

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIÈNE



FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

Thèse présentée par

BOUROUBI Sadek

Pour l'obtention du titre de

DOCTEUR D'ÉTAT EN MATHÉMATIQUES

OPTION

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

OPTIMISATION DANS LES POSETS

SOUTENUE LE : 13 Mars 2004

DEVANT LE JURY

PRÉSIDENT :	A. KHELLADI,	PROFESSEUR, USTHB
RAPPORTEUR :	M. ABBAS,	PROFESSEUR, USTHB
EXAMINATEURS :	K. ENGEL,	PROFESSEUR, ROSTOCK (Allemagne)
	M. AIDER,	DIRECTEUR DE RECHERCHE, USTHB
	H. AIT HADDADÈNE,	DIRECTEUR DE RECHERCHE, USTHB
	A. BERRACHEDI,	DIRECTEUR DE RECHERCHE, USTHB
	M. BLIDIA,	DIRECTEUR DE RECHERCHE, USTBlida
	I. BOUCHEMAKH,	DIRECTRICE DE RECHERCHE, USTHB
	M. MOULAI,	MAITRE DE CONFÉRENCES, USTHB

AU NOM DE DIEU,
LE TRES-MISERICORDIEUX,
LE TOUT-MISERICORDIEUX

O mon Dieu vers Toi montent nos louanges et plaintes;
De Toi nous implorons le secours,
et en Toi nous mettons notre confiance!

Que les meilleurs des prières et des bénédictions soient sur Ton serviteur et Ton Prophète, notre Maître, Mohammed, ainsi que sur sa famille et sur l'ensemble de ses compagnons.

Je T'implore, O mon Dieu, de me tirer des ténèbres de l'illusion, de m'honorer par la lumière de la compréhension, de m'accorder la connaissance de la science de m'inspirer de la reconnaissance pour Tes bienfaits.

Tu es, certes, Celui qui entend et Celui qui exauce.

Dédicaces

Je dédie mes travaux à la mémoire de feu Fadhila HASBALLAOUI, mon premier enseignant de mathématiques et de feu Mohamed ben abdelkader RAHOU, mon enseignant de la charia.

Je prie Dieu de leur accorder Sa miséricorde.

Remerciements

Il m'est agréable ici d'exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur Moncef ABBAS, mon Directeur de thèse et Professeur à l'USTHB, avec qui j'ai eu le privilège de collaborer pendant plusieurs années, de m'avoir encouragé, conseillé, suivi et surtout supporté le long de ces années. Sa confiance et ses encouragements m'ont permis de mener à bien ce travail.

Le Professeur Abdelkader KHELLADI a accepté avec gentillesse de présider le jury de cette thèse. Il a également suivi avec patience mes travaux de recherche, durant les multiples séminaires hebdomadaires du département de Recherche Opérationnelle que j'ai eu l'honneur de faire chaque année. Il m'en fait l'honneur et je l'en remercie chaleureusement.

Que les Professeurs, Konrad ENGEL, Méziane AIDER, Hacène AIT HADDADENE, Abdelhadi BERRACHEDI, Mostafa BLIDIA, Isma BOUCHEMAKH, et Mustapha MOULAÏ, trouvent ici mes sincères remerciements pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'examiner ce modeste travail.

Je tiens également à témoigner ma reconnaissance à mes collègues et amis du département de Recherche Opérationnelle pour leurs encouragements, particulièrement à Melle Isma BOUCHEMAKH, Messieurs Hacène AIT HADDADENE et Mustapha MOULAÏ.

J'associe à ces remerciements mon ancien promoteur Konrad ENGEL, Professeur à l'Université de ROSTOCK (Allemagne), pour m'avoir initié dans le domaine, encouragé de manière indirecte, je ne saurais trop lui exprimer toute ma gratitude.

A bien des points de vue, cette thèse n'aurait pu prendre forme sans les prières de mes parents, je ne peux que leurs exprimer ma gratitude et mes sincères remerciements.

A ma femme, mes enfants et à toute ma famille, un Grand Merci pour le reste.

« Si, pendant votre lecture, vous rencontrez un point que vous trouvez trop abrupt et difficile, ne vous laissez pas impressionner ou décourager. Continuez, sautez les passages que vous avalez de travers, vous trouverez probablement dans la suite des choses qui vous paraîtront plus simples et accessibles. Si cela vous intéresse encore, vous pourrez revenir plus tard sur les passages qui vous gênaient. Vous serez alors souvent surpris de voir comment après une nuit de sommeil, les points qui vous paraissaient difficiles seront soudainement devenus plus faciles. »

Serge Lang

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	3
CHAPITRE 1 : DEFINITIONS ET NOTATIONS	7
1.1 Définitions générales	7
1.2 Exemples de quelques treillis classiques	14
CHAPITRE 2 : EXISTENCE ET UNICITE D'UNE REPRESENTATION OPTIMALE	19
2.1 Introduction	19
2.2 Résultats préliminaires	19
2.3 Modélisation	23
CHAPITRE 3 : CONDITIONS D'OPTIMALITE DE LA FONCTION DE RANG DANS UN POSET GRADUE	24
3.1 Introduction	24
3.2 Définitions	24
3.3 Résultats auxiliaires	25
3.4 Théorèmes sur l'optimalité de la fonction de rang	28
3.5 Exemple d'application	33
CHAPITRE 4 : LE NOMBRE EXPONENTIEL DE BELL	35
4.1 Introduction	35
4.2 Définitions	35
4.3 Résultats préliminaires	35
4.4 Nouvelles propriétés	43
CHAPITRE 5 : OPTIMALITE DE LA FONCTION DE RANG DU TREILLIS DES PARTITIONS D'UN ENSEMBLE FINI	48
5.1 Introduction	48
5.2 Définitions	48
5.3 Principaux résultats	51

CHAPITRE 06 : CONTRIBUTION A LA RESOLUTION DE LA CONJECTURE DE KONRAD ENGEL	56
6.1 Introduction	56
6.2 Résultats préliminaires	56
6.3 Principaux résultats	60
CHAPITRE 7 : ALGORITHME POLYNOMIAL POUR LA DETER- MINATION D'UNE REPRESENTATION OPTIMALE	63
7.1 Introduction	63
7.2 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité	63
7.3 Critère d'arrêt de l'algorithme	65
7.4 Résultats auxiliaires	66
7.5 Procédure d'amélioration d'une représentation	68
7.6 Procédure d'équilibre	70
7.7 Présentation de l'algorithme	76
7.8 Présentation de l'organigramme	78
7.9 Convergence et complexité	78
7.10 Commentaires et recommandations	80
CHAPITRE 8 : PARTITIONS D'UN ENTIER	81
8.1 Introduction	81
8.2 Définitions	81
8.3 Résultats préliminaires	82
8.4 Principaux résultats	86
8.4.1 Convexité	87
8.5 Sur les partitions d'un entier en entiers consécutifs	90
8.5.1 Principaux résultats	91
CHAPITRE 9 : NOUVELLES IDENTITES POUR LES POLY- NOMES DE BELL. NOUVELLE APPROCHE	95
9.1 Introduction	95
9.2 Définition	95
9.3 Principaux résultats	96
9.3.1 Approche basée sur la formule d'inversion de Lagrange	96
9.3.1 Approche basée sur les suites binomiales	98
CONCLUSION ET PERSPECTIVES	101
ANNEXE	103
BIBLIOGRAPHIE	108

INTRODUCTION

On parle beaucoup de nos jours de la Combinatoire, et pourtant ni les encyclopédies ni les ouvrages d'initiation ne semblent donner une définition satisfaisante de cette science aux ramifications multiples. En fait, un mathématicien sent d'instinct que certains problèmes sont de nature combinatoire, et que les méthodes pour les résoudre méritent d'être étudiées systématiquement. C'est en tout cas ce qu'a dit Polya en préfaçant le premier volume du "journal of Combinatorial theory"¹.

La définition de la Combinatoire que nous voulons proposer ici, repose sur la notion de "configuration" qui veut tout simplement dire, une application d'un ensemble d'objets dans un ensemble abstrait ...ni muni d'une structure donnée. Par exemple une permutation de n objets est une application bijective de l'ensemble des objets dans l'ensemble ordonné $1; 2; \dots; n$. Néanmoins, on ne s'intéresse qu'aux applications qui satisfont à certaines contraintes, et la nature même de ces contraintes est trop variée pour requérir à un tel degré de généralité.

De même que l'Arithmétique étudie les nombres entiers avec les opérations classiques, que l'Algèbre étudie les opérations en général, que l'Analyse étudie les fonctions, que la Géométrie étudie les formes rigides et la Topologie celles qui ne le sont pas, la Combinatoire étudie, elle, les configurations. Elle veut démontrer l'existence de configurations d'un type voulu, les dénombrer ou les recenser; elle recherche leurs propriétés intrinsèques, elle étudie les transformations d'une configuration en une autre, aussi bien que les sous configurations qu'on peut extraire d'une configuration donnée. Ses préoccupations sont exactement les mêmes que celles des autres branches des mathématiques modernes.

Notre travail porte sur quelques configurations relatives aux problèmes de la théorie des ordres partiels, dont l'origine remonte semble-t-il à 1928, lorsque Sperner publia un simple théorème qui a eu par la suite des répercussions au delà de ses rêves. Ce théorème affirme tout simplement, que si on veut trouver le nombre maximum possible de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments, sous contrainte qu'aucun sous-ensemble ne contient l'autre, alors, on ne peut faire mieux que de choisir les sous-ensembles de taille $\frac{n}{2}$:

Ce même théorème a été par la suite redémontré et généralisé en guise d'extension, ce qui a donné un élan à la branche tout entière de la théorie des ordres partiels, dénommée plus tard : théorie de Sperner.

¹Académie Press, NewYork et Londres. Ce journal a débuté en 1966 :

Beaucoup d'études et de recherches ont fait preuve d'intéressants résultats en cette matière devenue un domaine important et distinctif en mathématiques. D'ailleurs, le fameux théorème de V.B. Alekseev (Cf: [4]) énoncé en 1974 en est justement un cas parmi tant d'autres.

Ce théorème énonce une formule asymptotique de la taille d'une plus longue antichaîne dans P^n , où P est un poset quelconque :

$$d(P^n) \approx \frac{|P|^n}{2^{n/2} \sigma(P)}; \quad n \rightarrow \infty$$

Le paramètre $\sigma(P)$ dans cette formule représente l'écart type du poset P , qui s'exprime comme suit :

$$\sigma(P) = \sqrt{\frac{1}{|P|} \sum_{x \in P} \text{rank}(x)^2 - \left(\frac{\sum_{x \in P} \text{rank}(x)}{|P|}\right)^2}$$

Le but, en général, est de déterminer ce paramètre pour un poset donné.

Parmi les auteurs qui se sont intéressés, tout particulièrement, à ce type de problème, nous pouvons citer K. Engel ([30]; [34]), H.-D. O. F. Gronau (Cf. [29]), L.H. Harper (Cf: [42]; [44]); J. R. Griggs (Cf: [39]); E. R. Canfield (Cf. [16]; [19]): Pour une bibliographie exhaustive, on peut se référer, en particulier, aux ouvrages de K. Engel and H.-D. O. F. Gronau (Cf. [29]) et K. Engel (Cf. [26]):

Dans ce cadre, et partant des conditions nécessaires et/ou suffisantes d'optimalité d'une fonction de représentation, nous nous sommes interrogés sur l'optimalité de la fonction de rang dans le poset booléen, le poset des partitions d'un ensemble et le poset des partitions d'un entier, puis, nous avons évalué l'écart-type chaque fois que la réponse est positive. Concernant le poset booléen, l'optimalité de la fonction de rang n'étant pas difficile, nous avons alors évalué l'écart type (Cf: [14]) :

Ensuite, nous avons voulu tester si la fonction de rang vérifie l'une des conditions suffisantes dans le poset des partitions d'un ensemble, le test s'est avéré négatif. Il ne nous restait plus que la condition nécessaire et suffisante, difficile à vérifier, nous l'avons quand même montrée sur les entiers principaux (Cf: [11]) :

D'autre part, nous avons contribué à la résolution de la conjecture de K. Engel, et avons proposé une conjecture plus forte (Cf: [9] & [11]) : En outre, nous avons démontré plusieurs propriétés originales sur les nombres de Bell, en nous basant sur une technique purement probabiliste (Cf: [11]) :

Toujours dans le souci de répondre à la question de l'optimalité de la fonction rang, cette fois ci, dans le poset des partitions d'un entier, nous avons besoin d'étudier les propriétés de la suite des nombres de partitions d'un entier à l'instar des nombres de Bell, ainsi plusieurs résultats sont démontrés (Cf: [13]) :

Utilisant un raisonnement par récurrence, S. Khelifa et Y. Cherruault (Cf: [45]) ont démontré l'identité suivante sur les polynômes de Bell :

$$B_{n,k}(1^0; 2^1; 3^2; \dots) = \sum_{k \leq i \leq n} \binom{n}{i} \prod_{j=1}^i n^{n_i k}; \quad 8n; 8k; k \leq n: \quad (1)$$

La démonstration étant excessivement longue (7 pages) nécessitait une autre plus courte. Nous avons proposé deux nouvelles classes d'identités de ces polynômes avec des démonstrations très courtes, la première utilise la formule d'inversion de Lagrange, ayant comme conséquence immédiate l'identité (1) ; et la seconde utilise la notion de suite binomiale, engendrant de nouvelles identités et des identités connues dans la littérature.

Le contenu de cette thèse poursuit et approfondit les travaux décrits ci-dessus. Voici son plan :

Après un premier Chapitre exposant les concepts de base indispensables pour la notion de poset en général et de treillis en particulier, vient le deuxième Chapitre qui aborde le problème d'existence et d'unicité d'une représentation optimale dans un poset \dots et présente une modélisation du problème. Au Chapitre trois nous énonçons les conditions nécessaires et/ou suffisantes d'optimalité de la fonction de rang dans un poset gradué. Quant au quatrième Chapitre, il a pour objet l'étude des nombres de Bell. Dans sa première partie nous énonçons les résultats connus dans la littérature, puis nous exposons dans sa deuxième partie les nôtres. Dans le cinquième Chapitre, nous abordons l'étude de l'optimalité de la fonction de rang dans le treillis des partitions d'un ensemble \dots et démontrons la condition nécessaire et suffisante d'Alekseev sur les \dots principaux. Au Chapitre six, les résultats de notre contribution à la résolution de la conjecture de Konrad ENGEL sont présentés. Le septième Chapitre décrit en détail l'algorithme de Konrad ENGEL pour la détermination d'une représentation optimale et présente notre contribution dans l'amélioration de la borne de convergence du dit algorithme. Le huitième Chapitre est consacré à l'étude de la suite des nombres de partitions d'un entier naturel, nos résultats sur les nouvelles propriétés de ces nombres sont donnés. Nous clôturons en \dots la thèse par le neuvième Chapitre qui porte sur les polynômes de Bell.

Après la présentation d'une conclusion générale avec quelques perspectives de recherche pouvant faire l'objet d'un développement ultérieur nous donnons la description des plus importantes références bibliographiques. Signalons enfin que les différents Chapitres peuvent être lus indépendamment les uns des autres. Des renvois aux définitions et formules de base allègent cette lecture.

En rédigeant cette thèse nous nous sommes fixés essentiellement un seul objectif, qui est de présenter une introduction aussi didactique que possible de la théorie de Sperner à tous ceux qui, pour des raisons diverses, s'y intéressent, depuis les chercheurs jusqu'aux étudiants. Cette approche nous a été facilitée par les multiples séminaires et exposés que nous avons eu l'honneur de présenter à diverses occasions.

Pour permettre une lecture aisée et rapide, les résultats dans leur majorité et dont nous avons besoin et que nous avons référencés sont démontrés. Nous avons par ailleurs proposé des démonstrations pour des résultats portés en référence et n'ayant pas été étayés par une démonstration. La preuve dans ce cas sera suivie d'une étoile.

Pour commencer, afin que le lecteur puisse assez vite comprendre le vif du sujet, nous allons donner les définitions et concepts utilisés tout au long de ce rapport.

CHAPITRE I

DEFINITIONS ET NOTATIONS

1.1 Définitions générales

Poset

Un poset (partially ordered set) est un ensemble P ; partiellement ordonné, c'est à dire, muni d'une relation d'ordre partiel : réflexive, antisymétrique et transitive.

Dans toute la suite, on ne considérera que les posets finis, et pour des raisons de simplifications, on identifiera le poset à l'ensemble sous-jacent.

Pour deux éléments comparables x et y du poset P , on écrira d'une manière usuelle $x \leq y$ ou d'une façon équivalente $y \geq x$.

Couverture

Un élément $y \in P$ couvre un autre élément $x \in P$ (noté $y \text{ m } x$) si :

$$(y \geq x) \text{ et } (y \geq z \geq x \Rightarrow z = y) :$$

Isomorphisme

Deux posets P et Q sont dits isomorphes (on note $P \cong Q$), s'il existe une application bijective f de P sur Q , nommée isomorphisme, telle que :

$$x \leq_P y \Leftrightarrow f(x) \leq_Q f(y) :$$

Diagramme de Hasse

Tout poset P peut être représenté par un graphe orienté $G = (P; E)$ appelé diagramme de Hasse, dont l'ensemble des sommets est P et l'ensemble des arcs est E constitué des paires $(x; y)$ où $x \text{ m } y$:

Dans la représentation graphique du diagramme de Hasse, l'emplacement des sommets obéit à la propriété de couverture, c.à.d. si deux éléments x et y sont comparables tels que $x \leq y$, alors y est placé au dessus de x :

Exemples :

- 1) L'ordre d'inclusion des parties d'un ensemble S ...ni (...g 1.1 pour $S = \{a; b; c\}$).
- 2) L'ordre de divisibilité dans \mathbb{N} des entiers naturels (...g 1.2 pour les diviseurs de 36).

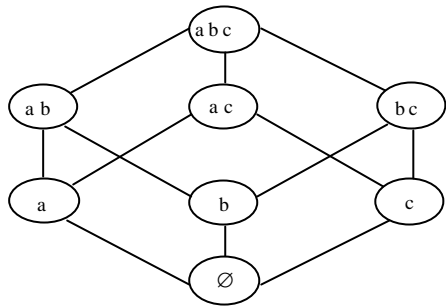


Figure 1.1

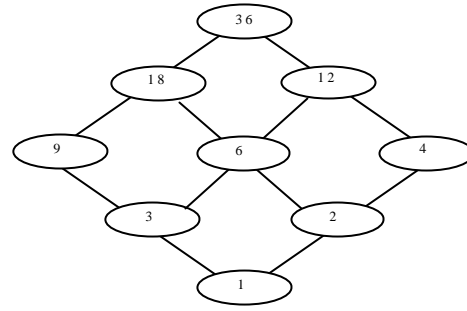


Figure 1.2

Élément minimal (resp. maximal)

Un élément x de P est dit minimal (resp. maximal) si :

$$y \preceq x \text{ (resp. } y \succeq x) \Rightarrow y = x:$$

En termes de graphes, un élément minimal (resp. maximal) n'admet pas de prédécesseur (resp. successeur) dans le diagramme de Hasse.

Atome (resp. co-atome)

Si P admet un unique élément minimal (resp. maximal), noté 0 (resp. 1), alors, on appelle atome (resp. co-atome) tout élément couvrant 0 (resp. couvert par 1).

Exemple :

Les éléments b et c sont respectivement atome et co-atome pour le poset illustré par le diagramme suivant, par contre a est en même temps atome et co-atome.

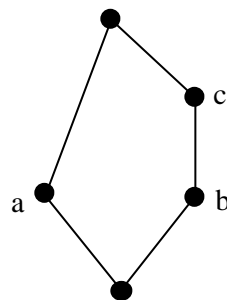


Figure 1.3

Intervalle

Etant donné deux éléments x, y de P , on définit l'intervalle $[x; y]$ comme étant l'ensemble de tous les éléments de P compris entre x et y ; c.à.d. $[x; y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$:

Chaîne, Chaîne saturée, Chaîne maximale

Un sous-ensemble de P d'éléments deux à deux comparables est appelé chaîne; on note $C = \{c_0 < c_1 < \dots < c_n\}$; pour mettre en évidence la relation qui existe entre ses éléments. Une Chaîne est dite saturée si elle est de la forme $C = \{c_0 \mid c_1 \mid \dots \mid c_n\}$; elle est dite maximale si de plus c_0 et c_n sont respectivement des éléments minimal et maximal de P . On appelle longueur d'une chaîne le nombre de ses éléments moins 1.

Antichaîne

On appelle antichaîne tout sous-ensemble de P d'éléments deux à deux incomparables. Désormais, on appellera famille tout sous-ensemble de P , et famille de Sperner toute antichaîne.

La relation entre chaînes et antichaînes a été démontrée par R.P. Dilworth [24]; soit

$$\max \{f(A) : A \text{ antichaîne de } P\} = \min \{f(C) : C \text{ partition de } P \text{ en chaînes}\}$$

Poset dual

On appelle poset dual de P (noté P^*), l'ensemble P ; muni de la relation d'ordre duale, c.à.d. $x \leq_{P^*} y \iff x \geq_P y$: Dans toute la suite on notera cet ordre \leq^* :

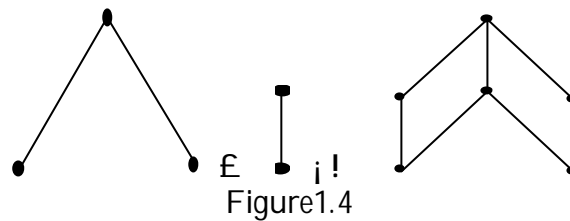
Produit cartésien de deux posets

Le poset produit $P \times Q$ des posets P et Q est défini comme étant l'ensemble des couples $(x; y)$; $x \in P$ et $y \in Q$, ordonné par :

$$(x; y) \leq_{P \times Q} (x'; y') \iff x \leq_P x' \text{ et } y \leq_Q y'$$

Si on veut tracer le diagramme de Hasse de $P \times Q$ il suffit de tracer celui de P , puis remplacer chaque élément x de P par une copie Q_x de Q , et relier les éléments correspondant de Q_x et Q_y si x et y sont reliés dans P :

Exemple :



Filtre, Idéal

Une famille F de P est appelée filtre (resp. idéal) si,

$$x \in F \text{ et } y \leq x \text{ (resp. } y \geq x \text{)} \Rightarrow y \in F:$$

Un filtre F (resp. idéal) est dit généré par une famille S de P si,

$$F = \{x \in P : x \geq y \text{ (resp. } x \leq y \text{)}; \text{ pour au moins un } y \in S\}:$$

On appelle filtre (resp. idéal) principal, un filtre (resp. idéal) généré par un seul élément.

Supremum, Infimum

Etant donnés $x; y$ et z trois éléments de P . l'élément z est appelé supremum (resp. infimum) de x et y (noté $x \vee y$ (resp. $x \wedge y$)) si,

$$(z \geq x; z \geq y) \text{ et (si } w \geq x; w \geq y; \text{ alors } z \leq w):$$

$$\text{(resp. } (z \leq x; z \leq y) \text{ et (si } w \leq x; w \leq y; \text{ alors } z \geq w)):$$

Exemples :

² Dans l'ensemble $P(E)$ des parties d'un ensemble E ordonné par inclusion, le supremum des parties X et Y de E est $X \cup Y$, et l'infimum est $X \cap Y$:

² Dans l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels ordonné par divisibilité, le supremum et l'infimum de deux entiers m et n sont respectivement le P.P.C.M($m; n$) et le P.G.C.D($m; n$):

Treillis

Un treillis est un poset P dans lequel $x \sqcup y$ et $x \sqcap y$ existent pour toute paire $(x; y) \in P^2$: Les posets des exemples précédents sont des treillis. Par contre l'ordre partiel illustré par la figure 1.5 sur l'ensemble $E = \{a; b; c; d\}$ n'est pas un treillis, il suffit de remarquer que $a \sqcup b$; voire $c \sqcap d$, n'existent pas.

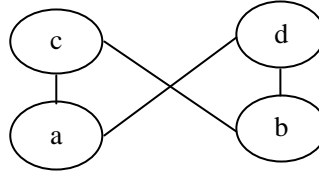


Figure 1.5

Notons qu'un treillis admet un unique élément minimal et un unique élément maximal.

Fonction de rang

Une fonction de rang d'un poset P est une fonction définie de P dans \mathbb{N} , notée r_P ; telle que $r_P(x) = 0$ pour tout élément minimal x de P et si $x \sqsubset y$, alors $r_P(y) = r_P(x) + 1$:

S'il n'ya pas de confusion ou sauf mention expresse, on notera la fonction de rang r :

Exemple :

L'ensemble $P(E)$ des parties d'un ensemble E ordonné par inclusion est muni d'une fonction de rang donnée par le cardinal (voir fig 1.6 pour $E = \{a; b; c\}$):

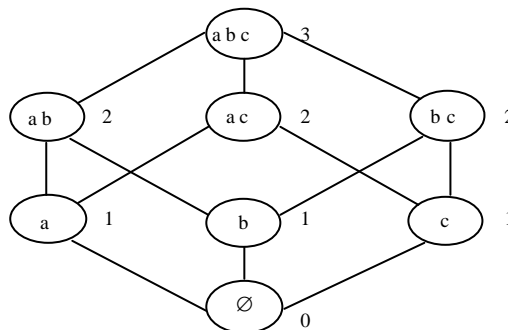


Figure 1.6

On appellera poset gradué tout poset muni d'une fonction de rang r . Le nombre $r(P) = \max\{r(x) ; x \in P\}$ est appelé rang de P : Si P est un poset gradué et si tout élément maximal est de rang $r(P)$ alors, le poset dual P^* est aussi gradué et l'on a :

$$r_{P^*}(x) = r(P) - r(x) ; \text{ pour tout } x \in P :$$

Si P et Q sont deux posets gradués, alors le poset $P \times Q$ l'est aussi et l'on a :

$$r_{P \times Q}((x; y)) = r_P(x) + r_Q(y) :$$

On appelle i ème niveau d'un poset P gradué, l'ensemble :

$$N_i = \{x \in P : r(x) = i\} ; i = 0, \dots, r(P) :$$

Son cardinal est noté W_i et est appelé i ème nombre de Whitney.

Fonction de représentation

Une fonction de représentation X d'un poset P est une fonction définie de P dans \mathbb{R} , telle que :

$$\text{Pour tout } x; y \in P ; \text{ si } y > x ; \text{ alors } X(y) \geq X(x) + 1 :$$

Exemple :

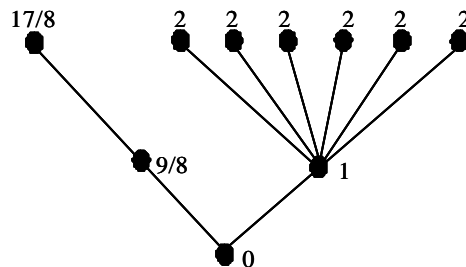


Figure 1.7

PROPOSITION 1.1

Une fonction $X : P \rightarrow \mathbb{R}$ est de représentation si et seulement si :

$$X(y) \geq X(x) + 1, \text{ pour tout } x; y \in P ; \text{ tels que } y \text{ m } x :$$

En effet, si $y > x$ et y ne couvre pas x ; alors il existe p_1, \dots, p_k dans P ; tels que :

$$y \text{ m } p_1 \text{ m } \dots \text{ m } p_k \text{ m } x ;$$

et l'on a :

$$X(y) - X(x) = \underbrace{(X(y) - X(p_1))}_{\circ_1} + \underbrace{(X(p_1) - X(p_2))}_{\circ_1} + \dots + \underbrace{(X(p_k) - X(x))}_{\circ_1} \quad \neq 1$$

Remarques :

- a) La fonction de rang est une fonction de représentation.
- b) Il peut arriver qu'un poset ne soit pas gradué. La figure 1.8 illustre le diagramme de Hasse d'un poset de ce type. En fait, un poset n'est pas gradué si son diagramme de Hasse admet un cycle de longueur impaire.
- c) Tout poset admet une fonction de représentation. Il suffit de considérer la fonction "hauteur" h ; définie de P dans \mathbb{N} qui, à tout élément x de P ; associe le nombre d'éléments $h(x)$ d'une plus longue chaîne de P ayant x comme élément maximal moins 1.

Exemple :

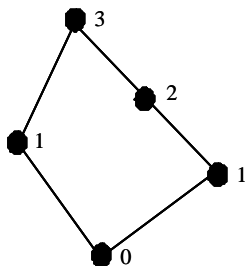


Figure 1.8

Moyenne et Variance d'une représentation

On appelle moyenne ou espérance d'une représentation X d'un poset P , la quantité suivante :

$$E_X = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} X(p)$$

La moyenne d'une famille A de P est définie par :

$$E_X(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{p \in A} X(p)$$

La variance d'une représentation X d'un poset P est donnée par :

$$V_X^2 = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} (X(p) - E_X)^2 = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} X^2(p) - E_X^2$$

Variance d'un poset

On appelle variance d'un poset P le nombre :

$$\mathfrak{V}^2(P) = \inf \mathfrak{V}_{X^{\mu}}^2 : X \text{ représentation de } P \text{ g}$$

Le chapitre suivant sera consacré entièrement au problème d'existence.

Représentation optimale

Une représentation X^{μ} d'un poset P est dite optimale² si :

$$\mathfrak{V}_{X^{\mu}}^2 = \mathfrak{V}^2(P) :$$

Si P est un poset gradué et r est une représentation optimale, alors P est dit de rang comprimé.

Le chapitre suivant sera consacré entièrement à la question de l'existence et de l'unicité d'une représentation optimale dans un poset quelconque ...ni.

1.2 Exemples de quelques treillis classiques

Treillis booléen (B_n)

C'est le poset des sous-ensembles d'un ensemble à n éléments, ordonné par inclusion. Le rang d'un sous-ensemble de B_n est son cardinal. Le i ème niveau $N_i(B_n)$; $i = 0; 1; \dots; n$; est l'ensemble de toutes les parties à i éléments, c.à.d.

$$|N_i(B_n)| = \binom{n}{i} :$$

Soit B_n le treillis booléen associé à $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et soit $(f_0; 1g^n; 1)$ le treillis ordonné par :

$$\underline{a} = (a_1; \dots; a_n) \leq \underline{b} = (b_1; \dots; b_n) \text{ ssi } a_i \leq b_i \text{ pour tout } i.$$

Alors B_n et $(f_0; 1g^n; 1)$ sont isomorphes. Il suffit tout simplement de considérer l'application bijective $\varphi(\underline{a}) = f_{x_i} : a_i = 1g$:

²Il est prouvé que la représentation de la figure 1.7 est optimale.

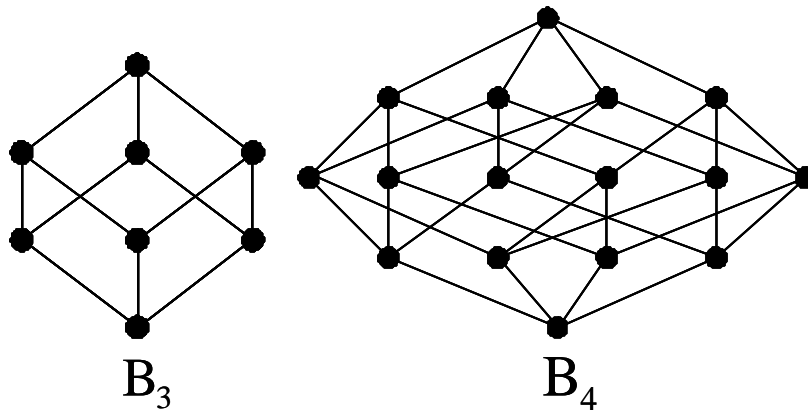


Figure 1.9

Treillis linéaire ($L_n(q)$)

C'est le poset de tous les sous-espaces vectoriels V d'un espace vectoriel de dimension n sur le corps de Galois à q éléments $GF(q)$; ordonné par inclusion. Le rang d'un élément de $L_n(q)$ est sa dimension en tant que sous-espace vectoriel. Il est bien connu [3] que le i ème nombre de Whitney de $L_n(q)$ est égal au coefficient de Gauss $\mu_{i,q}^n$; défini par :

$$\mu_{i,q}^n = \frac{(q^n - q^i - 1)(q^{n-1} - q^i - 1) \dots (q^{n-i+1} - q^i - 1)}{(q^i - 1)(q^{i-1} - 1) \dots (q - 1)}; \quad 0 \leq i \leq n$$

La figure 1.10 représente $L_3(2)$:

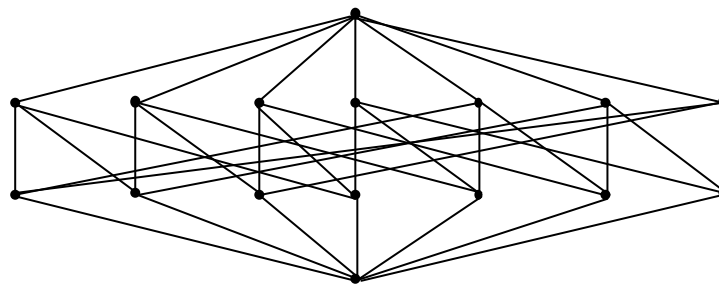


Figure 1.10

Treillis modulaire

Un treillis est dit modulaire si pour tous $x; y; z$ appartenant à P ; on a :

$$x \vee z \Rightarrow x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

Treillis distributif

Un treillis est dit distributif si les identités suivantes sont vérifiées pour tous $x; y; z$ appartenant à P ; on a :

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$$

Notons que ces deux identités sont équivalentes [50] :

Remarque :

Si un treillis est distributif il est nécessairement modulaire.

Treillis des partitions d'un ensemble (P_n)

C'est le poset de toutes les partitions d'un ensemble à n éléments, ordonné par raffinement, c'est-à-dire,

$$\pi_i \leq \pi_j \text{ si et seulement si } \pi_i \setminus \pi_j \in \mathcal{E}; \Rightarrow \pi_i \mu \pi_j;$$

avec $\pi_i = (\pi_{i1}; \pi_{i2}; \dots; \pi_{ik})$ et $\pi_j = (\pi_{j1}; \pi_{j2}; \dots; \pi_{jl})$ deux partitions de P_n .

En d'autres termes

$$\pi_i \leq \pi_j \Leftrightarrow \pi_i \text{ s'obtient à partir d'une subdivision en deux parties d'une seule classe de } \pi_j$$

Le treillis des partitions est un poset gradué, sa fonction de rang est définie par $r(\pi) = n - b(\pi)$; $\pi \in P_n$; où $b(\pi)$ désigne le nombre de classes dans la partition π : Le rang de P_n est donc égal à $n - 1$.

La figure 1.11 illustre P_4 :

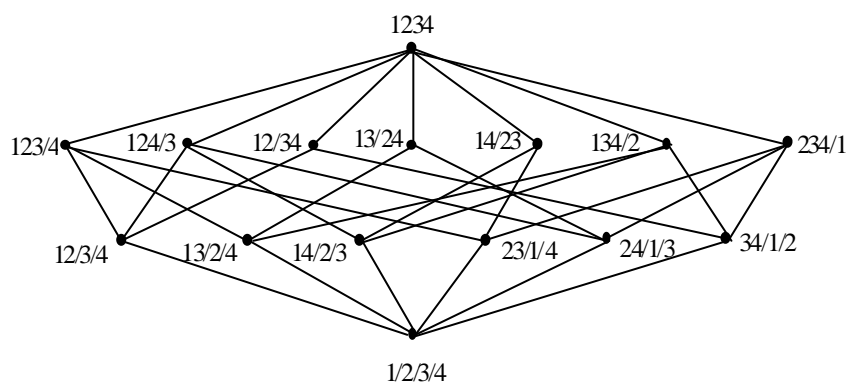


Figure1.11

Treillis des faces du n-cube (C_n)

C'est le poset gradué résultant du produit cartésien de n copies de \wedge_2 , auquel on rajoute un élément minimal couvert par tous les éléments du niveau N_0 . Nous pouvons aussi le définir comme étant l'ensemble des n -uplets $\underline{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ avec $x_i \in \{0; 1; 2\}$ pour tout i ; ordonné par:

$$\underline{x} \leq \underline{y} \iff x_i = y_i \text{ ou } y_i = 2; \text{ pour tout } i:$$

Le rang d'un n -uplet \underline{x} de C_n est défini par le nombre de composantes égales à 2 dans \underline{x} . On a ainsi :

$$W_i = \binom{n}{i} 2^{n-i}$$

Le treillis C_2 est illustré par la figure 1.12.

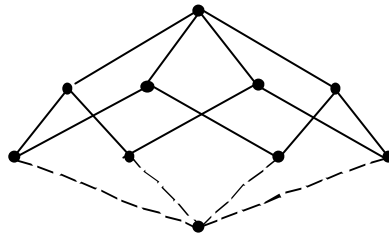


Figure 1.12

Treillis atomique

Un treillis P avec 0 est dit atomique, si tout élément $a \in P; a \neq 0$; est supremum d'atomes, c.à.d. $a = \sup \{p \in P : 0 \leq p \leq a\}$:

Exemples :

- 2 Le dual C_n^* du treillis des faces du n -cube est un treillis atomique.
- 2 Par contre le poset illustré par la figure 1.13 ne l'est pas.

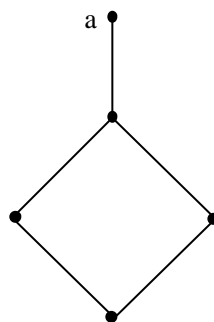


Figure1:13

Treillis semimodulaire (resp. modulaire)

Soit P un poset et soit f une fonction définie de P dans \mathbb{N} : La fonction f est dite semimodulaire (resp. modulaire) sur P , si pour tous $x, y \in P$; on a:

$$f(x \wedge y) + f(x \vee y) \leq f(x) + f(y)$$

(resp: $f(x \wedge y) + f(x \vee y) = f(x) + f(y)$)

Si P est un treillis avec $0, 1$, P est dit semimodulaire (resp. modulaire) s'il admet une fonction de rang semimodulaire (resp. modulaire).

Remarque :

Cette définition est indépendante de celle donnée en page 15.

Treillis géométrique

Un treillis est dit géométrique s'il est à la fois :

- i) atomique,
- ii) semimodulaire,
- iii) sans chaînes infinies.

Exemple :

² Le dual C_n^* du treillis des faces du n -cube est fini, atomique et modulaire, il est par conséquent géométrique.

CHAPITRE II

EXISTENCE ET UNICITE D'UNE REPRESENTATION OPTIMALE

2.1 Introduction

Etant donné un poset P fini (non réduit à une antichaîne), V.B. Alekseev [4] a établi une simple formule asymptotique relative à la taille maximale d'une antichaîne dans le poset P^n $\{ \underbrace{P \times \dots \times P}_{n \text{ fois}} \}$; dont voici l'énoncé :

THEOREME 2.1 (Alekseev [4])

Si P n'est pas une antichaîne, alors

$$d(P^n) \sim \frac{|P|^n}{2^{1/n} \sqrt[n]{|P|}}; \quad n! \sim \sqrt[n]{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Dans ce Chapitre nous nous proposons d'étudier l'existence et l'unicité d'une fonction de représentation X^n de P , telle que :

$$\sqrt[n]{X^n} = \sqrt[n]{|P|}$$

Pour ce faire, nous examinons d'abord quelques résultats préliminaires.

2.2 Résultats préliminaires

PROPOSITION 2.1

Soit X une représentation de P et soit c une constante réelle. La fonction $X^0 = X + c$ possède les propriétés suivantes :

- a) X^0 est une représentation
- b) $\sqrt[n]{X^0} = \sqrt[n]{X} + c$ et $\sqrt[n]{X^0} = \sqrt[n]{X}$

Preuve

a) Soient p et q deux éléments quelconques de P tels que $p > q$, alors

$$X^0(p) - X^0(q) = (X(p) + c) - (X(q) + c) = X(p) - X(q) \leq 1$$

b) D'une part

$$1_{X^0} = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} X^0(p) = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} (X(p) + c) = 1_X + c$$

et d'autre part

$$\frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} (X^0(p) - 1_{X^0})^2 = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} (X(p) + c - 1_X - c)^2 = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} (X(p) - 1_X)^2$$

¥

PROPOSITION 2.2

Pour toute représentation X de P et toute constante réelle ϵ , il existe une représentation Y de P telle que :

$$1_Y = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} (Y(p) - X(p))^2 \leq \epsilon$$

Preuve

Il suffit tout simplement de poser $Y = X - \epsilon$ et d'appliquer ensuite les résultats de la Proposition 2.1.

¥

COROLLAIRE 2.1

Pour toute constante réelle ϵ ; on a :

$$\inf_{X \text{ représentation de } P} \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} (X(p) - 1)^2 = \inf_{X \text{ représentation de } P} \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} (X(p) - 1 + \epsilon)^2$$

Preuve

La preuve est immédiate en vertu de la Proposition 2.2.

¥

PROPOSITION 2.3

Soit ϵ une constante réelle. Il existe $R > 0$ tel que :

$$\inf_{X \text{ représentation de } P} \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} (X(p) - 1)^2 = \inf_{X \text{ représentation de } P} \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} (X(p) - 1 + \epsilon)^2$$

Preuve

Soit X une représentation de P de moyenne λ : Comme P n'est pas une antichaîne, alors

$$\exists p, q \in P; p \not\leq q \text{ tels que } p > q;$$

donc

$$X(p) - X(q) > \lambda;$$

ainsi

$$\max_{p, q \in P} (X(p) - X(q)) > \lambda;$$

d'où

$$\sum_{p \in P} X^2(p) > \lambda^2 |P|;$$

il vient

$$\sum_{p \in P} X^2(p) > \lambda^2 |P|$$

Posons à présent

$$R = \sum_{p \in P} X^2(p)$$

Si on suppose l'existence d'une représentation Y de P telle que :

$$Y(p) > R \text{ pour quelques } p \in P \text{ avec } \sum_{p \in P} Y(p) = \lambda |P|;$$

alors

$$\sum_{p \in P} Y^2(p) > \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} Y^2(p) > \frac{1}{|P|} R^2 > \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} X^2(p) > \lambda^2 |P|$$

THEOREME 2.1 (Engel & Gronau [29])

Pour tout poset P , et tout nombre réel λ , il existe une et une seule représentation optimale de P de moyenne λ :

Preuve

Posons $P = \{p_1, \dots, p_n\}$. Dans toute la suite, on associera à chaque fonction de représentation X un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$, où $x_i = X(p_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n$:

Soit $E(P) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ l'ensemble des arcs du diagramme de Hasse associé à P . Pour tout arc $e = (p, q) \in E(P)$ (c.à.d. $p \leq q$), on note par

e^+ et e^- respectivement ses extrémités initiale et terminale (c.à.d. $e^- = p$ et $e^+ = q$).

La matrice d'incidence $A = (a_{ij})$ arcs-sommets de P , est définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i^+ = p_j \\ -1 & \text{si } e_i^- = p_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \text{ et } j = 1, \dots, n$$

Posons $V = \frac{1}{|P|} I_n$; où I_n est la matrice identité d'ordre n et $v = \frac{1}{|P|} \mathbf{1}_n$; où $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^t$:

Moyennant la Proposition 1.1, on peut vérifier que X est une représentation de P si et seulement si $Ax \leq \mathbf{1}_n$, ou d'une manière équivalente $|Ax| \leq \mathbf{1}_n$. On peut vérifier aussi que $\sigma_X^2 = v^t x$ et $\sigma_X^2 = x^t (V - vv^t) x$.

Ainsi le problème se reformule de la manière suivante :

$$\sigma^2(P) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ x^t (V - vv^t) x : v^t x = 1; |Ax| \leq \mathbf{1}_n; |x_j| \leq R; \sigma_i = \frac{1}{n} \}$$

Les ensembles $\{x \in \mathbb{R}^n : v^t x = 1\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n : |Ax| \leq \mathbf{1}_n\}$ sont des fermés dans \mathbb{R}^n (Images réciproques de fermés par des fonctions continues), de plus, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| \leq R; \sigma_i = \frac{1}{n}\}$ est borné, donc l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : v^t x = 1; |Ax| \leq \mathbf{1}_n; |x_j| \leq R; \sigma_i = \frac{1}{n}\}$ est compact.

La fonction définie de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^+ qui à x associe $x^t (V - vv^t) x$; est continue sur un compact, elle atteint donc ses bornes. D'où l'existence.

Supposons l'existence de deux fonctions de représentations optimales X et Y de même moyenne $\frac{1}{n}$; alors la représentation $Z = \frac{X + Y}{2}$ est de moyenne $\frac{1}{n}$ et de variance :

$$\sigma_Z^2 = \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{2} = \sigma_X^2 :$$

Ce qui est absurde.

D'où l'unicité. ¥

2.3 Modélisation

A travers la démonstration du Théorème 2.1 ci-dessus, on peut conclure que le problème de recherche d'une fonction de représentation optimale est équivalent à la recherche de la solution optimale du programme quadratique (PQ) suivant :

$$(PQ) : \begin{cases} \min x^t (V + \sum_{i=1}^n v_i v_i^t) x \\ Ax = 1_n \\ x_i \geq 0; \quad i = \overline{1; n} \end{cases}$$

Les algorithmes de la programmation quadratique, comme par exemple celui de Beale et Wolf (Cf. [48]), peuvent être utilisés pour la résolution du programme (PQ) ; afin de trouver une représentation optimale. Cependant Konrad Engel [27] a proposé un algorithme polynomial très efficace, qui a fait l'objet d'une étude détaillée au Chapitre VII.

CHAPITRE III

CONDITIONS D'OPTIMALITE DE LA FONCTION DE RANG DANS UN POSET GRADUE

3.1 Introduction

La formule d'Alekseev énoncée dans l'introduction du Chapitre II, à savoir:

$$d(P^n) \gg \frac{|P|^n}{2^{1/n} \mathfrak{R}(P)} \text{ quand } n \rightarrow +\infty ;$$

a suscité l'attention de nombreux chercheurs dans ce domaine, en vue d'évaluer le paramètre $\mathfrak{R}(P)$:

A ce titre K. Engel [30] proposa une approche de résolution de ce problème, en disant que si P est gradué et de rang comprimé (fonction de rang optimale), alors $\mathfrak{R}(P) = \mathfrak{R}_r(P)$. Evidemment cette approche pose le problème de la recherche de conditions suffisantes et/ou nécessaires d'optimalité de la fonction de rang dans le poset sous-jacent. Les principaux résultats de ces recherches nous les avons résumés dans les Théorèmes 3.1 et 3.2 ci-dessous, après la présentation des définitions et concepts qui lui sont directement liés.

3.2 Définitions

Soit A une partie de P . On pose :

$$R^+(A) = \{x \in P : x \text{ m a pour au moins un } a \in A\}$$

$R^+(A)$ est appelé ombre supérieure de A .

On dira que P est un poset normal si et seulement si,

$$\frac{|A|}{W_i} = \frac{|R^+(A)|}{W_{i+1}} ; \text{ pour tout } A \in N_i, i = 0, \dots, r(P) - 1;$$

Une chaîne C de P est dite symétrique si C est de la forme $C = c_0 \mid c_1 \mid \dots \mid c_k$ avec $r(c_0) + r(c_k) = r(P)$:

Une collection L_s de chaînes de P est dite une partition en chaînes symétriques de P ; si L_s forme une partition de P ; et toute chaîne appartenant à L_s est symétrique.

2 Finalement P est dit un ordre en chaînes symétriques s'il admet une partition en chaînes symétriques.

2 P est dit de rang unimodal s'il existe $k; 0 \leq k < r(P)$ tel que :

$$W_i \leq W_{i+1}; \text{ pour } i < k \text{ et } W_i \geq W_{i+1}; \text{ pour } i \geq k:$$

2 P est dit de rang symétrique si $W_i = W_{r(P)-i}; \forall i = 0, \dots, r(P)$:

2 Une k -famille est une famille de P ne contenant pas une chaîne à $k + 1$ éléments dans P . Ainsi une 1-famille est une antichaîne.

2 P possède la propriété de k -Sperner si,

$$d_k(P) = \max_{0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r(P)} \sum_{l=1}^k W_{i_l};$$

où $d_k(P)$ représente la taille maximale des k -familles dans P :

2 P possède la propriété forte de Sperner si P possède la propriété de k -Sperner pour $k = 1, 2, \dots, r(P) + 1$:

2 P est dit un Peck-poset³ s'il est de rang unimodal, de rang symétrique et possède la propriété forte de Sperner.

3.3 Résultats auxiliaires

LEMME 3.1

Soit A une famille de P et χ_A la fonction caractéristique associée à A , c'est-à-dire :

$$\chi_A : P \rightarrow \{0, 1\} \\ \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si F est une famille de P , alors

$$F \text{ est un } \dots \text{ et } \chi_F \text{ croissante}$$

Preuve

(\Rightarrow) Soient p et q deux éléments de P tels que $q > p$:

Si $p \in F$ alors $q \in F$, car F est un \dots et donc $\chi_F(q) = \chi_F(p) = 1$:

Si $p \notin F$ alors $\chi_F(p) = 0 \leq \chi_F(q); \forall q \in P$:

(\Leftarrow) Par analogie.

¥

³Cette dénomination a eu son origine dans le papier de G.W. Peck [53] qui est une synthèse des travaux effectués par Graham, West, Purdy, Erdős, Chung et Kleitman.

LEMME 3.2 (Engel & Gronau [29])

Soit g une application croissante définie de P dans \mathbb{R} . Il existe $n \in \mathbb{N}^*$; F_1, \dots, F_n des ...ltres de P , $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres réels tels que :

$$g = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{F_i}$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$:

Preuve (a)

² Supposons en 1er lieu que g est positive et démontrons le résultat hormis α_0 ; en raisonnant par induction sur $|\text{supp}(g)|$; où $\text{supp}(g)$ désigne le support de g :

Si $|\text{supp}(g)| = 0$; alors $g \equiv 0$ et le résultat est évidemment vrai, il suffit de prendre $n = 1$; $\alpha_1 = 0$ et $F_1 = P$:

Supposons le résultat vrai pour $|\text{supp}(g)| < k$ ($k \in \mathbb{N}^*$); et montrons-le pour $|\text{supp}(g)| = k$:

Soit $F_1 = \text{supp}(g)$; F_1 est un ...ltre, car g est positive et croissante, et soit $\alpha_1 = \min_{p \in F_1} g(p)$: Posons $g^0 = g - \alpha_1 \cdot \mathbb{1}_{F_1}$; g^0 ainsi définie est non négative et croissante. De plus $|\text{supp}(g^0)| < |\text{supp}(g)|$; en effet,

$$g(p) = 0 \iff p \notin F_1 \iff \mathbb{1}_{F_1}(p) = 0 \implies g^0(p) = 0:$$

$$g(p) > 0 \implies g^0(p) > 0 \text{ alors que } g^0(p) = 0:$$

Donc d'après l'hypothèse de l'induction, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0$ des nombres réels non négatifs; F_1^0, \dots, F_n^0 des ...ltres tels que :

$$g^0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^0 \cdot \mathbb{1}_{F_i^0}$$

$$\text{Il en résulte que } g = g^0 + \alpha_1 \cdot \mathbb{1}_{F_1} = \alpha_1 \cdot \mathbb{1}_{F_1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i^0 \cdot \mathbb{1}_{F_i^0}:$$

² Supposons maintenant que g est croissante quelconque. Puisque P est ...ni, $\alpha_0 = \min_{p \in P} g(p)$ existe. Posons alors $g^0 = g - \alpha_0$, qui est une application croissante et positive. Par conséquent il existe $n \in \mathbb{N}^*$; $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres réels non négatifs; F_1, \dots, F_n des ...ltres tels que :

$$g^0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{F_i}$$

Il en résulte en...n que

$$g = g_0 + g^0 = g_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} F_i \quad \forall$$

LEMME 3.3

Soient F et X respectivement un filtre et une représentation d'un poset P . Etant donné $\epsilon > 0$, on considère l'application X_ϵ^F définie de P dans \mathbb{R} par :

$$X_\epsilon^F(p) = \begin{cases} \frac{1}{2} X(p) + \epsilon & \text{si } p \in F \\ X(p) & \text{si } p \notin F \end{cases}$$

Alors

a) X_ϵ^F est une représentation.

$$b) 1_{X_\epsilon^F} = 1_X + \epsilon \frac{|F|}{|P|}$$

Preuve

a) Soient p et q deux éléments de P ; tels que $p > q$: On distingue trois cas possibles⁴ :

1er cas: $p \in F$ et $q \notin F$:

$$X_\epsilon^F(p) - X_\epsilon^F(q) = X(p) + \epsilon - X(q) \geq 1 + \epsilon$$

2ième cas: $p \in F$ et $q \in F$:

$$X_\epsilon^F(p) - X_\epsilon^F(q) = X(p) + \epsilon - X(q) - \epsilon \geq 1$$

3ième cas: $p \notin F$ et $q \notin F$:

$$X_\epsilon^F(p) - X_\epsilon^F(q) = X(p) - X(q) \geq 1$$

b) On a :

$$\begin{aligned} 1_{X_\epsilon^F} &= \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} X_\epsilon^F(p) \\ &= \frac{1}{|P|} \sum_{p \in F} X_\epsilon^F(p) + \frac{1}{|P|} \sum_{p \notin F} X_\epsilon^F(p) \end{aligned}$$

⁴Le 4ième cas ne peut pas avoir lieu puisque F est un filtre.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} r(p) + \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} r(p)^2 \\
&= \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} r(p) + \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} r(p)^2 \\
&= \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} r(p) + \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} r(p)^2
\end{aligned}$$

¥

3.4 Théorèmes sur l'optimalité de la fonction de rang

THEOREME 3.1 (Alekseev [4])

Soit P un poset gradué et soit r sa fonction de rang. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) r est une représentation optimale de P .
- ii) $r(F) \geq r$; $\forall F$; \forall filtre de P :
- iii) $r(I) \leq r$; $\forall I$; idéal de P :

Preuve (ii)

i) \Rightarrow ii) Raisonnons par contraposée. Supposons qu'il existe un filtre F tel que $r(F) < r$:

Soient $\epsilon > 0$ et r^ϵ la représentation définie à partir de r , ϵ et de F , comme l'indique le Lemme 3.3, et considérons la fonction positive $f(\epsilon) = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} r^\epsilon(p)^2$; c.à.d.

$$f(\epsilon) = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} r^\epsilon(p)^2$$

D'après le Lemme 3.3, on a : $r^\epsilon = r + \frac{\epsilon}{|P|} \sum_{p \in P} r(p)$

Donc

$$f(\epsilon) = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} \left(r(p) + \frac{\epsilon}{|P|} \sum_{p \in P} r(p) \right)^2$$

La fonction f étant un polynôme de degré 2 en ϵ ; donc dérivable, et l'on a :

$$f^0(\epsilon) = \frac{2}{|P|} \sum_{p \in P} \left(\sum_{j \in P} |F_j| \right) \left(\sum_{p \in P} r(p) \right) + \dots$$

Il vient aussitôt

$$f^0(0) = 2 \frac{|F|}{|P|} (1_r(F) - 1_r) < 0:$$

Donc f est décroissante au voisinage de 0, c.à.d. il existe $\epsilon > 0$ tel que $f(0) > f(\frac{\epsilon}{2})$; ou encore

$$\frac{3}{4} r^2 > \frac{3}{4} r_{\frac{\epsilon}{2}}^2$$

Par conséquent r n'est pas optimale.

ii) => i) Soit X une représentation quelconque. L'objet est de montrer :

$$\sum_{X} r^2 \circ \sum_{X} r^2 \text{ sachant que } 1_r(F) \circ 1_r; \dots$$

Notons tout d'abord qu'on peut, sans nuire à la généralité, supposer $1_{X_0} = 1_r$ (sinon on s'y ramène en vertu de la Proposition 2.1, en posant $X = X_0 + 1_r$)

On doit prouver que

$$\sum_{p \in P} X^2(p) \circ \sum_{p \in P} r^2(p):$$

Pour ce faire montrons tout d'abord

$$\sum_{p \in P} r(p) (X(p) - r(p)) \circ 0:$$

Soient p; q ∈ P tels que p < q: On a :

$$\begin{aligned} (X(p) - r(p)) - (X(q) - r(q)) &= (X(p) - X(q)) - (r(p) - r(q)) \\ &= (X(p) - X(q)) - 1 \circ 0: \end{aligned}$$

La fonction X - r est donc croissante ce qui implique d'après le Lemme 3.2 que :

$$X - r = \sum_{i=1}^n \epsilon_i F_i$$

où n ∈ N; F₁; ...; F_n des ...lres et $\epsilon_0; \epsilon_1; \dots; \epsilon_n$ des nombres réels avec $\epsilon_1; \dots; \epsilon_n \circ 0$:

Comme $1_X = 1_r$; alors

$$\sum_{p \in P} (X(p) - r(p)) = 0$$

Il vient

$$\begin{aligned} \sum_{p \in P} r(p) (X(p) - r(p)) &= \sum_{p \in P} (r(p) - 1_r) (X(p) - r(p)) \\ &= \sum_{p \in P} (r(p) - 1_r) \left(s_0 + \sum_{i=1}^n s_i' F_i(p) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{p \in P} s_i (r(p) - 1_r)' F_i(p) \\ &= \sum_{i=1}^n s_i (jF_i 1_r(F_i) - jF_i 1_r) \\ &= \sum_{i=1}^n s_i jF_i (1_r(F_i) - 1_r) = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$2 \sum_{p \in P} r(p) (X(p) - r(p)) + \sum_{p \in P} (X(p) - r(p))^2 = 0$$

D'où

$$\sum_{p \in P} X^2(p) = \sum_{p \in P} r^2(p)$$

ii) \Rightarrow iii) Soit I un idéal de P et posons $F = P \setminus I$, alors F est un ...ltre. En effet, soient $p, q \in P$; tels que $p \in F$ et $q > p$; alors

$$p \in F \Rightarrow p \notin I \Rightarrow q \notin I \Rightarrow q \in F$$

De plus

$$\begin{aligned} 1_r(I) &= \frac{1}{|J|} \sum_{p \in P} r(p) - \sum_{p \in F} r(p) \\ &= \frac{1}{|J|} (jP j 1_r - jF j 1_r(F)) \end{aligned}$$

On a $1_r(F) \circ 1_r$; donc

$$|P| 1_{r,i} |F| 1_r(F) 1 |P| 1_{r,i} |F| 1_r = |I| 1_r$$

D'où

$$1_r(I) 1 1_r$$

iii) => ii) Par analogie.

¥

THEOREME 3.2 (Engel [25])

Si un poset gradué est normal ou un ordre en chaînes symétriques ou un Peck-poset ou un treillis distributif, alors il est de rang comprimé.

Preuve

On se propose ici de démontrer seulement que les posets normaux sont de rang comprimé. Pour les autres conditions nous faisons référence à l'ouvrage de Konrad Engel et Hans Dietrich O.F.Gronau [29]:

Soit F un ...ltre quelconque d'un poset normal P . Nous avons besoins d'établir $1_r(F) \circ 1_r$: Pour ce faire, posons :

$$a_i = \frac{|F \setminus N_i|}{W_i}; \quad i = 0; \dots; r(P):$$

On a

$$a_i 1 a_{i+1}$$

En effet,

$$a_i 1 \frac{|R^+(F \setminus N_i)|}{W_{i+1}} \quad (P \text{ est normal})$$

Montrons alors que $R^+(F \setminus N_i) \mu F \setminus N_{i+1}$

$$x \in R^+(F \setminus N_i) \Rightarrow x \in N_{i+1} \text{ et } \exists y \in F \setminus N_i, \text{ tel que } y \leq x:$$

Comme F est un ...ltre, alors $x \in F$; d'où $x \in F \setminus N_{i+1}$

On a

$$|F| = \sum_{i=0}^{r(P)} |F \setminus N_i| = \sum_{i=0}^{r(P)} a_i W_i \quad \text{et} \quad \sum_{x \in F} r(x) = \sum_{i=0}^{r(P)} |N_i \setminus F| = \sum_{i=0}^{r(P)} i a_i W_i$$

De plus

$$jP_j = \sum_{i=0}^{r(P)} W_i \quad \text{et} \quad r(x) = \sum_{i=0}^{r(P)} iW_i$$

Donc

$${}_{1_r}(F) = \frac{\sum_{i=0}^{r(P)} i a_i W_i}{\sum_{i=0}^{r(P)} a_i W_i} \quad \text{et} \quad {}_{1_r} = \frac{\sum_{i=0}^{r(P)} i W_i}{\sum_{i=0}^{r(P)} W_i}$$

Il vient

$${}_{1_r}(F) \circ {}_{1_r}(\) = \sum_{0 \leq i, j \leq r(P)} i a_i W_i W_j \circ \sum_{0 \leq i, j \leq r(P)} i a_j W_i W_j$$

Puisque $i \circ j \Rightarrow a_i \circ a_j$; alors

$$\sum_{0 \leq i, j \leq r(P)} (i - j)(a_i - a_j) W_i W_j \circ 0;$$

soit

$$\sum_{0 \leq i, j \leq r(P)} i a_i W_i W_j + \sum_{0 \leq i, j \leq r(P)} j a_j W_i W_j \circ \sum_{0 \leq i, j \leq r(P)} i a_j W_i W_j + \sum_{0 \leq i, j \leq r(P)} j a_i W_i W_j;$$

c.à.d.

$$\sum_{0 \leq i, j \leq r(P)} i a_i W_i W_j \circ \sum_{0 \leq i, j \leq r(P)} i a_j W_i W_j;$$

Ce qui achève la démonstration.

¥

3.5 Exemple d'application

Le treillis booléen est distributif. En effet, pour deux parties X et Y de B_n ; on a :

$$X \wedge Y = X \setminus Y \quad \text{et} \quad X _ Y = X \cup Y:$$

Donc

$$X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z; \quad \forall X, Y, Z \in B_n:$$

Ainsi, la fonction de rang définie par la cardinalité est optimale, d'après le Théorème 3.2. Il s'en suit :

THEOREME 3.3 [14]

Pour tout entier $n \geq 1$, la variance du poset booléen B_n est donnée par :

$$\sigma^2(B_n) = \frac{n}{4}$$

Preuve

Désignons respectivement par μ_n et σ_n^2 , la moyenne et la variance de B_n associées à la fonction de rang.

Sachant que $B_n \cong C_1^n$, où C_1 représente la chaîne de longueur 1, alors il vient :

$$\mu_n = n \mu_1(C_1) \quad \text{et} \quad \sigma_n^2 = n \sigma_1^2(C_1) :$$

Or

$$\mu_1(C_1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma_1^2(C_1) = \frac{1}{4};$$

d'où le résultat. ¥

COROLLAIRE 3.1 [14]

Pour tout $n \geq 1$, nous avons :

$$d(B_n) \sim \frac{2^{nk+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi nk}}; \quad k \geq 1$$

Preuve

Immédiate, en vertu des Théorèmes 2.1 et 3.3. ¥

Remarque :

Sperner en 1928 (Cf. [29]) a démontré que la plus longue antichaîne du poset booléen est de taille $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$ (Cf. [29]). Sachant que B_n est isomorphe à $(f_0; 1g^n; 1)$, et que $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^{n+1} - 1$; on déduit moyennant la formule d'Alekseev que :

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \gg \frac{2^{n+1}}{4^n} = \frac{2}{4^n} = \frac{1}{2^{2n-1}}$$

CHAPITRE IV

LE NOMBRE EXPONENTIEL DE BELL

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation de nouvelles propriétés des nombres de Bell, qui serviront par la suite à la résolution des problèmes décrits aux Chapitres suivants.

4.2 Définition

Etant donné un ensemble E , des sous-ensembles $\mathcal{A}_1; \mathcal{A}_2; \dots; \mathcal{A}_k$ forment une partition de E en classes de E si l'on a :

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset \quad ; \quad i \neq j; \\ & i \neq j \text{ entraîne } \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset; \\ & \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \dots \cup \mathcal{A}_k = E: \end{aligned}$$

Parfois on considère un partage de l'ensemble E en sous-ensembles $\mathcal{A}_1; \mathcal{A}_2; \dots; \mathcal{A}_k$, avec seulement les conditions :

$$\begin{aligned} & i \neq j \text{ entraîne } \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset; \\ & \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \dots \cup \mathcal{A}_k = E \end{aligned}$$

Dans ce cas on ne parlera pas de \mathcal{A} partition en classes \mathcal{A} , mais de \mathcal{A} division en parties \mathcal{A} de l'ensemble E (une classe est nécessairement non vide).

Dans toute la suite, nous considérons l'ensemble E comme étant l'ensemble $N_n = \{1; 2; \dots; n\}$ et nous convenons de noter l'ensemble des partitions de N_n par P_n .

4.3 Résultats préliminaires

Nombres de Stirling du second espèce

On désigne par S_n^k le nombre de partitions de P_n à k classes. Ce nombre représente dans P_n le (n, k) ième nombre de Whitney, il vérifie plusieurs propriétés, nous ne mentionnerons ici que celles qui nous intéressent.

PROPOSITION 4.1

Si on se donne deux ensembles $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$; alors le nombre de surjections de X dans Y est $k! S_n^k$:

Preuve

La Proposition est vraie si $n < k$ puisque dans ce cas le nombre de surjections est nul et $S_n^k = 0$:

Supposons $n \geq k$: A toute surjection f de X dans Y correspond une partition de X en k classes; soit $\mathcal{A} = (f^{-1}(y_1), \dots, f^{-1}(y_k))$:

Inversement, à toute partition $A = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ de X à k classes, correspondent $k!$ surjections de X dans A , définies par :

$$f_{\mathcal{A}}(A_i) = a_{\mathcal{A}(i)}; \text{ pour tout } i = 1, \dots, k;$$

où \mathcal{A} est une permutation de N_k , il en existe $k!$:

¥

PROPOSITION 4.2

Les nombres de Stirling présentent la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} S_{n+1}^k &= S_n^{k-1} + k S_n^k, \quad 1 \leq k \leq n \\ S_n^1 &= S_n^n = 1 \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Preuve

Considérons l'ensemble des partitions de N_{n+1} en k classes.

1) Pour certaines partitions l'élément $n + 1$ occupe tout seul une classe. Le nombre de ces partitions est S_n^{k-1} :

2) Pour les autres partitions, l'élément $n + 1$ n'est pas seul dans une classe. Il y en a $k S_n^k$ partitions. Pour le voir il suffit de partitionner l'ensemble N_n en k classes puis injecter l'élément $n + 1$ dans une de ces classes, nous en avons k possibilités.

¥

Cette relation permet de calculer de proche en proche les S_n^k

		nombres de Stirling du second espèce									
S_n^k	$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n = 1$		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2		1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3		1	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4		1	7	6	1	0	0	0	0	0	0
5		1	15	25	10	1	0	0	0	0	0
6		1	31	90	65	15	1	0	0	0	0
7		1	63	301	350	140	21	1	0	0	0
8		1	127	966	1701	1050	266	28	1	0	0
9		1	225	3025	7770	6951	2646	462	36	1	0
10		1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Tableau 1.1

PROPOSITION 4.3

Soit x un nombre réel quelconque et n un entier naturel non nul. On a :

$$x^n = \sum_{k=0}^n S_n^k x(x-1)\dots(x-k+1) \quad (4.3.2)$$

Preuve

Considérons l'ensemble des applications d'un ensemble X à n éléments dans un ensemble A à k éléments, tels que $k \leq n$: Cet ensemble est de cardinalité k^n :

- 1) Certaines applications sont des surjections de X sur A ; leur nombre est $k! S_n^k$; d'après la Proposition 4.1:
- 2) Les autres applications sont des surjections de X sur $M \subset A$; ($|M| = m < k$), il y en a :

$$\sum_{m=0}^{k-1} \binom{n}{m} m! S_n^m$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} k^n &= k! S_n^k + \sum_{m=0}^{k-1} \binom{n}{m} m! S_n^m \\ &= \sum_{m=0}^k \binom{n}{m} m! S_n^m \\ &= \sum_{m=0}^k S_n^m k(k-1)\dots(k-m+1) \end{aligned}$$

L'identité proposée est de degré n ; étant vraie pour $k = 0$ et pour les n valeurs de $k = 1; 2; \dots; n$; est donc vraie pour tout x :

¥

PROPOSITION 4.4

On a :

$$S_n^k = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (i-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n; \quad 0 \leq k \leq n \quad (4.3.3)$$

Preuve

La Proposition est vraie pour $k = 1$:

Pour $k \geq 2$; on a :

$$\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (i-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n = \sum_{i=0}^k \frac{(i-1)^{k-i}}{i!(k-i)!} i^n$$

D'après (4.3.2)

$$i^n = \sum_{j=0}^n S_n^j i(i-1)\dots(i-j+1)$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (i-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n &= \sum_{i=0}^k \frac{(i-1)^{k-i}}{i!(k-i)!} \sum_{j=0}^n S_n^j i(i-1)\dots(i-j+1) \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{(i-1)^{k-i}}{(k-i)!} \sum_{j=0}^n \frac{S_n^j}{(i-i+j)!} \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^n \frac{(i-1)^{k-i}}{(k-i)!(i-i+j)!} S_n^j \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^k \frac{S_n^j}{(k-i+j)!} (i-1)^{k-i} \frac{(k-i+j)!}{(k-i)!(i-i+j)!} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{S_n^j}{(k-i+j)!} \sum_{i=0}^k (i-1)^{k-i+j} \binom{k-i+j}{i} \\ &= S_n^k + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{S_n^j}{(k-i+j)!} (i-1+j+1)^{k-i+j} \\ &= S_n^k \end{aligned}$$

PROPOSITION 4.5

On a :

$$S_{n+1}^k = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} S_m^{k-1} \quad (4.3.4)$$

Preuve

En supprimant la classe qui contient l'élément $n + 1$ d'une partition de N_{n+1} en k classes, on obtient une partition en $k - 1$ classes d'un sous-ensemble K de N_n . Inversement, à chaque sous-ensemble K de N_n ($|K| = m \leq n; m = 1; 2; \dots; n$) correspond S_m^{k-1} partitions de N_{n+1} en k classes et ce en rajoutant à chaque partition de K en $k - 1$ classes, la classe $N_{n+1} \setminus K$. Comme il y a $\binom{n}{m}$ sous-ensembles à m éléments dans N_n , la Proposition est établie.

PROPOSITION 4.6

Le polynôme $P_n(x) = \sum_{i=1}^n S_n^i x^i$ admet n racines, réelles, distinctes, et non positives, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

Preuve

Raisonnons par récurrence sur n .

On a

$$\begin{aligned} n = 1 : P_1(x) &= x \\ n = 2 : P_2(x) &= x + x^2 = x(x + 1) \end{aligned}$$

Supposons le résultat vrai à l'ordre n et montrons-le à l'ordre $n + 1$:

D'après (4.3.1)

$$S_n^i = S_{n-1}^{i-1} + i S_{n-1}^i$$

Donc

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{i=1}^n S_{n-1}^{i-1} x^i + \sum_{i=1}^n i S_{n-1}^i x^i \\ &= x \sum_{i=1}^{n-1} S_{n-1}^i x^i + x \sum_{i=1}^{n-1} i S_{n-1}^i x^i \\ &= x P_{n-1}(x) + \frac{dP_{n-1}(x)}{dx} \end{aligned}$$

Si on pose $H_n(x) = e^x P_n(x)$; alors $H_n(x)$ et $P_n(x)$ admettrons exactement les mêmes racines.

On a

$$\begin{aligned} \frac{dH_{n-1}(x)}{dx} &= e^x P_{n-1}(x) + \frac{dP_{n-1}(x)}{dx} \\ &= e^x \frac{P_n(x)}{x}; \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

c.à.d.

$$H_n(x) = x \frac{dH_{n-1}(x)}{dx}$$

D'après l'hypothèse de récurrence $H_{n-1}(x)$ admet $n-1$ racines distinctes et non positives. En vertu du Théorème de Rolle $\frac{dH_{n-1}(x)}{dx} = e^x \frac{P_n(x)}{x}$ admet $n-2$ racines toutes distinctes et négatives. Sachant de plus que $\lim_{x \rightarrow 0^+} H_{n-1}(x) = 0$; $\frac{dH_{n-1}(x)}{dx}$ admet une autre racine négative au voisinage de 0 ; en plus de la racine $x = 0$; $H_n(x)$ admet n racines, distinctes et non positives. ¥

Nombres de Bell⁵

Désignons par B_n le nombre total de partitions en classes de l'ensemble N_n . On a :

$$B_n = \sum_{k=1}^n S_n^k$$

Ces nombres sont appelés nombres exponentiels de Bell ou tout simplement nombres de Bell. Ils vérifient plusieurs propriétés, nous ne mentionnerons ici que celles qui nous intéressent.

PROPOSITION 4.7

On a :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k \quad (4.3.5)$$

Preuve

⁵Bell Eric Temple (1883-1960)

Si $m > n$, on posera $S_n^m = 0$: Ce qui permet d'écrire

$$B_n = \sum_{m=0}^n S_n^m$$

D'après (4.3.4), on a

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{m=0}^{n+1} S_{n+1}^m \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k S_{n+1}^m \\ &= \sum_{k=0}^n B_k \end{aligned}$$

¥

Cette relation permet de calculer de proche en proche les B_n

		Nombres de Bell											
n		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B_n		1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975	678570

Tableau 1.2

Triangle de Bell

La relation (4.3.5) permet une disposition triangulaire qui sert à déterminer pratiquement les nombres de Bell. Un 1 est placé au sommet et un autre 1 en dessous. Puis, on forme chacun des nombres que l'on ajoute en faisant la somme du nombre qui le précède et de celui qui surmonte ce dernier. Chaque nouveau nombre est placé à droite du précédent, et le dernier nombre d'une ligne est repris au début de la ligne suivante. On peut lire la suite des nombres de Bell sur l'un des deux côtés du triangle autres que la base.

1							
1	2						
2	3	5					
5	7	10	15				
15	20	27	37	52			
52	62	87	114	151	203		
203	255	322	409	523	674	877	
877	4140

Tableau 1.3

Cette disposition possède de nombreuses propriétés. Par exemple, la somme des nombres de chaque ligne est égale à l'avant-dernier nombre de la ligne suivante.

PROPOSITION 4.8 (Dobinski [37])

On a :

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^n \frac{i^n}{i!} \quad (4.3.6)$$

Preuve

D'après (4.3.3)

$$S_n^k = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^n (i+1)^{k-1} \binom{n}{i} i^k \quad ; \quad 0 \leq k \leq n$$

Comme

$$B_n = \sum_{m=0}^n S_n^m,$$

alors

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^n (i+1)^{m-1} \binom{n}{i} i^m \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{i^n}{i!} \sum_{m=i}^n \frac{(i+1)^{m-1}}{(m-i)!} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{i^n}{i!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i+1)^l}{l!} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{i=0}^n \frac{i^n}{i!} \end{aligned}$$

¥

Approximation de B_n

THEOREME 4.1 (Moser & Wyman [51])

Quand $n \rightarrow \infty$; on a :

$$B_n \sim \frac{1}{n} r^{n+\frac{1}{2}} e^{-r} \quad \text{avec} \quad r \log r = n \quad ; \quad \frac{1}{2} < r < \frac{3}{2}$$

Ce Théorème est dû à L. Moser et M. Wyman légèrement modifié après correction d'une erreur commise au sein de leur démonstration. Nous avons repris en détail la démonstration dans notre thèse de Magister, nous en avons à ce titre démontré l'équivalence [10].

4.4 Nouvelles propriétés

Posons

$$B_{\alpha} = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!}; \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}^+ :$$

Notons que la série $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!}$ converge, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Soit X la variable aléatoire discrète de distribution :

$$P(X = i) = \frac{1}{e} \frac{\alpha^i}{i!}; \quad i \in \mathbb{N}$$

Alors

$$E(X^{\alpha}) = B_{\alpha}; \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (4.4.1)$$

THEOREME 4.2 [11]

Nous avons :

$$B_{\alpha_1 + \alpha_2}^2 \leq B_{\alpha_1} B_{\alpha_2}; \quad \text{pour tout } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$$

Preuve

D'après l'inégalité de Cauchy, il vient

$$E^2(X^{\alpha_1 + \alpha_2}) \leq E(X^{2\alpha_1})E(X^{2\alpha_2})$$

En utilisant (4.4.1) il s'en suit :

$$B_{\alpha_1 + \alpha_2}^2 \leq B_{\alpha_1} B_{\alpha_2};$$

¥

COROLLAIRE 4.1 [11]

La suite des nombres de Bell $(B_n)_n$ est logarithmiquement convexe, c.à.d.

$$B_n^2 \leq B_{n-1} B_{n+1}; \quad \text{pour tout } n \geq 1:$$

Preuve

L'inégalité en question est une conséquence immédiate de (4:4:1) et du Théorème 4.2, pour $\alpha_1 = \frac{n+1}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{n-1}{2}$ ¥

THEOREME 4.3 [11]

Nous avons :

$$2B_{\alpha_1+\alpha_2} \leq B_{2\alpha_1} + B_{2\alpha_2}; \text{ pour tout } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$$

Preuve

Il est clair que

$$E((X^{\alpha_1} + X^{\alpha_2})^2) \geq 0:$$

Donc

$$2E(X^{\alpha_1+\alpha_2}) \leq E(X^{2\alpha_1}) + E(X^{2\alpha_2});$$

En utilisant (4:4:1); nous obtenons

$$2B_{\alpha_1+\alpha_2} \leq B_{2\alpha_1} + B_{2\alpha_2};$$

¥

COROLLAIRE 4.2 [11]

La suite des nombres de Bell $(B_n)_n$ est convexe, c.à.d.

$$2B_n \leq B_{n-1} + B_{n+1}; \text{ pour tout } n \geq 1:$$

Preuve

L'inégalité en question est une conséquence immédiate de (4:4:1) et du Théorème 4.3, pour $\alpha_1 = \frac{n+1}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{n-1}{2}$ ¥

Posons maintenant

$$B_n(x) = e^{x^2} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} x^k; \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.4.2)$$

Il est clair que la suite $(B_n(x))_n$ forme une suite de fonctions définies, continues et indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} avec $B_0(x) \equiv 1$ et $B_n(1) = B_n$ (= nombres de Bell, d'après la formule de Dobinski (4:3:6)).

PROPOSITION 4.9 [9]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $B_n(x)$ est un polynôme de degré n ; et l'on a :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n S_n^k x^k; \quad x \in \mathbb{R}$$

Preuve

D'après (4:3:3)

$$S_n^k = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

Sachant que $\binom{k}{j} = 0$ quand $j > k$ et que $S_n^k = 0$ quand $k > n$; on écrit alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n S_n^k x^k &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{j^n}{j!} \sum_{k=j}^n \frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!} x^k \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{j^n}{j!} x^j \sum_{k=j}^n \frac{(-x)^{k-j}}{(k-j)!} \\ &= e^{ix} \sum_{j=0}^n \frac{j^n}{j!} x^j \end{aligned}$$

¥

PROPOSITION 4.10 [9]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

- (a) $B_{n+1}(x) = x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x); \quad x \in \mathbb{R}$
 (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n = e^{x(e^z - 1)}; \quad z \in \mathbb{C} \text{ et } x \in \mathbb{R}$

Preuve

(a) La relation est évidente pour $x = 0$; montrons-la pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x) &= e^{ix} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!} \\
 &= e^{ix} \sum_{l=0}^n \frac{x^l}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \\
 &= e^{ix} \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^l}{l!} x^l \\
 &= \frac{1}{x} e^{ix} \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{l+1}}{(l+1)!} x^{l+1} \\
 &= \frac{1}{x} B_{n+1}(x) \quad \square
 \end{aligned}$$

(b) Il suffit tout simplement de remplacer $B_n(x)$ par son expression. En effet,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n &= e^{ix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{k^n}{k!} x^k \\
 &= e^{ix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} z^n \\
 &= e^{ix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} e^{kz} \\
 &= e^{ix} e^{xe^z} \\
 &= e^{x(e^z - 1)} \quad \square
 \end{aligned}$$

¥

COROLLAIRE 4.3 [9]

La suite des polynômes $(B_n(x))_n$ est binomiale, c.à.d.

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x) B_{n-k}(y); \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Preuve

D'après (b) de la Proposition 4.10, on a :

$$B_n(x) = \frac{d^n}{dz^n} \exp(x(e^z - 1)) \Big|_{z=0} \quad \square$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 B_n(x+y) &= \frac{d^n}{dz^n} \exp((x+y)(e^z - 1)) \Big|_{z=0} \\
 &= \frac{d^n}{dz^n} \exp(x(e^z - 1)) \exp(y(e^z - 1)) \Big|_{z=0} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dz^k} \exp(x(e^z - 1)) \Big|_{z=0} \frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}} \exp(y(e^z - 1)) \Big|_{z=0} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x) B_{n-k}(y) :
 \end{aligned}$$

∎

CHAPITRE V

OPTIMALITE DE LA FONCTION DE RANG DU TREILLIS DES PARTITIONS D'UN ENSEMBLE FINI

5.1 Introduction

Dans ce Chapitre nous étudions l'optimalité de la fonction de rang dans le treillis des partitions P_n de l'ensemble $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, en se basant essentiellement sur la condition nécessaire et suffisante d'Alekseev, énoncée au Théorème 5.1 ci-après, étant donné que les conditions suffisantes d'optimalité vues dans le chapitre III ne sont pas vérifiées dans le treillis des partitions.

5.2 Définitions

En considérant deux partitions $\lambda = (\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_k)$ et $\mu = (\mu_1; \mu_2; \dots; \mu_l)$, on pose :

$$\lambda \leq \mu \text{ si et seulement si } \lambda_i \leq \mu_i \text{ ; } \forall i$$

En d'autres termes

$$\lambda \leq \mu \iff \lambda \text{ s'obtient à partir d'une subdivision en deux parties d'une seule classe de } \mu$$

Cette relation définit une relation d'ordre partiel. De plus, pour deux partitions λ et μ ; il existe un plus petit majorant et un plus grand minorant, ce qui fait de P_n un treillis.

Le treillis des partitions est un poset gradué, sa fonction de rang est définie par :

$$r(\lambda) = n - b(\lambda); \forall \lambda \in P_n;$$

où $b(\lambda)$ désigne le nombre de classes dans la partition λ ;

Le rang de P_n est donc égal à $n - 1$.

Exemple : Pour $N_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, on obtient le treillis P_4 :

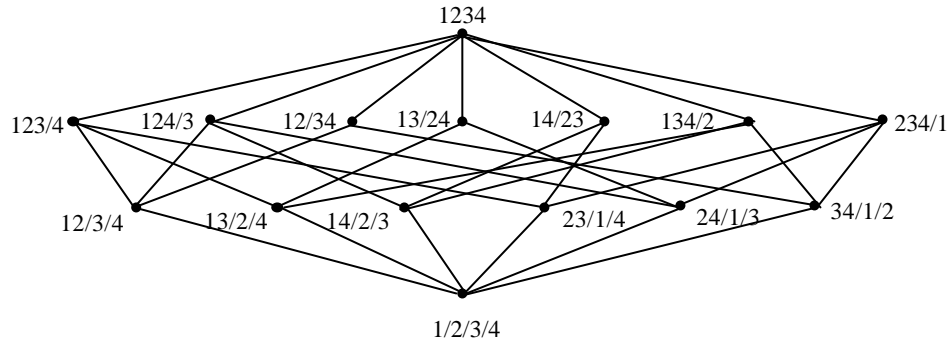


Figure 1.9

Le treillis des partitions n'est pas distributif, il suffit pour le vérifier de considérer :

$$\begin{aligned}
 \wedge^3 &= 12 = 34 \lll n \\
 \wedge^4 &= 23 = 14 \lll n \\
 \circ &= 24 = 13 \lll n;
 \end{aligned}$$

et remarquer ensuite que

$$(\wedge^3 \wedge \wedge^4) \circ = \circ \wedge (\wedge^3 \wedge \circ) \wedge (\wedge^4 \wedge \circ) = 1234 = 5 \lll n;$$

Aussi le treillis des partitions n'est pas de rang symétrique, remarquer par exemple sur le diagramme ci-dessus que $S_4^3 \not\subseteq S_4^2$, ce qui veut dire que le treillis des partitions n'est ni un ordre en chaînes symétriques ni un Peck-poset.

THEOREME 5.1 (Spencer [57])

Le treillis des partitions n'est pas normal pour $n \geq 0$:

Preuve

Supposons n pair, et considérons :

$$A = \left\{ \frac{n}{2} \text{ partition de } P_n \text{ à deux classes de cardinalités } \frac{n}{2} \right\}$$

$$\text{Alors } 2 \lll |A| = \binom{n}{n/2}$$

Chaque partition de A couvre $2 \lll S_{\frac{n}{2}}^2$ partitions, où $S_{\frac{n}{2}}^2$ désigne le nombre de partitions en deux classes d'un ensemble à $\frac{n}{2}$ éléments

Si on suppose que P_n est normal, alors

$$\frac{jAj}{S_n^2} = \frac{jAj}{S_n^2} \frac{2 S_n^2}{S_n^3};$$

c.à.d.

$$S_n^3 = 2 S_n^2 S_n^2$$

D'après la Proposition 4.4, on a :

$$S_n^k = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \mu_i^{(k)} i^n \quad \text{si } 0 \leq k \leq n$$

Donc

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \frac{1}{2!} \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} \mu_i^{(2)} i^n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} i^2 i^n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} i^{n+2} \\ S_n^2 &= \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} i^{n+1} \\ S_n^3 &= \frac{1}{3!} \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} \mu_i^{(3)} i^n = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} i^3 i^n = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} i^{n+3} \end{aligned}$$

Il vient

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} i^{n+2} + \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} i^{n+3} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} i^{n+1} + \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} i^{n+2}$$

ou bien

$$1 + \frac{\sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} i^{n+2} + \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} i^{n+3}}{3^{n+1}} = 1 \tag{5.2.1}$$

Or

$$\frac{\sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} i^{n+2} + \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} i^{n+3}}{3^{n+1}} > 1 \text{ lorsque } n \geq 1$$

Il existe donc un rang N_0 à partir duquel

$$\frac{\sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} i^{n+2} + \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} i^{n+3}}{3^{n+1}} < 1$$

Un simple calcul permet de montrer que l'inégalité (5:2:1) n'est pas vraie pour $n \geq 0$

Ce qui fallait démontrer:

¥

5.3 Principaux résultats

Désignons par μ_n et σ_n^2 la moyenne et la variance de r .

PROPOSITION 5.1 [11]

Pour $n \geq 1$, nous avons :

$$\mu_n = n \left(\frac{B_{n+1}}{B_n} + 1 \right) \quad \text{et} \quad \sigma_n^2 = \frac{B_{n+2}}{B_n} - \left(\frac{B_{n+1}}{B_n} + 1 \right)^2$$

Preuve

On a d'une part

$$\mu_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n (n - k) S_n^k = n - \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n k S_n^k$$

Utilisant la Proposition 4.2

$$\sum_{k=1}^n k S_n^k = B_{n+1} - B_n$$

D'où

$$\mu_n = n \left(\frac{B_{n+1}}{B_n} + 1 \right)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n (n - k - \mu_n)^2 S_n^k \\ &= \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n \left(k + \frac{B_{n+1}}{B_n} - 1 \right)^2 S_n^k \\ &= \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n k^2 S_n^k + 2 \frac{B_{n+1}}{B_n} \sum_{k=1}^n k S_n^k + B_n \left(\frac{B_{n+1}}{B_n} - 1 \right)^2 \\ &= \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n k^2 S_n^k + 2 \frac{B_{n+1}}{B_n} (B_{n+1} - B_n) + B_n \left(\frac{B_{n+1}}{B_n} - 1 \right)^2 \end{aligned}$$

Utilisant encore une fois la Proposition 4.2

$$\sum_{k=1}^n k^2 S_n^k = B_{n+2} - 2B_{n+1}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \mu_n^2 &= \frac{1}{B_n} \sum_{i=2}^{B_{n+2}} \mu_{B_{n+1}}^{i-1} (B_{n+1} - B_n) + B_n \frac{\mu_{B_{n+1}}^{i-1}}{B_n} \\ &= \frac{B_{n+2}}{B_n} \mu_{B_{n+1}}^{i-1} \end{aligned}$$

¥

THEOREME 5.1 (Alekseev [4])

Un poset P est de rang comprimé ssi,

$$\mu(F) \leq 1; \text{ pour tout ...ltre } F \text{ de } P \quad (5.3.1)$$

K. Engel [25] a démontré qu'un poset est de rang comprimé s'il est normal, distributif, un Peck-poset ou un ordre en chaîne symétrique (voir Théorème 3.2), et par voie de conséquence il s'est posé la question suivante [32]:

le treillis P_n des partitions d'un ensemble est-il de rang comprimé?

La condition d'Alekseev étant difficile à vérifier sur tous les ...ltres, pour cette raison nous avons choisi de la regarder sur les ...ltres principaux. Nous en avons à ce titre montré sa véracité.

THEOREME 5.2 [11]

Pour tout ...ltre principal F de P_n , nous avons :

$$\mu(F) \leq 1_n$$

Preuve

Soit F un ...ltre principal généré par $\mathcal{A} \in P_n$ et soit $j = b(\mathcal{A})$ (le nombre de classes dans \mathcal{A}). Alors F est isomorphe à P_j (voir ([3]; p:70); [7]): Ainsi $\mu(F) = \mu_j$ et

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \sum_{\mathcal{A} \in P_j} \mu(\mathcal{A}) \\ &= \sum_{i=1}^j \mu_{S_{n_i}^j} \\ &= \sum_{k=1}^j \binom{n}{i, k} \mu_{S_k^j} \\ &= \sum_{k=1}^j \binom{n}{i, k} \mu_{S_k^j} \end{aligned}$$

En vertu de la Proposition 4.2

$$r_j(F) = n \int_0^1 \frac{B_{j+1}}{B_j} + 1 = r_j$$

Par conséquent $r_j(F) \leq r_n$ ssi $r_j \leq r_n$:

Or l'inégalité $r_j \leq r_n$; $8j \leq n$ est équivalente à $\frac{B_n}{B_{n-1}} \leq \frac{B_{n+1}}{B_n}$ qui est vraie en vertu du Corollaire 4.1. ¥

Si on pose maintenant $\zeta_n = n \int_0^1 r_n$, c.à.d.

$$\zeta_n = \frac{B_{n+1}}{B_n} \int_0^1 r_n \quad (5.3.2)$$

alors ζ_n représente la moyenne de la fonction de rang dans le poset dual P_n^* . Nous avons donc, pour tout $n \geq 2$; $\zeta_{n-1} \leq \zeta_n$; c.à.d. que la suite $(\zeta_n)_n$ est décroissante.

En se basant sur un travail fait en collaboration avec K. Engel [32], et utilisant l'approximation de L. Moser et M. Wyman décrite au Théorème 4.1, E.R. Canfield [18] a démontré que P_n n'est pas de rang comprimé. Plus précisément, il a démontré l'existence d'un n pour lequel l'inégalité (5.3.1) n'est pas vraie lorsque n est suffisamment grand. Nous avons de notre part exploité son travail pour démontrer les approximations suivantes.

THEOREME 5.3 [14]

Quand n tend vers $+\infty$, nous avons :

$$\zeta_n \sim \frac{n}{\ln n} \quad \text{et} \quad \frac{\zeta_n^2}{n} \sim \frac{n}{\ln^2 n}$$

Preuve

La preuve s'articule autour du développement de B_{n+h} avec $h \in \mathbb{Z}$;

$$B_{n+h} = \frac{(n+h)!}{r^{n+h}} \int_0^1 \frac{\exp(e^r - 1)}{e^{2r}} \quad (5.3.3)$$

$$= \int_0^1 \left(1 + \frac{P_0 + hP_1 + h^2P_2}{e^r} + \frac{Q_0 + hQ_1 + h^2Q_2 + h^3Q_3 + h^4Q_4}{e^{2r}} + O(e^{-3r}) \right);$$

tels que $K = (r^2 + r)e^r$; $re^r = n$ et P_i ; Q_i sont des fonctions rationnelles connues en r telles que :

$$P_i = O_1 i r^{i-1} \quad \text{et} \quad Q_i = O_2 i r^{i-1} e^{i r} ; \quad i = 0; 1; 2; 3; 4:$$

Utilisant (5:3:2) et (5:3:3) ; nous obtenons d'une part

$$z_n = \frac{n+1}{r} i 1 + O i r^{i-1} e^{i r} i 1 \gg \frac{n}{\ln n}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} z_n^2 &= (z_{n+1} - z_n) (z_{n+1} + z_n) \\ &= \frac{n+1}{r} i 1 + O i r^{i-1} e^{i r} \left[\frac{1}{r} + O i r^{i-2} e^{i r} \right] i 1 \\ &\gg \frac{n+1}{r^2} \gg \frac{n}{\ln^2 n} \end{aligned}$$

¥

Dans notre thèse de Magister, nous avons démontré le théorème suivant :

THEOREME 5.4 [10]

Pour tout idéal principal I de P_n , nous avons :

$$z_{n_1+n_2} - z_{n_1} - z_{n_2} \geq 0; \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}; \quad (5.3.4)$$

K. Engel a remarqué que si la suite (z_n) est concave alors l'inégalité (5.3.4), serait vérifiée [32] : Il conjectura alors que les suites $(\frac{3}{4} z_n^2)$ et (z_n) sont concaves en n , c.à.d.

$$2z_n - z_{n-1} - z_{n+1} \leq 0; \quad \text{pour tout } n \geq 2; \quad (5.3.5)$$

et

$$2\left(\frac{3}{4} z_n^2\right) - \left(\frac{3}{4} z_{n-1}^2\right) - \left(\frac{3}{4} z_{n+1}^2\right) \leq 0; \quad \text{pour tout } n \geq 2 \quad (5.3.6)$$

Ces deux conjectures sont vraies pour $2 \leq n \leq 1500$, chose que nous avons vérifiée [11] en utilisant un logiciel de calcul sur un microordinateur pentium IV. Le programme sur la concavité de la suite des variances est donné ci-après :

```

with(combinat ; bell);
S:=n! bell(n + 2)=bell(n) ; (bell (n + 1) =bell (n))2 ; 1;
n:=1500;
for i from 2 by 1 to n do
if 2nS(i) ; S(i ; 1) ; S(i + 1) < 0 then print(i) ...
od;

```

Remarque :

En étudiant la conjecture relative à la moyenne μ_n , E. R. Canfield [16] a démontré que l'inégalité (5.3.5) est asymptotiquement vraie. Une étude approfondie de cette même conjecture se trouve aussi dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE VI

CONTRIBUTION A LA RESOLUTION DE LA CONJECTURE DE KONRAD ENGEL

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier la conjecture de K. Engel énoncé dans le chapitre précédent, relative à la concavité des suites (ζ_n) et (η_n^2) , en se basant sur une approche algébrique utilisant des polynômes associés aux nombres de Bell.

Nous avons démontré au Chapitre IV que le polynôme

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n S_n^k x^k$$

admet n racines distinctes, dont l'une est nulle et toutes les autres strictement négatives (voir Proposition 4.6). Notons désormais par $\alpha_1(n)$; $\alpha_2(n)$; \dots ; $\alpha_{n-1}(n)$; les " $n-1$ " racines négatives de $B_n(x)$; c.à.d.

$$B_n(x) = x \prod_{i=1}^{n-1} (x + \alpha_i(n));$$

et posons pour $B_n(x) \neq 0$:

$$\zeta_n(x) = \frac{B_{n+1}(x)}{B_n(x)} \quad \text{et} \quad \eta_n^2(x) = \frac{B_{n+2}(x)}{B_n(x)} \quad \mu \frac{B_{n+1}(x)}{B_n(x)} \quad \eta_2 \quad \eta_1 \quad x:$$

6.2 Résultats préliminaires

PROPOSITION 6.1 [9]

Pour tout $n \geq 2$; nous avons :

$$(a) \quad \zeta_n(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{x}{x + \alpha_j(n)} = n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j(n)}{x + \alpha_j(n)}$$

$$(b) \quad \eta_n^2(x) = x \zeta_n^0(x)$$

Preuve

(a) Il est facile de vérifier que

$$B_{n+1}(x) = x(B_n^0(x) + B_n(x))$$

Donc

$$\begin{aligned} \zeta_n(x) &= x \frac{B_n^0(x)}{B_n(x)} \\ &= x (\log(B_n(x)))' \\ &= 1 + \sum_{j=1}^n \frac{x}{x + \alpha_j(n)} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j(n)}{x + \alpha_j(n)} \end{aligned}$$

Conséquence: $1 < \zeta_n(x) < n$; $8x > 0$:

(b) Nous avons :

$$\begin{aligned} x\zeta_n^0(x) &= x \frac{B_{n+1}(x)}{B_n(x)} - x \\ &= x \frac{B_{n+1}^0(x)}{B_n(x)} - \frac{B_{n+1}(x) B_n^0(x)}{B_n^2(x)} \\ &= \frac{B_{n+2}(x) - x B_{n+1}(x)}{B_n(x)} - \frac{B_{n+1}(x) (B_{n+1}(x) - x B_n(x))}{B_n^2(x)} \\ &= \frac{B_{n+2}(x)}{B_n(x)} - \frac{B_{n+1}(x)}{B_n(x)} \\ &= \zeta_n^2(x) \end{aligned}$$

¥

COROLLAIRE 6.1 [9]

Nous avons :

- (a) $\zeta_n^2(x) > 0$; $8x > 0$ et $\zeta_n^2(x) < 0$; $8x$ ($x < 0$ et $B_n(x) \neq 0$):
- (b) La suite des polynômes $(B_n(x))_n$ est logarithmiquement convexe pour $x > 0$ et logarithmiquement concave pour $x < 0$:
- (c) $\zeta_{n+1}^2(x) + \zeta_{n-1}^2(x) - 2\zeta_n^2(x) = x(\zeta_{n+1}(x) + \zeta_{n-1}(x) - 2\zeta_n(x))'$:

Preuve

(a) Grâce à la Proposition 6.1, nous avons d'une part

$$z_n^0(x) = \prod_{j=1}^n \frac{\alpha_j(n)}{(x + \alpha_j(n))^2}$$

D'autre part

$$z_n^2(x) = x \prod_{j=1}^n \frac{\alpha_j(n)}{(x + \alpha_j(n))^2}$$

D'où le résultat.

(b) Ce résultat est une conséquence immédiate de (a).

Notons que ce résultat généralise celui du Corollaire 4.1.

(c) Il suffit tout simplement d'utiliser le (b) de la Proposition 6.1: ¥

LEMME 6.1 [9]

Pour tout $n \geq 1$, les polynômes $\frac{B_{n+1}(x)}{x}$ et $\frac{B_n(x)}{x}$ sont premiers entre eux :

Preuve

Rappelons que

$$B_{n+1}(x) = x(B_n^0(x) + B_n(x)):$$

Soit $\alpha_j(n)$ une racine de $\frac{B_n(x)}{x}$; alors

$$B_{n+1}(\alpha_j(n)) = \alpha_j(n) \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n (\alpha_j(n) + \alpha_i(n)) \neq 0: \quad (6.2.1)$$

¥

Posons maintenant

$$u_n(x) = z_n(x) + x:$$

LEMME 6.2 [9]

Pour tout $n \geq 2$ et tout x tel que $B_n(x) \neq 0$; nous avons :

$$\frac{1}{u_{n-1}(x)} = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x^{j-1}}{x + \alpha_j(n)}$$

où $\alpha_j(n) \in]0; 1[$ et $\prod_{j=1}^{n-1} \alpha_j(n) = \frac{x^{n-1}}{B_n(x)} = 1$:

Preuve

Nous avons tout d'abord

$$\frac{1}{u_{n-1}(x)} = \frac{B_{n-1}(x)}{B_n(x)} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (x + \alpha_i(n-1))}{\prod_{i=1}^{n-1} (x + \alpha_i(n))}$$

Une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{1}{u_{n-1}(x)} = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x^{j-1}}{x + \alpha_j(n)}$$

avec

$$\alpha_j(n) = \frac{B_{n-1}(\alpha_j(n))}{\prod_{i=1, i \neq j}^{n-1} (\alpha_j(n) + \alpha_i(n))}$$

Utilisant (6:2:1), on obtient

$$\prod_{i=1, i \neq j}^{n-1} (\alpha_j(n) + \alpha_i(n)) = \alpha_j(n) \frac{B_{n-1}(\alpha_j(n))}{\alpha_j(n)}$$

c.à.d.

$$\alpha_j(n) = \alpha_j(n) \frac{B_{n-1}(\alpha_j(n))}{B_{n-1}(\alpha_j(n))}$$

Considérant le (a) du Corrolaire 6.1, nous avons

$$\frac{1}{u_{n-1}(x)} = \frac{B_{n-1}(x)}{B_n(x)} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{B_n(x)}{B_{n-1}(x)} \quad \text{si } x < 0; \quad \text{si } x < 0 \text{ et } B_{n-1}(x) \neq 0$$

Donc

$$\frac{B_{n_i-1}(x)}{B_{n+1}(x)} = 1 + x \frac{B_n(x)}{B_{n+1}(x)} + x \frac{B_{n_i-1}(x)}{B_{n+1}(x)} ; \quad 8x (x < 0 \text{ et } B_{n+1}(x) \neq 0) \quad \text{c}$$

En remplaçant x dans l'inéquation ci-dessus par $i_{j-1}^{-j}(n)$, on trouve

$$i_{j-1}^{-j}(n) \leq 1 + i_{j-1}^{-j}(n) \leq 0;$$

d'où (i).

Si on fait tendre x vers 0 dans l'expression de $\frac{1}{u_{n_i-1}(x)}$, on obtient

$$\prod_{j=1}^{n-1} \frac{i_{j-1}^{-j}(n)}{i_{j-1}^{-j}(n)} = 1;$$

Et si on fait tendre x vers $+1$ dans l'expression de $\frac{x}{u_{n_i-1}(x)}$, on obtient

$$\prod_{j=1}^{n-1} i_{j-1}^{-j}(n) = 1;$$

¥

6.3 Principaux résultats

PROPOSITION 6.2 [9]

Pour $n \geq 2$; nous avons :

$$i_{n+1}(x) + i_{n_i-1}(x) \leq 2i_n(x) = x \frac{u_{n_i-1}(x)}{u_n(x)} + \frac{u_n(x)}{u_{n_i-1}(x)} ;$$

avec

$$\frac{u_n(x)}{u_{n_i-1}(x)} = 1 + x \prod_{j=1}^{n-1} \frac{i_{j-1}^{-j}(n)}{(x + i_{j-1}^{-j}(n))^2} ; \quad i_{j-1}^{-j}(n) \in]0; 1[\quad (6.2.2)$$

Preuve

Rappelons que

$$i_n(x) = x \frac{B_n^0(x)}{B_n(x)}$$

Alors

$$\begin{aligned} \zeta_{n+1}(x) + \zeta_{n_i-1}(x) - 2\zeta_n(x) &= x (\log^0(B_{n+1}(x)) + \log^0(B_{n_i-1}(x)) - 2\log^0(B_n(x))) \\ &= x \log^0 \frac{B_{n+1}(x) B_{n_i-1}(x)}{B_n^2(x)} \\ &= x \log^0 \frac{u_n(x)}{u_{n_i-1}(x)} \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que

$$\frac{u_n(x)}{u_{n_i-1}(x)} = 1 + x \frac{1}{u_{n_i-1}(x)}$$

En considérant le Lemme 6.2, on obtient

$$\frac{u_n(x)}{u_{n_i-1}(x)} = 1 + x \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(x + \alpha_j(n))^2}$$

D'où le résultat. ¥

La conjecture de K. Engel relative à la concavité de la suite (ζ_n) [32], à savoir :

$$2\zeta_n - \zeta_{n_i-1} - \zeta_{n+1} \leq 0; \quad 8n \leq 2;$$

a été étudiée dans [10] et [11]. Nous montrons ci-dessous que cette dernière est une conséquence immédiate de la conjecture forte suivante :

Conjecture [9]

Pour $n \geq 1$; les racines positives de l'équation $\frac{u_n(x)}{u_{n_i-1}(x)} = 0$ sont toutes inférieures ou égales à 1.

THEOREME 6.1 [9]

Si toutes les racines positives de l'équation $\frac{u_n(x)}{u_{n_i-1}(x)} = 0$ sont inférieures ou égales à 1, alors la suite $(\zeta_n)_n$ est concave.

Preuve

Utilisant (6.2.2), nous avons pour $x > 0$;

$$\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} > 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} = 1:$$

Si on suppose que les racines positives de l'équation $\mu \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} - 1 = 0$, sont toutes inférieures ou égales à 1, la fonction $x \mapsto \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}$ serait nécessairement décroissante au voisinage de 1. Par conséquent

$$\zeta_{n+1}(1) + \zeta_{n-1}(1) - 2\zeta_n(1) = \frac{\mu_{u_{n-1}}(1)}{u_n(1)} - \frac{\mu_{u_n}(1)}{u_{n-1}(1)} < 0: \quad \text{¶}$$

Nous avons, pour $x > 0$

$$\mu \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} - 1 = 0, \quad B_{n+2}(x) B_n(x) B_{n-1}(x) + B_{n+1}(x) B_n^2(x) - 2B_{n-1}(x) B_{n+1}^2(x) = 0:$$

En utilisant un logiciel de calcul, nous avons pu vérifier cette nouvelle conjecture pour $2 \leq n \leq 200$:

Le programme utilisé est comme suit :

```
with(combinat,stirling2);
m := 202;
b[0] := 1;
for n from 1 by 1 to m do b[n] := sum(stirling2(n; i) * x^i; i = 1..n) od;
for n from 1 by 1 to m - 2 do
fsolve(b[n + 2] * b[n] * b[n - 1] + b[n]^2 * b[n + 1] - 2 * b[n + 1]^2 * b[n - 1]; x; 0::infinity)
od;
```

CHAPITRE VII

UN ALGORITHME POLYNOMIAL POUR LA DETERMINATION DE LA VARIANCE D'UN POSET FINI

7.1 Introduction

Afin de trouver une représentation optimale dans un poset fini, K. Engel a publié [27] un algorithme polynomial, ayant essentiellement comme procédure l'algorithme du flot maximum. Nous présentons dans ce Chapitre de manière détaillée cet algorithme, et proposons une amélioration de sa borne de convergence.

Dans tout ce qui suit, on ne considérera que les représentations X de moyenne nulle ($1_X = 0$) dans la mesure où la variance ne change pas par une translation (voir Proposition 2.1).

Soit $G(P; E)$ le diagramme de Hasse associé au poset P : Pour une représentation X , posons :

$$E_X = \{ e \in E : X(e^+) - X(e^-) = 1 \}$$

Le graphe partiel $G_X = (P; E_X)$ de G engendré par E_X , est appelé graphe critique.

7.2 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité

D'après la théorie de Kuhn-Tucker, il s'en suit :

THEOREME 7.1 (Hadley [41])

Une fonction de représentation $X : P \rightarrow \mathbb{R}$ de moyenne nulle ($1_X = 0$) est optimale si et seulement s'il existe une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\begin{aligned} \forall p \in P \quad \sum_{e^+ = p} X(e) - \sum_{e^- = p} X(e) &= f(p) & \forall p \in P & \quad (7.2:1) \\ \forall e \in E_X \quad f(e) &= 0 & \forall e \in E_X \end{aligned}$$

La fonction f telle qu'elle est définie ci-dessus peut être interprétée comme un flot⁶ dans un réseau: En effet,

$$X(p) = \sum_{e \in E} \max(0, X(p)) \cdot \max(0, X(p))$$

Ce qui transforme l'équation (7:2:1) comme suit :

$$\sum_{e^+ = p} f(e) + \sum_{e^- = p} \max(0, X(p)) = 0; \quad \forall p \in P$$

Ainsi f est un flot sur le réseau $N_X = (V_N; E_N; s; t; C_X)$; où :

² s et t sont deux nouveaux sommets adjoints à P (la source et le puit respectivement).

$$V_N = P \cup \{s, t\}, \quad E_N = E \cup \{f_{sp}; p \in P\} \cup \{f_{pt}; p \in P\}$$

² C_X est la fonction capacité définie par :

$$C_X(sp) = \sum_{p \in P} \max(0, X(p));$$

$$C_X(pt) = \sum_{p \in P} \max(0, X(p));$$

$$C_X(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \in E_N \setminus E \\ +1 & \text{si } e \in E \end{cases}$$

avec $f(sp) = C_X(sp)$ et $f(pt) = C_X(pt)$ pour tout $p \in P$:

Remarque :

Les coupes⁷ $(f_{sg}; V_N \setminus f_{sg})$ et $(V_N \setminus f_{tg}; f_{tg})$ ont la même capacité. En effet,

$$\sum_{p \in P} X(p) = 0$$

⁶On rappelle que dans un réseau $N = (P; E; s; t; C)$; un flot est une fonction f , définie de E dans \mathbb{R}^+ , qui associe à chaque arc e , un nombre réel positif $f(e)$, de telle sorte que:

- ⊢ pour chaque arc e , on ait : $0 \leq f(e) \leq C(e)$;
- ⊢ pour chaque sommet p , différent de la source s et du puit t , on ait :

$$\sum_{e^+ = p} f(e) - \sum_{e^- = p} f(e) = 0$$

⁷Dans un réseau $N = (P; E; s; t; C)$, on appelle coupe $(S; P \setminus S)$ séparant s et t où $S \cap P; s \in S$ et $t \in P \setminus S$; un ensemble d'arcs de E ayant leurs extrémités initiales dans S et leurs extrémités terminales dans $P \setminus S$:

- () $\sum_{p \in P} (\text{Max}(0; X(p)) - \text{Max}(0; i X(p))) = 0$
- () $\sum_{p \in P} \text{Max}(0; X(p)) = \sum_{p \in P} \text{Max}(0; i X(p))$
- () $C_X(pt) = C_X(sp)$
- () $C_X(V_N n ftg; ftg) = C_X(fsg; V_N n fsg)$.

7.3 Critère d'arrêt de l'algorithme

PROPOSITION 7.1 (Engel [27])

Une représentation X de moyenne nulle est optimale si et seulement si les coupes $(fsg; V_N n fsg)$ et $(V_N n ftg; ftg)$ sont minimales dans le réseau N_X :

Preuve

2 Condition suffisante

Supposons $(fsg; V_N n fsg)$ et $(V_N n ftg; ftg)$ des coupes minimales.

D'après le Théorème du Flot-Max et Coupe-Min [36], il existe un flot f_{N_X} dans le réseau N_X tel que les arcs sp et pt ($p \in P$) sont saturés.

Si on note par f la restriction de f_N à E , alors pour tout $p \in P$, on a :

$$\sum_{e^+ = p} f(e) - \sum_{e^- = p} f(e) = \text{Max}(0; X(p)) - \text{Max}(0; i X(p)) = X(p);$$

avec bien sûr, $f(e) = 0$ pour tout arc $e \in E \setminus E_X$ (puisque $C(e) = 0$).

Par conséquent X est une représentation optimale d'après le Théorème 7.1.

2 Condition nécessaire

La représentation X est optimale, donc il existe une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\sum_{e^+ = p} f(e) - \sum_{e^- = p} f(e) = X(p) = \text{Max}(0; X(p)) - \text{Max}(0; i X(p)); \quad \forall p \in P$$

et $f(e) = 0; \quad \forall e \in E \setminus E_X$

La fonction f se transforme ainsi en un flot sur le réseau N_X saturant les arcs sp et pt , $p \in P$. Donc les coupes $(fsg; V_N n fsg)$ et $(V_N n ftg; ftg)$ sont minimales.

¥

7.4 Résultat auxiliaire

Pour un sous-ensemble S de P ; posons $X(S) = \sum_{p \in S} X(p)$:

PROPOSITION 7.2 (Engel [27])

Soit X une représentation non optimale de moyenne nulle et soit $(S; T)$ la coupe minimale associée au réseau N_X ($s \in S$ et $t \in T$) : Si on pose $F = S \cap fsg$ et $I = T \cap ftg$; alors :

- $F \neq \emptyset$, $I \neq \emptyset$ et pour tout $e \in E$ tel que $e^+ \in I$; $e^- \in F$; on a $X(e^+) \leq X(e^-) > 1$;
- $X(F) < 0$ et $X(I) > 0$;
- $X(F \setminus C) \leq 0$ et $X(I \setminus C) \geq 0$ pour chaque composante connexe C du graphe critique G_X ;

Preuve

a) $F \neq \emptyset$ et $I \neq \emptyset$ car sinon les coupes $(fsg; V_N \cap fsg)$ et $(V_N \cap ftg; ftg)$ seraient minimales, et par suite X serait optimale d'après la Proposition 7.1, ce qui contredit l'hypothèse.

L'inégalité $X(e^+) \leq X(e^-) > 1$ est vraie pour tout arc $e \in F \cap I$; car sinon $e \in E_X$ et donc $C_X(e) = +1$, ce qui rend la capacité de la coupe $(S; T)$ infinie, contradiction avec l'hypothèse.

b) Puisque la coupe $(S; T)$ est minimale et X n'est pas optimale, alors la capacité de la coupe $(S; T)$ est strictement plus petite que celle de la coupe $(fsg; V_N \cap fsg)$; c.à.d.

$$\sum_{p \in I} C_X(sp) + \sum_{p \in F} C_X(pt) + \sum_{(p;p^0) \in F \cap I} C_X(p;p^0) < \sum_{p \in P} C_X(sp);$$

ou bien

$$\sum_{p \in F} C_X(pt) + \sum_{(p;p^0) \in F \cap I} C_X(p;p^0) < \sum_{p \in F} C_X(sp)$$

Or $C_X(p;p^0) = 0$ pour $(p;p^0) \in F \cap I$, en vertu de a).

Il s'en suit que

$$\sum_{p \in F} (C_X(pt) - C_X(sp)) < 0;$$

c.à.d.

$$\sum_{p \in F} X(p) < 0$$

D'où $X(F) < 0$:

Comme de plus $X(P) = 0$ (voir $X^1 = 0$); alors $X(I) = \sum X(F) > 0$.

c) Supposons qu'il existe une composante connexe C du graphe critique G_X telle que $X(F \setminus C) > 0$. Si on considère les ensembles $F^0 = F \cap C$ et $S^0 = S \cap C$, on obtient :

$$\sum_{p \in F^0} X(p) = X(F) - \sum_{p \in F \setminus C} X(p) < X(F);$$

c.à.d.

$$\sum_{p \in F^0} C_X(p) - \sum_{p \in F^0} C_X(sp) < \sum_{p \in F} C_X(p) - \sum_{p \in F} C_X(sp)$$

En ajoutant aux deux membres de l'inégalité ci-dessus la quantité $\sum_{p \in P} C_X(sp)$;

on obtient :

$$\sum_{p \in F^0} C_X(p) + \sum_{p \in P \cap F^0} C_X(sp) < \sum_{p \in F} C_X(p) + \sum_{p \in P \cap F} C_X(sp)$$

Or les quantités

$$\sum_{p \in F^0} C_X(p) + \sum_{p \in P \cap F^0} C_X(sp) \text{ et } \sum_{p \in F} C_X(p) + \sum_{p \in P \cap F} C_X(sp);$$

représentent respectivement les capacités des coupes $(S^0; V_N \cap S^0)$ et $(S; T)$,
c.à.d.

$$C_X(S^0; V_N \cap S^0) < C_X(S; T)$$

Ce qui est absurde.

D'où $X(F \setminus C) \leq 0$: Comme $P = (F \setminus C) \cup (I \setminus C)$ et $X(P) = 0$; on déduit

$$X(I \setminus C) = \sum X(F \setminus C) \leq 0$$

¥

7.5 Procédure d'amélioration d'une représentation

PROPOSITION 7.3 (Engel [27])

Soit X une fonction de représentation de moyenne nulle et soient F et I deux sous-ensembles disjoints de P tels que $X(F) < 0$ et $X(I) > 0$ et soit la fonction Y_α définie de P dans \mathbb{R} par :

$$Y_\alpha(p) = \begin{cases} X(p) + \alpha |I| & \text{si } p \in F \\ X(p) - \alpha |F| & \text{si } p \in I \\ X(p) & \text{si } p \in R = P \setminus (I \cup F) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \geq 0$$

Alors,

1) $Y_\alpha = 0$:

2) Y_α est une représentation si et seulement si $0 \leq \alpha \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$;
où

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \min_{e \in F} \frac{1}{|I|} (X(e^+) - X(e^-) - 1) \\ \alpha_2 &= \min_{e \in I} \frac{1}{|I| + |F|} (X(e^+) - X(e^-) - 1) \\ \alpha_3 &= \min_{e \in R} \frac{1}{|F|} (X(e^+) - X(e^-) - 1) \end{aligned}$$

3) $\alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 = \frac{|F||I|}{|P|} \mu \frac{X(I)}{|I|} - \frac{X(F)}{|F|} \mu (|I| + |F|) \alpha_2^2$:

4) α_2^2 est décroissante pour $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{|I| + |F|} \mu \frac{X(I)}{|I|} - \frac{X(F)}{|F|}$:

Preuve (a)

1) On a :

$$\begin{aligned} Y_\alpha &= \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} Y_\alpha(p) \\ &= \frac{1}{|P|} \sum_{p \in F} (X(p) + \alpha |I|) + \sum_{p \in I} (X(p) - \alpha |F|) + \sum_{p \in R} X(p) \\ &= Y_X + \alpha |I| |F| - \alpha |I| |F| = 0 \end{aligned}$$

2) Soit $e \in E$:

α Si $e \in I \in R$; alors, $Y_\alpha(e^+) - Y_\alpha(e^-) = X(e^+) - X(e^-) + \alpha |F| \leq 1$:

\geq Si $e \in I \in F$; alors, $Y_{\mu}(e^+) \cdot Y_{\mu}(e^-) = X(e^+) \cdot X(e^-) + \mu(jIj + jFj) \circ 1$:

\geq Si $e \in R \in F$; alors, $Y_{\mu}(e^+) \cdot Y_{\mu}(e^-) = X(e^+) \cdot X(e^-) + \mu jIj \circ 1$:

\geq Si $e \in I^2$ ou $e \in F^2$ ou $e \in R^2$; alors, $Y_{\mu}(e^+) \cdot Y_{\mu}(e^-) = X(e^+) \cdot X(e^-) \circ 1$:

\geq Si $e \in F \in R$, alors $Y_{\mu}(e^+) \cdot Y_{\mu}(e^-) = X(e^+) \cdot X(e^-) \cdot \mu jIj$;

et $Y_{\mu}(e^+) \cdot Y_{\mu}(e^-) \circ 1(\cdot) = \mu^{-1} \frac{1}{jIj} (X(e^+) \cdot X(e^-) \cdot 1)$:

Il faut donc choisir μ tel que :

$$\mu^{-1} \mu_1 = \text{Min} \frac{1}{jIj} \cdot X(e^+) \cdot X(e^-) \cdot 1 : e \in F \in R : \quad \frac{3}{4}$$

\geq Si $e \in F \in I$, alors $Y_{\mu}(e^+) \cdot Y_{\mu}(e^-) = X(e^+) \cdot X(e^-) \cdot \mu(jFj + jIj)$;

et $Y_{\mu}(e^+) \cdot Y_{\mu}(e^-) \circ 1(\cdot) = \mu^{-1} \frac{1}{jIj + jFj} (X(e^+) \cdot X(e^-) \cdot 1)$

Il faut là aussi choisir μ tel que :

$$\mu^{-1} \mu_2 = \text{Min} \frac{1}{jIj + jFj} \cdot X(e^+) \cdot X(e^-) \cdot 1 : e \in F \in I : \quad \frac{3}{4}$$

\geq Si $e \in R \in I$, alors $Y_{\mu}(e^+) \cdot Y_{\mu}(e^-) = X(e^+) \cdot X(e^-) \cdot \mu jFj$;

et $Y_{\mu}(e^+) \cdot Y_{\mu}(e^-) \circ 1(\cdot) = \mu^{-1} \frac{1}{jFj} (X(e^+) \cdot X(e^-) \cdot 1)$

Il faut encore choisir μ tel que :

$$\mu^{-1} \mu_3 = \text{Min} \frac{1}{jIj + jFj} \cdot X(e^+) \cdot X(e^-) \cdot 1 : e \in R \in I : \quad \frac{3}{4}$$

En...n, Y_{μ} est une représentation si et seulement si $0 < \mu^{-1} \text{Min} \mu_1; \mu_2; \mu_3$:

3) On a :

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} Y_{\mu}^2 &= \frac{1}{jPj} \sum_{p \in P} Y_{\mu}^2(p) \\ &= \frac{1}{jPj} \sum_{p \in 2F} (X(p) + \mu jIj)^2 + \sum_{p \in 2I} (X(p) \cdot \mu jFj)^2 + \sum_{p \in 2R} X^2(p) \\ &= \frac{3}{4} X^2 + \frac{1}{jPj} \mu^2 (jIj \cdot X(F) + jFj \cdot X(I)) + \mu^2 jIj jFj (jIj + jFj) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 \right) :$$

4) Posons $g(t) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2$. La fonction g est dérivable en t et l'on a :

$$g'(t) = \dot{x} \dot{x}' + \dot{y} \dot{y}' = 2 \dot{x} \ddot{x} + 2 \dot{y} \ddot{y} ;$$

avec

$$g'(t) = 0 \quad t = t_0 = \frac{1}{\dot{x} \dot{y}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 \right) :$$

¥

7.6 Procédure d'équilibre

PROPOSITION 7.4 (Engel [27])

Soit X une fonction de représentation et soit C une composante connexe dans G_X . Supposons $X(C) = 0$. Alors pour tout $p \in C$; il existe un entier relatif a_p tel que $X(p) = \frac{a_p}{|C|}$

Preuve (¶)

Soit C une composante connexe de G_X , telle que $X(C) = 0$; et soit $p \in C$: Puisque C est connexe, alors pour tout $p \in C$, il existe une chaîne reliant p à p' : Donc il existe un entier relatif m_p tel que $X(p) = X(p') + m_p$:

Il vient

$$X(p) = \sum_{p \in C} X(p) = |C| X(p') + \sum_{p \in C} m_p = 0;$$

c.à.d.

$$X(p') = - \frac{\sum_{p \in C} m_p}{|C|}$$

D'où

$$X(p) = \sum_{C \in \mathcal{C}} \frac{p^{|C|}}{|C|} + m_p = \frac{a_p}{|C|} \text{ avec } a_p \in \mathbb{Z}; \quad \text{¥}$$

Définition

Un poset P est dit équilibré par rapport à une fonction de représentation X si $X(C) = 0$ pour toute composante connexe de G_X :

PROPOSITION 7.5 [12]

Soit P un poset équilibré par rapport à une fonction de représentation X de moyenne nulle. Alors

$$X(e^+) - X(e) = \frac{4}{|P|^2}; \quad \forall e \in E_X$$

Preuve

D'après la Proposition 7.4, nous avons :

$$X(e^+) = \frac{a_1}{b_1} \quad \text{et} \quad X(e) = \frac{a_2}{b_2};$$

avec $1 \leq b_1, b_2 \leq |P|$, $b_1 + b_2 \leq |P|$ et a_1, a_2, b_1, b_2 des entiers relatifs.

Donc pour $e \in E_X$; nous obtenons

$$X(e^+) - X(e) = \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{b_1 b_2} > \frac{1}{b_1 b_2} \geq \frac{2}{b_1 + b_2} \geq \frac{4}{|P|^2} \quad \text{¥}$$

LEMME 7.1 [12]

Soient C_n une chaîne à n éléments et h la fonction hauteur qui lui est associée. Alors

$$h(C_n) = \frac{n-1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{h(C_n)} = \frac{n^2-1}{12}$$

Preuve

On a d'une part

$$h(C_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n-1}{2}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^n h(C_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{1}{n} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

¥

LEMME 7.2 [12]

Soit p^* un élément maximal appartenant à une plus longue chaîne d'un poset P à n éléments et soit h la fonction hauteur. Nous avons :

$$0 \leq h(p^*) - h(q^*) \leq \frac{n}{2}$$

Preuve

Notons tout d'abord que la fonction hauteur associée au poset P coïncide avec celle du poset $P \setminus \{p^*\}$ et que l'inégalité $0 \leq h(p^*) - h(q^*) \leq \frac{n}{2}$ est triviale. Montrons alors par récurrence la seconde inégalité.

2 L'inégalité en question est vraie pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

2 Supposons-la vraie pour n et montrons-la pour $n + 1$.

Considérons P un poset à $n + 1$ éléments et p^* un élément maximal appartenant à une de ses plus longues chaînes et soit q^* un élément maximal appartenant à une plus longue chaîne du poset $P \setminus \{p^*\}$:

D'une part

$$h(p^*) - h(q^*) = 0 \text{ ou } 1$$

D'autre part

$$\begin{aligned} h(p^*) - h(q^*) - \frac{n}{2} &= h(p^*) - h(q^*) + h(q^*) - \frac{n}{2} \\ &= h(p^*) - h(q^*) + \frac{n-1}{n} (h(q^*) - \frac{n-1}{2}) \\ &\leq 1 - \frac{n-1}{n} \leq \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

La dernière inégalité est due à l'hypothèse de récurrence.

¥

PROPOSITION 7.6 [12]

Soient P_n et C_n respectivement un poset et une chaîne à n éléments.
Alors

$$1_h(P_n) \leq 1_h(C_n) \quad \text{et} \quad \frac{3}{4}_h^2(P_n) \leq \frac{3}{4}_h^2(C_n) :$$

Preuve

D'après le Lemme 7.1, nous avons :

$$1_h(C_n) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3}{4}_h^2(C_n) = \frac{n^2+1}{12}$$

Raisonnons par récurrence.

² Les deux inégalités sont manifestement vraies pour $n = 1$.

² Supposons-les vraies à l'ordre n et démontrons-les à l'ordre $n + 1$; c.à.d.

$$1_h(P_{n+1}) \leq \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3}{4}_h^2(P_{n+1}) \leq \frac{n(n+2)}{12}$$

Soit P_{n+1} un poset à $n+1$ éléments et soit p^a un de ses éléments maximaux appartenant à une plus longue chaîne:

Posons $P_n = P_{n+1} \setminus \{p^a\}$: Alors

$$\begin{aligned} 1_h(P_{n+1}) &= \frac{h(p^a)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{p \in P_n} h(p) \\ &= \frac{h(p^a)}{n+1} + \frac{n}{n+1} 1_h(P_n) \\ &\leq \frac{n+1}{n+1} + \frac{n(n+1)}{2(n+1)} = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

L'avant dernière inégalité est dû à l'hypothèse de récurrence.

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}_h^2(P_{n+1}) &= \frac{h^2(p^a)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{p \in P_n} h^2(p) + \frac{h(p^a)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{p \in P_n} h(p) \\ &= \frac{h^2(p^a)}{n+1} + \frac{1}{n+1} (n \frac{3}{4}_h^2(P_n) + n 1_h^2(P_n)) + \frac{1}{(n+1)^2} (h(p^a) + n 1_h(P_n))^2 \\ &= \frac{n}{n+1} \frac{3}{4}_h^2(P_n) + \frac{n}{(n+1)^2} (h(p^a) + 1_h(P_n))^2 \\ &\leq \frac{n(n+1)}{12} + \frac{n}{4} = \frac{n(n+2)}{12} \end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus est dû à la fois à l'hypothèse de récurrence et au Lemme 7.2.

¥

PROCEDURE D'EQUILIBRE

Entrées: P poset, X fonction de représentation, G = (P; E) diagramme de Hasse;

Sortie: X fonction de représentation, G = (P; E) équilibré par rapport à X;

Début algorithme équilibre;

Répéter f*Construction du graphe partiel critique*g

$$E_X := \{e \in E : X(e^+) - X(e^-) = 1\};$$

f*Algorithme de recherche des composantes connexes de $G_X = (P; E_X)$ *g

Déterminer les composantes connexes C_1, \dots, C_k de $G_X = (P; E_X)$;

$$J^< := \{j : X(C_j) < 0\}; \quad F := \bigcup_{j \in J^<} C_j;$$

$$J^= := \{j : X(C_j) = 0\}; \quad R := \bigcup_{j \in J^=} C_j;$$

$$J^> := \{j : X(C_j) > 0\}; \quad I := \bigcup_{j \in J^>} C_j;$$

Si $J^< \neq \emptyset$? Alors f* Amélioration*g

$$\mu_1 := \min_{j \in J^<} \frac{1}{|j|} (X(e^+) - X(e^-) - 1) : e \in F \cap R \quad \frac{3}{4}$$

$$\mu_2 := \min_{j \in J^<} \frac{1}{|j| + |F \cap j|} (X(e^+) - X(e^-) - 1) : e \in F \cap I \quad \frac{3}{4}$$

$$\mu_3 := \min_{j \in J^>} \frac{1}{|F \cap j|} (X(e^+) - X(e^-) - 1) : e \in R \cap I \quad \frac{3}{4}$$

$$\mu_4 := \min_{j \in J^<} \frac{X(C_j)}{|j|} : j \in J^< \quad \frac{3}{4}$$

$$\mu_5 := \min_{j \in J^>} \frac{X(C_j)}{|F \cap j|} : j \in J^>$$

$$\mu := \min\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\}$$

Pour $p \in F$; Faire $X(p) := X(p) + \mu |j|$ Fait;

Pour $p \in I$; Faire $X(p) := X(p) - \mu |F \cap j|$ Fait;

Fsi;

Jusqu'à $J^< = \emptyset$;

Fin;

PROPOSITION 7.7 (Engel [27])

L'algorithme d'équilibre converge. Sa complexité est de l'ordre de $O(jPj(jPj + jEj))$:

Preuve

? Commençons en premier lieu par démontrer la décroissance de la variance après chaque itération de l'algorithme.

² Le choix de $\alpha_1 = \min \{ \alpha_2, \alpha_3 \}$ assure l'obtention d'une fonction de représentation après chaque itération en vertu de la Proposition 7.3.

² Le choix de $\alpha_4 = \alpha_5$ assure la décroissance de la variance d'une itération à une autre, dans la mesure où :

$$\text{Max}(\alpha_4; \alpha_5) \leq \frac{1}{jIj + jFj} \sum_i \frac{X(I)}{jIj} \leq \frac{X(F)}{jFj} :$$

En effet, on a d'une part

$$\sum_i \frac{X(C_j)}{jIj jC_j} \leq \alpha_4 ; \quad \sum_{j \in J} 2j <$$

d'où

$$\sum_{j \in J} X(C_j) \leq \alpha_4 \sum_{j \in J} jC_j = \alpha_4 \sum_{j \in J} jF_j$$

Ce qui donne

$$\sum_i X(F) \leq \alpha_4 \sum_{j \in J} jF_j :$$

Comme $X(P) = 0$; alors $\sum_i X(F) = X(I)$:

D'autre part

$$\frac{X(I)}{jFj jIj} = \frac{1}{jIj + jFj} \sum_i \frac{X(I)}{jIj} \leq \frac{X(F)}{jFj} :$$

Idem. pour $\alpha_5 \leq \frac{1}{jIj + jFj} \sum_i \frac{X(I)}{jIj} \leq \frac{X(F)}{jFj} :$

D'où la décroissance de la variance en vertu de la Proposition 7.3.

? Observons maintenant le paramètre $\kappa = 2k_x \sum_{j \in J} j$; où k_x désigne le nombre de composantes connexes du graphe critique G_x et $\sum_{j \in J} j$ est le nombre de composantes en équilibre⁸. Il est clair que $1 \leq \kappa \leq 2jPj$:

Nous allons démontrer en second lieu que κ décroît après chaque itération d'au moins une unité. En effet, Considérons le graphe $G_C = (V_C; E_C)$;

⁸Une composante C est dite en équilibre si $X(C) = 0$:

où $V_C = f_1; \dots; k_X g$ et $i; j; j^0 \in E_C$ si et seulement s'il existe $e \in E$ tel que $e^+ \in C_{j^0}$ et $e^- \in C_j$:

2 Si $E_C = ?$; alors $" = "4$ ou $"5$; ce qui veut dire qu'il existe $j_0 \in J^< [J^>$ tel que $X(C_{j_0}) = 0$ et par suite $jJ=j$ augmente d'au moins une unité tandis que k_X reste constant, d'où la décroissance de \gg d'au moins une unité.

2 Si $E_C \notin ?$; alors $" = "1$ ou $"2$ ou $"3$; car dans ce cas $"1 \neq "4$ et $"3 \neq "5$.

- Si $" = "1$ alors il existe $j \in J^<$ et $j^0 \in J^=$ tels que $i; j; j^0 \in E_C$ et il existe $e \in E_X$ tels que $e^- \in C_j$ et $e^+ \in C_{j^0}$ avec $X(e^+) - X(e^-) = 1$; ce qui entraîne en même temps la diminution de k_X et $jJ=j$ d'au moins une unité, d'où la diminution de \gg d'autant.

- Idem pour $" = "3$.

- Si $" = "2$; alors il existe $j \in J^<$ et $j^0 \in J^>$ tels que $i; j; j^0 \in E_C$ et il existe $e \in E_X$ tels que $e^- \in C_j$ et $e^+ \in C_{j^0}$ avec $X(e^+) - X(e^-) = 1$; ce qui entraîne la diminution de k_X d'au moins une unité. Quant à $jJ=j$; ou bien reste constant si $X(C_j) [C_{j^0} \notin 0$; ou bien augmente d'au moins une unité si $X(C_j) [C_{j^0} = 0$; et dans tous les cas \gg diminue d'au moins une unité.

Nous concluons en...n que la procédure d'équilibre s'achève après au plus $2jPj$ itérations. De plus la complexité de la détermination des composantes connexes est de l'ordre de $O(jPj + jEj)$ [56]:

¥

7.7 Présentation de l'algorithme

Entrées: P poset, $X = h$ (fonction hauteur), $G = (P; E)$ diagramme de Hasse;

Sortie: X fonction de représentation optimale;

Début algorithme rep-opt;

f*Annulation de la moyenne* g

Pour $p \in P$; Faire $X(p) := X(p) - \frac{1}{jPj} X(p)$; Fait;

Equilibre;

f* Construction du réseau $N = (V_N; E_N; s; t)$ où s et $t \in P$ * g

$V_N = P [fs; tg$; $E_N = E [fsp$; $p \in P$ g $[fpt$; $p \in P$ g;

Répéter f* Affectation des capacités* g

Pour $p \in P$; Faire

$$C_X(sp) := \max(0; \sum_j X(p)) ;$$

$$C_X(pt) := \max(0; X(p)) ;$$

Fait;

Pour $e \in E$; Faire

$$\text{Si } X(e^+) - \sum_j X(e_j) > 1; \text{ Alors } C_X(e) = 0$$

$$\text{Sinon } C_X(e) = +1 ;$$

Fsi;

Fait;

f*Utilisation d'un algorithme pour la détermination d'une coupe minimale* g

Déterminer une coupe minimale (S; T) dans N_X ;

$$F := S \cap fsg ; I := T \cap t;$$

Si $F \neq ?$; Alors f*Amélioration*g

$$\pm_1 := \min_{1 \leq e \in E} \sum_j X(e^+) - \sum_j X(e_j) ;$$

$$\pm := \frac{1}{|P|} \min_{j \in P} \left(\pm_1 \frac{X(I)}{|I|} - \frac{X(F)}{|F|} \right) ;$$

Pour $p \in F$; Faire $X(p) := X(p) + \pm |I|$; Fait;

Pour $p \in I$; Faire $X(p) := X(p) - \pm |F|$; Fait;

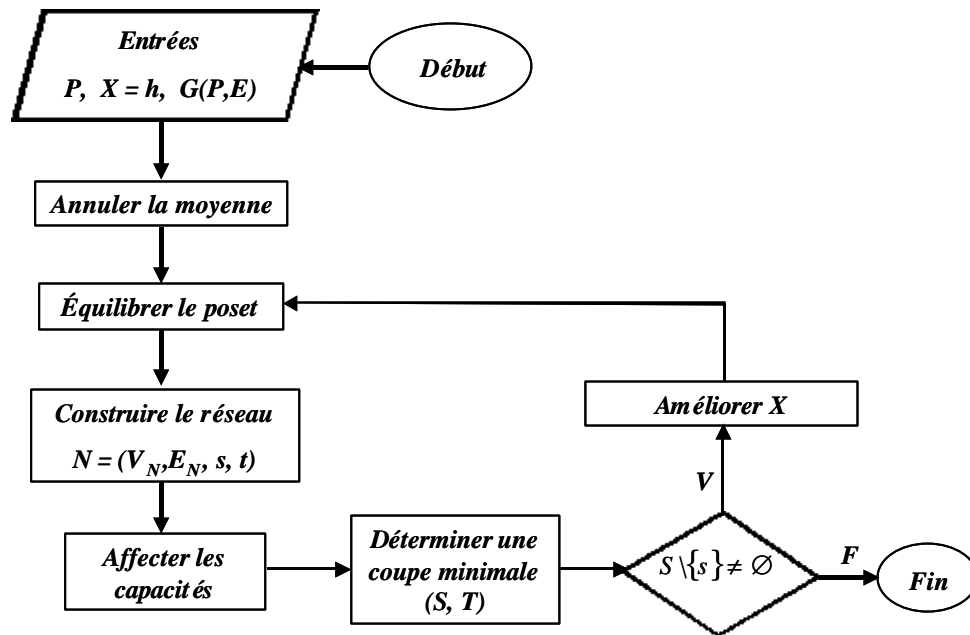
Equilibre;

Fsi;

Jusqu'à $J^< = ?$;

Fin;

7.8 Présentation de l'organigramme



7.9 Convergence et complexité

THEOREME 7.2 [12]

Le nombre d'itérations de l'algorithme de recherche d'une représentation optimale ne dépasse pas $\frac{|P|^6 + |P|^4}{48}$.

Preuve

La détermination de \pm dans l'algorithme assure l'obtention d'une représentation et la décroissance de la variance qui lui est associée d'une itération à une autre (voir Proposition 7.3) ; ceci d'une part. D'autre part $\pm > \frac{4}{|P|^3}$

En effet,

$\pm_1 \geq \frac{4}{|P|^2}$ en vertu de la Proposition 7.5.

$\frac{1}{|P|} \left(\frac{X(I)}{|I|} - \frac{X(F)}{|F|} \right) > \frac{4}{|P|^3}$, pour la raison suivante :

$$X(I) = X(I \setminus P) = X \left(\bigcup_{i=1}^{\bar{A}} I \setminus C_i \right) = \sum_{i=1}^{\bar{A}} X(I \setminus C_i)$$

D'après la Proposition 7.2, il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $X(I) \circ X(I \setminus C_i) > 0$; et d'après la Proposition 7.4, nous avons :

$$\begin{aligned} X(I \setminus C_i) &= \sum_{p \in I \setminus C_i} X(p) \\ &= \sum_{p \in I \setminus C_i} \frac{a_p}{|C_i|} \quad (a_p \in \mathbb{Z}) \\ &= \frac{1}{|C_i|} \sum_{p \in I \setminus C_i} a_p \\ &> \frac{1}{|C_i|} \\ &\circ \frac{1}{|P_j|}; \end{aligned}$$

c.à.d.

$$X(I) > \frac{1}{|P_j|}$$

Comme $X(P) = X(I) + X(F) = 0$; il vient

$$X(F) > \frac{1}{|P_j|}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{1}{|P_j|} \mu \frac{X(I)}{|I|} + \frac{X(F)}{|F|} &> \frac{1}{|P_j|^2} \frac{1}{|I|} + \frac{1}{|F|} \\ &= \frac{1}{|P_j| |I| |F|} \\ &= \frac{1}{|P_j| \frac{|I| + |F|}{2}} \\ &= \frac{4}{|P_j|^3} \end{aligned}$$

D'après la Proposition 7.3, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|P_j|^2} \mu \frac{1}{|I|} + \frac{1}{|P_j|^2} \mu \frac{1}{|F|} &> \frac{1}{|P_j|^2} \mu \frac{1}{|I|} + \frac{1}{|P_j|^2} \mu \frac{1}{|F|} \\ &= \frac{1}{|P_j|^4} \mu \frac{1}{8} (|F| X(I) + |I| X(F)) + \frac{1}{|P_j|^2} \mu \frac{1}{16} \frac{|F| |I|}{|P_j|^2} \\ &> \frac{4}{|P_j|^4} \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que la variance diminue après chaque itération d'au moins $\frac{4}{jPj^4}$. Si on suppose en...n que τ est le nombre total d'itérations, alors en vertu de la Proposition 7.6, on a :

$$\tau \geq \frac{4}{jPj^4} \geq \frac{jPj^2 - 1}{12};$$

c.à.d.

$$\tau \geq \frac{jPj^6 - jPj^4}{48} \quad \text{¥}$$

Remarque :

Pour un poset d'ordre 10, cette nouvelle borne assure le gain de 27000 itérations environ.

7.10 Commentaires et recommandations

Après implémentation de l'algorithme, nous avons pu relever les remarques suivantes :

² L'algorithme converge beaucoup plus rapidement que prévu par la borne de convergence pour plusieurs exemples. C'est la remarque qu'a soulevée C. Stendal [60] : Des exemples de tests établis par C. Stendal en 1993 suggèrent que le nombre d'itérations de $O(jPj)$ est largement suffisant. Nous recommandons ceux qui s'intéressent à l'amélioration théorique de cette borne, de comptabiliser essentiellement les améliorations effectuées chaque fois qu'on fait appel à la procédure d'équilibre (chose qui n'a pas été considérée par l'Auteur de l'algorithme).

² Aussi, la borne de convergence a été calculée sur la base d'un majorant représentant la variance de la fonction hauteur qui coïncide avec la fonction de rang d'une chaîne à n éléments. Or une chaîne est un poset normal et donc la fonction hauteur est optimale dès la première itération. A ce titre, il faut chercher un meilleur majorant, comme par exemple celui relatif à un poset gradué non normal, non distributif, non de Peck et non un ordre en chaînes symétriques⁹, car ceux sont tous de rang comprimé (voir Théorème 7.2).

⁹Voir les définitions au Chapitre III.

CHAPITRE VIII

PARTITIONS D'UN ENTIER

8.1 Introduction

Le treillis des partitions d'un entier, fait partie des posets gradués n'ayant pas été explorés entièrement, et ce de plusieurs points de vue. En allant dans la même direction de l'étude sur le treillis des partitions d'un ensemble, nous nous sommes posé la même question qu'avait posé K. Engel sur le treillis des partitions d'un ensemble :

Le treillis des partitions d'un entier est-il de rang comprimé?

Connaissant déjà la difficulté de la question sur le treillis des partitions d'un ensemble, nous avons choisi de commencer par étudier les propriétés déjà établies sur les nombres de Bell B_n , telles que la convexité ou l'existence de relations récurrentes, sur les nombres $p(n)$ et $p(n; k)$; respectivement le nombre de partitions d'un entier n et le nombre de partitions du même entier en k parts. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur ce thème et d'ailleurs certains d'entre eux ont publié des ouvrages concernant ce sujet comme par exemple Leonhard Euler (1707-1783) qui a écrit un ouvrage en 1748.

8.2 Définitions

Une partition d'un entier n en k parts, $k = 1; \dots; n$; est une solution entière du système :

$$n = x_1 + \dots + x_k; \quad x_1 \geq \dots \geq x_k > 0:$$

Soient $P(n; k)$ l'ensemble de toutes les partitions d'un entier n en k parts, $k = 1; \dots; n$; $P(n)$ l'ensemble de toutes les partitions de l'entier n et $A(n; k)$ l'ensemble de toutes les solutions entières du système :

$$n = x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k; \quad x_i \geq 0; \quad i = \overline{1; k}; \quad k = \overline{1; n}:$$

Notons par $p(n)$; $p(n; k)$ et $a(n; k)$ respectivement les cardinalités des ensembles $P(n)$; $P(n; k)$ et $A(n; k)$:

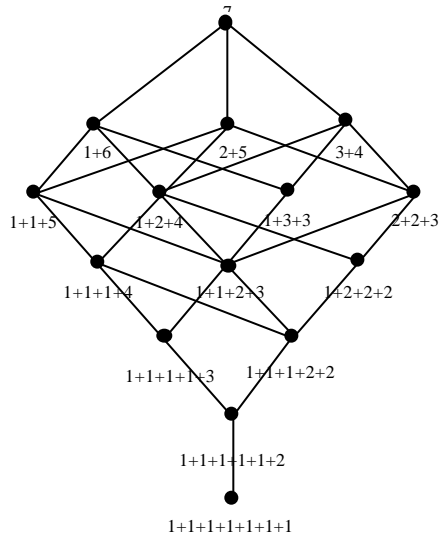
Sachant que $p(n; k) = 0$ lorsque $k > n$; on peut écrire

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} p(n; k).$$

L'ensemble $P(n)$ est un poset. Etant donnés deux partitions X et Y dans $P(n)$, la relation de couverture est définie par :

$X \lessdot Y$ (\hookrightarrow) X s'obtient à partir d'une subdivision en deux parts d'une seule part de Y :

Le poset $P(7)$ est représenté par la figure suivante :



8.3 Résultats préliminaires

PROPOSITION 8.1

La fonction génératrice associée aux nombres $a(n; k)$ s'exprime dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} comme suit :

$$g_k(z) = \frac{1}{(1 - z)(1 - z^2) \cdots (1 - z^k)}; \quad |z| < 1; \quad (8.2.1)$$

Preuve

Nous avons

$$g_k(z) = \prod_{i_1 \geq 0} z^{i_1} \prod_{i_2 \geq 0} z^{2i_2} \cdots \prod_{i_k \geq 0} z^{ki_k} = \prod_{i_1, i_2, \dots, i_k \geq 0} z^{i_1 + 2i_2 + \dots + ki_k} = \sum_{n \geq 0} a(n; k) z^n$$

¥

PROPOSITION 8.2

Nous avons :

$$a(n; k) = a(n; k-1) + a(n-1; k); \tag{8.2.2}$$

Preuve

Utilisant (8.2.1) et moyennant le Théorème de Cauchy, on a :

$$\begin{aligned} a(n; k-1) + a(n-1; k) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^{n+1} \prod_{i=1}^{k-1} (1-z^i)} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^{n+1} \prod_{i=1}^k (1-z^i)} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^{n+1} \prod_{i=1}^k (1-z^i)} \\ &= a(n; k); \end{aligned}$$

où γ représente le lacet $\gamma \subset \mathbb{C} : |z| = \epsilon < 1$; ¥

PROPOSITION 8.3

Nous avons :

$$p(n; k) = a(n-1; k); \tag{8.2.3}$$

Preuve

Considérons l'application φ définie de $A(n-1; k)$ dans $P(n; k)$ par :

$$\varphi((x_1; x_2; \dots; x_k)) = (x_1 + x_2 + \dots + x_k + 1; x_2 + x_3 + \dots + x_k + 1; \dots; x_k + 1);$$

Cette application est bijective, car :

- Deux k-uples différents de $A(n-1; k)$ donnent deux k-uples différents de $P(n; k)$:

- Tout k-uple $(x_1; \dots; x_k)$ de $P(n; k)$ est image d'un k-uple de $A(n; k)$, soit, $(x_1-1; x_2-1; \dots; x_k-1)$. ¥

COROLLAIRE 8.1

Nous avons :

$$p(n; k) = a(n; k) - a(n; k-1); \quad (8.2.4)$$

et

$$p(n) = a(n; n); \quad (8.2.5)$$

Preuve

Il suffit simplement d'utiliser les relations (8:2:2) et (8:2:3) :

¥

COROLLAIRE 8.2

La fonction génératrice associée aux nombres $p(n; k)$ s'exprime dans \mathbb{C} comme suit :

$$f_k(z) = \frac{z^k}{(1-z)(1-z^k)}; |z| < 1; \quad (8.2.6)$$

Preuve

La preuve découle immédiatement de la relation (8:2:3) ; en remarquant que,

$$g_k(z) - g_{k-1}(z) = f_k(z) :$$

¥

THEOREME 8.1 [15]

Si on désigne par $d_n(k)$ la somme de tous les diviseurs de n , inférieurs ou égaux à k , $k = 1, \dots, n$, alors:

$$a(n; k) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} d_{n-i}(k) a(i; k) :$$

Preuve

Nous avons d'une part, en vertu de (8.2.1) :

$$g_k^0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a(n+1; k) z^n; |z| < 1:$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 g_k^0(z) &= g_k(z) \prod_{i=1}^n \frac{z^{i-1}}{1 - z^i} \\
 &= g_k(z) \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} z^{j-1} \\
 &= g_k(z) \prod_{j=1}^{n-1} d_{n+1-j}(k) z^j \\
 &= \prod_{i=0}^n (d_{n+1-i}(k) a(i; k)) z^n
 \end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi après une simple identification. ¥

Ce théorème exprime les éléments de la suite $(a(n; k))_n$ de manière récurrente. Il fournit par conséquent un moyen de calcul à la fois, des éléments des suites $(p(n))_n$; $(a(n; k))_n$ et $(p(n; k))_n$. Son algorithme repose essentiellement sur la procédure qui calcule la somme des diviseurs d'un entier donné. Sa programmation nous a permis d'obtenir, à titre d'exemple, la table suivante :

Liste des valeurs de $a(n; k)$ pour k et $n \leq 15$

k\nn	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8
3	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27
4	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54
5	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84
6	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110
7	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131
8	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116	146
9	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94	123	157
10	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75	97	128	164
11	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	76	99	131	169
12	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	100	133	172
13	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	134	174
14	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	175
15	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176

COROLLAIRE 8.3 [15]

Nous avons :

$$p(n; k) = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{n-1} p(i; k)$$

Preuve

Elle découle immédiatement de (8.2.3) et du Théorème 8.1. ¥

8.4 Principaux résultats

Sachant que le rapport de deux nombres successifs de Bell d'un ensemble à n éléments est asymptotiquement équivalent à $\frac{n}{\log n}$ (voir Théorème 5.3).

"Qu'en est-il du rapport de deux nombres successifs de partitions d'un entier?". Les résultats qui suivent permettent de donner un élément de réponse à cette question.

PROPOSITION 8.3 [15]

Pour tout entier $k; k \geq 2$; nous avons :

$$p(n+1; k) \leq p(n; k) + p(n; k-1); \quad n \geq 1$$

Preuve

Soit $(x_1, \dots, x_k) \in P(n+1; k)$: Si $x_k = 1$; alors $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in P(n; k-1)$; sinon $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in P(n; k)$. ¥

COROLLAIRE 8.4 [15]

Pour tout entier $n \geq 1$; nous avons :

$$1 < \frac{p(n+1)}{p(n)} \leq 2$$

Preuve

Si $(x_1, \dots, x_k) \in P(n)$; alors $(x_1, \dots, x_k, 1) \in P(n+1)$: Comme de plus $P(n+1)$ contient la partition à une part $(n+1)$ qui n'appartient pas à $P(n)$; nous avons donc $p(n) < p(n+1)$:

D'après la Proposition 8.3, nous avons :

$$p(n+1) = \sum_{k=1}^{n-1} p(n+1; k) + \sum_{k=1}^n p(n; k) + p(n; 1) = 2p(n) :$$

¥

8.4.1 Convexité des suites $(p(n))_n$; $(a(n; k))_n$ et $(p(n; k))_n$

THEOREME 8.2 [13]

La suite $(p(n))_n$ est convexe pour $n \geq 2$; c.à.d.

$$p(n+1) + p(n-1) \geq 2p(n) \quad 0 \leq n \leq 2:$$

Preuve

Si on désigne par $P^0(n)$ l'ensemble des partitions de n dont les parts sont toutes au moins égales à 2 et par $p^0(n)$ sa cardinalité, alors il est facile de voir que :

$$p^0(n+1) + p(n) = p(n+1) :$$

Il suffit de partitionner l'ensemble des partitions de $n+1$ en deux classes, la classe des partitions dont les parts sont toutes au moins égales à 2, celle-ci correspond à $P^0(n+1)$ et la classe du reste des partitions qui admettent au moins une part égale à 1, celle-ci est de cardinalité $p(n)$ (on peut correspondre bijectivement cette classe à $P(n)$ en supprimant une part égale à 1).

De plus

$$p^0(n) + p^0(n+1) :$$

Il suffit d'injecter $P^0(n)$ dans $P^0(n+1)$ en ajoutant 1 à la plus grande part d'une partition de $P^0(n)$:

Donc

$$\begin{aligned} p(n+1) + p(n-1) &\geq 2p(n) = (p(n+1) + p(n)) + (p(n) + p(n-1)) \\ &= p^0(n+1) + p^0(n) \geq 0: \end{aligned}$$

¥

THEOREME 8.3 [13]

La suite $(a(n; k))_n$ est convexe, par rapport à n , pour $k \geq 7$ et $n \geq 2$; c.à.d.

$$a(n; k) + a(n-2; k) \geq 2a(n-1; k) \quad 0 \leq k \leq 7; n \geq 2:$$

Preuve

Raisonnons par induction.

Posons $v_n(k) = a(n; k) + a(n-2; k) - 2a(n-1; k)$: Nous pouvons sans nuire à la généralité, supposer $n > k$; car sinon, en vertu du Théorème 8.2, on aura $v_n(k) = p(n) + p(n-2) - 2p(n-1) \approx 0$:

Signalons tout d'abord que la fonction génératrice associée au terme $v_n(k)$ est :

$$h_k(z) = \frac{(1-z)^2}{\prod_{i=1}^k (1-z^i)}; \quad (|z| < 1)$$

il vient

$$h_k(z) = \frac{1}{1-z^k} h_{k-1}(z);$$

d'où

$$v_n(k) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/k \rfloor} \binom{n}{kj} v_{n-kj}(k-1); \quad ((8.4:1))$$

avec $\binom{n}{kj} = 1$ si k divise j et $\binom{n}{kj} = 0$ sinon.

Montrons tout d'abord, en raisonnant par induction que $v_n(7) \approx 0$ pour tout $n \approx 8$:

La décomposition en éléments simples de la fonction génératrice associée au terme $v_n(7)$ donne :

$$\begin{aligned} h_7(z) = & \frac{1}{5040} \frac{1}{(1-z)^5} + \frac{1}{480} \frac{1}{(1-z)^4} + \frac{47}{4320} \frac{1}{(1-z)^3} + \frac{161}{4320} \frac{1}{(1-z)^2} \\ & + \frac{16051}{172800} \frac{1}{1-z} + \frac{1}{192} \frac{1}{(1+z)^3} + \frac{23}{384} \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{713}{2304} \frac{1}{1+z} \\ & + \frac{1}{7} \frac{(1-z)^2}{1-z^7} + \frac{1}{108} \frac{(21-2z)(1-z)}{1-z^3} + \frac{1}{54} \frac{(2+z)(1-z)^2}{(1-z^3)^2} \\ & + \frac{1}{36} \frac{(1-2z)(1+z)}{1+z^3} + \frac{1}{25} \frac{(2-z+z^2-2z^3)(1-z)}{1-z^5} + \frac{1}{16} \frac{z}{1+z^2} \end{aligned}$$

En effectuant une minoration de chaque coefficient de z^n , dans le développement en série entière des fonctions ci-dessus, on trouve :

$$\begin{aligned} v_n(7) \approx & \frac{1}{5040} \left(\frac{1}{24} n^4 + \frac{5}{12} n^3 + \frac{35}{24} n^2 + \frac{25}{12} n + 1 \right) + \frac{1}{480} \left(\frac{1}{6} n^3 + n^2 + \frac{11}{6} n + 1 \right) \\ & + \frac{47}{4320} \left(\frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{2} n + 1 \right) + \frac{161}{4320} (n+1) + \frac{16051}{172800} + \frac{1}{192} \left(\frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{2} n + 1 \right) \\ & + \frac{23}{384} (n+1) + \frac{713}{2304} + \frac{2}{7} + \frac{23}{108} + \frac{1}{54} (n+2) + \frac{1}{18} + \frac{2}{25} + \frac{1}{16}; \end{aligned}$$

c.à.d.

$$\begin{aligned}
 v_n(7) &\circ \frac{1}{120960}n^4 + \frac{13}{30240}n^3 + \frac{1}{192}n^2 + \frac{859}{30240}n + \frac{16451}{24192} \\
 &= 0:8267195767 \cdot 10^i \text{ € } (n + 30:63520805) \text{ € } (n + 9:699836835) \\
 &\text{€ } n^2 + 31:064628784n + 276:8069841 :
 \end{aligned}$$

Donc

$$v_n(7) \circ 0; \quad 8n \circ 10:$$

Pour $n = 8; 9$, nous avons

$$v_8(7) = 2; \quad v_9(7) = 1.$$

Supposons maintenant que $v_n(j) \circ 0$, pour $7 \leq j \leq k-1$ et montrons que $v_n(k) \circ 0$:

Nous avons d'une part en vertu de (8:4:1)

$$v_n(k) = \binom{n}{k} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} v_{k+1}(k-1) + \sum_{\substack{j=0 \\ (j \in n-k+1)}}^{\infty} \binom{n}{k} v_{n-k+j}(k-1):$$

Ainsi, d'après l'hypothèse de l'induction, nous avons

$$v_n(k) \circ \binom{n}{k} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} v_{k+1}(k-1):$$

D'autre part d'après (8:2:2); nous avons

$$v_n(k) = v_n(k-1) + v_{n-k}(k):$$

Donc

$$v_{k+1}(k-1) = v_{k+1}(k-2) + v_2(k-1) = v_{k+1}(k-2) + 1:$$

Si $k-2 \circ 7$; alors $v_{k+1}(k-2) \circ 0$, d'après l'hypothèse de l'induction.

Si $k-2 = 6$; alors $v_{k+1}(k-2) = v_9(6) = 0$:

Par conséquent,

$$v_n(k) \circ \binom{n}{k} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} \circ 0:$$

En effet,

- si k divise n ; alors $\mathbb{P}_k(n) = \mathbb{P}_k(n-1) + \mathbb{P}_k(n-k-1) = 1$;
- si k divise $n-1$; alors $\mathbb{P}_k(n) = \mathbb{P}_k(n-1) + \mathbb{P}_k(n-k-1) = 0$;
- si k ne divise ni n ni $n-1$; alors $\mathbb{P}_k(n) = \mathbb{P}_k(n-1) + \mathbb{P}_k(n-k-1) = 0$: ¥

Remarque :

On peut démontrer de manière analogue que $v_n(5) = 0$, $8n = 2$ et que $v_n(6) = 0$, $8n = 2$ $N = 7$; $13g$.

COROLLAIRE 8.5 [13]

La suite $(p(n; k))_n$ est convexe, par rapport à n , pour $k = 7$ et $n = k + 2$, c.à.d.

$$p(n; k) + p(n-2; k) \geq 2p(n-1; k) \quad ; \quad k = 7; \quad n = k + 2:$$

Preuve

D'après (8:2:3), nous avons :

$$p(n; k) + p(n-2; k) - 2p(n-1; k) = a(n-k; k) + a(n-k-2; k) - 2a(n-k-1; k) \geq 0$$

Et le résultat découle immédiatement du Théorème 8.3. ¥

8.5 Sur les partitions d'un entier en entiers consécutifs

Soit n un entier positif et soit $f(n)$ le nombre de manières d'écrire n sous forme d'une somme d'entiers positifs consécutifs.

Exemples :

n	$f(n)$	les partitions	n	$f(n)$	les partitions
2	1	2	6	2	6 1+2+3
3	2	3 1+2	7	2	7 3+4
4	1	4	8	1	8
5	2	5 2+3	9	3	9 2+3+4 4+5

8.5.1 Principaux résultats

THEOREME 8.4 [15]

$f(n)$ est égal au nombre de diviseurs impairs de n .

Preuve :

Dire que n est somme d'entiers positifs consécutifs, c'est dire qu'ils existent l et m ; deux entiers positifs tels que $l < m$ et,

$$n = (l + 1) + (l + 2) + \dots + m:$$

Ou bien

$$n = (1 + \dots + m) + (1 + \dots + l):$$

c.à.d.

$$n = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{l(l+1)}{2}$$

Donc

$$2n = m(m+1) + l^2 + l = 0: \quad (8.5.1)$$

L'équation (8:5:1) étant une équation de second degré en l ; elle admet comme solution :

$$l = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(2n + m(m+1))}}{2}$$

m étant un entier, la quantité à l'intérieur de la racine est nécessairement un carré parfait, c.à.d. :

$$4m^2 + 4m + 8n + 1 = u^2: \quad (8.5.2)$$

Il est clair que u doit être impair.

En résolvant l'équation (8:5:2) en m , on trouve :

$$m = \frac{-1 + \sqrt{8n + u^2}}{2}$$

Encore une fois, puisque m est entier, $8n + u^2$ est un carré parfait, c.à.d.

$$8n + u^2 = v^2$$

Ce qui permet d'écrire :

$$8n = (v - u) : (v + u) :$$

Comme u est impair, v est aussi impair. On peut donc écrire :

$$2n = \frac{v - u}{2} \cdot \frac{v + u}{2} \quad (8.5.3)$$

Cette dernière équation veut dire que nous sommes à la recherche d'une factorisation de 2n en deux facteurs :

$$A = \frac{v - u}{2} \quad \text{et} \quad B = \frac{v + u}{2} ; \quad (8.5.4)$$

avec u et v deux entiers impairs et $B > A$.

En vertu de (8:5:4), on a :

$$v = A + B \quad \text{et} \quad u = B - A$$

On déduit alors que A et B sont de parités différentes.

Ainsi, l'équation (8:5:3) se traduit comme une factorisation de n en deux facteurs, l'un des deux est impair.

$$n = A \cdot \frac{B}{2} \quad (A \text{ impair}) \quad \text{ou} \quad n = B \cdot \frac{A}{2} \quad (B \text{ impair})$$

Ceci veut dire que nous sommes à la recherche des diviseurs impairs de n. ¥

Exemple : Soit $n = 15$,

n	A	B	$v = A + B$	$u = B - A$	$m = \frac{1 + \sqrt{8n + u^2}}{2}$
15	1	30	31	29	15
	3	10	13	7	6
	5	6	11	1	5
	2	15	17	13	8

$l = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(2n - m(m+1))}}{2}$	partitions = $(l + 1) + \dots + m$
14	15
3	4 + 5 + 6
0	1 + 2 + 3 + 4 + 5
6	7 + 8

Remarque :

La démonstration de ce théorème est purement algorithmique, elle nous permet donc de déterminer toutes les partitions d'un entier n :

Les corollaires suivants découlent immédiatement du théorème 8.4.

COROLLAIRE 8.6 [15]

Si n est pair, alors le nombre de ses partitions en entiers pairs consécutifs est égal à $f\left(\frac{n}{2}\right)$.

COROLLAIRE 8.7 [15]

Le nombre de partitions de n en entiers consécutifs sans restriction de signe est égal à $2f(n)$:

THEOREME 8.5 [15]

Le nombre de partitions de n en entiers impairs consécutifs est égal au nombre de factorisations de n en deux entiers de mêmes parités.

Preuve :

Dire que n est somme d'entiers impairs consécutifs, c'est dire qu'ils existent deux entiers positifs l et m ; l pair et m impair tels que,

$$n = (l + 1) + (l + 3) + \dots + (l + m) :$$

Ou bien

$$n = [1 + \dots + (l + m)] + [(1 + \dots + l)] + [(l + 2) + \dots + (l + m - 1)] :$$

c.à.d

$$n = \frac{(l + m)(l + m + 1)}{2} + \frac{l(l + 1)}{2} + \frac{(m - 1)(m + 1)}{2} + \frac{(m - 1)}{2} l$$

Donc

$$m^2 + 2m(l + 1) + 2l + 4n + 1 = 0 \tag{8.5.5}$$

La résolution de (8.5.5) en m donne :

$$m = -(l + 1) + \sqrt{l^2 + 4n}$$

Comme m est un entier, $l^2 + 4n$ est un carré parfait, c.à.d :

$$l^2 + 4n = u^2;$$

avec u pair.

Il vient

$$4n = (u - l)(u + l);$$

ou bien

$$n = \frac{u - l}{2} \cdot \frac{u + l}{2}$$

Si on pose

$$A = \frac{u - l}{2} \quad \text{et} \quad B = \frac{u + l}{2};$$

alors

$$n = A \cdot B;$$

avec $B > A$, $u = A + B$ et $l = B - A$

Les entiers u et l sont pairs donc, n est factorisé en deux entiers de même parité.

¥

CHAPITRE IX

NOUVELLES IDENTITES POUR LES POLYNOMES DE BELL. NOUVELLE APPROCHE.

9.1 Introduction

Dans ce Chapitre nous proposons une nouvelle approche pour la détermination de nouvelles identités pour les polynômes de Bell, basée sur la formule d'inversion de Lagrange, et les suites binomiales. Cette approche permet d'une part de retrouver facilement les identités connues dans la littérature et d'en déduire d'autre part de nouvelles identités de ces polynômes.

Utilisant une démonstration par récurrence, Salim KHELIFA et Yves CHERRUAULT ont démontré l'identité suivante sur les polynômes de Bell [45] ;

$$B_{n;k}^{(1^0; 2^1; 3^2; \dots)} = \sum_{k \leq i \leq n} \binom{n-i}{k-i} n^{n-i-k} \quad (9.1.1)$$

La démonstration étant excessivement longue (7 pages) elle nécessite de ce fait une autre démonstration plus courte. Dans ce travail nous proposons deux nouvelles identités, avec des démonstrations plus courtes. La première utilise la formule d'inversion de Lagrange, ayant comme conséquence immédiate l'identité (9:1:1) ; et la deuxième utilise les suites binomiales engendrant de nouvelles identités, et des identités connues dans la littérature.

9.2 Définition

Les polynômes de Bell sont des polynômes d'un nombre infini de variables $x_1; x_2; \dots$; notés $B_{n;k}(x_1; x_2; \dots)$; définis par (cf. [21]; p:133) :

$$\frac{1}{k!} \sum_{m \geq 1} \tilde{A} \sum_{m \geq 1} x_m \frac{t^m}{m!} = \sum_{n \geq k} B_{n;k}(x_1; x_2; \dots) \frac{t^n}{n!}; \quad k = 0; 1; \dots \quad (9.2.1)$$

Son expression exacte est (voir [21]; p:134)

$$B_{n;k}(x_1; x_2; \dots) = \sum_{\frac{1}{4}(n)} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots (1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$$

où $\frac{1}{4}(n)$ dénote une partition de n , avec $k_1 + 2k_2 + \dots = n$; k_i est bien sur, le nombre de parts de taille i . Aussi $k_1 + k_2 + \dots = k$ est le nombre de parts dans la partition.

9.3 Principaux résultats

9.3.1 Approche basée sur la formule d'inversion de Lagrange

Etant donnée une fonction f régulière¹⁰ dans le disque fermé $U = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq r\}$; $r > 0$ avec $f(0) \neq 0$; posons pour n et m ; deux entiers naturels :

$$f_n(m) = \begin{cases} D^n [f(w)]^m \Big|_{w=0} & \text{si } n \geq 1 \\ (f(0))^m & \text{si } n = 0; \end{cases}$$

où $D = \frac{d}{dz}$

THEOREME 9.1 [2]

Pour tout n et tout k ; $k \leq n$; nous avons :

$$B_{n;k}(f_0(1); f_1(2); f_2(3); \dots) = \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_i=1}^{n-1} f_{n_i k}(n);$$

Preuve

Considérons l'équation de l'inconnu $z \in \mathbb{C}$:

$$w_j - zf(w) = 0:$$

Cette équation admet dans U exactement une solution $w = g(z)$ (cf: [35]; p:234) : De plus, pour toute fonction z régulière dans U , nous avons :

$$z(g(z)) = z(0) + \sum_{n \geq 1} D^{n-1} z^0(w) [f(w)]^{n-1} \Big|_{w=0} \frac{z^n}{n!} \quad (9.3.1)$$

¹⁰holomorphe.

Si nous choisissons $z(w) = w$; on obtient en vertu de (9:3:1)

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} D^{n-1} [f(w)]^n \Big|_{w=0} \frac{z^n}{n!}$$

Nous pouvons alors écrire en vertu de (9:2:1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} (g(z))^k &= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-1}(n) \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,k}(f_0(1); f_1(2); f_2(3); \dots) \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

D'autre part, si nous choisissons $z(w) = \frac{1}{k!} w^k$; nous obtenons encore une fois en vertu de (9:3:1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} (g(z))^k &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} D^{n-1} w^{k-1} [f(w)]^n \Big|_{w=0} \frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} D^{n-1} w^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} D^j [f(w)]^j \Big|_{w=0} \frac{w^j}{j!} \right)^k \frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} D^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_j(n)}{j!} w^{j+k-1} \right)^k \frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} D^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_{j+k-1}(n)}{(j+k-1)!} w^j \right)^k \frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n-k)!} f_{n-k}(n) \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{n-1}^{k-1} f_{n-k}(n) \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi après une simple identi...cation. ¥

COROLLAIRE 9.1 [2]

Soit $a \in \mathbb{R}$: Nous avons pour tout n et $k \in \mathbb{N}^*$; $k \leq n$;

$$B_{n,k}(1a^0; (2a)^1; (3a)^2; \dots) = \mu_{n-1}^{k-1} (an)^{n-k}$$

Preuve

Il suffit just d'appliquer le Théorème 9.1, en considérant comme fonction $f(w) = e^{aw}$. Ce qui donne

$$f_n(m) = \begin{cases} (am)^n & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

¥

Remarques :

- 1) Si on choisit $a = 1$; on trouve l'identité (9.1.1).
- 2) Il est clair que l'identité du Corollaire 9.1 n'est pas la seule conséquence du Théorème 9.1, car tout dépend du choix de la fonction f : Si par exemple on choisit la fonction $f(w) = 1 + aw$, il vient

$$f_n(m) = \begin{cases} a^n [m]_n & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

où $[m]_n = m(m-1)\dots(m-n+1)$:

Ainsi, nous avons

$$B_{n,k}(1!a^0; 2!a^1; 3!a^2; \dots) = a^{ni-k} \binom{n-1}{k-1} \frac{n!}{k!}$$

Si on choisit

² $a = 1$, on retrouve (Cf: [21]; p:135) l'identity

$$B_{n,k}(1!; 2!; 3!; \dots) = \binom{n-1}{k-1} \frac{n!}{k!}$$

²² $a = 0$; on obtient

$$B_{n,k}(1; 0; 0; \dots) = 0, k \neq n \text{ et } B_{n,n} = 1:$$

9.3.2 Approche basée sur les suites binomiales

Une suite de fonctions $(f_n(x))_n$ définies sur $I \subset \mathbb{R}$ est dite binomiale si,

$$f_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k(x) f_{n-k}(y); \text{ pour tout } x, y \in I:$$

THEOREME 9.2 [2]

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite binomiale définie sur $I; \mathbb{N} \times I \times \mathbb{R}$; avec $x_0 \neq 0$:
Alors, pour tout n et tout $k; k \leq n$; nous avons :

$$B_{n;k}(x_0(1); x_1(1); x_2(1); \dots) = \frac{\mu_n}{k} x_{n-k}(k)$$

Preuve

Désignons par \odot_x la fonction génératrice associée à la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
c.à.d.

$$\odot_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n!}$$

Nous supposons bien sûr que le rayon de convergence $R > 0$:

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant binomiale, alors, $\odot_{x+y}(t) = \odot_x(t) \odot_y(t)$; pour
tout $x, y \in I$ (Produit de Cauchy): Ce qui permet d'écrire :

$$\odot_k(t) = (\odot_1(t))^k; \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \quad (9.3.2)$$

Il vient alors d'une part,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} (t \odot_1(t))^k &= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} x_n(1) \frac{t^{n+1}}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n;k}(x_0(1); x_1(1); x_2(1); \dots) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

D'autre part, en vertu de (9:3:2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} (t \odot_1(t))^k &= \frac{1}{k!} t^k \odot_k(t) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} x_n(k) \frac{t^{n+k}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{k} x_{n-k}(k) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi. ¥

COROLLAIRE 9.2 [2]

Nous avons :

$$B_{n,k}(B_0; 2B_1; 3B_2; \dots) = \sum_k \binom{n}{k} x^k \prod_{j=0}^{k-1} S_{n_j}^j$$

où $B_0; B_1; B_2; \dots$ représentent les nombres successifs de Bell.

Preuve

Considérons la suite de polynômes définis sur \mathbb{R} par :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n S_n^k x^k;$$

où S_n^k désigne le nombre de Stirling du second espèce.

Cette suite étant binomiale (voir Corollaire 4.3), le résultat est ainsi établi en vertu du Théorème 9.2. ¥

Remarque :

Le Corollaire 9.2 n'est pas l'unique conséquence du Théorème 9.2, tout dépend du choix de la suite binomiale. Si nous choisissons à titre d'exemple la suite binomiale définie sur \mathbb{R} par $b_n(x) = x^n$; on retrouve l'identité (cf: [21]; p:135) :

$$B_{n,k}(1; 2; 3; \dots) = \sum_k \binom{n}{k} k^{n-k};$$

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Par cette présente étude, nous avons essayé d'apporter une contribution au développement de la théorie de Sperner, tant sur le plan combinatoire que sur le plan optimisation.

Nous avons à ce titre contribué à l'amélioration d'un algorithme polynomial pour la détermination d'une représentation optimale dans un poset quelconque, cette dernière a fait l'objet d'une publication [12] :

Par une approche purement probabiliste, nous avons publié [11] de nouvelles propriétés sur la suite des nombres de Bell $(B_n)_n$, la convexité en est une, elles nous a permis de démontrer la condition nécessaire et suffisante d'Alekseev sur les ...tres principaux dans le treillis des partitions d'un ensemble [11].

Toujours, dans le but de résoudre le problème de l'optimalité de la fonction de rang, cette fois ci, dans le treillis des partitions d'un entier n ; nous avons démontré de nouvelles propriétés sur les suites de termes généraux, $p(n)$; $p(n; k)$ et $a(n; k)$; respectivement le nombre de partitions de n , le nombre de partitions de n en k parts et le nombre de solutions du système: $n = x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k$; $x_i \geq 0$; $i = 1; k$; $k = 1; n$. Ces résultats ont été couronnés par une publication [13].

Un problème résolu en pose souvent de nouveaux, aussi intéressants ou encore plus intéressants que le problème initial, et éventuellement riches de surprises. C'est justement ce qui s'est passé avec l'identité sur les polynômes de Bell, publiée par S. KHELIFA et Y. CHERRUAULT. La preuve étant sur sept pages, nécessitait une autre plus courte; nous en avons fait plus : la réduction de la preuve en une seule page et la généralisation du résultat [2]. Nous avons en outre démontré une nouvelle classe d'identités de ces polynômes, en se basant sur les suites binomiales. Cette nouvelle classe en plus de son originalité, elle englobe quelques identités connues dans la littérature [2].

Si on regarde tous les aspects des problèmes étudiés dans cette thèse, on est frappé par la prolifération des problèmes qui peuvent se poser à propos de la théorie de Sperner, et de la diversité des outils pour les résoudre.

Nous avons cru devoir rédiger cette thèse dans l'optique de la Recherche fondamentale, et ne pas trop chercher les applications pratiques, qui existent sans doute, et le jour où elles surgiront, elles trouveront les moyens théoriques pour leur résolution. Néanmoins nous proposons en annexe un

exemple d'une structure de poset pour la résolution d'un problème de Recherche Opérationnelle.

Le travail présenté dans ce rapport de thèse ouvre plusieurs perspectives, nous proposons ici l'étude des problèmes suivants :

- 1) Vérifier si la condition d'Alekseev est vraie sur les n premiers dans le treillis des partitions d'un entier.
- 2) Vérifier si le treillis des partitions d'un entier est de rang comprimé.
- 3) Vérifier si un treillis géométrique est de rang comprimé.
- 4) Evaluer la moyenne et la variance du treillis des partitions d'un entier.
- 5) Etudier notre conjecture.
- 6) Etudier la conjecture de K. Engel relative à la concavité de la variance.
- 7) Améliorer la borne de convergence de l'algorithme de K. Engel pour la détermination d'une représentation optimale.
- 8) Etendre la formule asymptotique d'Alekseev aux ensembles d'articulation (cut-set)¹¹.
- 9) Rechercher un algorithme pour la détermination d'une anti-représentation optimale.
- 10) Etudier la suite des partitions d'un entier en nombre pair (resp. impair) de parts.

¹¹Un ensemble d'articulation S d'un poset P est une partie de P vérifiant la propriété suivante :

$$|S \cap C| \leq 1; \text{ pour toute chaîne maximale } C \text{ de } P.$$

ANNEXE

Exemple d'application d'une structure
de poset à la résolution d'un problème
de Recherche Opérationnelle

Pour éclairer un ensemble de locaux, on doit réaliser le programme indiqué par le tableau suivant :

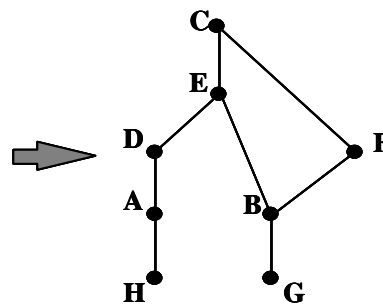
Heures D'éclairage	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Programme									
A	—	—	—	—				—	
B			—	—	—	—	—		
C	—	—	—	—	—	—	—	—	—
D	—	—	—	—	—	—		—	
E	—	—	—	—	—	—	—	—	
F			—	—	—	—	—	—	—
G			—	—	—	—			
H	—	—	—	—					

On veut mettre en place le moins possible de minuteriers!

Nous dirons qu'un programme M est inférieur ou égal à P si P réalise un éclairage durant au moins les mêmes heures que M.

Heures D'éclairage	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Programmes									
A	—	—	—	—				—	
B			—	—	—	—	—		
C	—	—	—	—	—	—	—	—	—
D	—	—	—	—	—	—		—	
E	—	—	—	—	—	—	—	—	
F			—	—	—	—	—	—	—
G			—	—	—	—			
H	—	—	—	—					

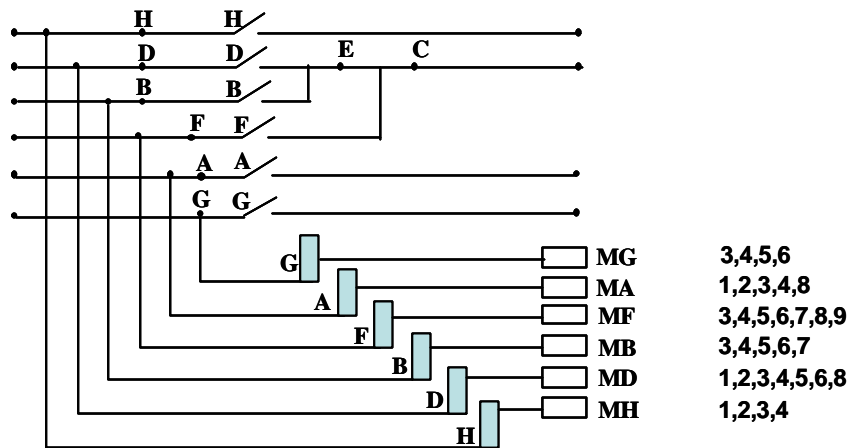
Le diagramme de Hasse



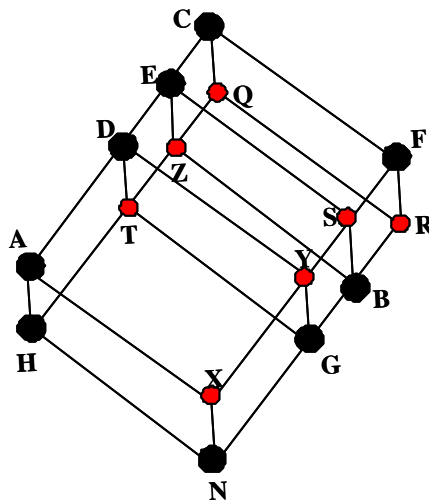
Il s'agit en fait de trouver dans le graphe ci dessus un ensemble minimal de générateurs.

Nous avons : $E = D \cup B$ et $C = D \cup B \cup F$: Ceci permet de prendre comme générateurs A, B, D, F, G et H. Ce qui demande six minuteriers et

six relais. La figure suivante donne une idée de montage possibles.



Si on veut maintenant introduire la structure de treillis, on doit naturellement introduire les bornes inférieures et supérieures de toute paire de programmes.

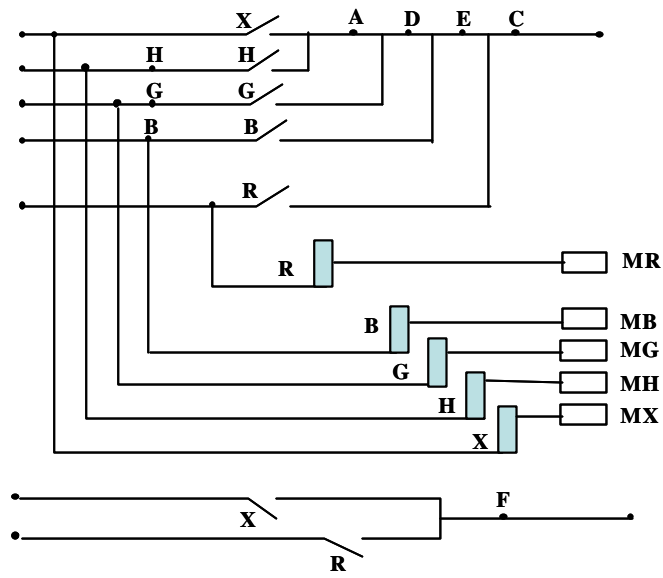


Nous déduisons de ce graphe que :

$A = H_X$; $D = H_G_X$; $E = B_H_G_X$; $C = B_H_G_R_X$
 et $F = R_X$:

Nous avons ainsi cinq générateurs R, B, G, H et X. Ce qui demande maintenant que cinq minuteriers. La figure suivante donne une idée de

montage possible.



Liste des résultats originaux

Propositions

4:9	P.45	6:2	P.60
4.10	P.45	7:5	P.71
5.1	P.51	7.6	P.73
6:1	P.56	8:3	P.86

Lemmes

6:1	P.58
6:2	P.59
7:1	P.71
7:2	P.72

Théorèmes

3:3	P.33	5:3	P.53	8:1	P.84	8:5	P.93
4:2	P.42	5.4	P.54	8.2	P.87	9:1	P.96
4:3	P.44	6:1	P.61	8:3	P.87	9:2	P.99
5:2	P.52	7:2	P.78	8:4	P.91	...	

Corollaires

3:1	P.33	6:1	P.57	8:6	P.93
4:1	P.43	8:3	P.86	8:7	P.93
4:2	P.44	8:4	P.86	9:1	P.97
4:3	P.46	8:5	P.90	9:2	P.100

Conjecture

P:61

References

- [1] M. Abbas & S. Bouroubi, 'New proof of an identity for Bell's polynomials', *Maghreb Math. Rev.*, à paraître.
- [2] M. Abbas & S. Bouroubi, 'New identities for Bell's polynomials. New approaches', *Rostock. Math. Kolloq.*, à paraître.
- [3] M. Aigner, 'Combinatorial theory', Springer-verlag, Berlin/Heidelberg/New York, (1979).
- [4] V.B. Alekseev, 'On the number of k-valued functions', *Probl. Kibernet.* 28 (1974), 5-24.
- [5] V.B. Alekseev, 'Use of symmetry in ...nding the width of partially ordered set', *Diskret. Analiz Vyp. 26 Grafy i Testy* (1974), 20-35.
- [6] E. A. Bender and E. R. Can...eld, 'Log concavity and a related property of the cycle index polynomials', preprint.
- [7] S. L. Bezrukov and K. Engel. 'Properties of graded posets preseved by some operation'. In R. L. Graham and J. Nešetřil, editors, *Mathematics of Paul Erdős*, Springer-Verlag, Berlin. *Algorithms Comb.* 14, 79-85.
- [8] I. Bouchemakh, 'Sur quelques problèmes extrémaux dans les ordres partiels ...nis', thèse de doctorat d'Etat, université U.S.T.H.B., Alger, (2001).
- [9] S. Bouroubi, 'Contribution à la résolution de la conjecture de Konrad ENGEL', article en préparation.
- [10] S. Bouroubi, 'Etude du treillis des partitions', Thèse de magister, université U.S.T.H.B., Alger, (1991).
- [11] S. Bouroubi, 'The Alekseev condition on the principal ...lters in the partition lattice', *Maghreb Math. Rev.* Page 37-42. Vol 9, N°1 & 2, December (2000).
- [12] S. Bouroubi, "Amélioration de la borne de convergence de l'algorithme de Konrad ENGEL pour la détermination d'une représentation optimale dans un poset ...ni", *Maghreb Math. Rev.* A paraître.
- [13] S. Bouroubi & M. Mihoubi, 'Sur quelques relations relatives aux nombres des partitions d'un entier', *Maghreb Math. Rev.*, à paraître.
- [14] S. Bouroubi, 'Etude des variances du poset booleen et du poset des partitions', *Courrier du savoir, scienti...que et technique*, article soumis.
- [15] S. Bouroubi, 'Sur les partitions d'un entier', article en préparation.

- [16] E. R. Canfield (1994), 'Engel's Inequality for Bell Numbers', *Journal of Combinatorial theory serie A* 72, Pages 184-187 (1995).
- [17] E. R. Canfield and K. Engel, 'An upper bound for the size of the largest antichain in the poset of partitions on an integer'. (1998)
- [18] E.R. Canfield and L.H. Harper, 'Large antichains in the partition lattice' *Random structures Algorithms*. 6, 89-104 (1995).
- [19] E. R. Canfield and L. H. Harper, 'A simplified guide to large antichains in the partition lattice', *Congr. Numer.*, to appear.
- [20] L. Chambadal, 'Exercices et Problèmes Résolus d'Algèbre', page 94. Office des publications universitaires, 29 rue Abou Nouas, Hydra, Alger, (1972).
- [21] L. Comtet, 'Advanced Combinatorics', D. Reidel, Dordrecht, (1974) :
- [22] N.G. Deuring (1958), 'Asymptotic Methods in Analysis', pages 102-108,. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London.
- [23] J. Dieudonne (1980), 'Calcul Infinitesimal', page 321, Collection Méthodes, Hermann, Paris.
- [24] R.P. Dilworth, 'A decomposition theorem for partially ordered sets', *Ann. of Math.*, 51, 161-166 (1950).
- [25] K. Engel, 'About k-optimal Representation of Posets', *J.Inform. Process. Cybern. EIK* 25 (1989), 3-10.
- [26] K. Engel, 'Sperner Theory', Cambridge University Press, Cambridge, (1997).
- [27] K. Engel, 'An algorithm for the determination of the variance of a partially Ordered Set', *J. Algorithms* 19, (1995), 441-448.
- [28] K. Engel, 'A new proof of theorem of Harper on the Sperner-Erdős problem', *J. Combin. Theory, Ser. A* 39 (1985) ; 19-24.
- [29] K. Engel and H.-D. O. F. Gronau, 'Sperner Theory in partially Ordered Sets', BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, (1985).
- [30] K. Engel, 'Optimal representations of partially ordered sets and a limit Sperner theorem', *European J. Combin.* 7, (1986), 287-302.
- [31] K. Engel, 'Optimal representation, LYM posets, Peck posets, and the Ahlswede-Daykin inequality', *Rostock. Math. Kolloq.* 26 (1984), 63-68.
- [32] K. Engel, 'On the Average Rank of an Element in a Filter of the partition lattice', *J. Combin. Theory Ser. A* 64 (1994) ; 67-78.

- [33] K. Engel and N. N. Kuzjurin, 'An asymptotic formula for the maximum size of an h -family in products of partially ordered sets', *J. Combin. Theory, Ser. A* 37 (1984), 337-347.
- [34] K. Engel and N. N. Kuzjurin, 'About the ratio of the size of maximum antichain to the size of a maximum level in ...nite partially ordered sets', *Combinatorica* 5 (1985), 301-309.
- [35] M. Evgrafov & Coll, 'Recueil de problèmes sur la théorie des fonctions analytiques', Traduction française, Editions Mir. (1974).
- [36] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, 'Flows in Networks', Princeton Univ. Press, Princeton, N.J, (1962) :
- [37] Gian-Carlo Rota, 'The number of partitions', *American Math. Monthly* 71 (1964), 498-504.
- [38] C. Greene and D. J. Kleitman, 'Proof techniques in the theory of ...nite sets, in: G.-C. Rota, ed., *Studies in Combinatorics*', *MMA Studies in Math.* 17, Washington, D.C., (1978) ; pp. 22-79.
- [39] J. R. Griggs, 'The Sperner property, in: *Orders: Description et Roles (Proc. Lyon, 1982)*, *Annals of Discrete Math.* (1984), 371-387.
- [40] J. R. Griggs, Personal communication.
- [41] G. Hadley, 'Nonlinear and dynamic Programming', Addison-Wesley, Reading, MA, (1964).
- [42] L.H. Harper, 'The global theory of flows in networks', *Advances in appl. Math.* 1 (1980), 158-181.
- [43] L.H. Harper, 'The morphology of partially ordered sets', *J. Combin. Theory, Ser. A* 17 (1974), 44-58.
- [44] L.H. Harper, 'Stirling behavior is asymptotically normal', *Ann. Math. Stat.* 38 (1967), 410-414.
- [45] S. Khelifa & Y. Cherruault, 'Nouvelle identité pour les polynômes de Bell', *Maghreb Mathematical Review.* 9, N°1 & 2, June & December 2000. 115-123.
- [46] D. Kleitman, M. Edelberg, and D. Lubell, 'Maximal sized antichains in partial orders', *Studies in Appl. Math.* 52 (1973), 285-289.
- [47] G. Kreweras, 'Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au treillis des partitions des entiers', *Cahiers du BURO*, 6, ISUP, 1965, pp. 9-103.

- [48] H. P. Künzi, H. G. Tzschach and C. A. Zehnder, *Mathematische Optimierung*, Teubner, Stuttgart, (1966).
- [49] L. Lovász, *'Combinatorial Problems and Exercises'*, Akadémiai Kiadó, Budapest, (1979).
- [50] B. Mongardet, M. Barbut *'Ordre et classification : Algèbre et Combinatoire'*, Paris, Librairie Hachette 1970. 2 Vols. 176+173.
- [51] L. Moser and M. Wyman, *'An asymptotic formula for the Bell numbers'*, *Trans. Royal Soc. Canada III* 49 (1955); 49-54.
- [52] O. Ore, *'Teorija grafov'*, Nauka, Moscow, (1980).
- [53] G. W. Peck, *'On Catalan type antichains of partitions'*, to appear.
- [54] R.A. Proctor, M.E. Saks and D.G. Sturtevant, *Product partial orders with the Sperner Property*, *Discrete Math.* 30 (1980), 173-180.
- [55] G.-C. Rota, *'Research problem: A generalization of Sperner's Theorem'*, *J. Combin. Theory* 2 (1967), 104.
- [56] R. Sedgewick, *'Algorithms'* Addison-Wesley, Reading, MA, (1988).
- [57] E. Spencer, *Ein satz über untermengen einer endlichen Menge*. *Math.z.*27 (1928), 544-548.
- [58] R.P. Stanley, *'Enumerative Combinatorics'*, Volume1, Wadsworth & Books Monterey, (1986).
- [59] R.P. Stanley, *Weyl groups, the hard Lefschetz theorem, and the Sperner property*, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 1 (1980), 168-184.
- [60] C. Stendal, *Analyse eines Algorithmus zur Lösung eines speziellen quadratischen Optimierungsproblems*. Master's thesis, Universität Rostock, (1993).
- [61] R. Tarjan, *'Depth first and linear graph algorithms'*, *SIAM Journal Computing*, 2 (1972), 146-160.
- [62] E. M. Wright, *'Partition of multipartite Number into k parts'*, *J. Reine Angew. Math.*, 216, 1964, pp. 101-112.