

N° d'ordre :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène
Faculté de Mathématiques



THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de **DOCTORAT D'ETAT**

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : **Recherche Opérationnelle**

Par

Mme Zineb BENMEZIANE-DAIMELLAH

Thème

Nombre de Stabilité et Hamiltonicité dans des
Superclasses de Graphes sans Etoiles

Soutenue le : 28/04/2010

, devant le jury composé de :

Mr. Méziane AIDER,	Professeur, USTHB,	Président
Mr. Moncef ABBAS,	Professeur, USTHB,	Directeur de thèse
Mr. Abdelhafid BERRACHEDI,	Professeur, USTHB,	Examineur
Mr. Mostafa BLIDIA,	Professeur, USDB(Blida),	Examineur
Mr. Mustapha CHELLALI,	Maître de Conférences, USDB(Blida),	Examineur
Mr. Youcef SAOULA,	Maître de Conférences, ENS(Alger),	Examineur

Table des matières

Introduction	4
1 Méthode des graphes augmentants	7
1.1 Introduction	8
1.2 Méthode des graphes augmentants	9
1.3 Caractérisation des graphes augmentants	11
1.3.1 Dans les graphes sans $K_{1,3}$ (sans $S_{1,1,1}$)	11
1.3.2 Dans les graphes sans P_4	11
1.3.3 Dans les graphes sans S (sans $S_{1,1,2}$)	11
1.3.4 Dans les graphes sans P_5	12
1.3.5 Les graphes sans $S_{1,2,2}$	14
1.3.6 Les graphes sans $P_k(k \geq 6)$, sans bannière	14
1.4 Trouver des graphes augmentants	16
1.4.1 Chaînes augmentantes	16
1.4.2 Graphes bipartis complets augmentants.	16
1.5 Conclusion	17
2 Algorithme de struction	18
2.1 Introduction	19
2.2 Graphe conflictuel	19
2.3 Réduction du nombre de stabilité	20
2.3.1 Construction de f	20
2.3.2 Construction de G'	21
2.4 Généralisation de la struction	23
2.4.1 Construction de $G' = S(G, H, p)$	23
2.4.2 Liens entre quelques opérations utilisées pour trouver le nombre de stabilité et la struction	25
2.5 Conclusion	26

3	Algorithme de struction modifié et application à deux nouvelles classes de graphes	28
3.1	Introduction	29
3.2	Algorithme de struction modifié	29
3.3	Struction pour la classe de graphes Γ	31
3.3.1	Définition de la classe Γ	31
3.3.2	Fermeture de la classe Γ	33
3.3.3	Nombre de stabilité pour les graphes de la classe Γ	40
3.4	Struction pour la classe de graphes Γ'	41
3.4.1	Définition de la classe Γ'	41
3.4.2	Fermeture de la classe Γ'	42
3.4.3	Nombre de stabilité pour les graphes de la classe Γ'	44
3.5	Algorithme de détermination d'un stable de cardinalité maximum dans Γ'	44
4	Survey sur le problème d'Hamiltonicité	46
4.1	Introduction	47
4.2	Conditions sur les degrés	47
4.2.1	Conditions sur les degrés des sommets	47
4.2.2	Conditions sur les degrés généralisés	50
4.2.3	Conditions combinant les degrés des sommets et les degrés généralisés	51
4.3	Conditions sur la fermeture	53
4.4	La condition coriace	54
4.5	Conditions sur le nombre de stabilité	56
4.6	Conditions d'hamiltonicité par des sous graphes exclus	57
4.7	Conclusion	67
5	Hamiltonicité dans la classe des graphes partiellement sans étoile	69
5.1	Introduction	70
5.2	Coriacité (Toughness)	72
5.3	Couplage Parfait	73
5.4	Cycles Hamiltoniens	74
5.5	Preuves des Théorèmes 5.10 et 5.11	75
5.5.1	Preuve du théorème 5.10	78
5.5.2	Preuve du théorème 5.11	80
5.6	Conclusion	80
	Conclusion générale	82

Introduction

Dans cette thèse, on s'intéresse à deux problèmes difficiles de la théorie des graphes :

1. Etant donné un graphe simple non orienté G , peut-on trouver le nombre de stabilité de G en temps polynomial ?

Bien que ce problème soit NP-complet, il existe d'importantes classes de graphes pour lesquelles il est résolu en temps polynomial.

2. Etant donné un graphe simple non orienté G , G contient-il un cycle hamiltonien ? Ce problème est NP-complet et très peu de classes de graphes admettent des algorithmes polynomiaux pour le résoudre. Ayant trouvé des difficultés pour obtenir des conditions nécessaires et suffisantes, les chercheurs se sont alors orientés vers la détermination de conditions suffisantes d'existence de cycles hamiltoniens aussi bien dans le cas général que dans le cas de classes de graphes particulières.

Notre travail s'inscrit dans le contexte des deux problèmes cités. On s'intéresse à ces deux problèmes dans des classes de graphes qui peuvent contenir l'étoile comme sous graphe induit.

Parmi les questions auxquelles on tentera de répondre :

1. Quelles méthodes générales peut on utiliser pour résoudre le problème du stable ?
2. Pour quelles classes de graphes, ces méthodes générales aboutissent à des algorithmes polynomiaux ?
3. Quels sont les résultats obtenus pour l'existence de cycles hamiltoniens ? Sous quelles conditions un graphe admet-il un cycle hamiltonien ?
4. Pour quelles classes de graphes, plus générales que la classe des graphes sans étoile, peut-on étendre des résultats trouvés, essentiellement dans le domaine de l'hamiltonicité, pour les graphes sans étoiles ?

Dans ce travail, les graphes considérés sont simples non orientés. Si $G = (V, E)$ est un graphe, alors $n = |V|$. On représente par $N(v)$ l'ensemble des voisins de v . Le degré

d'un sommet v noté $d(v)$, est le cardinal de $N(v)$. On note par $\delta(G)$ le plus petit degré dans G . Pour toute paire de sommets $\{u, v\}$, la distance de u à v , notée $d(u, v)$ est la longueur d'une plus courte chaîne reliant u à v . Le diamètre d'un graphe G est la distance maximum entre deux sommets de G . La circonférence d'un graphe G est la longueur d'un plus grand cycle dans G (autrement dit la longueur d'un cycle maximum dans G).

Un ensemble S , $S \subset V$, est stable dans G si toute paire de sommets $\{u, v\}$ de S n'est pas reliée par une arête dans G , la cardinalité maximum d'un stable dans G , appelée nombre de stabilité de G , est notée $\alpha(G)$.

On note par $\sigma_k(G) = \min \left\{ \sum_{i=1}^k d(v_{j_i}) ; / \{v_{j_1}, \dots, v_{j_k}\} \text{ est un stable dans } G \right\}$ et $\sigma_k(G) = \infty$ si aucun ensemble de k sommets indépendants n'existe dans G .

Un ensemble d'articulation d'un graphe G connexe, est un sous ensemble V' de V tel que $G - V'$ n'est pas connexe. Si G est un graphe connexe, admettant au moins une paire de sommets non adjacents, alors la connectivité $k(G)$ de G est la plus petite valeur de k tel que G a un ensemble d'articulation de k sommets.

Le graphe G est dit k -connexe si $k(G) \geq k$.

Un graphe complet est un graphe où toute paire de sommets est reliée par une arête. Les sommets d'un graphe complet forment une clique.

On dit que G est pancyclique s'il admet des cycles de longueurs l , pour tout l , $3 \leq l \leq n$, et G est sommet pancyclique si pour tout sommet u de G et pour tout entier l , $3 \leq l \leq n$, u est contenu dans un cycle de longueur l .

Le carré G^2 d'un graphe G est le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement définis par :

$$V(G^2) = V(G) \text{ et } E(G^2) = \{uv / d_G(u, v) \leq 2\}.$$

Un graphe G est dit sans étoile, s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous graphe induit. (voir Fig.1).

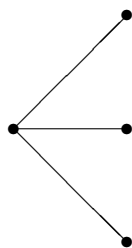


FIG. 1 – $K_{1,3}$

Le seul sommet de degré 3 dans $K_{1,3}$ est appelé le *centre de l'étoile*.

Pour les notations utilisées et non définies ici on utilisera les mêmes que celles utilisées dans [32].

Outre l'introduction, et la conclusion, cette thèse est organisée en cinq chapitres.

Dans le chapitre I, on présente une technique permettant de résoudre le problème du stable. C'est la méthode des graphes augmentants. C'est une approche générale, elle doit son existence à l'algorithme d'Edmonds [58] pour résoudre le problème du couplage maximum dans un graphe. Dans certaines classes de graphes, l'application de cette technique permet de résoudre le problème du stable en temps polynomial [10],[29],[72],[73],[74] .

Dans le chapitre II, on étudie une méthode itérative permettant de réduire le nombre de stabilité : la struction [57]. Et on examinera une généralisation de cette méthode [11] et son lien avec d'autres techniques utilisées pour résoudre le problème du stable.

Dans le chapitre III, on décrira un algorithme modifié de la struction, et on montre que l'application de cet algorithme modifié permet de résoudre le problème du stable pour deux nouvelles classes de graphes appelées Γ et Γ' [3], [2].

Le chapitre IV est un survey sur le problème du cycle hamiltonien [26].

Dans le chapitre V, on étudie une superclasse des graphes sans étoile : la classe des graphes partiellement sans étoile. Un graphe G est partiellement sans étoile si : pour tout sommet v centre d'étoile il existe exactement deux sommets x et y non centres d'étoiles, tels que $N(v) \subseteq N[x] \cup N[y]$. On généralise pour cette nouvelle classe, des résultats établis pour les graphes sans étoile [1].

Chapitre 1

Méthode des graphes augmentants

La méthode des graphes augmentants est une approche générale permettant de résoudre le problème du stable de cardinalité maximum. Elle doit son existence à l'algorithme d'Edmonds[58] pour trouver un couplage maximum dans un graphe. Minty[111] et Sbihi[123] sont les premiers à avoir utilisé cette technique pour résoudre le problème du stable dans un graphe sans $K_{1,3}$.

Durant plus de vingt ans, cette méthode restera sans utilisation. Récemment, différents auteurs l'ont appliquée pour trouver des algorithmes polynomiaux dans des classes de graphes particulières.

Ce chapitre est une synthèse des différents résultats obtenus dans ce domaine.

1.1 Introduction

Le premier à avoir introduit la notion de graphe augmentant est C.Berge [27] lorsqu'il affirma qu'un couplage M est maximum si et seulement s'il n'existe pas de chaîne augmentante par rapport à M .

En 1965, Edmonds [58] a donné un algorithme permettant de détecter une chaîne augmentante par rapport à un couplage M dans un graphe si une telle chaîne existe ou de déduire qu'elle n'existe pas, et donc a résolu le problème du couplage maximum dans un graphe.

Puisqu'un couplage dans un graphe G , est un stable dans le graphe de ligne $L(G)$, l'algorithme d'Edmonds pour le couplage maximum dans un graphe quelconque permet de résoudre le problème du stable de cardinalité maximum dans la classe des graphes de ligne .

Le théorème de Koning dans les graphes bipartis affirme que la somme de la cardinalité d'un couplage maximum et la cardinalité d'un stable maximum est égale au nombre de sommets du graphe. Et donc, l'algorithme d'Edmonds permet aussi de résoudre le problème du stable dans les graphes bipartis.

L'idée des chaînes augmentantes est un cas particulier d'une approche plus générale pour résoudre le problème du stable de cardinalité maximum : la méthode des graphes augmentants.

Récemment, cette méthode a été appliquée avec succès à certaines classes de graphes permettant ainsi de déduire des algorithmes polynomiaux pour résoudre le problème du stable.

On présente dans ce chapitre l'essentiel des résultats obtenus, les plus classiques mais aussi les plus récents, dans ce domaine.

Dans la section 2, on présentera cette méthode, et dans les sections 3 et 4 on énoncera les résultats obtenus.

On note par P_n , la chaîne élémentaire sans corde, C_n le cycle élémentaire sans corde et K_n le graphe complet, sur n sommets. Par $K_{n,m}$ le graphe biparti complet tel que les tailles des bipartitions sont n et m et par $S_{i,j,k}$ le graphe de la figure 1.1.

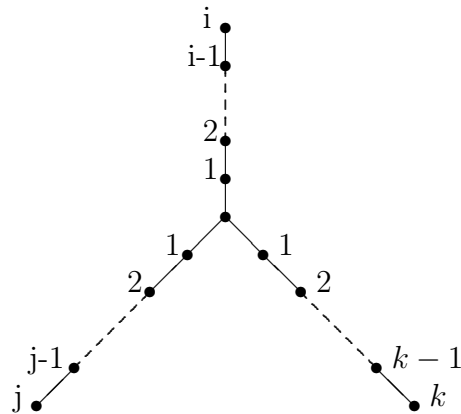


FIG. 1.1 – $S_{i,j,k}$

En particulier $S_{1,1,1} = K_{1,3}$, $S_{1,1,2} = S$ et $S_{0,j,k} = P_{j+k+1}$.

Un autre graphe qu'on citera souvent dans ce chapitre est la bannière k (voir figure 4.2). Pour $k = 1$, ce graphe est appelé bannière.

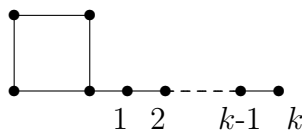


FIG. 1.2 – Bannière k

1.2 Méthode des graphes augmentants

Soit S un stable de G . Les sommets de S seront appelés les sommets noirs et les autres, les sommets blancs.

Définition 1.1 *Un graphe biparti $H = (W, B, E)$ est dit augmentant pour le stable S si :*

1. $W \subseteq V - S, B \subseteq S$
2. $N(W) \cap (S - B) = \emptyset$
3. $|W| > |B|$

Théorème 1.1 (*Théorème des graphes augmentants*)

Un stable S est maximum si et seulement s'il n'existe pas dans G un graphe augmentant pour S .

Preuve.

1. Supposons $H = (W, B, E)$ est un graphe augmentant pour S , alors $S' = (S - B) \cup W$ est un stable de G , avec $|S'| > |S|$. Donc S n'est pas maximum.

2. Supposons que S n'est pas maximum, donc il existe un autre stable S' de G , tel que $|S'| > |S|$, et alors $H = (S' - S, S - S', E)$ est un graphe augmentant pour S . ■

Le théorème des graphes augmentants suggère la démarche suivante : commencer par un stable S de G , et tant qu'il existe un graphe augmentant $H = (W, B, E)$, améliorer le stable, en posant $S := (S - B) \cup W$.

Mais, comme le problème du stable est NP-complet, le problème de trouver les graphes augmentants est aussi NP-complet.

Néanmoins, cette méthode a donné de bons résultats pour quelques classes de graphes.

Pour trouver une solution en temps polynomial, on doit résoudre les deux problèmes suivants en temps polynomial :

1. Lister tous les graphes augmentants de la classe de graphes considérée.
2. être capable de détecter tous ces graphes augmentants.

Dans la section 3 ; on examinera les résultats trouvés pour le problème 1, et dans la section 4, les résultats trouvés pour le problème 2.

Résoudre le problème 1, revient à trouver tous les graphes bipartis de la classe considérée qui sont augmentants. Les graphes bipartis ne sont pas tous augmentants. Par exemple, le cycle pair n'est jamais augmentant puisque la condition 3 de la définition n'est jamais vérifiée.

De plus, sans perte de généralité, on peut exclure de la recherche des graphes augmentants, tout graphe augmentant qui n'est pas minimal. Un graphe augmentant est *minimal* s'il ne contient aucun autre graphe augmentant. A titre d'exemple, on donne le graphe $K_{1,3}$. Si $K_{1,3}$ est un graphe augmentant pour le stable S , alors le graphe obtenu en supprimant un sommet de degré 1 est aussi augmentant pour S .

Le lemme suivant décrit différentes conditions pour qu'un graphe soit augmentant minimal.

Lemme 1.1 Si $H = (W, B, E)$ est un graphe augmentant minimal pour un stable S , alors :

1. H est connexe.
2. $|W| = |B| + 1$.
3. Pour tout stable $A \subseteq B$, $|A| < |N_W(A)|$.

1.3 Caractérisation des graphes augmentants

Pour pouvoir caractériser les graphes augmentants pour une certaine classe de graphes, il faut d'abord être capable de décrire les graphes bipartis de cette classe.

Pour un graphe biparti $G = (V_1, V_2, E)$, on note par \tilde{G} , le graphe biparti complémentaire de G , c'est à dire, $\tilde{G} = (V_1, V_2, V_1 \times V_2 - E)$.

Un graphe biparti G est dit *prime* si deux sommets distincts quelconques de G ont des voisinages différents.

1.3.1 Dans les graphes sans $K_{1,3}$ (sans $S_{1,1,1}$)

Dans la classe des graphes sans $K_{1,3}$, aucun graphe biparti n'a de sommet de degré supérieur à 2. Donc les graphes bipartis sans $K_{1,3}$ sont les cycles de longueur paire ou les chaînes. Par conséquent les graphes augmentants dans un graphe sans $K_{1,3}$ sont les chaînes de longueur paire puisque les cycles pairs ne sont pas augmentants.

1.3.2 Dans les graphes sans P_4

Dans la classe des graphes sans P_4 , les graphes bipartis sont les graphes bipartis complets. Par conséquent les graphes augmentants minimaux dans un graphe sans P_4 sont $K_{n,n+1}$, pour un entier n .

1.3.3 Dans les graphes sans S (sans $S_{1,1,2}$)

Alekseev [10] a montré que dans la classe des graphes sans S , les graphes bipartis sont ceux tels que : $\Delta(G) \leq 2$ ou $\Delta(\tilde{G}) \leq 1$. Un graphe biparti tel que $\Delta(\tilde{G}) \leq 1$ est appelé un *complexe*.

Donc les graphes augmentants minimaux dans un graphe sans S sont les chaînes de longueur paire ou les complexes.

1.3.4 Dans les graphes sans P_5

Plusieurs travaux ont montré que tout graphe biparti connexe dans un graphe sans P_5 , est sans $2K_2$, où $2K_2$ est l'union disjointe de deux copies de K_2 . Malheureusement, la description des graphes bipartis connexes dans cette classe ne permet pas de caractériser les graphes augmentants minimaux.

La caractérisation des graphes augmentants minimaux dans la classe des graphes sans P_5 est inconnue, et la complexité du problème du stable maximum dans les graphes sans P_5 , demeure une question ouverte.

Boliac et Lozin [29], ont montré que le problème du stable maximum dans les graphes sans P_5 est polynomialement équivalent à la recherche de graphes augmentants contenant P_4 . Plus précisément, ils ont montré que le problème se réduit aux deux problèmes suivants :

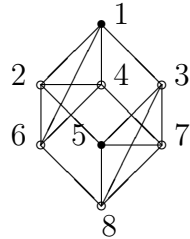
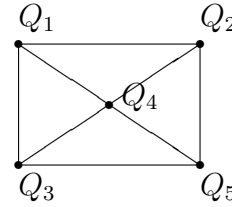
- (P1) Trouver tous les graphes augmentants contenant P_4 .
- (P2) Trouver un stable de poids maximum dans le graphe auxiliaire Γ ,

où Γ est le graphe construit comme suit :

Construction du graphe Γ

1. Soit $W = V - S$
2. Soit R une relation d'équivalence définie sur l'ensemble des sommets W comme suit :
 $xRy \iff N_S(x) = N_S(y)$. Les classes d'équivalences sont appelées *classes de similarité* et les sommets d'une même classe d'équivalence sont dits *similaires*.
 Partitionner W en classes de similarité C_i .
3. Soit $\overline{G[C_i]}$ le complémentaire de $G[C_i]$, $i \geq 1$.
 Soit Q_j une composante connexe de $\overline{G[C_i]}$, appelée classe de sommets.
 Partitionner C_i en classes de sommets Q_j .
4. Poser $V(\Gamma) = \{Q_j\}$
5. Relier deux sommets Q_i et Q_j si
 - (a) Chaque sommet de Q_i est adjacent à chaque sommet de Q_j
 - ou
 - (b) $N_S(Q_i) \subseteq N_S(Q_j)$ ou $N_S(Q_j) \subseteq N_S(Q_i)$

Exemple 1.1 Soit G le graphe de la figure 1.3, où les sommets noirs forment un stable maximal dans G . Les classes de similarité sont : $C_1 = \{2, 3\}$, $C_2 = \{4, 6\}$, $C_3 = \{8, 7\}$. L'ensemble des sommets du graphe auxiliaire est formé par $Q_1 = \{4\}$, $Q_2 = \{7\}$, $Q_3 = \{6\}$, $Q_4 = \{2, 3\}$, et $Q_5 = \{8\}$

un graphe G sans P_5 Le graphe auxiliaire Γ FIG. 1.3 – exemple de construction du graphe Γ

L'algorithme récursif proposé Boliac et Lozin [29] pour calculer le nombre de stabilité dans les graphes sans P_5 est comme suit :

Alpha (G)

Entrée : un graphe G sans P_5

Sortie : Un stable de cardinalité maximum de G

1. Trouver un ensemble stable maximal dans G . Si $S = V(G)$ aller en (7).
2. Itérer une H _augmentaton, avec H contenant un P_4 .
3. Partitionner les sommets de $V - S$ en classes de sommets Q_1, \dots, Q_k .
4. $\forall j = 1, \dots, k$ trouver un stable maximum $B_j = \text{Alpha}(G[Q_j])$
5. Construire le graphe auxiliaire Γ et associer à chaque sommet Q_i de Γ un nombre entier représentant son poids et égal à $\alpha(G[Q_i]) - |N_S(Q_j)|$. Trouver un stable Q de poids maximum dans Γ .
6. Si le poids de Q est positif, augmenter S en changeant $N_S(Q_i)$ par $B_i, \forall i = 1, \dots, p$.
7. Changer S et arrêter.

Chaque étape de l'algorithme est polynomiale, sauf l'étape 2. D'où le problème du stable maximum dans les graphes sans P_5 est équivalent à la recherche de graphes augmentants contenant P_4 .

Les chercheurs se sont alors intéressés à des sous classes de la classe des graphes sans P_5 .

Les graphes sans P_5 , sans bannière

Lozin [106] a montré que les graphes augmentants minimaux dans un graphe sans P_5 sans bannière sont les graphes bipartis complets $K_{n,n+1}$.

Les graphes sans P_5 , sans $K_{3,3} - e$

Le graphe $K_{3,3} - e$ est le graphe biparti complet $K_{3,3}$ auquel il a été retranché une arête e .

Gerber, Hertz et Schindl [72] ont montré que tout graphe augmentant minimal d'un graphe sans P_5 sans $K_{3,3} - e$ est soit un graphe biparti complet $K_{n,n+1}$, ou un graphe obtenu à partir d'un graphe biparti complet $K_{n,n}$ en ajoutant dans une bipartition un sommet qu'on reliera à exactement un sommet de la deuxième bipartition.

1.3.5 Les graphes sans $S_{1,2,2}$

Lozin [105] a montré que les graphes sans $S_{1,2,2}$ bipartis prime sont soit sans $K_{1,3}$ ou sans \tilde{P}_5 .

La classe des graphes sans $S_{1,2,2}$ est évidemment plus large que la classe des graphes sans P_5 . Il serait donc plus raisonnable de voir des sous classes qui ne contiennent pas toute la classe des graphes sans P_5 .

Les graphes sans $S_{1,2,2}$, sans bannière

Cette classe généralise la classe sans P_5 sans bannière. Hertz et Lozin [87] ont montré que les graphes augmentants de cette classe sont soit les graphes bipartis complets $K_{n,n+1}$ ou les chaînes de longueur paire.

1.3.6 Les graphes sans $P_k (k \geq 6)$, sans bannière

Les graphes sans P_6 , sans C_4

Mosca [113] a montré que les graphes sans P_6 , sans C_4 augmentants sont les graphes $M_{r,0}$ (voir figure 1.4).

Les graphes sans P_7 , sans bannière

Alekseev et Lozin [9] ont montré que les graphes sans P_7 , sans bannière augmentants sont les graphes bipartis complets ou $M_{r,0}$ ou $L_{r,0}^2$. (voir figure 1.4).

Les graphes sans P_8 , sans bannière

Gerber, Hertz et Lozin [73] ont donné une caractérisation des graphes augmentants dans cette classe de graphes et ont montré que les graphes augmentants minimaux d'un graphe sans P_8 sans bannière est l'un des graphes suivants : (voir figure 1.4).

Un graphe biparti complet $K_{r,r+1}$

Un $L_{r,s}^1$ ou un $L_{r,s}^2$ avec $r \geq 2$ et $s \geq 0$

Un $M_{r,s}$ avec $r \geq 1$ et $r \geq s \geq 0$

Un N_s avec $s \geq 0$.

L'un des graphes F_2, F_3, F_4, F_5

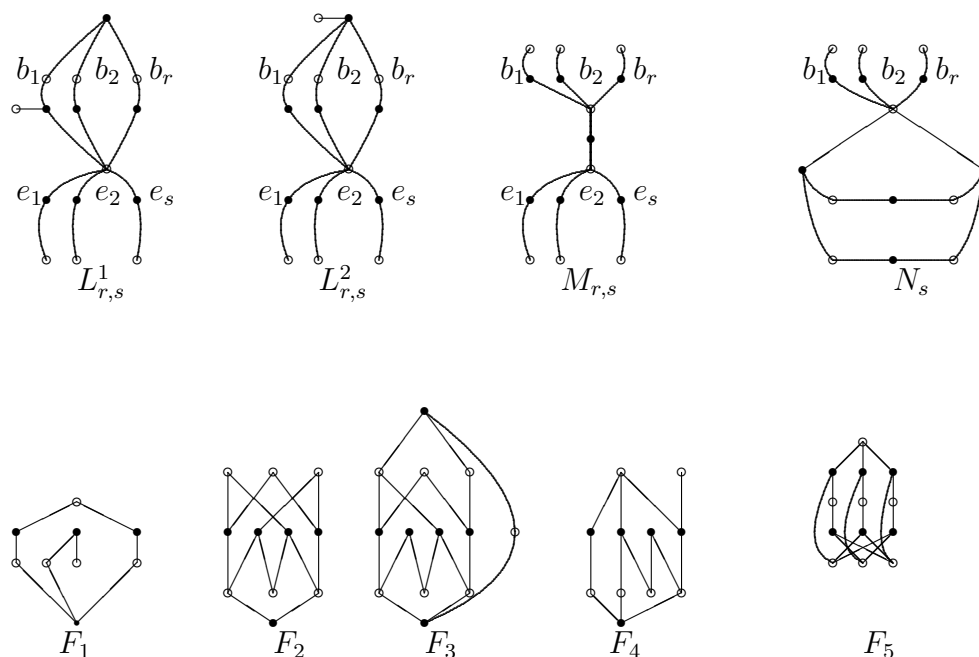


FIG. 1.4 – Graphes augmentants

1.4 Trouver des graphes augmentants

1.4.1 Chaînes augmentantes

Soit S un stable dans le graphe de ligne $L(G)$ d'un graphe G , et soit M le couplage correspondant dans G . Le problème qui consiste à trouver une chaîne augmentante par rapport à S dans $L(G)$ est équivalent au problème de trouver une chaîne augmentante par rapport à M dans G , et l'on sait résoudre ce dernier problème par application de l'algorithme d'Edmonds.

Dans les graphes sans $K_{1,3}$

Minty [111] et Sbihi [123] ont indépendamment montré comment étendre le résultat précédent à la classe des graphes sans $K_{1,3}$ qui contient strictement la classe des graphes de ligne .

Plus précisément, les deux auteurs ont montré que le problème qui consiste à trouver une chaîne augmentante par rapport à un stable dans G , est équivalent à celui de trouver une chaîne augmentante par rapport à un couplage dans un graphe appelé *graphe auxiliaire* qu'ils ont construit.

Dans les graphes sans $S_{1,2,3}$

En modifiant légèrement l'algorithme proposé par Minty, Gerber et al. [74] ont pu déduire un algorithme permettant de détecter les chaînes augmentantes dans les graphes sans $S_{1,2,3}$.

Dans les graphes sans $S_{1,2,j} (j \geq 3)$, sans bannière

Cette classe contient aussi la classe des graphes sans $K_{1,3}$. Dans [88], Hertz et al. ont montré que trouver des chaînes augmentantes dans un graphe sans $S_{1,2,j} (j \geq 3)$, sans bannière est équivalent à trouver des chaînes augmentantes dans un certain graphe sans étoile et donc peut être résolu par application de l'algorithme d'Edmonds.

1.4.2 Graphes bipartis complets augmentants.

Trouver les graphes bipartis augmentants complets revient à trouver les graphes augmentants sans P_4 .

Cette approche a été appliquée :

- Dans les graphes sans S par Alekseev [10]
- Dans les graphes sans P_5 , sans bannière par Lozin [106]

- Dans les graphes sans bannière par Alekseev et Lozin [9]
- Dans les graphes sans P_5 par Boliac et Lozin [29]
- Les graphes sans bannière 2, par Hertz et Lozin [87]

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a passé en revue la méthode des graphes augmentants pour résoudre le problème du stable. C'est une approche générale. Comme le problème du stable est NP-complet, cette méthode est aussi NP-complet.

Mais pour certaines classes de graphes, elle permet de résoudre le problème du stable en temps polynomial.

Cette idée a été appliquée pour résoudre le problème du stable dans la classe des line graphes, par application de l'algorithme d'Edmonds. 15 ans plus tard, Minty et Sbihi ont indépendamment généralisé la solution d'Edmonds pour les lines graphes à la classe des graphes sans $K_{1,3}$. Et récemment un regain d'intérêt pour cette approche est remarqué, et beaucoup de nouveaux résultats ont été obtenus.

Ce chapitre résume l'essentiel de ce qui a été fait.

Chapitre 2

Algorithme de struction

Dans ce chapitre, nous allons présenter une méthode itérative permettant de réduire le nombre de stabilité : la struction (STability RedUCTION number)[57]. On examinera une généralisation de cette méthode [11] et son lien avec d'autres techniques utilisées pour le problème du stable.

2.1 Introduction

L'algorithme de struction est une approche générale qui permet de calculer le nombre de stabilité d'un graphe G .

C'est un processus itératif qui construit à partir d'un graphe G , un autre graphe G' tel que $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$.

Nous allons décrire, comment dans [57], les auteurs ont utilisé les fonctions pseudo-booléennes pour déduire un algorithme permettant de réduire le nombre de stabilité.

2.2 Graphe conflictuel

Soit une fonction pseudobooléenne f à maximiser.

La fonction f associe à tout n-uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) de $\{0, 1\}^n$ un réel

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k + \sum_{i=1}^p w_i T_i \text{ où } T_i = \prod_{j \in A_i} \bar{x}_j \prod_{k \in B_i} x_k, \text{ où } \bar{x}_j = 1 - x_j \text{ et } A_i, B_i \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \text{ et } A_i \cap B_i = \emptyset.$$

Si tous les w_i sont positifs, alors f est appelée une posiforme.

On associe à f , le graphe G construit comme suit :

A chaque terme T_i , on associe un sommet a_i dans G , ayant un poids w_i , et deux sommets a_i et a_j sont adjacents si et seulement s'ils sont en conflit, c'est à dire il existe dans T_i une variable x_k et il existe dans T_j la variable \bar{x}_k ou réciproquement, il existe dans T_i la variable \bar{x}_k et il existe dans T_j la variable x_k .

D'après la construction du graphe G , le maximum de f correspond à un stable de poids maximum dans G .

Exemple 2.1 $f(x, y, z, u, v) = 2xu + 3\bar{x}\bar{y} + 7\bar{u}v + \bar{x}z\bar{v} + 4\bar{z}u + 4x\bar{u}y + 5y + 6z + 3y\bar{z}$

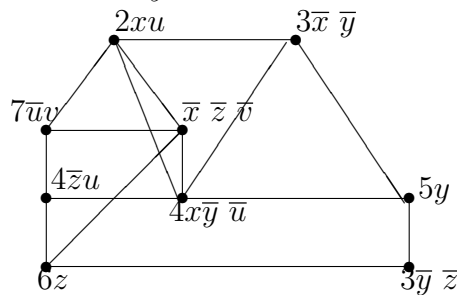


FIG. 2.1 – Graphe conflictuel de $f(x, y, z, u, v)$

On remarque qu'à chaque variable booléenne x_j , est associé dans G , un sous graphe (pas nécessairement induit) biparti, tel qu' une des bipartitions correspond à tous les

termes contenant x_j , alors que la deuxième correspond aux termes de f contenant \bar{x}_j .

Réciproquement, étant donné un graphe G muni d'une application poids, w , définie sur les sommets de ce graphe, on peut construire une fonction f telle que G est le graphe conflictuel associé.

En effet, initialement on pose $A_i = B_i = \emptyset$, pour chaque sommet i de G . Et on considère un recouvrement quelconque des arêtes de G par des graphes bipartis complets G_1, G_2, \dots, G_q tels que pour chaque graphe G_j , X_j, \widehat{X}_j sont les sommets de la bipartition associée. Alors, on pose

$$A_i = \{k/i \in X_k\} \text{ et } B_i = \{k/i \in \widehat{X}_k\},$$

enfin $f = \sum_{i=1}^n w_i T_i$ où $T_i = \prod_{j \in A_i} \bar{x}_j \prod_{k \in B_i} x_k$ est une posiforme ayant G comme graphe conflictuel.

2.3 Réduction du nombre de stabilité

Soit $G = (V, E)$ un graphe, où $V = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$.

Dans [57], Les auteurs associent au graphe G une posiforme f telle que :

$$\max f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \alpha(G).$$

2.3.1 Construction de f

1. Soit a_0 un sommet quelconque et soient a_1, \dots, a_p ses voisins. Au sommet a_0 , on associe le terme $T_0 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_p$.

2. Pour chaque sommet a_i , voisin de a_0 , on définit le terme $T_i = x_i \prod_{\substack{a_j \in N(a_i) \\ 1 \leq i < j \leq p}} \bar{x}_j$

3. Pour tout autre sommet a_i de G ($i > p$),

$$\text{on introduit un terme } T_i = x_i \prod_{a_j \in N(a_i) \cap N(a_0)} \bar{x}_j \prod_{\substack{a_j \in N(a_i) \cap (V - N[a_0]) \\ p < j < i \leq n}} \bar{x}_j$$

4. $f = \sum_{i \in X} T_i$

Dans le même article, les auteurs ont montré qu'il existe une posiforme g telle que :

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = g(x_0, x_1, \dots, x_n) + 1 \text{ et en particulier,}$$

$$\max f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \max g(x_0, x_1, \dots, x_n) + 1.$$

En notant G' , le graphe conflictuel associé à g , alors on a :

Proposition 2.1 $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$.

Et ont proposé l'algorithme suivant permettant de construire le graphe G' .

2.3.2 Construction de G'

1. Soit a_0 un sommet quelconque de G ayant pour voisins a_1, \dots, a_p . Les autres sommets de G seront notés : a_{p+1}, \dots, a_n .
2. Les sommets de G' seront a_{p+1}, \dots, a_n , ainsi que de nouveaux sommets. Chaque nouveau sommet $a_{i,j}$ ($i < j \leq p$) est associé à une paire de sommets non adjacents a_i, a_j voisins de a_0 .

L'ensemble des nouveaux sommets est partitionné en couches L_i .

$L_i = (a_{i,j_1}, a_{i,j_2}, \dots, a_{i,j_k})$ de sommets $a_{i,j}$ ayant i comme premier indice.

3. Les arêtes de G' sont :
 - (a) toutes les arêtes de G induites par $\{a_{p+1}, \dots, a_n\}$.
 - (b) les arêtes reliant 2 nouveaux sommets a_{i_1,j_1}, a_{i_2,j_2} tels que $i_1 \neq i_2$
 - (c) les arêtes reliant 2 nouveaux sommets a_{i_1,j_1}, a_{i_1,j_2} si les sommets a_{j_1} et a_{j_2} sont reliés dans G .
 - (d) Un "nouveau" sommet $a_{i,j}$ est relié à un "ancien" sommet a_k , si dans G , a_k est relié à a_i ou à a_j .

En itérant la construction de G' , on réduit à chaque étape le nombre de stabilité d'une unité, et donc on pourrait ainsi déduire le nombre de stabilité du graphe initial G .

Exemple 2.2 La figure 2.2 montre la construction de G' à partir de G .

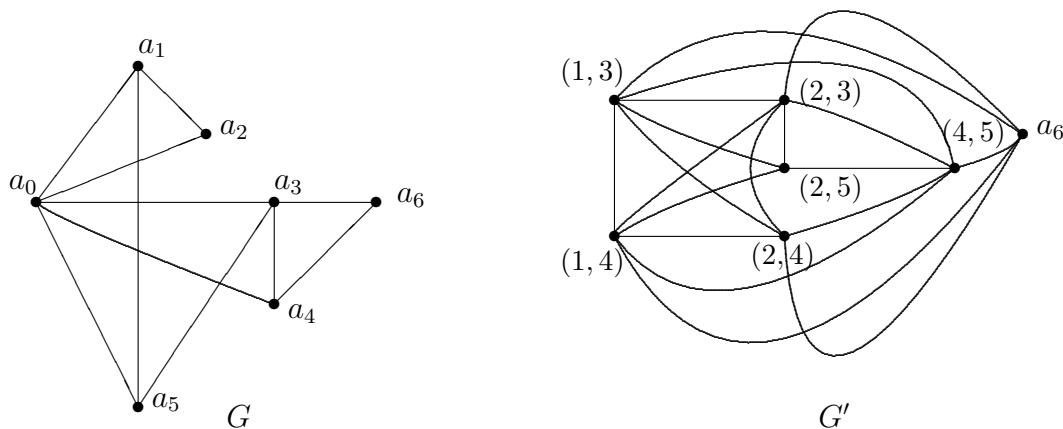


FIG. 2.2 – Construction du graphe G' , transformé de G par la struction centrée en a_0

Remarque 2.1 *Malheureusement, le grand inconvénient de cette méthode est que, en général, le nombre de sommets du graphe construit augmente !*

Dans certaines classes de graphes, l'application de cet algorithme, avec des modifications adéquates et parfois astucieuses permet d'obtenir un graphe G' appartenant à la même classe de graphes et ayant moins de sommets à chaque étape, et donc permet de trouver le nombre de stabilité en temps polynomial.

Dans [84] un algorithme a été obtenu pour les graphes n'ayant ni C , ni A , ni N comme sous graphe induit (voir figure 2.3). Dans [85], une autre variante permet de résoudre le problème pour les graphes sans C , ni N , et il est facile de montrer que la technique utilisée dans [86], pour les graphes sans A_k ni H_k est une struction particulière (voir figure 2.4). Notons que la classe de graphes sans A_k ni H_k contient la classe des graphes sans F et sans S pour laquelle De Simone et Sassano [54] avaient déjà développé un algorithme polynomial de recherche d'un stable de cardinalité maximum.

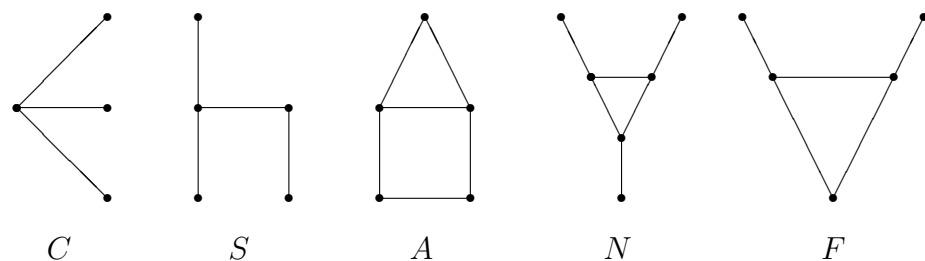


FIG. 2.3 –

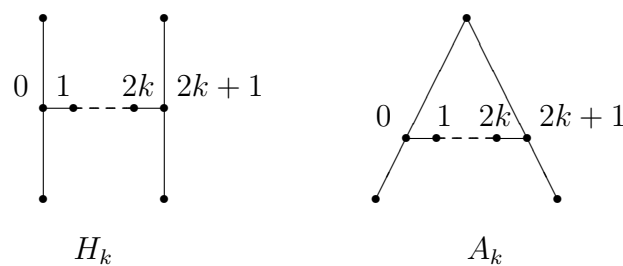


FIG. 2.4 –

2.4 Généralisation de la struction

La généralisation de la struction a été proposée par Alexe, De Werra, Hammer et Lozin [11].

C'est un algorithme qui s'inspire de la struction à la différence que la struction totale ne s'opère plus en un seul sommet, mais autour d'un sous graphe H du graphe G . Ce qui le rend plus puissant puisqu'il réduit le nombre de stabilité de G par une constante positive p .

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, on suppose que les sommets de G sont numérotés $1, 2, \dots, n$, où $n = |V|$.

Soit H un sous graphe induit de G . Si $A \subseteq V$, alors le sommet de numéro maximum dans A est noté $m(A)$ et $A^- = A - \{m(A)\}$. Et soit p un entier naturel : $p \leq \alpha(H)$.

Au triplet (G, H, p) , on associe le graphe $G' = S(G, H, p)$ de la façon suivante :

2.4.1 Construction de $G' = S(G, H, p)$

1. Les sommets de G' sont $R \cup W$, où W est l'ensemble de tous les stables de G de cardinalité $p + 1$ induits par $N[V(H)]$ et $R = V - N[V(H)]$.
2. Les arêtes de G' :
 - (a) Les arêtes du sous graphe $G[R]$.
 - (b) Les arêtes reliant 2 sommets A et $B \in W$ si $A^- \neq B^-$ ou $(m(A), m(B)) \in E$.
 - (c) Les arêtes reliant $A \in W$ et $v \in R$ si dans le graphe G , v a au moins un voisin dans A .

On dit que G' est obtenu à partir de G , par application de la struction totale autour du sous graphe H .

Exemple 2.3 *Le graphe de la figure 2.5 montre la construction du graphe $S(G, H, p)$ transformé de G par la struction généralisée, avec $H = G[1, 2, 3]$ et $p = 2$.*

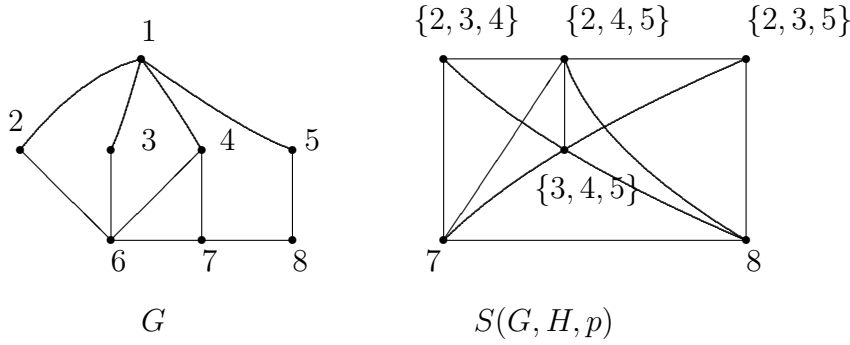


FIG. 2.5 –

Dans leur article [11], les auteurs ont donné le résultat suivant :

Théorème 2.1 ([11]) $\alpha(G') = \alpha(G) - p$.

Vu l'importance de ce théorème, nous reprenons sa démonstration :

Preuve. Soit S un stable de cardinalité maximum dans G et soit $S_H = S \cap N[V(H)]$ et $S_R = S \cap R$ dans G . Supposons $S_H = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$. Comme S est de cardinalité maximum, et que $p \leq \alpha(H)$, alors $t \geq p$. Pour $i = 1, \dots, t - p$, $A_i = \{a_1, a_2, \dots, a_{p+i}\}$ est un stable de G de cardinalité $p + 1$. Dans G' , les $A_i (i = 1, t - p)$ sont des sommets et par construction $\{A_1, A_2, \dots, A_{t-p}\} \cup S_R$ est un stable de G' de cardinalité $\alpha(G) - p$, donc $\alpha(G') \geq \alpha(G) - p$.

Réciproquement, soit S' un stable de G' de cardinalité maximum. Si $S' \cap W = \emptyset$, alors soit S_H un stable de H de cardinalité p , alors $S' \cup S_H$ est un stable de G de cardinalité $\alpha(G') + p$. On suppose donc que $S' \cap W \neq \emptyset$ et soit $S' \cap W = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$, donc $A_1^- = A_2^- = \dots = A_k^-$ et de plus dans G , $m(A_1), m(A_2), \dots, m(A_k)$ sont deux à deux non adjacents, et donc $S = (S' \cap R) \cup A_1^- \cup \{m(A_1), m(A_2), \dots, m(A_k)\}$ est un stable de G de cardinalité $\alpha(G') + p$. ■

Remarque 2.2

1. La struction est un cas particulier de la struction généralisée. C'est le cas où H est un singleton.
2. De Simone et Sassano [54], ont donné un algorithme polynomial pour résoudre le problème du stable pour les graphes sans S et sans F . L'algorithme proposé est une struction totale dont le centre est une clique particulière, dite clique réductible.

2.4.2 Liens entre quelques opérations utilisées pour trouver le nombre de stabilité et la struction

Contraction de sommets [46]

Soit x un sommet et soient y et z deux voisins non adjacents de x . Soit G' le graphe obtenu à partir de G en contractant les sommets x, y et z en un seul sommet v , et en reliant le sommet v à tout sommet voisin de y ou de z . Le graphe G' vérifie : $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$.

Proposition 2.2 *La contraction de sommets est une struction centrée en x .*

Réduction par rapport à un sommet simplicial [75]

Un sommet x est dit *simplicial* si $N(x)$ est une clique. Soit y un voisin d'un sommet x qui est simplicial, alors $\alpha(G - y) = \alpha(G)$. Et donc supprimer le sommet x et tous ses voisins, diminue le nombre de stabilité de G , d'une unité.

L'opération qui consiste à supprimer le sommet simplicial x et tous ses voisins est appelée une réduction par rapport à un sommet simplicial.

Proposition 2.3 *La réduction par rapport à un sommet simplicial x est une struction centrée en x .*

Réduction par rapport à un graphe H , α -maximal [103]

Pour un sous graphe induit H de G , et un sommet $v \in V(G) - V(H)$, $H + \{v\}$ représente le sous graphe de G induit par $H \cup \{v\}$. Le sous graphe H est dit α - maximal dans G si $\alpha(H + v) = \alpha(H) + 1$ pour tout sommet $v \in V(G) - V(H)$.

Définition 2.1 [103] *Soit G un graphe, et soit H un α - maximal sous graphe induit de G . L'opération qui consiste à :*

1. *supprimer H de G*
2. *relier deux sommets x et y dans $N(V(H))$ lorsque $\alpha(H + x + y) = \alpha(H) + 1$*

est appelée la H -réduction de G .

Le graphe obtenu par la H -réduction de G est noté $T(G, H)$.

Une H -réduction est α -parfaite si $\alpha(T(G, H)) = \alpha(G) - \alpha(H)$.

Nous allons voir deux exemples de réduction de graphes. Le premier exemple de cette transformation a été inspiré de la *contraction de cycle d'Edmonds* pour résoudre le problème du couplage maximum dans un graphe quelconque [58].

Le lemme suivant décrit la contraction de cycle [58] :

Lemme 2.1 [58] Soit G un graphe, M un couplage de G , et Z un cycle de longueur $2k+1$ contenant k arêtes de M . A partir de G , on construit le graphe G' en contractant le cycle Z en un seul sommet. Alors $M' = M - E(Z)$ est un couplage maximum dans G' si et seulement si M est un couplage maximum dans G .

On sait que trouver un couplage de cardinalité maximum dans G est équivalent à trouver un stable de cardinalité maximum dans le *line graphe*, noté $L(G)$, de G . Dans [11], les auteurs ont montré que la contraction de cycle, traduite de couplage à stable est une réduction α -parfaite. Et ont montré le résultat suivant :

Théorème 2.2 [11] : Soient G, G', M, M' et Z vérifiant les conditions du lemme 2.1. Alors $L(G') = T(L(G), H)$ et $\alpha(L(G')) = \alpha(L(G)) - \alpha(H)$ pour un certain sous graphe induit H de $L(G)$.

Le deuxième exemple est la réduction de clique. La réduction de clique est une H -réduction, telle que H est une clique. Cette transformation a été introduite la première fois par Lovasz et Plummer [103] pour résoudre le problème du stable de cardinalité maximum dans les graphes sans étoile. Dans le même article, ils ont montré que cette réduction est α -parfaite dans la classe de graphes considérée si $\alpha(N(H)) \leq 2$.

D'autres réductions de graphes ont été développées. L'avantage évident de toutes ces méthodes est qu'elles diminuent le nombre de sommets du graphe. Mais leur inconvénient est qu'en général elles ne sont pas α -parfaites. D'autre part, l'algorithme de struction nous garantit une décroissance du nombre de stabilité et c'est une décroissance contrôlée, mais en général le nombre de sommets augmente. Ces deux approches semblent être extrêmes pour le problème du stable. Seulement, dans [11], les auteurs ont montré qu'il y'a une relation entre une H -réduction et la struction. Cette relation est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 2.3 [11] Si H est un sous graphe de G , α -maximal, alors $T(G, H)$ est un sous graphe de $S(G, H, \alpha(H))$.

Le théorème 2.3 suggère l'idée que les réductions α -parfaites peuvent être obtenues en combinant la struction totale et des transformations préservant le nombre de stabilité. Des résultats combinant ces deux approches sont décrits dans [11].

2.5 Conclusion

En conclusion, nous pouvons dire que la struction totale est une méthode qui généralise la struction classique. On a vu que plusieurs des méthodes permettant de résoudre

le problème du stable de cardinalité maximum dans un graphe sont obtenues à partir de la struction. C'est une technique prometteuse pour résoudre le problème. Pour une classe de graphes donnée, il s'agira de montrer que la classe de graphe considérée est stable par cette opération, c'est à dire que le graphe obtenu par application de la struction est un graphe appartenant à la même classe de graphes.

Chapitre 3

Algorithme de struction modifié et application à deux nouvelles classes de graphes

Une modification à l'algorithme de struction est apportée. Cette modification permet de déduire un algorithme polynomial pour résoudre le problème du stable dans deux classes de graphes Γ et Γ' .

Un graphe appartient à la classe Γ s'il est sans S, sans N et possède la propriété que l'ensemble des centres d'étoiles est un stable [3].

La classe Γ' est plus large que la classe Γ puisqu'un graphe appartient à la classe Γ' s'il est sans S, sans N et possède la propriété que l'ensemble des centres d'étoiles est l'union de graphes complets [2].

3.1 Introduction

Un algorithme de struction modifié est proposé. On montre que l'application de cet algorithme pour deux classes de graphes Γ et Γ' permet de résoudre le problème du stable en temps polynomial [3] et [2].

On décrit dans la section 2 cet algorithme, et on donnera un exemple de son application.

Dans la section 3, on définit la classe de graphes Γ , et on montre que l'algorithme proposé est polynomial.

Le but de la section 4 est de proposer une classe de graphes Γ' généralisant la classe de graphes Γ . On montrera que l'algorithme proposé permet de trouver le nombre de stabilité en temps polynomial pour les graphes de Γ' .

Dans la section 5, on présente l'algorithme permettant de déduire un stable de cardinalité maximum dans un graphe de Γ' .

3.2 Algorithme de struction modifié

Cet algorithme de struction modifié permet de construire à partir d'un graphe G , $G = (V, E)$, $V(G) = V$, $E(G) = E$, un autre graphe G' tel que $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$.

Dans notre cas la struction s'opère autour d'un sommet *spécial* noté 0.

On dit qu'un sommet est *special* s'il n'est pas centre d'étoile.

Avant de décrire ce nouvel algorithme, nous précisons quelques notations utilisées.

Soient i et j deux sommets de $V(G)$, alors :

$[i, j]$ signifie qu'il existe une arête reliant i et j .

$\overline{[i, j]}$ signifie qu'il n'existe pas d'arête reliant i et j . On dira qu'il existe une *non arête*.

$$\overline{N}(a) = \left\{ j \in V / \overline{[a, j]} \right\}, N[a] = N(a) \cup \{a\}, N_0(a) = N[a] \cap N(0)$$

$$\text{et } \overline{N}_0(a) = \overline{N}(a) \cap N(0).$$

On définit un ordre partiel sur les sommets de $N(0)$.

$a \preceq b$ si $N_0(a) \subseteq N_0(b)$. On notera $a \approx b$ si $a \preceq b$ et $b \preceq a$.

Les sommets de $N(0)$ seront numérotés de 1 à $|N(0)|$ d'une certaine manière.

Ainsi un ordre total \prec sur les sommets de $N(0)$ est obtenu.

Algorithme de struction modifié

1. Soit 0 un sommet spécial de G .
2. On numérote les sommets de $N(0)$ de telle sorte que :
 - (a) si $a \preceq b$ et $a \not\prec b$ alors $a \prec b$
 - (b) si $a \approx b$ et $a \not\prec x$ et $x \not\prec a$ et $a \prec b$ alors soit $b \prec x$ ou $x \prec a$.
 - (c) Soit $I^* = \left\{ i \in N(0) / \exists j \in N(0) \text{ et } i \prec j \text{ et } \overline{[i, j]} \right\}$
3. Construction de G' :
 - (a) Introduire le sous graphe R de G induit par $V - N[0]$.
 - (b) Pour tout $i \in I^*$, on introduit un nouveau sommet i^* .
 - (c) Soit N_e l'ensemble des nouveaux sommets.
 - (d) On relie tous les nouveaux sommets entre eux. Donc N_e est une clique.
 - (e) Un nouveau sommet i^* est relié à r , $r \in R$, si dans G nous avons
 - $[i, r]$
 - ou
 - $[j, r]$ pour tout $j, i \prec j$ avec $j \in \overline{N_0}(i)$

Exemple 3.1 *De construction du graphe G'*

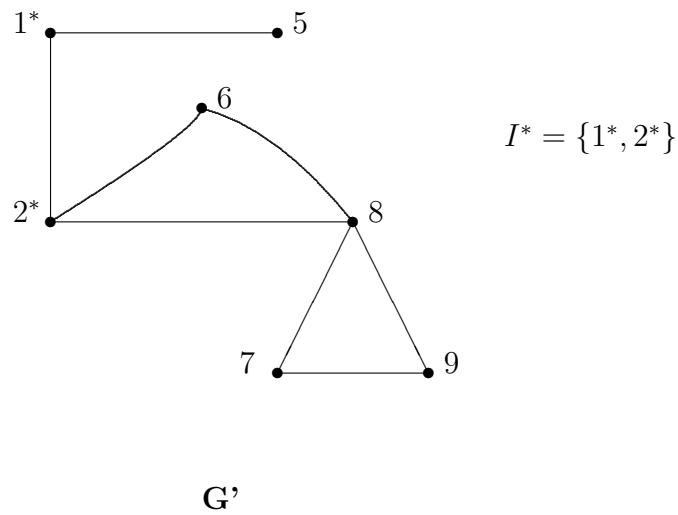
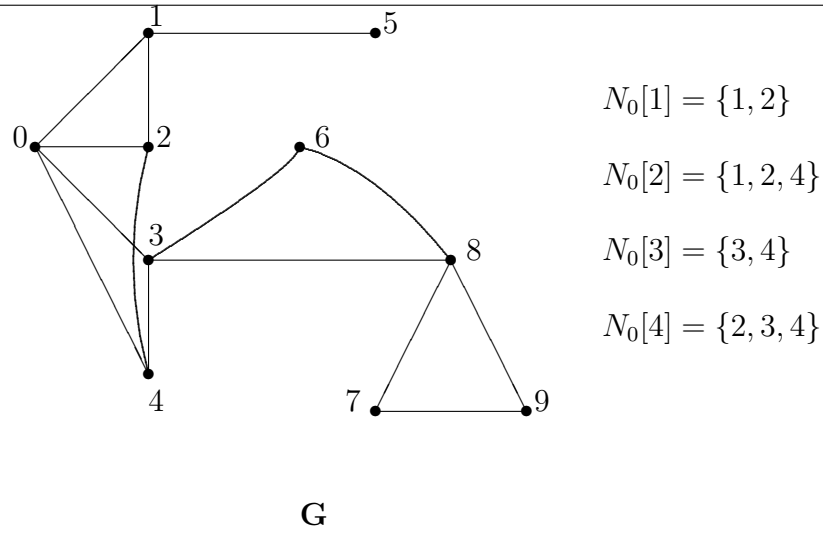


FIG. 3.1 – Construction du graphe G' transformé de G par la struction modifiée

Un sommet b de G est un *successeur* d'un autre sommet a si $\overline{[a, b]}$, $a, b \in N(0)$ et $b > a$.

Si a, b, c, \dots , sont de nouveaux sommets alors a', b', c', \dots sont les sommets de G correspondants à a, b, c, \dots , et a'', b'', c'', \dots sont des successeurs de a', b', c', \dots respectivement.

3.3 Struction pour la classe de graphes Γ

3.3.1 Définition de la classe Γ

Définition 3.1 *Un graphe G appartient à la classe de graphes Γ si :*

1. G est sans S
2. G est sans N
3. L'ensembles des centres d'étoiles de G est un stable.

Les graphes de la classe Γ ne sont pas nécessairement parfaits ou sans étoile. De plus cette classe contient strictement les classes de graphes sans C, A, N et sans C, N pour lesquelles un algorithme de struction a été proposé [84] et [85].

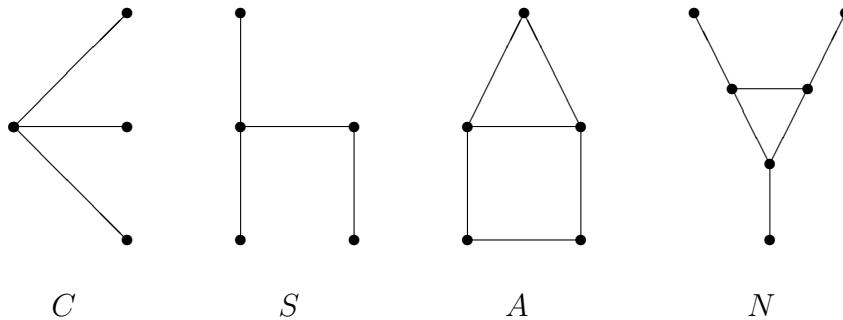


FIG. 3.2 –

Pour garantir que la détermination du nombre de stabilité s'obtient en temps polynomial pour cette nouvelle classe de graphes, les deux résultats suivants sont essentiels.

Proposition 3.1 *Soit G un graphe de la classe Γ . Si G' est le graphe obtenu par la struction proposée centrée en un sommet spécial 0 , alors $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$.*

Preuve.

(a) On doit d'abord montrer que si $S \neq \emptyset$ est un ensemble stable dans G , il existe un ensemble stable S' dans G' tel que $|S'| = |S| - 1$.

Soit S un ensemble stable de G . Comme 0 est un sommet spécial, on a : $|S \cap N(0)| \leq 2$. Si $S \cap N(0) = \emptyset$ alors si 0 est un élément de S , $S' = S - \{0\}$ est un stable de G' , sinon on pose $S' = S - \{x\}$, où x est un sommet de $S \cap R$. Si $S \cap N(0) = \{i\}$ alors $S' = S - \{i\}$. Et enfin si $S \cap N(0) = \{i, j\}$ avec $0 < i < j$, alors aucun sommet de $S \cap R$ n'est adjacent ni à i ni à j . Comme $i < j$ et que $\overline{[i, j]}$, alors on peut associer à i le sommet i^* dans G' . L'ensemble $S' = S / \{i, j\} \cup \{i^*\}$ est un stable de G' du fait qu'aucun sommet de $S \cap R$ n'est adjacent à j et par conséquent $\overline{[i^*, r]}$ est vraie pour tout $r \in S \cap R$.

Dans tous les cas, on trouve S' tel que : $|S'| = |S| - 1$, et on a $\alpha(G') \geq \alpha(G) - 1$.

(b) Montrons réciproquement, que si S' est un stable de G' , alors il existe un stable S de G tel que $|S| = |S'| + 1$.

Puisque N_e est une clique alors $|S' \cap N_e| \leq 1$. Si $S' \cap N_e = \emptyset$, alors $S' \subset R$, et $S = S' \cup \{0\}$ est un stable de G . Supposons maintenant que $S' \cap N_e = \{i^*\}$, alors il existe dans G un sommet i associé à i^* tel que $\overline{N_0}(i) \neq \emptyset$. Si $\overline{N_0}(i) = \{j\}$, alors du fait que S' soit stable dans G' , on a pour tout $r \in S' \cap R$, $\overline{[r, i]}$ et $\overline{[r, j]}$ et $S = S' - \{i^*\} \cup \{i, j\}$ est un stable dans G . On suppose donc que $|\overline{N_0}(i)| \geq 2$. Le but de ce qui suit est de montrer qu'il existe un sommet $j \in \overline{N_0}(i)$ tel que $\overline{[r, j]}$ pour tout $r \in S' \cap R$. Supposons que ce n'est pas vrai et que pour tout $j \in \overline{N_0}(i)$, il existe $r \in S' \cap R$, tel que $\overline{[j, r]}$. Soit $j_1 \in \overline{N_0}(i)$, il existe $r_1 \in S' \cap R$ tel que $\overline{[j_1, r_1]}$ et comme dans G' , on a $\overline{[i^*, r_1]}$ donc il existe $j_2 \in \overline{N_0}(i)$, tel que $\overline{[r_1, j_2]}$ et il existe $r_2 \in S' \cap R$ tel que $\overline{[r_2, j_2]}$. Si $\overline{[r_2, j_1]}$, alors $\langle \{j_1; r_1, r_2, 0, i\} \rangle = S$ ce qui implique $\overline{[r_2, j_1]}$, et comme $\langle \{0, i, j_1, j_2, r_2\} \rangle \neq S$ donc $\overline{[j_1, j_2]}$. Mais alors $\langle \{0, i, j_1, j_2, r_2\} \rangle = N$. Cette dernière contradiction, implique qu'il existe $j \in \overline{N_0}(i)$ tel que $\overline{[r, j]}$ pour tout $r \in S' \cap R$, et $S = S' - \{i^*\} \cup \{i, j\}$ est un stable de G , et on a $\alpha(G) \geq \alpha(G') + 1$.

De (a) et (b), on déduit que $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$. ■

Remarque 3.1 Comme pour les sommets 0 et $|N(0)|$ aucun nouveau sommet n'a été créé, la proposition suivante nous assure la convergence de l'algorithme de struction proposé.

Proposition 3.2 Soit G un graphe appartenant à la classe de graphes Γ , et soit G' le graphe obtenu à partir de G par application de la struction autour du sommet spécial 0, alors $|V(G')| \leq |V(G)| - 2$.

3.3.2 Fermeture de la classe Γ

On montre dans cette section que le graphe G' obtenu par application de la struction est un graphe de la classe Γ .

Les lemmes suivants sont utiles pour démontrer la fermeture de la classe Γ .

Lemme 3.1 Soit G un graphe appartenant à Γ . Et soit G' le graphe obtenu par application de la struction à G autour d'un sommet spécial 0. Supposons que $a \in N_e$ et soit a' le correspondant de a dans G . Alors :

- (i) $[a, r]$ dans G' implique que $[a', r]$ ou $[a'', r]$ pour tout successeur a'' de a' .
- (ii) $\overline{[a, r]}$ dans G' implique $\overline{[a', r]}$ et $\overline{[a'', r]}$ pour au moins un successeur a'' de a' .

(iii) $\overline{[a, r_1]}, \overline{[r_1, r_2]}, \overline{[r_2, a]}$ dans G' implique $\overline{[a', u]}$, et $\overline{[a'', u]}$, pour $u = r_1, r_2$ et pour un successeur a'' de a' .

Preuve.

(i) et (ii) sont conséquences de la construction de G' .

(iii) Par définition de la struction, on a $\overline{[a', r_1]}, \overline{[a', r_2]}, \overline{[a''_1, r_1]}$ et $\overline{[a''_2, r_2]}$ pour des successeurs a''_1 , et a''_2 de a' . Si $a''_1 = a''_2$, alors (iii) est montré. On suppose donc que $a''_1 \neq a''_2$, $\overline{[a''_2, r_1]}$ et $\overline{[a''_1, r_2]}$ mais alors $\overline{[a''_1, a''_2]}$ car sinon $\langle \{0; a''_1, a''_2; a', r_1\} \rangle = S$ et donc $\langle \{0, a''_1, a''_2; a', r_1, r_2\} \rangle = N$, ce qui est impossible. ■

Lemme 3.2 Soit G un graphe appartenant à Γ . Et soit G' le graphe obtenu par application de la struction à G autour d'un sommet spécial 0.

Si $B = (r, a, b, 0, x, s)$ (Voir Figure 3.3) est un sous graphe induit de G , alors $a \preceq b$.

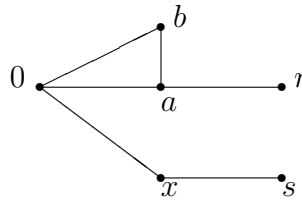


FIG. 3.3 –

Preuve.

Pour montrer que $a \preceq b$, on procède par l'absurde. Supposons qu'il existe un sommet $v \in N_0[a] - N_0[b]$ dans G (rappelons que $a \preceq b$ si $N_0[a] \subseteq N_0[b]$). Soit $H := B + v$. Puisque $\langle \{0; x, b, v\} \rangle \neq C$, on a $\overline{[x, v]}$. On a aussi $\overline{[v, r]}$ sinon $H - \{0, s\} = S$, et $\overline{[v, s]}$ sinon $H - \{a, x\} = S$. Mais alors $H - \{a\} = N$. ■

Lemme 3.3 Soit G un graphe appartenant à Γ . Et soit G' le graphe obtenu par application de la struction à G autour d'un sommet spécial 0. Supposons que G' contient un sous graphe induit $\langle \{a; x, y, z\} \rangle$ isomorphe à C , et supposons que $N_e \cap \{a, x, y, z\} \neq \emptyset$, alors :

(i) $a \in N_e$.

(ii) a', a'', x', x'' sont tous distincts si $x \in N_e \cap \{x, y, z\}$, où a'' est un successeur de a' et x'' est un successeur de x' choisi tel que $\overline{[x'', y]}$ et $\overline{[x'', z]}$.

- (iii) Sous les conditions de (ii), $[a', v]$ et $[a'', v]$ pour $v = x', x''$
 (iv) a' et tous ses successeurs sont des centres d'étoiles dans G .

Preuve.

- (i) Par l'absurde. Supposons sans perte de généralité que $N_e \cap \{x, y, z\} = \{x\}$. Par Lemma 3.1(iii), il existe un successeur x'' de x' dans G tel que $\overline{[x'', y]}$ et $\overline{[x'', z]}$. Donc $\{x', x'', y, z\}$ est un stable dans G . Comme $[a, x]$ dans G' , on a soit $[a, x']$ ou $[a, x'']$. Mais alors $\langle \{a; y, z, u, 0\} \rangle = S$, avec $u \in \{x', x''\}$, contradiction (notons que $\overline{[0, y]}$ et $\overline{[0, z]}$ puisque $y, z \notin N_e$). Mais comme par hypothèse, $N_e \cap \{a, x, y, z\} \neq \emptyset$, il en résulte que $a \in N$.
- (ii) Puisque $a, x \in N_e$ et que N_e est une clique par construction, on a $y, z \notin N_e$. Par lemme 3.1(iii), on peut choisir x'' tel que $\overline{[x'', u]}$ pour $u = y, z$. Par construction, $\overline{[x', u]}$. Supposons que (ii) est fausse, c'est à dire qu'il existe au moins 2 sommets parmi $\{a', a'', x', x''\}$ qui ne sont pas distincts. Comme $a' \neq a''$ et que $x' \neq x''$, nous avons à traiter uniquement les deux cas suivants :
- (1) $a' \in \{x', x''\}$
 Comme dans G' , on a $[a, y]$ et $[a, z]$ et que $\overline{[a', y]}$ et $\overline{[a', z]}$ puisque $a' \in \{x', x''\}$, il s'ensuit que $[a'', y]$ et $[a'', z]$. Mais alors
 $\langle \{a''; y, z, 0, a'\} \rangle = S$.
- (2) $a'' \in \{x', x''\}$
 En interchangeant a' et a'' , on se ramène au cas précédent.
- (iii) Par (ii), on peut choisir a'', x'' tels que a', a'', x', x'' sont tous distincts et $\{x', x'', y, z\}$ est un ensemble stable de G . Soit F le sous graphe induit par $\{0, a', a'', x', x'', y, z\}$ dans G . On montre d'abord que $[a', x']$. Supposons au contraire que $\overline{[a', x']}$. Alors $[a'', x']$ et $[a', x'']$ car sinon soit $\langle \{0; a', x', a''\} \rangle$ ou $\langle \{0; a', x', x''\} \rangle$ est une étoile. On ne peut pas avoir $[a', y]$ et $[a', z]$ sinon $F - \{a'', x''\} = S$. De façon similaire on ne peut pas avoir $[a'', y]$ et $[a'', z]$ car sinon soit $[a'', x'']$ et alors $\langle \{a''; x', u, x'', a'\} \rangle = S$ avec $u \in \{y, z\}$ (rappelons que $|N(a') \cap \{y, z\}| \leq 1$) ou $\overline{[a'', x'']}$ et $\langle \{a''; y, z, 0, x''\} \rangle = S$. Comme $[a, y]$ et $[a, z]$ dans G' , on peut supposer, sans perte de généralité, que $[a', y]$, $\overline{[a', z]}$, $[a'', z]$, et $\overline{[a'', y]}$. Par application du lemme 3.2 à la configuration $B = (y, a', x', 0, a'', z)$, on a $a'' \leq x'$ et comme $a' \leq a'' \leq x'$. Alors x' est un successeur de a' , ce qui implique $[x', z]$ puisque $[a, z]$ dans G' et $\overline{[a', z]}$ dans G . Ce qui contredit l'hypothèse $\overline{[x, z]}$. Donc $[a', x']$. De façon similaire on peut supposer que $[a', x'']$. Pour terminer la preuve de (iii), on doit juste encore montrer que $[a'', x'']$ puisqu'on peut déduire $[a'', x']$ par symétrie. Supposons qu'au contraire $\overline{[a'', x'']}$. Comme $\langle \{0; a'', x', x''\} \rangle \neq C$, on a $[a'', x']$. Il

est clair qu'on ne peut pas avoir $[a'', y]$ et $[a'', z]$ sinon $F - \{a', x'\} = S$. Si $[a'', z]$ alors $\overline{[a'', y]}$ et donc $[a', y]$. Mais alors $F - \{0, z\} = S$. Si $\overline{[a'', z]}$ alors $[a'', y]$ et donc $[a', z]$. Mais alors $F - \{0, y\} = S$. Ce dernier point termine la preuve de (iii).

(iv) De (i), $a \in N_e$ et par construction N_e est une clique. Nous avons à considérer les deux cas suivants :

(1) $N_e \cap \{a, x, y, z\} = \{a\}$

Soit a' le sommet de G correspondant à a et soit a'' un successeur quelconque de a' . Supposons qu'au moins un des deux sommets a' et a'' (disons a''), n'est pas centre d'étoile. Puisque $[a, u]$ pour $u = x, y, z$ dans G' , on a soit $[a', u]$ ou $[a'', u]$. Par hypothèse, $|N(a'') \cap \{x, y, z\}| \leq 1$ sinon $\langle \{a''; 0, x, y\} \rangle = C$, par exemple. Donc supposons, sans perte de généralité que $[a', x]$, $[a', y]$, $\overline{[a'', x]}$, et $\overline{[a'', y]}$. Mais alors $\langle \{a'; x, y, 0, a''\} \rangle = S$. Donc ce premier cas n'est pas possible.

(2) $N_e \cap \{a, x, y, z\} = \{a, x\}$

Soit x' le sommet de G correspondant à x et soit x'' tel que $\overline{[x'', y]}$ et $\overline{[x'', z]}$. Par (ii), a', a'', x', x'' sont tous distincts. Comme dans le cas (1), supposons que a'' n'est pas centre d'étoile. Par (iii), $[a'', x']$ et $[a'', x'']$. Donc $\overline{[a'', y]}$ et $\overline{[a'', z]}$, ce qui implique que $[a', y]$ et $[a', z]$ puisque $[a, y]$ et $[a, z]$ dans G' . Mais alors $\langle \{a'; y, z, 0, a''\} \rangle = S$.

Ce qui termine la preuve du lemme3.3 ■

Proposition 3.3 *Soit G un graphe appartenant à Γ . Et soit G' le graphe obtenu par application de la struction à G autour d'un sommet spécial 0. Alors G' est sans S .*

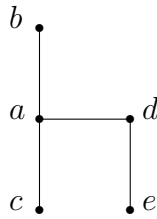


FIG. 3.4 – $S : \langle \{a; b, c, d, e\} \rangle$

Preuve.

Supposons que G' contient un sous graphe induit $\langle \{a; b, c, d, e\} \rangle$ isomorphe à S . Au moins l'un des sommets a, b, c, d, e est un nouveau sommet, car sinon un sous graphe isomorphe à S existerait dans G . Par application du lemme3.3(i) à l'étoile $(a; b, c, d)$,

aucun des sommets b, c, d ne peut être le seul nouveau sommet, en particulier on ne peut pas avoir $d, e \in N_e$. Donc, nous n'avons à considérer que les trois cas suivants :

$$(1) N_e \cap \{a, b, c, d\} = \{a\}$$

Soit a' le sommet de G correspondant à a et on choisit a'' tel que $\overline{a'', e}$. Puisque on a soit $[a', d]$ ou $[a'', d]$ dans G , on suppose sans perte de généralité que $[a', d]$. Pour $u = b, c, \overline{a', u}$ car sinon $\langle \{a'; 0, u, d, e\} \rangle = S$ dans G . Comme $[a, u]$ dans G' , on doit avoir $[a'', b]$ et $[a'', c]$. Mais alors $\langle \{a''; b, c, 0, a'\} \rangle = S$ dans G . Donc ce premier cas est impossible.

$$(2) N_e \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b\}$$

Soit a' le sommet de G correspondant à a et l'on choisit a'' tel que $\overline{a'', e}$. Et soit b' correspondant à b et on choisit b'' tel que $\overline{b'', c}$ et $\overline{b'', d}$. Notons aussi que $\overline{b', e}$, par le lemme 3.1(iii). Par le lemme 3.3(ii) a', a'', b', b'' sont tous distincts. Supposons d'abord que $[a', d]$, Par le 3.3(iii) appliqué à l'étoile $\langle \{a; b, c, d\} \rangle$, on a $[a', u], [a'', u]$ pour $u = b', b''$. Remarquons que $[b'', e]$ sinon $\langle \{a'; b', b'', d, e\} \rangle = S$, et $\overline{a', c}$ sinon $\langle \{a'; b', c, d, e\} \rangle = S$ dans G , donc $[a'', c]$ puisque $[a, c]$ dans G' . Mais alors $\langle \{a''; b', c, b'', e\} \rangle = S$ dans G . En utilisant des arguments similaires, on trouve une contradiction si $\overline{a', d}$ et donc $[a'', d]$ et alors $\langle \{a''; 0, c, d, e\} \rangle = S$. On conclut que ce deuxième cas n'est pas possible aussi.

$$(3) N_e \cap \{a, b, c, d\} = \{a, d\}$$

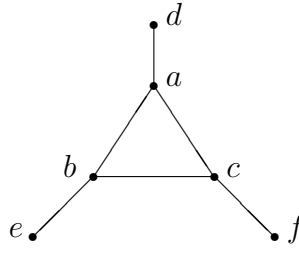
Soient a' et a'' choisis comme dans (2) et soit d' correspondant à d et on choisit d'' tel que $\overline{d'', b}$ et $\overline{d'', c}$. Par le 3.3(ii) a', a'', d', d'' sont tous distincts. Supposons d'abord que $[a', c]$. Par le 3.3(iii), $[a', u], [a'', u]$ pour $u = d', d''$. On a $\overline{a', b}$ sinon $\langle \{a'; b, c, u, e\} \rangle = S$ dans G , avec $u \in \{d', d''\}$ choisis tels que $[u, e]$ (puisque $[d, e]$ dans G' , on a soit $[d', e]$ ou $[d'', e]$). Donc $[a'', b]$ puisque $[a, b]$ dans G' . Mais maintenant $\langle \{u; e, a', a'', b\} \rangle = S$ dans G . Des arguments similaires nous permettent d'arriver à des contradictions si $\overline{a', c}$ et par conséquent $[a'', c]$ et là aussi $\langle \{u; e, a', a'', c\} \rangle = S$. Impossible.

Ce qui termine la preuve de la proposition 3.3. ■

Proposition 3.4 *Soit G un graphe appartenant à Γ . Et soit G' le graphe obtenu par application de la struction à G autour d'un sommet spécial 0. Alors G' est sans N .*

Preuve.

Supposons que $\langle \{a, b, c; d, e, f\} \rangle = N$ (voir Figure 3.5) dans G' et qu'au moins un des sommets est un nouveau sommet. Quatre cas sont possibles :

FIG. 3.5 – $N : \langle \{a, b, c; d, e, f\} \rangle$

$$(1) N_e \cap \{d, e, f\} = \{d\}$$

Soit d' le sommet de G correspondant à d , alors $\overline{[d', u]}$ pour $u = b, c, e, f$. Par le lemme3.1(iii) on peut choisir d'' tel que $\overline{[d'', c]}$ et $\overline{[d'', e]}$. Maintenant $\overline{[d', a]}$ sinon $\langle \{a, b, c; d', e, f\} \rangle = N$. Puisque $[d, a]$ dans G' , alors on a $[d'', a]$. Remarquons que $\overline{[d'', f]}$ sinon $\langle \{d''; a, f, 0, d'\} \rangle = S$, mais alors $\langle \{a, b, c; d'', e, f\} \rangle = N$. Donc (1) est impossible.

$$(2) N_e \cap \{a, b, c\} = \{a\}$$

Soit a' le sommet de G correspondant à a , donc $\overline{[a', u]}$ pour $u = e, f$. Par le lemme3.1(iii), on peut choisir a'' tel que $\overline{[a'', e]}$ et $\overline{[a'', f]}$. Supposons sans perte de généralité que $[a', c]$ alors $[a', b]$ car sinon $\langle \{c; f, a', b, e\} \rangle = S$.

Mais alors $\langle \{a', b, c; 0, e, f\} \rangle = N$.

Donc ce 2ème cas est impossible. Notons que dans les arguments de la preuve de (2), on n'utilise pas le sommet d . Donc on n'a pas besoin d'autres considérations pour montrer le cas où $N_e \cap \{d, e, f\} = \{a, d\}$. Ce cas traite évidemment les cas où b ou c est un nouveau sommet.

$$(3) N_e \cap \{a, b, c\} = \{a, b\}$$

Soient a', b' les sommets de G correspondant à a et b alors $\overline{[a', u]}$ pour $u = e, f$ et $\overline{[b', v]}$ pour $v = d, f$. Par le lemme3.1(iii), il existe a'' et b'' tels que $\overline{[a'', u]}$ et $\overline{[b'', v]}$. Nous avons à considérer trois sous cas :

$$(3.1) a', a'', b', b'' \text{ sont tous distincts.}$$

On ne peut pas avoir $[u, c]$ et $[u, d]$ pour $u \in \{a', a''\}$ sinon

$\langle \{u; 0, d, c, f\} \rangle = S$. De la même façon, on ne peut pas avoir $[v, c]$ et $[v, e]$ pour $v \in \{b', b''\}$ sinon $\langle \{v; 0, e, c, f\} \rangle = S$. Puisque $[a, c]$, $[a, d]$, $[b, c]$ et $[b, e]$ dans G' , nous pouvons supposer sans perte de généralité que $[a', c]$, $[a'', d]$, $\overline{[a', d]}$, $\overline{[a'', c]}$, $[b', e]$, $[b'', c]$, $\overline{[b', c]}$, $\overline{[b'', e]}$. Supposons maintenant que $\overline{[a', b']}$, alors $[a', b']$, $[a'', b'']$ à cause du fait que 0 n'est pas centre d'étoile. Notons que $\overline{[a'', b']}$ sinon $\langle \{b'; e, a'', a', c\} \rangle = S$. Par application du lemme3.2 au sous

graphe de G induit par $\{d, a'', 0, a', c, b'\}$ on a $a' \preceq b'$. Donc $a' < b' < b''$, et ainsi b'' est un successeur de a' . Puisque $[a, d]$ dans G' et $\overline{[a', d]}$ dans G , on doit avoir $[b'', d]$, ce qui est impossible, ce qui implique $[a', b'']$. Pour des raisons de symétrie, on a $[a'', b']$. Maintenant $\overline{[a', b']}$ sinon $\langle \{b'; e, a'', a', c\} \rangle = S$. Mais alors

$$\langle \{0, b', a''; a', e, d\} \rangle = N.$$

$$(3.2) \quad a'' = b''$$

Puisque 0 n'est pas centre d'étoile, alors $[a', b']$ avec $a' \neq b'$. Puisque $a'' = b''$ et $\overline{[a'', e]}$ alors on doit avoir $[b', e]$ puisque $[b, e]$ dans G' . De façon similaire, on a $[a', d]$. Mais alors

$$\langle \{0, a', b'; a'', d, e\} \rangle = N.$$

$$(3.3) \quad a' = b'' \text{ (ou } a'' = b')$$

Puisque 0 n'est pas centre d'étoile, alors $[a'', b']$. Comme $[b, e]$ dans G' et $[b', a'']$ dans G , on a $[b', e]$. De même $[a'', d]$ puisque $a' = b''$ et $\overline{[b'', d]}$. Mais alors $\langle \{0, a'', b'; a', d, e\} \rangle = N$. Impossible.

$$(4) \quad N_e \cap \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$$

Soient a', b', c' les sommets de G correspondant à a, b et c respectivement. Alors $\overline{[a', u]}$ pour $u = e, f$, $\overline{[b', v]}$ pour $v = d, f$, et $\overline{[c', w]}$ pour $w = e, d$. Par le lemme 3.1(iii), ils existent a'' et b'' tels que $\overline{[a'', u]}$, $\overline{[b'', v]}$ et $\overline{[c'', w]}$. Soient $\alpha \in \{a', a''\}$, $\beta \in \{b', b''\}$ et $\gamma \in \{c', c''\}$. Par hypothèses et par définition de G' , on peut choisir α, β, γ tels que $N(\alpha) \cap \{d, e, f\} = \{d\}$,

$N(\beta) \cap \{d, e, f\} = \{e\}$ et $N(\gamma) \cap \{d, e, f\} = \{f\}$. On rappelle que $[0, \alpha]$, $[0, \beta]$ et $[0, \gamma]$. Nous avons à considérer trois sous cas :

$$(4.1) \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ sont tous distincts.}$$

Si $[\alpha, \gamma]$, $[\beta, \gamma]$ et $[\gamma, \alpha]$, alors $\langle \{\alpha, \beta, \gamma; d, e, f\} \rangle = N$.

Si $[\alpha, \gamma]$, $[\beta, \gamma]$ et $\overline{[\gamma, \alpha]}$, alors $\langle \{\beta; \gamma, e, \alpha, d\} \rangle = S$.

Si $[\alpha, \gamma]$, $\overline{[\beta, \gamma]}$ et $\overline{[\gamma, \alpha]}$, alors $\langle \{0, \alpha, \beta; \gamma, d, e\} \rangle = N$.

Si $\overline{[\alpha, \gamma]}$, $\overline{[\beta, \gamma]}$ et $\overline{[\gamma, \alpha]}$, alors $\langle \{0; \alpha, \beta, \gamma\} \rangle = C$. Impossible.

$$(4.2) \quad \alpha = \beta \neq \gamma$$

Si $\overline{[\gamma, \alpha]}$, alors $\langle \{\alpha; d, e, 0, \gamma\} \rangle = S$. Si $[\gamma, \alpha]$ alors, $\langle \{\alpha; d, e, \gamma, f\} \rangle = S$. Impossible.

$$(4.3) \quad \alpha = \beta = \gamma$$

Supposons sans perte de généralité que $\alpha = a'$. Considérons maintenant a'' . On sait que $\overline{[a'', a']}$, $\overline{[a'', e]}$, $\overline{[a'', f]}$. Alors $\langle \{\alpha; e, f, 0, a''\} \rangle = S$. Ce qui est impossible.

Ce qui termine la preuve de la proposition 3.4. ■

Proposition 3.5 *Soit G un graphe appartenant à Γ . Et soit G' le graphe obtenu par application de la struction à G autour d'un sommet spécial 0 . Alors l'ensemble des centres d'étoiles de G' est un stable.*

Preuve.

On suppose par l'absurde que c'est faux. Et donc qu'il existe deux sommets adjacents a et b et tous les deux centres d'étoiles dans G' . Par le lemme 3.3(i), il suffit de considérer les deux cas suivants :

$$(1) a, b \in N_e$$

Pour $u = a, b$, soit u' le sommet de G correspondant à u . Par le lemme 3.3(ii), a', b', a'', b'' sont tous distincts et sont tous des centres d'étoile. En considérant trois sommets parmi ces quatre sommets, deux parmi eux sont adjacents, à cause du fait que 0 n'est pas centre d'étoile. Mais alors deux sommets centres d'étoiles sont adjacents dans G , impossible.

$$(2) N_e \cap \{a, b\} = \{b\}$$

Par le lemme 3.3(iv), b' et b'' sont tous les deux des centres d'étoiles. Soient x, y et z trois sommets tels que $\langle \{a; x, y, z\} \rangle = C$ (il est possible que b soit l'un de ces trois sommets). Si x, y et z sont tous dans G , alors $\langle \{a; x, y, z\} \rangle = C$ dans G . Ceci n'est pas possible, car a est adjacent à b' ou à b'' dans G , et on aurait donc dans G deux centres d'étoiles reliés par une arête. On suppose donc que x est un nouveau sommet. Par le lemme 3.1(iii), nous pouvons choisir x'' tel que $\overline{[x'', y]}$ et $\overline{[x'', z]}$. De plus $\overline{[x', y]}$ et $\overline{[x', z]}$ par définition de la struction. Puisque dans G' , on a $[a, x]$, alors dans G , soit $\langle \{a; x', y, z\} \rangle = C$ ou $\langle \{a; x'', y, z\} \rangle = C$. Comme dans G' , on a $[a, b]$, alors dans G , on a soit $[a, b']$ ou $[a, b'']$. Et donc on aurait dans G , deux sommets centres d'étoile adjacents ce qui est impossible.

Ce qui termine la preuve de la proposition 3.5. ■

3.3.3 Nombre de stabilité pour les graphes de la classe Γ

Théorème 3.1 *Si G est un graphe de la classe de graphes Γ , alors le nombre de stabilité de G , $\alpha(G)$, peut être calculé en temps polynomial.*

Preuve. Par la proposition 3.3, G' est sans S , par la proposition 3.4 G' est sans N et par la proposition 3.5, l'ensemble des centres d'étoiles de G' est stable, donc le graphe G' est un graphe de la classe Γ . La première partie de la preuve est maintenant terminée.

Par les propositions 3.1 et 3.2, à chaque itération de la struction, le nombre de sommets et le nombre de stabilité diminuent. Donc en itérant l'application de l'algorithme de struction, on obtient une séquence de graphes $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots$. On s'arrête lorsqu'on obtient un graphe $G^{(k)}$ ($1 \leq k \leq n-2$) pour lequel on peut facilement trouver le nombre de stabilité. Alors si $\alpha(G^{(k)}) = p$, $\alpha(G) = k + p$. Il est évident qu'à chaque itération, un sommet spécial existe à cause du fait que l'ensemble des centres d'étoiles du graphe obtenu par la struction est un stable. Donc un algorithme polynomial pour la détermination du nombre de stabilité pour un graphe de la classe Γ est facilement obtenu. En effet, puisque la transformation $G \rightarrow G'$ est appliquée au plus n fois et que la construction de G' se fait en $O(n^2)$, l'algorithme proposé est en $O(n^3)$. ■

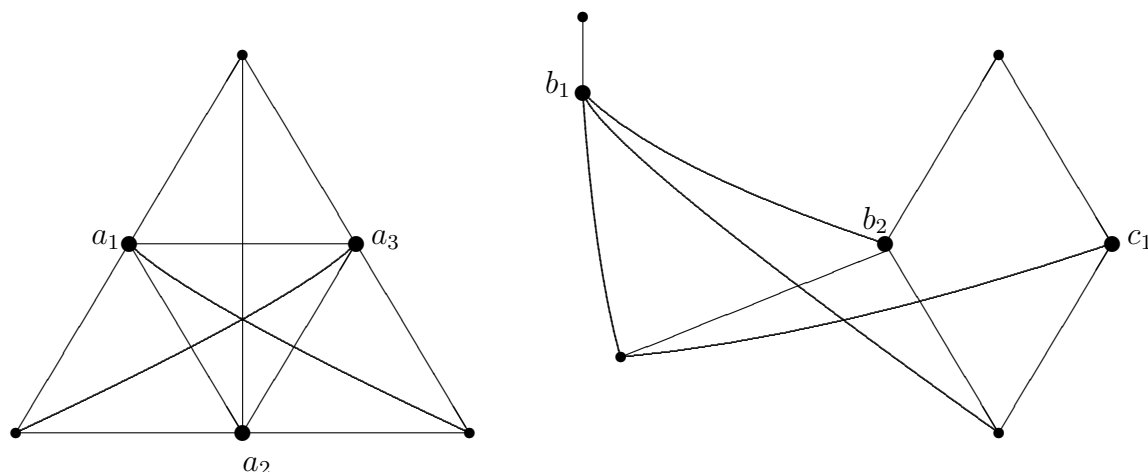
3.4 Struction pour la classe de graphes Γ'

3.4.1 Définition de la classe Γ'

Définition 3.2 *Un graphe G appartient à la classe de graphes Γ' si :*

1. G est sans S
2. G est sans N
3. L'ensemble des centres d'étoiles de G est l'union de graphes complets.

Les graphes de la classe Γ' ne sont eux aussi pas nécessairement parfaits ou sans étoile. De plus cette classe contient strictement les classes de graphes sans C, A, N et sans C, N mais elle est différente des autres classes de graphes citées. La classe de graphe Γ' contient la classe de graphes Γ .

FIG. 3.6 – Deux graphes de la classe Γ'

On montre que l'algorithme de struction modifié proposé, permet de trouver le nombre de stabilité d'un graphe de Γ' en temps polynomial.

Les deux résultats suivants sont essentiels pour garantir que le nombre de stabilité s'obtient pour la classe Γ' en temps polynomial.

Proposition 3.6 *Soit G un graphe de la classe Γ' . Si G' est le graphe obtenu par la struction centrée en un sommet spécial 0 , alors $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$.*

Pour cette classe de graphes aussi, et pour les sommets 0 et $|N(0)|$ aucun nouveau sommet n'a été créé. La proposition suivante nous assure la convergence de l'algorithme de struction proposé :

Proposition 3.7 *Soit G un graphe appartenant à la classe de graphes Γ' , et soit G' le graphe obtenu à partir de G par application de la struction autour du sommet spécial 0 . Alors $|V(G')| \leq |V(G)| - 2$.*

3.4.2 Fermeture de la classe Γ'

On montre dans cette section, que le graphe G' obtenu par application de l'algorithme de struction modifié décrit précédemment est un graphe de la classe Γ' .

Proposition 3.8 *Soit G un graphe appartenant à Γ' . Alors le graphe G' obtenu par application de la struction à G autour d'un sommet spécial 0 est un graphe de la classe Γ' .*

Preuve.

Par la proposition 3.3, G' est sans S . Et par la proposition 3.4 G' est sans N .

Pour finir de montrer la fermeture de la classe Γ' , par cet algorithme de struction, on démontre que l'ensemble des centres d'étoile de G' est l'union de graphes complets.

Supposons que c'est faux, et que l'ensemble des centres d'étoiles n'est pas union de graphes complets. Donc il existe dans G' un sommet, a , centre d'étoile dans G' , voisin d'au moins deux sommets non adjacents tous deux centres d'étoile x et y . Puisque a est centre d'étoile, il existe un troisième sommet z (qui n'est pas nécessairement centre d'étoile) tel que $\langle \{a; x, y, z\} \rangle = C$. Au moins un de ces sommets est un nouveau. Et par le lemme 3.3(i) il suffit de considérer les deux cas suivants :

$$(1) N_e \cap \{a, x, y, z\} = \{a\}$$

Soit a' le sommet de G correspondant à a et soit a'' le successeur de a' . On ne peut pas avoir $\{x, y\} \subseteq N(u)$ pour $u \in \{a', a''\}$ sinon u serait centre d'étoile et $\{x, y, u\}$ n'est pas une clique dans G . Donc on peut, sans perte de généralité, supposer $\overline{[a', x]}$, $\overline{[a', y]}$, $\overline{[a'', x]}$ et $\overline{[a'', y]}$. Comme $\overline{[a, z]}$ dans G' , on peut supposer $\overline{[a', z]}$. Comme $\langle \{a'; x, z, 0, a''\} \rangle \neq S$, on a aussi $\overline{[a'', z]}$.

On commence par montrer que : $N(y) \cap (N(x) \cup N(a')) = \emptyset$.

Supposons que c'est faux et qu'il existe $u \in N(y) \cap (N(x) \cup N(a'))$. Supposons d'abord que $u \in N(x)$. Alors $u \notin N(0)$ et $\overline{[u, z]}$ sinon u, x et y seraient tous centres d'étoile et $\{u, x, y\}$ n'est pas une clique. Mais alors $\langle \{a'; 0, z, x, u\} \rangle = S$ si $\overline{[a', u]}$ ou $\langle \{a'; 0, z, u, y\} \rangle = S$ sinon. Donc $N(y) \cap N(x) = \emptyset$. Maintenant, supposons que $u \in N(a')$. Si $u \notin N(0)$ alors $\langle \{a'; 0, x, u, y\} \rangle = S$. Donc, $u \in N(0)$. Maintenant $\overline{[u, z]}$ car sinon u, a' et y seraient tous centres d'étoile et $\{u, a', y\}$ n'est pas une clique. Mais alors $\langle \{a'; x, z, u, y\} \rangle = S$. Donc

$$N(y) \cap N(a') = \emptyset. \text{ D'où } N(y) \cap (N(x) \cup N(a')) = \emptyset.$$

A cause du fait que y est centre d'étoile par hypothèse, il existe u, v, w tels que $\langle \{y; u, v, w\} \rangle = C$. On a que $N(z) \cap \{u, v, w\} = \emptyset$. En effet, si $u, v \in N(z)$ alors $\langle \{z; u, v, a', x\} \rangle = S$ (rappelons que $N(y) \cap (N(x) \cup N(a')) = \emptyset$). Si $N(z) \cap \{u, v, w\} = \{u\}$ alors $\langle \{y; v, w, u, z\} \rangle = S$. Alors comme on l'a affirmé, $N(z) \cap \{u, v, w\} = \emptyset$. Enfin, si $u, v \notin N(a'')$ alors, $\langle \{y; u, v, a'', z\} \rangle = S$. Nous pouvons donc supposer que $|N(a'') \cap \{u, v, w\}| \geq 2$. D'autre part, si $u, v \in N(a'')$ alors $\langle \{a''; u, v, z, a'\} \rangle = S$, ce qui implique $|N(a'') \cap \{u, v, w\}| \leq 1$. Ces deux inégalités sont contradictoires et donc le cas (1) est impossible.

$$(2) N_e \cap \{a, x, y, z\} = \{a, u\} \text{ avec } u \in \{x, y, z\}$$

Par lemme 3.3(iv), a', a'', u', u'' sont tous des centres d'étoile. Encore, par le lemme 3.3(iii) $\{u', u''\} \subseteq N_G[a']$. Ceci est impossible car $G \in \Gamma'$ et $\overline{[u', u']}$.

Ceci termine la preuve de la proposition 3.8. ■

3.4.3 Nombre de stabilité pour les graphes de la classe Γ'

Théorème 3.2 *Si G est un graphe de la classe de graphes Γ' , alors le nombre de stabilité de G , $\alpha(G)$, peut être calculé en temps polynomial.*

La preuve de ce théorème est la même que celle du théorème 3.1.

Corollaire 3.1 *Le nombre de stabilité peut être obtenu en temps polynomial pour un graphe G sans S et sans N et dans lequel tout centre d'étoile est adjacent à au plus un centre d'étoile.*

Corollaire 3.2 *Le nombre de stabilité peut être obtenu en temps polynomial pour les graphes de la classe Γ .*

3.5 Algorithme de détermination d'un stable de cardinalité maximum dans Γ'

L'algorithme Alpha(G) suivant, permet de déterminer un stable S de cardinalité maximum pour un graphe G de Γ ou de Γ' .

Algorithme : Alpha(G)

Entrée : Le graphe G

Sortie : Un stable S de cardinalité maximum de G

1. $G_0 := G; k := 0;$
2. Si G_k est un graphe complet alors aller à (4);
3. Soit 0_k un sommet special dans G_k . Appliquer l'algorithme de struction modifié à G_k centré en 0_k ;
Soit G' le graphe obtenu. $k := k + 1; G_k := G'$;
Aller à (2);
4. $\alpha(G) := k + 1; S_k := \{x_k\}$, où x_k est un sommet de G_k .
 $l := k;$

5. Si $l = 0$ alors aller à (6);
Si S_l ne contient aucun nouveau sommet alors $S_{l-1} := S_l \cup \{0_{l-1}\}$
sinon soit i_l^* ce nouveau sommet et $S_{l-1} := S_l - \{i_l^*\} \cup \{i, j\}$ où i est
le sommet de G_{l-1} correspondant à i_l^* et j le successeur de i tel que
 $|N_{G_{l-1}}(j) \cap S_l - \{i_l^*\}| = 0$;
 $l := l - 1$; Aller à (5);
6. $S := S_l$; Stop.

Chapitre 4

Survey sur le problème d'Hamiltonicité

On propose dans ce chapitre, un survey sur le problème de l'hamiltonicité en tenant compte des récents développements dans ce domaine [26].

Les résultats dans ce domaine sont trop importants et il nous est impossible de les citer tous. On a mis en avant les résultats les plus généraux et les plus récents qui se rattachent aux conditions suivantes :

1. Conditions sur les degrés,
2. Condition coriace,
3. Conditions sur la fermeture,
4. Condition sur le nombre de stabilité,
5. Conditions faisant exclure quelques configurations (principalement l'étoile).

4.1 Introduction

Un graphe $G = (V, E)$ est hamiltonien si G contient un cycle élémentaire passant par tous les sommets de G . L'intérêt de l'hamiltonicité ne se limite pas à la théorie des graphes puisque ce concept peut aider à la résolution de problèmes concrets, d'où l'importance de son étude malgré sa difficulté. Nous citons à titre d'exemple le problème du voyageur de commerce [53], [95], [116].

A défaut de trouver des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de cycles hamiltoniens, le problème du cycle hamiltonien est alors de trouver des conditions pour lesquelles un graphe est hamiltonien.

Ce problème doit son nom à Sir William Hamilton et ses origines remontent aux années 1850. Cependant et jusqu'à ce jour, cette question suscite encore l'intérêt de beaucoup de chercheurs et des résultats dans ce domaine continuent d'affluer, tout comme de nouvelles interrogations parfois intrigantes (voir [34]).

Le but de ce travail est de présenter un survey sur le problème de l'hamiltonicité. Les résultats dans ce domaine sont trop importants et il nous est impossible de les citer tous. On a mis en avant les résultats les plus généraux, les plus fondamentaux et les plus récents qui se rattachent aux conditions suivantes :

1. Conditions sur les degrés,
2. Condition coriace,
3. Conditions sur la fermeture,
4. Condition sur le nombre de stabilité,
5. Conditions faisant exclure quelques configurations.

Pour les autres résultats, le lecteur est renvoyé vers [28], [51], [77], [79] et [112]. Pour les concepts et notations non définies, nous adoptons ceux définis dans [32]. Des notions plus générales que l'hamiltonicité sont étudiées. On dit que G est pancyclique s'il admet des cycles de longueurs l , pour tout l , $3 \leq l \leq n$, et G est sommet pancyclique si pour tout sommet u de G et pour tout entier l , $3 \leq l \leq n$, u est contenu dans un cycle de longueur l .

4.2 Conditions sur les degrés

4.2.1 Conditions sur les degrés des sommets

Etablir des conditions sur les degrés pour obtenir l'hamiltonicité est l'approche la plus classique aux problèmes hamiltoniens.

Sans doute, le premier résultat important donnant une condition suffisante pour qu'un graphe soit hamiltonien, est celui de Dirac qui s'énonce comme suit :

Théorème 4.1 (Dirac, [55], 1952)

Si G est un graphe d'ordre $n \geq 3$ avec $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, alors G est hamiltonien.

Le théorème de Dirac a été suivi par celui d'Ore qui l'a étendu, donnant un résultat plus fort, en introduisant les degrés des sommets du graphe et en posant une condition pour contrôler leur somme.

Théorème 4.2 (Ore, [117], 1963)

Soit G un graphe d'ordre n . Si pour toute paire de sommets non adjacents $u, v \in V$, on a : $d(u) + d(v) \geq n$, alors G est hamiltonien.

Une autre condition suffisante pour l'hamiltonicité d'un graphe a été fournie par Posà :

Théorème 4.3 (Posà, [120], 1962)

Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 3$ dont les sommets sont indexés de sorte que : $d(x_1) \leq d(x_2) \leq \dots \leq d(x_n)$, si pour tout $k < \frac{n}{2}$, on a $d(x_k) > k$, alors G est hamiltonien.

Nash-Williams a introduit les définitions suivantes :

Soit S une séquence de degrés $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ (représentant les degrés des sommets d'un graphe G), S est dite "forcément hamiltonienne" si tout graphe possédant cette séquence de degrés est hamiltonien. Analogiquement S est dite "forcément non hamiltonienne" si tout graphe possédant cette séquence de degrés est non hamiltonien, et enfin S est dite "optionnellement hamiltonienne" si cette séquence n'est ni forcément hamiltonienne ni forcément non hamiltonienne.

Alors la question légitime qui se pose est de savoir comment reconnaître une séquence forcément hamiltonienne (et donc un graphe hamiltonien)? Chvátal y a répondu en donnant le résultat suivant :

Théorème 4.4 (Chvátal, [47], 1972)

Si les degrés $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ des sommets d'un graphe G satisfont : $d_k \leq k < \frac{n}{2} \implies d_{n-k} \geq n - k$, alors G est hamiltonien.

Les théorèmes cités précédemment ont été au fil des années améliorés par plusieurs chercheurs, qui ont ainsi obtenu des résultats plus généraux. Parmi lesquels Häggkvist et al. qui ont introduit la connectivité dans le théorème de Dirac, ce qui a donné une meilleure borne (du degré minimum).

Théorème 4.5 (Häggkvist et al., [83], 1983)

Si G est un graphe 2-connexe d'ordre n et de connectivité k tel que $\delta(G) \geq \frac{n+k}{3}$, alors G est hamiltonien.

Le théorème précédent a été par la suite généralisé par Bauer et al. de la façon suivante :

Théorème 4.6 (Bauer et al., [17], 1989)

Si G est un graphe 2-connexe d'ordre n et de connectivité k tel que : $\sigma_3(G) \geq n + k$, alors G est hamiltonien.

Bondy avait auparavant considéré un plus grand nombre de sommets dans le stable, il avait ainsi obtenu le résultat suivant :

Théorème 4.7 (Bondy, [30], 1980)

Si G est k -connexe d'ordre $n \geq 3$ tel que :
 $\sigma_{k+1}(G) > \frac{(k+1)(n-1)}{2}$, alors G est hamiltonien.

Seulement la somme des degrés a un grand inconvénient pratique car elle est difficilement applicable, à cause du nombre important d'opérations qu'il faut effectuer. Fan a introduit une nouvelle approche qui consiste à ne plus considérer toutes les paires de sommets non adjacents mais uniquement celles qui sont à distance 2.

Théorème 4.8 (Fan, [59], 1984)

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n tel que :
 $\min \{ \max(d(u), d(v)) / d(u, v) = 2 \} \geq n/2$, alors G est hamiltonien.

Bedrossian et. al ont amélioré le théorème précédent de Fan en considérant seulement les paires de sommets appartenant à une étoile (le graphe $K_{1,3}$) ou à une étoile modifiée induite (une étoile modifiée est une étoile à laquelle une arête est rajoutée) comme suit :

Théorème 4.9 (Bedrossian et al. ,[24],1993)

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n , si $d(u, v) = 2 \Rightarrow \max \{d(u), d(v)\} \geq \frac{n}{2}$ pour toute paire de sommets d'une étoile induite de G ou d'une étoile induite modifiée de G , alors G est hamiltonien.

Asratyan et al. ont considéré les sommets à distance au plus 2 d'un sommet donné v et ont noté $G_2(v)$ le sous graphe de G induit par ces sommets.

Théorème 4.10 (Asratyan et al. ,[12],1984)

Soit G un graphe d'ordre n . Supposons qu'à chaque fois que $d(v) \leq \frac{(n-1)}{2}$ et u un sommet à distance 2 de v on a : $d(v) + d_{G_2(v)}(u) \geq |V(G_2(v))|$, alors G est hamiltonien.

Aïnouche et al. ont introduit une nouvelle notion qui leur a permis d'établir un résultat très intéressant. Etant donné un graphe $G = (V, E)$ et $W \subseteq V$, on numérote les sommets de W dans l'ordre croissant des degrés : $d(w_1) \leq d(w_2) \leq \dots \leq d(w_{|W|})$, l'ensemble W sera dit bon si $d(w_i) > i$, pour tout $w_i \in W$.

Théorème 4.11 (Ainouche et al. ,[8],1985)

Soit G un graphe d'ordre n et soit W un bon sous-ensemble de V . Si pour toute paire de sommets non adjacents u et v dans $V - W$ on a : $d(u) + d(v) \geq n$, alors G est hamiltonien.

4.2.2 Conditions sur les degrés généralisés

Une fois de plus, une généralisation du théorème de Dirac a été donnée par Faudree et al., cette fois ci en utilisant la notion de degré généralisé (utilisé pour les ensembles). Le degré d'un ensemble S est défini comme suit : $d(S) = |\bigcup_{v \in S} N(v)|$. Dans la pratique, l'ensemble S est choisi comme ayant une certaine propriété P (par exemple S est un stable). Cette approche a offert une large utilisation et a permis d'établir les résultats qui suivent :

Théorème 4.12 (Faudree et al.,[61],1989)

Si G est un graphe 2-connexe d'ordre n tel que $d(S) \geq \frac{(2n-1)}{3}$ pour tout stable S de cardinalité 2, alors G est hamiltonien.

Plus généralement pour un ensemble S de cardinalité t on a :

Théorème 4.13 (Fraïsse, [71], 1986)

Soit G un graphe k -connexe d'ordre n . Supposons qu'il existe t , $1 \leq t \leq k$ tel que pour tout stable S de cardinal t on a :

$d(S) \geq \frac{t(n-1)}{(t+1)}$, alors G est hamiltonien.

Théorème 4.14 (Ainouche, [4], 1992)

Soit G un graphe k -connexe d'ordre n . Supposons qu'il existe t , $1 \leq t \leq k$ tel que pour tout stable S de cardinalité t dans G on a : $d(S) > \left\lfloor \frac{t(n-1)}{(t+1)} \right\rfloor - k \frac{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}{(t+1)}$, alors G est hamiltonien.

Pour les graphes 2-connexes, le résultat donné par Fraïsse dans le théorème 4.13 a été amélioré par Lindquester qui a montré ce qui suit :

Théorème 4.15 (Lindquester, [101], 1989)

Si G est un graphe 2-connexe d'ordre n tel que :

$d(S) \geq \frac{(2n-1)}{3}$ pour tout ensemble $S = \{u, v\}$ de sommets à distance 2 dans G alors G est hamiltonien.

Une autre généralisation du théorème de Dirac utilisant les degrés généralisés a été établit par Faudree et al. :

Théorème 4.16 (Faudree et al., [62], 1992)

Si G est un graphe 2-connexe d'ordre n (assez grand) tel que :

$d(S) \geq \frac{n}{2}$ pour tout ensemble S de deux sommets distincts, alors G est hamiltonien.

4.2.3 Conditions combinant les degrés des sommets et les degrés généralisés

Certains chercheurs ont posé des conditions utilisant en même temps les deux notions de degré généralisé et de degré de sommets et voici les résultats qu'ils ont proposés :

Théorème 4.17 (Chen, [45], 1990)

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n tel que pour toute paire de sommets non adjacents u et v on a :

$|N(u) \cup N(v)| + \max \{d(u), d(v)\} \geq n$, alors G est hamiltonien.

Le théorème précédent peut être obtenu comme conséquence du théorème suivant :

Théorème 4.18 (Ainouche, [5], 1995)

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n tel que pour toute paire de sommets non adjacents u et v on a :

$$2|N(u) \cup N(v)| + d(u) + d(v) > 2(n - 1), \text{ alors } G \text{ est hamiltonien.}$$

Le théorème d'Ainouche a été amélioré par Flandrin et al. qui ont montré :

Théorème 4.19 (Flandrin et al., [69], 1991)

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n tel que pour toute paire de sommets non adjacents u et v on a :

$$3|N(u) \cup N(v)| + \max \{2, |N(u) \cap N(v)|\} > 2(n - 1), \text{ alors } G \text{ est hamiltonien.}$$

Un résultat plus fort que les deux derniers théorèmes cités utilise des stables à trois sommets au lieu de deux, il s'énonce comme suit :

Théorème 4.20 (Flandrin et al., [70], 1988)

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n tel que :

$d(u) + d(v) + d(w) \geq n + |N(u) \cap N(v) \cap N(w)|$ pour tout ensemble stable $\{u, v, w\}$ de G , alors G est hamiltonien.

Notons $J(a, b) = \{u \in N(a) \cap N(b) / N[u] \subseteq N[a] \cup N[b]\}$ et $N[u] = \{u\} \cup N(u)$, pour tous sommets a, b, u dans G . En adoptant cette notation, Ainouche a établi le résultat suivant :

Théorème 4.21 (Ainouche, [6], 1998)

Soit G un graphe 2-connexe. Si $|N(a) \cap N(b)| \geq 2$ et $J(a, b) \neq \emptyset$ pour tous sommets a et b tels que :

1. $d(a, b) = 2$,
2. $\{x \in N(a) \cap N(b) / d(x) = 2\} = \emptyset$,
3. $d(a) \leq d(b) < \frac{n}{2}$

Alors G est hamiltonien.

Pour les graphes 3-connexes, Shen et al. ont montré :

Théorème 4.22 (Shen et al., [124], 1995)

Soit G un graphe 3-connexe d'ordre n , tel que toute paire de sommets (u, v) dans G vérifie : $d(u, v) = 2 \Rightarrow |N(u) \cup N(v)| \geq \frac{(n+3)}{2}$, alors G est hamiltonien.

Zeng et al. ont résumé plusieurs conditions dans le théorème suivant :

Théorème 4.23 (Zeng et al., [128], 1994)

Soit G un graphe d'ordre n , k -connexe, $k \geq 2$. Si pour tout stable S de cardinalité $k+1$ l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

1. il existe $u \neq v$ dans S tels que $d(u) + d(v) \geq n$ ou $|N(u) \cap N(v)| \geq \alpha(G)$
2. pour toute paire de sommets distincts u et v dans S , $|N(u) \cup N(v)| \geq n - \max \{d(x); x \in S\}$

alors G est hamiltonien

4.3 Conditions sur la fermeture

Bondy et Chvátal ont étendu le théorème d'Ore [117] en y introduisant la notion de k -fermeture. La k -fermeture d'un graphe G d'ordre n est le graphe noté $C_k(G)$ obtenu en joignant progressivement les paires de sommets non adjacents dont la somme des degrés est au moins égale à k , jusqu'à ce qu'il ne reste plus de telles paires. La k -fermeture $C_k(G)$ d'un graphe G est unique. Si le graphe G est égal à sa n -fermeture (qu'on appellera fermeture tout court), alors on dira que G est fermé.

Théorème 4.24 (Bondy et al., [31], 1976)

Un graphe G d'ordre n est hamiltonien si et seulement si $C_n(G)$ l'est.

Ce théorème a un grand intérêt pratique dans le sens où il ne sera plus nécessaire de vérifier que pour toutes les paires de sommets non adjacents, leurs somme des degrés est supérieure ou égale à n , mais seulement pour quelques paires assurant l'hamiltonicité de la clôture.

Il a comme conséquence directe le corollaire suivant :

Corollaire 4.1 (Bondy et Chvátal, [31], 1976)

Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si $C_n(G)$ est un graphe complet, alors G est hamiltonien.

Cette fermeture de Bondy et Chvatal a ouvert la voie à d'autres chercheurs, et plusieurs extensions et autres définitions de fermetures ont été proposées, particulièrement pour le problème d'Hamiltonicité. Il nous est impossible de citer tous les résultats, mais le lecteur trouvera l'essentiel de ce qui a été fait dans [35].

4.4 La condition coriace

Notons $w(G)$ le nombre de composantes connexes d'un graphe G . On utilise ici le terme "coriace" (en anglais tough) pour définir un graphe G dans lequel $w(G - S) \leq |S|$, pour tout ensemble d'articulation S de G .

Ce concept de graphe coriace a été introduit la première fois par Chvátal [48].

Plus généralement, un graphe sera dit t -coriace $t > 0$ si :

$w(G - S) \leq \frac{|S|}{t}$, pour tout ensemble d'articulation S de G . La coriaticité (en anglais the toughness) du graphe G notée $\tau(G)$ est la plus grande valeur de t pour laquelle G est t -coriace.

(si G est complet, alors $\tau(G) = \infty$).

Chvátal avait remarqué que si un graphe G est hamiltonien alors $\tau(G) \geq 1$, malheureusement la réciproque n'est vrai que pour les graphes d'ordre au plus 6.

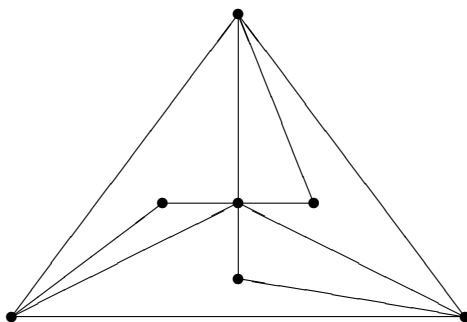


FIG. 4.1 – Graphe 1-coriace, mais non Hamiltonien

Le graphe de la figure 4.1 est un graphe non hamiltonien et pourtant il est 1-coriace.

Chvátal avait aussi posé une conjecture qui supposait que tout graphe t -coriace (avec $t > \frac{3}{2}$) était hamiltonien, mais plusieurs chercheurs ont donné des exemples de graphes non hamiltoniens avec $t > \frac{3}{2}$ (le premier fut Thomassen). Alors la conjecture a été modifiée pour devenir comme suit :

Conjecture 4.1 *Tout graphe 2-coriace est hamiltonien.*

Mais Bauer, Broersma et Veldman [16] ont réfuté cette conjecture en construisant des contre-exemples de graphes $(\frac{9}{4} - \varepsilon)$ -coriaces sans chaîne hamiltonienne ($\forall \varepsilon > 0$). La conjecture reste alors posée sous la forme suivante :

Conjecture 4.2 *Il existe t_0 tel que tout graphe t_0 -coriace est hamiltonien.*

L'étude de ce concept et son utilisation se sont beaucoup répandues car la condition coriace combinée avec d'autres conditions peut être utilisée pour obtenir de nouveaux résultats mais aussi pour améliorer des résultats déjà existants.

Notons que Bauer et al. [20] ont montré que reconnaître la "coriacité" était un problème NP-complet. Ce problème était longtemps resté ouvert.

Voici les principaux résultats qui établissent le rapport entre la "coriacité" et l'hamiltonicité. (pour d'amples détails voir [14]).

Théorème 4.25 (*Jung, [90], 1978*)

Soit G un graphe 1-coriace d'ordre $n \geq 11$ tel que $\sigma_2(G) \geq n - 4$, alors G est hamiltonien.

Au fil des années, le résultat précédent a connu beaucoup de généralisations par différents chercheurs, par exemple :

Théorème 4.26 (*Bauer et al., [13], 1991*)

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 30$ avec $\tau(G) \succ 1$ et $\sigma_2(G) \geq n - 7$, alors G est hamiltonien.

En considérant la somme des degrés de trois sommets appartenant à un stable, il a été montré que :

Théorème 4.27 (*Bauer et al., [21], 1991*)

Soit G un graphe 2-coriace d'ordre n avec $\sigma_3(G) \geq n$, alors G est hamiltonien.

Le théorème qui suit a été obtenu en combinant condition de type Ore et de type Fan :

Théorème 4.28 (*Bauer et al., [15], 1995*)

Soit G un graphe 1-coriace d'ordre n tel que $\sigma_3(G) \geq n$, et pour toute paire de sommets $x, y \in V(G)$ $d(x, y) = 2 \Rightarrow \max \{d(x), d(y)\} \geq \frac{n-4}{2}$, alors G est hamiltonien.

Plus généralement pour un graphe t -coriace, Bauer et al. ont montré le résultat suivant :

Théorème 4.29 (Bauer et al., [18], 1995)

Soit G un graphe t -coriace d'ordre n ($n \geq 3$), si $\delta > \frac{n}{(t+1)-1}$, alors G est hamiltonien.

Hoang a montré qu'en combinant condition coriace et condition sur les degrés, on pouvait conclure l'hamiltonicité :

Théorème 4.30 (Hoang, [89], 1995)

Soit G un graphe avec la séquence de degrés suivante d_1, d_2, \dots, d_n et soit t un entier égal au plus à 3.

Si G est t -coriace et si $\forall i, t \leq i < \frac{n}{2}, d_i \leq i \Rightarrow d_{n-i+t} \geq n - i$, alors G est hamiltonien.

Jusqu'à présent, il n'existe pas de résultat qui atteste de l'hamiltonicité d'un graphe quelconque en posant juste une condition sur la coriacité. Il a toujours fallu ajouter d'autres conditions comme celles sur les degrés. Mais partant du fait qu'un graphe appartenant à une classe particulière satisfait déjà à une (ou plusieurs) conditions, l'existence de tels résultats devient plus probable. C'est ce qu'ont fait Kratsch et al. [93] pour les graphes scindés, ce sont ceux qui peuvent être partitionnés en un stable et une clique, et Deogun et al. [52] pour les graphes de co-comparabilité qui sont les complémentaires des graphes de comparabilité. Un graphe G est appelé un graphe de comparabilité s'il est possible en orientant ses arêtes d'en faire le graphe d'une relation d'ordre. Kiel a donné un résultat similaire pour les graphes d'intervalles.

Théorème 4.31 (Kratsch et al., [93], 1996) Tout graphe scindé $\frac{3}{2}$ -coriace est hamiltonien.

Théorème 4.32 (Deogun et al., [52], 1997) Tout graphe de cocomparabilité 1-coriace est hamiltonien.

Théorème 4.33 (Kiel, [91], 1985)

Tout graphe d'intervalle 1-coriace est hamiltonien.

4.5 Conditions sur le nombre de stabilité

Une approche différente prise par Nash-Williams d'un côté et par Chvátal et Erdős de l'autre leur a permis d'établir les deux théorèmes suivants, en utilisant $\alpha(G)$ le nombre de stabilité du graphe G .

Théorème 4.34 (*Nash-Williams, [114], 1971*)

Si $\alpha(G) \leq \delta(G)$ et si $\delta(G) \geq \frac{(n+2)}{3}$, alors G est hamiltonien.

Théorème 4.35 (*Chvátal et Erdős, [49], 1971*)

Si G est un graphe de connectivité $k(G)$, tel que $\alpha(G) \leq k(G)$, alors G est hamiltonien.

Ce qui équivaut à dire que tout graphe non hamiltonien k -connexe contient un stable de cardinalité $k+1$.

4.6 Conditions d'hamiltonicité par des sous graphes exclus

Une approche très utilisée dans la théorie des graphes s'est étendue au problème de l'hamiltonicité, c'est celle qui consiste à considérer des graphes sans un (ou des) sous graphe(s) précis. On dit qu'un graphe G est sans S si G ne contient aucun sous graphe induit isomorphe à S .

Les premiers à avoir introduit ce concept dans l'étude de l'hamiltonicité sont Goodman et Hedetniemi et depuis beaucoup de résultats ont été établis surtout pour les graphes sans $K_{1,3}$ (appelé aussi étoile) ou sans des graphes très proches dans leur structure de $K_{1,3}$, parmi lesquels les graphes Z_i .

Les graphes Z_i sont obtenus en identifiant un sommet du triangle avec un sommet d'une chaîne de longueur i (voir figure 4.2).

Dans cette section, on énoncera les résultats excluant un seul sous graphe induit. Un grand intérêt est porté à la classe des graphes sans étoile qui a été largement étudiée. On traitera, par la suite, les résultats excluant deux sous graphes induits puis on énoncera les plus récents résultats en excluant trois.

Sans doute, la première motivation qui a poussé les chercheurs à étudier la classe des graphes sans $K_{1,3}$ est le résultat de Beineke. Dans [25], Beineke a donné une caractérisation des line graphes en termes de sous graphes exclus. Et parmi ces sous graphes induits exclus figure l'étoile. Ce qui implique que la classe des graphes sans étoile généralise celle des line graphes. Cette classe est elle-même généralisée par d'autres classes de graphes comme celles des graphes partiellement sans étoile [1], quasi sans étoile [6] et les graphes presque sans étoile [121].

Pour les graphes sans étoile, les conditions d'existence d'un cycle hamiltonien sont très nombreuses. On a cité les résultats par type de conditions. On commence par énoncer les résultats sur les conditions locales. Par la suite, on abordera les conditions sur les degrés, et les conditions du type Erdos-Chvatal.

Un graphe G est dit localement connexe (respectivement localement k -connexe) si pour

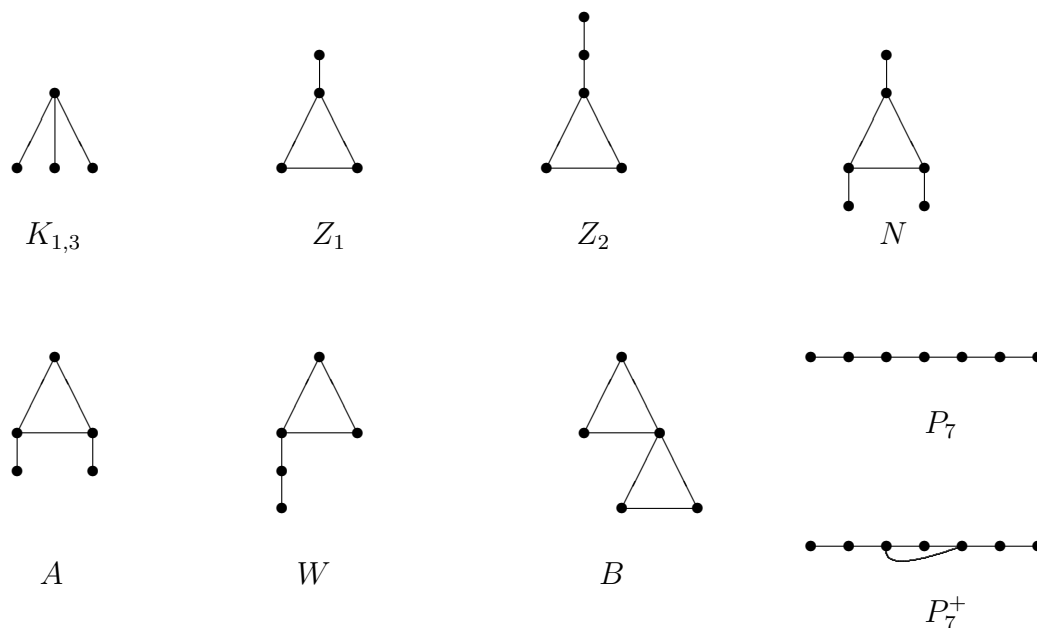


FIG. 4.2 –

tout sommet v de G le sous graphe induit par $N(v)$ est connexe (respectivement k -connexe). Oberly et Sumner ont ajouté cette propriété aux graphes sans $K_{1,3}$ connexes, ils ont alors obtenu l'hamiltonicité, comme le confirme le résultat suivant :

Théorème 4.36 (Oberly et Sumner, [115],1979)

Soit G un graphe connexe sans $K_{1,3}$ d'ordre $n \geq 3$. Si G est localement connexe, alors il est hamiltonien.

Plusieurs auteurs ont montré que sous les conditions du théorème 4.36, on avait des résultats plus forts.

Clarck a montré que le graphe était alors sommet pancyclique :

Théorème 4.37 (Clarck, [50],1981)

Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, localement connexe sans $K_{1,3}$, alors G est sommet pancyclique.

Un graphe G est dit k -hamiltonien si $G - U$ est hamiltonien pour tout sous-ensemble U de $V(G)$ avec $0 \leq |U| \leq k$ ($k \geq 0$).

En utilisant cette notion, Chartrand et al. ont montré :

Théorème 4.38 (Chartrand et al., [43],1979)

Si G est un graphe connexe, localement $(k + 1)$ -connexe sans étoile alors G est k -hamiltonien.

On dit qu'un graphe G est quasi localement connexe si tout ensemble d'articulation de G contient au moins un sommet avec un voisinage connexe. Utilisant cette propriété, Zhang a montré que l'on pouvait assurer la pancyclicité :

Théorème 4.39 (Zhang, [131],1989)

Tout graphe connexe quasi localement connexe sans étoile d'ordre $n \geq 3$ est pancyclique.

Aïnouche et al. ont montré que sous les conditions du théorème 4.39, le graphe est sommet pancyclique :

Théorème 4.40 (Aïnouche et al., [7],1990)

Tout graphe connexe, quasi localement connexe sans étoile d'ordre $n \geq 3$ est sommet pancyclique.

Les résultats faisant apparaître des conditions sur les degrés sont très nombreux. Un des premiers résultats est dû à Matthews et Sumner qui ont étendu un résultat classique aux graphes sans étoile et ils ont montré que :

Théorème 4.41 (Matthews et Sumner, [110],1985)

Si G est un graphe 2-connexe sans $K_{1,3}$ avec $\delta(G) \geq \frac{(n-2)}{3}$, alors G est hamiltonien.

En introduisant la somme des degrés dans les graphes sans étoile, Zhang a montré que :

Théorème 4.42 (Zhang, [130],1988)

Si G est un graphe 2-connexe sans étoile avec $\sigma_3(G) \geq n - 2$, alors G est hamiltonien.

Au fait, Zhang a montré un résultat plus général :

Théorème 4.43 (Zhang, [130],1988)

Si G est un graphe k -connexe d'ordre n sans $K_{1,3}$ avec $\sigma_{k+1}(G) \geq n - k$, alors G est hamiltonien.

Li a montré que pour un graphe G sans étoile d'ordre n assez grand l'hamiltonicité implique la pancyclicité

Théorème 4.44 (Li, [96],1991)

Si G est un graphe hamiltonien sans étoile d'ordre $n > 100$ avec $\sigma_3(G) \geq (n - 2)$, alors G est pancyclique.

Li a donné une condition du type de Fan pour l'hamiltonicité des graphes sans étoile.

Théorème 4.45 (Li, [98],2000)

Soit G un graphe 2-connexe sans étoile d'ordre n . Si pour toute paire de sommets u et v dans G on a :

$$d(u, v) = 3 \Rightarrow \max(d(u), d(v)) \geq \frac{(n-4)}{2}, \text{ alors } G \text{ est hamiltonien.}$$

On dit qu'un sous graphe H de G satisfait $\phi(u, v)$ si : $[N(u) \cap N(v)] - V(H) \neq \emptyset$, c'est à dire que u et v ont un voisin commun qui n'appartient pas à $V(H)$.

En utilisant cette notion, Broersma et Veldman ont obtenu une généralisation du théorème de Goodman et de Hedtmiemi et de bien d'autres résultats en permettant l'existence de certains sous graphes induits sous certaines conditions.

Théorème 4.46 (Broersma et Veldman, [36],1990)

Soit G un graphe 2-connexe sans étoile :

1. Si tout sous graphe induit Z_1 de G satisfait $\phi(a, b_1)$ ou $\phi(a, b_2)$, alors G est pancyclique ou G est un cycle.
2. Si tout sous graphe induit Z_2 de G satisfait $\phi(a_1, b_1)$ ou $\phi(a_1, b_2)$, alors G est pancyclique ou G est un cycle.

Théorème 4.47 (Broersma et Veldman, [36],1990)

Soit G un graphe 2-connexe sans $K_{1,3}$, si tout sous graphe induit de G isomorphe à P_7 ou P_7^+ satisfait $\phi(a, b_1)$ ou $\phi(a, b_2)$ ou $(\phi(a, c_1)$ et $\phi(a, c_2))$, alors G est hamiltonien.

Flandrin et al. ont cette fois compté le nombre d'étoiles contenant deux sommets donnés distincts u et v , et ont noté ce nombre $n_c(u, v)$. En posant $n_c(G) = \max n_c(u, v)$ où $\{u, v\}$ est une paire de sommets non adjacents de G , ils ont montré :

Théorème 4.48 (Flandrin et al., [68],1990)

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre $n \geq 16$, si $\delta(G) \geq \frac{n}{3}$ et si $n_c(G) < \delta - 1$ alors G est hamiltonien.

Théorème 4.49 (Flandrin et al., [68],1990)

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre $n \geq 29$, et soit l un entier naturel. Si l'une des deux conditions ci-dessous est vérifiée :

1. $\delta = (n - 2)/3$ et $n_c(G) < \frac{\delta}{2}$ et $n_c(G) < \frac{\delta}{2}$
2. $\delta = \frac{(n+l)}{3}$, $2 \leq l \leq \frac{(n-3)}{2}$ et $n_c(G) < \delta(l + 2) - 2$,

alors G est hamiltonien.

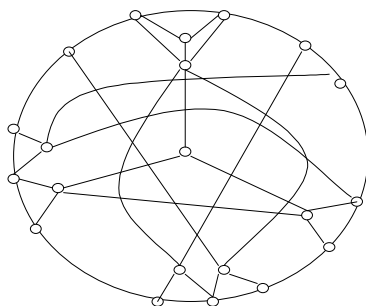


FIG. 4.3 –

Matthews et Sumner ont montré qu'un graphe 3-connexe sans étoile n'est pas toujours hamiltonien et ils ont montré que tout graphe 3-connexe sans étoile avec moins de 20 sommets est hamiltonien. Ils ont aussi donné l'exemple du plus petit graphe 3-connexe sans étoile non hamiltonien d'ordre 20 (voir Fig. 4.3).

Et c'est dans le même article qu'ils ont énoncé leur conjecture :

Conjecture 4.3 (Matthews et Sumner, [110], 1985)

Si G est un graphe 4-connexe sans étoile, alors il est hamiltonien.

Dans [119], Plummer a montré cette conjecture dans le cas où le graphe est 4 régulier contenant K_4 , et dans [118], Pfender l'a montrée dans une sous classe des graphes sans étoile, c'est la classe de graphes ne contenant pas T comme sous graphe induit, T étant la chaîne de trois triangles.

L'utilisation des degrés généralisés donne aussi des résultats sur l'hamiltonicité des graphes sans $K_{1,3}$.

Faudree et al. ont même obtenu un résultat sur la pancyclicité.

Théorème 4.50 (Faudree et al., [63], 1988)

Soit G un graphe 2-connexe sans étoile d'ordre $n \geq 14$ tel que $d(R) > \frac{(2n-2)}{3}$ pour tout stable $R = \{u, v\}$, alors G est pancyclique.

Bauer et al. ont amélioré cette borne comme suit :

Théorème 4.51 (Bauer et al., [19], 1991)

Soit G un graphe 2-connexe sans étoile tel que $d(R) \geq \frac{(2n-5)}{2}$, alors G est hamiltonien.

Sans rajouter de conditions supplémentaires, la borne donnée par le théorème 4.51 reste la meilleure possible. En ajoutant des conditions de régularité sur le graphe G , on peut obtenir une autre borne, c'est ce qu'ont montré Liu et al. dans le théorème suivant :

Théorème 4.52 (Liu et al., [102],1987)

Si G est un graphe 2-connexe sans étoile et δ -régulier avec $\delta \geq \frac{(n-1)}{4}$, alors G est hamiltonien.

Li a montré qu'on pouvait obtenir un résultat similaire pour les graphes 3-connexe sans étoile sans pour autant supposer la régularité, en posant seulement une condition sur le degré minimum :

Théorème 4.53 (Li, [97],1993)

Si G est un graphe 3-connexe sans étoile avec $\delta \geq \frac{(n-5)}{5}$, alors G est hamiltonien.

Li, mais cette fois ci associé à Virlouvet ont appliqué le théorème de fraïsse (sur les degrés) aux graphes sans étoile, obtenant ainsi le résultat suivant :

Théorème 4.54 (Li et Virlouvet, [99],1990)

Soit G un graphe k -connexe ($k \geq 3$) d'ordre n sans étoile. S'il existe un entier t , $t \leq 2k$ tel que :

$d(S) > \frac{t(4k-t+1)(n-2k+1)}{[2k(2k+1)]}$ pour tout stable S de cardinal t de G , alors G est hamiltonien.

Pour les graphes réguliers, on a :

Théorème 4.55 (Liu et Wu, [102],1987)

Tout graphe 2- connexe, k - régulier sans étoile d'ordre $n \leq 4k + 1$ est hamiltonien.

Li a considéré les graphes 3-connexes sans étoile et a prouvé que :

Théorème 4.56 (Li, [97],1993)

Tout graphe 3-connexe k -régulier sans étoile d'ordre $n \leq 5k - 5$ est hamiltonien.

Certains chercheurs (comme Cai et Shreve [41]) se sont intéressés à l'étude de la pancyclicité modulo k des graphes sans étoile, notion moins forte que la pancyclicité mais qui donne des résultats intéressants selon la valeur de k . Pour tout entier naturel k , un graphe G est dit pancyclique mod k s'il contient un cycle de longueur $p \pmod k$, pour tous $3 \leq p \leq n$.

Cai et Shreve ont montré qu'il suffisait de poser une condition sur le degré minimum d'un graphe sans étoile G pour obtenir la pancyclicité mod k , leur résultat se résume comme suit :

Théorème 4.57 (Cai et Shreve, [41],2001)

Soit G un graphe sans étoile. Si $\delta(G) \geq k + 1$, alors G est pancyclique mod k .

Ryjacek [122] a développé un nouveau concept de fermeture pour les graphes sans étoile. Cet outil a permis beaucoup de progrès dans le domaine de l'hamiltonicité des graphes sans étoile. Ryjacek a défini la *complétion locale* d'un graphe G en un sommet x de la façon suivante :

Soit x un sommet tel que $\langle N(x) \rangle$ est connexe, mais différent du graphe complet, la *complétion locale* de G en x est l'opération qui consiste à relier toutes les paires de sommets non adjacents dans le graphe $\langle N(x) \rangle$ induit par le voisinage de x , (ce qui revient à remplacer $\langle N(x) \rangle$ par un graphe complet). Ryjacek a montré que la complétion locale est bien définie et que si G est un graphe sans étoile alors le graphe obtenu l'est aussi.

Pour un graphe sans étoile G , la *fermeture* de G , notée $cl(G)$, est obtenue en itérant la complétion locale en chaque sommet possédant un voisinage connexe, différent du graphe complet, jusqu'à ce qu'aucune arête ne peut être rajoutée. Si $cl(G) = G$, alors le graphe G sera dit *fermé*. A ne pas confondre avec la fermeture définie par Chvatal et Bondy.

le principal résultat établi par Ryjacek est le suivant :

Théorème 4.58 (Ryjacek, [122],1997)

Soit G un graphe sans étoile alors :

1. la *circonférence* de $cl(G)$ = la *circonférence* de G
2. G est *hamiltonien* si et seulement si $cl(G)$ l'est.
3. Si $cl(G)$ est un *graphe complet* alors, G est *hamiltonien*.

La fermeture de Ryjacek pour les graphes sans étoiles a permis aux chercheurs de s'intéresser à de nouveaux problèmes , mais aussi d'établir des preuves plus simples pour des résultats qui existent déjà. En utilisant la notion de fermeture, Ryjacek a montré :

Théorème 4.59 (Ryjacek, [122],1997)

Tout *graphe 7-connexe sans étoile* est *hamiltonien*.

Pour un graphe G , on note par $\theta(G)$, le nombre minimum de cliques pour recouvrir les sommets de G . En utilisant les propriétés des graphes sans étoile fermés, Favaron et al. ont montré que les graphes fermés sans étoile avec des degrés assez grands peuvent être

couvert par peu de cliques (relativement). Plus précisément, pour tout entier $k \geq 4$, tout graphe nonhamiltonien sans étoile d'ordre $n \geq 3k^2 - k - 4$ et $\delta(G) > \frac{n+(k-2)^2}{k}$ peut être couvert par au plus $k - 1$ cliques. C'est ce qu'implique le résultat suivant :

Théorème 4.60 (Favaron et al., [66],2001)

soit $k \geq 4$ un entier et soit G un graphe 2-connexe sans étoile d'ordre $n \geq 3k^2 - k - 4$, $\delta(G) \geq 3k - 1$ et $\sigma_k(G) > n + (k - 2)^2$. Alors ou bien $\theta(\text{cl}(G)) \leq k - 1$ ou bien G est hamiltonien.

Ils ont montré le résultat suivant qui a aussi été établi indépendamment par Kuipers et Veldman :

Théorème 4.61 (Favaron et al. ,[66],2001 et, Kuipers et al[94],1998)

Soit G un graphe 2-connexe sans étoile fermé.

1. Si $\theta(G) \leq 2$, alors G est hamiltonien.
2. Si $3 \leq \theta(G) \leq 5$ alors ou G est hamiltonien ou G est un sous graphe maximal d'un graphe de \mathcal{F}' .

Pour la définition des graphes contenus dans \mathcal{F}' nous envoyons le lecteur vers [66]. Favaron et Fraïsse [67] ont montré le résultat suivant qui améliore celui de Kuipers et Veldman [94] qui avaient supposé $\delta \geq \frac{n+29}{8}$:

Théorème 4.62 (Favaron et al. [67],2001)

Tout graphe 3-connexe sans étoile d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq \frac{n+38}{10}$ est hamiltonien.

Markus a considéré les graphes sans $K_{1,4}$ et a obtenu :

Théorème 4.63 (Markus, [108],1993)

Tout graphe 2-connexe d'ordre n , sans $K_{1,4}$ avec $\delta(G) \geq \frac{(n+2)}{3}$ est hamiltonien.

Chen et Schelp ont utilisé la somme des degrés et ont étendu le résultat de Markus comme suit :

Théorème 4.64 (Chen et Schelp, [44],1996)

Soit G un graphe k -connexe sans $K_{1,4}$ d'ordre $n \geq 3$, tel que $\sigma_{k+1}(G) \geq n + k$, alors G est hamiltonien.

Ces mêmes chercheurs ont ensuite généralisé ce résultat en considérant les graphes sans $K_{1,r}$ et ils ont donné le résultat suivant :

Théorème 4.65 (*Chen et Schelp, [44],1996*)

Si G est un graphe d'ordre n , k -connexe sans $K_{1,r}$ avec $n \geq (k+1)^2(r-1) - 1$ et $\sigma_{k+1}(G) \geq n + k(k-1)$, alors G est hamiltonien.

Cai et Shreve ont montré que l'on pouvait aussi poser une condition sur le degré minimum des graphes sans $K_{1,4}$ et obtenir un résultat sur la pancyclicité *mod* k .

Théorème 4.66 (*Cai et Shreve, [41],2001*)

*Soit G un graphe sans $K_{1,4}$ tel que $\delta(G) \geq k+3$, alors G est pancyclique *mod* k .*

Deux résultats du type de celui de Chvátal et Erdős ont été donnés par Aïnouche et al. et Flandrin et Li pour les graphes sans étoile :

Théorème 4.67 (*Aïnouche et al.,[7],1990*)

Si G est un graphe sans étoile, k -connexe ($k \geq 2$), tel que $\alpha(G^2) \leq k$, alors G est hamiltonien.

Théorème 4.68 (*Flandrin et Li, [70],1988*)

Si G est un graphe k -connexe ($k \geq 3$) sans $K_{1,3}$, avec $\alpha(G) \leq 2k$, alors G est hamiltonien.

Les travaux d'Oberly et Sumner [115], ont incité beaucoup de chercheurs à investir dans la même voie en tentant d'élargir l'ensemble des sous graphes induits exclus dans la structure du graphe G .

Dans le cas où on exclue une paire de sommets, les résultats sont résumés comme suit :

Théorème 4.69 (*Goodman et Hedetniemi [76],1974*)

Si G est un graphe 2-connexe et ne contient pas de sous graphes induits isomorphes à $K_{1,3}$ ni à Z_1 , alors G est hamiltonien.

En fait, les seuls graphes qui satisfont aux conditions du théorème 4.69 sont les cycles ou les graphes pancycliques. C'est ce qu'ont montré Gould et Jacobson d'une part (dans [80]) et Oberly et Sumner d'une autre part (dans [115]).

Gould et Jacobson ont posé des conditions plus générales et ont obtenu un résultat similaire voir plus fort :

Théorème 4.70 (Gould et Jacobson, [80],1982)

Si G est un graphe 2-connexe sans $K_{1,3}$ et sans Z_2 , alors G est un cycle ou G est pancyclique.

Depuis, ce type de résultats ont été considérablement améliorés. En effet, pour les graphes 2-connexes, dans [23], l'auteur a caractérisé les paires de graphes exclues assurant l'hamiltonicité :

Théorème 4.71 (Bedrossian, [23],1991)

Soient X et Y deux graphes connexes ($X, Y \neq P_3$) et soit G un graphe 2-connexe d'ordre n , $n \geq 10$, tel que G n'est pas un cycle. Si G est sans X et Y , alors G est hamiltonien si et seulement si $X = K_{1,3}$ et $Y = P_4, P_5, P_6, C_3, Z_2, A, N$ ou W .

Dans [60], les auteurs ont caractérisé les paires de graphes dont l'exclusion implique la pancyclicité.

Théorème 4.72 (Faudree Gould [60],1997)

Soient X et Y deux graphes connexes ($X, Y \neq P_3$) et soit G un graphe 2-connexe qui n'est pas un cycle. Alors G est sans X et Y implique que G est pancyclique si et seulement si $X = K_{1,3}$ et $Y = P_4, P_5, Z_1$ ou Z_2 .

Lorsqu'une paire de graphes est exclue, et pour les graphes 3-connexes Shepherd a montré un résultat qui nous donne la pancyclicité :

Théorème 4.73 (Shepherd, [125],1987)

Si G est un graphe 3-connexe sans étoile et sans F alors G est pancyclique.

Brousek, Favaron et Ryjacek ont établi le résultat suivant :

Théorème 4.74 (Brousek et al., [39],1999)

1. Tout graphe 3-connexe sans étoile et sans P_7 est hamiltonien.
2. Tout graphe 3-connexe sans étoile et sans Z_4 est hamiltonien
3. Tout graphe 3-connexe sans étoile et sans $N_{1,1,2}$ est hamiltonien.
4. Tout graphe 3-connexe sans étoile, sans $N_{1,2,2}$ et sans $N_{1,1,3}$ est hamiltonien.

Où $N_{i,j,k}$ est le graphe obtenu en identifiant chaque sommet d'un triangle avec un l'extrémité de trois chaînes totalement disjointes de longueur i, j et k .

Récemment, et dans [81], les auteurs ont caractérisé les paires de graphes dont l'exclusion implique la pancyclicité.

Théorème 4.75 (Gould et al., [81])

Soient X et Y deux graphes connexes où $X, Y \neq P_3$ et $Y \neq K_{1,3}$. Soit G un graphe 3-connexe. Si G est sans X et Y , alors G est pancyclique si et seulement $X = K_{1,3}$ et Y est un sous graphe de l'un des graphes de la famille $\mathcal{F} = \{P_7, L, N_{4,0,0}, N_{3,1,0}, N_{2,2,0}, N_{2,1,0}\}$.

Dans [107], Luczak et Pfender ont montré :

Théorème 4.76 (Luczak et Pfender, [107],2004)

Tout graphe 3-connexe, sans $\{K_{1,3}, P_{11}\}$ est hamiltonien.

Dans le même article, ils ont donné un exemple d'un graphe 3-connexe, sans $\{K_{1,3}, P_{12}\}$ qui n'est pas hamiltonien.

Lorsque trois graphes sont exclues, Gould et Jacobson ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 4.77 (Gould et al., [80],1982)

Soit G un graphe 2-connexe qui ne contient pas de sous graphes induits isomorphes à $K_{1,3}$, B et Z_3 , alors G est hamiltonien.

Brousek, Ryjacek et Schiermeyer ont montré que l'on pouvait obtenir un résultat similaire au théorème 4.74 en excluant en plus de l'étoile les graphes : $\{B, P_8\}$, $\{B, Z_5\}$, $\{B, N_{1,1,4}\}$.

Théorème 4.78 (Brousek et al., [39],1999)

1. Tout graphe 3-connexe sans étoile, sans B et sans P_8 est hamiltonien.
2. Tout graphe 3-connexe sans étoile, sans B et sans Z_5 est hamiltonien.
3. Tout graphe 3-connexe sans étoile, sans B et sans $N_{1,1,4}$ est hamiltonien.

4.7 Conclusion

L'étude de l'hamiltonicité est un domaine très large. On a tenté de résumer les plus importants résultats. Une classification par type de conditions les plus étudiées est proposée.

On a vu dans ce chapitre, que de nouvelles techniques ont été développées, permettant d'une part de résoudre des problèmes ouverts et d'autre part de proposer des preuves plus simples pour les résultats existants. Néanmoins beaucoup d'interrogations restent sans réponse (voir [34]).

Une autre manière d'introduire l'hamiltonicité est de considérer les facteurs dans un

graphe puisque un graphe hamiltonien est un 2-facteur connexe.

Une synthèse des graphes connexes d'ordre pair contenant un facteur peut être trouvée dans [42] et un récent survey, dû à Kouider et Vestergaad [92], constitue un excellent résumé des différents développements dans ce domaine.

Nous concluons ce chapitre, en parlant d'un aspect important et non des moindres, c'est l'aspect complexité algorithmique. Rappelons que le problème qui consiste à trouver dans un graphe un cycle hamiltonien est un problème NP-complet en général. Il admet un algorithme polynomial dans quelques cas particuliers de graphes tels que les graphes qui admettent une fermeture complète (fermeture de Bondy Chvátal). Et, dans certaines classes de graphes, un algorithme linéaire existe pour résoudre ce problème [33].

Chapitre 5

Hamiltonicité dans la classe des graphes partiellement sans étoile

Matthews and Sumner ont montré dans [109] que si G est 2-connexe sans étoile d'ordre n tel que $\delta(G) \geq (n-2)/3$, alors G est Hamiltonien.

On dit d'un graphe qu'il est *presque sans étoile* si pour tout sommet v de G , $\langle N(v) \rangle$ est 2-dominé et l'ensemble A des centres d'étoiles de G est un stable. Broersma et al. [38] ont montré que si G est un graphe 2-connexe presque sans étoile d'ordre n tel que $\delta(G) \geq (n-2)/3$, alors G est Hamiltonien. On généralise ces résultats en considérant les graphes vérifiant la propriété suivante : pour tout sommet $v \in A$, il existe exactement deux sommets x et y de $V - A$ tels que $N(v) \subseteq N[x] \cup N[y]$. D'autres résultats connus pour les graphes sans étoiles sont généralisés pour cette nouvelle classe de graphes [1].

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère des graphes non orientés sans boucle ni arête multiple. Pour les notations non définies, on utilise les mêmes que celles utilisées dans [32]. En plus, nous rappelons que si $G = (V, E)$ est un graphe et que $S \subset V$, alors $\langle S \rangle$ représente le sous graphe de G engendré par S , et $G - S$ est $\langle V - S \rangle$. Si H est un sous graphe induit de G , $V(H)$ et $E(H)$ sont respectivement l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes du graphe H . La cardinalité maximum d'un ensemble stable de G est notée $\alpha(G)$. L'ensemble des voisins d'un sommet v est $N(v)$, et $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. La cardinalité de $N(v)$ est le degré $d(v)$ du sommet v , et $\delta(G)$ représente le degré minimum de G . On note par $\sigma_k(G)$ la valeur minimum de la somme des degrés de k sommets deux à deux non adjacents. La connectivité de G est $k(G)$. Si H est un sous graphe de G et S est un sous ensemble de V ou un sous graphe de G , alors $N_H(S)$ représente l'ensemble de tous les sommets de H ayant un voisin dans S . Un ensemble dominant de G est un sous ensemble S de V tel que tout sommet de G appartient à S ou est adjacent à un sommet de S . Le graphe G est k -dominé si G a un ensemble dominant de cardinalité k . Si G admet un cycle Hamiltonien (un cycle élémentaire passant par tous les sommets de G), alors G est dit Hamiltonien.

Le graphe $K_{1,3}$ est appelé l'*étoile*, et l'unique sommet de degré 3 est appelé le centre de l'étoile.

En excluant cette configuration, on obtient la célèbre classe des graphes sans étoile. La classe des graphes sans étoile à été largement étudiée par les chercheurs et beaucoup de résultats de la théorie des graphes ont été obtenus pour cette classe.

En effet, des problèmes reconnus difficiles sont facilement résolus pour cette classe de graphes tels que le problème du stable de cardinalité maximum, la conjecture des graphes parfaits, et le problème de coloration. Par ailleurs, beaucoup de nouvelles conditions pour l'existence de cycle Hamiltoniens ont été améliorées. Pour plus de détails sur cette classe de graphes, nous vous renvoyons vers [65], qui constitue un très bon survey dans le domaine.

Seulement l'exclusion de l'étoile constitue une condition forte, c'est pour cette raison qu'il serait intéressant d'étudier des classes de graphes contenant la classe des graphes sans étoile, et donc des graphes avec des étoiles, et de généraliser des résultats prouvés pour les graphes sans étoile à ces superclasses.

Ces dernières années, beaucoup de résultats dans ce contexte ont été établis. Les chercheurs se sont intéressés à des superclasses de graphes sans étoile mais ne contenant pas "beaucoup" d'étoiles [68],[100] et [121].

Le travail qu'on propose s'inscrit dans le même contexte.

Notre objectif est d'étendre des résultats des graphes sans étoiles à une classe de

graphes qui contient des étoiles. Cette classe de graphes s'appelle : la classe des graphes *partiellement sans étoile*.

Définition 5.1 Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit A l'ensemble des centres d'étoiles de G . Le graphe G est *partiellement sans étoile* s'il vérifie la propriété suivante : pour tout sommet $v \in A$, il existe exactement deux sommets x et y de $V - A$ tels que $N(v) \subseteq N[x] \cup N[y]$, on dit que $\langle N(v) \rangle$ est 2-dominé dans $V - A$.

Exemple 5.1 Le graphe de la figure 5.1 est *partiellement sans étoile* mais n'est pas *sans étoile* puisqu'il contient 2 étoiles $\langle \{x; 1, 2, 3\} \rangle$ et $\langle \{y; 1, 2, 3\} \rangle$.

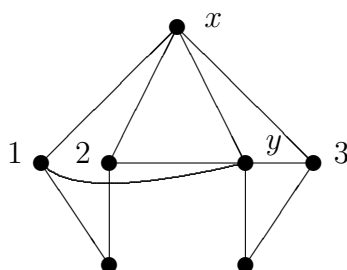


FIG. 5.1 – exemple de graphe partiellement sans étoile

Pour cette classe de graphes on peut faire les remarques suivantes :

(R1) Un graphe partiellement sans étoile est sans $K_{1,5}$.

Preuve. Supposons que (R1) soit Fausse. Soit $H = \langle \{v; a, b, c, d, e\} \rangle$ un sous graphe de G , isomorphe à $K_{1,5}$ et supposons que v est l'unique sommet de H de degré 5. Donc tout ensemble 2-dominant de $N_H(v)$ admet un sommet adjacent à au moins trois sommets parmi $\{a, b, c, d, e\}$. Donc tout ensemble 2-dominant de $N_H(v)$ contient un sommet qui est centre d'étoile. Ceci contredit la définition d'un graphe partiellement sans étoile. ■

(R2) Un graphe G est localement sans étoile si pour tout sommet v de G , $\langle N(v) \rangle$ est sans étoile. Un graphe partiellement sans étoile n'est pas nécessairement localement sans étoile (voir Figure 5.1)

(R3) Un graphe G est *presque sans étoile* si pour tout sommet v de G , $\langle N(v) \rangle$ est 2-dominé et l'ensemble A des centres d'étoiles de G est un stable. La classe des graphes partiellement sans étoile contient la classe des graphes presque sans étoile introduite par Ryjacek [121], et est différente de la classe des graphes pour lesquels l'ensemble des centres d'étoiles est un stable [100].

5.2 Coriacité (Toughness)

Définition 5.2 *Le graphe G est t -coriace ($t \geq 0$) si $|S| \geq t.w(G - S)$ pour tout sous ensemble S de V avec $w(G - S) > 1$, où $w(G - S)$ représente le nombre de composantes connexes de $G - S$. La coriacité (en anglais the toughness) de G , notée $\tau(G)$, est la valeur maximum de t pour laquelle G est t -coriace. ($\tau(K_n) = \infty$ pour tout $n \geq 1$).*

Soit G un graphe différent du graphe complet et soit $k(G)$ la connectivité de G , alors $\tau(G) \leq k(G)/2$ [48]. Si G est sans étoile, alors on a l'égalité, comme a été montré par Matthews et Sumner [109] :

Théorème 5.1 *Si G est un graphe différent du graphe complet sans étoile, alors $\tau(G) = k(G)/2$.*

Dans le même article, les auteurs ont énoncé leur célèbre conjecture selon laquelle tout graphe 4-connexe sans étoile est Hamiltonien. Une autre conjecture due à Thomassen [129] stipule que tout line graphe 4-connexe est Hamiltonien. Comme tout line graphe est sans étoile, la conjecture de Thomassen semble plus "facile" à résoudre que celle de Matthews et Sumner, mais dans [122], Ryjacek a montré que ces deux conjectures sont équivalentes.

Dans cette section, on montre le résultat suivant qui généralise le théorème 5.1 dans le cas $k(G) \leq 2$.

Théorème 5.2 *Si G est un graphe différent du graphe complet, partiellement sans étoile, alors $\tau(G) \geq \min \{1, k(G)/2\}$.*

Preuve. Dans tout graphe G différent du graphe complet, $\tau(G) \leq k(G)/2$. Si G n'est pas connexe, alors $\tau(G) = 0$. Supposons $G \neq K_n$ est un graphe connexe partiellement sans étoile et soit S un ensemble d'articulation de G tel que $\tau(G) = |S|/w(G - S) < \min \{1, k(G)/2\}$. Soient H_1, \dots, H_p les composantes connexes de $G - S$. Il existe au moins $k(G)$ chaînes disjointes joignant $u \in V(H_i)$ à $v \in V(H_j)$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$ avec $i \neq j$. Chacune de ces chaînes passe par un sommet distinct de S . Donc il existe au moins $p.k(G)$ arêtes entre $G - S$ et S telles que tout sommet de S est adjacent à au plus un sommet de $H_i, i = 1, \dots, p$. Supposons que tout sommet $v \in S$ a des voisins dans au plus deux composantes connexes de $G - S$. Alors il y'a au plus $2|S|$ arêtes entre $G - S$ et S telles que tout sommet de S est adjacent à au plus un sommet de H_j . Alors $p.k(G) \leq 2|S|$ ou, $k(G)/2 \leq |S|/p = \tau(G)$, contradiction.

Donc, S contient un sommet v centre d'étoile avec des voisins dans au moins 3 composantes de $G - S$.

Puisque G est partiellement sans étoile, il existe exactement deux sommets x et y de $V - A$ tels que $N(v) \subseteq N[x] \cup N[y]$. Ceci implique qu'il existe un sommet y de $V - A$, et, de plus v a des voisins dans au moins 3 composantes de $G - S$, et y est adjacent à des sommets dans exactement deux de ces composantes. Donc $y \in S$. Mais alors $T = S - \{y\}$ est un ensemble d'articulation de G avec $w(G - T) = w(G - S) - 1$, et $\tau(G) \leq |T|/w(G - T) = (|S| - 1)/(w(G - S) - 1) < |S|/w(G - S) = \tau(G)$, contradiction. Donc $\tau(G) \geq \min \{1, k(G)/2\}$. ■

Pour les graphes partiellement sans étoile de connectivité supérieure à 2, on ne peut pas avoir de résultat similaire au Théorème 5.1.

Le graphe de la Figure 5.2, est 3-connexe partiellement sans étoile. L'ensemble des centres d'étoile est $A = \{s_2, s_3\}$. Mais pour $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $|S| = 4$, $w(G - S) = 3$ et donc :

$$\tau(G) \leq \frac{|S|}{w(G - S)} = \frac{4}{3} < \frac{3}{2} = \frac{k(G)}{2}$$

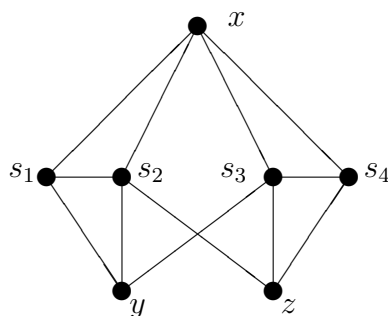


FIG. 5.2 – graphe 3-connexe, partiellement sans étoile, mais non $\frac{3}{2}$ -coriace

5.3 Couplage Parfait

Le résultat suivant est dû à Sumner [126] :

Théorème 5.3 *Si G est un graphe connexe, sans étoile ayant un nombre pair de sommets, alors G admet un couplage parfait.*

Le même auteur, a montré un résultat plus fort dans [127] :

Théorème 5.4 *Si G est un graphe connexe ayant un nombre pair de sommets, et n'admettant pas de couplage parfait, alors il existe un ensemble $S \subseteq V$, tel que $w_0(G - S) > |S|$, où*

$\omega_0(G - S)$ est le nombre de composantes connexes impaires de $G - S$, et tout sommet de S est adjacent à des sommets dans au moins 3 composantes connexes impaires de $G - S$.

Le théorème 5.3 a été étendu à la classe des graphes presque sans étoile :

Théorème 5.5 [121] *Si G est un graphe connexe, presque sans étoile ayant un nombre pair de sommets, alors G admet un couplage parfait.*

Le but de cette section est de montrer que tout graphe connexe d'ordre pair partiellement sans étoile admet un couplage parfait, généralisant ainsi les théorèmes 5.3 et 5.5 :

Théorème 5.6 *Si G est un graphe connexe, partiellement sans étoile ayant un nombre pair de sommets alors, G admet un couplage parfait.*

Preuve. Par l'absurde. Supposons que G est un graphe connexe, partiellement sans étoile, ayant un nombre pair de sommets mais sans couplage parfait.

Soit $S \subset V$, ayant les propriétés énoncées dans le théorème 5.4, et soit $x \in S$. Le sommet x est adjacent à au moins 3 sommets v_1, v_2 et v_3 appartenant à 3 composantes connexes impaires de $G - S$, donc $\langle x; v_1, v_2, v_3 \rangle$ est une étoile. Puisque G est partiellement sans étoile, alors deux parmi les sommets v_1, v_2 et v_3 sont dominés par un même sommet y de S , et d'après le théorème 5.4, y est aussi un centre d'étoile, ce qui contredit la définition d'un graphe partiellement sans étoile, et donc G admet un couplage parfait. ■

5.4 Cycles Hamiltoniens

Matthews and Sumner ont montré dans [110] le résultat suivant :

Théorème 5.7 *Si G est un graphe 2-connexe sans étoile avec $\delta(G) \geq \frac{(n-2)}{3}$, alors G est Hamiltonien.*

Une généralisation du théorème 5.7 a été indépendamment obtenue par Broersma [37] et Zhang [130] :

Théorème 5.8 *Si G est un graphe 2-connexe sans étoile avec $\sigma_3(G) \geq n - 2$, alors G est Hamiltonien.*

Un résultat plus général a été obtenu par Zhang [130] qui a montré :

Théorème 5.9 *Si G est un graphe k -connexe sans étoile avec $\sigma_{k+1}(G) \geq n - k$ ($k \geq 2$) alors G est Hamiltonien.*

Le théorème 5.7 a été étendu à des classes de graphes contenant la classe des graphes sans étoile.

C'est ainsi que Flandrin et Li [68], l'ont montré pour une classe de graphes contenant un nombre restreint d'étoiles, que Broersma et al. [38] l'ont prouvé pour les graphes presque sans étoile et que Li et al.[100] l'ont montré pour les graphes pour lesquels l'ensemble des centres d'étoiles est un stable.

Un théorème analogue au théorème 5.8 a été obtenu pour les graphes presque sans étoile par Broersma et al [38].

L'objectif de cette section est de montrer les deux résultats suivants. Le premier généralise le théorème 5.7, et le second est un résultat analogue au théorème 5.8. Ces résultats sont indépendants des résultats cités dûs à Flandrin et Li mais améliorent ceux de Broersma et al..

Théorème 5.10 *Si G est un graphe 2-connexe partiellement sans étoile avec $\delta(G) \geq \frac{(n-2)}{3}$, alors G est Hamiltonien.*

Théorème 5.11 *Si G est un graphe 2-connexe partiellement sans étoile avec $\sigma_3(G) \geq n$, alors G est Hamiltonien.*

5.5 Preuves des Théorèmes 5.10 et 5.11

On commence d'abord par introduire quelques notations et par montrer deux résultats auxiliaires nécessaires pour les preuves des théorèmes 5.10 et 5.11 .

Soit C un cycle de G muni d'un sens de parcours ou d'une orientation. On note par \underline{C} , le même cycle parcouru dans le sens inverse. Si $u, v \in V(C)$ alors $u\overline{C}v$; représente les sommets consécutifs de C pour aller de u à v dans le sens défini, et on note par $u\underline{C}v$ les mêmes sommets mais dans le sens inverse. Dans la suite $u\overline{C}v$ et $u\underline{C}v$ vont désigner aussi bien des chaînes que des ensembles de sommets. La notation u^+ représente le successeur de u sur C et u^- son prédécesseur.

Lemme 5.1 *Soit G un graphe partiellement sans étoile et soit C un plus long cycle de G muni d'une orientation. Soit $y \in V - V(C)$ et soit x un voisin de y sur C tel que $x \in A$ et $x^-x^+ \notin E(G)$. Alors il existe un sommet $d \in N(x^-) \cap N(x^+) \cap (V - A)$, et si $d \in V(C)$ alors : soit $d^+ = x^-$ ou $d^- = x^+$, ou il existe une chaîne Q_1 entre d^- et d^+ et une chaîne Q_2 entre $x^-(x^+)$ et x telles que $V(Q_1) \cap V(Q_2) = \emptyset$ et $V(Q_1) \cup V(Q_2) = \{x^-, x, x^+, d^-, d, d^+\}$.*

Preuve. Supposons d'abord que y et x^- ont un voisin commun $v \in V - A$. Le choix de C implique que $v \in V(C)$, et $yv^-, yv^+ \notin E(G)$. Puisque v n'est pas centre d'étoile alors $v^-v^+ \in E(G)$, et on peut trouver un cycle C' plus long que C en remplaçant v^-vv^+ par v^-v^+ , et x^-x par x^-vyx , ce qui contredit le choix de C . Donc y et x^- n'ont pas de voisin commun $v \in V - A$. De même, y et x^+ n'ont pas aussi de voisin commun dans $V - A$. Puisque $N(x)$ est 2-dominé dans $V - A$, il existe un sommet $d \in V - A$ adjacent à x^+ et à x^- .

Si $d \in V(C)$, alors si $d^+ = x^-$ ou $d^- = x^+$, le lemme est montré. Supposons maintenant que $d^+ \neq x^-$ et $d^- \neq x^+$ et considérons le sous graphe de G induit par $\{d^-, d, d^+, x^+\}$, puisque d n'est pas centre d'étoile, au moins une des arêtes d^-d^+, d^-x^+ ou d^+x^+ appartient à G . Si $d^-d^+ \in E(G)$, alors on pose $Q_1 = d^-d^+$ et $Q_2 = x^-dx^+x$. Si $d^-x^+ \in E(G)$, alors on pose $Q_1 = d^-x^+dd^+$ et $Q_2 = x^-x$. Et enfin si $d^+x^+ \in E(G)$, alors $Q_1 = d^-dx^+d^+$ et $Q_2 = x^-x$. Par symétrie, on montre le même résultat pour x^+ .

■

Dans la suite, soit G un graphe non Hamiltonien 2-connexe partiellement sans étoile, et soit C un plus long cycle de G , et soit H une composante connexe de $G - V(C)$. On note par x_1, \dots, x_k les sommets de $N_C(H)$ apparaissant sur C dans l'ordre de leurs indices, et soit $S_i = x_i^+Cx_{i+1}^-$ et $s_i = |S_i|$. Le graphe G étant 2-connexe, $k \geq 2$. On note par l_i la longueur de la plus longue chaîne L_i , entre x_i et x_{i+1} avec tous les sommets entre x_i et x_{i+1} dans H ($i = 1, \dots, k$).

Lemme 5.2 $\sum_1^k s_i \geq \sum_1^k l_i + k$

Preuve. Soit $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ et soit $L_i = y_1y_2y_3\dots y_t$ une chaîne de longueur l_i reliant x_i et x_{i+1} et ayant tous ses sommets internes dans H .

On distingue plusieurs cas.

Cas 1 $x_{i+1}^-x_{i+1}^+ \in E$

Cas 1.A $x_i^-x_i^+ \in E$ alors $s_i \geq 1 + l_i$, sinon le cycle $C' = x_i^-x_i^+x_iL_ix_{i+1}x_{i+1}^-x_{i+1}^+Cx_i^-$ serait plus long que C .

Cas 1.B $x_i^-x_i^+ \notin E$ alors par le lemme 5.1, il existe un sommets $d \in N(x_i^-) \cap N(x_i^+) \cap (V \setminus A)$. Supposons d'abord que $d \notin V(C)$. Si $d \in L_i, \exists j, 1 \leq j \leq t, d = y_j$, alors le cycle $C' = x_i^+Cx_iy_1\dots y_jx_i^+$ va être plus long que C . Donc $d \notin L_i$ et alors $s_i \geq 1 + l_i$, puisque en remplaçant $x_i^-x_iS_ix_{i+1}x_{i+1}^+$ par $x_i^-dx_i^+x_iL_ix_{i+1}x_{i+1}^-x_{i+1}^+$ dans C , on obtient un cycle C' plus long que C . Donc $d \in V(C)$. Si $d^- = x_i^+$, alors $s_i \geq 2 + l_i$ sinon en remplaçant $x_i^-x_iS_ix_{i+1}x_{i+1}^+$ par $x_i^-dx_i^+x_iL_ix_{i+1}x_{i+1}^-x_{i+1}^+$ dans C , on obtient un cycle C' plus long que C . Si $d^+ = x_i^-$, alors $s_i \geq l_i$. Si $d = x_{i+1}$, alors le cycle

$x_{i+1}x_i^+Cx_{i+1}^-x_{i+1}^+Cx_iL_ix_{i+1}$ serait plus long que C . Si $d \in S_i$, alors $s_i \geq 2 + l_i$ et si $d \in x_{i+1}^+Cx_i^-$ alors $s_i \geq l_i + 1$ car sinon en remplaçant dans C , d^-dd^+ et $x_i^-x_iS_ix_{i+1}x_{i+1}^-$ par Q_1, Q_2, L_i et $x_{i+1}^-x_{i+1}^+$ on obtient un cycle C' plus long que C .

Cas 2 $x_{i+1}^-x_{i+1}^+ \notin E$.

D'après le lemme 5.1, il existe un sommet $d_2 \in N(x_{i+1}^-) \cap N(x_{i+1}^+) \cap (V - A)$

Cas 2.A $x_i^-x_i^+ \in E$. Ce cas est symétrique au Cas 1.B.

Cas 2.B $x_i^-x_i^+ \notin E$. Par le lemme 5.1, il existe un sommet $d_1 \in N(x_i^-) \cap N(x_i^+) \cap (V - A)$. En utilisant des arguments similaires au Cas 1.B, on a que $d_1, d_2 \in V(C)$. Il est clair que $d_1, d_2 \notin \{x_i^-, x_i^+, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}^-, x_{i+1}^+\}$. Supposons $d_1 = d_2$ et supposons sans perte de généralité que $d_1 \in x_{i+1}^+Cx_i^-$. On considère le sous graphe de G , $\langle \{d_1, x_i^-, x_i^+, d_1^-\} \rangle$, puisque d_1 n'est pas centre d'étoile, alors, au moins $d_1^-x_i^-$ ou $d_1^-x_i^+$ est une arête de G , et, alors les cycles $d_1Cx_i^-d_1^-Cx_{i+1}L_ix_iCx_{i+1}d_1$ ou $d_1Cx_iL_ix_{i+1}^-Cx_i^+d_1^-Cx_{i+1}d_1$ respectivement contredisent le choix de C . Donc $d_1 \neq d_2$. Supposons que $d_1d_2 \in E(C)$ et supposons sans perte de généralité $d_1 \in x_{i+1}^+Cx_i^-$. Si $d_2 = d_1^-$, alors le cycle $x_i^-d_1x_i^+Cx_{i+1}^-d_2Cx_{i+1}L_ix_i$ est plus long que C . Si $d_2 = d_1^+$, alors le cycle $x_i^-d_2x_{i+1}^-Cx_i^+d_1Cx_{i+1}L_ix_i$ est plus long que C . Donc $d_1d_2 \notin E(C)$. En utilisant des arguments similaires à ce qui a été fait précédemment, on obtient les bornes minimums suivantes pour s_i dans les neuf cas possibles suivants :

- i. $d_1^- = x_i^+$
 - (i.1) $d_2^+ = x_{i+1}^-$ alors $s_i \geq 3 + l_i$
 - (i.2) $d_2^- = x_{i+1}^+$ alors $s_i \geq 1 + l_i$
 - (i.3) $d_2^+ \neq x_{i+1}^-, d_2^- \neq x_{i+1}^+$ alors $s_i \geq 3 + l_i$ si $d_2 \in S_i$
 $s_i \geq 3 + l_i$ si $d_2 \notin S_i$
- ii. $d_1^+ = x_i^-$
 - (ii.1) $d_2^+ = x_{i+1}^-$ ce cas est symétrique au cas (i.2)
 - (ii.2) $d_2^- = x_{i+1}^+$ alors $s_i \geq -1 + l_i$
 - (ii.3) $d_2^+ \neq x_{i+1}^-, d_2^- \neq x_{i+1}^+$ alors $s_i \geq 1 + l_i$ si $d_2 \in S_i$
 $s_i \geq l_i$ si $d_2 \notin S_i$
- iii. $d_1^- \neq x_i^+$ et $d_1^+ \neq x_i^-$
 - (iii.1) $d_2^+ = x_{i+1}^-$ ce cas est symétrique au cas (i.3)
 - (iii.2) $d_2^- = x_{i+1}^+$ ce cas est symétrique au cas(ii.3)
 - (iii.3) $d_2^+ \neq x_{i+1}^-, d_2^- \neq x_{i+1}^+$ alors $s_i \geq 1 + l_i$

Le résultat est obtenu en sommant sur tous les $s_i (i = 1, \dots, k)$ ■

En plus des lemmes 5.1 et 5.2, nous allons utiliser les résultats suivants :

Théorème 5.12 (Bauer et al., [22])

Si G un graphe 1-coriace, d'ordre $n \geq 3$, alors la longueur d'un plus long cycle de G est supérieure ou égale au $\min \{n, \sigma_2 + 2\}$.

Théorème 5.13 (Ore, [117])

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$. Si pour toute paire de sommets non adjacents u et v , on a : $d(u) + d(v) \geq n + 1$, alors G est hamiltonien-connecté (entre toute paire de sommets, il existe une chaîne hamiltonienne qui les relie).

Théorème 5.14 (Bauer, [21])

Soit G un graphe 1-coriace sur $n \geq 3$ sommets, tel que $\sigma_3(G) \geq n$. Alors tout plus long cycle de G est un cycle dominant (un cycle tel que toute arête de G a au moins une extrémité sur ce cycle). De plus, si G n'est pas Hamiltonien, alors G contient un plus long cycle C tel que $\max \{d(v)/v \in V(G) - V(C)\} \geq \sigma_3(G)/3$.

5.5.1 Preuve du théorème 5.10

Supposons que $\delta(G) \geq \frac{n-2}{3}$. En utilisant le lemme 5.2, on obtient :

$$n \geq \sum_1^k s_i + k + 1 \geq \sum_1^k l_i + 2k + 1 \geq 4k + 1 \geq 9.$$

Supposons $V(H) = \{v\}$, alors :

$$\frac{n-2}{3} \leq \delta(G) \leq d(v) \leq k \leq \frac{n-1}{4},$$

et ceci est impossible.

Donc il n'y'a aucune composante connexe de $G - V(C)$ avec un sommet isolé. On peut supposer que $|V(H)| \geq 2$. Parmi toutes les paires $\{v_1, v_2\} \subseteq V(H)$ pour lesquelles

$$|N_C(v_1)| + |N_C(v_2)| \text{ est aussi grand que possible} \quad (1)$$

on choisit une paire $\{u, v\}$ telle que :

$$|N_C(u) \cup N_C(v)| \text{ est maximum.} \quad (2)$$

Si $|N_C(u) \cup N_C(v)| \leq 1$, alors (1) et (2) impliquent $|N_C(H)| \leq 1$, contradiction. Donc $|N_C(u) \cup N_C(v)| \geq 2$. De plus, à cause du fait que G soit 2-connecte, on peut supposer que u et v sont choisis de telle sorte que $uy_1, vy_2 \in E(G)$ pour deux sommets distincts $y_1, y_2 \in V(C)$. Soit $p = |N_C(u)|, q = |N_C(v)|$ et $r = |N_C(u) \cap N_C(v)|$. Supposons sans perte de généralité que $p \geq q$, et soit $l(u, v)$ la longueur de la plus longue chaîne reliant u et v dans H . L'ensemble $N_C(u) \cup N_C(v)$ sera noté $\{x_1, \dots, x_t\}$, ces sommets

apparaissant sur C dans l'ordre de leur indices. Alors et d'après le lemme 5.2 pour cet ensemble $\{x_1, \dots, x_t\}$ de $N_C(H)$, on obtient :

$$\begin{aligned} n &\geq |V(H)| + |V(C)| \\ &\geq |V(H)| + \sum_1^t s_i + t \\ &\geq |V(H)| + \sum_1^t l_i + 2t \geq |V(H)| + 4t + \max\{2, r\} \cdot l(u, v) \end{aligned} \quad (3)$$

On distingue deux cas.

Cas 1. $p + q \leq \delta(G) - 1$.

Par le choix de u et v , $d_H(v_1) + d_H(v_2) \geq 2\delta(G) - (p + q) \geq \delta(G) + 1 \geq (n + 1)/3$ pour tous $v_1, v_2 \in V(H)$. D'après le théorème 5.2, G est 1-coriace. En utilisant le théorème 5.12, $|V(C)| \geq 2\delta(G) + 2$, donc

$$|V(H)| \leq n - (2\delta(G) + 2) \leq (n - 2)/3.$$

Alors $d_H(v_1) + d_H(v_2) \geq |V(H)| + 1$ pour tous $v_1, v_2 \in V(H)$, ce qui implique, en utilisant le théorème 5.13 d'Ore, que H est Hamiltonien-connecté. En particulier, $l(u, v) = |V(H)| - 1$. En utilisant (3), on a :

$$n \geq |V(H)| + 4t + 2l(u, v) \geq 3|V(H)| + 4t - 2$$

Il est clair que,

$$\delta(G) + 1 - q \leq |V(H)| \quad (4)$$

alors

$$\begin{aligned} n &\geq 3\delta(G) + 4t - 3q + 1 = 3\delta(G) + t + 3(t - q) + 1 \\ &\geq 3\delta(G) + 3 \geq n + 1 \end{aligned}$$

ce qui nous conduit à une contradiction.

Cas 2. $p + q \geq \delta(G)$.

En utilisant (3) et (4), on a :

$$\begin{aligned} n &\geq |V(H)| + 4t + \max\{2, r\} \cdot l(u, v) \\ &\geq \delta(G) + 1 - q + 4(p + q - r) + \max\{2, r\} \cdot l(u, v) \\ &= \delta(G) + 1 + 2(p + q) + (p + q - r) + p - 3r + \max\{2, r\} \cdot l(u, v) \\ &\geq 3\delta(G) + 3 + p - 3r + \max\{2, r\} \cdot l(u, v) \\ &\geq n + 1 - 2r + \max\{2, r\} \cdot l(u, v) \end{aligned}$$

Ceci nous conduit à une contradiction dans le cas $l(u, v) \geq \min\{2, r\}$. Pour les cas qui restent supposons $l(u, v) = 1$ et $r \geq l(u, v) + 1$.

Alors $N_H(u) \cap N_H(v) = \emptyset$ et donc $|V(H)| \geq 2\delta(G) - (p + q)$.

Par (3),

$$\begin{aligned} n &\geq |V(H)| + 4t + r \\ &\geq 2\delta(G) - (p + q) + 4(p + q - r) + r \\ &= 2\delta(G) + (p + q) + (p + q - r) + (p + q - 2r) \\ &\geq 3\delta(G) + 2 \geq n \end{aligned}$$

Ceci implique $p = q = r = 2$, $\delta(G) = 4$, $n = 14$ et $|V(H)| = 4$. Maintenant u et v ont des voisins w_1 et w_2 , respectivement, dans H , tels que $w_1w_2, vw_1, uw_2 \notin E(G)$ (car $l(u, v) = 1$). De plus, $d_H(w_1) + d_H(w_2) = 2$ car $|V(H)| = 4$, d'autre part, le choix de u et v , implique $d_H(w_1) + d_H(w_2) \geq 2\delta(G) - (p + q) = 8 - 4 = 4$, ce qui est impossible. ■

5.5.2 Preuve du théorème 5.11

Supposons que $\sigma_3(G) \geq n$. Par le théorème 5.2, G est 1-coriace. En utilisant le théorème 5.14, le cycle C est un cycle dominant. Supposons que le cycle C est choisi tel qu'il existe un sommet $v \in V(G) - V(C)$ avec $d(v) \geq \sigma_3(G)/3 \geq n/3$. D'après le lemme 5.2 (avec $d(v) = k$),

$$n \geq \sum_1^k s_i + k + 1 \geq \sum_1^k l_i + 2k + 1 \geq \frac{4}{3}n + 1,$$

contradiction. ■

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a défini une nouvelle classe de graphes généralisant la classe des graphes sans étoile. Pour cette superclasse, en plus des résultats sur la coriaticité et l'existence de couplage parfait, deux nouveaux résultats sur l'Hamiltonicité ont été prouvés. Le premier généralise un résultat prouvé pour les graphes sans étoile et le second est un résultat analogue à un résultat donné pour les graphes sans étoile.

Le graphe de la Figure 5.3, montre que la borne donnée par le théorème 5.10 est la meilleure possible. En effet, ce graphe est 2-connexe, avec $\delta(G) = \frac{n-3}{3}$ mais non Hamiltonien. On ne peut rien dire pour le théorème 5.11.

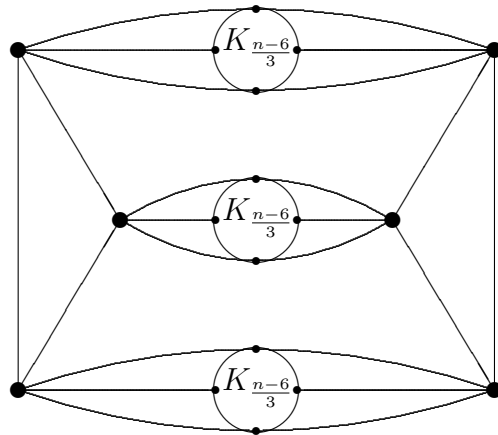


FIG. 5.3 – graphe 2-connexe, partiellement sans étoile avec $\delta(G) = \frac{n-3}{3}$ mais non Hamiltonien

Comme tout graphe presque sans étoile est partiellement sans étoile, les résultats prouvés pour les graphes presque sans étoile dans [38] sont des corollaires des théorèmes 5.10 et 5.11.

Conclusion générale

Dans cette thèse, on s'est intéressé à deux problèmes difficiles de la théorie des graphes, le problème du stable et celui de l'hamiltonicité.

Pour le problème du stable, on a étudié les deux approches utilisées : la technique des graphes augmentants et la struction. On a proposé, dans le chapitre 3, un algorithme de struction modifié permettant de résoudre ainsi le problème dans deux classes de graphes nommées Γ et Γ' .

Les résultats obtenus améliorent ceux de De Werra , Hertz et Mahadev [84] et [85].

Par ailleurs, pour le problème de l'hamiltonicité, notre contribution se résume en deux points :

1. L'élaboration d'un survey exhaustif dans le domaine. La rédaction de ce survey a nécessité une bibliographie riche et relativement récente.
2. La généralisation de résultats obtenus pour la classe de graphes sans étoile à une superclasse de celle-ci appelée : la classe des graphes partiellement sans étoile. Ces résultats n'améliorent pas seulement les résultats obtenus par Matthews et Sumner pour la classe des graphes sans étoile, mais aussi les résultats de Broersma et Ryjacek pour les graphes presque sans étoile puisque la classe qu'on a défini contient la classe étudiée par ces derniers.

Les perspectives de recherche dans ces deux domaines sont particulièrement nombreuses :

1. Dans le chapitre 3, nous avons considéré deux classes dites Γ et Γ' . D'autres superclasses peuvent être examinées.
La suppression de la condition (2) de la définition aboutirait à un résultat qui inclurait ceux de Minty et Sbihi.
2. Dans le chapitre 2, une généralisation de la struction a été présentée. L'avantage de cet algorithme est que d'une itération à l'autre, le nombre de stabilité diminue

Bibliographie

- [1] M.Abbas and Z.Benmeziane, *Hamiltonicity in Partly Claw-free Graphs*. RAIRO-Oper.Res. 43(2009) 103-113.
- [2] M.Abbas, Z.Benmeziane, N.Meddour, *Polynomial algorithm for the maximum stable set problem on particular class of chair-free graphs*, submitted.
- [3] A.Ainouche, Z.Benmeziane, *Stability Number of a Subclass of Chair- Free, Net-Free Graphs*, J. Combin Math and Combin Computing (1997) 79-90.
- [4] A.Ainouche. *An improvement of Fraïssé's sufficient condition for hamiltonian graphs*. J. Graph Theory 16 (1992) 529-543.
- [5] A.Ainouche. *A common generalization of Chvátal-Erdős and Fraïssé's sufficient conditions for hamiltonian graphs*. Discrete Math. 142 (1995) 1-19.
- [6] A.Ainouche. *Quasi claw free graphs*. Discrete Math.179(1998) 13-26.
- [7] A.Ainouche, H. J Broersma, S. Ronghua et H. J Veldman. *Remarks on hamiltonian properties of claw free graphs*. Ars combinat. 29C (1990) 110-121.
- [8] A.Ainouche et N. Christofides. *Conditions for the existence of of hamiltonian circuits in graphs based on vertex degrees*. J.London Math. Soc. (2) 32 (1985) 385-391.
- [9] V.E.Alekeev and V.V.Lozin, *augmenting graphs for independent sets*, Discrete Applied Mathematics, accepted.
- [10] V.E. Alekseev, *A polynomial algorithm for finding largest independent sets in fork-free graphs*, in Russian, translation in Discrete Applied Mathematics, 135(2004) 3-16
- [11] G.Alexe, P.L.Hammer, V.V.Lozin, D.De Werra, *Struction revised*, Discrete Applied Math. 132(2003) 27-46
- [12] A.S. Asratyan et N. K. Khachatryan. *Two theorems on hamiltonian graphs*. Math. Zamethki 35 (1984) 55-61.
- [13] D. Bauer, G. Chen et L. Lasser. *A degree condition for hamiltonian cycles in t-tough graphs with $t > 1$* . advances in graph theory, Vishwa, Gulbarga (1991) 19-32.

- [14] D. Bauer, H. J. Broersma et E. Schmeichel. *More progress on tough graphs* The Y2K report. preprint.
- [15] D. Bauer, H. J. Broersma et H. J. Veldman. *On generalizing a theorem of Jung*. Ars Combin. 40 (1995) 207-218.
- [16] D. Bauer, H. J. Broersma et H. J. Veldman. *Not every 2- tough graph is hamiltonien*. Discrete Applied Math. 99 (2000) 317-321.
- [17] D. Bauer, H.J. Broersma, H.J. Veldman et L. Rao. *A ganaralization of a result of Häggkvist and Nicoghossian*. J. Combinat. Theory B 47 (1989) 237-343.
- [18] D. Bauer, H.J. Broersma, J. Van Den Heuvel et H.J. Veldman. *Long cycles in graphs with prescribed toughness and minimum degree*. Discrete Math. 141 (1995) 1-10.
- [19] D. Bauer, G. Fan et H. J. Veldman. *Hamilton properties of graphs with large neighbourhood unions*. Discrete Math. 96 (1991) 33-49.
- [20] D. Bauer, S. Hakimi et E. Schmeichel. *Recognising tough graphs is NP- hard*. Discrete Applied Math. 28 (1990) 191-195.
- [21] D. Bauer, A. Morgana, E. Schmeichel et H. J. Veldman. *Long cycles in graphs with large degree sum*. Discrete Math. 79 (1990) 59-70.
- [22] D. Bauer and E.F. Schmeichel. *Long cycles in tough graphs*. Technical Report 8612, Stevens Institute of Technology (1986).
- [23] P. Bedrossian. *Forbidden subgraphs and minimum degree conditions for hamiltonicity*. Thesis, Memphis State University, U.S.A (1991).
- [24] P. Bedrossian, G. Chen et R. H. Schelp. *A generalization of Fan's condition for hamiltonicity, pancyclicity and hamiltonian connectdness*. Discrete Math. 115 (1993) 39-50.
- [25] L.W. Beineke. *Characterisation of derived graphs*. J. Combinat. Theory 9 (1970) 129-135.
- [26] Z. Benmeziane and S. Bekkai. *Recent survey on Hamiltonicity and Hamiltonicity of the join graph of a $(0,2)$ -graph*. Proceeding of the conference Optimisation 2004 , Lisbon 25-28 juillet 2004.
- [27] C. Berge, *two theorems in Graph theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 43(1957) 842-844.
- [28] J. C. Bermond et C. Thomassen. *Cycles in digraphs- A survey*. J. Graph Theory 5 (1981) 1-43.
- [29] R. Boliac and V.V. Lozin , *An augmenting graph approach to the stable set problem in P_5 -free graphs*, Discrete applied Math 131(2003) 567-575.

- [30] J. A. Bondy. *Longest paths and cycles in graphs of high degree*. Research report CORR 80-16, Departement of Combinatorics and Optimization, Faculty of Mathematics, University of Waterloo, Canada (1980).
- [31] J.A. Bondy et V. Chvátal. *a method in graph theory*. Discrete Math. 15 (1976) 111-136.
- [32] J. A. Bondy et U. S. R. Murty. *Graph theory*. New York : Springer(2008).
- [33] A. Brandstädt, F. F. Dragan and E. Köhler. *Linear time algorithms for hamiltonian problems on (claw, net)-free graphs*. SIAM J. Comput. Vol. 30 (2000) 1662-1677.
- [34] H. J. Broersma. *On some intriguing problems in hamiltonian graph theory- a survey*. Discrete Math. 251 (2002) 47-69.
- [35] H.J. Broersma, Z. Ryjacek et I. Schiermeyer. *Closure concepts- a survey*. Graphs and Combin. 16 (2000) 17-48.
- [36] H. J. Broersma et H. J. Veldman. *Restriction on induced subgraphs ensuring hamiltonicity or pancyclicity of $K_{1,3}$ free graphs*. In R. Bodendiek Ed. Comtemporary Methods in Graph Theory, (BI-Wiss.-Verl., Mannheim-Wien-Zürich, 1990) 181-194.
- [37] H.J. Broersma. *Hamilton cycles in graphs and related topics*. Ph.D. Thesis, University of Twente(1988).
- [38] H.J. Broersma, Z. Ryjacek and E.F. Schiermeyer. *Toughness and Hamiltonicity in almost claw-free graphs*. J. Graph theory 21 (1996) 431-439.
- [39] J. Brousek, O. Favaron et Z. Ryjáček. *Forbidden Subgraphs, hamiltonicity and closure in claw free graphs*. Discrete Math. 196 (1999) 29-50.
- [40] J. Brousek, Z. Ryjáček et I. Schiermeyer. *Forbidden subgraphs, stability and hamiltonicity*. Discrete Math. 197/198 (1999) 143-155.
- [41] X. Cai et W. E. Shreve. *Pancyclicity mod k of claw free graphs and $K_{1,4}$ free graphs*. Discrete Math. 230 (2001) 113-118.
- [42] P. A. Catlin. *Supereulerian graphs- A survey*. J. Graph. Theory 16 (1992) 177-196.
- [43] G. Chartrand, R. G. Gould et A. D. Polimeni. *A note on locally connected and hamiltonian connected graphs*. Israel J. Math. 33 (1979) 5-8.
- [44] G. Chen et R. Schelp. *Hamiltonicity for $K_{1,r}$ -free graphs*. Journal of Graph Theory 21 (1996) 243-249.
- [45] G. Chen. *One sufficient condition for hamiltonian graphs*. J. Graph Theory 14 (1990) 501-508.
- [46] J. Chen, I. A. Kanj, and W. Jia. *Vertex Cover : Further Observations and Further Improvements*. Journal of Algorithms 41 (2001) 280-301.

- [47] V. Chvátal. *On Hamilton's ideals*. J. Combinat. Theory 12 (1972) 163-168.
- [48] V. Chvátal. *Tough graphs and hamiltonian circuits*. Discrete Math. 5 (1973) 215-228.
- [49] V. Chvátal et P.Erdős. *A note on hamiltonian circuits*. Discrete Math. 2 (1972) 111-113.
- [50] L. Clark. *Hamiltonian properties of connected, locally connected graphs*. Cong. Numer. 32 (1981) 199-204.
- [51] S. Curran et J.A Gallian. *Hamiltonian cycles and paths in Cayley graphs and digraphs- A survey*. Discrete Math. 156 (1996) 1-18.
- [52] J. S. Deogun, D. Kratsch et G. Steiner. *1- tough cocomparability graphs*. Discrete Math. 170 (1997) 99-106.
- [53] V.G. Deineko et G.J. Woeginger. *The maximum travelling salesman problem on symmetric demidenkomatrices*. Discrete Applied Math. 99 (2000) 413-425.
- [54] C. De Simone, A.Sassano, *Stability Number of Bull and Chair Free Graphs*, Discrete Applied Math. 41 (1993) 121-129.
- [55] G.A. Dirac. *Some theorems on abstract graphs*. Proc. London Math. Soc. 2 (1952) 69-81.
- [56] D. A. Duffus, R. J. Gould et M. S. Jacobson. *Forbidden subgraphs and the hamiltonian theme*. Theory and Applications of Graphs (Kalamazoo, Michigan, 1980).
- [57] Ch.Ebeneger, P.L.Hammer and D.de Werra, *Pseudo Boolean Functions and Stability of Graphs*, Ann. Discrete Math 19 (1984) 83-98.
- [58] J. Edmonds, *Path, trees, and flowers*, Canad. J. Math. 17 (1965) 447-449.
- [59] G. H. Fan. *New sufficient condition for cycles in graphs*. J. Combinat. Theory Ser. B 37 (1984) 221-227.
- [60] R. J. Faudree, R. J. Gould. *Characterizing forbidden pairs for hamiltonian properties*. Discrete Math. 173 (1997) 45-60.
- [61] R.J. Faudree, R.J. Gould, M.S. Jacobson et R.H. Schelp. *Neighbourhood unions and hamiltonian properties in graphs*. J. Combinat. Theory B 46 (1989) 1-20.
- [62] R. J. Faudree, R. J. Gould, M. S. Jacobson, L. Lesniak et T. E. Lindquester *On a generalization of Dirac's theorem for $K_{1,3}$ free graphs*. Periodica Math. Hungar. 24 (1992) 35-50.
- [63] R.J. Faudree, R.J. Gould et T. Lindquester. *Hamiltonian properties and adjacency conditions in $K_{1,3}$ free graphs*. Proceedings of the 6th international conference on theory and applications of graphs (Kalamazoo, Michigan, 1988).

- [64] R. J. Faudree, Z. Ryjáček et I. Schiermeyer. *Forbidden subgraphs and cycle extendibility*. J. Comb. Math. Comp. 19 (1995) 109-128.
- [65] R. J. Faudree, E. Flandrin, Z. Ryjáček. . *Claw-free graphs – A survey* . Discrete Math. 164(1997) 87-147.
- [66] O. Favaron, E. Flandrin, H. Li et Z. Ryjacek. *Clique covering and degree conditions for hamiltonicity in claw free graphs*. Discrete Math. 236 (2001) 65-80.
- [67] O. Favaron and P. Fraisse. *Hamiltonicity and minimum degree in 3-connected claw-free graphs*. Journal of Combinatorial Theory Series B, 82 (2001) 297-305.
- [68] E. Flandrin and H. Li. . *Hamiltonism and claws*. Ars Combinatoria 29C(1990) 77-89.
- [69] E. Flandrin, H.A Jung et H. Li. *Hamiltonism, degree sums and neighbourhood intersections*. Discrete Math. 90 (1991) 41-52.
- [70] E. Flandrin et H. Li. *Hamiltonism and Neighbourhood intersections*. Rapport de recherche n° :406, Université de Paris Sud, Centre d’Orsay (1988).
- [71] P. Fraisse. *A new sufficient condition for graphs*. J. Graph Theory 10 (1986) 405-409.
- [72] M.U.Gerber, A.Hertz and D.Schindl , *P_5 -free augmenting graphs and the maximum stable set problem*, Discrete Applied Mathematics 132(2004) 109-119.
- [73] M.U.Gerber, A.Hertz and V.V.Loizin , *Stable sets in two subclasses of banner-free graphs*, Discrete Applied Mathematics 132(2004) 121-136.
- [74] M.U.Gerber, A.Hertz and V.V.Loizin , *augmenting chains in graphs without a skew star*, Rutcot research report, Rutgers University, USA(2003).
- [75] M.C.Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs* (Academic Press, New York, 1980).
- [76] S. Goodman et S. Hedetniemi. *Sufficient conditions for a graph to be hamiltonian*. J. Combinat. Theory B 16 (1974) 175-180.
- [77] R. J. Gould. *Advances on the hamiltonian problem- A survey*. Graphs and combinatorics 19 (2003) 7-52.
- [78] R.J Gould. *Traceability in graphs*. Doctoral Thesis, Western Michigan University (1979).
- [79] R. J. Gould. *Updating the hamiltonian problem- a survey*. Journal of Graph Theory Vol. 15 (1991) 121-157.
- [80] R. J. Gould et M. S. Jacobson. *Forbidden subgraphs and hamiltonian properties in graphs*. Discrete Math. 42 (1982) 189-196.

- [81] R.J. Gould, T. Luczak et F. Pfender. *Pancyclicity of 3-connected graphs : pairs of forbidden subgraphs*. Journal of Graph Theory. 47 (2004) 183-202.
- [82] M. Grötschel, L. Lovász and Schrijver, *Polynomial algorithms for perfect graphs*. Annals of Discrete Mathematics 21 (North Holland, Amsterdam), (1984) 325-356
- [83] R. Häggkvist et G. G. Nicoghossian. *A remark on hamiltonian cycles*. J. Combinat. Theory B 30 (1981) 118-120.
- [84] P.L.Hammer, N.V.R.Mahadev and D.de Werra, *Stability in CAN-Free Graphs*, J. Combin Theory. B 38 (1985) 23-30.
- [85] P.L.Hammer, N.V.R.Mahadev and D.de Werra, *the Struction of a Graph : Application to CN-Free Graphs*, Combinatorica 5 (1985) 141-147.
- [86] A. Hertz, D. de Werra, *On the stability number of the AH-free graphs*, Journal of Graph Theory, V 17 (1993) 53-63
- [87] A.Hertz and V.V.Lozin , *The maximum independent set problem and Augmenting graphs*, Graph Theory and Combinatorial Optimisation (2005) 69-99.
- [88] A.Hertz, V.V.Lozin and Schindl , *On finding augmenting chains in extensions of claw-free graphs*, Information Processing letters 86,(2003) 311-316.
- [89] C. T. Hoang. *Hamiltonian degree conditions for tough graphs*. Discrete Math. 142 (1995) 121-139.
- [90] H. A. Jung. *on a maximal circuits in finite graphs*. Ann. Discrete Math. 3 (1978) 129-144.
- [91] J.M. Kiel. *Finding hamiltonian circuits in interval graphs*. Inf. Process. Lett. 20 (1985) 201-206.
- [92] M. Kouider and P. D. Vestergaard. *Connected Factors in graphs- A survey*. Graphs and Combinatorics 21 (2005) 1-26
- [93] D. Kratsch, J. Lehel et H. Müller. *Toughness, hamiltonicity and split graphs*. Discrete Math. 150 (1996) 231-245.
- [94] E.J. Kuipers et H.J. Veldman. *Recognizing claw-free hamiltonian graphs with large minimum degree*. Preprint (1998).
- [95] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. RinnooyKan et D.B. Shmoys. *The travelling salesman problem*. Wiley-Interscience series, New York (1986).
- [96] M. Li. *Pancyclism in claw free graphs*. (Chinese, English Summery), J. Nanjing University. Nat. Sci. (Spec. Issue on Graph Theory) 27 (1991) 123-126.
- [97] M. Li. *Hamiltonian cycles in 3- connected claw free graphs*. J. Graph Theory 17 (1993) 303-313.

- [98] R. Li. *A Fan type condition for claw free graphs to be hamiltonian*. Discrete Math. 219 (2000) 195-205.
- [99] M. Li et C. Virlouvet. *Neighbourhood conditions for claw free hamiltonian graphs*. Ars Combinat. 29A (1990) 109-116.
- [100] H. Li , M. Lu and Z. Sun. . *Hamiltonicity in 2-connected graphs with claws*. Discrete Math. 183(1998), 223-236.
- [101] T. E. Lindquester. *The effects of distance and Neighbourhood union conditions on hamiltonian properties in graphs*. J. Graph Theory 13 (1989) 335-352.
- [102] Y. Liu et Z. Wu. *Hamiltonian cycles in 2-connected regular $K_{1,3}$ free graphs*. Nanjing University, China (1987).
- [103] L.Lovász and M.D.Plummer, *Matching Theory*, Ann. Discrete Math 29 (1986) 471-482
- [104] V. V. Lozin, *Conic reduction of graphs for the stable set problem*, Discrete Mathematics, v.222 n.1-3(2000) 199-211
- [105] V.V.Lozin , *E-free bipartite graphs*, Discrete analysis and Operations Research 7(2000) 49-66.
- [106] V.V.Lozin , *Stability in P_5 and banner-free graphs*, European J. Operational Research 125(2000) 292-297.
- [107] T.Luczak et F.Pfender. *Claw-free 3-connected P_{11} -free graphs are hamiltonian*. J.Graph Theory 47 (2004) 183-202.
- [108] L.R. Markus. *Hamiltonian results in $K_{1,r}$ -free graphs*. Cong. Numer. 98 (1993) 143-149.
- [109] M. M. Matthews et D. P. Sumner. *Hamiltonian results in $K_{1,3}$ free graphs*. J. Graph Theory 8 (1984) 139-146.
- [110] M. M. Matthews et D. P. Sumner. *Longest paths and cycles in $K_{1,3}$ free graphs*. J. Graph Theory 9 (1985) 269-277.
- [111] G.J.Minty, *On Maximal Independent Set of Vertices in Claw Free Graphs*, J.Combin Theory Ser. B 28 (1980) 284-304.
- [112] J. Mitchem et E. Schmeichel. *Pancyclic and bypancyclic graphs- A survey*. Graphs and Applications. Wiley-Interscience, New York (1985) 271-287.
- [113] R.Mosca , *Independent sets in certain P_6 -free graphs*, Discrete Applied Mathematics 92(1999) 177-191.
- [114] C. St. J. A. Nash Williams. *Edge disjoint hamiltonian circuits in graphs with vertices of large valency*. Studies in Pure Mathematics (L. Mirsky, Ed.), Academic Press, London (1971) 157-183.

- [115] D. J. Oberly et D. P. Sumner. *Every connected, locally connected nontrivial graph with no induced claw is hamiltonian*. J. Graph Theory 3 (1979) 351-356.
- [116] Y. Oda. *An asymmetric analogue of van der Veen conditions and the travelling salesman problem*. Discrete Applied Math. 109 (2001) 279-292.
- [117] O. Ore. *Hamilton connected graphs*. J. Math. Pures Appl. 42(1963), 21-27.
- [118] F. Pfender *Hamiltonicity and forbidden subgraphs in 4-connected graphs*. J. Graph theory 49 (2005) 262-272.
- [119] M. D. Plummer. *2-extendibility and hamiltonicity in 2 classes of claw free graphs*. Pre-print (1992).
- [120] L. Posà. *A theorem concerning Hamilton lines*. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 7 (1962) 225-226.
- [121] Z. Ryjacek. *Almost claw-free graphs*. J. Graph Theory 18(1994) 469-477.
- [122] Z. Ryjacek. *On a closure concept in claw-free graphs*. J. Combinat. Theory B70 (1997) 217-224.
- [123] N. Sbihi, *Algorithme de Recherche d'un Stable de Cardinalité Maximum Dans un Graphe Sans Etoile*, Discrete Math 29 (1980) 53-76.
- [124] R. Shen et F. Tian. *Neighbourhood unions and hamiltonicity of graphs*. Discrete Math. 141 (1995) 213-225.
- [125] F. B. Shepherd. *Claws*. Thesis, University of Waterloo (1987).
- [126] D.P. Sumner. *Graphs with 1-factors*. Proceeding of the American Mathematical Society(1974) 8-12.
- [127] D.P. Sumner. *1-factors and antifactors sets*. J. London Math. Soc. 213(1976) 351-359.
- [128] M. S. Zeng et Z. K. Ming. *Neighbourhood unions and hamiltonian properties*. Discrete Math. 133 (1994) 319-324.
- [129] C. Thomassen. *Reflections on graph theory*. J Graph Theory 10(1986) 309-324.
- [130] C. Q. Zhang. *Hamilton cycles in claw-free graphs*. J. Graph Theory 12 (1988) 209-216.
- [131] C. Q. Zhang. *Cycles of given length in some claw free graphs*. Discrete Math. 78 (1989) 307-313.