres déterminées, définie par :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} g_n(x') \cdot g_m(x') d\Omega = 0 & \text{Si } n \neq m \\ \int_{\Omega} g_n(x') \cdot g_m(x') d\Omega \neq 0 & \text{Si } n = m \end{cases} \quad (\text{III.42})$$

Et d'après les conditions initiales, on remplace $t=0$ dans l'équation (III.41) on trouve :

$$T(x, y, 0) = f(x, y, 0) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1}y\right) \quad (\text{III.43})$$

Ainsi, pour $n=0$ et $m=0$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \int_{-y_1}^{y_1} f(x', y') \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x'\right) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1}y'\right) dx' dy' = C_0 \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-y_1}^{y_1} \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x'\right) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1}y'\right) dx' dy' \quad (\text{III.44})$$

Pour $n=1.....\infty$ et $m=1.....\infty$

$$\iint_{x' y'} f(x, y) \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x'\right) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1}y'\right) dx' dy' = C_{nm} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-y_1}^{y_1} \left(\cos\left(\frac{2n\pi}{L}x'\right) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1}y'\right) \right)^2 dx' dy' \quad (\text{III.45})$$

Après développement, les constantes deviennent:

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1}{2Ly_1} \iint_{x' y'} f(x', y') dx' dy' \\ C_{nm} = \frac{2}{Ly_1} \iint_{x' y'} f(x', y') \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x'\right) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1}y'\right) dx' dy' \end{cases} \quad (\text{III.46})$$

On remplace l'équation (III.46) dans l'équation (III.41), on obtient la solution homogène du problème thermique considéré.

$$T(x, y, t) = \frac{1}{2Ly_1} \iint_{x', y'} f(x', y') dx' dy' + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{Ly_1} \iint_{x', y'} f(x', y') \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1} y\right) \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x'\right) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1} y'\right) dx' dy' \exp\left(-a \left(\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{y_1}\right)^2\right) t\right) \right) \quad (III.47)$$

III.4.4.3. Fonction de Green du problème étudié

En termes de fonction de Green, l'équation (III.47) est équivalente à une solution homogène du problème de la forme suivante :

$$T(x, y, t) = \iint_{x', y'} f(x', y') G(x, y, t / x', y', t' = 0) dx' dy' \quad (III.48)$$

Par identification des deux équations (III.47) et (III.48) on trouve :

$$G(x, y, t / x', y', t' = 0) = \frac{1}{2Ly_1} + \frac{2}{Ly_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1} y\right) \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x'\right) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1} y'\right) \exp\left(-a \left(\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{y_1}\right)^2\right) t\right) \quad (III.49)$$

L'équation (III.49) représente la fonction de GREEN pour $(t' = 0)$. Pour trouver $G(x, y, t / x', y', t')$ il suffit de remplacer t par $(t - t')$.

$$G(x, y, t / x', y', t') = \frac{1}{2Ly_1} + \frac{2}{Ly_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1} y\right) \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x'\right) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1} y'\right) \exp\left(-a \left(\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{y_1}\right)^2\right) (t - t')\right) \quad (III.50)$$

Ainsi la fonction de green associée au problème thermique s'écrit comme suit :

$$G(x, y, t / x', y', t') = \frac{1}{2Ly_1} + \frac{2}{Ly_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1} y\right) \exp(-aAt) \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x'\right) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1} y'\right) \exp(aAt') \quad (III.51)$$

Avec : $A = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{y_1}\right)^2$

III.4.4.4 Solution générale du problème thermique

En utilisant la fonction de Green déterminée précédemment (III.50), la solution générale du problème étudié (III.34), est représentée en termes de la fonction de Green par l'expression suivante :

$$T(x, y, t) = \int_{-y_1}^{y_1} \int_{-L/2}^{L/2} f(x, y) G(x, y, t / x', y', t' = 0) dx' dy' + \int_0^t \int_{-y_1}^{y_1} \int_{-L/2}^{L/2} p'(x', y', t') G(x, y, t / x', y', t') dx' dy' dt' \quad (\text{III.52})$$

Par intégration du premier terme de l'équation précédente on trouve la solution homogène, définit par la formule suivante :

$$T_h(x, y, t) = f(x, y) = T_0 \quad (\text{III.53})$$

Le deuxième terme définit la solution particulière qui s'écrit :

$$\begin{aligned} T_p(x, y, t) = & \text{cnst}_2 (AA t + BB \sin(2wt) + CC (\cos(2wt) - 1)) \\ & + \text{cnst}_3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (Term_1 + Term_2) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1} y\right) \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x\right) \left(\frac{aA \cos(2w't) + 2w' \sin(2w't) - aAe^{-aAt}}{A^2 a^2 + 4w'^2} \right) \\ & + (Term_3 + Term_4) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1} y\right) \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x\right) \left(\frac{aA \sin(2w't) - 2w' \cos(2w't) + 2w' e^{-aAt}}{A^2 a^2 + 4w'^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.54})$$

Finalement, on aboutira à l'expression de la solution générale de la température :

$$\begin{aligned} T(x, y, t) = & T_0 + \text{cnst}_2 (AA t + BB \sin(2wt) + CC (\cos(2wt) - 1)) \\ & + \text{cnst}_3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (Term_1 + Term_2) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1} y\right) \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x\right) \left(\frac{aA \cos(2w't) + 2w' \sin(2w't) - aAe^{-aAt}}{A^2 a^2 + 4w'^2} \right) \\ & + (Term_3 + Term_4) \cos\left(\frac{m\pi}{y_1} y\right) \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x\right) \left(\frac{aA \sin(2w't) - 2w' \cos(2w't) + 2w' e^{-aAt}}{A^2 a^2 + 4w'^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.55})$$

Les constantes sont données par :

$$\begin{aligned} \text{cnst}_2 = & \frac{1}{4Ly_1} \left(\frac{\mu_0 J_s e^{k(y_1 - y_2)}}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} (w - kv) \right)^2 \\ \text{cnst}_3 = & \frac{1}{Ly_1} \left(\frac{\mu_0 J_s e^{k(y_1 - y_2)}}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} (w - kv) \right)^2 \\ md_1 = & 4p_r^2 + \left(2p_m + \frac{m\pi}{y_1} \right)^2 \end{aligned}$$

$$md_2 = 4p_r^2 + \left(2p_m - \frac{m\pi}{y_1}\right)^2$$

$$Term_1 = \left(\frac{l}{md_1 md_2} \right) \begin{pmatrix} 2p_r \sinh(2p_r y_1) \cos(2p_m y_1) \cos(m\pi)(md_1 + md_2) \\ + \cosh(2p_r y_1) \sin(2p_m y_1) \cos(m\pi)(md_1(p_m + \frac{m\pi}{y_1}) \\ + md_2(p_m - \frac{m\pi}{y_1})) \end{pmatrix} (\cos(2\varphi - \pi))$$

$$Term_2 = \left(\frac{l}{md_1 md_2} \right) \begin{pmatrix} 2p_r \cosh(2p_r y_1) \sin(2p_m y_1) \cos(m\pi)(md_1 + md_2) \\ + \sinh(2p_r y_1) \cos(2p_m y_1) \cos(m\pi)(md_2(p_m + \frac{m\pi}{y_1}) \\ + md_1(p_m - \frac{m\pi}{y_1})) \end{pmatrix} (\sin(2\varphi - \pi))$$

$$Term_3 = \left(\frac{l}{md_1 md_2} \right) \begin{pmatrix} 2p_r \sinh(2p_r y_1) \cos(2p_m y_1) \cos(m\pi)(md_1 + md_2) \\ + \cosh(2p_r y_1) \sin(2p_m y_1) \cos(m\pi)(md_1(p_m + \frac{m\pi}{y_1}) \\ + md_2(p_m - \frac{m\pi}{y_1})) \end{pmatrix} (\sin(2\varphi - \pi))$$

$$Term_4 = \left(\frac{l}{md_1 md_2} \right) \begin{pmatrix} 2p_r \cosh(2p_r y_1) \sin(2p_m y_1) \cos(m\pi)(md_1 + md_2) \\ + \sinh(2p_r y_1) \cos(2p_m y_1) \cos(m\pi)(md_2(p_m + \frac{m\pi}{y_1}) \\ + md_1(p_m - \frac{m\pi}{y_1})) \end{pmatrix} (\cos(2\varphi - \pi))$$

III.5. Conclusion

Après la présentation du dispositif de chauffage par induction étudié, deux résolutions analytiques sont développées pour la modélisation du couplage faible de la magnétothermique. La première, basée sur la méthode de séparation de variables, est utilisée pour résoudre le problème magnétodynamique. La deuxième, basée sur les fonctions de Green, est utilisée pour résoudre le problème thermique en régime transitoire. Cette

modélisation analytique aboutit à des expressions mathématiques, simple à programmer, des grandeurs électriques, magnétiques et thermiques caractérisant le dispositif de chauffage par induction étudié. En plus ces dernières sont directement liées aux paramètres géométriques, physiques, et électriques du dispositif étudié. Une étude paramétrique est facilement envisageable.

Dans le chapitre suivant nous exploitons ce modèle analytique développé en faisant une étude paramétrique du dispositif de chauffage étudié, et nous comparons nos résultats avec ceux obtenus avec un calcul numérique par éléments finis à l'aide du Logiciel COMSOL.

Chapitre IV

Application pour le chauffage des plaques d'aluminium et validation par La Méthode des éléments finis

IV.1 Introduction

Ce chapitre sera consacré à la validation et l'exploitation des modèles analytiques développés. L'application sera effectuée sur un dispositif de chauffage à flux transverse (TFIH) pour chauffer des plaques d'aluminium.

Nous présentons d'abord le dispositif de chauffage utilisé pour la validation des modèles électromagnétique et thermique. Avant d'exploiter le modèle analytique de la magnétothermique développé, nous confrontons nos résultats, pour validation, avec ceux obtenus en utilisant le logiciel COMSOL.

Dans la partie exploitation des modèles électromagnétique et thermique, nous présentons les résultats donnant l'évolution spatiotemporelle des différentes grandeurs magnétothermique caractérisant le dispositif de chauffage étudié. En fin une étude paramétrique du dispositif sera présentée.

IV.2. Description du dispositif utilisé pour l'application

L'inducteur à flux transverse est l'une des techniques la plus utilisée dans le chauffage électrique par induction. Au cours du processus de chauffage la plaque du métal passe au travers de paires de bobines d'induction situées de part et d'autre de la plaque.

Le dispositif du chauffage par induction considéré dans cette application est constitué d'une plaque conductrice de forme rectangulaire, et d'un double inducteur triphasé (Fig. IV.1). Les paramètres physiques et géométriques sont donnés dans le tableau (IV.1).

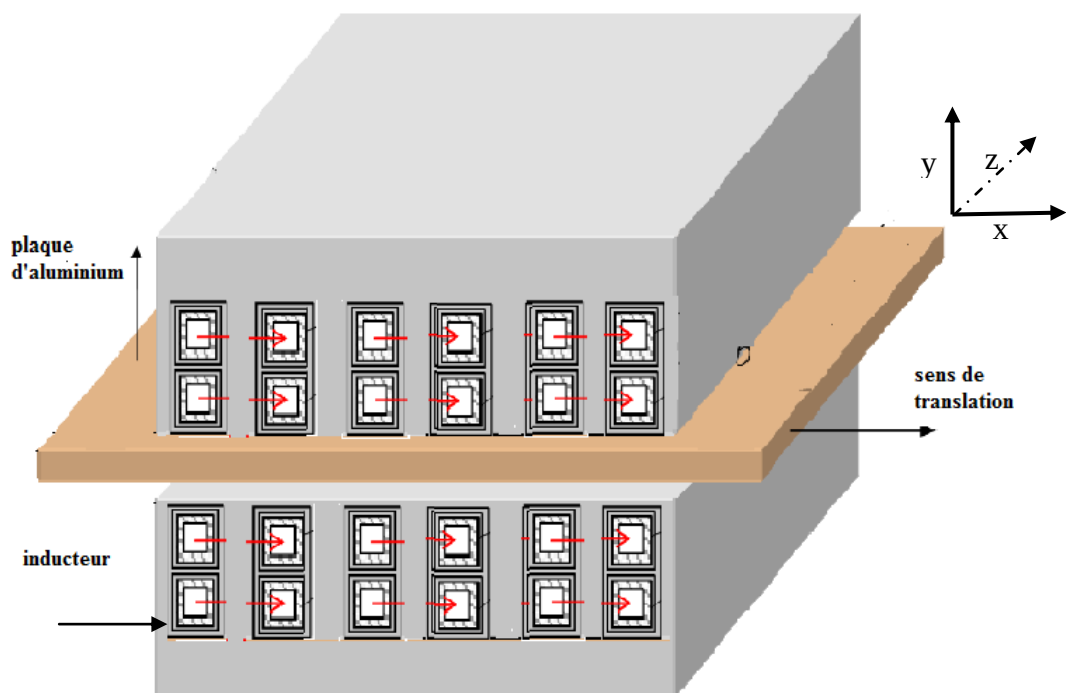


Fig. IV.1 Dispositif de chauffage par induction à flux transverse (TFIH)

symbole	Designation	valeur
$2*y_1$	Epaisseur de la plaque	2cm
y_2	Hauteur du bobinage	1.4cm
e	Epaisseur du bobinage	4cm
a	Largeur d'une encoche du bobinage	15cm
b	Distance entre deux encoches	10cm
L	Longueur de la plaque	1.5m
V	Vitesse de translation de la plaque	0.25m/s
k	Conductivité thermique	$206W.m^{-1}.K^{-1}$
C_p	Chaleur massique	$936J.kg^{-1}.K^{-1}$
J	Densité de courant	$20 A/mm^2$
ρ	Masse volumique	$2707kg / m^3$
f	Fréquence	50 Hz
σ	Conductivité électrique	$37 \times 10^6 (\Omega.m)^{-1}$

Tableau IV.1 Paramètres géométriques et physiques du dispositif étudié

IV.3. Présentation de l'outil de validation (logiciel COMSOL)

Le logiciel COMSOL, anciennement appelé FEMLAB, est avant tout un outil de résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) par éléments finis. Sa particularité est de disposer d'une base de données d'équations permettant de modéliser différents phénomènes physiques, comme l'électromagnétique, l'écoulement de fluides ou encore la déformation des structures [52].

Développé initialement comme une TOOLBOX de MATLAB, il dispose aujourd'hui de son propre environnement graphique permettant à la fois le dessin des géométries et l'affichage de résultats en post-traitement.

Sa spécificité est également de permettre de coupler différentes EDP, de manière à décrire des phénomènes multi physiques. Il est ainsi possible d'obtenir la déformation d'une membrane due à la pression dans un liquide par exemple, ou encore l'élévation de température dans un conducteur dû au passage d'un courant électrique.

Des fonctions avancées permettent d'entrer manuellement des EDP spécifiques. De plus, les données du logiciel sont accessibles depuis MATLAB, ce qui permet la réalisation de scripts.

IV.4 Résultats du modèle électromagnétique

En utilisant le modèle analytique de calcul de champ, précédemment développé, nous présentons les résultats obtenus à l'aide de ce modèle tout en les validant avec ceux obtenus avec le logiciel élément finis (COMSOL). Une étude paramétrique est aussi abordée.

IV.4.1 Induction et potentiel vecteur magnétique

Les figures IV.2 et IV.3 donnent, Pour différentes fréquences, la répartition spatiale du potentiel vecteur magnétique et de l'induction magnétique obtenues, par le modèle éléments finis pour une densité de courant dans l'enroulement de 20 A/mm^2 et une vitesse de translation $V=0.25 \text{ m/s}$. L'effet de l'augmentation de la fréquence sur la pénétration des lignes de champ est mis en évidence.

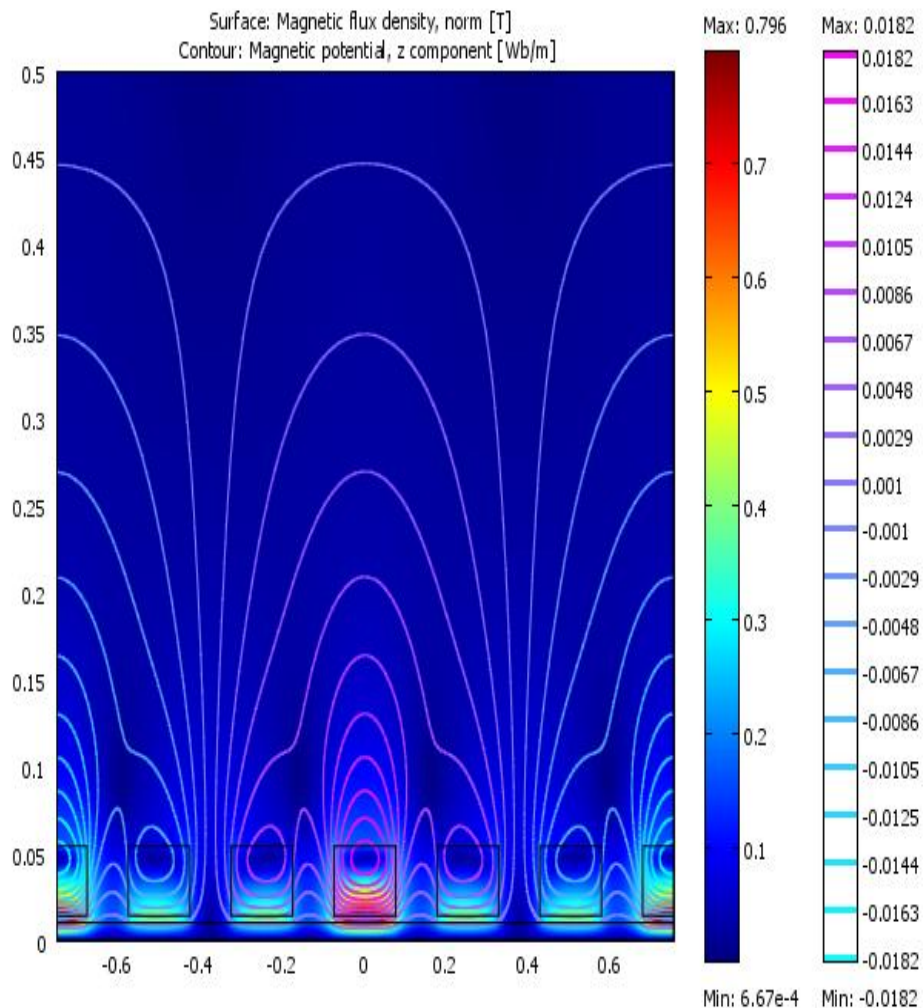


Fig. IV.2 Contour du potentiel vecteur magnétique A et surface de l'induction B pour une fréquence $f=50 \text{ Hz}$ et $V=0.25\text{m/s}$

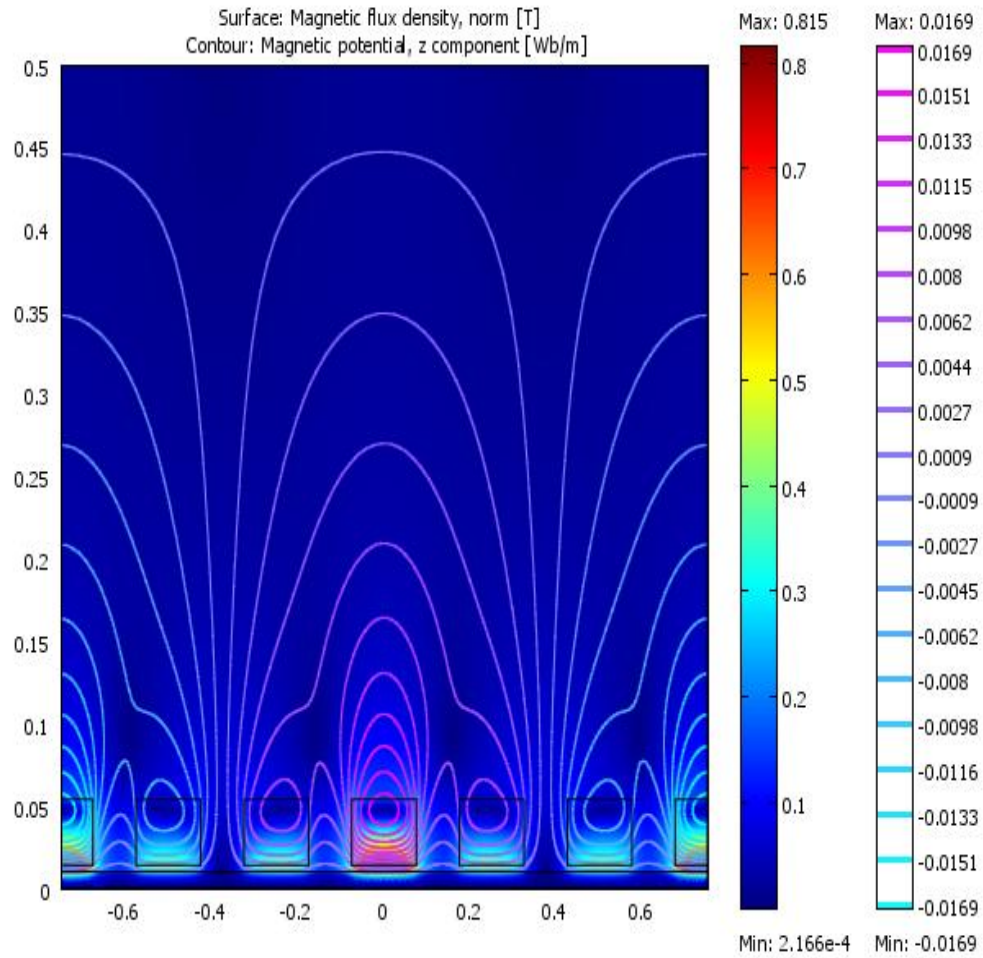


Fig. IV.3 Contour du potentiel vecteur magnétique A et surface de l'induction B pour une fréquence $f=1$ kHz et $V=0.25$ m/s

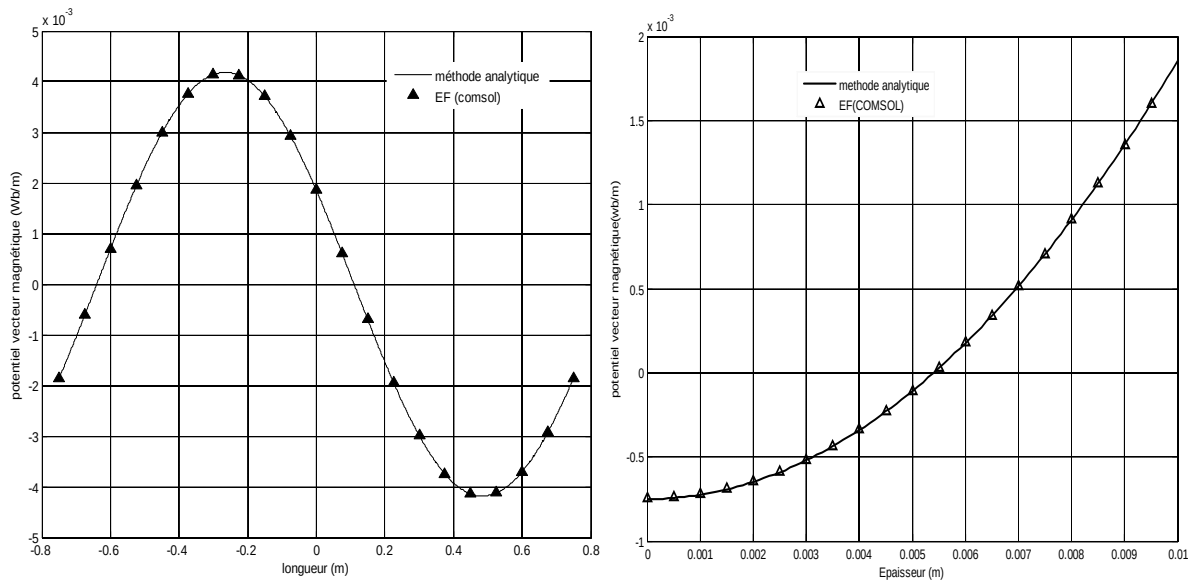


Fig. IV.4 Potentiel vecteur magnétique en fonction de x et y pour ($V=0.25$ m/s, $f=50$ Hz)

Sur les figures IV.4.a et IV.4.b nous présentons respectivement les allures donnant l'évolution du potentiel vecteur magnétique suivant directions x et y . les variations du potentiel vecteur magnétique en fonction de x pour différentes valeurs de y sont données dans la figure (VI.5). En fonction de x le potentiel vecteur suit la variation de la source, et suivant y il présente une allure exponentiel.

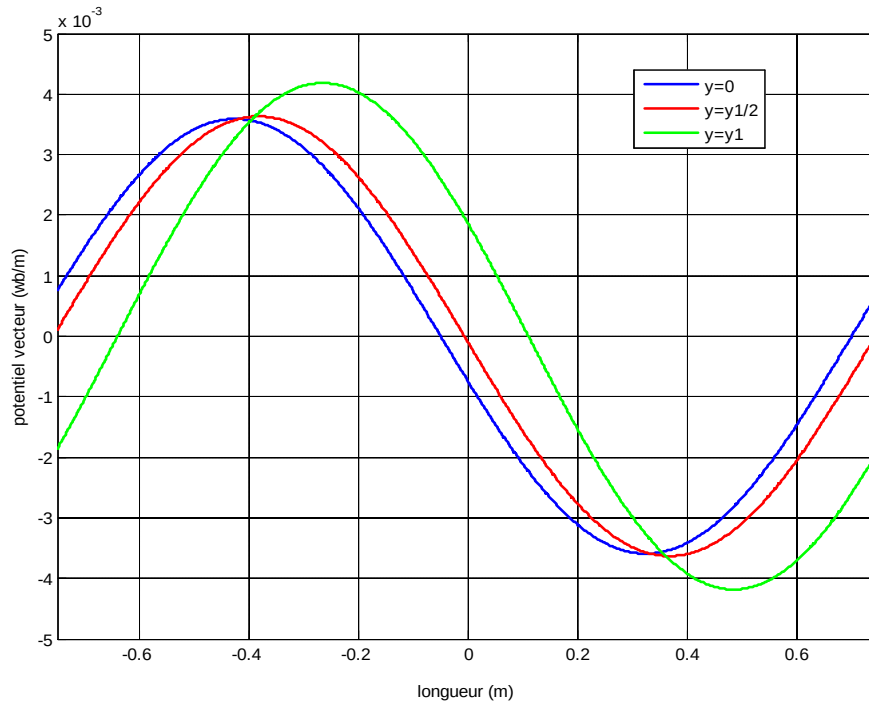


Fig. IV.5 Potentiel vecteur magnétique en fonction de x pour différentes valeur de y et pour ($V=0.25\text{m/s}$, $f=50\text{Hz}$)

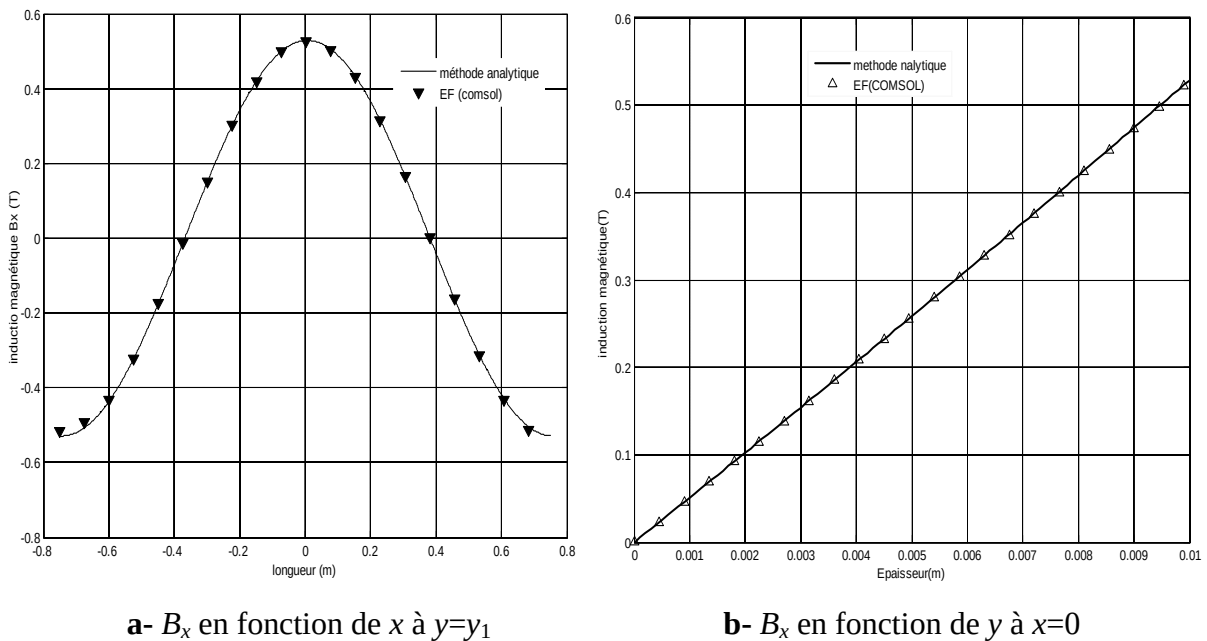


Fig. IV.6 Composante tangentielle de l'induction magnétique B_x en fonction de x et y pour ($V=0.25\text{m/s}$, $f=50\text{Hz}$)

Les figures IV.6.a, IV.6.b, IV.7.a et IV.7.b illustrent respectivement l'évolution des composantes tangentielle et normale de l'induction magnétique suivant x à la surface de la plaque et suivant y au centre de la plaque. Notons que l'amplitude de la composante tangentielle est nettement supérieure à celle de la composante normale. Suivant la longueur de la plaque conductrice les composantes de l'induction ont une variation alternative.

La variation du module de l'induction à la surface de la plaque en fonction de x , et au centre de la plaque en fonction de y est représentée respectivement sur les figures IV.8 et IV.9.

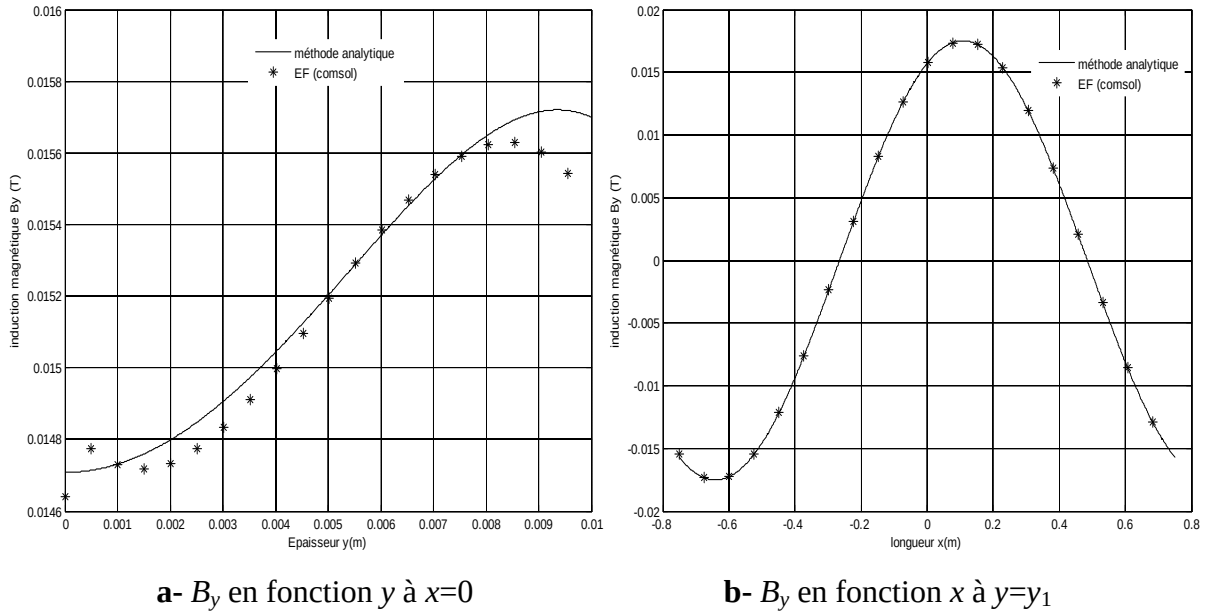


Fig. IV.7 Composante normale de l'induction magnétique B_y en fonction de x et y pour ($V=0.25\text{m/s}$, $f=50\text{Hz}$)

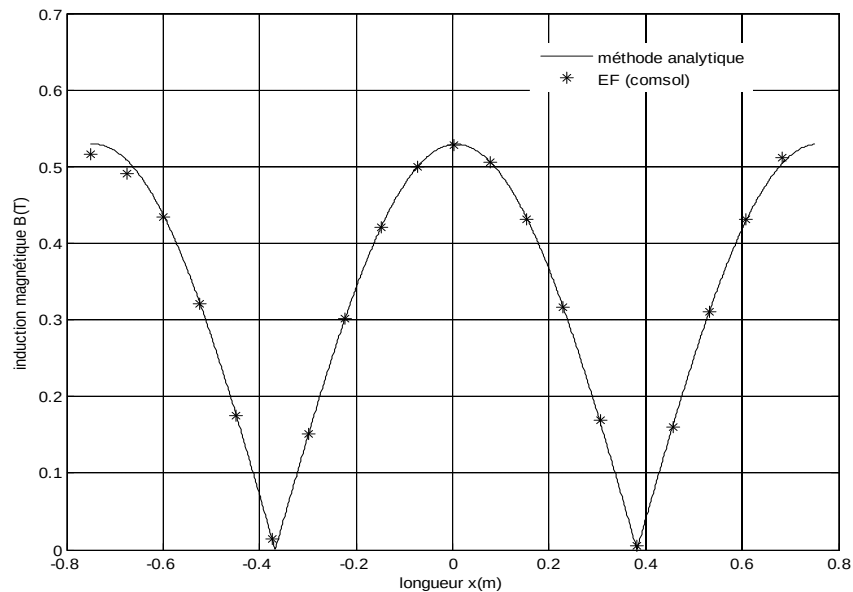


Fig. IV.8 Induction magnétique B en fonction de la longueur de la plaque x pour ($V=0.25\text{m/s}$, $f=50\text{Hz}$)

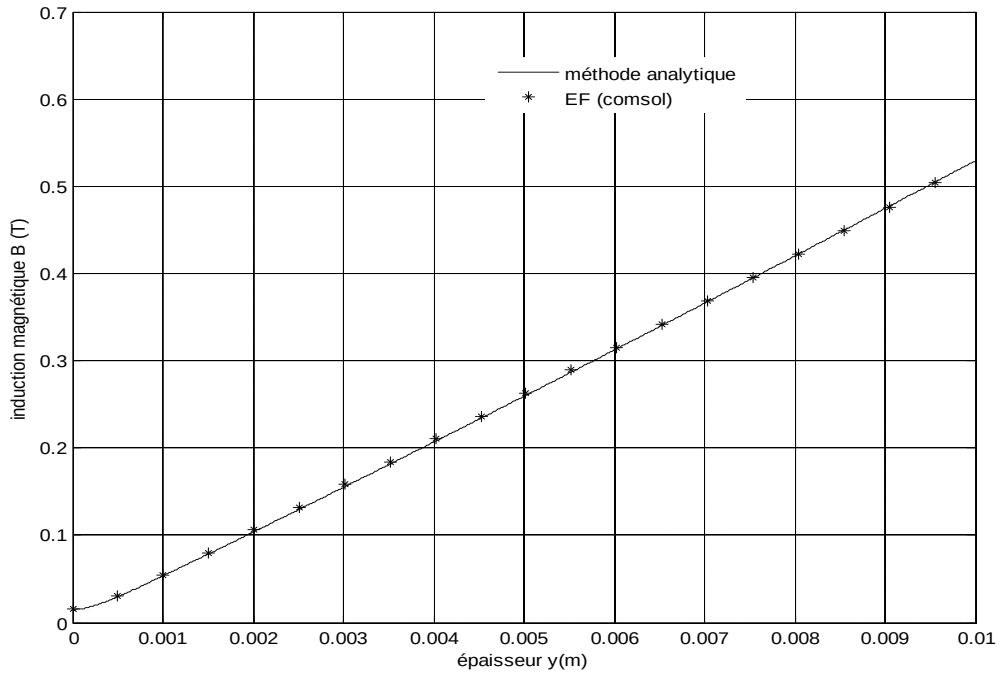


Fig. IV.9. Induction magnétique B en fonction de l'épaisseur de la plaque y pour ($v=0.25\text{m/s}$, $f=50\text{Hz}$, $x=0$)

Nous notons que les résultats obtenus par la méthode analytique concordent bien avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis (COMSOL).

IV.4.2 Densité des courants induits

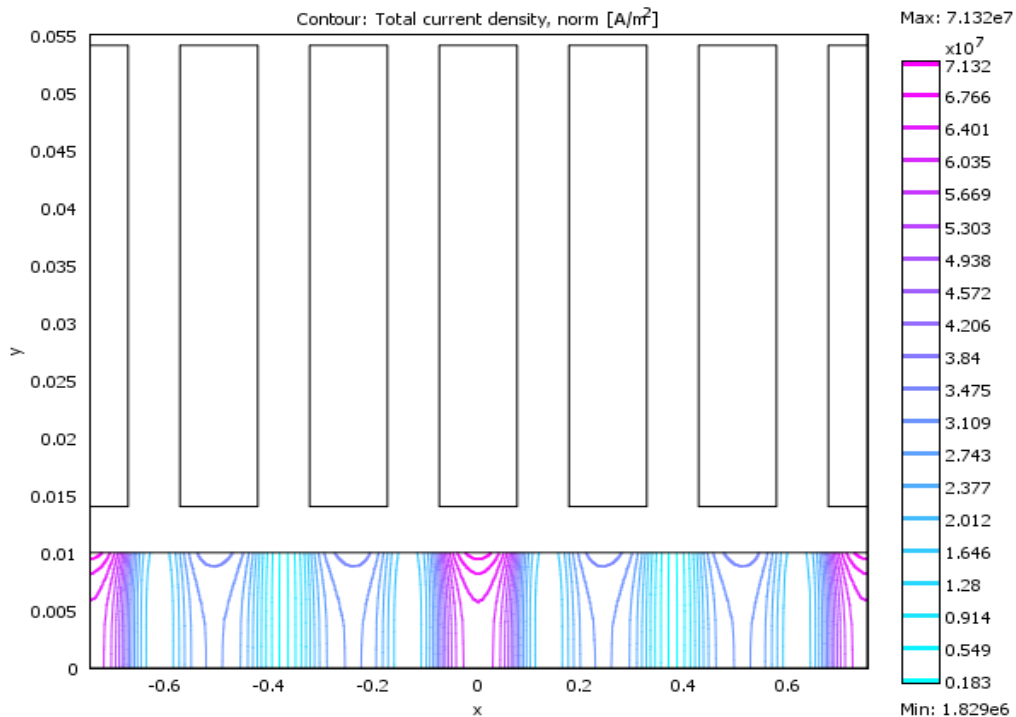


Fig. IV.10 Contour des courants induits dans la pièce à chauffer pour $f=50\text{ Hz}$ et $V=0.25\text{m/s}$

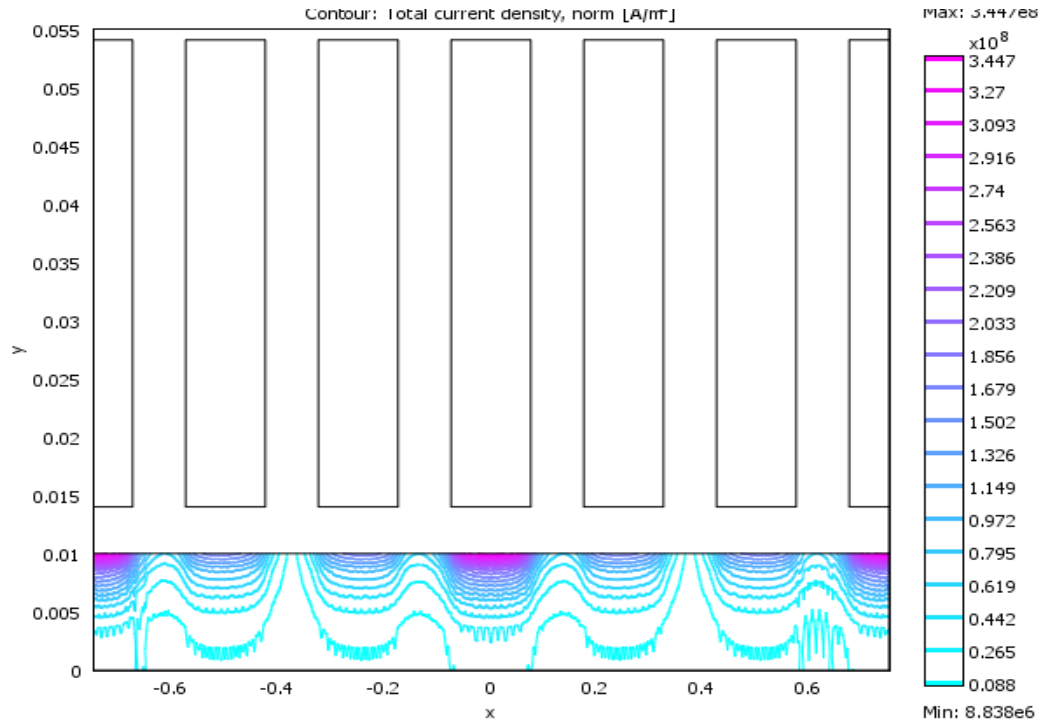


Fig. VI.11 Contours des courants induits dans la pièce à chauffer pour $f=1$ kHz et $V=0.25$ m/s.

Pour différentes fréquences, les figures IV.10 et IV.11 illustrent la répartition spatiale des courants induits dans la plaque conductrice avec une densité de courant source de 20 A/mm^2 et une vitesse de translation $V=0.25$ m/s. En augmentant la fréquence, les courants induits tendent à se concentrer sur la surface de la plaque.

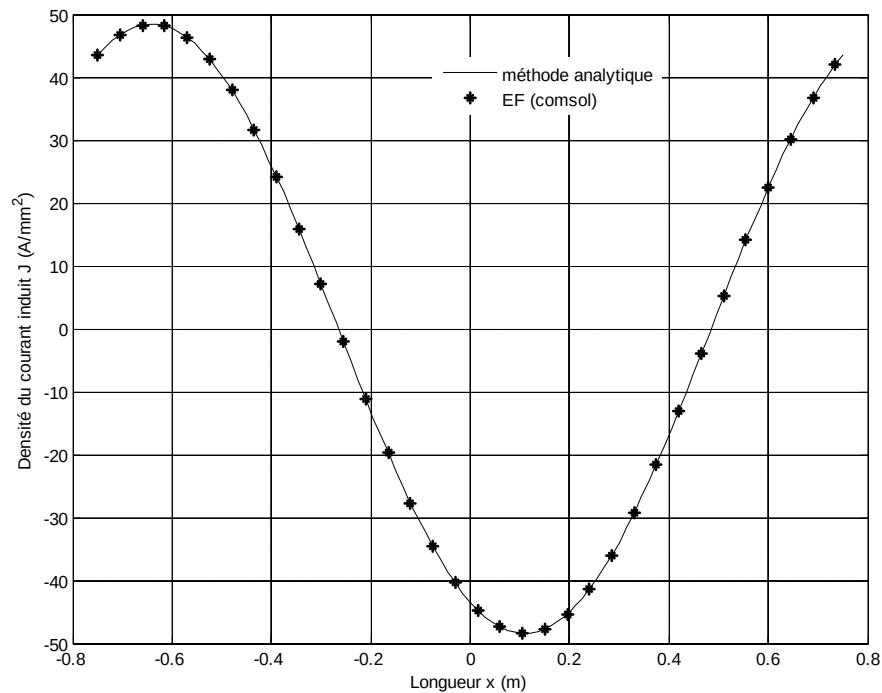


Fig. IV.12 Densité des courants induits en fonction de x pour ($y=y_1$, $V=0.25$ m/s et $f=50$ Hz)

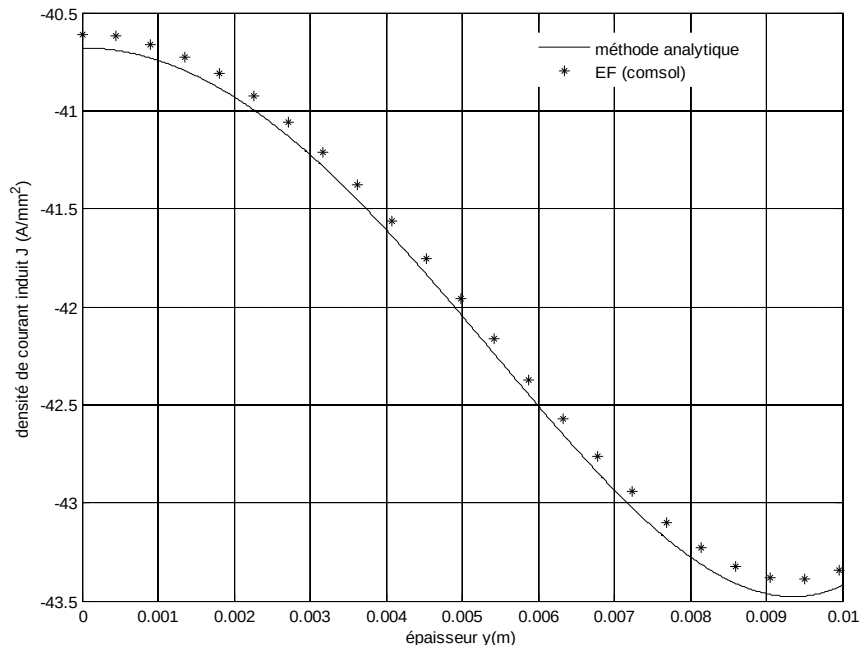


Fig. IV.13 Densité des courants induits en fonction de y pour ($x=0$, $V=0.25\text{m/s}$, $f=50\text{ Hz}$)

Les allures des densités des courants induits dans la plaque conductrice en fonction des coordonnées x et y sont illustrées respectivement sur les figures VI.12 et VI.13 pour une vitesse de translation de $V=0.25\text{ m/s}$ et une fréquence d'alimentation de $f=50\text{Hz}$.

Nous notons que les densités de courants obtenus à l'aide de la méthode analytique concordent bien avec ceux obtenus en utilisant la méthode des éléments finis.

- Influence de la fréquence sur la densité de courant induit

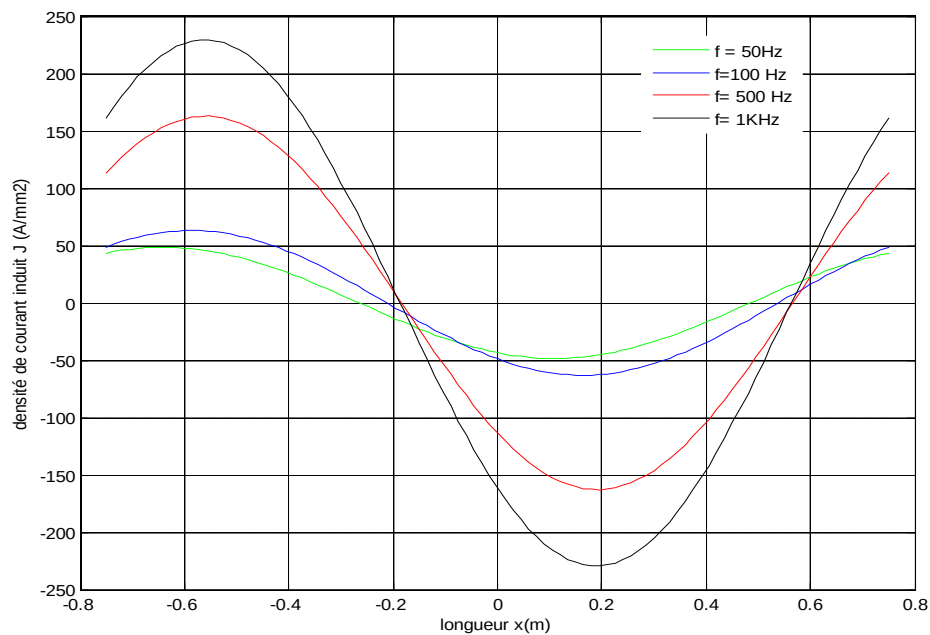


Fig. IV.14 Densité de courant induit en fonction de x pour différentes fréquences ($y=y_1$, $V=0.25\text{m/s}$)

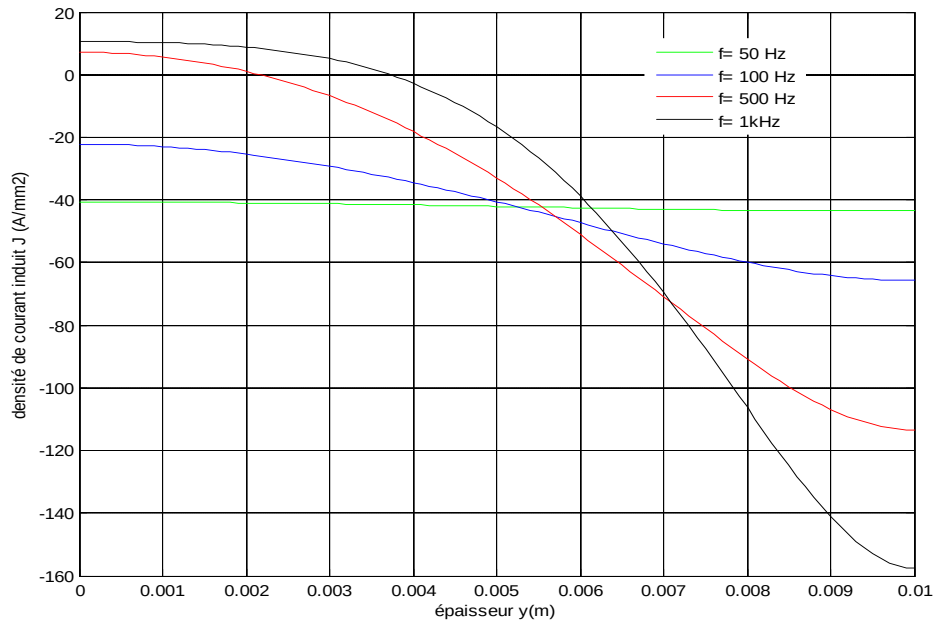


Fig. IV.15 Densité de courant induit en fonction de y pour différentes fréquences et pour ($x=0$, $V=0.25$ m/s)

Les figures VI.14 et IV.15, illustrent respectivement la variation de la densité du courant induit en fonction de x et de y pour différentes fréquences et à une vitesse constante. Nous remarquons que l'augmentation de la fréquence entraîne une augmentation des densités de courant induit.

- Influence de la vitesse sur la densité de courant induit

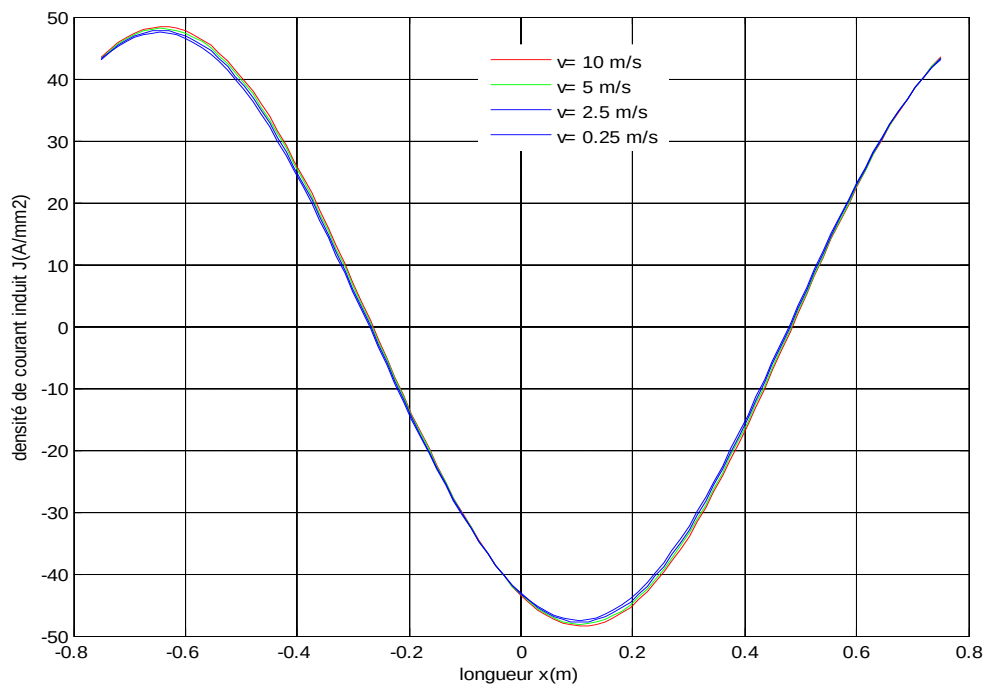


Fig. IV.16 Densité de courant induit en fonction x pour différentes vitesses et pour ($y=y_1$, $f=50$ Hz)

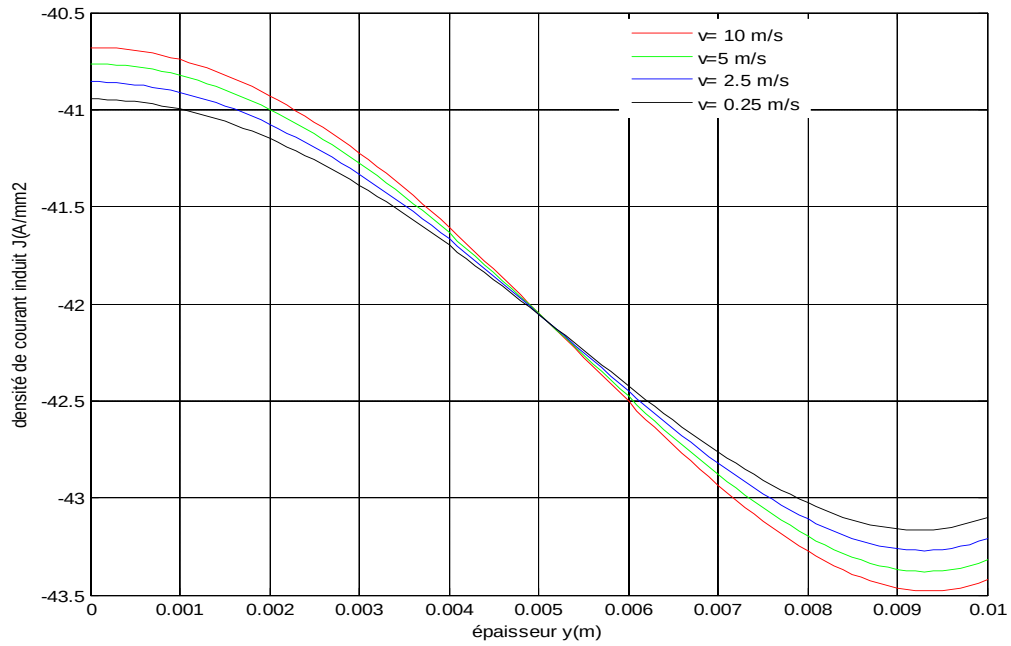


Fig. IV.17 Densité de courant induit en fonction de y pour différentes vitesses et pour $(x=0, f=50\text{Hz})$.

L'influence de la vitesse de translation sur la densité de courants induits en fonction de x et de y pour différentes vitesses est représentée respectivement sur les figures VI.15 et IV.16. Nous remarquons que l'augmentation de la vitesse entraîne une légère augmentation des densités de courant induit.

IV.4.3 Densité de puissance et la puissance totale de chauffe

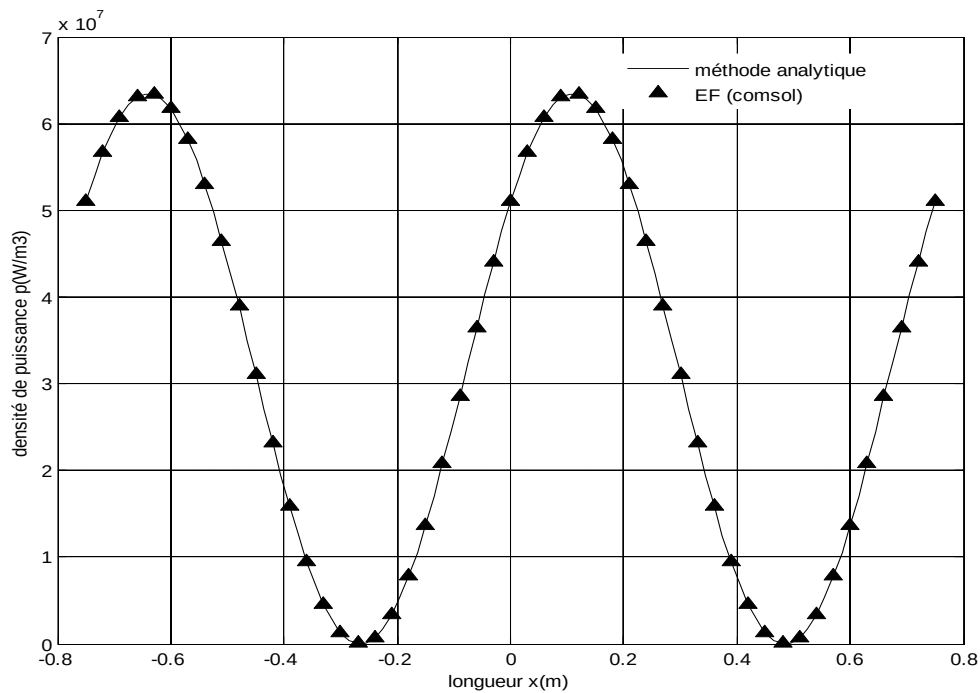


Fig. IV.18 Densité de puissance en fonction de x pour $(f=50\text{Hz}, V=0.25\text{m/s})$

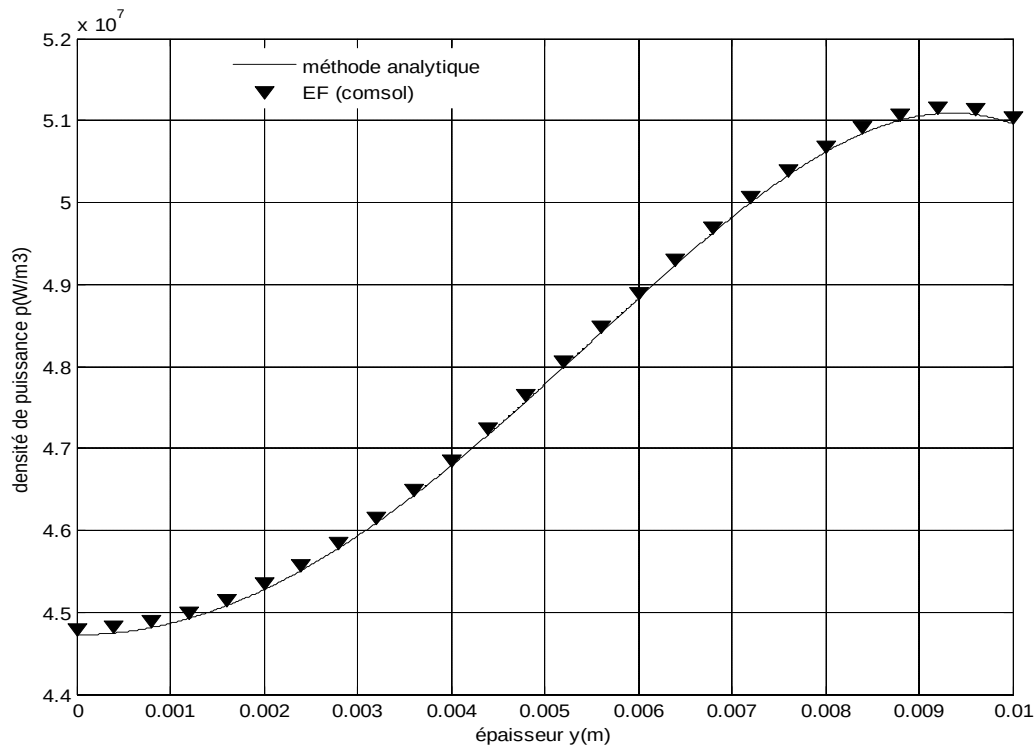


Fig. IV.19 Densité de puissance en fonction de l'épaisseur de la plaque y pour
($x=0$, $f=50\text{Hz}$, $V=0.25\text{m/s}$)

L'évolution de la densité de la puissance obtenues dans la plaque conductrice, en fonction des coordonnées x et y, sont illustrées respectivement sur les figures VI.18 et VI.19 pour une vitesse de translation de 0.25 m/s et une fréquence de 50Hz. Nous notons que les résultats obtenus avec la méthode analytique concordent bien avec ceux obtenus avec la méthode des éléments finis.

Ces figures montrent que la densité de puissance au niveau de la pièce à chauffer, a tendance à être maximale sur la surface de la plaque. En effet, la diminution des densités de courant et de puissance dans la plaque à chauffer dépend de la fréquence et de la vitesse de translation, et aussi des propriétés physiques et électriques de la charge – conductivité électrique et perméabilité magnétique-, paramètres de l'épaisseur de peau. Avec les données utilisées dans ce dispositif ($f=50\text{Hz}$), l'effet de peau n'occupe pas un grand intérêt. Ainsi, une étude paramétrique permet de visualiser l'influence de la variation de la fréquence et de la vitesse, donnant des caractéristiques sur le comportement du dispositif de chauffage par induction à flux transverse (TFIH).

- *Influence de la fréquence sur la densité et la puissance totale de chauffe*

Les figures IV.20 et IV.21 montrent respectivement les variations de la densité (au centre, au milieu et à la surface de la plaque) et de la puissance totale de chauffe en fonction de la

fréquence. On remarque que la densité de puissance est d'autant plus élevée en se rapprochant de la surface de la plaque à chauffer (effet de peau).

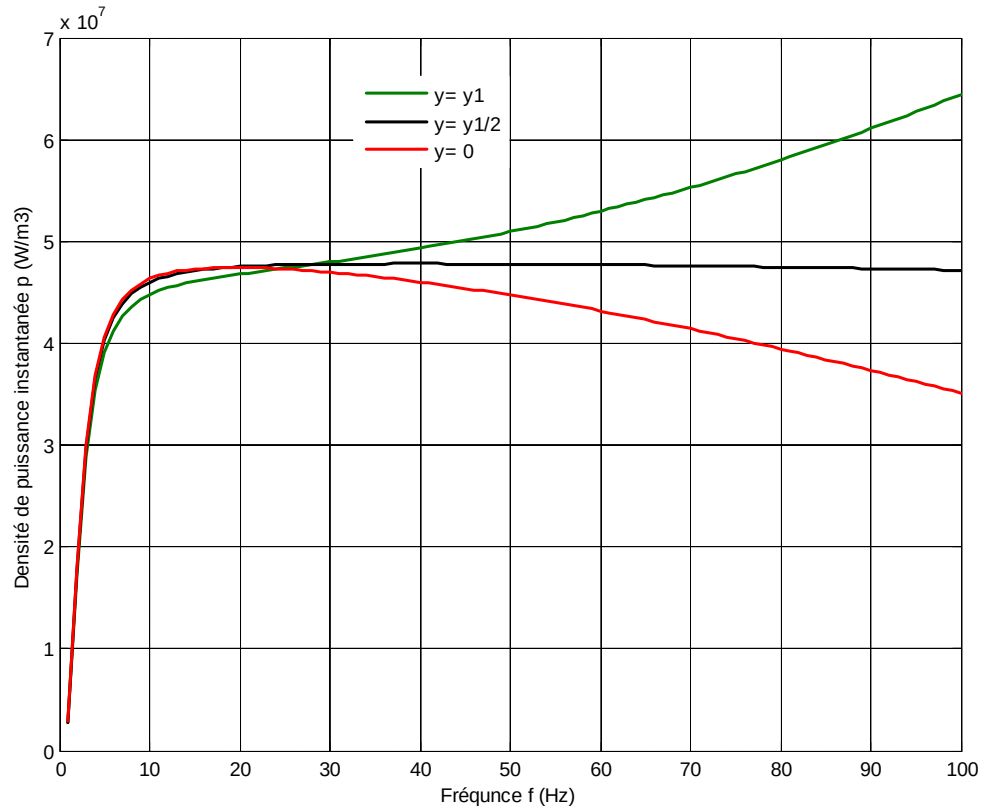


Fig. IV.20 Densité de puissance en fonction de la fréquence pour différente valeur de y et pour ($x=0$, $V=0.25$ m/s)

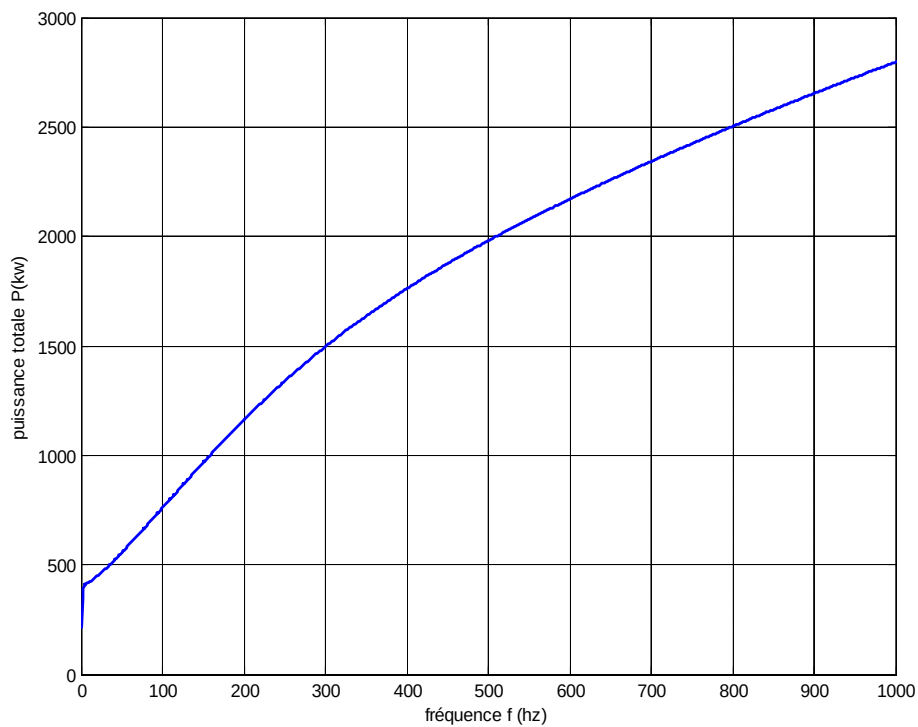


Fig. IV.21 Puissance totale de chauffage en fonction de la fréquence pour ($V=0.25$ m/s)

- Influence de la conductivité sur la densité de puissance de chauffe

L'évolution de la densité de puissance en fonction de y pour différents conductivités est illustrée dans la figure IV.21. On constate que la densité de puissance diminue avec la diminution de la conductivité. Cela nous permet de confirmer le fait la variation de la conductivité électrique avec la température provoque généralement une diminution de la densité de puissance induite dans le matériau à chauffer.

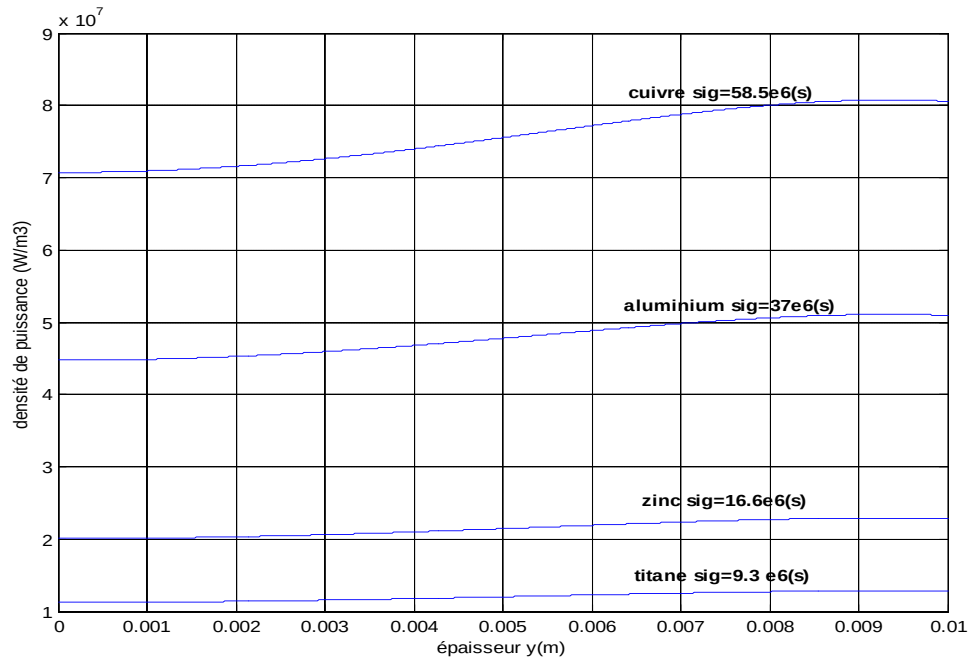


Fig. IV. 22 Densité de puissance en fonction de y pour différents matériaux et pour ($x=0$, $V=0.25$ m/s et $f=50$ Hz)

- Influence de la vitesse sur la puissance totale de chauffe

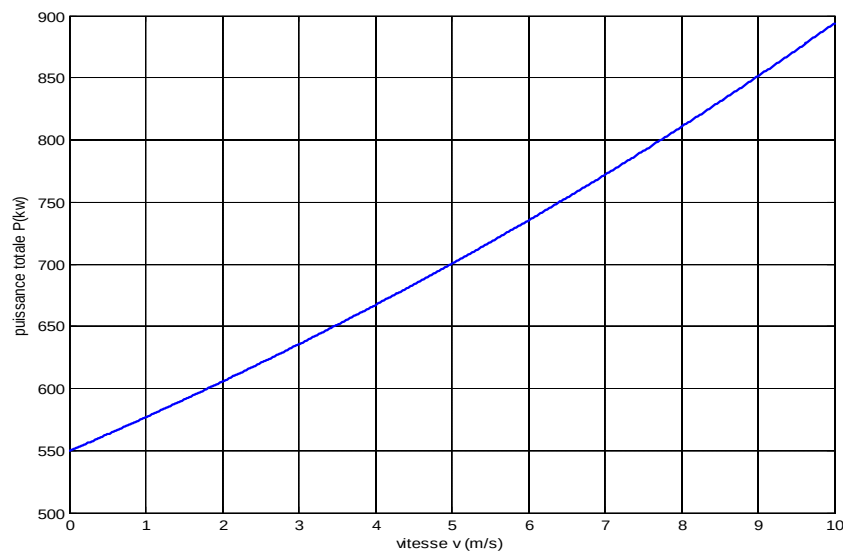


Fig. IV.23 Puissance totale de chauffe en fonction de la vitesse pour ($f=50$ Hz)

L'influence de la vitesse de déplacement de la plaque sur la puissance totale de chauffe est représentée sur la figure IV.23. En effet, la puissance totale de chauffe est d'autant plus élevée que ce paramètre est élevé.

IV.4.4. Influence des paramètres géométriques et électriques

a. Effet de la distance entre l'inducteur et la pièce conductrice

Les figures IV.24 et IV.25, illustrent, respectivement, la variation de la puissance de chauffe en fonction du rapport $(y_2+e/2)/y_1$ pour différentes fréquences et différentes vitesses. Nous constatons que dans les deux cas, la puissance diminue rapidement ce paramètre augmente.

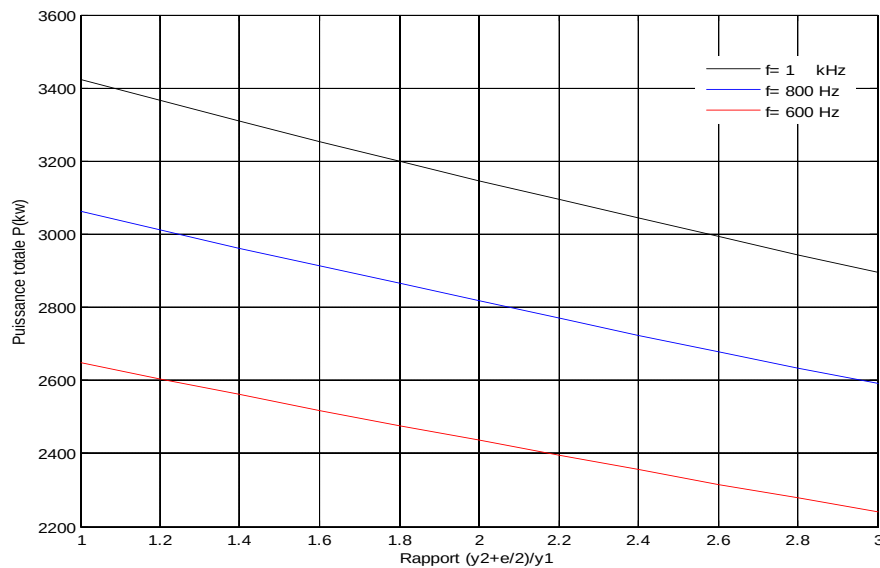


Fig. IV.24 Puissance totale de chauffe en fonction du rapport $(y_2+e/2)/y_1$ pour différentes valeurs de la fréquence et pour $(V=0.25$ m/s, $J=20$ A/mm²)

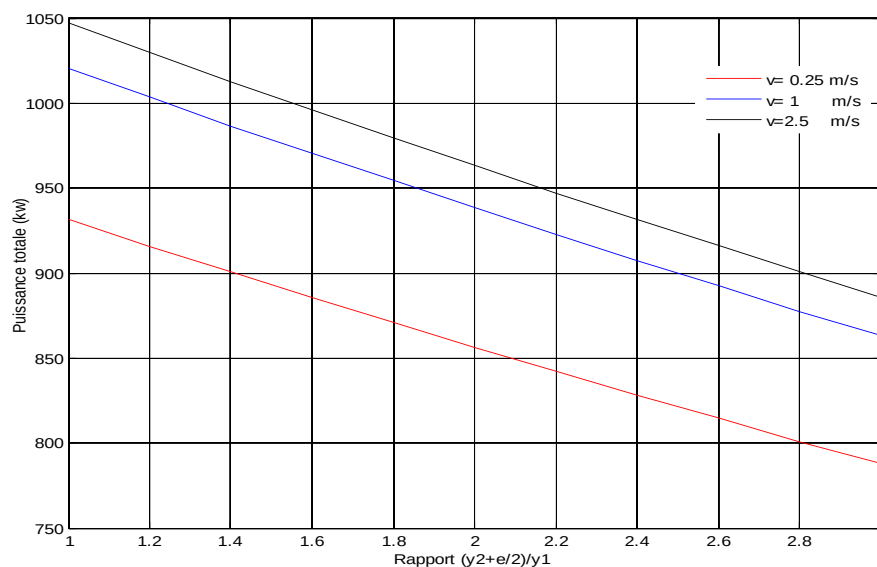


Fig. IV.25. Puissance totale de chauffe en fonction du rapport $(y_2+e/2)/y_1$ pour différentes vitesses et pour $(f=50$ Hz, $J=20$ A/mm²)

La figure IV.25 représente la variation de la puissance totale de chauffe en fonction du rapport $(y_2+e/2)/y_1$ à différentes vitesses et à une fréquence donnée $f=50\text{Hz}$. Nous remarquons que la puissance diminue rapidement quand la distance entre l'inducteur et la pièce à chauffer augmente.

b. Effet de la distance entre deux bobines

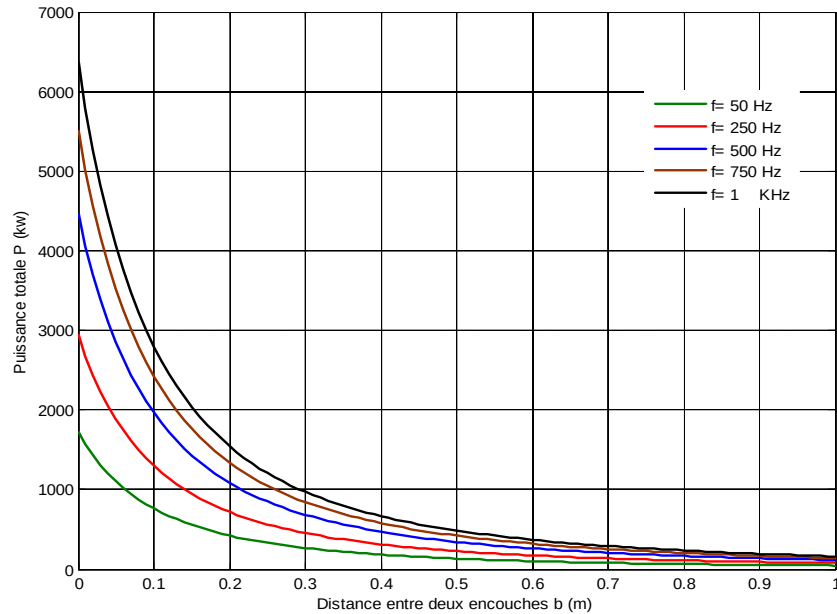


Fig. IV.26 Puissance totale de chauffe en fonction de la distance entre deux bobines b pour différentes fréquences et pour $(V=0.25 \text{ m/s}, J=20 \text{ A/mm}^2)$

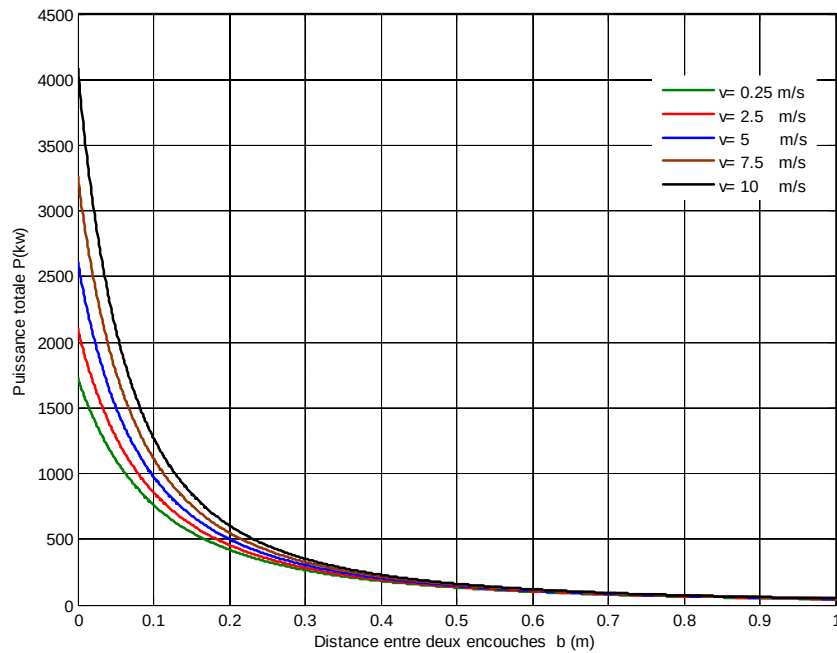


Fig. IV.27. Puissance totale de chauffe en fonction de la distance entre deux bobines b pour différentes vitesses et pour $(f=50\text{Hz}, J=20 \text{ A/mm}^2)$

Les figures IV.26 et IV.27 illustrent l'influence de la distance entre deux bobines sur la puissance de chauffe, respectivement pour différentes fréquences et pour différentes vitesses. Nous remarquons que, dans les deux cas, la puissance diminue très rapidement avec l'augmentation de la distance entre deux bobines.

IV.5. Résultats du problème thermique

Dans cette partie, nous nous intéressons à la validation et l'exploitation du modèle analytique développé pour étudier le transitoire du problème thermique.

Le domaine d'étude considéré pour le problème thermique, se limite uniquement à la plaque conductrice (Aluminium) de longueur finie. Les conditions aux limites adoptées dans ce modèle sont de type Neumann. En effet, il s'agit d'imposer $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ sur les quatre frontières de la plaque. Comme conditions initiales, nous supposons que la température initiale de la plaque est $T_0 = 30^\circ\text{C}$.

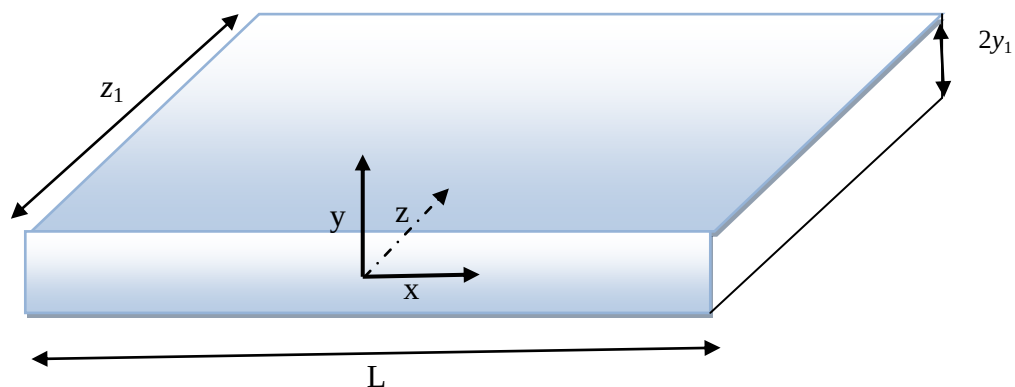


Fig. IV.28. Dimensions de la plaque métallique

VI.5.1 Evolution dans le temps de la température de la plaque

La distribution de la température, obtenu par la méthode des éléments finis, dans la plaque à chauffer est représentée, pour deux instants différents, sur les figures IV.29 et IV.30. L'évolution transitoire de la température, relevée en différents endroits de la plaque conductrice (surface, centre, ...), est représentée sur les figures VI.31 à VI.33.

Le temps nécessaire pour que la température de la plaque passe du 30°C au 524°C est de l'ordre de 50 secondes. La puissance correspondante est d'environ 575 kW. Notant que les résultats obtenus à l'aide du modèle analytique développé concordent bien avec ceux obtenus à l'aide de la méthode des éléments finis.

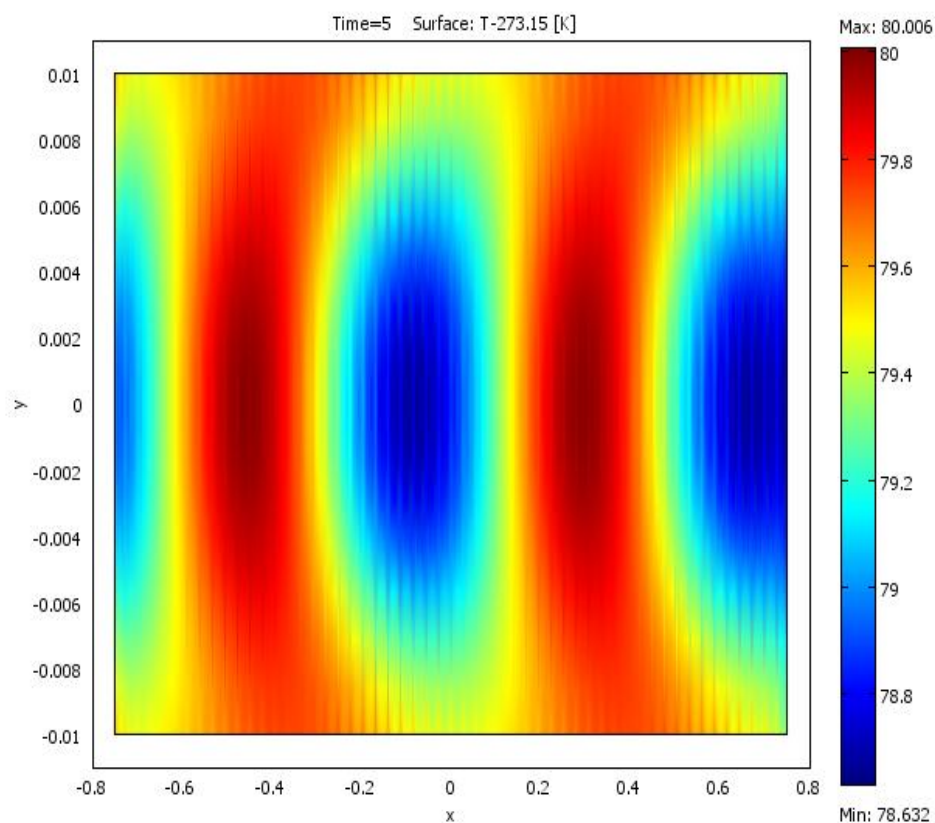


Fig. IV. 29 Répartition de la température dans la plaque à l'instant $t=5s$ ($f=50$ Hz, $V=0.25$ m/s)

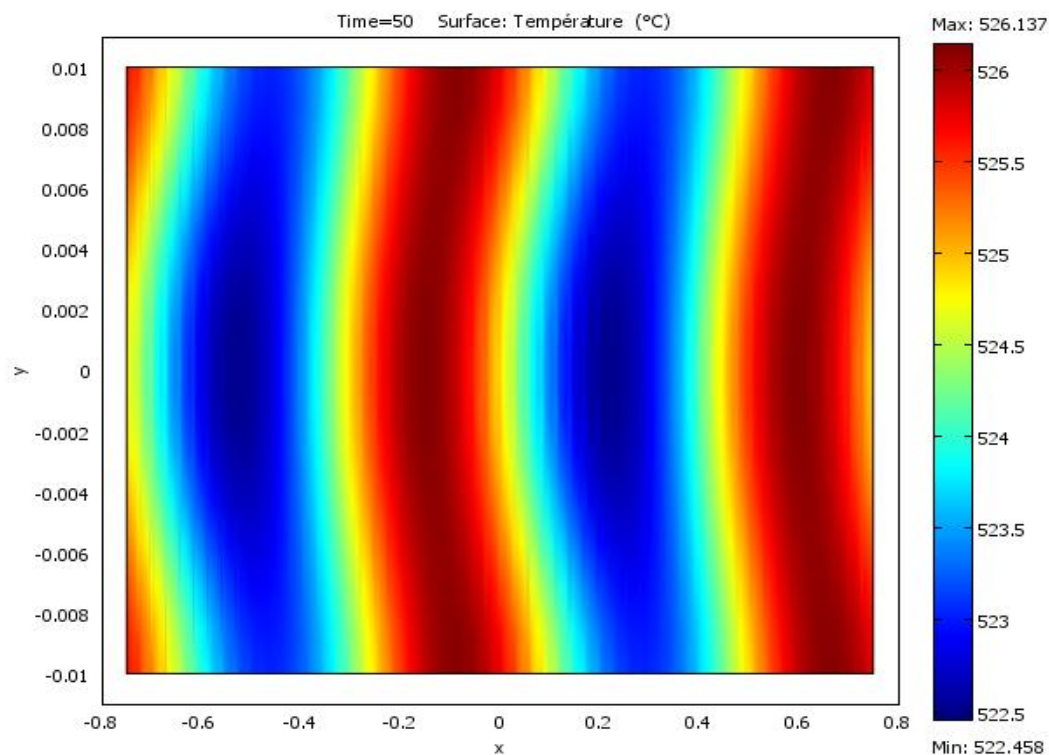


Fig. IV.30 répartition de la température dans la plaque à l'instant $t=50s$ ($f=50$ Hz, $V=0.25$ m/s)

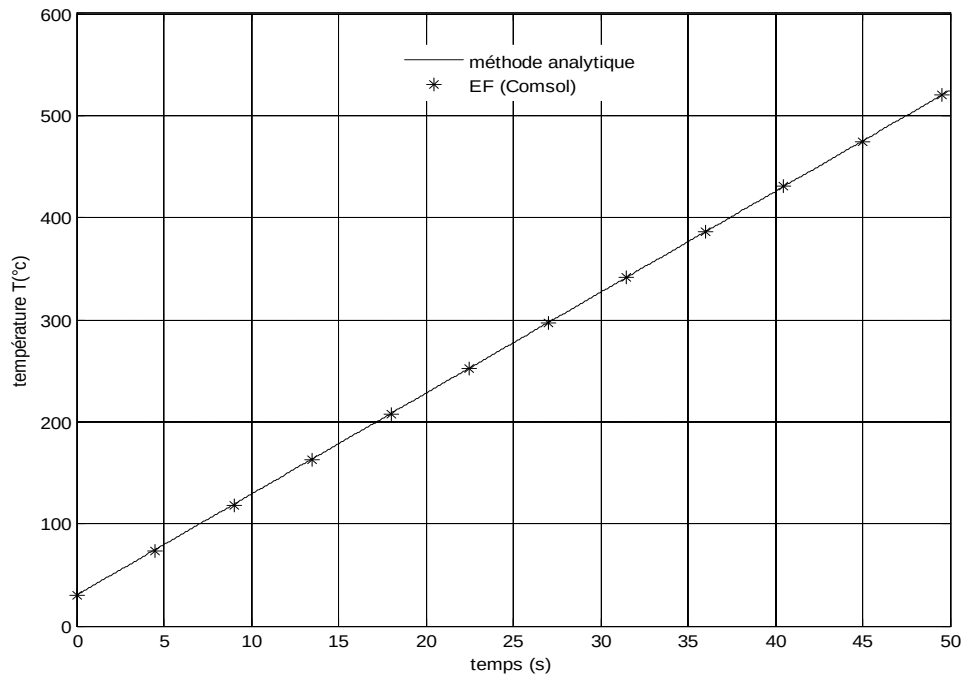


Fig. IV.31 Evolution de la température en fonction du temps à la surface de la plaque pour ($f=50$ Hz, $V=0.25$ m/s, $x=0$, $y=y_1$).

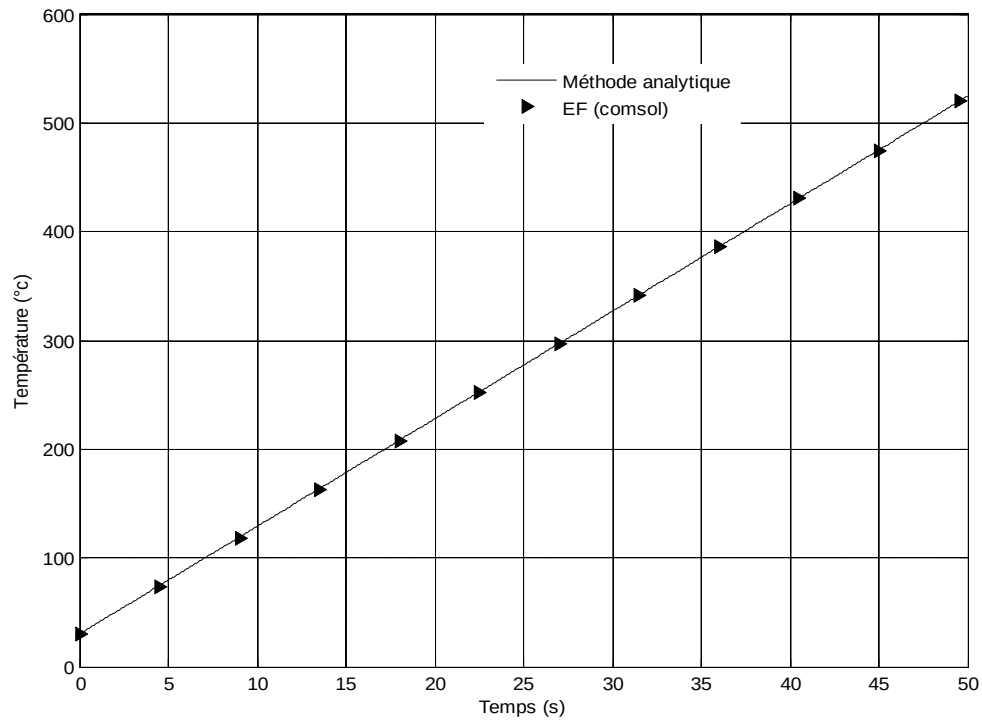


Fig. IV.32 Evolution de la température en fonction du temps au centre de la plaque pour ($f=50$ Hz, $V=0.25$ m/s, $x=0$, $y=0$)

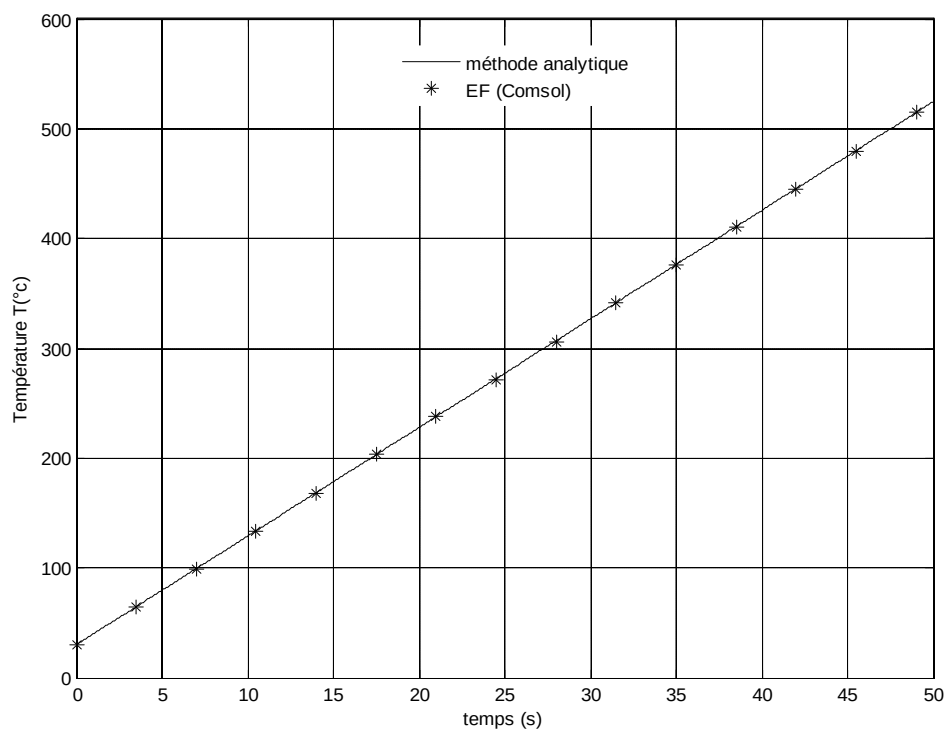


Fig. IV.33 Evolution de la température en fonction du temps au point situé au milieu de la plaque ($x=0$, $y=y_1/2$, $f=50\text{Hz}$, $V=0.25\text{ m/s}$)

VI.5.2 Distribution spatiale de la température de la plaque

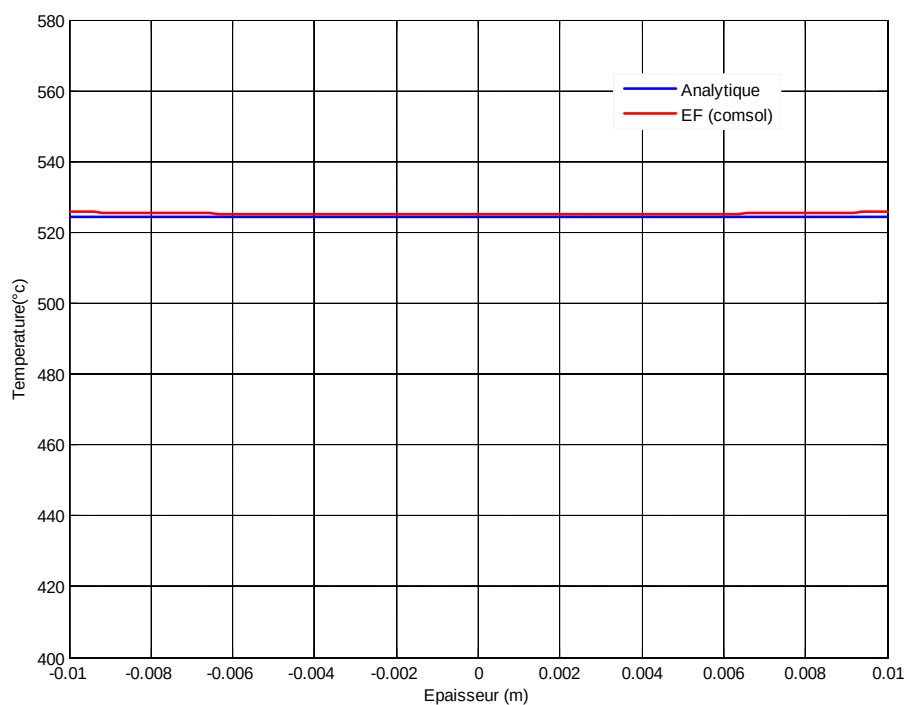
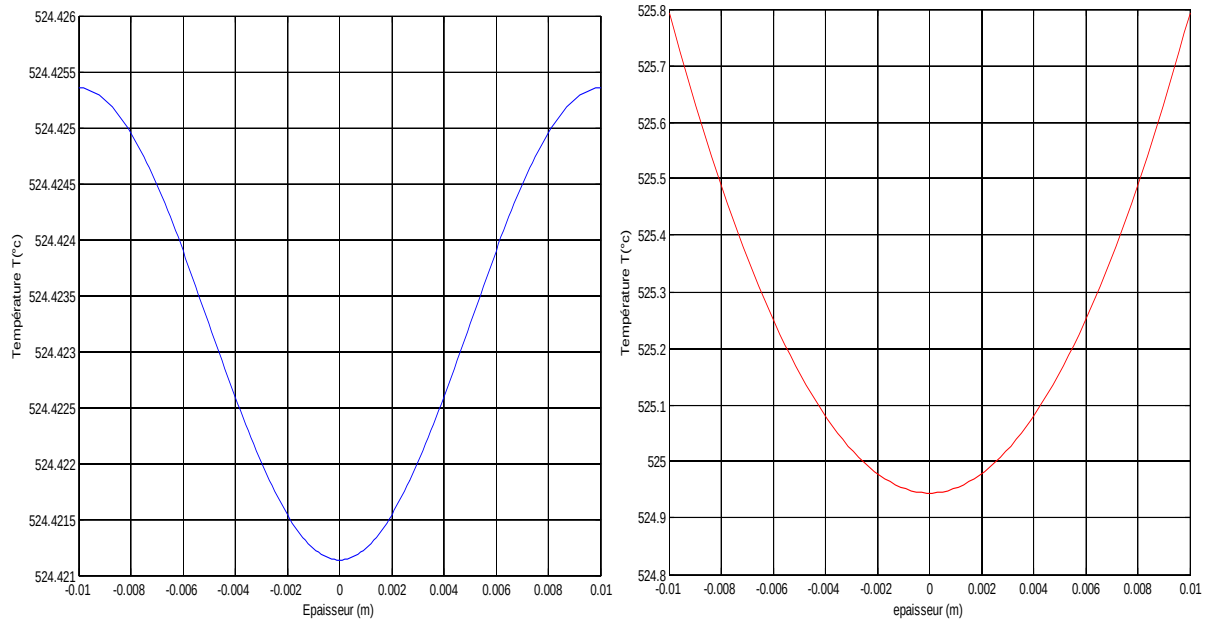


Fig. IV.34 Profil de la température en fonction de l'épaisseur de la plaque y pour ($t=50\text{s}$, $x=0$, $V=0.25\text{m/s}$, $f=50\text{ Hz}$)



a- Méthode analytique. **b- Méthode EF (COMSOL).**
Fig. IV.35 Profil de la température en fonction de l'épaisseur de la plaque y à $t=50$ s (Zoom)

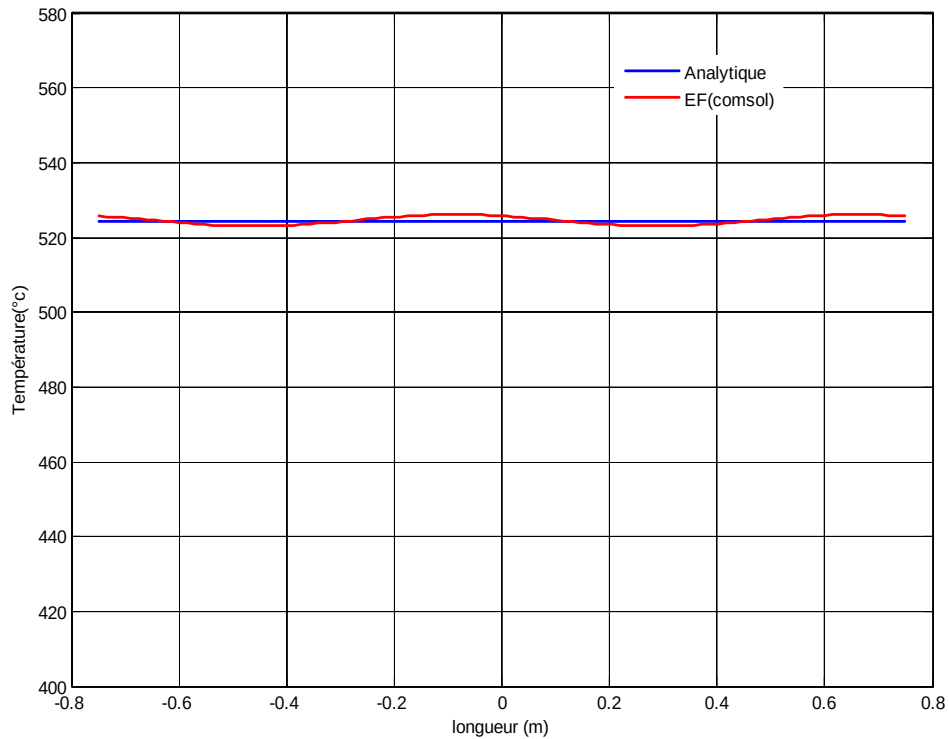
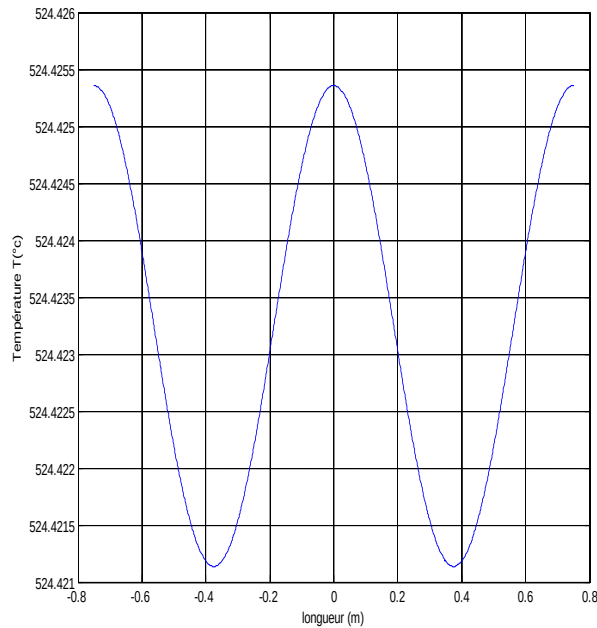
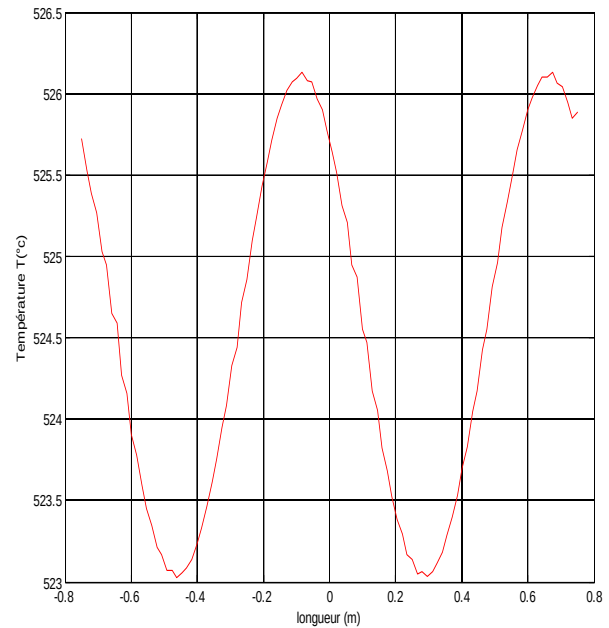


Fig. IV.36 Profil de la température en fonction de la longueur de la plaque x pour
 $(t=50$ s, $y=0$, $V=0.25$ m/s, $f=50$ Hz)

Les figures VI.34 à VI.37 illustrent respectivement le profil de température, avec le zoom, suivant l'épaisseur et la longueur de la plaque à une vitesse de 0.25m/s et une fréquence $f=50$ Hz. Nous remarquons que l'évolution de la température suit les variations de la source thermique.



a-Méthode analytique.



b-méthode EF (COMSOL).

Fig. IV.37 Profil de la température en fonction de la longueur de la plaque x à $t=50s$ (Zoom)

Ces résultats montrent que, selon la distance vertical y à l'instant $t = 50s$, la température à la surface de la pièce est de $525.8^{\circ}C$ et au centre de la pièce elle est de $524.9^{\circ}C$. Ce résultat montre que la température est suffisamment homogène dans la pièce et répond aux exigences de la mise en forme des pièces conductrices.

Finalement, nous remarquons une concordance entre les résultats obtenus par le modèle analytique utilisant la méthode des fonctions de GREEN et ceux obtenus numériquement (COMSOL).

VI.5.3 Influence de la vitesse et de la fréquence sur la température de la plaque

L'influence de la fréquence et de la vitesse sur la température au centre de la plaque est représentée respectivement sur les figures IV.38 et IV.39. Nous remarquons la température de la plaque augmente avec l'augmentation de la vitesse. En terme de fréquence la température varie très rapidement pour des fréquences allant jusqu'à 60 Hz , mais au-delà la pente d'augmentation devient faible. Ceci s'explique par le fait que pour des fréquences importantes la densité de puissance de chauffe devient faible au centre de la plaque et très importante à la surface.

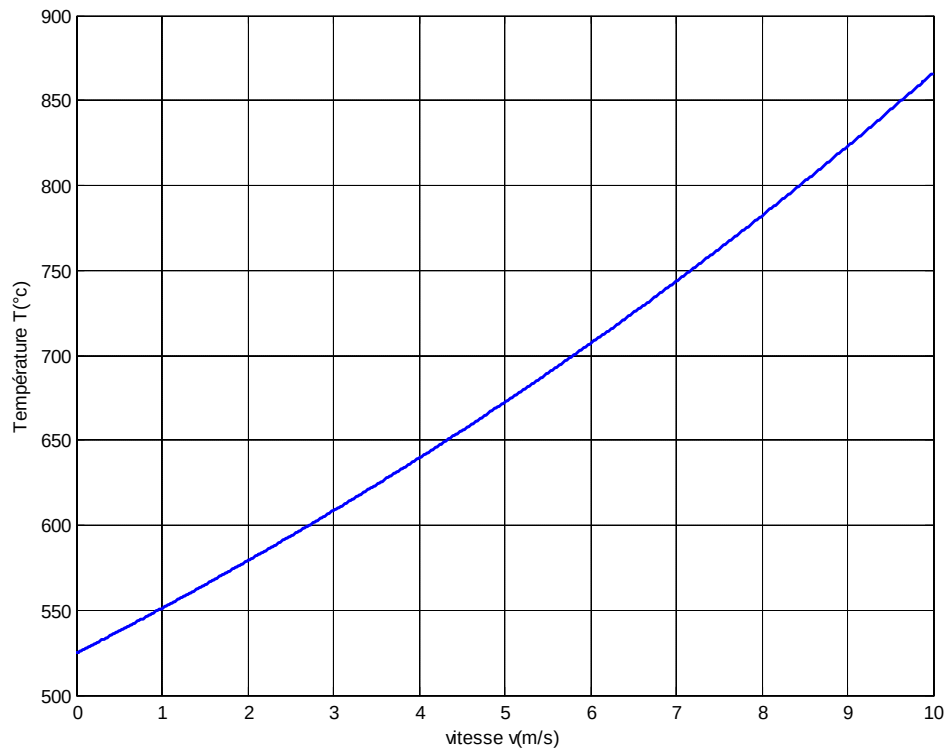


Fig. IV.38 Température au centre de la plaque en fonction de la vitesse pour
 $(t=50s, f=50 \text{ Hz}, J=20 \text{ A/mm}^2)$

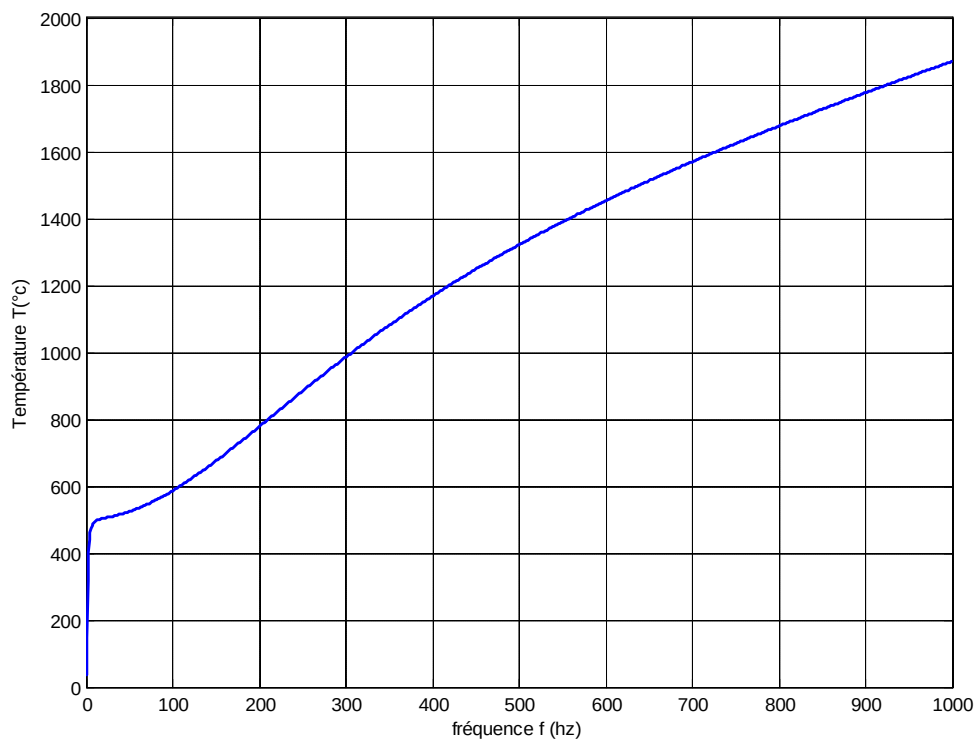


Fig. IV.39 Température au centre de la plaque en fonction de la fréquence pour $(t=50s,$
 $V=0.25\text{m/s}, J=20 \text{ A/mm}^2)$

IV.6. Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à la validation et l'exploitation des modèles analytiques, développés précédemment, décrivant les phénomènes magnétothermique intervenant dans un dispositif de chauffage par induction à flux transverse (TFIH). Le dispositif considéré consiste à chauffer des plaques conductrices en mouvement dans un champ magnétique créé par inducteur à bobinage triphasé.

Les résultats obtenus à l'aide des modèles analytiques ainsi développé sont validés avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis (COMSOL).

A travers l'étude paramétrique effectuée nous avons montrés que les performances du dispositif de chauffage par induction à flux transverse dépendent essentiellement des paramètres géométriques de l'inducteur. En effet pour avoir un meilleur chauffage les bobines de l'inducteur doivent être le plus jointives possible.

Selon qu'il s'agit d'un chauffage en surface ou d'un chauffage à cœur, un compromis entre la fréquence et la vitesse de translation de la plaque doit être fait. En effet, un chauffage en surface nécessite une fréquence élevée même sans déplacement, par contre un chauffage à cœur nécessite une faible fréquence avec une vitesse modérée pour avoir une répartition de la densité de puissance plus au moins uniforme dans la plaque à chauffée.

Conclusion générale

Le chauffage par induction est l'une des technologies d'avenir qui peut contribuer aux développements des procédés industriels. Elle se caractérise par sa capacité d'injecter directement et sans contact physique, de l'énergie thermique dans le matériau à chauffer, conducteur de l'électricité. Elle ouvre un champ d'application très important, exploité dans le domaine du chauffage par induction.

Dans ce travail nous avons étudié une structure de chauffage par induction à flux transverse (TFIH) des pièces conductrices (aluminium). Le dispositif consiste à utiliser un champ magnétique variable dans lequel la plaque conductrice est animée d'un mouvement linéaire à une vitesse constante. L'originalité de cette topologie de chauffage réside dans la combinaison du mouvement et de la variation du flux pour produire la puissance de chauffe. L'objectif principal de notre étude été d'élaborer un couplage faible des phénomènes électromagnétique et thermique transitoires dans une géométrie bidimensionnelle.

A l'aide des équations de Maxwell et l'équation de la diffusion thermique, des formulations électromagnétique et thermique sont décrites à partir de leurs équations aux dérivées partielles. Le faible couplage de ces équations, favorise l'utilisation des modèles analytiques. Dans cette optique, un modèle analytique de calcul du champ, basé sur la méthode de séparation des variables, est d'abord développé pour calculer les courants induits et la densité de puissance de chauffe. Ensuite, pour estimer l'évolution spatiotemporelle de température de la plaque à chauffer, un autre modèle analytique, basé les fonctions de Green, a été développé.

Les résultats obtenus à l'aide de ces deux modèles analytiques, que se soit pour les grandeurs électromagnétiques ou pour les grandeurs thermiques, sont en bonne concordance avec ceux obtenus à l'aide de la méthode des éléments finis (COMSOL).

Les résultats obtenus à travers l'exploitation des deux modèles analytiques développés, montrent que les performances du dispositif de chauffage par induction à flux transverse dépendent essentiellement des paramètres géométriques de l'inducteur et de la nature du chauffage désiré. En effet, quel que soit sa nature, pour obtenir un meilleur chauffage les bobines de l'inducteur doivent être le plus jointives possible. Cependant, selon qu'il s'agit d'un chauffage en surface ou d'un chauffage à cœur, un compromis entre la fréquence et la vitesse de translation de la plaque doit être fait. En effet, un chauffage en surface nécessite une fréquence élevée même sans déplacement, par contre un chauffage à

cœur nécessite une faible fréquence avec une vitesse modérée pour avoir une répartition de la densité de puissance plus au moins uniforme dans la plaque à chauffée.

En perspective, de nouvelles voies de recherche peuvent être envisagées afin d'enrichir et d'améliorer ce travail. Les principales sont :

- L'intégration des matériaux supraconducteurs dans l'inducteur
- Prendre en considération les non linéarité du problème $\sigma(T)$ et $k(T)$.
- Les échanges thermiques avec le milieu extérieur.
- Eventuellement un modèle numérique tridimensionnel 3D.

References bibliographies

- [1] **S. L. Ho, , Junhua Wang, and Y. H. Wang** “A Novel Crossed Traveling Wave Induction Heating System and Finite Element Analysis of Eddy Current and Temperature Distributions” IEEE Trans. Magn., vol. 45, no.10, pp. 4777–4780, Oct. 2009..
- [2] **T. Lubin ,D. Netter, J. Leveque and A. Rezzoug, "** Induction heating of aluminium billet subjected to a strong rotating magnetic field produced by superconducting windings". IEEE Transactions on Magnetism, volume 45, N°5, pages 2118-2127 , mai 2009
- [3] **M. Runde and N. Magnusson**, “Induction heating of aluminum billets using superconducting coils,” Physica C, vol. 372–376, pp. 1339–1341, Aug. 2002.
- [4] **M. Runde and N. Magnusson**, “Design, building and testing of a 10 kW superconducting induction heater,” IEEE Trans. Appl. Supercond., vol.13, no. 2, pp.1612–1615, Jun. 2003.
- [5] **N. Magnusson and M. Runde**, “Efficiency analysis of a high -temperature superconducting induction heater,” IEEE Trans. Appl. Supercond., vol. 13, no. 2, pp. 1616–1619, Jun. 2003.
- [6] **M. Fabbri, A. M. Forzan, and al**, “Experimental and numerical analysis of DC induction heating of aluminium billets” IEEE Trans. Magn., vol. 45, no. 1, pp. 192–200, January. 2009.
- [7] **J. Xu, Z. Yao et V. Rajagopalan**, “Modélisation et Simulation Couple Magnétothermique du Processus de Chauffage par Induction”, IEEE 1998.
- [8] **Philippe Laurier**, “Le système électrique et la consommation : des origines à nos jours”, Livre collectif “ Electricité : Voyage au cœur du système”, Paris, 1999.
- [9] **Gérard Develey** , “Chauffage par induction électromagnétique : principes”, Technique d’ingénieur, D5935, 2000.
- [10] **Moussaoui Abdallah, Rabah Diabi, Ali Belhamra**, “Industrial application for induction heating”, Journal of engineering and applied sciences, 2(7):1178-1182, 2007.
- [11] **Romain Pascal**, “Modélisation du traitement thermique superficiel par induction”, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- [12] **M. Sven Wanser**, “Simulation des phénomènes de chauffage par induction application à la trempe superficielle”, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1995.
- [13] **Jean-Pierre Faroux, Jacques Renault**, “ Elcctromagnétisme2, Equations de Maxwell et phénomènes d’induction”, Dunod, Paris, 1998.

- [14] **J.L. Queyrel, J.Mesplède**, “Electromagnétisme, précis de physique”, Edition Bréal, France, 1996.
- [15] **E. Wrona, B. Nacke, D. Resetov**, “3D-Modelling of the transient heating process for induction surface hardening”, International Scientific Colloquium Modelling for Electromagnetic Processing, Hannover, March 24-26, 2003.
- [16] **L. L. Faulkner**, “Optimal control of induction heating processes”, Group de Taylor et Francis LLC, 2007.
- [17] **Gérard Develey**, “Chauffage par induction électromagnétique : technologie”, Technique d’ingénieur, D5936, 2000.
- [18] **Théodore Wildi, Gilbert Sybille**, “Électrotechnique”, De Boeck, 4^{iem} édition, Bruxelles, 2005.
- [19] **Maurice Reyne**, “Procédés d’assemblage des plastiques”, Technique d’ingénieur, BM7602, 2001.
- [20] **Ammar Tibouche**, “Contribution à la modélisation analytico-numérique de systèmes magnétothermiques axisymétriques”, Mémoire de Magister, Université de Bejaia, 1996.
- [21] **Pierre Fauchais**, “Plasmas thermiques : production”, Technique d’ingénieur, D2820v2, 2007.
- [22] **Francois Gaille**, “ physique II Electromagnétisme”, HEIG-VD, Yverdon-Les-Bains, 2001.
- [23]] **G.aubert**, “Electromagnétisme”, DUNOD, Paris, 1971.
- [24] **E.J. Rothwell, M J. Cloud**, “Electromagnetics”, CRC Press LLC, New Works, 2001.
- [25] **Michel Hulin, Nicole Hulin, Denise Perrin**, “Equations de Maxwell Ondes électromagnétiques”, 2^{iem} édition, DUNOD Paris, 1993.
- [26] **André Michel**, “Phénomènes magnétiques et structure”, Masson et Cie Editeurs, Paris 1966.

- [27] **Igor Vrazic, Mária Behúlova , Bohuslav masek , Lothar W. Meyer** “Numerical simulation of induction heat Treatment of hollow shafts From 20MmoCrS4 steel”, Co-Mat-Tech, Slovak University of Technology, October 2004.
- [28] **F. Gardial**, “Electromagnétisme”, Traité D’électricité, volume III, Nouvelle édition revue et augmentée, Presses Polytechniques Universitaires Romandes, 1996
- [29] Le chauffage par induction : conception et application industrielle, note EDF HE 122 W 2242.
- [30] **J.L. Coulomb, J.C. Sabonnadere**, “CAO en Electrotechnique”, Hermes Publishing, Paris, 1985
- [31] **Mohamed Rachid Mekideche**, “ Contribution à la modélisation numérique de torche à plasma d’induction”, Thèse de Doctorat, Ecole centrale de Nantes, 1993.
- [32] **Eric Chauveau**, “Contribution au calcul électromagnétique et thermique des machines électriques application à l’étude de l’influence des harmoniques sur l’échauffement des moteurs asynchrones”, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2001.
- [33] **David Cardinaux**, “Etude et modélisation 3D par élément finie d’un procédé de traitement thermique de tôles embouties après chauffage par induction : application à un renfort de pied central automobile”, Thèse de Doctorat, Ecole nationale supérieure des mines de Paris, 2008.
- [34] **N. Esposito, M. Raugi, A. Tellini**, “Quasi analytical model for eddy currents and force in axisymmetric geometries with moving conductors ,” IEEE Trans. Magn., vol. 29, no. 6, pp. 2407–2409, Nov. 1993.
- [35] **J.L. He, E. Levi, Z. Zabar**, “Analysis of induction type coilgun performance based on cylindrical current sheet model,” IEEE Trans. Magn., vol. 27, no.1, pp. 579–584, JAN.1991.
- [36] **H.K. Versteeg, W. Malalasekera**, “An introduction to computational fluid dynamics, the finite volume method”, John Wiley & Sons Inc, New York, 1995.
- [37] **Yves Jannot**, “cours thermique : transfert et métrologie”, 2005.
- [38] **Ana-Maria Bianchi, Yves Fautrelle, Jacqueline Etay**, “Transfert thermique ”, première édition, Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne, 2004.

- [39] **M Feliachi, G Develey**, Magnéto-thermal behaviour finite element analysis for ferromagnetic materials in induction heating, IEEE Transactions on magnetics, Vol.27, N° 6, November 1991
- [40] **Marie S.**, Un modèle de parallélisation SPMD pour la simulation numérique de procédés de mise en forme des matériaux, Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1997.
- [41] **C. Chaboudez, S. Clain, R. Glardon, J. Rappaz, M. Swierkosz and R. Touzani**, "Numerical Modelling of Induction Heating of Long Workpieces", IEEE Transactions on magnetic, Vol. 30, No. 6, November 1994.
- [42] **Soyris N.**, Modélisation tridimensionnelle du couplage thermique en forgeage à chaud, Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1990
- [43] **C. Chaboudez, S. Clain, R. Glardon, J. Rappaz, M. Swierkosz and R. Touzani**, "Numerical Modelling of Induction Heating of Long Workpieces", IEEE Transactions on magnetic, Vol. 30, No. 6, November 1994.
- [44] **K. S.Yee**, "Numerical solution of Initial Boundary Value Problems involving Maxwell's Equations in Isotropic Media", IEEE Trans. Antennas propag; Vol. 14, mai 1966,
- [45] **G.Touzot, G.Dhatt**, "Une présentation de la méthode des éléments finis ", MALOINE S.A.éditeur, 543p, Paris 1981.
- [46] **R.L.Kontnik** "an equivalent thermal circuit for non ventilated induction motors" , transactions AIEE, Vol.73,1954.
- [47] **P.H.Mellor** "lumped parameter thermal model for electrical machines of TEFC design" , IEE proceedings –B, september 1991.
- [48] **M.Markovic and Y.perriard** "an analytical determination of eddy current losses in configurations with a rotating permanent magnet" , IEEE Trans .Magn., vol.43,no.8,pp.3380-3386, aug.2007.
- [49] **F. Dughiero, M. Forzan, S. Lupi**, "Solution of coupled electromagnetic and thermal problems in induction heating applications", Computation in Electromagnetics, 10-12 April 1996, Conference Publication No. 420, © IEE, 1996.

[50] **Andri D.polyani .Alexander V. Manzhirov** ‘‘handbook for inginners for scientists’’.chapman and Hall/CRC,Taylor.franics group.

[51] **Jerzy Barglik**. ‘‘Induction Heating of Thin Strips in Transverse Flux Magnetic Field’’.
Silesian University of Technology Poland

[52] **tutorial Comsol documentation**. www.comsol.com