



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
U.S.T.H.B.

Faculté de Génie Mécanique et de Génie des Procédés

MEMOIRE
Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : Génie des Procédés

Spécialité : Génie des Procédés industriels

Par : Messaoud BENNEMLA

THEME

**Etude du transfert thermique lors de l'écoulement laminaire
d'un fluide newtonien au sein d'une conduite annulaire**

Soutenu publiquement le 18/03/2009, devant le jury composé de :

Mr	M. BELKACEM	Professeur	Président
Mr	Y.K. BENKAHLA	Maître de Conférence	Directeur de thèse
Mr	Y. OULD AMER	Maître de Conférence	Examineur
Mme	M. AMOURA	Maître de Conférence	Examinatrice
Mr	M. MELLAL	Maître de Conférence	Invité

SOMMAIRE

Remerciements	i
Nomenclature	iii
Liste des figures	v
Liste des tableaux	viii

INTRODUCTION GENERALE	1
------------------------------	----------

CHAPITRE I : SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

Introduction	3
I.1. Revue bibliographique	3
I.2. Généralités	5
I.2.1 Couche limite thermique	5
I.2.2 Température moyenne	6
I.3. Procédure de calcul du nombre de Nusselt	6
I.3.1. Température pariétale constante	7
I.3.2. Flux pariétal constant	7
I.4. Pertes de charge	8
I.5. Dépendance de la viscosité avec la température	8
I.6. Etude des effets isovisqueux sur le transfert de chaleur	9
I.7. Effet de la convection naturelle sur la convection forcée	10
I.7.1. Cas d'une conduite	10
I.7.2. Cas d'une plaque plane verticale	11
I.7.2.1 Convection mixte favorable	12
I.7.2.2 Convection mixte défavorable (en cours de construction)	12
a) Convection forcée dominante	12
b) Convection naturelle dominante	13
I.8. Corrélations pour le nombre de Nusselt	13

CHAPITRE II : MODELISATION MATHEMATIQUE

Introduction	15
II.1. Problème physique	15
II.2. Hypothèses simplificatrices	16
II.3. Mise en équations du problème	17
II.3.1. Equation de conservation de la masse	17
II.3.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement	17
II.3.3. Equation de conservation de l'énergie	19
II.4. Conditions aux limites	19

II.5. Equations générales adimensionnelles de conservation	20
II.5.1. Equation de conservation de la masse (équation de continuité)	21
II.5.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement	21
II.7.3. Equation de conservation de l'énergie	22
Conclusion	24

CHAPITRE III: MODELISATION NUMERIQUE

Introduction	25
III.1. Choix de la méthode de discrétisation	25
III.2. Discrétisation de l'équation générale de transport	25
III.3. Intégration de l'équation générale de transport	27
III.3.1. Sans le terme convectif (terme non-linéaire)	27
III.3.2. Avec le terme convectif	28
III.3.3. Formulation généralisée	29
III.3.4. Propriétés des coefficients A et B	30
III.4. Schémas d'interpolation	32
III.5. Equation discrétisée pour le cas général	34
III.6. Discrétisation du champ dynamique	36
III.6.1. Equation de quantité de mouvement	36
III.6.2. Equation de pression	37
a) Utilisation d'une équation implicite pour la pression	38
b) Utilisation de la compressibilité artificielle	38
c) Méthodes de correction de la pression	38
III.7. Critère de convergence et facteurs de relaxation	43
III.8. Maillage utilisé	44
III.9. Solution des équations discrétisées	45
III.9.1. Méthode ligne par ligne	46
III.9.2. Présentation de la méthode	46
Conclusion	46

CHAPITRE IV: RESULTATS ET DISCUSSION

Introduction	48
IV.1. Sensibilité au maillage	48
IV.2. Validation du code de calcul	49
IV.3. Simulation des écoulements en mode de convection forcée	50
IV.3.1. Influence de la dissipation visqueuse	50
IV.3.2. Influence de la variabilité de la viscosité dynamique	52
IV.4. Simulation de l'écoulement en mode de convection mixte	53
IV.4.1. Effet du nombre de Rayleigh	54
a) Profil de vitesse	54
b) Coefficient de frottement	55
c) Nombre de Nusselt	56
IV.4.2. Effet de la dissipation visqueuse	57
a) Profil de vitesse	57

b) Coefficient de frottement	59
c) Nombre de Nusselt	60
IV.4.3. Effet de l'inclinaison de la conduite	62
a) Profil de vitesse	62
b) Coefficient de frottement	63
c) Nombre de Nusselt	65
IV.4.4. Effet du nombre de Reynolds	66
a) Coefficient de frottement	66
b) Nombre de Nusselt	68
IV.4.5. Effet de la variabilité de la viscosité en fonction de la température	69
a) Profil de vitesse	69
b) Coefficient de frottement	71
c) Nombre de Nusselt	73
Conclusion	75
CONCLUSION GENERALE	76
Références bibliographiques	79
Annexes	
Annexe 1	82
Annexe 2	91
Annexe 3	92
Annexe 4	94

Remerciements

*Cette thèse a été réalisée au sein du SNE (équipe de Simulation Numérique d'Écoulement), sous la direction de Monsieur **Y. K. BENKAHLA**, Maître de conférence à l'USTHB. Je tiens à lui témoigner ma plus profonde reconnaissance pour tout son soutien, sa disponibilité et ses connaissances qu'il a su me faire partager. De plus je tiens vivement à le remercier pour la confiance dont il a fait preuve tout au long de ce travail.*

*Mes vifs remerciements vont à Monsieur le Professeur **Mohamed. BELKACEM** qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour tout l'intérêt qu'il a porté à mon travail.*

*Je remercie vivement les membres du jury : Madame **Meriam AMOURA** Maître de conférence à l'USTHB et Monsieur **Ould Amer**, Maître de conférence à l'USTHB. Pour avoir accepté de faire partie du jury et d'avoir consacré de leurs temps à la lecture de ce mémoire.*

*Je tiens tout particulièrement à exprimer ma grande gratitude à Monsieur **Mounir MELLAL**, Maître de conférence à l'USTHB, pour son aide, ses conseils et également d'avoir bien voulu participer au jury de cette thèse.*

*Ma profonde reconnaissance et ma très grande gratitude vont aussi à M^{elle} **Nabila LABSI**, pour ses conseils permanents, sa disponibilité quotidienne, ses encouragements et sa gentillesse, qui m'ont permis de mener à bien ce travail.*

Je remercier aussi vivement mes parents qui ont toujours cru en moi et qui m'ont toujours soutenu ainsi que l'ensemble de ma famille.

Ma gratitude s'adresse également à tous mes amis et collègues du SNE pour leurs précieuses disponibilités et leur soutien moral dans les moments les plus difficiles dans la réalisation de ce mémoire.

Enfin je remercier toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail

À mon père, à ma chère mère

À mes frères et sœurs

À tous ceux qui me sont chers

Nomenclature

Lettres latines

A	: rapport de forme de la conduite annulaire
$A(p)$: coefficient de convection-diffusion
a	: coefficient dans l'équation discrétisée
b	: terme constant dans l'équation discrétisée
C_p	: chaleur spécifique du fluide
D_h	: diamètre hydraulique.
D_i	: conductance de diffusion
F_i	: débit d'écoulement
F_{surf}	: force de surface
F_{vol}	: force de volume
g	: accélération de la pesanteur
Gr	: nombre de Grashof
h	: coefficient de transfert thermique
h_m	: coefficient moyen de transfert thermique
h_z	: coefficient local de transfert thermique
J	: flux total (convection + diffusion)
k	: conductivité thermique du fluide
L	: longueur de la conduite
m	: masse du fluide
Nu_m	: nombre de Nusselt moyen
Nu_z	: nombre de Nusselt local
Nu_∞	: nombre de Nusselt asymptotique correspondant à un écoulement établi
p	: pression
P^*	: pression motrice adimensionnelle
Pr	: nombre de Prandtl
Q	: débit volumique de fluide
Φ	: flux de chaleur à la paroi interne.
r	: coordonnée radiale
R	: coordonnée radiale adimensionnelle
Ra	: nombre de Rayleigh
Re	: nombre de Reynolds
r_i	: rayon du cylindre intérieur
r_e	: rayon du cylindre extérieur
r_m	: rayon moyen
S	: surface d'échange ou terme source
Sc	: partie constante du terme source linéarisé
S_p	: coefficient de ϕ_p dans l'expression du terme source linéarisé
t	: temps
T	: température
T^*	: température adimensionnelle

T_{we}	: température de la paroi externe
T_0	: température du fluide à l'entrée de la conduite annulaire
ΔT	: écart de température ($T_w - T_0$)
\vec{V}	: vecteur vitesse
U_0	: vitesse du fluide à l'entrée de la conduite
V_m	: vitesse moyenne du fluide
V_z	: composante du vecteur vitesse suivant la direction axiale
V_r	: composante du vecteur vitesse suivant la direction radiale
V_θ	: composante du vecteur vitesse suivant la direction azimutale
$V_z^*, V_r^*; V_\theta^*$: composantes adimensionnelles de la vitesse
\dot{W}	: puissance des forces intérieures et extérieures
z	: coordonnée axiale
Z_t	: longueur adimensionnelle

Lettres grecques

α	: diffusivité thermique du fluide
α_P	: coefficient de relaxation
β	: coefficient de dilatation thermique
δ_{ij}	: tenseur de Kronecker
Γ	: coefficient de diffusion
ϕ	: variable dépendante
φ	: fonction de dissipation visqueuse
μ	: viscosité dynamique du fluide
μ_m	: viscosité dynamique moyenne du fluide
μ_w	: viscosité dynamique du fluide à la paroi
ν	: viscosité cinématique du fluide
ν_0	: viscosité cinématique du fluide à l'entrée de la conduite
Ω	: volume
ψ	: facteur de correction
ρ	: masse volumique du fluide
σ_{ij}	: tenseur des contraintes
θ	: coordonnée azimutale

Indices

m	: grandeur moyenne
nb	: nœuds voisins
ref	: référence
x	: valeur locale
w	: paroi
0	: grandeur à l'entrée de la conduite

Liste des figures

Figure I.1 : Développement de la couche limite thermique dans un tube	5
Figure I.2 : Distorsion d'un profil établi de vitesse sous l'effet des variations de la viscosité	9
Figure I.3 : Mise en évidence des différents régimes de convection en écoulement dans des tubes horizontaux, d'après [24]	10
Figure I.4 : Convection mixte dans une plaque plane verticale	11
Figure I.5 : Vision approximative de la couche limite en régime de convection mixte favorable sur la plaque plane verticale	12
Figure I.6 : Vision approximative de la couche limite en convection forcée dominante	13
Figure I.7 : Vision approximative de la couche limite en convection naturelle dominante	13
Figure II.1: Représentation du modèle physique	15
Figure III.1 : Volume de contrôle en coordonnées cylindriques	26
Figure III.2 : Représentation du flux à l'interface.	30
Figure III.3 : La fonction $A(P)$ pour chacun des schémas	32
Figure III.4 : Prédiction de ϕ_p par les différents schémas dans un intervalle du nombre de Peclet	33
Figure III.5 : Volume de contrôle pour la configuration tridimensionnelle	34
Figure III.6 : Représentation du maillage décalé	37
Figure III.8 : Représentation du maillage utilisé	45
Figure IV.1 : Effet du maillage sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Br = 0$	48
Figure IV.2 : Comparaison entre les valeurs du nombre de Nusselt obtenues par la présente étude et celles de Nazrul et al. [10]. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Br = 0$. (a) $Ra = 0$ (b) $Ra = 10^5$ (c) $Ra = 10^6$	50

- Figure IV.3 :** Effet de la dissipation visqueuse sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Ra = 0$ **51**
- Figure IV.4 :** Evolution axiale de la température moyenne du fluide en fonction du nombre de Brinkman. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Ra = 0$ **52**
- Figure IV.5 :** Effet de la thermodépendance de la viscosité dynamique sur le développement axial du nombre de Nusselt, pour différents nombres de Brinkman. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 7$; $Ra = 0$ **52**
- Figure IV.6 :** Effet de la thermodépendance de la viscosité dynamique sur la répartition du champ de température moyenne du fluide. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 7$; $Ra = 0$; $Br = 0,1$ **53**
- Figure IV.7 :** Influence du nombre de Rayleigh sur les profils de la vitesse axiale. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Br = 0$; $\alpha = 0$ **54**
- Figure IV.8 :** Influence du nombre de Rayleigh sur le coefficient de frottement le long de la conduite annulaire. $R_1 = 0,5$, $Pr = 0,7$, $Re = 200$, $\alpha = 0$, $Br = 0$ **55**
- Figure IV.9 :** Influence du nombre de Rayleigh sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt le long de la conduite annulaire. $R_1 = 0,5$, $Pr = 0,7$, $Re = 200$, $\alpha = 0$, $Br = 0$ **56**
- Figure IV.10 :** Influence de la prise en compte de la dissipation visqueuse sur les profils établis de vitesse axiale. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Ra = 10^6$. (a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$ **58**
- Figure IV.11 :** Influence de la prise en compte de la dissipation visqueuse sur le coefficient de frottement le long de la conduite annulaire. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Ra = 10^6$, $\alpha = 0$, (a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$. **60**
- Figure IV.12 :** Influence de la dissipation visqueuse sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt., $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $\alpha = 0$. (a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$ **61**
- Figure IV.13 :** Influence de l'inclinaison de la conduite annulaire sur les profils de la vitesse établie. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Br = 0$. (a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$ **63**
- Figure IV.14 :** Développement axial du coefficient de frottement de Fanning le long de la conduite annulaire. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Br = 0$, (a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$ **65**
- Figure IV.15 :** Effet de l'inclinaison de la conduite annulaire sur évolution axiale du nombre de Nusselt pour : $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Br = 0$ (a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$ **66**
- Figure IV.16 :** Influence du nombre de Reynolds sur le développement axial du coefficient de frottement de Fanning. $R_1 = 0,5$; $Pr = 0,7$; $Br = 0$; $\alpha = 0$, (a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$ **67**
- Figure IV.17 :** Influence du nombre de Reynolds sur l'évolution du nombre de Nusselt le long de la conduite annulaire. $R_1 = 0,5$; $Pr = 0,7$; $Br = 0$, $\alpha = 0$. (a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$ **69**

Figure IV.18 : Influence de l'écart de la température sur les profils de vitesse axiale établie. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 7$; $Br = 0$, $\alpha = 0$.
(a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$ **71**

Figure IV.19 : Effet de l'écart de température sur le développement axiale du coefficient de frottement de Fanning. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 7$; $\alpha = 0$.
(a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$ **73**

Figure IV.20 : Evolution du nombre de Nusselt le long de la conduite annulaire pour différents écarts de température. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 7$; $Br = 0$; $\alpha = 0$.
(a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$ **74**

Liste des tableaux

Tableau I.1 : Corrélations du nombre de Nusselt moyen pour un régime de convection mixte.	14
Tableau II.1 : Identification des équations de conservation par rapport à l'équation générale de transport.	23
Tableau III.1 : La fonction $A(p)$ pour chacun des schémas	33
Tableau IV.1 : Valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt obtenues pour différentes valeurs du nombre de Brinkman	51
Tableau IV.2 : Ecarts, par rapport à l'horizontale, du coefficient de frottement apparent pour différents degrés d'inclinaison de la conduite	64
Tableau IV.3 : Ecarts relatifs entre les valeurs du coefficient de frottement obtenues dans le cas d'une viscosité thermodépendante et le cas isovisqueux.	72

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Le pompage des liquides très visqueux a été toujours source de problème à l'industrie, à commencer par la dépense énergétique engendrée par les fortes pertes de charge apparaissant lors de l'écoulement de ces fluides dans les canalisations. On envisage alors, de lubrifier l'écoulement laminaire du liquide très visqueux en injectant dans la conduite, dans la zone annulaire pariétale, une mince couche de lubrifiant (liquide de faible viscosité) non miscible qui accompagnerait l'écoulement du fluide. Une injection pariétale est alors envisagée car c'est à la paroi que la contrainte de cisaillement τ est maximale en écoulement de Poiseuille, et qu'on espère la réduire grâce au lubrifiant.

La convection mixte est un phénomène de transfert thermique associée aux écoulements de fluides. Elle est, en général, à la fois forcée et naturelle. La convection forcée pure et la convection naturelle pure ne sont que des cas limites rencontrés lorsque l'un ou l'autre de ces types de transfert de chaleur peut être négligé. Le phénomène mixte est d'autant plus marqué si l'écoulement d'un fluide est entraîné à une vitesse relativement faible dans un tube (porté à une température différente de celle du fluide entrant). On associe à la vitesse de l'écoulement forcé, ou écoulement principal, une autre composante de vitesse, dite secondaire. Cette vitesse résulte des forces de poussée gravitationnelle combinées à une réduction de la masse volumique du fluide près de la surface chauffée. C'est qu'un apport de chaleur pariétal sur l'écoulement dans un tube par exemple induit un gradient de température entre le fluide adjacent à la surface pariétale et celui se trouvant au centre. Ce gradient de température provoque une variation de la densité qui provoque un mouvement des particules d'un fluide caloporteur. Ainsi chauffé, le fluide a tendance à s'élever près de la paroi et à descendre au niveau de la région centrale de la conduite. La présence de la convection naturelle influe alors simultanément sur les champs thermique et hydrodynamique, le problème devient ainsi couplé. Les mouvements secondaires résultant de la convection naturelle vont alors améliorer l'échange thermique par convection, ce qui aura pour conséquence une augmentation du nombre de Nusselt.

Le phénomène de convection mixte est rencontré dans diverses applications telles que celles concernant les échangeurs de chaleur destinés au chauffage ou au refroidissement des fluides visqueux, dans les procédés chimiques et les industries alimentaires, les échangeurs de chaleur compacts, pour les écoulements de gaz ainsi que ceux intervenant dans les applications biomédicales. Le transfert thermique en régime de convection mixte ne se limite pas au cas des échangeurs, car on le retrouve aussi dans le transport des huiles par pipelines, l'évacuation de la chaleur dans les réacteurs nucléaires et le refroidissement des composants électroniques qui représente un cas concret de combinaison des deux modes de convection forcée et libre. D'autres champs d'applications peuvent aussi être considérés, il s'agit entre autres des collecteurs solaires, sachant que dans ce type d'appareils, l'écoulement s'effectue généralement aux faibles nombres de

Reynolds ce qui permet d'induire des courants secondaires par convection naturelle dus aux variations de la masse volumique du fluide près des parois. Ces courants modifient, à leur tour, la distribution des champs de vitesse et de température et donnent ainsi à l'écoulement un caractère tridimensionnel qui complique davantage le traitement et la résolution des problèmes liés à de telles applications.

Le présent travail porte sur la caractérisation numérique de l'écoulement laminaire et du transfert thermique en mode de convection mixte, d'un fluide newtonien à viscosité dynamique thermodépendante, en tenant compte de la fonction de dissipation visqueuse. Cet écoulement ascendant, en développement simultané des couches limites, circule dans l'espace annulaire créé par l'emboîtement de deux cylindres coaxiaux de rayons r_i et r_e tels que $r_i < r_e$. Un flux de chaleur uniforme est imposé à la paroi interne tandis que règne une température constante et uniforme sur la paroi externe. Ce mémoire est structuré en quatre chapitres.

En prélude, nous présentons une revue des différents travaux concernant l'étude des écoulements et du transfert thermique en régime de convection mixte.

La description mathématique complète du problème fait l'objet du deuxième chapitre. Elle concerne la présentation des équations de conservation qui régissent ce type d'écoulement, à savoir les équations de continuité, de la quantité de mouvement et de l'énergie. L'introduction des variables réduites dans ces équations fait ressortir des groupements adimensionnels qui sont les nombres de Reynolds, de Rayleigh, de Prandtl et de Brinkman.

La modélisation numérique des équations ainsi que la méthode de résolution sont abordées au troisième chapitre. La méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre le système d'équations, exprimées en formulation 'vitesse-pression-température'. Le couplage des variables primitives est traité grâce à l'algorithme SIMPLER. Sur ces bases, un code de calcul a été développé en langage Fortran, avec une configuration tridimensionnelle permettant la résolution des équations de transport en coordonnées cylindriques (O, z, r, θ).

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous exposons les différents résultats issus de nos simulations hydrodynamiques et thermiques relatifs à l'écoulement laminaire en développement simultané. Nous considérons à cet effet, le transfert thermique en modes de convection forcée et de convection mixte, en tenant compte dans l'équation d'énergie de la fonction de dissipation visqueuse. Le caractère thermodépendant de la viscosité dynamique du fluide est également analysé.

En conclusion à ce mémoire, nous présenterons brièvement les principaux résultats obtenus afin de dégager les perspectives de développement de ce travail à moyen terme et les extensions à donner à cette recherche.

CHAPITRE I

SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE I

SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

Introduction

La convection est un mode de transfert de chaleur qui se produit uniquement entre un milieu fluide et une paroi solide; elle est un transport d'énergie dû à des mouvements macroscopiques et à un processus de diffusion thermique [1,2]. On distingue habituellement deux formes de convection : la convection forcée et la convection naturelle, la convection dite mixte étant un mode de transfert de chaleur pour lequel les deux formes de convection existent. La Différence entre la convection naturelle et la convection forcée est à la fois d'ordre thermodynamique et d'ordre mathématique. Au plan thermodynamique, le transfert d'énergie d'une région à l'autre du fluide est dû, en convection naturelle, à un écoulement créé par un phénomène dit de poussée d'Archimède qui prend naissance du fait de la présence simultanée de l'accélération gravitationnelle et d'inhomogénéités spatiales des températures dans le fluide. En convection forcée, l'écoulement est provoqué par une force due à une puissance mécanique externe.

Nombreuses sont les recherches théoriques et analytiques entreprises depuis le début de XX^{ème} siècle pour la résolution des équations gouvernantes en convection mixte. Ces dernières, restent très compliquées du fait de la non linéarité des termes d'inertie (bilan de la quantité de mouvement) surtout lorsqu'il faut tenir compte des effets de gravité et de l'inclinaison du tube. Effectivement, les équations de quantité de mouvement deviennent fortement couplées à l'équation de l'énergie par le biais de termes représentant les forces gravitationnelles. Par conséquent, la résolution de ces équations doit s'effectuer simultanément et contrairement à la convection forcée pure où elle se fait séparément.

I.1. Revue bibliographique

Depuis l'année 1910, de nombreux auteurs se sont intéressés aux problèmes de convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis, en raison de leur utilité pratique considérable (échangeurs de chaleur, réacteurs nucléaires ou chimiques, etc.).

Le problème de l'écoulement thermique non établi une fois le régime dynamique établi, fut le cas le plus étudié. Parmi les travaux relatifs à ce sujet, citons les travaux effectués par **Hatton et Quarmmby** [3], **Labdberg & al.** [4] et **Mojtabi et Caltagirone** [5].

Terhmina et Mojtabi [6] ont étudié l'écoulement en régimes dynamique et thermique non établis dans la région d'entrée d'un espace annulaire délimité radialement par deux cylindres coaxiaux et isothermes en mode de convection forcée. La résolution du

problème a été faite par la méthode des différences finies du fait que le problème dynamique est découplé du problème thermique et que les équations gouvernantes sont du type parabolique. Ils ont négligé les termes de dissipation visqueuse et de conduction axiale dans l'équation de l'énergie. Ainsi, ils ont obtenu les champs de vitesse et de température pour plusieurs combinaisons du rapport des rayons, des nombres de Reynolds et de Peclet et de la température du fluide à l'entrée. Ce qui leur a permis d'établir les corrélations suivantes :

$$L_D = (R_m - 1)^{1.85} Re^{0.8} r_i \quad (I-1)$$

pour la longueur d'établissement dynamique L_D , et :

$$\begin{aligned} L_T &= 0,70 * (R * \theta_0 - 1)^2 Pe * r_i && \text{pour } \theta_0 = 0,00 \\ L_T &= 1,12 * (R * \theta_0 - 1)^2 * Pe * r_i && \text{pour } \theta_0 = 0,25 \\ L_T &= 1,35 * (R * \theta_0 - 1)^2 * Pe * r_i && \text{pour } \theta_0 = 0,40 \end{aligned} \quad (I-2)$$

pour la longueur d'établissement thermique L_T . Ils ont pu aussi dégager les conclusions suivantes :

Dans le cas de grands nombres de Prandtl, la longueur d'établissement dynamique devient négligeable devant la longueur d'établissement thermique. Par conséquent, dans ce cas, le problème thermique peut être résolu en considérant que le régime dynamique est établi à partir de la section d'entrée.

L'établissement du régime dynamique s'accompagne d'une légère réduction de la longueur d'établissement thermique.

Le transfert de chaleur, local ou global, ne dépend que de l'abscisse axiale réduite $Z = z/L_T$ et de la température du fluide à l'entrée de l'espace annulaire.

Avci Mete et Aydm Orhan [7] ont étudié de manière analytique le transfert de chaleur par convection forcée dans des écoulements pleinement établis à l'intérieur des conduites annulaires concentriques. Ils ont considéré deux cas de conditions aux limites : un flux de chaleur uniforme à travers la paroi extérieure avec une paroi intérieure adiabatique (Cas A) ou bien un flux de chaleur uniforme à travers la paroi intérieure avec la paroi extérieure adiabatique (Cas B), ils ont trouvé que pour des valeurs positives du nombre de Brinkman (flux de chaleur positif) le nombre de Nusselt diminue avec l'augmentation de ce dernier à cause de la diminution de l'écart entre la température moyenne du fluide et celle de la paroi, alors que pour des valeurs négatives du nombre de Brinkman (flux de chaleur négatif), le nombre de Nusselt augmente.

Ciampi et al. [8] ont étudié expérimentalement le transfert de chaleur par convection mixte dans un espace annulaire concentrique et horizontal, pour des nombres de Reynolds dans le domaine $2200 < Re < 5000$ où les écoulements sont respectivement turbulents et laminaires dans les régions au-dessus et au-dessous du tube interne chauffé. Ils ont montré que l'écoulement est laminaire et hélicoïdal pour des nombres de Reynolds inférieurs à la valeur critique Re_1 . Pour $Re > Re_1$, il y a une rupture dans le mouvement hélicoïdal, avec transition à la turbulence au sommet et dans les régions latérales du

passage annulaire. Ainsi, le nombre de Nusselt local au sommet du tube intérieur est respectivement inférieur, égal et supérieur à celui à la base pour $Re < Re_1$, $Re = Re_1$ et $Re > Re_1$. Le nombre de Nusselt moyen est faiblement dépendant de la position longitudinale et peut être exprimé en fonction des nombres de Rayleigh et de Reynolds et du rapport des diamètres des tubes.

Rogers et Yao [9] ont étudié la stabilité hydrodynamique de la convection mixte dans un espace annulaire vertical. La limite de la stabilité linéaire est déterminée pour un écoulement ascendant avec un flux thermique uniforme sur la paroi interne et une isolation externe. Ils ont montré que l'écoulement pleinement établi est thermiquement instable dans plusieurs régions de la conduite annulaire.

Nazrul Islam et al. [10] ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection mixte laminaire dans la région d'entrée d'un espace annulaire concentrique. Deux types de conditions aux limites ont été adoptés pour les parois des cylindres intérieur et extérieur à savoir, flux de chaleur pariétal uniforme et température pariétale uniforme. Les équations générales ont été résolues numériquement par le biais de la méthode des volumes finis. Ils ont montré que près de l'entrée de la conduite annulaire jusqu'à une position donnée, les différentes courbes se confondent et ont la même allure que celle obtenue pour le cas d'un écoulement en convection forcée ce qui signifie que les effets de la convection naturelle (courants secondaires) dans cette région sont négligeables, Plus en aval les courbes tendent vers des valeurs asymptotiques différentes selon la valeur du nombre de Rayleigh, contrairement au cas de l'écoulement en convection mixte dans une conduite cylindrique maintenue à température pariétale uniforme où apparaît une troisième zone correspondant à la prédominance, encore une fois, de la convection forcée dans la zone d'établissement et par conséquent, une tendance vers la même valeur asymptotique.

I.2. Généralités

I.2.1. Couche limite thermique

On considère dans ce paragraphe l'échange de chaleur entre un fluide et une surface solide. Si le fluide entre dans le tube représenté par la Figure I.1 à une température uniforme $T(r,0)$ inférieure à la température pariétale, un transfert de chaleur se crée et une couche limite thermique commence à se développer. Plus encore, si les conditions thermiques à la paroi sont fixées en imposant soit une température uniforme (T_w est constante) ou un flux de chaleur uniforme (q_w est constant), les conditions d'un écoulement thermique établi seront éventuellement atteintes loin en aval.

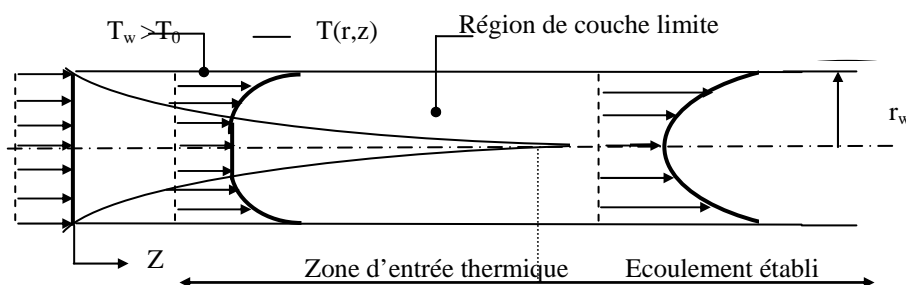


Figure I.1 : Développement de la couche limite thermique dans un tube.

I.2.2. Température moyenne

Le terme profil de température établi implique qu'il existe, sous certaines conditions, un profil de température généralisé qui est invariant avec la longueur de la conduite. On définit alors une température locale adimensionnelle T^* en prenant comme référence l'écart entre la température à la paroi $T_w(z)$ et la température moyenne du fluide dans la section droite z , notée $T_m(z)$:

$$T_m(z) = \frac{\int_s \rho V(r, z) T(r, z) dS}{\int_s \rho V(r, z) dS} \quad (\text{I-3})$$

Cette température est appelée aussi température de mélange, c'est la température qui caractérise l'énergie thermique moyenne du fluide.

Pour un écoulement incompressible, dans une conduite annulaire, l'expression (I-3) peut s'écrire comme :

$$T_m(z) = \frac{\int V_z T r dr d\theta}{\int V_z r dr d\theta} \quad (\text{I-4})$$

I.3. Procédure de calcul du nombre de Nusselt

Le coefficient de transfert thermique noté h_m désigne la moyenne du coefficient de transfert thermique local h_z le long de la zone d'échange, soit :

$$h_m = \frac{1}{L} \int_0^L h_z dz \quad (\text{I-5})$$

avec:

$$q = h(z) [T_w(z) - T_m(z)] \quad (\text{I-6})$$

$$q_w(z) = -k \left. \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} \right|_{r=r_w} \quad (\text{I-7})$$

h_z : coefficient de transfert de chaleur

q_w : flux de chaleur a la paroi

Alors, le nombre adimensionnel correspondant à h_m est défini par le nombre de Nusselt moyen noté Nu_m et s'écrit :

$$Nu_m = \frac{h_m D_h}{k} \quad (\text{I-8})$$

D_h : diamètre hydraulique

L : représente la longueur de la zone d'échange,

z : représente la coordonnée axiale (ou la génératrice) de la conduite.

I.3.1 Température pariétale constante

Dans le cas général, le champ spatial de température dépend des trois coordonnées (z, r, θ). L'équation (I-7) devient alors :

$$q_w(z, \theta) = -k \left. \frac{\partial T(z, r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=r_w} \quad (\text{I-9})$$

d'autre part, l'équation (I-6) s'écrit :

$$q_w(z, \theta) = h(z, \theta) [T_w(z) - T_m(z)] \quad (\text{I-10})$$

En égalisant les expressions (I-9) et (I-10), on obtient :

$$h(z, \theta) = -\frac{k}{T_w(z) - T_m(z)} \left. \frac{\partial T(z, r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=r_w} \quad (\text{I-11})$$

Le nombre de Nusselt correspondant est le Nusselt local :

$$Nu(z, \theta) = \frac{h(z, \theta) D_h}{k} = -\frac{D_h}{T_w(z) - T_m(z)} \left. \frac{\partial T(z, r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=r_w} \quad (\text{I-12})$$

I.3.2 Flux pariétal constant

Dans ce cas, le nombre de Nusselt local est donné par :

$$Nu(z, \theta) = \frac{1}{T_w^*(z) - T_m^*(z)} \quad (\text{I-13})$$

avec :

$$\Phi = \frac{T - T_0}{\left[\frac{q D_h}{k} \right]} \quad (\text{I-14})$$

d'où :

$$Nu(z) = Nu_z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{T_w^*(z) - T_m^*(z)} d\theta \quad (\text{I-15})$$

I.4 Pertes de charge

Pour déterminer la chute de pression totale que subi le fluide en évoluant dans la conduite, il est très utile de travailler avec le facteur de frottement de Fanning défini par :

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho V_m^2} \quad \text{(I-16)}$$

où :

$$\tau_w = \mu \left. \frac{dV_z}{dr} \right|_{r=r_w} \quad \text{(I-17)}$$

paramètre à ne pas confondre avec le coefficient de frottement de Moody (ou de Darcy) qui est défini par :

$$\Lambda = \frac{4 \tau_w}{\frac{1}{2} \rho V_m^2} = 4 f \quad \text{(I-18)}$$

$$f(z, \theta) = - \left. \frac{2}{\text{Re}} \frac{dV_z^*}{dR} \right|_{R_w} \quad \text{(I-19)}$$

le facteur de frottement moyen sur une circonférence est :

$$\text{Re } f(z) = \text{Re } f_z = - \left. \frac{1}{\pi} \int_0^{2z} \frac{dU}{dR} \right|_{R_w} d\theta \quad \text{(I-20)}$$

et le facteur de frottement moyen sur une longueur est :

$$\text{Re } f_m = - \frac{1}{\pi (L/D_h)} \left. \int_0^{L/D_h} \int_0^{2z} \frac{dU}{dR} \right|_{R_w} d\theta dz \quad \text{(I-21)}$$

I.5 Dépendance de la viscosité avec la température

La loi de variation de la viscosité dynamique en fonction de la température $\mu(T)$ peut être exprimée de différentes façons, elle dépend du fluide et de l'intervalle de température ainsi que de son étendue (les larges gammes de température sont les plus difficiles à représenter d'une manière précise).

Plusieurs modèles sont utilisés dans la littérature pour prendre en compte la loi $\mu(T)$:

❖ Le modèle d'Arrhenius (exponentiel) est le plus simple, il donne une bonne représentation pour la plupart des fluides [12,13, 14,15]. Il est exprimé par :

$$\mu = \mu_{\text{ref}} \exp[-c (T - T_{\text{ref}})] \quad \text{(I-22)}$$

❖ Le modèle de la loi de puissance [16,17] :

$$\mu = \mu_{\text{ref}} \left(T/T_{\text{ref}} \right)^{-c} \quad (\text{I-23})$$

❖ Le modèle de la loi polynomiale [18,19] :

$$\mu = \mu_{\text{ref}} \left[1 + c \left(T - T_{\text{ref}} \right) \right]^{-1} \quad (\text{I-24})$$

❖ Le modèle d'Andrade (exponentielle modifiée) [20,21], ce modèle donne une bonne estimation sur une large gamme de température :

$$\mu = \mu_{\text{ref}} \exp\left(c \left[1/T - 1/T_{\text{ref}} \right] \right) \quad (\text{I-25})$$

❖ Le modèle logarithmique-polynomial [22, 23], ce modèle semble donner la meilleure représentation de la loi $\mu(T)$ à cause de sa forme. En effet, l'équation décrivant ce modèle possède plus de constantes d'ajustement :

$$\ln(\mu - a) = \left(T/T_{\text{ref}} \right)^n \ln(\mu_{\text{ref}} - a) \quad (\text{I-26})$$

I.6. Etude des effets isovisqueux sur le transfert de chaleur

On définit un écoulement non-isovisqueux comme un écoulement dans lequel la viscosité du fluide varie. En considérant le cas de fluides visqueux dont les viscosités sont très sensibles aux variations de température, l'échange de chaleur au niveau de la paroi induira des variations radiales de viscosité en conduite. Ainsi, pour les liquides, la viscosité dynamique μ diminue quand la température augmente. Un tel fluide réchauffé à partir d'une paroi, aura une viscosité μ_w au voisinage immédiat de la paroi plus faible que la viscosité μ_m du fluide à la température moyenne ; il en résultera une augmentation de la vitesse axiale du fluide proche de la paroi à cause de la lubrification pariétale et donc une augmentation du cisaillement pariétal, accompagnée d'un aplatissement du profil de vitesse de l'écoulement (Figure I.2).

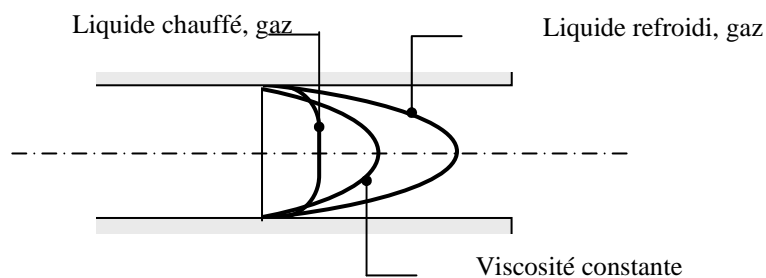


Figure I.2 : Distorsion d'un profil établi de vitesse sous l'effet des variations de la viscosité.

Il en résultera également une augmentation du coefficient de transfert thermique. A l'inverse, un liquide refroidi à partir d'une paroi aura une viscosité à la paroi plus forte que celle du fluide à sa température moyenne, et donc le cisaillement pariétal sera plus faible.

Ceci entraîne une diminution du coefficient de transfert thermique. Si le fluide en écoulement est un gaz c'est le contraire qui se produit car la viscosité des gaz augmente avec l'augmentation de la température.

I.7. Effet de la convection naturelle sur la convection forcée

I.7.1 Cas d'une conduite

L'effet de la gravité sur le transfert thermique dans les écoulements forcés est fortement influencé par la direction des forces de volume. Ainsi, on distingue trois cas spécifiques largement étudiés : lorsque les forces de volume et l'écoulement forcé ont la même direction (*assisting flow*), des directions opposées (*opposing flow*) et des directions croisées ou perpendiculaires (*transverse flow*).

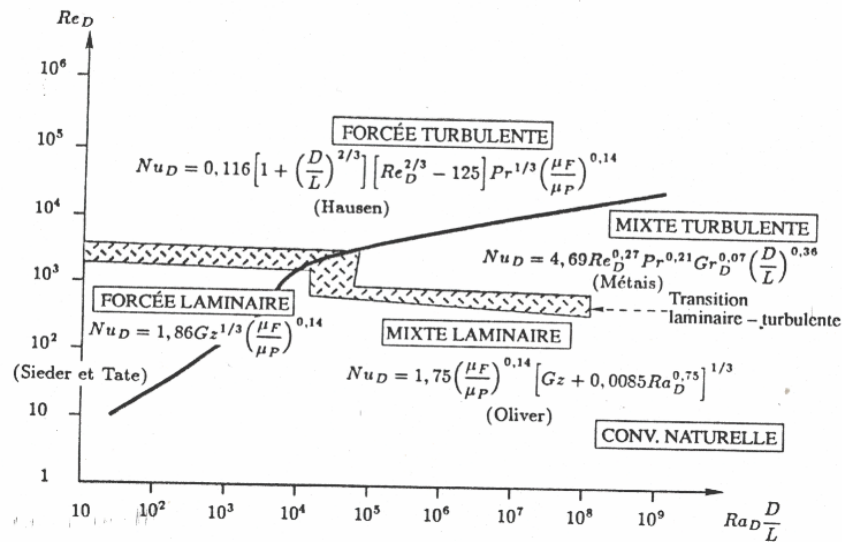


Figure I.3 : Mise en évidence des différents régimes de convection en écoulement dans des tubes horizontaux, d'après [24].

Une étude des effets de la convection naturelle sur la convection forcée a été menée par **Métais** et **Eckert** [24]. La Figure I.3 présente les régimes de convection pour un tube horizontal.

Les corrélations présentées sur la figure précédente sont données pour un tube isotherme et toutes les propriétés du fluide sont évaluées à la température du film.

Les limites des trois domaines, c'est-à-dire celles de la convection forcée (CF), de la convection naturelle (CN) et de la convection mixte (CM), sont fixées par le nombre de Richardson qui tend vers zéro dans le cas de la CF et vers l'infinie pour la CN. Il est exprimé par :

$$Ri = \frac{g \beta D \Delta T}{V_m^2} = \frac{Gr}{Re^2} \quad (I-27)$$

Un régime de convection mixte correspondrait alors à $Ri \approx 1$.

I.7.2 Cas d'une plaque plane verticale

Considérons une paroi verticale (Figure I.4).

Deux cas distincts sont maintenant à considérer suivant que les forces de poussée d'Archimède sont dans le même sens ou dans le sens opposé à l'écoulement forcé.

Dans le cas où les deux sont dans le même sens, le gradient de pression motrice dû à la convection naturelle et qui peut s'exprimer par la relation : $\frac{\partial P_m}{\partial z} = g\beta\Delta T$, s'ajoute au gradient de pression qui génère l'écoulement forcé. On se trouve alors en convection mixte favorable. Dans le cas contraire, les poussées d'Archimède s'opposent au gradient de pression motrice de l'écoulement forcé. On est alors en convection mixte défavorable. Dans ce dernier cas, il en résulte souvent des décollements ou des recirculations.

Suivant que la paroi est chauffée ou refroidie, et suivant la direction de l'écoulement forcé : vertical, ascendant ou descendant, il existe quatre situations possibles qui sont présentés à l'aide des schémas suivants

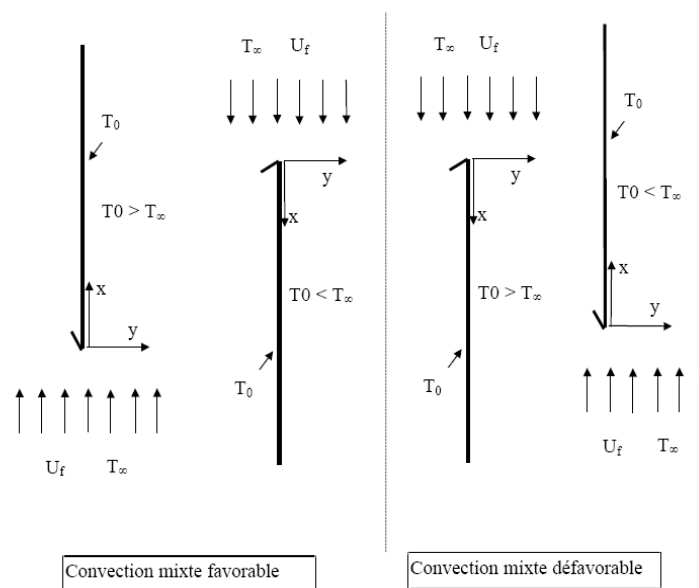


Figure I.4 : Convection mixte dans une plaque plane verticale.

Dans le cas de la paroi refroidie en présence d'un écoulement descendant, si l'on examine le terme de poussée d'Archimède, il s'avère que la composante verticale de l'accélération de la pesanteur est positive, par contre le terme $(T - T_\infty)$ est négatif, ce qui donnera un terme finalement positif, donc une source de quantité de mouvement. De même, le cas de l'écoulement descendant, avec une paroi chauffée, engendrera un terme de

la forme $(-\rho\beta(T-T_\infty))$ qui lui sera bien négatif et correspondra donc à une perte de quantité de mouvement qui s'oppose au terme moteur dû à la convection forcée (qui se traduit par une condition à la limite de vitesse U_f imposée).

I.7.2.1 Convection mixte favorable

En régime de convection mixte favorable sur la plaque plane verticale, par suite du comportement du frottement dans les deux cas extrêmes, on trouvera donc un comportement dominé par la convection forcée au voisinage du bord d'attaque (le frottement de convection forcée domine) puis, au fur et à mesure que l'on se déplace à Z croissant, on se rapprochera d'un comportement de plus en plus dominé par la convection naturelle. D'un classement en régime de convection mixte global, on démontre ainsi que, localement l'écoulement peut être dominé soit par la convection naturelle, soit par la convection forcée. Il en résulte la vision approximative de la couche limite de convection mixte, représentée sur la Figure I.5.

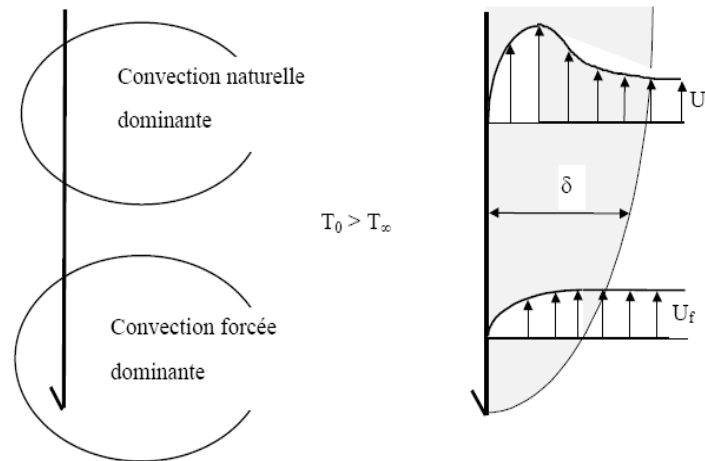


Figure I.5 : Vision approximative de la couche limite en régime de convection mixte favorable sur la plaque plane verticale

I.7.2.2. Convection mixte défavorable (en cours de construction)

a) Convection forcée dominante :

Ce cas n'est possible que si la plaque est de longueur finie. Dans le cas contraire, la convection naturelle finie toujours par être dominante.

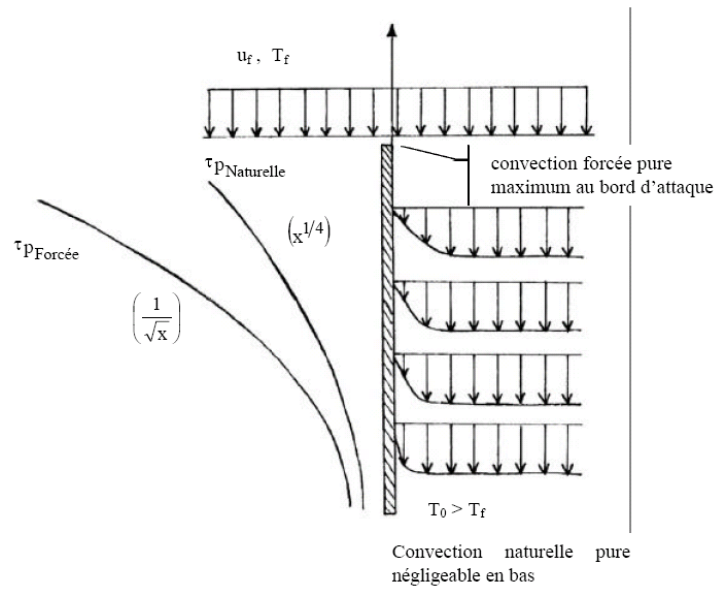


Figure I.6 : Vision approximative de la couche limite en convection forcée dominante.

b) Convection naturelle dominante :

Dans ce cas, la convection naturelle est fortement dominante.

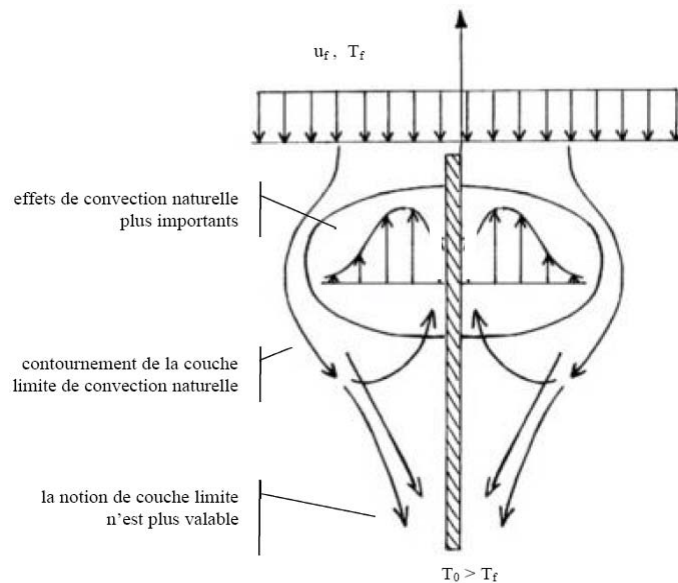


Figure I.7 : Vision approximative de la couche limite en convection naturelle dominante.

I.8. Corrélations pour le nombre de Nusselt

Dans la pratique, on utilise souvent une corrélation de la forme :

$$Nu^n = Nu_{CF}^n \pm Nu_{CN}^n \quad (I-28)$$

où n peut prendre les valeurs 3, (7/2) ou 4.

L'expression (I-28) représente une première approximation et le traitement d'un problème de convection mixte doit être accompagné par un examen soigné des corrélations disponibles dans la littérature. Dans le Tableau I.1, on présente quelques corrélations donnant le nombre de Nusselt moyen, où les effets de variation de la viscosité sont pris en compte par l'utilisation d'une correction du type **Seider** et **Tate** [25].

Tableau I.1 : Corrélations du nombre de Nusselt moyen pour un régime de convection mixte.

Références	Corrélations	Commentaires
Colburn [26]	$Nu_m = 1,75 \left(\frac{\mu_m}{\mu_w} \right)^{0,14} Gz_m^{1/3} \left(1 + c Gr_m^{1/3} \right)$	Air, eau, huiles $24 < L/D < 400$ $0,76 < Pr < 160$ $c = 0,015$
Depew et August [27]	$Nu_m = 1,75 \left(\frac{\mu_m}{\mu_w} \right)^{0,14} \left[Gz + C \left(Gz Gr^{1/3} Pr^{0,36} \right)^{0,88} \right]^{1/3}$ $C = 0,12$	Glycérole, eau, alcool Eau : $L/D = 28,4$ $510 < Gr < 10^6$ $25 < Gz < 712$ $5,7 < Pr < 391$
Yousef et Tarasuk [28]	$Nu_m = 1,75 \left(\frac{\mu_m}{\mu_w} \right)^{0,14} \left[Gz + C \left(Gz^{1,5} Gr^{1/3} \right)^{0,882} \right]^{1/3}$ $C = 0,245$	couche limite, air $6 < L/D < 46$ $20 < Gz < 110$
Palen et Taborek [29]	$Nu_m = 2,5 + 4,55 \left(Re^* D/L \right)^{0,37} Pr^{0,17} \left(\frac{\mu_m}{\mu_w} \right)^{0,14}$ où $Re^* = Re + 0,8 Gr^{0,5} \exp(-42/Gr^2)$	$0 < L/D < \infty$ $0 < Gr < 10^7$ $0,1 < Re < 2000$ $10^{-3} < \mu_m/\mu_w < 55$ $20 < Pr < 10^4$

CHAPITRE I

SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE II

MODELISATION MATHÉMATIQUE

Introduction

Dans ce chapitre sera présenté, le problème physique de la convection mixte dans une conduite annulaire concentrique inclinée suivi des différents modèles mathématiques généralement utilisés pour l'étude du phénomène (équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie). Des hypothèses simplificatrices adaptées à notre configuration seront ensuite définies. Enfin, les différents traitements de ces équations et des conditions aux limites associées seront passés en revue pour arriver à la forme adimensionnelles caractérisant ces écoulements.

II.1. Problème physique

Puisque l'étude concerne une enceinte inclinée, tridimensionnelle et annulaire, le système de coordonnées cylindriques est le plus approprié pour exprimer les équations descriptives du phénomène de convection. Cette conduite annulaire est de longueur L , de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e , dans laquelle s'écoule un fluide newtonien, incompressible, Figure II.1. Ce fluide est caractérisé par la variation de ses propriétés rhéologiques avec la température. La paroi extérieure de la conduite est supposée isotherme, c'est-à-dire que la température pariétale est constante, alors que la paroi intérieure est soumise à un flux de chaleur constant Φ .

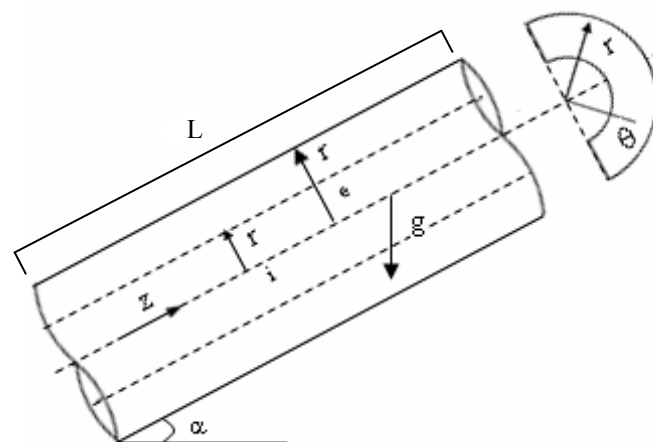


Figure II.1 : Représentation du modèle physique

II.2. Hypothèses simplificatrices

Un ensemble d'hypothèses est retenu dans cette étude afin de simplifier la modélisation du problème. Ces hypothèses sont issues des propriétés physiques de l'écoulement d'un liquide dans une conduite annulaire concentrique inclinée avec transfert de chaleur en mode de convection mixte :

1. L'écoulement est permanent en régime laminaire.
2. Le fluide étudié, l'eau en l'occurrence, est newtonien et incompressible.
3. L'hypothèse de Boussinesq est adoptée pour l'étude de la convection mixte (les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes, excepté la densité qui est variable dans le terme de gravité). Cette hypothèse est très utilisée dans les études de la convection mixte. Celle-ci reste plausible tant que les écarts de température (température maximale et celle de référence) ne sont pas très élevés pour que l'on puisse se limiter au premier terme du développement en série de ρ , on obtient l'expression linéaire suivante :

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta \Delta T) \quad (\text{II-1})$$

Avec :

ρ_0 : Masse volumique déterminée à une température de référence T_0

β : Coefficient de dilatation thermique donné par :

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (\text{II-2})$$

4. La pression est considérée comme étant la somme de deux composantes dont la première P' représente la pression moyenne dans une section de la conduite et dépend uniquement de la position axiale ; la deuxième P^* représente une perturbation dans le plan (r, θ) :

$$P = P^*(r, \theta) + P'(z) \quad (\text{II-3})$$

Cette hypothèse a été proposée et justifiée par **Patankar** et **Spalding** [32].

5. Les champs de vitesse et de température sont supposés indépendants du temps ; en d'autres termes, l'écoulement est supposé stationnaire : $(\partial/\partial t \equiv 0)$,
6. Le mode de transfert thermique par rayonnement est négligé.

Il s'agit à présent d'écrire les équations régissant le phénomène de convection mixte, en tenant compte des hypothèses précédentes.

II.3. Mise en équations du problème

Pour définir un système matériel au sein d'un fluide en écoulement, on choisit d'abord, un volume de référence qui est un volume géométrique connexe, fixe par rapport au repère galiléen dans lequel l'écoulement est décrit. Le système matériel, auquel on applique les théorèmes de conservation, est défini par le fluide contenu dans le volume de référence à l'instant considéré.

Dans ce qui suit, nous nous contenterons de donner les expressions des équations pour lesquelles la notation indicielle est adoptée pour les entités vectorielles et tensorielles. Nous avons, en effet, fait un usage systématique de la convention de sommation d'Einstein relative à la répétition de l'indice muet. Les équations de conservation s'écriront alors comme suit (Annexe 1) :

II.3.1. Equation de conservation de la masse

La masse est une invariante en mécanique classique, et plus généralement dans toute la physique non relativiste. La matière peut se mouvoir, se transformer même, sous l'effet de phénomènes physiques ou chimiques ; la masse totale de la matière mise en œuvre ne s'en trouvera pas modifiée pour autant. C'est un principe fondamental de la physique. On arrive alors à l'équation de Continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j) = 0 \quad (\text{II-4})$$

En tenant compte des hypothèses précédentes, cette équation s'écrit en coordonnées cylindriques comme :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-5})$$

II.3.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement

Pour un système matériel, le théorème de la quantité de mouvement se déduit des deuxième et troisième principes de Newton. Il s'énonce ainsi : le taux de variation dans le temps de la quantité de mouvement totale d'un système est égal à la résultante des forces extérieures s'exerçant sur le système. L'équation suivante rappelle ce théorème :

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II-6})$$

Le second membre regroupe les forces s'exerçant sur une particule de fluide : pesanteur, pression (statique) et forces de frottement visqueux. Cette équation se porte sur des forces par unité de volume. Les forces de surface apparaissent sous la forme de leurs dérivées spatiales : le gradient de pression statique et la divergence des tenseurs des contraintes.

ρg_i : représente la force de volume qui se réduit à la force due au champ de pesanteur. Elle a pour composantes :

$$\begin{cases} \rho g_r = +\rho g \cos\theta \cos\alpha \\ \rho g_\theta = -\rho g \sin\theta \cos\alpha \\ \rho g_z = -\rho g \sin\alpha \end{cases} \quad (\text{II-7})$$

Introduisons la pression motrice P^* proposée par **Choudhury et Patankar [30]**, telle que :

$$P^* = P + \rho_0 g r \cos\theta \cos\alpha \quad (\text{II-8})$$

En considérant la variation de la viscosité avec la température, les projections de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent comme :

• **Suivant r :**

$$\begin{aligned} \rho_0 \left[V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \right] &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) - \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{V_r}{r} \left(\frac{\partial \mu}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{\mu}{r} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \\ & r \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) - \rho_0 g \beta \Delta T \cos\theta \cos\alpha \end{aligned} \quad (\text{II-9})$$

• **Suivant θ :**

$$\begin{aligned} \rho_0 \left[V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} - \frac{V_r V_\theta}{r} \right] &= -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) + \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) - \frac{\mu}{r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial V_z}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + 2V_r \right) \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \mu}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_\theta \right) + \rho_0 g \beta \Delta T \sin\theta \cos\alpha \end{aligned} \quad (\text{II-10})$$

• **Suivant z :**

$$\begin{aligned} \rho_0 \left[V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] &= -\left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \mu}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \rho_0 g \beta \Delta T \sin\alpha \end{aligned} \quad (\text{II-11})$$

II.3.3. Equation de conservation de l'énergie

Cette équation exprime la conservation de l'énergie totale du système ; elle s'écrit comme :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (\text{II-12})$$

Posons :

$$\begin{aligned} \varphi = \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = 2\mu & \left[\left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ + \mu & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) \right]^2 + \mu \left[\frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \right]^2 + \mu \left[\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

Avec :

φ : Désigne la fonction de dissipation visqueuse qui représente la dégradation des forces intérieures en chaleur.

L'équation (II-13) s'écrit en coordonnées cylindriques, comme :

$$\begin{aligned} \rho c_p \left[V_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] = k & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \\ \mu & \left[\frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \right]^2 + \mu \left[\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right]^2 + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) \right]^2 + \\ & 2\mu \left[\left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{II-14})$$

II.4. Conditions aux limites

- *A l'entrée de la conduite annulaire* : $Z = 0$; $r_i \leq r \leq r_e$; $0 \leq \theta \leq \pi$

Le fluide entre dans la conduite avec une vitesse axiale uniforme. Par conséquent :

$$V_z = U_0 \quad ; \quad V_r = V_\theta = 0$$

On considère également un profil uniforme de température à l'entrée, on aura :

$$T = T_0$$

Dans le cas du développement dynamique, on considère que le profil de vitesse à l'entrée de la conduite est parabolique (écoulement de Poiseuille). La vitesse axiale sera donnée par l'expression suivante :

$$V_z = 2 V_m \left(1 - \frac{r^2}{r_w^2} \right) \quad (\text{II-15})$$

- **A la paroi intérieure :** $r = r_i$; $0 \leq z \leq L$; $0 \leq \theta \leq \pi$
 $V_z = V_r = V_\theta = 0$

On suppose que cette paroi est exposée à un flux pariétal uniforme :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_i} = \frac{\Phi}{k}$$

- **A la paroi extérieure :** $r = r_e$; $0 \leq z \leq L$; $0 \leq \theta \leq \pi$

La conduite externe est portée à une température pariétale constante et uniforme :

$$T = T_{w_e}$$

II.5. Equations générales adimensionnelles de conservation

L'adimensionnalisation ou la normalisation consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimensions, c'est-à-dire qu'elles seront normalisées par rapport à certaines dimensions caractéristiques. Cela permet de spécifier les conditions d'écoulement avec un nombre restreint de paramètres et facilite beaucoup les comparaisons entre les résultats numériques, analytiques et expérimentaux.

Introduisons les variables réduites suivantes :

$$R = \frac{r}{r_e} ; \quad Z = \frac{z}{L_r} ; \quad V_z^* = \frac{V_z}{U_0} ; \quad V_r^* = \frac{V_r L_r}{U_0 r_e} ; \quad V_\theta^* = \frac{V_\theta L_r}{U_0 r_e} ; \quad P_m^* = \frac{p_m r_e}{\mu_0 U_0} ; \quad P' = \frac{p' L_r}{\mu_0 U_0}$$

$$L_r = r_e (1 - R_1)^2 ; \quad R_1 = \frac{r_i}{r_e} ; \quad \Delta T = \frac{r_e \Phi}{k}$$

On peut décomposer la pression comme suit :

$$P(x ; r ; \theta) = P_m(x) + P'(r ; \theta) \quad (\text{II-16})$$

Pour la température adimensionnelle, on adoptera les deux expressions :

Température pariétale constante : $T^* = \frac{T - T_e}{T_0 - T_e}$

Flux pariétal constant: $T^* = \frac{(T_e - T)k}{\Phi U_0}$

Où :

- U_0 : Vitesse moyenne ou vitesse débitante ;
- T_0 : Température du fluide à l'entrée de la conduite ;
- T_e : Température de la paroi extérieure;
- Φ : Flux de chaleur à la paroi.

Les équations précédentes s'écrivent alors en fonction des variables réduites prédéfinies comme :

II.5.1. Equation de conservation de la masse (équation de continuité)

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R V_r^*) + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z^*}{\partial Z} = 0 \quad (\text{II-17})$$

II.5.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement

- **Suivant r :**

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial (R V_r^* V_r^*)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial (V_\theta^* V_r^*)}{\partial \theta} + \frac{\partial (V_z^* V_r^*)}{\partial Z} = & - \left(\frac{1}{\text{Re}} (1 - R_1)^4 \right) \frac{\partial P^*}{\partial R} \quad (\text{II-18}) \\ & + \frac{1}{\text{Re}} (1 - R_1)^2 \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{v}{v_0} \right) R \frac{\partial V_r^*}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{(1 - R_1)^4} \right) \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{v}{v_0} \right) \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial Z} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\text{Re}} (1 - R_1)^2 \left[\frac{V_r^*}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{v}{v_0} \right) - \left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{V_r^*}{R^2} - \frac{2}{R^2} \left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{(1 - R_1)^4} \right) \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{v}{v_0} \right) \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial Z} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{V_\theta^*}{R} \right) + R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{V_r^*}{R} \right) \right] + \left(\frac{V_\theta^* V_\theta^*}{R} \right) - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T^* (1 - R_1)^4 \text{Cos}\theta \text{Cos}\alpha \end{aligned}$$

- **Suivant θ :**

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial (R V_r^* V_\theta^*)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial (V_\theta^* V_\theta^*)}{\partial \theta} + \frac{\partial (V_z^* V_\theta^*)}{\partial Z} = & - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\text{Re}} (1 - R_1)^4 \right) \frac{\partial P_m^*}{\partial \theta} + \left(\frac{V_r^* V_\theta^*}{R} \right) + \quad (\text{II-19}) \\ & \frac{1}{\text{Re}} (1 - R_1)^2 \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{v}{v_0} \right) R \left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{(1 - R_1)^4} \right) \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{v}{v_0} \right) \left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial Z} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\text{Re}} (1 - R_1)^2 \left[\frac{2}{R^2} \left(\frac{v}{v_0} \right) \left(\frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{v}{v_0} \right) \left(\frac{V_\theta^*}{R^2} \right) + \left(\frac{1}{(1 - R_1)^4} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{v}{v_0} \right) \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{v_0} \right) \left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + 2V_r^* \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} - V_\theta^* \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T^* (1 - R_1)^4 \text{Sin}\theta \text{Cos}\alpha \end{aligned}$$

• **Suivant Z :**

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R} \frac{\partial(RV_r^*V_z^*)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial(V_\theta^*V_z^*)}{\partial R} + \frac{\partial(V_z^*V_z^*)}{\partial Z} = - \left(\frac{1}{\text{Re}(1-R_1)^2} \right) \frac{\partial P'}{\partial Z} \quad (\text{II-20}) \\
& + \frac{1}{\text{Re}}(1-R_1)^2 \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\left(\frac{v}{v_0} \right) R \frac{\partial V_z^*}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{(1-R_1)^4} \right) \frac{\partial}{\partial Z} \left(\left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{\partial V_z^*}{\partial Z} \right) \right] \\
& + \left(\frac{1}{\text{Re}(1-R_1)^2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(\left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{\partial V_r^*}{\partial Z} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{\partial V_\theta^*}{\partial Z} + \left(\frac{1}{(1-R_1)^4} \right) \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{\partial V_z^*}{\partial Z} \right] \\
& + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T^* (1-R_1)^2 \text{Sin}\alpha
\end{aligned}$$

II.7.3. Equation de conservation de l'énergie

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R} \frac{\partial(RV_r^*T^*)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial(V_\theta^*T^*)}{\partial \theta} + \frac{\partial(V_z^*T^*)}{\partial Z} + \frac{1}{\text{Pe}}(1-R_1)^2 \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial T^*}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} \right) \right. \\
& + \left. \frac{1}{(1-R_1)^4} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial Z^2} \right) \right] + \frac{\text{Br}}{\text{Pe}(1-R_1)^4} \left(\frac{v}{v_0} \right) \left[2 \left(\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial R} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{V_r^*}{R} \right) + \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial Z} \right)^2 \right) \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial V_r^*}{\partial Z} + \frac{\partial V_z^*}{\partial R} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{V_\theta^*}{R} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right)^2 \right] \quad (\text{II-21})
\end{aligned}$$

Les paramètres caractéristiques intervenant dans les équations adimensionnelles citées précédemment, dont les valeurs conditionnent l'écoulement et le transfert de chaleur, sont :

- Le nombre de Reynolds : $\text{Re} = \frac{\rho_0 U_0 r_e}{\mu_0}$
- Le Nombre de Prandlt : $\text{Pr} = \frac{\mu_0 C_p}{k}$
- Le nombre de Grashoff : $\text{Gr} = \frac{\rho_0^2 g \beta \Delta T r_e^3}{\mu_0^2}$
- Le nombre de Rayleigh: $\text{Ra} = \text{Gr Pr}$
- Le nombre de Brinkman : $\text{Br} = \frac{\mu_0 U_0^2 (1-R_1)^2}{\Phi r_e}$
- Le nombre de Peclet : $\text{Pe} = \text{Re Pr}$

Les équations (II-16), (II-17), (II-18), (II-19) et (II-20) forment le système d'équations qui régit notre problème. Remarquons que toutes ces équations sont de la forme des équations de transport qui s'écrivent sous la forme générale suivante :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \rho V_r^* \phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta^* \phi) + \frac{\partial}{\partial Z} (\rho V_z^* \phi) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\Gamma_\phi}{H} \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Gamma_\phi}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) + S_\phi \quad (\text{II-22})$$

Avec:

- ϕ : Variable dépendante ;
- Γ_ϕ : Coefficient de diffusion ;
- S_ϕ : Terme source.
- $H = (1 - R_1)^4$

Le Tableau II.1 regroupe les expressions du coefficient de diffusion et du terme source relatifs à la variable indépendante ϕ , par identification avec le système d'équations précédent (II-22).

Tableau II.1 : Identification des équations de conservation par rapport à l'équation générale de transport.

Equations		ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
de Continuité (II-17)		1	0	0
de l'impulsion	Suivant R (II-18)	V_r^*	$\frac{1}{Re} (1 - R_1)^2 \left(\frac{v}{v_0} \right)$	$S_{V_r^*}$
	Suivant θ (II-19)	V_θ^*	$\frac{1}{Re} (1 - R_1)^2 \left(\frac{v}{v_0} \right)$	$S_{V_\theta^*}$
	Suivant Z (II-20)	V_z^*	$\frac{1}{Re} (1 - R_1)^2 \left(\frac{v}{v_0} \right)$	$S_{V_z^*}$
de l'énergie (II-21)		T^*	$\frac{1}{Pe} (1 - R_1)^2$	S_{T^*}

Les termes sources présentés dans le Tableau II.1 sont donnés par les expressions suivantes :

$$S_{V_r^*} = - \left(\frac{1}{Re} (1 - R_1)^4 \right) \frac{\partial P^*}{\partial R} - \frac{Gr}{Re^2} T^* (1 - R_1)^4 \text{Cos}\theta \text{Cos}\alpha + \frac{1}{Re} (1 - R_1)^2 \left[\frac{V_r^*}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{v}{v_0} \right) - \left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{V_r^*}{R^2} - \frac{2}{R^2} \left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{(1 - R_1)^4} \right) \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{v}{v_0} \right) \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial Z} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{V_\theta^*}{R} \right) + R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{V_r^*}{R} \right) \right] + \left(\frac{V_\theta^* V_\theta^*}{R} \right) \quad (\text{II-23})$$

$$\begin{aligned}
S_{V_\theta^*} = & -\frac{1}{R} \left(\frac{1}{\text{Re}} (1-R_1)^4 \right) \frac{\partial P_m^*}{\partial \theta} + \left(\frac{V_r^* V_\theta^*}{R} \right) + \frac{1}{\text{Re}} (1-R_1)^2 \left[\frac{2}{R^2} \left(\frac{v}{v_0} \right) \left(\frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right) \right. \\
& - \left. \left(\frac{v}{v_0} \right) \left(\frac{V_\theta^*}{R^2} \right) + \left(\frac{1}{(1-R_1)^4} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{v}{v_0} \right) \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{v_0} \right) \left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + 2V_r^* \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} - V_\theta^* \right) \right] \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T^* (1-R_1)^4 \text{Sin}\theta \text{Cos}\alpha
\end{aligned} \tag{II-24}$$

$$\begin{aligned}
S_{V_z^*} = & - \left(\frac{1}{\text{Re}(1-R_1)^2} \right) \frac{\partial P'}{\partial Z} + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T^* (1-R_1)^2 \text{Sin}\alpha + \frac{1}{\text{Re}(1-R_1)^2} \\
& \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(\left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{\partial V_r^*}{\partial Z} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{\partial V_\theta^*}{\partial Z} + \left(\frac{1}{(1-R_1)^4} \right) \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{\partial V_z^*}{\partial Z} \right]
\end{aligned} \tag{II-25}$$

$$\begin{aligned}
S_{T^*} = & \frac{\text{Br}}{\text{Pe}(1-R_1)^4} \left(\frac{v}{v_0} \right) \left[2 \left(\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial R} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{V_r^*}{R} \right) + \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial Z} \right)^2 \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial V_r^*}{\partial Z} + \frac{\partial V_z^*}{\partial R} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{V_\theta^*}{R} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{II-26}$$

II.8. Conditions aux limites adimensionnelles

A l'entrée de la conduite annulaire : $V_z^* = 1$; $V_r^* = V_\theta^* = 0$; $T^* = 1$

- *A la paroi intérieure* : $V_z^* = V_r^* = V_\theta^* = 0$
- *A la paroi extérieure* : $V_z^* = V_r^* = V_\theta^* = 0$; $T^* = 0$

Conclusion

Après avoir posé le modèle physique, formulé les équations gouvernant l'écoulement dynamique du fluide, le transfert de chaleur ainsi que les conditions aux limites associées, il est à présent nécessaire de modéliser numériquement le problème.

Les questions relatives aux choix de la méthode numérique, au traitement des interfaces ainsi qu'à la technique de résolution seront traitées dans le chapitre qui suit.

CHAPITRE III
MODELISATION NUMERIQUE

CHAPITRE III

MODELISATION NUMERIQUE

Introduction

Le développement des capacités informatiques ces dernières décennies a permis à la simulation numérique d'accéder au cœur de la recherche et de l'expérimentation scientifique. Aujourd'hui, cette dynamique de développement est toujours d'actualité, motivée par la demande de calculs de plus en plus complexes et par la diversité de ses applications. Ainsi, l'étude de la convection mixte dans les conduites cylindriques horizontales a fait l'objet d'un certain nombre d'études numériques utilisant différentes méthodes de discrétisation telles que celles entreprises par **Hwang et al. [31]** et **Shome et al. [23]**. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer :

- La méthode de volume finis ;
- la méthode différences finies ;
- la méthode éléments finis.

III.1. Choix de la méthode de discrétisation

Le système d'équations aux dérivées partielles, présenté dans le chapitre précédent, gouvernant le processus de convection mixte dans une conduite annulaire concentrique inclinée et satisfaisant aux conditions aux limites retenues, sera résolu par la méthode des volumes finis ou volumes de contrôle. Cette méthode développée par **Patankar [32]**, en raison des avantages qu'elle procure, est devenue fréquemment utilisée.

La méthode des volumes finis est caractérisée par son avantage à satisfaire la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans tous les volumes finis et donc, dans tout le domaine de calcul. Elle facilite la linéarisation des termes non linéaires dans les équations de conservation, tel que le terme source. La méthode consiste à partager le domaine de calcul en plusieurs volumes dont chacun entoure un nœud. En utilisant différents schémas d'approximations, nous pouvons intégrer les termes des équations différentielles modélisant sur chaque volume de contrôle.

III.2. Discrétisation de l'équation générale de transport

Les phénomènes physiques impliquant l'écoulement du fluide et le transfert thermique sont régis par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Ces équations se présentent sous la forme générale d'une équation de transport, soit :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)}_I + \underbrace{\frac{\partial(\rho V_z^* \phi)}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial(R\rho V_r^* \phi)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho V_\theta^* \phi)}{\partial \theta}}_{II} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\Gamma}{H} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Gamma}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)}_{III} + \underbrace{S}_{IV} \quad (\text{III-1})$$

Avec :

V_z^* ; V_r^* ; V_θ^* : sont les composantes du vecteur vitesse suivant respectivement Z, R et θ ,

ϕ : variable dépendante,

Γ : coefficient de diffusion,

S : terme source.

$$H = (1 - R_1)^4$$

Cette équation de transport comporte quatre termes représentant les processus par lesquels la variable ϕ peut changer.

- I. Variation temporelle au sein du volume,
- II. Convection à travers les faces du volume,
- III. Diffusion à travers les faces du volume,
- IV. Génération ou destruction au sein du volume.

Pour obtenir la forme discrétisée de l'équation (III-1), on doit, en premier lieu, définir un maillage du domaine de calcul, figure III.1. En configuration tridimensionnelle, le point P aura comme voisins les point : E (East), W (West), N (North), S (South), T (Top) et B (Bottom).

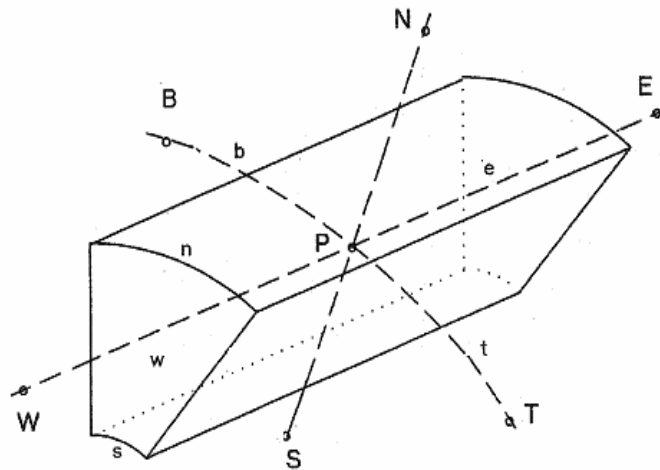


Figure III.1 : Volume de contrôle en coordonnées cylindriques.

III.3. Intégration de l'équation générale de transport

III.3.1. Sans le terme convectif (terme non-linéaire)

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'intégration de l'équation (III-1) sans le terme convectif ; elle se ramène donc à l'équation suivante :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\Gamma}{H} \frac{\partial\phi}{\partial Z} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Gamma R \frac{\partial\phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Gamma}{R} \frac{\partial\phi}{\partial \theta} \right) + S \quad (\text{III-2})$$

En intégrant cette équation sur le volume de contrôle et suivant le temps on obtient :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{w_b} \int_{s_n} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} R dR d\theta dZ dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{w_b} \int_{s_n} S R dR d\theta dZ dt + \quad (\text{III-3})$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{w_b} \int_{s_n} \left[\frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\Gamma}{H} \frac{\partial\phi}{\partial Z} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\Gamma R \frac{\partial\phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Gamma}{R} \frac{\partial\phi}{\partial \theta} \right) \right] R dR d\theta dZ dt$$

Cette équation donnera donc :

$$\begin{aligned} \rho(\phi_P^1 - \phi_P^0) R_m \Delta R \Delta \theta \Delta Z = & \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\Gamma}{\partial Z} \frac{\partial\phi}{\partial Z} \right)_e - \left(\frac{\Gamma}{\partial Z} \frac{\partial\phi}{\partial Z} \right)_w \right] \frac{1}{H} R_m \Delta R \Delta \theta dt + \\ & \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\Gamma R \frac{\partial\phi}{\partial R} \right)_n - \left(\Gamma R \frac{\partial\phi}{\partial R} \right)_s \right] \Delta \theta \Delta Z dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\Gamma}{R} \frac{\partial\phi}{\partial \theta} \right)_t - \left(\frac{\Gamma}{R} \frac{\partial\phi}{\partial \theta} \right)_b \right] \Delta R \Delta Z dt \\ & + \bar{S} R_m \Delta R \Delta \theta \Delta Z \Delta t \end{aligned} \quad (\text{III-4})$$

Afin d'évaluer les dérivées de la variable ϕ aux interfaces, on doit lui choisir un profil de variation entre les nœuds. Si on évalue les dérivées à partir d'un profil linéaire, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho(\phi_P^1 - \phi_P^0) R_m \Delta R \Delta \theta \Delta Z = & \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\Gamma_e R_e (\phi_E - \phi_P)}{(\delta Z)_e} - \frac{\Gamma_w R_w (\phi_P - \phi_W)}{(\delta Z)_w} \right] \frac{1}{H} \Delta R \Delta \theta dt + \\ & \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\Gamma_n R_n (\phi_N - \phi_P)}{(\delta R)_n} - \frac{\Gamma_s R_s (\phi_P - \phi_S)}{(\delta R)_s} \right] \Delta \theta \Delta Z dt + \\ & \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\Gamma_t (\phi_T - \phi_P)}{R_t (\delta \theta)_t} - \frac{\Gamma_b (\phi_P - \phi_B)}{R_b (\delta \theta)_b} \right] \Delta R \Delta Z dt + \bar{S} R_m \Delta R \Delta \theta \Delta Z \Delta t + \end{aligned} \quad (\text{III-5})$$

Où \bar{S} représente la valeur moyenne de S dans le volume de contrôle. Ce terme est généralement fonction de la variable ϕ . Nous pouvons cependant considérer uniquement une forme linéarisée (voir Annexe). Ainsi, nous exprimons \bar{S} sous la forme :

$$\bar{S} = S_c + S_p \phi_P \quad (\text{III-6})$$

Après traitement des termes instationnaires (voir Annexe 3), l'équation (III-6) s'écrit comme :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_T \phi_T + a_B \phi_B + b \quad (\text{III-7})$$

Avec :

$$a_E = \frac{\Gamma_e R_e \Delta R \Delta \theta}{H(\delta Z)_e}; \quad a_W = \frac{\Gamma_w R_w \Delta R \Delta \theta}{H(\delta Z)_w}; \quad a_N = \frac{\Gamma_n R_n \Delta \theta \Delta Z}{(\delta R)_n};$$

$$a_T = \frac{\Gamma_t \Delta R \Delta Z}{R_t (\delta \theta)_t}; \quad a_B = \frac{\Gamma_b \Delta R \Delta Z}{R_b (\delta \theta)_b}; \quad a_S = \frac{\Gamma_s R_s \Delta \theta \Delta Z}{(\delta R)_s}; \quad a_P^0 = \frac{\rho \Delta v}{\Delta t}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + a_P^0 - Sp \Delta v$$

$$b = Sc \Delta v + a_P^0 \phi_P^0, \quad \Delta v = R_m \Delta R \Delta \theta \Delta Z$$

Δv : représente le volume occupé par le volume de contrôle;
 R_m : désigne le rayon moyen. Il est donné par l'expression :

$$R_m = \frac{1}{2} (R_n + R_s) \quad (\text{III-8})$$

III.3.2. Avec le terme convectif

On s'intéresse dans ce qui suit au traitement des termes convectifs de l'équation (III-1). La convection étant générée par un écoulement de fluide, notre but à ce stade est d'obtenir la solution ϕ en présence de cet écoulement. Comme le terme convectif est lié au terme de diffusion, les deux termes seront manipulés ensemble. Ainsi, l'équation (III-1) peut s'écrire comme :

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_Z}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial J_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial J_\theta}{\partial \theta} = S \quad (\text{III-9})$$

Avec:

J_Z , J_R , et J_θ : représentent les flux de convection-diffusion dans les directions Z, R et θ respectivement, ils sont donnés par les expressions :

$$J_Z = \rho V_Z^* \phi - \frac{\Gamma}{H} \frac{\partial \phi}{\partial Z}; \quad J_R = R \rho V_R^* \phi - \Gamma R \frac{\partial \phi}{\partial R}; \quad J_\theta = \rho V_\theta^* \phi - \frac{\Gamma}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

Notons également que le champ d'écoulement doit satisfaire l'équation de continuité, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\rho R V_R^*) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta^*) + \frac{\partial}{\partial Z} (\rho V_Z^*) = 0 \quad (\text{III-10})$$

Le traitement des termes convection–diffusion est similaire pour les trois directions ; on considère par exemple le terme suivant la direction Z :

$$\frac{d}{dZ} (\rho V_Z^* \phi) = \frac{d}{dZ} \left(\frac{\Gamma}{H} \frac{d\phi}{dZ} \right) \quad (\text{III-11})$$

Considérons le flux total, J_Z , tel que :

$$J_Z = \rho V_Z^* \phi - \frac{\Gamma}{H} \frac{d\phi}{dZ} \quad (\text{III-12})$$

Alors, l'équation (III-11) implique :

$$\frac{dJ}{dZ} = 0 \Rightarrow J_e - J_w = 0 \quad (\text{III-13})$$

Le problème qui se pose à présent est l'évaluation des termes J_e et J_w qui nécessite un certain nombre d'approximations. Cela est effectué en utilisant des profils d'interpolation donnant l'évolution de la variable ϕ entre les nœuds du maillage (aux interfaces des volumes de contrôle).

III.3.3. Formulation généralisée

Les schémas de discrétisation du terme convection–diffusion diffèrent par le choix du profil adapté pour approximer la solution du problème. Ces schémas ne sont en réalité que des cas particuliers d'une formulation générale.

Considérons les nœuds i et $i+1$ de la figure III.2 séparés par une distance δ . Le flux traversant l'interface (en pointillés) entre ces deux nœuds peut être écrit comme :

$$J^* = \frac{J \delta H}{\Gamma} = P \phi - \frac{d\phi}{d(Z/\delta)} \quad (\text{III-14})$$

Dans cette expression, P est le nombre de Peclet qui désigne le rapport du transfert par convection au transfert par diffusion. Il est défini par :

$$P = \frac{\rho V_Z^*}{(\Gamma/H\delta)} = \frac{F}{D} \quad (\text{III-15})$$

Avec :

$$F = \rho V_Z^* : \text{débit d'écoulement,}$$

$$D = \frac{\Gamma}{H\delta} : \text{conductance de diffusion.}$$

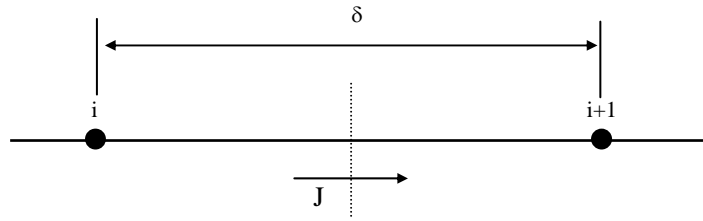


Figure III.2 : Représentation du flux à l'interface.

La valeur de ϕ à l'interface est considérée comme une moyenne pondérée entre ϕ_i et ϕ_{i+1} , alors que le gradient $\frac{d\phi}{d(Z/\delta)}$ est proportionnel à $\phi_{i+1} - \phi_i$. D'où J^* s'écrira sous la forme suivante :

$$J^* = P [\alpha \phi_i + (1 - \alpha) \phi_{i+1}] - \beta (\phi_{i+1} - \phi_i) \quad (\text{III-16})$$

α et β étant des facteurs adimensionnels de pondération dépendant de P .

L'équation (III-16) peut encore s'écrire sous la forme :

$$J^* = B \phi_i - A \phi_{i+1} \quad (\text{III-17})$$

A et B sont des coefficients dépendant de P . Par conséquent, le choix d'un schéma d'interpolation donné revient au choix approprié des coefficients A et B dans l'équation (III-17).

III.3.4. Propriétés des coefficients A et B

Si $\phi_i = \phi_{i+1}$, le terme de diffusion s'annule. Par conséquent, le flux total est fonction seulement du flux de convection, alors :

$$J^* = P \phi_i = P \phi_{i+1} \quad (\text{III-18})$$

En combinant cette équation avec l'équation (III-17), on obtient :

$$B = A + P \quad (\text{IV-19})$$

Un changement dans le sens de l'axe de coordonnées modifie P en $-P$. Les rôles de A et B seront donc permutés, soit :

$$\begin{cases} A(-P) = B(P) \\ B(-P) = A(P) \end{cases} \quad (\text{III-20})$$

Si nous considérons l'équation (III-19), alors, pour des valeurs négatives de P , nous pourrions écrire :

$$A(P) = B(P) - P = A(-P) - P = A(|P|) - P \quad (\text{III-21})$$

Et donc, pour P quelconque, positif ou négatif, $A(P)$ peut être écrit sous la forme compacte suivante :

$$A(P) = A(|P|) + \|-P, 0\| \quad (\text{III-22})$$

$$B(P) = A(|P|) + \|P, 0\| \quad (\text{III-23})$$

Avec :

$\|a, b\|$: désigne le maximum de a et b .

Ainsi, en combinant les équations (III-17) et (III-18), on peut écrire :

$$\begin{cases} J^* - P \phi_i = A(\phi_i - \phi_{i+1}) \\ J^* - P \phi_{i+1} = B(\phi_i - \phi_{i+1}) \end{cases} \quad (\text{III-24})$$

En multipliant maintenant les équations précédentes par $D = \Gamma/\delta H$ et en appliquant la relation (III-17) aux interfaces e et w , on obtient la formulation convection-diffusion suivante :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{III-25})$$

Avec :

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\|$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \|F_w, 0\|$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w)$$

$$\begin{cases} F_e = (\rho V_Z^*) \\ F_w = (\rho V_Z^*) \end{cases}$$

F_e, F_w : sont les débits d'écoulement aux interfaces e et w .
 D_e, D_w : sont les conductances de diffusion correspondantes.

III.4. Schémas d'interpolation

Nous introduisons maintenant quelques schémas d'interpolation servant à déterminer la valeur de la variable dépendante ϕ aux interfaces du volume de contrôle. Parmi ces schémas, on distingue le schéma aux différences centrées (*Central Difference Scheme*) qui utilise une procédure d'interpolation linéaire qui reste, cependant, limité pour des valeurs de $|P| < 2$.

Une autre alternative à ce schéma est la procédure aux différences décentrées (*Upwind Scheme*). Ce schéma est moins précis que celui aux différences centrées pour les écoulements qui ne sont pas à convection dominée. Par conséquent, un certain nombre d'auteurs ont proposé des combinaisons des deux schémas précédents. Selon **Patankar [32]**, **Spalding** a développé le schéma hybride (*Hybrid Scheme*) qui rejoint le schéma aux différences centrées pour $|P| < 2$ et le schéma aux différences décentrées pour $|P| > 2$.

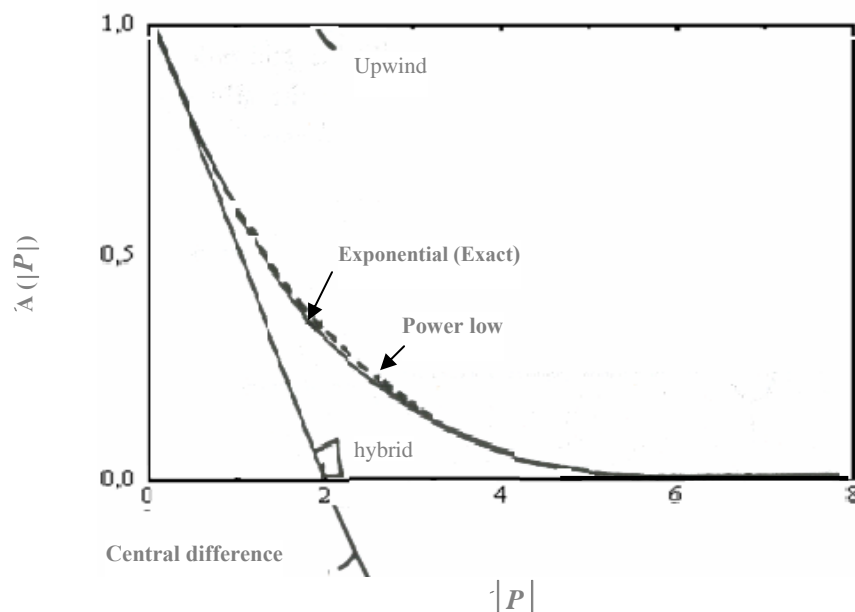


Figure III.3 : La fonction $A(|P|)$ pour chacun des schémas.

L'inconvénient majeur du schéma hybride est l'erreur introduite au voisinage de $|P| = 2$, comme le montre la Figure III.3. Ainsi, un certain nombre de méthodes ont été développées afin de présenter un changement plus graduel et qui sont en bon accord avec la solution exacte d'un problème monodimensionnel. **Patankar [32]** propose le schéma d'approximation de la loi de puissance (*Power Law Scheme*) qui s'avère très efficace puisqu'il approche beaucoup mieux la solution exacte d'après la Figure III.4. Ce schéma a été développé à partir du schéma exponentiel exact (*Exponentiel Scheme*). Ce dernier n'a pas été utilisé à cause du temps de calcul important nécessaire au calcul des exponentielles.

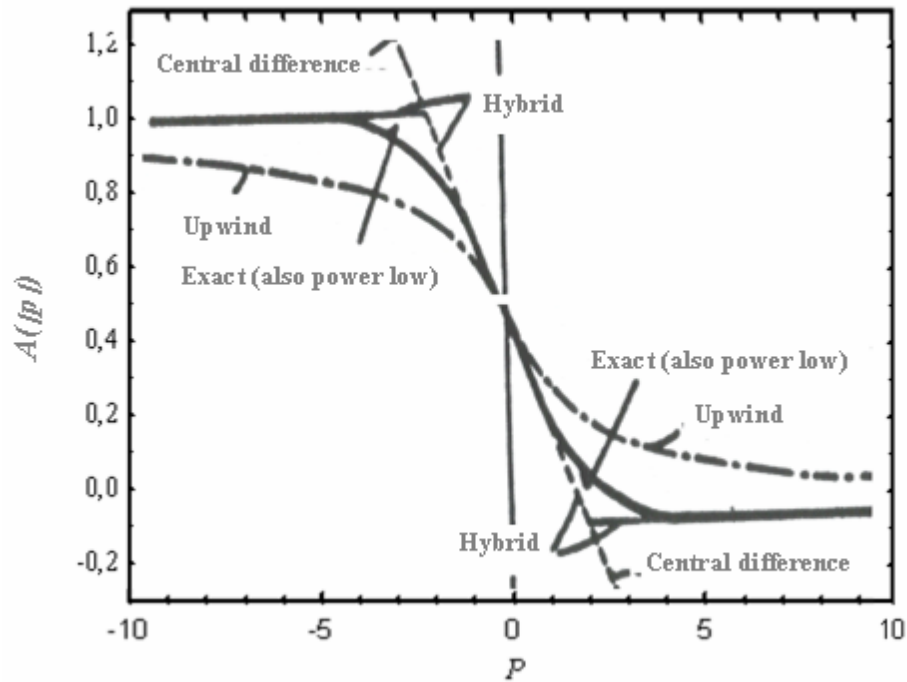


Figure III.4 : Prédiction de ϕ_p par les différents schémas dans un intervalle du nombre de Peclet.

Le schéma de la loi de puissance est le plus recommandé dans la littérature, aussi nous l'adapterons dans notre travail. On note également que le temps de calcul pour ce schéma est légèrement plus important que le schéma hybride. Par ailleurs les schémas préalablement définis peuvent être vus comme des choix particuliers de la fonction $A(|P|)$. Ainsi on établit le tableau suivant :

Tableau III.1 : La fonction $A(|p|)$ pour chacun des schémas.

Schémas	Expressions de $A(P)$
Centré	$1 - 0,5 P $
Upwind	1
Hybride	$\ 0, (1 - 0,5 P)\ $
Loi de puissance	$\ 0, (1 - 0,1 P)^5\ $
Exponentiel	$ P / [\exp(P) - 1]$

D'autres schémas ont été développés tels que le schéma SUD (*Skew Upwind Differencing*) introduit par **Raithby** [33]. Ce schéma a été modifié et amélioré dans une autre étude effectuée par **Busnaina et al.** [34] dans laquelle il propose le schéma SUWD (*Skew Upwind Weighted Differencing*).

III.5. Equation discrétisée pour le cas général

A ce stade nous disposons des outils nécessaires permettant d'écrire l'équation générale de transport (III-9) sous forme discrétisée. Ainsi, par intégration sur le volume de contrôle de la Figure III.5, l'équation (III-9) devient :

$$\frac{\rho_P \phi_P - \rho_P^0 \phi_P^0}{\Delta t} \Delta v + J_e - J_w + J_n - J_s + J_t - J_b = (S_c + S_p \phi_P) \Delta v \quad (\text{III-26})$$

et ce, en linéarisant le terme source et en considérant, pour le terme instationnaire, que ρ_P et ϕ_P prévalent le long du volume de contrôle.

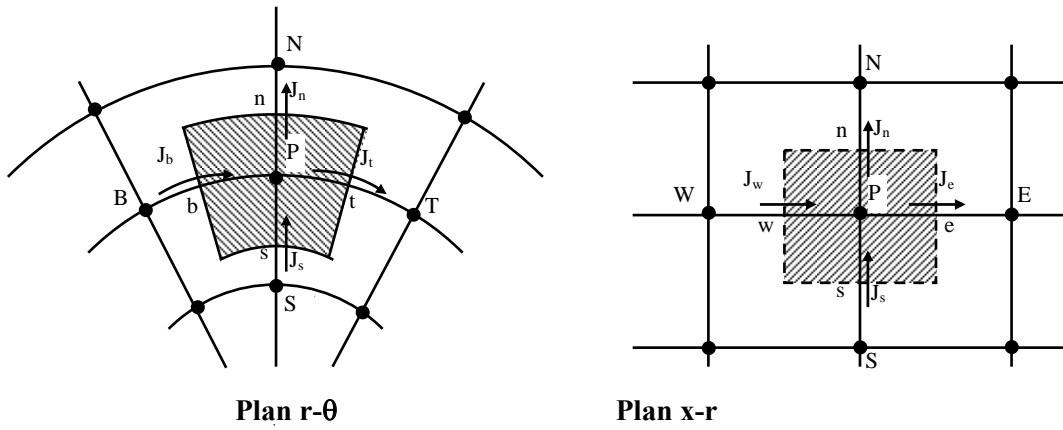


Figure III.5 : Volume de contrôle pour la configuration tridimensionnelle.

Dans l'équation (III-26), les termes J_e , J_w , J_n , J_s , J_t , et J_b représentent les flux totaux intégrés le long des interfaces e, w, n, s, t et b respectivement. Ils sont donnés par les expressions suivantes :

$$J_e = \int_b^t \int_s^n (J_Z)_e R dR d\theta = \left[\rho V_Z^* \phi - \frac{\Gamma}{H} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right]_e R_m \Delta R \Delta \theta$$

$$J_w = \int_b^t \int_s^n (J_Z)_w R dR d\theta = \left[\rho V_Z^* \phi - \frac{\Gamma}{H} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right]_w R_m \Delta R \Delta \theta$$

$$J_n = \int_b^t \int_w^e (J_R)_n dZ d\theta = \left[\rho V_r^* \phi - \Gamma R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right]_n \Delta Z \Delta \theta$$

$$J_s = \int_b^t \int_w^e (J_R)_s dZ d\theta = \left[\rho V_r^* \phi - \Gamma R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right]_s \Delta Z \Delta \theta$$

$$J_t = \int_w^e \int_s^n (J_\theta)_t dR dZ = \left[\rho V_\theta^* \phi - \frac{\Gamma}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]_t \Delta R \Delta Z$$

$$J_b = \int_{ws}^{en} \int (J_\theta)_b dR dZ = \left[\rho V_\theta^* \phi - \frac{\Gamma}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]_b \Delta R \Delta Z$$

De la même façon, l'intégration de l'équation de continuité (III-10) donne :

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^0) \Delta v}{\Delta t} + F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b = 0 \quad (III-27)$$

Où :

F_e, F_w, F_n, F_s, F_t et F_b sont les débits d'écoulement à travers les faces du volume de contrôle. Leurs expressions respectives sont :

$$\begin{aligned} F_e &= (\rho V_Z^*)_e R_e \Delta R \Delta \theta & ; & & F_w &= (\rho V_Z^*)_w R_w \Delta R \Delta \theta \\ F_n &= (\rho R V_r^*)_n \Delta Z \Delta \theta & ; & & F_s &= (\rho R V_r^*)_s \Delta Z \Delta \theta \\ F_t &= (\rho V_\theta^*)_t \Delta Z \Delta R & ; & & F_b &= (\rho V_\theta^*)_b \Delta Z \Delta R \end{aligned}$$

En multipliant l'équation (III-27) par ϕ_P et en la retranchant de l'équation (III-26), on obtient :

$$\begin{aligned} & (\phi_P - \phi_P^0) \rho_P^0 \frac{\Delta v}{\Delta t} + (J_e - F_e \phi_P) - (J_w - F_w \phi_P) + (J_n - F_n \phi_P) \\ & - (J_s - F_s \phi_P) + (J_t - F_t \phi_P) - (J_b - F_b \phi_P) = (Sc + Sp \phi_P) \Delta v \end{aligned} \quad (III-28)$$

L'hypothèse de l'uniformité le long des faces du volume de contrôle permet d'écrire l'équation générale sous forme discrétisée :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_T \phi_T + a_B \phi_B + b \quad (III-29)$$

Avec :

$$\begin{aligned} a_E &= D_e A(|P_e|) + \|\ -F_e, 0 \| & a_W &= D_w A(|P_w|) + \|\ F_w, 0 \| \\ a_N &= D_n A(|P_n|) + \|\ -F_n, 0 \| & a_S &= D_s A(|P_s|) + \|\ F_s, 0 \| \\ a_T &= D_t A(|P_t|) + \|\ -F_t, 0 \| & a_B &= D_b A(|P_b|) + \|\ F_b, 0 \| \\ P_i &= \frac{F_i}{D_i}, & a_P^0 &= \rho_P^0 \frac{\Delta v}{\Delta t}, & b &= Sc \Delta v + a_P^0 \phi_P^0 \end{aligned}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + a_P^0 - Sp \Delta v$$

et :

$$D_e = \frac{\Gamma_e R_e \Delta R \Delta \theta}{H(\delta Z)_e} \quad ; \quad D_w = \frac{\Gamma_w R_w \Delta R \Delta \theta}{H(\delta Z)_w} \quad ; \quad D_n = \frac{\Gamma_n R_n \Delta Z \Delta \theta}{(\delta R)_n}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s R_s \Delta Z \Delta \theta}{(\delta R)_s} \quad ; \quad D_t = \frac{\Gamma_t \Delta R \Delta Z}{R_t (\delta \theta)_t} \quad ; \quad D_b = \frac{\Gamma_b \Delta R \Delta Z}{R_b (\delta \theta)_b}$$

L'équation (III-29) peut être écrite sous une forme plus compacte, soit :

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (III-30)$$

L'indice nb définit les nœuds voisins (*neighbour*) du point P, et la sommation est effectuée à travers les nœuds voisins.

III.6. Discrétisation du champ dynamique

Nous avons présenté la méthode de discrétisation de l'équation générale de transport pour une variable indépendante ϕ en présence d'un champ d'écoulement donné. Mais le problème qui se pose à présent est comment ce champ d'écoulement peut-il être obtenu ?

III.6.1. Equation de quantité de mouvement

Pour la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement, nous procéderons d'une manière analogue à celle de l'équation générale de transport (III-1). Malheureusement, ces équations sont non-linéaires et fortement couplées, cela nécessite donc d'autres considérations. Cependant, les projections de l'équation de quantité de mouvement peuvent être écrites sous la forme de l'équation générale de transport, soit :

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial(R \rho V_R^* \phi)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho V_\theta^* \phi)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho V_Z^* \phi)}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{\Gamma}{H} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\Gamma R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\Gamma}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] + S \quad (III-31)$$

Où la variable indépendante ϕ représente l'une des composantes de la vitesse (V_Z^* , V_R^* ou V_θ^*) et Γ représente la viscosité dynamique μ . Le terme source S contiendra donc les termes restants en incluant les gradients de pression

Les formes intégrales des équations sont obtenues en utilisant un schéma d'interpolation approprié aux interfaces des volumes de contrôle. Ainsi, la forme finale de ces équations se présente comme :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_T \phi_T + a_B \phi_B + S \quad (III-32)$$

Lors de la détermination de la forme discrétisée de l'équation de quantité de mouvement, la technique d'évaluation de la pression sera cruciale. En effet, si on utilise un maillage décalé (*staggered grid*), en raison d'une représentation plus pratique du champ de

pression, alors chaque composante de la vitesse sera décalée suivant sa direction par rapport au maillage principal, Figure III.6.

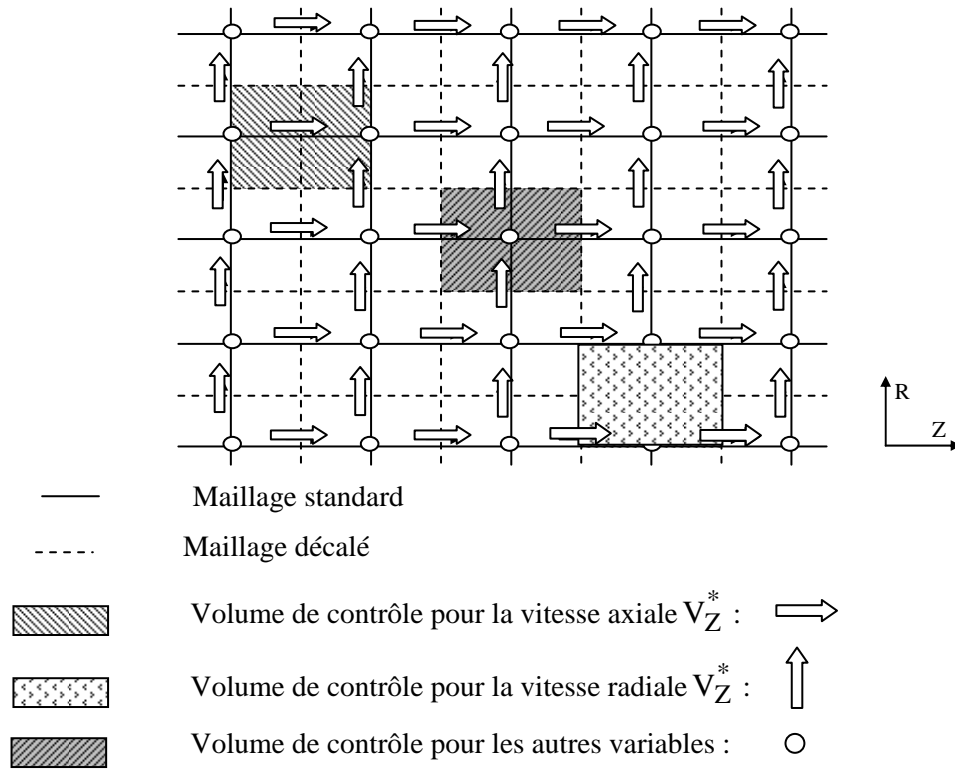


Figure III.6 : Représentation du maillage décalé.

Ainsi pour la vitesse u , par exemple, on obtient l'équation discrétisée suivante :

$$a_e (V_Z^*)_e = \sum a_{nb} (V_Z^*)_{nb} + b + A_e (P_P - P_E) \tag{III-33}$$

Avec :

$A_e (P_P - P_E)$: force de pression agissant sur la face du volume de contrôle,

A_e : étant l'aire de la surface sur laquelle agit la différence de pression,

b : le terme source, gradient de pression exclu.

Nb : désigne les nœuds voisins.

Des équations similaires peuvent être obtenues pour les autres composantes : V_r^* et V_θ^* .

III.6.2. Equation de pression

L'équation de quantité de mouvement ne peut être résolue qu'une fois le champ de pression est donné ou au moins estimé. En effet il existe trois approches principales de calcul du champ de pression utilisées dans la littérature.

a) Utilisation d'une équation implicite pour la pression

Il est possible de tirer une équation implicite pour la pression statique à partir de la divergence de l'équation de quantité de mouvement. **Babu et al. [35]** présentent l'équation résultante sous la forme d'une équation de Poisson pour la pression, elle s'écrit comme suit :

$$\nabla^2 P = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (V_i V_j) - \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{Re} \nabla^2 D \quad (\text{III-34})$$

D étant le terme de dilatation défini par :

$$D = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (\text{III-35})$$

Cette forme de l'équation de pression a été utilisée par **Liang Cheng et Armfield [36]** dans leur méthode SMAC (*Simplified Marker and Cell*) pour des écoulements incompressibles. L'inconvénient majeur de cette procédure est que les conditions aux limites pour la pression doivent être spécifiées, ce qui n'est pas facile pour les problèmes complexes.

b) Utilisation de la compressibilité artificielle

On introduit une dérivée artificielle de la pression par rapport au temps dans l'équation de continuité pour le cas d'un écoulement permanent et incompressible, soit :

$$\beta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial (R \rho V_r^*)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial (\rho V_\theta^*)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z^*)}{\partial z} = 0 \quad (\text{III-36})$$

Le facteur β est relatif à une vitesse de son.

La solution transitoire n'a pas de sens physique, elle doit être considérée comme un artifice pour atteindre le régime stationnaire. Cependant, il existe deux principaux inconvénients à ce schéma. La conservation de la masse n'est garantie qu'à la limite de la convergence et le choix des paramètres β et le pas de temps Δt pour avoir un taux de convergence optimal.

c) Méthodes de correction de la pression

Les méthodes de correction de la pression s'appuient sur la résolution, en premier lieu, de l'équation de la quantité de mouvement en utilisant un champ de pression estimé, dans le but d'obtenir une approximation du champ de vitesses. Les champs de vitesse et de pression sont ensuite corrigés tels que l'équation de continuité soit satisfaite.

L'une des premières méthodes de correction de pression est la méthode SIMPLE (*Semi-Implicite Method for Pressure Linked Equations*) développée par **Patankar et Spalding**. Un nombre de méthodes alternatives a été proposée afin d'améliorer les

propriétés de convergence de SIMPLE, il s'agit des procédures SIMPLEC et SIMPLER qui seront présentées par la suite.

• Algorithme SIMPLE

L'algorithme SIMPLE peut être obtenu en considérant d'abord les équations de quantité de mouvement sous la forme discrétisée. Elles s'écrivent pour les différentes composantes de vitesses sur les faces positives (East, North, Top) du volume de contrôle comme :

$$a_e \left(\mathbf{V}_Z^* \right)_e = \sum a_{nb} \left(\mathbf{V}_Z^* \right)_{nb} + b + A_e (P_P - P_E) \quad (\text{III-37-a})$$

$$a_n \left(\mathbf{V}_r^* \right)_n = \sum a_{nb} \left(\mathbf{V}_r^* \right)_{nb} + b + A_n (P_P - P_N) \quad (\text{III-37-b})$$

$$a_t \left(\mathbf{V}_\theta^* \right)_t = \sum a_{nb} \left(\mathbf{V}_\theta^* \right)_{nb} + b + A_t (P_P - P_T) \quad (\text{III-37-c})$$

Pour un champ de pression estimé, P^{**} , il résultera un champ de vitesse intermédiaire $\left(\mathbf{V}_Z^* \right)^*$; $\left(\mathbf{V}_r^* \right)^*$; $\left(\mathbf{V}_\theta^* \right)^*$ qui satisfait l'équation de quantité de mouvement mais pas l'équation de continuité. Ainsi, pour la composante de vitesse \mathbf{V}_Z^* on aura :

$$a_e \left(\left(\mathbf{V}_Z^* \right)_e \right)^* = \sum a_{nb} \left(\mathbf{V}_Z^* \right)_{nb} + b + A_e (P_P^{**} - P_E^{**}) \quad (\text{III-38})$$

En retranchant l'équation (III-38) de l'équation (III-37-a), on obtient :

$$a_e \left(\mathbf{V}_Z^* \right)_e' = \sum a_{nb} \left(\mathbf{V}_Z^* \right)_{nb}' + A_e (P_P' - P_E') \quad (\text{III-39})$$

Dans cette équation, $\left(\mathbf{V}_Z^* \right)' = \left(\mathbf{V}_Z^* \right) - \left(\mathbf{V}_Z^* \right)^*$ et $P' = P - P^{**}$ représentent les formules de correction de vitesse et de pression, respectivement. Il est à noter que des équations similaires peuvent être obtenues de la même manière pour les composantes $\left(\mathbf{V}_r^* \right)^*$ et $\left(\mathbf{V}_\theta^* \right)^*$.

L'algorithme SIMPLE définit la correction des vitesses en utilisant l'équation précédente mais en négligeant le terme $\sum a_{nb} \left(\mathbf{V}_Z^* \right)_{nb}'$. Par conséquent, la forme finale de correction des vitesses sera donc :

$$\left(\mathbf{V}_Z^* \right)_e = \left(\mathbf{V}_Z^* \right)_e^* + d_e (P_P' - P_E') \quad (\text{III-40-a})$$

$$\left(\mathbf{V}_r^* \right)_n = \left(\mathbf{V}_r^* \right)_n^* + d_n (P_P' - P_N') \quad (\text{III-40-b})$$

$$\left(\mathbf{V}_\theta^* \right)_t = \left(\mathbf{V}_\theta^* \right)_t^* + d_t (P_P' - P_T') \quad (\text{III-40-c})$$

Avec :

$$d_i = \frac{A_i}{a_i} \quad i = e, n, t$$

L'équation de correction de la pression est établie en substituant les équations de correction des vitesses dans l'équation de continuité. On obtient alors la forme discrétisée suivante :

$$a_p P_p' = a_E P_E' + a_W P_W' + a_N P_N' + a_S P_S' + a_T P_T' + a_B P_B' + b \quad (\text{III-41})$$

Avec:

$$a_E = \rho_e d_e R_e \Delta R \Delta \theta \quad (\text{III-42-a})$$

$$a_W = \rho_w d_w R_w \Delta R \Delta \theta \quad (\text{III-42-b})$$

$$a_N = \rho_n d_n R_n \Delta Z \Delta \theta \quad (\text{III-42-c})$$

$$a_S = \rho_s d_s R_s \Delta Z \Delta \theta \quad (\text{III-42-d})$$

$$a_T = \rho_t d_t \Delta Z \Delta R \quad (\text{III-42-e})$$

$$a_B = \rho_b d_b \Delta Z \Delta R \quad (\text{III-42-f})$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B \quad (\text{III-42-g})$$

$$b = \left[\left(\rho (V_Z^*)^* \right)_w R_w - \left(\rho (V_Z^*)^* \right)_e R_e \right] \Delta R \Delta \theta + \left[\left(\rho (V_r^*)^* \right)_s R_s - \left(\rho (V_r^*)^* \right)_n R_n \right] \Delta Z \Delta \theta \quad (\text{III-42-h})$$

$$+ \left[\left(\rho (V_\theta^*)^* \right)_b - \left(\rho (V_\theta^*)^* \right)_t \right] \Delta R \Delta Z + (\rho_P^0 - \rho_P) \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Une fois la correction de la pression déterminée, les champs de vitesse et de pression peuvent être corrigés. L'algorithme SIMPLE sera donc défini par les étapes suivantes :

1. Estimer le champ de pression,
2. Résoudre les équations de quantité de mouvement pour obtenir $(V_Z^*)^*$, $(V_r^*)^*$, $(V_\theta^*)^*$
3. Résoudre l'équation en P' et cela, en utilisant $(V_Z^*)^*$, $(V_r^*)^*$, $(V_\theta^*)^*$
4. Calculer le champ de pression P et du champ de vitesses $(V_Z^*)^*$, $(V_r^*)^*$ et $(V_\theta^*)^*$ à partir de leurs expressions de correction en utilisant P' ,
5. Résoudre l'équation discrétisée pour d'autres variables dépendantes ϕ (température, concentration, etc.) s'ils influencent le champ d'écoulement,
6. Traiter la pression P comme un nouveau estimé P^{**} , et revenir à l'étape 2 pour répéter la même procédure jusqu'à convergence.

- **Algorithme SIMPLEC**

L'algorithme SIMPLEC (*SIMPLE Consistent*) est établi d'une façon similaire à celle de l'algorithme SIMPLE. La différence principale entre ces deux schémas réside dans le traitement du terme négligé dans la correction des vitesses.

Dans la procédure SIMPLEC, on soustrait des deux membres de l'équation (III-39), la quantité $\left(\left(\mathbf{v}_Z^* \right)'_e \sum a_{nb} \right)$, donnant :

$$\left(\mathbf{v}_Z^* \right)'_e (a_e - \sum a_{nb}) = \left(\sum a_{nb} \left(\mathbf{v}_Z^* \right)'_{nb} - \sum a_{nb} \left(\mathbf{v}_Z^* \right)'_e \right) + A_e (P'_P - P'_E) \quad (\text{III-43})$$

Le terme $\left(\sum a_{nb} \left(\mathbf{v}_Z^* \right)'_{nb} - \sum a_{nb} \left(\mathbf{v}_Z^* \right)'_e \right)$ est alors moins significatif et pourra être négligé. Par conséquent, les expressions de correction des vitesses auront la même forme que celles établies pour SIMPLE avec les coefficients d_i définis par :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e - \sum a_{nb}} ; \quad d_n = \frac{A_n}{a_n - \sum a_{nb}} ; \quad d_t = \frac{A_t}{a_t - \sum a_{nb}}$$

Il est à noter que cette approche peut être utilisée seulement si on effectue une sous-relaxation de l'équation de quantité de mouvement. Cependant, il a été montré que l'algorithme SIMPLEC offre une amélioration dans la vitesse de convergence par rapport au schéma SIMPLE pour la plupart des problèmes étudiés.

- **Algorithme SIMPLER**

L'algorithme SIMPLER (*SIMPLE Revised*) a été développé par **Patankar [32]** dans le but d'améliorer la convergence du schéma SIMPLE. Pour cela, écrivons les équations (III-37) sous la forme :

$$\left(\mathbf{v}_Z^* \right)'_e = \frac{\sum a_{nb} \left(\mathbf{v}_Z^* \right)'_{nb} + b}{a_e} + d_e (P'_P - P'_E) \quad (\text{III-44-a})$$

$$\left(\mathbf{v}_r^* \right)'_n = \frac{\sum a_{nb} \left(\mathbf{v}_r^* \right)'_{nb} + b}{a_n} + d_n (P'_P - P'_N) \quad (\text{III-44-b})$$

$$\left(\mathbf{v}_\theta^* \right)'_t = \frac{\sum a_{nb} \left(\mathbf{v}_\theta^* \right)'_{nb} + b}{a_t} + d_t (P'_P - P'_T) \quad (\text{III-44-c})$$

Avec :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e}, \quad d_n = \frac{A_n}{a_n} \quad \text{et} \quad d_t = \frac{A_t}{a_t}.$$

Définissons les pseudo-vitesses par :

$$\left(\hat{V}_Z^*\right)_e = \frac{\sum a_{nb} \left(V_Z^*\right)_{nb} + b}{a_e} \quad (\text{III-45-a})$$

$$\left(\hat{V}_r^*\right)_n = \frac{\sum a_{nb} V_r^*_{nb} + b}{a_n} \quad (\text{III-45-b})$$

$$\left(\hat{V}_\theta^*\right)_t = \frac{\sum a_{nb} \left(V_\theta^*\right)_{nb} + b}{a_t} \quad (\text{III-45-c})$$

Alors les équations (IV-47) deviennent :

$$\left(V_Z^*\right)_e = \left(\hat{V}_Z^*\right)_e + d_e (P_P - P_E) \quad (\text{III-46-a})$$

$$\left(V_r^*\right)_n = \left(\hat{V}_r^*\right)_n + d_n (P_P - P_N) \quad (\text{III-46-b})$$

$$\left(V_\theta^*\right)_t = \left(\hat{V}_\theta^*\right)_t + d_t (P_P - P_T) \quad (\text{III-46-c})$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation de continuité (III-27), on obtient l'équation discrétisée du champ de pression, soit :

$$a_P P_P = a_P P_P + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + a_T P_T + a_B P_B + b \quad (\text{III-47})$$

Les coefficients a_i sont donnés par les expressions (III-42) sauf pour le terme b dont l'expression sera donnée par :

$$b = \frac{(\rho_P^0 - \rho_P) \Delta v}{\Delta t} + \left[\left(\rho \left(\hat{V}_Z^* \right) \right)_w R_w - \left(\rho \left(\hat{V}_Z^* \right) \right)_e R_e \right] \Delta R \Delta \theta + \left[\left(\rho \left(\hat{V}_r^* \right) \right)_s R_s - \left(\rho \left(\hat{V}_r^* \right) \right)_n R_n \right] \Delta Z \Delta \theta + \left[\left(\rho \left(\hat{V}_\theta^* \right) \right)_b - \left(\rho \left(\hat{V}_\theta^* \right) \right)_t \right] \Delta Z \Delta R \quad (\text{III-48})$$

L'algorithme SIMPLER sera utilisé dans notre étude car il nécessite moins d'itérations pour atteindre la convergence en comparaison avec les deux schémas SIMPLE et SIMPLER.

- Séquence des opérations de l'algorithme SIMPLER

Après avoir exposé la méthode de discrétisation des différentes équations, nous présenterons les différentes étapes de l'algorithme SIMPLER pour la résolution des champs dynamique (vitesse, pression) et thermique (température) pour le mode de convection mixte. Elles sont au nombre de huit :

1. Proposer un champ de vitesse estimé,
2. Calculer les coefficients de l'équation de la quantité de mouvement et déterminer les pseudo-vitesses \hat{V}_Z^* , \hat{V}_r^* et \hat{V}_θ^* d'après les équations (III-45),

3. Calculer les coefficients de l'équation de pression (III-47) et la résoudre pour obtenir le champ de pression,
4. Prendre ce champ de pression comme P^{**} et résoudre les équations de quantité de mouvement pour obtenir, $(\hat{v}_Z^*)^*$, $(\hat{v}_r^*)^*$ et $(\hat{v}_\theta^*)^*$
5. Calculer le terme source b à partir de l'équation (III-42-h) et par la suite résoudre l'équation (III-41) afin d'obtenir le champ de correction de pression P' ,
6. Corriger le champ de vitesse à l'aide des équations de correction des vitesses (III-40). Notons que la pression n'est pas corrigée,
7. Résoudre l'équation de l'énergie pour obtenir le champ de température,
8. Revenir à l'étape 2 pour répéter la procédure jusqu'à la convergence.

Quoique le nombre d'itérations, pour atteindre la convergence, soit réduit en utilisant l'algorithme SIMPLER, un effort considérable est dépensé pour chaque itération à cause de la résolution de l'équation de pression et de l'équation de correction de pression en comparaison avec les autres schémas, SIMPLE et SIMPLEC. Mais l'avantage principal de l'algorithme SIMPLER est qu'au cours de son établissement, aucun terme n'a été négligé, c'est-à-dire le terme de sommation $\sum a_{nb} (v_Z^*)_{nb}$. Dans les algorithmes SIMPLE et SIMPLEC, un choix initial adéquat du champ de pression joue un rôle important, ce qui n'est pas nécessaire pour SIMPLER, car il est plus facile d'estimer un champ de vitesse raisonnable dans la majorité des problèmes. Par ailleurs, l'utilisation de la sous-relaxation dans l'équation de pression est facultative dans la procédure SIMPLER.

D'autres schémas de correction de pression ont été développés afin d'améliorer les qualités de SIMPLER. Citons entre autres, l'algorithme PISO (*Pressure Implicit Split Operators*) établi par Issa [37]. Ce dernier peut être considéré comme une extension du schéma SIMPLER mais en ajoutant d'autres étapes de correction appelées étages de correction.

III.7. Critère de convergence et facteurs de relaxation

On dit qu'un processus itératif a atteint la convergence, lorsque les itérations ne produisent aucun changement significatif dans les valeurs des variables dépendantes. En pratique, on exprime cette convergence par un test d'arrêt du processus itératif qui dépend de la nature du problème et des objectifs de calcul.

Le critère de convergence le plus utilisé dans la littérature porte sur les résidus de quantité de mouvement, de masse et d'énergie. Ainsi, pour que la solution converge, le résidu doit diminuer pour toutes les variables au cours du processus itératif. Le résidu local peut être défini par :

$$R_\phi = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b - a_P \phi_P \quad (\text{III-49})$$

Ce critère de convergence peut se traduire par l'inégalité suivante :

$$\sum_{\Omega} |R_\phi| < \varepsilon \quad (\text{III-50})$$

Avec :

Ω : Domaine de calcul,

ε : Valeur infiniment petite caractérisant l'erreur sur la solution obtenue.

Ho et Tu [38] ont utilisé, dans leur étude, un critère de convergence basé sur l'erreur absolue. Cette dernière est de l'ordre de 10^{-7} , soit :

$$\text{Max } |\phi_P - \phi_P^*| < \varepsilon \quad (\text{III-51})$$

Où :

ϕ_P : Valeur actuelle de la variable dépendante

ϕ_P^* : Valeur de ϕ à l'itération précédente.

Dans l'étude entreprise par **Orfi et al. [39]**, un autre critère de convergence est proposé. Il s'agit d'un test basé essentiellement sur la masse résiduelle résultant de l'intégration de l'équation de conservation de la masse sur un volume de contrôle. Cette masse ne doit pas dépasser la valeur 10^{-7} dans tous les cas analysés. **Hwang et al. [40]** emploient, quant à eux, un autre test de convergence, il est défini par rapport à la température relative et s'exprime par :

$$\left| \frac{T_P - T_P^*}{T_P^*} \right| < 10^{-4} \quad (\text{III-52})$$

Afin de contrôler la convergence d'un processus itératif, nous utilisons la technique de relaxation car une divergence peut avoir lieu lors de la résolution du système d'équations couplées à caractère non-linéaire. Pour éviter cette divergence, le processus de convergence est ralenti entre deux itérations au moyen de la sous-relaxation. Elle consiste à introduire un facteur de sous-relaxation α_p compris entre 0 et 1 dans l'équation (IV-33) :

$$\phi_P = \phi_P^* + \alpha_P \left[\frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_P} - \phi_P^* \right] \quad (\text{III-53})$$

Avec :

ϕ_P^* Désigne la valeur de la variable ϕ obtenue à l'itération précédente,

ϕ_P Désigne la valeur actuelle de la variable ϕ .

Il n'existe pas de règle générale pour le choix de la bonne valeur du coefficient α_ϕ . Sa valeur optimale dépend de plusieurs facteurs tels que la nature du problème, le nombre de nœuds, l'espacement de la grille et la méthode itérative utilisée [32].

III.8. Maillage utilisé

Afin de suivre avec précision toutes variations des champs thermique et hydrodynamique, particulièrement dans la région proche de la paroi et également dans la zone immédiate à l'entrée de la conduite étudiée, nous adopterons un maillage qui possède

des incréments uniformes circonférentiellement mais non uniformes radialement et axialement. **Shome et al. [23]** ont utilisé dans leur étude une loi de puissance pour générer la grille radialement, cette loi est donnée par l'expression :

$$R_j = 0,5 - 0,5 \left[\frac{(N - j)}{N} \right]^{1,5} \quad (\text{III-54})$$

Où N représente le nombre de nœuds suivant la direction radiale. Concernant la direction axiale ils proposent une grille évoluant selon une suite géométrique telle que :

$$\Delta Z_{k+1} = 1,15 \Delta Z_k \quad (\text{III-55})$$

Dans notre étude, le maillage utilisé est représenté sur la Figure III.8. Ce maillage se compose d'une grille standard qui coïncide avec les frontières du domaine de calcul et d'une grille décalée définissant les volumes de contrôle pour les vitesses.

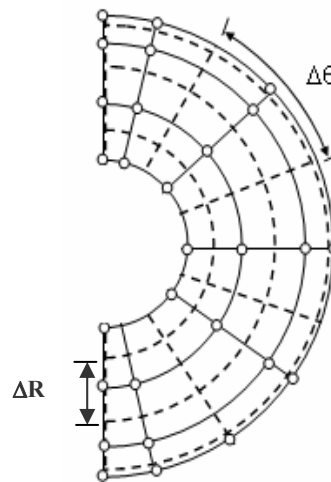


Figure III.8 : Représentation du maillage utilisé.

III.9. Solution des équations discrétisées

La résolution des équations algébriques (III-29), obtenues après discrétisation par la méthode des volumes finis, est effectuée en utilisant une méthode itérative. Ceci est dû à la commodité de ces méthodes à traiter les non-linéarités. Cependant, il existe plusieurs méthodes itératives. La plus simple est celle de Gauss-Seidel qui présente comme inconvénient la lenteur de convergence, particulièrement lorsque la grille est composée d'un nombre important de points.

Afin de remédier à ces difficultés, une combinaison entre la méthode de Gauss-Seidel et la méthode directe TDMA (*Tridiagonal Marix Algorithm*) est réalisée (Annexe 4). Il s'agit de la méthode ligne par ligne (*line by line method*).

III.9.1. Méthode ligne par ligne

La méthode ligne par ligne consiste à employer l'algorithme TDMA le long de toutes les lignes dans la direction Z, en supposant que les valeurs de la variable ϕ sur les lignes voisines (suivant r et θ) sont connues à partir de leurs valeurs précédentes. Cette procédure est ensuite répétée pour les lignes suivant les directions R et θ . Ainsi, comme les nouvelles valeurs de ϕ sont calculées le long d'une ligne, elles seront utilisées comme des valeurs estimées ϕ^* dans la résolution pour la ligne suivante.

Cette méthode de résolution est applicable aux cas bi et tridimensionnels et converge plus rapidement que celle de Gauss-Seidel. Par ailleurs, le choix de la direction de traverse et de balayage des lignes peut dans certains cas influencer d'une façon importante sur la vitesse de convergence [32]. La séquence dans laquelle les lignes sont parcourues peut être dictée par la géométrie et les propriétés du problème considéré.

III.9.2. Présentation de la méthode

Si dans l'équation discrétisée (III-29), les valeurs voisines ϕ_N et ϕ_S dans la direction R ainsi que ϕ_T et ϕ_B dans la direction θ sont connues. Alors, cette équation aura seulement trois inconnues, ϕ_P , ϕ_E et ϕ_W . Si de telles équations sont écrites le long des lignes dans la direction Z, leur forme sera :

$$a_i \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i \phi_{i-1} + d_i \quad (\text{III-56})$$

Avec :

ϕ_i , ϕ_{i+1} , et ϕ_{i-1} représentent ϕ_P , ϕ_E et ϕ_W respectivement.

$$a_i = a_P, \quad b_i = a_E, \quad c_i = a_W \quad (\text{III-57})$$

$$d_i = a_N \phi_N^* + a_S \phi_S^* + a_T \phi_T^* + a_B \phi_B^* + b$$

Ici, ϕ^* représente une valeur estimée déterminée à partir de l'itération précédente. L'ensemble des équations forme un système linéaire à matrice tridiagonale. Celui-ci est résolu par l'algorithme TDMA.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la procédure numérique choisie afin de simuler l'écoulement et le transfert de chaleur dans une conduite cylindrique horizontale en régime de convection mixte. Pour cela, nous avons opté pour la méthode des volumes finis avec un schéma en loi de puissance (*power law*). L'algorithme SIMPLER est adopté pour traiter le couplage pression-vitesse dans lequel la méthode ligne par ligne est exploitée pour résoudre les équations discrétisées.

Le code de calcul que nous avons développé se présente comme une extension du code SIMPLER qui est conçu pour traiter les phénomènes d'écoulement, de transfert thermique et de transfert de masse en situations bidimensionnelles seulement. Notre code est établi dans le but de résoudre les problèmes tridimensionnels en coordonnées cylindriques (r, θ, x) et en coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Evidemment, il reste aussi applicable aux configurations bidimensionnelles.

Le chapitre suivant sera consacré à la validation du code de calcul ainsi qu'à la présentation des différents résultats qui en découlent.

CHAPITRE IV

RESULTATS ET DISCUSSION

CHAPITRE IV

RESULTATS ET DISCUSSION

Introduction

Dans ce chapitre, seront présentés les principaux résultats issus de la présente étude ainsi que leur interprétation et ce, après une étude sur la sensibilité des résultats numériques au maillage qui sera suivie d'une validation du code de calcul en confrontant les résultats obtenus à ceux de la littérature.

IV.1 Sensibilité des résultats numériques au maillage

Dans toute résolution numérique la précision des résultats dépend du maillage utilisé. La solution numérique converge vers la solution réelle lorsque le maillage n'influe plus sur les résultats et que l'erreur entre deux solutions tend vers zéro. Pour satisfaire à ce critère, une étude de sensibilité des résultats numériques au maillage a été réalisée.

La figure IV.1 montre que le maillage (**60(Z) x55(R) x15(θ)**) est le plus adéquat étant donné que les valeurs du nombre de Nusselt restent insensibles si l'on continue à augmenter le nombre de nœuds.

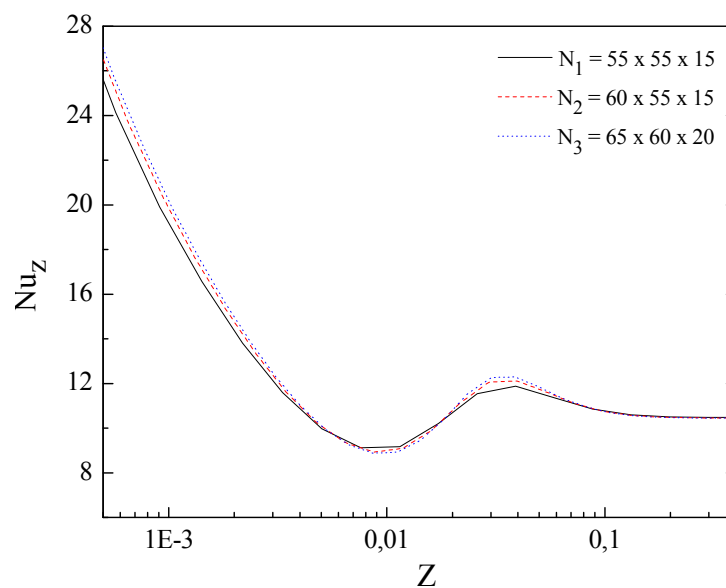
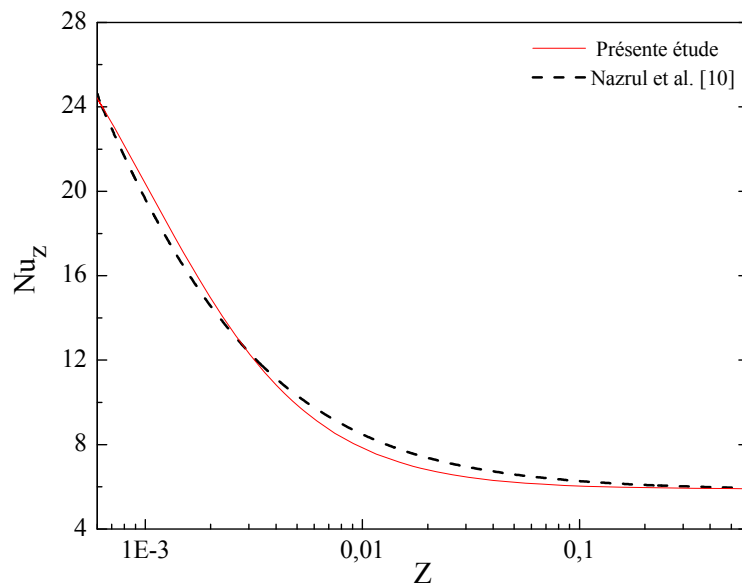


Figure IV.1 : Effet du maillage sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt.
 $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Br = 0$.

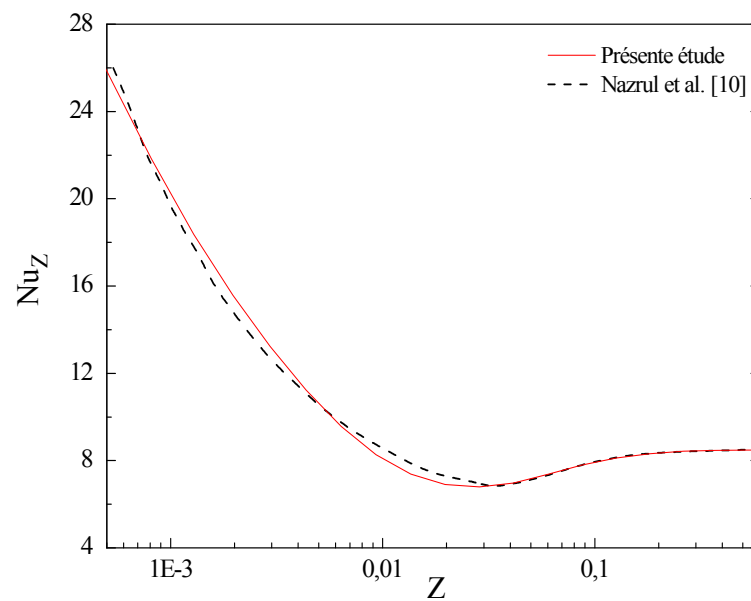
IV.2 Validation du code de calcul

La validation du code de calcul est vérifiée après comparaison des valeurs du nombre de Nusselt calculées le long de la paroi interne de la conduite annulaire, où le flux de chaleur est maintenu constant, avec celles issues de l'étude de Nazrul et al [10]. Cette comparaison est illustrée sur les figures IV.2 (a), (b) et (c).

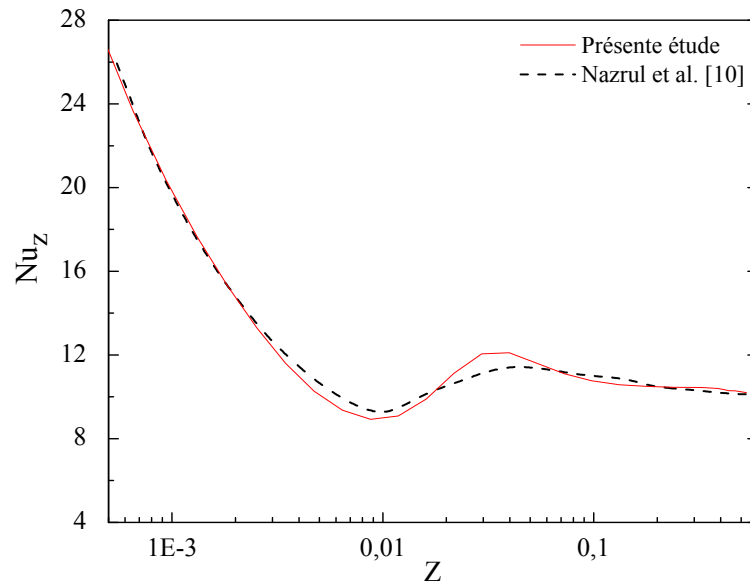
Ces figures montrent une bonne concordance, notamment pour les valeurs du nombre de Rayleigh inférieures à 10^5 . En effet, l'erreur commise est de l'ordre de 3,21% pour $Ra = 0$ et de 2,60%, pour $Ra = 10^5$ alors qu'elle est de l'ordre de 4,20% pour $Ra = 10^6$. Ce qui permet de valider notre code de calcul pour la simulation numérique des résultats.



(a)



(b)



(c)

Figure IV.2 : Comparaison entre les valeurs du nombre de Nusselt obtenues par la présente étude et celles de Nazrul et al. [10]. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Br = 0$.

(a) $Ra = 0$ (b) $Ra = 10^5$ (c) $Ra = 10^6$

IV.3 Simulation des écoulements en mode de convection forcée

IV.3.1 Influence de la dissipation visqueuse

La dissipation visqueuse résulte du frottement des couches fluides les unes par rapport aux autres et avec la paroi se traduit par un chauffage du fluide. La prise en compte de cette fonction dans l'équation de l'énergie entraîne des modifications du champ de température moyenne du fluide et par conséquent, dû nombre de Nusselt.

Les figures IV.3 et IV.4 illustrent respectivement l'évolution axiale du nombre de Nusselt calculé le long de la surface interne de l'entrefer et de la température moyenne, pour différentes valeurs du nombre de Brinkman. Les courbes de la figure IV.3 présentent une allure décroissante tendant vers des valeurs asymptotiques dans la zone correspondant au régime établi et ce, pour des valeurs du nombre de Brinkman inférieures à 0,5, selon le tableau IV.1. Ce dernier montre que le transfert thermique est meilleur pour les valeurs élevées du nombre de Brinkman. Et les valeurs du nombre de Nusselt restent constamment positives.

Pour une valeur du nombre de Brinkman égale à 0,5, nous obtenons un comportement différent. Effectivement, dans la zone près de l'entrée de la conduite ($Z < 0,004$), les valeurs du nombre de Nusselt sont négatives. Ceci s'explique par le fait que l'introduction de la dissipation visqueuse engendre l'augmentation de la température moyenne du fluide qui va dépasser celle de la paroi interne et par conséquent, l'écart entre ces deux températures va augmenter toujours dans le sens négatif jusqu'à une position correspondant à $Z \approx 0,004$ où cet écart tend vers zéro ($T_w \rightarrow T_m$), donnant lieu à une valeur

minimale du nombre de Nusselt ($Nu_z \rightarrow -\infty$). A cette même position axiale, nous observons un saut du nombre de Nusselt vers un maximum ($Nu_z \rightarrow +\infty$) suivie d'une décroissance au-delà de $Z \approx 0,004$, résultant de l'augmentation de l'écart de température étant donné que la température de la paroi dépasse à présent celle du fluide (sa température moyenne). Très loin de l'entrée, $Z \geq 0,05$, le nombre de Nusselt tend vers une valeur asymptotique égale à 12,62.

Tableau IV.1 : Valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt obtenues pour différentes valeurs du nombre de Brinkman.

Nu_z	Br = 0	Br = 0,01	Br = 0,05	Br = 0.10	Br = 0,50
	6,00	7,90	8,00	8,44	12,62

Notons également que la compétition entre la diminution de l'intensité de l'échange thermique lors du frottement fluide/paroi et la génération de chaleur engendrée par la dissipation visqueuse, prolonge la longueur d'entrée et retarde l'établissement du régime thermique.

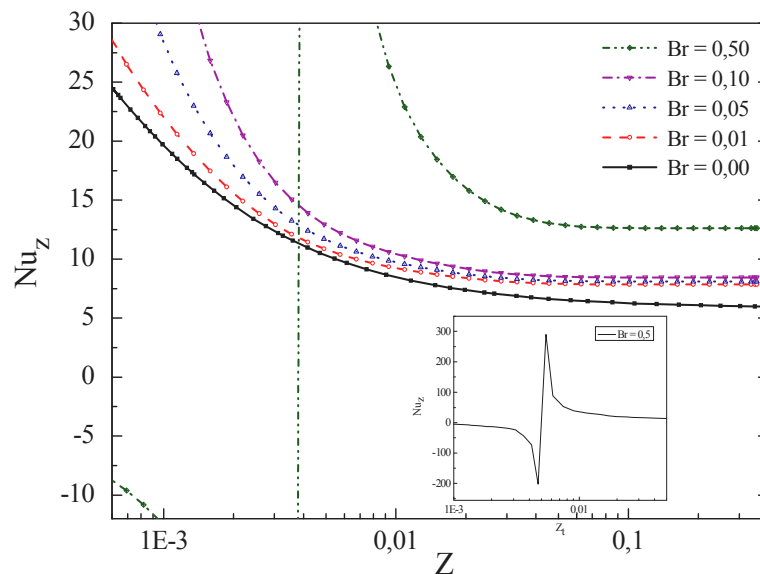


Figure IV.3 : Effet de la dissipation visqueuse sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Ra = 0$.

La figure IV.4 montre également, que la température moyenne du fluide augmente avec l'augmentation du nombre de Brinkman (8,21% pour $Br = 0,01$ et 16,43% pour $Br = 0,05$, en comparaison avec le cas de référence $Br = 0$) est devient supérieure à celle de l'entrée ($T_m^* > 1$) pour une valeur du nombre de Brinkam égale à 0,50.

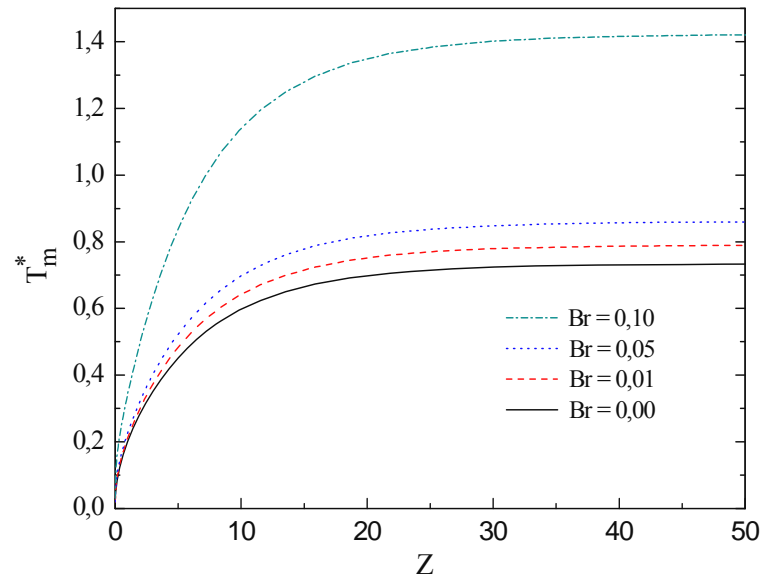


Figure IV.4 : Evolution axiale de la température moyenne du fluide en fonction du nombre de Brinkman. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Ra = 0$.

IV.3.2 Influence de la variabilité de la viscosité dynamique

L'influence de la thermodépendance de la viscosité dynamique du fluide considéré, sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt pour différentes valeurs du nombre de Brinkman est illustrée à travers la figure IV.5.

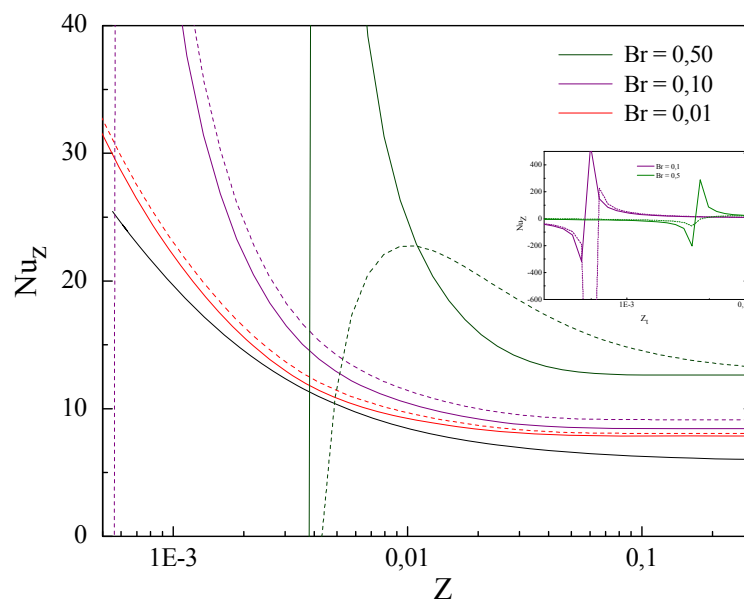


Figure IV.5 : Effet de la thermodépendance de la viscosité dynamique sur le développement axial du nombre de Nusselt, pour différents nombres de Brinkman. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 7$; $Ra = 0$
 viscosité dynamique variable, — viscosité dynamique constante.

Toutes les courbes montrent le même aspect : une diminution de l'échange thermique localisée au niveau de la zone d'entrée puis, au fur et à mesure que l'on s'enfonce dans la conduite, le nombre de Nusselt tend vers une valeur asymptotique qui traduit l'établissement du régime thermique très loin de l'entrée et ce, pour chaque valeur du nombre de Brinkman.

Il est à noter que la diminution de la viscosité dynamique près de la paroi, suite à l'élévation de la température dans cette zone, entraîne l'accélération des couches pariétales et une augmentation remarquable de la température moyenne du fluide par rapport au cas isovisqueux, comme le montre la figure IV.6. Ceci conduit à l'amélioration du transfert thermique, d'une moyenne générale, variant entre 3,68% et 7,52% par rapport au cas isovisqueux.

Il est intéressant de noter également sur la figure IV.5 que la discontinuité de la courbe du nombre de Nusselt apparaît à partir de $Br = 0,1$ alors qu'elle apparaissait à partir de $Br = 0,5$ pour le cas isovisqueux.

De plus et contrairement au cas isovisqueux, pour $Br = 0,5$, nous remarquons que la courbe du nombre de Nusselt passe par un maximum correspondant à une valeur finie égale à 22,85 en $Z = 0,01$. Cette valeur correspond à l'écart minimal entre la température de la paroi et la température moyenne du fluide.

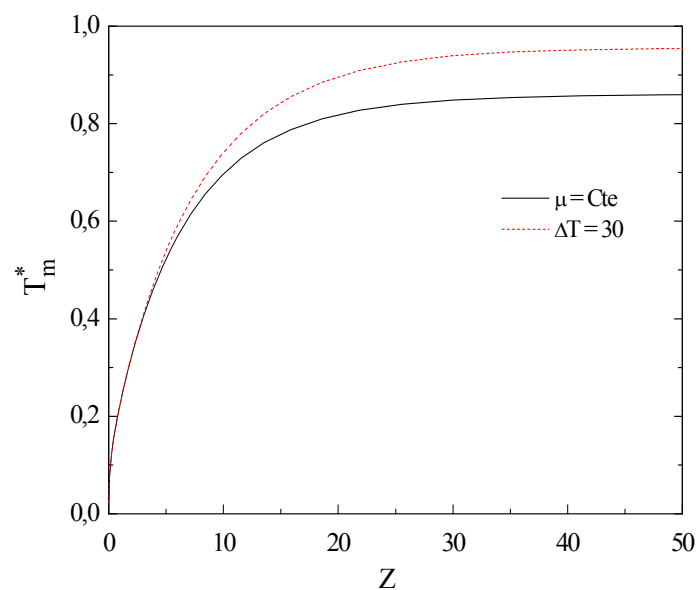


Figure IV.6 : Effet de la thermodépendance de la viscosité dynamique sur la répartition du champ de température moyenne du fluide.

$$R_1 = 0,5 ; Re = 200 ; Pr = 7 ; Ra = 0 ; Br = 0,1$$

IV.4 Simulation de l'écoulement en mode de convection mixte

Dans cette partie, nous présenterons les résultats portant sur l'effet de certains paramètres sur le comportement hydrodynamique et thermique de l'écoulement en mode de convection mixte. Ces paramètres sont : le nombre de Rayleigh, de la dissipation

visqueuse, l'inclinaison de la conduite annulaire par rapport à l'horizontale, la variation avec la température de la viscosité dynamique et enfin, le nombre adimensionnel de Reynolds.

IV.4.1 Effet du nombre de Rayleigh

a) Profil de vitesse

L'effet de l'intensité de la convection mixte, traduite par la variation du nombre de Rayleigh, sur le profil de vitesse établi, est illustré sur la figure IV.7.

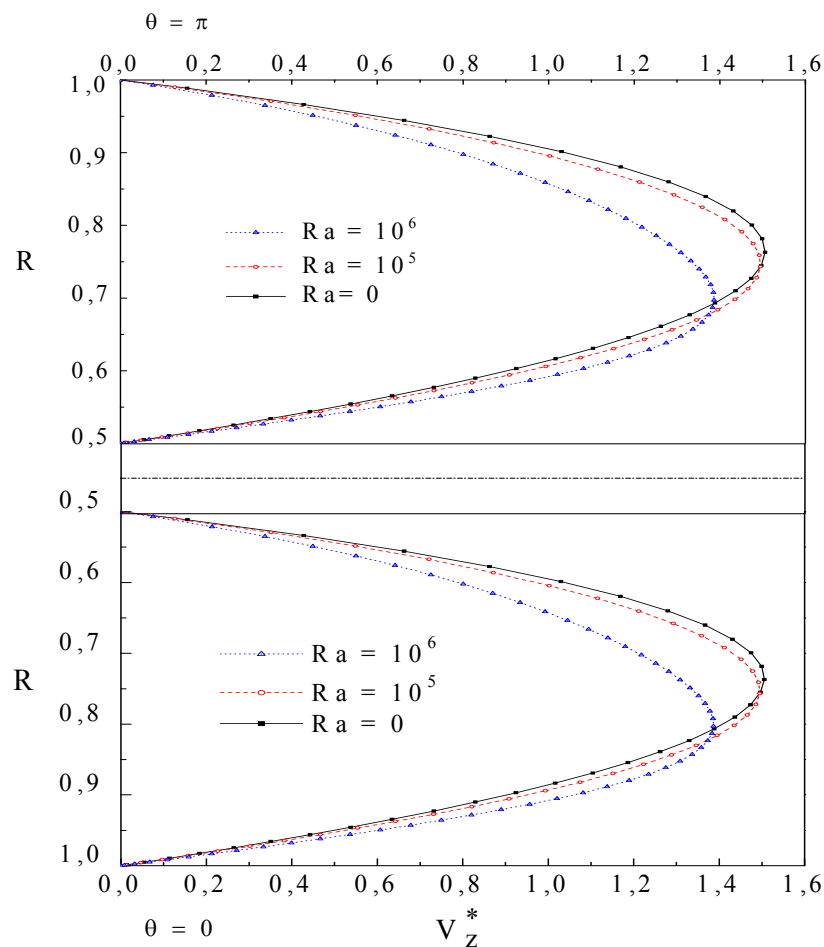


Figure IV.7 : Influence du nombre de Rayleigh sur les profils de la vitesse axiale.

$$R_1 = 0,5 ; Re = 200 ; Pr = 0,7 ; Br = 0 ; \alpha = 0.$$

Il est à noter que lorsque le taux de chauffage augmente et par conséquent, le nombre de Rayleigh, la vitesse axiale du fluide dans la région centrale de l'entrefer diminue de 0,73% pour $Ra = 10^5$ et de 8,37% pour $Ra = 10^6$ par rapport au cas de la convection forcée ($Ra = 0$). En effet, l'augmentation du nombre de Rayleigh se traduit par l'augmentation de l'intensité des courants secondaires, localisés près de la paroi interne de la conduite exposée à un flux thermique constant. Ces courants de fluide chaud tendent à orienter le fluide vers la paroi extérieure de l'entrefer. On remarque que l'augmentation du nombre de Rayleigh entraîne respectivement la diminution et l'augmentation du gradient pariétal de vitesse du côté intérieur et extérieur de l'entrefer. De plus, la vitesse maximale diminue en

fonction de l'augmentation du nombre de Rayleigh et se déplace vers le côté extérieur de l'entrefer sous l'effet de l'augmentation de l'intensité des courants secondaires.

b) Coefficient de frottement apparent

L'écoulement d'un fluide réel dans une conduite annulaire est systématiquement accompagné d'une perte de charge. Cette dernière est un paramètre important dans le dimensionnement des installations industrielles et peut être déterminée en calculant le coefficient de frottement.

La figure IV.8 illustre l'évolution axiale du coefficient de frottement apparent calculé au niveau des deux frontières de l'entrefer (paroi interne et externe) et ce, pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.

Nous remarquons l'existence de deux comportements différents selon qu'il s'agisse de la paroi interne ou externe. En effet, les courbes se superposent sensiblement à l'entrée de la conduite puis se séparent à partir de $Z = 1,08 \cdot 10^{-3}$. Les courbes qui représentent le coefficient de frottement relatif à la paroi interne se localisent au-dessus de celles relatives à la paroi externe. Ceci est dû au fait que le gradient de vitesse au niveau de la paroi interne, (chauffée par un flux de chaleur), est plus élevé que celui de la paroi externe, (maintenue à une température pariétale uniforme).

Il est intéressant de remarquer également que les courbes relatives à la paroi interne tendent vers des valeurs asymptotiques différentes suivant la valeur du nombre de Rayleigh : 27,07 ; 27,75 et 28,67 pour des valeurs du nombre de Rayleigh égales à 0 ; 10^5 et 10^6 , respectivement. Ceci est dû à la condition aux limites thermique considérée (flux pariétal uniforme) qui fait en sorte que les courants secondaires se maintiennent jusqu'à la sortie. Par contre, pour la paroi externe, nous remarquons la naissance d'une zone intermédiaire pour $10^{-2} \leq Z \leq 10^{-1}$ où la convection naturelle est prédominante. Les courbes tendent, plus en aval vers une valeur asymptotique unique indépendante du nombre de Rayleigh, et égale à 22.

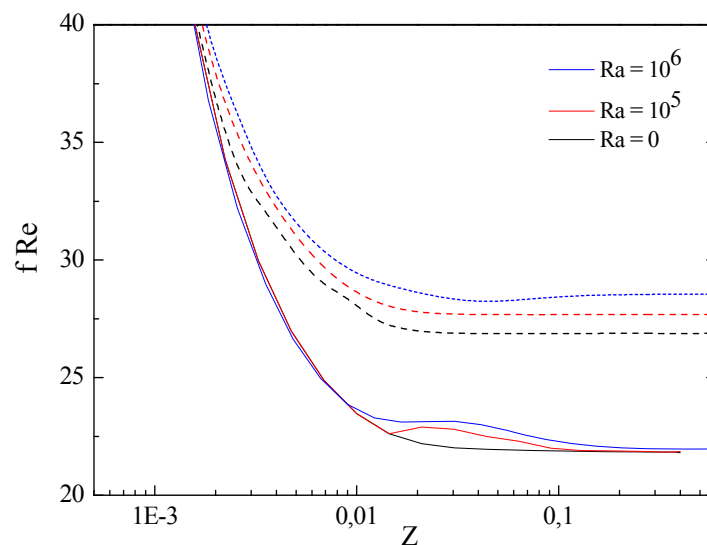


Figure IV.8 : Influence du nombre de Rayleigh sur le coefficient de frottement le long de la conduite annulaire. $R_1 = 0,5$, $Pr = 0,7$, $Re = 200$, $\alpha = 0$, $Br = 0$.
 paroi interne, — paroi externe.

c) Nombre de Nusselt

L'évolution du nombre de Nusselt locale moyenné sur toute la périphérie de la paroi intérieure de l'espace annulaire pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh est illustrée sur la figure (IV.9).

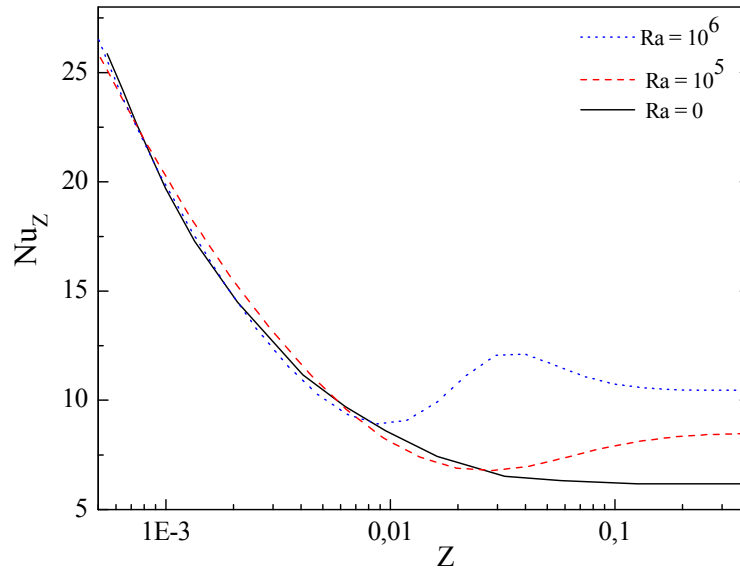


Figure IV.9 : Influence du nombre de Rayleigh sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt le long de la conduite annulaire. $R_1 = 0,5$, $Pr = 0,7$, $Re = 200$, $\alpha = 0$, $Br = 0$.

Nous remarquons que près de l'entrée de la conduite annulaire et jusqu'à une position $Z = 0,009$, les trois courbes se confondent et ont la même allure que celle obtenue pour le cas d'un écoulement en mode de convection forcée ($Ra = 0$). Ce qui signifie que les effets de la convection naturelle (courants secondaires) dans cette région sont négligeables. La décroissance du nombre de Nusselt s'explique par l'augmentation rapide de l'écart de température entre la paroi intérieure et celle des couches fluides adjacentes à la paroi.

Pour des positions axiales situées relativement loin de l'entrée ($Z > 0,01$), les courbes du nombre de Nusselt correspondant à un nombre de Rayleigh différent de zéro ($Ra = 10^5$ et $Ra = 10^6$) se détachent de celle relative à $Ra = 0$. Ceci s'explique par la présence des courants secondaires, induits par la prédominance de la convection naturelle dans cette région, et dont l'élévation du degré de l'intensité améliore le transfert thermique.

Plus en aval ($Z > 0,20$), les courbes présentent une tendance asymptotique vers des valeurs constantes du nombre de Nusselt, correspondant à un écoulement pleinement développé. Les valeurs asymptotiques atteintes pour $Ra = 10^5$ et $Ra = 10^6$ sont respectivement de 1,38 et 1,68 fois plus élevées que la valeur correspondant à un écoulement de convection forcée pure dont la valeur est égale à 6,13.

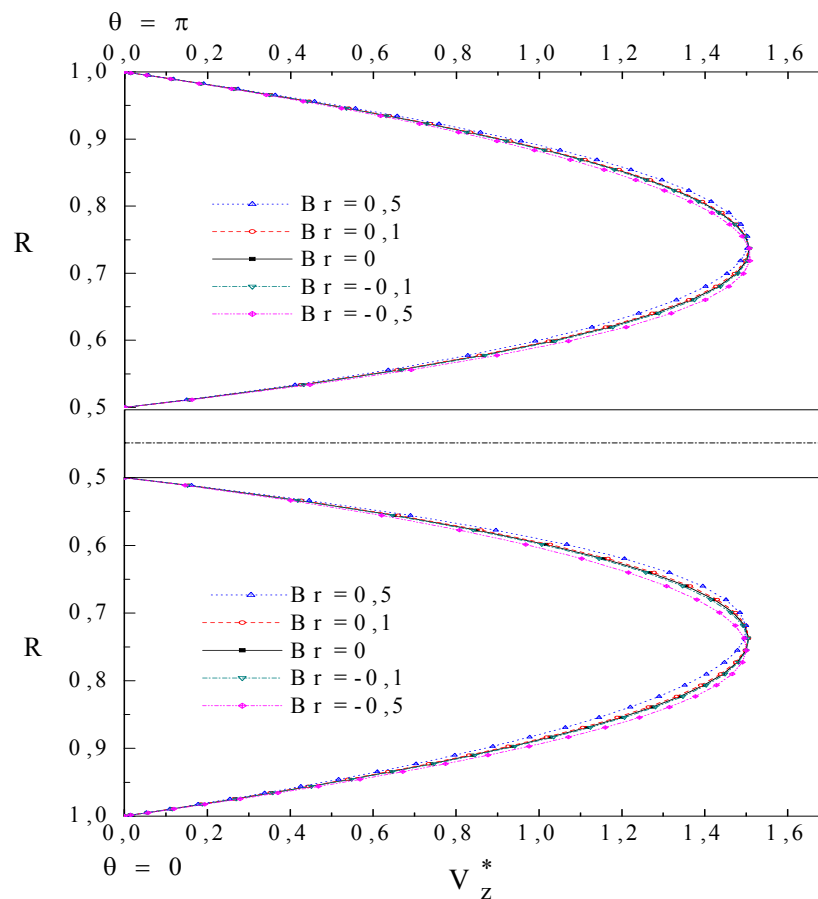
Il est intéressant de noter que les courbes tendent vers des valeurs asymptotiques différentes suivant la valeur du nombre de Rayleigh, contrairement au cas de l'écoulement en mode de convection mixte dans une conduite cylindrique maintenue à température

pariétale uniforme où apparaît une troisième zone correspondant à la prédominance, une seconde fois, de la convection forcée dans la zone d'établissement et par conséquent, une tendance vers la même valeur asymptotique. Ceci s'explique par le fait que l'exposition de la paroi intérieure à un flux pariétal constant provoque un écart constant de température entre la paroi et le fluide $[T_w(z)-T_m(z)]$ qui se maintient tout le long de la conduite. Ce qui fait que les courants secondaires persistent et par conséquent, la convection naturelle.

IV.4.2. Effet de la dissipation visqueuse

a) Profil de vitesse

Les figures IV.10 (a) et (b) représentent les profils établis de vitesse axiale pour deux valeurs du nombre de Rayleigh : $Ra = 10^5$ et $Ra = 10^6$, en tenant compte de la fonction de dissipation dans l'équation de l'énergie.



(a)

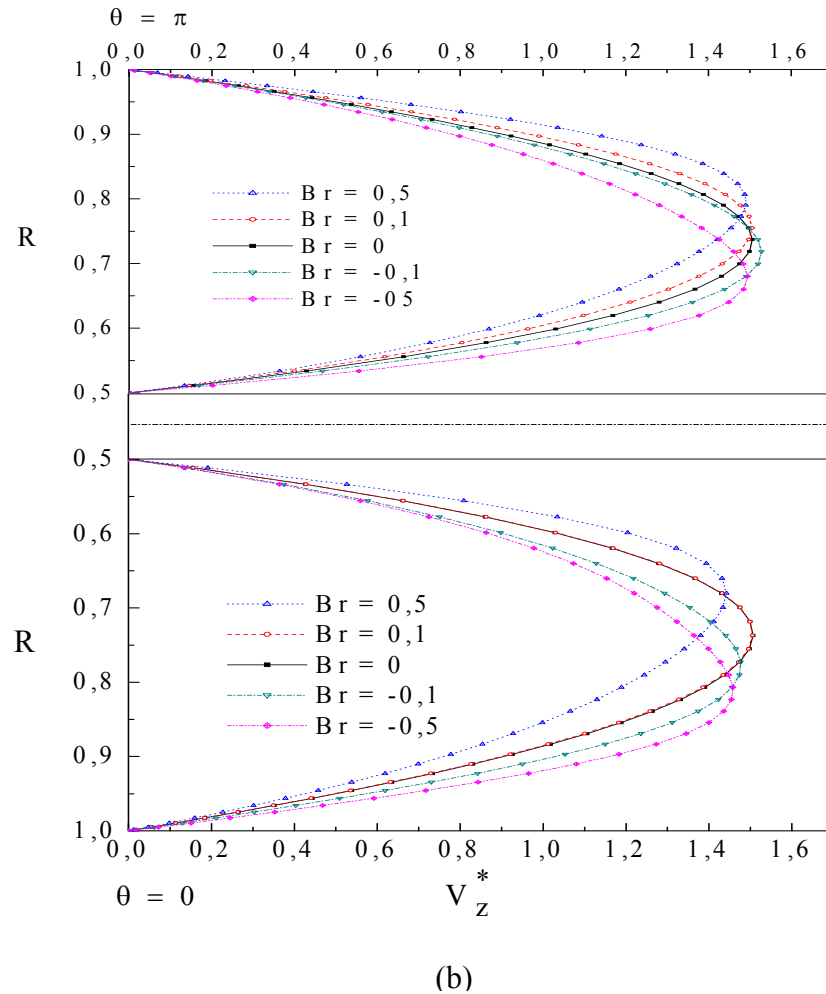


Figure IV.10 : Influence de la prise en compte de la dissipation visqueuse sur les profils établis de vitesse axiale. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$.
(a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$

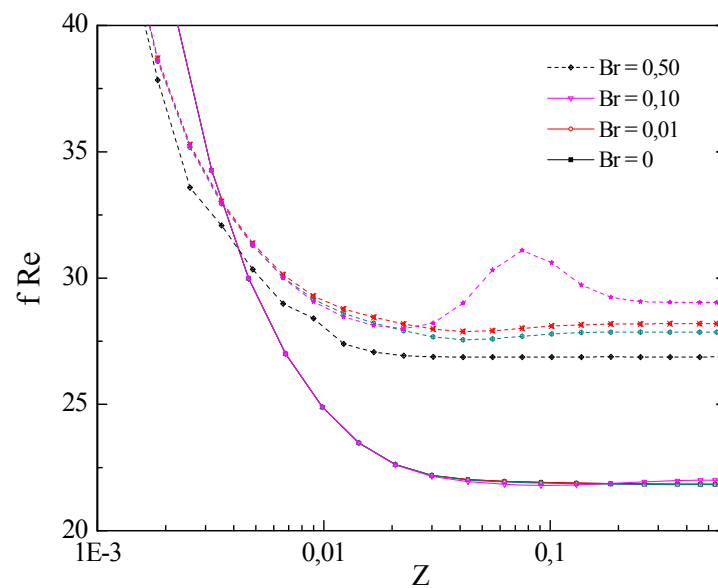
Nous remarquons qu'au fur et à mesure que l'on augmente la valeur du nombre de Brinkman (augmentation de l'effet de la dissipation visqueuse), la vitesse maximale devient relativement plus importante et les profils se déportent vers la partie interne de l'entrefer. En effet, l'augmentation de la dissipation visqueuse entraîne une élévation de la température moyenne du fluide et donc, la diminution de l'écart de température fluide/paroi interne. Par conséquent, les couches fluides adjacentes à la paroi s'accélèrent conduisant ainsi à l'augmentation du gradient pariétal de vitesse. Par conservation du débit volumique, le gradient de vitesse pariétale au niveau de la paroi externe diminue alors.

D'un autre côté, en passant d'un nombre de Rayleigh égal à 10^5 à 10^6 les profils de vitesse se déportent vers la paroi extérieure étant donné que l'intensité des courants secondaires s'est amenuisé vu la diminution de l'écart de température (entre la paroi externe et le fluide).

b) Coefficient de frottement apparent

La figure IV.11 (a) présente l'évolution axiale du coefficient de frottement apparent relatif à la paroi interne et externe de la conduite annulaire, et ce pour différentes valeurs du nombre de Brinkman et un nombre de Rayleigh égal à 10^5 .

Les courbes suivent la même allure : une décroissance au niveau de l'entrée de la conduite puis une tendance asymptotique. En effet, en s'enfonçant dans la conduite annulaire, les profils de vitesses se déforment depuis la forme rectangulaire initiale (correspondant à un profil de vitesse uniforme) jusqu'au profil correspondant à l'écoulement établi. Les gradients de vitesse, et par conséquent ($f Re$) diminuent alors. Lorsque le régime établi est enfin atteint, le produit ($f Re$) atteint sa valeur asymptotique. Concernant l'influence de la variation du nombre de Brinkman, nous observons deux comportements distincts entre les courbes relatives à la paroi externe et celle de la paroi interne. L'effet de la dissipation visqueuse est quasiment inexistant au niveau de la paroi externe. Sur la paroi intérieure en revanche, son effet se fait plus ressentir, en particulier pour $Br = 0,5$ où nous obtenons un maximum de 31,09 pour $Z = 7,7 \cdot 10^{-2}$ et une valeur asymptotique égale à 29,02. Cette valeur élevée du coefficient de frottement est due à la chaleur supplémentaire créée par le frottement des couches fluides entre elle d'une part et en particulier celui du fluide contre la paroi d'autre part qui tend à augmenter la température des couches fluides adjacentes à la paroi interne.



(a)

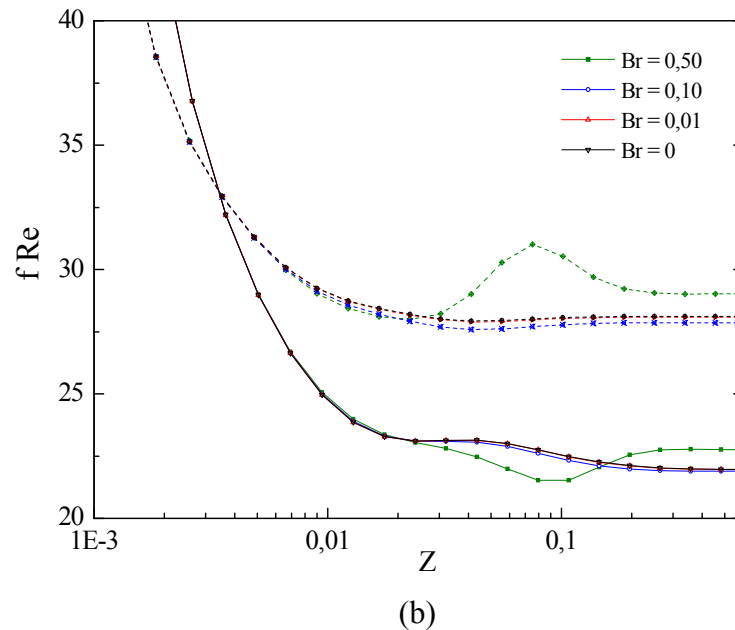


Figure IV.11 : Influence de la prise en compte de la dissipation visqueuse sur le coefficient de frottement le long de la conduite annulaire.

$$R_1 = 0,5 ; Re = 200 ; Pr = 0,7 , \alpha = 0.$$

----- paroi interne, — paroi externe
(a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$.

Par ailleurs, sur la figure IV.11 (b) où le nombre de Rayleigh est égal à 10^6 , nous obtenons le même comportement que celui observé pour $Ra = 10^5$. Il est néanmoins intéressant de noter une déformation des courbes relatives à la paroi externe. Comme vu précédemment (Figure 8 : influence du nombre de Rayleigh), l'augmentation de l'intensité de la chaleur, générée au sein de fluide suite à la prise ne compte de la dissipation visqueuse, n'a également pas d'effet sur le coefficient frottement calculé au niveau de la paroi extérieure pour les nombres de Brinkman choisis ($Br \leq 0,5$). En augmentant l'intensité des courants secondaires à travers le nombre de Rayleigh, on note une légère variation du coefficient de frottement (cette augmentation, visible sur la projection axiale de l'équation de l'impulsion (II.19), correspond au dernier terme de second membre). En effet, pour une valeur du nombre de Brinkman égale à 0,50, la courbe passe par une valeur minimale égale à 21,49 en $Z = 8,6 \cdot 10^{-2}$ où la convection naturelle est prédominante, puis tend plus en aval vers une valeur asymptotique égale à 22,78. Ceci est évident étant donné que la vitesse centrale, passe par un maximum et par conséquent, le gradient pariétal de vitesse prend alors une valeur minimale sur la paroi et ce, par conservation du débit volumique (figure IV.10 (b)).

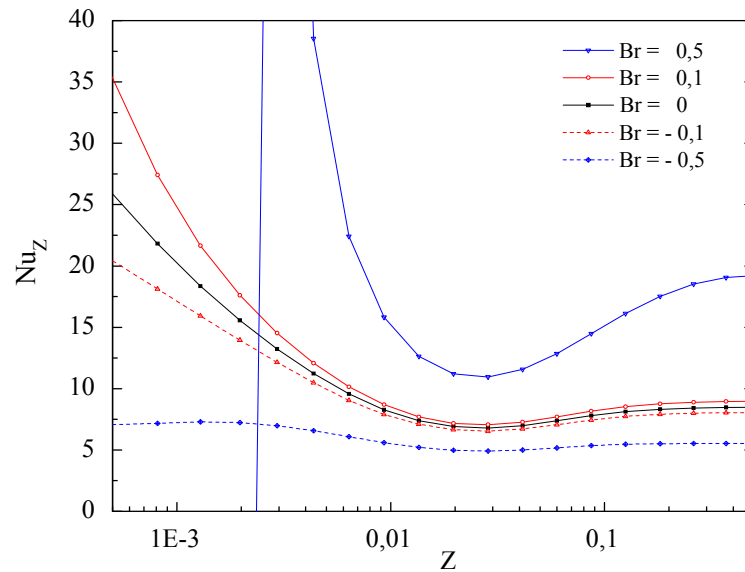
c) Nombre de Nusselt

Les figures IV.12 (a) et (b) présentent Les répercussions de la prise en compte de la fonction de dissipation ($Br > 0$ et $Br < 0$) pour deux valeurs du nombre de Rayleigh, sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt (calculé au niveau la paroi interne de la conduite annulaire, où le flux de chaleur est maintenu constant).

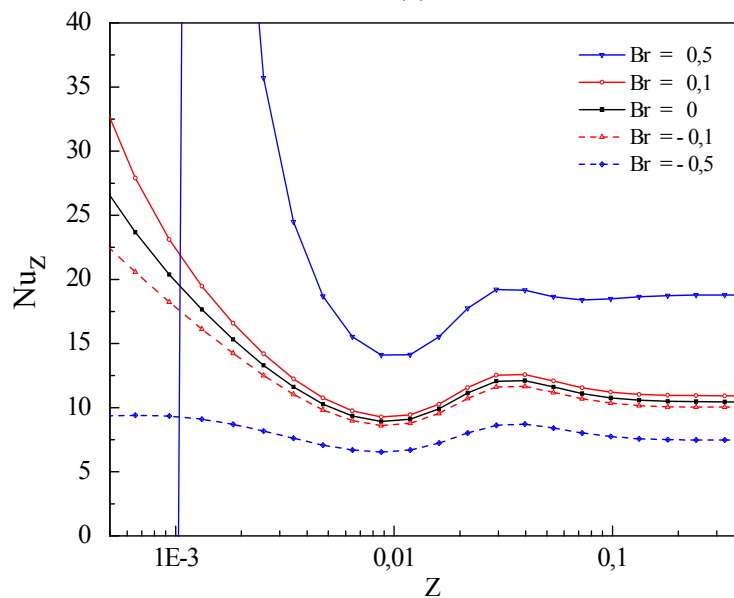
Pour des valeurs positives du nombre de Brinkman, la production de chaleur par dissipation visqueuse dans la masse fluide fait augmenter le nombre de Nusselt de 8,48%

et de 127% dans la zone établie pour respectivement $Br = 0,1$ et $Br = 0,5$, par rapport au cas où la dissipation visqueuse n'est pas prise en compte. En effet, avec l'augmentation du nombre de Brinkman, l'échange thermique s'intensifie du fait de l'augmentation de la température moyenne du fluide.

Il est intéressant de noter que l'introduction de la dissipation visqueuse diminue l'effet de la convection naturelle. En effet, pour $Ra = 10^6$ (figure IV.112. b), le nombre de Nusselt n'augmente que de 4,79% et 80,65% pour respectivement $Br = 0,1$ et $Br = 0,5$ par rapport au cas $Br = 0$. Soit, une diminution de près de 36% pour $Br = 0,1$ et de 43% pour $Br = 0,5$, par rapport au cas de la figure (IV.12.a) relatif à $Ra = 10^5$.



(a)



(b)

Figure IV.12 : Influence de la dissipation visqueuse sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt., $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $\alpha = 0$.

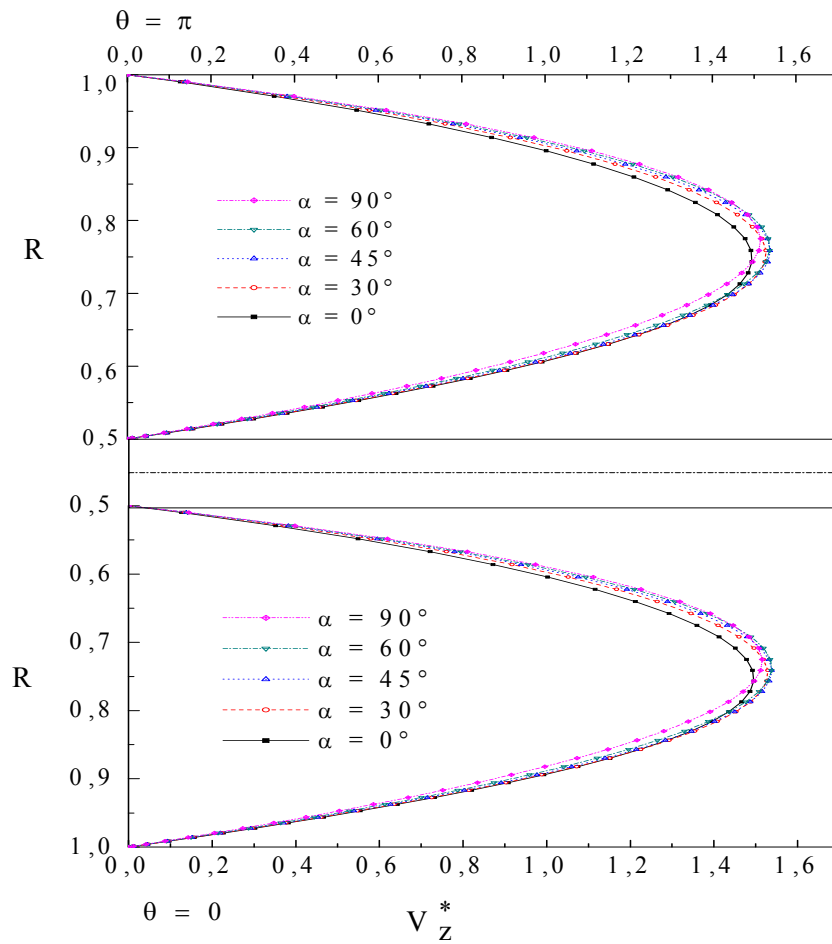
(a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$

IV.4.3. Effet de l'inclinaison de la conduite

L'inclinaison de la conduite annulaire par rapport à l'horizontale joue un rôle important dans le comportement hydrodynamique du fluide en écoulement à l'intérieur d'une conduite subissant un chauffage ou refroidissement. En effet, les forces de poussée agissent différemment selon l'inclinaison par rapport à l'horizontale par conséquent l'influence de l'écoulement secondaire sur l'écoulement principal est alors différente.

a) Profil de vitesse

Les figures IV.13 (a) et (b) illustrent l'effet de la variation de l'inclinaison par rapport à l'horizontale de la conduite annulaire concentrique, sur les profils de vitesse axiale en régime hydrodynamique établi. On remarque que les vitesses maximales augmentent d'une part avec l'augmentation du degré d'inclinaison de la conduite $0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$ et d'autre part, avec celle du nombre de Rayleigh. L'impact des variations de l'inclinaison, sur les profils de vitesse est clairement mis en évidence à travers la figure IV.13 (b) où les courbes y sont nettement espacées.



(a)

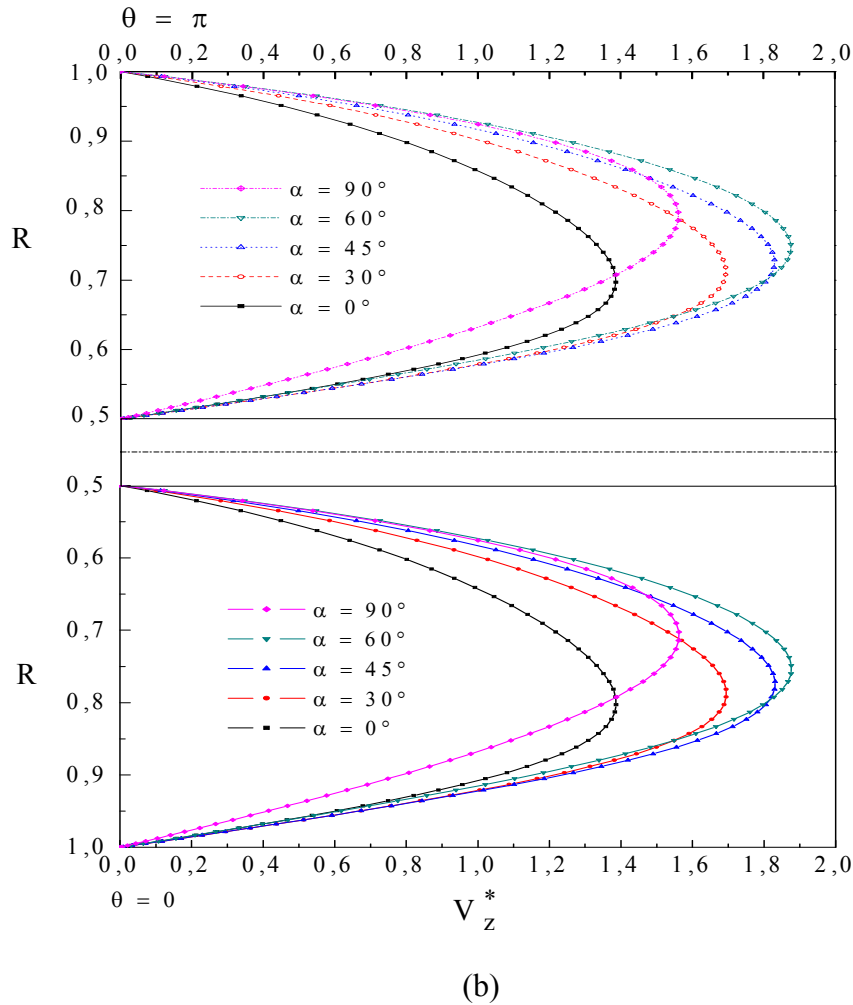


Figure IV.13 : Influence de l'inclinaison de la conduite annulaire sur les profils de la vitesse établie. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Br = 0$.
(a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$

Pour une conduite verticale ($\theta = 90^\circ$), le profil de vitesse tracé diffère des autres. En effet, la vitesse maximale atteinte est comprise entre celles correspondant à $\theta = 0^\circ$ (conduite horizontale) et 30° , d'autre part ce profil s'est déporté, contrairement aux autres, vers la paroi interne.

Notons également que le redressement de la conduite entraîne la diminution de l'intensité de la poussée, qui se traduit par un rapprochement des profils de vitesse de la paroi interne en eux.

b) Coefficient de frottement apparent

Etant donné que l'inclinaison de la conduite annulaire induit des effets importants sur le développement des profils de vitesse axiale ($Ra = 10^6$), cela se répercute nécessairement sur le coefficient de frottement apparent ($f Re$). Ainsi, nous présentons sur les figures

IV.14 (a) et (b), l'évolution axiale de ce dernier sur les deux frontières de l'entrefer pour différents angles d'inclinaison.

Notons que le degré d'inclinaison de la conduite a le même effet sur le coefficient de frottement que ce soit au niveau de la paroi interne ou externe. En effet, l'augmentation de l'angle d'inclinaison entraîne une diminution du coefficient de frottement apparent dans la zone où la convection naturelle est prédominante (tableau IV.2) en particulier.

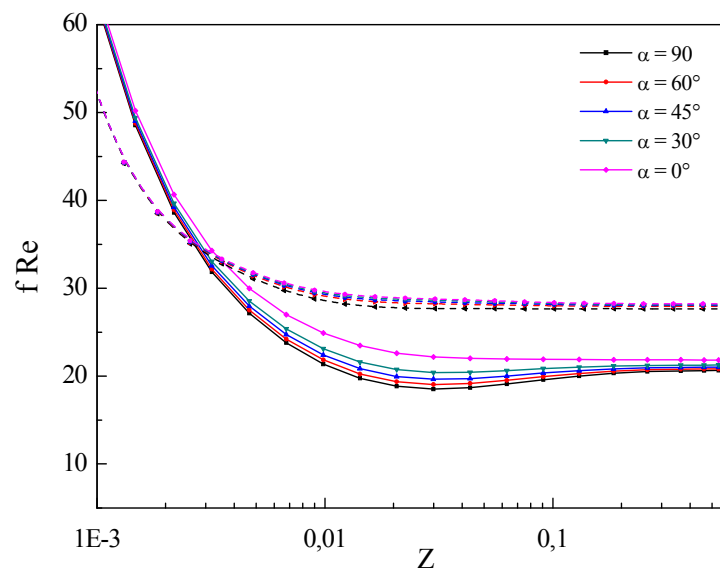
Tableau IV.2 : Ecarts, par rapport à l'horizontale, du coefficient de frottement apparent pour différents degrés d'inclinaison de la conduite.

$Ra = 10^5$		$Ra = 10^6$	
$45^\circ/0^\circ$	$90^\circ/0^\circ$	$45^\circ/0^\circ$	$90^\circ/0^\circ$
11,41	16,24	37,71	63,50
1,31	4,00	12,40	29,04

Il est intéressant de noter qu'au niveau de la paroi interne, les courbes représentant l'évolution axiale du coefficient de frottement apparent passent par un maximum, suite à l'intensification des courants secondaires.

Pour la paroi externe, soumise à une température pariétale constante, les courbes se situent en dessous des précédentes et passent par un minimum.

Pour le cas $Ra = 10^5$, comme l'illustre la figure précédent (13.a), l'influence de l'inclinaison de la paroi par rapport à l'horizontale est faiblement ressentie dans la zone établie (n'est pas très visibles). Cela se répercute directement sur l'évolution axiale dans cette même région du coefficient de frottement.



(a)

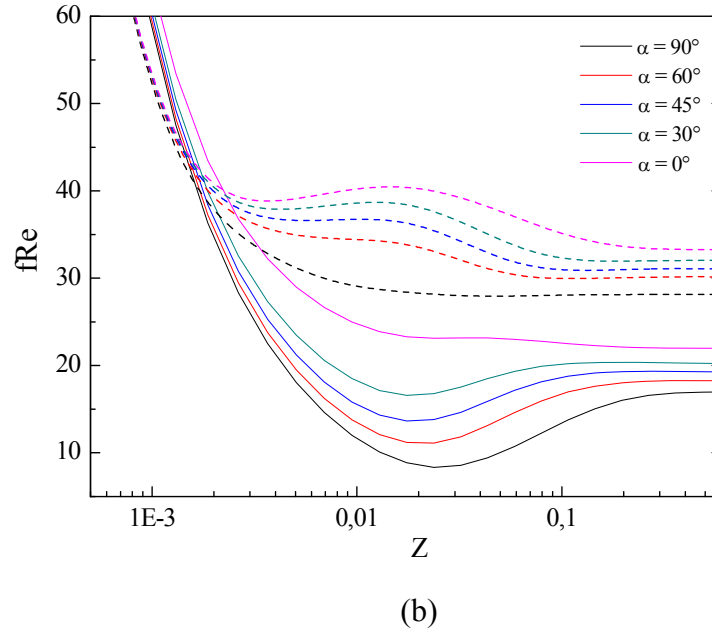


Figure IV.14 : Développement axial du coefficient de frottement de Fanning le long de la conduite annulaire. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Br = 0$.

----- paroi interne, — paroi externe
(a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$

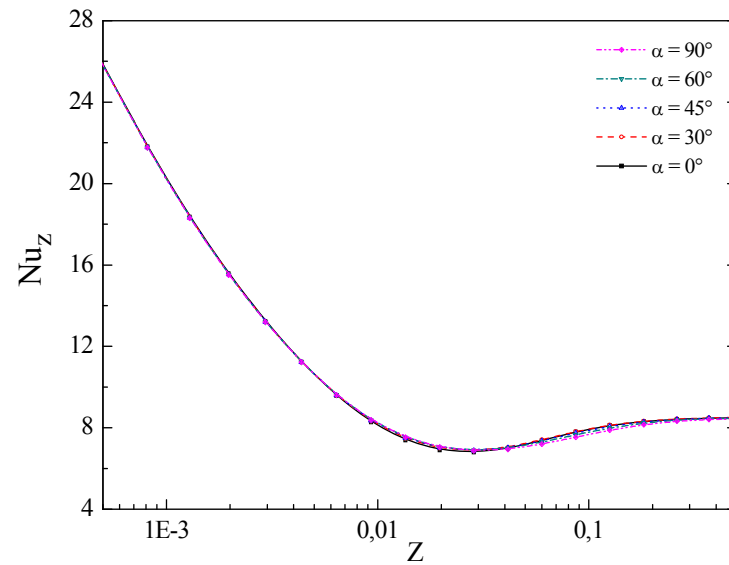
c) Nombre de Nusselt

Afin de bien cerner l'impact de l'inclinaison de la conduite par rapport au plan horizontal, sur le transfert thermique, nous avons tracé, sur les figures IV.15 (a) et (b), l'évolution axiale du nombre de Nusselt pour différentes valeurs du degré d'inclinaison.

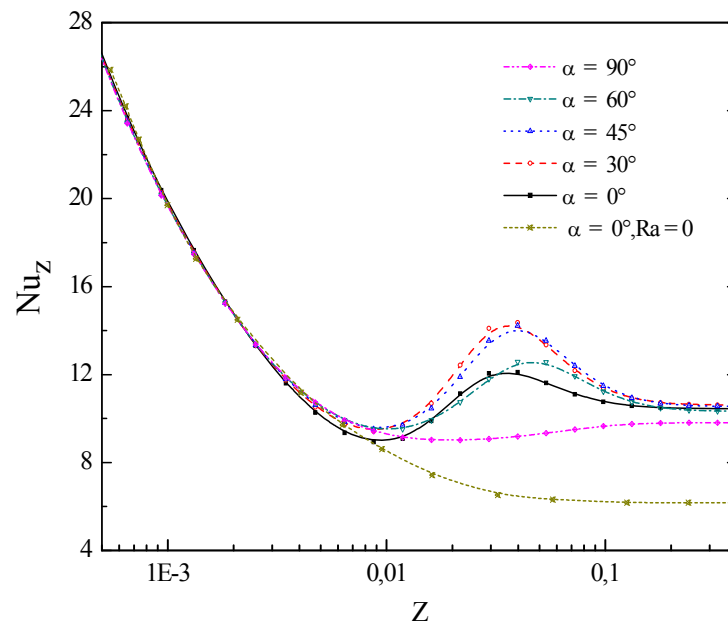
Nous observons sur la figure IV.15 (a) que l'inclinaison n'affecte pas d'une façon très significative l'évolution axiale du nombre de Nusselt et ce, pour un nombre de Rayleigh de l'ordre de 10^5 et un nombre de Reynolds égal à 200. Par contre, pour une valeur du nombre de Rayleigh égale à 10^6 , la figure IV.15 (b) révèle une variation du nombre de Nusselt plus prononcée.

Dans la zone où la convection naturelle prédomine ($0,01 \leq Z \leq 0,2$), nous remarquons que la courbe représentant l'évolution du nombre de Nusselt pour une conduite verticale ($\alpha = 90^\circ$) se situe en dessous de toutes les autres courbes. La valeur du nombre de Nusselt pour ce cas est de 9,06 pour $Z = 0,03$ par exemple. En effet, les courants secondaires, constitués des composantes transversales de la vitesse (radiale et tangentielle), se trouvent diminué de la composante tangentielle (suivant l'angle azimutal θ) au fur et à mesure que la conduite se redresse et s'annule lorsque celle-ci est complètement verticale ($\alpha = 90^\circ$).

Notons également, dans cette région, de l'existence d'un angle optimal offrant un maximum d'échange thermique. Ce dernier se situe entre 0° et 30° .



(a)



(b)

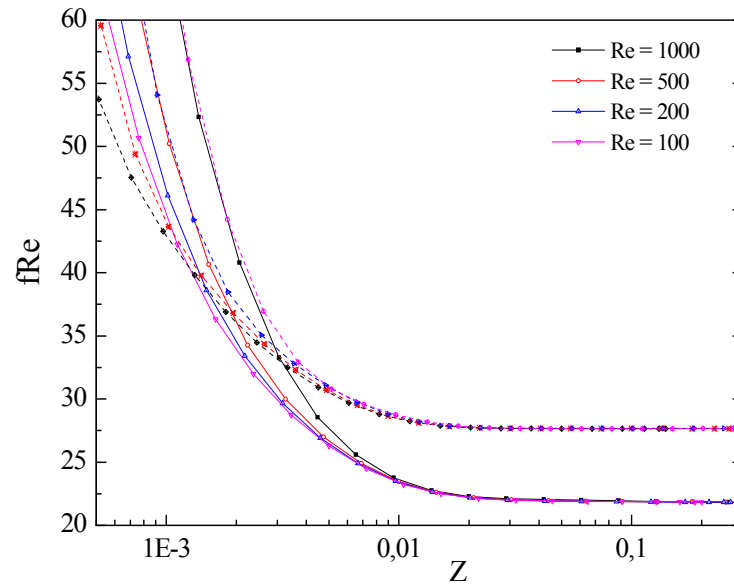
Figure IV.15 : Effet de l'inclinaison de la conduite annulaire sur évolution axiale du nombre de Nusselt pour : $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 0,7$; $Br = 0$.
 (a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$

IV.4.4 Effet du nombre de Reynolds

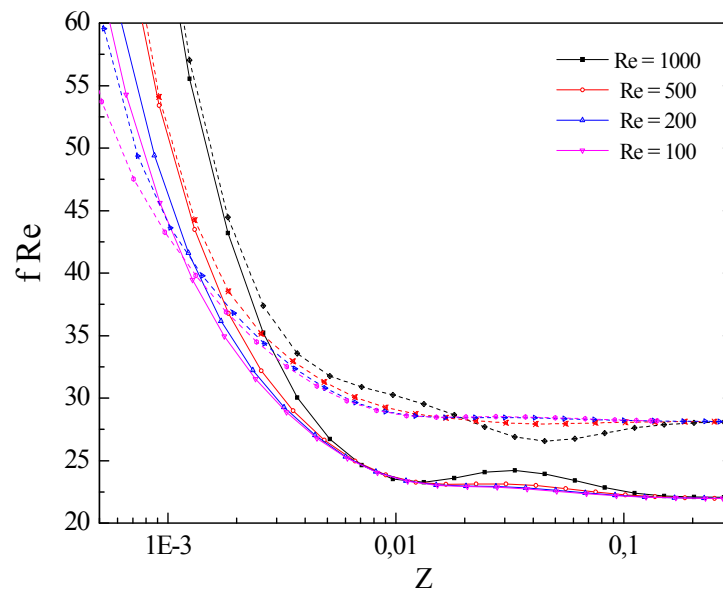
a) Coefficient de frottement apparent

L'évolution axiale du coefficient de frottement apparent pour différentes valeurs du nombre de Reynolds est illustrée sur les figures IV.16 (a) et (b) et ce, pour $Ra = 10^5$ et $Ra = 10^6$ respectivement.

Nous constatons que l'influence de la variation du nombre de Reynolds n'est ressentie qu'au niveau de la zone d'entrée où l'accroissement du nombre de Reynolds provoque une augmentation du coefficient de frottement apparent. Alors qu'au-delà d'une certaine distance de l'entrée de la conduite ($Z \geq 0,006$), les courbes représentant l'effet du nombre de Reynolds, relatives à chaque paroi, se confondent et tendent vers une valeur asymptotiquement traduisant l'établissement du régime d'écoulement.



(a)



(b)

Figure IV.16 : Influence du nombre de Reynolds sur le développement axial du coefficient de frottement de Fanning. $R_1 = 0,5$; $Pr = 0,7$; $Br = 0$; $\alpha = 0$.

----- paroi interne, — paroi externe
(a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$

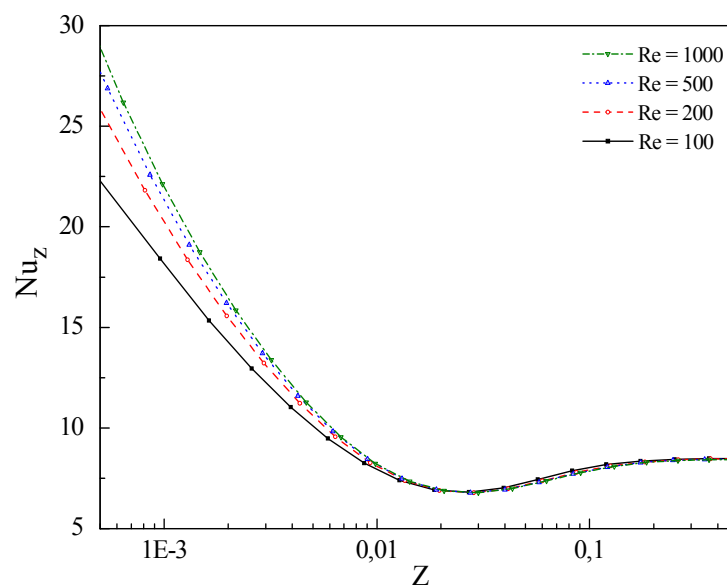
Il est à noter également que pour la valeur du nombre de Reynolds égale à 1000, les courbes représentant l'évolution axiale du coefficient de frottement relatives à la paroi interne et celles relatives à la paroi externe sont presque confondues dès l'entrée de la conduite. Par contre, à partir de $Z = 0,003$, les deux courbes se détachent l'une de l'autre et chacune tend vers sa propre valeur asymptotique : égale à 27,77 pour la paroi interne (soumise à un flux pariétal constant) et 21,86 pour la paroi externe (soumise à une température pariétale constante).

b) Nombre de Nusselt

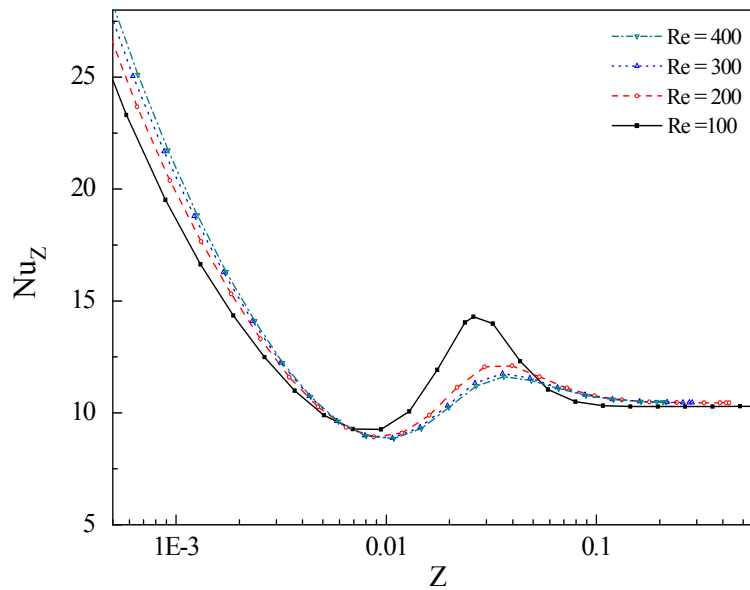
L'évolution axiale du nombre de Nusselt tout le long de la paroi intérieure de la conduite annulaire concentrique (où le flux de chaleur est maintenu constant) est représentée sur les figures IV.17 (a) et (b) et ce, pour différentes valeurs du nombre de Reynolds.

Les courbes présentent le même aspect : une diminution localisée au niveau de la zone d'entrée puis une évolution asymptotique loin en aval (à partir de $Z = 0,20$), qui traduit l'établissement du régime thermique. Nous remarquons aussi que pour $Ra = 10^5$ (figure IV.17 (a)) l'influence de la valeur du nombre de Reynolds n'est ressentie qu'au niveau de la zone d'entrée de la conduite annulaire ($Z < 0,01$), où l'accroissement du nombre de Reynolds provoque une intensification de l'échange thermique. En revanche, la valeur du nombre de Nusselt asymptotique ($Nu_z = 8,46$) reste insensible aux variations du nombre de Reynolds.

Sur la figure IV.17 (b), l'influence de l'augmentation du nombre de Rayleigh se fait surtout ressentir pour les faibles valeurs de nombre de Reynolds, en particulier pour $Re = 100$. Effectivement, une nette amélioration du transfert thermique est observée pour cette valeur du nombre de Reynolds, dans la zone de convection mixte où le transfert de chaleur est gouverné par les deux modes de convection (naturelle et forcée simultanément) $Z \geq 0,01$.



(a)



(b)

Figure IV.17 : Influence du nombre de Reynolds sur l'évolution du nombre de Nusselt le long de la conduite annulaire. $R_1 = 0,5$; $Pr = 0,7$; $Br = 0$, $\alpha = 0$.
 (a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$

IV.4.5. Effet de la variabilité de la viscosité en fonction de la température

Dans cette dernière partie des résultats, nous avons considéré comme variable, la viscosité dynamique du fluide étudié et nous avons considéré loi de variation de la viscosité dynamique en fonction de la température, proposée par Shome et al. [33] et donnée par la relation suivante :

$$v(T) = (\exp(\exp(-5,895 \log((1 - T)\Delta T + T_0) + 33,0316)) - 0,88) \quad (IV-2)$$

Où :

$$\Delta T = (T_w - T_0)$$

v : représente la viscosité cinématique du fluide en (m^2/s),

T : représente la température absolue du fluide prise en degré Kelvin

T_0 : température du fluide à l'entrée de la conduite annulaire.

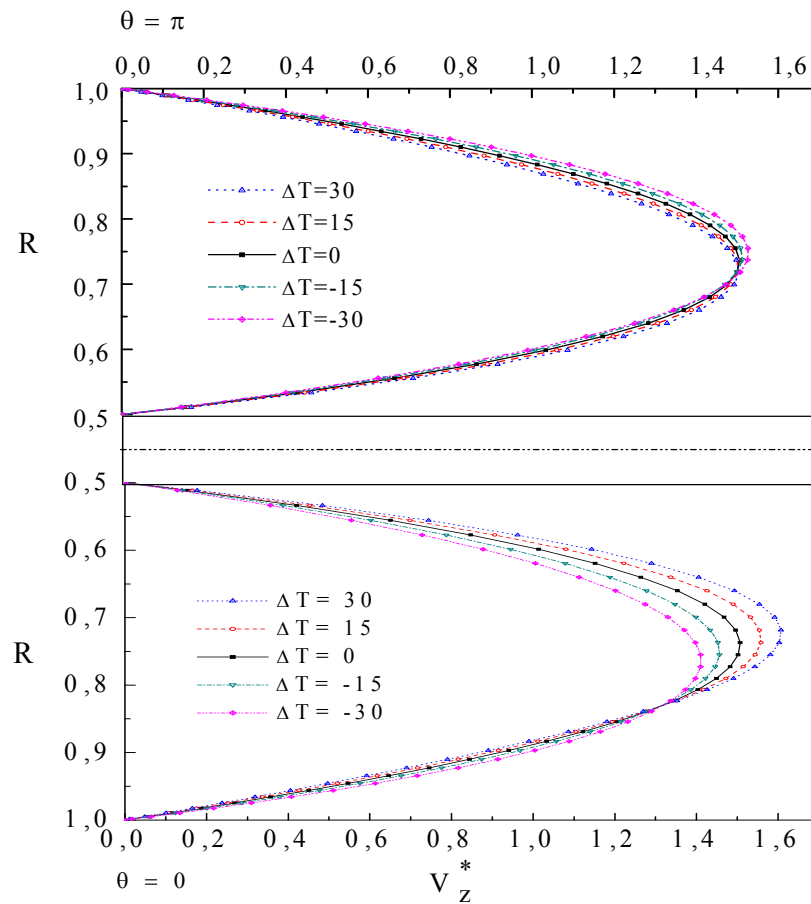
Dans ce qui suit, l'influence de la variabilité de la viscosité avec la température, sur les caractéristiques hydrodynamiques et thermiques de l'écoulement sera passée en vue.

a) Profil de vitesse

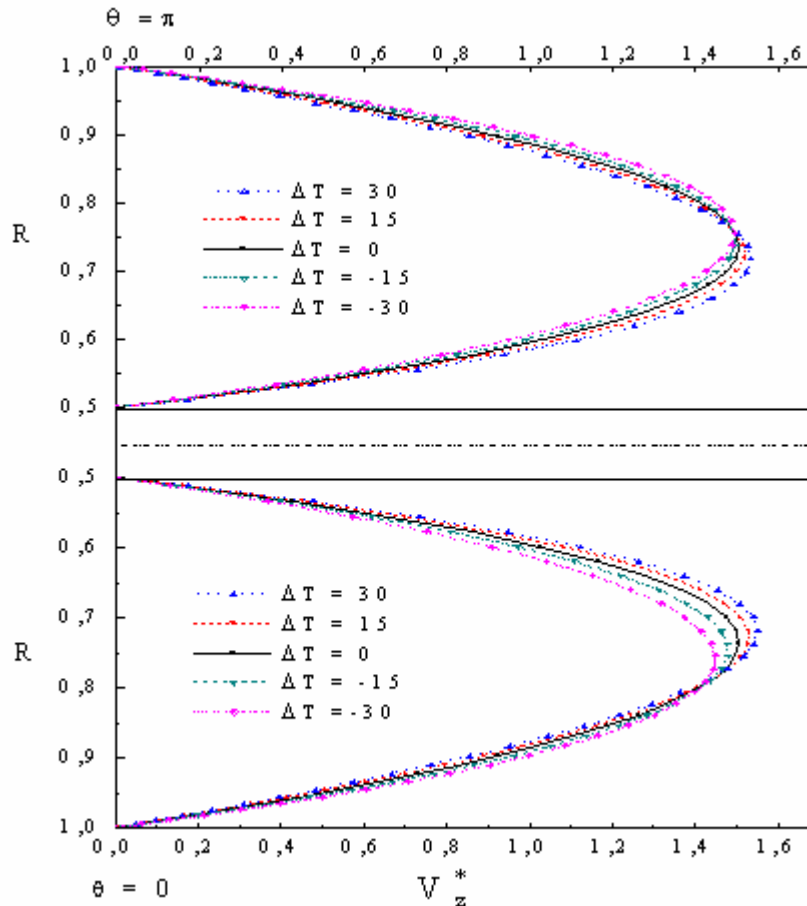
Les figures IV.18 (a) et (b) traduisent l'effet de la variation de la viscosité dynamique sur les profils de vitesse axiale établie, pour les deux valeurs du nombre de Rayleigh ($Ra = 10^5$ et $Ra = 10^6$).

Nous remarquons une distorsion des profils de vitesse correspondant au cas du chauffage (contraction pour : $\Delta T = +15$ et $+30$ K) et au cas du refroidissement (allongement pour : $\Delta T = -15$ et -30 K) par rapport à ceux relatifs au cas isovisqueux ($\Delta T = 0$ K). Il est à noter également que si l'on considère le cas du chauffage ou du refroidissement, la vitesse maximale du fluide augmente avec l'augmentation de l'écart de température entre le fluide et la paroi interne.

D'un autre côté, lorsque l'on augmente la valeur du nombre de Rayleigh (figure IV.18 (b)) les profils de vitesses deviennent nettement plus espacés tandis que la vitesse maximale se déporte vers la paroi extérieure de l'entrefer et sa valeur augmente avec l'augmentation de l'écart de température.



(a)



(b)

Figure IV.18 : Influence de l'écart de la température sur les profils de vitesse axiale établie. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 7$; $Br = 0$, $\alpha = 0$.
(a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$

b) Coefficient de frottement apparent

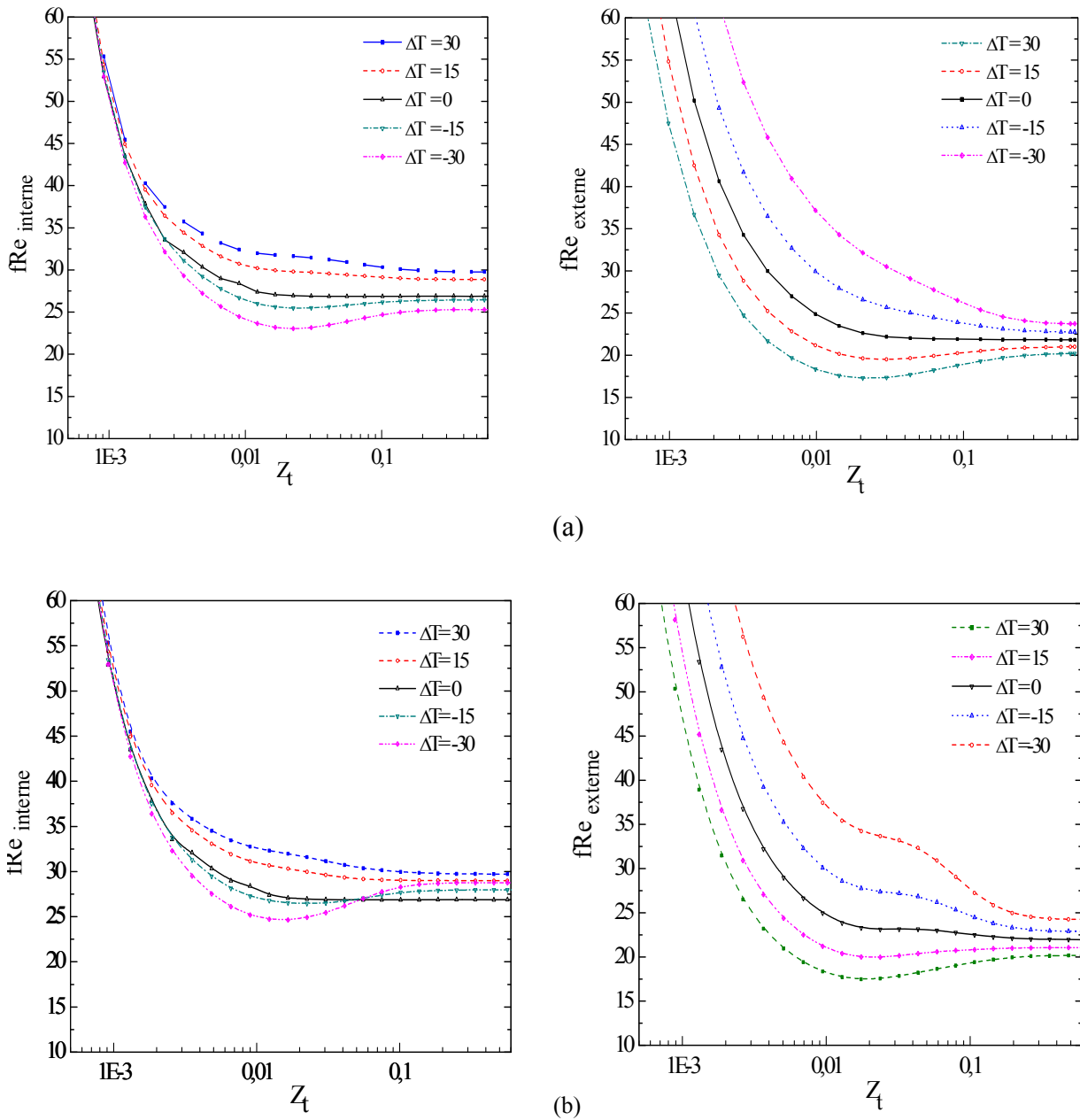
Etant donné que la variabilité de la viscosité en fonction de la température conduit à la modification de la structure de l'écoulement, cela se répercute impérativement sur le coefficient de frottement apparent. Les figures IV.19 (a) et (b) illustrent l'évolution axiale de ce dernier, pour différents écarts de températures ($\Delta T = T_w - T_0$).

Notons que l'effet de l'écart de température sur le coefficient de frottement relatif à la paroi externe, est considérable au niveau de l'entrée de la conduite. Cet effet devient moins important à partir de l'abscisse $Z = 0,1$ étant donné que les courbes se rapprochent de plus en plus (tableau 3). Par contre, pour celles relatives à la paroi interne, nous observons un comportement inverse. Effectivement, l'effet de l'écart de température est moins ressenti à l'entrée et devient plus intense à partir de la position $Z = 0,002$. Pour $Ra = 10^6$, le comportement reste inchangé tant que l'abscisse axiale reste inférieure à $Z \leq 0,04$. Pour $Z > 0,04$ et jusqu'à l'atteinte de l'écoulement totalement établi, les courbes se placent dans un ordre différent de celui observé précédemment (0, -15, -30, 15 et 30 K). En effet c'est le comportement des courbes qui traduisent le refroidissement ($\Delta T < 0$) qui diffèrent et se placent au-dessus du cas isovisqueux et en dessous de courbes de chauffage ($\Delta T = +15, +30$ K)

Tableau IV.3 : Ecart relatifs entre les valeurs du coefficient de frottement obtenues dans le cas d'une viscosité thermodépendante et le cas isovisqueux.

ΔT (K)	Ecart (%) pour $Ra = 10^5$				Ecart (%) pour $Ra = 10^6$			
	Z = 0,01		Z = 0,20		Z = 0,01		Z = 0,20	
	Interne	externe	Interne	externe	Interne	externe	Interne	externe
15	8,72	14,95	7,68	4,16	10,10	16,42	9,15	4,11
30	14,76	25,94	11,21	9,23	16,12	25,75	11,27	10,26
-15	5,37	19,46	2,12	5,07	3,38	19,25	4,21	6,19
-30	13,45	48,19	7,02	11,80	11,41	48,38	7,02	12,80

Il est à noter que pour le cas du chauffage ($\Delta T \geq 0$), la lubrification pariétale (à cause de la diminution de la viscosité dynamique) et l'intensité des courants secondaires agissent dans le même sens (contrairement au cas refroidissement). Ce comportement est attribué au changement de comportement du champ de vitesse axiale dans l'entrefer et plus précisément au changement du gradient pariétal de vitesse suivant la direction azimutale. En effet, les profils de vitesse changent d'allure selon que l'on se place en bas ou en haut de la conduite : ($\theta = 0$; $r_i \leq r \leq r_e$ et $\theta = \pi$; $r_i \leq r \leq r_e$) Pour expliquer ce comportement, il faut noter que la formule mathématique donnant le coefficient de frottement s'obtient en moyennant les gradients périphériques relevés au niveau de la paroi. En effet nous remarquons que les profils de vitesse axiale dans l'entrefer changent d'allure selon que l'on se place au niveau de la partie inférieure ou supérieure de la conduite annulaire, en d'autre terme: $\theta = 0$; $r_i \leq r \leq r_e$ et $\theta = \pi$; $r_i \leq r \leq r_e$. Les quantités refroidies de fluides tombent au fond de la conduite (partie inférieure ($\theta = 0$ $r = r_i$) décélérant l'écoulement pariétal au niveau de cette région, ce qui se traduit par une accélération des couches fluides de la région $\theta = 0$, $r = r_e$. le gradient pariétal, et par conséquent le coefficient de frottement apparent, augmente alors.



(a)

(b)

5

Figure IV.19 : Effet de l'écart de température sur le développement axiale du coefficient de frottement de Fanning. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 7$; $\alpha = 0$.
 (a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$

c) Nombre de Nusselt

L'influence de la thermodépendance de la viscosité dynamique du fluide considéré, sur l'évolution axiale du nombre de Nusselt, est illustrée à travers les figures IV.20 (a) et (b), pour respectivement $Ra = 10^5$ et 10^6 .

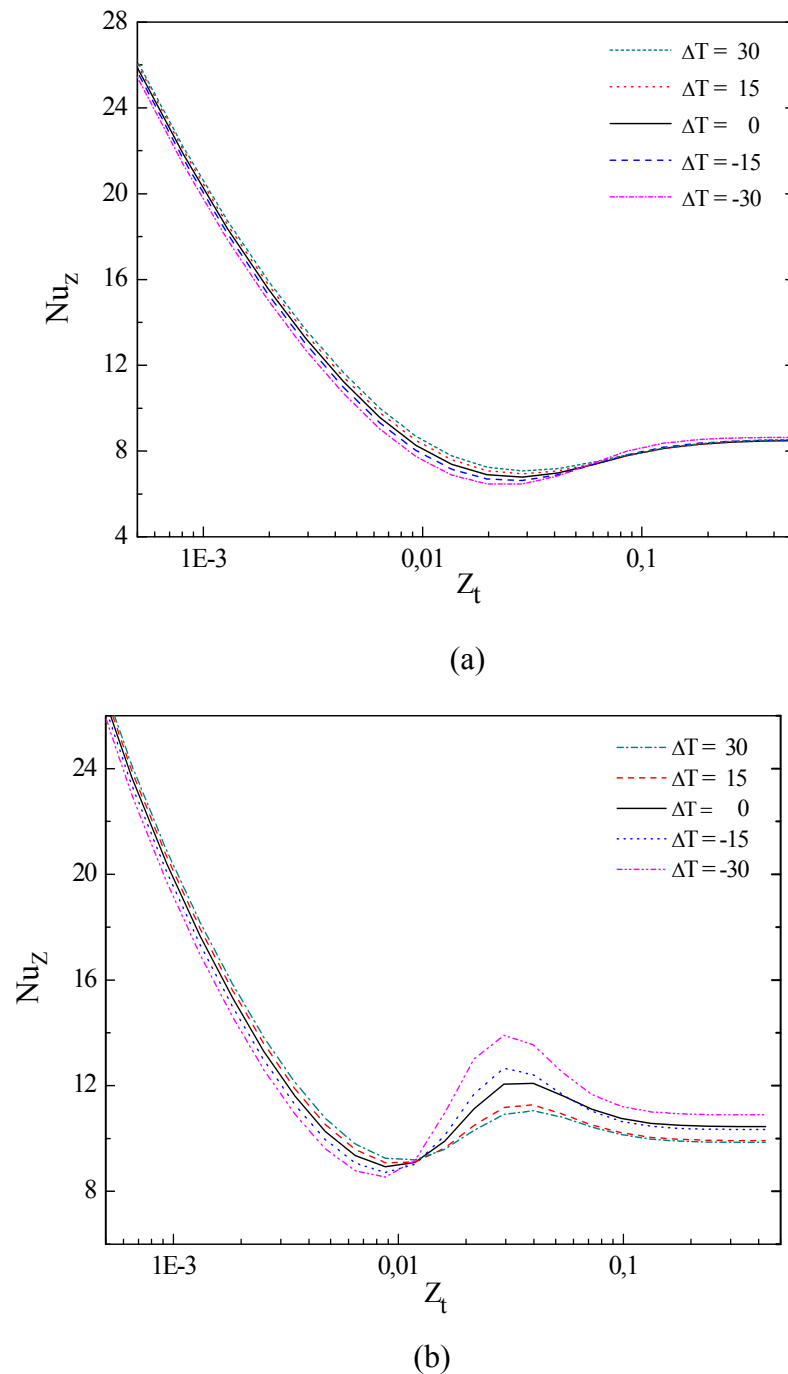


Figure IV.20 : Evolution du nombre de Nusselt le long de la conduite annulaire pour différents écarts de température. $R_1 = 0,5$; $Re = 200$; $Pr = 7$; $Br = 0$; $\alpha = 0$.

(a) $Ra = 10^5$ (b) $Ra = 10^6$

Nous remarquons que l'influence de la thermodépendance est plus visible sur la figure IV.20 (b) par rapport au cas de la figure IV.20 (a) où le nombre de Rayleigh est égale à 10^5 , Nous remarquons néanmoins le même comportement aussi bien pour $Ra = 10^5$ que $Ra = 10^6$. La particularité de ces deux figures réside dans l'inversion de l'ordre de positionnement des courbes relatives au chauffage et au refroidissement par rapport au cas isovisqueux.

Comme il a été expliqué précédemment, la diminution de la viscosité dynamique près de la paroi, suite à l'élévation de la température dans cette zone (cas du chauffage), entraîne l'augmentation de la vitesse et une diminution remarquable de la température du fluide. Ceci mène à une amélioration du transfert thermique comprise entre 2,13% et 5,11% par rapport au cas isovisqueux. Par contre, dans le cas du refroidissement ($\Delta T < 0$), la viscosité dynamique du fluide près de la paroi est plus élevée. Ce qui entraîne une diminution de la vitesse et par conséquent, une dégradation du transfert thermique par rapport au cas isovisqueux, atteignant 2,63% et 6,14% pour $\Delta T = -15\text{ °C}$ et $\Delta T = -30\text{ °C}$, respectivement.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons procédé à l'étude du comportement d'un fluide newtonien en écoulement laminaire à l'intérieur d'une conduite horizontale isotherme en régime de convection mixte. Nous avons constaté que l'introduction de la convection naturelle affecte d'une manière significative le développement de l'écoulement et les distributions des coefficients de friction et de transfert thermique. En particulier pour un nombre de Rayleigh de 10^6 , où des courants secondaires associés à la convection libre naissent tout près à l'entrée et se développent très rapidement induisant des déformations considérables sur les profils de vitesse axiale et de température.

D'autre part, nous avons montré qu'en régime de convection mixte, trois régions successives apparaissent tout le long de la conduite. Dans la première, l'écoulement est gouverné essentiellement par le mode de convection forcée. Dans la deuxième, les courants secondaires engendrent un brassage important du fluide favorisant ainsi l'échange thermique et augmentent le frottement pariétal en chauffage. Finalement, loin de l'entrée, l'écoulement s'établit entièrement pour atteindre des solutions asymptotiques différentes suivant la valeur du nombre de Rayleigh

Les résultats obtenus ont permis aussi d'évaluer l'influence du caractère thermodépendant des fluides sur l'écoulement laminaire en régime de convection forcée et mixte. Il s'avère que la variation de viscosité agit de façon remarquable sur les caractéristiques de l'écoulement

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Le travail présenté dans ce mémoire consiste en la simulation numérique du développement simultané de l'écoulement hydrodynamique et thermique stationnaire d'un fluide newtonien dans l'entrefer délimité par deux cylindres coaxiaux. Cette conduite, cylindrique de sections droites circulaires, est le siège d'un transfert de chaleur en mode de convection forcée puis mixte. La paroi externe est maintenue à une température constante alors qu'un flux thermique constant est imposé à la paroi interne. Cette étude numérique a permis d'apporter un certain nombre de résultats correspondant à une certaine gamme de paramètres adimensionnels caractéristiques mis en jeu. Ces derniers, traduisent les effets relatifs aux phénomènes physiques en présence et qui sont : le nombre de Rayleigh, et de la dissipation visqueuse, l'inclinaison de la conduite annulaire par rapport à l'horizontale, la variation avec la température de la viscosité dynamique et enfin le nombre de Reynolds.

Nous avons procédé dans un premier temps, à une description détaillée de la méthode des volumes finis, que nous avons adopté pour l'élaboration de notre code de calcul. Cette méthode permet la discrétisation des équations générales de transfert et leur transformation en une équation algébrique. Cette partie est précédée de celle de la mise en équations de notre problème et des précautions à prendre quant à la prise en compte du mode de convection naturelle d'une part, et de la fonction de dissipation visqueuse d'autre part. Elle a été suivie par les différents résultats obtenus par le code de calcul élaboré et leur discussion.

Dans le cas de la convection forcée, l'analyse de l'effet de l'introduction de la fonction de dissipation, représentée par le nombre de Brinckman dans l'équation de l'énergie nous a permis de constater une nette amélioration du transfert de chaleur en terme de nombre de Nusselt et de champ de température. Il a été noté aussi que la compétition entre la diminution de l'intensité de l'échange thermique (lors du frottement entre le fluide et la paroi) et la génération de chaleur, engendrée par la dissipation visqueuse, prolonge la longueur d'entrée et retarde l'établissement du régime thermique. Alors que la diminution de la viscosité dynamique près de la paroi, suite à l'élévation de la température dans cette zone, entraîne l'accélération des couches pariétales et l'augmentation remarquable de la température moyenne du fluide par rapport au cas isovisqueux.

Le problème de l'écoulement en régime de convection mixte a été abordé dans le deuxième volet de nos résultats. C'est un régime où les deux modes de convection (forcée et libre) coexistent et sont d'égale influence. Nous nous sommes intéressés dans une première analyse au développement des courants secondaires induits par la convection naturelle. Les effets de cette dernière commencent à apparaître dans une région près de l'entrée et augmentent le long de la conduite pour atteindre un maximum caractérisant une intensité maximale des courants secondaires. L'augmentation du nombre de Rayleigh

correspond à l'accroissement de l'intensité des ces courants près de la paroi interne de la conduite, exposée à un chauffage par un flux constant. Les courants de fluide chaud tendent alors à déplacer le fluide vers le côté supérieur de l'entrefer. De plus, l'augmentation du nombre de Rayleigh entraîne d'une part, la diminution du gradient pariétal de vitesse et celle de la vitesse maximale et d'autre part, le gradient pariétal de vitesse du côté externe de l'entrefer augmente. Il est à rappeler que la conduite externe est portée à une température constante et uniforme, elle est par conséquent, moins chauffée que la paroi interne. Nous avons observé également que l'influence du nombre de Rayleigh se fait surtout ressentir pour les faibles valeurs de nombre de Reynolds, en particulier pour $Re = 100$, où une nette amélioration du transfert thermique est observée dans la zone où le transfert de chaleur est gouverné par le mode de convection naturelle.

Il est intéressant de noter que dans notre cas, les courbes représentant l'évolution axiale du nombre de Nusselt pour différents valeur du nombre de Rayleigh, tendent vers des valeurs asymptotiques distincts, contrairement au cas de l'écoulement en mode de convection mixte dans une conduite cylindrique maintenue à température pariétale uniforme où apparaîtrait une troisième zone, correspondant à la prédominance, une seconde fois, de la convection forcée dans la zone d'établissement. Les courbes tendent alors vers la même solution asymptotique. Ceci s'explique par le fait que maintenir la paroi à flux de chaleur uniforme entraîne un écart constant de température entre la paroi et le fluide qui se maintient tout le long de la zone établie. Cette constance de l'écart de température se traduit alors par une persistance des courants secondaires, ce qui implique un mode de convection mixte.

L'influence de l'inclinaison de la conduite annulaire par rapport à l'horizontale, dans la zone où la convection naturelle prédomine ($0,01 \leq Z_t \leq 0,2$), a révélé l'existence d'un angle optimal offrant les meilleures performances thermiques. Ce dernier se situe entre 0° et 30° alors que le minimum correspond à une conduite annulaire verticale.

Le dernier volet de nos résultats a été consacré à l'étude de l'influence de la variation avec la température de la viscosité dynamique et de son effet sur l'écoulement en mode de convection mixte. Il y apparaît que la thermodépendance de la viscosité dynamique affecte de manière significative la cartographie des champs de vitesse et de température et par conséquent, l'évolution du nombre de Nusselt et du coefficient de frottement le long de la conduite. D'autre part, le chauffage ou le refroidissement des liquides induit des comportements complètement différents sur les coefficients de transfert thermique et de frottement. En effet, l'augmentation de l'écart de température dans le cas du chauffage conduit à la diminution du coefficient de frottement étant donné que le gradient pariétal de vitesse augmente en raison de la diminution de la viscosité près de la paroi. Pour le cas du refroidissement, le ralentissement des couches fluides pariétales (en raison de l'augmentation de la viscosité dynamique) entraîne l'augmentation du coefficient de frottement.

Perspectives

En guise de conclusion, nous voulons simplement exposer quelques tendances nouvelles également ressorties, et qui mériteraient une étude plus approfondie. Notamment, la visualisation de l'écoulement secondaire pour de grandes valeurs du nombre de Rayleigh

permettrait de mieux cerner l'influence de ce nombre. Le conditionnement thermique peut présenter différentes variantes d'études et cela en considérant d'autres types de conditions aux parois, à savoir, un flux thermique variable ou bien une température pariétale en variation linéaire le long de la conduite.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] A. Bejan, Convection Heat transfer. 2nd Edition, John Wiley et Sons Inc., New York, USA, 1995.
- [2] J.F. Sacadura, Initiation aux transferts thermiques. Centre d'Actualisation Scientifique et Technique, INSA de Lyon, 4^e tirage, Technique et documentation, 11, rue Lavoisier, 75008 paris, France, 1993.
- [3] A.P. Hatton and A. Quarmby, Heat transfer in the thermal entry length with laminar flow in an annulus. *Int. heat Mass transfer*. Vol. 5, pp. 973-980, 1962.
- [4] R.E. Landberg, P.A. McCuen et W.C. Reynolds, Heat transfer in annular passages. Hydrodynamically developed laminar flow with arbitrarily prescribed temperature or heat fluxes. *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 6, pp. 495-529, 1963.
- [5] A. Mojtabi et J.P. Caltagirone, Convection entre deux cylindres coaxiaux en régime laminaire permanent. *Int. J. heat Mass transfer*. Vol. 21, pp. 261-268, 1978.
- [6] O. Terhmina et A. Mojtabi, Ecoulements de convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis dans un espace annulaire. *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 31, No. 3, pp. 583-590, 1988.
- [7] M. Avci, O. Aydm, Laminar forced convection with viscous dissipation in a concentric annular duct. *C. R. Mécanique*, 2006.
- [8] M. Ciampi, S. Faggiani, W. Grassi et G. Tuoni, Mixed convection heat transfer in horizontal concentric annuli for transitional flow conditions. *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 30, No. 5, pp. 833-841, 1987
- [9] B.B. Rogers and L.S. Yao, The effect of mixed convection instability on heat transfer in a vertical annulus. *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 33, No. 1, pp. 79-90, 1990.
- [10] Nazrul Islam, U.N. Gaitonde et G.K. Sharma, Mixed convection heat transfer in the entrance region of horizontal annuli. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. Vol. 44, pp. 2107-2120, 2001.
- [12] S.GH. Etemad et A.S. Mujumdar, Effects of variable viscosity and viscous dissipation on laminar convection heat transfer of a Power Law fluid in the entrance region of a semicircular duct. *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 38, No. 12, pp. 2225-2238, 1995.

- [13] T.M. Harms, M.A. Jog et R.M. Manglik, Effects of temperature-dependent viscosity variations and boundary conditions on fully developed laminar forced convection in a semicircular duct. *ASME J. Heat Transfer*. Vol. 120, pp. 600-605, 1998.
- [14] R.L. Shannon et C.A. Depew, Forced laminar flow convection in a horizontal tube with variable viscosity and free convection effects. *ASME J. Heat Transfer*. Vol. 9, pp. 251-258, 1969.
- [15] S.W. Hong and A. E. Bergles, Theoretical Solutions for Combined Forced and Free Convection in Horizontal Tubes With Temperature-Dependent Viscosity, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 98, pp. 459-465, 1976.
- [16] M.W. Collins and M. Keynejad, Effects of Temperature-Dependence of Viscosity and Viscous Dissipation on Laminar Flow Heat Transfer in Circular Tubes, *Int. J. Heat & Fluid Flow*, Vol. 4, No. 1, 1983.
- [17] H. Nakamura, A. Matsuura, J. Kiwaki, N. Matsuda, S. Hiraoka and I. Yamada, The Effect of Variable Viscosity on Laminar Flow and Heat Transfer in Rectangular Ducts, *Journal of Chemical Engineering of Japan*, Vol. 12, pp. 14-18, 1979.
- [18] M. Tanaka and N. Mitsuishi, Non-newtonian Laminar Heat Transfer in Concentric Annuli, *Heat Transfer-Japanese Research*, Vol. 4, No. 2, pp. 26-36, 1975.
- [19] F. Gori, Variable Physical Properties in Laminar Heating of Pseudoplastic Fluids With Constant Wall Heat Flux, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 100, pp. 220-223, 1978.
- [20] D. E. Rosenberg and J. D. Hellums, Flow Development and Heat Transfer in Variable Viscosity Fluids, *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, Vol. 4, pp. 417-422, 1965.
- [21] C. B. Christiansen and G. E. Jensen, Laminar Nonisothermal Flow of Fluids in Tubes of Circular Cross Section, *AIChE Journal*, Vol. 15, pp. 504-507, 1969.
- [22] F. L. Test, Laminar Flow Heat Transfer and Fluid Flow for Liquids With Temperature-Dependent Viscosity, *ASME J. Heat Transfer* 90, pp. 385-393, 1968.
- [23] B. Shome and K. Jensen, Mixed Convection Laminar Flow and Heat Transfer of Liquids in Isothermal Horizontal Circular Ducts, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 38, No. 11, pp. 1945-1956, 1995.
- [24] B. Metais and E. R. G. Eckert, Forced Mixed and Free Convection Regimes, *ASME J. Heat Transfer*, Ser. C, Vol. 86, p.295, 1964.
- [25] E. N. Seider and G. E. Tate, *Ind. Eng. Chem.*, 28, 1429, 1936.
- [26] A. P. Colburn, A Method for Correlating Forced Convective Heat Transfer data and a Comparison With Fluid Friction, *Trans. AIChE* 29, pp. 174-210, 1933.

- [27] C. A. Depew and S. E. August, Heat Transfer due to Combined Free and Forced convection in a Horizontal Isothermal Tube, *ASME J. Heat Transfer* 93, pp. 380-384, 1971.
- [28] W. W. Yousef and J. D. Tarasuk, Free Convection Effects on Laminar Forced Convective Heat Transfer in a Horizontal Isothermal Tube, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 104, pp. 145-152, 1982.
- [29] J. W. Palen and J. Taborek, An Improved Heat Transfer Correlation for Laminar Flow of High Prandtl Number Liquids in Horizontal Tubes, *AIChE Sym. Ser.*, No. 245, 81, pp. 90-96, 1982.
- [30] D. Choudhury and S. V. Patankar, Combined Forced and Free Laminar Convection in the Entrance Region of an Inclined Isothermal Tube, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 110, pp. 901-909, 1988.
- [31] G. J. Hwang and C. W. Tsai, Theoretical and Experimental Studies of Laminar Mixed Convection in Water Pipe Flow With Density Inversion Effect, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 40, No. 9, pp. 2019-2033, 1997.
- [32] S. V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, *McGraw-Hill*, New York, 1980.
- [33] G. D. Raithby, Skew-upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow, *Compu. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 9, pp. 153-164, 1976.
- [34] A. A. Busnaina, X. Zheng and M. A. R. Sharif, A Modified Skew Upwind Scheme for Fluid Flow and Heat Transfer Computations, *Appl. Math. Modelling*, Vol.15, pp. 425-432, 1991.
- [35] V. Babu and Seppo A. Korpela, Numerical Solution of the Incompressible Three-Dimensional Navier-Stokes Equations, *Computers Fluids*, Vol. 23, No. 5, pp. 675-691, 1994.
- [36] Liang Cheng and S. Armfield, A Simplified Marker and Cell Method for Unsteady Flows on Non-staggered grids, *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, Vol. 21, No. 1, pp. 15-34, 1995.
- [37] R. I. Issa, Solution of The Implicit Discretised Fluid Flow Equations by Operator Splitting, *J. Comp. Phys.*, 61, pp. 40-65, 1985.
- [38] C. J. Ho and F. J. Tu, Laminar Convection on Cold Water in a Vertical Annulus With Constant Heat Flux on the Inner Wall, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 117-123, 1990.
- [39] J. Orfi, N. Galanis and C. T. Nguyen, Développement Simultané Hydrodynamique et Thermique d'un Ecoulement Laminaire dans un Tube Incliné en Régime de Convection Mixte, *Rev. Gén. Therm.* 36, pp. 83-92, 1997.

- [40] G. J. Hwang and H. C. Lai, Laminar Convective Heat Transfer in a Horizontal Isothermal Tube for High Rayleigh Numbers, *Int. J. Heat Mass Transfer* 37, pp. 1631-1640, 1994.

ANNEXES

Annexe 1 : Equations de base

Cette annexe est consacrée au traitement des équations de base qui expriment les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie gouvernant les phénomènes de transfert dans un milieu fluide.

1. Equation de conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse est appliqué au volume connexe (v). A l'instant t la masse est :

$$m(t) = \int_v \rho_t \, dv \quad (\text{A1-1})$$

A l'instant $t+dt$ la masse devient :

$$m(t+dt) = \int_v \rho_{t+dt} \, dv + \int_s \rho (V_j n_j) \, dt \, ds \quad (\text{A1-2})$$

Le principe de conservation de masse impose : $m(t) = m(t+dt)$. Alors l'équation (A1-1) sera égale à l'équation (A1-2), soit :

$$\int_v (\rho_t - \rho_{t+dt}) \, dv = \int_s \rho (V_j n_j) \, dt \, ds \quad (\text{A1-3})$$

le développement limité de la quantité ρ_{t+dt} donne :

$$\rho_{t+dt} = \rho_t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dt + o(dt) \quad (\text{A1-4})$$

En injectant cette équation dans l'équation (A1-3) on trouve :

$$\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv + \int_s \rho (V_j n_j) \, ds = 0 \quad (\text{A1-5})$$

En appliquant le théorème de la divergence (ou théorème d'Ostrogradski) à l'intégrale de surface de l'équation (A1-5) on obtient :

$$\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv + \int_v \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j) \, dv = 0 \quad (\text{A1-6})$$

ou :

$$\int_v \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j) \right) dv = 0 \quad (\text{A1-7})$$

En faisant tendre le volume vers zéro, on obtient la relation ponctuelle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j) = 0 \quad (\text{A1-8})$$

Cette équation s'écrit en coordonnées cylindriques comme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A1-9})$$

❖ Cas particuliers :

a) Ecoulement en régime stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) :

Dans ce cas, l'équation (A1-9) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A1-10})$$

b) Fluide incompressible ($\rho = \text{cte}$) :

L'équation (A1-9) se réduit alors à :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{A1-11})$$

2. Equation de conservation de la quantité de mouvement

Cette équation exprime le deuxième principe de Newton : le taux de variation de la quantité de mouvement du fluide contenu dans le système Ω est égale à la résultante des forces qui lui sont appliquées.

A l'instant t la quantité de mouvement est :

$$\int_v (\rho V_i)_t dv \quad (\text{A1-12})$$

A l'instant $(t + dt)$ la quantité de mouvement devient :

$$\int_v (\rho V_i)_{t+dt} dv + \int_s (\rho V_i) V_j n_j dt ds \quad (\text{A1-13})$$

La variation de la quantité de mouvement entre l'instant (t) et $(t + dt)$ est donnée par :

$$\int_{\mathbf{v}} d(\rho V_i) dv = \int_{\mathbf{v}} [(\rho V_i)_{t+dt} - (\rho V_i)_t] dv + \int_{\mathbf{s}} (\rho V_i) V_j n_j dt ds \quad (\text{A1-14})$$

En effectuant le développement limité de la quantité $(\rho V_i)_{t+dt}$, on aura :

$$(\rho V_i)_{t+dt} = (\rho V_i)_t + \frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} dt + o(dt) \quad (\text{A1-15})$$

En injectant l'équation (A1-15) dans l'équation (A1-14) et en réarrangeant les termes, nous obtenons :

$$\int_{\mathbf{v}} d(\rho V_i) dv = \int_{\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) dt dv + \int_{\mathbf{s}} (\rho V_i) V_j n_j dt ds \quad (\text{A1-16})$$

et en appliquant le théorème de la divergence à l'intégrale de surface de l'équation (A1-16), on aura :

$$\int_{\mathbf{v}} \frac{d}{dt} (\rho V_i) dv = \int_{\mathbf{v}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_i V_j) \right] dv \quad (\text{A1-17})$$

Remarque :

Cette dernière expression est souvent appelée *formule de Leibnitz* ou théorème de transport de Reynolds. Elle s'écrit pour un champ scalaire ψ (ou vectoriel) comme :

$$\int_{\mathbf{v}} \frac{d}{dt} (\psi) dv = \int_{\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial t} (\psi) dv + \int_{\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\psi V_j) dv \quad (\text{A1-18})$$

D'autre part, en vertu du deuxième principe de Newton :

$$\int_{\mathbf{v}} \frac{d}{dt} (\rho V_i) dv = \sum (F)_i = \sum (F_{\text{ext}})_i + \sum (F_{\text{int}})_i \quad (\text{A1-19})$$

or, le principe de l'action et de la réaction impose :

$$\sum (F_{\text{int}})_i = 0 \quad (\text{A1-20})$$

Les forces extérieures sont de deux types :

- Forces de volume :

Ces forces résultent de l'action d'un champ de forces auxquelles les particules fluides sont soumises. Si g_i représente la projection de l'accélération de la pesanteur \vec{g} sur l'axe Ox_i , on aura :

$$F_{\text{vol}} = \int_{\mathbf{v}} (\rho g_i) dv \quad (\text{A1-21})$$

- Forces de surface :

L'action du milieu extérieur sur le fluide contenu dans le système se traduit par l'existence au sein de celui-ci d'un tenseur de contraintes que nous noterons σ_{ij} :

$$F_{\text{surf}} = \int_s \sigma_{ij} n_j ds \quad (\text{A1-22})$$

D'où :

$$\sum (F_{\text{ext}})_i = (F_{\text{vol}})_i + (F_{\text{surf}})_i = \int_v \frac{d}{dt} (\rho V_i) dv \quad (\text{A1-23})$$

Donc :

$$\int_v \frac{d}{dt} (\rho V_i) dv = \int_v \rho g_i dv + \int_s \sigma_{ij} n_j ds \quad (\text{A1-24})$$

En appliquant le théorème de la divergence à l'intégrale de surface de l'équation (A1-24), on obtient :

$$\int_v \frac{d}{dt} (\rho V_i) dv = \int_v \left[\rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}) \right] dv \quad (\text{A1-25})$$

Le tenseur des contraintes σ_{ij} est donné par :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{A1-26})$$

Où p est la pression statique au sein du fluide et τ_{ij} le tenseur des contraintes visqueuses.

En égalisant les deux équations (A1-17) et (A1-26), on obtient :

$$\int_v \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_i V_j) \right] dv = \int_v \left[\rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] dv \quad (\text{A1-27})$$

Pour avoir la relation ponctuelle, faisons tendre le volume vers zéro, soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_i V_j) = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A1-28})$$

En injectant l'expression du tenseur σ_{ij} dans l'équation (A1-28), on aura :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_i V_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A1-29})$$

Cette équation peut s'écrire aussi comme :

$$\rho \left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A1-30})$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{dV_i}{dt} \quad (\text{A1-31})$$

où : $\frac{dV_i}{dt}$ représente la dérivée particulière ou totale.

Pour un fluide newtonien, le tenseur des contraintes est donné par :

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right] + \eta \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (\text{A1-32})$$

où : μ est la viscosité de cisaillement,
 η est la viscosité de dilatation.

Dans le cas d'un fluide incompressible ($\rho = \text{cte}$), l'expression (A1-32) se réduit à :

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{A1-33})$$

En coordonnées cylindriques, les composantes du tenseur τ_{ij} s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= 2\mu \frac{\partial V_r}{\partial r} & ; & \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{\theta\theta} &= 2\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right] & ; & \quad \tau_{\theta x} = \tau_{x\theta} = \mu \left[\frac{\partial V_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} & ; & \quad \tau_{rx} = \tau_{xr} = \mu \left[\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

Ainsi, les projections de l'équation (A1-29) s'écrivent :

- *Suivant r :*

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (V_\theta V_r)}{\partial \theta} + \frac{\partial (V_x V_r)}{\partial x} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(2 r \mu \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \right] - \frac{1}{r} \left[2 \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A1-34-a})$$

- *Suivant θ :*

$$\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r V_r V_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(V_\theta V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(V_x V_\theta)}{\partial x} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2 \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial x} \right) \right] + \rho g_\theta \quad (\text{A1-34-b})$$

• *Suivant x :*

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r V_r V_x)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(V_\theta V_x)}{\partial \theta} + \frac{\partial(V_x V_x)}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[2 \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} \right) \right] + \quad (\text{A1-34-c})$$

Par ailleurs, si la viscosité du fluide était constante on retrouve les équations de Navier-Stokes.

3. Equation de conservation de l'énergie

Nous déduirons l'équation de conservation de l'énergie à partir du premier principe de la thermodynamique. Le taux de variation de la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique d'un système Ω est égale à la somme de la puissance mécanique fournie à Ω par les forces extérieures (de volume et de surface) et de la puissance calorifique fournie à Ω par l'extérieur, on a donc :

$$\frac{d}{dt} \int_v \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv = \dot{W}_{\text{vol}} + \dot{W}_{\text{surf}} + \dot{q} \quad (\text{A1-35})$$

avec :

\dot{W}_{vol} : puissance des forces de volume,

\dot{W}_{surf} : puissance des forces de surface,

\dot{q} : puissance calorifique,

u : énergie interne.

Ajoutant et retranchant la puissance des forces intérieures \dot{W}_{int} au second membre, soit :

$$\frac{d}{dt} \int_v \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv = \dot{W}_{\text{vol}} + \dot{W}_{\text{surf}} + \dot{q} + (\dot{W}_{\text{int}} - \dot{W}_{\text{int}}) \quad (\text{A1-36})$$

or, de l'équation (A1-19), on a :

$$\int_v \frac{d}{dt} (\rho V_i) dv = \sum (F_{\text{ext}})_i + \sum (F_{\text{int}})_i \quad (\text{A1-37})$$

en multipliant l'équation ci-dessus par V_i , on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_v \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv = \dot{W}_{\text{vol}} + \dot{W}_{\text{surf}} + \dot{W}_{\text{int}} \quad (\text{A1-38})$$

L'équation (A1-38) constitue l'énoncé du théorème de l'énergie cinétique. En retranchant de l'équation de l'énergie (A1-36) l'équation (A1-38), on trouve :

$$\frac{d}{dt} \int_v (\rho u) dv = \dot{q} - \dot{W}_{int} \quad (A1-39)$$

a) Puissance des forces intérieures :

En appliquant la formule de Leibnitz au premier terme du membre de gauche de l'équation (A1-38), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_v \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv = \int_v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv + \int_s \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) (V_j n_j) dS \quad (A1-40)$$

En vertu du théorème de la divergence, que l'on applique au deuxième terme du second membre, on aura :

$$\frac{d}{dt} \int_v \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv = \int_v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv + \int_v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 V_j \right) dv \quad (A1-41)$$

les expressions des forces de volume et de surface étant connues, le second membre de l'équation (A1-38) devient :

$$\dot{W}_{ext} + \dot{W}_{int} = \left[\int_v \rho g_i V_i dv + \int_v \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} V_i) dv \right] + \dot{W}_{int} \quad (A1-42)$$

L'équation (A1-38) devient alors égale à :

$$\int_v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv + \int_v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 V_j \right) dv = \int_v \left(\rho g_i V_i + V_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) dv + \dot{W}_{int} \quad (A1-43)$$

Revenons maintenant à l'équation de l'impulsion, et multiplions la par V_i , on aura :

$$\left[\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] V_i \quad (A1-44)$$

d'où :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) + \rho V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) = \rho g_i V_i + V_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (A1-45)$$

De même si on multiplie l'équation de continuité (A1-8) par $\frac{1}{2} V^2$, on obtient :

$$\left(\frac{1}{2}V^2\right)\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}V^2\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_j) = 0 \quad (\text{A1-46})$$

Sommons les deux équations (A1-45) et (A1-46) et réarrangeant les termes, on obtient après intégration :

$$\int_v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv + \int_v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 V_j \right) dv = \int_v \rho g_i V_i dv + \int_v V_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv \quad (\text{A1-47})$$

En identifiant l'équation (A1-43) avec (A1-47), on obtient l'expression de \dot{W}_{int} :

$$\dot{W}_{\text{int}} = - \int_v \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dv \quad (\text{A1-48})$$

En introduisant l'expression du champ des contraintes, l'équation (A1-48) devient :

$$\dot{W}_{\text{int}} = \int_v p \frac{\partial V_i}{\partial x_i} dv - \int_v \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dv \quad (\text{A1-49})$$

b) Echange de chaleur

Le flux de chaleur directionnel résultant du transfert thermique et donné par la loi de Fourier :

$$\dot{q} = \int_v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dv \quad (\text{A1-50})$$

Où :

\dot{q} : représente le flux de chaleur directionnel donné par la loi de Fourier,

k : représente le coefficient de conductivité thermique local.

Remplaçons les équations (A1-49) et (A1-50) par leurs expressions dans l'équation (A1-39) et en réarrangeant les termes, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_v (\rho u) dv = \int_v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dv + \int_v p \frac{\partial V_i}{\partial x_i} dv - \int_v \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dv \quad (\text{A1-51})$$

En faisant tendre le volume de références vers zéro, on aura la relation ponctuelle, soit :

$$\frac{d}{dt}(\rho u) + p \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (\text{A1-52})$$

Quelques réarrangements donnent :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} + p \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{dp}{dt} \quad (\text{A1-53})$$

Ainsi on obtient, pour un fluide incompressible, l'expression analytique de l'équation de l'énergie. Celle-ci s'écrit comme :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (\text{A1-54})$$

Annexe 2 : Linéarisation du terme source

Il est fréquent que le terme source S soit une fonction non linéaire de la variable dépendante ϕ , il convient ainsi dans ce cas d'exprimer cette dépendance sous une forme linéarisée. Ceci est justifié d'une part, par le fait que le système à résoudre se ramène à un système algébrique linéaire. D'autre part, le choix d'une forme linéaire est meilleur que le traitement de S comme une constante.

Cependant, il existe différentes façons de linéariser le terme S et que le choix du profil de S_p et S_c est d'une importance capitale. En effet, le terme source est en général à l'origine des divergences pouvant se produire lors des calculs numériques et le choix d'un profil convenable du terme source permet en général d'atteindre la convergence. Ainsi, l'expression de linéarisation recommandée [21] s'écrit comme suit :

$$S = S^* + \left(\frac{dS}{dT} \right) (T_p - T_p^*) \quad (\text{A2-1})$$

Exemple : soit le terme source suivant :

$$S = 4 - 5 T^3 \quad (\text{A2-2})$$

parmi les formes linéarisées possibles, on peut écrire :

- $S_c = 4 - 5 T_p^{*3}$; $S_p = 0$
- $S_c = 4$; $S_p = -5 T_p^{*3}$
- $S_c = 4 + 10 T_p^{*3}$, $S_p = -15 T_p^{*3}$

Il est à noter que, conformément aux règles de la méthode des volumes finis, le terme S_p ne doit pas être positif.

Annexe 3 : Traitement du terme instationnaire

On s'intéresse dans ce qui suit au traitement des termes instationnaires. Pour cela, on considère l'équation suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (\text{A3-1})$$

En intégrant sur le volume de contrôle de la Figure (A3-1) et sur l'intervalle de temps de t à $t+\Delta t$ on obtient :

$$\int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt \quad (\text{A3-2})$$

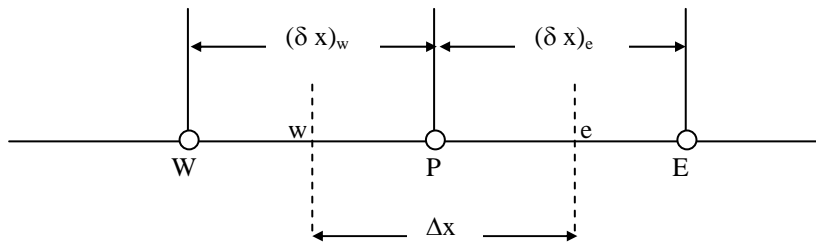


Figure (A3-1) : Volume de contrôle considéré.

Pour le terme $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, on suppose que la variable dépendante ϕ reste égale à ϕ_P dans tout le volume de contrôle. Ainsi, on a :

$$\int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt dx = \Delta x (\phi_P^1 - \phi_P^0) \quad (\text{A3-3})$$

où l'indice 1 désigne le temps $t+\Delta t$ et l'indice 0 le temps t .

Pour le terme $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ on suivra la même démarche que pour le régime permanent. On aura donc :

$$\Delta x (\phi_P^1 + \phi_P^0) = \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\Gamma_e (\phi_E - \phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma_w (\phi_P - \phi_W)}{(\delta x)_w} \right] dt \quad (\text{A3-4})$$

A ce stade, on doit choisir le profil d'évolution de ϕ_P , ϕ_E et ϕ_W entre t et $t+\Delta t$. Cependant, plusieurs profils sont possibles, certains peuvent se mettre sous la forme :

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi_P dt = [f \phi_P^1 + (1-f) \phi_P^0] \Delta t \quad (\text{A3-5})$$

Avec f facteur de poids compris entre 0 et 1.

D'autre part, en utilisant la même formule d'intégration pour ϕ_E et ϕ_W , et après réarrangement, on obtient :

$$a_P \phi_P = a_E [f \phi_E^1 + (1-f) \phi_E^0] + a_W [f \phi_W^1 + (1-f) \phi_W^0] + [a_P^0 - (1-f)a_E - (1-f)a_W] \quad (\text{A3-6})$$

avec :

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e}, \quad a_W = \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w}, \quad a_P^0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad a_P = f a_E + f a_W + a_P^0$$

Pour des valeurs spécifiques du facteur de pondération f , l'équation discrétisée (A3-6) se réduit à l'un des schémas connus pour les équations paraboliques. Ainsi, on distingue suivant la valeur de f , trois schémas :

- 1- Schéma explicite ($f = 0$) : ϕ_P garde une valeur constante égale à ϕ_P^0 durant le pas de temps,
- 2- Schéma totalement implicite ($f = 1$) : Au temps t , ϕ_P passe subitement de ϕ_P^0 à ϕ_P^1 et reste constante durant le pas de temps Δt .
- 3- Schéma de Crank Nicolson ($f = 0,5$) : pour ce schéma, ϕ_P varie linéairement suivant le temps entre ϕ_P^0 et ϕ_P^1 .

