

N° d'ordre :02/2021-D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI
BOUMEDIÈNE
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



THÈSE de Doctorat en Sciences
Présentée pour l'obtention du grade de Docteur
En Mathématiques
Spécialité : Arithmétique, codage et combinatoire :
Théorie des nombres
Par
BOUDERBALA Mihoub

Sur la variation de certaines suites de parties fractionnaires

Soutenue publiquement le 09/03/2021 devant le Jury

Mme. SELMANE Schehrazad	Professeur	à l'USTHB	Présidente
Mme. BENFERHAT Leila	Professeur	à l'USTHB	Directrice de Thèse
Mme. BATOUL Aicha	Maître de conférences A	à l'USTHB	Examinatrice
Mme. BELKREDIM F.Zohra	Professeur	à l'UHBC Chlef	Examinatrice
M. BENOUMHANI Moussa	Professeur	à l'UMB M'Sila	Examinateur
M. HACHAMA Mohamed	Professeur	à l'USD Blida	Examinateur
M. BALAZARD Michel	Chargé de recherches	au CNRS France	Invité

Remerciements

J'exprime toute ma gratitude à ALLAH (DIEU) qui m'a donné la force, le courage et la patience pour accomplir ce travail. Grâce à lui, ce travail a été achevé.

J'exprime mes remerciements les plus distingués à ma Directrice de thèse, Mme **Leila Benferhat**, Professeur à l'Université des sciences et de la technologie Houari Boumédiène, USTHB, pour m'avoir encadré durant les années de ma thèse, avec beaucoup de patience, de générosité et de compétence. Je désire témoigner à Mr **Michel Balazard**, Directeur de recherches, C.N.R.S. Institut de Mathématiques de Marseille, Luminy, France, pour m'avoir fourni le sujet de cette thèse et toute ma gratitude pour le temps et l'intérêt qu'il a consacré à nos nombreuses discussions qui m'ont beaucoup aidé à comprendre les subtilités des objets que je manipulais.

Mes remerciements s'adressent également à Mme **SELMANE Schehrazad**, Professeur à l'USTHB, pour l'honneur qu'elle me fait en ayant accepté de présider le Jury de ma soutenance.

J'adresse tous mes remerciements à Mr **HACHAMA Mohammed**, Professeur à l'Université Saad Dahlab Blida, ainsi qu'à Mr **BENOUMHANI Moussa**, Professeur à l'Université de M'sila, UMB, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'être examinateurs de cette thèse.

J'exprime ma gratitude à Mme **BATOUL Aicha**, Professeur à l'USTHB et à Mme **BEL-KREDIM Fatma Zohra**, Professeur à l'UHBC, Chlef, qui ont bien voulu examiner ma thèse.

J'aimerais également remercier tous mes collègues de la Faculté ST de l'Université de Khemis Miliana pour leurs encouragements.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail fait avec tant de passion et patience :

À la mémoire de mon père,

À ma mère,

À ma femme et à mes enfants,

À mes frères et soeurs,

À tous mes proches et amis et à tous ceux qui auront le courage de lire ce document.

Notations

1. $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels ($\mathbb{N}^*$ désigne les entiers naturels non nuls).
2. Le mot " entier " (sans précision supplémentaire) désigne un entier naturel non nul.
3. $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.
4. $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes.
5. $[x]$ désigne l'unique entier k tel que $k \leq x < k + 1$ (la partie entière de x)
6. $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire du réel x .
7. $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, désigne la première fonction de Bernoulli.
8. $m \mid n$ signifie m divise n , $p^\alpha \parallel n$ signifie $p^\alpha \mid n$ et $p^{\alpha+1} \nmid n$.
9. $\sum_{n \leq x}$ représente une somme étendue à tous les entiers $n \in [1, x]$.
10. $\|x\| = \min\left(\frac{1}{2} + \psi(x), \frac{1}{2} - \psi(x)\right)$ représente la distance d'un nombre réel x à son entier le plus proche.
11. $e(x) = \exp(i2\pi x)$.
12. La fonction zêta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

13. $\omega(n)$, la fonction "nombre de diviseurs premiers distincts de n ", définie par

$$\omega(n) : = \sum_{p \mid n} 1.$$

14. La convolution de deux fonctions arithmétiques :

$$(f \star g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

15. $f = \mathcal{O}(g)$ et $f \ll g$, notations de Landau et Vinogradov¹ pour signifier qu'il existe une constante $C > 0$ et un réel x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$,

$$|f(x)| \leq Cg(x).$$

16. $f = \mathcal{O}_\varepsilon(g)$ et $f \ll_\varepsilon g$, notations de Landau et Vinogradov pour signifier qu'il existe une fonction bornée $C(\varepsilon) > 0$ et un réel x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$,

$$|f(x)| \leq C(\varepsilon)g(x).$$

¹Pour voir la différence entre les deux symboles voir ([15], préface)

17. $f = o(g)$ signifie que $\lim \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.
18. $f(x) \asymp g(x)$ signifie $f \ll g$ et $g \ll f$.
-

Résumé

Le sujet de cette thèse porte sur l'étude de la variation de certaines suites de parties fractionnaires. Dans le premier chapitre, on rappelle les principales définitions et notations nécessaires et certains théorèmes importants sur les fonctions arithmétiques ainsi que l'inégalité de van der Corput et ses propriétés. Ces deux notions sont utiles aux chapitres suivants.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la variation de certaines suites de parties fractionnaires. Nous y présentons des résultats avec des démonstrations détaillées. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans la revue "Communications in Mathematics" [2].

Le troisième chapitre est consacrée à une application du théorème principal du deuxième chapitre. Nous avons étudié une somme liée à la fonction "nombre de diviseurs premiers distincts d'un entier et la fonction partie entière". Ce travail a fait l'objet d'une publication dans la revue "Notes on Number Theory and Discrete Mathematics" [11].

Summary

The subject of this thesis is the study of the variation of certain sequences of fractional parts. In the first chapter, we will recall the main definitions, necessary notations, some important theorems on arithmetic functions as well as the van der Corput inequality and its properties. These two notions are useful in the following chapters.

The second chapter is devoted to the study of the variation of certain sequences of fractional parts. We present results with detailed demonstrations. This work is the subject of a publication in the journal “Communications in Mathematics” [2].

In the third chapter, we present an application of the main theorem of the second chapter. Then, we study a sum involving the number of distinct prime factors function related to the integer part function. This work is the subject of a publication in the journal “Notes on Number Theory and Discrete Mathematics” [11].

Table des matières

Introduction	8
1 Préliminaires	12
1.1 Sur les fonctions arithmétiques	12
1.2 Formule sommatoire	15
1.3 Sommation partielle	16
1.4 Sur une inégalité de van der Corput	18
1.4.1 La fonction ψ (définition et propriétés)	18
1.4.2 Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin	21
1.4.3 Intégrales trigonométriques	24
1.4.4 Une inégalité de van der Corput	27
2 Sur la variation de certaines suites de parties fractionnaires	31
2.1 Décomposition de la somme $W(x; a, b)$	33
2.2 Estimation des sommes W_j	41
2.3 Estimation de la somme $W(x; a, b)$	51
2.4 Démonstration du Théorème B	53
3 Sur une somme liée à la fonction $\omega(n)$ et la fonction partie entière	56
3.1 Sur la fonction $\omega(n)$	56
3.2 Résultat obtenu	57
Bibliographie	61

Introduction

En théorie analytique des nombres, comme dans toute autre branche des mathématiques, les avancées proviennent essentiellement de résolutions de problèmes posés précédemment, parfois même plusieurs siècles auparavant, par des mathématiciens ayant une intuition géniale et/ou une grande expérience due à leurs recherches. La comparaison asymptotique est une méthode qui consiste en l'étude du comportement d'une fonction au voisinage d'un point (ou à l'infini), en regard du comportement d'une autre fonction réputée « simple » et « connue », souvent choisie sur une échelle de référence. Cette échelle comprend en général les fonctions constructibles par somme, produit, élévation à une puissance réelle, différentiation et intégration de monômes, d'exponentielles et de logarithmes. Cette méthode est également utilisée en théorie analytique des nombres pour évaluer finement l'erreur commise lors de la détermination de l'ordre moyen d'une fonction arithmétique, un exemple célèbre étant le théorème des nombres premiers². Même si les comparaisons asymptotiques sont très souvent mal connues, et possèdent un comportement qui semble irrégulier et sans cohérence, elles sont restées un sujet de prédilection durant le 20^{ème} siècle. Les techniques de la branche de la théorie analytique des nombres se sont rapidement complexifiées, ce qui a fait apparaître le problème de rendre complètement explicites des résultats devenus tous a priori asymptotiques. Dans ce cadre, on évoque un ancien problème du mathématicien Aurel Wintner³, dans un article de 1946,

²Pour un réel x , le nombre $\pi(x)$ de nombres premiers inférieurs ou égaux à x est équivalent, lorsque x tend vers $+\infty$, au quotient de x par son logarithme népérien. Soit

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

³Aurel Friedrich Wintner (8 avril 1903, Hongrie-5 janvier 1958 États-Unis) était un mathématicien reconnu pour ses recherches en analyse mathématique, théorie des nombres, équations différentielles et théorie des probabilités. Il était l'un des fondateurs de la théorie probabiliste des nombres.

Square root estimates of arithmetical sum functions (cf. [24]), où il considéra la fonction

$$W(x) = \sum_{n \geq 1} \left| \left\{ \frac{x}{n+1} \right\} - \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right| \quad (x > 0),$$

en raison de son importance primordiale dans le domaine de la comparaison asymptotique, comme on le voit dans l'exemple suivant :

Si f une fonction arithmétique⁴ à valeurs réelles ou complexes dont la fonction sommatoire

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n) \quad (x > 0)$$

est bornée. La série

$$C = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n} = \sum_{k \geq 1} \frac{F(k)}{k(k+1)} = \int_0^\infty F(t) \frac{dt}{t^2}$$

est convergente.

On pose $g = f \star \mathbf{1}$, où $\star$ est le produit de convolution⁵, on a

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

En posant

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n \leq x} g(n) \\ &= \sum_{n \geq 1} f(n) \lfloor x/n \rfloor \\ &= Cx - \sum_{n \geq 1} F(n) (\{x/(n+1)\} - \{x/n\}), \end{aligned}$$

on en déduit l'estimation

$$|G(x) - Cx| \leq \|F\|_\infty W(x) \quad (x > 0),$$

où $\|F\|_\infty$ désigne la borne supérieure des modules des sommes $F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$.

Dans [24], Wintner démontra que

$$W(x) \asymp x^{\frac{1}{2}} \quad (x \geq 1).$$

⁴Une fonction arithmétique f est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$.

⁵Voir la définition 1.4, page 14

Il en résulte que $G(x) = Cx + \mathcal{O}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$. De plus, ce résultat est optimal au sens où, quelle que soit la fonction positive $\phi(x)$, définie pour $x > 0$ et telle que

$$\phi(x) = o(x^{\frac{1}{2}}) \quad (x \longrightarrow +\infty),$$

il existe une fonction arithmétique f , dont la fonction sommatoire est bornée, et pour laquelle la relation

$$G(x) = Cx + \mathcal{O}(\phi(x))$$

est fausse. Ce dernier fait découle de la minoration $W(x) \gg x^{\frac{1}{2}}$ et du principe de condensation des singularités (Théorème de Banach et Steinhaus⁶, [4]).

En outre, Wintner a remarqué que ces résultats se déduisent uniquement de la relation $W(x) \asymp x^{\frac{1}{2}}$, et non de l'existence de la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1/2}W(x)$, problème qui a été traité dans [3] par Michel Balazard, où il a démontré que pour tout $x > 0$,

$$W(x) = \frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \sqrt{x} + \mathcal{O}(x^{2/5}).$$

Le but principal de cette thèse est l'étude de la variation de certaines suites de parties fractionnaires qui a fait l'objet de l'article [2], et plus précisément les suites de la forme

$$W(x; a, b) = \sum_{n \geq 0} \left| \left\{ \frac{x}{n+a} \right\} - \left\{ \frac{x}{n+b} \right\} \right|, \quad \text{où } 0 < a < b.$$

Nous avons démontré le résultat suivant

$$W(x; a, b) = \frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \sqrt{cx} + \mathcal{O}(c^{2/9} x^{4/9}),$$

tel que

$$x \geq 40c^{-5} (1+b)^{27/2} \quad \text{et } c = b - a.$$

Cette thèse est composée de trois chapitres.

Le premier chapitre est constitué de deux parties. Dans la première partie, nous rappelons les principales définitions et notations nécessaires et certains théorèmes importants sur les fonctions arithmétiques. Dans la deuxième partie, nous présentons d'abord un résultat de Kusmin, Landau, lié aux sommes exponentielles, puis nous fournissons des versions plus pratiques que nous pourrions utiliser par la suite. Nous donnons aussi une inégalité très

⁶La formulation originelle du **théorème de Banach-Steinhaus** est la suivante

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Pour qu'une famille d'applications linéaires continues de E dans F soit uniformément bornée sur la boule unité de E , il suffit qu'elle soit simplement bornée sur une partie non maigre de E .

utile de van der Corput, qui peut être considérée comme le point de départ de théorèmes cruciaux fournissant des estimations pour des sommes exponentielles.

Le deuxième chapitre est consacré aux résultats obtenus dans l'article [2], où nous mettons en évidence les étapes principales ainsi que les calculs effectués pour étudier la fonction

$$W(x; a, b) = \sum_{n \geq 0} \left| \left\{ \frac{x}{n+a} \right\} - \left\{ \frac{x}{n+b} \right\} \right| \quad (0 < a < b).$$

Nous commençons par la décomposition de la somme $W(x; a, b)$ en somme partielles W_j , ensuite nous estimons les contributions à W des sommes W_j afin de donner une estimation de la somme $W(x; a, b)$, en adoptant la méthode de van der Corput.

Cette fonction est une généralisation de la fonction $W(x; 1, 2)$ et elle joue un rôle auxiliaire dans l'article [24] de Wintner. Il y démontra l'ordre de grandeur $W(x; 1, 2) \asymp \sqrt{x}$ (pour $x \geq 1$), et en déduisit l'optimalité de l'estimation $\mathcal{O}(\sqrt{x})$ pour le terme d'erreur de formules asymptotiques pour certaines moyennes arithmétiques. L'estimation de Wintner [24] a été précisée par M. Balazard dans [3] : on a

$$W(x; 1, 2) = \frac{2}{3} \zeta(3/2) \sqrt{x} + \mathcal{O}(x^{2/5}) \quad (x > 0),$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann (cf. [3]).

Le troisième chapitre est une application du théorème B déjà cité et démontré au chapitre 2. Nous y montrons le résultat suivant :

$$\sum_{n \leq x} \omega\left(\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor\right) = Cx + \mathcal{O}(x^{1/2} \log x),$$

avec

$$C \approx 0,5918 \dots \text{ et } x \geq 1.$$

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est composé de deux parties, la première partie contient les définitions principales, des notations et quelques théorèmes fondamentaux sur les fonctions arithmétiques. Dans la deuxième partie, nous rappelons des résultats dus à van der Corput qui fournissent des estimations pour des sommes exponentielles. Toutes ces notions seront utiles dans les chapitres suivants. Les références utilisées sont les suivantes : [1], [5], [6], [16], [20], [21], [22], [23].

1.1 Sur les fonctions arithmétiques

Il y a deux types de fonctions arithmétiques, les fonctions arithmétiques additives et les fonctions arithmétiques multiplicatives. Dans cette partie, on donne quelques propriétés de ces fonctions et on introduit les outils nécessaires pour les chapitres qui suivent.

Définition 1.1 *Une fonction arithmétique est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. On désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques.*

Exemple 1.1 *Nous énumérons les principales fonctions arithmétiques que le lecteur peut rencontrer dans ses études en théorie analytique des nombres.*

1. La fonction indicatrice δ définie par $\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ 0, & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$
2. La fonction constante $\mathbf{1}$ définie par $\mathbf{1}(n) = 1$.
3. La fonction ω définie par $\omega(1) = 0$, et pour tout $n \geq 2$, $\omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers distincts de n .
4. La fonction Ω définie par $\Omega(1) = 0$ et pour tout $n \geq 2$, par

$$\Omega(n) = \sum_{p^\alpha \parallel n} \alpha.$$

5. La fonction de Möbius μ définie par $\mu(1) = 1$, et pour tout $n \geq 2$,

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est divisible par un carré parfait} \\ (-1)^{\omega(n)}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. La fonction de Liouville λ définie par $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$.

7. La fonction des diviseurs de Piltz d_k définie par $d_1 = 1$, et pour tout $n \geq 1$,

$$d_2(n) = d(n) = \sum_{d|n} 1 \text{ et } d_k(n) = \sum_{d|n} d_{k-1}(d), \quad (k \geq 2).$$

Définition 1.2 On dit qu'une fonction arithmétique f est multiplicative si $f(1) = 1$ et $f(nm) = f(n)f(m)$ lorsque $(n, m) = 1$. On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions multiplicatives.

Une fonction arithmétique f est dite complètement multiplicative si $f(1) = 1$ et $f(nm) = f(n)f(m)$ pour tous entiers n et m .

Une fonction arithmétique f est dite fortement multiplicative si f est multiplicative et si $f(p^k) = f(p)$, quels que soient p premier et k entier > 1 .

Exemple 1.2 Les fonctions d , λ et μ sont multiplicatives.

Remarque 1.1 Si f est une fonction multiplicative, alors pour tout entier $n = \prod_{p^\alpha || n} p^\alpha$, on a

$$f(n) = \prod_{p^\alpha || n} f(p^\alpha).$$

Proposition 1.1 Si f et g sont deux fonctions arithmétiques multiplicatives, alors il en est de même pour les fonctions fg et $\frac{f}{g}$, ($g \neq 0$).

Définition 1.3 Une fonction arithmétique f est dite additive si, pour tous entiers positifs m et n tel que $(m, n) = 1$, on a

$$f(mn) = f(m) + f(n).$$

La fonction f est complètement (strictement) additive si la condition $f(mn) = f(m) + f(n)$ est vérifiée pour tous les entiers positifs m et n .

La fonction f est dite fortement additive si f est additive et si $f(p^k) = f(p)$, quels que soient p premier et k entier > 1 .

Exemple 1.3 les fonctions ω et Ω sont additives, la première est fortement additive, la seconde est complètement additive.

Définition 1.4 Soient f et g deux fonctions arithmétiques. Le produit de convolution de f et g est la fonction $f * g$ définie par

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Remarque 1.2 Toute fonction arithmétique f vérifie l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (f * \delta)(n) = f(n),$$

où δ est la fonction indicatrice.

Proposition 1.2 Soient f , g et h trois fonctions arithmétiques. Les propriétés suivantes sont vraies

$$1) \quad f * g = g * f, \quad 2) \quad (f * g) * h = f * (g * h), \quad 3) \quad f * (g + h) = (f * g) + (f * h).$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour la première assertion, on a

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right)g(d) = \sum_{d|n} g(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = (g * f)(n).$$

Pour l'assertion 2), on a par définition

$$((f * g) * h)(n) = \sum_{d|n} (f * g)(d)h\left(\frac{n}{d}\right),$$

et comme

$$\sum_{d|n} (f * g)(d)h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{dm=n} (f * g)(d)h(m) \text{ et } (f * g)(d) = \sum_{kl=d} f(k)g(l),$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(n) &= \sum_{dm=n} \sum_{kl=d} f(k)g(l)h(m) \\ &= \sum_{klm=n} f(k)g(l)h(m) \\ &= \sum_{k|n} f(k) \sum_{l|\frac{n}{k}} g(l)h\left(\frac{n}{kl}\right) \\ &= \sum_{k|n} f(k)(g * h)\left(\frac{n}{k}\right) \\ &= (f * (g * h))(n). \end{aligned}$$

De même, on montre la distributivité par rapport à l'addition. En effet, on a

$$(f * (g + h))(n) = \sum_{d|n} f(d) \left(g\left(\frac{n}{d}\right) + h\left(\frac{n}{d}\right) \right)$$

et comme la somme est finie on a

$$\begin{aligned} (f * (g + h))(n) &= \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) + \sum_{d|n} f(d) h\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= (f * g)(n) + (f * h)(n). \end{aligned}$$

—

1.2 Formule sommatoire

Définition 1.5 Soit f une fonction arithmétique, et soit $x \geq 1$. La fonction $F(x)$ définie par $F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$ est dite fonction sommatoire de f .

Exemples

1. **La fonction $\pi(x)$** : Pour tout $x \geq 0$, on désigne par $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \text{card}\{p, \text{ tel que } p \text{ premier et } p \leq x\} \\ &= \sum_{p \leq x} 1 \end{aligned}$$

avec $\pi(x) = 0$ pour $0 \leq x < 2$.

2. **La fonction $[x]$** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction partie entière de x par

$$[x] = \sum_{n \leq x} 1, \text{ tel que } n \text{ entier et } n \leq x.$$

Proposition 1.3 ([6]) Soient $x \geq 1$ un nombre réel et f, g deux fonctions arithmétiques. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} (f * g)(n) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d \leq x} f(d) \sum_{\substack{n \leq x \\ d|n}} g\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d \leq x} f(d) \sum_{q \leq \frac{x}{d}} g(q). \end{aligned}$$

Remarque 1.3 Soit f une fonction arithmétique et soit $x \geq y$, on pose $f = g * \mathbf{1}$, alors par la proposition précédente on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{x < n \leq x+y} f(n) &= \sum_{d \leq x+y} g(d) \sum_{\frac{x}{d} < q \leq \frac{x+y}{d}} 1 \\
 &= \sum_{d \leq x+y} g(d) \left(\left\lfloor \frac{x+y}{d} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \right) \\
 &= \left(\sum_{d \leq y} + \sum_{y < d \leq x+y} \right) g(d) \left(\left\lfloor \frac{x+y}{d} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \right) \\
 &= \sum_1 + \sum_2.
 \end{aligned}$$

Dans [7] et [8], O. Bordellès a montré que si f est une fonction arithmétique multiplicative vérifiant :

$$\begin{cases} 0 \leq f(n) \leq 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \\ \text{et} \\ f(p) = 1, \text{ pour tout nombre premier } p, \end{cases}$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$ et $x, y \geq 2$ deux nombres réels tel que $x^{6\varepsilon} \leq y \leq x$, on a

$$\begin{aligned}
 \sum_1 &= y\mathcal{P}(f) + \mathcal{O}\left(y^{\frac{1}{2}}\right) \\
 \text{et} \\
 \sum_2 &= \mathcal{O}\left(x^{\frac{1}{6}+\varepsilon} + y^{\frac{1}{2}}\right),
 \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{P}(f) := \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{f(p^\ell)}{p^\ell}\right).$$

1.3 Sommation partielle

Théorème 1.1 Soit $x \geq 0$ un nombre réel quelconque, $a \in \mathbb{N}$ et soient $f : [a, x] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g \in C^1[a, x]$. On a

$$\sum_{a \leq n \leq x} f(n)g(n) = g(x) \sum_{a \leq n \leq x} f(n) - \int_a^x g'(t) \left(\sum_{a \leq n \leq t} f(n) \right) dt. \quad (1.1)$$

Preuve. Pour tout entier $n \in [a, x]$, et tout nombre réel $t \in [a, x]$, on pose

$$\mathbf{1}_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \leq t \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous obtenons

$$\int_a^x \mathbf{1}_n(t) g'(t) dt = \int_n^x g'(t) dt = g(x) - g(n),$$

et donc en multipliant par $f(n)$ on trouve

$$f(n)g(n) = f(n)g(x) - \int_a^x \mathbf{1}_n(t) f(n) g'(t) dt.$$

En additionnant pour $n \in \{a, \dots, \lfloor x \rfloor\}$, on obtient

$$\sum_{a \leq n \leq x} f(n)g(n) = g(x) \sum_{a \leq n \leq x} f(n) - \int_a^x g'(t) \left(\sum_{a \leq n \leq x} \mathbf{1}_n(t) f(n) \right) dt.$$

On remarque facilement que

$$\sum_{a \leq n \leq x} \mathbf{1}_n(t) f(n) = \sum_{a \leq n \leq t} f(n).$$

Théorème 1.2 Pour $x \geq 1$ on a

$$\sum_{0 < n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + \mathcal{O}(x^{-1}),$$

où

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt = 0.577 \dots$$

Preuve. On applique la formule (1.1) avec $f(n) = 1$ et $g(t) = 1/t$.

On a alors $\sum_{n \leq t} f(n) = \sum_{n \leq t} 1 = \lfloor t \rfloor$ et on écrit

$$\begin{aligned} \sum_{0 < n \leq x} \frac{1}{n} &= \sum_{n \leq x} f(n) g(n) \\ &= \sum_{n \leq x} f(n) g(x) - \int_1^x \left(\sum_{n \leq t} f(n) \right) f'(t) dt, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= \frac{\lfloor x \rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt \\ &= 1 - \frac{\{x\}}{x} + \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2} dt \\ &= \ln x + \gamma + \int_x^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt, \end{aligned}$$

et l'inégalité $0 < \{t\} < 1$ donne

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt < \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}.$$

D'où

$$\sum_{0 < n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + \mathcal{O}(x^{-1}).$$

Exemple 1.4 Puisque $d = \mathbf{1} * \mathbf{1}$, en utilisant la proposition 1.3 et le fait que $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$, nous obtenons

$$\sum_{n \leq x} d(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} 1 = \sum_{n \leq x} \sum_{dq=n} 1 = \sum_{dq \leq x} 1,$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} d(n) &= \sum_{1 \leq d \leq \sqrt{x}} \sum_{q \leq \frac{x}{d}} 1 + \sum_{1 \leq q \leq \sqrt{x}} \sum_{d \leq \frac{x}{q}} 1 - \sum_{q \leq \sqrt{x}} 1 \sum_{d \leq \sqrt{x}} 1 \\ &= \sum_{1 \leq d \leq \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \sum_{1 \leq q \leq \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{q} \right\rfloor - \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 \\ &= 2 \sum_{1 \leq d \leq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{d} - \left\{ \frac{x}{d} \right\} \right) - (\sqrt{x} - \{\sqrt{x}\})^2 \\ &= 2x \sum_{1 \leq d \leq \sqrt{x}} \frac{1}{d} - 2 \sum_{1 \leq d \leq \sqrt{x}} \left\{ \frac{x}{d} \right\} - x + \mathcal{O}(\sqrt{x}), \end{aligned}$$

et par le théorème 1.2, on a $\sum_{1 \leq d \leq \sqrt{x}} \frac{1}{d} = \ln \sqrt{x} + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, alors

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \ln x + (2\gamma - 1)x - 2 \sum_{1 \leq d \leq \sqrt{x}} \left(\left\{ \frac{x}{d} \right\} - \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}(\sqrt{x}).$$

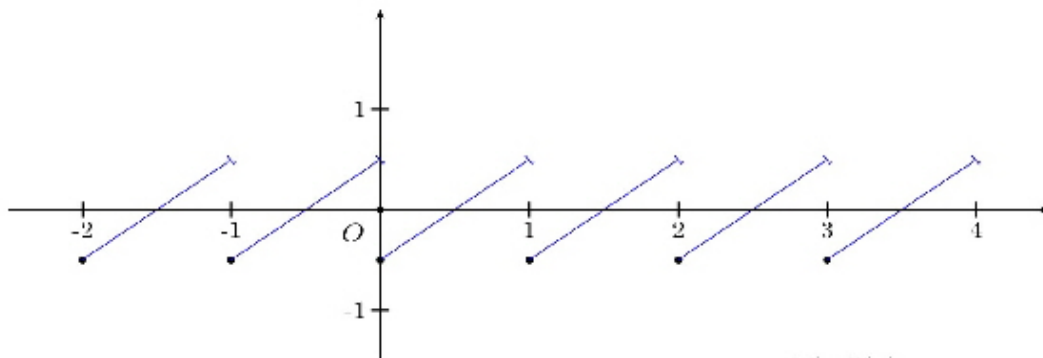
1.4 Sur une inégalité de van der Corput

1.4.1 La fonction ψ (définition et propriétés)

Définition 1.6 (La fonction "sawtooth") Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\psi(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} = \{x\} - \frac{1}{2},$$

où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel x , et $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.



Théorème 1.3 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

1. La fonction ψ est périodique de période égale à 1.
2. Pour deux réels x et y , on a

$$\psi(x + y) - y \leq \psi(x) \leq \psi(x - y) + y \text{ si } y \geq 0. \quad (1.2)$$

3. Le développement en série de Fourier de la fonction ψ est donné par

$$\psi(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n} \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (1.3)$$

La série converge uniformément dans tout intervalle fermé ne contenant aucun entier.

Preuve. 1. On note que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique nombre entier n vérifiant $n \leq x < n + 1$ ($n = \lfloor x \rfloor$) et l'on a $\{x\} = x - n = g(x)$. La fonction g est périodique de période 1 car

$$g(x + k) = x + k - \lfloor x + k \rfloor = x + k - \lfloor x \rfloor - k = g(x) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ceci implique que, $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\psi(x + k) = g(x + k) - \frac{1}{2} = g(x) - \frac{1}{2} = \psi(x).$$

Donc la plus petite valeur positive T qui vérifie $\psi(x+T) = \psi(x)$ est $T = 1$ qui représente la période de ψ .

2. La fonction ψ est périodique de période 1, on a alors

$$\psi(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(2n\pi x) + b_n \sin(2n\pi x)\},$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 \psi(x) dx = 0 \\ a_n &= 2 \int_0^1 \psi(x) \cos(2n\pi x) dx = 2 \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \cos(2n\pi x) dx = 0 \\ b_n &= 2 \int_0^1 \psi(x) \sin(2n\pi x) dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \sin(2n\pi x) dx = -\frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

Donc

$$\psi(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n}$$

est convergente sur tout $\mathbb{R}$, nulle pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et uniformément convergente dans tout intervalle $[a, b]$ ($a < b$) tel que $[a, b] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$-\lfloor x \rfloor \leq -\lfloor x - y \rfloor \quad \text{et} \quad -\lfloor x + y \rfloor \leq -\lfloor x \rfloor \quad \text{si } y \text{ est un réel positif.}$$

D'où

$$\psi(x) \leq \psi(x - y) + y \quad \text{et} \quad \psi(x + y) - y \leq \psi(x) \quad \text{si } y \geq 0.$$

La fonction $\psi(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$ apparaît dans la plupart des problèmes de la théorie analytique des nombres. La raison est très simple : lorsque nous étudions les ordres moyens des fonctions arithmétiques classiques, les sommations sont souvent prises sur des sous-ensembles de l'ensemble des diviseurs d'un entier n , et lors de l'échange de l'ordre des sommations, des parties entières et la fonction ψ apparaissent. Par conséquent, cette fonction a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs en mathématiques. Par exemple, à partir de 1922, van der Corput [21] apporta une contribution importante à la théorie

des sommes d'exponentielles, il a pu étudier les sommes de type $\sum_{a < n \leq b} \psi(f(n))$, lorsque la fonction f vérifie la condition suivante :

$$(C') \left\{ \begin{array}{l} f(u) \text{ est réelle et deux fois dérivable dans l'intervalle } a \leq u \leq b, \ (a+1 \leq b), \\ \text{la dérivée seconde étant monotone, toujours positive ou toujours négative.} \end{array} \right.$$

L'un des résultats les plus importants de van der Corput [21], est l'estimation suivante

$$\sum_{a < n \leq b} \psi(f(n)) \ll \int_a^b |f''(t)|^{1/3} dt + \frac{1}{\sqrt{|f''(a)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(b)|}}.$$

1.4.2 Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

Théorème 1.4 *Pour deux nombres réels a et b , tels que $0 \leq a < b$ et toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([a, b] \rightarrow \mathbb{C})$, on a*

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(t) dt - \psi(b)f(b) + \psi(a)f(a) + \int_a^b \psi(t)f'(t) dt. \quad (1.4)$$

Preuve. On pose $m = \lfloor a \rfloor$, $k = \lfloor b \rfloor$. Pour deux entiers n et $n-1$ de l'intervalle $[a, b]$, on a

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^n \lfloor t \rfloor f'(t) dt &= (n-1) \int_{n-1}^n f'(t) dt = (n-1)(f(n) - f(n-1)) \\ \int_{n-1}^n \lfloor t \rfloor f'(t) dt &= [nf(n) - (n-1)f(n-1)] - f(n). \end{aligned}$$

En sommant sur les entiers n de $m+1$ jusqu'à k , on obtient

$$\begin{aligned} \int_m^k \lfloor t \rfloor f'(t) dt &= \sum_{m+1}^k [nf(n) - (n-1)f(n-1)] - \sum_{a < n \leq b} f(n) \\ &= kf(k) - mf(m) - \sum_{a < n \leq b} f(n). \end{aligned}$$

De la dernière égalité vient

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} f(n) &= kf(k) - mf(m) - \int_m^k \lfloor t \rfloor f'(t) dt \\ &= kf(b) - mf(a) - \int_a^b \lfloor t \rfloor f'(t) dt. \end{aligned}$$

Par intégration par parties, nous obtenons

$$\int_a^b f(t) dt = bf(b) - af(a) - \int_a^b tf'(t) dt.$$

Il en résulte

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + (b - k)f(b) - (a - m)f(a) - \int_a^b (t - [t])f'(t)dt,$$

d'où la formule annoncée.

Proposition 1.4 (Kusmin-Landau) *Soit*

- *Un intervalle I de $\mathbb{R}$*
- *Une fonction réelle f , définie et continûment dérivable sur I , sa dérivée f' étant monotone et vérifiant $0 < \lambda \leq |f'(t)| < 1/2$, où λ est un réel fixé.*

Alors,

$$\sum_{n \in I} e(f(n)) \ll \lambda^{-1}. \quad (1.5)$$

Preuve. Puisque

$$\left| \sum_{n \in I} e(f(n)) \right| = \left| \sum_{n \in I} e(-f(n)) \right|,$$

on peut supposer que f' est une fonction strictement croissante. Les hypothèses impliquent qu'il existe des nombres entiers k tels que

$$k + \lambda < f'(n) \leq k + 1 - \lambda.$$

On a

$$\sum_{n \in I} e(f(n)) = \sum_{n \in I} e(f(n) - kn),$$

alors, on peut supposer que

$$\lambda < f'(n) \leq 1 - \lambda.$$

On définit une fonction $g(n)$, où

$$g(n) = f(n + 1) - f(n).$$

D'après le théorème de la valeur moyenne¹, il existe un réel x_n , vérifiant

$$n \leq x_n < n + 1 \text{ et } g(n) = f'(x_n).$$

Par conséquent g est une fonction croissante et $\lambda < g(n) \leq 1 - \lambda$. Notons que

$$e(f(n)) = \frac{e(f(n)) - e(f(n + 1))}{1 - e(g(n))} = [e(f(n)) - e(f(n + 1))] C_n,$$

¹Pour toute fonction f à valeurs réelles, définie et continue sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$, il existe un réel c compris entre a et b (a et b étant exclus) vérifiant : $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$.

où

$$C_n = \frac{1}{2} (1 + i \cot(\pi g(n))) .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in I} e(f(n)) &= \sum_{n=a+1}^{b-1} [e(f(n)) - e(f(n+1))] C_n + e(f(b)) \\ &= \sum_{n=a+2}^{b-1} e(f(n)) (C_n - C_{n-1}) + e(f(a+1)) C_{a+1} + e(f(b)) (1 - C_{b-1}) . \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\left| \sum_{n \in I} e(f(n)) \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=a+2}^{b-1} |\cot \pi g(n-1) - \cot \pi g(n)| + |C_{a+1}| + |1 - C_{b-1}| .$$

Puisque $\cot(\pi g(n))$ est une fonction décroissante, en négligeant les valeurs absolues apparaissant dans la somme de droite de la dernière inégalité, la somme restante est télescopique, donc

$$\left| \sum_{n \in I} e(f(n)) \right| \leq \frac{1}{2} (\cot \pi g(a+1) - \cot \pi g(b-1)) + |C_{a+1}| + |1 - C_{b-1}| .$$

En utilisant le fait que $|\cot \pi x| \ll \|x\|^{-1}$, nous terminons la preuve du théorème.

Pour majorer une somme du type

$$\sum_{n \in I} \psi(f(n)) ,$$

il est utile d'avoir une majoration de ψ par une somme finie, au lieu de la série infinie (1.3). La proposition suivante fournit une telle majoration.

Proposition 1.5 *Soit $J \geq 1$. Il existe des coefficients γ_j , $1 \leq |j| \leq J$, tels que*

$$\psi(t) \leq \frac{1}{J} + \sum_{1 \leq |j| \leq J} \gamma_j e^{2\pi i j t} , \tag{1.6}$$

avec $\gamma_j \ll \left| \frac{1}{j} \right|$.

Cette proposition se déduit d'un théorème de Vaaler, dont on peut trouver la démonstration dans [20].

1.4.3 Intégrales trigonométriques

Lemme 1.1 *Soit f une fonction réelle définie et continûment dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, sa dérivée f' étant monotone et vérifiant $|f'(t)| \leq \vartheta < 1$, où ϑ est un réel fixé. Alors,*

$$\sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(t)} dt + \mathcal{O}_\vartheta(1). \quad (1.7)$$

Preuve. Si $b - a \leq 1$, le résultat est trivial.

On suppose que $b - a > 1$. Alors, d'après la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin, on obtient

$$\sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(t)} dt + 2\pi i \int_a^b \psi(t) f'(t) e^{2\pi i f(t)} dt + \mathcal{O}(1). \quad (1.8)$$

Dans le deuxième membre de (1.8), en utilisant la formule (1.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} 2\pi i \int_a^b \psi(t) f'(t) e^{2\pi i f(t)} dt &= -2i \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} \int_a^b f'(t) \sin(2\pi vt) e^{2\pi i f(t)} dt \\ &= \sum_{\substack{-\infty \\ v \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{v} \int_a^b f'(t) e^{2\pi i (f(t) - vt)} dt. \end{aligned}$$

Puisque la fonction $\frac{f'(t)}{f'(t) - v}$ est monotone, on peut utiliser la deuxième formule de la moyenne² pour les parties réelle et imaginaire dans la dernière intégrale et on trouve

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t) - v} (f'(t) - v) e^{2\pi i (f(t) - vt)} dt \ll_\vartheta \left| \frac{f'(a)}{f'(a) - v} \right| + \left| \frac{f'(b)}{f'(b) - v} \right| \ll_\vartheta \frac{2\vartheta / (1 - \vartheta)}{v}.$$

Ainsi,

$$2\pi i \int_a^b \psi(t) f'(t) e^{2\pi i f(t)} dt \ll_\vartheta \sum_{v=1}^{v=\infty} \frac{1}{v^2} \ll_\vartheta 1,$$

et l'insertion du dernier résultat dans (1.8) termine la démonstration de l'inégalité du lemme 1.1.

Lemme 1.2 *Soit f une fonction réelle définie et deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, telle que $|f''(t)| \geq \lambda_2 > 0$. Alors,*

$$\int_a^b e^{2\pi i f(t)} dt \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}. \quad (1.9)$$

²Soient f, g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec f positive et décroissante. Alors :

$\exists c \in [a, b], \int_a^b f(t)g(t)dt = f(a) \int_a^c g(t)dt.$

Preuve. Si $b - a \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$, le résultat est trivial. Nous supposons donc que $b - a > \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$. Supposons que $f''(t) \geq \lambda_2 > 0$, alors f' est strictement croissante. Par conséquent, on peut diviser l'intervalle $[a, b]$ en un ou deux intervalles, sur lesquels la fonction f' est de signe constant. Supposons d'abord que pour tout $t \in]a, b[$, $f'(t) > 0$.

Ainsi,

$$\int_a^{a+1/\sqrt{\lambda_2}} e^{2\pi i f(t)} dt \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \quad (1.10)$$

et d'après la deuxième formule de la moyenne

$$\int_{a+1/\sqrt{\lambda_2}}^b e^{2\pi i f(t)} dt \ll \frac{1}{f'(a+1/\sqrt{\lambda_2})}.$$

Il existe un réel c où $a < c < a + 1/\sqrt{\lambda_2}$, tel que

$$\frac{f'(a+1/\sqrt{\lambda_2}) - f'(a)}{a+1/\sqrt{\lambda_2} - a} = f''(c) \geq \lambda_2,$$

par conséquent

$$f'(a+1/\sqrt{\lambda_2}) \geq f'(a) + \sqrt{\lambda_2} \geq \sqrt{\lambda_2},$$

d'où

$$\int_{a+1/\sqrt{\lambda_2}}^b e^{2\pi i f(t)} dt \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}. \quad (1.11)$$

La conjonction de (1.10) et (1.11) fournit (1.9).

La démonstration dans le cas où $f'(t) < 0$ est similaire. Si $f'(t)$ change de signe en $c \in [a, b]$, on applique la majoration qui vient d'être démontrée à chacun des intervalles $]a, c[$ et $]c, b[$. Enfin si $f''(t) \leq -\lambda_2 < 0$, on applique le résultat précédent à $-f$.

Lemme 1.3 Soit f une fonction réelle définie et deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$, telle que $|f''(t)| \geq \lambda_2 > 0$. Alors,

$$\sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \ll \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{\lambda_2}}. \quad (1.12)$$

Preuve. Si $\lambda_2 \geq 1$, le résultat est trivial, puisque

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} &\ll (b-a) \sqrt{\lambda_2} \\ &\ll \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \int_a^b |f''(t)| dt \\ &= \frac{|f'(b) - f'(a)|}{\sqrt{\lambda_2}}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\lambda_2 < 1$ et $f''(t) \geq \lambda_2 > 0$. Soit $[\alpha, \beta]$ un sous-intervalle de $[a, b]$, tel que, pour $t \in [\alpha, \beta]$, on ait $h - 1/2 \leq f'(t) \leq h + 1/2$, où h est un entier. Alors d'après (1.7) et (1.9), on en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha < n \leq \beta} e^{2\pi i f(n)} &= \sum_{\alpha < n \leq \beta} e^{2\pi i (f(n) - hn)} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} e^{2\pi i (f(t) - ht)} dt + \mathcal{O}(1) \\ &\ll \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}. \end{aligned}$$

La division de l'intervalle $[a, b]$ en au plus $|f'(b) - f'(a)| + 1$ intervalles, où $f'(t) - 1/2$ varie entre deux entiers consécutifs, nous donne

$$\sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \ll \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{\lambda_2}}.$$

Lemme 1.4 *Soit f une fonction réelle définie et deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$, telle que $|f''(t)| \geq \lambda_2 > 0$. Alors*

$$\sum_{a < n \leq b} \psi(f(n)) \ll \frac{|f'(b) - f'(a)|}{\lambda_2^{2/3}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}. \quad (1.13)$$

Preuve. Par la formule (1.12), on a

$$\sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i j f(n)} \ll |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{j}{\lambda_2}} + \frac{1}{\sqrt{j\lambda_2}} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

En utilisant une formule trigonométrique de Vaaler (Proposition 1.5) i.e

$$\psi(t) \leq \frac{1}{J} + \sum_{1 \leq |j| \leq J} \gamma(j) e^{2\pi i j t} \text{ où } J \geq 1, \gamma(j) \ll |j|^{-1},$$

nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} \psi(f(n)) &\ll \frac{b-a}{J} + \sum_{1 \leq j \leq J} j^{-1} \left| \sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i j f(n)} \right| \\ &\ll \frac{b-a}{J} + \sum_{1 \leq j \leq J} j^{-1} \left(|f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{j}{\lambda_2}} + \frac{1}{\sqrt{j\lambda_2}} \right) \\ &\ll \frac{b-a}{J} + |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{J}{\lambda_2}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$|f'(b) - f'(a)| = \int_a^b |f''(t)| dt \geq (b-a) \lambda_2.$$

Ainsi,

$$\sum_{a < n \leq b} \psi(f(n)) \ll |f'(b) - f'(a)| \left(\frac{1}{J\lambda_2} + \sqrt{\frac{J}{\lambda_2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}.$$

Pour finir la démonstration, il suffit de choisir $J = \lambda_2^{-1/3}$.

1.4.4 Une inégalité de van der Corput

Théorème 1.5 *Soit f une fonction réelle définie et deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$. On suppose f'' monotone et de signe constant sur $]a, b]$. Alors*

$$\sum_{a < n \leq b} \psi(f(n)) \ll \int_a^b |f''(t)|^{1/3} dt + \frac{1}{\sqrt{|f''(a)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(b)|}},$$

où

$$\psi(x) = \{x\} - 1/2.$$

Preuve. Supposons que $|f''|$ est une fonction croissante. On divise l'intervalle $]a, b]$ en sous-intervalles $]t_v, t_{v+1}]$ ($v = 0, 1, \dots, N-1$) et $]t_N, b]$, tels que, $t_0 = a$, et

$$2^v |f''(a)| \leq |f''(t)| \leq 2^{v+1} |f''(a)| \leq |f''(b)|.$$

Si $t_v < t \leq t_{v+1}$, et

$$N = \left\lfloor \frac{\log |f''(b)| - \log |f''(a)|}{\log 2} \right\rfloor,$$

on a d'après (1.13),

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} \psi(f(n)) &= \sum_{v=0}^{N-1} \sum_{t_v < n \leq t_{v+1}} \psi(f(n)) + \sum_{t_N < n \leq b} \psi(f(n)) \\ &\ll \sum_{v=0}^{N-1} \frac{|f'(t_{v+1}) - f'(t_v)|}{(2^v |f''(a)|)^{2/3}} + \frac{|f'(b) - f'(t_N)|}{(2^N |f''(a)|)^{2/3}} + \sum_{v=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2^v |f''(a)|}} \\ &\ll \sum_{v=0}^{N-1} (2^v |f''(a)|)^{-2/3} \int_{t_v}^{t_{v+1}} |f''(t)| dt + (2^N |f''(a)|)^{-2/3} \int_{t_N}^b |f''(t)| dt + \frac{1}{\sqrt{|f''(a)|}} \\ &\ll \int_a^b |f''(t)|^{1/3} dt + \frac{1}{\sqrt{|f''(a)|}}. \end{aligned}$$

La démonstration dans le cas où $|f''|$ est une fonction décroissante est similaire et on obtient $\frac{1}{\sqrt{|f''(b)|}}$.

Nous donnons comme exemple le problème des diviseurs de Dirichlet³, ce qui revient à la somme

$$\sum_{1 \leq h \leq \sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{h}\right), \quad (h \text{ entier}).$$

Nous décomposons cette somme en deux sommes partielles

$$\sum_{1 \leq h \leq \sqrt[3]{x}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{\sqrt[3]{x} \leq h \leq \sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{h}\right), \quad (h \text{ entier}).$$

Puisque $|\psi| \leq \frac{1}{2}$, on a $\left| \sum_{1 \leq h \leq \sqrt[3]{x}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt[3]{x}$. Pour un x suffisamment grand $\sqrt[3]{x} + 1 \leq \sqrt{x}$, de sorte que la relation (C') (paragraphe 1.4.1 page 21) est remplie pour $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt{x}$ et $f(u) = \frac{x}{u}$. La valeur de la deuxième somme partielle est donc plus petite que

$$\begin{aligned} & \int_{\sqrt[3]{x}}^{\sqrt{x}} \left(\frac{2x}{u^3}\right)^{\frac{1}{3}} du + \frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{x\sqrt{x}}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{x}}} \\ &= \frac{1}{6} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{x} \log x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

de sorte que l'erreur dans le problème des diviseurs ne surpasse pas, en effet, l'ordre de la fonction $\sqrt[3]{x} \log x$.

Théorème 1.6 Soit f une fonction réelle définie et continûment dérivable sur I , sa dérivée f' étant monotone et vérifiant $0 < \lambda \leq |f'(t)| < 1/2$, où λ est un réel fixé. Alors,

$$\sum_{n \in I} \psi(f(n)) \ll N\lambda + \frac{1}{\lambda}. \quad (1.14)$$

Preuve. En utilisant la formule trigonométrique de Vaaler, nous obtenons

$$\sum_{n \in I} \psi(f(n)) \ll \frac{N}{J} + \sum_{1 \leq j \leq J} \frac{1}{j} \left| \sum_{n \in I} e^{2\pi i j f(n)} \right|.$$

Puisque la fonction jf' ($1 \leq j \leq J$) est monotone et vérifie $0 < j\lambda \leq |jf'(t)| < j/2$, on utilise la formule (1.5), et on a donc

$$\sum_{n \in I} e^{2\pi i j f(n)} \ll (j\lambda)^{-1}.$$

³Voir exemple 1.4 : $\sum_{n \leq x} d(n) = x(\log x + 2\gamma - 1) - 2 \sum_{n \leq \sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{n}\right) + O(\sqrt{x})$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{n \in I} \psi(f(n)) &\ll \frac{N}{J} + \lambda^{-1} \sum_{1 \leq j \leq J} \frac{1}{j^2} \\ &\ll \frac{N}{J} + \lambda^{-1} \end{aligned}$$

Pour finir la démonstration, il suffit de choisir $J = \lambda^{-1}$.

Théorème 1.7 *Soit f une fonction réelle définie et deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $I = [a, b]$, telle que $\alpha\lambda \geq |f''(t)| \geq \lambda > 0$. Alors,*

$$\sum_{n \in I} \psi(f(n)) \ll_{\alpha} N\lambda^{1/3} + \lambda^{-1/2}. \quad (1.15)$$

Preuve. Par la formule (1.12), on a

$$\sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i j f(n)} \ll |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{j}{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{j\lambda}} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

En utilisant une formule trigonométrique de Vaaler i.e

$$\psi(t) \leq \frac{1}{J} + \sum_{1 \leq |j| \leq J} \gamma(j) e^{2\pi i j t} \text{ où } J \geq 1, \gamma(j) \ll |j|^{-1},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} \psi(f(n)) &\ll \frac{b-a}{J} + \sum_{1 \leq j \leq J} j^{-1} \left| \sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i j f(n)} \right| \\ &\ll \frac{b-a}{J} + \sum_{1 \leq j \leq J} j^{-1} \left(|f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{j}{\lambda_2}} + \frac{1}{\sqrt{j\lambda_2}} \right) \\ &\ll \frac{b-a}{J} + |f'(b) - f'(a)| \sqrt{\frac{J}{\lambda_2}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$|f'(b) - f'(a)| = \int_a^b |f''(t)| dt \geq (b-a) \lambda.$$

Ainsi,

$$\sum_{a < n \leq b} \psi(f(n)) \ll |f'(b) - f'(a)| \left(\frac{1}{J\lambda} + \sqrt{\frac{J}{\lambda}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Il existe un réel c où $a < c < b$, tel que

$$\frac{|f'(b) - f'(a)|}{b-a} = |f''(c)| \leq \alpha\lambda. \quad (b-a \leq N \in \mathbb{N}^*),$$

d'où

$$\sum_{a < n \leq b} \psi(f(n)) \ll_{\alpha} N \lambda \left(\frac{1}{J \lambda} + \sqrt{\frac{J}{\lambda}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Pour finir la démonstration, il suffit de choisir $J = \lambda_2^{-1/3}$.

Chapitre 2

Sur la variation de certaines suites de parties fractionnaires

Soit la fonction

$$W(x; a, b) = \sum_{n \geq 0} \left| \left\{ \frac{x}{n+a} \right\} - \left\{ \frac{x}{n+b} \right\} \right|,$$

pour $x > 0$ et $b > a > 0$.

Les différences de parties fractionnaires, pour $x > 0$ et $b > a > 0$.

$$\left\{ \frac{x}{n+a} \right\} - \left\{ \frac{x}{n+b} \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

sont les termes d'une série absolument convergente puisque pour $n > x-a$, cette différence vaut $cx/(n+a)(n+b)$, avec

$$c = b - a,$$

notation que nous conserverons dans tout ce chapitre. On peut donc considérer la norme au sens ℓ^1 de la quantité $W(x; a, b)$.

La somme $W(x; 1, 2)$ joue un rôle auxiliaire dans l'article [24] de Wintner. Il y démontra l'ordre de grandeur $W(x; 1, 2) \asymp \sqrt{x}$ (pour $x \geq 1$), et en déduisit l'optimalité de l'estimation $\mathcal{O}(\sqrt{x})$ pour le terme d'erreur des formules asymptotiques pour certaines moyennes arithmétiques. L'estimation de Wintner a été précisée par M. Balazard dans [3] : on a

$$W(x; 1, 2) = \frac{2}{3} \zeta(3/2) \sqrt{x} + \mathcal{O}(x^{2/5}) \quad (x > 0), \quad (2.1)$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann (cf. [3]).

Dans ce chapitre nous avons pour but la généralisation de (2.1) à la somme $W(x; a, b)$.

Afin d'énoncer notre premier résultat, il nous faut introduire les quantités

$$R_0(x; a, b) = \frac{c}{x} \sum_{1 \leq k \leq K(x/c)} k^2 (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) \quad (2.2)$$

$$R_j(x; a, b) = \sum_k (k^2 c/x - j) (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) \quad (j \in \mathbb{N}^*), \quad (2.3)$$

où, pour $t > 0$ et $j \in \mathbb{N}$, nous notons

- $K(t)$ le plus grand nombre entier k tel que $k(k+1) \leq t$;
- $K_j(t)$ le plus grand nombre entier $k \geq j$ tel que $(k-j)k \leq jt$ (en particulier, $K_0(t)=0$).

Enfin, nous posons, pour J réel et positif,

$$\mathcal{R}(J, x; a, b) = \sum_{0 \leq j \leq J} R_j(x; a, b).$$

Observons que, pour c entier, en particulier si $a = 1$ et $b = 2$, les quantités $R_j(x; a, b)$ sont nulles; elles ne jouent donc aucun rôle dans l'étude effectuée dans [3]. Le premier résultat suivant est une généralisation de (2.1).

Théorème A *Pour $x \geq 40c^{-3}(1+b)^4$, on a*

$$W(x; a, b) = \frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \sqrt{cx} + \mathcal{R}(J, x; a, b) + \mathcal{O}\left((1+b)^{2/5} c^{1/5} x^{2/5}\right),$$

où $J = c^{3/5} (1+b)^{-4/5} x^{1/5}$.

La somme $\mathcal{R}(J, x; a, b)$ peut être estimée grâce aux résultats classiques de van der Corput, obtenus grâce à l'utilisation de sommes trigonométriques. Nous avons donc,

Théorème B *Pour $x \geq 40c^{-5}(1+b)^{27/2}$, on a*

$$W(x; a, b) = \frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \sqrt{cx} + \mathcal{O}(c^{2/9} x^{4/9}).$$

Le plan de cette étude est le suivant : au paragraphe 2.1, nous décomposons $W(x; a, b)$ en somme de quantités $W_j(x; a, b)$, regroupant les entiers n tels que

$$\lfloor x/(n+a) \rfloor - \lfloor x/(n+b) \rfloor = j \quad (j \in \mathbb{N}),$$

et nous donnons des expressions de $W_j(x; a, b)$ (formules (2.8) au §2.1.2, et (2.21) au §2.1.9. Au §2.1, nous donnons des estimations des quantités $W_j(x; a, b)$, faisant intervenir

les sommes $R_j(x; a, b)$ définies par (2.2) et (2.3) ci-dessus. Nous en déduisons le Théorème A au §2.3. Enfin, au §2.4, nous utilisons quelques éléments de la théorie de van der Corput fournis au premier chapitre pour estimer les quantités $R_j(x; a, b)$. Cela nous permet d'obtenir le Théorème B.

2.1 Décomposition de la somme $W(x; a, b)$

Comme x , a et b sont fixés dans ce paragraphe et les paragraphes §2.2 et §2.3, nous alléons la notation en écrivant simplement W au lieu de $W(x; a, b)$, et nous adopterons la même convention pour les quantités et ensembles, dépendant de x , a et b , intervenant dans la démonstration. Les lettres j, k, h, n désigneront toujours des variables entières positives ou nulles.

2.1.1 Les sommes W_j

En utilisant la notation d'Iverson ($[P] = 1$ si la propriété P est vraie, $[P] = 0$ sinon), posons, pour $j \in \mathbb{N}$,

$$W_j = \sum_{n \geq 0} [\lfloor x/(n+a) \rfloor - \lfloor x/(n+b) \rfloor = j] \cdot |\{x/(n+a)\} - \{x/(n+b)\}|,$$

de sorte que

$$W = \sum_{j \in \mathbb{N}} W_j.$$

Nous allons évaluer W_j en suivant la méthode adoptée dans [3].

Pour commencer, les relations

$$k = \lfloor x/(n+a) \rfloor$$

et

$$h = \lfloor x/(n+b) \rfloor$$

entraînent $0 \leq h \leq k \leq x/a$ et équivalent à

$$k \leq x/(n+a) < k+1$$

$$h \leq x/(n+b) < h+1,$$

autrement dit

$$\max \left(\frac{x}{k+1} - a, \frac{x}{h+1} - b \right) < n \leq \min \left(\frac{x}{k} - a, \frac{x}{h} - b \right). \quad (2.4)$$

(avec la convention $x/0 = \infty$).

Nous désignons par $I(h, k)$ l'intervalle des valeurs de n défini par l'encadrement (2.4), c'est-à-dire

$$I(h, k) = \mathbb{N}^* \cap]x/(k+1) - a, x/k - a] \cap]x/(h+1) - b, x/h - b].$$

La collection des $I(h, k)$ non vides constitue une partition de $\mathbb{N}$.

Notons que, pour $n \in I(h, k)$, on a

$$\{x/(n+a)\} - \{x/(n+b)\} = cx/(n+a)(n+b) - k + h,$$

où nous rappelons que c désigne la différence $b - a$. En particulier,

$$0 \leq k - h < y + 1,$$

où l'on a posé $y = cx/ab$.

La somme W_j est donc nulle si $j \geq y + 1$. Posons

$$W(h, k) = \sum_{n \in I(h, k)} |cx/(n+a)(n+b) - k + h|$$

et, pour $j \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq j \leq y + 1$,

$$\begin{aligned} E_j &= \{(h, k) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq h \leq k \leq x/a, k - h = j\} \\ &= \{(k - j, k), k \in \mathbb{N}, j \leq k \leq x/a\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} W_j &= \sum_{(h, k) \in E_j} W(h, k) \\ &= \sum_{j \leq k \leq x/a} \sum_{n \in I(k-j, k)} |cx/(n+a)(n+b) - j|. \end{aligned}$$

Nous allons établir une expression de la somme W_j , en commençant par le cas $j = 0$.

2.1.2 Expression de W_0

Nous avons

$$E_0 = \{(k, k), k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq x/a\}.$$

L'intervalle $I(k, k)$ de $\mathbb{N}$ est défini par l'encadrement

$$\frac{x}{k+1} - a < n \leq \frac{x}{k} - b. \tag{2.6}$$

Il est vide si $k(k+1) > x/c$. Pour $t > 0$, désignons par $K(t)$ le plus grand nombre entier k tel que $k(k+1) \leq t$, et observons simplement, pour l'instant, que $K(t) \leq \sqrt{t}$.

Posons également

$$F(t) = \sum_{n \geq t} 1/(n+a)(n+b), \quad (t \geq 0) \quad (2.7)$$

et, par convention,

$$F(\infty) = 0$$

$$F(t) = F(0^-) = \sum_{n \geq 0} 1/(n+a)(n+b) \quad (t < 0).$$

Pour $x \geq a^2/c$, en notant $K = K(x/c)$, on aura, $K \leq \sqrt{x/c} \leq x/a$, donc

$$\begin{aligned} W_0 &= \sum_{0 \leq k \leq K} W(k, k) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq K} \sum_{x/(k+1) - a < n \leq x/k - b} cx/(n+a)(n+b) \\ &= cx \sum_{0 \leq k \leq K} (F(x/(k+1) - a) - F(x/k - b)) \\ &= cx F(x/(K+1) - a) + cx \sum_{1 \leq k \leq K} (F(x/k - a) - F(x/k - b)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.1.3 Décomposition de l'ensemble E_j

Nous supposons maintenant $j \geq 1$. Toujours en adaptant la démarche suivie dans [3], nous allons décomposer l'ensemble E_j défini par (2.5) en une partition de trois sous-ensembles sur lesquels l'encadrement (2.4) s'exprimera sans recours aux fonctions max et min.

Si $k > h \geq 0$ et $x > 0$, l'inégalité

$$\frac{x}{k} - a \leq \frac{x}{h} - b$$

équivaut à

$$\frac{kh}{k-h} \leq x/c.$$

En particulier, on a les implications

$$\frac{x}{k+1} - a \leq \frac{x}{h+1} - b \Rightarrow \frac{x}{k} - a \leq \frac{x}{h} - b$$

et

$$\frac{x}{k} - a > \frac{x}{h} - b \Rightarrow \frac{x}{k+1} - a > \frac{x}{h+1} - b.$$

Nous considérons donc les trois parties suivantes de E_j (la définition de chaque $E_{j,i}$ est suivie par la forme que prend l'encadrement (2.4) lorsque $(k-j, k) \in E_{j,i}$:

$$E_{j,1} = \{(k-j, k) : j \leq k \leq x/a, (k-j+1)(k+1) \leq jx/c\}$$

$$\frac{x}{k-j+1} - b < n \leq \frac{x}{k} - a \quad (2.9)$$

$$E_{j,2} = \{(k-j, k) : j \leq k \leq x/a, (k-j)k > jx/c\}$$

$$\frac{x}{k+1} - a < n \leq \frac{x}{k-j} - b \quad (2.10)$$

$$E_{j,3} = \{(k-j, k) : j \leq k \leq x/a, (k-j)k \leq jx/c < (k-j+1)(k+1)\}$$

$$\frac{x}{k+1} - a < n \leq \frac{x}{k} - a. \quad (2.11)$$

Celles des trois parties $E_{j,i}$ ($1 \leq i \leq 3$) qui sont non vides forment une partition de E_j . Par conséquent, on a

$$W_j = W_{j,1} + W_{j,2} + W_{j,3},$$

où

$$W_{j,i} = \sum_{(h,k) \in E_{j,i}(x)} W(h, k), \quad (1 \leq i \leq 3).$$

Avant d'évaluer successivement les trois quantités $W_{j,i}$, nous allons définir, aux sous-paragraphes suivants, deux fonctions auxiliaires, K_j et N_j .

2.1.4 La fonction $K_j(t)$

Pour $j \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, nous définissons $K_j(t)$ comme le plus grand nombre entier $k \geq j$ tel que $(k-j)k \leq jt$. En particulier, $K_0(t) = 0$.

Au moyen de la fonction $K_j(t)$, on peut, pour $j \geq 1$, récrire les conditions, quadratiques relativement à k , intervenant dans les définitions des ensembles $E_{j,i}$, sous les formes suivantes, respectivement :

$$k \leq K_j(x/c) - 1 \quad (i = 1) \quad (2.12)$$

$$k > K_j(x/c) \quad (i = 2) \quad (2.13)$$

$$k = K_j(x/c) \quad (i = 3) \quad (2.14)$$

De plus, la condition $k \leq x/a$, qui figure également dans la définition de ces ensembles,

est superflue pour $i = 1, 3$, si $j \leq y = cx/ab$. En effet la relation $j \leq y$ peut s'écrire sous la forme

$$jx/c \leq \left(\frac{x}{a} - j\right) \frac{x}{a}.$$

Les inégalités

$$(K_j(x/c) - j) K_j(x/c) \leq jx/c \quad ; \quad j \leq y \leq x/a,$$

et le fait que $t \mapsto (t - j)t$ est strictement croissante pour $t \geq j$ entraînent alors l'inégalité

$$K_j(x/c) \leq x/a. \quad (2.15)$$

2.1.5 La fonction $N_j(x; a, b)$

Pour exprimer la quantité $|j - cx/(n+a)(n+b)|$ sans valeur absolue, nous sommes conduits à définir, pour $j \in \mathbb{N}^*$, $N_j = N_j(x; a, b)$ comme le plus grand nombre entier n tel que

$$(n+a)(n+b) \leq cx/j.$$

On a donc $N_j \geq 0$ si $j \leq y = cx/ab$.

Établissons maintenant une relation entre les quantités $K_j = K_j(x/c)$ et $N_j = N_j(x; a, b)$.

Proposition 2.1 *Si $j \in \mathbb{N}^*$ et $j \leq y$, on a*

$$\left\lfloor \frac{x}{K_j + 1} - a \right\rfloor \leq N_j \leq \left\lfloor \frac{x}{K_j} - a \right\rfloor.$$

Preuve. L'encadrement définissant K_j ,

$$(K_j - j)K_j \leq jx/c < (K_j + 1 - j)(K_j + 1),$$

équivalent à

$$\frac{x}{K_j + 1} \left(\frac{x}{K_j + 1} + c \right) < \frac{cx}{j} \leq \frac{x}{K_j} \left(\frac{x}{K_j} + c \right),$$

c'est-à-dire à

$$\left(\frac{x}{K_j + 1} - a + a \right) \cdot \left(\frac{x}{K_j + 1} - a + b \right) < \frac{cx}{j} \leq \left(\frac{x}{K_j} - a + a \right) \cdot \left(\frac{x}{K_j} - a + b \right).$$

On a $N_j \geq 0$, et $t \mapsto (t+a)(t+b)$ est strictement croissante pour $t \geq -a$. Le dernier encadrement entraîne donc celui de l'énoncé.

2.1.6 Calcul de $W_{j,1}$

Supposons $1 \leq j \leq y$. En notant simplement K_j pour $K_j(x/c)$, nous aurons, d'après (2.9), (2.12) et (2.15) :

$$\begin{aligned} W_{j,1} &= \sum_{(h,k) \in E_{j,1}} W(h,k) \\ &= \sum_{j \leq k \leq K_j-1} \sum_{\frac{x}{k-j+1} - b < n \leq \frac{x}{k} - a} |cx/(n+a)(n+b) - j|. \end{aligned}$$

La somme intérieure est non vide seulement si

$$\frac{x}{k-j+1} - b < \frac{x}{k} - a,$$

autrement dit seulement si $k > K_{j-1}$ (rappelons que $K_0 = 0$). Les nombres entiers n intervenant dans cette somme intérieure sont strictement supérieurs à

$$\frac{x}{K_j - j} - b \geq \frac{x}{K_j} - a \geq N_j,$$

d'après la proposition 2.1.

Dans le calcul qui suit, ainsi qu'au paragraphe suivant, nous emploierons la fonction F définie par (2.7), et l'identité « r -télescopique» :

$$\sum_{\alpha < k \leq \beta} (u_k - u_{k-r}) = \sum_{\beta-r < k \leq \beta} u_k - \sum_{\alpha-r < k \leq \alpha} u_k.$$

On a donc

$$\begin{aligned} W_{j,1} &= \sum_{K_{j-1} < k \leq K_j-1} \sum_{\frac{x}{k-j+1} - b < n \leq \frac{x}{k} - a} (j - cx/(n+a)(n+b)) \\ &= j \sum_{K_{j-1} < k \leq K_j-1} \left(\left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j+1} - b \right\rfloor \right) \\ &\quad - cx \sum_{K_{j-1} < k \leq K_j-1} \left(F\left(\frac{x}{k-j+1} - b\right) - F\left(\frac{x}{k} - a\right) \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

L'avant-dernière somme vaut

$$\begin{aligned} &\sum_{K_{j-1} < k \leq K_j-1} \left(\left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j+1} - b \right\rfloor \right) = \\ &\sum_{K_{j-1} < k \leq K_j-1} \left(\left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \right) + \sum_{K_{j-1} < k \leq K_j-1} \left(\left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j+1} - b \right\rfloor \right), \end{aligned}$$

où, par l'identité « $(j-1)$ –télescopique»,

$$\sum_{K_{j-1} < k \leq K_j - 1} \left(\left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j+1} - b \right\rfloor \right) = \sum_{K_j - j < k \leq K_j - 1} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - \sum_{K_{j-1} - (j-1) < k \leq K_{j-1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor.$$

Une manipulation similaire s'applique à la dernière somme de (2.16), et on obtient finalement

$$\begin{aligned} W_{j,1} = & j \sum_{K_{j-1} < k \leq K_j - 1} \left(\left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \right) \\ & + j \sum_{K_j - j < k \leq K_j - 1} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - j \sum_{K_{j-1} - (j-1) < k \leq K_{j-1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \\ & + cx \sum_{K_{j-1} < k \leq K_j - 1} \left(F\left(\frac{x}{k} - a\right) - F\left(\frac{x}{k} - b\right) \right) \\ & + cx \sum_{K_j - j < k \leq K_j - 1} F\left(\frac{x}{k} - b\right) - cx \sum_{K_{j-1} - (j-1) < k \leq K_{j-1}} F\left(\frac{x}{k} - b\right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.1.7 Calcul de $W_{j,2}$

On a ici, toujours pour $1 \leq j \leq y$, et d'après (2.10), (2.13) et (2.15),

$$\begin{aligned} W_{j,2} &= \sum_{(h,k) \in E_{j,2}} W(h,k) \\ &= \sum_{K_j < k \leq x/a} \sum_{\frac{x}{k+1} - a < n \leq \frac{x}{k-j} - b} |cx/(n+a)(n+b) - j|. \end{aligned}$$

La somme intérieure est non vide seulement si

$$\frac{x}{k+1} - a \leq \frac{x}{k-j} - b,$$

autrement dit seulement si $k \leq K_{j+1} - 1$. Nous supposons donc maintenant que $j \leq y-1$, de sorte que $K_{j+1} \leq x/a$, d'après (2.15), et on obtient

$$W_{j,2} = \sum_{K_j < k \leq K_{j+1} - 1} \sum_{\frac{x}{k+1} - a < n \leq \frac{x}{k-j} - b} |cx/(n+a)(n+b) - j|.$$

Les nombres entiers n intervenant dans la somme intérieure sont inférieurs ou égaux à

$$\frac{x}{K_j + 1 - j} - b < \frac{x}{K_j + 1} - a,$$

par définition de K_j . La proposition 2.1 prouve alors que ces nombres entiers sont $\leq N_j$.

On a donc

$$\begin{aligned} W_{j,2} &= \sum_{K_j < k \leq K_{j+1}-1} \sum_{\frac{x}{k+1}-a < n \leq \frac{x}{k-j}-b} (cx/(n+a)(n+b) - j) \\ &= j \sum_{K_j < k \leq K_{j+1}-1} \left(\left\lfloor \frac{x}{k+1} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j} - b \right\rfloor \right) \\ &\quad + cx \sum_{K_j < k \leq K_{j+1}-1} \left(F\left(\frac{x}{k+1} - a\right) - F\left(\frac{x}{k-j} - b\right) \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

L'avant-dernière somme vaut

$$\begin{aligned} &\sum_{K_j+1 < k \leq K_{j+1}} \left(\left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j-1} - b \right\rfloor \right) = \\ &\sum_{K_j+1 < k \leq K_{j+1}} \left(\left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \right) + \sum_{K_j+1 < k \leq K_{j+1}} \left(\left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j-1} - b \right\rfloor \right), \end{aligned}$$

où, par l'identité « $(j+1)$ -télescopique»,

$$\begin{aligned} \sum_{K_j+1 < k \leq K_{j+1}} \left(\left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j-1} - b \right\rfloor \right) = \\ \sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor + \sum_{K_j-j < k \leq K_{j+1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor. \end{aligned}$$

Une manipulation similaire s'applique à la somme (2.18), et on obtient finalement

$$\begin{aligned} W_{j,2} &= j \sum_{K_j+1 < k \leq K_{j+1}} \left(\left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \right) \\ &\quad + j \sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor + j \sum_{K_j-j < k \leq K_{j+1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \\ &\quad + cx \sum_{K_j+1 < k \leq K_{j+1}} \left(F\left(\frac{x}{k} - a\right) - F\left(\frac{x}{k} - b\right) \right) \\ &\quad + cx \sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} F\left(\frac{x}{k} - b\right) + cx \sum_{K_j-j < k \leq K_{j+1}} F\left(\frac{x}{k} - b\right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.1.8 Calcul de $W_{j,3}$

Pour $1 \leq j \leq y$, on a, d'après (2.11), (2.14), et (2.15),

$$\begin{aligned} W_{j,3} &= \sum_{\frac{x}{K_j+1}-a < n \leq \frac{x}{K_j}-a} |cx/(n+a)(n+b) - j| \\ &= \sum_{\frac{x}{K_j+1}-a < n \leq N_j} (cx/(n+a)(n+b) - j) + \sum_{N_j < n \leq \frac{x}{K_j}-a} (j - cx/(n+a)(n+b)), \end{aligned}$$

d'après la proposition 2.1. Observons que l'avant-dernière somme est vide si $N_j = \left\lfloor \frac{x}{K_j+1} - a \right\rfloor$.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{x}{K_j+1}-a < n \leq N_j} (cx/(n+a)(n+b) - j) &= cx \left(F\left(\frac{x}{K_j+1} - a\right) - F(N_j) \right) - j \left(N_j - \left\lfloor \frac{x}{K_j+1} - a \right\rfloor \right) \\ \sum_{N_j < n \leq \frac{x}{K_j}-a} (j - cx/(n+a)(n+b)) &= j \left(\left\lfloor \frac{x}{K_j} - a \right\rfloor - N_j \right) - cx \left(F(N_j) - F\left(\frac{x}{K_j} - a\right) \right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} W_{j,3} &= cx \left(F\left(\frac{x}{K_j+1} - a\right) + F\left(\frac{x}{K_j} - a\right) - 2F(N_j) \right) \\ &\quad + j \left(\left\lfloor \frac{x}{K_j} - a \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{K_j+1} - a \right\rfloor - 2N_j \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.1.9 Expression de W_j pour $j \geq 1$

En regroupant les identités (2.17), (2.19) et (2.20), on obtient, pour $1 \leq j \leq y-1$,

$$\begin{aligned} W_j &= j \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} \left(\left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \right) \\ &\quad + j \sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - j \sum_{K_{j-1}-(j-1) < k \leq K_{j-1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \\ &\quad + cx \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} \left(F\left(\frac{x}{k} - a\right) - F\left(\frac{x}{k} - b\right) \right) \\ &\quad + cx \sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} F\left(\frac{x}{k} - b\right) - cx \sum_{K_{j-1}-(j-1) < k \leq K_{j-1}} F\left(\frac{x}{k} - b\right) \\ &\quad - 2jN_j - 2cx F(N_j). \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.2 Estimation des sommes W_j

Nous allons maintenant utiliser les identités obtenues au paragraphe précédent pour estimer les contributions à W des sommes W_j . Nous commençons par le cas $j = 0$.

2.2.1 La fonction K

Au §2.1.2, pour $t > 0$, nous avons introduit la fonction $K(t)$ pour désigner le plus grand nombre entier k tel que $k(k+1) \leq t$, c'est-à-dire,

$$K(t) = \left\lfloor \sqrt{t+1/4} - 1/2 \right\rfloor,$$

et notons simplement K la valeur $K(x/c)$. Nous utiliserons l'encadrement

$$\sqrt{t} - 3/2 \leq \sqrt{t+1/4} - 3/2 \leq K(t) \leq \sqrt{t}.$$

Proposition 2.2 *Pour $x \geq 9b^2/c$, on a*

$$\frac{x}{K+1} - b \geq \frac{\sqrt{cx}}{6}.$$

Preuve. On a

$$K(t) \geq \sqrt{t+1/4} - 3/2 \geq \sqrt{t}/2 \quad (t \geq 9),$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{x}{K+1} - b &\geq cK - b \\ &\geq c \left(\sqrt{x/c} - 3/2 \right) - b \\ &\geq \sqrt{cx} - 5b/2 \\ &\geq \frac{\sqrt{cx}}{6}, \end{aligned}$$

si $x \geq 9b^2/c$.

2.2.2 Estimation de la fonction F

Rappelons la définition (2.7) :

$$F(t) = \sum_{n>t} 1/(n+a)(n+b).$$

Proposition 2.3 *Pour $b > a > 0$ et $t > 0$, on a*

$$F(t) = \frac{1}{t} + \mathcal{O}((1+b)/t^2) \quad (2.22)$$

$$F(t) = \frac{1}{t} + \frac{\{t\} - (a+b+1)/2}{t^2} + \mathcal{O}((1+b)^2/t^3) \quad (2.23)$$

Preuve. Nous démontrons (2.23) ; la démonstration de (2.22) est similaire, et plus simple.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)} - \frac{1}{n^2} + \frac{a+b}{n^3} = \frac{(a^2 + ab + b^2)n + ab(a+b)}{n^3(n+a)(n+b)} \leq \frac{3b^2}{n^4}.$$

Pour $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n>t} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{t} + \frac{\{t\} - 1/2}{t^2} + \mathcal{O}(t^{-3}) \\ \sum_{n>t} \frac{1}{n^3} &= \frac{1}{2t^2} + \mathcal{O}(t^{-3}) \\ \sum_{n>t} \frac{1}{n^4} &= \mathcal{O}(t^{-3}). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n>t} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{a+b}{n^3} + \mathcal{O}(b^2/n^4) \right) \\ &= \frac{1}{t} + \frac{\{t\} - (a+b+1)/2}{t^2} + \mathcal{O}((1+b^2)/t^3). \end{aligned}$$

2.2.3 Estimation de W_0

Nous commençons par estimer le premier terme de l'expression (2.8) de W_0 .

Proposition 2.4 *Pour $x \geq 9b^2/c$, on a*

$$F(x/(K+1) - a) = \frac{1}{\sqrt{cx}} + \mathcal{O}((1+b)/cx).$$

Preuve. On a $K+1 = \sqrt{x/c} + \vartheta_0$, où $|\vartheta_0| \leq 1$ et $\sqrt{x/c} \geq 3b/c \geq 3$. Par conséquent,

$$\frac{x}{K+1} - a = \frac{x}{\sqrt{x/c} + \vartheta_0} - a = \sqrt{cx} + \mathcal{O}(b).$$

On a donc $x/(K+1) - a = \sqrt{cx}(1 + \vartheta_1)$, avec $\vartheta_1 \geq -5/6$ (d'après la proposition 2.2), et $\vartheta_1 = \mathcal{O}(b/\sqrt{cx})$. L'estimation (2.22) nous donne alors

$$F(x/(K+1) - a) = \frac{1 + \mathcal{O}(b/\sqrt{cx})}{\sqrt{cx}} + \mathcal{O}((1+b)/cx) = \frac{1}{\sqrt{cx}} + \mathcal{O}((1+b)/cx).$$

Passons à la somme apparaissant dans (2.8).

Proposition 2.5 Pour $x \geq 9b^2/c$, on a

$$\sum_{1 \leq k \leq K} (F(x/k - a) - F(x/k - b)) = -\frac{1}{3\sqrt{cx}} + x^{-2} \sum_{1 \leq k \leq K} k^2 (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) + \mathcal{O}((1+b)^2/c^2x).$$

Preuve. Nous allons utiliser l'estimation (2.23). Par la proposition 2.2, les quantités $x/k - a$ et $x/k - b$, figurant dans la somme à évaluer, sont toutes $\geq \sqrt{cx}/6$. Par conséquent, la contribution à cette somme du terme d'erreur de (2.23) est

$$\ll (1+b)^2 K / (cx)^{3/2} \leq (1+b)^2 / c^2 x.$$

Pour $1 \leq k \leq K$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{x/k - a} - \frac{1}{x/k - b} &= -\frac{ck^2}{x^2} \left(1 - \frac{ak}{x}\right)^{-1} \left(1 - \frac{bk}{x}\right)^{-1} \\ &= -ck^2/x^2 + \mathcal{O}(cbk^3/x^3), \end{aligned}$$

car $bk/x \leq 1/3$ si $1 \leq k \leq K$.

Par conséquent, la contribution à la somme étudiée du terme $1/t$ de (2.23) vaut

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq K} \left(\frac{1}{x/k - a} - \frac{1}{x/k - b} \right) &= -\frac{c}{x^2} (K^3/3 + \mathcal{O}(K^2)) + \mathcal{O}(cbK^4/x^3) \\ &= -\frac{1}{3\sqrt{cx}} + \mathcal{O}(b/cx). \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \frac{\{x/k - a\} - (a+b+1)/2}{(x/k - a)^2} - \frac{\{x/k - b\} - (a+b+1)/2}{(x/k - b)^2} &= \\ &= (\{x/k - a\} - (a+b+1)/2)(k^2/x^2 + \mathcal{O}(bk^3/x^3)) \\ &\quad - (\{x/k - b\} - (a+b+1)/2)(k^2/x^2 + \mathcal{O}(bk^3/x^3)) \\ &= k^2(\{x/k - a\} - \{x/k - b\})/x^2 + \mathcal{O}((1+b^2)k^3/x^3). \end{aligned}$$

La contribution du dernier terme d'erreur à la somme figurant dans (2.8) est

$$\ll (1+b^2) K^4/x^3 \ll (1+b^2)/c^2 x.$$

Le résultat découle de ces estimations.

Les propositions 2.4 et 2.5 et la formule (2.8) fournissent l'expression suivante de W_0 .

Proposition 2.6 *Pour $x \geq 9b^2/c$, on a*

$$W_0 = \frac{2}{3}\sqrt{cx} + R_0(x) + \mathcal{O}((1+b^2)/c).$$

où

$$R_0(x) = \frac{c}{x} \sum_{1 \leq k \leq K} k^2 (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) \quad (x > 0). \quad (2.24)$$

2.2.4 Grandes valeurs de j

Avant d'examiner en détail chaque quantité W_j , notons l'estimation suivante, qui nous permettra de limiter les valeurs de j à considérer.

Proposition 2.7 *Soit J un nombre réel supérieur à 1. Pour $x > 0$, et $b > a > 0$, on a*

$$\sum_{j>J} W_j < \sqrt{cx/(J-1)} + 1.$$

Preuve. Si $j = \lfloor x/(n+a) \rfloor - \lfloor x/(n+b) \rfloor > J$, alors

$$\begin{aligned} \frac{cx}{n^2} &> \frac{cx}{(n+a)(n+b)} \\ &= j + \{x/k - a\} - \{x/k - b\} \\ &> J - 1, \end{aligned}$$

donc $n < \sqrt{cx/(J-1)}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{j>J} W_j &< \sum_{0 \leq n < \sqrt{cx/(J-1)}} 1 \\ &< \sqrt{cx/(J-1)} + 1. \end{aligned}$$

2.2.5 Résultats auxiliaires sur les quantités K_j

Nous allons utiliser les résultats, démontrés dans [3], concernant les fonctions $K_j(t)$, dont la définition a été rappelée au §2.1.4, ici évaluées en $t = x/c$.

Pour $0 \leq j \leq x/c$ et $x \geq c$, les propositions 2 et 3, p.12 de [3], affirment que

$$K_{j+1} - K_j = \left(\sqrt{j+1} - \sqrt{j} \right) \sqrt{x/c} + \mathcal{O}(1) \quad (2.25)$$

$$\sum_{K_j < k \leq K_{j+1}} k^2 = \frac{(j+1)\sqrt{j+1} - j\sqrt{j}}{3} (x/c)^{3/2} + \mathcal{O}((j+1)x/c). \quad (2.26)$$

Notons que (2.25) entraîne

$$K_{j+1} - K_j \ll (x/cj)^{1/2} \quad (0 < j \leq x/c). \quad (2.27)$$

L'encadrement (17), p. 11 de [3] se récrit

$$\sqrt{jx/c} + j/2 - 1 < K_j \leq \sqrt{jx/c} + j. \quad (2.28)$$

En particulier, pour $0 < j \leq x/c$, on a

$$K_j \geq \frac{1}{2} \sqrt{jx/c}, \quad (2.29)$$

et

$$K_{j+1} \leq \sqrt{(j+1)x/c} + j + 1 \leq 2\sqrt{jx/c} + 2j \leq 4\sqrt{jx/c}. \quad (2.30)$$

Les quatre propositions suivantes sont des lemmes utilisés lors des calculs des paragraphes suivants.

Proposition 2.8 *Pour $0 < j \leq x/c$ et $K_{j-1} < k \leq K_{j+1}$, on a*

$$-1 < ck^2/x - j \leq 1 + 8j^{3/2} (c/x)^{1/2}.$$

Preuve. En effet, par définition de $K_{j\pm 1}$, on a, pour $K_{j-1} < k \leq K_{j+1}$,

$$(j-1)x/c + (j-1)k < k^2 \leq (j+1)x/c + (j+1)k,$$

donc

$$-1 + (j-1)kc/x < ck^2/x - j \leq 1 + (j+1)kc/x.$$

L'encadrement annoncé résulte alors de la majoration $K_{j+1} \leq 4\sqrt{jx/c}$.

Proposition 2.9 *Pour $0 < j \leq x/c$, on a*

$$\sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} |k^2c/x - j| \ll (x/cj)^{1/2} + j.$$

Preuve. En utilisant (2.27) et la proposition 2.8, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} |k^2c/x - j| &\ll (x/cj)^{1/2} \left(1 + j^{3/2} (c/x)^{1/2}\right) \\ &= (x/cj)^{1/2} + j. \end{aligned}$$

Proposition 2.10 Pour $0 < j \leq cx/9(1+b)^2$ et $k \leq K_j$, on a

$$\lfloor x/k - b \rfloor \geq \frac{5}{12} \sqrt{cx/j} \quad (2.31)$$

$$x/k - b \geq x/2k. \quad (2.32)$$

Preuve. En utilisant (2.28), on a, d'une part,

$$\lfloor x/k - b \rfloor \geq x/K_j - b - 1 \geq \frac{x}{\sqrt{jx/c} + j} - b - 1 \geq \frac{3}{4} \sqrt{cx/j} - b - 1 \geq \frac{5}{12} \sqrt{cx/j}.$$

D'autre part,

$$kb \leq K_j b \leq b\sqrt{jx/c} + bj \leq \frac{bx}{3(1+b)} + \frac{bcx}{9(1+b)^2} \leq \frac{x}{2}.$$

Proposition 2.11 Pour $0 < j \leq cx/9(1+b)^2$ et $K_j - j < k \leq K_j$, on a

$$j \lfloor x/k - b \rfloor + cx/\lfloor x/k - b \rfloor = 2\sqrt{jcx} + \mathcal{O}\left((1+b)^2 j^{3/2} (cx)^{-1/2}\right).$$

Preuve. Il s'agit d'une adaptation de la proposition 5, p.17 de [3].

Posons $q = \lfloor x/k - b \rfloor$. On a

$$jq + cx/q - 2\sqrt{jcx} = p^2,$$

où

$$p = \sqrt{jq} - \sqrt{cx/q} = \frac{jq^2 - cx}{q(\sqrt{jq} + \sqrt{cx/q})}.$$

D'après (2.28), on a

$$\sqrt{jx/c} + j \geq K_j \geq k \geq K_j - j + 1 \geq \sqrt{jx/c} - j/2 \geq \frac{5}{6} \sqrt{jx/c},$$

donc, compte également tenu de la proposition 2.10,

$$\begin{aligned} q &= \lfloor x/k - b \rfloor \\ &= x/k + \mathcal{O}(1+b) \\ &= \frac{x}{\sqrt{jx/c} + \mathcal{O}(j)} + \mathcal{O}(1+b) \\ &= \sqrt{cx/j} + \mathcal{O}(1+b). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}jq^2 - cx &= \mathcal{O}\left((1+b)\sqrt{c j x}\right) \\p &= \mathcal{O}\left((1+b)j^{3/4}(cx)^{-1/4}\right)\end{aligned}$$

et

$$jq + cx/q - 2\sqrt{jcx} = \mathcal{O}\left((1+b)^2 j^{3/2} (cx)^{-1/2}\right).$$

2.2.6 Estimation de W_j pour $j \geq 1$

Commençons en observant que la condition $j \leq cx/9(1+b)^2 - 1$, qui va figurer dans les trois premiers énoncés de ce sous-paragraphe, entraîne l'inégalité $j \leq y - 1$, condition d'application de l'identité (2.21).

Nous estimons en premier lieu la contribution à W_j des sommes de (2.21) où a ne figure pas.

Proposition 2.12 *Pour $0 < j \leq cx/9(1+b)^2 - 1$, on a*

$$\begin{aligned}&j \sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - j \sum_{K_{j-1}-(j-1) < k \leq K_{j-1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \\&\quad + cx \sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} F\left(\frac{x}{k} - b\right) - cx \sum_{K_{j-1}-(j-1) < k \leq K_{j-1}} F\left(\frac{x}{k} - b\right) \\&= \left((2j+1)\sqrt{j+1} - (2j-1)\sqrt{j-1}\right)\sqrt{cx} \\&\quad + \mathcal{O}\left((1+b)^2 j^{5/2} (cx)^{-1/2}\right) + \mathcal{O}((1+b)j).\end{aligned}\tag{2.34}$$

Preuve. Observons que, si $j = 1$, la deuxième et la quatrième somme sont vides.

Pour $t \geq 1$, nous récrivons (2.23) sous la forme

$$F(t) = \frac{1}{[t]} - \frac{a+b+1}{2t^2} + \mathcal{O}\left((1+b)^2/t^3\right)\tag{2.35}$$

D'après (2.31), la contribution à la troisième et quatrième somme de (2.34) du terme d'erreur de (2.35) est

$$\ll j(1+b)^2 (cx/j)^{-3/2} = j^{5/2} (1+b)^2 (cx)^{-3/2}.\tag{2.36}$$

On a ensuite, en utilisant (2.33) et (2.31),

$$\begin{aligned}\sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} \frac{1}{(x/k - b)^2} &= \sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} \left((j+1)/cx + \mathcal{O}\left((1+b)(j/cx)^{3/2}\right) \right) \\&= (j+1)^2/cx + \mathcal{O}\left(j^{5/2}(1+b)(cx)^{-3/2}\right),\end{aligned}\tag{2.37}$$

et, de même,

$$\sum_{K_{j-1}-(j-1) < k \leq K_{j-1}} \frac{1}{(x/k - b)^2} = (j-1)^2 / cx + \mathcal{O}\left(j^{5/2} (1+b) (cx)^{-3/2}\right). \quad (2.38)$$

La proposition 2.11 et (2.33) nous donnent

$$\begin{aligned} & \sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} (j \lfloor x/k - b \rfloor + cx / \lfloor x/k - b \rfloor) = \\ &= \sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} \left(2\sqrt{(j+1)cx} + \mathcal{O}\left((1+b)^4 j^{3/2} c^{-5/2} x^{-1/2}\right) \right) - \sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} \lfloor x/k - b \rfloor \\ &= (2j+1) \sqrt{(j+1)cx} + \mathcal{O}\left((1+b)^2 j^{5/2} (cx)^{-1/2}\right) + \mathcal{O}\left((1+b)j\right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

et, de même,

$$\begin{aligned} & \sum_{K_{j-1}-(j-1) < k \leq K_{j-1}} (j \lfloor x/k - b \rfloor + cx / \lfloor x/k - b \rfloor) = \\ &= (2j-1) \sqrt{(j-1)cx} + \mathcal{O}\left((1+b)^2 j^{5/2} (cx)^{-1/2}\right) + \mathcal{O}\left((1+b)j\right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

En regroupant les résultats (2.36), (2.37), (2.38), (2.39) et (2.40), on obtient le résultat annoncé.

Passons maintenant à la contribution à W_j des sommes de (2.21) où figure a .

Proposition 2.13 *Pour $0 < j \leq cx/9(1+b)^2 - 1$, on a*

$$\begin{aligned} & j \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} \left(\left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \right) + cx \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} \left(F\left(\frac{x}{k} - a\right) - F\left(\frac{x}{k} - b\right) \right) \\ &= \frac{(2j-1)\sqrt{j+1} - (2j+1)\sqrt{j-1}}{3} \sqrt{cx} + R_j + \mathcal{O}\left((1+b)^2 j/c\right), \end{aligned} \quad (2.41)$$

avec

$$R_j = R_j(x; a, b) = \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} (k^2 c/x - j) (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}).$$

Preuve. D'après la proposition 2.10 et (2.27), la contribution à la seconde somme du terme d'erreur de (2.23) est

$$\ll (K_{j+1} - K_{j-1}) (1+b)^2 (cx/j)^{-3/2} \ll (1+b)^2 j/c^2 x.$$

Pour $k \leq K_{j+1}$, l'inégalité (2.32) nous permet d'écrire

$$\frac{\{x/k - b\} - (a+b+1)/2}{(x/k - b)^2} = \frac{k^2}{x^2} (\{x/k - b\} - (a+b+1)/2) + \mathcal{O}\left((1+b)^2 k^3/x^3\right).$$

La contribution à cette seconde somme du terme $(\{t\} - (a + b + 1)/2)/t^2$ de (2.23) est donc

$$x^{-2} \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} k^2 (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) + \mathcal{O}((1+b)^2 j/c^2 x).$$

En utilisant (2.26), (2.27) et (2.32), on voit que la contribution du terme $1/t$ de (2.23) est

$$\begin{aligned} \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} \left(\frac{1}{x/k - a} - \frac{1}{x/k - b} \right) &= -\frac{c}{x^2} \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} (k^2 + \mathcal{O}(bk^3/x)) \\ &= -\frac{(j+1)\sqrt{j+1} - (j-1)\sqrt{j-1}}{3\sqrt{cx}} + \mathcal{O}(bj/cx). \end{aligned}$$

Enfin, la première somme du premier membre de (2.41) vaut, d'après (2.25),

$$\begin{aligned} c(K_{j+1} - K_{j-1}) - \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) &= \\ (\sqrt{j+1} - \sqrt{j-1})\sqrt{cx} + \mathcal{O}(c) - \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}). \end{aligned}$$

On obtient la relation (2.41) en collectant ces estimations.

Notons que la relation «triviale» de R_j est donnée par la proposition 2.9 :

$$R_j \ll (x/cj)^{1/2} + j.$$

—

Estimons enfin la contribution à W_j des termes de (2.21) où figure N_j .

Proposition 2.14 *Pour $0 < j \leq cx/9(1+b)^2$, on a*

$$jN_j + cx F(N_j) = 2\sqrt{jcx} + \mathcal{O}((1+b)j).$$

Preuve. Rappelons que N_j est le plus grand nombre entier n tel que

$$(n+a)(n+b) \leq cx/j.$$

On a donc

$$N_j = \left\lfloor \sqrt{cx/j + c^2/4} - (a+b)/2 \right\rfloor.$$

En particulier,

$$\sqrt{cx/j} - (a+b)/2 - 1 \leq N_j \leq \sqrt{cx/j}.$$

Pour $0 < j \leq cx/9(1+b)^2$, la borne inférieure de cet encadrement de N_j est $\geq \frac{2}{3}\sqrt{cx/j}$. Par suite, en utilisant (2.22),

$$\begin{aligned} jN_j + cx F(N_j) &= j \left(\sqrt{cx/j} + \mathcal{O}(1+b) \right) + cx \left(\frac{1}{\sqrt{cx/j} + \mathcal{O}(1+b)} + \mathcal{O}((1+b)/(cx/j)) \right) \\ &= 2\sqrt{jcx} + \mathcal{O}((1+b)j). \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'adapter la proposition 6, p. 18 de [3].

Proposition 2.15 *Pour $0 < j \leq cx/9(1+b)^2 - 1$, on a*

$$W_j = f(j)\sqrt{cx} + R_j + \mathcal{O}((1+b)^2 j/c) + \mathcal{O}\left((1+b)^2 j^{5/2} (cx)^{-1/2}\right).$$

avec

$$f(j) = \frac{8j+2}{3}\sqrt{j+1} - \frac{8j-2}{3}\sqrt{j-1} - 4\sqrt{j},$$

et où R_j est défini par (2.3).

Preuve. On obtient cette estimation en insérant dans (2.21) les résultats des propositions 2.12, 2.13 et 2.14.

2.3 Estimation de la somme $W(x; a, b)$

2.3.1 Mise en évidence du terme principal

Nous donnons d'abord une expression de $W = W(x; a, b)$ faisant intervenir un paramètre J .

Proposition 2.16 *Pour x et J réels tels que $3/2 \leq J \leq cx/9(1+b)^2 - 1$, on a*

$$W = \frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \sqrt{cx} + \mathcal{R}(J) + \mathcal{O}((1+b)^2 J^2/c) + \mathcal{O}\left((cx/J)^{1/2}\right) + \mathcal{O}\left((1+b)^2 J^{7/2} (cx)^{-1/2}\right),$$

où l'on a posé

$$\mathcal{R}(J) = R_0 + \sum_{1 \leq j \leq J} R_j,$$

les quantités R_j étant définies par (2.2) ($j = 0$) et (2.3) ($j > 0$).

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
W &= W_0 + \sum_{1 \leq j \leq J} W_j + \sum_{j > J} W_j \\
&= W_0 + \sum_{1 \leq j \leq J} W_j + \mathcal{O}\left((cx/J)^{1/2}\right) \quad (\text{d'après la proposition 2.7, et car } 1 \leq cx/J) \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{cx} + R_0 + \mathcal{O}\left((1+b)^2/c\right) \\
&\quad + \sum_{1 \leq j \leq J} \left(f(j)\sqrt{cx} + R_j + \mathcal{O}\left((1+b)^2 j/c\right) + \mathcal{O}\left((1+b)^2 j^{5/2} (cx)^{-1/2}\right)\right) \\
&\quad + \mathcal{O}\left((cx/J)^{1/2}\right) \quad (\text{d'après les propositions 2.6 et 2.15}) \\
&= \frac{2}{\pi}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{cx} + \mathcal{R}(J) + \mathcal{O}\left((1+b)^2 J^2/c\right) + \mathcal{O}\left((cx/J)^{1/2}\right) + \mathcal{O}\left((1+b)^2 J^{7/2} (cx)^{-1/2}\right),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la somme de la série

$$\frac{2}{3} + \sum_{j=1}^{\infty} f(j) = \frac{2}{\pi}\zeta(3/2) \quad (\text{cf. [3], (35), p. 20}),$$

et l'estimation $f(j) \ll j^{-3/2}$.

En restreignant l'intervalle de variation de J , simplifions légèrement l'énoncé de la proposition 2.16.

Proposition 2.17 *Pour $x \geq 40(1+b)^3 c^{-2}$ et J tel que $3/2 \leq J \leq (x/c)^{1/3}$, on a*

$$W = \frac{2}{\pi}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{cx} + \mathcal{R}(J) + \mathcal{O}\left((1+b)^2 J^2/c\right) + \mathcal{O}\left((cx/J)^{1/2}\right).$$

Preuve. D'une part, on vérifie que

$$x \geq 40(1+b)^3 c^{-2} \implies (x/c)^{1/3} \leq cx/9(1+b)^2 - 1.$$

D'autre part, on a

$$J \leq (x/c)^{1/3} \iff (1+b)^2 J^{7/2} (cx)^{-1/2} \leq (1+b)^2 J^2/c.$$

2.3.2 Démonstration du Théorème A

Proposition 2.18 *Pour $x \geq 40(1+b)^4/c^3$,*

$$W = \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{cx} + \mathcal{R}(J) + \mathcal{O}\left((1+b)^{2/5} c^{1/5} x^{2/5}\right),$$

où $J = c^{3/5} (1+b)^{-4/5} x^{1/5}$.

Preuve. Nous choisissons J pour équilibrer les deux premiers termes d'erreur de la proposition 2.16 :

$$J = c^{3/5} (1+b)^{-4/5} x^{1/5}.$$

On vérifie que

$$x \geq 40 (1+b)^4 / c^3 \Rightarrow 3/2 \leq J \leq (x/c)^{1/3},$$

et les deux termes d'erreur de la proposition 2.17 sont

$$\ll (1+b)^{2/5} c^{1/5} x^{2/5}.$$

2.4 Démonstration du Théorème B

Afin d'estimer la somme $\mathcal{R}(J)$, nous utiliserons l'énoncé suivant, dû à van der Corput, qui résulte de la version la plus simple de sa méthode d'estimation de sommes trigonométriques (cf. théorème 1.3 chapitre 1) et (cf. [23], Satz 5, p.252; [22], Satz 1, p.215; [21], p.23).

Soit u, v des nombres réels tels que $v - u \geq 1$, et $f : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable, dont la dérivée seconde est monotone et de signe constant. On a alors

$$\sum_{u < n \leq v} (\{f(n)\} - 1/2) \ll \int_u^v |f''(t)|^{1/3} dt + \frac{1}{\sqrt{|f''(u)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(v)|}}, \quad (2.42)$$

où la constante implicite est absolue.

Par sommation partielle¹, on déduit de (2.42) l'estimation suivante.

$$\sum_{u < n \leq v} \gamma_n (\{f(n)\} - 1/2) \ll G \int_u^v |f''(t)|^{1/3} dt + \frac{G}{\sqrt{|f''(u)|}} + \frac{G}{\sqrt{|f''(v)|}} \quad (2.43)$$

où

$$G = \max_{u < n \leq v} |\gamma_n| + \sum_{u < n \leq v} |\gamma_{n+1} - \gamma_n|,$$

et où la constante implicite est absolue, $(\gamma_n)_{u < n \leq v}$ étant une suite de nombres réels.

2.4.1 Estimation de la somme $\mathbf{R}(J)$

Proposition 2.19 Pour $2 \leq j \leq (x/c)^{1/3}$, on a

$$R_j \ll x^{1/3} j^{-1} + x^{1/4} j^{3/4} c^{-3/4}.$$

¹Pour $S_n = \sum_{u < k \leq n} \psi(f(k))$, on a $\sum_{u < n \leq v} \gamma_n \psi(f(n)) = \sum_{u < n \leq v} \gamma_n (S_n - S_{n-1})$
 $= \sum_{u < n \leq v} \gamma_n S_n - \sum_{u-1 < n \leq v-1} \gamma_{n+1} S_n \leq |\gamma_v| |S_v| + \sum_{u < n \leq v-1} |\gamma_n - \gamma_{n+1}| |S_n|.$

Preuve. Pour $K_{j-1} < k \leq K_{j+1}$, posons

$$\gamma_k = \gamma_k(x, c, j) = ck^2/x - j.$$

La suite (γ_k) étant croissante, la proposition 2.8 implique l'estimation

$$\max_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} |\gamma_n| + \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| \ll 1 + j^{3/2} (c/x)^{1/2} \ll 1,$$

en tenant compte de l'hypothèse $j \leq (x/c)^{1/3}$.

En appliquant (2.43) aux deux fonctions $f(t) = x/t - a$ et $f(t) = x/t - b$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} \gamma_k(\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) &\ll \int_{K_{j-1}}^{K_{j+1}} (x/t^3)^{1/3} dt + \frac{1}{\sqrt{x/K_{j-1}^3}} + \frac{1}{\sqrt{x/K_{j+1}^3}} \\ &\ll x^{1/3} \ln \frac{K_{j+1}}{K_{j-1}} + x^{-1/2} K_{j+1}^{3/2} \\ &\ll x^{1/3} \frac{K_{j+1} - K_{j-1}}{K_{j-1}} + x^{-1/2} (jx/c)^{3/4} \\ &\quad \text{(d'après (2.30))} \\ &\ll x^{1/3} j^{-1} + x^{1/4} j^{3/4} c^{-3/4}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (2.25) et (2.29).

Proposition 2.20 *Pour $x \geq 1 + c$, on a*

$$R_0 + R_1 \ll x^{1/3} \ln(2x/c) + c^{-3/4} x^{1/4}.$$

Preuve. On a

$$R_0 + R_1 = \frac{c}{x} \sum_{1 \leq k \leq K} k^2 (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) + \sum_{1 \leq k \leq K_2} (k^2 c/x - 1) (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}).$$

Un raisonnement analogue à celui de la démonstration de la proposition 2.19 fournit l'estimation

$$\begin{aligned} R_0 + R_1 &\ll 1 + \int_1^{K_2} (x/t^3)^{1/3} dt + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x/K_2^3}} \\ &\ll x^{1/3} \ln(2x/c) + c^{-3/4} x^{1/4}. \end{aligned}$$

Proposition 2.21 *Pour x et J réels tels que $3/2 \leq J \leq (x/(1+c))^{1/3}$, on a*

$$\mathcal{R}(J) \ll x^{1/3} \ln(x/c) + x^{1/4} J^{7/4} c^{-3/4}.$$

Preuve. D'après les propositions 2.19 et 2.20, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(J) &= \sum_{0 \leq j \leq J} R_j \\ &\ll x^{1/3} \ln(x/c) + \sum_{0 \leq j \leq J} (x^{1/3} j^{-1} + x^{1/4} j^{3/4} c^{-3/4}) \\ &\ll x^{1/3} \ln(x/c) + x^{1/4} J^{7/4} c^{-3/4}.\end{aligned}$$

2.4.2 Conclusion

Proposition 2.22 *Pour $x \geq 40c^{-5}(1+b)^{27/2}$,*

$$W = \frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \sqrt{cx} + \mathcal{O}(c^{2/9} x^{4/9}).$$

Preuve. Pour

$$x \geq 40c^{-5}(1+b)^{27/2} \tag{2.44}$$

et $3/2 \leq J \leq (x/(1+b))^{1/3}$, la conjonction des résultats des propositions 2.17 et 2.21 montre que

$$W - \frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \sqrt{cx} \ll (cx/J)^{1/2} + x^{1/4} J^{7/4} c^{-3/4} + x^{1/3} \ln(x/c) + (1+b)^2 J^2/c.$$

Nous choisissons J pour équilibrer les deux premiers termes d'erreur : $J = c^{5/9} x^{1/9}$. Cette quantité vérifie l'encadrement $3/2 \leq J \leq (x/(1+b))^{1/3}$ si

$$x \geq 40 \max(c^{-5}, (1+b)^4). \tag{2.45}$$

On a alors, d'une part,

$$(cx/J)^{1/2} + x^{1/4} J^{7/4} c^{-3/4} \asymp c^{2/9} x^{4/9}.$$

D'autre part, sous les hypothèses (2.44) et (2.45), on a

$$x^{1/3} \ln(x/c) \ll x^{1/3} (x/c)^{1/18} \ll c^{2/9} x^{4/9},$$

et l'inégalité

$$x \geq c^{-1/2} (1+b)^9 \tag{2.46}$$

entraîne

$$(1+b)^2 J^2/c \asymp (1+b)^2 c^{1/9} x^{2/9} \ll c^{2/9} x^{4/9},$$

Si $x \geq 40c^{-5}(1+b)^{27/2}$, les trois conditions (2.44), (2.45) et (2.46) sont vérifiées, et le résultat est démontré.

Chapitre 3

Sur une somme liée à la fonction $\omega(n)$ et la fonction partie entière

Dans cette partie, nous présentons une application qui montre l'utilisation du théorème principal de notre travail, en étudiant une caractéristique importante de la fonction additive $\omega(n)$. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans [11].

3.1 Sur la fonction $\omega(n)$

Soit n un entier, $n \geq 1$. On pose $\omega(n) := \sum_{p|n} 1$. La fonction additive $\omega(n)$ désigne le nombre de diviseurs premiers distincts de n . Plusieurs auteurs ont étudié les propriétés de cette fonction. En 1917, G.H. Hardy and S. Ramanujan [14] ont prouvé le résultat classique,

$$\sum_{n \leq x} \omega(n) = x \log \log x + Bx + O\left(\frac{x}{\log x}\right), \quad (3.1)$$

où $B = \gamma + \sum_p (\log(1 - 1/p) + 1/p)$ et γ désigne la constante d'Euler. Le résultat (3.1) a été généralisé en 1970 [19] et en 1976 [12] par la formule suivante :

$$\sum_{k \leq n} \omega(k) = n \log \log n + Bn + \sum_{j=1}^m \frac{na_j}{(\log n)^j} + O\left(\frac{n}{(\log n)^{m+1}}\right),$$

pour tout entier $m \geq 1$, avec

$$a_j = - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} (\log t)^{j-1} dt.$$

Dans [18], nous avons aussi le résultat suivant :

$$\sum_{n \leq x} \omega(d(n)) = cx + O(x^{1/2} \log^5 x), \quad (3.2)$$

tel que $d(n) := \sum_{d|n} 1$ et $c > 0$, une constante.

Il est facile de montrer que la relation suivante est vérifiée pour tout $x \geq 1$:

$$\sum_{n \leq x} d(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{k \leq \frac{x}{n}} 1 = \sum_{n \leq x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor,$$

où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière de $t \in \mathbb{R}$ (voir [6, *example* – 4.18]).

3.2 Résultat obtenu

Théorème 3.1 *Pour tout $x \geq 1$ assez grand, nous avons*

$$\sum_{n \leq x} \omega\left(\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor\right) = Cx + \mathcal{O}(x^{1/2} \log x),$$

tel que $C \approx 0.5918\dots$ est un réel strictement positif.

La preuve de ce résultat est basée sur les lemmes suivants :

Lemme 3.1 *Soit $x \geq 1$ un nombre réel. Pour toute fonction arithmétique f , nous avons*

$$\sum_{n \leq x} f\left(\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor\right) = \sum_{0 < n \leq x} f(n) \left(\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{n+1} \right\rfloor \right).$$

Preuve. Par définition, si on pose $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = k$, alors on a $x/(k+1) < n \leq x/k$.

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} f\left(\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor\right) &= \sum_{\substack{n \leq x \\ x/(n-1) < k \leq x/n}} f(k) \\ &= \sum_{\substack{k \leq x \\ x/(k+1) < n \leq x/k}} f(k) \\ &= \sum_{\substack{k \leq x \\ n \leq x/k}} f(k) - \sum_{\substack{k \leq x \\ n \leq x/(k+1)}} f(k) \\ &= \sum_{k \leq x} f(k) \sum_{n \leq x/k} 1 - \sum_{k \leq x} f(k) \sum_{n \leq x/(k+1)} 1 \\ &= \sum_{k \leq x} f(k) \left(\left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k+1} \right\rfloor \right). \end{aligned}$$

Lemme 3.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et δ un réel positif. Pour tout réel $x \geq 1$, on a

$$\int_x^{+\infty} e^{-\delta t} (\log t)^n dt \leq \frac{n!}{\delta} e^{-\delta x} \left(\log x + \frac{1}{\delta x} \right)^n.$$

Preuve. En posant $I_n = \int_x^{+\infty} e^{-\delta t} (\log t)^n dt$ et en utilisant l'intégration par parties, on a

$$I_n = \frac{e^{-\delta x}}{\delta} (\log x)^n + \frac{n}{\delta} \int_x^{+\infty} \frac{(\log t)^{n-1}}{t e^{\delta t}} dt \leq \frac{e^{-\delta x}}{\delta} (\log x)^n + \frac{n}{\delta x} I_{n-1}.$$

En utilisant le raisonnement par récurrence, on obtient pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} I_n &\leq \frac{e^{-\delta x}}{\delta} \sum_{k=0}^n k! \binom{n}{k} \frac{(\log x)^{n-k}}{(\delta x)^k} \\ &\leq \frac{n!}{\delta} e^{-\delta x} \left(\log x + \frac{1}{\delta x} \right)^n. \end{aligned}$$

Lemme 3.3 Soit x un nombre réel suffisamment grand, il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\sum_{n \leq x} \frac{\omega(n)}{n(n+1)} = C + \mathcal{O}\left(\frac{\log \log x}{x}\right), \quad (3.3)$$

où $C \approx 0.5918 \dots$.

Preuve. Soit x un nombre réel suffisamment grand, on a

$$\sum_{n \leq x} \frac{\omega(n)}{n(n+1)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\omega(n)}{n(n+1)} - \sum_{n > x} \frac{\omega(n)}{n(n+1)}. \quad (3.4)$$

La borne triviale bien connue de $\omega(n)$ (voir [17, (6.85) – p.169]), appliquée à la première somme à droite en (3.4), implique que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\omega(n)}{n(n+1)} \leq \frac{1}{\log 2} \sum_{n \geq 1} \frac{\log n}{n(n+1)}.$$

Donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\omega(n)}{n(n+1)}$ est convergente, et par un calcul numérique, on trouve que

$$C = \sum_{n \geq 1} \frac{\omega(n)}{n(n+1)} \approx 0.5918 \dots. \quad (3.5)$$

Dans le second terme à gauche de (3.4), on pose $g(t) = \frac{1}{t(t+1)}$, et par sommation partielle (1.1), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n>x} \frac{\omega(n)}{n(n+1)} &= -g(x) \sum_{n \leq x} \omega(n) - \int_x^{+\infty} g'(t) \left(\sum_{x < n \leq t} \omega(n) \right) dt \\ &= \frac{-1}{x(x+1)} \sum_{n \leq x} \omega(n) - \int_x^{+\infty} \frac{2t-1}{t^2(t+1)^2} \left(\sum_{x < n \leq t} \omega(n) \right) dt. \end{aligned}$$

En utilisant la formule (3.1), on obtient

$$\left| \sum_{n>x} \frac{\omega(n)}{n(n+1)} \right| \leq \frac{\log \log x}{x} + \frac{B}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x \log x}\right) + \mathcal{O}\left(\int_x^{+\infty} \frac{\log \log t}{t^2} dt\right). \quad (3.6)$$

D'après le lemme 4.2 ($n=1, \delta=1$), et en utilisant un changement de variable, on a

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{\log \log t}{t^2} dt &\leq \frac{\log \log x}{x} + \frac{1}{x \log x} \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{\log \log x}{x}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant cette dernière estimation dans (3.6), on obtient

$$\sum_{n>x} \frac{\omega(n)}{n(n+1)} = \mathcal{O}\left(\frac{\log \log x}{x}\right). \quad (3.7)$$

La conjonction des formules (3.4), (3.5) et (3.7), termine la démonstration de ce lemme.

Démonstration du Théorème. Pour tout $x \geq 1$, d'après le lemme 4.1, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \omega\left(\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor\right) &= \sum_{n \leq x} \omega(n) \left(\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{n+1} \right\rfloor \right) \\ &= x \sum_{n \leq x} \frac{\omega(n)}{n(n+1)} + \sum_{n \leq x} \omega(n) \left(\left\{ \frac{x}{n+1} \right\} - \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant la borne triviale de $\omega(n)$ et le théorème B —chapitre 2

(En prenant $a=1, b=2$), on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \leq x} \omega(n) \left(\left\{ \frac{x}{n+1} \right\} - \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right) \right| &\leq \sum_{n \leq x} \omega(n) \left| \left\{ \frac{x}{n} \right\} - \left\{ \frac{x}{n+1} \right\} \right| \\ &\leq \frac{\log x}{\log 2} \sum_{n \leq x} \left| \left\{ \frac{x}{n} \right\} - \left\{ \frac{x}{n+1} \right\} \right| \\ &\leq \frac{\log x}{\log 2} \left(\frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \sqrt{x} + \mathcal{O}(x^{4/9}) \right) \\ &= \frac{2\zeta(3/2)}{\pi \log 2} x^{1/2} \log x + \mathcal{O}(x^{4/9} \log x). \end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{n \leq x} \omega(n) \left(\left\{ \frac{x}{n+1} \right\} - \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right) = \mathcal{O} \left(x^{1/2} \log x \right).$$

Finalement, d'après le lemme 4.3, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \omega \left(\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right) &= Cx + \mathcal{O}(\log \log x) + \mathcal{O} \left(x^{1/2} \log x \right) \\ &= Cx + \mathcal{O} \left(x^{1/2} \log x \right). \end{aligned}$$

Remarque 3.1 *En suivant les mêmes étapes que l'étude précédente, en remplaçant la fonction ω par la fonction Ω , on obtient le résultat suivant*

$$\sum_{n \leq x} \Omega \left(\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right) = Cx + \mathcal{O} \left(x^{1/2} \log x \right),$$

où C est un réel positif défini par

$$C = \sum_{n \geq 1} \frac{\Omega(n)}{n(n+1)}.$$

Bibliographie

- [1] T. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag Berlin, 1976.
- [2] M. Balazard, L. Benferhat et M. Bouderbala, *Sur la variation de certaines suites de parties fractionnaires*, Communications in Mathematics, University of Ostrava, (2020) .
- [3] M. Balazard, *Sur la variation totale de la suite des parties fractionnaires des quotients d'un nombre réel positif par les nombres entiers naturels consécutifs*, Mosc. J. Comb. Number Theory. 7 (2017) , 3 – 23.
- [4] S. Banach and H. Steinhaus, *Sur le principe de la condensation de singularités*, Fundam. Math. 9 (1927), 50 – 61.
- [5] A. Blanchard, *Initiation a la théorie analytique des nombres*, Dunod, paris, 1969.
- [6] O. Bordelles, *Arithmetic Tales*. Springer-Verlag London, 2012.
- [7] O. Bordelles, *Multiplicative function over short segments*, Actia Arithmetica-january, 2013.
- [8] O. Bordelles, *On short sums of certain multiplicative functions*, Journal of Inequalities in Pure and Applied. 3 (2002), Art. 70.
- [9] J. Bourgain, *Decoupling exponential sums and the Riemann zeta function*, J. Amer. Math. Soc. 30 (2017), 205 – 224.
- [10] J. Bourgain and N. Watt, *Mean square of zeta function, circle problem and divisor problem revisited*, available at <https://arxiv.org/abs/1709.04340>, 2017.
- [11] M. Bouderbala and M. Karras, *On a sum involving the number of distinct prime factors function related to the integer part function*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics. 26 (2020) , 52 – 56.
- [12] P. Diaconis, *Asymptotic expantions for the mean and variance of the number of prime factors of a number n*, T. R 96. Departement of Statistics, Stanford University, 1976.
- [13] S. W .Graham and G.Kolesnik, *Van der Corput's method of exponential sums*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press. 126 (1991) .

-
- [14] G.H. Hardy and S. Ramanujan, *The normal number of prime factors of a number n* . Quart. J. Math. 48 (1917), 76 – 92.
- [15] E. Kowalski, *Un cours de théorie analytique*, Société Mathématique de France, 2004.
- [16] E. Krätzel, *Lattice points*. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [17] A. Ivić and Jean-Marie de Koninck, *Topics in Arithmetical Functions*, North Holland. 43 (1980).
- [18] G. J. Rieger, *Über einige arithmetische Summen*, Manuscripta Math. 7 (1972), 23 – 34.
- [19] B. Safari, *Sur quelques applications de la méthode de l'hyperbole de Dirichlet à la théorie des nombres premiers*, Enseignement Math. 14 (1970), 205 – 224.
- [20] J. D. Vaaler, *Some extremal problems in Fourier analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 183 – 216.
- [21] J. G. Van der Corput, *Méthodes d'approximation dans le calcul du nombre des points à coordonnées entières*, Enseign. Math. 23(1923), 5 – 29.
- [22] J. G. Van der Corput, *Neue zahlentheoretische Abschätzungen*, Math. Ann. 89 (1923), 215 – 254.
- [23] J. G. Van der Corput, *Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme*, Math. Z. 17 (1923), 250 – 259.
- [24] A. Wintner, *Square root estimates of arithmetical sum functions*, Duke Math. J. 13 (1946), 185 – 193.