

N° d'ordre : 18/2009-M/MT

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA**  
**RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE**  
**« HOUARI BOUMÉDIÈNE »**  
**FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES**



**MÉMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

**EN: MATHÉMATIQUES**

Spécialité : Analyse : Systèmes dynamiques

Par: **GUETTAF Rachid**

Sujet

**ÉTUDE DE PROBLÈMES DE CONTACT AVEC  
FROTTEMENT POUR DES MATÉRIAUX ÉLASTIQUES**

Soutenu publiquement le *14/03/2009*, devant le jury composé de:

Mr. <b>R. BEBBOUCHI</b>	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr. <b>A. TOUZALINE</b>	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr. <b>B. ABID</b>	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.
Mr. <b>M. MEDJDEN</b>	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.

# *Remerciements*

*Je ne peux achever ce mémoire sans exprimer ma grande reconnaissance envers Monsieur **A. Touzaline** mon Directeur de thèse pour sa confiance, sa patience ainsi que pour son soutien et sa gentillesse.*

*J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur **R. Bebbouchi**, Professeur à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.*

*J'exprime mes très sincères remerciements aux Messieurs **B. Abid** et **M. Medjdan** Maîtres de Conférences à l'U.S.T.H.B. Je suis très honoré qu'ils aient accepté de faire partie du jury.*

*Je tiens à remercier également mes professeurs, mes amis et toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.*

*Enfin, c'est avec une grande émotion que j'exprime dans ces quelques mots ma profonde gratitude aux membres de ma famille, pour tous les encouragements et leur soutien continu.*

# Etude de problèmes de contact avec frottement pour des matériaux élastiques

## Résumé

Ce mémoire porte sur l'étude de quelques problèmes aux limites décrivant le contact entre un corps déformable et une fondation. Nous considérons des problèmes statiques et des processus quasi-statiques en élasticité linéaire. Dans le cas statique nous établissons dans l'ordre, l'existence, l'unicité, la dépendance continue de la solution par rapport aux données en utilisant des arguments de compacité, du point fixe et de semi-continuité inférieure. Dans le cas quasi-statique nous utilisons les mêmes arguments et une méthode de discrétisation temporelle pour montrer l'existence d'une solution. Nous approchons numériquement les problèmes statiques par une méthode des éléments finis conformes. Nous obtenons des estimations d'erreur pour chaque problème et des résultats de convergence d'algorithmes itératifs.

**Mots-clés :** *matériau élastique, contact, compliance normale, inéquation variationnelle, solution faible, éléments finis, estimation d'erreur.*

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 <i>Formulation des problèmes. Préliminaires</i></b>	<b>4</b>
1.1 Formulation des problèmes mécaniques . . . . .	5
1.1.1 Tenseur de déformations . . . . .	5
1.1.2 L'équation de mouvement . . . . .	5
1.1.3 Loi de comportement . . . . .	6
1.1.4 Conditions au bord . . . . .	6
1.1.5 Formulation mathématique des problèmes . . . . .	10
1.2 Préliminaires . . . . .	12
1.2.1 Espaces fonctionnels . . . . .	12
1.2.2 Problèmes abstraits . . . . .	21
<b>2 <i>Problème de contact statique avec compliance normale et frottement</i></b>	<b>23</b>
2.1 Enoncé du problème - Hypothèses . . . . .	24
2.2 Formulation variationnelle . . . . .	26
2.3 Existence et unicité de la solution du problème . . . . .	31
2.4 Résultats de dépendance continue de la solution par rapport aux données . .	33
2.4.1 Dépendance continue de la solution par rapport aux données $\varphi_1, \varphi_2$ .	34
2.4.2 Dépendance continue de la solution par rapport aux fonctions de contact . . . . .	35
2.5 <i>Conclusion</i> . . . . .	36

<b>3</b>	<b><i>Problème de contact statique avec coefficient de frottement dépendant de la solution</i></b>	<b>37</b>
3.1	Enoncé du problème - Hypothèses . . . . .	38
3.2	Formulation variationnelle . . . . .	39
3.3	Résultat d'existence et d'unicité . . . . .	41
3.4	Dépendance continue de la solution par rapport aux données . . . . .	44
3.4.1	Dépendance continue de la solution par rapport aux données $\varphi_1, \varphi_2$ : . . . . .	44
3.4.2	Dépendance continue de la solution par rapport au coefficient de frottement . . . . .	45
3.5	<i>Conclusion</i> . . . . .	46
<b>4</b>	<b><i>Problème quasi-statique avec compliance normale et frottement</i></b>	<b>47</b>
4.1	Enoncé du problème - Hypothèses . . . . .	48
4.2	Formulation variationnelle du problème . . . . .	49
4.3	Existence de solutions du problème . . . . .	51
4.4	<i>Conclusion</i> . . . . .	58
<b>5</b>	<b><i>Problème quasi-statique avec coefficient de frottement dépendant de la solution</i></b>	<b>59</b>
5.1	Enoncé du problème - Hypothèses . . . . .	60
5.2	Formulation variationnelle du problème . . . . .	61
5.3	Existence de solutions du problème . . . . .	62
5.4	<i>Conclusion</i> . . . . .	67
<b>6</b>	<b><i>Approximation numérique des problèmes de contact statique</i></b>	<b>68</b>
6.1	Cas de contact statique avec compliance normale et frottement . . . . .	69
6.1.1	Approximation du problème continu . . . . .	69
6.1.2	Estimation de l'erreur . . . . .	71
6.1.3	Itérations successives et convergence . . . . .	74
6.2	Cas de contact statique avec coefficient de frottement dépendant de la solution	75
6.2.1	Approximation du problème continu . . . . .	75
6.2.2	Estimation de l'erreur . . . . .	76
6.2.3	Itérations successives et convergence . . . . .	78
6.3	Etude d'un exemple dans le cas bidimensionnel . . . . .	79

6.4 <i>Conclusion</i> . . . . .	88
<b>Conclusion générale</b>	<b>89</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>91</b>

# Notations

Si  $X$  est un espace de Hilbert réel et  $d \in \mathbf{N}^*$ , on utilise les notations suivantes:

$X^d$  : l'espace défini par  $X^d = \{x = (x_i) | x_i \in X, i = \overline{1, d}\}$ .

$(\cdot, \cdot)_X$  : le produit scalaire de  $X$ .

$\|\cdot\|_X$  : la norme de  $X$ .

$X'$  : l'espace dual de  $X$ .

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$  : le produit de dualité entre  $X'$  et  $X$ .

Si  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), on note par  $\overline{\Omega}$  l'adhérence de  $\Omega$ .

$\Gamma$  : la frontière de  $\Omega$ .

$\Gamma_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) : une partie de la frontière  $\Gamma$ .

*mes*  $\Gamma_1$  : la mesure de Lebesgue ( $d - 1$ ) dimensionnelle de  $\Gamma_1$ .

$\nu$  : la normale unitaire sortante à  $\Gamma$ .

$v_\nu, v_\tau$  : les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel  $v$  défini sur  $\overline{\Omega}$ .

$C^1(\overline{\Omega})$  : l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur  $\overline{\Omega}$ .

$D(\Omega)$  : l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans  $\Omega$ .

$D'(\Omega)$  : l'espace des distributions sur  $\Omega$ .

$D = [D(\Omega)]^d$ .

$D' = [D'(\Omega)]^d$ .

$\mathcal{D}$  : l'espace des fonctions symétriques appartenant à  $[D(\Omega)]^{d \times d}$ .

$\mathcal{D}'$  : l'espace des distributions symétriques appartenant à  $[D'(\Omega)]^{d \times d}$ .

$\mathcal{Q}$  : l'espace des fonctions symétriques appartenant à  $[L^2(\Omega)]^{d \times d}$ .

$H_1 = [H^1(\Omega)]^d$ .

$H_d = \{\sigma \in \mathcal{Q} | \text{div} \sigma \in H\}$ .

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  : l'espace de Sobolev d'ordre  $\frac{1}{2}$  sur  $\Gamma$ .

$H_\Gamma = [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^d$ .

$H_\tau = \{\xi \in H_\Gamma | \xi_\nu = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma\}$ .

$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  : l'espace dual de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

$H'_\Gamma = [H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)]^d$  l'espace dual de  $H_\Gamma$ .

$\partial_i f$  : la dérivée partielle de  $f$  par rapport à la  $i$ ème composante  $x_i$ .

*div*  $f$  : la divergence de  $f$ .

$\ddot{u}$  (resp.  $\dot{u}$ ) représente la dérivée seconde (resp. première) du champ des déplacements par rapport au temps.

$\liminf$  : la limite inférieure.

$\limsup$  : la limite supérieure .

$S_d$  : l'espace des tenseurs symétriques de second ordre sur  $\mathbb{R}^d$ .

$\mathcal{P}_1$  : l'espace des polynômes de degré un.

*p.p.* : presque partout.

$\delta_{ij}$  : le symbole de Kronecher.

$\Pi_h$  : opérateur d'interpolation de Lagrange.

# *Introduction générale*

Les problèmes de contact avec ou sans frottement entre deux corps déformables ou entre un corps déformable et une fondation, abondent en industrie et dans la vie de tous les jours. Le simple contact entre une roue de voiture et la route, le piston avec la chemise, les frottements entre les plaques tectoniques sont des exemples parmi bien d'autres. Devant les besoins accrus des industriels, confrontés aux problèmes de contact en systèmes mécaniques, le contact entre solides rigides ou déformables a fait l'objet d'un investissement scientifique très important ces dernières années.

La littérature mathématique dédiée à l'étude des phénomènes de contact est récente, l'article de Signorini [35] où le problème de contact unilatéral (dit de Signorini) entre un corps linéairement élastique et une fondation rigide est l'une des premières publications mathématiques concernant ce sujet. Ce problème pouvait s'interpréter comme un système physique contraint par une inégalité variationnelle dont la solution dépend des contraintes physiques qui dépendent elles-mêmes de la solution recherchée. Les conditions aux limites qui permettent de rendre compte de ce comportement ont par conséquent une structure mathématique bien différente des conditions aux limites classiques telles que celles de Dirichlet ou de Neumann.

La formulation variationnelle associée à ce type de conditions a été étudiée mathématiquement par Fečera [13] où le problème de Signorini a été résolu en utilisant des arguments des inéquations variationnelles de type elliptique. Il s'ensuit les travaux de Duvaut et Lions [12] qui ont rajouté le frottement aux problèmes de contact et ils ont pu écrire ce problème sous forme d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle quadratique. Le problème de Signorini a été étudié par d'autres auteurs pour différentes lois de comportement, des résultats d'analyse mathématique de ce problème ont été établis par Hlaváček et Nečas [30], Kikuchi et Oden [22]. En élasticité linéaire les problèmes de contact unilatéral avec frottement de Coulomb ont été étudiés par Duvaut [11], Cocou [9]. Des problèmes de contact quasi-statique ont été étudiés par Anderson [2,3], Shillor et Sofonea [36], Rocca [33]

et Klarbring et Miklic [23]. En raison des difficultés introduites par le contact et le frottement, les chercheurs ont souvent limité leurs études à un corps élastique en frottement avec un corps rigide. Afin d'intégrer une certaine réalité physique de l'interface du contact, la loi de compliance normale a été considérée la première fois dans [27]. Dans cette loi les interfaces en contact sont supposées pénétrables, ce type de problème a été étudié par Anderson [3], Motreanu et Sofonea [29], Touzaline [40]. A la modélisation et l'analyse variationnelle s'ajoutent l'analyse et la mise en œuvre numérique, pour une étude complète des phénomènes de contact. L'analyse numérique des modèles est destinée à l'étude des schémas discrétisés associés aux formulations faibles, parmi ceux qui ont abordé ce sujet Glowinski et Lions[20], Han et Sofonea[16], et Haslinger et Vlach [15]. La mise en œuvre numérique a pour but d'obtenir des simulations numériques permettant de vérifier la fiabilité des modèles mathématiques utilisés dans la description du contact.

Dans ce travail, on étudie des problèmes de contact statique ou quasi-statique en élasticité linéaire sous l'hypothèse des petites déformations. Le but est de justifier rigoureusement l'existence et l'unicité ainsi que la stabilité de la solution de deux problèmes statiques linéaires. On étudie aussi l'existence d'une solution pour deux problèmes de contact quasi-statique. Enfin on effectue l'analyse numérique des problèmes statiques.

Ce mémoire est composé de six chapitres. Le premier est consacré à l'introduction et à la formulation mathématique des problèmes mécaniques auxquels on s'intéresse. On introduit les espaces fonctionnels, notamment de type Sobolev associés aux opérateurs divergence et déformation en rappelant les théorèmes de trace et les propriétés essentielles, on rappelle aussi des résultats abstraits standards d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles elliptiques.

Le deuxième chapitre concerne l'étude d'un problème de contact statique entre un corps élastique et une fondation réactive. Le contact est modélisé avec une loi de compliance normale et de frottement de Coulomb. On écrit la formulation variationnelle du problème et on montre qu'il admet une solution unique. On étudie la dépendance continue de la solution par rapport aux données dans la dernière section.

Dans le troisième chapitre, on considère un problème de contact statique avec frottement entre un corps élastique linéaire et une fondation rigide où le coefficient de frottement dépend de la solution du problème. Le contact est modélisé avec une version simplifiée de Tresca du frottement sec. On énonce le problème et les hypothèses, puis on propose une formulation variationnelle du problème. La section suivante sera consacrée à l'étude de l'existence et

l'unicité de la solution faible. On termine ce chapitre par l'étude de la dépendance continue de la solution par rapport aux données et par rapport au coefficient de frottement.

Dans les chapitres quatre et cinq, on étend l'étude des problèmes statiques aux cas quasi-statique. Pour chaque problème, on propose une formulation variationnelle et on établit l'existence d'une solution des problèmes ainsi formulés, en utilisant une méthode de discrétisation en temps.

Dans le dernier chapitre, on effectue l'analyse numérique des problèmes de contact statique définis aux chapitres deux et trois. La méthode utilisée est celle des éléments finis conformes. Pour chaque problème, on montre l'existence et l'unicité de la solution des problèmes discrétisés, on y établit des estimations de l'erreur et on montre la convergence des schémas proposés. Enfin, on présente une étude élémentaire concernant l'existence de solutions d'un exemple de problème de contact statique avec frottement et compliance normale dans le cas bidimensionnel où on établit précisément la non-unicité de la solution pour un coefficient de frottement assez large.

# Chapitre 1

## *Formulation des problèmes.*

### *Préliminaires*

Ce chapitre est consacré d'abord à l'introduction et à la formulation mathématique des problèmes mécaniques auxquels on s'intéresse. On fait des rappels sur la loi de comportement d'un corps élastique, ensuite on définit les conditions aux limites et les conditions de frottement d'un corps déformable en contact avec une fondation qu'on utilisera ultérieurement. Ensuite, on introduit les espaces fonctionnels notamment de type Sobolev associés aux opérateurs divergence et déformation en rappelant les théorèmes de trace et les propriétés fondamentales des principaux espaces fonctionnels. Enfin, on rappelle des résultats abstraits d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles elliptiques.

## 1.1 Formulation des problèmes mécaniques

Un solide est un ensemble de points matériels, chaque point du solide occupe un point de l'espace  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) et le corps est associé à une configuration qui est le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ; sous l'action de forces, lorsque un corps est non rigide il se déforme d'une certaine manière. Dans tout ce qui suit, on va considérer un corps déformable occupant un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), de frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  supposée régulière. On étudie dans un intervalle de temps  $[0, T]$ , l'évolution du corps due à l'application de forces de volume et de surface.

### 1.1.1 Tenseur de déformations

Les tenseurs et notamment les tenseurs du second ordre jouent un rôle important en mécanique des milieux continus, cela découle du souci de décrire les phénomènes physiques sous une forme indépendante du système de coordonnées choisi. Lorsque le corps est soumis à des tractions extérieures et des forces de volume il se déforme, c'est-à-dire que chaque point à l'intérieur du corps, se retrouvera à une position différente après déformation. On s'intéresse, au seul cas de petites déformations, le *tenseur des déformations linéarisé* noté  $\varepsilon_{ij}$ , est défini par:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.1.1)$$

Il est clair que  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , donc il s'agit d'un tenseur symétrique. On note par  $\mathbf{S}_d$  l'espace des tenseurs symétriques de second ordre dans  $\mathbb{R}^d$ .

### 1.1.2 L'équation de mouvement

Dans l'étude d'un système physique, la première étape consiste à formuler l'équation de mouvement des corps étudiés et à exprimer mathématiquement les conditions aux limites, l'évolution du corps due à l'application de forces de volume et de surface dans un intervalle de temps  $[0, T]$ , est décrite par l'équation de mouvement:

$$\rho \ddot{u} = \operatorname{div} \sigma(u) + \varphi_1 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (1.1.2)$$

où la *densité de masse*  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  et la *densité des forces volumiques*  $\varphi_1: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  sont des données. Le problème consiste à trouver *le champ de déplacements*  $u: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et *le champ des contraintes*  $\sigma: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{S}_d$ , vérifiant (1.1.2).

Les processus d'évolution modélés par l'équation (1.1.1) s'appellent processus dynamiques.

Dans le cas où le champ des vitesses  $\dot{u}$  varie très lentement par rapport au temps, le terme  $\rho\ddot{u}$  devient négligeable. Il s'agit alors d'un processus *quasi-statique*, dans ce cas l'équation (1.1.2) s'écrit:

$$\operatorname{div}\sigma(u) + \varphi_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (1.1.3)$$

La nouvelle équation (1.1.3) s'appelle *équation d'équilibre*.

Dans le cas statique le second membre de l'équation (1.1.2) est identiquement nul, dans ce cas on cherche *le champ de déplacements*  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  et *le champ de contraintes*  $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbf{S}_d$ , tel que:

$$\operatorname{div}\sigma(u) + \varphi_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.1.4)$$

**Remarque 1.1.** *Une solution  $u$  de (1.1.2) ou de (1.1.3) est dite régulière si elle possède le degré de régularité nécessaire pour que toutes les opérations de dérivation soient permises.*

Les équations (1.1.2) ou (1.1.3) ne suffisent pas à elles seules pour décrire les mouvements des milieux continus. En effet, il faut la compléter par une description propre au matériau. C'est l'objet de la loi de comportement qu'on va introduire brièvement.

### 1.1.3 Loi de comportement

Dans un corps élastique, l'action d'un certain nombre d'efforts conduit à un certain nombre de déformations, si l'on connaît la relation entre les deux, à savoir la relation entre le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  et le tenseur des déformations  $\varepsilon_{ij}$ , on est capable de caractériser et de prévoir le comportement mécanique du matériau. Cette relation d'origine souvent expérimentale, est appelée *loi de comportement*. On présente ci-dessous la loi de comportement élastique traitée dans ce mémoire.

Pour les matériaux élastiques linéaires, la loi de comportement est de la forme

$$\sigma = F(\varepsilon) \quad (1.1.5)$$

où  $F = (F_{ijkh})$  est une application linéaire.

### 1.1.4 Conditions au bord

La prise en compte du contact et du frottement en mécanique des solides déformables impose la définition de conditions aux limites sur les déplacements et sur les forces aux interfaces de contact.

### Condition de traction-déplacement

Soit un corps matériel (Fig.1) occupant un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), de frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  constituée de trois parties:  $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$ ,  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  ouverts disjoints. Soit  $\nu$  le vecteur normal extérieur à  $\Gamma$ . On considère les conditions aux limites suivantes:

$$u = u_g \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (1.1.6)$$

$$\sigma\nu = \varphi_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (1.1.7)$$

-La condition (1.1.6) est appelée *condition aux limites de déplacement*, elle signifie que le champ de déplacements est imposé sur la partie  $\Gamma_1$  de la frontière  $\Gamma$ , la fonction  $u_g$  étant une donnée du problème, si  $u_g = 0$ , le solide est encastré en  $\Gamma_1$  dans une structure fixe.

-La condition (1.1.7) est appelée *condition aux limites de traction*, elle signifie que le vecteur des contraintes de Cauchy  $\sigma\nu = (\sigma_{ij}\nu_j)$ ,  $i = 1, \dots, d$  est imposé sur la partie  $\Gamma_2$ , où  $\varphi_2$  représente *la densité des forces surfaciques appliquées*.

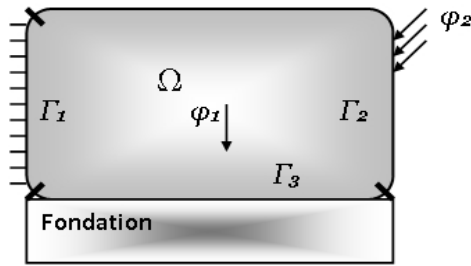


Fig.1. Contact entre un corps et une fondation.

### Loi de frottement:

$\Gamma_3$  représente la partie de  $\Gamma$  soumise à des conditions aux limites de frottement, ces conditions représentent la relation entre les efforts tangentiels sur la zone de contact et le mouvement tangentiel relatif (le glissement) du corps en contact avec la fondation. Ceci fait intervenir les composantes normales et tangentielles du champ de vecteurs déplacements. Pour tout champ de vecteurs  $u$  sur  $\Gamma$ , on définit  $u_\nu$  (resp.  $u_\tau$ ) la composante normale (resp. tangentielle) de  $u$  comme suit:

$$u_\nu = u \cdot \nu = u_i \nu_i$$

$$u_\tau = (u_{\tau i}) \quad \text{tel que: } u_{\tau i} = u_i - u_\nu \nu_i, \quad i = 1, \dots, d$$

Les conditions aux limites de frottement font intervenir également les composantes normales et tangentielles du vecteur des contraintes de Cauchy  $\sigma\nu$ , on note:

$$\sigma_\nu = \sigma\nu \cdot \nu = \sigma_{ij} \nu_j \nu_i$$

$$\sigma_\tau = (\sigma_{\tau i}) \quad \text{tel que: } \sigma_{\tau i} = \sigma_{ij} \nu_j - \sigma_\nu \nu_i \quad i, j = 1, \dots, d.$$

où  $\sigma_\nu$  (resp.  $\sigma_\tau$ ) est la contrainte normale (resp. tangentielle).

De plus, on a la relation:

$$\sigma_{ij}\nu_j u_i = \sigma_\tau u_\tau + \sigma_\nu u_\nu \quad (1.1.8)$$

Les phénomènes physiques à faire apparaître dans une loi de frottement sont l'existence d'un seuil d'effort en dessous duquel aucun glissement n'est possible et une éventuelle dépendance de ce seuil à l'intensité des efforts normaux. Parmi ces lois, on peut citer :

-*la loi de Coulomb*: c'est toute loi de proportionnalité entre l'effort normal et la force de frottement.

-*la loi de Tresca* : utilisée lorsque les forces normales sont importantes, où le seuil est fixé à priori, cette loi s'exprime uniquement en contraintes.

Dans ce travail les lois de frottement étudiées sont:

### Loi de contact avec compliance normale et frottement.

Cette loi modélise l'interpénétration de la surface de contact dans la fondation, dans ce cas la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale  $\sigma_\nu$  satisfait à la condition dite de compliance normale, c'est-à-dire

$$-\sigma_\nu = p_\nu (u_\nu - q)$$

où  $u_\nu$  est le déplacement normal,  $q$  représente le saut initial entre le corps et la fondation mesuré dans la direction de la normale  $\nu$ ,  $p_\nu$  est une fonction positive donnée. Cette condition montre que la fondation exerce une réaction sur le corps dépendante de la pénétration  $u_\nu - q$ . Pour plus de détails voir par exemple [16], [34], [28].

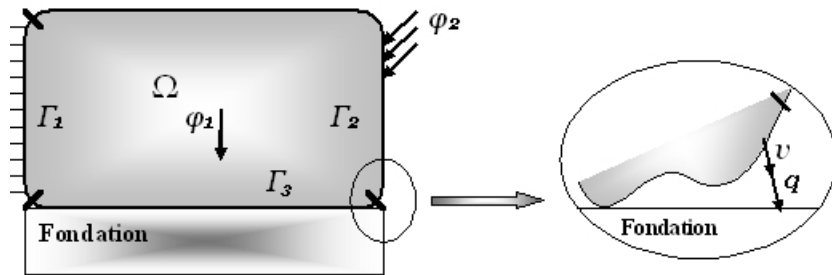


Fig.2. Contact avec compliance normale et frottement

La loi de frottement associée est une loi de Coulomb, dans le cas statique elle s'énonce comme suit:

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq p_\tau (u_\nu - q) \\ |\sigma_\tau| < p_\tau (u_\nu - q) \implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = p_\tau (u_\nu - q) \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que: } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.1.9)$$

où  $p_\tau$  est une fonction positive représentant le seuil de frottement. Tant que ce seuil n'est pas atteint, il y a immobilité (le déplacement tangentiel est nul). Quand le seuil est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement.

**Loi de contact avec coefficient de frottement dépendant de la solution (cas statique).**

Dans ce type de loi le coefficient de frottement est une fonction du déplacement tangentiel, c'est-à-dire  $\mu = \mu(|u_\tau|)$ . Cette loi est utilisée, essentiellement, en géophysique pour l'étude du glissement des plaques tectoniques, où la contrainte normale est imposée sur  $\Gamma_3$ . Elle s'énonce comme suit:

$$\begin{aligned} \sigma_\nu &= -S && \text{sur } \Gamma_3 \\ \left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu(|u_\tau|)S \\ |\sigma_\tau| < \mu(|u_\tau|)S \implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu(|u_\tau|)S \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que: } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{array} \right. &&& \text{sur } \Gamma_3 \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

**Loi de contact avec compliance normale et frottement (cas quasi-statique).**

Dans le cas quasi-statique, la loi de contact avec compliance normale et frottement s'énonce comme suit:

$$\begin{aligned} -\sigma_\nu &= p_\nu(u_\nu - q) && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \\ \left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq p_\tau(u_\nu - q) \\ |\sigma_\tau| < p_\tau(u_\nu - q) \implies \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = p_\tau(u_\nu - q) \implies \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau, \quad \lambda \geq 0 \end{array} \right. &&& \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

où les fonctions  $p_\nu$ ,  $p_\tau$  et  $q$  sont définies de la même manière que dans le cas statique.

**Loi de contact avec coefficient de frottement dépendant de la solution (cas quasi-statique).**

La version quasi-statique de la loi (1.1.10) s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} \sigma_\nu &= -S && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \\ \left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu(|u_\tau|)S \\ |\sigma_\tau| < \mu(|u_\tau|)S \implies \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu(|u_\tau|)S \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que: } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right. &&& \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

### 1.1.5 Formulation mathématique des problèmes

On présente ci-dessous les types de problèmes qu'on se propose d'étudier en précisant l'ensemble des équations et la loi de frottement de chaque problème.

**Problème  $(P_1)$ . (contact avec compliance normale et frottement, cas statique)**

*Trouver le champ de déplacements  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  tel que:*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma + \varphi_1 &= 0 && \text{dans } \Omega, \\ \sigma &= F(\varepsilon(u)) && \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 && \text{sur } \Gamma_1, \\ \sigma \nu &= \varphi_2 && \text{sur } \Gamma_2, \\ -\sigma_\nu &= p_\nu(u_\nu - q) && \text{sur } \Gamma_3, \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq p_\tau(u_\nu - q) \\ |\sigma_\tau| < p_\tau(u_\nu - q) \implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = p_\tau(u_\nu - q) \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

**Problème  $(P_2)$ . (contact avec coefficient de frottement dépendant de la solution, cas statique):**

*Trouver le champ de déplacements  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  tel que:*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma + \varphi_1 &= 0 && \text{dans } \Omega, \\ \sigma &= F(\varepsilon(u)) && \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 && \text{sur } \Gamma_1, \\ \sigma \nu &= \varphi_2 && \text{sur } \Gamma_2, \\ \sigma_\nu &= -S && \text{sur } \Gamma_3, \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu(|u_\tau|) S \\ |\sigma_\tau| < \mu(|u_\tau|) S \implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu(|u_\tau|) S \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que: } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3$$

**Problème (P<sub>3</sub>). (contact quasi-statique avec compliance normale et frottement):**

Trouver le champ de déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  tel que:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \sigma + \varphi_1 &= 0 && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 \sigma &= F(\varepsilon(u)) && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 u &= 0 && \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\
 \sigma \nu &= \varphi_2 && \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\
 -\sigma \nu &= p_\nu(u_\nu - q) && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \\
 \left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq p_\tau(u_\nu - q) \\ |\sigma_\tau| < p_\tau(u_\nu - q) \implies \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = p_\tau(u_\nu - q) \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right. &&& \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
 u(0) &= u_0 && \text{dans } \Omega.
 \end{aligned}$$

**Problème (P<sub>4</sub>). (contact quasi-statique avec coefficient de frottement dépendant de la solution):**

Trouver le champ de déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  tel que:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \sigma + \varphi_1 &= 0 && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 \sigma &= F(\varepsilon(u)) && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\
 u &= 0 && \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\
 \sigma \nu &= \varphi_2 && \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\
 \sigma \nu &= -S && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
 \left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu(|u_\tau|) S \\ |\sigma_\tau| < \mu(|u_\tau|) S \implies \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu(|u_\tau|) S \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que: } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right. &&& \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\
 u(0) &= u_0 && \text{dans } \Omega.
 \end{aligned}$$

## 1.2 Préliminaires

### 1.2.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section, on introduit les différents espaces de type Sobolev et les espaces fonctionnels utilisés en mécanique des milieux continus. On présente leurs principales propriétés sans indiquer explicitement la dépendance des diverses fonctions à l'égard de la variable spatiale, les résultats sont donnés sans preuve, pour plus de détails voir [4, 12, 18, 26]. Les notions introduites dans cette section seront utilisées dans tout ce travail.

#### 1.2.1.1 Espaces de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  de frontière notée  $\Gamma$ . Un multi indice est une collection de  $d$  entiers non négatifs,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ . On note  $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ . Si une fonction réelle  $v$  définie sur  $\Omega$  est  $n$  fois différentiable, alors pour tout  $|\alpha| < n$ ,

$$D^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_d} x_d}$$

est la dérivée partielle de  $v$  d'ordre  $\alpha$ .

#### Espace des fonctions continûment différentiables et espaces de distributions:

1. Soit  $C(\bar{\Omega})$  l'espace des fonctions réelles continues sur  $\bar{\Omega}$ . C'est un espace de Banach pour la norme définie par:

$$\|v\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v(x)|$$

Pour tout entier non négatif  $m$ , on note par  $C^m(\bar{\Omega})$  l'espace des fonctions réelles défini par

$$C^m(\bar{\Omega}) = \{v \in C(\bar{\Omega}) : D^\alpha v \in C(\bar{\Omega}) \text{ pour tout } |\alpha| \leq m\}$$

$C^m(\bar{\Omega})$  est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| < m} \|D^\alpha v\|_{C(\bar{\Omega})}$$

2. Pour tout fonction réelle  $v$  définie sur  $\Omega$ , son support est défini par:

$$\text{supp} v = \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}},$$

on dit que  $v$  est à support compact si  $\text{supp } v$  est un ensemble propre de  $\Omega$ .

On définit alors l'espace  $D(\Omega)$  désignant l'espace des fonctions réelles  $v$  définies sur  $\Omega$  indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans  $\Omega$ .

3.  $D(\bar{\Omega})$  est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dans  $\bar{\Omega}$ , muni de la famille de normes

$$\sup_{x \in \Omega} |D^\alpha v(x)|$$

qui en fait un espace de Fréchet.

4.  $D'(\Omega)$  est l'espace des distributions sur  $\Omega$ , c'est-à-dire: l'espace des formes  $f \rightarrow (f, \psi)$  linéaires continues sur  $D(\Omega)$ . Pour tout  $f \in D'(\Omega)$ , on définit  $D^\alpha f \in D'(\Omega)$  et cela pour tout  $\alpha$  par

$$(D^\alpha f, \psi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \psi) \quad \forall \psi \in D(\Omega)$$

En outre, l'application linéaire  $f \rightarrow D^\alpha f$  est continue.

5. Une fonction réelle  $v$  définie sur  $\Omega$  est dite Lipschitz continue s'il existe une constante  $c > 0$  telle que:

$$|v(x) - v(y)| \leq c \|x - y\| \quad \forall x, y \in \Omega$$

### Les espaces $L^p$

1. On pose  $L^1(\Omega)$ , l'ensemble des fonctions intégrables sur l'ouvert  $\Omega$ , dans lequel on identifie deux fonctions qui coïncident presque partout.  $L^1(\Omega)$  est un espace de Banach pour la norme définie par:

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |v(x)| dx$$

2. Sur l'ouvert  $\Omega$ , on introduit l'espace  $L^p(\Omega)$  égal à l'espace des (classes de) fonctions défini pour  $1 \leq p < \infty$  par:

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } v \text{ mesurable et } |v| \in L^1(\Omega)\},$$

on définit sur  $L^p(\Omega)$  la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

qui en fait un espace de Banach. En particulier,  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire donné par

$$(v, w)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} v(x)w(x)dx.$$

3. On introduit aussi pour  $p = \infty$  l'espace:

$$L^\infty(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v \text{ mesurable et il existe } C > 0 \text{ tel que } |v(x)| \leq C \text{ p.p. } x \in \Omega\}$$

$L^\infty(\Omega)$  est aussi un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |v(x)|$$

Si  $v \in L^p(\Omega)$ , l'application  $\psi \rightarrow \int_{\Omega} v(x)\psi(x)dx$  est continue sur  $D(\Omega)$ , donc définit une distribution  $\tilde{v}$  par:

$$(\tilde{v}, \Psi) = \int_{\Omega} v(x)\psi(x)dx$$

L'application  $v \rightarrow \tilde{v}$  étant injective, on identifie donc  $\tilde{v}$  à  $v$  et on a  $L^p(\Omega) \subset D'(\Omega)$ .

Soit  $p > 1$ , notons par  $q$  l'exposant conjugué de  $p$  défini par  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . On pose  $q = 1$  pour  $p = \infty$  et  $q = \infty$  pour  $p = 1$ .

#### Propriétés:

**a) Inégalité de Holder:** Soit  $p$  tel que  $1 \leq p \leq \infty$  et soit  $v \in L^p(\Omega)$  et  $w \in L^q(\Omega)$ , alors

$$\|vw\|_{L^1(\Omega)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega)} \|w\|_{L^q(\Omega)}$$

**b) Représentation de Riesz:** Soit  $1 \leq p < \infty$  et soit  $f \in (L^p(\Omega))'$ , où  $(L^p(\Omega))'$  est l'espace dual de  $L^p(\Omega)$  (l'ensemble des formes linéaire sur  $L^p(\Omega)$ ), alors il existe  $w \in L^q(\Omega)$  unique tel que

$$f(v) = \int_{\Omega} vwdx \quad \forall v \in L^p(\Omega)$$

De plus, on a  $\|w\|_{L^q(\Omega)} = \|f\|_{(L^p(\Omega))'}$ . Ce résultat exprime que l'on peut identifier l'espace dual de  $L^p(\Omega)$  à l'espace  $L^q(\Omega)$ . Le résultat est faux si  $p = \infty$ , en effet, le dual de  $L^\infty(\Omega)$  contient  $L^1(\Omega)$ , mais il est strictement plus grand que  $L^1(\Omega)$ .

**c)** L'espace  $L^p(\Omega)$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$  et séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .

#### Notions de convergence

- Soit  $1 \leq p \leq \infty$ , on dit que  $v_n$  converge fortement vers  $v$  dans  $L^p(\Omega)$  si  $v_n, v \in L^p(\Omega)$  et si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

- Pour  $1 \leq p < \infty$ , on dit que  $v_n$  converge faiblement vers  $v$  dans  $L^p(\Omega)$  si  $v_n, v \in L^p(\Omega)$  et si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (v_n(x) - v(x))w(x)dx = 0, \quad \forall w \in L^q(\Omega)$$

- Si  $p = \infty$ , on dit que  $v_n$  converge faible\* vers  $v$  dans  $L^\infty(\Omega)$  si  $v_n, v \in L^\infty(\Omega)$  et si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (v_n(x) - v(x))w(x)dx = 0, \quad \forall w \in L^1(\Omega)$$

**Propriétés:**

a) Si  $v_n$  converge faible\* vers  $v$  dans  $L^\infty(\Omega)$ , alors  $v_n$  converge faiblement vers  $v$  dans  $L^p(\Omega)$ ,  $\forall p \geq 1$ .

b) Pour  $1 \leq p \leq \infty$ , si  $v_n \rightarrow v$  fortement dans  $L^p(\Omega)$ , alors  $\|v_n\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow \|v\|_{L^p(\Omega)}$  dans  $\mathbb{R}$ .

c) Si  $1 \leq p < \infty$  et si  $v_n \rightarrow v$  faiblement dans  $L^p(\Omega)$ , alors  $v_n$  est bornée de plus  $\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{L^p(\Omega)}$ .

d) Si  $1 < p < \infty$  (resp.  $p = \infty$ ), alors de toute suite bornée  $v_n$  dans  $L^p(\Omega)$  (resp.  $L^\infty(\Omega)$ ) on peut extraire une sous suite faiblement (resp. faible\*) convergente dans  $L^p(\Omega)$  (resp. dans  $L^\infty(\Omega)$ ).

**Espaces de Sobolev**

On appelle *espace de Sobolev* d'ordre  $m$  sur  $L^p(\Omega)$  et l'on note  $W^{m,p}(\Omega)$  l'espace défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \mid v \in L^p(\Omega), D^\alpha v \in L^p(\Omega), \quad |\alpha| \leq m\}$$

$W^{m,p}(\Omega)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Le cas  $p = 2$  est fondamental, pour simplifier l'écriture, on posera  $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$  qui est un *espace de Hilbert* muni du produit scalaire:

$$(v, w)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha v, D^\alpha w)$$

**Résultats de trace:**

A) On suppose que  $\Gamma$  est de classe  $C^1$ , alors  $C^d(\bar{\Omega})$  est dense dans l'espace  $H^1(\Omega)$ . Pour  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ , on posera:

$\gamma_0 v = \gamma v =$  " trace de  $v$  sur  $\Gamma$  " c'est-à-dire la valeur de  $v$  sur  $\Gamma$ . Et

$$L^2(\Gamma) = \{f \mid f \text{ mesurable et de carré sommable sur } \Gamma \text{ pour la mesure } d\Gamma\}.$$

On montre alors que l'on peut définir de façon unique la trace  $\gamma_0 v = \gamma v$  de  $H^1(\Omega)$  sur  $\Gamma$  de façon que  $\gamma v$  coïncide avec la définition usuelle déjà citée. Si  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ ;  $\gamma_0 v \in L^2(\Gamma)$  et l'application  $v \rightarrow \gamma_0 v$  est linéaire continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Gamma)$ .

**B)** L'application précédente n'est pas surjective, l'espace image de  $H^1(\Omega)$  par  $\gamma_0$  est l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . On obtient une caractérisation de cet espace en introduisant les espaces  $H^s(\mathbb{R}^d)$  pour  $s$  non nécessairement entier. Une propriété de localisation des espaces  $H^s(\mathbb{R}^d)$  donnée en [10] permet de définir les espaces  $H^s(\Gamma)$ , avec  $H^{-s}(\Gamma) = (H^s(\Gamma))'$  si  $s \leq 0$  et on a:

$\Gamma$  est de classe  $C^1$ , l'application  $v \rightarrow \gamma_0 v$  est linéaire, continue et surjective de  $H^1(\Omega)$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

### 1.2.1.2 Espaces des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ où dans $\mathbb{R}^{d \times d}$ et propriétés.

Dans cette partie, on va étendre les définitions et les propriétés précédentes aux cas des espaces de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et celles à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d \times d}$ . Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , on rappelle que  $D'(\Omega)$  est l'espace des formes linéaires continues sur  $D(\Omega)$ . Le produit de dualité sera noté par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D' \times D}$ . On introduit également les espaces suivants:

$$D = \{\varphi = (\varphi_i) \mid \varphi_i \in D(\Omega), 1 \leq i \leq d\} = D(\Omega)^d$$

$$\mathcal{D} = \{\phi = (\phi_{ij}) \mid \phi_{ij} = \phi_{ji} \in D(\Omega), 1 \leq i, j \leq d\}$$

$$D' = \{u = (u_i) \mid u_i \in D'(\Omega), 1 \leq i \leq d\}$$

$$\mathcal{D}' = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in D'(\Omega), 1 \leq i, j \leq d\}$$

Les dualités entre  $D$  et  $D'$ ,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  seront notées respectivement par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D' \times D}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$ .

Soit l'opérateur  $\partial_i = \partial/\partial x_i$  défini pour les fonctions et pour les distributions, les opérateurs différentiels du premier ordre utilisés sont:

$$\varepsilon : D \rightarrow \mathcal{D}, \varepsilon(\varphi) = (\varepsilon_{ij}(\varphi)), \varepsilon_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_j \varphi_i + \partial_i \varphi_j) \quad \forall i, j = \overline{1, d}, \varphi \in D. \quad (1.2.1)$$

$$\text{div} : \mathcal{D} \rightarrow D, \text{div} \phi = (\partial_j \phi_{ij}) \quad \forall i, j = \overline{1, d}, \phi \in \mathcal{D}. \quad (1.2.2)$$

Les mêmes notations sont utilisées pour les espaces de distributions, à savoir:

$$\varepsilon : D' \rightarrow \mathcal{D}', \varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \forall i, j = \overline{1, d}, u \in D'. \quad (1.2.3)$$

$$\text{div} : \mathcal{D}' \rightarrow D', \text{div} \sigma = (\partial_j \sigma_{ij}) \quad \forall i, j = \overline{1, d}, \sigma \in \mathcal{D}'. \quad (1.2.4)$$

L'opérateur  $\varepsilon$  s'appelle opérateur *déformation*, l'opérateur  $\text{div}$  s'appelle opérateur *divergence*. On a les relations:

$$\langle \partial_i \theta, \varphi \rangle_{D' \times D} = - \langle \theta, \partial_i \varphi \rangle_{D' \times D} \quad \forall \theta \in D'(\Omega), \varphi \in D(\Omega) \quad (1.2.5)$$

$$\langle \varepsilon(u), \varphi \rangle_{D' \times D} = - \langle u, \operatorname{div} \varphi \rangle_{D' \times D} \quad \forall u \in D', \varphi \in \mathcal{D} \quad (1.2.6)$$

$$\langle \operatorname{div} \sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} = - \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{D' \times D} \quad \forall \sigma \in \mathcal{D}', \varphi \in D \quad (1.2.7)$$

On introduit aussi les espaces :

$$H = \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega), i = \overline{1, d}\} = L^2(\Omega)^d \quad (1.2.8)$$

$$Q = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega), i, j = \overline{1, d}\} = L^2(\Omega)_s^{d \times d}, \quad (1.2.9)$$

Les espaces  $H$  et  $Q$  sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires respectifs:

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx \quad \forall u, v \in H$$

$$(\sigma, \tau)_Q = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx \quad \forall \sigma, \tau \in Q.$$

Pour l'opérateur déformation défini par (1.2.3), on introduit l'espace de Hilbert réel.

$$H_1 = \{u \in H \mid \varepsilon(u) \in Q\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q \quad \forall u, v \in H_1$$

et de la norme associée  $\|\cdot\|_{H_1}$ .

On a l'égalité (algébrique et topologique)  $H_1 = (H^1(\Omega))^d$ , voir[10], d'où :

L'injection  $H_1 \hookrightarrow H$  est compacte (théorème de Relich); et l'opérateur de déformation  $\varepsilon : H_1 \rightarrow Q$  est continu.

#### Autres propriétés:

En supposant que la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  est de classe  $C^1$ , on a les résultats:

**1)**  $C^1(\bar{\Omega})^d$  est dense dans  $H_1$ , où  $C^1(\bar{\Omega})^d$  désigne l'espace des fonctions une fois continûment différentiables dans  $\bar{\Omega}$ .

**2)** Pour  $v \in C^1(\bar{\Omega})^d$ , on pose  $v \rightarrow v|_{\Gamma}$  la trace de  $v$  sur  $\Gamma$ . On a le résultat suivant :

$\Gamma$  est de classe  $C^1$  alors, l'application  $v \rightarrow v|_{\Gamma}$  définie sur  $C^1(\bar{\Omega})^d$  dans  $L^2(\Gamma)^d$  s'étend en une application  $\gamma$  continue de  $H_1$  dans  $L^2(\Gamma)^d$  appelée trace de  $v$  sur  $\Gamma$ .

**3)** L'application trace  $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$  n'est pas surjective. L'espace image de  $H_1$  par  $\gamma$  est le sous-espace  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$  de  $L^2(\Gamma)^d$  noté  $H_{\Gamma}$  qui est de Hilbert et on a: l'application  $v \rightarrow \gamma v$  est linéaire continue et surjective de  $H_1$  dans  $H_{\Gamma}$ .

**4)** L'injection  $H_{\Gamma} \hookrightarrow L^2(\Gamma)^d$  est continue.

En notant par  $\nu = (\nu_i)$  la normale sortante unitaire à  $\Gamma$ , pour tout  $\varphi \in H_\Gamma$  on définit ces composantes *normale* et *tangentielle* respectivement par:

$$\varphi_\nu = \varphi \cdot \nu \text{ et } \varphi_\tau = \varphi - \varphi_\nu \nu \quad (1.2.10)$$

où  $\varphi_\nu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $\varphi_\tau \in H_\tau$ , tel que  $H_\tau$  est le sous-espace fermé de  $H_\Gamma$  défini par:

$$H_\tau = \{\varphi \in H_\Gamma \mid \varphi_\nu = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma\}$$

On utilisera respectivement les espaces duaux  $H'_\Gamma, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $H'_\tau$  de  $H_\Gamma, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $H_\tau$ , on note leurs normes ainsi que leurs produits de dualité par

$$|\cdot|_{H'_\Gamma}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}, |\cdot|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma \text{ et } |\cdot|_{H'_\tau}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H'_\tau \times H_\tau}.$$

Moyennant l'application trace, on définit pour tout  $u \in H_1$  les éléments  $\gamma_\nu u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $\gamma_\tau u \in H_\tau$  par  $\gamma_\nu u = (\gamma u)_\nu$  et  $\gamma_\tau u = (\gamma u)_\tau$ .

On rappelle que si  $u \in C^1(\overline{\Omega})^d$  alors

$$\gamma u = u|_\Gamma, \quad \gamma_\nu u = u|_\Gamma \cdot \nu, \quad \gamma_\tau u = u|_\Gamma - (u|_\Gamma \cdot \nu) \nu.$$

Pour tout  $u \in H_1$ , on utilisera souvent les notations  $u, u_\nu, u_\tau$ , au lieu de  $\gamma u, \gamma_\nu u, \gamma_\tau u$ .

Soit maintenant  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  une partition de  $\Gamma$  telle que  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ , soit  $V$  le sous-espace fermé de  $H_1$  défini par:

$$V = \{v \in H_1 \mid \gamma v = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_1\}. \quad (1.2.11)$$

**Proposition 1.1. (Inégalité de Korn)** *Si mes  $\Gamma_1 > 0$  alors il existe une constante  $C_\Omega > 0$  dépendante seulement de  $\Omega$  et  $\Gamma$  telle que:*

$$\|\varepsilon(v)\|_Q \geq C_\Omega \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V \quad (1.2.12)$$

Considérons dans  $V$  le produit scalaire :

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q$$

et la norme associée  $\|\cdot\|_V$ . De l'inégalité de Korn, on déduit que  $\|\cdot\|_V$  est une norme sur  $V$  équivalente à la norme canonique  $\|\cdot\|_{H_1}$  et grâce à un théorème de trace de Sobolev, on a:

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_2)^d} \leq C_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V \quad (1.2.13)$$

où  $C_0$  dépend uniquement de  $\Omega$  et de  $\Gamma$ .

On introduit aussi l'espace

$$H_d = \{\sigma \in Q \mid \operatorname{div} \sigma \in H\}$$

muni du produit scalaire

$$(\sigma, \tau)_{H_d} = (\sigma, \tau)_Q + (\operatorname{div} \sigma, \operatorname{div} \tau)_H \quad \forall \sigma, \tau \in H_d.$$

L'injection  $H_d \hookrightarrow H$  et l'opérateur  $\operatorname{div} : H_d \rightarrow H$  sont des applications continues.

$H$  et  $H_d$  sont des sous-espaces de  $D'$  et  $\mathfrak{D}'$ , et on a:

$$\langle \operatorname{div} \sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} + (\sigma, \varepsilon(\varphi))_Q = 0 \quad \forall \sigma \in Q, \varphi \in D \quad (1.2.14)$$

$$(\operatorname{div} \sigma, \varphi)_H + (\sigma, \varepsilon(\varphi))_Q = 0 \quad \forall \sigma \in H_d, \varphi \in D. \quad (1.2.15)$$

Soit l'espace  $C^1(\overline{\Omega})_s^{d \times d}$  défini par

$$C^1(\overline{\Omega})_s^{d \times d} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1(\overline{\Omega}), i, j = \overline{1, d}\}$$

$C^1(\overline{\Omega})_s^{d \times d}$  est dense dans  $Q$ , on définit l'application trace sur l'espace  $H_d$  grâce au résultat suivant:

**Proposition 1.2.** *Il existe une application linéaire continue et surjective, telle que:*

$$\overline{\gamma} : H_d \rightarrow H'_\Gamma$$

De plus, on a

$$\langle \overline{\gamma} \sigma, \xi \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma \nu \cdot \xi \, da \quad \forall \xi \in H_\Gamma, \sigma \in C^1(\overline{\Omega})_s^{d \times d}. \quad (1.2.16)$$

Ce qui permet de déduire la formule de Green :

Pour tout  $\sigma \in H_d$ ,  $\overline{\gamma} \sigma \in H'_\Gamma$  est l'unique élément vérifiant l'égalité:

$$\langle \overline{\gamma} \sigma, v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(v))_Q + (\operatorname{div} \sigma, v)_H \quad \forall v \in H_1. \quad (1.2.17)$$

Compte tenu de l'application trace, on définit pour tout  $\sigma \in H_d$  les éléments  $\overline{\gamma}_\nu \sigma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $\overline{\gamma}_\tau \sigma \in H'_\tau$  par:

$$\overline{\gamma}_\nu \sigma = (\overline{\gamma} \sigma)_\nu, \quad \overline{\gamma}_\tau \sigma = (\overline{\gamma} \sigma)_\tau.$$

Si  $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})_s^{d \times d}$ , les éléments  $\overline{\gamma} \sigma, \overline{\gamma}_\nu \sigma, \overline{\gamma}_\tau \sigma$  sont définis par:

$$\overline{\gamma} \sigma = \sigma|_\Gamma \cdot \nu, \quad \overline{\gamma}_\nu \sigma = (\sigma|_\Gamma \cdot \nu)_\nu, \quad \overline{\gamma}_\tau \sigma = \sigma|_\Gamma \cdot \nu - (\sigma|_\Gamma \cdot \nu) \nu.$$

Pour simplifier les notations, on utilisera dans la suite  $\sigma \nu$ ,  $\sigma_\nu$  et  $\sigma_\tau$  au lieu de  $\overline{\gamma} \sigma, \overline{\gamma}_\nu \sigma$  et  $\overline{\gamma}_\tau \sigma$ .

Pour tout  $\sigma \in H_d$ , on a la double égalité:

$$\langle \sigma \nu, \gamma v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma_\nu, v_\nu \rangle_\Gamma + \langle \sigma_\tau, v_\tau \rangle_{H'_\tau \times H_\tau} = (\sigma, \varepsilon(v))_Q + (\operatorname{div} \sigma, v)_H \quad (1.2.18)$$

**Espaces de fonctions à valeurs vectorielles**  $W^{k,p}(0, T; X)$

Pour l'étude des problèmes d'évolution, on aura besoin des espaces de fonctions à valeurs vectorielles  $W^{1,\infty}(0, T; X)$ , ici  $X$  désigne un espace de Hilbert et  $T$  un réel positif. On rappelle que  $C([0, T]; X)$  est l'espace des fonctions continues définies sur  $[0, T]$  dans  $X$ , qui est un espace de Banach muni de la norme:

$$|u|_{C([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X$$

Pour  $k \in [0, \infty]$ , l'espace  $L^p(0, T; X)$  désigne l'espace des (classe de) fonctions  $t \rightarrow f(t)$  mesurables, qui font des espaces de Banach pour la norme:

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} \begin{cases} \left( \int_0^T \|v(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{(0,T)} \text{ess } \|v(t)\|_X & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

En particulier l'espace  $L^2(0, T; X)$  est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire:

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X$$

On désigne par  $D'(0, T; X)$  l'espace des distributions sur  $]0, T[$  à valeurs dans  $X$ .

Pour  $k \in [0, \infty]$ , on définit l'espace des distributions vectorielles suivant

$$W^{k,\infty}(0, T; X) = \left\{ u \in D'(0, T; X) \text{ tel que : } D^j u \in L^\infty(0, T; X) \text{ pour } j = 0, \dots, k \right\},$$

$D^j u$  désigne la dérivée jusqu'à l'ordre  $j$  de  $u$  au sens des distributions. Par ailleurs,  $W^{k,\infty}(0, T; V)$  est un espace de Banach pour la norme définie par:

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(0,T;X)} = \sum_{j=0}^k \sup_{(0,T)} \text{ess } \|D^j u\|_X$$

En particulier pour  $k = 0$ , on a

$$W^{k,\infty}(0, T; X) = L^\infty(0, T; X)$$

Pour  $k = 1$ , l'espace  $W^{1,\infty}(0, T; X)$  est défini par:

$$W^{1,\infty}(0, T; X) = \{u : [0, T] \rightarrow X \text{ tel que: } u \in L^\infty(0, T; X) \text{ et } \dot{u} \in L^\infty(0, T; X)\},$$

muni de la norme:

$$|u|_{W^{1,\infty}(0,T;X)} = |u|_{L^\infty(0,T;X)} + |\dot{u}|_{L^\infty(0,T;X)}$$

Pour tout  $p \in [0, \infty]$  l'injection de  $W^{1,\infty}(0, T; X)$  dans  $C([0, T]; X)$  est continue.

### 1.2.2 Problèmes abstraits

La modélisation mathématique pour des classes différentes de problèmes en mécanique des milieux continus est liée aux inéquations variationnelles elliptiques, cette méthode permet à la fois l'obtention des résultats théoriques et la mise au point des méthodes numériques efficaces. Dans cette section on va présenter des résultats d'existence et d'unicité de la solution de certains problèmes variationnels.

Soit  $a(.,.)$  une forme bilinéaire sur  $X$ , et la fonctionnelle  $\varphi : X \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  et  $f \in X$  où  $X$  est un espace fonctionnel de Hilbert réel muni du produit scalaire  $(.,.)_X$  et de la norme associée  $\|.\|_X$ .

**Problème**  $(S_1)$ . *Trouver  $u \in X$  tel que:*

$$a(u, v - u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X \quad (1.2.19)$$

Un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème  $(S_1)$  est donné par (voir par exemple [14]):

**Théorème 1.3.** *Si  $a(.,.)$  est symétrique continue et coercive et  $\varphi$  est une fonctionnelle convexe, propre et semi-continue inférieurement alors l'inéquation variationnelle elliptique (1.2.19) admet une solution unique.*

Soit maintenant  $a(.,.) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire,  $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f \in X$ , où  $X$  est un espace réel de Hilbert. On considère le problème suivant:

**Problème**  $(S_2)$ . *Trouver  $u \in X$  tel que:*

$$a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X \quad (1.2.20)$$

A la différence du problème  $(S_1)$  on remarque la présence d'une fonctionnelle qui dépend de la solution recherchée, ce qui complique la résolution de ce genre de problèmes. Pour résoudre le problème  $(S_2)$ , on présente un résultat d'existence et d'unicité de la solution, obtenu par D. Montrenau et M. Sofoena [28]. En formulant des conditions sur la fonctionnelle  $j$  (non différentiable en général) et sa dérivée directionnelle, on obtient l'existence. D'autres conditions donneront l'unicité et la dépendance continue de la solution par rapport à la donnée  $f$ .

On suppose que  $a$  est symétrique, continue et coercive donc elle vérifie:

$$(h_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } M > 0 \text{ tel que:} \\ \quad |a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X \\ (b) \text{ il existe } m > 0 \text{ tel que:} \\ \quad a(v, v) \geq m \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X \end{array} \right.$$

On suppose que la fonctionnelle  $j$  satisfait

$$(h_2) \quad j(\eta, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe sur } X, \text{ pour tout } \eta \in X,$$

la dérivée directionnelle de  $j(\eta, \cdot)$  notée  $j'_2$  est définie par:

$$(h_3) \quad j'_2(\eta, u; w) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [j(\eta, u + \lambda w) - j(\eta, u)] \quad \forall \eta, u, w \in X,$$

et on considère les hypothèses suivantes:

$$(j_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (u_n) \subset X \text{ avec } \|u_n\|_X \rightarrow \infty \\ \text{et toute suite } (t_n) \subset [0, 1], \text{ on a:} \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\|u_n\|_X^2} j'_2(t_n u_n, u_n; -u_n) \right] < m \end{array} \right.$$

$$(j_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (u_n) \subset X \text{ avec } \|u_n\|_X \rightarrow \infty \\ \text{et toute suite bornée } (\eta_n) \subset X, \text{ on a:} \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\|u_n\|_X^2} j'_2(\eta_n, u_n; -u_n) \right] < m \end{array} \right.$$

$$(j_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toutes suites } (u_n) \subset X \text{ et } (\eta_n) \subset X \text{ telles que:} \\ u_n \rightarrow u \text{ faiblement dans } X \text{ et } \eta_n \rightarrow \eta \text{ faiblement dans } X, \text{ pour tout } v \in X, \\ \text{l'inégalité ci-dessous est vérifiée} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} [j(\eta_n, v) - j(\eta_n, u_n)] \leq j(\eta, v) - j(\eta, u). \end{array} \right.$$

$$(j_4) \quad \left\{ \begin{array}{l} j(u, v) - j(u, u) + j(v, u) - j(v, v) \leq \beta \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X, u \neq v \\ \text{pour un certain } \beta \in \mathbb{R} \text{ avec } \beta < m. \end{array} \right.$$

Le résultat principal obtenu dans [28], est le suivant:

**Théorème 1.4.** *Supposons que le problème  $(S_2)$  vérifie les hypothèses  $(h_1)$ ,  $(h_2)$  et  $(h_3)$ , alors:*

1) *Sous les hypothèses  $(j_1)$ ,  $(j_2)$  et  $(j_3)$  l'inéquation variationnelle (1.2.20) admet au moins une solution.*

2) *Sous les hypothèses  $(j_1)$ ,  $(j_2)$ ,  $(j_3)$ , et  $(j_4)$  l'inéquation variationnelle admet une solution unique, où  $u$  dépend lipschitzement de  $f$  avec une constante de Lipschitz égale à  $(m - \beta^{-1})$ .*

La démonstration de ce résultat s'effectue en plusieurs étapes, elle est basée sur des arguments standards des inéquations variationnelles, tels que l'argument du point fixe et la théorie du degré topologique, voir [28].

## Chapitre 2

### *Problème de contact statique avec compliance normale et frottement*

Dans ce chapitre, on étudie un problème de contact statique entre un corps élastique et une fondation déformable ou réactive. Le contact est modelé en utilisant une loi de compliance normale et frottement de Coulomb.

## 2.1 Enoncé du problème - Hypothèses

Soit un corps élastique occupant un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), de frontière  $\Gamma$  supposée régulière, telle que  $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$  avec  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  ouverts, disjoints et  $mes(\Gamma_1) > 0$ . Le corps est soumis à une densité de forces volumiques  $\varphi_1$  donnée sur  $\Omega$  et à une densité de forces surfaciques  $\varphi_2$  donnée sur  $\Gamma_2$ . Le long de  $\Gamma_3$  le corps est en contact avec une fondation déformable (réactive). Le contact entre le corps et la fondation, est modélisé par une loi de compliance normale et frottement. Cela revient à étudier le problème  $(P_1)$  du chapitre 1.

**Problème  $(P_1)$ .** *Trouver le champ de déplacements  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  tel que:*

$$div \sigma + \varphi_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.1.1)$$

$$\sigma = F(\varepsilon(u)) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (2.1.3)$$

$$\sigma \nu = \varphi_2 \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (2.1.4)$$

$$-\sigma \nu = p_\nu (u_\nu - q) \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (2.1.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq p_\tau (u_\nu - q) \\ |\sigma_\tau| < p_\tau (u_\nu - q) \implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = p_\tau (u_\nu - q) \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (2.1.6)$$

Rappelons ici que:

(2.1.1) est l'équation d'équilibre.

(2.1.2) représente la loi de comportement élastique introduite au chapitre 1.

(2.1.3) – (2.1.4) sont les conditions aux limites classiques de déplacement-traction.

(2.1.5) représente la condition de compliance normale.

(2.1.6) sont les conditions aux limites de frottement de Coulomb auxquelles est soumise la partie  $\Gamma_3$  de la frontière  $\Gamma$ .

On rappelle les espaces utilisés :

$\mathbf{S}_d$  est l'espace des tenseurs symétriques de second ordre sur  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), ' $\cdot$ ' et  $|\cdot|$  dénotent le produit scalaire et la norme euclidienne dans  $\mathbf{S}_d$  et  $\mathbb{R}^d$  respectivement, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_i v_i, & |v| &= (v \cdot v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d, \quad 1 \leq i, j \leq d, \\ \sigma \cdot \tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & |\tau| &= (\tau \cdot \tau)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbf{S}_d, \quad 1 \leq i, j \leq d, \end{aligned}$$

On rappelle également les espaces:

$$H = \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega), i = \overline{1, d}\} = L^2(\Omega)^d$$

$$Q = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega), i = \overline{1, d}\} = L^2(\Omega)^{d \times d}_s$$

munis des produits scalaires canoniques respectifs:

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx \quad \forall u, v \in H$$

$$\langle \sigma, \tau \rangle_Q = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx \quad \forall \sigma, \tau \in Q.$$

et les normes associées  $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_Q$ .

Pour le champs des déplacements, on utilisera l'espace

$$H_1 = \{u \in H \mid \varepsilon(u) \in Q\},$$

$H_1$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = (u, v)_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_Q \quad \forall u, v \in H_1,$$

et de la norme associé  $\|\cdot\|_{H_1}$ .

On rappelle aussi l'espace:

$$H_d = \{\sigma \in Q \mid \operatorname{div} \sigma \in H\}$$

muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{H_d}$  défini par

$$(\sigma, \tau)_{H_d} = \langle \sigma, \tau \rangle_Q + (\operatorname{div} \sigma, \operatorname{div} \tau)_H \quad \forall \sigma, \tau \in H_d,$$

et l'espace  $V$  défini par:

$$V = \{v \in H_1 \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\},$$

muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_V$  défini par

$$(u, v)_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_Q.$$

et de la norme associée  $\|\cdot\|_V$ .

*Hypothèses sur l'opérateur d'élasticité linéaire  $F$*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad F : \Omega \times S_d \longrightarrow S_d \\ \text{(b)} \quad F = (F_{ijkh}), 1 \leq i, j, k, h \leq d \text{ et } F_{ijkh} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(c)} \quad \text{il existe } \beta > 0 \text{ tel que: } F\zeta \cdot \zeta \geq \beta |\zeta|^2 \quad \forall \zeta \in S_d \text{ p.p. dans } \Omega. \\ \text{(d)} \quad F\sigma \cdot \zeta = \sigma \cdot F\zeta, \forall \sigma, \zeta \in S_d \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.1.7)$$

Hypothèses sur  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$

$$\varphi_1 \in H \quad (2.1.8)$$

$$\varphi_2 \in L^2(\Gamma_2)^d. \quad (2.1.9)$$

Hypothèses sur les fonctions de contact

$p_r : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $r = (\tau, \nu)$  telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_r > 0 \text{ tel que:} \\ \quad |p_r(x, u_1) - p_r(x, u_2)| \leq L_r |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, p.p. x \in \Gamma_3 \\ (b) x \longmapsto p_r(x, u) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \quad \forall u \in \mathbb{R} \\ (c) x \longmapsto p_r(x, u) = 0 \text{ pour } u \leq 0 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.1.10)$$

De plus, on suppose que:

$$q \in L^2(\Gamma_3), \quad q \geq 0 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \quad (2.1.11)$$

Pour la formulation variationnelle on introduit:

En utilisant (2.1.8), (2.1.9), en vertu du *théorème de représentation de Riesz-Fréchet*, il existe un élément  $f \in V$  tel que:

$$(f, v)_V = (\varphi_1, v)_H + (\varphi_2, \gamma v)_{L^2(\Gamma_2)^d} \quad \forall v \in V. \quad (2.1.12)$$

On définit la fonctionnelle  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - q) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\tau - q) |v_\tau| da \quad \forall u, v \in V \times V. \quad (2.1.13)$$

## 2.2 Formulation variationnelle

Afin d'établir une formulation variationnelle du problème  $(P_2)$ , on donne une forme équivalente des conditions aux limites (1.1.6).

**Lemme 2.1.** Si  $\sigma_\tau$  et  $u_\tau$  sont deux fonctions régulières, alors la condition

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq p_\tau(u_\tau - q) \\ |\sigma_\tau| < p_\tau(u_\tau - q) \implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = p_\tau(u_\tau - q) \implies \sigma_\tau = -\lambda u_\tau, \quad \lambda \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

est équivalente à:

$$|\sigma_\tau| \leq p_\tau(u_\tau - q), \sigma_\tau \cdot u_\tau + p_\tau(u_\tau - q) |u_\tau| = 0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (2.2.1)$$

**Preuve.** Le résultat est évident si  $u_\tau = 0$ .

Maintenant si  $\sigma_\tau = -\lambda u_\tau$  avec  $|\sigma_\tau| = p_\tau(u_\nu - q)$ , il est clair que:

$$\sigma_\tau \cdot u_\tau + p_\tau(u_\nu - q) |u_\tau| = 0.$$

Réciproquement, si

$$\sigma_\tau \cdot u_\tau + p_\tau(u_\nu - q) |u_\tau| = 0 \text{ et } |\sigma_\tau| = p_\tau(u_\nu - q),$$

alors

$$\sigma_\tau \cdot u_\tau = -p_\tau(u_\nu - q) |u_\tau| = -|\sigma_\tau| |u_\tau|,$$

donc il existe  $\lambda \geq 0$  tel que:  $\sigma_\tau = -\lambda u_\tau$ .

Si

$$|\sigma_\tau| < p_\tau(u_\nu - q),$$

on a:

$$-|\sigma_\tau| |u_\tau| \leq \sigma_\tau \cdot u_\tau \leq |\sigma_\tau| |u_\tau|,$$

d'où

$$\begin{aligned} \sigma_\tau \cdot u_\tau + p_\tau(u_\nu - q) |u_\tau| &\geq -|\sigma_\tau| \cdot |u_\tau| + p_\tau(u_\nu - q) |u_\tau| \\ &\geq |u_\tau| (-|\sigma_\tau| + p_\tau(u_\nu - q)), \end{aligned}$$

or

$$|\sigma_\tau| < p_\tau(u_\nu - q),$$

il vient que  $|u_\tau| = 0$  soit  $u_\tau = 0$ , d'où l'équivalence annoncée. ■

On considère la forme bilinéaire  $a(.,.)$  définie sur  $V \times V$  par:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} F(\varepsilon(u)) \cdot \varepsilon(v) dx \quad (2.2.2)$$

D'après (2.1.7),  $a(.,.)$  est symétrique continue et coercive, d'où:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } M > 0 \text{ tel que:} \\ \quad |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V \\ (b) \text{ il existe } m > 0 \text{ tel que:} \\ \quad a(v, v) \geq m \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (h_1)$$

La forme (2.2.1), facilite l'établissement de la formulation variationnelle du problème  $(P_1)$ .

On a le résultat:

**Lemme 2.2.** *Si les fonctions  $u, \sigma$  sont suffisamment régulières et vérifient le problème mécanique  $(P_1)$ , alors:*

$$u \in V, \quad a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in V \quad (2.2.3)$$

**Preuve.** Soit  $v \in V$ , de (1.2.18) on déduit

$$(\sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_Q + (\operatorname{div} \sigma, (v - u))_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - u) da \quad \forall v \in V$$

En utilisant (2.1.1) et (2.1.4), on obtient :

$$\begin{aligned} (\sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_Q &= (\varphi_1, v - u)_H + \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - u) da. \\ &= (\varphi_1, v - u)_H + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot (v - u) da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u) da, \\ &= (\varphi_1, v - u)_H + \int_{\Gamma_2} \varphi_2 \cdot (v - u) da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u) da \end{aligned}$$

et donc d'après (2.1.12)

$$a(u, v - u) = (f, v - u)_V + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u) da \quad (2.2.4)$$

D'autre part d'après (2.1.13) et (2.1.5), on a :

$$\begin{aligned} j(u, v) - j(u, u) &= \int_{\Gamma_3} p_\nu (u_\nu - q) (v_\nu - u_\nu) da + \int_{\Gamma_3} p_\tau (u_\nu - q) (|v_\tau| - |u_\tau|) da \\ &\leq - \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) da + \int_{\Gamma_3} p_\tau (u_\nu - q) (|v_\tau| - |u_\tau|) da, \end{aligned}$$

on en déduit en tenant compte du lemme 2.1. que :

$$j(u, v) - j(u, u) \geq - \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) da - \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau (v_\tau - u_\tau) da,$$

d'où

$$\int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u) da \geq j(u, u) - j(u, v).$$

En portant la dernière inégalité dans (2.2.4), on obtient

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u)_V + j(u, u) - j(u, v),$$

d'où (2.2.3). ■

Le problème  $(P_1)$  admet alors la formulation faible suivante:

**Problème**  $(P_{1,2})$ . Trouver le champ de déplacements  $u \in V$  tel que:

$$a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in V \quad (2.2.5)$$

Réciproquement, on va vérifier par un calcul formel que:

**Lemme 2.3.** Si  $u$  est une solution régulière du problème  $(P_{1,2})$ , alors  $u$  vérifie les équations et les conditions aux limites du problème  $(P_1)$ .

**Démonstration.** Soit  $u$  une solution régulière du problème  $(P_{1,2})$ , montrons que  $u$  satisfait les conditions (2.1.1) – (2.1.6).

1- Soit  $\varphi \in D(\Omega)^d$ , choisissons  $v = u + \varphi$  dans l'inégalité (2.2.5), il vient:

$$a(u, \varphi) + j(u, u + \varphi) - j(u, u) \geq (f, \varphi)_V,$$

ou encore

$$(\sigma, \varepsilon(\varphi))_Q + j(u, u + \varphi) - j(u, u) \geq (f, \varphi)_V,$$

moyennant (2.1.12), (2.1.13) et la formule de Green

$$\begin{aligned} & (div\sigma, \varphi)_H + \int_{\Gamma_3} p_\nu (u_\nu - q) (u + \varphi - u)_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau (u_\nu - q) (|(u + \varphi)_\tau| - |u_\tau|) da \\ & \geq (\varphi_1, \varphi)_H + (\varphi_2, \gamma\varphi)_{L^2(\Gamma_2)^d} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_2} \sigma\nu \cdot \varphi da - (div\sigma, \varphi)_H + \int_{\Gamma_3} p_\nu (u_\nu - q) (u + \varphi - u)_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau (u_\nu - q) |\varphi_\tau| da \\ & \geq (\varphi_1, \varphi)_H + (\varphi_2, \gamma\varphi)_{L^2(\Gamma_2)^d} \end{aligned}$$

$\varphi \in D(\Omega)^d$ , alors  $\varphi = 0$  sur  $\Gamma$ , d'où

$$(div\sigma, \varphi)_H + (\varphi_1, \varphi)_H \geq 0$$

Maintenant pour  $v = u - \varphi$  et par les mêmes arguments, on obtient:

$$(div\sigma, \varphi)_H + (\varphi_1, \varphi)_H \leq 0,$$

$\varphi$  est arbitraire d'où

$$div\sigma + \varphi_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.2.6)$$

2- La formule de Green (1.2.18) et l'inégalité (2.2.5) donnent

$$\langle \sigma\nu, \gamma v - \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} - (div\sigma, v) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, \gamma v - \gamma u)_V \quad \forall v \in V$$

d'où, d'après (2.1.12) et (2.2.6)

$$\langle \sigma\nu, \gamma v - \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} + j(u, v) - j(u, u) \geq (\varphi_2, \gamma v - \gamma u)_{L^2(\Gamma_2)^2}, \quad (2.2.7)$$

pour  $\varphi \in D(\bar{\Omega})^d$ , qui s'annule sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$  et la fonction test  $v = u \pm \varphi$ , on obtient:

$$\int_{\Gamma_2} (\sigma\nu - \varphi_2) \gamma \varphi \, da = 0.$$

$\varphi$  étant arbitraire, on déduit que:

$$\sigma\nu = \varphi_2 \text{ sur } \Gamma_2. \quad (2.2.8)$$

**3-** En choisissant une fonction régulière  $\varphi$  qui s'annule sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  tel que  $\varphi_\tau = 0$  sur  $\Gamma_3$  et en utilisant les mêmes arguments qu'auparavant, on obtient:

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu + p_\nu(u_\nu - q)) \cdot \varphi \, da = 0,$$

la fonction  $\varphi$  est arbitraire, d'où:

$$\sigma_\nu + p_\nu(u_\nu - q) = 0, \text{ sur } \Gamma_3. \quad (2.2.9)$$

4-En tenant compte de (2.2.8) , (2.2.7) devient:

$$\int_{\Gamma_3} \sigma\nu (\gamma v - \gamma u) \, da + j(u, v) - j(u, u) \geq 0 \quad \forall v \in V,$$

c'est-à-dire que l'on a:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (\gamma v - \gamma u) \, da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot (\gamma v - \gamma u) \, da + \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - q) (v_\nu - u_\nu) \, da \\ & + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - q) (|v_\tau| - |u_\tau|) \, da \geq 0, \end{aligned}$$

sachant que:

$$\sigma_\tau \cdot v = \sigma_\tau \cdot v_\tau,$$

et que:

$$|v_\tau| \leq |v|$$

on déduit en tenant compte de (2.2.1) que:

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau \cdot v + p_\tau(u_\nu - q) |v|) \, da - \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau \cdot u + p_\tau(u_\nu - q) |u_\tau|) \, da \geq 0$$

Si on pose  $v = \pm kv$  avec  $k \geq 0$  dans l'inégalité précédente, on aura:

$$k \int_{\Gamma_3} (\pm \sigma_\tau \cdot v + p_\tau(u_\nu - q) |v|) \, da - \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau \cdot u + p_\tau(u_\nu - q) |u_\tau|) \, da \geq 0 \quad \forall v \in V,$$

par conséquent, on a d'une part

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau \cdot u_\tau + p_\tau (u_\nu - q) |u_\tau|) da \leq 0 \quad (2.2.10)$$

et d'autre part

$$\int_{\Gamma_3} (\pm \sigma_\tau \cdot v + p_\tau (u_\nu - q) |v|) da \geq 0 \quad (2.2.11)$$

par densité la dernière relation est vraie  $\forall v \in L^2(\Gamma_3)$ , choisissons alors  $v = \beta \sigma_\tau$  p.p. sur  $\Gamma_3$  où  $\beta \in L^2(\Gamma_3)$  et  $\beta \geq 0$  p.p. sur  $\Gamma_3$ , on obtient

$$\int_{\Gamma_3} (-|\sigma_\tau|^2 + p_\tau (u_\nu - q) |\sigma_\tau|) \beta da \geq 0,$$

ce qui entraîne:

$$-|\sigma_\tau|^2 + p_\tau (u_\nu - q) |\sigma_\tau| \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3,$$

c'est-à-dire

$$|\sigma_\tau| \leq p_\tau (u_\nu - q)$$

ce qui permet de déduire que:

$$-\sigma_\tau \cdot u_\tau \leq |\sigma_\tau \cdot u_\tau| \leq p_\tau (u_\nu - q) |u_\tau| \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3,$$

il s'ensuit:

$$\sigma_\tau \cdot u_\tau + p_\tau (u_\nu - q) |u_\tau| \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (2.2.12)$$

Il découle immédiatement des inégalités (2.2.10) et (2.2.12) que:

$$\sigma_\tau \cdot u_\tau + p_\tau (u_\nu - q) |u_\tau| = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

En utilisant le lemme 2.1. , on obtient les conditions aux limites de frottement (2.1.6) ■

## 2.3 Existence et unicité de la solution du problème

Ayant établi l'équivalence formelle entre les problèmes  $(P_1)$  et  $(P_{1.2})$ , maintenant on se propose de donner un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème  $(P_{1.2})$ .

**Théorème 2.4.** *Sous les hypothèses (2.1.7) – (2.1.11) , il existe une constante  $C > 0$  telle que si  $C(L_\nu + L_\tau) < 1$ , le problème  $(P_{1.2})$  admet une solution unique  $u$ .*

**Preuve:** Pour démontrer le théorème 2.4. , on introduit un problème intermédiaire:

Pour chaque  $g = (g_1, g_2) \in L_+^2(\Gamma_3)^2$ , où

$$L_+^2(\Gamma_3) = \{z \in L^2(\Gamma_3) \text{ tel que: } z \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3\},$$

on définit la fonctionnelle  $h_g : V \longrightarrow \mathbb{R}$  de la manière suivante:

$$h_g(w) = \int_{\Gamma_3} g_1 w_\nu da + \int_{\Gamma_3} g_2 |w_\tau| da \quad \forall w \in V.$$

Le problème intermédiaire est défini comme suit :

**Problème**  $(P_1^g)$ . Trouver  $u_g \in V$  tel que:

$$a(u_g, w - u_g) + h_g(w) - h_g(u_g) \geq (f, w - u_g)_V \quad \forall w \in V \quad (2.3.1)$$

**Lemme 2.5.** *Le problème  $(P_1^g)$  a une unique solution.*

**Preuve.** La fonctionnelle  $h_g$  est convexe, propre et semi continue inférieurement, de plus  $a$  est symétrique, continue et coercive, on déduit en vertu du théorème 1.3. du chapitre1 sur les inéquations variationnelles elliptiques que l'inéquation (2.3.1) possède une unique solution. ■

Maintenant, pour démontrer le théorème 2.5. , on définit l'application suivante:

$$\begin{aligned} \Psi & : \quad L_+^2(\Gamma_3)^2 \longrightarrow L_+^2(\Gamma_3)^2 \\ g & \longmapsto \quad \Psi(g) = (p_\nu(u_{g_\nu} - q), p_\tau(u_{g_\nu} - q)) \end{aligned}$$

et on montre le

**Lemme 2.6.**  $\Psi$  a un point fixe  $g^*$  et  $u_{g^*}$  est solution du problème  $(P_1)$ .

**Preuve.** Pour  $i = r, s$ , soit le problème :

*Problème*  $(P_1^{g_i})$ . Trouver  $u_{g_i} \in V$  tel que:

$$a(u_{g_i}, v - u_{g_i}) + h_{g_i}(v) - h_{g_i}(u_{g_i}) \geq (f, v - u_{g_i})_V \quad \forall u_{g_i} \in V.$$

Posons  $v = u_{g_s}$  dans l'inégalité du problème  $(P_1^{g_r})$ , on obtient:

$$a(u_{g_r}, u_{g_s} - u_{g_r}) + h_{g_r}(u_{g_s}) - h_{g_r}(u_{g_r}) \geq (f, u_{g_s} - u_{g_r}),$$

et posons  $v = u_{g_r}$  dans l'inégalité du problème  $(P_1^{g_s})$ , on a:

$$a(u_{g_s}, u_{g_r} - u_{g_s}) + h_{g_s}(u_{g_r}) - h_{g_s}(u_{g_s}) \geq (f, u_{g_r} - u_{g_s}),$$

en additionnant les deux inégalités obtenues, il vient:

$$a(u_{g_r} - u_{g_s}, (u_{g_s} - u_{g_r})) + h_{g_r}(u_{g_s} - u_{g_r}) - h_{g_s}(u_{g_r} - u_{g_s}) \geq 0,$$

ce qui permet d'écrire:

$$-a(u_{g_r} - u_{g_s}, u_{g_r} - u_{g_s}) + h_{g_r}(u_{g_s} - u_{g_r}) - h_{g_s}(u_{g_r} - u_{g_s}) \geq 0,$$

d'après  $(h_1)$  (b), il existe une constante  $m$  telle que:

$$h_{g_r}(u_{g_s} - u_{g_r}) - h_{g_s}(u_{g_r} - u_{g_s}) \geq m \|u_{g_r} - u_{g_s}\|_V^2.$$

en utilisant les propriétés de  $h_g$ , on déduit qu'il existe une constante  $C' > 0$  telle que:

$$h_{g_r}(u_{g_s} - u_{g_r}) - h_{g_s}(u_{g_r} - u_{g_s}) \leq C' \|u_{g_r} - u_{g_s}\|_V \|g_r - g_s\|_{L^2(\Gamma_3)^2},$$

d'où

$$\|u_{g_r} - u_{g_s}\|_V \leq \frac{C'}{m} \|g_r - g_s\|_{L^2(\Gamma_3)^2}. \quad (2.3.2)$$

D'autre part, on a :

$$\|\Psi(g_r) - \Psi(g_s)\|_{L^2(\Gamma_3)^2} = \|(p_\nu(u_{g_r\nu} - q) - p_\nu(u_{g_s\nu} - q), p_\tau(u_{g_r\nu} - q) - p_\tau(u_{g_s\nu} - q))\|_{L^2(\Gamma_3)^2},$$

en utilisant l'hypothèse (2.1.10) (a) sur les fonctions  $p_r$  ( $r = \tau, \nu$ ), on déduit de (1.2.13) que:

$$\|\Psi(g_r) - \Psi(g_s)\|_{L^2(\Gamma_3)^2} \leq C_0 (L_\nu + L_\tau) \|u_{g_r} - u_{g_s}\|_V,$$

d'où, on déduit en exploitant (2.3.2) que

$$\|\Psi(g_r) - \Psi(g_s)\|_{L^2(\Gamma_3)^2} \leq \frac{C' C_0}{m} (L_\nu + L_\tau) \|g_r - g_s\|_{L^2(\Gamma_3)^2},$$

en posant  $C = \frac{C' C_0}{m}$ , on déduit que si  $C(L_\nu + L_\tau) < 1$ ,  $\Psi$  est une contraction; donc elle admet un unique point fixe que l'on note  $g^*$  et  $u_{g^*}$  est une solution unique du problème  $(P_{1.2})$  ■

## 2.4 Résultats de dépendance continue de la solution par rapport aux données

Dans cette section, on étudie la dépendance continue de la solution du problème  $(P_1)$  par rapport aux données  $\varphi_2$ ,  $\varphi_2$  et par rapport aux fonctions de contact  $p_\nu$  et  $p_\tau$ .

### 2.4.1 Dépendance continue de la solution par rapport aux données $\varphi_1, \varphi_2$

On a une dépendance continue de la solution du problème  $(P_{2.1})$  par rapport aux données externes  $\varphi_1, \varphi_2$ . Notons par  $u_i, i = 1, 2$  la solution du problème variationnel  $(P_{2.1})$  associée aux données  $\varphi_{1i}, \varphi_{2i}$  satisfaisant (2.1.8) et (2.1.9). Dans ce cas, on a l'estimation:

**Théorème 2.7.** *Supposons que (2.1.7), (2.1.10) et (2.1.11) sont vérifiées et qu'il existe une constante positive  $C$  telle que  $C(L_\nu + L_\tau) < 1$ , alors il existe une constante  $c > 0$  telle que:*

$$\|u_2 - u_1\|_V \leq c \left( \|\varphi_{12} - \varphi_{11}\|_H + \|\varphi_{22} - \varphi_{21}\|_{L^2(\Gamma_2)^d} \right)$$

**Preuve.** Soit  $u_1$  la solution du problème  $(P_{2.1})$  associée aux données  $\varphi_{11}, \varphi_{21}$ , et  $u_2$  la solution du problème  $(P_{2.1})$ , associée aux données  $\varphi_{12}, \varphi_{22}$ .

Posons  $v = u_2$  dans la première inéquation et  $v = u_1$  dans la deuxième inéquation, en additionnant, on trouve:

$$\begin{aligned} -a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) + j(u_1, u_2) - j(u_1, u_1) + j(u_2, u_1) \\ - j(u_2, u_2) \geq (f_1 - f_2, u_2 - u_1), \end{aligned}$$

et en utilisant  $(h_1)$ , il s'ensuit:

$$\begin{aligned} m \|u_2 - u_1\|_V^2 \leq j(u_1, u_2) - j(u_1, u_1) + j(u_2, u_1) \\ - j(u_2, u_2) + (f_2 - f_1, u_2 - u_1). \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Par ailleurs, de (2.1.13), on a :

$$\begin{aligned} j(u_1, u_2) - j(u_1, u_1) + j(u_2, u_1) - j(u_2, u_2) \leq \\ (\|p_\nu(u_{2\nu} - q) - p_\nu(u_{1\nu} - q)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|p_\tau(u_{2\nu} - q) - p_\tau(u_{1\nu} - q)\|_{L^2(\Gamma_3)}) \|u_2 - u_1\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \end{aligned}$$

en remplaçant  $f$  par son expression donnée par (2.1.12) et en utilisant la condition de contact (2.1.10) (a) joint à (1.2.13), on déduit qu'il existe deux constantes positives  $C_1, C_2$  telles que:

$$\begin{aligned} j(u_1, u_2) - j(u_1, u_1) + j(u_2, u_1) - j(u_2, u_2) \leq \\ C_1 \left( \|\varphi_{11} - \varphi_{12}\|_H + \|\varphi_{21} - \varphi_{22}\|_{L^2(\Gamma_2)^d} \right) \|u_2 - u_1\|_V \\ + C_2(L_\nu + L_\tau) \|u_2 - u_1\|_V^2 \end{aligned}$$

On déduit de la dernière inégalité et de (2.4.1) que si :  $m - C_2(L_\nu + L_\tau) > 0$ , alors, il existe une constante  $c > 0$  telle que:

$$\|u_2 - u_1\|_V \leq c \left( \|\varphi_{12} - \varphi_{11}\|_H + \|\varphi_{22} - \varphi_{21}\|_{L^2(\Gamma_2)^d} \right)$$

■

## 2.4.2 Dépendance continue de la solution par rapport aux fonctions de contact

Dans la suite, on suppose que les conditions (2.1.7) – (2.1.11) sont satisfaites et qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $C(L_\nu + L_\tau) < 1$ . Pour chaque  $\alpha \geq 0$  soit  $p_r^\alpha$  une perturbation de  $p_r$  qui satisfait les conditions (2.1.10) avec une constante de Lipschitz notée  $L_\nu^\alpha$  ( $r = \nu, \tau$ ). On introduit la fonctionnelle  $j^\alpha$  en remplaçant  $p_\nu$  et  $p_\tau$  par  $p_\nu^\alpha$  et  $p_\tau^\alpha$  respectivement dans l'expression (2.1.13).

On considère le problème suivant :

**Problème** ( $P_1^\alpha$ ). Pour  $\alpha \geq 0$ , trouver le champ de déplacements  $u^\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $u^\alpha \in V$  tel que:

$$a(u^\alpha, v - u^\alpha) + j^\alpha(u^\alpha, v) - j^\alpha(u^\alpha, u^\alpha) \geq (f, v - u^\alpha)_V \quad \forall v \in V \quad (2.4.2)$$

Le problème ( $P_1^\alpha$ ) représente une formulation variationnelle du problème (2.1.1) – (2.1.6) où  $u$  est remplacée par  $u^\alpha$  et  $p_\nu, p_\tau$  sont remplacées par  $p_\nu^\alpha, p_\tau^\alpha$  respectivement. On suppose que les fonctions de contact vérifient les hypothèses suivantes :

il existe  $\delta > 0$  et une application  $\theta_r : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $r = (\nu, \tau)$  tel que:

$$\begin{aligned} (a) \quad & |p_r^\alpha(x, u) - p_r(x, u)| \leq \theta_r(\alpha) |u| \quad \forall u \in \mathbb{R}, p.p. \ x \in \Gamma_3. \\ (b) \quad & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \theta_r(\alpha) = 0 \\ (c) \quad & C(L_\nu^\alpha + L_\tau^\alpha + \delta) \leq 1. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Pour tout  $\alpha \geq 0$  et sous les hypothèses précédentes, on déduit en vertu du théorème 2.4. que le problème ( $P_1^\alpha$ ) admet une unique solution  $u^\alpha \in V$ .

Par ailleurs, on a le résultat suivant:

**Théorème 2.8.** La solution  $u^\alpha$  du problème ( $P_1^\alpha$ ) converge fortement dans  $V$  vers  $u$  la solution du problème ( $P_1$ ) quand  $\alpha$  tend vers 0 .

**Preuve.** On pose  $v = u^\alpha$  dans (2.2.5) et  $v = u$  dans (2.4.2) et on additionne, il vient :

$$a(u^\alpha - u, u^\alpha - u) \leq j^\alpha(u^\alpha, u) - j^\alpha(u^\alpha, u^\alpha) + j(u, u) - j(u, u), \quad (2.4.4)$$

par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} & j^\alpha(u^\alpha, u) - j^\alpha(u^\alpha, u^\alpha) + j(u, u^\alpha) - j(u, u) \leq \\ & \left( \|p_\nu^\alpha(u^\alpha - q) - p_\nu(u_\nu - q)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|p_\tau^\alpha(u_\nu^\alpha - q) - p_\tau(u_\nu - q)\|_{L^2(\Gamma_3)} \right) \|u^\alpha - u\|_{L^2(\Gamma_3)^d}, \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Maintenant de (2.1.10) (a) et de (2.4.3) (a), on a:

$$\begin{aligned}
 & \| (p_r^\alpha(u^\alpha - q) - p_r(u_\nu - q)) \|_{L^2(\Gamma_3)} = \| (p_r^\alpha(u_\nu^\alpha - q) + p_r^\alpha(u_\nu - q) - p_r^\alpha(u_\nu - q) - p_r(u_\nu - q)) \|_{L^2(\Gamma_3)} \\
 & \leq \| (p_r^\alpha(u_\nu^\alpha - q) - p_r^\alpha(u_\nu - q)) \|_{L^2(\Gamma_3)} + \| (p_r^\alpha(u_\nu - q) - p_r(u_\nu - q)) \|_{L^2(\Gamma_3)} \\
 & \leq L_r^\alpha \| u_\nu^\alpha - u_\nu \|_{L^2(\Gamma_3)} + \theta_r(\alpha) \| u \|_{L^2(\Gamma_3)^d},
 \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

où,  $r = (\nu, \tau)$ .

En utilisant la dernière inégalité dans (2.4.5) , on obtient:

$$\begin{aligned}
 & j^\alpha(u^\alpha, u) - j^\alpha(u^\alpha, u^\alpha) + j(u, u^\alpha) - j(u, u) \leq \\
 & \| u^\alpha - u \|_{L^2(\Gamma_3)^d}^2 + (\theta_\nu(\alpha) + \theta_\tau(\alpha)) \| u \|_{L^2(\Gamma_3)^d} \| u^\alpha - u \|_{L^2(\Gamma_3)^d},
 \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

de (1.2.13) , on en déduit que:

$$\begin{aligned}
 & j^\alpha(u^\alpha, u) - j^\alpha(u^\alpha, u^\alpha) + j(u^\alpha, u) - j(u, u) \leq \\
 & C_0^2(L_\nu^\alpha + L_\tau^\alpha) \| u^\alpha - u \|_V^2 + C_0^2(\theta_\nu(\alpha) + \theta_\tau(\alpha)) \| u \|_V \| u^\alpha - u \|_V
 \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

d'où de (2.4.4) et  $(h_1)(b)$ :

$$(m - C_0^2(L_\nu^\alpha + L_\tau^\alpha)) \| u^\alpha - u \|_V^2 \leq C_0^2(\theta_\nu(\alpha) + \theta_\tau(\alpha)) \| u \|_V \| u^\alpha - u \|_V$$

Pour  $C \leq \frac{C_0^2}{m}$ , il vient:

$$\left( \frac{1}{C} - (L_\nu^\alpha + L_\tau^\alpha) \right) \| u^\alpha - u \|_V \leq (\theta_\nu(\alpha) + \theta_\tau(\alpha)) \| u \|_V$$

et donc, d'après (2.4.3) (c), on a:

$$\delta \| u^\alpha - u \|_V \leq (\theta_\nu(\alpha) + \theta_\tau(\alpha)) \| u \|_V,$$

Quand  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\theta_r(\alpha) \rightarrow 0$ , donc  $u^\alpha$  converge frottement vers  $u$  dans  $V$ . ■

## 2.5 Conclusion

Sous l'hypothèse de petitesse des fonctions de contact on a montré que le problème mécanique  $(P_1)$  a une solution faible unique. Le théorème 2.7. est important dans les applications, car il montre qu'une petite variation des données  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  n'entraînerait que de faibles variations des solutions de problèmes correspondants. Une remarque similaire pourrait s'appliquer au théorème 2.8. qui montre que ces solutions restent stables par rapport aux petites perturbations des fonctions de contact.

## Chapitre 3

# *Problème de contact statique avec coefficient de frottement dépendant de la solution*

Il existe un très grand nombre d'applications qui font appel à des mécanismes de contact dans lesquels un corps déformable peut glisser sur une fondation et que le frottement dépend de ce glissement, tel est le glissement des plaques tectoniques. En tenant compte de cette propriété, dans ce chapitre, on s'intéresse à un contact statique entre un corps élastique linéaire et une fondation; le contact est modélisé avec une version simplifiée du frottement de Tresca.

### 3.1 Enoncé du problème - Hypothèses

On suppose qu'un corps élastique est représenté par un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ , ( $d = 1, 2$ ), ayant les propriétés suivantes :

-  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  régulière telle que  $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$ , où  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  sont des ouverts disjoints de  $\Gamma$ .

- Le corps est soumis à des forces de volume de densité  $\varphi_1$ .
- Sur  $\Gamma_1$  le déplacement imposé est nul.
- Sur  $\Gamma_2$  on impose des forces de densité  $\varphi_2$ .
- Le corps est en contact avec une fondation le long de  $\Gamma_3$ .

Le problème s'énonce comme suit:

**Problème**( $P_2$ ). *Trouver le champ de déplacements  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  tel que:*

$$\operatorname{div}\sigma + \varphi_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1.1)$$

$$\sigma = F(\varepsilon(u)) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (3.1.3)$$

$$\sigma\nu = \varphi_2 \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (3.1.4)$$

$$\sigma_\nu = -S \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad (3.1.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq S\mu(|u_\tau|) \\ |\sigma_\tau| < S\mu(|u_\tau|) \implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = S\mu(|u_\tau|) \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que: } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (3.1.6)$$

On rappelle que :

- 3.1.1 est l'équation d'équilibre.
- (3.1.2) représente la loi constitutive élastique où  $F$  est une fonction linéaire symétrique donnée et vérifie la conditions (2.1.7) du chapitre précédent.
- (3.1.3) et (3.1.4) sont les conditions du déplacement-traction.
- (3.1.5) affirme que la contrainte normale  $\sigma_\nu$  est imposée sur la partie  $\Gamma_3$ , où  $S$  est une fonction donnée.
- (3.1.6) sont les conditions de frottement sur la zone de contact  $\Gamma_3$ .

On rappelle l'espace  $V$  défini par:

$$V = \{v \in H_1 \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

$V$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire noté  $(\cdot, \cdot)_V$  et la norme associée  $\|\cdot\|_V$  tel que:

$$(u, v)_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_Q.$$

*Autres hypothèses*

$$\varphi_1 \in H, \quad \varphi_2 \in L^2(\Gamma_2)^d. \quad (3.1.7)$$

$$S \in L^\infty(\Gamma_3) \text{ et } S \geq 0 \quad (3.1.8)$$

Le coefficient de frottement vérifie les conditions suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ (b) \text{ Il existe une constante } L_\mu > 0 \text{ telle que:} \\ \quad |\mu(\cdot, r_1) - \mu(\cdot, r_2)| \leq L_\mu |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, \text{ p.p. dans } \Gamma_3. \\ (c) \text{ Il existe une constante } \mu^* > 0 \text{ tel que:} \\ \quad \mu(x, r) \leq \mu^* \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}_+ \text{ et p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (d) \text{ L'application } x \longrightarrow \mu(x, r) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}_+. \end{array} \right. \quad (3.1.9)$$

## 3.2 Formulation variationnelle

Pour la formulation variationnelle, introduisons certaines notations:

En utilisant le théorème de représentation de *Riesz-Fréchet*, on définit  $f$  par:

$$(f, v)_V = \int_{\Omega} \varphi_1 \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} \varphi_2 \cdot v da - \int_{\Gamma_3} S v_\nu da \quad \forall v \in V. \quad (3.2.1)$$

Et soit  $j : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle définie par:

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} S \mu(|u_\tau|) |v_\tau| da, \quad (3.2.2)$$

qui est une fonctionnelle continue non différentiable.

Les assertions (3.1.7), (3.1.8) assurent que les intégrales (3.2.1), (3.2.2) sont bien définies.

De plus, la fonction  $j$  vérifie l'hypothèse suivante:

$$j(\eta, \cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonctionnelle convexe pour tout } \eta \in V \quad (3.2.3)$$

Et on sait qu'il existe une dérivée directionnelle  $j'_2$  de  $j$ , donnée par:

$$j'_2(\eta, u; v) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [j(\eta, u + \lambda v) - j(\eta, u)] \quad \forall \eta, u, v \in V \quad (3.2.4)$$

Pour déduire une formulation variationnelle du problème  $(P_2)$ , on va montrer le

**Lemme 3.1.** *Si  $u, \sigma$  sont suffisamment régulières et vérifient les conditions (3.1.1)-(3.1.6), alors*

$$(\sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_Q + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in V. \quad (3.2.5)$$

**Preuve.** Soit  $u$  une solution du problème  $(P_2)$ , et soit  $v \in V$ .

De la formule de Green (Sec.2.1. Chap.1) et de (3.2.1) et (3.1.4) , on a:

$$\begin{aligned} (\sigma, \varepsilon(v))_Q &= \langle \sigma \nu, v \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} - (\operatorname{div} \sigma, v)_H \\ &= (\varphi_1, v)_H + (\sigma \nu, \gamma v)_{L^2(\Gamma_2)^d} + (\sigma \nu, \gamma v)_{L^2(\Gamma_3)^d} \\ &= (\varphi_1, v)_H + (\varphi_2, \gamma v)_{L^2(\Gamma_2)^d} + (\sigma \nu, \gamma v)_{L^2(\Gamma_3)^d} \end{aligned}$$

et d'après (1.1.8) et (3.2.5) , on en déduit que

$$\begin{aligned} (\sigma \nu, v)_{L^2(\Gamma_3)^d} &= (\sigma_\tau, v_\tau)_{L^2(\Gamma_3)^d} + (\sigma_\nu, v_\nu)_{L^2(\Gamma_3)} \\ &= \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot v_\tau da - (S, v_\nu)_{L^2(\Gamma_3)}, \end{aligned}$$

et donc

$$(\sigma, \varepsilon(v))_Q = (\varphi_1, v)_H + (\varphi_2, \gamma v)_{L^2(\Gamma_2)^d} - (S, v_\nu)_{L^2(\Gamma_3)} + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot v_\tau da,$$

et d'après (3.2.1) :

$$(\sigma, \varepsilon(v))_Q = (f, v)_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot v_\tau da, \quad (3.2.6)$$

d'autre part (3.1.6) , donne

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot v_\tau da \geq - \int_{\Gamma_3} S \mu (|u_\tau|) |v_\tau| da,$$

donc d'après (3.2.2) , on déduit que

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot v_\tau da \geq -j(u, v) \quad (3.2.7)$$

en rapportant (3.2.7) dans (3.2.6) , il vient

$$(\sigma, \varepsilon(v))_Q + j(u, v) \geq (f, v)_V. \quad (3.2.8)$$

Maintenant, de (3.1.6) et de (3.2.2) , on déduit que

$$\begin{aligned} -j(u, u) &= - \int_{\Gamma_3} S \mu (|u_\tau|) |u_\tau| da \\ &\geq \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot u_\tau da, \end{aligned}$$

et donc d'après (3.2.7)

$$-j(u, u) = \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot u_\tau da, \quad (3.2.9)$$

faisons  $v = u$  dans (3.2.6) , on en déduit

$$(\sigma, \varepsilon(u))_Q + j(u, u) = (f, u)_V \quad (3.2.10)$$

Finalement, (3.2.5) est une conséquence directe de (3.2.8) et (3.2.10) . ■

La formulation variationnelle que l'on considère est alors le:

**Problème** ( $P_{2.1}$ ). *Trouver le champ de déplacements  $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$*

$$\begin{aligned} u \in V, \text{ tel que:} \\ a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

**Remarque 3.1.** *La forme bilinéaire  $a$  est définie comme au chapitre 2, c'est-à-dire*

$$a(u, v) = (F(\varepsilon(u)), \varepsilon(v))_Q$$

*et vérifie, par conséquent, la condition  $(h_1)$  du chapitre 1.*

Notons que le problème ( $P_2$ ) est équivalent au problème ( $P_{2.1}$ ) dans le sens que si  $u$  est solution suffisamment régulière de ( $P_{2.1}$ ), alors  $u$  est solution du problème ( $P_2$ ), la démonstration formelle de cette équivalence utilise les mêmes techniques employées au chapitre 2.

### 3.3 Résultat d'existence et d'unicité

Dans cette section on donne un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème ( $P_{2.1}$ ).

**Théorème 3.2.** *Sous les conditions (2.1.7) et (3.1.7) -(3.1.9) , il existe  $L_0 > 0$ , tel que si  $L_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < L_0$ , alors le problème ( $P_{2.1}$ ) admet une solution unique qui dépend continûment de  $f$ .*

Pour la démonstration du théorème 3.2., on suppose dans tout ce qui suit que les conditions (2.1.7) et (3.1.7) –(3.1.9) , sont vérifiées, et on va prouver que la fonctionnelle  $j$  vérifie les conditions du théorème 1.4.

D'abord il est clair que  $j$  vérifie les hypothèses ( $h_2$ ) et ( $h_3$ ), cependant, on a le lemme suivant:

**Lemme 3.3.** *La fonctionnelle  $j$  satisfait les conditions  $(j_1)$ ,  $(j_2)$ .*

**Preuve.** Considérons les suites  $(u_n) \subset V, t_n \subset [0, 1]$ .

En utilisant la définition de  $j$  dans (3.2.2), on obtient:

$$\begin{aligned} j(t_n u_n, u_n - \lambda u_n) - j(t_n u_n, u_n) &= \int_{\Gamma_3} S\mu(|t_n u_{n\tau}|) (|u_{n\tau}| - \lambda |u_{n\tau}| - |u_{n\tau}|) da \\ &= -\lambda \int_{\Gamma_3} S\mu(|t_n u_{n\tau}|) |u_{n\tau}| da, \end{aligned}$$

d'où d'après (3.1.9)

$$j(t_n u_n, u_n - \lambda u_n) - j(t_n u_n, u_n) \leq 0, \quad (3.3.1)$$

et donc

$$j'_2(t_n u_n, u_n; -u_n) \leq 0 \leq m. \quad (3.3.2)$$

Ceci entraîne que si:  $\|u_n\|_V \rightarrow \infty$ , alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\|u_n\|_V^2} j'_2(t_n u_n, u_n; -u_n) \right] \leq m,$$

c'est-à-dire que  $j$  vérifie la condition  $(j_1)$ .

Pour l'autre condition, soit maintenant les suites  $\{u_n\} \subset V$  et  $(\eta_n) \subset V$  telles que:

$$\|u_n\|_V \rightarrow \infty \quad (3.3.3)$$

$$\|\eta_n\|_V \leq c, \quad \text{où } c > 0. \quad (3.3.4)$$

De (3.3.2), on a :

$$j'_2(\eta_n, u_n; -u_n) \leq m.$$

Il est immédiat, grâce à (3.3.3) et (3.3.4), que:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\|u_n\|_V^2} j'_2(\eta_n, u_n; -u_n) \right] \leq m,$$

d'où le résultat. ■

**Lemme 3.4.** *La fonctionnelle  $j$  vérifie l'hypothèse  $(j_3)$ .*

**Preuve.** Soient les suites  $(u_n) \subset V$  et  $(\eta_n) \subset V$  telles que:

$$u_n \rightarrow u \in V \quad \text{faiblement,}$$

et

$$\eta_n \rightarrow \eta \in V \quad \text{faiblement.}$$

Il résulte, d'après la propriété de compacité de l'opérateur trace (théorème de Relich) et de (3.1.9), que:

$$\mu |\eta_{n\tau}| \longrightarrow \mu |\eta_\tau| \quad \text{fortement dans } L^2(\Gamma_3)$$

et

$$\mu |u_{n\tau}| \longrightarrow \mu |u_\tau| \quad \text{fortement dans } L^2(\Gamma_3),$$

et donc pour tout  $v \in V$ , on a :

$$j(\eta_n, v) \longrightarrow j(\eta, v)$$

et

$$j(\eta_n, u_n) \longrightarrow j(\eta, u)$$

d'où la condition ( $j_3$ ). ■

**Lemme 3.5.** *Sous la condition (3.1.9) (b)  $j$  satisfait l'inégalité:*

$$j(u, v) - j(u, u) + j(v, u) - j(v, v) \leq C_0^2 L_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V. \quad (3.3.5)$$

**Preuve.** D'Après (3.2.2), on a :

$$j(u, v) - j(u, u) + j(v, u) - j(v, v) = \int_{\Gamma_3} S(\mu(|u_\tau|) - \mu(|v_\tau|)) (|v_\tau| - |u_\tau|) da \quad \forall u, v \in V.$$

En appliquant (3.1.9) (b), il vient:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} S(\mu(|u_\tau|) - \mu(|v_\tau|)) (|v_\tau| - |u_\tau|) da &\leq \int_{\Gamma_3} SL_\mu |u_\tau - v_\tau| (|v_\tau| - |u_\tau|) da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} SL_\mu |u_\tau - v_\tau|^2 da, \end{aligned}$$

d'où

$$j(u, v) - j(u, u) + j(v, u) - j(v, v) \leq \int_{\Gamma_3} SL_\mu |u_\tau - v_\tau|^2 da,$$

(1.2.13) implique qu'il existe  $C_0 > 0$  telle que:

$$L_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_{\Gamma_3} |u_\tau - v_\tau|^2 da \leq C_0^2 L_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u - v\|_V^2 da$$

d'où l'inégalité (3.3.5) ■

**Preuve du théorème 3.2.** La forme bilinéaire  $a(.,.)$  vérifie l'hypothèse  $(h_1)(b)$ , c'est-à-dire :

$$a(v, v) \geq m \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Posons

$$L_0 = \frac{m}{C_0^2}, \quad (3.3.6)$$

et supposons que  $L_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < L_0$ , alors il existe  $\beta \in \mathbb{R}_+$  tel que:

$$C_0^2 L_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \beta < m.$$

En utilisant ce résultat dans l'inégalité (3.3.5), on obtient

$$j(u, u - v) - j(v, v - u) \leq \beta \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V, u \neq v.$$

Et donc la fonctionnelle vérifie la condition  $(j_4)$ . En tenant compte des lemmes 3.3. et 3.4., on en déduit que le problème  $(P_{2.1})$  vérifie les conditions du théorème 1.4. ■

## 3.4 Dépendance continue de la solution par rapport aux données

Dans cette section, on se propose d'étudier la dépendance continue de la solution faible du problème  $(P_{2.1})$  par rapport aux données  $\varphi_1, \varphi_2$ , et par rapport à une faible perturbation du coefficient de frottement  $\mu$ .

### 3.4.1 Dépendance continue de la solution par rapport aux données $\varphi_1, \varphi_2$ :

On a une dépendance Lipschitz continue de la solution du problème  $(P_{2.1})$  par rapport à la donnée  $f$ . En effet, soit  $u_i$ ,  $i = 1, 2$  la solutions faible du problème variationnel  $(P_{2.1})$  donnée par le théorème 3.2. associée aux données  $\varphi_{1i}, \varphi_{2i}$  satisfaisant (3.1.7), alors, on a l'estimation:

**Théorème 3.6.** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que:*

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq c \left( \|\varphi_{11} - \varphi_{12}\|_H + \|\varphi_{21} - \varphi_{22}\|_{L^2(\Gamma_2)^d} \right)$$

**Preuve.** Le résultat est une conséquence directe du théorème 3.2. ■

### 3.4.2 Dépendance continue de la solution par rapport au coefficient de frottement

Maintenant, pour étudier le comportement de la solution faible du problème  $(P_2)$  par rapport aux petites perturbations du coefficient de frottement, on se place dans les conditions du théorème 3.2. avec  $L_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < L_0$ , où  $L_0$  est donné par (3.3.6) .

Soit  $u$  la solution faible de  $(P_2)$ . Pour tout  $\alpha \geq 0$ , soit  $\mu^\alpha$  une perturbation de  $\mu$  qui satisfait les conditions (3.1.9) , avec  $L_\mu^\alpha \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < L_0$ . On introduit les fonctionnelles  $j^\alpha$  en remplaçant  $\mu$  par  $\mu^\alpha$  dans l'expression de  $j$  et on considère le problème variationnel perturbé:

**Problème  $(P_2^\alpha)$ .** Pour tout  $\alpha \geq 0$ , trouver le champ de déplacements  $u^\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} u^\alpha \in V, \text{ tel que:} \\ a(u^\alpha, v - u^\alpha) + j^\alpha(u^\alpha, v) - j^\alpha(u^\alpha, u^\alpha) \geq (f, v - u^\alpha)_V \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

**Remarque 3.2.** En utilisant le théorème 3.2. , on déduit que le problème  $(P_{2.1}^\alpha)$  admet une solution unique  $u^\alpha \in V$ .

On a le résultat de convergence suivant:

**Théorème 3.7.** Si la condition:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une application } \theta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ telle que:} \\ (a) \quad |\mu^\alpha(x, t) - \mu(x, t)| \leq \theta(\alpha) |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (b) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \theta(\alpha) = 0 \end{array} \right. \quad (3.4.2)$$

est vérifiée, alors  $u^\alpha \longrightarrow u$  fortement dans  $V$  quand  $\alpha \longrightarrow 0$ .

**Preuve.** Soit  $\alpha \geq 0$ . Posons  $v = u^\alpha$  dans (3.2.11) et  $v = u$  dans (3.4.1) , et additionnons, il vient:

$$\begin{aligned} a(u^\alpha - u, u^\alpha - u) &\leq j(u, u^\alpha) - j(u, u) + j^\alpha(u^\alpha, u) - j^\alpha(u^\alpha, u^\alpha) \\ &\leq \int_{\Gamma_3} S(\mu(|u_\tau|) - \mu^\alpha(|u_\tau^\alpha|)) (|u_\tau^\alpha| - |u_\tau|) da, \end{aligned}$$

d'après  $(h_1)(b)$ , il existe  $m > 0$  tel que :

$$a(u^\alpha - u, u^\alpha - u) \geq m \|u^\alpha - u\|_V^2,$$

ce qui entraîne

$$m \|u^\alpha - u\|_V^2 \leq \int_{\Gamma_3} S[(\mu(|u_\tau^\alpha|) - \mu^\alpha(|u_\tau^\alpha|)) + (\mu(|u_\tau|) - \mu(|u_\tau^\alpha|))] (|u_\tau^\alpha| - |u_\tau|) da, \quad (3.4.3)$$

en utilisant (3.1.9) (b) et (3.4.2) (a), on obtient :

$$m \|u^\alpha - u\|_V^2 \leq \theta(\alpha) \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u^\alpha\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \|u^\alpha - u\|_{L^2(\Gamma_3)^d} + \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)^d} L_\mu \|u^\alpha - u\|_{L^2(\Gamma_3)^d}^2,$$

(1.2.13) appliquée à la dernière inégalité, donne

$$(m - C_0^2 L_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|u^\alpha - u\|_V \leq C_0^2 \theta(\alpha) \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u^\alpha\|_V. \quad (3.4.4)$$

D'autre part, si on choisit  $v = 0$  dans (3.4.1), on obtient

$$\begin{aligned} a(u^\alpha, u^\alpha) &\leq -j^\alpha(u^\alpha, u^\alpha) + (f, u^\alpha)_V \\ &\leq (f, u^\alpha)_V, \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau  $(h_1)(b)$ , il vient:

$$m \|u^\alpha\|_V^2 \leq (f, u^\alpha)_V, \quad (3.4.5)$$

d'où, on déduit:

$$\|u^\alpha\|_V \leq \frac{1}{m} \|f\|_V \quad \forall \alpha \geq 0 \quad (3.4.6)$$

sachant que  $L_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < L_0$ , pour  $L_0 \leq \frac{m}{C_0^2}$ , on trouve en utilisant (3.4.4) dans (3.4.6)

$$\|u^\alpha - u\|_V \leq \frac{C_0^2 \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|f\|_V}{m(m - C_0^2 L_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)})} \theta(\alpha),$$

et donc

$$\|u^\alpha - u\|_V \leq k\theta(\alpha),$$

où  $k > 0$ , et la convergence est une conséquence directe de (3.4.2) (c). ■

## 3.5 Conclusion

Sous l'hypothèse de petitesse du coefficient de frottement et de la contrainte normale imposée, on a montré que le problème  $(P_{2.1})$  a une solution faible unique. Le résultat obtenu a un grand intérêt en application, du fait qu'il confirme la stabilité de la solution du problème  $(P_2)$  dans le sens qu'une petite perturbation des conditions de contact n'induit qu'une petite perturbation de la solution du problème  $(P_2)$ .

## Chapitre 4

# *Problème quasi-statique avec compliance normale et frottement*

Dans ce chapitre, on étudie un problème de contact quasi-statique avec compliance normale et frottement de Coulomb (problème  $(P_3)$ , du chapitre 1). Pour ce problème, on suppose que la fondation est déformable ou réactive. On établit une formulation faible du problème et on démontre un résultat d'existence en utilisant une méthode de discrétisation en temps.

## 4.1 Enoncé du problème - Hypothèses

Ce chapitre est dédié à l'étude d'un problème d'évolution qui modélise le contact quasi-statique entre un corps déformable et une fondation déformable. Le corps occupe un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), de frontière  $\Gamma$  supposée régulière, telle que  $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$  où  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  sont des ouverts disjoints avec  $mes(\Gamma_1) > 0$ . Soit  $T > 0$ ,  $[0, T]$  dénote l'intervalle du temps qu'on considère. Le corps est soumis à une densité de forces volumiques  $\varphi_1$  donnée sur  $\Omega \times (0, T)$  et à une densité de forces surfaciques  $\varphi_2$  donnée sur  $\Gamma_2 \times (0, T)$ . Le long de  $\Gamma_3$ , le contact est supposé avec compliance normale et frottement de Coulomb. Cela revient à étudier le problème suivant:

### Problème ( $P_3$ )

Trouver le champ de déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  tel que:

$$div \sigma + \varphi_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.1.1)$$

$$\sigma = F(\varepsilon(u)) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (4.1.3)$$

$$\sigma \nu = \varphi_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (4.1.4)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - q) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.1.5)$$

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq p_\tau(u_\nu - q) \\ |\sigma_\tau| < p_\tau(u_\nu - q) \implies \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = p_\tau(u_\nu - q) \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.1.6)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.1.7)$$

- (4.1.1) est l'équation d'équilibre.
- (4.1.2) est la loi constitutive élastique, où  $F$  est symétrique et linéaire, vérifiant les conditions (2.1.7) du chapitre 2.
- (4.1.3) et (4.1.4) sont les conditions au bord de déplacement-traction.
- (4.1.5) représente la condition du contact avec compliance normale.
- (4.1.6) sont les conditions de frottement de Coulomb sur la frontière de contact  $\Gamma_3$ .

Soit l'espace  $V$  défini par:

$$V = \{v \in H_1; v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\},$$

on munit  $V$  de la norme  $\|\cdot\|_V$  induite par le produit scalaire défini par:

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q.$$

On fait les hypothèses:

$$\varphi_1 \in W^{1,\infty}(0, T; H), \quad \varphi_2 \in W^{1,\infty}\left(0, T; L^2(\Gamma_2)^d\right), \quad (4.1.8)$$

Les fonctions de contact  $p_r$ ,  $r = (\tau, \nu)$  et  $q$  vérifient les conditions (2.1.10) et (2.1.11) du chapitre 2.

On définit la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  comme suit:

$$a(u, v) = (F(\varepsilon(u)), \varepsilon(v))_Q. \quad (4.1.9)$$

(2.1.7) entraîne que  $a$  est symétrique est vérifie la condition  $(h_1)$  des chapitres précédents.

On introduit en outre la fonctionnelle convexe  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  par:

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - q)v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - q)|v_\tau| da, \quad (4.1.10)$$

Soit la fonction  $f$  définie par:

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} \varphi_1 \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} \varphi_2 \cdot v da, \quad \forall v \in V \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.1.11)$$

(4.1.8) entraîne:

$$f \in W^{1,\infty}(0, T; V). \quad (4.1.12)$$

et on suppose que la condition initiale satisfait:

$$u_0 \in V \quad (4.1.13)$$

$$a(u_0, v) + j(u_0, v) \geq (f(0), v)_V \quad \forall v \in V. \quad (4.1.14)$$

## 4.2 Formulation variationnelle du problème

L'objet de cette section est d'établir une formulation variationnelle au problème mécanique  $(P_3)$ . On utilise une approche analogue à celle du chapitre 2.

La condition (4.1.6) s'écrit sous la forme donnée par le lemme suivant:

**Lemme 4.1.** Si  $\sigma_\tau$  et  $u_\tau$  sont deux fonctions régulières, alors la condition

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq p_\tau (u_\nu - q) \\ |\sigma_\tau| < p_\tau (u_\nu - q) \implies \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = p_\tau (u_\nu - q) \implies \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau, \quad \lambda \geq 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

est équivalente à:

$$|\sigma_\tau| \leq p_\tau (u_\nu - q), \quad \sigma_\tau \cdot \dot{u}_\tau + p_\tau (u_\nu - q) |\dot{u}_\tau| = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (4.2.1)$$

**Preuve.** La preuve est similaire à la preuve du lemme 2.1. ■

Cependant, on a le lemme suivant:

**Lemme 4.2.** Si  $u, \sigma$  sont suffisamment régulières et vérifient le problème mécanique  $(P_3)$ , alors:

$$\begin{cases} u(t) \in V, \\ a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

**Preuve.** Soit  $u$  une solution assez régulière du problème  $(P_3)$ , soit  $v \in V$  et  $t \in (0, T)$ .

En utilisant la formule de Green et (4.1.1), on obtient:

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_Q = (\varphi_1(t), v - \dot{u}(t))_H + \int_\Gamma \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) da,$$

grâce à (4.1.4) et (4.1.11), on a:

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_Q = (f(t), v - \dot{u}(t))_V + \int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) da,$$

c'est-à-dire :

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) = (f(t), v - \dot{u}(t))_V + \int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) da. \quad (4.2.3)$$

D'après (4.1.10) et (4.1.5) on a :

$$\begin{aligned} j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) &= \int_{\Gamma_3} p_\nu (u_\nu - q) (v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) da + \int_{\Gamma_3} p_\tau (u_\tau - q) (|v_\tau| - |\dot{u}_\tau(t)|) da \\ &\leq - \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t) (v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) da + \int_{\Gamma_3} p_\tau (u_\tau - q) (|v_\tau| - |\dot{u}_\tau(t)|) da. \end{aligned}$$

En tenant compte du résultat du lemme 4.1., on a :

$$\int_{\Gamma_3} p_\tau (u_\tau - q) p_\tau (u_\tau - q) (|v_\tau| - |\dot{u}_\tau(t)|) da \geq - \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau - \dot{u}_\tau(t)) da,$$

il vient :

$$- \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t) \cdot (v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) da - \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) (v_\tau - \dot{u}_\tau(t)) da \geq j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)),$$

d'où:

$$\int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) da \geq j(u(t), \dot{u}(t)) - j(u(t), v). \quad (4.2.4)$$

L'inégalité (4.2.2) est une conséquence directe de (4.2.3) et (4.2.4) . ■

Le lemme précédent permet d'associer au problème ( $P_3$ ) la formulation variationnelle faible suivante:

**Problème ( $P_{3.1}$ ).** *Trouver le champ de déplacements  $u \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ , vérifiant  $u(0) = u_0$  dans  $\Omega$ , tel que*

$$\begin{cases} a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \\ \forall v \in V, p.p. t \in (0, T) \end{cases} \quad (4.2.5)$$

Avec un raisonnement analogue à celui du chapitre 2, on vérifie, sans peine, que réciproquement si  $u$  est solution du problème variationnel ( $P_{3.1}$ ), alors  $u$  vérifie les conditions (4.1.1) -(5.1.1) , d'où l'équivalence des deux problèmes.

### 4.3 Existence de solutions du problème

Dans cette section, on énonce un résultat d'existence de la solution faible du problème ( $P_3$ ), on démontre le théorème suivant:

**Théorème 4.3.** *Sous les hypothèses (2.1.7) , (2.1.10) , (2.1.11) , (4.1.8) , (4.1.13) et (4.1.14) , il existe une constante  $C > 0$  telle que, si  $C(L_\nu + L_\tau) < 1$ , le problème ( $P_{3.1}$ ) admet au moins une solution  $u \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ .*

Pour démontrer le théorème 4.3. , on procède par étapes en supposant que les hypothèses du théorème sont toutes vérifiées. D'abord on introduit un découpage uniforme de l'intervalle  $[0, T]$ ; on définit un pas de temps  $\Delta t = \frac{T}{n}$ , associé à un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , et on pose  $t_i = i\Delta t, i = 0, \dots, n$ , on note par  $u^{t_i}$  la valeur de la solution approchée au temps  $t_i$ , et  $\Delta u^{t_i} = u^{t_{i+1}} - u^{t_i}$ . En utilisant un schéma d'Euler implicite, on obtient une suite de problèmes approchés ( $P_n^{t_i}$ ) définis par:

**Problème ( $P_n^{t_i}$ ).** *Trouver  $u^{t_{i+1}} \in V$  tel que:*

$$a\left(u^{t_{i+1}}, v - \frac{\Delta u^{t_i}}{\Delta t}\right) + j(u^{t_{i+1}}, v) - j\left(u^{t_{i+1}}, \frac{\Delta u^{t_i}}{\Delta t}\right) \geq \left(f^{t_{i+1}}, v - \frac{\Delta u^{t_i}}{\Delta t}\right)_V \quad \forall v \in V \quad (4.3.1)$$

où  $u^0 = u_0, f^{t_{i+1}} = f(t_{i+1})$

**Lemme 4.4.** *Il existe une constante positive  $C$  telle que si  $C(L_\nu + L_\tau) < 1$ , le problème  $(P_n^{t_i})$  admet une solution unique.*

**Preuve.** En multipliant l'inégalité (4.3.1) par  $\Delta t$  il vient:

$$\begin{aligned} a\left(u^{t_{i+1}}, \Delta t\left(v - \frac{\Delta u^{t_i}}{\Delta t}\right)\right) + j(u^{t_{i+1}}, \Delta t v) - j(u^{t_{i+1}}, \Delta u^{t_i}) \\ \geq \left(f^{t_{i+1}}, \Delta t\left(v - \frac{\Delta u^{t_i}}{\Delta t}\right)\right)_V \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

on pose

$$\Delta t v + u^{t_i} = w,$$

on obtient:

$$a(u^{t_{i+1}}, w - u^{t_{i+1}}) + j(u^{t_{i+1}}, w - u^{t_i}) - j(u^{t_{i+1}}, \Delta u^{t_i}) \geq (f^{t_{i+1}}, w - u^{t_{i+1}})_V \quad \forall w \in V.$$

Inversement si on pose  $w = \Delta t v + u^{t_i}$  dans l'inégalité précédente et on divise par  $\Delta t$ , on obtient l'inégalité (4.3.1) d'où, on déduit que le problème  $(P_n^{t_i})$  est équivalent au problème suivant:

**Problème  $(Q_n^{t_i})$ .** *Trouver  $u^{t_{i+1}} \in V$  tel que:*

$$\begin{aligned} a(u^{t_{i+1}}, w - u^{t_{i+1}}) + j(u^{t_{i+1}}, w - u^{t_i}) - j(u^{t_{i+1}}, \Delta u^{t_i}) \geq (f^{t_{i+1}}, w - u^{t_{i+1}})_V \quad \forall w \in V \\ \text{où } u^0 = u_0, \quad f^{t_{i+1}} = f(t_{i+1}) \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Du théorème 2.4. du chapitre 2, on déduit qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que si  $C(L_\nu + L_\tau) < 1$ , le problème  $(Q_n^{t_i})$  admet une solution unique et par conséquent, il en est de même pour le problème  $(P_n^{t_i})$ . ■

Dans la suite on va établir des estimations a priori sur les solutions discrètes, on va démontrer ci-après le

**Lemme 4.5.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que si  $C(L_\nu + L_\tau) < 1$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que:*

$$\|u^{t_{i+1}}\|_V \leq c \|f^{t_{i+1}}\|_V \tag{4.3.3}$$

$$\|\Delta u^{t_i}\|_V \leq c \|\Delta f^{t_i}\|_V \tag{4.3.4}$$

**Preuve.** Posons  $w = 0$  dans (4.3.2), on obtient:

$$a(u^{t_{i+1}}, u^{t_{i+1}}) - j(u^{t_{i+1}}, -u^{t_i}) + j(u^{t_{i+1}}, \Delta u^{t_i}) \leq (f^{t_{i+1}}, u^{t_{i+1}})_V,$$

or

$$j(u^{t_{i+1}}, \Delta u^{t_i}) - j(u^{t_{i+1}}, -u^{t_i}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu^{t_{i+1}} - q)(u_\nu^{t_{i+1}}) da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\tau^{t_{i+1}} - q)(|u_\tau^{t_{i+1}} - u_\tau^{t_i}| - |u_\tau^{t_i}|) da,$$

et donc grace a  $(h_1)(b)$ , (2.1.10) (b) et (1.2.13), on en déduit

$$m \|u^{t_{i+1}}\|_V^2 \leq C_0^2(L_\nu + L_\tau) \|u^{t_{i+1}}\|_V^2 + \|f^{t_{i+1}}\|_V \|u^{t_{i+1}}\|_V$$

Si  $C_0^2(L_\nu + L_\tau) < m$ , il découle directement qu'il existe une constante positive  $c_a$  telle que:

$$\|u^{t_{i+1}}\|_V \leq c_a \|f^{t_{i+1}}\|_V$$

Pour montrer (4.3.4), on pose  $w = u^{t_i}$  dans (4.3.2), et  $w = u^{t_{i+1}}$  dans sa translatée par rapport au temps  $t_i$ , on obtient les inégalités suivantes:

$$a(u^{t_{i+1}}, u^{t_i} - u^{t_{i+1}}) - j(u^{t_{i+1}}, u^{t_{i+1}} - u^{t_i}) \geq (f^{t_{i+1}}, u^{t_i} - u^{t_{i+1}})_V,$$

et

$$a(u^{t_i}, u^{t_{i+1}} - u^{t_i}) + j(u^{t_i}, u^{t_{i+1}} - u^{t_{i-1}}) - j(u^{t_i}, u^{t_i} - u^{t_{i-1}}) \geq (f^{t_i}, u^{t_i} - u^{t_{i+1}})_V,$$

en additionnant les deux inégalités précédentes, on obtient:

$$\begin{aligned} & -a(u^{t_{i+1}} - u^{t_i}, u^{t_{i+1}} - u^{t_i}) + j(u^{t_i}, u^{t_{i+1}} - u^{t_{i-1}}) - j(u^{t_i}, u^{t_i} - u^{t_{i-1}}) \\ & -j(u^{t_{i+1}}, u^{t_{i+1}} - u^{t_i}) \geq (f^{t_i} - f^{t_{i+1}}, u^{t_{i+1}} - u^{t_i})_V, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a(\Delta u^{t_i}, \Delta u^{t_i}) & \leq j(u^{t_i}, u^{t_{i+1}} - u^{t_{i-1}}) - j(u^{t_i}, u^{t_i} - u^{t_{i-1}}) \\ & -j(u^{t_{i+1}}, u^{t_{i+1}} - u^{t_i}) + (\Delta f^{t_i}, \Delta u^{t_i})_V. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

En remplaçant  $j$  par son expression donnée par (4.1.10) et en utilisant le fait que

$$\left| |u^{t_{i+1}} - u^{t_{i-1}}| - |u^{t_{i-1}} - u^{t_i}| \right| \leq |u^{t_{i+1}} - u^{t_i}|,$$

il vient:

$$\begin{aligned} a(\Delta u^{t_i}, \Delta u^{t_i}) & \leq \int_{\Gamma_3} \left| p_\nu(u_\nu^{t_{i+1}} - q) - p_\nu(u_\nu^{t_i} - q) \right| |\Delta u_\nu^{t_i}| da \\ & + \int_{\Gamma_3} \left| p_\tau(u_\tau^{t_{i+1}} - q) - p_\tau(u_\tau^{t_i} - q) \right| |\Delta u_\tau^{t_i}| da + (\Delta f^{t_i}, \Delta u^{t_i})_V, \end{aligned}$$

en utilisant les hypothèses  $(h_1)(b)$  et (2.1.10) (b), on déduit que:

$$m \|\Delta u^{t_i}\|_V^2 \leq \int_{\Gamma_3} L_\nu |\Delta u_\nu^{t_i}|^2 da + \int_{\Gamma_3} L_\tau |\Delta u_\tau^{t_i}| |\Delta u_\tau^{t_i}| da + (\Delta f^{t_i}, \Delta u^{t_i})_V,$$

et d'après (1.2.13), on a:

$$m \|\Delta u^{t_i}\|_V^2 \leq C_0^2(L_\nu + L_\tau) \|\Delta u^{t_i}\|_V^2 + \|\Delta f^{t_i}\|_V \|\Delta u^{t_i}\|_V$$

ce qui entraîne:

$$\|\Delta u^{t_i}\|_V \leq \frac{1}{m - C_0^2(L_\nu + L_\tau)} \|\Delta f^{t_i}\|$$

d'où, si  $\frac{C_0^2}{m}(L_\nu + L_\tau) < 1$ , on déduit qu'il existe une constante  $c_b > 0$  tel que (4.3.4) est vérifiée. Pour conclure il suffit de prendre  $c = \max(c_a, c_b)$ . ■

Maintenant pour montrer le théorème 4.3. , on considère les suites de fonctions

$u^n : [0, T] \rightarrow V$  et  $\tilde{u}^n : [0, T] \rightarrow V$  définies par:

$$u^n(t) = u^{t_i} + \frac{\Delta u^{t_i}}{\Delta t}(t - t_i) \quad \forall t \in (t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (4.3.6)$$

$$\tilde{u}^n(0) = u_0, \quad \tilde{u}^n(t) = u^{t_{i+1}} \quad \forall t \in (t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (4.3.7)$$

On définit aussi la suite  $(f^n)$  par:

$$f^n(0) = f(0), \quad f^n(t) = f(t_{i+1}) \quad \forall t \in (t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (4.3.8)$$

On montre alors les résultats de convergence donnés par le

**Lemme 4.6.** *Il existe  $u \in W^{1,\infty}(0, T; V)$  tel que: en passant à une sous suite de  $(u^n)$  notée encore  $(u^n)$ , on a:*

$$u^n \longrightarrow u \quad \text{dans } W^{1,\infty}(0, T; V) \text{ faible}^* \quad (4.3.9)$$

$$u^n(t) \longrightarrow u(t) \quad \text{dans } V \text{ faiblement} \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.3.10)$$

et en passant à une sous suite de  $(\tilde{u}^n)$  notée encore  $(\tilde{u}^n)$ , on a:

$$\tilde{u}^n \longrightarrow u \quad \text{dans } L^\infty(0, T; V) \text{ faible}^* \quad (4.3.11)$$

$$\tilde{u}^n(t) \longrightarrow u(t) \quad \text{dans } V \text{ p.p. } t \in [0, T] \quad (4.3.12)$$

**Preuve.** On a d'après (4.3.3) , le résultat

$$\max_{t \in [0, T]} \|u^n(t)\|_V \leq c \|f\|_{L^\infty(0, T; V)},$$

et de (4.3.6) ,  $(u^n)$  est absolument continue et sa dérivée est donnée par:

$$\dot{u}^n(t) = \frac{\Delta u^{t_i}}{\Delta t}, \quad \text{p.p. } t \in (t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, \dots, n-1$$

il en découle

$$\|\dot{u}^n\|_{L^\infty(0, T; V)} = \max_{0 \leq i \leq n-1} \left\| \frac{\Delta u^{t_i}}{\Delta t} \right\|_V \leq c \left\| \dot{f} \right\|_{L^\infty(0, T; V)},$$

ce qui montre que  $(u^n)$  est bornée dans  $W^{1,\infty}(0, T; V)$ , donc on peut extraire de  $(u^n)$  une suite, encore notée  $(u^n)$ , telle que l'on a (4.3.9).  
 Pour (4.3.10), on sait que l'injection  $W^{1,\infty}(0, T; V) \hookrightarrow C([0, T], V)$  étant continue, donc:

$$u^n(t) \longrightarrow u(t) \text{ faiblement dans } V \quad \forall t \in [0, T],$$

Par ailleurs, pour tout  $t \in (t_i, t_{i+1})$ , on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}^n(t) - u^n(t)\|_V &= \left\| u^{t_{i+1}} - u^{t_i} - \frac{\Delta u^{t_i}}{\Delta t} (t - t_i) \right\|_V \\ &= (\Delta t - (t - t_i)) \left\| \frac{\Delta u^{t_i}}{\Delta t} \right\|_V \\ &\leq \frac{T}{n} \|\dot{u}^n(t)\|_V \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

or  $(\dot{u}^n)$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; V)$ , d'où

$$\tilde{u}^n - u^n \rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty(0, T; V) \quad (4.3.14)$$

de plus

$$\tilde{u}^n(t) - u^n(t) \rightarrow 0 \text{ dans } V \text{ p.p. } t \in [0, T] \quad (4.3.15)$$

(4.3.11) et (4.3.12) découlent immédiatement des deux derniers résultats et de (4.3.9) et (4.3.10) ■

**Remarque 4.1.** Puisque  $f \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ , on a:

$$f^n \longrightarrow f \text{ fortement dans } L^2(0, T; V). \quad (4.3.16)$$

Maintenant, il reste à prouver que l'élément  $u$  de  $W^{1,\infty}(0, T; V)$  donné par le lemme 4.6. est solution du problème  $(P_{3.1})$ . Pour cela, on montre les propriétés suivantes:

**Lemme 4.7.** Les propriétés suivantes sont vérifiées:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T a(\tilde{u}^n(t), v(t)) dt = \int_0^T a(u(t), v(t)) dt \quad \forall v \in L^2(0, T; V) \quad (4.3.17)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T a(\tilde{u}^n(t), \dot{u}^n(t)) dt \geq \int_0^T a(u(t), \dot{u}(t)) dt \quad (4.3.18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T j(\tilde{u}^n(t), v(t)) dt = \int_0^T j(u(t), v(t)) dt \quad \forall v \in L^2(0, T; V) \quad (4.3.19)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^T j(\tilde{u}^n(t), \dot{u}^n(t)) dt \geq \int_0^T j(u(t), \dot{u}(t)) dt \quad (4.3.20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (f^n(t), v(t) - \dot{u}^n(t))_V dt = \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt \quad \forall v \in L^2(0, T; V) \quad (4.3.21)$$

**Preuve.** Pour (4.3.17) il suffit d'utiliser (4.3.11) .

On a

$$a(\tilde{u}^n(t), \dot{u}^n(t)) = a(\tilde{u}^n(t) - u^n(t), \dot{u}^n(t)) + a(u^n(t), \dot{u}^n(t))$$

d'où

$$\int_0^T a(\tilde{u}^n(t), \dot{u}^n(t)) dt = \int_0^T a(\tilde{u}^n(t) - u^n(t), \dot{u}^n(t)) dt + \int_0^T a(u^n(t), \dot{u}^n(t)) dt$$

De l'hypothèse  $(h_1)(a)$ , on a:

$$|a(\tilde{u}^n(t) - u^n(t), \dot{u}^n(t))| \leq M \|\tilde{u}^n(t) - u^n(t)\|_V \cdot \|\dot{u}^n(t)\|_V .$$

or

$$\sup_{t \in (0, T)} \|\dot{u}^n(t)\|_V \leq c \left\| \dot{f} \right\|_{L^\infty(0, T; V)}$$

et donc, on déduit de (4.3.13) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T a(\tilde{u}^n(t) - u^n(t), \dot{u}^n(t)) dt = 0,$$

d'autre part, on a

$$a(u^n(t), \dot{u}^n(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u^n(t), u^n(t))$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^T a(u^n(t), \dot{u}^n(t)) dt &= \left[ \frac{1}{2} a(u^n(t), u^n(t)) \right]_0^T \\ &= \frac{1}{2} a(u^n(T), u^n(T)) - \frac{1}{2} a(u_0, u_0) \end{aligned}$$

ceci entraîne

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T a(u^n(t), \dot{u}^n(t)) dt &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} a(u^n(T), u^n(T)) - \frac{1}{2} a(u_0, u_0) \right) \\ &\geq \frac{1}{2} (a(u(T), u(T)) - a(u_0, u_0)) \\ &= \int_0^T a(u(t), \dot{u}(t)) dt \end{aligned}$$

d'où (4.3.18) .

On a d'une manière évidente l'égalité

$$j(\tilde{u}^n, z) = j(\tilde{u}^n, z) - j(u, z) + j(u, z),$$

en remplaçant  $j$  par son expression et en utilisant (4.3.17) et (2.1.10) , on en déduit qu'il

existe une constante positive  $c$  telle que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T (j(\tilde{u}^n(t), z(t)) - j(u(t), z(t))) dt \right| \\ & \leq c(L_\nu + L_\tau) \left( \|\tilde{u}_\nu^n - u_\nu\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_3))} + \|\tilde{u}_\tau^n - u_\tau\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_3)^d)} \right) \|z\|_{L^2(0,T;V)} \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

En utilisant le deuxième théorème de trace (Chap.1. Sec.2.1) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que:

$$\|\tilde{u}_\nu^n - u_\nu\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_3))} \longrightarrow 0$$

et

$$\|\tilde{u}_\tau^n - u_\tau\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_3)^d)} \longrightarrow 0$$

et donc en passant à la limite dans (4.3.22), on retrouve l'inégalité (4.3.19).

Pour montrer (4.3.20), on a:

$$\left| \int_0^T (j(\tilde{u}^n(t), \dot{u}(t)) - j(u(t), \dot{u}(t))) dt \right| = \left| \int_0^T (j(\tilde{u}^n(t) - u(t), \dot{u}(t))) dt \right|,$$

en remplaçant  $j$  par son expression et en utilisant (1.2.13) et (2.1.10), on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T (j(\tilde{u}^n(t), \dot{u}(t)) - j(u(t), \dot{u}(t))) dt \right| \\ & \leq C_0(L_\nu + L_\tau) \left( \|\tilde{u}_\nu^n - u_\nu\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_3))} + \|\tilde{u}_\tau^n - u_\tau\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_3)^d)} \right) \|\dot{u}\|_{L^2(0,T;V)}. \end{aligned}$$

d'où 4.3.20

Pour montrer (4.3.21) il suffit d'utiliser le fait que  $f^n \longrightarrow f$  fortement. ■

Maintenant, de l'inégalité (4.2.5), on déduit pour tout  $v \in L^2(0, T; V)$ , l'inégalité:

$$a(\tilde{u}^n(t), v(t) - \dot{u}^n(t)) + j(\tilde{u}^n(t), v(t)) - j(\tilde{u}^n(t), \dot{u}^n(t)) \geq (f^n, v(t) - \dot{u}^n(t))_V$$

L'intégration des deux membres de cette inégalité sur  $[0, T]$  donne:

$$\begin{aligned} & \int_0^T a(\tilde{u}^n(t), v(t) - \dot{u}^n(t)) dt + \int_0^T j(\tilde{u}^n(t), v(t)) dt \\ & - \int_0^T j(\tilde{u}^n(t), \dot{u}^n(t)) dt \geq \int_0^T (f^n(t), v(t) - \dot{u}^n(t))_V dt \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

On a

$$\int_0^T a(\tilde{u}^n(t), v(t) - \dot{u}^n(t)) dt = \int_0^T a(\tilde{u}^n(t), v(t)) dt - \int_0^T a(\tilde{u}^n(t), \dot{u}^n(t)) dt,$$

en utilisant (4.3.17) et (4.3.18) , on obtient:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T a(\tilde{u}^n(t), v(t) - \dot{u}^n(t)) dt \leq \int_0^T a(u(t), v(t)) dt - \int_0^T a(u(t), \dot{u}(t)) dt. \quad (4.3.24)$$

En passant à la limite dans (4.3.23) et en utilisant (4.3.24) et les résultats (4.3.19)-(4.3.21) du lemme 4.7. , on déduit l'inégalité:

$$\begin{aligned} & \int_0^T a(u(t), v(t) - \dot{u}(t)) dt + \int_0^T j(u(t), v(t)) dt \\ & - \int_0^T j(u(t), \dot{u}(t)) dt \geq \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt \quad \forall v \in L^2(0, T; V) \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

Choisissant dans (4.3.25)  $v \in L^2(0, T; V)$  défini par:

$$v(s) = \begin{cases} w & \text{sur } [t, t + \lambda], \quad w \in V \\ \dot{u}(s) & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

En divisant l'inégalité obtenue par  $\lambda$ , on obtient l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \int_t^{t+\lambda} a(u(s), w - \dot{u}(s)) ds + \frac{1}{\lambda} \int_t^{t+\lambda} j(u(s), w) ds \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_t^{t+\lambda} j(u(t), \dot{u}(t)) ds \geq \frac{1}{\lambda} \int_t^{t+\lambda} (f(s), w - \dot{u}(t))_V ds. \end{aligned}$$

Ainsi en passant à la limite selon  $\lambda \rightarrow 0$ , on déduit que  $u$  vérifie l'inéquation (4.2.5) et par conséquent  $u$  est solution du problème  $(P_{3.1})$ . ■

## 4.4 Conclusion

Sous l'hypothèse de petitesse des fonctions de contact on a obtenu un résultat d'existence de la solution. A présent, le problème de l'unicité de la solution demeure toujours ouvert.

## Chapitre 5

# *Problème quasi-statique avec coefficient de frottement dépendant de la solution*

Dans ce chapitre, on étudie un problème quasi-statique avec coefficient de frottement dépendant de la solution (Problème  $(P_4)$ , du chapitre1).

## 5.1 Enoncé du problème - Hypothèses

Considérons un corps déformable occupant un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), supposé borné, de frontière régulière  $\Gamma$ , telle que  $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$  où  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  sont des ouverts disjoints avec  $mes(\Gamma_1) > 0$ . Soit  $T > 0$ ,  $[0, T]$  dénote l'intervalle du temps qu'on considère. Le corps est encastré en  $\Gamma_1$  et soumis à une densité de forces volumiques  $\varphi_1$  donnée sur  $\Omega \times (0, T)$  et à une densité de forces surfaciques  $\varphi_2$  donnée sur  $\Gamma_2 \times (0, T)$ . Le long de  $\Gamma_3$  il est en contact avec une fondation avec frottement dont le coefficient dépend de la solution. Ce problème s'énonce comme suit:

### Problème ( $P_4$ )

Trouver le champ de déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  tel que:

$$\operatorname{div} \sigma + \varphi_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.1.1)$$

$$\sigma = F(\varepsilon(u)) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (5.1.3)$$

$$\sigma \nu = \varphi_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (5.1.4)$$

$$\sigma_\nu = -S \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (5.1.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu(|u_\tau|)S \\ |\sigma_\tau| < \mu(|u_\tau|)S \implies \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu(|u_\tau|)S \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que: } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (5.1.6)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.1.7)$$

- (5.1.1) est l'équation d'équilibre.
- (5.1.2) est la loi de comportement, où  $F$  est linéaire, vérifiant les conditions (2.1.7) du chapitre 2.
- (5.1.3) et (5.1.4) sont les conditions de déplacement-traction.
- (5.1.5) - (5.1.6) sont les conditions de frottement sur la frontière de contact  $\Gamma_3$ .
- (5.1.7) est une condition initiale.

En tenant compte de la condition (5.1.3), on définit l'espace de Hilbert  $V$  par:

$$V = \{v \in H_1; v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\},$$

l'espace  $V$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_V$  induite par le produit scalaire défini par:

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q.$$

On suppose que

$$\varphi_1 \in W^{1,\infty}(0, T; H), \quad \varphi_2 \in W^{1,\infty}\left(0, T; L^2(\Gamma_2)^d\right), \quad (5.1.8)$$

$$S \in L^\infty(\Gamma_3), \quad S \geq 0 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \quad (5.1.9)$$

et on garde les mêmes hypothèses du chapitre 3 sur le coefficient de frottement, c'est-à-dire que  $\mu$  vérifie les conditions (3.1.9) .

## 5.2 Formulation variationnelle du problème

Pour établir une formulation variationnelle, introduisons les notations:

On définit une forme bilinéaire  $a(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  par:

$$a(u, v) = (F(\varepsilon(u)), \varepsilon(v))_Q. \quad (5.2.1)$$

(2.1.7) entraîne que  $a$  est symétrique et vérifie  $(h_1)$ .

En utilisant le *théorème de représentation de Riesz-Fréchet*, on définit l'élément  $f(t)$  par:

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} \varphi_1 \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} \varphi_2 \cdot v da - \int_{\Gamma_3} S v_\nu da \quad \forall v \in V \quad \text{pour } t \in [0, T], \quad (5.2.2)$$

où  $da$  est un élément de surface dans  $\Gamma_3$

(5.1.8) entraîne:

$$f \in W^{1,\infty}(0, T; V).$$

Et on définit la fonctionnelle  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  par:

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} S \mu(|u_\tau(s)|) |v_\tau| da, \quad \forall u, v \in V \times V \quad (5.2.3)$$

$j$  est une fonctionnelle continue convexe non différentiable.

On suppose que la condition initiale satisfait:

$$u_0 \in V \quad (5.2.4)$$

$$a(u_0, v) + j(u_0, v) \geq (f(0), v)_V \quad \forall v \in V. \quad (5.2.5)$$

En utilisant la formule de Green (Sec2.1. Chap1), on montre le

**Lemme 5.1.** *Si  $u$  est suffisamment régulière et vérifie le problème  $(P_4)$ , alors:*

$$\begin{cases} u(t) \in V, \\ a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (5.2.6)$$

On peut montrer que réciproquement si  $u$  vérifie (5.2.6), alors  $u$  vérifie les conditions 5.1.1 -5.1.7 , ce qui permet d'associer au problème  $(P_4)$  la formulation variationnelle faible suivante:

**Problème  $(P_{4.1})$**  Trouver le champ de déplacements  $u \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ , vérifiant  $u(0) = u_0$  dans  $\Omega$ , tel que:

$$\begin{cases} a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \\ \forall v \in V, p.p. t \in (0, T) \end{cases} \quad (5.2.7)$$

### 5.3 Existence de solutions du problème

Dans cette section, on énonce un résultat d'existence de la solution faible du problème  $(P_4)$ , on va dans la suite démontrer le

**Théorème 5.2.** *Si les hypothèses (1.1.7) , (3.1.9) , (5.1.8) , (5.1.9) , (5.2.4) et (5.2.5) sont vérifiées, alors le problème  $(P_{4.1})$  admet au moins une solution  $u \in W^{1,\infty}(0, T; V)$  pour un coefficient de frottement et une contrainte normale assez petits.*

Pour montrer l'existence d'une solution dans le théorème 5.2. , on utilise une méthode d'approximation analogue à celle utilisée au chapitre 4.

Commençons par le choix d'une discrétisation régulière de  $[0, T]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $\Delta t = \frac{T}{n}$  et  $t_i = i\Delta t, i = 1, \dots, n$ . Pour une fonction continue  $u$  on utilise la notation  $u^{t_i} = u(t_i)$ , et  $\Delta u^{t_i} = u^{t_{i+1}} - u^{t_i}$ ; on obtient alors une suite de problèmes approchés  $(P_n^{t_i})$  définis pour  $u^0 = u_0$  par:

**Problème  $(P_n^{t_i})$ .** Trouver  $u^{t_{i+1}} \in V$  tel que:

$$\begin{aligned} a(u^{t_{i+1}}, w - u^{t_{i+1}}) + j(u^{t_{i+1}}, w - u^{t_i}) - j(u^{t_{i+1}}, \Delta u^{t_i}) &\geq (f^{t_{i+1}}, w - u^{t_{i+1}})_V \quad \forall w \in V. \\ \text{où } f^{t_{i+1}} &= f(t_{i+1}) \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

On montre l'existence d'une solution  $u^{t_{i+1}}$  de (5.3.1) , puis l'on établit des estimations à priori sur ces solutions, on a d'abord le

**Lemme 5.3.** *Il existe une constante positive  $L_0 > 0$ , tel que si  $L_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < L_0$ , le problème  $(P_n^{t_i})$  admet une solution unique.*

**Preuve.** On considère l'inégalité translatée de (5.3.1) :

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}, w - \tilde{u}) + j(\tilde{u} + u^{t_i}, w) - j(\tilde{u} + u^{t_i}, \tilde{u}) \\ \geq (f^{t_{i+1}}, w - \tilde{u})_V \quad \forall w \in V, \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

où  $\tilde{u} = \Delta u^{t_i}$

On déduit que  $u^{t_{i+1}}$  est solution du problème  $(P_n^{t_i})$  si et seulement si  $\tilde{u}$  est solution de l'inéquation (5.3.2) .

Par ailleurs, la fonctionnelle  $\tilde{j} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  définie par:

$$\tilde{j}(\tilde{u}, v) = j(\tilde{u} + u^{t_i}, v), \quad \forall u, v \in V \times V,$$

vérifie les conditions du théorème 3.2. du chapitre 3, donc il existe une constante positive  $L_0$  telle que si  $L_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < L_0$ , le problème  $(P_n^{t_i})$  admet une solution unique. ■

**Lemme 5.4.** *On a les estimations suivantes:*

$$\|u^{t_{i+1}}\|_V \leq \frac{1}{m} \left( \mu^* C_0 \sqrt{\text{meas}\Gamma_3} \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + \|f^{t_{i+1}}\|_V \right). \quad (5.3.3)$$

Si  $L_\mu C_0^2 \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < m$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que:

$$\|\Delta u^{t_i}\|_V \leq c \|\Delta f^{t_i}\|_V \quad (5.3.4)$$

**Preuve.** Posons  $w = 0$  dans (5.3.1), il en découle

$$a(u^{t_{i+1}}, u^{t_{i+1}}) \leq j(u^{t_{i+1}}, u^{t_{i+1}}) + (f^{t_{i+1}}, u^{t_{i+1}})_V, \quad (5.3.5)$$

En utilisant les hypothèses (3.1.9) sur  $\mu$ , on obtient:

$$j(u^{t_{i+1}}, u^{t_{i+1}}) \leq \mu^* \sqrt{\text{meas}\Gamma_3} \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u^{t_{i+1}}\|_{L^2(\Gamma_3)^d},$$

ou encore (d'après (1.2.13))

$$j(u^{t_{i+1}}, u^{t_{i+1}}) \leq \mu^* C_0 \sqrt{\text{meas}\Gamma_3} \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u^{t_{i+1}}\|_V,$$

en combinant avec (5.3.5), jointe à  $(h_1)$ , on trouve

$$m \|u^{t_{i+1}}\|_V^2 \leq \mu^* C_0 \sqrt{\text{meas}\Gamma_3} \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u^{t_{i+1}}\|_V + \|f^{t_{i+1}}\|_V \|u^{t_{i+1}}\|_V$$

d'où (5.3.3)

Pour montrer (5.3.4), on pose  $w = u^{t_i}$  dans (5.3.1), et  $w = u^{t_{i+1}}$  dans sa translatée par rapport au temps  $t_i$ , on obtient les inégalités suivantes:

$$a(u^{t_{i+1}}, u^{t_i} - u^{t_{i+1}}) - j(u^{t_{i+1}}, u^{t_{i+1}} - u^{t_i}) \geq (f^{t_{i+1}}, u^{t_i} - u^{t_{i+1}})_V,$$

et

$$a(u^{t_i}, u^{t_{i+1}} - u^{t_i}) + j(u^{t_{i+1}}, u^{t_{i+1}} - u^{t_{i-1}}) - j(u^{t_i}, u^{t_i} - w) \geq (f^{t_i}, u^{t_i} - u^{t_{i+1}})_V,$$

il résulte de l'addition des deux inégalités précédentes que

$$\begin{aligned} & -a(\Delta u^{t_i}, \Delta u^{t_i}) - j(u^{t_{i+1}}, \Delta u^{t_i}) + j(u^{t_i}, u^{t_{i+1}} - u^{t_{i-1}}) \\ & -j(u^{t_i}, u^{t_i} - u^{t_{i-1}}) \leq (\Delta f^{t_i}, \Delta u^{t_i})_V, \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

en utilisant le fait que

$$\left| |u_\tau^{t_{i+1}} - u_\tau^{t_{i-1}}| - |u_\tau^{t_{i-1}} - u_\tau^{t_i}| \right| \leq |u_\tau^{t_{i+1}} - u_\tau^{t_i}|,$$

on en déduit que

$$a(\Delta u^{t_i}, \Delta u^{t_i}) - j(u^{t_i}, \Delta u^{t_i}) + j(u^{t_{i+1}}, \Delta u^{t_i}) \leq (\Delta f^{t_i}, \Delta u^{t_i})_V. \quad (5.3.7)$$

En utilisant les propriétés de  $j$  (3.1.9) et (1.2.13), il découle:

$$|-j(u^{t_i}, \Delta u^{t_i}) + j(u^{t_{i+1}}, \Delta u^{t_i})| \leq L_\mu C_0^2 \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\Delta u^{t_i}\|_V^2.$$

En appliquant cette inégalité à (5.3.7), jointe à  $(h_1)$  (b), on en déduit que

$$m \|\Delta u^{t_i}\|_V^2 \leq L_\mu C_0^2 \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\Delta u^{t_i}\|_V^2 + \|\Delta u^{t_i}\|_V \|\Delta f^{t_i}\|_V$$

ce qui entraîne

$$\|\Delta u^{t_i}\|_V \leq \frac{1}{m - L_\mu C_0^2 \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)}} \|\Delta f^{t_i}\|_V$$

d'où, si  $L_\mu C_0^2 \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < m$ , il existe une constante  $c$  tel que (5.3.4) est vérifiée. ■

Pour montrer le théorème 5.2., on considère la suite de fonctions  $u^n : [0, T] \rightarrow V$  définie par:

$$u^n(t) = u^{t_i} + \frac{\Delta u^{t_i}}{\Delta t}(t - t_i) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n$$

On a le lemme suivant:

**Lemme 5.5.** *Il existe  $u \in W^{1,\infty}(0, T; V)$  tel que: en passant à une sous suite de  $(u^n)$  notée encore  $(u^n)$ , on a:*

$$u^n \longrightarrow u \quad \text{dans } W^{1,\infty}(0, T; V) \text{ faible*} \quad (5.3.8)$$

**Preuve.** D'après (5.3.4),  $(u^n)$  est bornée dans  $C([0, T]; V)$  et il existe  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  telles que

$$\max_{t \in [0, T]} \|u^n(t)\|_V \leq c_1 \|f\|_{L^\infty(0, T; V)} + c_2. \quad (5.3.9)$$

De (5.3.4), on en déduit que  $(\dot{u}^n)$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; V)$  et Il existe  $c_3 > 0$

telle que

$$\|\dot{u}^n\|_{L^\infty(0, T; V)} = \max_{0 \leq i \leq n-1} \left\| \frac{\Delta u^{t_i}}{\Delta t} \right\|_V \leq c_3 \left\| \dot{f} \right\|_{L^\infty(0, T; V)}. \quad (5.3.10)$$

Par conséquent,  $(u^n)$  est bornée dans  $W^{1,\infty}(0, T; V)$ , donc on peut extraire de  $(u^n)$  une suite, encore notée  $(u^n)$ , telle que l'on a (5.3.8). ■

**Remarque 5.1.** Comme l'injection de  $W^{1,\infty}(0, T; V)$  dans  $C([0, T]; V)$  est continue, on déduit que  $u^n(t)$  converge faiblement vers  $u(t)$  dans  $V$ , p.p.  $t \in [0, T]$ .

Introduisant les fonctions constantes par morceaux  $\tilde{u}^n(t)$  et  $f^n(t)$  définies sur  $[0, T]$  dans  $V$  par:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^n(0) &= u_0, & \tilde{u}^n(t) &= u^{t_{i+1}} \quad \forall t \in (t_i, t_{i+1}], i = 0, \dots, n-1 \\ f^n(0) &= f(0), & f^n(t) &= f(t_{i+1}) \quad \forall t \in (t_i, t_{i+1}], i = 0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

On en déduit, par le même procédé qu'au chapitre 4, les résultats de convergence suivants

**Lemme 5.6.** En passant à une sous suite de  $(\tilde{u}^n)$  notée encore  $(\tilde{u}^n)$ , on a:

$$\tilde{u}^n \longrightarrow u \quad \text{dans } L^\infty(0, T; V) \text{ faible}^* \quad (5.3.11)$$

$$\tilde{u}^n(t) \longrightarrow u(t) \quad \text{faiblement dans } V \text{ p.p. } t \in [0, T] \quad (5.3.12)$$

**Remarque 5.2.** Comme  $f \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ , alors  $f^n$  converge fortement vers  $f$  dans  $L^2(0, T; V)$ .

**Proposition 5.7.** La fonction  $u$  est solution du problème  $(P_4)$ .

**Preuve.** Pour  $v \in V$ , posons  $w = v\Delta t + u^{t_i}$  et divisons par  $\Delta t$  dans l'inégalité (5.3.1), on obtient:

$$a\left(u^{t_{i+1}}, w - \frac{\Delta u^{t_i}}{\Delta t}\right) + j(u^{t_{i+1}}, w) - j\left(u^{t_{i+1}}, \frac{\Delta u^{t_i}}{\Delta t}\right) \geq \left(f^{t_{i+1}}, w - \frac{\Delta u^{t_i}}{\Delta t}\right)_V \quad \forall w \in V,$$

on déduit pour tout  $w \in L^2(0, T; V)$ , l'inégalité:

$$a(\tilde{u}^n(t), w(t) - \dot{u}^n(t)) + j(\tilde{u}^n(t), w(t)) - j(\tilde{u}^n(t), \dot{u}^n(t)) \geq (f^n, w(t) - \dot{u}^n(t))_V \quad \text{p.p. } t \in (0, T)$$

Intégrant les deux membres de cette inégalité sur  $[0, T]$ , il vient:

$$\begin{aligned} \int_0^T a(\tilde{u}^n(t), w(t) - \dot{u}^n(t)) dt + \int_0^T j(\tilde{u}^n(t), w(t)) dt \\ - \int_0^T j(\tilde{u}^n(t), \dot{u}^n(t)) dt \geq \int_0^T (f^n(t), w(t) - \dot{u}^n(t))_V dt \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

■

Pour conclure, on montre le lemme suivant:

**Lemme 5.8.** Les propriétés suivantes sont vérifiées:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T a(\tilde{u}^n(t), v(t) - \dot{u}^n(t)) dt \leq \int_0^T a(u(t), v(t) - \dot{u}(t)) dt \quad \forall v \in L^2(0, T; V) \quad (5.3.14)$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T j(\tilde{u}^n(t), \dot{u}^n(t)) dt \geq \int_0^T j(u(t), \dot{u}(t)) dt \quad (5.3.15)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T j(\tilde{u}^n(t), v(t)) dt = \int_0^T j(u(t), w(t)) dt \quad \forall v \in L^2(0, T; V) \quad (5.3.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T (f^n(t), v(t) - \dot{u}^n(t))_V dt = \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt \quad \forall v \in L^2(0, T; V) \quad (5.3.17)$$

**Preuve.** On opère exactement comme au chapitre 4, on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T a(\tilde{u}^n(t), v(t)) dt = \int_0^T a(u(t), v(t)) dt \quad \forall v \in L^2(0, T; V),$$

et

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T a(\tilde{u}^n(t), \dot{u}^n(t)) dt \geq \int_0^T a(u(t), \dot{u}(t)) dt,$$

d'où (5.3.14) .

Pour montrer (5.3.15) , on écrit

$$j(\tilde{u}^n(t), \dot{u}^n(t)) = j(\tilde{u}^n(t), \dot{u}^n(t)) - j(u^n(t), \dot{u}^n(t)) + j(u^n(t), \dot{u}^n(t)) \quad (5.3.18)$$

on a

$$j(\tilde{u}^n(t), \dot{u}^n(t)) - j(u^n(t), \dot{u}^n(t)) \leq \left| \int_{\Gamma_3} S(\mu(|\tilde{u}_\tau^n(t)|) - \mu(|u_\tau^n(t)|)) |\dot{u}_\tau^n(t)| da \right| \quad (5.3.19)$$

et de (3.1.9) , on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma_3} S(\mu(|\tilde{u}_\tau^n(t)|) - \mu(|u_\tau^n(t)|)) |\dot{u}_\tau^n(t)| da \right| \\ & \leq L_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\tilde{u}_\tau^n(t) - u_\tau^n(t)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \|\dot{u}_\tau^n(t)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \end{aligned}$$

En utilisant (5.3.9) , on en déduit qu'il existe une constant positive  $k$  telle que

$$\|\dot{u}^n\|_{L^\infty(0, T; V)} \leq k \|f\|_{W^{1, \infty}(0, T; V)},$$

et on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_\tau^n(t) - u_\tau^n(t)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} & \leq C_0 \|\tilde{u}^n(t) - u^n(t)\|_V \\ & \leq C_0 \frac{T}{n} \|\dot{u}^n\|_{L^\infty(0, T; V)} \\ & \leq C_0 \frac{T}{n} k \|f\|_{W^{1, \infty}(0, T; V)} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\Gamma_3} S(\mu(|\tilde{u}_\tau^n(t)|) - \mu(|u_\tau^n(t)|)) |\dot{u}_\tau^n(t)| dadt \right| \\ & \leq k^2 C_0 L_\mu \frac{T}{n} \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|f\|_{W^{1, \infty}(0, T; V)}^2 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Gamma_3} S(\mu(|\tilde{u}_\tau^n(t)|) - \mu(|u_\tau(t)|)) |\dot{u}_\tau^n(t)| \, d\text{ad}t = 0 \quad (5.3.20)$$

c'est à dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T j(\tilde{u}^n(t), \dot{u}^n(t)) - j(u^n(t), \dot{u}^n(t)) = 0 \quad (5.3.21)$$

et donc

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T j(\tilde{u}^n(t), \dot{u}^n(t)) \, dt \geq \int_0^T j(u(t), \dot{u}(t)) \, dt \quad (5.3.22)$$

La démonstration de (5.3.16) se fait en utilisant un raisonnement analogue.

Pour l'inégalité (5.3.17) il suffit d'utiliser le fait que  $f^n$  converge fortement vers  $f$  dans  $L^2(0, T; V)$  pour expliciter le résultat. ■

Maintenant, en passant à la limite dans l'inégalité (5.3.13), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^T a(u(t), w(t) - \dot{u}(t)) \, dt + \int_0^T j(u(t), w(t)) \, dt \\ & - \int_0^T j(u(t), \dot{u}(t)) \, dt \geq \int_0^T (f(t), w(t) - \dot{u}(t))_V \, dt \quad \forall w \in L^2(0, T; V) \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

Choisissant dans (5.3.23)  $v \in L^2(0, T; V)$  définie par:

$$w(s) = \begin{cases} v & \text{sur } [t, t + \lambda], \\ \dot{u}(s) & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad w \in V$$

Il vient, après division par  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \int_t^{t+\lambda} a(u(s), v - \dot{u}(s)) \, ds + \frac{1}{\lambda} \int_t^{t+\lambda} j(u(s), v) \, ds \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_t^{t+\lambda} j(u(t), \dot{u}(t)) \, ds \geq \frac{1}{\lambda} \int_t^{t+\lambda} (f(s), v - \dot{u}(t))_V \, ds \end{aligned}$$

d'où à la limite quand  $\lambda \rightarrow 0$ , on récupère l'inéquation (5.2.7) et par conséquent  $u$  est solution du problème  $(P_{4.1})$ . ■

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a montré l'existence d'une solution faible sous l'hypothèse de petitesse du coefficient de frottement et de la contrainte normale imposée. Le problème de l'unicité de la solution reste une question ouverte.

## Chapitre 6

# *Approximation numérique des problèmes de contact statique*

Dans ce chapitre, on effectue l'analyse numérique des problèmes de contact statique étudiés aux chapitres 2 et 3. On utilise une méthode des éléments finis pour l'approximation numérique de la solution de chaque problème. La convergence des méthodes employées est établie en donnant des estimations des erreurs. Enfin, on étudie l'existence de solutions discrètes d'un problème de contact statique avec frottement et compliance normale dans un cas bidimensionnel.

## 6.1 Cas de contact statique avec compliance normale et frottement

Les méthodes des éléments finis consistent à découper le domaine  $\Omega$  en un nombre fini de "petits" éléments sur lesquels on fait un calcul approché de la solution du problème. Afin d'obtenir une approximation globale de la solution, une décomposition du domaine doit vérifier certaines propriétés, voir [8].

### 6.1.1 Approximation du problème continu

On reprend le problème de contact statique avec frottement et compliance normale (Problème  $(P_1)$ . Chap.2), on garde toutes les hypothèses faites sur ce problème, en particulier, on suppose que les conditions du théorème 2.4. ont lieu.

On a montré dans (Sec2. Chap.2) que le problème mécanique  $(P_1)$  est équivalent au problème variationnel suivant:

**Problème**  $(P_{1,2})$ . *Trouver le champ de déplacements  $u \in V$ , tel que*

$$a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in V \quad (6.1.1)$$

où  $a(.,.)$ ,  $f$  et  $j$  sont définies respectivement par (2.2.2), (2.1.12) et (2.1.13).

#### Approximation de l'espace $V$

Pour commencer, précisons quelques notations et définitions. Pour la simplicité des définitions, supposons que  $\Omega$  est polyédrique (polygonal si  $d = 2$ ) pour plus de détails et le traitement de domaines plus généraux voir [8] et [32]. Une partie de la frontière  $K_F$  est appelée face (coté si  $d = 2$ ) d'un polyèdre  $K$  si et seulement s'il existe un hyperplan  $H$  et un seul tel que

$$K_F = \partial K \cap H$$

D'abord, soit  $\mathfrak{T}$  une décomposition de  $\bar{\Omega}$  c'est-à-dire:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{1 \leq e \leq E} \Omega_e, \quad \Omega_e \in \mathfrak{T}, \quad E \in \mathbb{N}^*$$

Les éléments  $\Omega_e$  sont des polyèdres ou des tétraèdres (polygones ou triangles si  $d = 2$ ) et vérifiant :

- $$\left\{ \begin{array}{l} i) \text{ tout élément } \Omega_e \text{ est d'intérieur non vide,} \\ ii) \dot{\Omega}_e \cap \dot{\Omega}_{e'} = \emptyset, \text{ si } e \neq e' \\ iii) \text{ toute face (coté si } d = 2) \text{ d'un élément } \Omega_e \in \mathfrak{T} \text{ est: soit une face (coté si } d = 2) \text{ d'un} \\ \text{autre élément } \Omega'_e \text{ et alors } \Omega_e \text{ et } \Omega'_e \text{ sont dits adjacents, soit une partie de la frontière } \Gamma. \end{array} \right.$$

Une décomposition vérifiant les propriétés *i*), *ii*), *iii*) est appelée *triangulation*.

Un élément  $\Omega_e$  de  $\mathfrak{T}$  est défini par deux grandeurs. Son diamètre noté  $h_e = \text{diam}(\Omega_e)$  qui correspond à la plus grande distance entre deux points de  $\Omega_e$  et  $\rho_e$  le diamètre de la plus grande boule contenue dans  $\Omega_e$ . On note  $h = \max_{1 \leq e \leq E} h_e$  et la partition sera indexée par l'indice  $h$  et notée  $\mathfrak{T}_h$ .

Le maillage noté  $\mathfrak{T}_{\Gamma_3, h}$  sur  $\Gamma_3$  est défini comme la trace de la triangulation  $\mathfrak{T}_h$  sur  $\Gamma_3$ , c'est à dire que  $\mathfrak{T}_h|_{\Gamma_3}$  est constitué des éléments  $(\Omega_e \cap \Gamma_3)$  que l'on note  $\Gamma_{3,e}$ . ( Dans notre cas les  $\Gamma_{3,e}$  sont des polygones ( segments si  $d = 2$ )

**Propriétés:**

- 1) Une famille de triangulations  $\{\mathfrak{T}_h\}$  est dite régulière si et seulement si:
  - a) Il existe une constante  $\lambda > 0$  tel que,  $\forall h, \forall \Omega_e \in \mathfrak{T}_h, \frac{h_e}{\rho_e} \leq \lambda$ .
  - b)  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $\mathfrak{T}_h \in \{\mathfrak{T}_h\}$  tel que  $h = \max_{1 \leq e \leq E} h_e < \varepsilon$ .
- 2)  $\{\mathfrak{T}_h\}$  sera dite uniformément régulière si elle régulière et il existe  $c \leq 1$  tel que  $\forall h, \forall \Omega_e \in \mathfrak{T}_h, h_e \geq ch$ .

On veut construire un espace qui soit une approximation de type éléments finis conformes de  $V$ . Soit  $h$  un paramètre positif destiné à tendre vers 0, on considère une triangulation  $\mathfrak{T}_h$  de  $\bar{\Omega}$ , telle que les triangulations  $\mathfrak{T}_h$  et  $\mathfrak{T}_h|_{\Gamma_3}$  sont uniformément régulières. Notons  $\mathcal{P}_1(\Omega_e)$  l'ensemble des polynômes de degré un définis sur  $\Omega_e$ .

A  $\mathfrak{T}_h$ , on associe l'espace élément fini  $V_h$  approchant l'espace  $V$ , tel que:

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega})^d, v_h|_{\Gamma_1} = 0 \text{ et } v_{ih}|_{\Omega_e} \in \mathcal{P}_1(\Omega_e) \quad \forall \Omega_e \in \mathfrak{T}_h, 1 \leq i \leq d \text{ et } 1 \leq e \leq E\}.$$

**Approximation du problème (P<sub>1.2</sub>)**

En utilisant la discrétisation de type éléments finis introduite précédemment, le problème (P<sub>1.2</sub>) est approché par le problème suivant

**Problème (P<sub>h</sub>).** *Trouver le champ de déplacements  $u_h \in V_h$ , tel que*

$$a(u_h, v_h - u_h) + j(u_h, v_h) - j(u_h, u_h) \geq (f, v_h - u_h)_V \quad \forall v_h \in V_h \quad (6.1.2)$$

On introduit un opérateur d'interpolation de Lagrange noté  $\Pi_h$  (voir [8])

$$\Pi_h : V \cap C(\bar{\Omega})^d \longrightarrow V_h, \text{ tel que } \begin{cases} \Pi_h v \in V_h & \forall v \in V \cap C(\bar{\Omega})^d \\ \Pi_h v(s) = v(s) & \forall s \in \mathcal{E} \\ \text{où } \mathcal{E} \text{ est l'ensemble des sommet des } \Omega_e \in \mathfrak{T}_h, 1 \leq e \leq E \end{cases}$$

**Proposition 6.1.** *Il existe une constante  $L_0 > 0$  telle que si  $(L_\nu + L_\tau) < L_0$ , le problème  $(P_h)$  admet une solution unique.*

**Preuve.** Il suffit d'appliquer le théorème 2.4. du chapitre 2. ■

### 6.1.2 Estimation de l'erreur

Dans ce paragraphe, on donne une borne de l'erreur résultante de l'approximation par les éléments finis définis précédemment.

Soit  $u$  la solution du problème  $(P_{1.2})$  et  $u_h$  celle du problème  $(P_h)$ , le résultat essentiel de cette partie est donné par le

**Théorème 6.2.** *Si  $u \in V \cap (H^2(\Omega))^d$ , alors il existe une constante  $c > 0$  telle que*

$$\|u - u_h\|_V \leq ch^{\frac{3}{4}} \left( \|u\|_{H^2(\Omega)^d} + \|p_\tau(u_\nu - q)\|_{L^2(\Gamma_3)} \right) \quad (6.1.3)$$

**Remarque 6.1.** - *Il est clair qu'avec ce résultat  $u_h$  tend vers  $u$  lorsque  $h$  tend vers 0.*

- *La constante  $c$  dépend uniquement de  $M, m, C_0, L_\nu$  et  $L_\tau$  mais pas de  $h$ .*

Maintenant pour démontrer le théorème 6.2. , on montre le lemme suivant

**Lemme 6.3.** *Sous les condition du théorème 6.2, il existe une constante  $c > 0$  telle que*

$$\|u - u_h\|_V \leq c \min_{v_h \in V_h} \left\{ \|u - v_h\|_V + \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^d} + \|p_\tau(u_\nu - q)\|_{L^2(\Gamma_3)}^{\frac{1}{2}} \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^d}^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (6.1.4)$$

**Preuve.** Posons  $v = u_h$  dans l'inégalité (6.1.1) , il vient

$$a(u, u_h - u) + j(u, u_h) - j(u, u) \geq (f, u_h - u)_V,$$

d'autre part, on a

$$a(u_h, v_h - u_h) + j(u_h, v_h) - j(u_h, u_h) \geq (f, v_h - u_h)_V,$$

en additionnant les inégalités précédentes, on obtient:

$$a(u, u - u_h) - a(u_h, v_h - u_h) \leq j(u, u_h) - j(u, u) + j(u_h, v_h) - j(u_h, u_h) - (f, v_h - u)_V$$

or

$$a(u, u - u_h) - a(u_h, v_h - u_h) = a(u - u_h, u - u_h) - a(u - u_h, u - v_h) - a(u, v_h - u)$$

il vient d'après  $(h_1)(b)$ :

$$\begin{aligned} m \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - v_h) + j(u, u_h) - j(u, u) \\ &\quad a(u, v_h - u) + j(u_h, v_h) - j(u_h, u_h) - (f, v_h - u)_V \end{aligned}$$

qui s'écrit si l'on rajoute et l'on soustrait le terme  $(j(u, v_h) + j(u, u) + j(u_h, u))$ , sous la forme

$$m \|u - u_h\|_V^2 \leq R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \quad (6.1.5)$$

où

$$\begin{aligned} R_1 &= a(u - u_h, u - v_h) \\ R_2 &= a(u, v_h - u) + j(u, v_h) - j(u, u) - (f, v_h - u)_V \\ R_3 &= j(u, u_h) - j(u, u) + j(u_h, u) - j(u_h, u_h) \\ R_4 &= j(u, u) - j(u, v_h) + j(u_h, v_h) - j(u_h, u) \end{aligned}$$

Estimons chaque terme de la dernière inégalité:

De  $(h_1)(a)$ , il existe une constante  $M > 0$  telle que

$$a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V.$$

En appliquant l'inégalité de Young  $(ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{2\delta} \forall \delta > 0)$ , on montre qu'il existe une constante  $c_1 > 0$  telle que:

$$R_1 \leq c_1 (\|u - u_h\|_V^2 + \|u - v_h\|_V^2) \quad (6.1.6)$$

D'après la formule de Green, on a:

$$R_2 = \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu \cdot (v_h - u) da + j(u, v_h) - j(u, u).$$

En remplaçant  $j$  par son expression donnée par (2.1.13), il vient

$$R_2 = \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot (v_{h\tau} - u_\tau) da + \int_{\Gamma_3} p_\tau (u_\nu - q) (|u_{h\tau}| - |u_\tau|) da$$

et en utilisant (2.1.6), joint à l'hypothèse (2.1.10), on en déduit qu'il existe une constante  $c_2 > 0$  telle que:

$$R_2 \leq c_2 \|p_\tau(u_\nu - q)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \quad (6.1.7)$$

En remplaçant  $j$  par son expression donnée par (2.1.13) dans  $R_3$ , on obtient:

$$\begin{aligned} j(u, u_h) - j(u, u) + j(u_h, u) - j(u_h, u_h) &= \int_{\Gamma_3} \{ (p_\nu(u_\nu - q) - p_\nu(u_{h\nu} - q))(u_{h\nu} - u_\nu) \\ &\quad + (p_\tau(u_\nu - q) - p_\tau(u_{h\nu} - q))(|u_{h\tau}| - |u_\tau|) \} da, \end{aligned}$$

en utilisant les conditions (2.1.10) sur les fonctions de contact  $p_r$ ,  $r = (\tau, \nu)$ , il vient:

$$R_3 \leq \int_{\Gamma_3} (L_\nu |u_\nu - u_{h\nu}|^2 + L_\tau |u_\nu - u_{h\nu}| |u_\tau - u_{h\tau}|) da$$

d'où d'après (1.2.13) :

$$R_3 \leq C_0^2(L_\nu + L_\tau) \|u - u_h\|_V^2 \quad (6.1.8)$$

En remplaçant  $j$  par son expression donnée par (2.1.13) dans  $R_4$ , on obtient:

$$\begin{aligned} j(u, u) - j(u, v_h) + j(u_h, v_h) - j(u_h, u) &= \int_{\Gamma_3} \{ (p_\nu(u_{h\nu} - q) - p_\nu(u_\nu - q))(u_{h\nu} - u_\nu) \\ &\quad + (p_\tau(u_{h\nu} - q) - p_\tau(u_\nu - q))(|u_{h\tau}| - |u_\tau|) \} da, \end{aligned}$$

en utilisant encore les conditions (2.1.10) sur les fonctions de contact  $p_r$ ,  $r = (\tau, \nu)$ , il vient

$$R_4 \leq \int_{\Gamma_3} \{ L_\nu |u_\nu - u_{h\nu}| |u_\nu - v_{h\nu}| + L_\tau |u_\nu - u_{h\nu}| |u_\tau - v_{h\tau}| \} da$$

de même, d'après (1.2.13) :

$$R_4 \leq C_0(L_\nu + L_\tau) \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^d}$$

et en appliquant l'inégalité élémentaire de Young à ce terme, on en déduit qu'il existe une constante  $c_3 > 0$  telle que:

$$R_4 \leq c_3 (\|u - u_h\|_V^2 + \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^d}^2) \quad (6.1.9)$$

les estimations (6.1.6) – (6.1.9) et (6.1.5) entraînent:

$$\|u - u_h\|_V^2 \leq c \{ \|u - v_h\|_V^2 + \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^d}^2 + \|p_\tau(u_\nu - q)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \}$$

d'où l'estimation donnée par (6.1.3) ■

Pour montrer l'estimation de l'erreur telle qu'elle est donnée dans le théorème 6.2., soit  $\Pi_h u$  l'interpolé de la solution  $u$ , donc on prend  $v_h = \Pi_h u$  ceci a un sens puisque le fait que  $\Omega$  est de frontière lipshtzienne entraîne que  $H^2(\Omega)^d \subset C(\bar{\Omega})^d$ , alors pour  $u \in H^2(\Omega)^d$  et  $u|_{\Gamma_3} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_3)^d$ , on a les estimations suivantes:

**Lemme 6.4.** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que:*

$$\|u - \Pi_h u\|_V \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)^d} \quad (6.1.10)$$

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq ch^{\frac{3}{2}} \|u\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d} \quad (6.1.11)$$

(6.1.10) est une estimation standard voir par exemple [8]. Pour (6.1.11) la démonstration est établie dans [17].

On déduit de (6.1.3) que:

$$\|u - u_h\|_V \leq c\{\|u - \Pi_h u\|_V + \|u - \Pi_h u\|_{L^2(\Gamma_3)^d} + \|p_\tau(u_\nu - q)\|_{L^2(\Gamma_3)^d}^{\frac{1}{2}} \|u - \Pi_h u\|_{H^2(\Gamma)^d}^{\frac{1}{2}}\}$$

En appliquant (6.1.10) et (6.1.11), on a

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq c\{h \|u\|_{H^2(\Omega)^d} + h^{\frac{3}{2}} \|u\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d} + \|p_\tau(u_\nu - q)\|_{L^2(\Gamma_3)^d}^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{4}} \|u\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c\{h \|u\|_{H^2(\Omega)^d} + h^{\frac{3}{2}} \|u\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d} + h^{\frac{3}{4}} \|p_\tau(u_\nu - q)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} + h^{\frac{3}{4}} \|u\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d}\} \end{aligned}$$

de la continuité de l'application trace, il existe une constante  $k > 0$  telle que:

$$\|u\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d} \leq k \|u\|_{H^2(\Omega)^d} \text{ et donc on récupère l'estimation donnée par le théorème 6.2.}$$

### 6.1.3 Itérations successives et convergence

Le problème  $(P_h)$  peut être approché par une méthode itérative. Soit  $u_h^0 \in V_h$ , on définit une suite récurrente par

$$a(u_h^{n+1}, v_h - u_h^{n+1}) + j(u_h^n, v_h) - j(u_h^n, u_h^{n+1}) \geq (f, v_h - u_h^{n+1})_V \quad \forall v_h \in V_h \quad (6.1.12)$$

Ceci signifie que si l'on connaît  $u_h^n$ , on calcule  $u_h^{n+1}$ , c'est-à-dire de proche en proche on arrive à calculer  $u_h$  la solution du problème  $(P_h)$ . Cependant, on a le résultat de convergence, donné par le

**Théorème 6.5.** *Sous les conditions du théorème 2.4.*

$$\|u_h^n - u_h\|_V \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty$$

De plus, il existe une constante  $\alpha \in ]0, 1[$  telle que:

$$\|u_h^n - u_h\|_V \leq \alpha^n \|u_h^0 - u_h\|_V$$

**Preuve.** Choisissons  $v_h = u_h^{n+1}$  dans l'inégalité du problème  $(P_h)$  et  $v_h = u_h$  dans (6.1.12), alors par addition, il vient

$$a(u_h - u_h^{n+1}, u_h - u_h^{n+1}) \leq j(u_h, u_h^{n+1}) - j(u_h^n, u_h^{n+1}) - j(u_h, u_h) + j(u_h^n, u_h)$$

En utilisant l'hypothèse  $(h_1)(b)$  et en remplaçant  $j$  par son expression et en appliquant les conditions (2.1.10) sur les fonctions  $p_r$ ,  $r = (\tau, \nu)$ , on déduit que:

$$\|u_h^{n+1} - u_h\|_V^2 \leq \frac{C_0^2}{m} (L_\nu + L_\tau) \|u_h^n - u_h\|_V \|u_h^{n+1} - u_h\|_V$$

d'où

$$\|u_h^{n+1} - u_h\|_V \leq C(L_\nu + L_\tau) \|u_h^n - u_h\|_V$$

où  $C \leq \frac{C_0^2}{m}$ , avec  $C(L_\nu + L_\tau) < 1$  (Sec3. Chap2).

Posons  $\alpha = C(L_\nu + L_\tau)$ , on a pour  $u_h^1$  l'estimation

$$\|u_h^1 - u_h\|_V \leq \alpha \|u_h^0 - u_h\|_V,$$

de même

$$\|u_h^2 - u_h\|_V \leq \alpha \|u_h^1 - u_h\|_V \leq \alpha^2 \|u_h^0 - u_h\|_V,$$

et donc par récurrence, on obtient

$$\|u_h^n - u_h\|_V \leq \alpha^n \|u_h^0 - u_h\|_V,$$

d'où l'estimation recherchée.

Comme  $\alpha \in ]0, 1[$ , on en déduit que  $\|u_h^n - u_h\|_V \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  ■

## 6.2 Cas de contact statique avec coefficient de frottement dépendant de la solution

### 6.2.1 Approximation du problème continu

On reprend le problème  $(P_2)$  du chapitre 3, et on suppose que les conditions du théorème 3.2. sont vérifiées.

On a montré dans (Sec2. Chap.3) que le problème mécanique  $(P_2)$  est équivalent au problème variationnel suivant:

**Problème  $(P_{2.2})$ .** Trouver le champ de déplacements  $u \in V$ , telle que

$$a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in V \quad (6.2.1)$$

où  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $f$  et  $j$  sont définies respectivement par (2.2.2) , (3.2.1) et (3.2.2) .

En utilisant la discrétisation de type éléments finis et les mêmes notations introduites précédemment, le problème  $(P_{2,2})$  est approché par le problème suivant:

**Problème  $(P_h)$ .** Trouver le champ de déplacements  $u_h \in V_h$ ,

$$a(u_h, v_h - u_h) + j(u_h, v_h) - j(u_h, u_h) \geq (f, v_h - u_h)_V \quad \forall v_h \in V_h \quad (6.2.2)$$

### 6.2.2 Estimation de l'erreur

Le problème  $(P_h)$  admet une solution unique  $u_h$ , cependant on a:

**Théorème 6.6.** Supposons que  $u \in V \cap (H^2(\Omega))^d$ , alors il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que

$$\|u - u_h\|_V \leq C_1 h^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^2(\Omega)^d} \quad (6.2.3)$$

**Remarque 6.2.** D'Après cette estimation il est immédiat que  $u_h$  tend vers  $u$  lorsque  $h$  tend vers 0, c'est-à-dire que l'erreur est d'ordre  $h^{\frac{1}{2}}$  :

$$\|u - u_h\|_V = O(h^{\frac{1}{2}})$$

**Démonstration du théorème 6.6.** Posons  $v = u_h$  dans l'inégalité (6.2.1) , il vient

$$a(u, u_h - u) + j(u, u_h) - j(u, u) \geq (f, u_h - u)_V ,$$

d'autre part, on a:

$$a(u_h, v_h - u_h) + j(u_h, v_h) - j(u_h, u_h) \geq (f, v_h - u_h)_V ,$$

en additionnant, il vient d'après  $(h_1)(b)$ ,

$$\begin{aligned} m \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - v_h) + a(u, v_h - u) + j(u, u_h) - j(u, u) \\ &\quad + j(u_h, v_h) - j(u_h, u_h) - (f, v_h - u)_V . \end{aligned}$$

qui s'écrit encore sous la forme

$$m \|u - u_h\|_V^2 \leq R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \quad (6.2.4)$$

où

$$\begin{aligned} R_1 &= a(u - u_h, u - v_h) \\ R_2 &= a(u, v_h - u) + j(u, v_h) - j(u, u) - (f, v_h - u)_V \\ R_3 &= j(u, u_h) - j(u, u) + j(u_h, u) - j(u_h, u_h) \\ R_4 &= j(u, u) - j(u, v_h) + j(u_h, v_h) - j(u_h, u) \end{aligned}$$

En utilisant  $(h_1)(a)$ , on en déduit qu'il existe une constante  $M$  telle que:

$$a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V,$$

en appliquant l'inégalité élémentaire de Young, on montre qu'il existe une constante  $c_1 > 0$  telle que:

$$R_1 \leq c_1 (\|u - u_h\|_V^2 + \|u - v_h\|_V^2) \quad (6.2.5)$$

En remplaçant  $j$  par son expression donnée par (3.2.2), on a

$$R_2 \leq a(u, v_h - u) + \int_{\Gamma_3} S\mu(|u_{h\tau}|)(|v_{h\tau}| - |u_\tau|) da - (f, v_h - u)_V,$$

en appliquant (3.1.9) (c) et  $(h_1)(a)$ , on déduit qu'il existe une constante  $c_2 > 0$  telle que

$$R_2 \leq c_2 \|u\|_V \|u - v_h\|_V + \mu^* \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \quad (6.2.6)$$

En remplaçant  $j$  par son expression donnée par (3.2.2) dans  $R_3$ , on obtient

$$j(u, u_h) - j(u, u) + j(u_h, u) - j(u_h, u_h) \leq \int_{\Gamma_3} S(\mu(|u_\tau|) - \mu(|u_{h\tau}|)) |u_\tau - u_{h\tau}| da.$$

En utilisant l'hypothèse (3.1.9) (a) joint à (1.2.13), on obtient

$$R_3 \leq C_0 L_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u - u_h\|_V^2. \quad (6.2.7)$$

En remplaçant  $j$  par son expression donnée par (3.2.2) dans  $R_4$ , on obtient

$$\begin{aligned} j(u, u) - j(u, v_h) + j(u_h, v_h) - j(u_h, u) &= \int_{\Gamma_3} S\mu(|u_\tau|)(|u_\tau| - |v_{h\tau}|) da + \int_{\Gamma_3} S\mu(|u_{h\tau}|)(|v_{h\tau}| - |u_\tau|) da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} S(\mu(|u_\tau|) - \mu(|u_{h\tau}|)) (|u_\tau| - |v_{h\tau}|) da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} S(\mu(|u_\tau|) - \mu(|u_{h\tau}|)) (|u_\tau - v_{h\tau}|) da \end{aligned}$$

En utilisant (3.1.9) (a) et (1.2.13), on trouve

$$R_4 \leq C_0 L_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^d},$$

d'où on en déduit qu'il existe une constante  $c_3 > 0$  telle que

$$R_4 \leq c_3 \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|u - u_h\|_V^2 + \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^d}^2). \quad (6.2.8)$$

Les estimations (6.2.5) – (6.2.8) et (6.2.4) entraînent l'existence d'une constante  $c > 0$  dépendante uniquement de  $M, m, L_\mu, \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)}$  et de  $\mu^*$  telle que:

$$\|u - u_h\|_V \leq c \min_{v_h \in \tilde{V}_h} \{ \|u - v_h\|_V + \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^d} + \|u\|_V^{\frac{1}{2}} \|u - v_h\|_V^{\frac{1}{2}} + \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^d}^{\frac{1}{2}} \}. \quad (6.2.9)$$

Pour montrer l'estimation de l'erreur telle qu'elle est donnée dans le théorème 6.6. , soit  $\Pi_h u$  l'interpolé de la solution  $u$ , prenons  $v_h = \Pi_h u$ , alors pour  $u \in H^2(\Omega)^d$  et  $u|_{\Gamma_3} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_3)^d$ , on utilise les estimations:

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_h u\|_V &\leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)^d} \\ \|u - \Pi_h u\|_{L^2(\Gamma_3)^d} &\leq ch^{\frac{3}{2}} \|u\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d} \end{aligned}$$

on déduit qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que:

$$\|u - u_h\|_V \leq c\{h^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^2(\Omega)^d} + h^{\frac{3}{4}} \|u\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^d}^{\frac{1}{2}}\}$$

d'où il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que

$$\|u - u_h\|_V \leq C_1 h^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^2(\Omega)^d}$$

d'où (6.2.3) ■

### 6.2.3 Itérations successives et convergence

Dans ce cas aussi le problème  $(P_h)$  peut être approché par une méthode d'itération de point fixe. Soit  $u_h^0 \in V$ , on définit la suite récurrente par

$$a(u_h^{n+1}, v_h - u_h^{n+1}) + j(u_h^n, v_h) - j(u_h^n, u_h^{n+1}) \geq (f, v_h - u_h^{n+1})_V \quad \forall v_h \in V_h \quad (6.2.10)$$

On a un résultat de convergence analogue à celui du cas précédent, donné par le

**Théorème 6.7.** *Sous les conditions du théorème 3.2.*

$$\|u_h^n - u_h\|_V \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty$$

de plus, il existe une constante  $\theta \in ]0, 1[$  telle que

$$\|u_h^n - u_h\|_V \leq \theta^n \|u_h^0 - u_h\|_V$$

**Preuve.** Posons  $v_h = u_h^{n+1}$  dans (6.2.2) et  $v_h = u_h$  dans (6.2.10) et additionnons, il en découle

$$a(u_h - u_h^{n+1}, u_h - u_h^{n+1}) \leq j(u_h, u_h^{n+1}) - j(u_h^n, u_h^{n+1}) - j(u_h, u_h) + j(u_h^n, u_h)$$

En remplaçant  $j$  par son expression, on trouve

$$\begin{aligned} a(u_h - u_h^{n+1}, u_h - u_h^{n+1}) &= \int_{\Gamma_3} S(\mu(|u_{h_\tau}|) - \mu(|u_{h_\tau}^n|)) (||u_{h_\tau}^{n+1}| - |u_{h_\tau}||) da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} S(\mu(|u_{h_\tau}|) - \mu(|u_{h_\tau}^n|)) |u_{h_\tau}^{n+1} - u_{h_\tau}| da \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse  $(h_1)(b)$  et en appliquant la condition (3.1.9) sur la fonction  $\mu$ ,  $r = (\tau, v)$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} \|u_h^{n+1} - u_h\|_V &\leq \frac{1}{m} C_0^2 L_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u_h^n - u_h\|_V \\ &\leq \frac{L_\mu}{L_0} \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u_h^n - u_h\|_V \end{aligned}$$

où  $L_0$  est la constante définie au théorème 3.2. , avec  $L_0 \leq \frac{C_0^2}{m}$ , (Sec2. Chap3).

Posons  $\theta = \frac{L_\mu}{L_0} \|S\|_{L^\infty(\Gamma_3)}$ , on a pour  $u_h^1$  l'estimation

$$\|u_h^1 - u_h\|_V \leq \theta \|u_h^0 - u_h\|_V,$$

de même

$$\|u_h^2 - u_h\|_V \leq \theta \|u_h^1 - u_h\|_V = \theta^2 \|u_h^0 - u_h\|_V,$$

et donc par récurrence, on obtient

$$\|u_h^n - u_h\|_V \leq \theta^n \|u_h^0 - u_h\|_V,$$

d'où l'estimation recherchée.

Comme  $\theta \in ]0, 1[$ , on en déduit que  $\|u_h^n - u_h\|_V \longrightarrow 0$  quand  $n \longrightarrow +\infty$  ■

## 6.3 Etude d'un exemple dans le cas bidimensionnel

Soit un corps élastique (homogène et isotrope) occupant  $\Omega$ , dans le repère orthonormé  $(X_1, X_2)$ . On suppose que  $\Omega$  est un triangle de sommets  $A(0,0)$ ,  $B(l,0)$  et  $C(0,l)$  avec  $l > 0$ . On définit  $\Gamma_1 = [B, C]$ ,  $\Gamma_2 = [A, C]$  et  $\Gamma_3 = [A, B]$ . Le long de  $\Gamma_3$  le corps est en contact avec une fondation déformable (*Fig2.*)

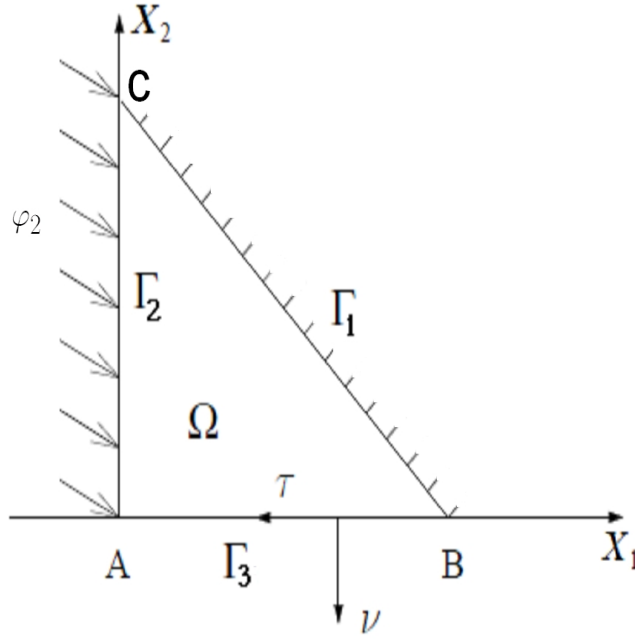


Fig.3.

On suppose que les forces de volume sont négligeables, le corps est soumis à des tractions surfaciques sur  $\Gamma_2$  de densité

$$\varphi_2 = \varphi_{21}X_1 + \varphi_{22}X_2 \quad \text{telle que } \varphi_{21}, \varphi_{22} \text{ sont constantes sur } \Gamma_2$$

La loi de comportement du matériau est celle de Hooke, c'est-à-dire:

$$\sigma = F(\varepsilon(u)) = \lambda \varepsilon_{kk}(u) \delta_{ij} + 2\vartheta \varepsilon_{ij}(u) \quad (6.3.1)$$

où  $\lambda, \vartheta$  sont les coefficients positifs de Lamé. On utilise la notation  $\vartheta$  au lieu de la notation habituelle pour ne pas confondre avec le coefficient de frottement  $\mu$ .

Le contact entre le corps et la fondation est modélisé par la loi de complianse normale et frottement, la fonction de complianse normale considérée est

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+,$$

où  $c_\nu$  est une constante positive,  $r_+ = \max\{0, r\}$ . Formellement la condition de non pénétration est obtenue lorsque  $c_\nu \rightarrow \infty$ .

$p_\tau$  est la fonction positive donnée par

$$p_\tau = \mu p_\nu,$$

ce qui définit une loi classique de Coulomb, où  $\mu \geq 0$  est le coefficient de frottement. Cette loi peut être modifiée pour des considérations thermodynamiques en utilisant la fonction

$$p_\tau = \mu p_\nu (1 - \delta p_\nu)_+,$$

où  $\delta$  est une petite constante liée à la nature du matériau (usure et raideur).

Sans se restreindre à la généralité, on suppose que  $q = 0$ . Telle quelles sont définies, les fonctions  $p_\tau$  et  $p_\nu$  vérifient les conditions (2.1.10) du chapitre 2, il suffit de poser:  $L_\nu = c_\nu$  et  $L_\tau = \mu c_\nu$ .

La formulation faible du problème  $(P_1)$  est de trouver  $u \in V$  tel que

$$a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq (\varphi_2, v - u)_{L^2(\Gamma_2)} \quad \forall v \in V \quad (6.3.2)$$

On suppose que  $\Omega$  est discrétisé en un seul élément fini. Par conséquent, l'espace  $V_h$  est défini par:

$$V_h = \{v_h = (v_{h1}, v_{h2}) \in (\mathcal{P}_1)^2, \quad v_h|_{\Gamma_1} = 0\}$$

Le problème discrétisé est donné par (6.2.2), qui admet une solution unique pour  $(L_\nu + L_\tau)$  assez petit où  $L_\nu$  et  $L_\tau$  sont les constantes de Lipchitz de  $p_\nu$  et  $p_\tau$  respectivement.

Soit  $v_h \in V_h$ , notons par  $V_\nu$  (resp. par  $V_\tau$ ) la composante normale (resp. tangentielle) de  $v_h(A)$ . Dans notre exemple on a:

$$\begin{cases} V_\nu = -v_{h2}(A) \\ V_\tau = -v_{h1}(A) \end{cases}$$

et donc les composantes du tenseur des déformations sont:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(v_h) &= 2 \frac{\Delta v_h}{l} = 2 \frac{V_\tau}{l}; \\ \varepsilon_{12}(v_h) &= \frac{V_\nu + V_\tau}{l}; \\ \varepsilon_{22}(v_h) &= 2 \frac{V_\nu}{l} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que:

$$\varepsilon(v_h) = \frac{1}{2l} \begin{pmatrix} 2V_\tau & V_\nu + V_\tau \\ V_\nu + V_\tau & 2V_\nu \end{pmatrix} \quad (6.3.3)$$

et donc par (6.3.1), on obtient:

$$\sigma(v_h) = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} (\lambda + 2\alpha)V_\tau + \lambda V_\nu & \alpha(V_\tau + V_\nu) \\ \alpha(V_\tau + V_\nu) & (\lambda + 2\alpha)V_\nu + \lambda V_\tau \end{pmatrix} \quad (6.3.4)$$

Le problème discrétisé ( $P_h$ ) est équivalent au problème suivant:

Trouver le champ de déplacements  $u_h \in V_h$ , tel que

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) + j(u_h, v_h) \geq (\varphi_2, v_h)_{L^2(\Gamma_2)^2} & \forall v_h \in V_h \\ a(u_h, u_h) + j(u_h, u_h) = (\varphi_2, u_h)_{L^2(\Gamma_2)^2} \end{cases} \quad (6.3.5)$$

Soit  $u_h$  une solution du problème approché,  $U_\nu, U_\tau$  sont les valeurs de la composante normale et tangentielle respectivement de  $u_h$  au point  $A$ ,

i.e:

$$U_\nu = -u_{h2}(A) \text{ et } U_\tau = -u_{h1}(A)$$

En utilisant (6.3.3) et (6.3.4), on trouve

$$a(u_h, v_h) = \frac{1}{2}((\lambda + 3\alpha)(U_\tau V_\tau + U_\nu V_\nu) + (\lambda + \alpha)(U_\tau V_\nu + U_\nu V_\tau))$$

et

$$(\varphi_2, v_h)_{L^2(\Gamma_2)^2} = -\frac{l}{2}(\varphi_{21} V_\tau + \varphi_{22} V_\nu)$$

Notons la valeur de  $(u_{h\nu})_+$  au point  $A$  par  $P_\nu$ . Il résulte

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{h\nu}) v_{h\nu} da &= \begin{cases} \frac{l c_\nu}{3} P_\nu V_\nu & \text{si } U_\nu > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{h\nu}) |v_{h\tau}| da &= \begin{cases} \mu \frac{l c_\nu}{3} P_\nu |V_\tau| & \text{si } U_\nu > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Pour simplifier notons  $\frac{2l c_\nu}{3} = c_\nu$ , alors le problème approché (6.3.5) est équivalent au problème suivant:

**Problème ( $P_E$ ).** Trouver  $(U_\nu, U_\tau) \in \mathbb{R}^2$ , tel que

$$\begin{cases} (\lambda + 3\alpha)(U_\nu V_\nu + U_\tau V_\tau) + (\lambda + \alpha)(U_\nu V_\tau + U_\tau V_\nu) + c_\nu(P_\nu V_\nu + \mu P_\nu |V_\tau|) \\ \geq -l(\varphi_{21} V_\tau + \varphi_{22} V_\nu) & \forall V_\nu, V_\tau \in \mathbb{R} \\ (\lambda + 3\alpha)(U_\nu^2 + U_\tau^2) + 2(\lambda + \alpha)U_\nu V_\tau + c_\nu(P_\nu U_\nu + \mu P_\nu |U_\tau|) = -l(\varphi_{21} U_\tau + \varphi_{22} U_\nu) \end{cases} \quad (6.3.7)$$

Ce problème est équivalent à résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} (\lambda + 3\alpha)U_\nu + (\lambda + \alpha)U_\tau + c_\nu P_\nu = -l\varphi_{22} \\ (\lambda + \alpha)U_\nu + (\lambda + 3\alpha)U_\tau + c_\nu \mu P_\nu \geq -l\varphi_{21} \\ (\lambda + \alpha)U_\nu + (\lambda + 3\alpha)U_\tau - c_\nu \mu P_\nu \leq -l\varphi_{21} \\ (\lambda + 3\alpha)(U_\nu^2 + U_\tau^2) + 2(\lambda + \alpha)U_\nu V_\tau + c_\nu(P_\nu U_\nu + \mu P_\nu |U_\tau|) = -l(\varphi_{21} U_\tau + \varphi_{22} U_\nu), \end{cases} \quad (6.3.8)$$

Pour chercher des solutions du système, analysons cas par cas:

**A)** Supposons que  $U_\nu < 0$  (décollement), alors  $P_\nu = 0$ , le système (6.3.8) devient donc:

$$\begin{cases} (\lambda + 3\alpha)U_\nu + (\lambda + \alpha)U_\tau = -l\varphi_{22} \\ (\lambda + \alpha)U_\nu + (\lambda + 3\alpha)U_\tau = -l\varphi_{21} \\ U_\nu < 0 \end{cases} \quad (6.3.9)$$

D'abord si  $U_\tau = 0$ , alors  $\varphi_{22} = \frac{\lambda+3\alpha}{\lambda+\alpha}\varphi_{21}$  et si  $\varphi_{21} > 0$ , alors la solution est

$$U_\nu = \frac{-l(\varphi_{22} + \varphi_{21})}{2(\lambda + 2\alpha)}. \quad (6.3.10)$$

Lorsque  $U_\tau \neq 0$ , les solutions de (6.3.9) sont données par:

$$U_\nu = \frac{l((\lambda + 3\alpha)\varphi_{22} - (\lambda + \alpha)\varphi_{21})}{4\alpha(\lambda + 2\alpha)}, \quad U_\tau = \frac{l((\lambda + \alpha)\varphi_{22} - (\lambda + 3\alpha)\varphi_{21})}{4\alpha(\lambda + 2\alpha)} \quad (6.3.11)$$

Or  $U_\nu < 0$  d'où  $\varphi_{22} < \frac{\lambda+\alpha}{\lambda+3\alpha}\varphi_{21}$  et  $U_\tau \neq 0$ .

**B)** Supposons que  $U_\nu = 0$  (collement), ici encore  $P_\nu = 0$  et le système se réduit à la recherche de  $U_\tau$  tel que

$$\begin{cases} (\lambda + \alpha)U_\tau = -l\varphi_{22} \\ (\lambda + 3\alpha)U_\tau = -l\varphi_{21} \end{cases} \quad (6.3.12)$$

d'où si  $\varphi_{22} = \frac{\lambda+3\alpha}{\lambda+\alpha}\varphi_{21}$ , la solution est donnée par

$$U_\tau = \frac{-l(\varphi_{22} + \varphi_{21})}{2(\lambda + 2\alpha)} \quad (6.3.13)$$

Avec  $U_\tau < 0$  si  $\varphi_{22} > 0$  et  $U_\tau > 0$  si  $\varphi_{22} < 0$ .

Donc si  $\varphi_{22} \neq \frac{\lambda+3\alpha}{\lambda+\alpha}\varphi_{21}$ , le système n'admet pas de solution.

**C)** Maintenant supposons que  $U_\nu > 0$  (pénétration), alors  $P_\nu = U_\nu$  et le système devient:

$$\begin{cases} (\lambda + 3\alpha + c_\nu)U_\nu + (\lambda + \alpha)U_\tau = -l\varphi_{22} \\ (\lambda + \alpha + c_\nu\mu)U_\nu + (\lambda + 3\alpha)U_\tau \geq -l\varphi_{21} \\ (\lambda + \alpha - c_\nu\mu)U_\nu + (\lambda + 3\alpha)U_\tau \leq -l\varphi_{21} \\ (\lambda + 3\alpha)(U_\nu^2 + U_\tau^2) + 2(\lambda + \alpha)U_\nu U_\tau + c_\nu(U_\nu^2 + \mu U_\nu |U_\tau|) = -l(\varphi_{21}U_\tau + \varphi_{22}U_\nu), \end{cases} \quad (6.3.14)$$

**C.1)** D'abord si  $U_\tau = 0$ , alors:

$$\begin{cases} (\lambda + 3\alpha + c_\nu)U_\nu = -l\varphi_{22} \\ (\lambda + \alpha + c_\nu\mu)U_\nu \geq -l\varphi_{21} \\ (\lambda + \alpha - c_\nu\mu)U_\nu \leq -l\varphi_{21} \end{cases} \quad (6.3.15)$$

pour  $\varphi_{22} < 0$ , on obtient la solution

$$U_\nu = \frac{-l\varphi_{22}}{(\lambda + 3\alpha + c_\nu)} \quad (6.3.16)$$

les deux inégalités du système entraînent:  $\frac{\lambda+3\alpha+c_\nu}{\lambda+\alpha-c_\nu\mu}\varphi_{21} \leq \varphi_{22}$  et  $\varphi_{22} \leq \frac{\lambda+3\alpha+c_\nu}{\lambda+\alpha+c_\nu\mu}\varphi_{21}$  pour  $\mu \neq \frac{\lambda+\alpha}{c_\nu}$ . Si  $\mu = \frac{\lambda+\alpha}{c_\nu}$  alors on a nécessairement  $\varphi_{21} < 0$ .

**C.2)** Si  $U_\tau > 0$ , de la première équation de (6.3.14), on a

$$(\lambda + 3\alpha + c_\nu)U_\nu^2 + (\lambda + \alpha)U_\tau U_\nu = -l\varphi_{22}U_\nu$$

En remplaçant dans la dernière équation, on obtient le système à deux équations:

$$\begin{cases} (\lambda + 3\alpha + c_\nu)U_\nu + (\lambda + \alpha)U_\tau = -l\varphi_{22} \\ (\lambda + \alpha + c_\nu\mu)U_\nu + (\lambda + 3\alpha)U_\tau = -l\varphi_{21} \\ U_\nu > 0, U_\tau > 0 \end{cases} \quad (6.3.17)$$

dont le déterminant est

$$D = 4\alpha(\lambda + 2\alpha) + (\lambda + 3\alpha)c_\nu - c_\nu\mu(\lambda + \alpha)$$

Si

$$\mu \neq \frac{\lambda + 3\alpha}{\lambda + \alpha} + \frac{4\alpha}{c_\nu} \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha}\right),$$

alors il existe une solution unique  $(U_\nu, U_\tau)$  telle que:

$$U_\nu = \frac{l((\lambda + 3\alpha)\varphi_{22} - ((\lambda + \alpha)\varphi_{21}))}{D}, \quad U_\tau = \frac{l((\lambda + \alpha + c_\nu\mu)\varphi_{22} - (\lambda + 3\alpha + c_\nu)\varphi_{21})}{D}. \quad (6.3.18)$$

Comme  $U_\nu, U_\tau > 0$ , on a nécessairement  $\varphi_{22} > \frac{\lambda+\alpha}{\lambda+3\alpha}\varphi_{21}$  et  $\varphi_{22} > \frac{\lambda+3\alpha+c_\nu}{\lambda+\alpha+c_\nu\mu}\varphi_{21}$ , pour

$$\mu < \frac{\lambda + 3\alpha}{\lambda + \alpha} + \frac{4\alpha}{c_\nu} \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha}\right), \quad \text{i.e: } D > 0$$

et  $\varphi_{22} < \frac{\lambda+\alpha}{\lambda+3\alpha}\varphi_{21}$  et  $\varphi_{22} < \frac{\lambda+3\alpha+c_\nu}{\lambda+\alpha+c_\nu\mu}\varphi_{21}$  pour

$$\mu > \frac{\lambda + 3\alpha}{\lambda + \alpha} + \frac{4\alpha}{c_\nu} \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha}\right), \quad \text{i.e: } D < 0$$

Si

$$\mu = \frac{4\alpha(\lambda + 2\alpha) + (\lambda + 3\alpha)c_\nu}{c_\nu(\lambda + \alpha)}, \quad \text{i.e: } D = 0$$

alors, il existe une infinité de solutions vérifiant  $U_\nu, U_\tau > 0$  données par:

$$U_\nu = \frac{-l(\varphi_{21} + \varphi_{22}) - \beta}{2(\lambda + 2\alpha) + c_\nu(1 + \mu)}, \quad U_\tau = \frac{\beta}{2(\lambda + 2\alpha)}, \quad \beta < -l(\varphi_{21} + \varphi_{22})$$

**Remarque 6.3.** Dans les trois cas précédents, on a nécessairement  $\varphi_{21}, \varphi_{22} < 0$ .

**C.3)** Si  $U_\tau < 0$ , on aura le système:

$$\begin{cases} (\lambda + 3\alpha + c_\nu)U_\nu + (\lambda + \alpha)U_\tau = -l\varphi_{22} \\ (\lambda + \alpha - c_\nu\mu)U_\nu + (\lambda + 3\alpha)U_\tau = -l\varphi_{21} \\ U_\nu > 0, U_\tau < 0 \end{cases} \quad (6.3.19)$$

- Pour  $\mu \neq \frac{\lambda+\alpha}{c_\nu}$ , le déterminant du système est

$$D' = 4\alpha(\lambda + 2\alpha) + (\lambda + 3\alpha)c_\nu + c_\nu\mu(\lambda + \alpha)$$

$D'$  est strictement positif, alors le système (6.3.19) admet une solution unique donnée par:

$$U_\nu = \frac{l((\lambda + 3\alpha)\varphi_{22} - (\lambda + \alpha)\varphi_{21})}{D'}, \quad U_\tau = \frac{l((\lambda + \alpha - c_\nu\mu)\varphi_{22} - (\lambda + 3\alpha + c_\nu)\varphi_{21})}{D'} \quad (6.3.20)$$

comme  $U_\nu > 0$  et  $U_\tau < 0$ , alors  $\varphi_{22} > \frac{\lambda+\alpha}{\lambda+3\alpha}\varphi_{21}$ , et  $\varphi_{22} < \frac{\lambda+3\alpha+c_\nu}{\lambda+\alpha-c_\nu\mu}\varphi_{21}$ .

- Pour  $\mu = \frac{\lambda+\alpha}{c_\nu}$ , la solution est donnée par:

$$U_\nu = \frac{l((\lambda + 3\alpha)\varphi_{22} - (\lambda + \alpha)\varphi_{21})}{(\lambda + 3\alpha)(\lambda + 3\alpha + c_\nu)}, \quad U_\tau = \frac{-l\varphi_{21}}{(\lambda + 3\alpha)} \quad (6.3.21)$$

comme  $U_\nu > 0$  et  $U_\tau < 0$ , alors  $\varphi_{22} > \frac{\lambda+\alpha}{\lambda+3\alpha}\varphi_{21}$ , et  $\varphi_{21} > 0$

Dans l'étude précédente, la valeur  $\frac{\lambda+3\alpha}{\lambda+\alpha} = 3 - 4\nu$  (où  $\nu$  est le coefficient de Poisson avec  $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$ ) apparaît comme l'une des valeurs critiques.

**Remarque 6.4.** Si  $\mu < 1$ , et  $\mu < \frac{\lambda+\alpha}{c_\nu}$  alors

$$\frac{\lambda + \alpha}{\lambda + 3\alpha} < \frac{\lambda + 3\alpha + c_\nu}{\lambda + \alpha + c_\nu\mu} < \frac{\lambda + 3\alpha + c_\nu}{\lambda + \alpha - c_\nu\mu}$$

Les résultats précédents permettent de conclure: sous la condition de la remarque 6.4, selon le chargement, on a les situations suivantes:

a) Si  $\varphi_{22} < \frac{\lambda+\alpha}{\lambda+3\alpha}\varphi_{21}$  on a les cas:

(Séparation et déplacement à gauche/droite). Si  $\frac{\lambda+3\alpha+c_\nu}{\lambda+\alpha+c_\nu\mu}\varphi_{21} < \varphi_{22} < \frac{\lambda+3\alpha+c_\nu}{\lambda+\alpha-c_\nu\mu}\varphi_{21}$ , le problème  $(P_E)$  admet une solution unique donnée par:

$$U_\nu = \frac{l((\lambda + 3\alpha)\varphi_{22} - (\lambda + \alpha)\varphi_{21})}{4\alpha(\lambda + 2\alpha)}, \quad U_\tau = \frac{l((\lambda + \alpha)\varphi_{22} - (\lambda + 3\alpha)\varphi_{21})}{4\alpha(\lambda + 2\alpha)} \quad (6.3.22)$$

- (Séparation)-(Pénétration du corps dans la fondation). Si  $\frac{\lambda+3\alpha+c_\nu}{\lambda+\alpha-c_\nu\mu}\varphi_{21} \leq \varphi_{22} \leq \frac{\lambda+3\alpha+c_\nu}{\lambda+\alpha+c_\nu\mu}\varphi_{21}$ , le problème  $(P_E)$  admet deux solutions données par (6.3.22) et

$$U_\tau = 0, \quad U_\nu = \frac{-l\varphi_{22}}{\lambda + 3\alpha + c_\nu}, \quad (6.3.23)$$

b) Si  $\varphi_{22} = \frac{\lambda+\alpha}{\lambda+3\alpha}\varphi_{21}$ , selon le signe de  $\varphi_{21}$ , on a :

- (Collement - glissement à gauche). Si  $\varphi_{21} < 0$  le problème  $(P_E)$  admet une solution unique donnée par:

$$U_\nu = 0 \quad U_\tau = \frac{-l(\varphi_{22} + \varphi_{21})}{2(\lambda + 2\alpha)} \quad (6.3.24)$$

- (Séparation)-(Collement - glissement à droite). Si  $\varphi_{21} > 0$ , il existe deux solutions données par (6.3.24) et la solution suivante:

$$U_\nu = \frac{-l(\varphi_{22} + \varphi_{21})}{2(\lambda + 2\alpha)}, \quad U_\tau = 0, \quad (6.3.25)$$

c) Si  $\varphi_{22} > \frac{\lambda+\alpha}{\lambda+3\alpha}\varphi_{21}$ , on a:

- (Pénétration et glissement à droite). Si  $\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+3\alpha}\varphi_{21} < \varphi_{22} < \frac{\lambda+3\alpha+c_\nu}{\lambda+\alpha-c_\nu\mu}\varphi_{21}$ , alors le problème  $(P_E)$  admet une solution unique donnée par

$$U_\nu = \frac{l((\lambda + 3\alpha)\varphi_{22} - ((\lambda + \alpha)\varphi_{21}))}{4\alpha(\lambda + 2\alpha) + (\lambda + 3\alpha)c_\nu + c_\nu\mu(\lambda + \alpha)}, \quad U_\tau = \frac{l((\lambda + \alpha - c_\nu\mu)\varphi_{22} - (\lambda + 3\alpha + c_\nu)\varphi_{21})}{4\alpha(\lambda + 2\alpha) + (\lambda + 3\alpha)c_\nu + c_\nu\mu(\lambda + \alpha)} \quad (6.3.26)$$

Si  $\varphi_{22} > \frac{\lambda+3\alpha+c_\nu}{\lambda+\alpha-c_\nu\mu}\varphi_{21} \geq 0$ , alors le problème n'admet pas de solutions.

- (Pénétration et glissement à gauche). Si  $0 > \varphi_{22} > \frac{\lambda+\alpha}{\lambda+3\alpha}\varphi_{21}$ , le problème  $(P_E)$  admet une solution unique donnée par

$$U_\nu = \frac{l((\lambda + 3\alpha)\varphi_{22} - ((\lambda + \alpha)\varphi_{21}))}{4\alpha(\lambda + 2\alpha) + (\lambda + 3\alpha)c_\nu - c_\nu\mu(\lambda + \alpha)}, \quad U_\tau = \frac{l((\lambda + \alpha + c_\nu\mu)\varphi_{22} - (\lambda + 3\alpha + c_\nu)\varphi_{21})}{4\alpha(\lambda + 2\alpha) + (\lambda + 3\alpha)c_\nu - c_\nu\mu(\lambda + \alpha)}. \quad (6.3.27)$$

Les résultats précédents sont représentés par le schéma donné par (Fig.4.):

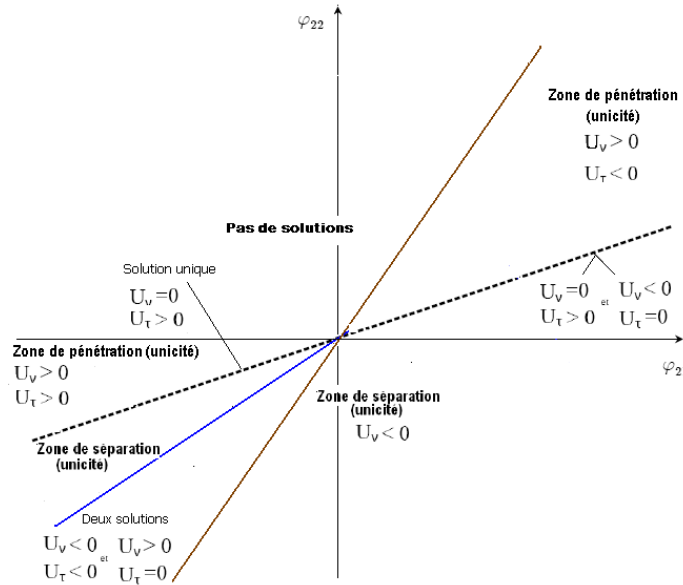


Fig.4. Cas pour  $\mu < 1$ .

Maintenant, observons ce qui se passe si  $\frac{\lambda+\alpha}{c_\nu} > \mu \geq 1$ . Dans ce cas on a:

$$\frac{\lambda + 3\alpha + c_\nu}{\lambda + \alpha - c_\nu\mu} < \frac{\lambda + 3\alpha + c_\nu}{\lambda + \alpha + c_\nu\mu} < \frac{\lambda + 3\alpha}{\lambda + \alpha},$$

Pour  $\mu < \frac{\lambda+3\alpha}{\lambda+\alpha} + \frac{4\alpha}{c_\nu} \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\right)$ , on obtient le schéma suivant:

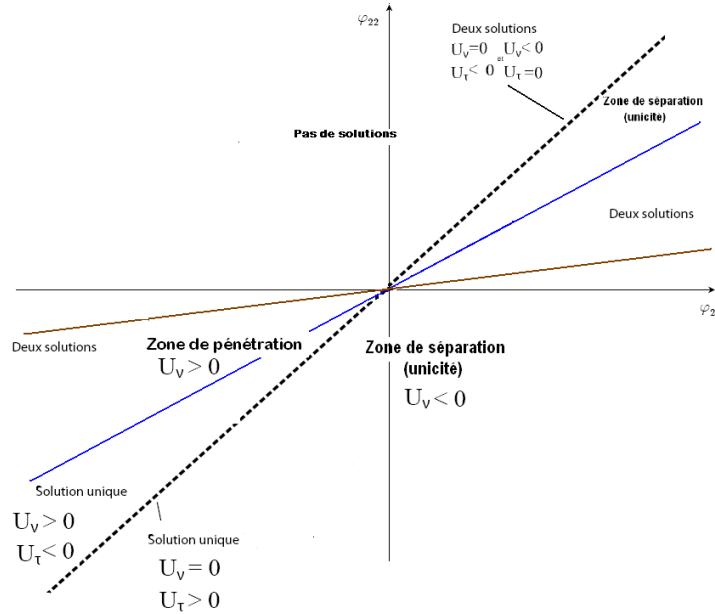


Fig.5. Cas pour  $\mu \geq 1$

**Remarque 6.5.** Dans les deux cas précédents si  $\mu > \frac{\lambda+3\alpha}{\lambda+\alpha} + \frac{4\alpha}{c_\nu} \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\right)$  ou  $\mu \geq \frac{\lambda+\alpha}{c_\nu}$ , une modification du sens du glissement et du nombre de solutions apparaîtra dans la zone délimitée par les droites de pentes  $\frac{\lambda+3\alpha+c_\nu}{\lambda+\alpha+c_\nu\mu}$  et  $\frac{\lambda+3\alpha+c_\nu}{\lambda+\alpha-c_\nu\mu}$ .

Si  $\mu = \frac{\lambda+3\alpha}{\lambda+\alpha} + \frac{4\alpha}{c_\nu} \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\right)$  alors il existe une infinité de solutions dans la région  $\varphi_{22} > \frac{\lambda+\alpha}{\lambda+3\alpha}\varphi_{21}$ . On obtient pour  $\mu \geq 1$  le schéma suivant:

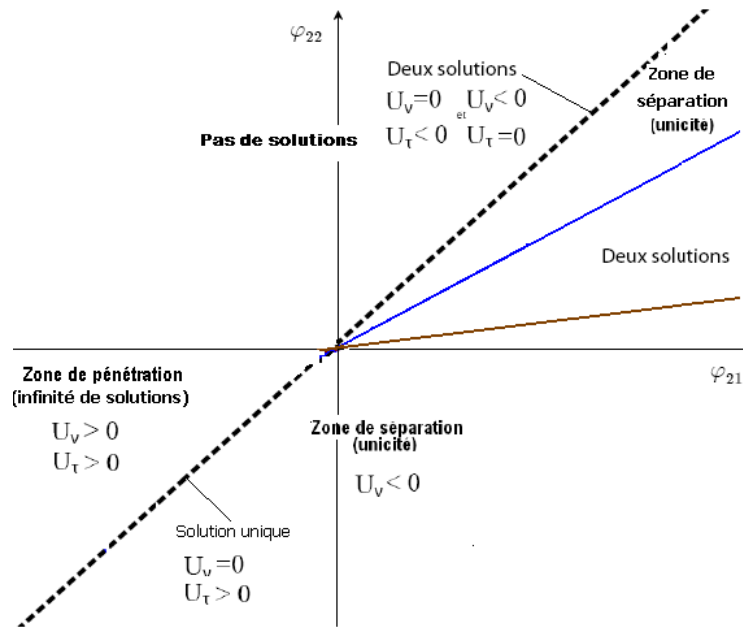


Fig.6. Cas pour  $\mu = \frac{\lambda+3\alpha}{\lambda+\alpha} + \frac{4\alpha}{c_v} \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\right) \geq 1$

## 6.4 Conclusion

Dans l'approximation numérique proposée dans la section 1, on a établi l'existence d'une solution unique du problème discrétisé sous l'hypothèse de petitesse de  $(L_\nu + L_\tau)$ . Dans le cas discret à travers l'étude d'un exemple élémentaire, on peut confirmer que l'unicité de la solution en dehors de la condition citée, n'est pas toujours vraie et en particulier pour un coefficient de frottement assez large  $\mu \geq 1$ .

## *Conclusion générale*

Sous l'hypothèse de petitesse des fonctions de contact, grâce au théorème du point fixe de Banach on a prouvé l'existence et l'unicité de la solution du problème  $(P_1)$  ainsi que la stabilité de celle-ci par rapport aux données externes et par rapport aux petites perturbations des conditions de contact. Pour le problème  $(P_2)$  l'existence et l'unicité sont obtenues pour un coefficient de frottement et une contrainte normale assez petits grâce à un résultat non standard obtenu dans [29]. On a aussi démontré la dépendance continue de la solution par rapport aux données externes et la stabilité par rapport aux petites perturbations du coefficient de frottement. Par ailleurs, on peut toujours se demander si les hypothèses de petitesse sous lesquelles l'existence des solutions est établie traduit des caractéristiques intrinsèques des problèmes mécaniques ou bien elles ne représentent qu'une limitation imposée par les outils mathématiques employés.

On a étendu l'étude en utilisant des méthodes similaires aux cas quasi-statiques. Dans les deux cas, une technique de discrétisation en temps a permis d'obtenir l'existence de solutions incrémentales pour des fonctions de contact assez petites. On a montré l'existence d'une solution quasi-statique en passant à la limite par rapport au temps. A présent, le problème de l'unicité de la solution des deux problèmes reste encore ouvert.

Par une méthode d'éléments finis, on a pu proposer des schémas d'approximation de la solution continue des problèmes statiques, où on a établi des estimations d'erreur et on a montré la convergence des méthodes proposées.

A la question de l'unicité de la solution pour des problèmes quasi-statiques en général, des réponses ont été obtenues pour certains cas de contact bilatéral et de lois simples qui nécessitent des algorithmes qui devraient permettre un calcul numérique des solutions; même pour ce calcul des problèmes se posent lorsque on passe du statique au quasi-statique. Or, si l'on veut appréhender des problèmes concrets, il faut pouvoir les résoudre d'une manière quasi-statique.

La modélisation des problèmes d'évolution de contact avec frottement nécessitent une modélisation plus fine et spécifique dans les régions de contact. Actuellement on s'intéresse de plus en plus à des problèmes de contact avec frottement et adhésion et à des problèmes de contact dit électro-élastique (voir par exemple [38]). Des résultats théoriques plus proches de la réalité physique sont obtenus, où la mise en œuvre des méthodes numériques s'intensifie. A ce stade beaucoup de travaux de recherche sont attendus.

# Bibliographie

- [1] **Amassad A, Rosca R. I and Sofonea M**, *A Variational analysis of an elastic problem involving Tresca friction law*, B.S.U.R.M VOL XII, (1996), p.31-4.
- [2] **Anderson L-E**, *Existence Results for Quasistatic Contact Problems with Coulomb friction*, Appl.Math.Optim, 42, (2000),169-202.
- [3] **Anderson L-E**, *A quasistatic frictional problem with normal compliance*. Nonlinear Anal. Th.Appl.16, 4(1991), 347-369.
- [4] **Brezis H**, *Analyse fonctionnelle - Théorie et Applications*, Masson, Paris(1987).
- [5] **Brezis H**, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité.-* Annales Inst.Fourier, 18, (1968), 115-175.
- [6] **Brezis H**, *Problèmes unilatéraux*, J. Math. Pures et App. 51, (1972)1-168.
- [7] **Brezis H, Stampacchia G**, *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptique*, Bultin de la S.M.F., tome 96, (1968), 153-180.
- [8] **Ciarlet P.G**, *Basic error estimates for elliptic problems*, Hand book of numerical analysis, Vol II, Finite Element Methods (Part 1). Elsevier Science Publishers, (North Holland), 1991.
- [9] **Cocou M**, *Existence of solutions of Signorini problems with friction*, Int. J. Engng. Sci.22, (1984), 567-581.
- [10] **Drabla S, Sofonea M** , *Analysis of a Signorini problem with friction*, IMA Journal of Applied Mathematics, 63, 2, (1999), 113-130.
- [11] **Duvaut G**, *Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb*. Cr Acad. Sci. Paris, Ser A, 290, (1980), 263-265.

- 
- [12] **Duvaut G, Lions J-L**, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, (1972).
- [13] **Fichera G**, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Mem. Accad. Naz. Lincei, S. VIII, Vol VII, Sez. I, 5, (1964),91-140.
- [14] **Jarusek J**, *Contact problems with bounded friction. Coercive case*, Czech. Math. J.33, (1983), 237-261.
- [15] **Haslinger J, Vlach O**, *Signorini problem with solution coefficient of friction (Model with given friction): Approximation and numerical realisation*, Applications of mathematics, 50 N°2, (2005), 153-171.
- [16] **Han W, Sofonea M**, *Analysis And Numerical Approximation Of An Elastic Frictional Contact Problem With Normal Compliance*, Applicationes Mathematicae, 26, 4 (1999), 415–435
- [17] **Hild P**, *A propos d'approximation par éléments finis optimale pour les problèmes de contact unilatéral*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér I, t. 330, (1998), 1233-1236.
- [18] **Hlaváček I, Nečas J**, *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies: An Introduction*, Elsevier, Amsterdam (1981).
- [19] **Glowinski R**, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1984).
- [20] **Glowinski R, Lions J. L, Tremolieres R**, *Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles*; Vol. 1: *Théorie Générale et Premières Applications*, Dunod-Bordas, Paris (1976).
- [21] **Glowinski R, Lions J. L, Tremolieres R**, *Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles*; Vol. 2: *Applications aux Phénomènes Stationnaires et d'Evolution*, Dunod-Bordas, Paris (1976).
- [22] **Kikuchi N, Oden J.T**, *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, Philadelphia, SIAM, (1988).

- 
- [23] **Klarbring A, Miklic A, Shillor M**, *A global existence result for the quasistatic problem with normal compliance*. Internet. Ser. Numer. Math. 101. Birkhäuser Verlag. Basel, (1991), 85-111.
- [24] **Landau L, Lifchitz E**, *Théorie de l'élasticité*, Edition Mir, (1990).
- [25] **Lions J.L**, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthiers-Villars (1969).
- [26] **Lions J.L, Magenes E**, *Problèmes aux limites non homogènes et applications* Dunod (1968).
- [27] **Martins J. A. C. and Oden J.T.**, *Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with non linear normal and friction interfaces laws*, Nonlinear Analysis TMA, 11, (1987), 407-428
- [28] **Motreanu D, Sofonea M**, *Evolutionary variational inequalities arising in quasistatic frictional contact problems for elastic materials*, Abstract and Applied Analysis, 4(4), (1999), 255-279.
- [29] **Motreanu D, Sofonea M**, *Quasivariational inequalities and applications in frictional contact problems with normal compliance*, Adv. Math. sci. Appl. 10(1), (2000), 103-118.
- [30] **Nečas J**, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Academia Prague (1967).
- [31] **Yves R**, *A uniqueness criterion for Signorini problem with Coulomb friction*, SIAM J MATH. ANAL. Vol.38, N°2, (2006), 452-467.
- [32] **Raviart P.A, Thomas J.M**, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris (1983)
- [33] **Rocca R**; *Existence of a solution for a quasistatic problem of unilateral contact with local friction*.Cr. Acad. Sci Paris. Ser1, t.328, (1999), 1253-1258.
- [34] **Rochdi M, Shillor M, Sofonea M**, *Quasistatic viscoelastic contact problem with normal compliance and friction*. Journal of Elasticity, 53, (1998), 105-126.
- [35] **Signorini A**, *Sopra alcune questioni di elastostatica*, Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze, (1933).

- [36] **Shillor M, Sofonea M, J.J. Telega**, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics, Vol. 655, Berlin, Springer-Verlag, (2004).
- [37] **Sofonea M**, *Modelisation mathématique en Mécanique du Contact*, Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 32, (2005), Pages 67-74.
- [38] **Sofonea M, Arhab R, Tarraf R**, *Analysis of electrostatic frictionless contact Pproblems with adhesion*, Journal of Applied Mathematics Volume (2006), Article ID 64217, Pages 1–25.
- [39] **Touzaline A., Mignot A**, *Problème statique de contact unilatéral avec frottement non local pour des matériaux élastiques non linéaires*, Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Lodz, vol XLII, (2003), 99-109.
- [40] **Touzaline A.**, *Problème élastiques non linéaires de contact avec frottement*, Thèse de doctorat d'état en mathématiques, USTHB, 2006.