

Etude de l'effet des corrélations d'appariement du type isovectoriel sur quelques grandeurs statistiques nucléaires¹

BELABBAS Mohamed ²

Faculté des Sciences et des Sciences de l'Ingénieur,

Université Hassiba Ben Bouali, Chlef

et

Département de Physique Théorique,

Faculté de Physique, USTHB, Alger

Résumé

Ce travail a pour but d'étudier l'influence de l'effet d'appariement neutron-proton (np), du type isovectoriel, sur quelques grandeurs statistiques des systèmes pair-pairs tels que $N \approx Z$. Dans une première étape, les équations du gap à température finie T ont été établies à l'aide du formalisme de l'intégrale fonctionnelle. Elles constituent une généralisation de celles de la théorie BCS à température finie (FTBCS). Dans une seconde étape, les expressions de l'énergie, l'entropie et la capacité calorifique du système ont été établies. Il a été également vérifié que ces dernières généralisent celles de la théorie FTBCS.

Le formalisme a d'abord été testé numériquement dans le cadre du modèle schématique à un niveau. Des cas réalistes ont ensuite été étudiés en utilisant les énergies et états propres d'un champ moyen déformé de Woods-Saxon. Nous avons considéré des noyaux pair-pairs tels que $N = Z$ et dont les valeurs expérimentales des paramètres du gap sont connues.

Les résultats obtenus montrent que :

(i) Le paramètre du gap $\Delta_{np}(T)$ a un comportement similaire à ceux des Δ_{tt} , ($t = n, p$) dans le cadre de la théorie FTBCS. De plus, la valeur critique de la température (au-delà de laquelle les effets d'appariement n-p disparaissent) T_{cnp} est telle que $T_{cnp} < T_{cp} < T_{cn}$.

(ii) Le comportement des Δ_{tt} , ($t = n, p$) dans le présent modèle est différent de celui de leurs homologues de la théorie FTBCS. Ceci se traduit en particulier par un décalage entre les températures critiques T_{cp} et T_{cn} prévues par les deux approches. Ce fait entraîne une différence systématique entre les prédictions des deux modèles, pour toutes les grandeurs statistiques étudiées, dans la région $T_{cnp} < T < T_{cn}$.

(iii) Dans la région $0 \leq T \leq T_{cnp}$, où l'appariement np est effectif, l'énergie du système est diminuée en moyenne de 1% pour tous les noyaux étudiés. Concernant de l'entropie S et la capacité calorifique C , l'effet de l'appariement np dépend de la valeur de T_{cnp} (et donc de celle de $\Delta_{np}(0)$). Si T_{cnp} est petite, l'effet d'appariement np n'est pas visible, car dans cette région S et C sont encore nulles. A l'inverse, cet effet devient visible si la valeur de T_{cnp} est suffisamment importante.

¹Thèse de Doctorat

²Directeur de thèse : Pr. M. FELLAH

1 Introduction

L'étude du noyau atomique est complexe du fait de sa nature quantique et composite. La superfluidité du noyau fait aussi partie des manifestations de ces caractéristiques quantiques. Elle est due à des corrélations d'appariement, relativement faibles, entre les constituants du noyau mais qui sont par exemple à l'origine des différences de masse entre les noyaux pairs et impairs [1]. Sa prise compte est primordiale pour une description fine des propriétés du noyau et de sa dynamique. L'interaction d'appariement peut exister sous deux formes : isovectorielle ($\tau = 1$) et isoscalaire ($\tau = 0$). Le type $\tau = 0$ contient uniquement l'appariement neutron-proton (np) et le type $T=1$ contient en plus l'appariement entre particules identiques. Dans les noyaux pour lesquels N est voisin de Z , et où les protons et les neutrons occupent des couches d'énergies voisines, les niveaux de Fermi respectifs sont voisins, ce qui rend l'appariement np aussi important que l'appariement entre particules identiques [2]. Les corrélations d'appariement np ont fait l'objet de nombreux travaux [2]-[11] à température nulle.

Par ailleurs, les effets de la température ont été jusqu'à présent étudiés essentiellement dans le cadre de l'appariement entre particules identiques. Les principales méthodes utilisées pour cela sont la méthode BCS à température finie (FTBCS) ou ses variantes [12]-[17], le formalisme de l'intégrale de chemin [18]-[24] ou encore d'autres méthodes [26]. Concernant l'appariement isovectoriel, seul un nombre restreint d'études a été effectué [25]-[30].

Le but du présent travail est d'étudier les propriétés statistiques habituelles de systèmes chauds dont les particules interagissent entre elles via l'appariement isovectoriel. Nous utiliserons pour cela le formalisme de l'intégrale fonctionnelle. Ce formalisme sera exposé dans la section 2 : la fonction partition du système sera évaluée dans le cadre de l'approximation statique. L'approximation du point de selle permet alors de déduire l'équation du gap, une fois l'énergie libre établie. Dans la section 3, les expressions des grandeurs statistiques habituelles, à savoir l'énergie, l'entropie et la capacité calorifique du système seront établies. Dans une dernière partie, ces grandeurs seront évaluées numériquement aussi bien dans le cadre d'un modèle schématique que pour des noyaux pair-pairs tels que $N = Z$.

2 Traitement de l'appariement isovectoriel par l'intégrale de chemin

2.1 Hamiltonien

Dans le formalisme de la seconde quantification et du spin isotopique, un système de N neutrons et Z protons totalement appariés est décrit par l'hamiltonien [25], [31]-[33] :

$$\mathcal{H} = \sum_{\nu > 0, t} \varepsilon_{\nu t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) + H_{nn} + H_{pp} + H_{np} \quad (1)$$

où t est l'indice correspondant à la composante du spin isotopique ($t = n, p$).

$a_{\nu t}^+$ et $a_{\nu t}$ représentent respectivement les opérateurs de création et d'annihilation de la particule dans l'état $|\nu t\rangle$, d'énergie $\varepsilon_{\nu t}$; et $a_{\tilde{\nu} t}^+$ et $a_{\tilde{\nu} t}$ ceux de son renversé par rapport

au sens du temps $|\tilde{\nu}t\rangle$, ayant la même énergie et $H_{tt'}$ désigne l'interaction résiduelle de corrélation d'appariement entre deux types de particules t et t' , donné par :

$$H_{tt'} = -G_{tt'} \sum_{\nu\mu>0} P_{\nu tt'}^+ P_{\mu tt'} \quad , \quad t, t' = n, p \quad (2)$$

avec :

$$P_{\nu tt}^+ = a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu}t}^+ \quad , \quad P_{\nu np}^+ = \left(a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu}n}^+ + a_{\nu n}^+ a_{\tilde{\nu}p}^+ \right) \quad (3)$$

et où $G_{tt'}$ caractérise l'intensité de la force d'appariement supposée indépendante des niveaux.

Ce problème n'admet pas en général de solution exacte, il est alors résolu approximativement en imposant la conservation en moyenne du nombre de particules, à la fois pour le nombre de protons et le nombre de neutrons.

On introduit alors un hamiltonien auxiliaire H , tel que :

$$H = \mathcal{H} - \sum_{t=n,p} \lambda_t N_t \quad (4)$$

où les λ_t sont des paramètres de Lagrange et où les N_t sont les opérateurs nombre de particules :

$$N_t = \sum_{\nu>0} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu}t}^+ a_{\tilde{\nu}t}) \quad t = n, p \quad (5)$$

On a donc :

$$H = H_0 + H_1 \quad (6)$$

avec :

$$H_0 = \sum_{\nu>0} \sum_{t=n,p} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu}t}^+ a_{\tilde{\nu}t}) \quad (7)$$

où $\tilde{\varepsilon}_{\nu t} = \varepsilon_{\nu t} - \lambda_t$; et où :

$$H_1 = \sum_{t=n,p} H_{tt} + H_{np} \quad (8)$$

2.2 Fonction partition

Lorsque le système est en équilibre thermodynamique, la plupart de ses propriétés sont déduites de sa fonction de partition quantique :

$$Z = Tr e^{-\beta H_0} S(\beta) \quad (9)$$

où $\beta = \frac{1}{T}$ est l'inverse de la température du système et Tr désigne la trace.

L'opérateur $S(\beta)$ défini par :

$$S(\beta) = e^{\beta H_0} e^{-\beta H}$$

peut se factoriser de la façon suivante :

$$S(\beta) = T_\tau S_{nn}(\beta) S_{pp}(\beta) S_{np}(\beta) \quad (10)$$

où T_τ est un opérateur chronologique permettant de ranger les produits d'opérateurs de droite à gauche par τ croissant et les $S_{tt'}(\beta)$ sont donnés par :

$$S_{tt'}(\beta) = \exp \left(- \int_0^\beta H_{tt'}(\tau) d\tau \right) , \quad t, t' = n, p \quad (11)$$

L'interaction d'appariement isovectorielle étant une interaction à deux corps, elle peut être remplacée par une interaction à un corps avec un champ externe au moyen de la transformation de Hubbard-Stratonovitch [34], ce qui permet d'écrire :

$$S_{tt'}(\beta) = \int \mathfrak{D} z_{tt'} \exp \left[-\pi \int_0^\beta d\tau |z_{tt'}(\tau)|^2 \right] \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \sqrt{\pi G_{tt'}} \left[\sum_{\nu > 0} (P_{\nu tt'}^+(\tau) z_{tt'}(\tau) - P_{\nu tt'}(\tau) \bar{z}_{tt'}(\tau)) \right] \right\} \quad (12)$$

où $z_{tt'}(\tau)$ est le champ complexe externe et $\bar{z}_{tt'}(\tau)$ est son complexe conjugué.

La grande fonction partition du système devient alors :

$$Z = \text{Tr} \exp(-\beta H_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{D} z_{nn} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{D} z_{pp} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{D} z_{np} T_\tau \exp \left[-\pi \int_0^\beta d\tau [|z_{nn}(\tau)|^2 + |z_{pp}(\tau)|^2 + |z_{np}(\tau)|^2] \right] \exp \left[\int_0^\beta d\tau \mathcal{H}'_1(\tau) \right] \quad (13)$$

avec :

$$\mathcal{H}'_1(\tau) = \sum_{t, \nu > 0} \left[\sqrt{\pi G_{tt'}} (P_{\nu tt}^+(\tau) z_{tt}(\tau) - P_{\nu tt}(\tau) \bar{z}_{tt}(\tau)) \right] + \sqrt{\pi G_{np}} (P_{\nu np}^+(\tau) z_{np}(\tau) - P_{\nu np}(\tau) \bar{z}_{np}(\tau)) \quad (14)$$

La complexité du calcul de la fonction partition nous a amené à utiliser l'approximation du chemin statique statique. Dans cette dernière on néglige toutes les fluctuations quantiques dûes au champ. Ceci simplifie considérablement la fonction de partition (13) qui devient par conséquent :

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{D} z_{nn} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{D} z_{pp} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{D} z_{np} \exp \left[-\pi \beta (|z_{nn}|^2 + |z_{pp}|^2 + |z_{np}|^2) \right] \text{Tr} \exp(-\beta H') \quad (15)$$

où l'on a noté par :

$$H' = \sum_{\nu > 0} [V_\nu^+ A_\nu V_\nu + \tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p}] \quad (16)$$

avec :

$$A_\nu = \begin{pmatrix} -\tilde{\varepsilon}_{\nu p} & 0 & \bar{\Delta}_{pp} & \bar{\Delta}_{np} \\ 0 & -\tilde{\varepsilon}_{\nu n} & \bar{\Delta}_{np} & \bar{\Delta}_n \\ \Delta_{pp} & \Delta_{np} & \tilde{\varepsilon}_{\nu p} & 0 \\ \Delta_{np} & \Delta_{nn} & 0 & \tilde{\varepsilon}_{\nu n} \end{pmatrix} , \quad V_\nu = \begin{pmatrix} a_{\nu p}^+ \\ a_{\nu n}^+ \\ a_{\tilde{\nu} p} \\ a_{\tilde{\nu} n} \end{pmatrix} \quad (17)$$

et :

$$\Delta_{tt} = z_{tt} \sqrt{\pi G_{tt}} \quad , \quad t = n, p \quad \text{et} \quad \Delta_{np} = z_{np} \sqrt{\pi G_{np}} \quad (18)$$

La diagonalisation de A_ν conduit à $A_\nu = T_\nu^+ D_\nu T_\nu$, où $D_\nu = \text{diag}(E_{\nu 1}, -E_{\nu 1}, E_{\nu 2}, -E_{\nu 2})$ et les valeurs propres $E_{\nu 1}$ et $E_{\nu 2}$ sont les énergies de quasi-particules données, pour $\tau = 1, 2$, par :

$$E_{\nu \tau}^2 = \frac{1}{2} \{ E_{\nu n}^2 + E_{\nu p}^2 + 2 |\Delta_{np}|^2 + (-1)^{\tau+1} R_\nu \} \quad (19)$$

avec

$$\begin{aligned} R_\nu &= \sqrt{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2)^2 + 4|\Delta_{np}|^2(\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p})^2 + 4|\Delta_{nn}\bar{\Delta}_{np} + \bar{\Delta}_{pp}\Delta_{np}|^2} \\ E_{\nu t} &= \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\nu t}^2 + |\Delta_{tt}|^2} \quad , \quad t = n, p \end{aligned} \quad (20)$$

T_ν est une matrice unitaire définie par :

$$T_\nu = \begin{pmatrix} u_{\nu 1p} & u_{\nu 1n} & v_{\nu 1p} & v_{\nu 1n} \\ u_{\nu 2p} & u_{\nu 2n} & v_{\nu 2p} & v_{\nu 2n} \\ -v_{\nu 1p} & -v_{\nu 1n} & u_{\nu 1p} & u_{\nu 1n} \\ -v_{\nu 2p} & -v_{\nu 2n} & u_{\nu 2p} & u_{\nu 2n} \end{pmatrix} \quad (21)$$

avec :

$$u_{\nu \tau p} = \frac{C_{\nu 1}^\tau}{C_\nu^\tau} \quad , \quad u_{\nu \tau n} = -\frac{C_{\nu 2}^\tau}{C_\nu^\tau} \quad , \quad v_{\nu \tau p} = \frac{C_{\nu 3}^\tau}{C_\nu^\tau} \quad , \quad v_{\nu \tau n} = -\frac{C_{\nu 4}^\tau}{C_\nu^\tau} \quad (22)$$

Les $C_{\nu i}^\tau$ sont donnés explicitement par les expressions :

$$\begin{cases} C_{\nu 1}^\tau = -(\tilde{\varepsilon}_{\nu p} - E_{\nu \tau})(\tilde{\varepsilon}_{\nu n}^2 + |\Delta_{nn}|^2 - E_{\nu \tau}^2) - |\Delta_{np}|^2(\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - E_{\nu \tau}) \\ C_{\nu 2}^\tau = -\Delta_{pp}\bar{\Delta}_{np}(\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - E_{\nu \tau}) - \bar{\Delta}_{nn}\Delta_{np}(\tilde{\varepsilon}_{\nu p} - E_{\nu \tau}) \\ C_{\nu 3}^\tau = -\Delta_{pp}(\tilde{\varepsilon}_{\nu n}^2 - E_{\nu \tau}^2) + \bar{\Delta}_{nn}(\Delta_{pp}\Delta_{nn} - |\Delta_{np}|^2) \\ C_{\nu 4}^\tau = -\Delta_{np}(\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + E_{\nu \tau})(\tilde{\varepsilon}_{\nu p} - E_{\nu \tau}) + \bar{\Delta}_{np}(\Delta_{pp}\Delta_{nn} - |\Delta_{np}|^2) \end{cases} \quad (23)$$

et :

$$C_\nu^\tau = \sqrt{(C_{\nu 1}^\tau)^2 + (C_{\nu 2}^\tau)^2 + (C_{\nu 3}^\tau)^2 + (C_{\nu 4}^\tau)^2} \quad (24)$$

Les opérateurs $\alpha_{\nu\tau}^+$ et $\alpha_{\tilde{\nu}\tau}$ définis par :

$$\begin{cases} \alpha_{\nu\tau}^+ = \sum_t (u_{\nu\tau t} a_{\nu t}^+ + v_{\nu\tau t} a_{\tilde{\nu} t}) \\ \alpha_{\tilde{\nu}\tau} = \sum_t (-v_{\nu\tau t} a_{\nu t}^+ + u_{\nu\tau t} a_{\tilde{\nu} t}) \end{cases} \quad ; \quad t = n, p \quad \text{et} \quad \tau = 1, 2 \quad (25)$$

sont les opérateurs de création et d'annihilation de quasiparticules. Cette transformation est donc la transformation de Bogoliubov-Valatin généralisée.

Ainsi, H' prend la forme diagonale :

$$H' = \sum_{\nu>0} (W_\nu^+ D_\nu W_\nu + \tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p}) \quad (26)$$

où $W_\nu = T_\nu V_\nu$. Il est à présent possible de calculer la trace dans l'expression (16), la fonction partition devient :

$$Z = \int \mathcal{D}z_{nn} \int \mathcal{D}z_{pp} \int \mathcal{D}z_{np} \exp(-\beta F) \quad (27)$$

où l'énergie libre F est donnée par :

$$F = \sum_{tt'} \frac{|\Delta_{tt'}|^2}{G_{tt'}} + \sum_\nu \left[\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p} - \frac{1}{\beta} \ln \left(16ch^2 \frac{\beta E_{\nu 1}}{2} ch^2 \frac{\beta E_{\nu 2}}{2} \right) \right] \quad (28)$$

L'approximation au point de selle [18] consiste à donner la contibution dominante à la fonction de partition. Elle conduit aux équations :

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_{nn}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_{pp}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_{np}} = 0 \quad (29)$$

Dans ce qui suit, nous admettrons que les quantités $\Delta_{tt'}$ sont réelles. On a alors :

$$\frac{4\Delta_{nn}}{G_{nn}} = \sum_{\nu\tau} \frac{1}{E_{\nu\tau}} th \frac{1}{2} \beta E_{\nu\tau} \quad (30)$$

$$\left\{ \Delta_{nn} + (-1)^{\tau+1} \frac{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2) \Delta_{nn} + 2\Delta_{np}^2 (\Delta_{nn} + \Delta_{pp})}{\sqrt{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2)^2 + 4\Delta_{np}^2 (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p})^2 + 4\Delta_{np}^2 (\Delta_{nn} + \Delta_{pp})^2}} \right\}$$

$$\frac{4\Delta_{pp}}{G_{pp}} = \sum_{\nu\tau} \frac{1}{E_{\nu\tau}} th \frac{1}{2} \beta E_{\nu\tau} \quad (31)$$

$$\left\{ \Delta_{pp} + (-1)^{\tau+1} \frac{(E_{\nu p}^2 - E_{\nu n}^2) \Delta_{pp} + 2\Delta_{np}^2 (\Delta_{nn} + \Delta_{pp})}{\sqrt{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2)^2 + 4\Delta_{np}^2 (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p})^2 + 4\Delta_{np}^2 (\Delta_{nn} + \Delta_{pp})^2}} \right\}$$

$$\frac{2}{G_{np}} = \sum_{\nu\tau} \frac{1}{E_{\nu\tau}} th \frac{1}{2} \beta E_{\nu\tau} \quad (32)$$

$$\left\{ 1 + (-1)^{\tau+1} \frac{E_{\nu n}^2 + E_{\nu p}^2 + 2(\Delta_{nn}\Delta_{pp} - \tilde{\varepsilon}_{\nu n}\tilde{\varepsilon}_{\nu p})}{\sqrt{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2)^2 + 4\Delta_{np}^2 (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p})^2 + 4\Delta_{np}^2 (\Delta_{nn} + \Delta_{pp})^2}} \right\}$$

Compte tenu de la transformation inverse de (25), la valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules défini par (5) s'écrit, pour chaque type de particules (i.e neutron ou proton) :

$$\langle N_t \rangle = \sum_{\nu, \tau, \tau'} [u_{\nu\tau t} u_{\nu\tau' t} f_{\nu\tau} \delta_{\tau\tau'} + v_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t} \delta_{\tau\tau'} (1 - f_{\nu\tau})] \quad , \quad t = n, p \quad (33)$$

avec :

$$f_{\nu\tau} = \frac{1}{2} \left[1 - th \left(\frac{1}{2} \beta E_{\nu\tau} \right) \right] \quad (34)$$

On obtient alors :

$$\langle N_t \rangle = \sum_{\nu > 0} \left[1 - \sum_{\tau} (u_{\nu\tau t}^2 - v_{\nu\tau t}^2) th \left(\frac{1}{2} \beta E_{\nu\tau} \right) \right] \quad , \quad t = n, p \quad (35)$$

où l'on a tenu compte de l'unitarité de la transformation (25).

Les équations (30) à (32) et (35) constituent alors les équations du gap à température finie dans le cas isovectoriel où les cinq inconnues sont : Δ_{pp} , Δ_{nn} , Δ_{np} , λ_n et λ_p .

Lorsque $\Delta_{np} = 0$, les équations (30) à (32) et (35) se réduisent aux équations du gap issues du modèle de la théorie FTBCS, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{G_{tt}} = \sum_{\nu > 0} \frac{1}{E_{\nu t}} th \frac{1}{2} \beta E_{\nu t} \\ \langle N_t \rangle = \sum_{\nu > 0} \left[1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu t}}{E_{\nu t}} th \frac{1}{2} \beta E_{\nu t} \right] \end{array} \right. \quad , \quad t = n, p \quad (36)$$

3 Grandeurs statistiques

La connaissance de la fonction partition d'un système chaud nous permet de déterminer les quantités thermodynamiques de ce système. Cette fonction est donnée par :

$$Z = e^{\Omega} = Tre^{-\beta H'} \quad (37)$$

où Ω est le grand potentiel donné par :

$$\Omega = -\beta \left[\frac{\Delta_{nn}^2}{G_{nn}} + \frac{\Delta_{pp}^2}{G_{pp}} + \frac{\Delta_{np}^2}{G_{np}} \right] - \beta \sum_{\nu} (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p}) + \sum_{\nu} \text{Log} \left[4^2 ch^2 \frac{\beta E_{\nu 1}}{2} ch^2 \frac{\beta E_{\nu 2}}{2} \right] \quad (38)$$

L'énergie du système est obtenue par la dérivation de (37) par rapport à β , soit :

$$E = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} \right)_{\alpha_t = cte} , \quad \alpha_t = \lambda_t \cdot \beta \quad , \quad t = n, p \quad (39)$$

soit, explicitement :

$$E = -\frac{\Delta_{nn}^2}{G_{nn}} - \frac{\Delta_{pn}^2}{G_{pp}} - \frac{\Delta_{np}^2}{G_{np}} + \sum_{\nu} (\varepsilon_{\nu n} + \varepsilon_{\nu p}) - \sum_{\nu\tau} \frac{th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}}{2E_{\nu\tau}} h_{\gamma} \quad (40)$$

avec

$$h_{\gamma} = \varepsilon_{\nu n} \tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \varepsilon_{\nu p} \tilde{\varepsilon}_{\nu p} + \frac{(-1)^{\tau+1}}{R_{\nu}} [2\Delta_{np}^2 (\varepsilon_{\nu n} - \varepsilon_{\nu p}) (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p}) + (\varepsilon_{\nu n} \tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \varepsilon_{\nu p} \tilde{\varepsilon}_{\nu p}) (E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2)] \quad (41)$$

L'entropie S du noyau est définie par :

$$S = \Omega + \beta E - \mu_n N_n - \mu_p N_p \quad (42)$$

ou, explicitement :

$$S = \sum_{\nu\tau} \left\{ \text{Log} \left(4ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2} \right) - \beta E_{\nu\tau} th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2} \right\} \quad (43)$$

Finalement, la capacité calorifique du système est donnée par :

$$\begin{aligned} C &= -\beta \frac{\partial S}{\partial \beta} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu\tau} \frac{E_{\nu\tau}}{ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}} \left(\beta^2 E_{\nu\tau} + \beta^3 \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \beta} \right) \end{aligned} \quad (44)$$

expression dans laquelle

$$\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \beta} = \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{nn}} \frac{\partial \Delta_{nn}}{\partial \beta} + \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{pp}} \frac{\partial \Delta_{pp}}{\partial \beta} + \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{np}} \frac{\partial \Delta_{np}}{\partial \beta}$$

Les dérivées $\frac{\partial \Delta_{tt'}}{\partial \beta}$ sont solutions du système suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{G_{nn}} - S_{nn1} - S_{nn2} & -S_{nn3} - S_{nn4} & -S_{nn5} - S_{nn6} \\ -S_{pp3} - S_{pp4} & \frac{2}{G_{pp}} - S_{pp1} - S_{pp2} & -S_{pp5} - S_{pp6} \\ -S_{nn5} - S_{nn6} & -S_{pp5} - S_{pp6} & \frac{2}{G_{np}} - S_{np1} - S_{np2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta_{nn}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \Delta_{pp}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \Delta_{np}}{\partial \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{nn7} \\ S_{pp7} \\ S_{np7} \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} S_{tt'1} &= \frac{\beta}{2} \sum_{\nu > 0, \tau} \frac{1}{ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}} \left(\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{tt'}} \right) \\ S_{tt'2} &= \sum_{\nu > 0, \tau} \frac{\partial^2 E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{nn}^2} th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2} \\ S_{tt1} &= \frac{\beta}{2} \sum_{\nu > 0, \tau} \frac{1}{ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}} \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{nn}} \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{pp}} \\ S_{tt4} &= \sum_{\nu > 0, \tau} \frac{\partial^2 E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{nn} \partial \Delta_{pp}} th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2} \\ S_{tt5} &= \frac{\beta}{2} \sum_{\nu > 0, \tau} \frac{1}{ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}} \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{tt}} \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{np}} \\ S_{tt6} &= \sum_{\nu > 0, \tau} \frac{\partial^2 E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{np} \partial \Delta_{tt}} th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2} \\ S_{tt7} &= \frac{1}{2} \sum_{\nu > 0, \tau} \frac{E_{\nu\tau}}{ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}} \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{tt'}} \end{aligned}$$

4 Résultats numériques et discussion

Le présent modèle a été testé numériquement dans le cadre du modèle schématique à un niveau, puis appliqué à des cas réalistes.

4.1 Modèle à un niveau :

Nous avons considéré le modèle à un niveau [3], [6] dans lequel l'unique niveau a pour énergie $\varepsilon = 0$ avec une dégénérescence totale de paires $\Omega = 11$ et comprenant 6 neutrons et 4 protons. Les constantes d'appariement $G_{tt'}$, $t, t' = n, p$ ont été choisies de sorte que les demi-largeurs du gap proton et neutron aient des valeurs égales respectivement à $\Delta_{pp}(0) = 1.0 \text{ MeV}$ et $\Delta_{nn}(0) = 1.2 \text{ MeV}$ pour une température nulle. Nous avons considéré quatre valeurs du paramètre $\Delta_{np}(0)$ telles que $0.6 \text{ MeV} \leq \Delta_{np}(0) \leq 0.9 \text{ MeV}$, toujours à température nulle. Pour chacune de ces valeurs, les variations des paramètres du gap et de celles des trois grandeurs statistiques considérées ont été étudiées en fonction de la température et comparées aux valeurs obtenues par la théorie FTBCS (figures 1 à 4).

4.1.1 Paramètres du gap

Il apparait que le paramètre du gap Δ_{np} a un comportement similaire aux comportements des paramètres Δ_{nn} et Δ_{pp} pour lesquels l'appariement np n'a pas été pris en considération (cas FTBCS) [13]. La fonction $\Delta_{np}(T)$ est quasiment constante sur un certain intervalle, puis décroît très rapidement jusqu'à s'annuler pour une valeur critique de la température que nous notons par T_{cnp} dans toute la suite de cette discussion.

En ce qui concerne Δ_{pp} et Δ_{nn} , leur comportement est différent de celui de leurs homologues de la théorie FTBCS. En effet elles présentent toutes les deux un plateau qui correspond à celui de Δ_{np} . Ces fonctions augmentent ensuite jusqu'à la température $T = T_{cnp}$ puis chutent rapidement jusqu'à $T = T_{cp}$ et $T = T_{cn}$ respectivement. Ces températures critiques sont plus grandes que les T_{cp} et T_{cn} de la méthode FTBCS. Malgré le fait que les équations du gap se réduisent à celles de l'appariement entre particules identiques, les intensités des forces d'appariement sont différentes. C'est la raison pour laquelle les valeurs de Δ_{nn} et Δ_{pp} tout comme celles de T_{cn} et T_{cp} sont différentes lorsque $T > T_{cnp}$. Nous constatons de plus que les valeurs des trois températures critiques augmentent avec la valeur de $\Delta_{np}(0)$.

Notons par ailleurs que les variations des $\Delta(T)$ du cas présent sont différentes de celles de la Ref. [25] dans laquelle la valeur de $\Delta_{np}(0)$ est plus grande que celles de $\Delta_{pp}(0)$ et $\Delta_{nn}(0)$.

4.1.2 Energie du système

Pour chaque valeur de $\Delta_{np}(0)$, on note une discontinuité à $T = T_{cnp}$, $T = T_{cp}$ et $T = T_{cn}$. En outre, comme cela était prévisible, l'inclusion des corrélations d'appariement np attractives, entraîne une diminution de l'énergie. L'écart relatif entre les valeurs lorsqu'on prend en compte les effets np et celles de la méthode FTBCS, est une fonction croissante de $\Delta_{np}(0)$ (à $T = 0$). Il varie de 4% quand $\Delta_{np}(0) = 0.6 \text{ MeV}$ jusqu'à 11% quand $\Delta_{np}(0) = 0.9 \text{ MeV}$.

Quand $T_{cnp} < T < T_{cn}$, le comportement global des deux courbes est similaire, mais l'écart entre elles persiste. Il peut être attribué, dans ce cas aussi, aux valeurs des intensités des forces d'appariement. Quand $T > T_{cn}$, les deux courbes se rejoignent puisque les effets de l'appariement sont nuls.

4.1.3 Entropie

Dans le cas de l'entropie S , on observe une discontinuité à $T = T_{cnp}$, $T = T_{cp}$ et $T = T_{cn}$.

Nous remarquons également que, tant que Δ_{np} , Δ_{pp} et Δ_{nn} restent constants, l'entropie est nulle. Dans la région dans laquelle Δ_{np} décroît jusqu'à $T = T_{cnp}$, S augmente mais de manière différente de celle de la méthode FTBCS : les concavités des deux courbes sont en effet opposées.

De plus, comme pour le cas de l'énergie, l'écart entre les courbes de la méthode np et celui de la méthode FTBCS est une fonction croissante de $\Delta_{np}(0)$.

Lorsque $T_{cnp} < T < T_{cn}$, les deux courbes présentent un comportement similaire : l'effet d'appariement np se traduit par une translation des valeurs de T_{cp} et de T_{cn} . Comme pour l'énergie et pour les mêmes raisons, les deux courbes se rejoignent dès que $T > T_{cn}$.

4.1.4 Capacité calorifique

Comme pour les grandeurs statistiques précédentes, on observe pour la capacité calorifique, les mêmes discontinuités, aux mêmes valeurs des températures critiques. Dans ce cas, les positions des températures critiques sont plus nettes que dans les cas de l'énergie ou de l'entropie.

Comme pour l'entropie, la capacité calorifique est nulle ($C = 0$) dans la région où la demi-largeur du gap $\Delta_{np}(T)$ est quasiment constante. Quand Δ_{np} décroît, et ce jusqu'à $T = T_{cnp}$, la capacité C augmente de manière monotone comme dans le cas de l'appariement entre particules identiques. L'écart entre les valeurs tenant compte des effets np et celles de la méthode FTBCS croît lorsque $\Delta_{np}(0)$ augmente. Le pic que l'on observe à $T = T_{cnp}$ augmente en fonction de $\Delta_{np}(0)$.

Comme pour les autres grandeurs statistiques, les effets des corrélations np sur C , dans la région $T_{cnp} < T < T_{cn}$, sont dûs essentiellement au décalage des valeurs T_{cp} et T_{cn} par rapport à celles de la méthode FTBCS. Finalement les deux courbes se confondent pour $T > T_{cnp}$ puisqu'on a affaire à un gaz de Fermi.

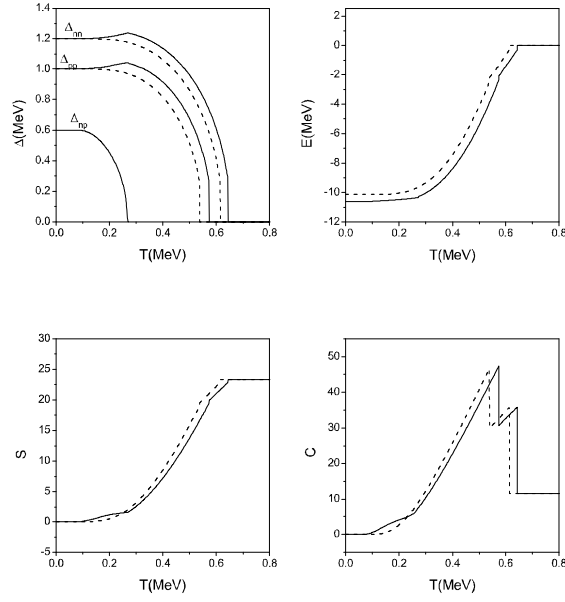


FIG. 1 – Variations des différents paramètres du gap, de l'énergie, de l'entropie et de la capacité calorifique du système en fonction de la température dans le cadre du modèle à un niveau, pour $\Delta_{np}(0) = 0.6 \text{ MeV}$. Les lignes continues correspondent à l'appariement isovectoriel et les tirets à l'appariement entre particules identiques.

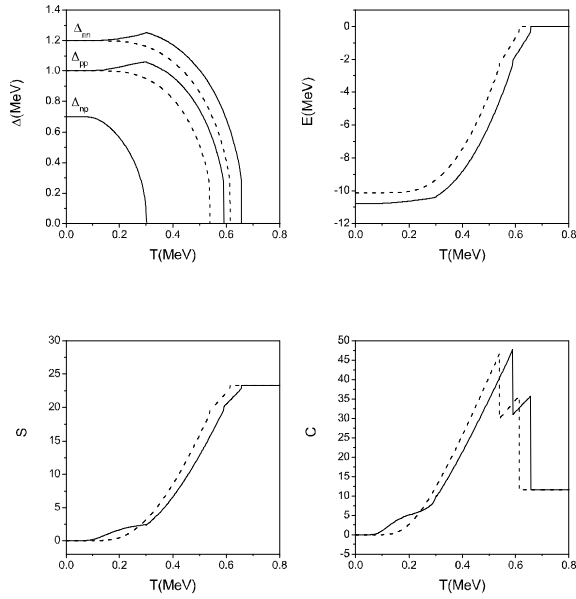


FIG. 2 – Même chose que la Fig.1 pour $\Delta_{np}(0) = 0.7 \text{ MeV}$.

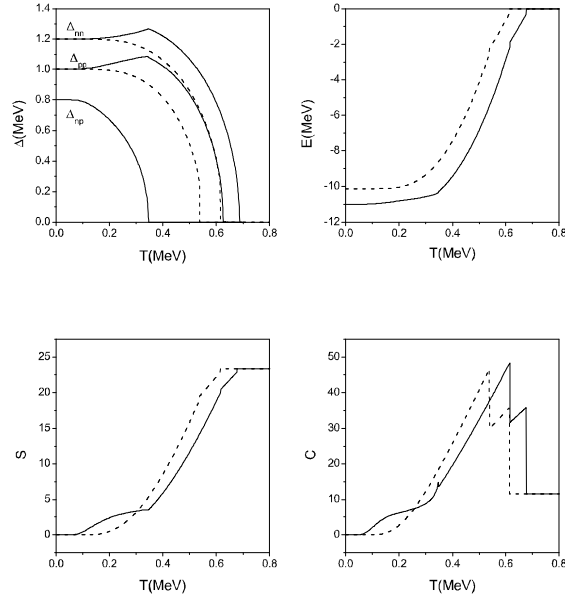


FIG. 3 – Même chose que la Fig.1 pour $\Delta_{np}(0) = 0.8 \text{ MeV}$.

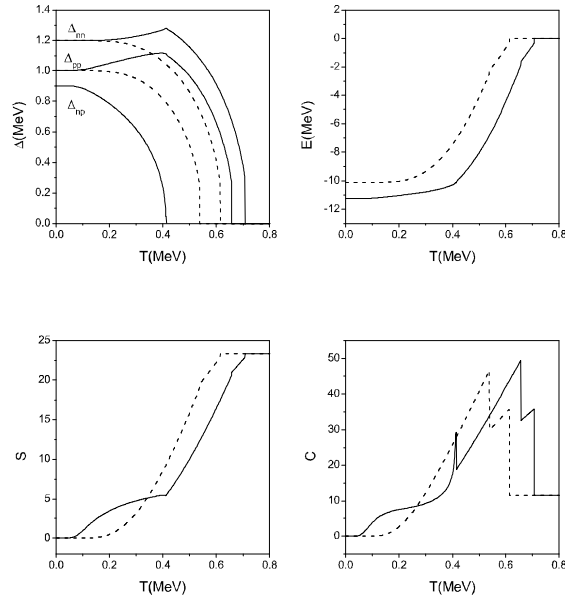


FIG. 4 – Même chose que la Fig.1 pour $\Delta_{np}(0) = 0.9 \text{ MeV}$.

4.2 Cas réalistes

Les grandeurs statistiques calculées précédemment ont été étudiées numériquement en utilisant les énergies du champ moyen déformé de Woods-Saxon. Pour assurer une stabilité des calculs, nous avons inclus tous les niveaux du champ moyen à particules indépendantes correspondant à un nombre maximal de couches $N_{max} = 12$. Nous avons également supposé que les énergies de ces niveaux sont indépendantes de la température [35].

Nous nous sommes restreints dans le présent travail aux noyaux pair-pairs tels que $N=Z$ et pour lesquels les valeurs des paramètres du gap peuvent être déduites des valeurs des masses expérimentales à partir des formules [5] :

$$\begin{aligned}\Delta_{pp}^{\text{exp}} &= -\frac{1}{8} [M(Z+2, N) - 4M(Z+1, N) + 6M(Z, N) - 4M(Z-1, N) - 4M(Z-2, N)] \\ \Delta_{nn}^{\text{exp}} &= -\frac{1}{8} [M(Z, N+2) - 4M(Z, N+1) + 6M(Z, N) - 4M(Z, N-1) - 4M(Z, N-2)] \\ \Delta_{np}^{\text{exp}} &= \frac{1}{4} \{ 2[M(Z, N+1) + M(Z, N-1) + M(Z-1, N) + M(Z+1, N)] - 4M(Z, N) \\ &\quad - [M(Z+1, N+1) + M(Z-1, N+1) + M(Z-1, N-1) + M(Z+1, N-1)] \} \end{aligned}$$

où $M(Z, N)$ est la valeur expérimentale de la masse de la table de Möller [36].

Les valeurs des constantes d'appariement $G_{tt'}$, $t, t' = n, p$ ont été déduites directement des valeurs des $\Delta_{tt'}^{\text{exp}}$ à température nulle. Les paramètres de déformation de l'état fondamental des noyaux étudiés ont aussi été pris de la table de Möller .

Les quatre noyaux suivants ^{36}Ar , ^{48}Cr , ^{52}Fe et ^{64}Ge ont été choisis à titre d'exemple. Les résultats correspondants sont montrés dans les figures 5 à 8 . Les principales remarques sont présentées ci-dessous.

4.2.1 Grandeurs statistiques

Paramètres du gap Le comportement général de la courbe $\Delta_{np}(T)$ est similaire à celui de son homologue du cas schématique (voir Figs. 5 à 8). Cependant la décroissance de cette fonction au voisinage de T_{cnp} est beaucoup plus rapide que dans le cas du modèle à un niveau. D'autre part les fonctions $\Delta_{pp}(T)$ et $\Delta_{nn}(T)$ qui étaient légèrement constantes pour $0 \leq T \leq T_{cnp}$ montrent une décroissance rapide dès que T est plus grand que T_{cnp} en présentant la même allure de décroissance que $\Delta_{np}(T)$.

De plus on constate, comme dans le cas schématique, que les valeurs critiques T_{cp} et T_{cn} sont nettement supérieures que leurs homologues de la méthode classique FTBCS .

Finalement quand $\Delta_{np} = 0$ on a un changement brusque de la transition de phase . Comme dans le cas de l'appariement entre particules identiques ce changement soudain de phase [16], [37] pourrait être éventuellement amorti si l'on inclut les fluctuations quantiques qui ont été négligées dans l'évaluation de la fonction partition à cause de l'utilisation de l'approximation statique. (voir Ref. [25]). Les fluctuations du nombre de particules, dues à la non conservation de ce dernier, pourraient également contribuer à ce changement comme cela a déjà été souligné dans les Refs. [20], [37].

Energie du système Les 5 à 8 montrent que le comportement de l'énergie est différent de celui de la méthode FTBCS. En effet E est quasiment constante pour $T < T_{cnp}$ et croît

très rapidement dès que $T = T_{cnp}$, ce qui correspond à des valeurs nulles du paramètre Δ_{np} . On note également que l'effet d'appariement np diminue l'énergie, comparée à celle obtenue par la méthode FTBCS. Les températures critiques T_{cp} et T_{cn} sont elles aussi légèrement supérieures à celles de la même méthode en plus de l'écart dû au décalage des valeurs de T_{cp} et T_{cn} . Dans tous les noyaux étudiés, l'accroissement de l'énergie est plus important pour $T = T_{cnp}$ que pour $T = T_{cp}$ ou $T = T_{cn}$.

L'effet de l'appariement np semble plus visible dans les cas réalistes que dans le cas schématique. En effet, la discontinuité à $T = T_{cnp}$ est beaucoup plus nette dans les Figs. 5 à 8. En moyenne, cette différence est de l'ordre de 10 MeV ce qui correspond à un écart relatif moyen de 1%.

Entropie Les effets de l'appariement isovectoriel sur l'entropie sont différents d'un noyau à un autre comme on peut le constater sur les Figs 5 à 8. Cependant dans chaque cas l'écart entre les courbes de l'appariement np et celles de la méthode FTBCS, dans la région $T_{cnp} < T < T_{cn}$, est dû au décalage des valeurs de T_{cp} et T_{cn} comme nous l'avons déjà mentionné dans le cas de l'énergie.

Dans la région $0 \leq T \leq T_{cnp}$, la différence entre les deux modèles n'apparaît que si la valeur de T_{cnp} (et donc celle de $\Delta_{np}(0)$) est assez importante, comme dans le cas des noyaux ^{36}Ar et ^{64}Ge .

Pour les noyaux ^{48}Cr et ^{52}Fe , et dans la région dans laquelle l'effet np est effectif, l'entropie est nulle et les deux modèles ne présentent aucune différence. Notons dans ce cas, que les courbes du présent modèle présentent un comportement similaire à celles déjà obtenues par Z. Kargar [37] pour les noyaux ^{96}Mo et ^{97}Mo . Ces dernières ont été obtenues en extrayant d'abord les capacités calorifiques à partir des densités de niveaux expérimentales pour en déduire par la suite l'entropie.

En résumé l'entropie des noyaux ^{36}Ar et ^{64}Ge présente un comportement similaire à celui des figures 3 et 4, alors que celle des noyaux ^{48}Cr et ^{52}Fe se comporte comme l'entropie de la figure. 1 du modèle schématique.

Capacité calorifique Comme dans le cas schématique, la différence entre les courbes du présent modèle et celles de la méthode FTBCS, dans la région $T_{cnp} < T < T_{cn}$, est plus visible dans le cas de la capacité calorifique que sur les autres grandeurs statistiques.

Comme dans le cas de l'entropie, l'effet de l'appariement isovectoriel sur la capacité calorifique dans la région $0 \leq T \leq T_{cnp}$ semble dépendre de la valeur de T_{cnp} et par conséquent de la valeur de $\Delta_{np}(0)$. En effet, l'effet de l'appariement np n'est perceptible dans cette région que pour les noyaux ^{36}Ar et ^{64}Ge . Pour les noyaux ^{48}Cr et ^{52}Fe , la capacité calorifique est encore nulle dans les deux modèles (la présente méthode et celle relative à la méthode FTBCS) quand T atteint sa valeur critique T_{cnp} .

Dans ce cas également, les noyaux ^{36}Ar et ^{64}Ge sont dans une situation similaire à celles présentées dans les figures 3 et 4, tandis que les noyaux ^{48}Cr et ^{52}Fe sont plutôt dans une situation similaire à celle de la figure 1 du cas schématique.

Finalement, dans le cas de la capacité calorifique également, le changement brusque de transition de phase pourrait être atténué par la prise en compte des fluctuations quantiques dans l'expression de la fonction de répartition [16], [37] ou en effectuant une projection dans l'espace nombre d'occupation [20], [37].

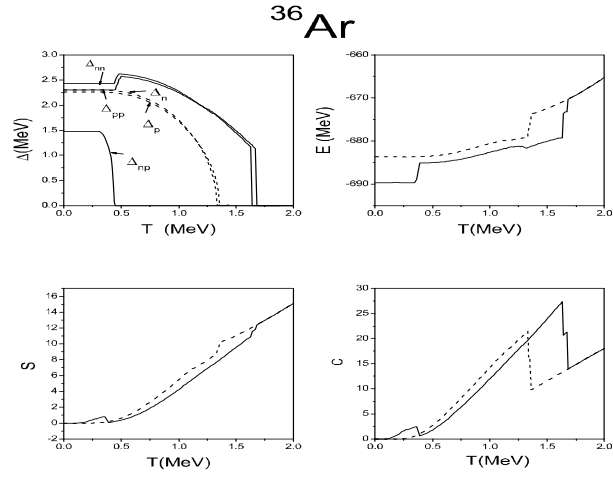


FIG. 5 – Variations des différents paramètres du gap, de l'énergie, de l'entropie et de la capacité calorifique du système en fonction de la température pour le noyau ^{36}Ar . Les lignes continues correspondent à l'appariement isovectoriel et les tirets à l'appariement entre particules identiques.

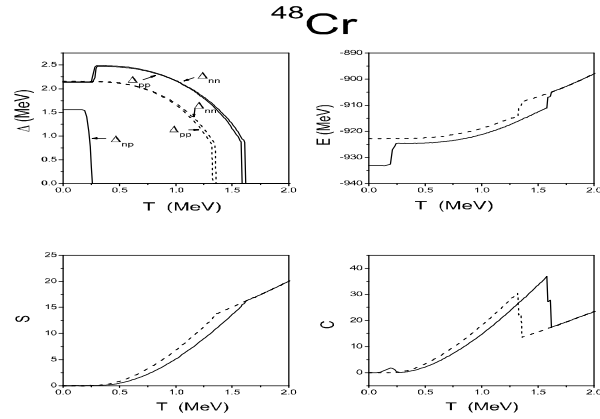


FIG. 6 – Même chose que la Fig 5 pour le noyau ^{48}Cr .

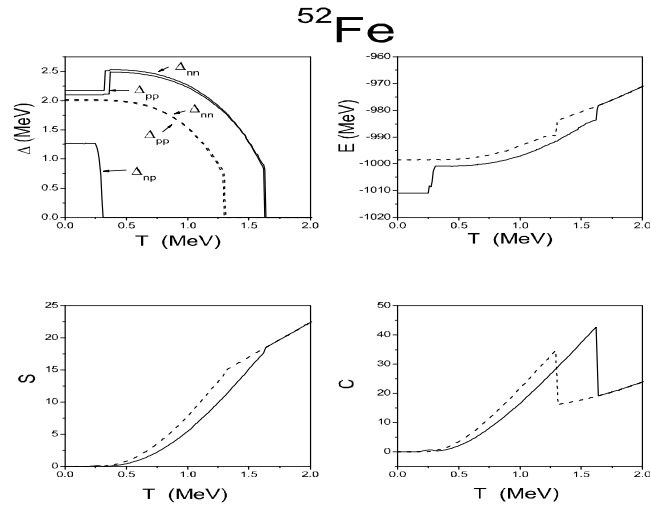


FIG. 7 – Même chose que la Fig.5 pour le noyau ^{52}Fe .

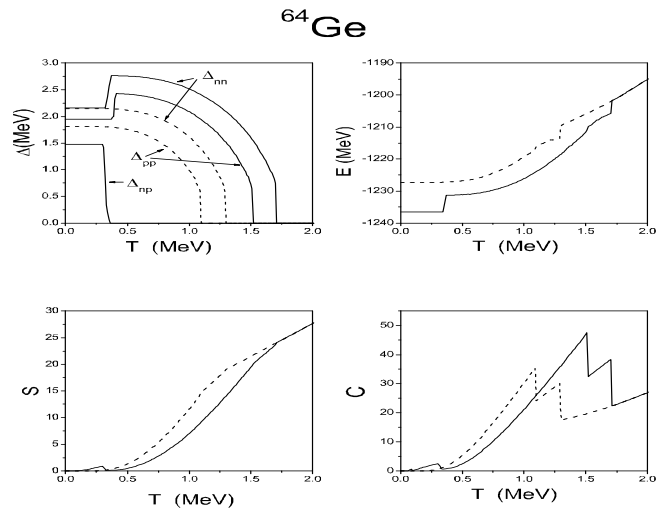


FIG. 8 – Même chose que la Fig.5 pour le noyau ^{64}Ge .

5 Conclusion

Nous avons étudié dans ce travail l'influence des corrélations d'appariement du type isovectoriel (cas $\tau = 1$ dans le langage de l'isospin) sur les grandeurs statistiques habituelles qui sont l'énergie, l'entropie et la capacité calorifique des systèmes pour lesquels le nombre de neutrons est voisin de celui des protons ($N \simeq Z$).

Dans ce but, nous avons établi les équations du gap incluant l'appariement isovectoriel, par le formalisme de l'intégrale de chemin de Feynman. Il a été vérifié que ces équations généralisent bien celles de la méthode Finite Temperature BCS (FTBCS) puis celles de la théorie BCS à température nulle.

Les expressions des différentes grandeurs statistiques du système ont été établies. Dans ce cas également, il a été vérifié que les expressions obtenues généralisent bien celles de leurs homologues de la théorie FTBCS puis celles de la méthode BCS à température nulle.

Sur le plan numérique, les équations du gap ont été résolues dans un premier temps dans le cadre du modèle à un niveau. Nous avons utilisé des valeurs des trois paramètres modélisant les cas réalistes. On constate un changement d'allure de Δ_{nn} et Δ_{pp} à partir de $T = T_{cnp}$ (valeur critique de la température). De plus, les valeurs des températures critiques, T_{cnn} et T_{cpp} , dans le cas de l'appariement np sont différentes de celles en l'absence de cet effet. D'autre part, il apparaît que l'influence de l'appariement np persiste même au delà de T_{cnp} .

Les grandeurs thermodynamiques ont ensuite été étudiées numériquement en fonction de la température. Il a été montré que l'effet np sur ces grandeurs est non négligeable. En outre, les positions des températures critiques sont nettement mises en évidence dans les graphes de l'énergie, de l'entropie et surtout dans celui de la capacité calorifique dont l'expression est proportionnelle à la dérivée de l'entropie.

Nous avons considéré, dans une dernière partie, et à titre d'exemple, les grandeurs statistiques de quatre noyaux pair-pairs tels que $N = Z$ pour lesquels les valeurs expérimentales des paramètres du gap à température nulle sont connues. Il s'agit de l'argon ^{36}Ar , du chrome ^{48}Cr , du fer ^{52}Fe et du germanium ^{64}Ge . L'évolution de ces grandeurs, ainsi que celle des paramètres d'appariement, en fonction de la température, est globalement similaire à celle du cas schématique. L'évolution des graphes de ces observables met nettement en évidence l'influence et l'importance de l'effet d'appariement isovectoriel. Les températures critiques dans ce cas, sont généralement supérieures à celles de la théorie FTBCS et l'influence de ce type d'interaction persiste même au-delà de la température critique correspondante.

Nos calculs ont mis en évidence l'importance de l'effet de ce type d'appariement et la nécessité d'en tenir compte dans toute évaluation d'observables des noyaux riches en protons.

Références

- [1] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer, Berlin, 1980.
- [2] A. Goodman, *Adv. Nucl. Phys.* **11** (1979) 263.
- [3] O. Civitarese and M. Reboiro, *Phys. Rev.* **C56** (1997) 1179.
- [4] O. Civitarese, M. Reboiro and P. Vogel, *Phys. Rev.* **C56** (1997) 1840.

- [5] F. Simkovic, Ch. C. Moustakidis, L. Pacearescu and A. Faessler, *Phys. Rev.* **C68** (2003) 054319.
- [6] D. Mokhtari, N.H. Allal and M. Fellah, *Acta Phys. Hung. A : Heavy Ion Phys.* **19**(2004)187.
- [7] W. Satula and R. Wyss, *Nucl. Phys.* **A676** (2000) 120.
- [8] N.H. Allal, M. Fellah, M.R. Oudih and N. Benhamouda, *Eur. Phys. J.* **A27**, s01 (2006) 301.
- [9] D. Mokhtari, I. Ami, M. Fellah and N.H. Allal, *Int. J. Mod. Phys. E* **17** (2008)655.
- [10] S. Kerrouchi, D. Mokhtari, N.H. Allal and M. Fellah, *Int. J. Mod. Phys. E* **18** (2009) 141.
- [11] S. Kerrouchi, N.H. Allal, M. Fellah and M. Douici, *Int. J. Mod. Phys. E* **19** (2010)1383.
- [12] M. Sano and S. Yamazaki, *Prog. Theor. Phys.* **29** (1963) 397.
- [13] L.G. Moretto, *Nucl. Phys.* **A185** (1972) 145.
- [14] A. Goodman, *Nucl. Phys.* **A352** (1981) 30.
- [15] R. Rossignoli, N. Canosa and P. Ring, *Nucl. Phys.* **A591** (1995) 15.
- [16] R. Rossignoli, N. Canosa and J.L. Egido, *Nucl. Phys.* **A605** (1996).
- [17] N.H. Allal, M. Fellah, N. Benhamouda and M.R.Oudih, *Phys. Rev.* **C77**(2008) 054310.
- [18] G. Fletcher, *Am. J. Phys.* **58** (1990) 50.
- [19] G. Puddu, *Phys. Rev.* **B45** (1992) 9882.
- [20] G. Puddu, *Phys. Rev.* **C47** (1993) 1067.
- [21] G. Puddu, *Phys. Rev.* **C44** (1991)905.
- [22] G. Puddu, P.F. Bortignon and R.A. Broglia, *Ann. Phys.* **206** (1991) 409.
- [23] R.Rossignoli, *Phys.Rev.* **C54**(1996)1230.
- [24] G. Puddu, *Phys. Rev.* **C59** (1999) 2500.
- [25] M. Fellah, N.H. Allal, **M. Belabbas**, M.R. Oudih and N. Benhamouda , *Phys. Rev.* **C76** (2007) 047306.
- [26] T. Sumaryada and A. Volya, *Phys. Rev.* **C76** (2007) 024319.
- [27] K. Langanke, D.J. Dean, S.E. Koonin and P.B. Radha, *Nucl. Phys.* **A613** (1997) 253.
- [28] K. Langanke, P. Vogel and Dao-Chen Zhen, *Nucl. Phys.* **A626** (1997) 735.
- [29] S.E. Koonin, D.J. Dean and K. Langanke, *Phys. Rep.* **278** (1997) 1.
- [30] K. Kaneko and M. Hasegawa, *Phys. Rev.* **C72** (2005) 031302(R.) 1.
- [31] **M. Belabbas**, M. Fellah, N.H. Allal, N. Benhamouda, I. Ami and M.R. Oudih, *Int. J. Mod. Phys. E* **19** (2010)1973.
- [32] **M. Belabbas**, I. Ami, N. Benhamouda, M. Fellah and N.H. Allal, European Nuclear Physics Conference, Bochum, Germany, March 2009.
- [33] I. Ami, **M. Belabbas**, N. Benhamouda, M. Fellah and N.H. Allal, European Nuclear Physics Conference, Bochum, Germany, March 2009.

- [34] J. Hubbard, *Phys. Rev. Lett.* **3** (1959) 77; R.L. Stratonovich, *Sov. Phys. Dokl.* **2** (1958) 416.
- [35] M. Brack and P. Quentin, *Nucl. Phys.* **A361** (1981) 35.
- [36] P. Möller and J.R. Nix, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **59** (1995) 185.
- [37] Z. Kargar, *Phys. Rev.* **C75** (2007) 064319.