

N° D'ordre : 20/2013-M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté des Mathématiques



Mémoire
Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN MATHÉMATIQUE
Spécialité : Recherche opérationnelle

Par : BOURECHE Lyes

Sujet
**OPTIMISATION STOCHASTIQUE
FRACTIONNAIRE LINÉAIRE**

Soutenu publiquement, le 07/03/2013, devant le jury composé de :

M ^r M. ABBAS	Professeur	à l'USTHB	Président.
M ^r M. MOULAI	Professeur	à l'USTHB	Directeur de thèse.
M ^r D. CHAABANE	Professeur	à l'USTHB	Examineur.
M ^r M. MEZGHICHE	Chargé de Recherche	à l'USTHB	Invité.



*Louange A Allah, le miséricordieux, sans Lui rien de tout cela
n'aurait pu être.*

*Je tiens tout d'abord à remercier le Professeur M^r M. MOULAI pour l'honneur qu'il
m'a fait en acceptant de m'encadrer. Ses conseils précieux ont permis une bonne orienta-
tion dans la réalisation de ce modeste travail.*

Je tiens à remercier M^r M. ABBAS. d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

*Je remercie aussi M^r D. CHAABANE. d'avoir accepter de faire partie du jury et
consacrer son temps à la lecture et à la correction de ce mémoire.*

*Je teins également à remercier M^r M. MEZGHICHE, pour tout son soutien et son
aide.*

Mes remerciements les plus vifs vont tout particulièrement à mes parents.

*Enfin, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce
travail.*

BOURECHE. Lyes.



Je dédie ce modeste travail :

A mon très cher père .

A ma très chère mère.

A mes frères et soeurs..

A ma femme et ma très chère petite fille.

A ma promotion Magister *MG*.

En particulier A Bedreddine, Hamza , Nassime et Gillas.

A tous mes amis

BOURECHE. Lyes.

Table des matières

Liste des figures	vi
Liste des tables	vii
Notations	1
1 <i>Optimisation fractionnaire</i>	4
Introduction	4
1.1 Problèmes fractionnaire mono-objectif	4
1.2 Résolution d'un problème équivalent à objectif linéaire	6
1.3 Résolution par paramétrisation	7
1.4 Résolution directe	9
1.4.1 Notations et définitions	9
1.4.2 Géométrie de la programmation fractionnaire linéaire	10
1.4.3 Exemple illustratif	10
2 <i>Optimisation stochastique</i>	13
Introduction	13
2.1 Introduction	13
2.2 Programmation linéaire stochastique	14
2.3 Problème de programmation stochastique	14
2.3.1 Formulation Générale	14
2.4 Programmation linéaire stochastique avec recours	15
2.4.1 Le Modèle de recours à 2-niveaux	15
2.5 Programmation stochastique avec contraintes probabilistes (PCC)	18
2.6 Méthode "L-Shaped"	19
2.7 Autres technique de modélisation de (PS)	20
2.7.1 Approche de la solution large	21
2.7.2 Approche Wait-and-see	21
2.7.3 Approche déterministe	21
2.8 Programmation stochastique fractionnaire	21
2.9 Problème de programmation stochastique fractionnaire linéaire	21
2.9.1 Détermination des contraintes de probabilités équivalentes	22
2.9.2 Conversion des fonctions objectifs en contraintes	23
2.9.3 Version déterministe	26
2.10 Autres approches de résolution	27

2.10.1	Formulation déterministe	28
2.10.2	Exemples numériques	28
2.11	Problème de gestion des déchets urbain	32
2.11.1	Programmation linéaire fractionnaire	34
2.11.2	Programmation avec contrainte de chance	35
2.11.3	Programmation stochastique fractionnaire linéaire	36
2.12	Enoncé du problème	37
2.13	Le modèle (SLFP) pour la gestion des déchets urbain solides	40
2.14	Résultats et discussion	42
2.15	Conclusions	47
3	<i>Optimisation multi-objectif</i>	49
	Introduction	49
3.1	Programmation linéaire mono-objectif	50
3.1.1	Concepts de base et définitions	51
3.1.2	Classification générale des méthodes d'optimisation mono-objectif	52
3.2	Programmation mathématique multi-objectif	55
3.2.1	Problèmes de programmation mathématique multi-objectif	55
3.2.2	Formulation de problème	56
3.2.3	Classification des problèmes d'optimisation multi-objectif	57
3.2.4	Multiplicité des solutions	57
3.2.5	La dominance	58
3.2.6	La surface de compromis	66
3.2.7	La convexité	67
3.2.8	La représentation de la surface de compromis.	68
4	<i>Optimisation multi-objectif stochastique fractionnaire linéaire</i>	71
	Introduction	71
4.1	Formulation de problème de programmation multi-Objectif stochastique fractionnaire	72
4.1.1	Détermination des contraintes de probabilités équivalentes	72
4.1.2	Conversion des fonctions objectifs en contraintes	73
4.2	Fonction scalarisante stochastique linéaire	75
4.2.1	Méthode de la fonction scalarisante linéaire stochastique	75
4.2.2	Exemple numérique	76
4.3	Une approche d'identification des fonctions objectifs redondantes et contraintes redondantes dans les problèmes (MONLSFP)	77
4.4	Programmation stochastique multi-objectif fractionnaire non linéaire	78
4.4.1	Contraintes déterministe équivalentes	78
4.5	Conversion des fonctions objectifs en contraintes	79
4.6	Identification d'une contrainte redondante	83
4.6.1	algorithme de programmation linéaire séquentielle	83
4.6.2	Algorithme redondance	86

TABLE DES MATIÈRES

v

Conclusion et Perspectives

91

Bibliographie

91

Table des figures

1.1	<i>Interprétation d'une courbe niveau d'un problème fractionnaire [25].</i>	11
2.1	<i>problème de déchets urbain[29].</i>	37
2.2	<i>La fonction de répartition de (MSW) [29].</i>	39
2.3	<i>Comparaison entre solutions des modèles(rapport optimal et moindre coût) [29].</i>	46
2.4	<i>comparaison des solutions entre les deux modèles[29].</i>	47
3.1	<i>Espace de recherche et espace réalisable [28].</i>	51
3.2	<i>Classification générale des méthodes d'optimisation mono-objectif.[28] . . .</i>	53
3.3	<i>Relation entre kilométrage et prix[28].</i>	56
3.4	<i>Les différents espaces de recherche[28].</i>	57
3.5	<i>L'optimalité locale au sens de Pareto.</i>	59
3.6	<i>Le théorème du contact [28].</i>	60
3.7	<i>Les niveaux de préférence dans la relation de dominance.</i>	61
3.8	<i>L'allure du cône en fonction de λ</i>	62
3.9	<i>La projection du cône multi-dimensionnel.</i>	63
3.10	<i>Deux exemples d'application de la relation de cône-dominance.</i>	64
3.11	<i>La relation de cône-dominance.</i>	64
3.12	<i>Représentation de la surface de compromis.</i>	66
3.13	<i>Représentation du point idéal et du point "nadir".</i>	67
3.14	<i>Formes les plus courantes de la surface de compromis dans le cas à deux objectifs.</i>	68
3.15	<i>Exemples d'ensemble convexe et d'ensemble non convexe.</i>	69
3.16	<i>La représentation de la surface de compromis.</i>	69

Liste des tableaux

2.1	<i>Les paramètres déterministes et les α_i et β_i de l'exemple1</i>	29
2.2	<i>Les moyennes et variances de l'exemple1</i>	29
2.3	<i>Les paramètres déterministes et les α_k et β_k de l'exemple2</i>	30
2.4	<i>Les moyennes et variances d_{kj} de l'exemple2</i>	30
2.5	<i>Les moyennes et variances de a_{ij} de l'exemple2</i>	30
2.6	<i>Les moyennes et variances de c_{kj} de l'exemple3</i>	31
2.7	<i>Les moyennes et variances de d_{kj} de l'exemple2</i>	31
2.8	<i>Les coûts de transport et d'utilisation des stations (Décharge et recyclage)</i>	38
2.9	<i>La quantité de déchets générer par le quartier (i) durant la periode (k)</i>	40
2.10	<i>Résultat de la résolution du problème LSFP</i>	43
4.1	<i>Le tableau ci-dessus résume notre problème à l'état déterministe</i>	76
4.2	<i>Les moyennes les variances de l'exemple 1</i>	77
4.3	<i>Les moyennes et les variances de c_{kj} de l'exemple1</i>	87
4.4	<i></i>	88
4.5	<i>Les moyennes et variances de a_{ij} de l'exemple2</i>	89
4.6	<i>Les moyennes et variances de a_{ij} de l'exemple2</i>	90

Notations

Symbole	signification
LSFP	Programmation stochastique fractionnaire linéaire.
SLP	Programmation stochastique linéaire.
CCP	Programmation par contrainte de chance.
$\mathcal{S}$	Espace de recherche.
A	Une matrice $m \times n$
$c = (c_1, \dots, c_n)$	Un vecteur colone
$d = (d_1, \dots, d_n)$	Un vecteur colone
χ	Espace réalisable.
$\mathcal{S}^r$	Représente l'ensemble des solutions réalisables d'un problème MOLP.
$x = (x_1, \dots, x_n)$	Variables de décisions.
$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$	Vecteur des paramètres.
$G = (G_1, \dots, G_n)$	Vecteur des fonction objectifs.

Introduction générale

Introduction générale

L'une des principales missions de la recherche opérationnelle est d'aider à prendre des décisions en vue d'une gestion efficace, rationnelle et logique. La modélisation classique des problèmes de recherche opérationnelle n'a étudié que des modèles d'optimisation à un seul objectif, jusqu'à l'apparition d'une nouvelle vision, plus proche de la réalité, qui consiste à modéliser les problèmes de sorte que tous les objectifs pertinents soient pris en considération. Cette idée de multiplicité d'objectifs semble très raisonnable et contribue avec une efficacité très forte à l'élaboration de nouvelles méthodes pratiques de gestion, plus réalistes que les méthodes classiques.

L'optimisation à objectifs multiples reste sans aucun doute, un domaine de recherche important pour les scientifiques et les ingénieurs, non seulement en raison de la nature multi-objectifs de la plupart des problèmes réels, mais également parce qu'il reste beaucoup de questions en suspens dans ce secteur.

Pendant les dernières quatre décennies, la programmation fractionnaire est devenue un des outils de planification les très puissantes. Elle est surtout appliquée dans l'ingénierie, les finances, les sciences économiques et autres disciplines.

La programmation stochastique et la programmation fractionnaire constituent deux des domaines de recherche les plus vibrants dans l'optimisation. La programmation fractionnaire stochastique (SFP) offre une voie de traiter la planification dans les situations où les paramètres de problème ne sont pas connus avec certitude, de telles situations surgissent quand les aspects techniques du système à étude sont trop compliqués ou difficiles à observer avec certitude.

De manière générale, un problème de programmation fractionnaire stochastique linéaire (LSFP) consiste à optimiser le rapport de deux fonctions linéaires, soumis à un ensemble de contraintes, tel que : au moins l'une des caractéristiques du système apparaît dans ce problème sous forme aléatoire, certaines contraintes peuvent être déterministe, avec des

variables non négatives.

Différentes versions de ce modèle : linéaire ou non linéaire, en nombres entiers ou en continus ont de nombreuses applications, ce soit en optimisation combinatoire en programmation stochastique en bases de données et en économie.

Trois grandes stratégies de résolution d'un programme fractionnaire émergent dans la littérature : la résolution directe, la résolution par paramétrisation et la résolution d'un problème équivalent à objectif simplifié.

Organisation du document

Ce mémoire est structuré de la façon suivante :

- Dans le premier chapitre, nous présentons un état de l'art sur les méthodes de résolution des problèmes fractionnaires mono-objectif, on a citée les différentes méthodes de résolutions de ces problèmes fractionnaires.
- Au deuxième chapitre, nous abordons les problèmes de programmation stochastique linéaire. Ainsi qu'une présentation d'une méthode de résolution des problèmes stochastiques fractionnaires linéaire, en particulier le problème des sommes des fractions avec des contraintes mixtes. A la fin, on trouve un exemple pour illustres la technique.
- Dans le troisième chapitre, nous présentons un état de l'art sur les méthodes de résolution des problèmes multi-objectif. Ces méthodes sont classifiées en différentes catégories, nous présentons pour chacune de celles-ci les méthodes les plus courantes.
- Le quatrième chapitre contient une présentation d'une méthode de résolution des problèmes multi-objectifs stochastique fractionnaire linéaire avec des contraintes linéaires et des contraintes de chances. La fin de ce chapitre est consacré à la description d'un approche d'identification des fonctions objectifs redondantes et contraintes redondantes dans le problème Multi-objectif stochastiques fractionnaires non linéaire.

Le travail s'achève par une conclusion mettant l'accent sur les lettres.

1

Optimisation fractionnaire

Introduction

La programmation fractionnaire a été largement étudiée par plusieurs auteurs pour le cas de problème à un seul objectif. Pourtant, il n'existe peu d'articles traitant le cas de plusieurs fonctions objectifs fractionnaires linéaires.

1.1 Problèmes fractionnaire mono-objectif

Etant donné f, h et $g_i, i = 1, \dots, m$ des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^n$, avec h ne s'annulant pas sur le sous-ensemble $\mathcal{S}, \mathcal{S} = \{x/x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0; \text{ pour } i = 1, \dots, n\}$ de $\mathbb{R}^n$, le problème de programmation fractionnaire consiste à déterminer un élément x^* de $\mathcal{S}$ optimisant la fonction $\frac{f(x)}{h(x)}$ sur un domaine défini par le système de contraintes $g_i(x) \leq 0$ avec x dans l'ensemble $\mathcal{S}$. Ce problème s'écrit sous la forme suivante :

$$(P) \begin{cases} \text{Min } \frac{f(x)}{h(x)} \\ \text{s.c } g_i(x) \geq 0 \\ x \in \mathcal{S} \end{cases}$$

Avec les hypothèses classiques :

- $F(P) \neq \emptyset$,
- les fonctions f, h et g_i sont continues sur $\mathbb{R}^n$,
- $\forall x \in \mathcal{S} : h(x) > 0$,
- $\exists x \in F(P) : f(x) > 0$.

Lorsque la fonction f est concave et les fonctions h et g sont convexes, (P) est désigné par programme fractionnaire concave-convexe. (P) est dit fractionnaire linéaire, ou encoure hyperbolique, si f, h et g_i sont des fonctions linéaires ou affines de la variable x , il se modélise alors comme suit :

$$(P) \begin{cases} \text{Min} \frac{\alpha + c^T x}{\beta + d^T x} \\ \text{s.c. } A.x \geq b \\ x \in \mathcal{S} \end{cases}$$

Ou α et β sont des réels, c et d sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, A est une matrice réelle de dimension $m \times n$ et b est un vecteur de $\mathbb{R}^m$. Les problèmes fractionnaires linéaires ou non linéaires, en continu, en nombres entiers ou en variables 0-1 se rencontrent dans plusieurs domaines tels que les bases de données, l'optimisation combinatoire, la programmation stochastique et l'économie. Plusieurs applications de ces problèmes fractionnaires ont déjà été décrites dans la littérature

La forme particulière des programmes fractionnaires a fait que de nombreux auteurs ont entrepris d'élaborer des méthodes de résolution spécifiques qui se sont avérées plus efficaces que l'application directe des méthodes générales de programmation non linéaire. Dans la littérature émergent trois grandes stratégies de résolution d'un programme fractionnaire.

- La résolution d'un problème équivalent : Un changement de variable permet de simplifier l'objectif, mais en transportant la difficulté à l'ensemble des contraintes. Par exemple, un programme fractionnaire concave-convexe est transformé en un programme concave, un programme hyperbolique en un programme à objectif linéaire, avec des contraintes additionnelles.
- La résolution par paramétrisation : à l'inverse de la résolution directe, on construit un problème à objectif simplifié, combinaison linéaire du numérateur et du dénominateur par l'intermédiaire d'un paramètre, tout en gardant inchangé l'ensemble des contraintes. Une séquence de résolutions de ce type de problème fournit une solution du programme fractionnaire. Cette méthode a été utilisée pour les différents programmes fractionnaires linéaires et non linéaires, en variables continues comme en variables discrètes, sur des domaines bornés.
- La résolution directe : Le programme est traité sous sa forme originale. Elle a été utilisée pour les programmes hyperboliques en variables bivalentes (0-1).

1.2 Résolution d'un problème équivalent à objectif linéaire

La transformation du programme fractionnaire en un programme équivalent à objectif non fractionnaire est obtenue par changement de variables. A l'inverse de l'approche paramétrée, ce changement de variables induit l'ajout d'une contrainte et d'une variable. Plus précisément, cette transformation, proposée par Charnes et Cooper pour le programme hyperbolique en variables continues

$$(P) \begin{cases} \text{Min} \frac{\alpha + c^T \cdot x}{\beta + d^T \cdot x} \\ \text{s.c} \quad A \cdot x \geq b \\ x \in \mathcal{S} \end{cases}$$

S'effectue en introduisant deux nouvelles variables

$$y = \left(\frac{1}{\beta + d \cdot x} \right) x \quad \text{et} \quad t = \frac{1}{\beta + d \cdot x}$$

Pour aboutir à un programme linéaire équivalent

$$(PE) \begin{cases} \text{Min} c^T \cdot y + \alpha \cdot t \\ \text{s.c} \quad A \cdot y - b \cdot t \geq 0 \\ d \cdot y + \beta \cdot t = 1 \\ y, t \geq 0. \end{cases}$$

Cette notion d'équivalence est précisée ci-dessous :

Proposition : Si (y^*, t^*) est une solution optimale de (PE), alors $x^* = \frac{y^*}{t^*}$ est une solution optimale de (P).

En fait, s'il existe une solution réalisable x telle que $\frac{\alpha + c^T \cdot x}{\beta + d^T \cdot x} > 0$, la contrainte d'égalité $d \cdot y + \beta \cdot t = 1$ peut être remplacée par la contrainte d'inégalité $d \cdot y + \alpha \cdot t \leq 1$, plus simple à traiter. Cette transformation en un programme linéaire équivalent a pour but d'appliquer les algorithmes standards tels que la méthode du Simplex. Pour les programmes fractionnaires en variables entières. Granot proposé une méthode de génération de coupes (de type Gomory) appliquée au programme linéaire (PE). D'autre part, dans le cas d'un programme hyperbolique à n variables bivalent, Williams propose une transformation spécifique en un programme linéaire équivalent en variables mixtes dont la taille croît de $n + 1$ variables continues et de $3n$ contraintes. Ce nouveau programme est résolu par un algorithme de type Branche-and-Bound.

Remarque

Cette transformation peut être, généralement, effectuée sur un programme fractionnaire concave-convexe.

$$(PE) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \frac{f(x)}{h(x)} \\ \text{s.c } g(x) \leq 0 \\ d.y + \beta.t = 1 \\ x \in \end{array} \right. \mathcal{S}.$$

Pour aboutir à un programme équivalent.

$$(PE) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } t.f(\frac{y}{t}) \\ \text{s.c } g(\frac{y}{t}) \leq 0 \\ h(\frac{y}{t}) = 1 \\ y, t \geq 0. \end{array} \right.$$

obtenu en posant

$$y = (\frac{1}{h(x)})x \text{ et } t = \frac{1}{h(x)}$$

Remarque

Dans le cas d'un programme hyperbolique en variables $\{0, 1\}$, cette transformation induit des contraintes de type quadratique. Plus précisément, en notant que $x_j \in \{0, 1\}$ est équivalent à $x_j(x_j - 1) = 0$, la contrainte $\frac{y_j}{t} \in \{0, 1\}$ s'écrit sous la forme équivalente $y_j(y_j - t) = 0$, soit $(y_j^2 - y_j)t = 0$ qui est de type quadratique.

1.3 Résolution par paramétrisation

Afin de simplifier l'objectif du programme mathématique, un paramètre est introduit permettant par exemple de ramener un programme hyperbolique en un programme (paramétré) linéaire, ou bien un programme fractionnaire quadratique tout en gardant l'ensemble des contraintes inchangées. Ainsi, le programme obtenu peut être résolu "paramétriquement" : une séquence de résolutions de tels programmes à objectif simplifié engendre une suite de solutions convergentes vers une solution optimale du programme fractionnaire initial.

Proposé initialement en 1956 par Isbell et Marlow pour des programme hyperboliques, mais ce n'est qu'à partir de 1967 que cette approche a connu un grand élan avec Dinkelbach qui l'a généralisée aux programme fractionnaire non linéaires.

Afin d'assurer la convergence de la procédure, l'hypothèse de compacité du domaine de défini des contraintes est adoptée tout au long de cette section.

Soit le programme fractionnaire

$$(P) \begin{cases} \max \frac{f(x)}{h(x)} \\ \text{s.c. } g(x) \leq 0 \\ x \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

Le programme paramétré associé consiste à simplifier l'objectif en combinant linéairement le numérateur et le dénominateur par l'intermédiaire d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. Il s'écrit donc comme suit :

$$Q(\lambda) \begin{cases} \max f(x) - \lambda h(x) \\ \text{s.c. } g(x) \leq 0 \\ x \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dans le cas d'un programme hyperbolique

$$\begin{cases} \max \frac{\alpha + c^T x}{\beta + d^T x} \\ \text{s.c. } Ax \leq b \\ x \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

Le programme paramétré est un programme linéaire dont l'objectif est en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \max (\alpha - \lambda\beta) + (c - \lambda d)^T x \\ \text{s.c. } Ax \leq b \\ x \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

En notant λ^* la valeur optimale de (P), le résultat fondamental liant le programme fractionnaire au programme paramétré associé est donné par :

Proposition 1.1 Tout solution optimale de $Q(\lambda^*)$ est une solution optimale de (P).

En tant que fonction de la variable λ , la valeur optimale $\varphi(\lambda)$ du programme paramétré vérifie quelques propriétés que nous résumons ci-après :

Proposition 1.2 La fonction $\lambda \rightarrow \varphi(\lambda)$ est continue, strictement décroissante, convexe.

$\varphi(0) > 0$ et $\varphi(\lambda)$ tend vers $-\infty$ quand λ tend vers $+\infty$. Si de plus f et h sont affines, alors φ est linéaire par morceaux.

En particulier, l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ admet une solution unique λ^* , plus précisément :

Proposition 1.3 1. $\varphi(\lambda) = 0 \iff \lambda = \lambda^*$

2. $\varphi(\lambda) > 0 \Rightarrow \lambda < \lambda^*$

3. $\varphi(\lambda) < 0 \Rightarrow \lambda > \lambda^*$

Ainsi la résolution de (P) revient à trouver la racine de l'équation non linéaire à une seule variable : $\varphi(\lambda) = 0$.

Dans la littérature il existe un catalogue des algorithmes, il incluent des algorithmes de résolution itératifs (Newton, interpolation linéaire) et dichotomiques (recherche dichotomique, recherche dichotomique modifiée, interpolation convexe) ainsi qu'un algorithme *ec*-approchant.

1.4 Résolution directe

1.4.1 Notations et définitions

Définition 1.1 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite concave si et seulement si pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ on a : $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

Définition 1.2 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si et seulement si pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ on a : $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

Définition 1.3 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite pseudo-concave si et seulement si pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\nabla f(x)(y - x) \leq 0$, on a : $f(y) \leq f(x)$.

Définition 1.4 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite pseudo-convexe si et seulement si pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\nabla f(x)(y - x) \geq 0$, on a : $f(y) \geq f(x)$.

étant donné f, h et $g_i, i=1, \dots, m$, des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^n$. Désignons par $\mathcal{S}$ sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ sur lequel h ne s'annule pas. Le problème de programmation fractionnaire consiste à déterminer un élément x^* de $\mathcal{S}$ maximisant la fonction f/h sur un domaine défini par le système de contraintes $\{x \in \mathcal{S} : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$ il a donc la forme suivante :

$$(p) \begin{cases} \max \frac{f(x)}{h(x)} \\ \text{s.c. } g_i(x) \leq 0 \\ x \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

- $S(p) \neq \emptyset$,
- les fonctions $f, h, g_i, i = 1, \dots, m$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$.
- $\forall x \in S : h(x) > 0$;
- $\exists x \in S(p) : f(x) > 0$,

1.4.2 Géométrie de la programmation fractionnaire linéaire

Comme la noté Steuer, les programmes linéaires fractionnaires présentent un intérêt particulier mis en évidence par des courbes-niveaux de leurs fonctions critères. En effet, pour illustrer cet aspect, considérons une courbe-niveau quelconque de la fonction critère :

$$\hat{Z} = \frac{p^T x + \alpha}{q^T x + \beta} \quad (1.1)$$

après simplification, nous obtenons :

$$\hat{Z}(q^T x + \beta) = p^T x + \alpha \quad (1.2)$$

ce qui entraîne

$$\hat{Z}\beta + \alpha = (p + \hat{Z}q)^T \quad (1.3)$$

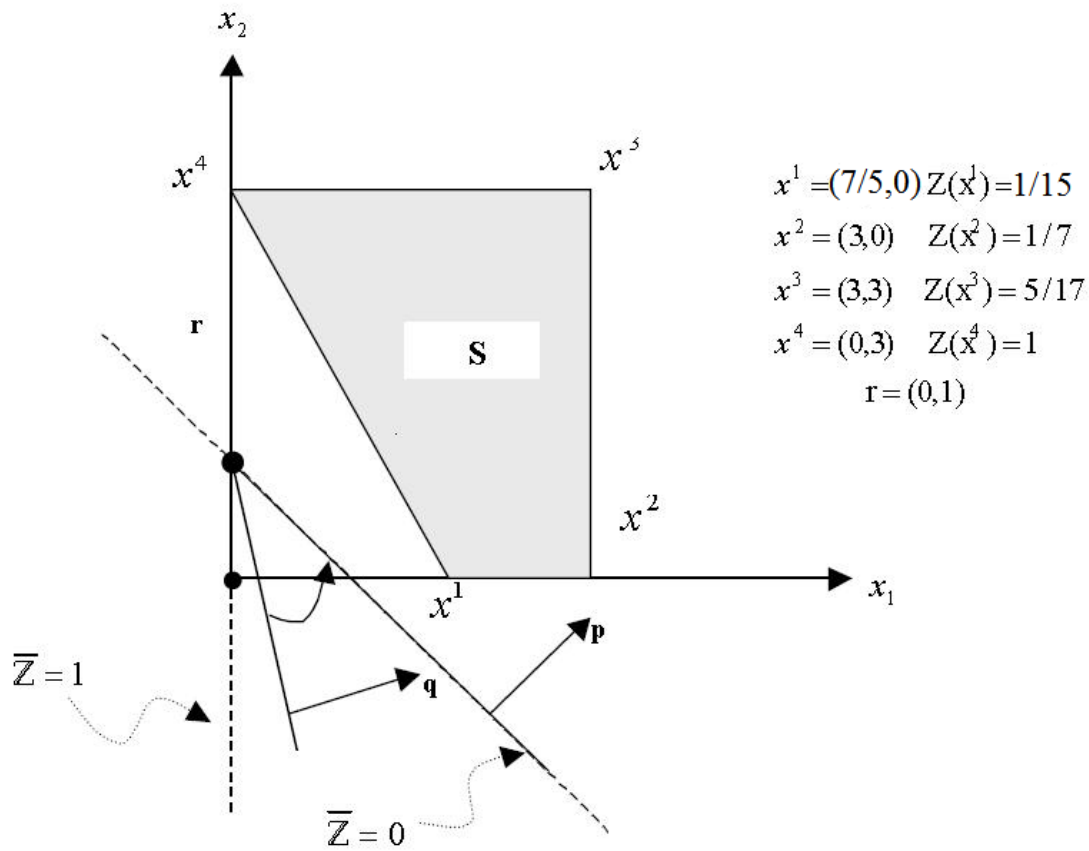
Qui est une expression linéaire de la courbe-niveau de la fonction critère. Puisque Z est quelconque, on voit que chaque courbe-niveau du critère fractionnaire linéaire est linéaire sur S , à condition que le dénominateur ne soit pas nul sur S . Donc, si un programme fractionnaire linéaire uni-critère possède une solution optimale, alors au moins un point extrême de S est optimal.

En dépit de la linéarité de la courbe niveau de la fonction objectif, les courbes-niveaux ne sont pas parallèles (lorsque $p \neq 0, q \neq 0$ et $p \neq \omega q$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$) L'ensemble rotation est l'ensemble de tous les points d'intersection entre la 0-courbe niveau du numérateur et la 0-courbe niveau du dénominateur L'ensemble rotation est appelé point de rotation dans $\mathbb{R}^2$ et axe de rotation dans $\mathbb{R}^3$ Les points de cet ensemble sont déterminés par la résolution du système suivant : $[p^T x = -\alpha][q^T x = -\beta]$

1.4.3 Exemple illustratif

Considérons le programme fractionnaire linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } Z = \frac{x_1 + x_2 - 1}{5x_1 + x_2 - 1} \\ \text{s.c. } 5x_1 + x_2 - 1 \geq 6 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

FIG. 1.1 – *Interprétation d'une courbe niveau d'un problème fractionnaire [25].*

Dont le graphe est donné par la figure

Alors la courbe de niveau $\bar{Z}$ est l'ensemble des points $x = (x_1, x_2)$ satisfaisant l'équation :

$$(1 - 5\hat{Z})x_1 + (1 - \bar{Z})x_2 = (1 - \bar{Z}) \quad (1.4)$$

donc pour :

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1 : \text{courbe de niveau } 0 \\ \hat{Z} &= 1 \Leftrightarrow x_1 = 0 : \text{courbe de niveau } 1 \end{aligned}$$

Le problème a quatre points extrêmes x^1, x^2, x^3 et x^4 dont les valeurs du critère sont indiquées sur la figure 2.1. Les lignes discontinues représentent les 0-courbes niveaux du numérateur et du dénominateur dont l'intersection est le point de rotation $r = (0, 1)$. La flèche circulaire dénote le gradient de la fonction critère fractionnaire linéaire et, indique le sens et l'angle avec lesquels se déplacent les courbes de niveaux. Donc, en faisant déplacer la

courbe de niveau 0 autour du point de rotation suivant le sens de rotation trigonométrique, nous pouvons voir que le point optimal x^4 de valeur optimale $Z^* = 1$ est l'intersection du domaine S avec la courbe de niveau $Z = 1$.

2

Optimisation stochastique

2.1 Introduction

La notion d'incertitude dans la programmation mathématique est apparue pour la première fois dans les années 50 avec les travaux de Dantzig, Cooper et Charnes, Beale. L'incertitude dans les problèmes d'optimisation touche notamment les coûts de production, les prix des marchés, les pénalités en cas des violations des contrats, aussi bien que la demande de clients, les délais de livraison, les temps de traitement, la disponibilité des machines et d'autres coefficients technologiques.

Cette section fournit les éléments de la programmation linéaire stochastique nécessaire à la compréhension du modèle.

Les problèmes stochastiques sont des problèmes dans lesquels une incertitude est introduite au moyen d'une variable aléatoire.

La programmation stochastique est une approche qui modélise ces problèmes. Dans l'ensemble, la littérature est assez riche concernant des méthodes qui abordent des problèmes en deux étapes. Surtout pour le recours simple, il existe plusieurs travaux qui établissent des résultats : pour les problèmes linéaires continus, aussi bien que pour les problèmes quadratiques. Ainsi qu'en nombres entiers. Nous allons voir les formulation les plus utilisés, En particulier :

- Modèles avec contraintes de chance (PCC).
- Modèles de recours.
- Modèles L-Shaped.

2.2 Programmation linéaire stochastique

Les décideurs (DMs) sont souvent confrontés à des situations où les données du problème sont imprécises ou incertaines : des données sur des événements du passé qui pouvaient pas être connues exactement dû aux erreurs de mesure, des données sur événements futurs (demandes) et simplement ne peuvent pas être connues avec certitude. La programmation stochastique est une approche qui modélise ces problèmes, en tenant compte de ces paramètres incertains, qui sont supposées être des variables aléatoires.

2.3 Problème de programmation stochastique

2.3.1 Formulation Générale

Un problème stochastique est défini, en général, comme suit :

$$\begin{cases} \text{ " min " } f(x, \xi) \\ s.c \ g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m. \\ x \in S \end{cases} \quad (2.1)$$

avec :

- $S \in \mathbb{R}^n$ est un ensemble déterministe des décisions réalisables,
- ξ est un vecteur aléatoire variant sur l'ensemble $\Xi \subset \mathbb{R}^k$, k est le nombre de variables aléatoires, paramètres incertains, du problème,
- on suppose connaître une famille d'événements $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \in \mathfrak{g}$, appelés *scénarios*, et la distribution de probabilités P dans $\mathfrak{F}$, c-à-d, $\forall A \in \mathfrak{F} (A \subset \Xi), P(A)$ est connue, (A est une réalisation de la variable aléatoire ξ),
- la fonction objectif et les contraintes sont des fonctions réelles dépendantes du vecteur aléatoire,

$$\begin{aligned} f(x, \xi) &: \Xi \longrightarrow \mathbb{R}, \forall \xi, \\ g_i(x, \xi) &: \Xi \longrightarrow \mathbb{R}, \forall \xi, i. \end{aligned}$$

2.4. PROGRAMMATION LINÉAIRE STOCHASTIQUE AVEC RECOURS

Dans le cas où les contraintes ainsi que la fonction objectif dépendent linéairement de x et $\mathcal{S}$ un polyèdre convexe, on parle d'un problème linéaire stochastique (SLP), il est défini par :

$$(P) \begin{cases} \min Z = C(\xi)x \\ \text{s.c. } T(\xi)x = h(\xi)x \\ x \in \mathcal{S}. \end{cases} \quad (2.2)$$

avec :

- a) $C(\xi), T(\xi), h(\xi)$ sont des vecteurs aléatoires de dimensions respectives $(1 \times n), (m_0 \times n), (m_0 \times 1)$, définis sur l'espace de probabilités (ζ, F, P) ,
- b) $S = \{Ax = b \mid x \geq 0\}$, un polyèdre convexe et déterministe des décisions x , A et b sont des vecteurs déterministes des dimensions $(m \times n), (m \times 1)$ respectivement.

2.4 Programmation linéaire stochastique avec recours

Le plus simple modèle de cette approche est, le modèle de recours à 2 niveaux, introduit par Dantzig et Beale, permettant de prendre des décisions dans beaucoup de situations complexes qui incluent la possibilité de faire des actions de recours après l'occurrence d'un scénario.

Initialement, avant de connaître les réalisations des paramètres aléatoires, on détermine une décision anticipative, appelée décision du premier niveau, et une fois le futur est réalisé, on prend une seconde décision corrective, à un certain coût, par maintenir la faisabilité du modèle, celle-ci est appelée décision de recours ou du second niveau.

L'objectif est de déterminer les décisions du premier niveau d'une manière à minimiser l'espérance mathématique d'une certaine fonction coût obtenu par sommation du coût du premier niveau et le coût de recours (coût du second niveau), une fonction qui dépend évidemment des éléments stochastiques.

2.4.1 Le Modèle de recours à 2-niveaux

$$\begin{cases} \min C^T x + Q(x) \\ \text{s.c. } Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

ou

$$Q(x) = \mathbb{E}[Q(x, \xi)], \quad (2.4)$$

et

$$\begin{cases} Q(x, \xi) = \min q^T y \\ \text{s.c. } Wy = h - Tx, \quad y \geq 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

2.4. PROGRAMMATION LINÉAIRE STOCHASTIQUE AVEC RECOURS 16

avec

$\xi = (q, T, W, h)$, le vecteur des paramètres aléatoires. La matrice $W(\xi)$, de dimension $(m_0 \times n_0)$, est dite matrice de recours,

$y \in \mathbb{R}^{n_0}$, La décision de recours ou décision du second niveau, Elle dépend de la décision du premier niveau x et du vecteur aléatoire ξ ,

$C^T x$ est le coût du premier niveau,

$Q(x, \xi)$ est la valeur optimale du coût de recours et

$E[Q(x, \xi)]$ est l'espérance mathématique du coût de recours,

Le problème (3.3), avec les variables $x \in \mathbb{R}^n$, constitue le premier niveau, qui doit être résolu avant la réalisation de ξ , et le problème (3.4), avec les variables $y \in \mathbb{R}^{n_0}$, constitue le problème du second niveau (le recours) pour une décision, x , déterminée et une réalisation de ξ .

On considère les problèmes où le vecteur ξ possède un nombre fini de scénarios, $\xi_1, \dots, \xi_N$; ξ_i caractérisé par (q_i, T_i, W_i, h_i) , avec des probabilités d'occurrence respectives p_i ; $i = 1, \dots, N$ (loi de probabilités discrète et finie). Dans ce cas $Q(x, \xi)$ peut être écrit sous forme d'une somme finie :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^N p_i Q(x, \xi_i).$$

Soit y_i la variable de recours correspondante au scénario i , en combinant les deux problèmes (3.3) et (3.4), on obtient le problème linéaire avec, ce que l'on appelle une *structure de décomposition duale*, suivant :

$$\begin{cases} \min C^T x + \sum_{i=1}^N p_i q_i^T y_i \\ s.c Ax = b, \quad x \geq 0, \\ W_i y_i = h_i - T_i x, y_i \geq 0, i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.6)$$

Le problème (3.5), définit tout les inconnus des différents scénarios d'une manière explicite, d'où son appellation le problème déterministe équivalent. La complexité de ce problème dépend linéairement du nombre de scénarios N qui évolue exponentiellement avec le nombre de variables aléatoires du problème (dimension de ξ).

D'après la définition du problème de second niveau (3.4), pour une décision x du premier niveau, il doit être réalisable pour tous les scénarios $\xi^1, \dots, \xi^N$ de ξ . Dépendent de la matrice de recours $W(\xi)$, cela n'est pas nécessairement vrai pour tout $x \in S$, cela veut dire que pas pour n'importe quelle décision réalisable du premier niveau on pourrait compenser

2.4. PROGRAMMATION LINÉAIRE STOCHASTIQUE AVEC RECOURS

les contraintes stochastiques violées, par conséquent, les décisions du premier niveau sont limitées à $x \in \{Ax = b, x \geq 0\} \cap K$ avec

$$K = \{x | T_i \cdot x + W_i \cdot y_i = h_i, y_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}.$$

- K est l'ensemble réalisable induit du premier niveau (induced first-stage feasibility set).

Pour éviter le problème des contraintes induites,

$x \in \{Ax = b, x \geq 0\} \cap K$, on considère généralement des matrices de recours complet pour lesquelles $K = \{x | T_i \cdot x + W_i \cdot y_i = h_i, y_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}$ (voir la définition 3.3 ci-dessous).

Type de recours

Recours fixe

Définition 2.1 Un problème est à recours fixe si la matrice de recours W ne dépend pas de ξ , $W(\xi) = W$.

Recours relativement complet

Définition 2.2 On dit que le problème (3.3) a recours relativement complet si $\forall x \in \{x : Ax = b, x \geq 0, \mathbb{E}[Q(x, \xi)] < \infty\}$

Autrement dit, le problème du second niveau (3.4) est toujours faisable peu importe le scénario réalisé et de la décision réalisable du premier niveau de $\mathcal{S}$ choisie (on peut toujours mener une action corrective pour n'importe quelle erreur).

Recours complet

Définition 2.3 Le problème (3.3) est dit de recours complet si la matrice de recours satisfait

$$\{t | t = W(\xi) \cdot y, y \geq 0\} = \mathbb{R}^{m_0}$$

Autrement dit :

$$\forall t, \exists y \geq 0 | W(\xi) \cdot y = t,$$

Cela implique que $h(\xi) - T(\xi) \cdot x, \forall x$. Le problème (3.4) est toujours réalisable pour tout x et pour tout scénario ξ_i .

Remarque 1 On voit bien que cette définition est une généralisation de la définition 3.2, par conséquent, si un problème est à recours complet alors il est à recours relativement complet (le recours complet implique le recours relativement complet).

Remarque 2 Si de plus, dans les définitions 3.3 et 3.2, $W(?)=W$, on parle de recours fixe complet et de recours fixe relativement complet respectivement.

Recours simple

Remarque 3 C'est un cas spécial de recours fixe complet, il correspond au cas où la matrice de recours $W = (I, -I)$ avec I la matrice d'identité d'ordre m_0

Une extension évidente de la programmation stochastique à 2-niveaux avec recours est d'avoir plus de niveaux, c'est ce que l'on appelle la programmation stochastique à niveau multiples avec recours.

Problème à niveaux multiples avec recours

Cette approche modélise les situations où les décisions à prendre sont déterminées périodiquement à base de certaines réalisations de certaines informations qui sont disponibles, et on doit prendre une décision (sur la période qui suit).

Un problème linéaire à H-niveau avec recours peut être écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min C.x_1 + \mathbb{E}[minq_2^T.x_2] + \dots + \mathbb{E}[minq_H^T.x_H] \\ s.c A.x = b \\ T_1.x_1 + W_1x_2 = h_1 \\ \vdots \\ T_H.x_{H-1} + W_Hx_H = h_{H-1} \\ x_1 \geq 0, \dots, x_H \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Donc là, au lieu des deux décisions x et y qu'on doit prendre aux niveaux 1 et 2, on est face à H décisions séquentiellement $x_1, x_2, \dots, x_H$, qui correspondent aux niveaux 1, 2, ..., H .

Au niveau τ ($2 \leq \tau \leq H$), les réalisations des variables aléatoires $(\xi_1, \dots, \xi_\tau)$ sont disponibles ainsi que les décisions $x_1, \dots, x_{\tau-1}$ et on doit se décider sur x_τ d'une façon que les contraintes à ce niveau soient satisfaites.

2.5 Programmation stochastique avec contraintes probabilistes (PCC)

L'ensemble réalisable du problème (3.1) peut être aussi défini par des contraintes définissant des événements qui doivent être réalisés avec une certaine probabilité notée

$p_i \in [0, 1]$ (chaque contrainte est considérée comme étant un événement).

Sous cette supposition, le problème déterministe équivalent de (3.1) peut être défini comme suit :

$$\begin{cases} \min & \mathbf{E}[f(x, \xi)] \\ \text{s.c} & P[g_i(x, \xi) \leq b_i] \geq p_i, i = 1, \dots, m \\ & x \in S \end{cases} \quad (2.8)$$

Le problème est appelé problème stochastique avec des contraintes de chance (chances constraint)

En particulier, pour le problème linéaire stochastique, on aura le problème déterministe équivalent suivant :

$$\begin{cases} \min & \mathbf{E}[C^T(\xi)x] \\ \text{s.c} & P(\xi|T_i(\xi) \leq h_i) \leq \alpha_i \\ & x \in S \end{cases} \quad (2.9)$$

α étant une probabilité réglée par l'utilisateur qui reflète par exemple la fiabilité d'un système ou une tolérance acceptable.

T_i, h_i représentant la ligne i de la matrice T, h resp

2.6 Méthode “L-Shaped”

En 1962 Benders a proposé une méthode de décomposition consistant à partitionner les variables d'un programme linéaire en deux catégories. Son objectif a été de résoudre des problèmes de programmation mixte.

En s'inspirant de cette idée Wets en 1966 a appliqué la décomposition de Benders sur les problèmes de recours en deux étapes. En 1969 Van Slyke et Wets ont développé la première méthode de la programmation stochastique sous le nom “L-Shaped” destinée à résoudre les problèmes représentés en tant que modèles de recours en deux étapes.

L'idée de la méthode “L-Shaped” consiste donc à partager les variables en deux niveaux. Les variables du premier niveau sont les variables dont la valeur doit être fixée avant la réalisation des aléas et ne peut en aucun cas être modifiée suivant la réalisation de la variable aléatoire. D'autre part, les variables du second niveau (les variables de recours) sont autorisées à dépendre des variables aléatoires et des variables du premier niveau. La logique derrière cette règle est que l'on tient compte de toute information déjà disponible afin de prendre nos décisions, mais en même temps, il est irréaliste de tenir compte des

événements inconnus, qui n'existent pas au moment de la décision dans un espace probabiliste.

On crée deux problèmes complémentaires, le problème maître (master) et les problèmes satellites ou sous-problèmes ou problèmes-esclaves. Les problèmes satellites (un pour chaque scénario) reçoivent comme entrée les valeurs des variables du premier niveau et calculent les variables de recours propres à chaque scénario, ainsi que le coût associé. Le problème maître comporte les variables du premier niveau et une description approximée de la fonction de recours dont la forme exacte n'est pas connue. Si une telle fonction était donnée de façon explicite, alors on connaîtrait automatiquement l'impact de chaque solution du premier niveau au second. Le but est de construire cette fonction de recours à partir des solutions proposées au fur et à mesure par le problème maître et en ajoutant des coupes déduites de la résolution des problèmes-satellites.

L'algorithme ne démarre qu'avec les contraintes du premier niveau :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & C^T x + \theta \\ \text{s.c} & Ax = b \\ & \theta \geq \mathbf{Q}(x) \\ & x \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Alors θ est la variable qui donne l'approximation de la fonction réelle de recours. Si on n'y rajoute pas la contrainte supplémentaire $\theta \geq \mathbf{Q}(x)$ à la première itération de l'algorithme, il est évident que le problème sera non-bornée et une solution x ne sera pas obtenue. À chaque itération on injecte la variable x à chaque sous-problème du second niveau. On demande de chaque sous-problème deux informations : (i) la valeur de sa fonction objectif et (ii) le vecteur des variables duales optimales. Ces informations se regroupent en une coupe, constituant une combinaison linéaire de tous les problèmes-satellites.

Au moment où la fonction de recours $\mathbf{Q}(x)$ sera "très proche" de son approximation θ , la méthode s'arrête avec la précision souhaitée. Tant que ceci n'est pas le cas, l'algorithme procède en ajoutant des coupes dont l'existence et la validité est assurée par la théorie de la dualité (trouver une direction d'amélioration).

2.7 Autres technique de modélisation de (PS)

Mise à part la programmation stochastique, il existe différentes approches pour modéliser et résoudre les problèmes sous incertitudes. On se contente de présenter quelques unes.

2.7.1 Approche de la solution large

Une technique qui nous paraît évidente et rassurante est de chercher une solution qui satisfait toutes les contraintes pour n'importe quel scénario réalisé, cette solution est appelée la solution large (fat solution). Néanmoins, ces solutions sont très coûteuses, elles présentent un grand risque au décideur.

2.7.2 Approche Wait-and-see

Cette approche nécessite une connaissance à priori des réalisations des paramètres aléatoires du problème (information complète). Les solutions sont obtenues, en résolvant le problème pour chaque scénario, celles-ci sont appelées, les solutions wait and see.

2.7.3 Approche déterministe

Elle nécessite la connaissance des moyennes des variables aléatoires. Un modèle déterministe est établie en remplaçant chaque variable aléatoire du problème par sa moyenne, la solution ainsi obtenue est appelée solution en moyenne (expected value solution). La programmation stochastique offre des solutions optimales sur l'ensemble de tout les scénarios et donc elles sont plus robuste, par rapport à la variation des distributions de probabilités, que celles obtenues par l'approche déterministe.

2.8 Programmation stochastique fractionnaire

Introduction

Ce chapitre donne une approche de résolution pour les problèmes stochastiques fractionnaires mono-objectif. On trouve dans [13] une méthode pour résoudre le problème stochastique avec contraintes de chance, d'un problème de maximisation d'un rapport de deux fonctions linéaires.

2.9 Problème de programmation stochastique fractionnaire linéaire

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max} G(x) = \sum_{k=1}^r G_k(x) \quad / G_k(x) = \frac{N_k(x) + \alpha_k}{D_k(x) + \beta_k}(a) \\ \Pr\left[\sum_{j=1}^m a_{i,j}^{(1)} x_j \leq b_i^{(1)}\right] \geq 1 - p_i^{(1)}, i = 1, \dots, p, p+1, \dots, q, q+1, \dots, h \quad (b) \\ \sum_{j=1}^m a_{i,j}^{(2)} x_j \leq b_i^{(2)}, \quad i = h+1 \dots m \quad (c) \end{array} \right. \quad (2.11)$$

ou $x_{n \times 1} \geq 0, x_{n \times 1} = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ est le domaine des solutions réalisables,
 $A_{m \times n}^{(1)} = (a_{i,j}^{(1)}), b_{m \times 1} = (b_i^{(1)}), i = 1 \dots m; j = 1, \dots, n; \alpha_r, \beta_r$ des scalaires
 $A_{(h-m) \times n}^{(1)} = (a_{i,j}^{(2)}), b_{(h-m) \times 1}^{(2)} = (b_i^{(2)}), i = m+1 \dots h; j = 1, \dots, n;$

$$N_k(x) = \sum_{j=1}^n c_{k,j} x_j \quad \text{et} \quad D_k(x) = \sum_{j=1}^n d_{k,j} x_j$$

Dans ce modèle au moins une de ces variables $N_k(x), D_k(x), A$ et b est aléatoire

$S = \{x \in \mathbb{R}^n / x \geq 0\}$ sous les contraintes (4.1(b)) et (4.1(c)) un ensemble non vide convexe et compact sur $\mathbb{R}^n$

Hypotheses :

- 1) $N_r(x) + \alpha_r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ non négative et concave et $D_r(x) + \beta_r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ positive convexe pour chaque r
- 2) les coefficient des deux fonctions sont des variables aléatoire

2.9.1 Détermination des contraintes de probabilités équivalentes

Soit $A^{(1)}$ une matrice de variables aléatoires de l'équation (4.1(a)). qui suit la loi Normale $N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2), i = 1 \dots p, j = 1 \dots n$ telle que μ_{ij}, σ_{ij}^2 sont l'espérance et la variance de $A^{(1)}$ respectivement.

On a :

$$L_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} x_j; i = 1, \dots, p \quad ; \quad E(L_i) = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j$$

Et la variance est

$$V(L_i) = X V_i X' = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_j^2 \quad (2.12)$$

tel que V_i = la i ème ligne de la matrice des variances covariances,

$A^{(1)}$ est une matrice de variables aléatoires indépendantes, et identiquement distribuée, alors la covariance égal à zéro or la diagonale, ce qui fait que la i ème contrainte déterministe est obtenu de (4.1(b)) comme suit :

$$\Pr [L_i \leq b_i^{(1)}] \geq 1 - p_i$$

$$\text{ou } \Pr [Z_i \leq z_i] \geq 1 - p_i \text{ telle que } Z_i = \left(\frac{L_i - E(L_i)}{\sqrt{V(L_i)}} \right) \text{ et } z_i = \left(\frac{b_i - E(L_i)}{\sqrt{V(L_i)}} \right)$$

Ainsi $\phi(z_i) \geq \phi(k_{qi})$ avec $1 - p_i^{(1)} = q_i^{(1)} \phi(k_{qi})$, est la fonction de repartition de la loi de distribution normal centré et réduit. donc $\phi(\cdot)$ est une fonction non décroissante continue.
 1^{er} cas : $A^{(1)}$ est une matrice de variables aléatoires.

$$\Pr \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i^{(1)} \right] \geq 1 - p_i$$

$$\Pr \left(\frac{L_i - E(L_i)}{\sqrt{V(L_i)}} \right) \Rightarrow \Pr \left(\frac{L_i - E(L_i)}{\sqrt{V(L_i)}} \leq \frac{b_i^{(1)} - E(L_i)}{\sqrt{V(L_i)}} \right) \geq q_i$$

alors

$$\frac{b_i^{(1)} - E(L_i)}{\sqrt{V(L_i)}} \geq F^{-1}(q_i)$$

donc

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ij}x_j - \phi^{-1}(q_i) \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_j^2} \leq b_i^{(1)} \quad (2.13)$$

2^{cas} cas $b_i^{(1)}$ est un vecteur de variables aléatoire, $b_i^{(1)} \sim N(\mu_{b_i}, s_{b_i^{(1)}}^2)$

Avec le même procédé de démonstration, la contrainte (4.1(b)) sera comme suite :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq \mu_{b_i} + \phi^{-1}(p_i)\sigma_{b_i} \quad (2.14)$$

3^{ème} cas si $A^{(1)}$ et $b_i^{(1)}$ sont des variables aléatoires indépendantes alors

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ij}x_j - \phi^{-1}(p_i) \sqrt{\sum_{j=1}^n s_{ij}^2 x_j^2} \leq \mu_{b_i} \quad (2.15)$$

telle que $x_{n+1} = -1$

2.9.2 Conversion des fonctions objectifs en contraintes

Le but de cette section est de considérer toute les fonctions objectifs sous forme de contraintes [8]. La caractéristique de notre modèle tient compte de la distribution de probabilité des sommes des fonctions fractionnaires (fonctions objectifs) en maximisant la borne inférieure de la fonction objectif sous la contrainte de chance, avec les coefficients de numérateur et de dénominateur des variables aléatoires.

On définit le paramètre déterministe λ_k qui est inférieur ou égale à $G_k(x)$ ce qui fait :

$$G_k(x) \geq \lambda_k, \quad \text{alors} \quad \frac{N_k(x) + \alpha_k}{D_k(x) + \beta_k} \geq \lambda_k$$

$$\implies N_k(x) + \alpha_k - \lambda_k[D_k(x) + \beta_k] \geq 0$$

ceci peut être appliqué dans le cas des sommes des fractions comme suit :

$$\sum_{k=1}^r G_k(x) \geq \sum_{k=1}^r \lambda_k \quad \text{i.e.} \quad \sum_{k=1}^r \frac{N_k(x) + \alpha_k}{D_k(x) + \beta_k} \geq \sum_{k=1}^r \lambda_k \quad (2.16)$$

$$\implies \sum_{k=1}^k N_k(x) + \sum_{k=1}^k \alpha_k - \sum_{k=1}^k \lambda_k [D_k(x) + \beta_k] \geq 0 \quad (2.17)$$

tel que $\lambda_k = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ un vecteur déterministe :

hypotheses :

$$N_k(x) \sim N\left(\sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j, \sum_{j=1}^n \sigma_{ckj}^2 x_j^2\right), D_k(x) \sim N\left(\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j, \sum_{j=1}^n \sigma_{dkj}^2 x_j^2\right)$$

Où μ_{ckj} et μ_{dkj} les moyennes et $\sigma_{ckj}^2 x_j^2, \sigma_{dkj}^2 x_j^2$ les variances respectivement

– 1^{er} cas : les coefficients de la fonctions $N_k(x)$ sont des variables aléatoires.

il existe deux sous-cas :

– **cas 1.1** $\sum_{k=1}^r \alpha_k > 0$ soit :

$$\begin{aligned} f(x, \lambda_k; \sum_{k=1}^r \alpha_k > 0) &= \sum_{k=1}^r \lambda_k [D_k(x) + \beta_k] - \sum_{k=1}^r N_k(x) \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k \\ E \left[f(x, \lambda_k; \sum_{k=1}^r \alpha_k > 0) \right] &= F^E(x, \lambda_k; \sum_{k=1}^r \alpha_k > 0) = \sum_{k=1}^r \lambda_k [D_k(x) + \beta_k] - \sum_{k=1}^r N_k^E(x) \\ &= \sum_{k=1}^r \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n d_{kj} x_j + \beta_k \right] - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$V \left[f(x, \lambda_k; \sum_{k=1}^r \alpha_k > 0) \right] = F^V(x, \lambda_k; \sum_{k=1}^r \alpha_k > 0) = \sum_{k=1}^r N_k^V(x) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \sigma_{ckj}^2 x_j^2$$

$$\Pr[f(x, \lambda_k; \sum_{j=1}^k \alpha_k > 0) \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k] \geq 1 - p_i^{(2)} \quad (2.19)$$

$$\Pr \left[\frac{f(x, \lambda_k; \sum_{k=1}^r \alpha_k > 0) - F^E(x, \lambda_k; \sum_{k=1}^r \alpha_k > 0)}{\sqrt{F^V(x, \lambda_k; \sum_{k=1}^r \alpha_k > 0)}} \leq \frac{\sum_{k=1}^r \alpha_k - F^E(x, \lambda_k; \sum_{k=1}^r \alpha_k > 0)}{\sqrt{F^V(x, \lambda_k; \sum_{k=1}^r \alpha_k > 0)}} \right] \geq q_i^{(2)}$$

$$\Pr \left[\frac{\sum_{k=1}^r N_k^E(x) - \sum_{k=1}^k N_k(x)}{\sqrt{\sum_{k=1}^r N_k^V(x)}} \leq \frac{\sum_{k=1}^r N_k^E(x) + \sum_{k=1}^r \alpha_k - \sum_{k=1}^r \lambda_k [D_k(x) + \beta_k]}{\sqrt{\sum_{k=1}^r N_k^V(x)}} \right] \geq q_i^{(2)}$$

$$\phi \left[\frac{\sum_{k=1}^r N_k^E(x) + \sum_{k=1}^r \alpha_k - \sum_{k=1}^r \lambda_k [D_k(x) + \beta_k]}{\sqrt{\sum_{k=1}^r N_k^V(x)}} \right] \geq q_i^{(2)}$$

$$\left[\frac{\sum_{k=1}^r N_k^E(x) + \sum_{k=1}^r \alpha_k - \sum_{k=1}^k \lambda_k [D_k(x) + \beta_k]}{\sqrt{\sum_{k=1}^r N_k^V(x)}} \right] \geq \phi^{-1}(q_i^{(2)})$$

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k [D_k(x) + \beta_k] - \sum_{k=1}^r N_k^E(x) + \phi^{-1}(q_i^{(2)}) \sqrt{\sum_{k=1}^r N_k^V(x)} \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k$$

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n d_{kj} x_j + \beta_k \right] - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j + \phi^{-1}(q_i^{(2)}) \sqrt{\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \sigma_{ckj}^2 x_j^2} \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k \quad (2.20)$$

– cas 1.2 : $\sum_{k=1}^r \alpha_k \leq 0$ comme précédemment :
on trouve :

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j - \sum_{k=1}^r \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n d_{kj} x_j + \beta_k \right] + \phi^{-1}(p_i^{(2)}) \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{ckj}^2 x_j^2} \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k \quad (2.21)$$

– 2^{ème} cas les coefficients de la fonction $D_k(x)$ sont des variables aléatoires

– cas 2.1 : $\sum_{j=1}^n \alpha_k > 0$

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j + \beta_k \right] - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j + \phi^{-1}(q_i^{(2)}) \sqrt{\sum_{k=1}^r \lambda_k^2 \sum_{j=1}^n \sigma_{dkj}^2 x_j^2} \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k \quad (2.22)$$

– cas 2.2 : $\sum_{y=1}^k \alpha_k \leq 0$

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j - \sum_{k=1}^r \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j + \beta_k \right] + \phi^{-1}(p_i^{(2)}) \sqrt{\sum_{k=1}^r \lambda_k^2 \sum_{j=1}^n \sigma_{dkj}^2 x_j^2} \geq \sum_{k=1}^r \alpha_k \quad (2.23)$$

– cas 3 $N_k(x)$ et $D_k(x)$ des variables aléatoires :

– cas 3.1 $\sum_{y=1}^k \alpha_k > 0$

$$\sum_{y=1}^k \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j + \beta_k \right] - \sum_{y=1}^k \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j + \phi^{-1}(q_i^{(2)}) \sqrt{\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n (\lambda_k^2 \sigma_{dkj}^2 + \sigma_{ckj}^2) x_j^2} \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k \quad (2.24)$$

– cas 3.2 : $\sum_{k=1}^r \alpha_k \leq 0$

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j - \sum_{k=1}^r \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j + \beta_k \right] + \phi^{-1}(p_i^{(2)}) \sqrt{\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n (\lambda_k^2 \sigma_{dkj}^2 + \sigma_{ckj}^2) x_j^2} \geq \sum_{k=1}^r \alpha_k \quad (2.25)$$

Notant encore une fois que la fonction objectif est convertie en contrainte déterministe, alors la nouvelle fonction objectif est la somme de paramètres déterministes λ_k

$$i.e. \quad \text{Max} \sum_{k=1}^r \lambda_k \quad (2.26)$$

2.9.3 Version déterministe

Pour le cas $\sum_{k=1}^r \alpha_k > 0$ et A est une matrice des variables aléatoires, le numérateur de la fonction objectif est aléatoire et $\sum_{k=1}^r \alpha_k > 0$ donc on a le problème suivant :

fonction objectif (4.16)

contrainte (4.1(c)); (4.3); (4.10)

2.10 Autres approches de résolution

[24] Cette section fournit une formulation assez générale d'une classe des problèmes de programmation stochastiques fractionnaire. La formulation stochastique a été réduite à une forme équivalente déterministe avec une fonction objectif non linéaire qui est ni convexe ni concave. Un programme convexe équivalent a été proposé, ce qui conduit à une solution du problème déterministe.

Présentation du problème

soit le problème P_1 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \lambda \\ \text{s.c } P\left(\frac{C(x)}{D(x)} \geq \lambda\right) = p, \quad (p > 0.5) \\ A.X \leq b, \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

où λ un scalaire, x, C et D des vecteurs de dimension n , b un vecteur de dimension m et A une matrice $m \times n$. Parmi tous les paramètres du problème, seul le vecteur C est une variable aléatoire. On posera $C(x) = C^T x$, $D(x) = D^T x$

nous supposons que : [24]

1. La variable C suit la loi de distribution Multi-normale avec la moyenne μ et la matrice de dispersion V ,
2. L'ensemble $S = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ est un ensemble non vide et borné,
3. $D^T x > 0, \forall x \in S$.

Pour la probabilité p , λ est la borne inférieure de la fonction $\frac{C(x)}{D(x)}$ et puisque $p (> 0.5)$ est maintenu à un niveau élevé, donc par implication, on aura presque tendance à maximiser la valeur de la fonction $\frac{C(x)}{D(x)}$ elle-même.

Cet objectif peut également être atteint par la formulation de E-modèle de Charnes et Cooper

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{max } E \left[\frac{C(x)}{D(x)} \right] \\ \text{s.c } Ax \leq b, \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

Gupta a développé un modèle de satisfaction de contraintes pour le problème stochastique fractionnaire linéaire. Les avantages de cette formulation est qu'elle prend en considération la distribution de probabilité de l'objectif fractionnaire en maximisant sa limite inférieure avec une grande valeur de probabilité.

2.10.1 Formulation déterministe

nous supposons : $C \sim N(\mu, V)$ telle que μ et V la moyenne et la variance, ce qui donne :

$$C(x) \sim N(\mu^T x, x^T V x) \text{ et } Z = \left[\frac{C^T x - \mu^T x}{\frac{1}{(x^T V x)^{\frac{1}{2}}}} \right] \sim N(0, 1)$$

Alors le problème peut se formuler comme suit :

$$(P_2) \begin{cases} \max & (\lambda) = \frac{\mu^T x - z^{1-p} (x^T V x)^{\frac{1}{2}}}{D^T x}, \\ \text{s.c} & A.x \leq B, \\ & x \geq 0. \end{cases}$$

où V est une matrice semi défini positif $-z^{1-p}$ est $(1-p)$ fractile de la loi de distribution normal

cas particulier si la corrélation entre les éléments de C est égal à 1 alors $(x^T V x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^n \sigma^i x^i$ telle que σ^i est la même distribution deuxième élément de C . Donc le problème P_2 devient le problème P_3 comme suit ;

$$(P_3) \begin{cases} \max & (\lambda) = \frac{G(x)}{D(x)} \\ \text{s.c} & A.x \leq B, \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Avec $G = (G^1, G^2, \dots, G^n)$, $G^j = (\mu^j - z^{1-p} \cdot \sigma^j)$, $j = 1, \dots, n$

évidemment, P_3 peut être résolu par des méthodes de programmation fractionnaire linéaire.

utilisant le dual

P_4 est comme suit :

$$(P_4) \begin{cases} \max F & = \mu^T Y - z^{1-p} (Y^T V Y)^{\frac{1}{2}} \\ \text{s.c} & A.x \leq b\omega \\ & D^T Y \leq 1, \\ & Y, \omega \geq 0. \end{cases}$$

Théorème 2.1 [24] si le $(n+1)$ vecteurs (Y^T, ω^0) est solution optimale de problème P_4 alors le vecteur (Y^T / ω^0) est optimale pour le problème P_2 .

2.10.2 Exemples numériques

exemple 1

On donne quelques exemples qui illustrent ce qu'on a fait dans ce chapitre

$$(P_1) \begin{cases} MaxG(X) = \frac{c_{11}x_1+c_{12}x_2+\alpha_1}{d_{11}x_1+d_{12}x_2+\beta_1} + \frac{c_{21}x_1+c_{22}x_2+\alpha_2}{d_{21}x_1+d_{22}x_2+\beta_2} \\ s.c \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ 16x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

la deuxième et la troisième contraintes sont satisfait à 99% et 80% respectivement le tableau suivant donne les paramètres déterministes et les α_i et β_i

d_{11}	d_{12}	d_{21}	d_{22}	α_1	α_2	β_1	β_2
1	1	2	3	1	2	2	4

TAB. 2.1 – Les paramètres déterministes et les α_i et β_i de l'exemple 1

les moyennes et les variances sont données dans le tableau suivant

	c_{11}	c_{12}	c_{21}	c_{22}	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_2
moyenne	4	3	1	1	2	1	3	4	3
variances	1	0.5	0	0.5	1	1	2	3	2

TAB. 2.2 – Les moyennes et variances de l'exemple 1

la fonction objectif et les contraintes déterministes équivalent sont données comme suit :

$$(P_1) \begin{cases} Max \lambda_1 + \lambda_2 \\ s.c (\lambda_1 + 2\lambda_2 - 5)x_1 + (\lambda_1 + 3\lambda_2 - 4)x_2 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 1.28\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 3 \\ (2x_1 + x_2) + 1.645\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1 \\ (3x_1 + 4x_2) + 0.84\sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2 + 2} \leq 3 \\ 16x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

la solution est $x_1 = 0.0602, x_2 = 0.3292, \lambda_1 = 1.7533, \lambda_2 = 0.0000$

la valeur de la fonction objectif est 1.40035.

Exemple 2

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} MaxG(X) = \sum_{y=1}^3 \frac{c_{y1}x_1 + c_{y2}x_2 + \alpha_k}{d_{y1}x_1 + d_{y2}x_2 + \beta_k} \\ s.c \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq b_3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.28)$$

la première ,la deuxième et la troisième contraintes sont satisfaits à 99% ,90%et 80% respectivement

le tableau suivant donne les paramètres déterministes et les α_k et β_k

k	c_{k1}	c_{k2}	c_{k3}	α_k	β_k
1	2	5	10	10	2
2	1	3	15	22	10
3	5	10	8	-20	5

TAB. 2.3 – Les paramètres déterministes et les α_k et β_k de l'exemple2

Les moyennes et les variances sont données dans le tableau suivant :

	d_{k1}		d_{k2}		d_{k3}	
k	moy	varia	moy	varia	moy	varia
1	1	0	2	1	4	0.5
2	1	0	1	0.5	3	2
3	1	0	4	2	7	3

TAB. 2.4 – Les moyennes et variances d_{kj} de l'exemple2

	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	b_1	b_2
moyennes	4	2	4	6	4	6	12	4
variances	0.5	0.25	0.5	1	0.5	0.75	0.25	1

TAB. 2.5 – Les moyennes et variances de a_{ij} de l'exemple2

La fonction objectif et les contraintes déterministe équivalent sont données comme suit :

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 - 17)x_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 - 19)x_2 + (\lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 - 23)x_3 + 2\lambda_1 + 10\lambda_2 \\ + 5\lambda_3 + 1.645\sqrt{(\lambda_2^2 + 0.5\lambda_3^2)x_1^2 + (0.5\lambda_2^2 + 2\lambda_3^2)x_2^2 + (2\lambda_2^2 + 3\lambda_3^2)x_3^2} \leq 12 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1.645\sqrt{0.5x_1^2 + 0.25x_2^2 + 0.75x_3^2} \leq 12 \\ 6x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 1.28\sqrt{x_1^2 + 0.5x_2^2 + 0.75x_3^2} \leq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq b_3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.29)$$

la solution est $x_1 = 0.0000, x_2 = 1.4248, x_3 = 1.6816, \lambda_1 = 15.1931, \lambda_2 = \lambda_3 = 0.0000$
la valeur de la fonction objectif est 6.9623.

Exemple 3

$$(P_3) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } G(X) = \sum_{y=1}^2 \frac{c_{y1}x_1 + c_{y2}x_2 + \alpha_k}{d_{y1}x_1 + d_{y2}x_2 + \beta_k} \\ \text{s.c } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq 27 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.30)$$

ou

$\alpha_1 = -8, \alpha_2 = 5, \beta_1 = 10$ et $\beta_2 = 10; a_{11} \sim N(3, 2), a_{12} \sim N(4, 1), a_{13} \sim N(8, 1)$

la première est satisfait à 99%

les moyennes et les variances sont données dans le tableau suivant :

	c_{k1}		c_{k2}		c_{k3}	
k	moye	varian	moye	varian	moye	varian
1	10	2	8	1	5	3
2	20	8	8	3	7	2

TAB. 2.6 – Les moyennes et variances de c_{kj} de l'exemple3

	d_{k1}		d_{k2}		d_{k3}	
k	moye	varian	moye	varian	moye	varian
1	2	1	3	2	5	3
2	4	1	2	1	2	1

TAB. 2.7 – Les moyennes et variances de d_{kj} de l'exemple2

$$(P_3) \begin{cases} \text{Max} \lambda_1 + \lambda_2 \\ (20 - 2\lambda_1 - 4\lambda_2)x_1 + (16 - 3\lambda_1 - 2\lambda_2)x_2 + (12 - 5\lambda_1 - 2\lambda_2)x_3 - 10\lambda_1 - 12\lambda_2 \\ -1.28\sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 10)x_1^2 + (2\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 4)x_2^2 + (3\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 5)x_3^2} \geq 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 1.645\sqrt{2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq 27 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

la solution est $x_1 = 2.4000, x_2 = x_3 = 0.0000, \lambda_1 = 3.6584, \lambda_2 = 0.0000$
la valeur de la fonction objectif est 3.5348.

2.11 Problème de gestion des déchets urbain

L'approche de programmation stochastique fractionnaire linéaire (SLFP) est appliquée au problème de gestion des déchets solide, pour aider le gestionnaire des déchets solides municipaux dans l'environnement aléatoire. La méthode (SLFP) peut résoudre des problèmes d'optimisation avec des paramètres aléatoires, où la programmation avec contrainte de chance (chance-constrained) est intégrée dans le cadre de programmation linéaire fractionnaire. qui a des avantages dans : (1) comparant entre deux objectifs, (2) l'efficacité du système de réflexion, (3) faire face à l'incertitude exprimée sous forme de distributions de probabilité, et (4) la fourniture des solutions optimales sous différentes conditions de fiabilité du système.

La méthode est appliquée à une étude de cas de système de gestion de déchets solides municipaux (MSW), pour améliorer l'allocation des flux des déchets. Les solutions obtenues sont utiles pour identifier, améliorer l'efficacité de systèmes de gestion de déchets urbains solides en maximisant le système sous le risques de violation des contraintes. Les résultats indiquent que (SLFP) peut prendre en charge une analyse approfondie des interrelations entre l'efficacité du système, le coût du système et du système risquent d'échouer.

introduction

La gestion durable des déchets solides municipaux (MSW) devient un enjeu d'une grande importance pour de nombreuses communautés urbaines à travers le monde. Sous des pressions croissantes de protection de l'environnement et le développement économique, de nombreuses municipalités font face à des responsabilités d'élaboration des stratégies réalisables et écologiquement durable de gestion des déchets. Une difficulté fondamentale dans la planification d'un système de gestion des déchets solides urbains est en même temps la nécessité de tenir compte des conflits objectifs économiques et environnementaux. Une

autre difficulté réside dans la nécessité de tenir compte des incertitudes dans les applications du monde réel. Par conséquent, l'élaboration d'approches efficaces qui peuvent s'attaquer à ces difficultés dans un cadre intégré serait hautement préféré pour aidé la gestion durable (MSW). Au cours des dernières décennies, les techniques de décision multicritères (MCDM) ont été utilisées pour tenir compte de deux enjeux économiques et environnementaux des problèmes de gestion des déchets urbains solides. Dans les études de programmation multi-objectif (MOP) certains auteurs simplement traduisent les objectifs environnementaux dans les contraintes, alors que la fonction de coût était purement économique. D'autres ont supposé que les impacts environnementaux pourraient être évalué comme des coûts et ainsi convertir toutes les unités en termes monétaires. La façon rigide dans lequel plusieurs objectifs économiques et environnementaux ont été traités dans un moindre coût de programmation (LP) cadre linéaire peut ne pas refléter la complexité du point de vue durabilité de l'environnement. Minciardi et al. (2008) propose un outil interactif multi-modèle d'objectif de rendre compte des objectifs en matière de gestion durable (MSW), où la structure des préférences des décideurs sont inclus dans le processus de solution afin d'explorer l'ensemble des solutions non-dominées. En outre, la méthode de programmation à but (PG) a été utilisée pour faire face à un ensemble d'objectifs contradictoires dans la gestion des déchets solides municipaux. Comme un type de méthode (MOP), le modèle GP requiert la spécification de niveaux de priorité pour les différents objectifs pour refléter les préférences des décideurs quant à l'importance relative de chaque objectif.

Les méthodes mentionnées ci-dessus ont été appliqués à divers cas de gestion des déchets urbains solides, mais ils avaient encore des limites dans les deux aspects suivants. Tout d'abord, ils transforment les objectifs d'aspects différents en une grandeur uniforme sur la base des hypothèses réalistes et subjectives. En d'autres termes, aucun d'eux n'était en mesure de comparer les objectifs de multiples aspects directement par les amplitudes d'origine. Deuxièmement, ils se sont concentrés sur les entrées et sorties du système et ne pouvait pas mesurer l'efficacité de la gestion des (DSM) qui était liée au rapport entrée/sortie. D'autres améliorations sont donc souhaitées. En revanche, la programmation fractionnaire (FP) a été couramment utilisé dans les différents problèmes de gestion qui exigeait la comparaison entre deux grandeurs (par exemple, coût / temps, de coût / volume, ou de sortie / d'entrée). En outre, le (PF) a été utilisé lors que l'efficacité d'un système doit être mesurée. L'optimisation du rapport entre l'environnement et l'économie quantités pourraient fort bien refléter les complexités en situation réelle. Malgré une large application de la (PF) pour divers domaines allant de l'ingénierie à l'économie, la méthode n'a pas été appliquée au domaine de la gestion de l'environnement, en particulier à la gestion des déchets solides municipaux

D'un autre côté, il y avait peu d'études sur la (PF) dans l'incertitude. Cependant, de nombreux problèmes du monde réel sont associés à la nature de l'imprécision, inexactitude et / ou de l'aléatoire. Un large éventail de méthodes d'optimisation sous incertitude ont été développés, telles que la programmation mathématique floue (FMP), la programmation mathématique par intervalle (IMP), la programmation mathématique stochastique

et(SMP). Récemment, plusieurs auteurs ont utilisé (FMP) pour étudier les problèmes linéaires (PF) avec des objectifs flous ou des coefficients. Hladik (2010) considéré comme un problème linéaire (FP) avec les données d'intervalle et présenté une méthode de calcul de la fourchette de valeurs optimales. Cependant, Quelques auteurs ont représenté les questions aléatoires / stochastiques associés aux modèles de (PF). Dans les systèmes de gestion des déchets urbains solides, des paramètres tels que taux de production de déchets et la capacité des installations sont souvent présentés comme des distributions de probabilité. En tant que principal type de (SMP), la programmation par contraintes de chance (PCC) est efficace dans le traitement des problèmes d'optimisation où les coefficients sont aléatoires

Par conséquent, une approche possible pour résoudre des problèmes d'optimisation rapport associées à l'information aléatoire consiste à intégrer (PCC) dans le cadre de programmation fractionnaire. Dans cette étude, une tentative sera faite pour développer une telle programmation stochastique linéaire fractionnaire (SLFP) Méthode pour soutenir la gestion durable (MSW) dans l'incertitude. Il peut aider à équilibrer les objectifs environnementaux et économiques, d'analyser l'efficacité du système, faire face à des incertitudes représentées dans les formes de distribution de probabilité et de réaliser des arbitrages souhaités. La méthode proposée sera ensuite appliquée à un cas de gestion (MSS) pour démontrer son applicabilité dans lequel un gestionnaire de l'environnement est responsable de l'attribution des flux de déchets à des installations multiples.

2.11.1 Programmation linéaire fractionnaire

Le problème de programmation linéaire fractionnaire (LFP) peut être formulé comme suit :

$$(1) \begin{cases} \text{Max} f(x) = \frac{C^T X + \alpha}{D^T X + \beta} \\ A.X \leq B, \\ X \geq 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

où A est une matrice réel $m \times n$, X et B sont des vecteurs colonne de dimension n et m respectivement ; C et D sont des vecteurs lignes n composants ; α et β sont des constantes. Charnes et Cooper (1962) ont montré que si le dénominateur était constant en signe pour tout X sur la région des solutions réalisable, le modèle (LFP) pourrait être optimisé par la résolution d'un problème de programmation linéaire.

Selon Chadha et Chadha (2007), si :

$C^T X + \beta > 0$ pour tout solution réalisable
la fonction objectif est continûment différentiable,
la région réalisable est non vide et borné,

alors le duale du problème primal (1) est comme suit :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}(Y, z) = z \\ A^T.Y + D^T z \geq C^T, \\ -B^T.Y + \beta z = \alpha; \\ Y \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.33)$$

où Y est m vecteur, z est un scalaire, T est la transposé de matrices de dimension $m \times n$, le duale (2) est un problème de programmation linéaire, une solution optimale $(\hat{Y}, \hat{z})$ peut être facilement généré. Introduisant $\hat{V}$ comme le vecteur colonne associé ou variable d'équar, nous avons $\hat{V} = A^T.Y + D^T z - C^T$ avec $\hat{V} \geq 0$

Soit $\hat{X}$ la solution optimale du problème primal (1) et $\hat{U}$ les variables d'équar associer, telle que $A\hat{X} + \hat{U} = B.\hat{U} > 0$ et. D'après le théorème écarts complémentaires (Chadha et Chadha, 2007), le modèle (1) a la même valeur optimale que le modèle (2) [c-à-d $f(\hat{X}) = \hat{z}$], si et seulement si les contraintes suivantes sont satisfait :

$$\hat{x}_j \hat{v}_j = 0; j = 1, \dots, n \quad (3a)$$

$$\hat{y}_j \hat{u}_j = 0; j = 1, \dots, m \quad (3b)$$

Ainsi, le modèle LFP (1) peut être résolu grâce à son problème duale (2) et les contraintes complémentaires (3). Le modèle (LFP) peut résoudre des problèmes d'optimisation déterministes fractionnaire, mais il peut rencontrer des difficultés quand il existe des incertitudes dans les paramètres d'entrée.

2.11.2 Programmation avec contrainte de chance

Dans les problèmes d'optimisation de monde réel, le type d'incertitude qui reçoit beaucoup d'attention est «aléatoire» . Lorsque certains paramètres sont stochastiques et peuvent être représentés par des distributions de probabilité, la méthode de programmation par contrainte de chance peut être employée. Un modèle de type (CCP) peut être exprimée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Min} f(x) & (4a) \\ \text{s.t. } Pr[A_i(t)X \leq b_i(t)] \geq 1 - p_i, i = 1, \dots, m & (4b) \\ X \geq 0 & (4c). \end{array} \right. \quad (2.34)$$

où $A_i(t)$, $b_i(t)$, sont des variables aléatoires; p_i ($p_i \in [0, 1]$) est un niveau donné de probabilité pour la i contrainte (niveau de signification, qui représente le risque de violation des contraintes admissibles), m est le nombre de contraintes.

Si les coefficients dans le modèle (4) sont incertaines dans les côtés gauche et à droite, la contrainte (4b) est généralement non linéaire, et l'ensemble des contraintes possibles peut devenir très compliqué. Cependant, pas tous les éléments de $A(t)$ et $b(t)$ sont nécessairement

aléatoire dans un modèle de CCP. Lorsque les coefficients de gauche [des éléments de $A_i(t)$] sont déterministes et les coefficients de droite [$b_i(t)$] sont aléatoires (pour toutes les valeurs de p_i), la contrainte (4b) devient linéaire et l'ensemble de contraintes possibles est convexe :

$$A_i X \leq b_i(t)^{(p_i)} (4b')$$

ou $b_i(t)^{(p_i)} = F_i^{-1}(p_i)$, compte tenu de la fonction de répartition de (b_i) et la probabilité de violation de contrainte i (p_i). Ainsi, la méthode (CCP) peut être utilisée pour résoudre des problèmes stochastiques en les convertissant en versions déterministes à travers : (i) la fixation d'un certain niveau de probabilité p_i ($p, e[0, 1]$) pour la contrainte i , et (ii) d'imposer que cette contrainte doit être satisfaite avec au moins un niveau de probabilité de $1 - p_i$.

2.11.3 Programmation stochastique fractionnaire linéaire

[29] Le modèle (LFP) ne peut pas traiter des paramètres de caractéristiques incertaines, alors que la méthode est efficace dans le (CCP) reflétant les distributions de probabilité. Par conséquent, une approche possible pour améliorer la (LFP) est d'intégrer le (PCC) dans le cadre (LFP). Cela conduit à une programmation stochastique fractionnaire (SLFP) modèle linéaire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Max } f(x) = \frac{C^T X + \alpha}{D^T X + \beta} & (5a) \\ \text{s.c. } Pr[A_i(t)X \leq b_i(t)] \geq 1 - p_i, i = 1, \dots, m & (5b) \\ X \geq 0 & (5c). \end{array} \right. \quad (2.35)$$

où X est un vecteur de variables de décisions de dimension n , C, D, A_i des vecteurs lignes de dimension n α et β sont des constantes ; p_i ($p_i \in [0, 1]$) est un niveau significatif spécifié pour la contrainte incertain i

Le modèle (SLFP) intégré peut ainsi traiter le cas d'un rapport de deux fonctions objectifs. Le processus de solution détaillée pour (SLFP) peuvent être résumées comme suit :

Etape1 : Formuler le modèle initial SLFP (modèle5)

Etape2 : Convertir les contraintes stochastiques en leurs formes déterministes en leur donnant un niveau de signification (p_i) pour chaque contrainte i $A_i X \leq b_i(t)^{(p_i)}, i = 1, \dots, m$

Etape3 : Formuler le modèle déterministe (LFP) (modèle(1)), et son dual (modèle (2)) ;

Etape4 : Résoudre le dual et d'obtenir des solutions pour $(\hat{Y}, \hat{z}, \hat{V})$

Etape5 : Sur la base de $f(X) = \hat{z}$ et les contraintes complémentaires (c.-à-contraintes (3a) et (3b)), résoudre le modèle LFP et obtenir les solutions de (X)

Etape6 : Répétez les étapes 2-5 sous des niveaux différents p_i .

2.12 Ennonc du problème

Dans cette section on utilise la méthode de résolution des problèmes (SLFP), développé précédemment, pour démontrer son application à un problème réel. Elle est appliquée à un système de gestion de déchets solides urbains (GDSM). La zone d'étude est une ville contenant trois quartiers résidentiels, qui génèrent une certaine quantité de déchets correspondants à chaque quartier (MSW). le processus d'élimination est comme indiqué dans la Fig.5.1. Un horizon de planification de 15 ans est divisé en trois périodes de 5 ans, est pris en compte.

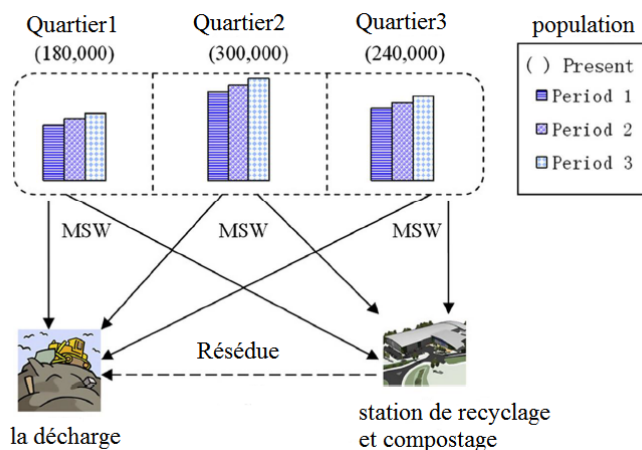


FIG. 2.1 – *problème de déchets urbain*[29].

Actuellement, la population de la ville est d'environ 720.000 habitants et la quantité total de déchets générés est d'environ 240.000 tonne, pour chaque quartier. La population à l'heure actuelle et son évolution au cours des trois périodes sont indiquées en détail sur le tableau.5.2. les populations actuelles des trois quartiers sont respectivement d'environ 180.000 habitants, 300.000 habitants et 240.000 habitants et les taux de croissance démographique sont respectivement 2.0% , 1.3% et 1.6% par an. Les quantités de déchets génération par habitant par jour sont aléatoires (stochastique), dont on peut supposer qu'il suit une loi normale avec une moyenne 1,25 (kg/habitant par jour).

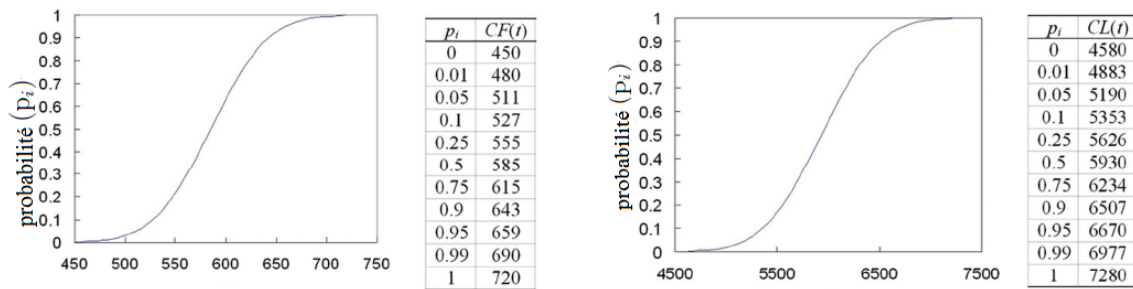
	périodes		
	k=1	k=2	k=3
Les coûts d'utilisations des stations(\$/tonne)			
La station de décharge	40	50	60
la station de recyclage et compostage	70	80	90
Les coûts de transport vers la décharge(\$/tonne)			
Quartier 1	12.1	13.3	14.5
Quartier 2	10.5	11.6	12.8
Quartier 3	12.7	14.0	15.4
Les coûts de transport vers la station de recyclage et compostage(\$/tonne)			
Quartier 1	9.6	10.6	11.7
Quartier 2	10.1	11.1	12.2
Quartier 3	4.0	4.2	4.4
coûts de transport de recyclage ver la décharge(\$/tonne)	13.4	14.7	16.2
gains des matière recyclées (\$/tonne)	30	31	32

TAB. 2.8 – *Les coûts de transport et d'utilisation des stations (Décharge et recyclage)*

Les déchets générés (MSW) doivent être expédiés à deux sites, une décharge et une station de recyclage / compostage. La mise en décharge est la méthode la plus répandue pour l'élimination des déchets urbains solides, parce que c'est la solution la plus économique. Cependant, la mise en place de nouvelles décharge devient difficile en raison de la limitation des ressources terrestres appropriées. En même temps, il existe un risque élevé de pollution du site d'enfouissement. Par exemple les émissions de gaz de décharge pouvant conduire à des conséquences graves sur l'environnement, sans oublier les problèmes d'hygiène et sécurité; l'excès de décharge peut constituer une menace pour l'entourant et les eaux souterraines. La mise en décharge est donc fortement déconseillée en raison de ces impacts négatifs sur l'environnement, ainsi que les menaces pour la santé publique.

En revanche, le recyclage et le compostage ont un rôle plus élevé dans la hiérarchie traditionnelle préférée de la gestion d'intégrée les déchets. Non seulement les déchets peuvent être réduits grâce au recyclage et au compostage, mais aussi les recettes peuvent être obtenus en raison de la valorisation des matière des déchets organiques et des matières recyclables.

L'acheminement du flux des déchets pour le recyclage et le compostage va prolonger la vie utile des sites d'enfouissement et réduire les impacts sur l'environnement, mais pourrait entraîner des coûts plus élevés du système en ce qui concerne les frais de transport et d'exploitation.



(a) Capacité de la décharge $CL(t)$, 10^3 tonne. (b) Capacité de la station de recyclage /compostage $CF(t)$, tonne/jour

FIG. 2.2 – La fonction de répartition de (MSW) [29].

Pour parvenir à une gestion durable des déchets. Les gestionnaires de déchets désirent une répartition optimale des flux de déchets, qui maximisent le profil des déchets détournés par unité de coût du système. Le tableau 5.3 représente les coûts de transport et traitements des déchets dans les trois périodes, dont les coûts d'exploitation des installations de gestion des déchets, les coûts de transport pour les flux de déchets et l'expédition des résidus, et les recettes provenant du recyclage et de compostage. qui sont approchés par des fonctions linéaires de flux de déchets afin de refléter l'économies d'échelle, où les facteurs d'actualisation sont également pris en compte dans le calcul des valeurs futures.

La Fig.5.2 représente la répartition pour les capacités de la décharge $[CL(t)]$ et le recyclage /compostage $[CF(t)]$ sous différents niveaux de probabilité (de violation de contrainte (p_i)). Par exemple, la capacité d'enfouissement est $4,883.10^6$ tonnes pour $p = 0,01$, ce qui montre que cette capacité d'enfouissement ne peut être garantie qu'avec une probabilité de $1 - p_i = 0,99$.

Le tableau 5.4 represent les quantités de déchets générés $[GW_{j,k}(t)]$ à partir des trois quartiers sous différents niveaux de probabilité (de violation de contrainte (p_i)) (Huang et al., 2001). Des résidus d'environ 15% du flux total des déchets entrant (sur une base de masse) sont générés à partir des installations de recyclage et de compostage, et seront expédié directement à la décharge. Toutes les données sont acquises par sondage, consultation d'experts, et enquête sur les lieux afin de refléter les conditions du monde réel.

pi level	0	0.01	0.05	0.1	0.25	0.50	0.75	0.90	0.95	0.99	1
$WG_{11}(t)$	187	194	210	222	238	250	261	278	290	306	311
$WG_{21}(t)$	337	344	360	372	388	400	411	428	440	456	461
$WG_{31}(t)$	262	269	285	297	313	325	336	353	365	381	386
$WG_{12}(t)$	212	219	235	247	263	275	286	303	315	331	336
$WG_{22}(t)$	362	369	385	397	413	425	436	453	465	481	486
$WG_{32}(t)$	287	294	310	322	338	350	361	378	390	406	411
$WG_{13}(t)$	237	244	260	272	288	300	311	328	340	356	361
$WG_{23}(t)$	387	394	410	422	438	450	461	478	490	506	511
$WG_{33}(t)$	312	319	335	347	363	375	386	403	415	431	436

TAB. 2.9 – La quantité de déchets générer par le quartier (i) durant la periode (k)

2.13 Le modèle (SLFP) pour la gestion des déchets urbain solides

Le problème considéré est de savoir comment répartir efficacement les flux de déchets dans ce système (GDSM) où les gestionnaires de déchets mettons l'accent sur la durabilité. L'objectif est de réaliser un maximum de profil des déchets détournés par unité de coût du système grâce à une allocation efficace des flux de déchets.

Les contraintes comportent toutes les relations entre les variables de décision et les déchets générés. Les variables de décision représentent l'écoulement du flux de déchets à partir des trois quartiers aux installations de gestion des déchets en cours des trois périodes. Ainsi, le programme stochastique fractionnaire linéaire (SLFP) peut être formulé comme suit :

L'objectif fractionnaire

Max=profil des déchets traiter/les frais du système

$$= \frac{\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 L_k x_{2jk} (1 - RF)}{\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 L_k x_{1jk} (TR_{1jk} + OP_{1k}) + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 [TR_{2ik} + OP_{2K} + RF(RTR_k + OP_{ik}) - RE_k]} \quad (2.36)$$

- profil des déchets générés (profil total de déchets de recyclé et composter)
- les frais du système [(coûts de transport des déchets)-(revenue de recyclage et com-postage)]

- contraintes relative à la décharge

$$Pr[L_k \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (x_{1jk} + RF.x_{2jk}) \leq CL(t)] \geq 1 - p_{CL}$$

contrainte de chance : (Flux totale de déchets arrivant à la décharge) $\leq$ (capacité totale de la décharge)

- contrainte relative à la capacité de la station de recyclage et compostage

$$Pr \left[\sum_{j=1}^3 x_{2jk} \leq CF(t) \right] \geq 1 - p_{k,CF}, k = 1, 2, 3.$$

contraintes de chance : (Quantité de déchets traiter dans la station de recyclage et compostage) $\leq$ capacité de la station de recyclage et compostage

- Contrainte relative au traitement des déchets

$$Pr \left[\sum_{i=1}^2 x_{ijk} \geq WG_{jk}(t) \right] \geq 1 - p_{jk,WG}, j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3.$$

Où i = indice pour les installations GDSM (i = 1 pour la décharge, i = 2 pour le recyclage et de compostage) ; j = indice pour les trois quartier (j = 1, 2, 3) ; k = indice de périodes (k = 1, 2, 3) ;

x_{ijk} : flux de déchets du quartier j vers i installation dans la période k (tonne/jour) ;

L_k : longueur de la période k (jour) ;

TR_{ijk} : les frais de transport du quartier j vers installation i dans la période k (\$/tonne) ;

OP_{ijk} = les coûts d'exploitation des installations i dans la période k (\$/tonne) ;

RF : Débit de reste du recyclage et de compostage à la décharge(% de la masse entrante) ;

RTR_k : Les coûts de transport provenant du recyclage et de compostage à la décharge dans la période k(\$/tonne) ;

RE_k = profil provenant du recyclage et de compostage dans la période k (\$/tonne) ;

$CL(t)$: Capacité de la décharge(tonnes), $CF(t)$: Capacité du recyclage et de compostage(tonne/jour) ;

$WG_{ik}(t)$: Quantité de production de déchets du quartier j dans la période k (tonne/jour) ;

p_{CL} : La probabilité de violation de contrainte de capacité d'enfouissement ;

$P_{k.CF}$: La probabilité de violation de contrainte de capacité des installations pour pour le recyclage et le compostage ;

$p_{ik.wG}$: La probabilité de violation des contraintes d'élimination des déchets de la demande.

2.14 Résultats et discussion

Le tableau 3 présente les solutions obtenues par le modèle (SLFP) sous différents niveaux de probabilité. Il est révélé que, au cours des période de planification, les déchets de quartier 1 sont expédiés à la fois à la décharge et aux recyclage et compostage, contrairement au déchets du quartier 2 qui sont expédiés à la décharge, et les déchets de quartier 3 expédiés au recyclage et compostage.

Quantité acheminée	Sta	Quartiers	Periods	p=0.01	p=0.05	p=0.10	p=0.25
x_{111}	1	1	1	206.7	144.0	103.7	42.7
x_{112}	1	1	2	256.7	194.0	153.7	92.4
x_{113}	1	1	3	306.7	244.0	203.7	142.4
x_{121}	1	2	1	456	440	428	411
x_{122}	1	2	2	481	465	453	436
x_{123}	1	2	3	506	490	478	461
x_{131}	1	3	1	0	0	0	0
x_{132}	1	3	2	0	0	0	0
x_{133}	1	3	3	0	0	0	0
x_{211}	2	1	1	99.3	246.0	174.3	218.6
x_{212}	2	1	2	74.3	121.0	149.3	193.6
x_{213}	2	1	3	49.3	96.0	124.3	168.6
x_{221}	2	2	1	0	0	0	0
x_{222}	2	2	2	0	0	0	0
x_{223}	2	2	3	0	0	0	0
x_{231}	2	3	1	381	365	353	336
x_{232}	2	3	2	406	390	378	361
x_{233}	2	3	3	431	415	403	486
Waste diversion(10^3 tonne)				2235.3	2378.0	2454.1	2581.2
coûts(10^6 \$)				422.38	407.45	396.04	3080.02
Waste diversion/coûts (10^3 tonne/ 10^6 \$)				5.292	5.836	6.196	6.792
Fiabilité du système							
efficacité du système				Min			Max
le risk violation de contrainte				Min			Max

TAB. 2.10 – Résultat de la résolution du problème LSFP

Par exemple, dans la période 1, où $p_i = 0.01$, les flux de déchets des quartiers 1, 2 et 3 transporter vers la décharge seraient respectivement 206.7, 456 et 0 (tonne/jour), ainsi vers la station de recyclage et compostage seraient respectivement 99.3, 0 et 381 (tonnes/jour).

Les caractéristiques similaires existent pour les solutions des autres périodes sous différents niveaux de probabilité. Ce modèle de flux de déchets est due à des faits que le quartier 2 est plus proche de la décharge que les trois quartiers, tandis que le quartier 3 est le plus proche du recyclage et compostage. De toute évidence, les coûts de transport des déchets vont fortement influencer sur les résultats de l'allocation des flux de déchets. En comparant avec les coûts de fonctionnement des stations de gestion des déchets, il sont moins sensibles à ce problème (MSWM).

Les résultats du tableau 3 indiquent également qu'un niveau plus élevé correspond à

un objectif fractionnaire plus élevé. Par exemple, si p_i , est porté de 0,01 à 0,05, l'objectif fractionnaire passerait de $5,292.10^3$ (tonne/10⁶\$) à $5,836.10^3$ (tonne/10⁶\$).

Le niveau p_i , représente la probabilité à laquelle les contraintes peuvent être satisfaite, et l'objectif fractionnaire représente le rendement du système. Ainsi, la relation entre l'objectif fractionnaire et p_i , démontre un compromis entre l'efficacité du système et le risques violation des contraintes. Une augmentation du niveau p_i signifie un risque plus élevé admissible de violer les contraintes, ce qui conduit à une diminution de rigidité des contraintes et donc une décision d'un espace étendue. (par exemple, augmenté le traitement, élimination des capacités et/ou une diminution des taux de génération de déchets.).

En vertu d'un niveau supérieur p_i , une alternative de plus grande efficacité du système (c'est à dire les coûts du système baisse et l'acheminement des déchets est plus élevé) seront obtenus, mais la fiabilité des contraintes de capacité de traitement réunion et les exigences environnementales diminuerait en même temps.

En comparant les décisions en vertu du baisse de niveau p_i va nous conduire à une alternative d'augmente la fiabilité, mais l'efficacité du système est plus faible (inférieure). Dans le processus de prise de décision, des variations dans les niveaux va également correspondre aux préférences des gestionnaires de déchets en ce qui concerne le compromis entre l'efficacité du système et le risque de violation des contrainte .

La Planification sous un niveau plus élevé p_i aboutirait à une haute efficacité du système et plus de risques de violation des contrainte, qui doit généralement être utilisée dans des conditions avantageuses du système. A l'inverse, la planification sous le niveau inférieur p_i entraînerait une baisse d'efficacité de système et réduit le risque de violation des contrainte, qui devrait être plus adapté pour des conditions exigeantes.

Les niveaux acceptables de risque de défaillance système devrait être décidée sur la base des discussions ouvertes entre les parties prenantes. Cela permettra aux gestionnaires de déchets à incorporer plus de connaissances implicites (par exemple, les conditions socio-économiques) dans le processus de prise de décision. Ce qui précède les résultats démontrent que le modèle (SLFP) peut incorporer des informations stochastique dans son cadre de modélisation, et des solutions diverses associée à des niveaux de risque de défaillance du système.

En outre, plus il peut supporter une analyse en profondeur de l'inter relation entre l'efficacité du système et le risques de violation des contrainte .

En revanche, le modèle de programmation linéaire fractionnaire (LFP) sans relâche les contraintes (ie $p_i = 0$), ne peut que aide à prendre des décisions dans un scénario extrême des conditions du système.

Par conséquent, le modèle SLFP a des avantages significatifs sur (LFP) en :

- (a) Représentant des informations plus utiles associées à des problèmes pratiques,
- (b) Générer des systèmes de gestion plus souples dans des conditions différentes du système.

Lorsque les gestionnaires de déchets mis plus de préoccupations sur l'accessibilité économique et souhaitent un objectif de coût réduit du système, le modèle optimal du problème à objectif fractionnaire représenté sur la (6) peut être changé en un problème de moindre coût en remplaçant

$\max f = \text{totale des déchets détournés} / \text{les frais du système.}$

par

$\min f = \text{coûts du système.}$

Avec les mêmes contraintes stochastiques du système. les résultats obtenus sous différents niveaux p_i , du modèle (LP) à moindre coût par la méthode du (PCC). sont représentés sur la Figure.5.3.

comparent les résultats obtenus à la fois par le modèle de moins coût (CCP) et le modèle optimal (SLFP).

Comme le montre la Fig5.3.

les solutions de coût du système à partir du modèle à moindre coût sont $419,97.10^6\$$ lorsque $p_i = 0,01$, $403,52.10^6\$$ lorsque $p_i = 0,05$, $391,17.10^6\$$ lorsque $p_i = 0,10$ et $373,68.10^6\$$ lorsque $p_i = 0,25$.

Évidemment, le modèle le moins coûteux conduit à des coûts légèrement inférieurs à ceux du modèle de rapport optimal, pour une gamme de niveaux p_i . Cependant, dans la figure 3 (B), le réacheminement des déchets par unité de coût obtenues à partir du modèle à moindre coût est d'environ $4,50.10^3(\text{tonne}/10^6)$ en vertu $p_i = 0,01; 0,05; 0,10$ et $0,25$. Ce qui est nettement inférieur à celui du modèle de rapport optimal. En d'autres termes, le modèle le moins coûteux conduit à une diminution du rendement du système, qui peut être présenté comme le rapport de réacheminement des déchets sur le coût du système.

En outre, lorsque p_i passe de $0,01$ à $0,25$, le rendement du système résultant du modèle de moins coût serait diminué de $4,499.10^3(\text{tonne}/10^6\$)$ à $4,496.10^3(\text{tonne}/10^6\$)$, tandis que celle du modèle fraction optimal serait augmentée, passant de $5,292.10^3(\text{tonne}/10^6\$)$ à $6,792.10^3(\text{tonne}/10^6\$)$. Une telle différence notable entre les deux modèles peuvent être

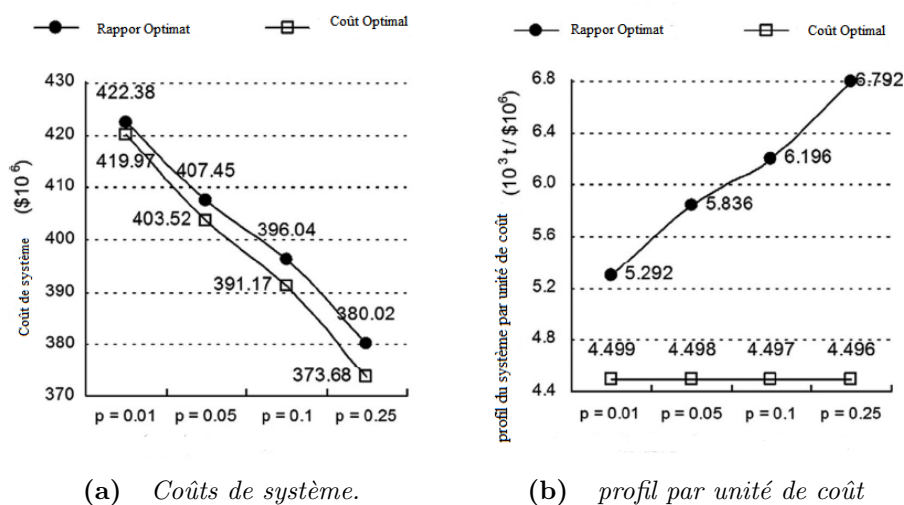


FIG. 2.3 – Comparaison entre solutions des modèles (rapport optimal et moindre coût) [29].

expliqués par d'autres comparaisons de flux de déchets, comme indiqué dans la Fig. 4.

Les résultats du modèle à moindre coût pour différentes niveaux p_i indiquent que les installations de recyclage et de compostage des déchets n'accepterait que de quartier 3, tandis que les autres déchets seraient expédiés à la décharge. Ainsi, le modèle le moins coûteux conduit à un flux de déchets par jour supérieur à la décharge, ce qui est tout simplement en raison de son coût opérationnel inférieur.

Lorsque p^i est élevé, le coût du système serait diminué avec plus risques de violation des contraintes, mai, le flux de déchets pour le recyclage et de compostage serait également diminué en raison d'une diminution des déchets généré du quartier 3. Par conséquent, l'efficacité du système du modèle à moindre coût serait encore plus réduit. En revanche, le modèle optimal fraction conduit à un flux de déchets plus tous les jours au installations recyclage et du compostage Dans toutes les périodes, les installations de recyclage et de compostage serait toujours exploitée à sa pleine capacité sous des niveaux différents p^i , ce qui signifie également que le réacheminement des déchets de la décharge serait optimisée et la durée de vie des sites d'enfouissement serait donc considérablement prolongée.

En comparant avec le modèle de moins coûteux, le modèle optimal-ratio pourrait faire face plus efficacement au problème de la gestion durable des déchets solides urbains et de fournir plus d'informations sur les compromis et les liens entre ces facteurs et les critères d'entrée multiples système grâce à la mesure de l'efficacité du système. En règle générale, le (SLFP) a développé les avantages suivants par rapport aux autres méthodes d'optimisation.

Tout d'abord, il peut être utilisé pour l'analyse de deux objectifs sans modifier les amplitudes d'origine, d'autre part, il peut résoudre les problèmes d'optimisation fractionnaires

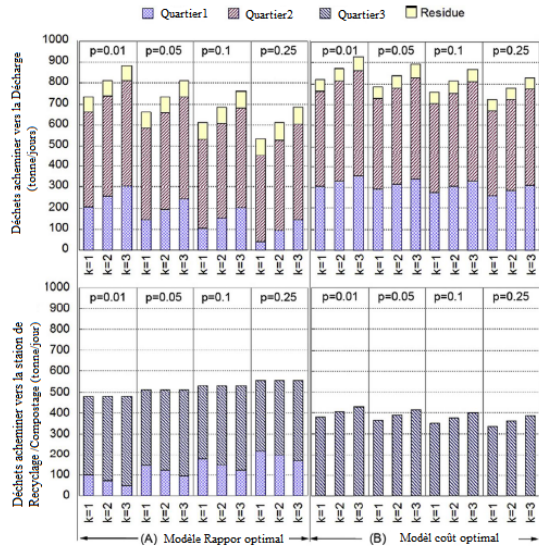


FIG. 2.4 – comparaison des solutions entre les deux modèles[29].

et reflètent l'efficacité du système, troisièmement, il peut tenir compte des caractéristiques aléatoires (stochastique) des contraintes de modèle, quatrièmement, il peut fournir des solutions flexibles avec des probabilités quantifiées de satisfaction de contraintes ; cinquièmement, il peut prendre en charge une analyse approfondie des inter-relations entre l'efficacité du système, le coût du système et le risque d'échouer du système.

Par conséquent, la méthode (SLFP) peut également être appliquée aux autres ressources et problèmes de gestion de l'environnement, tels que l'énergie, systèmes de planification et d'allocation des ressources en eau et la gestion de la qualité de l'air, Lorsque (SLFP) est utilisé dans des problèmes pratiques du monde réel impliquant l'expansion des capacités de planification, programmation en nombres entiers pourrait être intégré dans son cadre. (SLFP) pourrait également être renforcée par l'intégration de méthodes d'analyse par intervalles et théorie des ensembles flous.

2.15 Conclusions

L'approche de programmation stochastique linéaire fractionnaire (SLFP) a été développée pour identifier les stratégies de gestion durable des déchets urbains solides dans l'environnement aléatoire. La méthode (SLFP) peut résoudre des problèmes d'optimisation fractionnaires (rapport de deux fonctions) associés à des informations aléatoires, où la programmation par contrainte de chance (PCC) est intégrée dans un programme linéaire fractionnaire

(LFP). La méthode de résolution est basée sur la technique de la dualité de (LFP), et (PCC) est proposé. Le (SLFP) a des avantages dans : (1) comparant deux objectifs. (2) refléter l'efficacité du système, (3) faire face à l'incertitude exprimée sous forme de distributions de probabilité, et (4) la fourniture optimale de rapport de solutions sous différentes conditions de fiabilité du système.

L'applicabilité de la méthode proposée (SLFP) a été démontrée par une étude de cas de l'allocation des flux de déchets au sein d'un système municipal de gestion des déchets solides. Les solutions obtenues sont utiles pour identifier les systèmes de gestion durable des déchets urbains solides avec l'efficacité du système maximisée sous divers risques de violation des contraintes. Les résultats indiquent que (SLFP) peut incorporer des informations incertain précieuses dans le processus de prise de décision et de générer des régimes de gestion flexibles avec différents niveaux de fiabilité du système. En outre, il peut prendre en charge une analyse approfondie des inter-relations entre l'efficacité du système, le coût du système et le risque d'échec du système.

Cette étude tente de fournir un nouveau cadre de modélisation pour résoudre des problèmes d'optimisation fractionnaires (rapport de deux fonctions). Bien que cette méthode est développée pour la première fois pour le domaine de la gestion des déchets, les résultats suggèrent qu'il est également applicable à d'autres ressources de problèmes de gestion de l'environnement. Le (SLFP) pourrait encore être améliorée en intégrant des méthodes d'analyse d'intervalle, la théorie des ensembles flous et programmation en nombres entiers dans son cadre.

3

Optimisation multi-objectif

Introduction

La formulation classique d'un modèle de recherche opérationnelle consiste à optimiser L (maximiser ou minimiser) une fonction objectif vérifiant un ensemble de contraintes définies par l'utilisateur.

Cependant, il est souvent impossible de représenter tous les désirs du décideur en une seule fonction objectif. En effet, l'historique de la prise de décision multi-critère et de l'optimisation multi-objectif remontent à la fin *XIX*ème siècle (solution au sens de PARITOb) et a trouvé son essor particulièrement pendant les dernières décennies.

Ainsi, il semble plus réaliste de considérer une formulation très générale des problèmes de décisions, ou un ensemble de fonctions représentant différents critères doivent être optimisées, souvent conflictuelles. Tenir compte de ces critères pose un réel problème.

Considérons les actions suivantes :

- Louer un appartement bien situé et à un prix raisonnable.
- Établir un planning pour les vacances satisfaisant toute la famille.
- Choisir entre plusieurs itinéraires.
- Acheter une voiture.

La solution idéale n'existe pas, il faut donc trouver les solutions de compromis.

Au cours des années, des articles et des bibliographies ont été édités. Le nombre de publications s'accroît de manière rapide, de nouveaux sous-champs s'ouvrent :

- la programmation multi-objectif en nombres entiers,
- l'optimisation combinatoire multi-objectif,
- les méthodes évolutionnaires multi-objectif,
- les applications de l'optimisation multi-objectif,
- les logiciels de l'optimisation multi-objectif,
- la programmation par but "Goal programming", etc.

La programmation linéaire mono-objectif reste une source d'inspiration fondamentale pour le développement des méthodes multi-objectif. Dans ce chapitre, nous commençons par présenter l'essentiel sur l'optimisation mono-objectif : concepts et définitions fondamentale, classifications générales des méthodes d'optimisation, en suite, on présente l'optimisation multi-objectif : concepts et définitions fondamentales, relations d'ordres et dominance,...

3.1 Programmation linéaire mono-objectif

Un problème d'optimisation consiste à trouver une solution qui minimise ou maximise un critère particulier. Dans la plupart des cas, l'optimum trouvé n'est pas unique. Ainsi il peut exister un ensemble de solutions optimisent le critère considéré. Nous pouvons écrire formellement un problème d'optimisation comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimiser } f_i(x), & (i=1, \dots, r); \\ \text{tel que } g_j(x) \leq 0, & (j=1, \dots, m); \\ \text{avec } x \in \mathbb{R}^n; g(x) \in \mathbb{R}^m. \end{array} \right.$$

Dans ce problème, il est clair que pour minimiser (resp. maximiser) la fonction objectif d'un problème, il faut déjà être capable de déterminer l'ensemble des solutions potentielles. On distingue ainsi deux notions : la notion d'espace de recherche et la notion d'espace réalisable.

Sur la figure 1.1, a (resp. b) représente la borne inférieure (resp. supérieure) donnée pour x_2 , et c (resp. d) représente la borne inférieure (resp. supérieure) donnée pour x_1 . $\mathcal{S}$ représente l'espace de recherche qui est égal au produit cartésien des intervalles des variables x_1 , x_2 , et χ l'espace réalisable délimité par les contraintes. Cette figure, illustre en dimension 2 le fait que $\chi = \{x | g(x) \leq 0; x \in \mathcal{S}\}$ l'espace réalisable (délimité par des contraintes) est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+^2$ l'espace de recherche.

Sauf mention contraire, dans ce chapitre tous les définitions seront données dans le cadre d'un problème de minimisation.

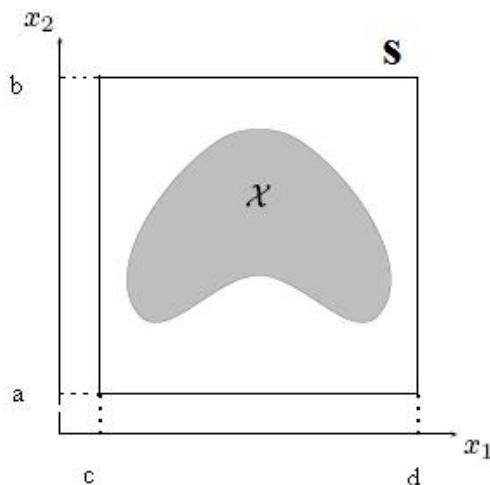


FIG. 3.1 – Espace de recherche et espace réalisable [28].

En effet, un problème de maximisation peut être aisément ramené à un problème de minimisation grâce à l'équivalence suivante :

$$\text{maximiser } f(x) \Leftrightarrow \text{minimiser } -f(x)$$

3.1.1 Concepts de base et définitions

Définition 3.1 Un problème d'optimisation est défini par un espace d'état, une ou plusieurs fonction(s) objectif(s) et un ensemble de contraintes.

Définition 3.2 L'espace d'état est défini par l'ensemble des domaines de définition des variables de problème.

Définition 3.3 Les variables du problème peuvent être de natures diverses (réelle, entière, booléenne, etc.) et peuvent exprimer des données quantitatives ou qualitatives.

Définition 3.4 L'ensemble des contraintes définit des conditions sur l'espace d'état que les variables doivent satisfaire. Ces contraintes sont souvent des contraintes d'égalité ou d'inégalité et permettent en général de limiter l'espace de recherche.

Définition 3.5 Une méthode d'optimisation recherche le point ou un ensemble de points de l'espace d'états qui satisfait au mieux un ou plusieurs critères. Le résultat est appelé **solutions efficace**.

Définition 3.6 Un pavé (une boîte dans $\mathbb{R}^3$) est un produit cartésien d'intervalles fermés. L'ensemble S dans la Figure 1.1 est le pavé résultant du produit cartésien des intervalles $[c, d]$ et $[a, b]$.

Définition 3.7 *Le vecteur de décision est le nom donné au vecteur x . Il correspond à l'ensemble des variables du problème.*

Définition 3.8 *La fonction objectif représente la fonction f (appelé aussi fonction de coût ou critère d'optimisation).*

Définition 3.9 *Un point $x' \in \chi$ est un minimum global du problème si et seulement si : $\forall x \in \chi; f(x') \leq f(x)$ (il appartient alors à l'ensemble des minimiseurs).*

Définition 3.10 *Un point $x' \in \chi$ est un minimum local du problème si et seulement si : $\forall x \in \mathcal{V}(x'); f(x') \leq f(x)$, où $\mathcal{V}(x')$ est un voisinage de x' .*

3.1.2 Classification générale des méthodes d'optimisation mono-objectif

[28]. Nous proposons à la figure 1.2 une classification générale des méthodes d'optimisation mono-objectif.

On retrouve, les principales distinctions citées précédemment :

- On distingue, en premier lieu, l'optimisation combinatoire de l'optimisation continue.
 - a) Pour l'optimisation combinatoire, on a recours aux méthodes approchées lorsqu'on est confronté à un problème difficile. Dans de tel cas, le choix est parfois possible entre une heuristique (spécialisée), entièrement dédiée au problème considéré et une métaheuristique.
 - b) Pour l'optimisation continue, on sépare sommairement le cas linéaire (qui relève notamment de la programmation linéaire) du cas non linéaire où l'on retrouve le cadre de l'optimisation difficile. Dans ce cas, une solution pragmatique est de recourir à l'application répétée d'une méthode locale qui exploite, ou non, les gradients de la fonction objectif. Si le nombre des minimas locaux est très élevé, le recours à une méthode globale s'impose : on retrouve alors les métaheuristicues qui offrent une alternative aux méthodes classiques d'optimisation globale, celles-ci exigent des propriétés mathématiques plus restrictives sur la fonction objectif.
- Parmi les métaheuristicues, on peut distinguer
 - a) Les métaheuristicues de(voisinage), qui font progresser une seule solution à la fois (recuit simulé, recherche tabou, etc.),
 - b) Les métaheuristicues (distribuées), qui manipulent en parallèle toute une population de solutions (algorithmes génétiques, etc.).
- Les méthodes hybrides associent souvent une métaheuristique et une méthode locale. Cette coopération peut prendre la simple forme d'un passage de relais entre la métaheuristique et la technique locale, chargée d'affiner la solution. Mais les deux approches peuvent aussi être entremêlées de manière plus complexe.

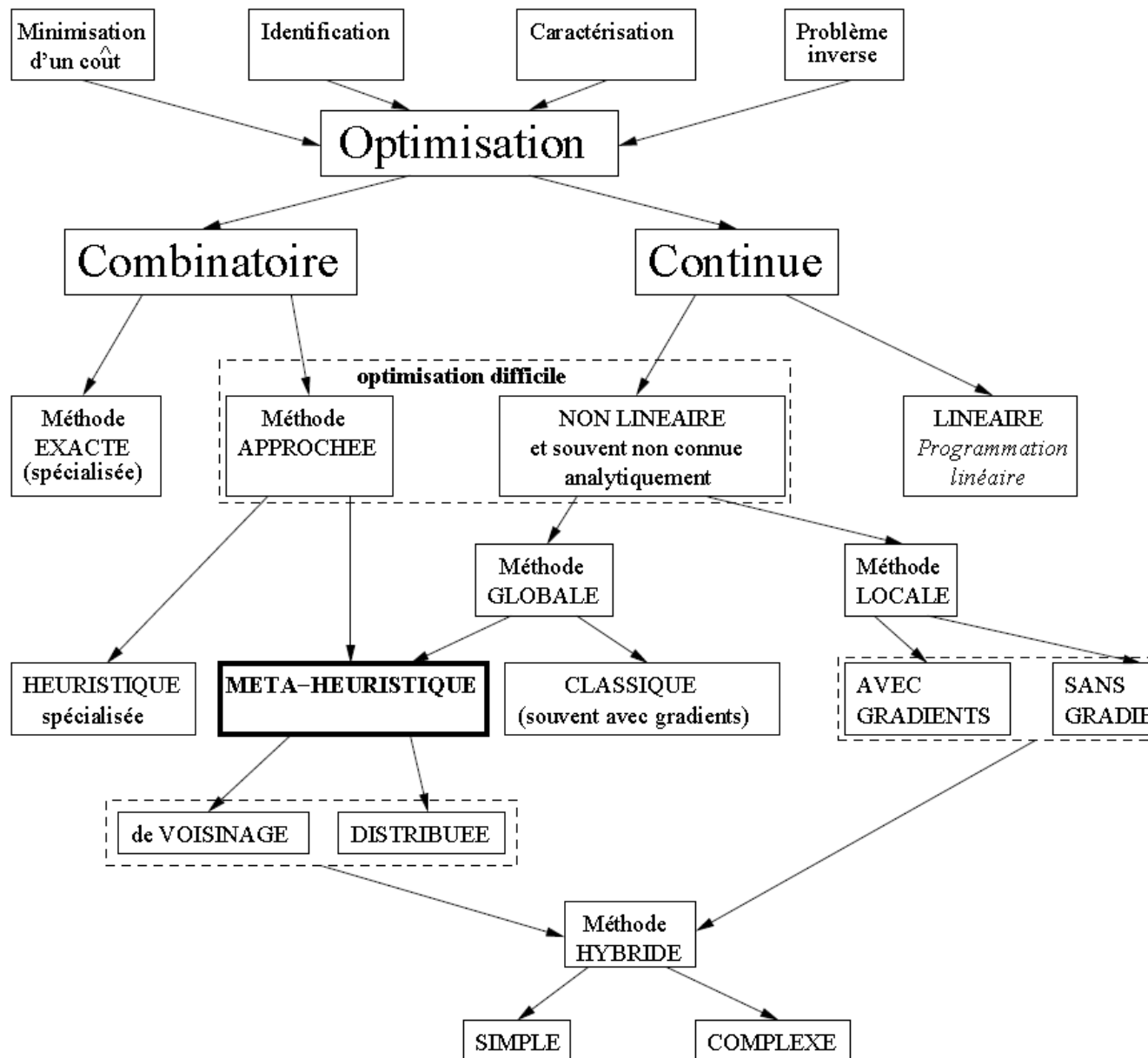


FIG. 3.2 – Classification générale des méthodes d'optimisation mono-objectif.[28]

Citons quelques exemples de méthodes illustrantes ces différentes catégories :

1- Méthode exacte : cette méthode va rechercher l'optimum global. Pour cela, elle effectue, en général, une énumération des solutions de l'espace de recherche. Par exemple la méthode de (Branch and Bound) dans laquelle on effectue les étapes suivantes :

- On divise l'espace de recherche en sous-espaces,
- On cherche une borne minimale en terme de fonction objectif associée, à chaque sous-espace de recherche,
- On élimine les (mauvais) sous-espaces,
- On reproduit les étapes précédentes jusqu'à obtention de l'optimum global.

Cette méthode permet d'obtenir l'optimum global de manière exacte, sur certains types de problèmes. Il n'est pas possible d'appliquer cette méthode à des problèmes dont l'espace de recherche est de taille trop importante.

2- Méthodes approchées :

- a) Méthodes Heuristiques : elles sont développées pour résoudre un type de problème en particulier. Elles ne fonctionnent que sur le type de problème pour lequel elles ont été développées, par exemple l'algorithme de type (First Fit) dédié au problème de "Bin packing" (ou problème de rangement).
- b) Méthodes Métaheuristiques : elles sont fondées sur une idée générale (le parallèle avec un processus naturel, comme le recuit d'un métal, dans le cas du recuit simulé). Elles peuvent s'adapter à n'importe quel type de problème et donnent de bons résultats. Par exemple : le recuit simulé ou les algorithmes génétiques, qui seront présentés plus loin dans cet ouvrage.

3- Méthodes non-linéaires :

a) Globale :

- * Métaheuristiques : l'idée directrice sur laquelle repose une métaheuristique est suffisamment générale pour être transposable facilement aux problèmes d'optimisation continue.
- * Classiques : ces méthodes peuvent être considérées comme les méthodes (de base) de l'optimisation. Dans cette famille, on trouve la méthode de descente du gradient. Cette méthode, quand elle est appliquée à une fonction convexe, permet de trouver un optimum global.

b) Locale :

- * Avec gradient : ces méthodes exploitent le gradient d'une fonction pour effectuer la recherche de l'optimum. Quand cette technique est appliquée à un problème d'optimisation continue de forme générale, il n'est en général pas possible de trouver l'optimum global du problème. On obtient alors un optimum local.

* Sans gradient : cette famille regroupe une grande diversité de méthodes. Parmi ces méthodes, on peut citer :

- c) Les méthodes constructives : on construit la solution une variable après l'autre, en interdisant de modifier une variable déjà affectée. Par exemple, la méthode glouton fait partie des méthodes constructives.
- d) Les méthodes stochastiques : elles reposent sur un processus aléatoire. Par exemple, on peut citer la méthode de marche aléatoire. Dans cette méthode, on tire un point situé dans le voisinage d'un point courant et ce point devient alors le point courant, quelle que soit la valeur de la fonction objectif.

Remarques

La manière la plus naturelle et la plus ancienne de résoudre un problème d'optimisation est la méthode par essai/erreur. Le décideur corrige ses résultats jusqu'à obtenir une solution satisfaisante. Cette méthode apparemment simpliste est à la base d'un très grand nombre de méthodes d'optimisation.

Choix d'une Méthode d'optimisation : La nature des variables, les domaines de définition et les critères à optimiser déterminent le choix de la méthode d'optimisation à utiliser.

On peut aussi classer les méthodes d'optimisation en trois grandes familles.

- Les méthodes déterministes.
- Les méthodes approches.
- Les méthodes stochastiques.

3.2 Programmation mathématique multi-objectif

Utilité de la (programmation mathématique)

Prenons le cas d'une personne souhaitant acheter une voiture d'occasion. La voiture idéale est celle qui est moins chère avec peu de kilomètres, mais cette voiture n'existe pas. Notre acheteur va donc devoir identifier les meilleurs compromis possibles correspondant à son budget (voir figure 1.3)

3.2.1 Problèmes de programmation mathématique multi-objectif

Les problèmes mathématiques à objectifs multiples consistent à optimiser (maximiser ou minimiser) simultanément r fonctions réelles $f_k, k = 1, \dots, r$ souvent conflictuelle, sur un ensemble d'actions S . Celui-ci reste à formaliser pour les problèmes d'optimisation multi-objectif.

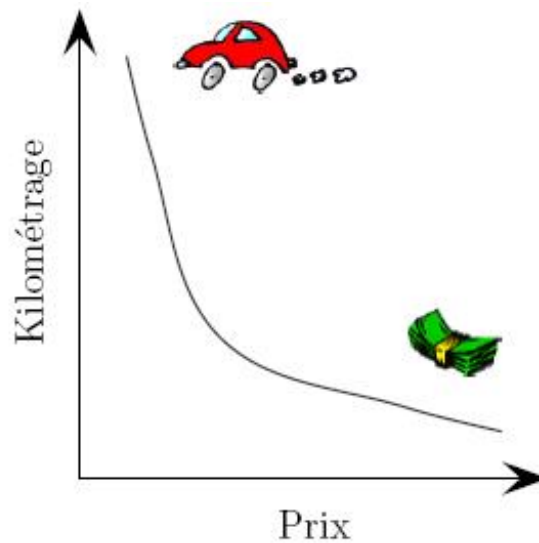


FIG. 3.3 – Relation entre kilométrage et prix[28].

"opt" $[f_1, \dots, f_r]x \in S$

Le symbole " " signifie qu'il n'est généralement pas possible de trouver dans S une action qui optimise simultanément les r critères. Néanmoins il est remarquable que de cette façon un problème multi-objectif est correctement formulé par rapport à la réalité. Il faut donc déterminer une action $x^* \in S$ telle que, le vecteur $(f(x^*) = (f_1(x^*), \dots, f_r(x^*)))$ est bon (acceptable), selon les préférences du décideur (DM : Décision Maker), voir optimal, à condition de se doter d'un cadre décisionnel donnant une signification à cette notion. L'action x^* est appelée souvent solution de meilleur compromis.

3.2.2 Formulation de problème

Un problème d'optimisation se définit comme suit :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f_k(x), & (k = 1, \dots, r); \\ \text{tel que } g_i(x) \geq 0, & (i = 1, \dots, m); \\ h_j(x) = 0, & (j = 1, \dots, p); \\ \text{avec } x \in \mathbb{R}^n; g(x) \in \mathbb{R}^m, h(x) \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

Ici, les vecteurs $g(x)$ et $h(x)$ représentent respectivement m contraintes d'inégalité et p contraintes d'égalité. Cet ensemble de contraintes délimite un espace restreint de recherche de la solution optimale. En général, on trouve deux types de contraintes d'inégalité : Des contraintes du type $B_{inf} \leq x_i \leq B_{sup}$: les valeurs de x qui vérifiant ces contraintes définissent l'espace de recherche. Cet espace est représenté à la figure 1.4-a ($n = 2$). Des

contraintes du type $g(x) \leq 0$ ou $g(x) \geq 0$: les valeurs de x qui vérifient ces contraintes définissent l'espace des valeurs réalisables. Cet espace est représenté à la figure 1.4-b ($n = 2$).

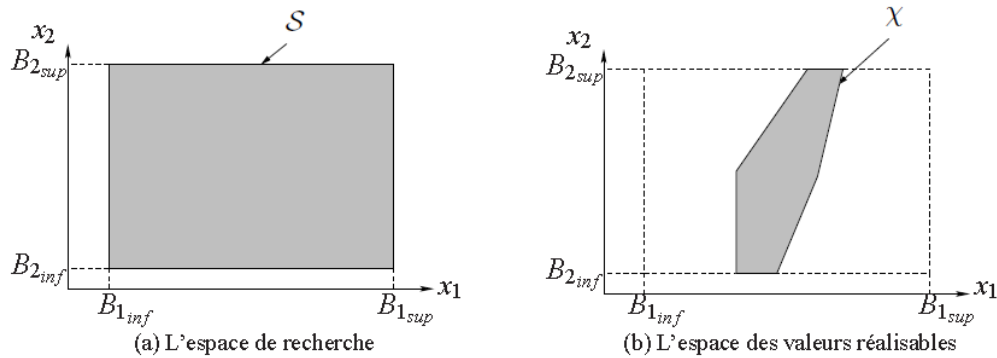


FIG. 3.4 – Les différents espaces de recherche[28].

3.2.3 Classification des problèmes d'optimisation multi-objectif

On peut classer les différents problèmes d'optimisation que l'on rencontre dans la vie courante selon leurs caractéristiques :

1. Nombre de variables de décision : mono-variable : ($n=1$)
multi-variable : ($n > 1$ et n fini)
2. Type de variables de décision : continu (les variables sont réelles, continues), entier ou discret (variable entier), combinatoire (permutation sur un ensemble fini).
3. Type de fonction objectif : Si la fonction est linéaire (problèmes d'optimisation linéaire), si la fonction est quadratique (problème d'optimisation quadratique), si la fonction est non linéaire (problème d'optimisation non linéaire).
4. Formulation du problème : Problèmes d'optimisation avec des contraintes (problème avec contrainte), problème d'optimisation Sans contraintes (problème sans contrainte).

3.2.4 Multiplicité des solutions

Lorsqu'on cherche à obtenir une solution optimale d'un problème d'optimisation multi-objectif donné, on s'attend souvent à trouver une seule solution. En fait, on rencontre rarement ce cas de figure. La plupart du temps, on trouve une multitude de solutions, du

fait que certains objectifs sont conflictuelles. En effet, si l'on prend l'exemple du dimensionnement d'une poutre devant supporter une charge donnée, on veut construire une poutre qui soit de section plus petite, subissant la plus petite déformation, lorsqu'une charge repose au milieu de cette poutre. Dans cet exemple illustrative, intuitivement, on s'aperçoit que répondre à l'objectif "poutre de petite section" ne va pas du tout dans le sens de répondre à l'objectif "petite déformation" (voir [28]).

Donc, quand on résout un problème d'optimisation multi-objectif, on obtiendra plusieurs solutions. Ces solutions, comme on peut s'en douter, ne seront pas optimales, au sens où elles ne minimiseront pas tous les objectifs du problème. Alors un concept intéressant avec lequel on trie les solutions est le concept de "compromis". En effet, ces solutions minimisent un certain nombre d'objectifs tout en dégradant d'autres objectifs, sont appelées solutions de compromis.

3.2.5 La dominance

Définitions

En résolvant un problème d'optimisation multi-objectifs, nous obtenons une multitude de solutions. Seul un nombre restreint de ces solutions est intéressant. On dit qu'une solution est intéressante, s'il existe une relation de dominance entre cette solution considérée et d'autres solutions, au sens suivant :

Définition 3.11 [28] **la relation de dominance** : Soient $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit que $x^{(1)}$ domine $x^{(2)}$ si et seulement si :

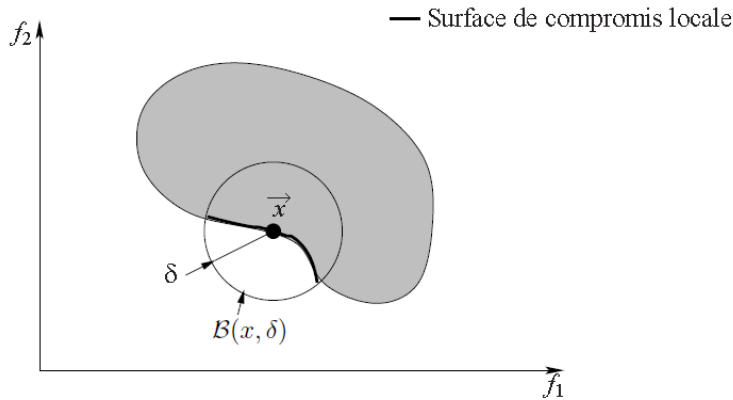
- $x^{(1)}$ est au moins aussi bon que $x^{(2)}$ pour tous les objectifs, $\forall i \in 1, \dots, n$ $x_i^{(1)} \leq x_i^{(2)}$ et
- $x^{(1)}$ est strictement meilleur que $x^{(2)}$ pour au moins un objectif $\exists j \in 1, \dots, n$ $x_j^{(1)} < x_j^{(2)}$

Les solutions qui dominent les autres mais ne se dominent pas entre elles sont appelées solutions optimales au sens de Pareto (ou solutions non dominées).

On définit l'optimalité locale et l'optimalité globale au sens de Pareto comme suit :

Définition 3.12 [28] **Optimalité locale au sens de Pareto** : Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est dit localement optimal au sens de Pareto, s'il existe un réel $\delta > 0$ tel qu'il n'y ait pas de x' qui domine le x avec $x' \in \mathbb{R}^n \cap \mathcal{B}(x, \delta)$ où $\mathcal{B}(x, \delta)$ est la boule centrée en x et de rayon δ . Un vecteur x est donc localement optimal au sens de Pareto, s'il est optimal sur une restriction de l'ensemble $\mathbb{R}^n$. (voir figure 1.5)

Définition 3.13 [28] **Optimalité globale au sens de Pareto** : Un vecteur x est globalement optimal au sens de Pareto (ou optimal au sens de Pareto) s'il n'existe pas de vecteur x' tel que x' domine le vecteur x .

FIG. 3.5 – *L'optimalité locale au sens de Pareto.*

La différence entre cette définition et celle de l'optimalité locale vient du fait que l'on ne considère plus une restriction de l'ensemble $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.14 [28] **Cône négatif** Un cône négatif est défini dans $\mathbb{R}^r$ de la manière suivante :

$$\mathcal{C}^- = \{x | x \in \mathbb{R}^n \text{ et } f(x) \leq 0\}.$$

Définition 3.15 [28] **le théorème du contact** Un vecteur x est optimal au sens de pareto pour un problème d'optimisation multi-objectif donné si

$$(\mathcal{C}^- + x) \cap \mathcal{F} = x$$

où $\mathcal{F}$ désigne l'espace des solutions réalisables. L'utilisation de ce théorème est illustrée par la figure.1.6

La définition de la dominance, donne quatre régions auxquelles on peut attribuer des niveaux de préférence. Ces régions sont représentées à la figure 1.7. Cette figure reprend le découpage défini par le cône négatif que l'on a introduit précédemment et l'étend à tout l'espace. Par exemple, si ce graphique est centré sur une solution A et que l'on compare cette solution avec une solution B, on aura les possibilités suivantes :

- si la solution B se trouve dans le quadrant 1, alors la solution A est préférée à la solution B ;
- si la solution B se trouve dans le quadrant 3, alors la solution A est dominée par la solution B ;
- si la solution B se trouve dans l'un des quadrants 2 ou 4, alors, on ne peut pas se prononcer sur la préférence de A par rapport à B ou de B par rapport à A.

Relations dérivées de la dominance

La définition de la relation de dominance n'offre pas assez de degrés de liberté. En effet, il n'est pas possible d'inclure dans la définition de la relation de dominance une

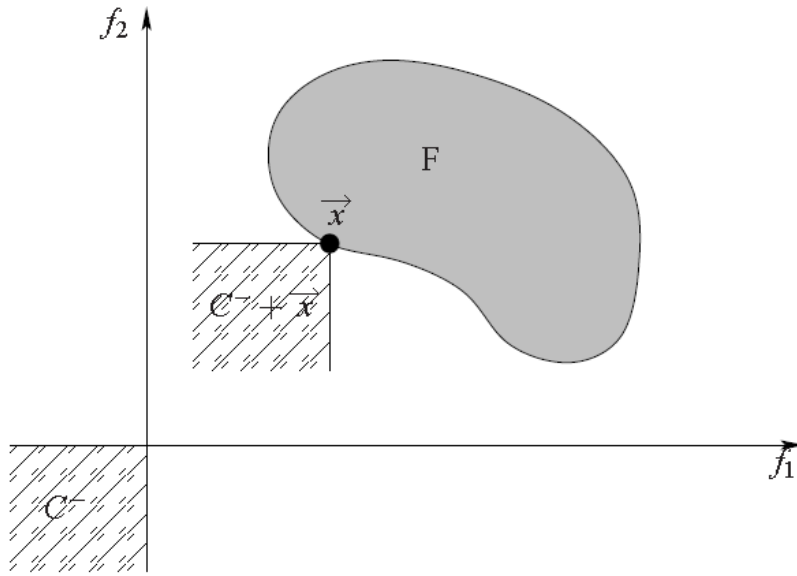


FIG. 3.6 – Le théorème du contact [28].

préférence d'un objectif par rapport à un autre. Pour remédier à ce manque de flexibilité que des relations dérivées de la relation de dominance ont été développées. Les solutions trouvées par ces relations dérivées de la dominance sont toutes optimales au sens de Pareto. La différence majeure de ces relations est que l'ensemble des solutions obtenues avec ces relations est un sous-ensemble de l'ensemble des solutions obtenues avec la relation de dominance de Pareto.

Dans cette section, l'ensemble S^r désigne l'ensemble des solutions réalisables d'un problème d'optimisation à r fonctions objectifs.

Optimalité lexicographique

Cette définition de l'optimalité permet d'inclure une préférence entre objectifs [28].

Définition 3.16 [28] optimalité au sens lexicographique

Une solution $x^* \in S^k$ est optimale au sens lexicographique si

$$x^* \leq_{lex} x, \forall x \in C^- + \{x^*\}.$$

Si $x, y \in S^k$, on dit que $x \leq_{lex} y$ s'il existe une valeur d'indice q^* telle que $x_q = y_q$ pour $q = 1, \dots, (q^*)$ et $x_{q^*} < y_{q^*}$. Les relations entre x_q et y_q pour $q \geq q^*$ ne sont pas prises en compte car nous nous arrêtons à l'indice q^* (c'est le premier indice pour lequel $x_q < y_q$).

Cette définition implique que l'utilisateur ait rangé par ordre d'importance les différents

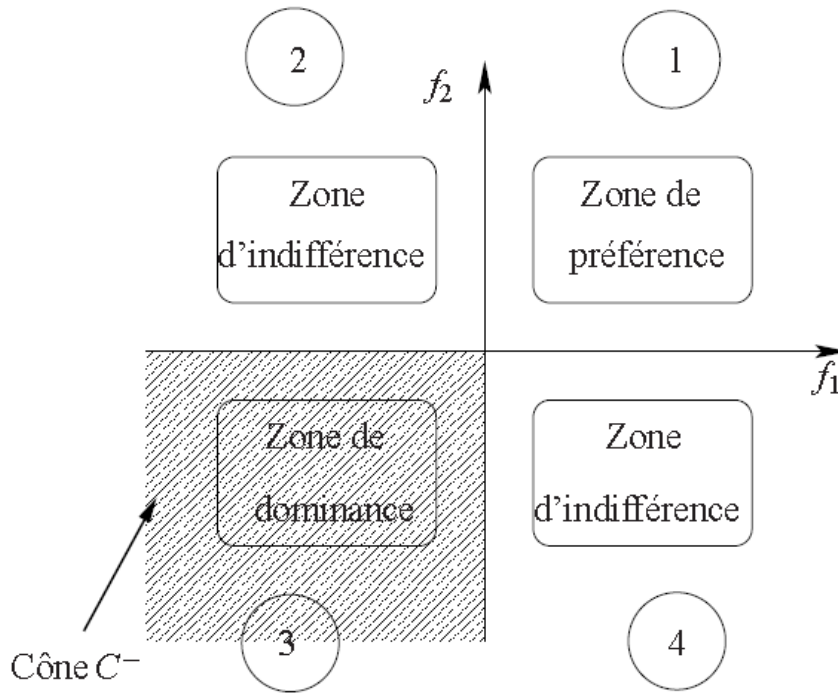


FIG. 3.7 – Les niveaux de préférence dans la relation de dominance.

objectifs. La comparaison entre les deux solutions se fera dans l'ordre de classement des objectifs.

Optimalité extrême

Comme pour la relation d'optimalité lexicographique, cette relation permet d'établir une préférence entre critères. Cette préférence est établie en utilisant des poids. Plus un objectif sera important, plus son poids sera élevé [28].

Définition 3.17 [28]**optimalité extrême** Une solution $x \in S^k$ est extrême-optimale si, étant donné un vecteur de poids $\lambda \in \mathbb{R}^k$ $\sum_i \lambda_i = 1$, x^* est une solution optimale du problème de minimisation mono-critère ayant pour fonction objectif.

$$\sum_i^k \lambda_i \times x_i$$

donc

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x_i^* \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x_i, \forall x \in S^k - \{x^*\}$$

Optimalité maximale

Cette relation contrairement aux précédentes, ne permet pas d'introduire une préférence entre objectifs [28].

Définition 3.18 [28] **optimalité maximale** Une solution $x^* \in S^k$ est max-optimale si la valeur du pire objectif est aussi petite que possible :

$$\max_{q \in 1, \dots, k} x_k^* \leq \max \left\{ \begin{array}{l} q \in 1, \dots, k \\ x \in S^k - x^* \end{array} \right. x \quad (3.1)$$

La cône optimalité

Une autre relation de classement existe. Il s'agit de la relation de cône-dominance. Cette relation possède l'avantage, par rapport à la relation de Pareto, d'être "réglable".

Définition 3.19 [28] **un cône** Un cône de pente ρ est défini de la manière suivante :

- Si $0 < \rho < 1$ (voir figure.1.8.(a))

$$C_\rho(x_1, x_2) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \rho \cdot x_1 \leq x_2 \leq \frac{1}{\rho} \cdot x_1 \right\}$$

- Si $\rho < 0$ (voir figure.1.8.(b))

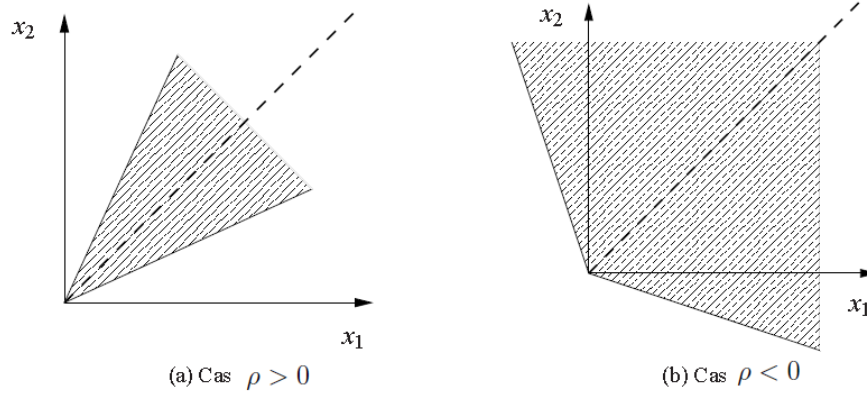


FIG. 3.8 – L'allure du cône en fonction de λ

$$C_\rho(x_1, x_2) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho x_1 \leq x_2 \text{ et } x_2 \leq x_1\}$$

- Si $\rho = 0$:

$$C_\rho(x_1, x_2) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$$

Cette relation peut être étendue au cas multi-dimensionnel. On trouvera dans [28] une relation différente permettant aussi de régler la forme du cône de domination. En (cône multi-dimensionnel).

Définition 3.20 [28] **le cône multi-dimensionnel** Un cône de pente ρ est défini de la manière suivante :

$$C_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in 1, \dots, n, \forall j \in 1, \dots, n, j > i, (x_i, x_j) \in C_\rho(x_i, x_j)\} \quad (3.2)$$

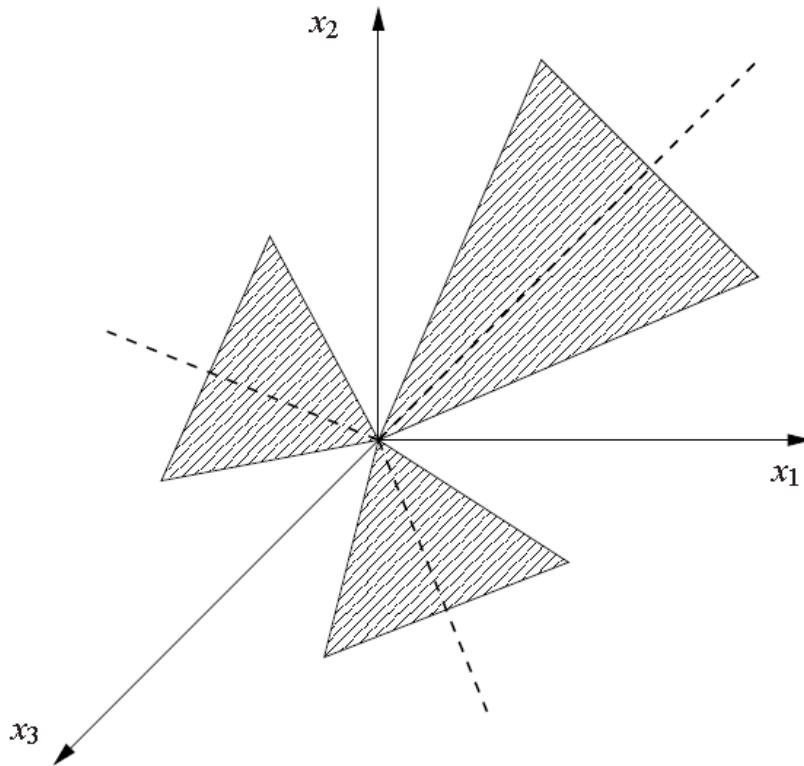


FIG. 3.9 – La projection du cône multi-dimensionnel.

La projection du cône multi-dimensionnel sur des plans est représentée à la figure 1.9.

Définition 3.21 [28] **le cône-dominance** Soit un cône C_ρ . Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ cône-domine un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ (cette relation est notée $x \leq_{C_\rho} y$) si $y - x \in C_\rho$ et $x \neq y$ (ou encore $y - x \in C_\rho - \{0\}$)

La relation de cône-dominance est représentée à la figure 1.19. Nous avons aussi représenté deux exemples d'application de cette relation à la figure 1.10.

Sur ces deux figures, nous avons représenté le " cône de domination ". Il s'agit de la

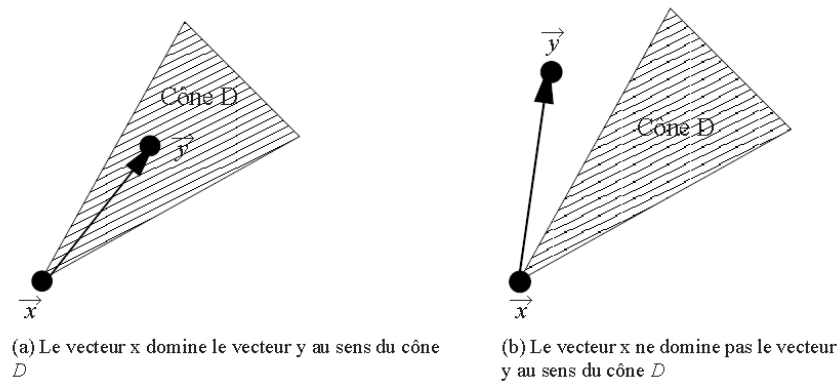


FIG. 3.10 – Deux exemples d'application de la relation de cône-dominance.

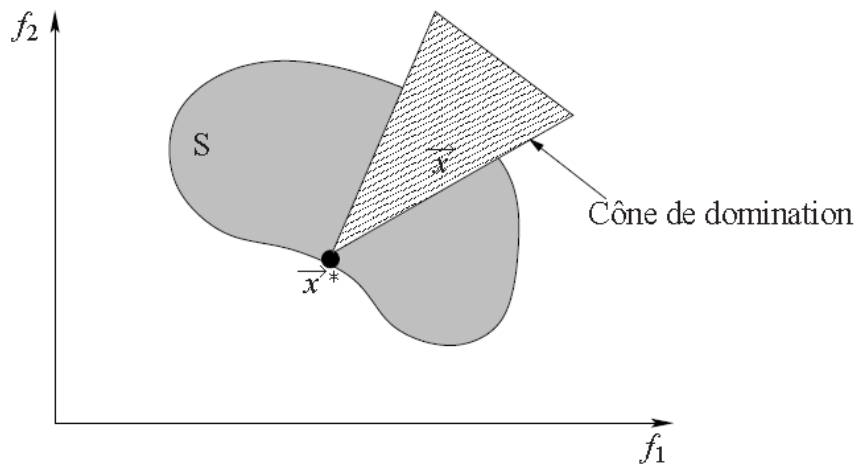


FIG. 3.11 – La relation de cône-dominance.

zone dans laquelle le point d'origine (le vecteur $\vec{x}^*$ dans la définition de la cône-dominance) domine tous les points appartenant à cette zone (les vecteurs $\vec{x}$ dans la définition de la cône-dominance).

La relation de cône-dominance est équivalente à la relation de dominance que nous avons vu dans la section précédente lorsque $\rho = 0$

La a-dominance

Cette définition de dominance a été introduite dans [28].

Définition 3.22 Une solution $x^* \in \chi$ *a-domine* une solution $x \in \chi$ s'il existe un ensemble de combinaisons de $k+1-a$ critères (on note $I_{(k+1-a)}$ l'ensemble des indice correspondant à l'ensemble des combinaisons de ces critères) tel que :

1. $x_j^* \leq x_j$ pour tout $j \in I_{k+1-a}$, et
2. $x_j^* < x_j$ pour au moins un $j \in I_{k+1-a}$.

La dominance au sens de Geoffrion

Une dernière forme de dominance importante dans le monde de l'optimisation multi-objectif est la dominance au sens de Geoffrion. Les solutions optimales obtenues par ce type de dominance sont appelées les solutions Pareto optimales propres.

Définition 3.23 Une solution $x^* \in \chi$ est appelée solution Pareto optimale propre si :

- elle est Pareto optimale,
- il existe un nombre $M > 0$ tel que $\forall i = 1, \dots, n$ et $\forall x \in \chi$ vérifiant $f_i(x) < f_i(x^*)$, il existe un indice j tel que $f_j(x^*) < f_j(x)$ et :

$$\frac{f_i(x^*) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(x^*)} \leq M;$$

avec n est la dimension de x

Cette relation n'est quasiment jamais utilisée telle quelle. En général, on utilise plutôt un résultat qui découle de cette définition. En effet, l'interprétation de ce théorème fait dans [28] est la suivante :

” Les solutions Pareto optimales propres ont des compromis bornés suivant leurs objectifs.”
Un théorème relatif à la méthode de pondération des fonctions objectif utilisant ce résultat est le suivant :

Théorème 3.1 Soit la méthode d'agrégation des fonctions objectifs suivantes :

$$f_{eq} = \sum_{i=1}^N w_i \cdot f_i(x)$$

Supposons $\forall i = 1, \dots, N; w_i > 0$ avec $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ Si x^* est une solution optimale obtenue en utilisant la méthode d'agrégation ci-dessus, alors cette solution est aussi Pareto optimale propre.

La méthode de pondération des fonctions objectifs avec les poids qui correspondent aux relations ci-dessus, permet d'obtenir des solutions avec des compromis bornés. Ces différents types de relations de dominance permettent d'avoir suffisamment de degrés de liberté pour choisir une relation qui reproduise au mieux le comportement d'un ingénieur

ou d'un décideur. Par exemple, la relation de dominance lexicographique permet de reproduire le comportement d'un décideur qui choisirait une solution parmi N solutions en considérant des critères rangés par ordre d'importance. En effet, celui-ci, quand il compare deux solutions, compare les valeurs des objectifs, jusqu'à ce qu'un objectif permette de déterminer une préférence entre les deux solutions considérées. Une fois que la préférence entre les deux solutions est déterminée, on ne considère plus les objectifs restants. La comparaison s'arrête là. La dominance est donc un outil, parmi d'autres, permettant de reproduire une démarche de recherche d'optimum. Elle n'est pas la seule, bien sûr, mais elle est un élément important pour la résolution d'un problème.

3.2.6 La surface de compromis

Le petit nombre de solutions de rang 1 que l'on a sélectionnées en utilisant la règle de classement basée sur la définition de la dominance forme ce que l'on appelle la surface de compromis (ou front de pareto). Imaginons que nous ayons un problème à deux objectifs (minimiser f_1 et minimiser f_2 sous les contraintes $g(x) < 0$ et $h(x) = 0$:

- On appelle S l'ensemble des valeurs du couple $(f_1(x), f_2(x))$ quand x respecte les contraintes $g(x) < 0$ et $h(x) = 0$.
 - On appelle P la surface de compromis
- On représente S et P sur la figure

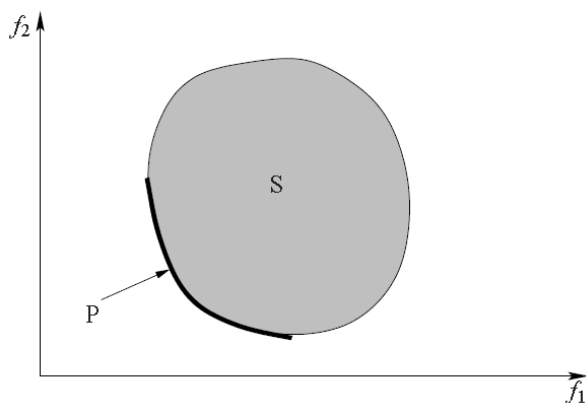


FIG. 3.12 – Représentation de la surface de compromis.

Une propriété est remarquable : en fonction du type de problème que l'on cherche à résoudre, on obtient une forme de surface de compromis. Les formes les plus courantes de surfaces de compromis sont réunies à la figure 1.14. Ces formes de surfaces de compromis sont typiques d'un problème d'optimisation multi-objectif sur un ensemble de solutions convexe. C'est ce type d'ensemble que l'on rencontre la plupart du temps, on observe deux points caractéristiques associés à une surface de compromis :

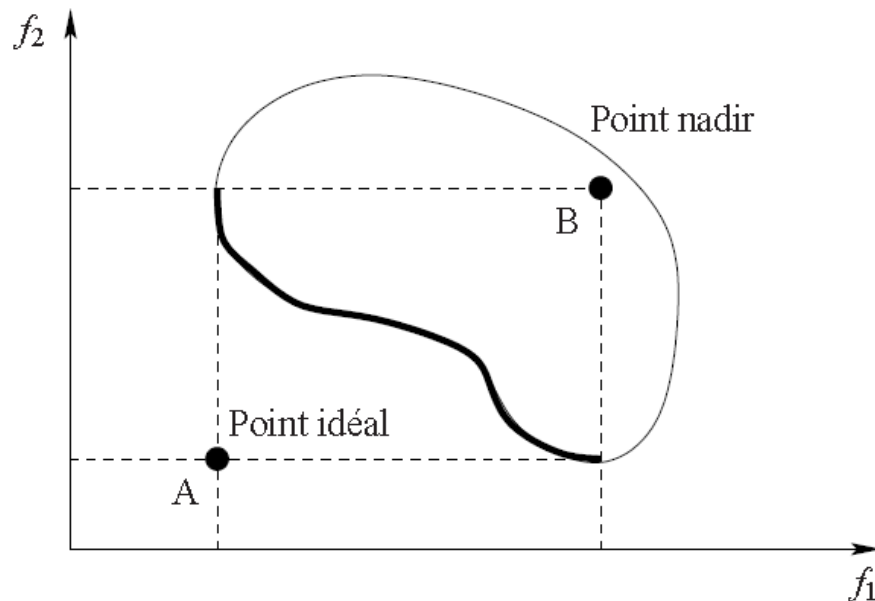


FIG. 3.13 – Représentation du point idéal et du point “nadir”.

- **Point ” nadir ”** : Les coordonnées de ce point sont obtenues en optimisant chaque fonction objectif séparément.
- **Point idéal** : Les coordonnées de ce point correspondent aux pires valeurs obtenues par chaque fonction objectif lorsque l’on restreint l’espace des solutions à la surface de compromis.

3.2.7 La convexité

Comme nous le verrons plus loin, certaines méthodes d’optimisation multi-objectif nécessitent de respecter certaines hypothèses. Le plus souvent, la méthode réclame de travailler sur un espace S des valeurs de f qui soit convexe.

Définition 3.24 La convexité Un ensemble S est convexe si, étant donnés deux points distincts quelconques de cet ensemble, le segment qui relie ces deux points est contenu dans l’ensemble S . Un exemple d’ensemble convexe et un exemple d’ensemble non convexe sont représentés à la figure 1.15.

Exemples d’ensemble convexe et d’ensemble non convexe.

Toutes les représentations de la surface de compromis pour un même problème ne sont pas équivalentes. En effet, la représentation idéale de la surface de compromis devra être constituée de points solution de notre problème répartis de manière uniforme sur la surface de compromis (voir figure 1.). Dans le premier cas, les points représentant la surface de

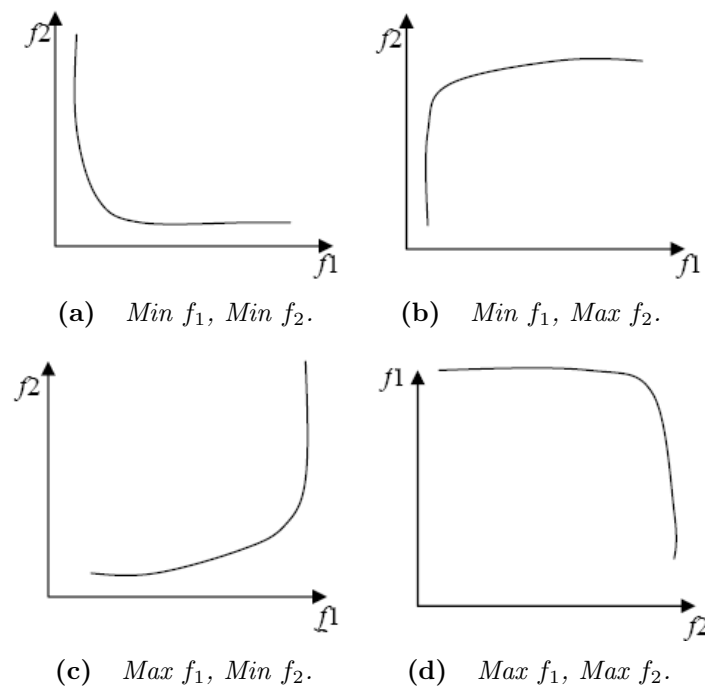


FIG. 3.14 – *Formes les plus courantes de la surface de compromis dans le cas à deux objectifs.*

compromis ne sont pas répartis de manière uniforme. L'utilisateur n'aura alors pas en sa possession un ensemble de solutions très utile. En effet, s'il décide que la solution qu'il avait choisie ne lui convient pas, le choix d'une autre solution risque de faire varier brusquement tous ses objectifs et cette nouvelle solution ne lui conviendra pas non plus. Il est alors probable que la solution offrant le "meilleur" compromis se trouve dans une zone qui ne soit pas représentée par des points solution. La détermination d'une bonne représentation de la surface de compromis sera un critère de choix d'une méthode d'optimisation multi-objectif.

3.2.8 La représentation de la surface de compromis.

Il existe un nombre important de méthodes et nous avons classé celles-ci en cinq groupes :

- les méthodes scalaires,
- les méthodes inter-actives,
- les méthodes floues,
- les méthodes exploitant une métaheuristique,
- les méthodes d'aide à la décision.

Les cinq méthodes groupes peuvent aussi être rangées en trois familles de méthodes d'optimisation multi-objectif

- Les méthodes à préférence a priori :

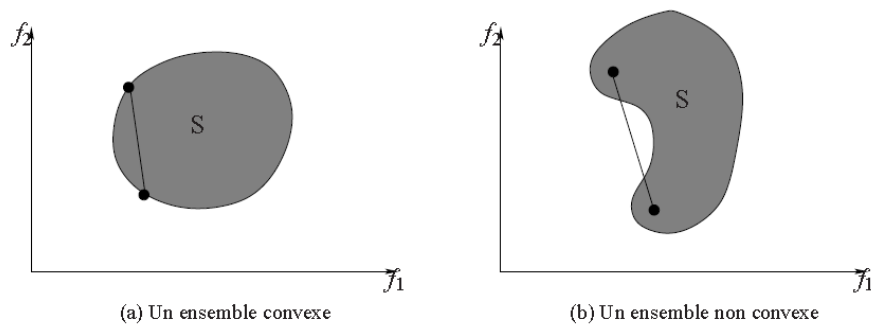


FIG. 3.15 – Exemples d'ensemble convexe et d'ensemble non convexe.

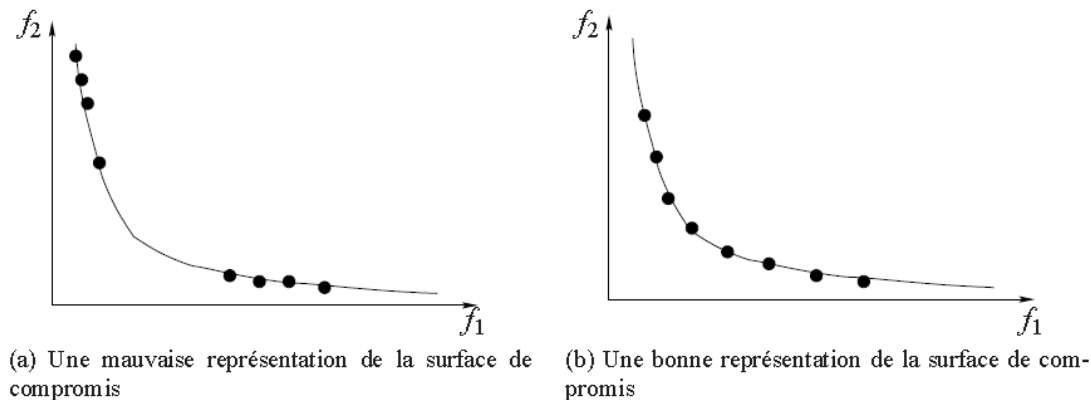


FIG. 3.16 – La représentation de la surface de compromis.

Dans ces méthodes, l'utilisateur définit le compromis qu'il désire réaliser (il fait part de ses préférences) avant de lancer la méthode d'optimisation, on retrouve dans cette famille la plupart des méthodes par agrégation (où les fonctions objectif sont fusionnées en une seule).

- Les méthodes à préférence progressive :

Dans ces méthodes, l'utilisateur affine son choix de compromis au fur et à mesure du déroulement de l'optimisation, On retrouve dans cette famille les méthodes interactives.

- Les méthodes à préférence à posteriori :

Dans ces méthodes, l'utilisateur choisit une solution de compromis en examinant toutes les solutions extraites par la méthode d'optimisation. Les méthodes de cette famille fournissent à la fin de l'optimisation, une surface de compromis.

Il existe des méthodes d'optimisation multi-objectif qui n'entrent pas exclusivement dans une famille. Par exemple, on peut utiliser une méthode à préférence a priori en lui fournissant des préférences choisies au hasard. Le résultat sera alors un grand nombre de solutions

qui seront présentées à l'utilisateur pour qu'il décide de la solution de compromis. Cette combinaison forme alors une méthode à préférence a posteriori.

4

Optimisation multi-objectif stochastique fractionnaire linéaire

Introduction

Pendant les dernières quatre décennies, la programmation fractionnaire est devenue parmi les outils de planification les plus importantes. Elle est généralement appliquée dans l'ingénierie, les affaires, les finances, les sciences économiques et dans d'autres disciplines. Quand un ou plusieurs paramètres dans un programme fractionnaire est aléatoire, on obtient ainsi un problème multi-objectif stochastique fractionnaire linéaire.

Dans ce chapitre on donne une brève introduction au problème multi-objectif fractionnaire linéaire avec des contraintes mixte. La linéarisation de la fonction objectif se fera en utilisant la procédure de doubles pondérations.

4.1 Formulation de problème de programmation multi-Objectif stochastique fractionnaire

$$(P) \begin{cases} \text{Max} G(x) = [G_1(x), G_2(x), \dots, G_k(x)], G_k(x) = \frac{N_k(x) + \alpha_k}{D_k(x) + \beta_k} & (a) \\ \Pr\left[\sum_{j=1}^m a_{i,j}^{(1)} x_j \leq b_i^{(1)}\right] \geq 1 - p_i^{(1)}, i = 1, \dots, p, p+1, \dots, q, q+1, \dots, h & (b) \\ \sum_{j=1}^m a_{i,j}^{(2)} x_j \leq b_i^{(2)}, i = h+1 \dots m & (c) \end{cases} \quad (4.1)$$

Ou $x_{n \times 1} = (x_j) \in \mathbb{R}^n, x_{n \times 1} \geq 0$ est le domaine des solutions réalisables, $A_{m \times n}^{(1)} = (a_{i,j}^{(1)})$
 $b_{m \times 1} = (b_i^{(1)}), i = 1 \dots m; j = 1, \dots, n; \alpha_r, \beta_r$ des scalaires, $A_{(h-m) \times n}^{(2)} = (a_{i,j}^{(2)})$
 $b_{(h-m) \times 1}^{(2)}, i = m+1 \dots h; j = 1, \dots, n;$

$$N_k(x) = \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j \quad \text{et} \quad D_k(x) = \sum_{j=1}^n d_{kj} x_j$$

Dans ce modèle, au moins l'une de ces vecteurs est aléatoire $N_k(x), D_k(x), A$ et b
 $S = \{x / \text{eqs}(5.1(b)) \text{ et } (5.1(c)), x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\}$ un ensemble non vide convexe et compact de $\mathbb{R}^n$

4.1.1 Détermination des contraintes de probabilités équivalentes

Si A est un vecteur aléatoire de l'équation (5.1(b)), qui suit la loi Normale $N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$,
 $i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$ telle que μ_{ij}, σ_{ij}^2 sont l'espérance et les variances de A respectivement.

$$L_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \Rightarrow E(L_i) = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j$$

Et la variance

$$V(L_i) = X V_i X' = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_j^2 \quad \text{tel que} \quad V_i = i^{\text{ème}} \text{ matrice des variance-covariances,}$$

A est une matrice de variables aléatoires indépendantes, comme les variables sont indépendante alors la covariance égal à zéro or la diagonale, alors la i ème contraintes déterministe est obtenu de(5.1(b))comme suit :

1^{er} cas $A^{(1)}$ est une matrice de variables aléatoires

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j - \phi^{-1}(q_i) \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_j^2} \leq b_i^{(1)} \quad (4.2)$$

2^{ème} cas b est une vecteur de variables aléatoires $b_i \sim N(\mu_{b_i}, \sigma_{b_i}^2)$ ce qui fait :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq \mu_{b_i} + \phi^{-1}(p_i)\sigma_{b_i} \quad (4.3)$$

3^{ème} cas si A et b sont des vecteurs de variables aléatoires indépendantes alors

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ij}x_j - \phi_{p_i}^{-1} \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_j^2} \leq \mu_{b_i} \quad (4.4)$$

4.1.2 Conversion des fonctions objectifs en contraintes

Notre but dans cette section est de considérer toute la fonction objectif sous forme de contraintes [8]. La caractéristique de notre modèle tient compte de la distribution de probabilité des fonctions objectifs en maximisant la borne inférieure de la fonction objectif sous la contrainte de chance avec le numérateur et le coefficient de dénominateur étant fait au hasard. Ensuite Charles et Dutta utilisent la double pondération pour transformer la fonction objectif.

Hypothèses :

$$N_k(x) \sim N\left(\sum_{j=1}^n \mu_{ckj}x_j, \sum_{j=1}^n \sigma_{ckj}^2 x_j^2\right), \text{ et } D_k(x) \sim N\left(\sum_{j=1}^n \mu_{dkj}x_j, \sum_{j=1}^n \sigma_{dkj}^2 x_j^2\right)$$

Où μ_{ckj} et μ_{dkj} sont les moyennes et $\sigma_{ckj}^2 x_j^2, \sigma_{dkj}^2 x_j^2$ les variances respectivement

Nous définissons le paramètre inconnu déterministe, il est inférieur ou égal à $G_k(x)$ comme suit :

$$G_k(x) \geq \lambda_k c.e \frac{N_k(x) + \alpha_k}{D_k(x) + \beta_k} \geq \lambda_k \Rightarrow 0 \leq N_k(x) + \alpha_k - \lambda_k [D_k(x) + \beta_k]$$

il y a deux cas surgissant dans ce problème

1^{ère} cas $\alpha_k > 0$ soit

$$\begin{aligned} f(x, \lambda_k; \alpha_k > 0) &= \lambda_k [D_k(x) + \beta_k] - N_k(x) \leq \alpha_k \\ E[f(x, \lambda_k; \alpha_k > 0)] &= F^E(x, \lambda_k; \alpha_k > 0) = \lambda_k [D_k^E(x) + \beta_k] - N_k^E(x) \\ &= \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n \mu_{dkj}x_j + \beta_k \right] - \sum_{j=1}^n \mu_{ckj}x_j \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
 V[f(x, \lambda_k; \alpha_k > 0)] &= F^V(x, \lambda_k; \alpha_k > 0) = \lambda_k^2 D_k^V(x) + N_k^V(x) \\
 &= \lambda_k^2 \sum_{j=1}^n \sigma_{dkj}^2 x_j^2 + \sum_{j=1}^n \sigma_{ckj}^2 x_j^2 \\
 &= \sum_{j=1}^n (\lambda_k^2 \sigma_{dkj}^2 + \sigma_{ckj}^2) x_j^2
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\Pr[f(x, \lambda_k; \alpha_k > 0) \leq \alpha_k] \geq 1 - p_k^{(2)} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \lambda_k [D_k^E(x) + \beta_k] - N_k(x) + \phi^{-1}(q_k^{(2)}) \sqrt{\lambda_k^2 D_k^V(x) + N_k^V(x)} \leq \alpha_k \\
 &\Rightarrow \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j + \beta_k \right] - \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j + \phi^{-1}(q_k^{(2)}) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda_k^2 \sigma_{dkj}^2 + \sigma_{ckj}^2) x_j^2} \leq \alpha_k
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

2^{ème} cas : $\alpha_k \leq 0$

$$\begin{aligned}
 f(x, \lambda_k; \alpha_k \leq 0) &= N_k(x) - \lambda_k [D_k(x) + \beta_k] \geq \alpha_k \\
 E[f(x, \lambda_k; \alpha_k \leq 0)] &= F^E(x, \lambda_k; \alpha_k \leq 0) = N_k^E(x) - \lambda_k [D_k^E(x) + \beta_k] \\
 &= \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j - \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j + \beta_k \right]
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
 V[f(x, \lambda_k; \alpha_k \leq 0)] &= F^V(x, \lambda_k; \alpha_k \leq 0) = \lambda_k^2 D_k^V(x) + N_k^V(x) \\
 &= \lambda_k^2 \sum_{j=1}^n \sigma_{dkj}^2 x_j^2 + \sum_{j=1}^n \sigma_{ckj}^2 x_j^2 = \sum_{j=1}^n (\lambda_k^2 \sigma_{dkj}^2 + \sigma_{ckj}^2) x_j^2
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\Pr[f(x, \lambda_k; \alpha_k \leq 0) \geq \alpha_k] \geq 1 - p_k^{(2)} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow N_k^E(x) - \lambda_k [D_k^E(x) + \beta_k] + \phi^{-1}(p_k^{(2)}) \sqrt{\lambda_k^2 D_k^V(x) + N_k^V(x)} \geq \alpha_k \\
 &\Rightarrow \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j - \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j + \beta_k \right] + \phi^{-1}(p_k^{(2)}) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda_k^2 \sigma_{dkj}^2 + \sigma_{ckj}^2) x_j^2} \geq \alpha_k
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Remarque : dans les deux cas la variance est la même

$$F^V(x, \lambda_k; \alpha_k > 0) = F^E(x, \lambda_k; \alpha_k \leq 0) \tag{4.13}$$

4.2 Fonction scalarisante stochastique linéaire

La méthode classique pour générer une solution non-dominée est d'utiliser la somme pondérée de la fonction objectif c.-à-d utiliser la fonction scalarisante suivante :

$$Max\{\xi \times R(x)/x \in \mathcal{S}\} \quad (4.14)$$

Si $\xi > 0$, alors le vecteur solution x de l'équation (5.14) est efficace, mais si on a $\xi \geq 0$ implique que la solution est faiblement efficace, donc on prend $\xi/\xi > 0$, dans La méthode de pondération de la fonction objectif linéaire qui nous donne les solutions efficaces car les contraintes sont convexes. Cependant $\xi/\xi > 0$ est un ensemble ouvert, qui cause des difficultés dans les problèmes d'optimisations mathématiques, afin de remédier à la difficulté précédente nous définissons une nouvelle fonction objectif appelé la fonction scalarisante comme suit :

$$Max \sum_{k=1}^r \xi_k \times \lambda_k \quad (4.15)$$

si $\xi_k \in [0, 1]$, est le poids stochastique relatif dans la fonction objectif de λ_k , S est le domaine de définition. Nous supposons que l'ensemble ξ est fini est compact. (les contraintes sont convexes. Cependant, ξ est un jeu ouvert, qui occasionne des difficultés dans le problème d'optimisation mathématique. afin de venir plus de la difficulté pré-indiquée nous a laissés définir une fonction scalarisant stochastique linéaire nouvelle notamment comme suit

4.2.1 Méthode de la fonction scalarisante linéaire stochastique

BWLSSF signifier que la fonction objectif est deux fois pondérée, la première dans la transformation de la fonction objectif en contraintes, la deuxième dans la fonction scalarisant comme suit :

1^{ère} cas si $\alpha_k > 0$

$$Max_{\lambda \in S'} \sum_{k=1}^r p_k^{(2)} \lambda_k \quad (4.16)$$

$$0 < p_1^{(2)} < p_2^{(2)} < \dots < p_r^{(2)} < 1 \quad (4.17)$$

$$\sum_{k=1}^r p_k^{(2)} = 1 \quad (4.18)$$

Définition 4.1 Dans l'équation (5.16), λ_k^* est efficace si il n'existe pas une autre $\lambda_k \in \lambda$ telle que

$$\sum_{k=1}^r p_k^{(2)} \lambda_k^* \geq \sum_{k=1}^r p_k^{(2)} \lambda_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^r p_k^{(2)} \lambda_k^* \neq \sum_{k=1}^r p_k^{(2)} \lambda_k$$

avec les conditions (5.17),(5.18) ou $\lambda \in \mathbb{R}^k$ est l'ensembles des solutions réalisables
 2^{ème} cas : $\alpha_k \leq 0$

$$\text{Max}_{\lambda \in S'} \sum_{k=1}^r q_k^{(2)} \lambda_k \quad (4.19)$$

$$0 < q_1^{(2)} < q_2^{(2)} < \dots < q_r^{(2)} < 1 \quad (4.20)$$

$$\sum_{k=1}^r q_k^{(2)} = 1 \quad (4.21)$$

Définition 4.2 Dans l'équation (5.19), λ_k^* est efficace si il n'existe pas une autre λ_k telle que :

$$\sum_{k=1}^r q_k^{(2)} \lambda_k^* \geq \sum_{k=1}^r q_k^{(2)} \lambda_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^r q_k^{(2)} \lambda_k^* \neq \sum_{k=1}^r q_k^{(2)} \lambda_k$$

avec les conditions (5.20),(5.21) ou $S' \subset \mathbb{R}^k$ est l'ensembles des solutions réalisables
 le tableau ci-dessus résume notre problème à l'état déterministe

fonctions	objectifs	$\alpha_k > 0$ Eq(5.16)	$\alpha_k \leq 0$ Eq(5.19)
contraintes	T est v,a	Eq(5.2),(5.1(c))et(5.8)	Eq(4),(5.1(c))et(5.12)
	b est v,a	Eq(5.3),(5.1(c))et(5.8)	Eq(5.3),(5.1(c))et(5.12)
	T et b v,a	Eq(5.4),(5.1(c))et(5.8)	Eq(5.4),(5.1(c))et(5.12)

TAB. 4.1 – Le tableau ci-dessus résume notre problème à l'état déterministe

4.2.2 Exemple numérique

$$(P) \begin{cases} \text{Max} G(x) = \frac{c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \alpha_1}{d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \beta_1}, \frac{c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \alpha_2}{d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \beta_2} \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ a_1x_1 + a_2x_2 \leq 5 \end{cases} \quad (4.22)$$

tel que $\alpha_1, \alpha_2 = 0; \beta_1, \beta_2 = 1; x_1, x_2 \geq 0$

4.3. UNE APPROCHE D'IDENTIFICATION DES FONCTIONS OBJECTIFS REDONDANTES ET CONTRAINTES REDONDANTES DANS LES PROBLÈMES (MONLSFP)

77

variables aléatoire	c_{11}	c_{12}	c_{21}	c_{22}	d_{11}	d_{12}	d_{21}	d_{22}	a_1	a_2
moyen	5	3	7	1	5	2	5	2	2	3
variance	2	1	3	0.5	2	1	2	1	1	1

TAB. 4.2 – Les moyennes les variances de l'exemple 1

de plus la troisième contrainte satisfait 90% , les moyennes, les variances sont données dans le tableau suivant :

on général on prend $p_1^{(2)} = 0.10$ ce qui fait $p_2^{(2)} = 1 - p_1^{(2)} = 0.90$, aussi la troisième contrainte de l'équation 23

$$(P_1) \begin{cases} MaxZ = 0.90\lambda_1 + 0.10\lambda_2 \\ 5x_1 + 3x_2 - \lambda_1(5x_1 + 2x_2 + 1) + 1.28\sqrt{(2\lambda_1^2 + 2)x_1^2 + (2\lambda_1^2 + 1)x_2^2} \geq 0 \\ 7x_1 + x_2 - \lambda_2(5x_1 + 2x_2 + 1) - 1.28\sqrt{(2\lambda_2^2 + 2)x_1^2 + (2\lambda_2^2 + 1)x_2^2} \geq 0 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15, 5x_1 + 2x_2 \leq 10, 2x_1 + 3x_2 + 1.28\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 5 \\ x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

la solutions est $x_1 = 0.04619, x_2 = 1.1464; \lambda_1 = 1.9589, \lambda_2 = 0.0000$ la fonction objectif correspondante est $[1.0416, 0.4171]$ il est a note que 90%de l'importance est donne pour la première fonction objectif.

4.3 Une approche d'identification des fonctions objectifs redondantes et contraintes redondantes dans les problèmes (MONLSFP)

Introduction

L'identification des fonctions ou contraintes redondantes permet la réduction d'un système en un système de taille plus petite, qui conserve les mêmes propriétés que le système initial. Bien qu'elle puisse apparaître un peu vague dans la programmation fractionnaire stochastique non linéaire (NLSFP). On rencontre ceci en particulier, chaque fois qu'on construit des problèmes de programmation linéaire. L'existence de la redondance "structurale" dans les contraintes et les variables est due souvent à l'inattention.

La redondance peut se produire dans la phase de formulation en raison de mauvaises données de base, ou pour ne pas oublier d'éventuelles contraintes appropriées en modélisant un problème.

Par conséquent la présence de la redondance dans les modèles pratique de programmation mathématique est à peine contestée. Ces contraintes/variables redondantes incluses dans le modèle peuvent nuire aux procédures de résolutions des programmes linéaires et, qui exige, parfois, un temps de calcul plus grand .

Néanmoins la redondance peut avoir des effets favorables. A titre d'exemple Charnes et Cooper (1954) ont ajouté des contraintes et des variables à un problème de programmation linéaire pour le transformer en un problème de transport, ce qui devient plus facile à résoudre.

4.4 Programmation stochastique multi-objectif fractionnaire non linéaire

$$(P) \begin{cases} \begin{aligned} &MaxG(x) = [G_1(x), G_2(x), \dots, G_k(x)], G_k(x) = \frac{N_k(x) + \alpha_k}{D_k(x) + \beta_k} \quad (a) \\ &Pr\left[\sum_{j=1}^m a_{i,j}^{(1)} x_j \leq b_i^{(1)}\right] \geq 1 - p_i^{(1)}, i = 1, \dots, p, p+1, \dots, q, q+1, \dots, h \quad (b) \\ &\sum_{j=1}^m a_{i,j}^{(2)} x_j \leq b_i^{(2)}, \quad i = h+1 \dots m \quad (c) \end{aligned} \end{cases} \quad (4.23)$$

ou $x_{n \times 1} \geq 0, x_{n \times 1} = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ est le domaine des solutions réalisables,
 $A_{m \times n}^{(1)} = (a_{i,j}^{(1)}), b_{m \times 1} = (b_i^{(1)}), i = 1 \dots m; j = 1, \dots, n; \alpha_r, \beta_r$ des scalaires
 $A_{(h-m) \times n}^{(2)} = (a_{i,j}^{(2)}), b_{(h-m) \times 1}^{(2)} = (b_i^{(2)}), i = m+1 \dots h; j = 1, \dots, n;$
 $N_k(x) = \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j^2$ et $D_k(x) = \sum_{j=1}^n d_{kj} x_j^2$

4.4.1 Contraintes déterministe équivalentes

Dans eq(), soit $a_{i,j}$ une variable aléatoire qui suit $N(\mu_{i,j}, \sigma_{i,j}^2)$. $i = 1, \dots, p,$
 $j = 1, \dots, n,$ ou $\mu_{i,j}$ est l'espérance et $\sigma_{i,j}^2$ est la variance

$$\begin{aligned} \text{Soit } L_i &= \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j, \quad i = 1, \dots, p \\ E(L_i) &= \sum_{j=1}^n \mu_{i,j} x_j; \quad V(L_i) = X^T V_i X = \sum_{j=1}^n \sigma_{i,j}^2 x_j^2 \end{aligned}$$

V_i la i-ème ligne de la matrice des variances-covariances, quand $A_{i,j}^{(1)}$ est une matrice de variables aléatoire indépendantes, les contraintes déterministes sont obtenues par Charles et Dutta(2001,2003) (voir chapitre 4) comme suit :

$a_{i,j}$ variable aléatoire la contrainte sera comme suit

$$\sum_{j=1}^n \mu_{i,j} x_j + \phi_{q_i}^{-1} \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{i,j}^2 x_j^2} \leq b_i^{(1)} \quad (4.24)$$

si $b_i^{(1)}$ est une variables aléatoire, $b_i^{(1)} \sim N(\mu_{b_i^{(1)}}, \sigma_{b_i^{(1)}}^2)$, $i = q + 1, \dots, m$, tel que $\mu_{b_i^{(1)}}$ la moyennes, $\sigma_{b_i^{(1)}}^2$ variances respectivement, la même demarche on obtient la contrainte

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq \mu_{b_i^{(1)}} + \phi^{-1}(p_i) \sigma_{b_i^{(1)}}^2 \quad (4.25)$$

$a_{i,j}^{(1)}$ et $b_i^{(1)}$ sont des variables aléatoire tel que

$a_{i,j}^{(1)} \sim N(\mu_{i,j}, \sigma_{i,j}^2)$ et $b_i^{(1)} \sim N(\mu_{b_i^{(1)}}, \sigma_{b_i^{(1)}}^2)$
 $i = p + 1, \dots, q$ $j = 1, \dots, n$, tel que $\mu_{i,j}$ et $\mu_{b_i^{(1)}}$ les moyennes ,
 $\sigma_{i,j}^2$ et $\sigma_{b_i^{(1)}}^2$ les variances respectivement, la même demarche on obtient la contrainte

$$\sum_{j=1}^n \mu_{i,j} x_j - \phi^{-1}(q_i) \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{i,j}^2 x_j^2} \leq \mu_{b_i^{(1)}} \quad (4.26)$$

4.5 Conversion des fonctions objectifs en contraintes

Cette section considère toutes les fonctions objectifs sous forme de contraintes (Charles et Dutta 2003 ,2006b). La nouvelle idée du modèle est qu'il tient compte de la distribution de probabilités des fonctions objectifs en maximisant la borne inférieure de la fonction objectif sous contraintes de chance, ou les coefficients de numérateur et/ou de dénominateur sont aléatoires.

Le paramètre inconnu λ_k , qui est inférieur ou égal à $G_k(x)$ est défini par :

$$G_k(x) \geq \lambda_k \text{ i.e } \frac{N_k(x) + \alpha_k}{D_k(x) + \beta_k} \geq \lambda_k \implies 0 \leq N_k(x) + \alpha_k - \lambda_k [D_k(x) + \beta_k].$$

on peut distinguer deux cas

1. $\alpha_k > 0$

1.a Hypotheses

$N_k(x) \sim N(\sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j^2, \sum_{j=1}^n \sigma_{ckj}^2 x_j^4)$ et $D_y(x) \sim N(\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j^2, \sum_{j=1}^n \sigma_{dkj}^2 x_j^4)$, μ_{ckj}, μ_{dkj} les moyennes, $\sigma_{ckj}^2, \sigma_{dkj}^2$ les variances respectivement.

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } f(x, \lambda_k; \alpha_k > 0) &= \lambda_k [D_k(x) + \beta_k] - N_k(x) \leq \alpha_k \\
 E[f(x, \lambda_k; \alpha_k > 0)] &= F^E(x, \lambda_k; \alpha_k > 0) = \lambda_k [D_k^E(x) + \beta_k] - N_k^E(x) \\
 &= \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j^2 + \beta_k \right] - \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j^2
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
 V[f(x, \lambda_k; \alpha_k > 0)] &= F^V(x, \lambda_k; \alpha_k > 0) = \lambda_k^2 D_k^V(x) + N_k^V(x) \\
 &= \lambda_k^2 \sum_{j=1}^n \sigma_{dkj}^2 x_j^4 + \sum_{j=1}^n \sigma_{ckj}^2 x_j^4 \\
 &= \sum_{j=1}^n (\lambda_k^2 \sigma_{dkj}^2 + \sigma_{ckj}^2) x_j^4
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\Pr[f(x, \lambda_k; \alpha_k > 0) \leq \alpha_k] \geq 1 - p_k^{(2)}$$

$$\begin{aligned}
 \implies \lambda_k [D_k^E(x) + \beta_k] - N_k^E(x) + \phi^{-1}(q_k^{(2)}) \sqrt{\lambda_k^2 D_k^V(x) + N_k^V(x)} &\leq \alpha_k \\
 \implies \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j^2 + \beta_k \right] - \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j^2 + \phi^{-1}(q_k^{(2)}) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda_k^2 \sigma_{dkj}^2 + \sigma_{ckj}^2) x_j^4} &\leq \alpha_k
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

1.b hypothèse

$$N_k(x) \sim N\left(\sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j^2, \sum_{j=1}^n \sigma_{ckj}^2 x_j^4\right) \text{ et } D_k(x) \sim N\left(\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j^2, \sum_{j=1}^n \sigma_{dkj}^2 x_j^4\right)$$

Ou μ_{ckj} et μ_{dkj} les moyennes et $\sigma_{ckj}^2, \sigma_{dkj}^2$ les variances respectivement.

avec la même demarche on trouve :

$$\Pr[f(x, \lambda_k; \alpha_k > 0) \leq \alpha_k] \geq 1 - p_k^{(2)} \tag{4.30}$$

$$\implies \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j^2 + \beta_k \right] - \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j^2 + \phi^{-1}(q_k^{(2)}) \sqrt{\lambda_k^2 \sum_{j=1}^n \sigma_{dkj}^2 x_j^4 + \sum_{j=1}^n \sigma_{ckj}^2 x_j^4} \leq \alpha_k$$

1.c Hypotheses

$$N_k(x) \sim N\left(\sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j^2, \sum_{j=1}^n \sigma_{ckj}^2 x_j^4\right) \text{ et } D_k(x) \sim N\left(\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j^2, \sum_{j=1}^n \sigma_{dkj}^2 x_j^4\right) \text{ Ou } \mu_{ckj} \text{ et } \mu_{dkj}$$

les moyennes et $\sigma_{ckj}^2, \sigma_{dkj}^2$ les variances respectivement.

avec la même demarche on trouve :

$$\Pr[f(x, \lambda_k; \alpha_k > 0) \leq \alpha_k] \geq 1 - p_k^{(2)}$$

$$\Rightarrow \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j^2 + \beta_k \right] - \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j^2 + \phi^{-1}(q_k^{(2)}) \sqrt{\lambda_k^2 \sum_{j=1}^n \sigma_{dkj}^2 x_j^4 + \sigma_{ckj}^2 x_j^2} \leq \alpha_k$$

$2.\alpha_k \leq 0$ comme dans le première cas 1a,1b et 1c. on obtient 2a,2b et 2c comme suit :

2.a

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j^2 - \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j^2 + \beta_k \right] + \phi^{-1}(p_k^{(2)}) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda_k^2 \sigma_{dkj}^2 + \sigma_{ckj}^2) x_j^4} \geq \alpha_k \quad (4.31)$$

2.b

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j^2 - \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j + \beta_k \right] + \phi^{-1}(p_k^{(2)}) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda_k^2 \sigma_{dkj}^2 + \sigma_{ckj}^2 x_j^2) x_j^2} \geq \alpha_k$$

2.c

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j - \lambda_k \left[\sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j^2 + \beta_k \right] + \phi^{-1}(p_k^{(2)}) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda_k^2 \sigma_{dkj}^2 x_j^2 + \sigma_{ckj}^2) x_j^2} \geq \alpha_k \quad (4.32)$$

soit

Définition 4.3 Les définitions suivantes correspondent aux cas 1a section 6.2 de même pour les autres cas 2(2.a, 2.b, 2.c) avec les contraintes (6.1(c)) (6.3)

Soit le scalaire $\lambda, \lambda = \min\{\lambda_k \simeq G_k(x) \mid x \text{ est le vecteur unitaire et } k = 1, \dots, r.\}$

$$S^0 = \{x \in \mathbb{R}^n / \lambda \sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j^2 - \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j^2 + \phi^{-1}(q_k^{(2)}) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda_k^2 \sigma_{dkj}^2 + \sigma_{ckj}^2) x_j^4} \leq \alpha_k - \lambda \beta_k$$

$$\text{eqs (6.1(c)) - (6.3) , } i = 1, \dots, h, \quad x_j \geq 0; j = 1, \dots, n\}$$

$$S_w = \{x \in \mathbb{R}^n / \lambda \sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j^2 - \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j^2 + \phi^{-1}(q_k^{(2)}) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda_k^2 \sigma_{dkj}^2 + \sigma_{ckj}^2)} x_j^4 \leq \alpha_k - \lambda \beta_k$$

eqs (6.1(c)) – (6.3), $i, = 1, \dots, h, x_j \geq 0; j = 1, \dots, n \quad k \neq w\}$

Définition 4.4 [15] la contrainte formé de la fonction objectif suivante :

$$\lambda \sum_{j=1}^n \mu_{dwj} x_j^2 - \sum_{j=1}^n \mu_{cwj} x_j^2 + \phi^{-1}(q_w^{(2)}) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda^2 \sigma_{dwj}^2 + \sigma_{cwj}^2)} x_j^4 \leq \alpha_w - \lambda \beta_w$$

est redondante dans le système (1) si et seulement si $S^0 = S_w$. la définition équivalente est $S_w = S^0$ si et seulement si

$$\lambda \sum_{j=1}^n \mu_{dwj} x_j^2 - \sum_{j=1}^n \mu_{cwj} x_j^2 + \phi^{-1}(q_w^{(2)}) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda^2 \sigma_{dwj}^2 + \sigma_{cwj}^2)} x_j^4 \leq \alpha_w - \lambda \beta_w \quad (4.33)$$

pour tous $x \in S_w$. et par conséquent

$$S_w(x) = \alpha_w - \lambda \beta_w - \lambda \sum_{j=1}^n \mu_{dwj} x_j^2 + \sum_{j=1}^n \mu_{cwj} x_j^2 - \phi^{-1}(q_w^{(2)}) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda^2 \sigma_{dwj}^2 + \sigma_{cwj}^2)} x_j^4$$

Définition 4.5 [15] La contrainte formé de la w ème fonction (6.11) objectif est redondante dans le système (5.1) si et seulement si

$$\hat{S}_w = \min\{S_w(x) / x \in S_w\} \geq 0.$$

Définition 4.6 [15] La contrainte formé de la w ème fonction objectif (6.11) est fortement redondante dans le système (5.1) si et seulement si

$$\hat{S}_w > 0. \text{ cependant, la contrainte peut être redondante sans être fortement redondante.}$$

Définition 4.7 [15] La contrainte formé de la w ème fonction objectif (6.11) est faiblement redondante dans le système (5.1) si et seulement si

$$\hat{S}_w = 0.$$

4.6 Identification d'une contrainte redondante

Un algorithme est proposé pour aider à identifier des fonctions objectifs fractionnaire redondantes et des contraintes redondantes dans les problèmes de programmation multi-objectifs stochastique fractionnaire non linéaire, Charles et Dutta (2003) on utilise la programmation linéaire séquentielle pour fournir une méthode pour linéariser les contraintes de la fonction objectif fractionnaire et les contraintes stochastique.

4.6.1 algorithme de programmation linéaire séquentielle

[15] l'origine de cette méthode remonte à Cheney et Goldstein(1959) et Kelly (1969) qui sont à l'origine de la présentation du modèle SLP. l'idée est de résoudre une series de problèmes linéaires afin d'obtenir la solution de problème non linéaire original.

Un problème linéaire est généré par approximation des fonctions objectifs non linéaire et les contraintes non linéaire en utilisant le développement de Taylor à l'ordre un. si le modèle est non linéaire MOSFP, après avoir adopté les concepts de contraintes aléatoires (Charles et Dutta, 2003 ; Charnes et Cooper 1954), le modèle devient partiellement linéaire.

- **etape1** : commencer avec x_{init} . ce point n'est pas nécessairement réalisable. Soit $x_1 = x_{init}$.
- **etape2** : linéariser la fonction objectif et constraints non linéaire au tour de point x_j tel que

$$G(x) \simeq G(x_j) + \nabla G(x_j)^T(x - x_j) \quad \text{et} \quad g_i(x) \simeq g_i(x_j) + \nabla g_i(x_j)^T(x - x_j)$$

- **etape3** : formuler le problème LSFP approximation en LPP comme ci-dessous

$$(P_2) \begin{cases} \text{Min} G(x) = G(x_j) + \nabla G(x_j)^T(x - x_j) \\ \text{sc} \quad g_i(x_j) + \nabla g_i(x_j)^T(x - x_j) = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n. \\ x \geq 0; \end{cases} \quad (4.34)$$

- **etape4** : Résoudre le problème approché LPP pou obtenir la solution x_{next}
- **etape5** : Evaluer les contraintes originales en x_{next} , c'est à dire Obtenir $g_i(x_{next})$ $i=1, \dots, m$ si $g_i(x_{next}) \leq \epsilon$; pour $i=1, \dots, m$, où ϵ est la plus petite tolérance positive, alors toutes les contraintes d'origine peuvent être considéré comme satisfaite. Donc arrêter la procédure en prenant $x_{opt} \simeq x_{next}$. Si $g_i(x_{next}) > \epsilon$ pour une certains contrainte i , trouver la plus mauvaise contrainte, par exemple $g_i^*(x_{next}) = \max_i[g_i(x_{next})]$. Re-linéarisé la contrainte $g_i^*(x) \leq 0$ sur le point x_{next} tel que $g^*(x) \simeq g^*_{(x_{next})} + \nabla g^*_{(x_{next})}^T(x - x_j)$ et ajouter ce constraint comme la $(m+1)$ i ème contrainte de problème LSFP. pose $next := next + 1$. aller à étape 4

Considérons la linéarisation des contraintes et des contraintes formées à partir des fonctions objectifs fractionnaires.

$$\lambda \sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j^2 - \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j^2 + \phi^{-1}(q_k^{(2)}) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda_k^2 \sigma_{dkj}^2 + \sigma_{ckj}^2) x_j^4} - \alpha_k + \lambda \beta_k \leq 0 \quad 1a$$

$$\lambda \sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j - \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j^2 + \phi^{-1}(q_k^{(2)}) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda_k^2 \sigma_{dkj}^2 + \sigma_{ckj}^2 x_j^2) x_j^2} - \alpha_k + \lambda \beta_k \leq 0 \quad 1b$$

$$\lambda \sum_{j=1}^n \mu_{dkj} x_j^2 - \sum_{j=1}^n \mu_{ckj} x_j + \phi^{-1}(q_k^{(2)}) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda_k^2 \sigma_{dkj}^2 x_j^2 + \sigma_{ckj}^2) x_j^2} - \alpha_k + \lambda \beta_k \leq 0 \quad 1c$$

$$G_k^\wedge(x_{int}) + \nabla G_k^\wedge(x)^T (x - x_{int}) \leq 0, \quad k = 1, \dots, r ; \quad x \geq 0.$$

l'inégalité 18 peut être écrit sous la forme suivante :

$$G_k^{\wedge(1)} x \leq \alpha_k - \lambda \beta_k ; x \geq 0 ; k = 1, \dots, r$$

Pour les étapes qui suit :

L'inégalité précédent peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$G^{\wedge(1)} x \leq \alpha - \lambda \beta ; x \geq 0 ; \text{ pour } G^{\wedge(1)} \leq \in \mathbb{R}^{k \times n} \text{ et } (\alpha - \lambda \beta) \in \mathbb{R}^k$$

soit

$$T_i^{(1)}(X) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \mu_{i,j} x_j + K q_i \sqrt{\sum_{j=1}^n s_{i,j}^2 x_j^2} - b_i^{(1)} \leq 0, & i = 1, \dots, p; \\ \sum_{j=1}^n \mu_{i,j} x_j + K q_i \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} s_{i,j}^2 x_j^2} - \mu_{b_i^{(1)}} \leq 0, & i = p + 1, \dots, q \end{cases} \quad (4.35)$$

$$T_i^{(2)}(X) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{i,j}^{(1)} x_j - \mu_{b_i^{(1)}} + K p_i s_{b_i^{(1)}}^2 \leq 0 & i = q + 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j}^{(2)} x_j - b_i^{(2)} \leq 0 & i = m + 1, \dots, h; \end{cases} \quad (4.36)$$

ou q linéaire contraintes et $h - q + 1$ non linéaire contraintes représente par $T_i^{(1)}(X), T_i^{(2)}(X)$ respectivement.

on linéarise les contraintes formé des fonctions objectifs ou point X_{int} comme suit :

$$T_i^{(1)}(X_{int}) + \nabla T_i^{(1)}(X - X_{int}) \leq 0; \quad X \geq 0; \quad i = 1, \dots, p, \dots, q.$$

on peut écrire la matrice sous la forme suivant :

$$\begin{aligned} T^{(1)}X &\leq b_{T^{(1)}} \quad X \geq 0; \quad T^{(1)} \in \mathbb{R}^{q \times n} \quad \text{et} \quad b_{T^{(1)}} \in \mathbb{R}^q \\ \text{les } h - q + 1 \text{ contraintes linéaire s'écrit comme suit :} \\ T^{(2)}X &\leq b_{T^{(2)}} \quad X \geq 0; \quad T^{(2)} \in \mathbb{R}^{(h-q+1) \times n} \quad \text{et} \quad b_{T^{(2)}} \in \mathbb{R}^{h-q+1}; \\ \text{on obtient le system suivant :} \end{aligned}$$

$$TX = \begin{bmatrix} T^{(1)} \\ T^{(2)} \end{bmatrix} X \leq b = \begin{bmatrix} b_{T^{(1)}} \\ b_{T^{(2)}} \end{bmatrix} \quad T \in \mathbb{R}^{h \times n} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{R}^{h \times 1};$$

ce qui fait que

$$AX = \begin{bmatrix} \widehat{G}^{(1)} \\ \dots \\ T \end{bmatrix} X \leq b = \begin{bmatrix} \alpha - \lambda\beta \\ \dots \\ b_{T^{(1)}} \\ b_{T^{(2)}} \end{bmatrix}$$

ou $A \in \mathbb{R}^{(k+h) \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^{(k+h) \times 1}$;

Ajoutant les variables d'écart aux k contraintes formé des fonctions objectifs et aux h contraintes

puis multipliant par l'inverse d'une base appropriée et redéfinissant les variables (variables d'écart et variables de décisions) comme x_{NB} et x_B (B variables de base NB variables or base)

on obtient le système suivant :

$$[A_{NB}^{-1}I] = \begin{bmatrix} x^{NB} \\ x^B \end{bmatrix} = \eta, \quad x^{NB}, x^B \geq 0;$$

la matrice A_{NB}^{-1}

Théorème 4.1 [18] Une contrainte régulière ou la contrainte formée d'une fonction objectif, est redondante si et seulement si sa variable d'écart associée s_w a la propriété $s_w = x_f^B$ dans la solution de base, pour laquelle $\gamma_{fj} \leq 0$, $j = 1, \dots, n$ et $\eta_f \geq 0$

Preuve [18] Si dans la solution de base $x_f^{B'} = \eta_f - \sum_{j=1}^n \gamma_{fj} x_j^B$, puisque pour toute solution réalisable de base, la valeur de $x_f^{NB} = 0$. donc la somme est égale à zéro. et par conséquent, $s_w = x_f^B \geq \eta_f \geq 0$. Donc $\widehat{s}_w \geq 0$. Seulement si :

considérons la f i ème ligne du tableau des contraintes formé des fonctions objectif, pour le problème de minimisation $\{s_w(x)/x \in S_w\}$; Alors si $\widehat{s}_w \geq 0$; pour cela dans la solution optimale $\gamma_{fj} \leq 0$ pour tous $j = 1, \dots, n$, avec $\eta_f \geq 0$. Alors cette solution optimale est un point extreme réalisable de S_w . donc c'est une solution de base réalisable pour les contraintes et les contraintes des fonctions objectif.

puisque, dans le théorème ci-dessus une contrainte régulier ou une contrainte formé d'une fonction objectif est fortement redondante si $\eta_f < 0$. et faiblement redondante si $\eta_f = 0$.

4.6.2 Algorithme redondance

[18]

1. construire la matrice des variable de décisions et des variable d'écart des lignes et colonnes correspondantes.

1.1 pour trouver la fonction objectif redondante.

- si $\alpha_k \leq 0$ alors $\theta_{jk} = \frac{(\alpha_k - \lambda\beta_k)}{G_{kj}^{(1)}} : G_{kj}^{(1)} \geq 0; k = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, n;$
- sinon $\theta_{jk} = \frac{(\alpha_k - \lambda\beta_k)}{G_{kj}^{(1)}} : G_{kj}^{(1)} < 0; k = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, n;$

1.2 pour déterminer la contrainte redondante

$$\theta_{ij} = \frac{b_i}{T_{ij}} ; i = 1, \dots, h \quad j = 1, \dots, n;$$

2. détermination de pivot

2.1 pour trouver la fonction objectif redondante ,

- si $\alpha_k \leq 0$ alors $\Psi_j^{obj} = \max_i \{\theta_{ij}\}$
- sinon $\Psi_j^{obj} = \min_i \{\theta_{ij}\}$

pour toute contrainte formé d'une fonction objectif de maximisation et vice-versal.

2.2 pour trouver la contrainte redondante.

- $\Psi_j^{cont} = \max_i \{\theta_{ij} / \theta_{ij} > 0\}$

pour tous j qui ont un objectif de minimisation

- pour tous les j qui ont un objectif de minimisation et la contraint à une borne inférieur , $\Psi_j^{obj} = \min_i \{\theta_{ij} / \theta_{ij} > 0\}$ pour tous les j qui ont un objectif de maximisation et la contraint à une borne supérieure.

3 Faire sortir la ligne et la colonne correspondant aux variables entrant et sortant. Si une colonne a plus d'un maximum / minimum, faire sortir ces les lignes aussi.

4. Les contraintes correspondant aux variables d'écart dans la colonne non marqué, si dans le problème initiale b sont supposés prévu pour être redondant.

5. Enlevez ces formes de contraintes redondantes de fonctions objectifs fractionnaires et des contraintes redondantes provisoirement à partir de modèle initial.

Algorithme générale

1. Convertir les fonctions objectifs stochastique fractionnaires sous forme de contraintes.

2. Transformer les contraintes stochastique, sous leurs forme déterministe

3. Linéariser

3.1 Les contraintes des fonctions objectifs

3.2 Les non linéaire contraintes

4. Appliquer l'algorithme redondance pour identifier les fonctions objectifs redondantes et les contraintes redondantes et pour les ignorer du système

5. Résoudre le problème de programmation fractionnaire stochastique multi-objectifs réduite pour obtenir la solution optimale comme en Charles et Dutta (2001, 2003, 2006b) ou en employant tous les autres solveurs de programmation stochastique tels que SLP-IOR et AMPL .

exemple 1

$$(P_1) \begin{cases} G(x) = \frac{c_{11}x_1^2 + c_{12}x_2^2 + \alpha_1}{d_{11}x_1^2 + d_{12}x_2^2 + \beta_1} + \frac{c_{21}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + \alpha_2}{d_{21}x_1^2 + d_{22}x_2^2 + \beta_2} \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ a_1x_1 + a_2x_2 \leq 5 \\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 = \beta_2 = 1; x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

la troisième contrainte est satisfait à 90% , les moyennes et les variances sont représentées dans le tableau suivant :

variables aléatoire	c_{11}	c_{12}	c_{21}	c_{22}	d_{11}	d_{12}	d_{21}	d_{22}	a_1	a_2
moyenne	6	3	15	10	5	2	1	1	1	3
variance	2	1	1	1	2	1	1	1	1	1

TAB. 4.3 – Les moyennes et les variances de c_{kj} de l'exemple 1

prenons $p_1^{(2)} = 0.10$ et $p_2^{(2)} = 0.90$

les contraintes déterministe des fonctions objectifs fractionnaire sont :

$$\begin{aligned} 6x_1^2 + 3x_2^2 - \lambda_1(5x_1^2 + 2x_2^2 + 1) + 1.28\sqrt{(2\lambda_1^2 + 2)x_1^4 + (\lambda_1^2 + 1)x_2^4} &\geq 0 \\ 15x_1^2 + 10x_2^2 - \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 + 1) - 1.28\sqrt{(\lambda_2^2 + 1)x_1^4 + (\lambda_2^2 + 1)x_2^4} &\geq 0 \end{aligned}$$

soit $\lambda = \min \{1.125, 8.333\} = 1.125$ ou point $(x_1, x_2) = (1, 1)$ de l'équation
donc

$$0.375x_1^2 + 0.750x_2^2 + 1.28\sqrt{4.531x_1^4 + 2.266x_2^4} \geq 1.12513.875x_1^2 + 8.875x_2^2 - 1.28\sqrt{2.266x_1^4 + 2.266x_2^4} \geq 1.125$$

utilisant SLP Charles et Dutta on obtient les contraintes suivantes

$$\begin{aligned} 5.200x_1 + 3.725x_2 &\geq 5.587 \\ 25.025x_1 + 15.026x_2 &\geq 21.121 \end{aligned}$$

la contrainte stochastique équivalent est :

$$2x_1 + 3x_2 + 1.28\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 5$$

utilisant la linéarisation on obtient

$$2.910x_1 + 3.910x_2 \geq 5.010$$

la solution de se système avec les contraintes déterministe est $(x_1, x_2) = (1.718, 0.000)$; $(\lambda_1, \lambda_2) = (1.653, 8.858)$ et la valeur des fonctions objectifs est $[1.124, 11.204]$

la solution en utilisant l'algorithme de redondance est la suivante :

de (Tab 6.2), la contrainte due à la deuxième objectif est fortement redondante par rapport à la première, donc éliminant la 2 fonction objectif et la 2 contrainte de problème, le problème alors se réduit à un problème mono-objectif

$$\begin{cases} \text{Max} 0.90\lambda_1 \\ \text{s.c } 6x_1^2 + 3x_2^2 - \lambda_1(5x_1^2 + 2x_2^2 + 1) + 1.28\sqrt{(2\lambda_1^2 + 2)x_1^4 + (\lambda_1^2 + 1)x_2^4} \geq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 1.28\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 5 \\ x_1, x_2, \lambda_1 \geq 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

la solution obtenu est $x_1 = 1.718; x_2 = 0.000; \lambda_1 = 1.65$; les valeurs correspondantes aux fonctions objectifs sont

$[1.124, 11.204]$.

tableau 2

variable de décision	fonctions	objectif		contraintes			
	s_1	s_2	Ψ_j^{abj}	s_3	s_4	s_5	Ψ_j^{cont}
x_1	1.074	0.845	1.074	5	2	1.722	1.722
x_2	1.500	1.408	1.500	3	5	1.281	1.281

TAB. 4.4 –

exemple 2

$$(P) \begin{cases} \max G(x) = \frac{c_{11}x_1^2 + c_{12}x_2^2 + \alpha_1}{d_{11}x_1^2 + d_{12}x_2^2 + \beta_1} + \frac{c_{21}x_1^2 + c_{212}x_2^2 + \alpha_2}{d_{21}x_1^2 + d_{22}x_2^2 + \beta_2} \\ \text{s.c } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq 1, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, 16x_1 + x_2 \leq 4 \\ \text{teleque } \alpha_1 = 7, \alpha_2 = 2, \beta_1 = 4, \beta_2 = 4; x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

la première contrainte est satisfaite à 90%, la 2 contrainte est satisfait à 80% les moyennes et les variances sont données dans le tableau suivant :

prenons $q_1^{(2)} = 0.10$ et $q_2^{(2)} = 0.90$.

les contraintes équivalents des fonctions objectifs sont

variables aléatoire	c_{11}	c_{12}	c_{21}	c_{22}	d_{11}	d_{12}	d_{21}	d_{22}	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_2
moyennes	1	2	1	1	2	2	2	3	2	1	3	4	3
variances	1	0.5	0	0.5	1	1	1	1	1	1	2	3	2

TAB. 4.5 – Les moyennes et variances de a_{ij} de l'exemple 2

$$\begin{aligned}\lambda_1(2x_1^2 + 2x_2^2 + 4) - x_1^2 - 2x_2^2 - 1.28\sqrt{(\lambda_1^2 + 1)x_1^4 + (\lambda_1^2 + 0.5)x_2^4} &\leq 7 \\ \lambda_2(2x_1^2 + 3x_2^2 + 4) - x_1^2 - x_2^2 - 1.28\sqrt{(\lambda_2^2 + 0)x_1^4 + (\lambda_2^2 + 0.5)x_2^4} &\leq 2\end{aligned}$$

soit $\lambda = \min\{1.250, 0.444\} = 0.444$ au point $(x_1, x_1) = (1, 1)$

$$\begin{aligned}-0.112x_1^2 - 1.112x_2^2 - \sqrt{1.197x_1^4 + 0.697x_2^4} &\leq 5.224, \\ -0.112x_1^2 + 0.332x_2^2 + \sqrt{0.198x_1^4 + 0.697x_2^4} &\leq 0.224,\end{aligned}$$

la linéarisation

$$\begin{aligned}-2.451x_1 - 3.521x_2 &\leq 2.238 \\ 0.309x_1 + 2.550x_2 &\leq 1.653\end{aligned}$$

les contraintes stochastique déterministe

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + 1.645\sqrt{x_1^2 + x_2^2} &\leq 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 0.840\sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2 + 2} &\leq 3\end{aligned}$$

linéarisation

$$\begin{aligned}3.163x_1 + 2.163x_2 &\leq 1 \\ 3.635x_1 + 4.952x_2 &\leq 2.365 \\ 16x_1 + x_2 &\leq 4\end{aligned}$$

la solution est

$(x_1, x_2) = (0.000, 0.462)$; $(\lambda_1, \lambda_2) = (1.545, 0.419)$, les fonctions objectifs correspondants sont $[1.678, 0.477]$.

la solution en utilisant l'algorithme de redondance est la suivante :

de (Tab 6.4), la contrainte due à la deuxième objectif est fortement redondant par rapport ou première, donc éliminant la 2 fonction objectif et la 2 contrainte de problème, le problème alors se réduit à un problème mono-objectif suivant

$$(P_1) \begin{cases} \text{Max } 0.90\lambda_1\lambda_1(2x_1^2 + 2x_2^2 + 4) - x_1^2 - 2x_2^2 - 1.28\sqrt{(\lambda_1^2 + 1)x_1^4 + (\lambda_1^2 + 0.5)x_2^4} \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 + 1.645\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1 \\ 16x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2, \lambda_1 \geq 0 \end{cases}$$

variable de décision	fonctions	objectif		contraintes			
	s_1	s_2	Ψ_j^{abj}	s_3	s_4	s_5	Ψ_j^{cont}
x_1	-0.913	5.350	-0.913	0.316	0.651	0.250	0.250
x_2	-0.636	0.648	-0.636	0.462	0.478	4	0.462

TAB. 4.6 – Les moyennes et variances de a_{ij} de l'exemple 2

la solution obtenu est $x_1 = 0.000$; $x_2 = 0.462$; $\lambda_1 = 1.545$; la valeur correspondante des fonctions objectifs sont $[1.678, 0.477]$.

Conclusion et Perspectives

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés aux problèmes d'optimisation stochastiques fractionnaires linéaires de manière générale, et en particulier le cas d'une somme de fractions de fonctions linéaires, le problème multi-objectif et la redondance dans la programmation stochastique fractionnaire non-linéaire.

L'approche utilisée consiste à transformer le modèle stochastique en un modèle déterministe qu'on résoudra à l'aide des méthodes de programmation linéaire. Ci-dessous, les articles de base utilisés.

V. Charles, D. Dutta, (2003), Bi-Weighted Multi-Objective Stochastic Fractional Programming Problem With Mixed constraints, Proceedings of Second National Conference on Mathematical and Computational Models. Ont introduit une double pondération pour transformer le problème en un problème mono-objectif, avec des contraintes du modèle déterministe non-linéaires.

V.Charle,D.Dutta, Extremization of multi-objective stochastic fractional programming problem, An application to assembled printed circuit board problem, 2006, Oper Res, 143, 297–304. Dans cette article V.Charle,D.Dutta, ont utilisé un algorithme séquentiel pour linéariser les contraintes. Ainsi, le problème déterministe est résolu par la méthode du simplex.

Gupta, A Chance Constrained Approach to Fractional Programming with Random Numerator, Elsevier Scientific 2009. Ou il a utilisé le E-Modèle pour estimer la fonction objectif sous contraintes de chances.

Charnes, A., Cooper, W.W, Programming with linear fractional functions, Naval Research Logistic Quarterly, 9, 181–186, 1962. Ont utilisé le dual pour résoudre le problème.

L'inconvénient de ces méthodes est que les variables aléatoires du modèle sont supposées normale (Gaussienne). Pour contourner cette hypothèse, plusieurs perspectives peuvent être envisagées.

Bibliographie

- [1] M. Abbas, F. Bellahcene, Cutting plane method for multiple objective stochastic integer linear programming, *European Journal of Operational Research* 168, 967–984, (2006).
- [2] N. Baba, A. Morimoto, Stochastic approximations methods for solving the stochastic multi-objective programming problem, *International Journal of Systems Sciences*, 24, 789–796, (1993).
- [3] E.B. Bajalinov, *Linear Fractional Programming : Theory, Methods, Applications and Software*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, (2003).
- [4] C.R. Bector, S. Chandra, M.V. Durgaprasad, Probabilistic linear programming problems with exponential random variables : A technical note, *European Journal Operational Research*, 111 (3), 589–597, (1998).
- [5] F. Ben Abdelaziz, B. Aouni, R.EL. Fayadh, Multiobjective programming for portfolio selection, *European Journal Operational Research* 177(3), 1811–1823, (2007).
- [6] M.P. Biswal, N.P. Li, Duan, Duality in pseudolinear multiobjective Programming, *Asia-Pacific journal of Operational Research*, 5, 134–139, (1988).
- [7] R. Caballero, E. Cerda, M.M. Munoz, L. Rey, I.M. Stancu-Minaian, Efficient solution concepts and their relations in stochastic multi-objective programming, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 110, 53–74, (2001).
- [8] S.S. Chadha, V. Chadha, Linear fractional programming and duality, *Cent. Eur. J. Oper. Res.*, 15, 119–125, (2007).
- [9] D. Chaabane, Contribution à l'optimisation multicritère en variables discrètes, *Faculté Polytechnique de Mons*, (2007).
- [10] A. Charnes, W.W. Cooper, chance-constrained programming, *Manage.Sci* 6, (1), 73–79, (1959).
- [11] A. Charnes, W.W. Cooper, Programming with linear fractional functions, *Naval Research Logistic Quarterly*, 9, 181–186, (1962).
- [12] A. Charnes, W.W. Cooper, P. Kirby, Chance constrained programming : an extension of statistical method in : *Optimizing Method in Statistics*, Academic, New York, 391–402, (1972).
- [13] V. Charle, D. Dutta, A method for solving linear stochastic fractional programming problem with mixed constraints, *Acta Ciencia Indica*, (2004).

- [14] V. Charle, D. Dutta , Non-Linear Stochastic Fractional Programming Model of Financial Derivation, Proceedings of International Conference on Business and Finance, (2004).
- [15] V. Charle, D. Dutta, extremization of multi-objective stochastic fractional programming, Ann Oper Res, 143 :297-304, (2006).
- [16] V. Charle, D. Dutta, Extremization of multi-objective stochastic fractional programming problem, An application to assembled printed circuit board problem, Oper Res, 143, 297–304, (2006).
- [17] V. Charles, D. Dutta, Bi-Weighted Multi-Objective Stochastic Fractional Programming Problem With Mixed constraints, Proceedings of Second National Conference on Mathematical and Computational Models, (2003).
- [18] V. Charles, Uthariaraj, V.R., Natesan, T.R., Sankaranarayanan, V., Algorithms for identification of redundancies in linear programming problems, European Journal of Operational Research, 201, 390–398, (2010).
- [19] E.W. Cheney, A.A. Goldstein, Newton's method of convex programming and tchebycheff approximation, Numerische Mathematik, 1, 253-268, (1959).
- [20] A.D. Concetta, Jr. Goldstein, D. J, A heuristic algorithm for a chance constrained stochastic program, European Journal of Operational Research, 176, 27-47, (2007).
- [21] D. Dutta, J.R. Rao, R.N. Tiwari, A restricted class of multi-objective linear fractional programming problems, European Journal of Operational Research 68, 352-355, (1993).
- [22] H.M. Ehrgott, Multicriteria Optimization, Springer, (2005).
- [23] G. Galante, G. Aiello, M. Enea, E. Panascia, A multi-objective approach to solid waste management, Waste Management, 30(8-9), 1720-1728, (2011).
- [24] S.N. Gupta, A Chance Constrained Approach to Fractional Programming with Random Numerator, Elsevier Scientific, 8, 357-361, (2009) .
- [25] M. Moulai, Optimisation Multi-objectif fractionnaire linéaire en nombres entiers, Faculté des Mathématiques, USTHB, (2002).
- [26] S. Minasian, Bibliography of fractional programming 1960-1976, Preprint Number 3, Department of Economic Cybernetics ASE, Bucharest.
- [27] S. Minasian, St. Tigan, The stochastic linear-fractional max-min problem, University Babes-Bolyai, Cluj-Napoca, Research Seminars, Preprint Number 5, 275-280, (1987)
- [28] P. Siarry, Optimisation Multiobjectif, EDITIONS EYROLLES, Yann Collette, (2002).
- [29] H. Zhu, G.H. Huang , A stochastic linear fractional programming approach for sustainable waste management, Waste Management, 2612-2619, (2011).