

N° d'ORDRE : 13/2008 – M/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIEN »
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle : Mathématiques de Gestion

Par : **GHAZLI Kahina**

**OPTIMISATION CONTINUE
D'UNE FONCTION LINÉAIRE SUR L'ENSEMBLE DES
SOLUTIONS EFFICACES D'UN PROBLÈME LINÉAIRE
STOCHASTIQUE MULTI-OBJECTIFS**

Soutenu le 08 Novembre 2008, devant le jury composé de

Mr. M. AÏDER	Professeur	U.S.T.H.B	Président de jury
Mr. M. MOULAÏ	Maître de conférences	U.S.T.H.B	Directeur de thèse
Mr. D. CHAABANE	Maître de conférences	U.S.T.H.B	Examineur
Mr. M. E-A. CHERGUI	Chargé de cours	U.S.T.H.B	Invité

Résumé

Ce mémoire porte sur la résolution d'un problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème linéaire stochastique multi-objectifs (MOSLP). Ce problème appartient à la classe des problèmes de l'optimisation globale dont un point minimum local peut différer du point minimum global. En effet, cela est dû à l'ensemble réalisable du problème, à savoir l'ensemble des solutions efficaces qui est généralement non convexe. Nous proposons, dans ce travail, une méthode qui génère une solution efficace optimale globale sans énumérer toutes les solutions efficaces du MOSLP. Nous avons adapté le modèle de recours à 2-niveaux pour convertir le MOSLP en un problème multi-objectifs déterministe. Cette méthode combine la méthode d'Ecker et Song et la méthode L-Shaped, elle consiste principalement à déterminer, dans un premier temps, une solution efficace initiale du MOSLP en utilisant une heuristique qui repose sur la méthode L-Shaped conçue pour résoudre les problèmes stochastiques à 2-niveaux avec recours appliquée sur une relaxation du problème principal et sur un programme linéaire qui teste l'efficacité du point retourné et, en second lieu, rechercher une meilleure solution efficace en termes des préférences du décideur, qui sont expliquées par la fonction linéaire que l'on veut maximiser, avec la technique de pivotage d'Ecker et Song. Un exemple illustratif est donné pour décrire la méthode.

Mots clés : *Programmation multi-objectifs, Programmation stochastique, Modèle de recours à 2-niveaux, Optimisation sur l'ensemble des solutions efficaces.*

Remerciements

— Arrivant au terme de ce travail de thèse, je tiens à adresser ma gratitude envers tout ceux qui m'ont aidé et soutenu.

— Je tiens à remercier particulièrement Mr. Mustapha MOULAI, le directeur de cette thèse, pour avoir été présent à tout instant, pour ses commentaires et conseils avisés. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour ses qualités humaines et scientifiques. Je le remercie pour toute sa confiance et la liberté qu'il m'a accordé durant la réalisation de ce travail.

— Je remercie sincèrement Mr. Méziane AÏDER qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être président du jury de ma thèse.

— Je remercie vivement les examinateurs Mr. Djamel CHAABANE et Mr. Mohamed El-Amine CHERGUI, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, en particulier, D. CHAABANE, pour avoir lu de manière approfondie mon manuscrit. Ses précieux conseils m'ont permis d'en améliorer et enrichir le fond.

— Ces remerciements ne seraient pas complets sans y avoir associé mes amis. Je les remercie, pour leur soutien moral, leur présence et leur écoute (la liste est longue et je suis sûre qu'ils vont se reconnaître facilement).

— Je tiens à remercier, particulièrement, Hakim KRIMAT pour m'avoir aussi soutenu. Merci beaucoup d'avoir toujours respecté mes choix.

— Finalement, je réserve une pensée toute particulière et profonde à mes parents, mon frère et mes soeurs et leur exprime ici toute ma gratitude pour leur soutien sans limite.

De manière, plus particulière, mes pensées les plus intimes vont vers ma mère (la voix de la sagesse et de l'amour) a qui je dois beaucoup, sachant que je pourrais jamais te rendre ce que tu m'as donnée.

« Tout ce que je sais, c'est que je ne sais rien. »

— Platon.

TABLE DES MATIÈRES

Liste des tableaux	2
Table des figures	3
Introduction générale	4
1 Programmation Mathématique Multi-objectifs	6
1.1 Problème d'optimisation multi-objectifs	6
1.2 Concepts de base et terminologie	8
1.2.1 Relation de dominance et solutions efficaces	8
1.2.2 Point idéal	9
1.2.3 Point anti-idéal	9
1.2.4 Matrice des gains	10
1.2.5 Point nadir	10
1.2.6 Face	10
1.2.7 Face efficace	11
1.2.8 Convexité	11
1.3 Les grandes approches multicritères	11
1.3.1 Les approches a priori	11
1.3.2 Les approches a posteriori	13
1.3.3 Les approches interactives	13
1.4 Classification des méthodes d'optimisation multi-objectifs	13
1.4.1 Transformation du problème multi-objectifs en uni-objectif	13
1.4.2 Les approches pareto	14

1.4.3	Les approches non pareto	14
1.5	Quelques résultats de base	14
1.6	Optimisation d'une fonction linéaire	15
1.6.1	Notes	16
1.6.2	Résultats fondamentaux	18
1.6.3	Méthode de Yamamoto [YAMAMOTO 02]	20
1.6.4	Méthode d'Ecker et Song [ECKER ET SONG 94]	21
2	Programmation Linéaire Stochastique	35
2.1	Problème de programmation stochastique	35
2.2	Programmation linéaire stochastique avec recours	37
2.2.1	Formulation du problème à 2-niveaux avec recours	37
2.2.2	Types de recours	39
2.2.3	Problèmes à niveaux multiples avec recours	40
2.3	Programmation stochastique avec contraintes probabilistes (l'approche CCP)	40
2.4	Autres techniques de modélisation des PS	41
2.4.1	Approche de la solution large	41
2.4.2	Approche wait-and-see	41
2.4.3	Approche déterministe	41
2.5	Exemple illustratif	42
2.6	Méthode de décomposition L-Shaped [VAN SLYKE ET WETS 69]	49
2.6.1	Test de faisabilité	50
2.6.2	Test d'optimalité	51
2.6.3	Algorithme de la méthode	52
3	Programmation Linéaire Stochastique Multi-objectifs	54
3.1	Formulation du problème linéaire stochastique multicritère	54
3.2	Approches de résolution	55
3.3	Quelques concepts de solutions efficaces	55
3.3.1	Définitions	56
3.4	Optimisation linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces du MOSLP	57
3.4.1	Problème déterministe équivalent du MOSLP	59
3.4.2	Regions de faisabilité	59
3.4.3	Description des grandes étapes de la méthode	60
3.4.4	Formulation de l'algorithme	64

3.4.5 Exemple illustratif	66
Conclusions et perspectives	81
Bibliographie	84

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Structure du tableau associé à \tilde{x}	24
1.2	\mathfrak{T} : Test arête efficace.	25
1.3	Tableau associé au point $x^1 = (0, 1, 0)$	26
1.4	Tableau \mathfrak{T}	27
1.5	Tableau \mathfrak{T}_1	27
1.6	Tableau T_0 associé à \tilde{x}	31
1.7	Tableau \mathfrak{T}_p	31
1.8	Tableau T_1 associé à x^1	32
1.9	Tableau \bar{T}_1	32
1.10	Tableau $\bar{T}_{\tilde{x}}$	33
1.11	Tableau T_2 approprié au point $\tilde{x} = (1, 0)^T$	33
1.12	Tableau \bar{T}_2	33
1.13	Tableau \bar{T}_y	34
2.1	42
3.1	Le tableau associé à la solution optimale $x = (3, 2)$	68
3.2	Le tableau augmenté par $\frac{5}{3}x_2 \geq \frac{11}{3}$	70
3.3	Le tableau associé à la solution $x = (\frac{14}{5}, \frac{11}{5})$	70
3.4	Le tableau associé à l'ajout de la coupe $\theta \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2$	73
3.5	Le tableau optimal associé à l'ajout de la coupe $\theta \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2$	73
3.6	Le tableau augmenté par $-2x_1 - x_2 \geq -\frac{39}{5}$	74
3.7	Le tableau \mathfrak{T}_p approprié à $x = (\frac{14}{5}, \frac{11}{5}) = x^0$	74
3.8	Le tableau correspondant à la solution $x = (0, 5)$	75

3.9	Le tableau augmenté par $-2x_1 - x_2 \geq -5$	77
3.10	Le tableau correspondant à la solution $x = (\frac{7}{5}, \frac{11}{5})$	78
3.11	Le tableau \mathfrak{X}_p associé a la solution efficace $x^2 = (\frac{7}{5}, \frac{11}{5})$	80

TABLE DES FIGURES

1.1	Points caractéristiques d'un problème de maximisation bi-objectif	10
1.2	Espace convexe (à gauche) et non convexe (à droite)	11
1.3	Région d'admissibilité S et l'ensemble, E , des points efficaces du problème (1.20).	26
1.4	Région d'admissibilité S du problème (1.21).	31
2.1	Domaine des solutions réalisables du problème (2.12)	43
2.2	Le plan de production optimal du problème (2.12)	43
2.3	Variation du domaine réalisable avec les demandes.	45
2.4	Variation du domaine réalisable avec les productivités.	46
2.5	Variation du domaine réalisable avec les demandes et les productivités avec certaines solutions wait-and-see.	46
3.1	Region de faisabilité S et la direction de maximisation d	68
3.2	L'ensemble réalisable \tilde{S} induit de l'ajout de la coupe de faisabilité $\frac{5}{3}x_2 \geq \frac{11}{3}$	70
3.3	L'ensemble \tilde{S}_M , réalisable induit de l'ajout de la coupe $-2x_1 - x_2 \geq -5$	77

Introduction générale

LE décideur est, bien souvent, confronté à plusieurs critères de choix qui, sans être nécessairement antagonistes, ne varient pas forcément tous dans le même sens en fonction des décisions envisageables et, en outre, il doit faire face à un certain nombre de facteurs inconnus, ou plus précisément seulement connus statistiquement. Ces situations peuvent être modélisées par des problèmes de programmation linéaire dont les objectifs ainsi que les contraintes dépendent des paramètres incertains.

Lorsque les paramètres inconnus de la situation confrontée sont modélisables par des variables aléatoires, la présence simultanée de ces deux aspects, à savoir, multicritère et stochastique, dans la situation induit à un problème de programmation linéaire stochastique multicritère (MOSLP : **M**ultiple **O**bjectif **S**tochastic **L**inear **P**rogramming).

Rares études qui ont relevé le challenge de résoudre les problèmes MOSLP. La plupart de ces méthodes font recours aux techniques de la programmation multi-objectifs (les méthodes interactives) et de la programmation stochastique. Dans ce contexte, on cite la méthode PROTRADE de Goicoechea et al. [GOICOECHEA ET AL. 76], la méthode STRANGE proposée par Teghem [TEGHEM ET AL. 86] et PROMISE de Urli et Nadeau [URLI ET NADEAU 90] dans le continu et dans le discret, la méthode STRANGE-MOMIX développée par Teghem [TEGHEM 90], la méthode des coupes de Abbas et Bellahcene [ABBAS ET BELLAHCENE 06] et la méthode de Moulaï et Amrouche [MOULAÏ ET AMROUCHE 06].

Cependant, malgré ces efforts, l'énumération explicite de toutes les solutions efficaces du problème MOSLP n'est pas souvent nécessaire dans beaucoup de cas pratiques, où le décideur se trouve face à un grand nombre de solutions efficaces différentes dont une sélection de ses meilleurs compromis s'avère impossible.

L'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces qui est un des

concepts importants et intéressants de la programmation multicritère, est un moyen fructueux pour éviter telles situations avec possibilité d'évaluer toutes les solutions efficaces et les distinguer les unes des autres à travers une fonction linéaire qui résume les préférences du décideur.

Dans ce contexte, et dans le cas déterministe, de nombreuses études ont été élaborées par beaucoup de chercheurs, on cite à titre d'exemple, Philip [PHILIP 72], Ecker et Song [ECKER ET SONG 94], Benson et Sayin [BENSON ET SAYIN 94] et Fülöp [FÜLÖP 94] dans le continu et dans le discret, à notre connaissance, la méthode proposée par Chaabane et Abbas [ABBAS ET CHAABANE 06] et, plus récemment, celle développée par Jorge [JORGE 09]. Bien que le cas stochastique n'a pas connu un tel essor. À notre connaissance, aucune technique n'a été développée dans ce cas.

Dans notre travail, nous proposons une technique qui combine la méthode L-Shaped [VAN SLYKE ET WETS 69] et la méthode d'Ecker et Song [ECKER ET SONG 94] pour résoudre le problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème (MOSLP). Et donc, une complication additionnelle est superposée au problème par l'incorporation de l'aspect stochastique.

Dans la suite, ce mémoire s'organise de la manière suivante :

Dans le chapitre 1 nous rappelons les notions fondamentales liées à la théorie de la décision multicritère, nous donnerons une présentation sommaire des approches de base de la programmation mathématique multicritère et puis, nous présentons l'approche d'Ecker et Song [ECKER ET SONG 94] pour la résolution d'un problème d'optimisation linéaire sur l'ensemble des points efficaces.

Le chapitre 2 fournit les éléments de la programmation linéaire stochastique nécessaires à la compréhension du modèle de recours à deux niveaux, et notamment de l'approche L-Shaped [VAN SLYKE ET WETS 69] qui est un algorithme fondamental qui traite les problèmes linéaires stochastiques à 2-niveaux avec recours et qui est, outre la méthode d'Ecker et Song, un outil de base de la méthode que nous proposons.

Le chapitre 3 est consacré à la méthode que nous proposons après avoir défini quelques notions liées à la programmation stochastique multi-objectif. Cette méthode est illustrée par un exemple.

CHAPITRE 1

Programmation Mathématique

Multi-objectifs

Les problèmes mathématiques à objectifs multiples consistent à optimiser simultanément plusieurs critères non comparables sur un ensemble de solutions réalisables non vide. Le concept de points efficaces joue un rôle crucial dans l'analyse et la résolution de ces problèmes.

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à optimiser une fonction linéaire sur l'ensemble des points efficaces, on cite Philip [PHILIP 72], Isermann [ISERMANN ET STEUER 87], Benson [BENSON 91] et autres

Ce chapitre introductif expose le cadre général de notre travail. Dans un premier lieu, nous rappelons les notions fondamentales liées aux problèmes d'optimisation multi-objectifs, nous donnons une présentation sommaire des approches de résolution de base. Ensuite, nous présentons une description détaillée de l'approche d'Ecker et Song [ECKER ET SONG 94] pour la résolution d'un problème d'optimisation linéaire sur l'ensemble des points efficaces d'un problème multi-objectifs.

La plupart des éléments généraux de la programmation mathématique multicritère présentés dans ce chapitre ont été décrits dans de nombreux ouvrages (citons à titre d'exemple l'ouvrage de Steuer [STEUER 86] ou encore de P. Vincke [VINCKE 89]).

1.1 Problème d'optimisation multi-objectifs

Un problème multi-objectifs ou multicritère peut être défini comme un problème de décision en présence de critères multiples et souvent conflictuels. Ces problèmes consistent à optimiser p

critères simultanément ($p \geq 2$) qui sont des fonctions à valeurs réelles explicites des variables de décision. Le domaine sur lequel les alternatives admissibles prennent leurs valeurs est continu.

Ce problème est défini généralement par :

$$\begin{aligned} \text{“Optimiser”} \quad & f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{s.à.} \quad & x \in S \end{aligned} \tag{1.1}$$

x , est caractérisée par un vecteur de \mathbb{R}^n ($x = (x_1, \dots, x_n)$),

S , l'espace de décision, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}$,

f_k ($k = 1, \dots, p$), et g_j ($j = 1, \dots, m$), des fonctions à valeurs réelles du vecteur de décision x .

Dans ce travail, nous nous intéressons au problème de programmation linéaire multi-objectifs (MOLP : **M**ultiple **O**bjective **L**inear **P**rogramming) que l'on définit lorsque les p critères et les contraintes dépendent linéairement de x :

$$\begin{aligned} \text{“Optimiser”} \quad & Z_k(x) = C_k x \quad k = 1, \dots, p \\ \text{s.à.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Où

C_k une matrice de dimension $(1 \times n)$.

S un polyèdre convexe de \mathbb{R}^n , défini par $S = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, avec A , x et b sont des matrices de dimensions $(m \times n)$, $(n \times 1)$ et $(m \times 1)$.

Notations

Dans la suite de ce travail, nous conservons les notations suivantes :

- toute optimisation se rapporte à une maximisation, sans perte de généralité,
- p , le nombre de critères, $p \geq 2$,
- x , le vecteur des variables de décision,
- $Z_k(\cdot)$, le k -ème critère, $Z_k : S \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $k = 1 \dots p$,
- $Z(\cdot)$, le vecteur des fonctions critères,
- S , l'ensemble des solutions qui décrivent les décisions possibles, espace de décision, $S \subseteq \mathbb{R}^n$,
- Y , espace des critères (l'ensemble des images des x appartenant à S), $Y \subseteq \mathbb{R}^p$.

Nous utilisons la notation $Z(x) \geq Z(y)$ comme abréviation de $Z_k(x) \geq Z_k(y)$ pour tout $k = 1 \dots p$.

Le problème (1.2) peut être reformulé, d'une manière équivalente, comme suit :

$$\begin{aligned} \text{“max”} \quad & Z(x) = (Z_1(x), \dots, Z_p(x)) \\ \text{s.à.} \quad & x \in S \end{aligned} \tag{1.3}$$

Par la suite, nous allons voir que ces problèmes ont en général plusieurs solutions car la définition d'un optimum ne peut être établie dans le cas de problèmes multi-objectifs.

Problématique

La difficulté de ces problèmes vient du fait que, contrairement aux problèmes mono-objectifs, il n'existe plus de relation d'ordre entre toutes les solutions admissibles (un problème de rangement n'aura pas une solution objective) et donc plus de notion d'optimalité (à moins qu'une solution soit optimale pour toutes les fonctions objectifs, ce qui est rarement le cas). Dans le cas des problèmes multi-objectifs, elles sont remplacées par les notions de dominance et de Pareto optimalité (efficacité).

Résoudre un problème multicritère consiste à aider le décideur à maîtriser les données (souvent complexes) de son problème et de progresser vers une solution. Celle-ci est souvent appelée solution du *meilleur compromis*.

1.2 Concepts de base et terminologie

Dans cette partie, nous rappelons brièvement les concepts fondamentaux de la programmation linéaire multi-objectifs.

1.2.1 Relation de dominance et solutions efficaces

Définition 1.2.1 (Dominance). Soient deux vecteurs critères $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^p$. On dit que Z_1 domine Z_2 si et seulement si $Z_1 \geq Z_2$ et $Z_1 \neq Z_2$ (ie : $z_1^i \geq z_2^i$ pour tout $i, i = 1 \dots p$, et $z_1^i > z_2^i$ pour au moins un i).

Définition 1.2.2 (Dominance forte). Soient deux vecteurs critères $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^p$. On dit que Z_1 domine fortement Z_2 si et seulement si $z_1^i > z_2^i, \forall i, i = 1 \dots p$.

Si Z_1 domine fortement Z_2 , alors Z_1 est meilleur que Z_2 sur tous les critères.

Définition 1.2.3 (Efficacité). Une solution x^* est une solution efficace du problème (1.2) s'il n'existe pas de $x \in S$ tel que $Z(x)$ domine $Z(x^*)$.

Un point est efficace si son image dans l'espace des critères est un vecteur critère non dominé. Cela signifie que tout gain sur un critère entraîne nécessairement une perte sur au moins un autre.

Définition 1.2.4 (Efficacité faible). Une solution x^* est une solution faiblement efficace du problème (1.2) s'il n'existe pas de $x \in S$ telle que $Z(x) > Z(x^*)$.

Une solution est faiblement efficace si son vecteur critère n'est pas fortement dominé.

Définition 1.2.5 (Efficacité forte). Une solution x^* est une solution fortement efficace du problème (1.2) s'il n'existe pas de $x \in S$ telle que $x \neq x^*$ et $Z(x) \geq Z(x^*)$.

Une solution x est fortement efficace s'il n'existe pas une autre solution telle que le vecteur critère, qui lui est associé, soit aussi bon que celui de x .

Nous ne parlerons donc plus de solution optimale, mais d'un *ensemble de solutions efficaces*. L'ensemble des solutions efficaces du problème (1.2) est noté E . La projection dans l'espace des objectifs de cet ensemble E décrit une frontière communément appelée *frontière efficace*.

En outre, deux points caractéristiques ne correspondant généralement à aucune solution admissible sont aussi souvent utilisés, à savoir, *le point idéal* et *le point nadir*. Ces deux points correspondent, respectivement, à la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble des solutions non dominées (la frontière efficace). Ils sont souvent utilisés comme points de références dans la plupart des méthodes interactives dont leur but est de trouver le meilleur compromis ou bien certaines solutions préférées pour le décideur.

1.2.2 Point idéal

Définition 1.2.6. Le point idéal est, dans \mathbb{R}^p , le point de coordonnées (Z_1^I, \dots, Z_p^I) , avec

$$Z_k^I = \max_{x \in S} Z_k(x), \quad k = 1 \dots p.$$

On notera par X_k^I l'ensemble des points x_k^I qui maximisent Z_k .

1.2.3 Point anti-idéal

Définition 1.2.7. Le point anti-idéal est, dans \mathbb{R}^p , le point de coordonnées $(Z_1^{AI}, \dots, Z_p^{AI})$, avec

$$Z_k^{AI} = \min_{x \in S} Z_k(x), \quad k = 1 \dots p.$$

1.2.4 Matrice des gains

Définition 1.2.8. Nous appelons matrice des gains G , une matrice de dimension $p \times p$ dont les colonnes représentent les performances de p points x_1^I, \dots, x_p^I suivant tout les critères.

$$G_{ij} = Z_i(x_j^I), \quad i, j = 1, \dots, p.$$

En particulier,

$$G_u = Z_u^I.$$

Remarquons que la matrice des gains n'est unique que si chaque critère atteint son maximum en un seul point.

1.2.5 Point nadir

Définition 1.2.9. Le point nadir est, dans \mathbb{R}^p , le point de coordonnées (Z_1^N, \dots, Z_p^N) , avec

$$Z_k^N = \min_j Z_k(x_j^I) = \min_{x \in E} Z_k(x), \quad k = 1 \dots p.$$

La figure (FIG. 1.1) illustre ces différents points caractéristiques dans l'espace des objectifs sur un exemple d'un problème de maximisation à deux objectifs.

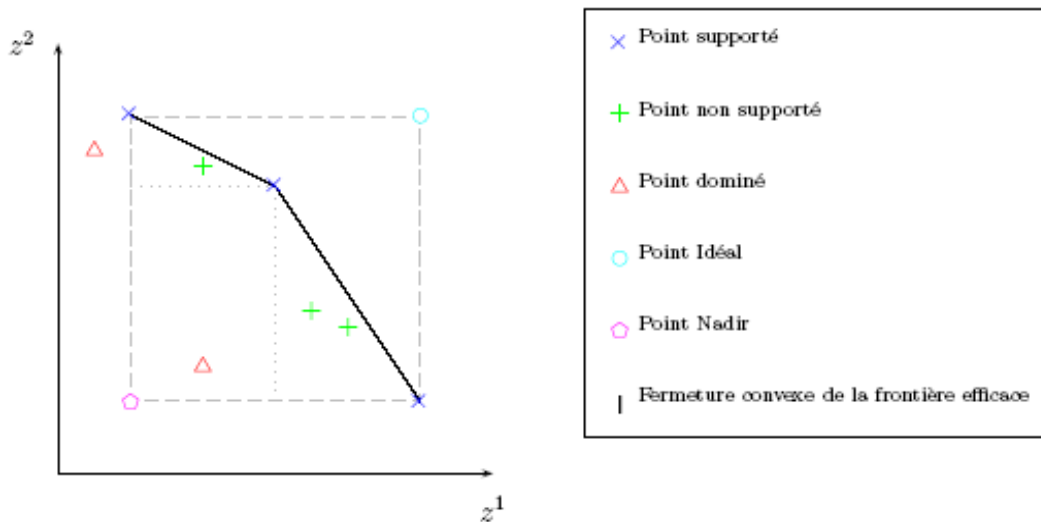


FIG. 1.1 – Points caractéristiques d'un problème de maximisation bi-objectif

1.2.6 Face

Définition 1.2.10. Soit S un polyèdre, soit H un hyperplan, $H = \{x \mid d^T x = \alpha\}$.

Soit F , un sous ensemble non vide de S tel que $F = S \cap H$.

F est une face de S , alors

$$\forall x \in S : d^T x \leq \alpha.$$

1.2.7 Face efficace

Définition 1.2.11. Une face F de S est dite efficace, si tout $x \in F$ est efficace.

1.2.8 Convexité

Définition 1.2.12. L'ensemble χ est dit convexe si tout segment joignant deux points quelconques de χ est inclus dans χ .

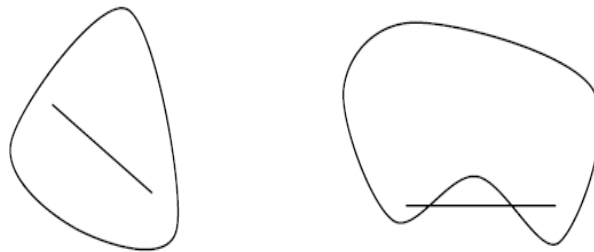


FIG. 1.2 – Espace convexe (à gauche) et non convexe (à droite)

La convexité est le premier indicateur de la difficulté du problème. En effet, certaines méthodes sont dans l'incapacité de résoudre des problèmes non convexes de manière optimale.

1.3 Les grandes approches multicritères

Dans la cas général, la résolution de problèmes d'optimisation multicritères qui vise à établir un compromis entre plusieurs critères, met en oeuvre des mécanismes d'optimisation ainsi que des mécanismes de prise de décision dans lesquels intervient un décideur humain.

Le domaine de prise de décision distingue à cet égard trois schémas possibles de combinaison de ces deux mécanismes complémentaires qui correspondent à des situations et des problématiques différentes [VINCKE 89], [TALBI 99] :

1.3.1 Les approches a priori

Dans lesquelles le décideur intervient en amont du processus d'optimisation, pour définir la fonction d'agrégation des différents critères. Dans ce type de méthodes, le problème de résolution du problème multi-objectifs est ramenée à la résolution d'un problème mono-objectif.

Tout décideur essaye implicitement de maximiser une fonction, appelée une fonction d'utilité ou d'agrégation,

$$u = u(Z_1 \dots Z_p)$$

$u : \mathbb{R}^p \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^p : \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1, \lambda_k > 0\}$, qui agrège tout les points de vue à prendre en compte en leur attribuant d'éventuels poids λ_k qui caractérisent l'importance relative des p critères, fixés a priori. Pour cela il faut que tous les objectifs représentent des grandeurs d'unités comparables.

Le problème multicritère (1.2) est donc remplacé par un problème unicritère dont la fonction économique est la fonction d'utilité :

$$\begin{aligned} \max \quad & u(Z, \lambda), \\ & Z \in Y. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Le modèle le plus couramment utilisé est le *modèle additif*

$$u(Z, \lambda) = \sum_{i=1}^p u_i(Z_i, \lambda_i),$$

avec u_i fonction de mise à l'échelle du critère i .

Quelques formes analytiques de u

Les fonctions d'utilités les plus employées sont :

– somme pondérée des objectifs (particulièrement utilisée dans le cas linéaire) :

$$u_1(Z, \lambda) = \sum_{i=1}^p \lambda_k Z_k, \quad \lambda \in \Lambda,$$

ou bien,

$$u_2(Z, \lambda) = \sum_{i=1}^p \lambda_k |Z_k - Z^I|, \quad \lambda \in \Lambda,$$

– norme L_p pondérée :

$$u_3(Z, \lambda) = \left(\sum_{i=1}^p \lambda_k |Z_k - Z^I|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \lambda \in \Lambda, \quad p \in \mathbb{Z}_0^+,$$

– norme L_∞ pondérée de Tchebychev :

$$u_4(Z, \lambda) = \max_{1 \leq k \leq p} \left\{ \lambda_k |Z_k - Z^{ref}| \right\}, \quad \lambda \in \Lambda,$$

– norme pondérée augmentée de Tchebychev :

$$u_5(Z, \lambda) = \max_{1 \leq k \leq p} \left\{ \lambda_k |Z_k - Z^{ref}| \right\} + \rho \sum_{i=1}^p \lambda_k |Z_k - Z^{ref}|, \quad \rho > 0, \quad \lambda \in \Lambda,$$

$Z^{ref} = (Z_1^{ref}, \dots, Z_p^{ref})$ les buts qu'on désire atteindre pour chaque objectif (valeurs cibles).

Il est à noter que cette technique suppose en outre que les jugements soient transitifs, d'où l'appellation *agrégation complète transitive* [ROY 85]. D'autres [VANDERPOOTEN ET VINCKE 89] l'appellent encore *Optimisation paramétrique avec articulation a posteriori des préférences*.

1.3.2 Les approches a posteriori

Elles font intervenir le décideur en aval du processus d'optimisation, en lui présentant toute les solutions efficaces sur lesquelles il exerce son choix final.

Le lecteur désirant connaître toutes les méthodes de cette approche se référera à la synthèse de Siskos et al. [SISKOS ET AL. 83] (167 références).

1.3.3 Les approches interactives

Une méthode interactive consiste en une alternance d'étapes de calculs par l'analyste ou l'ordinateur et d'étapes de dialogue avec le décideur.

La première étape de calculs fournit une ou plusieurs solutions de compromis. Celles-ci sont présentées au décideur qui réagit en apportant des informations supplémentaires sur ses préférences. Cette information est injectée dans le modèle utilisé et permet de construire de nouvelles solutions de compromis.

Le processus s'arrête évidemment lorsque le décideur se montre satisfait ou bien par une condition d'arrêt que l'analyste se fixe.

Le lecteur désireux d'approfondir ses connaissances sur cette approche trouvera une mine d'informations dans [STEUER 86].

1.4 Classification des méthodes d'optimisation multi-objectifs

En se basant sur ces trois schémas possibles de coopération entre solveur du problème et décideur final, les approches utilisées pour la résolution des problèmes multi-objectifs peuvent être classées en trois catégories [TALBI 99] :

1.4.1 Transformation du problème multi-objectifs en uni-objectif

Consiste à combiner les divers critères en les pondérant. Ces méthodes sont de type a priori. Dans cette catégorie, nous citons les méthodes d'agrégation, ϵ -contrainte et la programmation par but (goal programming).

1.4.2 Les approches pareto

Les approches pareto utilisent la notion de dominance, elles visent à atteindre deux buts : d'une part converger vers la frontière pareto (efficace) et d'autre part obtenir des solutions diversifiées (réparties sur toute cette frontière).

Ces approches appartiennent également aux approches dite a posteriori.

1.4.3 Les approches non pareto

Elles traitent séparément les différents critères non commensurables, elles utilisent directement la notion de non dominance dans leur processus de recherche. Il s'agit principalement d'approches de type a posteriori.

Nous citons les algorithmes génétiques à sélection parallèle, à sélection lexicographique.

1.5 Quelques résultats de base

Pour tester l'efficacité en un point $x \in S$, Steuer (voir [STEUER 86]) a introduit le concept d'ensembles dominants au sens de la définition suivante :

Définition 1.5.1 (Cône dominant). Soit V la région semi-positive du cône généré par les gradients des p fonctions objectif du problème (1.2), tel que,

$$V = \{\pi \in \mathbb{R}^n \mid C\pi \geq 0\} \cup \{0\}. \quad (1.5)$$

On appelle V le Cône dominant.

Le théorème suivant montre l'importance de la notion du cône dominant dans la caractérisation des points efficaces.

Théorème 1.5.1 ([ECKER ET SONG 94]). $x^0 \in E$ si et seulement s'il n'existe pas une direction réalisable dominante non nulle π dans S au point x^0 .

Le théorème (1.5.1) fournit un test permettant de détecter les points efficaces et pouvant être géométriquement visualisé (dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3) : si l'intersection du cône dominant au point x^0 avec la région réalisable contient seulement x^0 , alors x^0 est efficace, cependant, s'il existe d'autres points appartenant à l'intersection de ces deux ensembles, alors x^0 est efficace.

À travers les résultats présentés ci-dessous, nous caractérisons l'ensemble des solutions efficaces en termes des solutions d'un programme pondéré (problème d'optimisation paramétrique). Cette technique est souvent utilisée pour résoudre les problèmes multicritères à deux objectifs et cela devient complexe ou impossible une fois le nombre d'objectifs est assez grand.

Théorème 1.5.2 (Geoffrion : cf. [GEOFFRION 68]).

Si x^* est une solution optimale du problème mono-objectif

$$(P_\lambda) \quad \max \quad \lambda^T Cx \quad (1.6)$$

$$s.\dot{a}. \quad x \in S$$

pour un certain $\lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^p : \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1, \lambda_k > 0\}$, alors x^* est une solution efficace du problème linéaire multicritère (1.2).

La réciproque du théorème (1.5.2) n'est vérifiée que sous certaines hypothèses de convexité de l'espace des critères.

Les solutions efficaces générées par résolution du problème mono-objectif (P_λ) , sont dites *solutions efficaces supportées* du problème (1.2).

Certaines solutions efficaces du problème (1.2) ne sont pas des solutions optimales du problème (P_λ) pour aucun λ , elles sont dites *solutions efficaces non-supportées* du problème (1.2) (voir FIG. 1.1).

Théorème 1.5.3 (Bowman : cf. [VINCKE 89]).

Soit le problème :

$$\max_{Z \in F} u_4(Z, \lambda), \quad \lambda \in \Lambda \quad (1.7)$$

x^* est efficace si et seulement si x^* est une solution optimale unique du problème paramétrique (1.7), dans la cas où x^* n'est pas unique, l'une au moins des solutions optimales est efficace.

Théorème 1.5.4 (cf. [VINCKE 89]).

Soit le problème :

$$\max_{Z \in F} u_5(Z, \lambda), \quad \lambda \in \Lambda \quad (1.8)$$

x^* est efficace si et seulement si x^* est une solution optimale du problème paramétrique (1.8).

1.6 Optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème linéaire multicritère

Dans certains cas pratiques, il est plus utile au décideur de pouvoir sélectionner un petit sous ensemble de solutions efficaces jugées préférées, à partir d'un ensemble très large de solutions (il n'est pas nécessaire de disposer de toutes les solutions efficaces), sans énumérer et examiner toutes les solutions de cet ensemble. Par conséquent, une procédure d'identification de ces solutions préférées est nécessaire.

Plusieurs chercheurs, citons en particulier, Philip [PHILIP 72], Ecker et Song [ECKER ET SONG 94], Benson et Sayin [BENSON ET SAYIN 94] et Fülöp [FÜLÖP 94], motivés par de nombreuses applications, se sont intéressés à l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème linéaire multicritère. Ce problème répond à certaines difficultés de l'usage de la programmation linéaire multi-objectifs dans certains problèmes de décision.

Le problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un MOLP peut être défini mathématiquement comme suit :

$$(P) \quad \begin{aligned} \max \quad & \phi(x) = d^T x \\ \text{s.à.} \quad & x \in E \end{aligned} \tag{1.9}$$

où

d un vecteur de dimension $(1 \times n)$ ($d \in \mathbb{R}^n$).

$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction linéaire continue à maximiser.

La difficulté de ce problème réside dans le fait que l'ensemble des solutions efficaces, constitué de l'union de certaines faces du polyèdre S , est en général non convexe, par conséquent, le problème (P) appartient à la classe des problèmes d'*optimisation globale* (programmation non convexe) dont un point optimal local peut être différent du point optimal global.

Dans la littérature, il existe une diversité de méthodes pour la résolution et l'analyse des problèmes d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble E . Yamamoto propose dans [YAMAMOTO 02] une classification, de ces algorithmes, qui contient plusieurs groupes différents, à savoir, algorithmes de recherche du sommet adjacent, algorithmes de recherche du sommet non adjacent, algorithmes basés sur Branch and bound, algorithmes basés sur la relaxation lagrangienne, approche duale et algorithmes de bisection.

1.6.1 Notes

Le problème (P) a été étudié pour la première fois par Philip [PHILIP 72] en 1972, qui a élaboré un algorithme basé sur le déplacement sur les sommets efficaces en améliorant la fonction objectif. Une coupe hyperplane est ajoutée à S chaque fois qu'un point optimal local est rencontré. Quelques années plus tard, Isermann et Steuer [ISERMANN ET STEUER 87], ont développé une procédure similaire pour un problème de minimisation d'une fonction objectif $C_i x$ du MOLP sur l'ensemble des solutions efficaces du MOLP. Ces deux algorithmes nécessitent

l'exploration de tout les points efficaces sur la face correspondante à la coupe hyperplane dans l'ensemble réduit mais d'après Benson [BENSON ET SAYIN 94] aucune de ces procédures n'a expliqué, théoriquement, comment trouver tout ces points.

Benson était le premier à étudier théoriquement le problème (voir [BENSON ET SAYIN 94]) et considérer ses aspects d'implémentation.

Le cas d'une fonction, ϕ , quasi convexe a été considéré par Bolintineanu [BOLINTINEANU 93] et Yamamoto [YAMAMOTO 02].

Ecker et Song ont proposé dans [ECKER ET SONG 94] deux algorithmes détaillés basés sur l'approche de Phillip.

Ces auteurs ont décrit des procédures qui utilisent une technique de recherche locale basée sur la méthode du simplexe et les coupes hyperplanes pour éviter les points optimaux locaux.

En plus de l'étude théorique de la structure du problème, Benson a proposé plusieurs méthodes implémentables. Dans [BENSON 91] et [BENSON 92] deux algorithmes de relaxation pour le problème (P) ont été suggéré.

Sayin a proposé dans [SAYIN 00] un algorithme basé sur l'approche Branch and Bound qui effectue une recherche en profondeur des faces efficaces du MOLP.

Plus récemment (2005), Jorge a proposé dans [JORGE 05] un algorithme qui consiste à résoudre à chaque itération un programme à variables bivalentes et autre à variables réelles. Cet algorithme est indépendant de toute restriction sur l'ensemble E des points efficaces : E n'est pas nécessairement borné.

Le problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces entières à été considéré, à notre connaissance, par Abbas et Chaabane dans [ABBAS ET CHAABANE 06] et Jorge [JORGE 09].

Certains auteurs ont montré que le problème (P) peut être écrit sous forme d'un programme linéaire avec une contrainte non linéaire additionnelle. Les techniques de programmation non linéaire sont ainsi applicables pour résoudre (P). À titre d'exemple, White dans [WHITE 96] a incorporé la contrainte non linéaire en introduisant un paramètre de pénalité (approche de la fonction pénalité).

Due à la difficulté du problème, quelques heuristiques ont été aussi proposé, qui génèrent une solution approximative de la solution optimale (voir à titre d'exemple [BENSON ET SAYIN 93]).

Nous présentons, dans cette section, la méthode de Yamamoto [YAMAMOTO 02] et d'une manière plus détaillée, la méthode développée par Ecker et Song [ECKER ET SONG 94] de laquelle est inspiré notre algorithme.

Nous introduisons, en premier lieu, quelques résultats de base liés à l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un MOLP.

1.6.2 Résultats fondamentaux

On adopte les notations suivantes :

\mathbb{R}^p dénote l'ensemble des vecteurs colonnes réels de dimension p .

$\mathbb{R}_+^p = \{x \in \mathbb{R}^p \mid x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_{++}^p = \{x \in \mathbb{R}^p \mid x > 0\}$.

\mathbb{R}_-^p et \mathbb{R}_{--}^p sont définis de la même manière (à la place de \geq , on a le symbole $<$).

\mathbb{R}_p dénote l'ensemble des vecteurs lignes réels de dimension p .

Par analogie, on définit \mathbb{R}_{p+} , \mathbb{R}_{p++} , \mathbb{R}_{p-} et \mathbb{R}_{p--} .

e désignera un vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1.

Définition 1.6.1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}_{p++}$ et $x \in S$, la fonction concave

$$g_\lambda(x) = \max\{\lambda Cx \mid x \in S; Cx \geq Cx\} - \lambda Cx$$

est dite *fonction lacune* (*gap function*). Pour $\lambda = e \in \mathbb{R}_p$, g_λ est notée g .

Une des plus importantes approches de l'optimisation sur l'ensemble des solutions efficaces est basée sur l'utilisation de la fonction lacune pour représenter les points efficaces. Dans [HORST ET AL. 07], Horst et al. ont développé une technique pour construire une fonction lacune, g_λ , finie, définie dans \mathbb{R}^n qui peut être utilisée pour caractériser les solutions efficaces du MOLP à travers une contrainte additionnelle de la forme $g_\lambda(x) \leq 0$, appelée *contrainte convexe inverse* (*reverse convex constraint*). Ainsi, le problème (P) est ramené à un *problème de programmation convexe inverse* (*reverse convex programming problem*) qui est étudié dans le cadre de l'optimisation globale.

Autres caractérisations de l'ensemble des solutions efficaces sont établies par le théorème suivant :

Théorème 1.6.1 ([YAMAMOTO 02]).

$$\begin{aligned} E &= \{x \mid x \in S; \exists \lambda \in \mathbb{R}_{p++} \text{ tel que } \lambda Cx \geq \lambda Cx \text{ pour } \forall x \in S\} \\ &= \{x \mid x \in S; \nexists x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } Cx \geq 0; Cx \neq 0; Ax = 0; x_i \geq 0 \text{ pour } i \text{ avec } x_i = 0\} \\ &= \{x \mid x \in S; \exists (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}_{p++} \times \mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_{n+} \text{ tel que } \lambda C - \mu A + \nu = 0; \nu x = 0\} \\ &= \{x \mid x \in S; \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_{p++} \times \mathbb{R}_m \text{ tel que } \lambda C - \mu A \leq 0; \lambda Cx - \mu b = 0\} \\ &= \{x \mid x \in S; g_\lambda(x) = 0\}. \end{aligned}$$

De plus, il existe $M > 0$ tel que \mathbb{R}_{p++} peut être remplacé par un simplexe de dimension $p-1$ défini par : $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}_{p+} \mid \lambda > e; \lambda e = M\}$.

Nous invitons le lecteur à consulter le survey de Yamamoto [YAMAMOTO 02] pour la démonstration de l'équivalence des ces caractérisations.

Déterminer un point efficace initial est crucial pour la plupart des techniques de recherche de toutes les solutions efficaces. Les trois premiers résultats présentés ci dessous établissent une simple technique pour déterminer un point efficace initial, ou encore, montrer que cet ensemble de solutions efficaces, E , est vide.

Théorème 1.6.2 ([ISERMANN 74]). *Étant un point réalisable arbitraire $x^* \in S$, soit (P_{x^*}) le problème linéaire*

$$\begin{aligned} (P_{x^*}) \quad & \max e^T s \\ & \text{s.à. } Cx = Is + Cx^*, \\ & x \in S, \\ & s \geq 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

avec $e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^p$ et I une matrice d'identité de dimension $(p \times p)$.

$x^* \in E$ si et seulement si la valeur optimale de la fonction objectif du problème linéaire (P_{x^*}) est nulle.

Le problème (P_{x^*}) est souvent utilisé pour tester l'efficacité d'un point donné. Le théorème suivant, montre que (P_{x^*}) peut être aussi utilisé pour générer un point efficace même si le point x^* ne l'est pas.

Théorème 1.6.3 ([ECKER ET KOUADA 75]). *Si (P_{x^*}) possède une valeur maximale finie non nulle atteinte en un point w , alors w est efficace.*

Théorème 1.6.4 ([ECKER ET KOUADA 75]). *Si (P_{x^*}) n'admet pas une solution optimale finie, alors l'ensemble, E , des solutions efficaces est vide.*

Le théorème suivant établit un autre résultat très important sur lequel sont basées les techniques de recherche du sommet adjacent et qui sont basées sur le simplexe. Pour la preuve voir [STEUER 86], [NACCACHE 78].

Théorème 1.6.5 ([YAMAMOTO 02]). *L'ensemble des solutions efficaces, E , d'un problème linéaire multi-objectifs est connexe. Toute paire de sommets efficaces sont reliés par un chemin formé d'arêtes efficaces, une arête efficace est une arête de S contenue dans E .*

Ce théorème implique la possibilité d'atteindre n'importe quel point efficace à partir de n'importe quel point efficace fixé par une série d'opérations de pivotage.

Rappelons que les méthodes proposées par Phillip [PHILIP 72], Ecker et Song [ECKER ET SONG 94] et Fülöp [FÜLÖP 94] dans le cas d'une fonction ϕ linéaire convexe et celles proposées par Bolintineanu [BOLINTINEANU 93] et Yamamoto [YAMAMOTO 02] pour une fonction ϕ quasi-convexe, sont basées, principalement, sur deux étapes :

1. à partir d'un sommet efficace du polyèdre, S , se déplacer vers un sommet efficace voisin, à travers une *arête efficace*, en améliorant la fonction objectif $\phi(x)$,
2. à un point optimal local rencontré, appliquer une coupe hyperplane dans S pour éliminer l'ensemble des points dont ϕ prend des valeurs inférieures à la valeur courante de la fonction objectif et chercher une meilleure solution efficace dans l'ensemble réduit.

1.6.3 Méthode de Yamamoto [Yamamoto 02]

Soit S_V , l'ensemble des points extrêmes (sommets) de S . Soit $x \in E$, N_E est l'ensemble des points efficaces extrêmes \acute{x} , adjacents à x par une arête efficace représentée par (x, \acute{x}) ,

$$N_E(x) = \{\acute{x} \mid \acute{x} \in E \cap S_V; (x, \acute{x}) \subseteq E\}.$$

En utilisant la quasi-convexité de ϕ , on a le lemme suivant qui établit une caractérisation des points optimaux locaux du problème (P) .

Lemme 1.6.6 ([YAMAMOTO 02]). *Soit $x \in E \cap S_V$ et $\{\acute{x} \mid \acute{x} \in N_E; \phi(\acute{x}) > \phi(x)\} = \emptyset$. Alors x est un optimal local pour le problème (P) .*

Soient $H_+^k = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n; ax \geq \alpha\}$ et $H_-^k = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n; ax \leq \alpha\}$, les demi-espaces déterminés par l'hyperplan $H = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n; ax = \alpha\}$. H_{++}^k et H_{--}^k sont leurs intérieurs respectivement.

Algorithme de Yoshitsugu Yamamoto.

⟨Étape 1⟩ (Initialisation)

Poser $\ell = k = 0$, $S^0 = S$. Trouver un point efficace initial $x^0 \in S_V \cap E$.

Si $N_E(x^0) = \emptyset$, alors, terminer avec x^0 la solution optimale de (P) .

Sinon aller à l'étape ℓ .

⟨Étape ℓ ⟩

Si $\{x \mid x \in N_E(x^\ell); \phi(x) > \phi(x^\ell)\} \neq \emptyset$, choisir un $x^{\ell+1}$ dans cet ensemble. Poser $\ell = \ell + 1$ et

aller à l'étape ℓ .

Sinon, soit $L^\ell = \{x \mid \phi(x) \leq \phi(x^\ell)\}$ et aller à l'étape k .

⟨Étape k ⟩

k1. Trouver $v^k \in \arg \max\{\phi(x) \mid x \in S^k\}$. Si $\phi(x^\ell) \geq \phi(v^k) - \epsilon$ pour un $\epsilon > 0$, alors terminer avec x^ℓ une ϵ -approximation de la solution optimale du problème (P) .

Sinon, aller à l'étape $k2$.

k2. Trouver un hyperplan support H^k de L^ℓ tel que $L^\ell \subseteq H_+^k$ et $v^k \in H_{--}^k$.

k3. S'il existe une arête efficace (\acute{u}, \acute{u}) telle que $(\acute{u}, \acute{u}) \cap H^k \neq \emptyset$ et $\max\{\phi(\acute{u}), \phi(\acute{u})\} > \phi(x^\ell)$, alors, soit $x^{\ell+1}$, l'un des points efficaces \acute{u} et \acute{u} donnant une meilleure valeur de la fonction objectif ϕ , la nouvelle solution efficace courante. Poser $\ell = \ell + 1$ et aller à la boucle ℓ .

Sinon, aller à l'étape $k4$.

k4. Poser $S^{k+1} = S^k \cap H_+^k$. Aller à la boucle k .

Cet algorithme génère une séquence de solutions efficaces x^0, x^1, \dots et de polytopes S^0, S^1, \dots telles que $\phi(x^0) < \phi(x^1) < \dots$ et $S^0 \supseteq S^1 \supseteq \dots$. La solution optimale du problème (P) fournie par l'algorithme n'est pas nécessairement exacte, la qualité de cette solution dépend du choix du paramètre de tolérance ϵ .

Par rapport à cette méthode, Ecker et Song [ECKER ET SONG 94] tentent de trouver une nouvelle solution efficace $x^{\ell+1}$, améliorant ϕ en maximisant les objectifs du *MOLP* individuellement dans $S \cap H_+$ avant de faire recours à l'exploration des points efficaces sur la face F^k qui correspond à la coupe appliquée au point x^ℓ . Dans la section qui suit, nous décrivons en détail cette procédure.

1.6.4 Méthode d'Ecker et Song [Ecker et Song 94]

Rappelons que cette méthode était conçue pour le cas d'une fonction ϕ linéaire convexe. Rappelons aussi que le problème (P) qu'on désire résoudre est

$$(P) \quad \begin{aligned} \max \quad & \phi(x) = dx \\ \text{s.à.} \quad & x \in E \end{aligned} \tag{1.11}$$

où

d un vecteur de dimension $(1 \times n)$ ($d \in \mathbb{R}_n$).

$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction linéaire continue à maximiser.

On note, (R) , le problème relaxé associé à (P) :

$$(R) \quad \begin{array}{ll} \max & \phi(x) = dx \\ \text{s.à.} & x \in S \end{array} \quad (1.12)$$

Comme dans toute procédure de recherche des sommets efficaces, il est crucial de déterminer une solution efficace initiale. Dans l'algorithme, cette étape repose sur la résolution du problème relaxé (R) et l'utilisation du programme (P_{x^*}) pour tester l'efficacité de la solution optimale x^* de (R) (voir les théorèmes (1.6.2), (1.6.3) et (1.6.4)).

Les deux lemmes suivants établissent un simple résultat montrant comment aboutir à une solution optimale de (P) à partir de (R) dans deux formes différentes de la fonction ϕ .

Lemme 1.6.7 ([ECKER ET SONG 94]). *Si $dx > 0$ pour tout $x \in S$ non nul, alors toute solution optimale de (R) est une solution optimale du problème (P) .*

Lemme 1.6.8 ([ECKER ET SONG 94]). *Si $dx \geq 0$ pour un certain $x \in S$ non nul, alors au moins une solution optimale de (R) est aussi solution optimale de (P) .*

Donc là, pour déterminer une solution optimale de (P) , il suffit de choisir n'importe quelle solution x^* de (R) et puis utiliser le programme (P_{x^*}) pour déterminer la solution efficace, solution optimale de (P) .

Pour le cas où $dx < 0$, ou bien, si aucune des trois situations ne survient, ceci devient complexe. La procédure de recherche d'une solution optimale de (P) nécessite l'introduction d'une technique de pivotage pour explorer tout les points efficaces adjacents à une solution efficace courante \tilde{x} , si aucune solution efficace adjacente ne conduit à une amélioration de la fonction ϕ , ce qui explique que \tilde{x} est une solution optimale locale, alors on rajoute une coupe hyperplane à l'ensemble réalisable S et on considère le problème linéaire multi-objectifs réduit

$$\begin{array}{ll} \text{“max”} & Cx \\ \text{s.à.} & x \in \bar{S}, \\ & \bar{S} = \{x \in S \mid d^T x \geq d^T \hat{x}\}. \end{array} \quad (1.13)$$

Soit \bar{E} l'ensemble de ses solutions efficaces pour le problème (1.13).

Étant \tilde{x} la solution optimale locale de (P) , pour vérifier s'il existe un point efficace x dans l'ensemble réduit \bar{S} conduisant à une amélioration de ϕ , on considère les problèmes linéaires mono-objectifs, (I_ι) , pour $\iota = 1, \dots, p$,

$$(I_\iota) \quad \begin{array}{ll} \max & C_\iota^T x \\ \text{s.à.} & x \in \bar{S}. \end{array} \quad (1.14)$$

À l'issue de la résolution du problème (I_i) , pour une solution optimale x^i obtenue, on peut tomber sur l'un des trois cas suivants :

1. Si $dx^i > d\hat{x}$ et $x^i \in \bar{E}$; alors on utilise x^i comme étant la nouvelle solution efficace courante et on continue le processus de recherche d'une arête efficace améliorant $\phi(x)$, si elle existe.
2. Si $dx^i > d\hat{x}$ et $x^i \notin \bar{E}$; ceci implique qu'il existe une solution alternative $\bar{x} \in \bar{E}$ ($C_i^T \bar{x} = C_i^T x^i$). Dans ce cas on aura :
 - soit $d\bar{x} > d\hat{x}$ alors, \bar{x} la solution efficace courante et on continue le processus de recherche d'une arête efficace améliorant $\phi(x)$,
 - où bien $d\bar{x} = d\hat{x}$, on résout alors (I_{i+1}) .
3. Si $dx^i = d^T \hat{x}$, alors on résout (I_{i+1}) .

Si jamais ce dernier cas se répète pour tout problème (I_i) , $i = 1, \dots, p$, résolu, ce qui explique que tout les points optimaux sont sur la face de découpage alors \hat{x} est une solution optimale du problème (P) .

Le lecteur désireux d'approfondir ses connaissances peut trouver dans [ECKER ET SONG 94] plus de détails sur ces résultats.

Technique d'Ecker et Kouada pour la caractérisation des points efficaces des MOLPs [Ecker et Kouada 78]

La plupart des algorithmes générant toutes les solutions efficaces d'un MOLP, sont basés sur la caractérisation de l'efficacité d'un point adjacent à un point efficace donné, permettant l'exploration de l'ensemble des points efficaces.

Ces procédures d'identification des points efficaces nécessitent, généralement, la résolution d'un problème linéaire pour chaque point adjacent à la solution efficace donnée (voir à titre d'exemple l'algorithme du simplexe multicritère (Multicriteria Simplex Algorithm) décrit dans [EHRGOTT 05]). Ecker et Kouada [ECKER ET KOUADA 78] ont élaboré une technique plus simple qui caractérise l'efficacité d'une arête incidente à un point efficace donné sans avoir à faire recours à la résolution d'un problème linéaire.

Supposons que l'on dispose d'une solution efficace initiale, \tilde{x} , la question majeure qui se pose : *comment déterminer toutes les arêtes efficaces incidentes à \tilde{x} ?*

Étant donné un point extrême efficace initial $\tilde{x} = (\tilde{x}^B, \tilde{x}^N)$, \tilde{x}^B correspond aux variables basiques et \tilde{x}^N aux variables non basiques. Cette solution est représentée par le tableau (1.1).

Soit F^j l'arête incidente à \tilde{x} induite de l'incrément de la variable hors base \tilde{x}_j^N .

$\tilde{x}^N \quad \tilde{x}^B$		
Z	$-C$	0
\tilde{b}	\tilde{A}	I

TAB. 1.1 – Structure du tableau associé à \tilde{x} .

Théorème 1.6.9 ([ECKER ET SONG 94]). *Supposons que le tableau (1.1) associé à la solution efficace \tilde{x} est non dégénéré et considérons le problème linéaire (Q^j) ,*

$$\begin{aligned}
 (Q^j) \quad & \max z = e^T s \\
 & \text{s.à. } Cu = s + C^j, \\
 & u \geq 0, \\
 & s \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

avec C^j la $j^{\text{ème}}$ colonne dans le tableau (1.1) correspondant à la variable hors base \tilde{x}_j^N et e un vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1. Alors,

$$F^j \subseteq E, \quad \text{ssi } z = 0 \quad \text{dans } (Q^j). \tag{1.16}$$

Considérons le problème dual, (\bar{Q}^j) , du problème (Q^j) :

$$\begin{aligned}
 (\bar{Q}^j) \quad & \min C^j{}^T y \\
 & \text{s.à. } C^T y \geq 0, \\
 & -y \geq e.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

En posant $y = -(v + e)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (\bar{\bar{Q}}^j) \quad & \min -e^T C^j - v^T C^j \\
 & \text{s.à. } C^T v \leq -C^T e, \\
 & v \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Selon les propriétés de la dualité, le problème (Q^j) admet une solution optimale nulle si et seulement si le problème $(\bar{\bar{Q}}^j)$ est réalisable et sa valeur optimale est aussi nulle.

Donc, (Q^j) admet une solution optimale nulle si et seulement si l'ensemble

$$\mathfrak{X} = \{(v, w^N) \geq 0 \mid C^T v + w^N = -C^T e, w_j^N = 0\} \neq \emptyset. \tag{1.19}$$

Définition 1.6.2. Une variable w_j^N est dite non redondante dans \mathfrak{X} s'il existe un point $(v, w^N) \in \mathfrak{X}$ tel que $w_j^N = 0$, sinon w_j^N est dite redondante.

Conséquence directe du théorème (1.6.9) et de la définition d'une variable redondante, le corollaire suivant :

Corollaire 1.6.10. *Étant donné un tableau (1.1) non dégénéré, alors, $F^j \subseteq E$, ssi w_j^N est non redondante dans \mathfrak{X} .*

Cette technique se résume donc à déterminer les variables non redondantes dans \mathfrak{X} . Les équations définissant l'ensemble \mathfrak{X} sont représentées par le tableau, \mathfrak{T} , suivant :

$$\begin{array}{c|c|c} \hline \hline & v & w^N \\ \hline -C^T e & C^T & I \\ \hline \hline \end{array}$$

TAB. 1.2 – \mathfrak{T} : Test arête efficace.

On suppose que $-C^T e \geq 0$, sinon, on effectue des opérations de pivotage dans le tableau \mathfrak{T} de façon à avoir une colonne constante non négative. On observe que, si w_j^N peut sortir de la base en maintenant la la colonne constante, $-C^T e$, positive ou nulle, alors F^j est une arête efficace.

Donc, nous venons de présenter un résultat fondamental (la technique d'Ecker et Kouada) utilisé dans l'algorithme d'Ecker et Song et dans l'algorithme que nous proposons, pour la caractérisation de toutes les arêtes efficaces incidentes à une solution efficace donnée à partir, simplement, d'une observation dans le tableau \mathfrak{T} contre faire recours à la résolution de problèmes linéaires.

Exemple 1.6.1. Pour illustrer la technique d'Ecker et Kouada, nous considérons le MOLP à trois objectifs :

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \max \quad & x_1 \quad -2x_3 \\ \max \quad & -x_1 \quad + x_3 \\ \text{s.à.} \quad & x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_2 \leq 2, \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq 4, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Ce problème a été utilisé comme exemple dans [EHRGOTT 05] pour illustrer l'algorithme du simplexe multicritère (nous l'avons transformé en un problème de maximisation pour qu'il ait une forme similaire au problème (1.3)) et l'ensemble des points efficaces, E , généré est constitué des deux arêtes (x^1, x^2) et (x^1, x^3) . L'ensemble, S , des solutions réalisables du MOLP ainsi que l'ensemble des points efficaces sont représentés dans la figure (1.3).

Le point efficace $x^1 = (0, 1, 0)$ est représenté par le tableau (1.3).

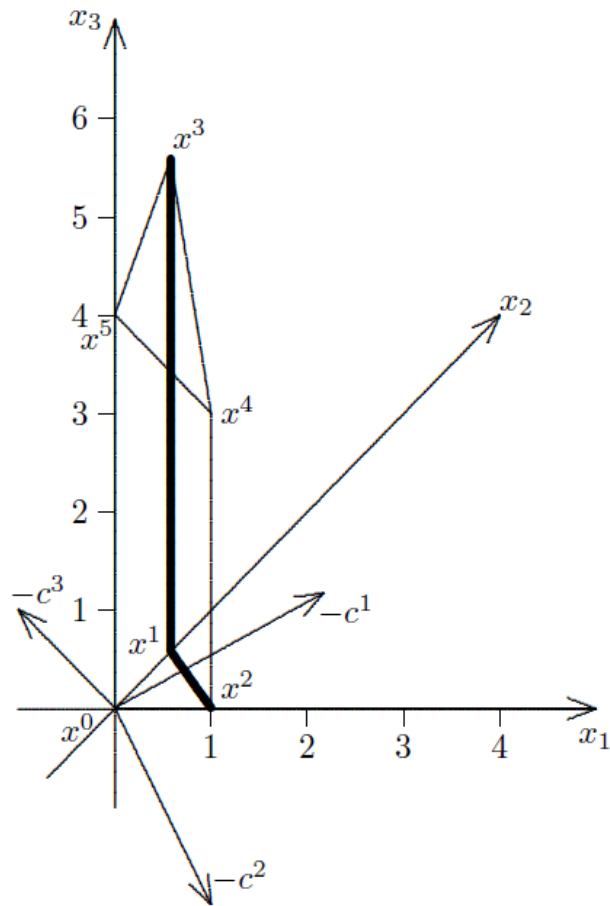


FIG. 1.3 – Région d'admissibilité S et l'ensemble, E, des points efficaces du problème (1.20).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-2	-1	0	0	-2	0	0
0	1	0	-2	0	0	0
0	-1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	-1	0	0	-1	1	0
5	2	0	1	1	0	1

TAB. 1.3 – Tableau associé au point $x^1 = (0, 1, 0)$.

Notre objectif est donc de déterminer toutes les arêtes efficaces incidentes à x^1 , en utilisant la technique d'Ecker et Kouada.

Pour ce faire, nous construisons le tableau \mathfrak{T} représentant de l'ensemble \mathfrak{X} ,

	v_1	v_2	v_3	w_1	w_3	w_4
1	-1	1	-1	1	0	0
1	0	-2	1	0	1	0
2	-2	0	0	0	0	1

TAB. 1.4 – Tableau \mathfrak{T} .

En observant le tableau \mathfrak{T} , on voit clairement que la variable w_4 est redondante, dû au fait que la constante est positive et les variables hors bases non positives ce qui rend impossible de pivoter pour que w_4 sorte de la base et maintenir la constante positive. Nous considérons alors le tableau réduit après avoir éliminer la ligne et la colonne correspondantes à w_4 . Une opération de pivotage dans le tableau réduit donne le tableau \mathfrak{T}_1 :

	v_1	v_2	v_3	w_1	w_3
1	-1	1	-1	1	0
3	-2	0	-1	2	1

TAB. 1.5 – Tableau \mathfrak{T}_1 .

En observant le tableau \mathfrak{T}_1 , nous constatons que la variable w_1 n'est pas redondante ($w_1 = 0$), alors l'arête F^1 induite de l'incrément de la variable hors base x_1 est efficace. La variable w_3 peut être aussi être mise hors base après une opération de pivotage, et donc w_3 est aussi non redondante et l'arête F^3 est efficace.

Alors, nous concluons que les arêtes F^1 et F^3 obtenues par l'incrément de variables hors base x_1 et x_3 dans le tableau (1.3) sont les seules arêtes efficaces incidentes à x^1 .

Donc, uniquement deux opérations de pivotage dans le tableau (1.3) offrent des solutions efficaces adjacentes à la solution efficace initiale x^1 :

sur l'arête efficace F^1 , x_1 rentre en base et x_2 sort de base donnant le point efficace $x^2 = (1, 0, 0)$,

sur l'arête efficace F^3 , x_3 rentre en base et x_6 sort de base donnant le point efficace $x^3 = (0, 1, 5)$.

C'est ce que montre la figure (1.3).

On termine cette section par une description explicite de cette technique, d'Ecker et Kouada, que nous avons illustré dans l'exemple précédent.

Supposons que l'on dispose d'une solution efficace initiale \tilde{x} , représentée par le tableau (1.1). Soit N , l'ensemble des indices hors base dans le tableau (1.1) et notons par J l'ensemble des

indices des variables non redondantes dans \mathfrak{X} que nous cherchons à déterminer.

$$J = \{j \in N \mid w_j^N \text{ est non redondante dans } \mathfrak{X}\}.$$

Technique d'Ecker & Kouada.

1. Poser $L = N$ et $J = \emptyset$. Construire le tableau \mathfrak{T} .
 2. Éliminer dans \mathfrak{T} les colonnes et les lignes correspondantes aux variables w_j^N , $j \in L$, reconnues redondantes. Poser $L = L/\{j\}$.
 3. Pivoter sur \mathfrak{T} , tant que nécessaire, pour avoir une constante non négative. Soit \mathfrak{T}_p le tableau obtenu.
 4. Faire $J = J \cup \{j\}$ et $L = L/\{j\}$, pour toute variable w_j^N hors base ou de base nulle dans \mathfrak{T}_p rencontrée.
 5. Faire $J = J \cup \{j\}$ et $L = L/\{j\}$, pour toute variable w_j^N de base dans \mathfrak{T}_p et qui peut être mise hors base en une seule opération pivot.
 6. Si $L = \emptyset$, alors terminer. Sinon, choisir $j \in L$ et poser $L = L/\{j\}$, ajouter au tableau \mathfrak{T}_p la ligne qui correspond à l'objectif w_j^N à minimiser. Vérifier les étapes 2, 4 et 5 après chaque opération de pivotage.
 7. Si la valeur minimale de w_j^N est nulle, faire $J = J \cup \{j\}$ et aller à 6.
-

Énoncé de l'algorithme

Après avoir présenté tout les éléments nécessaires pour une bonne compréhension du principe de la méthode d'Ecker et Song, nous concluons cette partie par une description formelle des étapes discutées précédemment.

Algorithme d'Ecker & Song (Recherche de la solution optimale pour (P)).

(Étape 0) Trouver une solution optimale x^* de (R) . Si $x^* \in E$, alors x^* est une solution optimale du problème (P) . Sinon, trouver une solution \tilde{x} de (P_{x^*}) . Si $d\tilde{x} = dx^*$, alors \tilde{x} est une solution optimale de (P) . Sinon, aller à l'étape 1.

(Étape 1) (Initialisation). Poser \tilde{x} le point efficace initial, qui est solution optimale du problème (P_{x^*}) .

(Étape 2) (Progression). Soit \tilde{x} la solution efficace courante. Trouver une arête efficace incidente à \tilde{x} améliorant la fonction objectif ϕ .

– Si une telle arête n'existe pas, ce qui explique que \tilde{x} soit une solution optimale locale, aller à l'étape 3.

– Sinon, pivoter au point efficace extrême \hat{x} , voisin de \tilde{x} à travers l'arête efficace et faire une autre itération de l'étape 2 pour la recherche d'une meilleure solution efficace avec un nouveau départ, $\tilde{x} = \hat{x}$.

(Étape 3) (Troncature). Ajouter la ligne correspondante à la contrainte additionnelle, $dx \geq d\tilde{x}$, on aura ainsi le tableau $\overline{T}_{\tilde{x}}$ qui représente \tilde{x} comme un point extrême dans \overline{S} .

(Étape 4) (Examination et progression).

4.1 Poser $\iota = 1$.

4.2 Trouver une solution optimale x^ι du problème (I_ι) qui est une solution extrême efficace du problème réduit (1.13).

4.2.1 Si $dx^\iota > d\tilde{x}$, alors x^ι est un nouveau point efficace, poser $\tilde{x} = \hat{x}$. Ajuster le tableau pour que x^ι représente un point efficace dans S . Aller à l'étape 2.

4.2.2 Si $dx^\iota = d\tilde{x}$ et il existe une arête efficace (x^ι, \bar{x}) qui rapporte une amélioration en valeur de ϕ . Alors, poser $\tilde{x} = \bar{x}$, la nouvelle solution efficace courante. Aller à l'étape 2.

4.2.3 Si $\iota \leq p - 1$, faire une autre itération pour $\iota = \iota + 1$. Aller l'étape 4.2.

4.3.1 Si $dx < 0$ pour toute $x \in S$ non nul, $F \subseteq \overline{E}$. Pivoter sur F pour vérifier s'il existe un point $y \in F$ qui a une arête efficace incidente qui incrémente la valeur de ϕ . Si une

telle arête n'existe pas, alors la solution efficace courante \tilde{x} est une solution optimale de (P) .

4.3.2 Si $dx \not\prec 0$ pour un certain $x \in S$ non nul, alors les points de F ne sont pas, nécessairement, tous dans \bar{E} . Pivoter sur F suivant des arêtes efficaces dans F en cherchant s'il existe un point $y \in F$ qui a une arête efficace incidente qui incrémente la valeur de ϕ . Si une telle arête n'existe pas, alors la solution efficace courante \tilde{x} est une solution optimale de (P) .

4.4 S'il existe une arête $(y, \bar{x}) \subseteq \bar{E}$, alors poser $\tilde{x} = \bar{x}$. Aller à l'étape 2.

Illustration

On considère le problème multi-objectifs suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{"max"} \quad & x_1 - 3x_2 \\
 & x_1 + 3x_2 \\
 \text{s.à.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 8, \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 7, \\
 & x_1 - 2x_2 \leq 1, \\
 & x_1 \geq 0, \\
 & x_2 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

L'ensemble des solutions réalisables, S , ainsi que l'ensemble des points efficaces sont représentés dans la figure (FIG. 1.4).

Le problème (P) qu'on désire résoudre est défini comme suit :

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \max -3x_1 - 2x_2 \\
 \text{s.à.} \quad & x \in E.
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

La résolution du problème relaxé (R) , fournit la solution optimale $(0, 0) \notin E$. Soit $\tilde{x} = (2, 3)$ le point extrême efficace initial et T_0 le tableau associé.

On vérifie s'il existe des arêtes efficaces incidentes à x^0 et choisir celle qui améliore la valeur de ϕ et pour ce faire on construit le tableau \mathfrak{T} . Après une seule opération de pivotage sur \mathfrak{T} , pour avoir une constante non négative, on obtient le tableau \mathfrak{T}_p suivant :

En observant \mathfrak{T}_p , on voit clairement que w_4 est une variable non redondante dans \mathfrak{X} ($w_4 = 0$) et donc l'incrémement de la variable hors base x_4 conduit à une arête efficace incidente à x^0 .

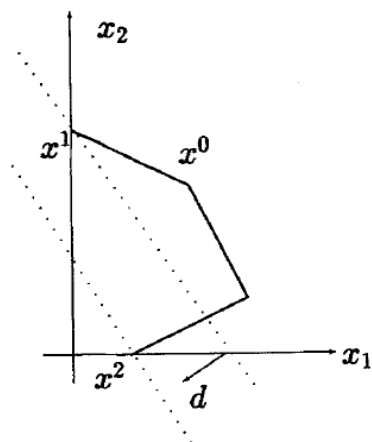


FIG. 1.4 – Région d'admissibilité S du problème (1.21).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-12	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0
-7	0	0	$-\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	0
11	0	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
3	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
2	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
5	0	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1

TAB. 1.6 – Tableau T_0 associé à \tilde{x} .

	v_3	v_4	w_3	w_4
$\frac{18}{3}$	$-\frac{18}{3}$	0	1	5
4	-5	1	0	3

TAB. 1.7 – Tableau \mathfrak{T}_p .

De plus, à partir du tableau T_0 , on voit bien que x_4 améliore la fonction objectif ϕ . on choisit x_4 pour entrer dans la base et on pivote au point efficace extrême $x^1 = (0, 4)$ représenté par le tableau T_1 .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-8	2	0	-1	0	0
-12	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	0
12	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0
4	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0
3	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
9	2	0	1	0	1

TAB. 1.8 – Tableau T_1 associé à x^1 .

Une seconde fois, on fait appel à la technique d'Ecker et Kouada pour la recherche des arêtes efficaces incidentes à x^1 . Cette technique propose x_1 comme variable candidate unique à rentrer dans la base. Cependant, cette arête ne rapporte pas une amélioration du critère ϕ et donc elle va pas être en considération, on passe à l'étape 3.

On ajoute la contrainte $-3x_1 - 2x_2 \geq -8$ qui correspond à la coupe hyperplane au tableau T_1 , on obtient le tableau \bar{T}_1 .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-8	2	0	-1	0	0	0
-12	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	0
12	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	0
4	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0
3	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0
9	2	0	1	0	1	0
0	2	0	-1	0	0	1

TAB. 1.9 – Tableau \bar{T}_1 .

À l'étape 4, on cherche un point efficace initial meilleur dans l'ensemble réduit.

On résout le problème (I_1) qui consiste à maximiser la première fonction objectif dans \bar{S} , on obtient le point optimal unique $x^2 = (1, 0)$ ($x^2 \in \bar{E}$) et qui présente une meilleure valeur de la fonction objectif, $dx^2 > dx^1$, alors $x^2 \in E$.

On pose $\tilde{x} = x^2 = (1, 0)$, la nouvelle solution efficace courante dans S . Cette solution est représentée par le tableau ajusté T_2 ,

Après avoir construit le tableau \mathfrak{T} , on constate qu'il y'a pas d'arêtes efficaces incidentes à x^2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-3	0	8	0	0	-3	0
1	0	1	0	0	1	0
1	0	-5	0	0	1	0
5	0	8	0	0	-3	0
5	0	5	0	1	-2	0
7	0	4	1	0	-1	1
1	1	-2	0	0	1	0

TAB. 1.10 – Tableau \bar{T}_x .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	0	8	0	0	-3
1	0	1	0	0	1
1	0	-5	0	0	1
5	0	5	0	1	-2
7	0	4	1	0	-1
1	1	-2	0	0	1

TAB. 1.11 – Tableau T_2 approprié au point $\tilde{x} = (1, 0)^T$.

qui améliorent le critère principal. On passe à l'étape 3.

On coupe l'ensemble réalisable par l'hyperplan $-3x_1 - 2x_2 = -3$. On ajoute la coupe hyperplane et on obtient le tableau \bar{T}_2 ,

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-3	0	8	0	0	-3	0
1	0	1	0	0	1	0
1	0	-5	0	0	1	0
5	0	5	0	1	-2	0
7	0	4	1	0	-1	0
1	1	-2	0	0	1	0
0	0	8	0	0	-3	1

TAB. 1.12 – Tableau \bar{T}_2 .

On résout le problème (I_1) , on obtient le point x^2 qui est sur l'hyperplan. On résout (I_2) , on obtient le point $y = (0, \frac{3}{2})$ qui est aussi sur l'hyperplan. Cette solution est représentée par le tableau \bar{T}_y .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-3	0	0	0	0	0	-1
$-\frac{9}{2}$	$-\frac{11}{2}$	0	0	0	0	$-\frac{3}{2}$
$\frac{9}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	0	0	0	$\frac{3}{2}$
$\frac{11}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
5	-2	0	1	0	0	-1
4	4	0	0	0	1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$

TAB. 1.13 – Tableau \bar{T}_y .

x^2 et y sont tout les deux sur la face qui correspond à la coupe appliquée, de plus, il n'existe pas un point efficace sur cette face améliorant dx , par conséquent, le point efficace courant $x^2 = (1, 0)^T$ est une solution optimale pour problème (P) .

CHAPITRE 2

Programmation Linéaire Stochastique

Les décideurs (DMs) sont souvent confrontés à des situations où les données du problème sont imprécises ou incertaines : des données sur des événements du passé qui ne pouvaient pas être connues exactement dû aux erreurs de mesure, des données sur des événements futurs (demandes) et simplement ne peuvent pas être connues avec certitude. La *programmation stochastique* est une approche qui modélise ces problèmes, en tenant compte de ces paramètres incertains, qui sont supposés être des variables aléatoires.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions de base, dont nous aurons besoin dans la suite de notre travail, liés à la modélisation et la résolution des problèmes linéaires stochastiques (SLP).

2.1 Problème de programmation stochastique

Un problème stochastique est défini, en général, comme suit [KALL ET WALLACE 94] :

$$\begin{aligned} \text{“min”} \quad & f(x, \xi) \\ \text{s.à.} \quad & g_i(x, \xi) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in S \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec :

- $S \in \mathbb{R}^n$ est un ensemble déterministe des décisions réalisables,
- ξ est un vecteur aléatoire variant sur l'ensemble $\Xi \subset \mathbb{R}^k$, k est le nombre de variables aléatoires, paramètres incertains, du problème,

- on suppose connaître une famille d'événements \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\Xi)$, appelés scénarios, et la distribution de probabilités P dans \mathcal{F} , c-à-d, $\forall A \in \mathcal{F} (A \subset \Xi)$, $P(A)$ est connue, (A est une réalisation de la variable aléatoire ξ),
- la fonction objectif et les contraintes sont des fonctions réelles dépendantes du vecteur aléatoire,

$$\begin{aligned} f(x, \xi) &: \Xi \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \forall \xi, \\ g_i(x, \xi) &: \Xi \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \forall \xi, i. \end{aligned}$$

Dans le cas où les contraintes ainsi que la fonction objectif dépendent linéairement de x et S un polyèdre convexe, on parle d'un *problème de programmation linéaire stochastique* (**SLP** : **Stochastic Linear Programming**), il est défini par :

$$\begin{aligned} \text{"min"} \quad & Z = C(\xi) x \\ \text{s.à.} \quad & T(\xi) x = h(\xi), \\ & x \in S. \end{aligned} \tag{2.2}$$

avec

- $C(\xi)$, $T(\xi)$, $h(\xi)$ sont des vecteurs aléatoires de dimensions respectives $(1 \times n)$, $(m_0 \times n)$, $(m_0 \times 1)$, définis sur l'espace de probabilités (Ξ, \mathcal{F}, P) ,
- $S = \{Ax = b : x \geq 0\}$, un polyèdre convexe des décisions x , A et b sont des vecteurs déterministes de dimensions $(m \times n)$, $(m \times 1)$ respectivement.

Difficulté d'un problème stochastique

Un problème de programmation stochastique est mathématiquement mal posé, du fait que la signification de "min" ainsi que les contraintes n'a pas de sens du moment que le décideur est contraint à prendre une décision sur x avant de connaître la réalisation de ξ . Donc, une révision du modèle (2.2) devient nécessaire, et ce-ci, en le transformant en un problème déterministe, appelé, *problème déterministe équivalent* de (2.2), qui peut être établie par différentes approches.

Le présent chapitre n'a pas la prétention de montrer dans le détail le fonctionnement de toutes les approches. Simplement, après en avoir exposé les bases théoriques, on se contentera de présenter, l'*approche de recours* (recourse approach), et plus spécialement l'*approche de recours à deux niveaux*, qui est la base de notre travail, et l'*approche CCP* (chance constrained approach).

Une discussion plus approfondie de ces approches peut être trouvée dans [KALL ET WALLACE 94] et [KLEYWEGT ET SHAPIRO 00].

2.2 Programmation linéaire stochastique avec recours

Le plus simple modèle de cette approche est, *le modèle de recours à 2-niveaux*, introduit par Dantzig [DANTZIG 55] et Beale [BEALE 55], permettant de prendre des décisions dans beaucoup de situations complexes qui incluent la possibilité de faire des actions de recours après l'occurrence d'un scénario.

Initialement, avant de connaître les réalisations des paramètres aléatoires, on détermine une décision anticipative, appelée *décision du premier niveau*, et une fois le futur est réalisé, on prend une seconde décision correctrice, à un certain coût, pour maintenir la faisabilité du modèle, celle-ci, est appelée *décision de recours* ou *décision du second niveau*.

L'objectif est de déterminer les décisions du premier niveau d'une manière à minimiser l'espérance mathématique d'une certaine fonction coût obtenue par sommation du coût du premier niveau et le *coût de recours* (coût du second niveau), fonction qui dépend évidemment des éléments stochastiques.

2.2.1 Formulation du problème à 2-niveaux avec recours

Une formulation standard d'un problème linéaire stochastique à 2-niveaux est :

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T x + Q(x) \\ \text{s.à.} \quad & Ax = b, \quad x \geq 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

où

$$Q(x) = \mathbb{E}[Q(x, \xi)],$$

et

$$\begin{aligned} Q(x, \xi) = \min \quad & q^T y \\ \text{s.à.} \quad & Wy = h - Tx, \quad y \geq 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

avec

- $\xi = (q, T, W, h)$, le vecteur des paramètres aléatoires. La matrice $W(\xi)$, de dimension $(m_0 \times n_0)$, est dite *matrice de recours*,
- $y \in \mathbb{R}^{n_0}$, la *décision de recours* ou *décision du second niveau*, elle dépend de la décision du premier niveau x et du vecteur aléatoire ξ ,
- $C^T x$ est le coût du premier niveau,
- $Q(x, \xi)$ est la valeur optimale du coût de recours et $\mathbb{E}[Q(x, \xi)]$ l'espérance mathématique du coût de recours,

le problème (2.3), avec les variables $x \in \mathbb{R}^n$, constitue le premier niveau, qui doit être résolu avant la réalisation de ξ , et le problème (2.4), avec les variables $y \in \mathbb{R}^{n_0}$, constitue le problème du second niveau (le recours) pour une décision, x , déterminée et une réalisation de ξ .

On considère les problèmes où le vecteur ξ possède un nombre fini de scénarios, ξ_1, \dots, ξ_N , ξ_i caractérisé par (q_i, T_i, W_i, h_i) , avec des probabilités d'occurrence respectives p_i , $i = 1, \dots, N$ (loi de probabilités discrète et finie). Dans ce cas $Q(x, \xi)$ peut être écrit sous forme d'une somme finie :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^N p_i Q(x, \xi_i).$$

Soit y_i la variable de recours correspondante au scénario i , en combinant les deux problèmes (2.3) et (2.4), on obtient le problème linéaire avec, ce que l'on appelle une *structure de décomposition duale*, suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T x + \sum_{i=1}^N p_i q_i^T y_i \\ \text{s.à.} \quad & Ax = b, \quad x \geq 0, \\ & W_i y_i = h_i - T_i x, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Le problème (2.5), définit tout les inconnus des différents scénarios d'une manière explicite, d'où son appellation de *déterministe équivalent*. La complexité de ce problème dépend linéairement du nombre de scénarios N qui évolue exponentiellement avec le nombre de variables aléatoires du problème (dimension de ξ).

D'après la définition du problème du second niveau (2.4), pour une décision x du premier niveau, il doit être faisable pour tout les scénarios ξ_1, \dots, ξ_N de ξ . Dépendant de la matrice de recours $W(\xi)$, cela n'est pas nécessairement vrai pour tout $x \in S$, cela veut dire que pas pour n'importe quelle décision réalisable du premier niveau on pourrait compenser les contraintes stochastiques violées, par conséquent, les décisions du premier niveaux sont limitées à $x \in \{Ax = b, x \geq 0\} \cap K$ avec

$$K = \{x \mid T_i x + W_i y_i = h_i, y_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}.$$

K est l'ensemble réalisable induit du premier niveau (induced first-stage feasibility set).

Pour éviter le problème des contraintes induites, $x \in \{Ax = b, x \geq 0\} \cap K = \emptyset$, on considère généralement des matrices de *recours complet* pour lesquelles $K = \mathbb{R}^{m_0}$ (voir la définition 2.2.3 ci-dessous).

2.2.2 Types de recours

Recours fixe

Définition 2.2.1. Un problème est à *recours fixe* si la matrice de recours W ne dépend pas de ξ , $W(\xi) = W$.

Recours relativement complet

Définition 2.2.2. On dit que le problème (2.3) a un *recours relativement complet* si

$$\forall x \in \{x : Ax = b, x \geq 0\}, \quad \mathbb{E}[Q(x, \xi)] < \infty, \quad (2.6)$$

Autrement dit, le problème du second niveau (2.4) est toujours faisable peu importe le scénario réalisé et la décision réalisable du premier niveau $x \in S$ choisie (on peut toujours mener une action corrective pour n'importe quelle erreur).

Recours complet

Définition 2.2.3. Le problème (2.3) est dit de *recours complet* si la matrice de recours satisfait

$$\{t \mid t = W(\xi)y, y \geq 0\} = \mathbb{R}^{m_0}, \quad (2.7)$$

Autrement dit :

$$\forall t, \exists y \geq 0 \mid W(\xi)y = t, \quad (2.8)$$

cela implique que $h(\xi) - T(\xi)x = W(\xi)y$, $\forall x$. Le problème (2.4) est toujours réalisable pour tout x et pour tout scénario ξ .

Remarque 2.2.1. On voit bien que cette définition est une généralisation de la définition 2.2.2, par conséquent, si un problème est à recours complet alors il est à recours relativement complet (le recours complet implique le recours relativement complet).

Remarque 2.2.2. Si de plus, dans les définitions 2.2.3 et 2.2.2, $W(\xi) = W$, on parle de *recours fixe complet* et de *recours fixe relativement complet* respectivement.

Recours simple

Définition 2.2.4. C'est un cas spécial de recours fixe complet, il correspond au cas où la matrice de recours $W = (I, -I)$ avec I la matrice d'identité d'ordre m_0 .

2.3 Programmation stochastique avec contraintes probabilistes (l'approche CCP) 40

Une extension évidente de la programmation stochastique à 2-niveaux avec recours est d'avoir plus de niveaux, c'est ce que l'on appelle *la programmation stochastique à niveaux multiples avec recours*.

2.2.3 Problèmes à niveaux multiples avec recours

Cette approche modélise les situations où les décisions à prendre sont déterminées périodiquement à base de certaines réalisations de certaines variables aléatoires. Chaque niveau (le premier n'y pas compris) correspond au moment où certaines informations sont disponibles et on doit prendre une décision (sur la période qui suit).

Un problème linéaire à H -niveaux avec recours peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T x_1 + \mathbb{E}\{\min q_2^T x_2 + \dots + \mathbb{E}[\min q_H^T x_H]\} \\ \text{s.à.} \quad & Ax_1 = b \\ & T_1 x_1 + W_1 x_2 = h_1 \\ & \vdots \\ & T_H x_{H-1} + W_H x_H = h_{H-1} \\ & x_1 \geq 0, \dots, x_H \geq 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Donc là, au lieu des deux décisions x et y qu'on doit prendre aux niveaux 1 et 2, on est face à H décisions séquentielles x_1, x_2, \dots, x_H , qui correspondent aux niveaux 1, 2, \dots , H .

Au niveau τ ($2 \leq \tau \leq H$), les réalisations des variables aléatoires (ξ_1, \dots, ξ_τ) sont disponibles ainsi que les décisions $x_1, \dots, x_{\tau-1}$ et on doit se décider sur x_τ d'une façon que les contraintes à ce niveau soient satisfaites.

2.3 Programmation stochastique avec contraintes probabilistes (l'approche CCP)

L'ensemble réalisable du problème (2.1) peut être aussi défini par des contraintes définissant des événements qui doivent être réalisés avec une certaine probabilité notée $\alpha \in [0, 1]$ (chaque contrainte est considérée comme étant un événement).

Sous cette supposition, le problème déterministe équivalent de (2.1) peut être défini comme suit

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbb{E}[f(x, \xi)] \\ \text{s.à.} \quad & P(\{\xi \mid g_i(x, \xi) \leq 0\}) \geq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in S \end{aligned} \tag{2.10}$$

Le problème (2.11) est appelé *problème stochastique avec articulation de contraintes probabilistes* (probabilistically constrained ou problem with joint probabilistic constraints) [KALL ET WALLACE 94].

En particulier, pour le problème linéaire stochastique (2.2), on aura le problème déterministe équivalent suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbb{E}[C^T(\xi)x] \\ \text{s.à.} \quad & P(\{\xi \mid T_i(\xi) \leq h_i\}) \geq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in S \end{aligned} \tag{2.11}$$

T_i, h_i correspondent à la i -ème ligne et à la i -ème composante de $T(\cdot)$ et $h(\cdot)$ respectivement.

2.4 Autres techniques de modélisation des PS

Mise à part la programmation stochastique, il existe différentes approches pour modéliser et résoudre les problèmes sous incertitudes. On se contente de présenter quelques unes et nous renvoyons le lecteur désireux d'approfondir ses connaissances aux références [KALL ET WALLACE 94],[KLEYWEGT ET SHAPIRO 00].

2.4.1 Approche de la solution large

Une technique qui nous paraît évidente et rassurante est de chercher une solution qui satisfait toutes les contraintes pour n'importe quel scénario réalisé, cette solution est appelée *la solution large* (fat solution). Néanmoins, ces solutions sont très coûteuses, elles présentent un grand risque au décideur.

2.4.2 Approche wait-and-see

Cette approche nécessite une connaissance à priori des réalisations des paramètres aléatoires du problème (information complète). Les solutions sont obtenues, en résolvant le problème pour chaque scénario, celles-ci sont appelées, les *solutions wait and see*.

2.4.3 Approche déterministe

Elle nécessite la connaissance des moyennes des variables aléatoires. Un modèle déterministe est établie en remplaçant chaque variable aléatoire du problème par sa moyenne, la solution ainsi obtenue est appelée *solution en moyenne* (expected value solution).

La programmation stochastique offre des solutions optimales sur l'ensemble de tout les scénarios et donc elles sont plus robuste, par rapport à la variation des distributions de probabilités, que celles obtenues par l'approche déterministe.

2.5 Exemple illustratif

Cet exemple permet d'illustrer toutes les notions introduites dans les sections précédentes.

On considère le problème suivant [KALL ET WALLACE 94]. De deux lignes de production *raw1* et *raw2*, on peut produire simultanément deux types de produits différents *prod1* et *prod2*. Les données sur les productivités unitaires des lignes par produit $\pi(\text{raw}i, \text{prod}j)$, les coûts unitaires des produits par ligne $C = (c_{\text{raw}1}, c_{\text{raw}2})^T$ (engendrant un coût de production Z), les capacités de production, les quantités maximales que les lignes peuvent produire, \hat{b} et les demandes en les deux produits $h = (h_{\text{prod}1}, h_{\text{prod}2})^T$ sont montrés dans le tableau (TAB. 2.1).

Lignes	produits		c	\hat{b}
	<i>prod1</i>	<i>prod2</i>		
<i>raw1</i>	2	3	2	1
<i>raw2</i>	6	3	3	1
relation	\geq	\geq	=	\leq
h	180	162	Z	100

TAB. 2.1 –

Ce problème peut être modélisé par le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 2x_{\text{raw}1} + 3x_{\text{raw}2} \\
 \text{s.à.} \quad & x_{\text{raw}1} + x_{\text{raw}2} \leq 100, \\
 & 2x_{\text{raw}1} + 6x_{\text{raw}2} \geq 180, \\
 & 3x_{\text{raw}1} + 3x_{\text{raw}2} \geq 162, \\
 & x_{\text{raw}1} \geq 0, \\
 & x_{\text{raw}2} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Due à la simplicité du problème (2.12), on peut faire une représentation graphique de l'ensemble de ses solutions réalisables (voir FIG. 2.1).

Avec, la fonction objectif, $Z(x) = 2x_{\text{raw}1} + 3x_{\text{raw}2}$, on conclut facilement (FIG. 2.2) que

$$\hat{x}_{\text{raw}1} = 36, \quad \hat{x}_{\text{raw}2} = 18, \quad Z(\hat{x}) = 126 \tag{2.13}$$

est l'unique plan de production optimal du problème (2.12).

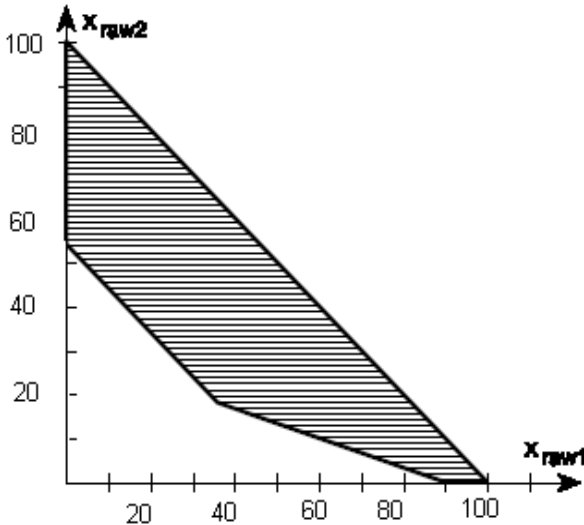


FIG. 2.1 – Domaine des solutions réalisables du problème (2.12)

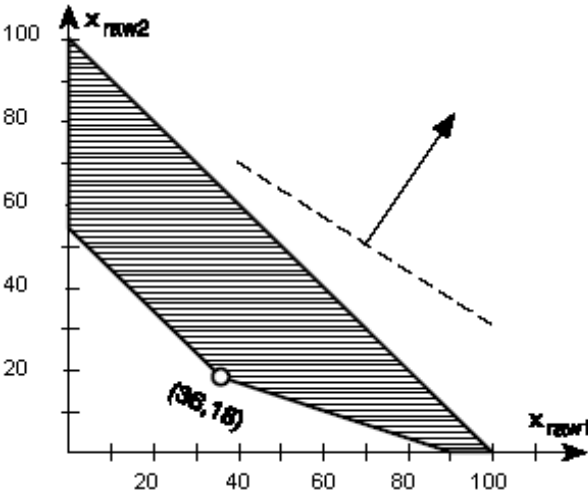


FIG. 2.2 – Le plan de production optimal du problème (2.12)

La solution optimale est obtenue sous certaines restrictions, à savoir, la connaissance à priori des données concernant le coût de production, la productivité, la capacité de production ainsi que la demande. Néanmoins, en pratique, ce n'est pas toujours le cas, il se peut qu'au moins une de ces données présentent un aspect aléatoire et on est contraint à prendre une décision sur le plan de production avant de connaître les valeurs exactes de ces données.

Pour illustrer les modèles qu'on a défini dans les sections précédentes, on suppose que

- les productivités $\pi(\text{raw1}, \text{prod1})$ et $\pi(\text{raw2}, \text{prod2})$ varient aléatoirement entre certaines limites (les autres productivités sont déterministes),
- les demandes h_{prod1} et h_{prod2} sont aléatoires,
- le plan de production x_{raw1} , x_{raw2} doit être fixé à l'avance et on ne peut pas le remettre en cause lorsque les données deviennent connues.

Et on aura, ainsi, les paramètres aléatoires suivants :

$$\begin{aligned}
 h_{\text{prod1}} &= 180 + \xi_1, \\
 h_{\text{prod2}} &= 162 + \xi_2, \\
 \pi(\text{raw1}, \text{prod1}) &= 2 + \eta_1, \\
 \pi(\text{raw2}, \text{prod2}) &= 3.4 - \eta_2,
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

les variables ξ_1 et ξ_2 sont modélisées par des lois normales et les variables η_1 et η_2 sont modélisées par une loi uniforme et une loi exponentielle respectivement :

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &\sim \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma = 12), \\
 \xi_2 &\sim \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma = 9), \\
 \eta_1 &\sim \mathcal{U}[-0.8, 0.8], \\
 \eta_2 &\sim \mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{P}(\lambda = 2.5).
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

Par raison de simplification on suppose que ces variables aléatoires, ξ_1 , ξ_2 , η_1 et η_2 , sont mutuellement indépendantes. Comme ξ_1 , ξ_2 et η_2 sont non bornées, on se restreint à considérer leurs intervalles de confiance (à un seuil de 99%). On aura les réalisations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \xi_1^i &\in [-30.91, 30.91], \\
 \xi_2^i &\in [-23.18, 23.18], \\
 \eta_1^i &\in [-0.8, 0.8], \\
 \eta_2^i &\in [0.0, 1.84].
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Et donc, à la place du problème déterministe (2.12), on aura le problème linéaire stochastique

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 2x_{raw1} + 3x_{raw2} \\
 \text{s.à.} \quad & x_{raw1} + x_{raw2} \leq 100, \\
 & (2 + \eta_1)x_{raw1} + 6x_{raw2} \geq 180 + \xi_1, \\
 & 3x_{raw1} + (3.4 - \eta_2)x_{raw2} \geq 162 + \xi_2, \\
 & x_{raw1} \geq 0, \\
 & x_{raw2} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

qui est un problème de décision mathématiquement mal posé.

On voit très clairement que le domaine des solutions réalisables dépend des réalisations des variables aléatoires et il est compliqué de présenter, graphiquement, toutes les conséquences de leurs variations.

- Si on considère uniquement la variation des seconds nombres dans les intervalles mentionnés dans (2.16), l'ensemble des solutions réalisables varie en translatant parallèlement les facettes, en question (concernées), de l'ensemble réalisable du problème déterministe, comme c'est indiqué dans la figure (FIG. 2.3).

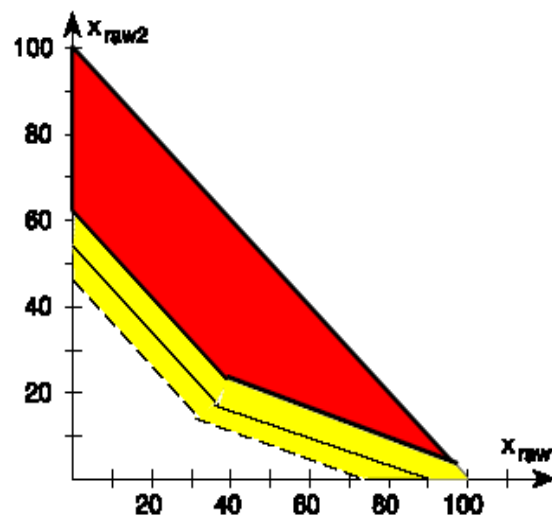


FIG. 2.3 – Variation du domaine réalisable avec les demandes.

- On peut aussi considérer, uniquement, l'effet de la variation des valeurs de η_1^i et η_2^j dans les intervalles mentionnés dans (2.16), la variation est caractérisée par la rotation des facettes correspondantes. Quelques situations possibles sont indiquées dans la figure (FIG. 2.4) où les petits cercles montrent les centres de rotation.
- En considérant tout les changements possibles des demandes et des productivités, simultanément, on aura une superposition de translations et de rotations. Voir (FIG. 2.5).

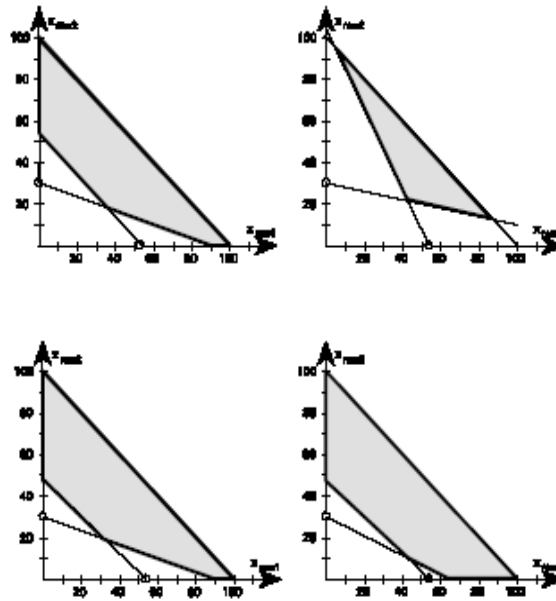


FIG. 2.4 – Variation du domaine réalisable avec les productivités.

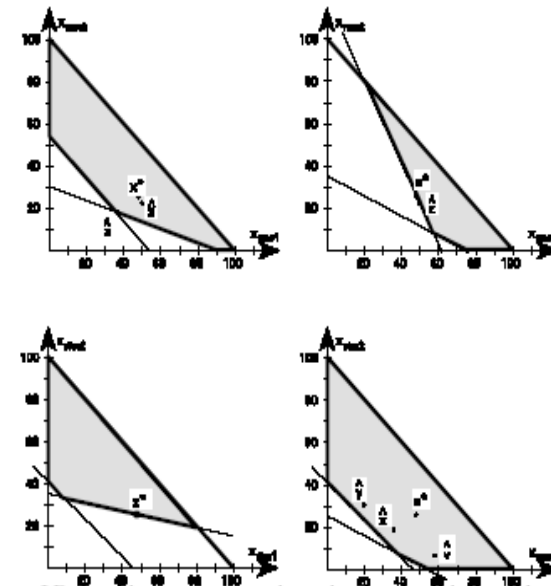


FIG. 2.5 – Variation du domaine réalisable avec les demandes et les productivités avec certaines solutions wait-and-see.

Solutions wait-and-see

Pour ce modèle de solutions optimales, on devrait connaître les réalisations des variables aléatoires à l'avance. La figure (FIG. 2.5) montre quelques solutions possibles,

$$\begin{aligned}
 \hat{x} &= (\hat{x}_{raw1}, \hat{x}_{raw2}) = (36, 18), & Z &= 126, \\
 \hat{y} &= (\hat{y}_{raw1}, \hat{y}_{raw2}) = (20, 30), & Z &= 130, \\
 \hat{z} &= (\hat{z}_{raw1}, \hat{z}_{raw2}) = (50, 22), & Z &= 166, \\
 \hat{v} &= (\hat{v}_{raw1}, \hat{v}_{raw2}) = (58, 6), & Z &= 124.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Par supposition, on a que des informations statistiques sur les lois de distribution des demandes et des productivités. Par conséquent les solutions proposées dans (2.18) nous intéressent pas.

La solution large

Une première possibilité consiste à rechercher un plan de production sûr qui est faisable pour toutes les valeurs possibles des demandes et des productivités. De (FIG. 2.5), on peut conclure que la solution large est à l'intersection, elle est donnée par

$$x^* = (x_{raw1}^*, x_{raw2}^*) = (48.018, 25.548), \quad Z(x^*) = 172.681. \tag{2.19}$$

Modèle de recours

On suppose qu'en cas de demandes non satisfaites par la production, on a la possibilité de se tourner vers une ressource supplémentaire externe pour couvrir la quantité restante et ceci est à un coût unitaire de

$$q_{prod1} = 7, \quad q_{prod2} = 12, \tag{2.20}$$

pour les produits *prod1* et *prod2* respectivement.

Les coût des pénalités des demandes non satisfaites (contraintes violées), qu'on a appelé coûts de recours, sont déterminés avant de connaître les réalisations des paramètres aléatoires. Donc là, on doit décider sur les quantités à produire (décisions du premier niveau) et à acheter (décisions du second niveau), avant que les demandes ne soient connues, qui minimisent le coût du premier niveau (coût de production) et l'espérance mathématique du coût de recours simultanément.

Pour simplifier la modélisation, on considère le vecteur aléatoire $\xi = (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ et

$$\begin{aligned}
 h_1(\xi) &\Leftarrow h_{prod1} = 180 + \xi_1, \\
 h_2(\xi) &\Leftarrow h_{prod2} = 162 + \xi_2, \\
 \alpha(\xi) &\Leftarrow \pi(raw1, prod1) = 2 + \eta_1, \\
 \beta(\xi) &\Leftarrow \pi(raw2, prod2) = 3.4 - \eta_2.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

À la place du problème stochastique (2.17), on aura le problème stochastique avec recours à 2-niveaux,

$$\begin{aligned}
\min \quad & \{2x_{raw1} + 3x_{raw2} + E_{\xi}[7y_1(\xi) + 12y_2(\xi)]\} \\
s.\dot{a}. \quad & x_{raw1} + x_{raw2} \leq 100, \\
& \alpha(\xi)x_{raw1} + 6x_{raw2} + y_1(\xi) \geq h_1(\xi), \\
& 3x_{raw1} + \beta(\xi)x_{raw2} + y_2(\xi) \geq h_2(\xi), \\
& x_{raw1} \geq 0, \\
& x_{raw2} \geq 0, \\
& y_1(\xi) \geq 0, \\
& y_2(\xi) \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Les variables de recours $y_1(\xi)$ et $y_2(\xi)$ représentent les quantités non satisfaites des produits *prod1* et *prod2*. Dans le cas où le vecteur aléatoire, ξ , possède une distribution de probabilités discrète et finie, $\{(\xi^i, p_i), i = 1, \dots, N\}$, le problème (2.22) sera un problème linéaire ordinaire avec une structure de décomposition duale :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \{2x_{raw1} + 3x_{raw2} + \sum_{i=1}^N p_i [7y_1(\xi^i) + 12y_2(\xi^i)]\} \\
s.\dot{a}. \quad & x_{raw1} + x_{raw2} \leq 100, \\
& \alpha(\xi^i)x_{raw1} + 6x_{raw2} + y_1(\xi^i) \geq h_1(\xi^i) \forall i, \\
& 3x_{raw1} + \beta(\xi^i)x_{raw2} + y_2(\xi^i) \geq h_2(\xi^i) \forall i, \\
& x_{raw1} \geq 0, \\
& x_{raw2} \geq 0, \\
& y_1(\xi^i) \geq 0 \forall i, \\
& y_2(\xi^i) \geq 0 \forall i.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Une méthode fondamentale de résolution de cette classe de problèmes sera décrite dans la section qui suit.

Par approximation des lois de distribution des variables aléatoires, données dans (2.15), du vecteur ξ par des lois discrètes avec 5, 9, 7 et 11 réalisations respectivement, on obtient une loi de distribution discrète avec $5 \times 9 \times 7 \times 11 = 3465$ réalisations (3465 blocs dans (2.23)). En résolvant le problème stochastique avec recours (2.23) comme un programme linéaire ordinaire, avec $2 \times 3465 + 1 = 6931$ contraintes, on obtient comme solution \check{x}

$$\check{x} = (37.754, 23.629), \quad \gamma(\check{x}) = 150.446, \quad \gamma_I(\check{x}) = 146,396, \tag{2.24}$$

avec $\gamma(\cdot)$ le coût total et $\gamma_I(\check{x})$ le coût du premier niveau.

Contraintes probabilistes

On suppose que les demandes sont les seuls paramètres aléatoires du problème. On suppose aussi qu'il est nécessaire, pour maintenir les clients, de satisfaire les contraintes (leurs demandes) avec une probabilité de 95%. Dans ce cas, notre problème peut être modélisé par un programme stochastique avec articulation de contraintes de probabilités :

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_{raw1} + 3x_{raw2} \\ \text{s.à.} \quad & x_{raw1} + x_{raw2} \leq 100, \\ & x_{raw1} \geq 0, \\ & x_{raw2} \geq 0, \\ & \text{P} \left(\begin{array}{l} 2x_{raw1} + 6x_{raw2} \geq h_1(\xi) \\ 3x_{raw1} + 3x_{raw2} \geq h_2(\xi) \end{array} \right) \geq 0.95. \end{aligned}$$

Il existe des méthodes appropriées pour résoudre ce problème, nous renvoyons le lecteur à [KALL ET WALLACE 94], où elle est présentée une de ces méthodes. La résolution de ce problème nous donne la solution

$$z = (37.758, 21.698), \quad \gamma_I(z) = 140.612. \quad (2.25)$$

2.6 Méthode de décomposition L-Shaped [Van Slyke et Wets 69]

Dans cette section, on décrit d'une manière succincte la *méthode de décomposition L-Shaped* de Van Slyke et Wets [VAN SLYKE ET WETS 69], décrite dans [KALL ET WALLACE 94], aussi connue sous le nom de *méthode de décomposition de Benders* [BENDERS 62], un algorithme fondamental pour la résolution des problèmes linéaires à 2-niveaux avec recours (2.3).

Cette méthode consiste, principalement, à décomposer le problème en deux niveaux. Le problème principal dit problème maître utilise une approximation linéaire de la fonction de recours à travers une variable auxiliaire θ (voir (2.26)) pour déterminer la décision du premier niveau, qui sera utilisée dans le deuxième niveau pour générer les coupes de faisabilité et d'optimalité et donner une meilleure approximation de la fonction de recours, à partir de la résolution du problème dual du problème de recours pour les différents scénarios.

L'idée de base est de réécrire le problème (2.3), en introduisant la variable auxiliaire θ qui sert à estimer la fonction de recours, comme suit :

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T x + \theta \\ \text{s.à.} \quad & Ax = b \\ & \theta \geq Q(x) \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Dénotons $(\hat{x}, \hat{\theta})$ la solution optimale du problème maître (2.3) obtenue, nous souhaitons avoir la contrainte active sur θ , $\hat{\theta} = Q(\hat{x})$. Pour ce faire, nous utilisons les coupes.

Deux types de coupes apparaissent :

- Coupes de faisabilité qui servent à restreindre l'ensemble réalisable de premier niveau à $S \cap K$ (rappelons que K est l'ensemble réalisable induit du premier niveau, $K = \{x \mid T_i x + W_i y_i = h_i, y_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}$).
- Coupes d'optimalité pour estimer la fonction de recours espérée $Q(x)$. La contrainte $\theta \geq Q(x)$ s'exprimera à l'aide des coupes d'optimalité.

Pour comprendre l'algorithme, nous introduisons quelques résultats de base.

2.6.1 Test de faisabilité

On introduit un autre aspect de la faisabilité, à savoir, si on dispose d'une décision $x = x^0$ du premier niveau du problème (2.3), *comment décideur qu'elle aboutit à des problèmes (2.4) de second niveau, réalisables pour tout les scénarios possibles de ξ , dans un cadre général de recours (le recours n'est pas relativement complet) ?*

Pour ce faire, on va travailler sur le dual

$$\pi \max_{\pi} \{(h_i - T_i x^0)^T \pi \mid W^T \pi \leq q_i^T\} \tag{2.27}$$

du problème (2.4). On voit bien que son ensemble de contraintes $D = \{\pi : W^T \pi \leq q_i^T\}$ est indépendant de x .

On suppose que l'on dispose d'un ensemble Γ des points extrêmes π et un ensemble Δ des directions extrêmes σ de l'ensemble réalisable D du problème dual (2.27).

À base du lemme de dualité de Farkas [KALL ET WALLACE 94], on a le résultat suivant :

$$\{y \mid Wy = h_i - T_i x^0, y \geq 0\} = \emptyset \tag{2.28}$$

si et seulement si

$$W^T \pi \leq 0 \quad \text{implique que} \quad (h_i - T_i x^0)^T \pi \leq 0 \tag{2.29}$$

D'une autre part, à partir des propriétés de la dualité (voir [NEMHAUSER ET WOLSEY 88] et [ABBAS ET BELLAHCENE 06]), on a :

1. $D = \emptyset$ (le problème (2.27) n'est pas réalisable) cela implique que
 - soit $Q(x^0, \xi_i) = +\infty$ (le problème $Q(x^0, \xi_i)$ n'est pas réalisable),
 - où bien $Q(x^0, \xi_i) = -\infty$ (le problème $Q(x^0, \xi_i)$ n'est pas borné).
2. $D \neq \emptyset$ (le problème (2.27) est réalisable) cela implique que
 - $Q(x^0, \xi_i)$ admet une solution optimale (si le problème (2.27) l'est aussi),
 - où bien $Q(x^0, \xi_i) = +\infty$, il n'est pas réalisable (si le problème (2.27) n'est pas borné).

On conclut que $Q(x^0, \xi_i)$ n'est pas réalisable si et seulement si D possède une direction extrême σ pour laquelle $(h_i - T_i x^0)^T \sigma > 0$, sinon la valeur optimale de $Q(x^0, \xi_i)$ est donnée par $(h_i - T_i x^0)^T \pi$ avec π un point extrême de D .

Donc, pour vérifier la faisabilité des problèmes du second niveau, on doit déterminer le vecteur σ , en résolvant le problème

$$\sigma \max_{\sigma} \{ \sigma^T (h_i - T_i x^0) \mid \sigma^T W \leq 0, \|\sigma\|_1 \leq 1 \}. \quad (2.30)$$

La dernière contrainte est introduite pour borner σ , sinon la valeur maximale sera égale à $+\infty$ et ça nous intéresse pas du moment qu'on cherche une direction définie par σ .

Si pour un certain ξ_i , $i = 1, \dots, N$, $(h_i - T_i x^0)^T \sigma > 0$, alors on a trouvé un scénario ξ_i pour lequel la décision du premier niveau $x = x^0$ ne génère pas un problème de second niveau réalisable, par conséquent, on doit exclure $(h_i - T_i x^0)$ (sans exclure des solutions réalisables), on crée alors la *coupe de faisabilité*

$$\sigma^T (h_i - T_i x) \leq 0. \quad (2.31)$$

2.6.2 Test d'optimalité

On suppose que toutes les coupes de faisabilité sont disponibles, où bien, on dispose d'un recours relativement complet. De plus, l'ensemble $S = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ est borné.

Soit (2.32), le problème maître courant :

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T x + \theta \\ \text{s.à.} \quad & Ax = b, \\ & \sigma^T T_i x \geq \sigma^T h_i, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \\ & \theta \geq Q(x), \\ & x \geq 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Résoudre ce problème nécessite de définir explicitement la fonction $Q(x)$ à l'avance, ce qui n'est pas le cas puisqu'elle est définie en traitant le dual du problème de recours lié à chaque scénario.

Soit x^0 une décision du premier niveau réalisable et θ^0 (initialement on se fixe θ^0 à $-\infty$). La valeur de $Q(x^0)$ est calculée à partir du problème dual (2.27)

$$Q(x^0) = \sum_{i=1}^N p_i Q(x^0, \xi_i) = \sum_{i=1}^N p_i \pi_i^T (h_i - T_i x^0), \quad (2.33)$$

avec $\pi_i^T (h_i - T_i x^0)$ la valeur optimale du problème $Q(x^0, \xi_i)$. Si $Q(x^0) < \theta^0$, alors x^0 est optimale, sinon, on exclut le point x^0 , on crée alors la *coupe d'optimalité*

$$\theta \geq \sum_{i=1}^N p_i \pi_i^T (h_i - T_i x). \quad (2.34)$$

2.6.3 Algorithme de la méthode

On suppose que l'ensemble $S = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ est borné. Rappelons que le problème (2.3) est remplacé par le problème maître,

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T x + \theta \\ \text{s.à.} \quad & Ax = b \\ & \theta \geq Q(x) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Algorithme L-Shaped.

Initialement, on a aucune restriction sur θ (aucune coupe n'existe). Poser $\theta = -\infty$, borne inférieure de $Q(x)$, nous le retirons de la fonction objectif, cela revient à résoudre le problème (2.3) de premier niveau seul.

1. *Résoudre le problème maître courant. Si le problème courant n'est pas réalisable alors le problème (2.3) n'est pas réalisable. Terminer. Sinon, soit $(\hat{x}, \hat{\theta})$, la solution optimale obtenue.*
2. *Résoudre les problèmes (2.30) et (2.27) pour tout scénario ξ_i avec $x = \hat{x}$.*
3. *Supposons que le problème de recours n'est pas réalisable, pour un certain scénario i , $\sigma^T (h_i - T_i \hat{x}) > 0$, alors rajouter la coupe de faisabilité (2.31) au problème maître courant et Aller à l'étape 1.*
4. *Supposons que $Q(\hat{x}, \xi_i) < \infty$ pour tout scénario ξ_i . Évaluer $Q(\hat{x})$.*
 - *Si $Q(\hat{x}) \leq \hat{\theta}$, $(\hat{x}, \hat{\theta})$ est optimale.*

-
- *Sinon. Ajouter la coupe d'optimalité $\theta \geq \sum_{i=1}^N p_i \pi_i^T (h_i - T_i x)$ au problème maître courant et aller à l'étape 1.*
-

Étant l'ensemble des solutions réalisables borné, l'application de coupes de faisabilité et d'optimalité à chaque itération permettra d'exclure des points une fois explorés (sans les remettre en cause). D'une autre part, on sait bien que tout cône est engendré par un nombre fini de rayons (générateurs) qu'on utilise pour construire les coupes de faisabilité, comme le problème (2.26) est solvable, pour un $x \in S$ la condition de faisabilité sera vérifiée et par conséquent y'aura un nombre fini de coupes de faisabilité et d'optimalité. Ces deux conditions conduisent à la convergence de la méthode après un nombre fini d'étapes.

CHAPITRE 3

Programmation Linéaire Stochastique Multi-objectifs

DE plus en plus, le décideur doit prendre sa décision à partir de plusieurs critères, souvent antagonistes et, de plus, sans connaître a priori les valeurs de certains éléments stochastiques au moment où il doit prendre une décision. Lorsque ces paramètres incertains sont considérés comme étant des variables aléatoires, le problème résultant est nommé *problème de programmation stochastique multicritère*.

3.1 Formulation du problème linéaire stochastique multicritère

Un problème de programmation linéaire stochastique multicritère (**MOSLP**; **M**ultiple **O**bjective **S**tochastic **L**inear **P**rogramming) est défini, en général, comme suit :

$$\begin{aligned} \text{“min”} \quad & Z_k = C_k(\xi) x \quad k = 1, \dots, p \\ \text{s.à.} \quad & T(\xi)x = h(\xi), \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec $C_k(\xi)$, $T(\xi)$, $h(\xi)$ sont des vecteurs aléatoires de dimensions respectives $(1 \times n)$, $(m_0 \times n)$, $(m_0 \times 1)$, définis sur l'espace de probabilités (Ξ, \mathcal{F}, P) , $S = \{Ax = b : x \geq 0\}$, un polyèdre convexe et déterministe des décisions x , A et b sont des vecteurs déterministes de dimensions $(m \times n)$, $(m \times 1)$ respectivement.

3.2 Approches de résolution

En général, la résolution de ces problèmes est abordée avec des techniques de la programmation multicritère et de la programmation stochastique. Ainsi, Stancu et Minasian montrent dans [STANCU-MINASIAN 84] que la résolution de ces problèmes nécessite une double transformation : transformation du problème multicritère en un problème monocritère et du problème stochastique en un problème déterministe. Les mêmes étapes sont aussi considérées par Ben Abdelaziz [BEN ABDELAZIZ 92], il a classé les techniques disponibles pour la résolution de ces problèmes selon l'ordre d'exécution de ces transformations. Il a appelé

- *approche multi-objectif* l'ensemble des techniques qui considèrent tout d'abord la transformation du problème multicritère stochastique en un problème multicritère déterministe équivalent,
- *approche stochastique* pour se référer à toutes les techniques qui transforment le problème multicritère stochastique en un problème stochastique avec un seul critère,

qui vont être, par la suite, résolus avec une des approches existantes dans la littérature.

Il est à souligner que toutes les deux approches présentent des faiblesses du fait qu'elles ne considèrent pas les deux aspects du problème simultanément, à savoir, l'aspect stochastique et l'aspect multicritère.

3.3 Quelques concepts de solutions efficaces

L'analyse de l'efficacité pour les problèmes stochastiques multicritères dont les variables aléatoires sont discrètes a été abordée dans plusieurs travaux, nous citons à titre d'exemple les travaux de Ben Abdelaziz dans [BEN ABDELAZIZ 92], [BEN ABDELAZIZ ET AL. 97] et [BEN ABDELAZIZ ET AL. 99].

Nous nous intéressons dans ce travail à la définition de quelques concepts de solutions efficaces qui coïncident avec l'approche multi-objectif, à savoir, ces solutions sont déterminées en transformant chacun des objectifs stochastiques en leurs équivalents déterministes, en utilisant le critère de l'espérance mathématique (le critère adapté dans le modèle de recours), la variance minimum, ... Ce dernier problème, l'équivalent déterministe résultant sera ensuite résolu et les solutions efficaces obtenues seront considérées comme étant les solutions efficaces du problème initial.

3.3.1 Définitions

Considérons le problème linéaire stochastique multi-objectif (3.1) et supposons que l'ensemble réalisable est constitué uniquement de contraintes déterministes ou bien qu'il a été transformé en son équivalent déterministe.

Soit S , un polyèdre convexe, l'ensemble réalisable du MOSLP (3.1).

Solution efficace en moyenne (attendue)

Définition 3.3.1 ([WHITE 82]). $x \in S$ est une solution efficace en moyenne du problème (3.1), si elle est une solution efficace du problème multi-objectif déterministe (3.6).

$$\begin{aligned} \text{“min”} \quad & Z'_k(x), \quad k = 1, \dots, p, \\ \text{s.à.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

avec

$$Z'_k = \mathbb{E}[Z_k] = \sum_{i=1}^N p_i Z_{ki} = \sum_{i=1}^N p_i C_k(\xi_i)x = \mathbb{E}[C_k(\xi)x]. \tag{3.3}$$

L'application du critère de la variance minimale pour transformer le problème (3.1) en un problème déterministe donne le concept de solution efficace suivant :

Solution efficace de variance minimale

Définition 3.3.2 ([WHITE 82]). $x \in S$ est une solution efficace avec une variance minimale du problème (3.1), si elle est une solution efficace du problème

$$\min_{x \in S} (\sigma_1^2(x), \dots, \sigma_p^2(x)), \tag{3.4}$$

avec $\sigma_k^2(x)$ la variance du k -ème critère.

On peut aussi considérer le critère du risque minimum pour la transformation du problème (3.1) en un problème déterministe.

Dans ce contexte, on suppose que le décideur peut fixer, à priori, les niveaux d'aspiration u_k pour chacun des objectifs stochastiques Z_k . Le but est donc de déterminer la solution x qui maximise les probabilités que les objectifs soient inférieures à leurs niveaux d'aspiration : $P(Z_k \leq u_k)$. Ceci nous conduit à la définition de l'efficacité suivante :

Solution efficace à risque minimum

Définition 3.3.3 (Stancu-Minasian et Tigan [STANCU-MINASIAN ET TIGAN 84]). $x \in S$ est une solution efficace avec une variance minimale du problème (3.1), si elle est une solution efficace du problème

$$\max_{x \in S} (P(Z_1 \leq u_1), \dots, P(Z_p \leq u_p)). \quad (3.5)$$

Cette définition nécessite la connaissance des fonctions de répartition, où bien des lois de probabilité des objectifs stochastiques et encore la collaboration du décideur pour la détermination des niveaux d'aspiration.

3.4 Optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème linéaire stochastique multicritère

La plupart des méthodes de résolution des MOSLPs transforment d'abord le problème (3.1) en un problème déterministe et puis le résolvent par une méthode interactive, dans ce contexte, nous citons la méthode PROTRADE [GOICOECHEA ET AL. 76], STRANGE [TEGHEM ET AL. 86] et PROMISE [URLI ET NADEAU 90].

La méthode STRANGE-MOMIX développée par Teghem [TEGHEM 90] traite le problème MOSLP à variables entières (MOSILP), ce cas a été aussi considéré par Moulaï et Amrouche dans [MOULAÏ ET AMROUCHE 06] et par Abbas et Bellahcene qui ont proposé dans [ABBAS ET BELLAHCENE 06] une méthode basée sur la méthode des coupes planes [ABBAS ET MOULAÏ 99] et la technique L-Shaped.

Classiquement, la résolution de ces problèmes passe par la détermination de l'ensemble des solutions efficaces. Néanmoins, dans la pratique, il peut s'avérer que l'ensemble des solutions efficaces soit très grand et il devient impossible pour le décideur de choisir le meilleur compromis en termes de ses préférences. L'optimisation d'un critère, qui explique les préférences du décideur, sur l'ensemble des solutions efficaces constitue, dès lors, un sujet de recherche essentiel dans ce domaine. Cependant, à notre connaissance, aucune méthode dans la littérature n'a été proposée à ce sujet.

Connaissant a priori la structure des préférences du décideur, nous proposons, dans ce travail, une méthode exacte pour résoudre le problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces du MOSLP. Cette méthode est inspirée de la méthode

d'Ecker et Song [ECKER ET SONG 94] et la méthode L-Shaped [VAN SLYKE ET WETS 69] qui traite les problèmes linéaires stochastiques à deux niveaux avec recours.

Ce problème est défini mathématiquement comme suit :

$$\begin{aligned} \max \quad & \phi(x) = d^T x \\ \text{s.à.} \quad & x \in E \end{aligned}$$

où

d , un vecteur de dimension $(1 \times n)$ ($d \in \mathbb{R}^n$).

$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction linéaire déterministe continue à maximiser.

E , l'ensemble des solutions efficaces du **MOSLP**.

Une complication additionnelle est superposée au problème classique qu'on a étudié dans le chapitre 1, par l'incorporation de l'aspect stochastique introduit par le MOSLP.

Notre méthode comporte deux grandes phases : la phase de modélisation qui consiste à transformer le MOSLP en un problème équivalent déterministe en adaptant l'approche de recours à deux niveaux et la phase de la résolution qui consiste, principalement à :

1. Dans un premier temps, déterminer une solution optimale du problème relaxé de (P) avec **la méthode L-Shaped** et utiliser la solution optimale obtenue comme point d'entrée dans le programme (P_{x^*}) (voir les théorèmes (1.6.2), (1.6.3) et (1.6.4) du chapitre 1) pour obtenir la solution efficace initiale du MOSLP.
2. En second lieu, étant donné une solution efficace courante, utiliser **la technique de pivotage d'Ecker et Song**, qui inclue **la technique d'Ecker et Kouada** pour l'identification des arêtes efficaces incidentes à une solution donnée, pour la recherche de la meilleure solution efficace en termes des préférences du décideur.

Remarque 3.4.1. Dans notre algorithme, nous avons utilisé une variante de l'algorithme d'Ecker et Song (voir [ECKER ET SONG 94]. Algorithme 5.2), et donc une technique de pivotage différente de celle que nous avons donné dans le chapitre 1 (voir algorithme d'Ecker et Song. Page 29), à savoir, à une solution efficace courante, nous génèrons directement la coupe sur le critère principal sans examiner les arêtes efficaces incidentes à la solution en question et l'exploration des arêtes efficaces se fait dans un seul cas lorsque l'on tombe sur une solution efficace sur la face de découpage.

3.4.1 Problème déterministe équivalent du MOSLP

Dans notre travail, nous avons adapté le modèle de recours pour transformer le problème (3.1) en un problème déterministe équivalent. Pour ce faire, nous supposons que le vecteur aléatoire, ξ , possède une distribution de probabilités discrète et finie, $\{(\xi_i, p_i), i = 1, \dots, N\}$.

1. Nous associons à chaque scénario ξ_i , un critère Z_{ki} , une matrice T_i et un vecteur h_i , pour mettre en évidence toutes les conséquences de toutes les réalisations possibles.
2. Revenant à l'idée de l'approche de recours, on suppose que le décideur peut préciser les coûts des pénalités, $q_i = q(\xi_i)$, des contraintes violées y_i . On ajoute, à chaque critère Z_{ki} , la fonction de recours $Q(x, \xi_i)$,

$$Q(x, \xi_i) = \min q_i^T y_i \\ \text{s.à. } Wy_i = h_i - T_i x, \quad y_i \geq 0.$$

On aura, ainsi, à minimiser l'espérance mathématique du coût total, $\tilde{Z}_k = \mathbb{E}[Z_k + Q(x, \xi)]$, $k = 1, \dots, p$.

Le problème stochastique multi-objectifs à 2-niveaux avec recours (**TSMOSPR** : **T**wo **S**tage **M**ultiple **O**bjective **S**tochastic **P**rogramm with **R**ecorse) résultant en termes des décisions du premier niveau est décrit par :

$$\begin{aligned} \text{“min”} \quad & \tilde{Z}_k = Z'_k + Q(x), \quad k = 1, \dots, p, \\ \text{s.à.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

avec

$$Z'_k = \mathbb{E}[Z_k] = \sum_{i=1}^N p_i Z_{ki} = \sum_{i=1}^N p_i C_k(\xi_i) x = \mathbb{E}[C_k(\xi)x], \tag{3.7}$$

et

$$Q(x) = \mathbb{E}[Q(x, \xi)] = \sum_{i=1}^N p_i Q(x, \xi_i). \tag{3.8}$$

3.4.2 Regions de faisabilité

Il est souvent commode de définir les ensembles réalisables associés au différents niveaux du problème stochastique avec recours. L'ensemble réalisable du TSMOSPR est divisé en deux ensembles.

S , l'ensemble réalisable du premier niveau déterminé par les contraintes déterministes, à savoir celles qui ne dépendent pas du vecteur aléatoire ξ (S est un polytope).

K , l'ensemble réalisable du second niveau, à savoir l'ensemble des décisions qui admettent des

décisions de recours (décisions de second niveau) réalisables indépendamment de S après l'occurrence d'un scénario. Cet ensemble est donné par :

$$K = \{x \mid Q(x) < \infty\}$$

Le problème linéaire stochastique multi-objectifs à 2-niveaux avec recours peut être reformulé simplement comme suit :

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{Z}_k = Z'_k + Q(x), \quad k = 1, \dots, p \\ \text{s.à.} \quad & x \in S \cap K. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Rappelons que le problème central que l'on veut étudier est le problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces du TSMOSPR (noté (P) nous gardons la même notation que le problème classique, voir section 1.6, page 15) décrit par :

$$\begin{aligned} (P) \quad \max \quad & \phi(x) = dx, \\ \text{s.à.} \quad & x \in E, \end{aligned} \quad (3.10)$$

où

d un vecteur de dimension $(1 \times n)$ ($d \in \mathbb{R}^n$).

$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction linéaire continue déterministe à maximiser.

E est l'ensemble des solutions efficaces du TSMOSPR.

Remarque 3.4.2. Nous adaptons, dans notre travail, le concept de solution efficace en moyenne, décrit dans la définition (3.3.1) et nous parlerons tout simplement ci-après d'une solution efficace du MOSLP au lieu d'une solution efficace en moyenne. Cet ensemble de solutions efficaces est donc généré par la résolution du TSMOSPR.

Nous associons à (P) le problème relaxé suivant :

$$\begin{aligned} (R) \quad \max \quad & \phi(x) = dx + Q(x) \\ \text{s.à.} \quad & x \in S \cap K \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.4.3 Description des grandes étapes de la méthode

En appliquant la reformulation de L-Shaped par l'introduction d'une variable auxiliaire θ pour estimer la valeur de la fonction de recours $Q(x)$, nous obtenons la formulation équivalente du TSMOSPR suivante que l'on note $(MOLP)$:

$$\begin{aligned} (MOLP) \quad \text{“min”} \quad & \tilde{Z}_k = Z'_k + \theta, \quad k = 1, \dots, p, \\ \text{s.à.} \quad & x \in \tilde{S}, \\ & \theta \geq Q(x), \end{aligned} \quad (3.12)$$

avec

$$\tilde{S} = \{x \in S \mid \sigma^T T_i x \geq \sigma^T h_i, i \in \{1, \dots, N\}\}.$$

Recherche d'une solution efficace initiale

Cette étape consiste à déterminer une solution efficace initiale du (MOSLP), qui impliquera l'introduction de la méthode L-Shaped dans l'algorithme.

Le choix de la solution efficace initiale est crucial dans le processus de résolution du problème (P), commençant par une bonne solution efficace proche de la solution optimale de (P) pourrait bien nous épargner de lents calculs. Dans ce contexte, nous proposons l'heuristique suivante, qui commence par résoudre le problème relaxé (R) de (P) en appliquant la méthode L-Shaped et puis vérifier l'efficacité de la solution obtenue en traitant le problème (P_{x^*}) dans l'ensemble réalisable courant (après avoir appliqué les coupes de faisabilité et d'optimalité générées par la méthode L-Shaped).

La reformulation L-Shaped du problème relaxé (R) nous conduit à la forme équivalente suivante (problème maître associé au problème relaxé) :

$$\begin{aligned} \max \quad & \tilde{\phi}(x) = \phi(x) + \theta \\ \text{s.à.} \quad & x \in \tilde{S}, \\ & \theta \geq Q(x). \end{aligned} \tag{3.13}$$

avec

$$\tilde{S} = \{x \in S \mid \sigma^T T_i x \geq \sigma^T h_i, i \in \{1, \dots, N\}\}.$$

la détermination d'une solution efficace initiale du TSMOSPR se fait en deux étapes complémentaires :

1. Appliquer la méthode L-Shaped au problème maître (3.13) associé au problème relaxé avec la condition initiale $\theta = -\infty$ sans aucune coupe de faisabilité et d'optimalité ($\tilde{S} = S$) et sans aucune restriction sur θ , $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $(\hat{x}, \hat{\theta})$ la solution obtenue.
2. Résoudre le problème (P_{x^*}) au point \hat{x} dans l'ensemble courant \tilde{S} (test d'efficacité). Si (P_{x^*}) n'admet pas une solution optimale finie, alors $E = \emptyset$, on termine. Sinon, si \hat{x} est efficace, on arrête le processus avec $(\hat{x}, \hat{\theta})$ solution efficace optimale du problème principal (P). Sinon utiliser la solution retournée par (P_{x^*}) comme solution efficace initiale du TSMOSPR.

Proposition 3.4.3. *Une solution efficace initiale du TSMOSPR, si elle existe, sera déterminée après un nombre fini d'itérations.*

Démonstration. Cela provient de l'ensemble S étant borné et de la technique L-Shaped : étant la matrice de recours W finie, le nombre de coupes de faisabilité et d'optimalité générées et qui sont à base de de la matrice de recours est limité et donc une solution optimale de (R) sera obtenue après un nombre fini d'itérations, ça d'une part et d'une autre part, les théorèmes (1.6.2), (1.6.3) et (1.6.4) montrent qu'en traitant le sous problème (P_{x^*}) , nous finissons par obtenir une solution efficace si elle existe. \square

Recherche d'une meilleure solution efficace

Soit \tilde{S}_M l'ensemble réduit induit de l'application des coupes de faisabilité et d'optimalité générées par L-Shaped et des coupes sur le critère principal :

$$\tilde{S}_M = \{x \in \tilde{S} \mid dx \geq d\tilde{x}\}.$$

Étant donné une solution efficace courante $\tilde{x} \in \tilde{S}_M$, on génère la coupe hyperplane $(dx \geq d\tilde{x})$ qui élimine tout les points $x \in \tilde{S}_M$ dont la valeur du critère principal est inférieure à $d\tilde{x}$. Cette coupe ne réduit pas nécessairement le domaine réalisable courant \tilde{S}_M .

La question qui se pose est comment déterminer la meilleure solution efficace, si elle existe, dans l'ensemble réduit (après l'ajout de la coupe sur le critère principal au point $\tilde{x} : dx \geq d\tilde{x}$)? Inspirés par la technique de pivotage d'Ecker et Song, Ceci peut se faire en minimisant les objectifs individuellement dans l'ensemble réduit en appliquant la méthode L-Shaped.

On considère le problème linéaire multicritère déterministe (\overline{MOLP}) ,

$$\begin{aligned} (\overline{MOLP}) \quad & \text{"min"} \quad \tilde{Z}_k = Z'_k + \theta, & k = 1, \dots, p, \\ & \text{s.à.} \quad x \in \tilde{S}_M, \\ & \theta \geq Q(x), \end{aligned} \tag{3.14}$$

avec

$$\tilde{S}_M = \{x \in \tilde{S} \mid dx \geq d\tilde{x}\}.$$

On définit les problèmes mono-critères, (I_k) , $k = 1, \dots, p$, comme suit :

$$\begin{aligned} (I_k) \quad & \text{min} \quad \tilde{Z}_k = Z'_k + \theta, \\ & \text{s.à.} \quad x \in \tilde{S}_M, \\ & \theta \geq Q(x). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Étant donné le problème maître (I_k) , trois situations peuvent apparaître à l'issue de la résolution de (I_k) . Soit x^k le point réalisable optimal retourné par la méthode L-Shaped.

Situation 1 . x^k est efficace et ($dx^k > d\tilde{x}$). On choisit x^k comme étant la nouvelle solution efficace optimale courante, on génère la coupe hyperplane ($\phi(x) \geq dx^k$) et on continue le processus de recherche d'une solution efficace qui augmente en valeur la fonction $\phi(x)$ dans l'ensemble réduit résultant \tilde{S}_M .

Situation 2 . x^k est efficace et ($dx^k = d\tilde{x}$). La solution x^k est sur la face de découpage. On cherche dans \tilde{S}_M , en utilisant la technique d'Ecker et Kouada, une arête efficace, (x^k, \bar{x}) si elle existe, incidente à x^k qui apporte une amélioration en valeur de dx et qui admet au moins une décision de recours réalisable, sinon (si $Q(\bar{x}) = \infty$) rajouter les coupes de faisabilité et d'optimalité au problème maître (I_k) tant que nécessaire et vérifier le test d'efficacité.

Si une telle solution existe, on utilise \bar{x} comme une nouvelle solution efficace courante, on génère la coupe ($\phi(x) \geq d\bar{x}$) et on poursuit le processus de recherche d'une meilleure solution si elle existe.

Sinon on passe à traiter le problème (I_{k+1}).

Cela veut dire qu'une solution efficace \bar{x} adjacente à x^k qui incrémente la valeur de dx n'est prise en considération seulement si les $Q(\bar{x}, \xi_i)$ sont réalisables pour tout $\xi_i, i = 1, \dots, N$ et le test d'optimalité est vérifié.

Situation 3 . x^k n'est pas efficace. x^k est dominée par des solutions examinées auparavant. On résout le problème (I_{k+1}).

À partir d'un point \tilde{x} , si pour toute solution optimale x^k de (I_k) pour $k = 1, \dots, p$, aucune des deux premières situations citées n'est rencontrée au cours de l'exécution de la procédure indiquant que x^k est dominée par des solutions efficaces déterminées au cours des étapes précédentes ou bien, y'a plus de solutions efficaces du (MOSLP) qui améliorent la valeur de dx , alors \tilde{x} est une solution optimale de (P).

Proposition 3.4.4. *La procédure se termine avec une solution efficace du problème (MOLP) qui incrémente la valeur de dx si elle existe.*

Démonstration. Dans le pire des cas, en traitant les problèmes (I_k) successivement dans le même ensemble réalisable \tilde{S}_M , on examine toutes les solutions optimales x^k associées aux problèmes (I_k) (un nombre fini de problèmes) et donc, si cette solution efficace du (MOLP) existe (si elle n'est pas encore explorée), elle doit être une des solutions optimales des (I_k). \square

Étape finale

On termine l'algorithme :

- lorsqu'on ne peut plus effectuer des opérations de pivot indiquant que le domaine courant ne contient plus de solutions réalisables,
- ou bien, lorsque tout les points optimaux des (I_k) sont sur la coupe hyperplane et on ne peut plus passer, à partir d'un point efficace (lors de la procédure de recherche d'une meilleure solution efficace), à un autre point efficace qui augmente en valeur la fonction dx (soit il n'existe pas une solution efficace adjacente meilleure, soit cette solution existe mais on trouve pas de solutions efficaces qui engendrent des problèmes de second niveau réalisables dans cette direction),
- ou encore, à la première étape, si le problème relaxé (R) n'est pas réalisable ou bien la solution optimale obtenue s'avère efficace (par rapport au problème relaxé) et vérifie les tests et de faisabilité et d'optimalité.

Théorème 3.4.5. *Sous l'hypothèse S borné et non vide, l'algorithme de recherche d'une solution optimale du problème (P) converge en un nombre fini d'étapes.*

Démonstration. La proposition (3.4.3) nous garantit que l'on peut trouver une solution efficace initiale de (P) si elle existe. Au fur et à mesure d'avancer dans l'algorithme, le domaine de faisabilité devient de plus en plus restreint dû aux coupes répétées de faisabilité et d'optimalité générées par la méthode L-Shaped (que l'on impose lors de la résolution du problème maître en question) qui éliminent strictement les points non réalisables, sans les remettre en question et aussi à l'application des coupes d'Ecker et Song sur le critère principal afin d'éviter des solutions optimales locales de (P) . En outre, d'après la proposition (3.4.4), à une certaine étape, lorsque l'on tombe sur une solution efficace du $(MOLP)$ sur la coupe hyperplane et qu'elle n'admet pas des d'arêtes efficaces incidentes qui améliore le critère principal, on change complètement la direction de recherche d'une meilleure solution en résolvant le problème (I_k) suivant, et on continue le processus. On arrête le processus lorsque toutes les solutions optimales retournées des problèmes (I_k) , $k = 1, \dots, p$ se trouvent sur la face de découpage ce qui explique que toutes les solutions efficaces du $(MOLP)$ ont été exploré du moment que l'ensemble E est connexe (voir le théorème (1.6.5) sur la propriété de connexité de E). Toutes ces conditions mènent à la convergence de l'algorithme en un nombre fini d'étapes. \square

3.4.4 Formulation de l'algorithme

L'algorithme génère une solution optimale du problème (P) , sans pour autant énumérer toutes les solutions efficaces du $(MOSLP)$. Une description détaillée de cet algorithme d'incorporation de la méthode L-Shaped dans la technique d'Ecker et Song est donnée.

Algorithme. (Optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces du TSMOSPR).

⟨⟨ **Étape 0** ⟩⟩ (Initialisation)

Appliquer la **procédure L-Shaped** au problème (R) avec la condition initiale $\theta = -\infty$ et sans aucune coupe de faisabilité et d'optimalité ($\tilde{S} = S$) (sans aucune restriction sur θ).

– Si (R) n'est pas réalisable alors (P) est aussi non réalisable. **Terminer.**

– Sinon, Soit $(\hat{x}, \hat{\theta})$ la solution optimale obtenue.

Résoudre le problème (P_{x^*}) au point \hat{x} dans l'ensemble courant \tilde{S} .

– Si, (P_{x^*}) n'admet pas une solution optimale finie, alors l'ensemble des solutions efficaces du TSMOSPR est vide ($E = \emptyset$). **Terminer.**

– Sinon, si $\hat{x} \in E$. **Terminer**, avec $(x^{opt}, \theta^{opt}) = (\hat{x}, \hat{\theta})$ et $\phi^{opt} = \phi(\hat{x})$.

Sinon, soit \tilde{x} la solution optimale de (P_{x^*}) , utiliser \tilde{x} comme solution efficace initiale du TSMOSPR. Poser $(x^{opt}, \theta^{opt}) = (\tilde{x}, \tilde{\theta})$ et $\phi^{opt} = \phi(\tilde{x})$. Générer la coupe $dx \geq \phi^{opt}$.

Poser $\kappa = 1$ et aller à l'étape κ .

⟨⟨ **Étape κ** ⟩⟩ (Exploration et progression)

Appliquer la méthode **procédure L-Shaped** et résoudre le problème (I_κ) , soit $(x^\kappa, \theta^\kappa)$ la solution optimale obtenue. Évaluer $\phi(x^\kappa) = dx^\kappa$ et tester l'efficacité de x^κ , alors :

⟨ $\kappa 1$ ⟩ Si x^κ n'est pas efficace. Poser $\kappa = \kappa + 1$.

⟨ $\kappa 2$ ⟩ Si x^κ est efficace et $(dx^\kappa > dx^{opt})$. Poser $(x^{opt}, \theta^{opt}) = (x^\kappa, \theta^\kappa)$, $\phi^{opt} = \phi(x^\kappa)$ et générer la coupe $dx \geq \phi^{opt}$. Poser $\kappa = 1$.

⟨ $\kappa 3$ ⟩ Si x^κ est efficace et $(dx^\kappa = dx^{opt})$ (x^κ se trouve sur la coupe hyperplane). Utiliser la **technique d'Ecker et Kouada** (décrite dans le chapitre 1) et déterminer, si elles existent, les arêtes efficaces incidentes à x^κ . Soit x_j^κ la solution efficace obtenue en incrémentant la variable hors base x_j^N correspondante à x^κ .

– S'il existe x_j^κ tel que $dx_j^\kappa > dx^\kappa$. Tester si $(Q(x_j^\kappa, \xi_i) < \infty)$, $\forall \xi_i, i = 1, \dots, N$, ajouter les coupes de faisabilité (2.31) si nécessaire, évaluer $Q(x_j^\kappa)$, vérifier le test d'optimalité et le test d'efficacité.

Poser $(x^{opt}, \theta^{opt}) = (x_j^\kappa, \theta_j^\kappa)$, évaluer $\phi^{opt} = dx_j^\kappa$ et générer la coupe $dx \geq \phi^{opt}$. Poser $\kappa = 1$.

– Sinon. Poser $\kappa = \kappa + 1$.

$\langle \kappa 4 \rangle$ Si $\kappa \leq p$, aller l'étape κ . Sinon **Terminer** avec (x^{opt}, θ^{opt}) la solution optimale de (P) avec la valeur optimale ϕ^{opt} correspondante.

$\langle \kappa 5 \rangle$ Si le problème (I_κ) n'est pas réalisable, **Terminer** avec (x^{opt}, θ^{opt}) la solution optimale de (P) avec la valeur optimale ϕ^{opt} correspondante.

3.4.5 Exemple illustratif

Nous considérons le problème central suivant :

$$(P) \quad \max \quad -2x_1 - x_2, \quad (3.16)$$

$$s.à. \quad x \in E.$$

E , l'ensemble des solutions efficace du (MOSLP).

Nous considérons le problème MOSLP (d'une structure similaire à celle du problème (3.1)), avec trois objectifs et deux contraintes stochastiques, subordonnés à un vecteur aléatoire ξ à deux éventualités (ξ suit une loi de bernoulli) équiprobables, ξ_1 et ξ_2 . Nous supposons que le décideur ait la possibilité de mener des actions correctives une fois un scénario est réalisé, pour avoir la possibilité d'utiliser l'approche de recours pour la conversion du problème MOSLP en un problème déterministe équivalent (TSMOSPR).

Les données du problème sont comme suit :

$p = 3$, le nombre d'objectifs du problème que nous désirons maximiser,

$n_0 = 4$; $m_0 = 2$, la dimension de la matrice de recours W : deux contraintes stochastiques et quatre variables de recours, y ,

$m = n = 2$, la dimension de la matrice technologique A : deux variables de décisions du premier niveau (où du problème maître), x , et deux contraintes déterministes, représentées par l'ensemble, S (voir (3.1)) :

$$\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &\geq -8, \\ x_1 + x_2 &\leq 5, \end{aligned}$$

$$C_1(\xi_1) = (-9, 4); \quad C_2(\xi_1) = (3, -5); \quad C_3(\xi_1) = (8, -11);$$

$$C_1(\xi_2) = (3, -5); \quad C_2(\xi_2) = (7, 1); \quad C_3(\xi_2) = (-4, 9);$$

$$T(\xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, T(\xi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, h(\xi_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, h(\xi_2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$q(\xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T, q(\xi_2) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T, p(\xi_1) = \frac{1}{2}, p(\xi_2) = \frac{1}{2};$$

$$W(\xi) = W = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & -6 \end{pmatrix};$$

Calcul de $\mathbb{E}(Z_i(x, \xi))$, $i = 1, 2, 3$:

$$Z'_1 = \mathbb{E}(Z_1(x, \xi)) = \frac{1}{2}C_1(\xi_1)x + \frac{1}{2}C_1(\xi_2)x = -3x_1 + x_2.$$

$$Z'_2 = \mathbb{E}(Z_2(x, \xi)) = \frac{1}{2}C_2(\xi_1)x + \frac{1}{2}C_2(\xi_2)x = 5x_1 - 2x_2.$$

$$Z'_3 = \mathbb{E}(Z_3(x, \xi)) = \frac{1}{2}C_3(\xi_1)x + \frac{1}{2}C_3(\xi_2)x = 2x_1 - x_2.$$

L'adaptation de l'approche de recours donne le problème stochastique multi-objectif à 2-niveaux avec recours suivant (TSMOSPR) :

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{Z}_1 = -3x_1 + x_2 + Q(x) \\ \min \quad & \tilde{Z}_2 = 5x_1 - 2x_2 + Q(x) \\ \min \quad & \tilde{Z}_3 = 2x_1 - x_2 + Q(x) \\ \text{s.à.} \quad & 4x_1 - 2x_2 \leq 8, \\ & x_1 + x_2 \leq 5, \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}Q(x, \xi_1) + \frac{1}{2}Q(x, \xi_2).$$

$Q(x, \xi_1)$ et $Q(x, \xi_2)$ les deux problèmes du second niveau associés aux deux scénarios ξ_1 et ξ_2 respectivement :

$$\begin{aligned} Q(x, \xi_1) &= \min \quad q^T(\xi_1)y(\xi_1) \\ \text{s.à.} \quad & Wy(\xi_1) = h(\xi_1) - T(\xi_1)x, \\ & y(\xi_1) \geq 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} Q(x, \xi_2) &= \min \quad q^T(\xi_2)y(\xi_2) \\ \text{s.à.} \quad & Wy(\xi_2) = h(\xi_2) - T(\xi_2)x, \\ & y(\xi_2) \geq 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

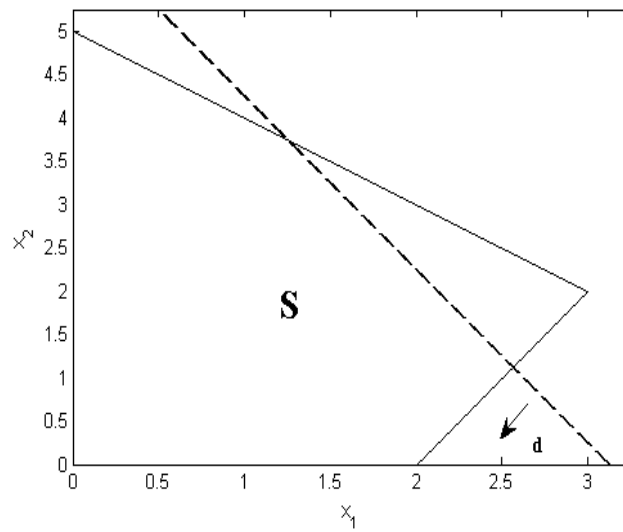


FIG. 3.1 – Region de faisabilité S et la direction de maximisation d .

Initialisation

Comme expliqué dans l'étape initialisation de l'algorithme, nous devons résoudre le problème relaxé (R) par L-Shaped pour déterminer une solution efficace initiale. Cependant, pour raison d'illustrer toutes les étapes de la méthode, nous avons dû prendre le chemin le plus long en considérant une solution efficace qui est plus éloignée de la solution optimale de (P).

Nous démarrons notre algorithme par le point réalisable (arbitraire) $x = (3, 2) \in S$ avec $\phi(x) = -8$. Ce point est représenté dans le tableau (3.1).

C_1^B	C_2^B	C_3^B	B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4
3	-5	-2	x_1	3	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
-1	2	1	x_2	2	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
$-Z'_1 = 7$			$C_1^J - Z_1^J$	-7	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$-Z'_2 = -11$			$C_2^J - Z_2^J$	11	0	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}$
$-Z'_3 = -4$			$C_3^J - Z_3^J$	4	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\phi = -8$			$d^j - \phi^j$	8	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$

TAB. 3.1 – Le tableau associé à la solution optimale $x = (3, 2)$.

– *Test de faisabilité de $x = (3, 2)$*

Pour tester la faisabilité des problèmes du second niveau $Q(x, \xi_1)$ et $Q(x, \xi_2)$, on résout le problème (2.30) pour ξ_1 et ξ_2 pour déterminer les vecteurs σ_1 et σ_2 avec :

$$h(\xi_1) - T(\xi_1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix};$$

$$h(\xi_2) - T(\xi_2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{l} \max \quad -4\sigma_1^1 + 9\sigma_1^2 \\ \text{s.à.} \quad -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad -\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \text{le maximum est atteint à} \\ \sigma_1^T = (\sigma_1^1, \sigma_1^2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right). \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \max \quad 3\sigma_2^1 - 16\sigma_2^2 \\ \text{s.à.} \quad -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ \quad \quad -\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ \quad \quad 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\ \quad \quad \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\ \quad \quad \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \text{le maximum est atteint à} \\ \sigma_2^T = (\sigma_2^1, \sigma_2^2) = (0, 0). \end{array} \right.$$

$$\sigma_1^T [h(\xi_1) - T(\xi_1)x] = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} > 0,$$

$$\sigma_2^T [h(\xi_2) - T(\xi_2)x] = (0, 0) \begin{pmatrix} 3 \\ -16 \end{pmatrix} = 0 \leq 0.$$

Cela implique que le problème du second niveau $Q(x, \xi_1)$ n'est pas réalisable. On génère la coupe de faisabilité de la forme (2.31), (voir FIG. 3.2) :

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

équivalente à $-\frac{5}{3}x_2 + x_5 = -\frac{11}{3}$, avec x_5 la variable d'écart introduite par la contrainte, l'ajout de cette contrainte au tableau précédant, engendre le tableau (3.2).

En procédant par le dual du simplexe, on obtient la solution $x = \left(\frac{14}{5}, \frac{11}{5}\right)$ donnée par le tableau (3.3).

– *Test de faisabilité de $x = \left(\frac{14}{5}, \frac{11}{5}\right)$*

Testons la faisabilité des problèmes du second niveau engendrés par $x = \left(\frac{14}{5}, \frac{11}{5}\right)$,

C_1^B	C_2^B	C_3^B	B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	-5	-2	x_1	3	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0
-1	2	1	x_2	2	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	0
0	0	0	x_5	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{5}{18}$	$\frac{10}{9}$	1
$-Z'_1 = 7$			$C_1^J - Z_1^J$	-7	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
$-Z'_2 = -11$			$C_2^J - Z_2^J$	11	0	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}$	0
$-Z'_3 = -4$			$C_3^J - Z_3^J$	4	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
$\phi = -8$			$d^J - \phi^J$	8	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$	0

TAB. 3.2 – Le tableau augmenté par $\frac{5}{3}x_2 \geq \frac{11}{3}$.

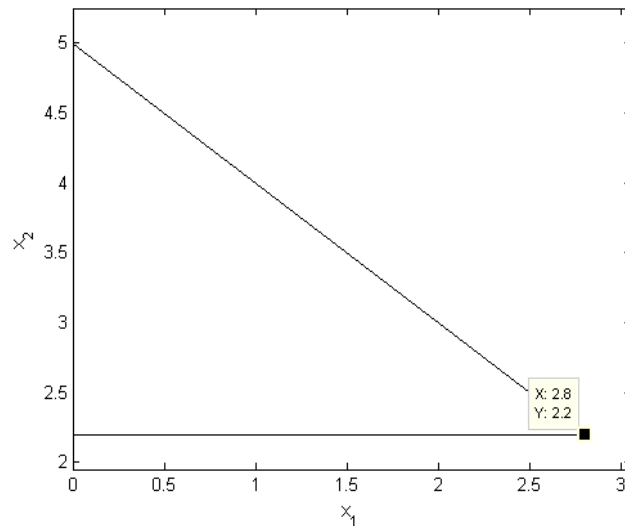


FIG. 3.2 – L'ensemble réalisable \tilde{S} induit de l'ajout de la coupe de faisabilité $\frac{5}{3}x_2 \geq \frac{11}{3}$.

C_1^B	C_2^B	C_3^B	B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	-5	-2	x_1	$\frac{14}{5}$	1	0	0	1	$\frac{3}{5}$
-1	2	1	x_2	$\frac{11}{5}$	0	1	0	0	$-\frac{3}{5}$
0	0	0	x_3	$\frac{6}{5}$	0	0	1	-4	$-\frac{18}{5}$
$-Z'_1 = \frac{31}{5}$			$C_1^J - Z_1^J$	$-\frac{31}{5}$	0	0	0	-3	$-\frac{12}{5}$
$-Z'_2 = -\frac{38}{5}$			$C_2^J - Z_2^J$	$\frac{38}{5}$	0	0	0	5	$\frac{21}{5}$
$-Z'_3 = -\frac{17}{5}$			$C_3^J - Z_3^J$	$\frac{17}{5}$	0	0	0	2	$\frac{9}{5}$
$\phi = -\frac{39}{5}$			$d^J - \phi^J$	$\frac{39}{5}$	0	0	0	2	$\frac{3}{5}$

TAB. 3.3 – Le tableau associé à la solution $x = (\frac{14}{5}, \frac{11}{5})$.

$$h(\xi_1) - T(\xi_1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{5} \\ \frac{42}{5} \end{pmatrix};$$

$$h(\xi_2) - T(\xi_2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ -\frac{81}{5} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{l} \max \quad -\frac{21}{5}\sigma_1^1 + \frac{42}{5}\sigma_1^2 \\ \text{s.à.} \quad -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad -\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \text{le maximum est atteint à} \\ \sigma_1^T = (\sigma_1^1, \sigma_1^2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right). \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \max \quad \frac{16}{5}\sigma_2^1 - \frac{81}{5}\sigma_2^2 \\ \text{s.à.} \quad -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ \quad \quad -\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ \quad \quad 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\ \quad \quad \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\ \quad \quad \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \text{le maximum est atteint à} \\ \sigma_2^T = (\sigma_2^1, \sigma_2^2) = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right). \end{array} \right.$$

$$\sigma_1^T[h(\xi_1) - T(\xi_1)x] = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{21}{5} \\ \frac{42}{5} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\sigma_2^T[h(\xi_2) - T(\xi_2)x] = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ -\frac{81}{5} \end{pmatrix} = -\frac{72}{35} < 0.$$

Cela implique que la solution optimale obtenue, $x = (\frac{14}{5}, \frac{11}{5})$, engendre des problèmes du second niveau, $Q(x, \xi_1)$ et $Q(x, \xi_2)$, réalisables.

– *Test d'optimalité de $x = (\frac{14}{5}, \frac{11}{5})$*

Pour tester l'optimalité $x = (\frac{14}{5}, \frac{11}{5})$, on résout le problème (2.27) pour ξ_1 et ξ_2 .

$$\begin{array}{l} \max \quad -\frac{21}{5}\pi_1^1 + \frac{42}{5}\pi_1^2 \\ s.\dot{a}. \quad -2\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \leq 1 \\ \quad \quad -\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad 2\pi_1^1 - 5\pi_1^2 \leq 6 \\ \quad \quad \pi_1^1 - 6\pi_1^2 \leq 2 \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} \text{le maximum est atteint à} \\ \pi_1^T = (\pi_1^1, \pi_1^2) = (-1, -\frac{1}{2}). \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \max \quad \frac{16}{5}\pi_2^1 - \frac{81}{5}\pi_2^2 \\ s.\dot{a}. \quad -2\pi_2^1 + 3\pi_2^2 \leq 5 \\ \quad \quad -\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \leq 3 \\ \quad \quad 2\pi_2^1 - 5\pi_2^2 \leq 2 \\ \quad \quad \pi_2^1 - 6\pi_2^2 \leq 1 \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} \text{le maximum est atteint à} \\ \pi_2^T = (\pi_2^1, \pi_2^2) = (1, 0). \end{array} \right.$$

On a : $Q(x) = \frac{1}{2}Q(x, \xi_1) + \frac{1}{2}Q(x, \xi_2)$,

où

$$Q(x, \xi_1) = \pi_1^T [h(\xi_1) - T(\xi_1)x] = \begin{pmatrix} -1, & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{21}{5} \\ \frac{42}{5} \end{pmatrix} = 0,$$

$$Q(x, \xi_2) = \pi_2^T [h(\xi_2) - T(\xi_2)x] = (1, 0) \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ -\frac{81}{5} \end{pmatrix} = \frac{16}{5},$$

alors on trouve $Q(x) = \frac{8}{5}$.

Or, $\theta = -\infty < Q(x) = \frac{8}{5}$, et donc, on introduit la coupe d'optimalité de la forme (2.34),

$$\theta \geq \frac{1}{2}\pi_1^T (h(\xi_1) - T(\xi_1)x) + \frac{1}{2}\pi_2^T (h(\xi_2) - T(\xi_2)x), \quad \text{où,} \quad \theta \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2.$$

On aura, après avoir rajouté la variable d'écart s_1 : $-\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2 - \theta + s_1 = -\frac{1}{4}$, et en réécrivant la contrainte en fonction des variables hors base, x_4 et x_5 , on aura l'équation $\frac{1}{2}x_4 + \frac{21}{20}x_5 - \theta + s_1 = -\frac{8}{5}$.

On introduit cette contrainte au problème, on obtient le tableau (3.4).

C_1^B	C_2^B	C_3^B	B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ	s_1
3	-5	-2	x_1	$\frac{14}{5}$	1	0	0	1	$\frac{3}{5}$	0	0
-1	2	1	x_2	$\frac{11}{5}$	0	1	0	0	$-\frac{3}{5}$	0	0
0	0	0	x_3	$\frac{6}{5}$	0	0	1	-4	$-\frac{18}{5}$	0	0
0	0	0	s_1	$-\frac{8}{5}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{21}{20}$	-1	1
$-Z'_1 = \frac{31}{5}$			$C_1^J - Z_1^J$	$-\frac{31}{5}$	0	0	0	-3	$-\frac{12}{5}$	0	0
$-Z'_2 = -\frac{38}{5}$			$C_2^J - Z_2^J$	$\frac{38}{5}$	0	0	0	5	$\frac{21}{5}$	0	0
$-Z'_3 = -\frac{17}{5}$			$C_3^J - Z_3^J$	$\frac{17}{5}$	0	0	0	2	$\frac{9}{5}$	0	0
$\phi = -\frac{39}{5}$			$d^J - \phi^J$	$\frac{39}{5}$	0	0	0	2	$\frac{3}{5}$	0	0

TAB. 3.4 – Le tableau associé à l'ajout de la coupe $\theta \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2$.

On applique le dual du simplexe, on obtient le tableau optimal (3.5).

C_1^B	C_2^B	C_3^B	B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ	s_1
3	-5	-2	x_1	$\frac{14}{5}$	1	0	0	1	$\frac{3}{5}$	0	0
-1	2	1	x_2	$\frac{11}{5}$	0	1	0	0	$-\frac{3}{5}$	0	0
0	0	0	x_3	$\frac{6}{5}$	0	0	1	-4	$-\frac{18}{5}$	0	0
1	1	1	θ	$\frac{8}{5}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{21}{20}$	1	-1
$-Z'_1 = \frac{31}{5}$			$C_1^J - Z_1^J$	$-\frac{31}{5}$	0	0	0	-3	$-\frac{12}{5}$	0	0
$-Z'_2 = -\frac{38}{5}$			$C_2^J - Z_2^J$	$\frac{38}{5}$	0	0	0	5	$\frac{21}{5}$	0	0
$-Z'_3 = -\frac{17}{5}$			$C_3^J - Z_3^J$	$\frac{17}{5}$	0	0	0	2	$\frac{9}{5}$	0	0
$\phi = -\frac{39}{5}$			$d^J - \phi^J$	$\frac{39}{5}$	0	0	0	2	$\frac{3}{5}$	0	0

TAB. 3.5 – Le tableau optimal associé à l'ajout de la coupe $\theta \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2$.

$\theta = \frac{8}{5} = Q(x)$. Alors $x = (\frac{14}{5}, \frac{11}{5})$ est la solution de base réalisable optimale dans la region de faisabilité courante (voir FIG. 3.2). On la note x^0 .

$\mathbf{x}^0 = (\frac{14}{5}, \frac{11}{5})$ est la première solution efficace qu'on obtient avec une pénalité $\theta^0 = \frac{8}{5}$ et le vecteur critère correspondant $(\mathbf{Z}'_1, \mathbf{Z}'_2, \mathbf{Z}'_3) = (-\frac{31}{5}, \frac{38}{5}, \frac{17}{5})$.

On pose $(\mathbf{x}^{\text{opt}}, \theta^{\text{opt}}) = (\mathbf{x}^0, \theta^0)$ et $\phi^{\text{opt}} = -\frac{39}{5}$.

– On génère la coupe d'Ecker et Song $-2x_1 - x_2 \geq -\frac{39}{5}$ équivalente à $-2x_4 - \frac{3}{5}x_5 + x_6 = 0$ avec x_6 la variable d'écart introduite par la contrainte. On rajoute la contrainte au problème, on obtient le tableau (3.6). On pose $\kappa = 1$ et on passe l'étape 1 pour résoudre le problème maître I_1 dans \tilde{S}_M .

$C_1'^B$	$C_2'^B$	$C_3'^B$	B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ	s_1
3	-5	-2	x_1	$\frac{14}{5}$	1	0	0	1	$\frac{3}{5}$	0	0	0
-1	2	1	x_2	$\frac{11}{5}$	0	1	0	0	$-\frac{3}{5}$	0	0	0
0	0	0	x_3	$\frac{6}{5}$	0	0	1	-4	$-\frac{18}{5}$	0	0	0
1	1	1	θ	$\frac{8}{5}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{21}{20}$	0	1	-1
0	0	0	x_6	0	0	0	0	-2	$-\frac{3}{5}$	1	0	0
$-Z_1' = \frac{31}{5}$			$C_1'^J - Z_1'^J$	$-\frac{31}{5}$	0	0	0	-3	$-\frac{12}{5}$	0	0	0
$-Z_2' = -\frac{38}{5}$			$C_2'^J - Z_2'^J$	$\frac{38}{5}$	0	0	0	5	$\frac{21}{5}$	0	0	0
$-Z_3' = -\frac{17}{5}$			$C_3'^J - Z_3'^J$	$\frac{17}{5}$	0	0	0	2	$\frac{9}{5}$	0	0	0
$\phi = -\frac{39}{5}$			$d^J - \phi^J$	$\frac{39}{5}$	0	0	0	2	$\frac{3}{5}$	0	0	0

TAB. 3.6 – Le tableau augmenté par $-2x_1 - x_2 \geq -\frac{39}{5}$.**Étape 1**

On résout le problème mono-objectif (I_1) dans \tilde{S}_M . Nous remarquons (d'après le tableau (3.6)) que $x = (\frac{14}{5}, \frac{11}{5})$ est la solution optimale du problème (I_1) .

La solution $x = (\frac{14}{5}, \frac{11}{5}) = x^0$, est sur face correspondante à la coupe hyperplane. Et donc, on doit vérifier s'il existe une arête efficace incidente à x améliorant le critère principal $\phi(x)$. Pour ce faire, on applique la technique d'Ecker et Kouada. On construit le tableau \mathfrak{T} et après une seule opération pivot, pour avoir une constante non négative, on obtient le tableau \mathfrak{T}_p :

	v_1	v_2	v_3	w_4	w_5
$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{5}{4}$
$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{5}{12}$

TAB. 3.7 – Le tableau \mathfrak{T}_p approprié à $x = (\frac{14}{5}, \frac{11}{5}) = x^0$.

En observant \mathfrak{T}_p , on voit clairement que w_5 est une variable non redondante dans \mathfrak{X} (w_5 est une variable hors base) et donc l'incrément de la variable hors base x_5 conduit à une arête efficace incidente à x^0 et entraîne une amélioration de $\phi(x)$.

Faisant rentrer x_5 dans la base, on aura une nouvelle solution optimale $x = (0, 5)$, donnée par le tableau (3.8).

C_1^{B}	C_2^{B}	C_3^{B}	B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ	s_1
3	-5	-2	x_5	$\frac{14}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$	1	0	0	0
-1	2	1	x_2	5	1	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	x_3	18	6	0	1	2	0	0	0	0
1	1	1	θ	$\frac{13}{2}$	$\frac{7}{4}$	0	0	$\frac{5}{4}$	0	0	1	-1
0	0	0	x_6	$\frac{14}{5}$	1	0	0	-1	0	1	0	0
$-Z_1' = -5$	$C_1^J - Z_1^J$			5	4	0	0	1	0	0	0	0
$-Z_2' = 10$	$C_2^J - Z_2^J$			-10	-7	0	0	-2	0	0	0	0
$-Z_3' = 5$	$C_3^J - Z_3^J$			-5	-3	0	0	-1	0	0	0	0
$\phi = -5$	$d^J - \phi^J$			5	-1	0	0	1	0	0	0	0

TAB. 3.8 – Le tableau correspondant à la solution $x = (0, 5)$.

– Test de faisabilité de $x = (0, 5)$

Testons la faisabilité des problèmes du second niveau engendrés par $x = (0, 5)$,

$$h(\xi_1) - T(\xi_1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$h(\xi_2) - T(\xi_2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -19 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{l} \max \quad -7\sigma_1^1 \\ \text{s.à.} \quad -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad -\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \text{le maximum est atteint à} \\ \sigma_1^T = (\sigma_1^1, \sigma_1^2) = (0, 0). \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \max \quad 6\sigma_2^1 - 19\sigma_2^2 \\ \text{s.à.} \quad -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ \quad \quad -\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ \quad \quad 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\ \quad \quad \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\ \quad \quad \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \text{le maximum est atteint à} \\ \sigma_2^T = (\sigma_2^1, \sigma_2^2) = (0, 0). \end{array} \right.$$

$\sigma_1^T = \sigma_2^T = 0$, cela implique que la solution optimale obtenue, $x = (0, 5)$, engendre des problèmes du second niveau, $Q(x, \xi_1)$ et $Q(x, \xi_2)$, réalisables.

– Test d'optimalité de $x = (0, 5)$

Pour tester l'optimalité de $x = (0, 5)$, on résout le problème (2.27) pour ξ_1 et ξ_2 .

$$\begin{array}{l} \max \quad -7\pi_1^1 \\ \text{s.à.} \quad -2\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \leq 1 \\ \quad \quad -\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad 2\pi_1^1 - 5\pi_1^2 \leq 6 \\ \quad \quad \pi_1^1 - 6\pi_1^2 \leq 2 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \text{le maximum est atteint à} \\ \pi_1^T = (\pi_1^1, \pi_1^2) = (-1, -\frac{1}{2}). \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \max \quad 6\pi_2^1 - 19\pi_2^2 \\ \text{s.à.} \quad -2\pi_2^1 + 3\pi_2^2 \leq 5 \\ \quad \quad -\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \leq 3 \\ \quad \quad 2\pi_2^1 - 5\pi_2^2 \leq 2 \\ \quad \quad \pi_2^1 - 6\pi_2^2 \leq 1 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \text{le maximum est atteint à} \\ \pi_2^T = (\pi_2^1, \pi_2^2) = (1, 0). \end{array} \right.$$

On a : $Q(x) = \frac{1}{2}Q(x, \xi_1) + \frac{1}{2}Q(x, \xi_2)$,

où

$$Q(x, \xi_1) = \pi_1^T [h(\xi_1) - T(\xi_1)x] = \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} = 7,$$

$$Q(x, \xi_2) = \pi_2^T [h(\xi_2) - T(\xi_2)x] = (1, 0) \begin{pmatrix} 6 \\ -19 \end{pmatrix} = 6,$$

et donc $Q(x) = \frac{13}{2}$.

$\theta = Q(x) = \frac{13}{2}$, alors $x = (0, 5)$ est une solution optimale avec une pénalité $\theta = \frac{13}{2}$, on la note x^1 .

$\mathbf{x}^1 = (0, 5)$ est la deuxième solution efficace qu'on obtient avec une pénalité $\theta^1 = \frac{13}{2}$ et le vecteur critère correspondant $(\mathbf{Z}'_1, \mathbf{Z}'_2, \mathbf{Z}'_3) = (5, -10, -5)$ et $\phi(x^1) = -5 > \phi^{opt}$.

On pose $(\mathbf{x}^{opt}, \theta^{opt}) = (\mathbf{x}^1, \theta^1)$ et $\phi^{opt} = -5$.

– On génère la coupe d'Ecker et Song sur le critère principal $-2x_1 - x_2 \geq -5$, équivalente à $x_1 - x_4 + x_7 = 0$ avec x_7 une variable d'écart. On rajoute la contrainte au problème (I_1) (voir le tableau (3.9)), et on résout à nouveau (I_1) dans le domaine \tilde{S}_M courant (voir la figure (3.3)).

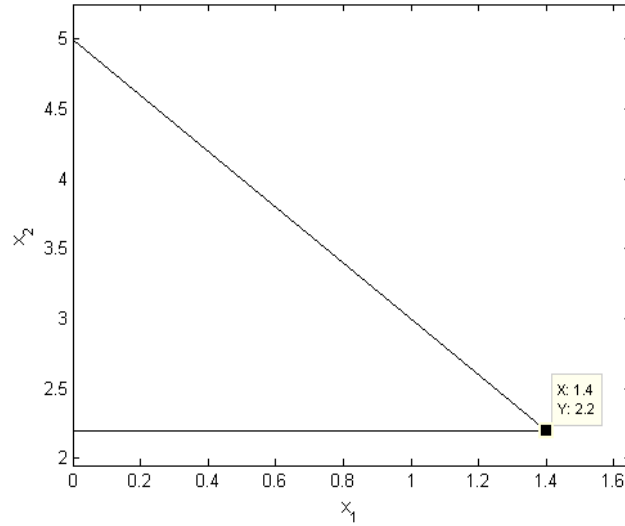


FIG. 3.3 – L'ensemble \tilde{S}_M , réalisable induit de l'ajout de la coupe $-2x_1 - x_2 \geq -5$

C_1^B	C_2^B	C_3^B	B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ	s_1
3	-5	-2	x_5	$\frac{14}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$	1	0	0	0	0
-1	2	1	x_2	5	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	x_3	18	6	0	1	2	0	0	0	0	0
1	1	1	θ	$\frac{13}{2}$	$\frac{7}{4}$	0	0	$\frac{5}{4}$	0	0	0	1	-1
0	0	0	x_6	$\frac{14}{5}$	1	0	0	-1	0	1	0	0	0
0	0	0	x_7	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	0
$-Z_1' = -5$			$C_1^J - Z_1^J$	5	4	0	0	1	0	0	0	0	0
$-Z_2' = 10$			$C_2^J - Z_2^J$	-10	-7	0	0	-2	0	0	0	0	0
$-Z_3' = 5$			$C_3^J - Z_3^J$	-5	-3	0	0	-1	0	0	0	0	0
$\phi = -5$			$d^J - \phi^J$	5	-1	0	0	1	0	0	0	0	0

TAB. 3.9 – Le tableau augmenté par $-2x_1 - x_2 \geq -5$.

On obtient la solution optimale $x = (\frac{7}{5}, \frac{11}{5})$, donnée par le tableau optimal (3.10).

C_1^{B}	C_2^{B}	C_3^{B}	B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ	s_1
3	-5	-2	x_4	$\frac{7}{5}$	1	0	0	1	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0
-1	2	1	x_2	$\frac{11}{5}$	0	1	0	0	$-\frac{3}{5}$	0	0	0	0
0	0	0	x_3	$\frac{34}{5}$	0	0	1	0	$-\frac{12}{5}$	0	-2	0	0
1	1	1	θ	$\frac{23}{10}$	0	0	0	0	$-\frac{9}{10}$	0	$-\frac{1}{4}$	1	-1
0	0	0	x_6	$\frac{14}{5}$	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
0	0	0	x_1	$\frac{7}{2}$	1	0	0	0	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
$-Z'_1 = 2$				$C_1^J - Z_1^J$	-2	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	0
$-Z'_2 = -\frac{13}{5}$				$C_2^J - Z_2^J$	$\frac{13}{5}$	0	0	0	$\frac{27}{10}$	0	$\frac{5}{2}$	0	0
$-Z'_3 = -\frac{3}{5}$				$C_3^J - Z_3^J$	$\frac{3}{5}$	0	0	0	$\frac{6}{5}$	0	1	0	0
$\phi = -5$				$d^j - \phi^j$	5	0	0	0	1	0	0	1	0

TAB. 3.10 – Le tableau correspondant à la solution $x = (\frac{7}{5}, \frac{11}{5})$.

- Test de faisabilité de $x = (\frac{7}{5}, \frac{11}{5})$

Testons la faisabilité des problèmes du second niveau engendrés par $x = (\frac{7}{5}, \frac{11}{5})$,

$$h(\xi_1) - T(\xi_1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{5} \\ \frac{28}{5} \end{pmatrix};$$

$$h(\xi_2) - T(\xi_2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{5} \\ -12 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{l} \max \quad -\frac{14}{5}\sigma_1^1 + \frac{28}{5}\sigma_1^2 \\ \text{s.à.} \quad -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad -\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \text{le maximum est atteint à} \\ \sigma_1^T = (\sigma_1^1, \sigma_1^2) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}). \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \max \quad \frac{23}{5}\sigma_2^1 - 12\sigma_2^2 \\ \text{s.à.} \quad -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ \quad \quad -\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ \quad \quad 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\ \quad \quad \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\ \quad \quad \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1 \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} \text{le maximum est atteint à} \\ \sigma_2^T = (\sigma_2^1, \sigma_2^2) = (0, 0). \end{array} \right.$$

$$\sigma_1^T[h(\xi_1) - T(\xi_1)x] = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{14}{5} \\ \frac{28}{5} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\sigma_2^T[h(\xi_2) - T(\xi_2)x] = (0, 0) \begin{pmatrix} \frac{23}{5} \\ -12 \end{pmatrix} = 0.$$

Cela implique que la solution optimale obtenue, $x = (\frac{7}{5}, \frac{11}{5})$, engendre des problèmes du second niveau, $Q(x, \xi_1)$ et $Q(x, \xi_2)$, réalisables.

- *Test d'optimalité de $x = (\frac{7}{5}, \frac{11}{5})$*

Pour tester l'optimalité $x = (\frac{7}{5}, \frac{11}{5})$, on résout le problème (2.27) pour ξ_1 et ξ_2 .

$$\begin{array}{l} \max \quad -\frac{14}{5}\pi_1^1 + \frac{28}{5}\pi_1^2 \\ \text{s.à.} \quad -2\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \leq 1 \\ \quad \quad -\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \leq 0 \\ \quad \quad 2\pi_1^1 - 5\pi_1^2 \leq 6 \\ \quad \quad \pi_1^1 - 6\pi_1^2 \leq 2 \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} \text{le maximum est atteint à} \\ \pi_1^T = (\pi_1^1, \pi_1^2) = (0, 0). \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \max \quad \frac{23}{5}\pi_2^1 - 12\pi_2^2 \\ \text{s.à.} \quad -2\pi_2^1 + 3\pi_2^2 \leq 5 \\ \quad \quad -\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \leq 3 \\ \quad \quad 2\pi_2^1 - 5\pi_2^2 \leq 2 \\ \quad \quad \pi_2^1 - 6\pi_2^2 \leq 1 \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} \text{le maximum est atteint à} \\ \pi_2^T = (\pi_2^1, \pi_2^2) = (1, 0). \end{array} \right.$$

$$Q(x, \xi_1) = \pi_1^T[h(\xi_1) - T(\xi_1)x] = (0, 0) \begin{pmatrix} -\frac{14}{5} \\ \frac{28}{5} \end{pmatrix} = 0,$$

$$Q(x, \xi_2) = \pi_2^T[h(\xi_2) - T(\xi_2)x] = (1, 0) \begin{pmatrix} \frac{23}{5} \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{16}{5},$$

on obtient $Q(x) = \frac{23}{10}$.

$\theta = Q(x) = \frac{23}{10}$, alors $x = (\frac{7}{5}, \frac{11}{5})$ est une solution optimale avec une pénalité $\theta = \frac{23}{10}$, on la note x^2 .

$\mathbf{x}^2 = (\frac{7}{5}, \frac{11}{5})$ est la troisième solution efficace qu'on obtient avec une pénalité $\theta^1 = \frac{13}{10}$ et le vecteur critère correspondant $(\mathbf{Z}'_1, \mathbf{Z}'_2, \mathbf{Z}'_3) = (-2, \frac{13}{5}, \frac{3}{5})$ et $\phi(\mathbf{x}^2) = -5 = \phi^{\text{opt}}$.

x^2 est donc sur la coupe hyperplane, on doit alors vérifier à nouveau s'il existe des arêtes efficaces incidentes à x^2 . On construit le tableau \mathfrak{X} , après une seule opération pivot, on obtient le tableau \mathfrak{X}_p suivant

	v_1	v_2	v_3	w_5	w_7
$\frac{8}{5}$	1	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{3}$	0
$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{26}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-1	1

TAB. 3.11 – Le tableau \mathfrak{X}_p associé a la solution efficace $x^2 = (\frac{7}{5}, \frac{11}{5})$.

Le tableau \mathfrak{X}_p propose la variable x_5 à rentrer dans la base, néanmoins, ceci n'implique pas l'amélioration du critère principal $\phi(x)$, par conséquent, aucune arête efficace incidente à x^2 ne correspond à une direction de maximisation de ϕ . Par conséquent, on pose $\kappa = \kappa + 1 = 2$, on va à l'étape 2.

Étape 2

On résout le problème (I_2) , on obtient le point $x^1 = (0, 5)$ qui est sur la coupe hyperplane et on vérifie aisément qu'il n'existe pas une arête efficace incidente à x^1 qui améliore le critère principal ϕ . On pose $\kappa = \kappa + 1 = 3$ et on va à l'étape 3.

Étape 3

La résolution du problème (I_3) donne aussi le point $x^1 = (0, 5)$.

En conclusion, tout les points optimaux de (I_1) , (I_2) et de (I_3) sont sur la face de découpage $\phi(x) \geq -5$, et il n'existe pas de solutions efficaces sur la coupe qui ont des arêtes efficaces incidentes qui apportent une augmentation en valeur du critère principal $\phi(x)$, par conséquent, on termine la résolution du problème (P) avec la solution optimale $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0, 5)$ avec une pénalité $\theta^{\text{opt}} = \frac{13}{2}$, $(\mathbf{Z}'_1, \mathbf{Z}'_2, \mathbf{Z}'_3) = (5, -10, -5)$ le vecteur critère associé et la valeur de la fonction objectif $\phi^{\text{opt}} = \phi(\mathbf{x}^1) = -5$.

Conclusion et perspectives

Lors du processus de prise de décision, impliquant des modèles de programmation multi-objectifs, le décideur doit réaliser une analyse de l'ensemble des solutions efficaces du problème pour sélectionner les solutions efficaces préférées, et cela s'avère impossible lorsque cet ensemble est large.

Dans le cas où les préférences du décideur sont modélisées, explicitement, par une fonction linéaire, alors le problème du choix des solutions efficaces peut être énoncé sous forme d'un problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces. La difficulté de ces problèmes réside dans le fait que l'ensemble des solutions efficaces, est en général non convexe, le problème appartient à la classe des problèmes d'optimisation globale (programmation non convexe).

Une complication additionnelle est superposée au problème par l'introduction de l'aspect stochastique, les paramètres du problème sont incertains, modélisables par un vecteur aléatoire, induisant un problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème linéaire stochastique multi-objectifs (MOSLP).

Pour résoudre ce problème, nous proposons, dans ce travail, une méthode qui intègre la méthode la méthode L-Shaped dans la méthode d'Ecker et Song. Pour convertir le MOSLP en un problème multi-objectifs déterministe, on a utilisé le modèle de recours à 2-niveaux, sous l'hypothèse que le décideur peut mener des actions correctives une fois un scénario est réalisé. Cette technique, que nous avons proposé, consiste principalement à déterminer, dans un premier temps, une solution efficace initiale du problème (MOSLP) en utilisant la méthode L-Shaped et, en second lieu, partant d'une solution efficace courante, rechercher une meilleure solution efficace qui apporte une augmentation en valeur de la fonction linéaire ϕ que l'on veut maximiser avec la technique de pivotage d'Ecker et Song (utilisant la technique d'Ecker et Kouada pour identifier

les solutions efficaces).

Cet algorithme génère un meilleur compromis, en termes des préférences du décideur, par rapport à toutes les solutions trouvées (sans énumérer toutes les solutions efficaces), en outre, il donne la valeur du coût optimal correspondant aux pénalités de violation des contraintes stochastiques.

Des suppositions doivent être maintenues pour que l'algorithme fonctionne correctement et puisse être appliqué :

- disposer de la forme explicite de la structure de préférences du décideur,
- l'ensemble S des solutions réalisables doit être borné,
- pour une solution obtenue, on doit tester sa faisabilité et évaluer l'espérance de la fonction de recours en résolvant une série de problèmes linéaires qui correspondent aux N scénarios, on doit donc avoir un nombre raisonnable ou petit de scénarios, comme on l'a déjà signalé dans le chapitre 2, ce nombre croît exponentiellement avec la taille du vecteur aléatoire qui représente les paramètres incertains du problème.
- Il est aussi important de noter que l'algorithme est approprié aux problèmes avec un nombre modéré de fonctions objectif à maximiser (ou à minimiser), du moment qu'à une certaine étape de recherche d'une meilleure solution efficace, on doit résoudre, dans le pire des cas, tout les problèmes mono-objectifs, par contre, l'espace des décisions envisageables peut être assez large. Les coupes de faisabilité et les coupes d'Ecker et Song qu'on applique à chaque itération de l'algorithme permet d'obtenir la solution optimale après un nombre petit d'itérations.

Avant d'appliquer cette technique sur des problèmes de décision réels, il est très important de l'implémenter avec un programme informatique ce qui permettra de résoudre plusieurs et différentes instances de cette classe de problèmes afin d'évaluer les performances de cet algorithme en termes de convergence (temps d'exécution) et mettre en évidence les suppositions citées ci-dessus.

Faire une extension de la méthode au cas de problèmes linéaires stochastiques multi-objectifs à variables discrètes et résoudre avec l'introduction des méthodes de coupes (la méthode de Gomory) ou bien la méthode de séparation et évaluation (Branch and Bound) dans la méthodologie est en vue pour l'avenir.

Dans certaines applications, le décideur n'a pas souvent la possibilité de faire recours dans le futur, après l'occurrence d'un scénario (l'ensemble K des contraintes induites est vide), dans ce cas, nous devons faire recours à une autre approche de la programmation stochastique pour

convertir le problème stochastique à un problème déterministe, à savoir le modèle CCP. Supposons qu'on est dans les conditions d'adaptation de cette approche, nous suggérons d'introduire cette approche, à la place du modèle de recours que nous avons utilisé, pour résoudre le problème (P).

Dans notre travail, nous avons supposé que les préférences du décideur se sont expliquées par un critère d'utilité déterministe. Il serait très intéressant d'étendre notre méthode au cas de modèles de décision dans l'incertain (préférences dans l'incertain) [CHATEAUNEUF ET AL. 06]. Le modèle le plus célèbre et le plus simple est le critère d'utilité espérée subjective (S.E.U : **S**ubjective **E**xpected **U**tility) dû à Savage [SAVAGE 54], lorsqu'il existe une loi de probabilité (subjective) P sur les événements et une fonction d'utilité u sur les conséquences.

BIBLIOGRAPHIE

- [ABBAS ET BELLAHCENE 06] M. Abbas, F. Bellahcene, *Cutting plane method for multiple objective stochastic integer linear programming*, European Journal of Operational Research 168, 967–984, 2006.
- [ABBAS ET CHAABANE 06] M. Abbas, D. Chaabane, *Optimizing a Linear Function over an Integer Efficient Set*, European Journal of Operational Research 174, 1140-1161, 2006.
- [ABBAS ET MOULAÏ 99] M. Abbas, M. Moulai, *Solving multiple objective integer linear programming*, Ricerca Operativa 29 (89), 15–38, 1999.
- [BEALE 55] E. Beale, *On minimizing a convex function subject to linear inequalities*, Journal of the Royal Statistical Society Series, 173-184, 1955.
- [BEN ABDELAZIZ 92] F. Ben Abdelaziz, *L'efficacité en programmation multi-objectifs stochastique*, Ph.D. Thesis, Université de Laval, Québec, 1992.
- [BEN ABDELAZIZ ET AL. 97] F. Ben Abdelaziz, P. Lang, R. Nadeau, *Distributional unanimity multiobjective stochastic linear programming*, Multicriteria Analysis : Proceedings of the XIth International Conference on MCDM, Springer-Verlag, Berlin, 225–236, 1997.
- [BEN ABDELAZIZ ET AL. 99] F. Ben Abdelaziz, P. Lang, R. Nadeau, *Dominance and efficiency in multicriteria decision under uncertainty*, Theory and Decision 47, 191–211, 1999.
- [BENDERS 62] J.F. Benders, *Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems*, Numerische Mathematik 4, 238–252, 1962.
- [BENSON 84] H.P. Benson, *Optimization over the efficient set*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 98, 562–580, 1984.
- [BENSON 91] H.P. Benson, *An all-linear programming relaxation algorithm for optimizing over the efficient set*, Journal of Global Optimization 1, 83-104, 1991.

- [BENSON 92] H.P. Benson, *A finite, nonadjacent extreme-point search algorithm for optimizing over the efficient set*, Journal of Optimization Theory and Applications 73, 47-64, 1992.
- [BENSON ET SAYIN 93] H.P. Benson, S. Sayin, *A face search heuristic algorithm for optimizing over the efficient set*, Naval Research Logistics 40, 103-116, 1993.
- [BENSON ET SAYIN 94] H.P. Benson, S. Sayin, *Optimization over the efficient set : Four special cases*, Journal of Optimization Theory and Applications 80 (1), 3-17, 1994.
- [BOLINTINEANU 93] S. Bolintineanu, *Minimization of a quasi-concave function over an efficient set*, Mathematical Programming 61, 89-110, 1993.
- [CHATEAUNEUF ET AL. 06] A. Chateauneuf, M. Cohene, J. Y. Jaffray, *Décision dans l'incertain : les modèles classiques*, In Concepts et méthodes pour l'aide à la décision 2 : risque et incertain, Informatique et systèmes d'information, D.Bouyssou, D. Dubois, M. Pirlot, H. Prade (Eds.), Hermès, 49-65, 2006.
- [DANTZIG 55] G. Dantzig, *Linear programming under uncertainty*, Management Science, 197-206, 1955.
- [ECKER ET KOUADA 75] J.G. Ecker, I.A. Kouada, *Finding Efficient Points for Multi-objective Linear Programs*, Mathematical Programming 8, 375-377, 1975.
- [ECKER ET KOUADA 78] J.G. Ecker, I.A. Kouada, *Finding All Efficient Extreme Points for Multi-objective Linear Programs*, Mathematical Programming 14, 249-261, 1978.
- [ECKER ET SONG 94] J.G. Ecker, H.G. Song, *Optimizing a linear function over an efficient set*, Journal of Optimization Theory and Applications 83(3), 541-563, 1994.
- [EHRGOTT 05] M. Ehrgott, *Multicriteria Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Series 491, Springer Berlin, 2005.
- [FÜLÖP 94] J. Fülöp, *A cutting plane algorithm for linear optimization over the efficient set*, In : S. Komlősi, T. Rapcsák, S. Shaiblee (Eds.)
, Generalized Convexity, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 405, Springer Verlag, Berlin, 374-385, 1994.
- [GEOFFRION 68] A. M. Geoffrion, *proper efficiency and the theory of vector maximisation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 22, 618-630, 1968.
- [GOICOECHEA ET AL. 76] A. Goicoechea, L. Dukstein, R.L. Bulfin, *Multiobjective stochastic programming the PROTRADE-method*, Operation Research Society of America, 1976.
- [HORST ET AL. 07] R. Horst, N.V. Thoai, Y. Yamamoto, D. Zenke, *On Optimization over the Efficient Set in Linear Multicriteria Programming*, Journal of Optimization Theory and Applications 134(3), 433-443, 2007.

- [ISERMANN 74] H. Isermann, *Proper efficiency and the linear vector maximization problem*, Operations Research 22, 189-191, 1974.
- [ISERMANN ET STEUER 87] H. Isermann, R. E. Steuer, *Computational Experience Concerning Payoff Tables and Minimum Criterion Values over the Efficient Set*, European Journal of Operational Research 33, 91-97, 1987.
- [JORGE 05] J.M. Jorge, *A Bilinear Algorithm for Optimizing a Linear Function over the Efficient Set of a Multiple Objective Linear Programming Problem*, Journal of Global Optimization 31, 1-16, 2005.
- [JORGE 09] J.M. Jorge, *An algorithm for optimizing a linear function over an integer efficient set*, European Journal of Operational Research 195 (1), 98-103, 2009.
- [KALL ET WALLACE 94] P. Kall, W. Wallace, *Stochastic Programming*, Wiley Interscience Series in Systems and Optimization, Chichester, 1994.
- [KLEYWEGT ET SHAPIRO 00] A.J. Kleywegt, A. Shapiro, *Stochastic Optimization*, School of Industrial and Systems Engineering, Georgia Institute of Technology, USA, 2000.
- [MOULAÏ ET AMROUCHE 06] M. Moulaï, S. Amrouche, *Optimisation linéaire stochastique multi-objectifs en nombres entiers*, Actes COSI'06, 404-420, 2006.
- [NACCACHE 78] P.H. Naccache, *Connectedness of the set of nondominated outcomes in multicriteria optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications 25, 459-467, 1978.
- [NEMHAUSER ET WOLSEY 88] G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimisation, 1988.
- [PHILIP 72] J. Philip. *Algorithms for the vector maximization problem*, Mathematical Programming 2, 207-229, 1972.
- [ROY 85] B. Roy, *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*, Economica, Paris, 1985.
- [SAVAGE 54] L. Savage, *The Foundations of Statistics*, Dover, 1954.
- [SAYIN 00] S. Sayin, *Optimizing over the efficient set using a top-down search of faces*, Operations Research 48, 65-72, 2000.
- [SISKOS ET AL. 83] J. Siskos, G. Wäscher, H. Winkels, *A bibliography of outranking approaches (1966-1982)*, Cahier du LAMSADE 31, Université Paris Dauphine, 1983.
- [STANCU-MINASIAN 84] I.M. Stancu-Minasian, *Stochastic Programming with Multiple Objective Functions*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1984.
- [STANCU-MINASIAN ET TIGAN 84] I. Stancu-Minasian, S. Tigan, *The vectorial minimum risk problem*, Proceedings of the Colloquium on Approximation and Optimization, Cluj-Napoca, 321-328, 1984.

- [STEUER 86] R. Steuer, *Multiple criteria optimisation : theory, computation and application*, New York : Wiley, 1986.
- [TALBI 99] El-G. Talbi, *Métaheuristiques pour l'Optimisation Combinatoire Multi-objectifs : Etat de l'art*, Université de Lille, 1999.
- [TEGHEM 90] J. Teghem, *STRANGE-MOMIX : An interactive method for mixed integer linear programming*, in : R. Slowinski, J. Teghem (Eds.), *Stochastic Versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming Under Uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 101–115, 1990.
- [TEGHEM ET AL. 86] J. Teghem, D. Dufrane, M. Thauvoys, P.L. Kunsch, *STRANGE : Interactive method for multiobjective linear programming under uncertainty*, *European Journal of Operational Research* 26 (1), 65–82, 1986.
- [URLI ET NADEAU 90] B. Urli, R. Nadeau, *Multiobjective stochastic linear programming with incomplete information : A general methodology*, In : R. Slowinski, J. Teghem (Eds.), 131–161, 1990.
- [VAN SLYKE ET WETS 69] R. Van Slyke, R. J-B. Wets, *L-shaped linear programs with applications to optimal control and stochastic programming*, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 17, 638–663, 1969.
- [VANDERPOOTEN ET VINCKE 89] D. Vanderpooten, P. Vincke, *Description and Analysis of Some Representative Interactive Multicriteria Procedures*, *Mathematical and computer modeling* 12, 1221-1238, 1989.
- [VINCKE 89] P. Vincke, *L'Aide Multicritère à la Décision*, Ellipses, Paris, 1989.
- [WHITE 82] D.J. White, *Optimality and Efficiency*, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
- [WHITE 96] D.J. White, *The maximization of a function over the efficient set via a penalty function approach*, *European Journal of Operational Research* 94, 143-153, 1996.
- [YAMAMOTO 02] Y. Yamamoto, *Optimization over the Efficient Set Overview*, *Journal of Global Optimization* 22, 285–317, 2002.