



N° d'ordre : / 2007- M/ MT.

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE**

**FACULTE DE MATHEMATIQUES
DEPARTEMENT DE RECHERCHE OPERATIONNELLE**

MEMOIRE

**PRESENTEE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE
MAGISTER EN MATHEMATIQUES
SPECIALITE : RECHERCHE OPERATIONNELLE**

Par

Kawthar HUSSAIN

THEME

**DOMINATION DANS L'HYPERGRAPHE DES
INTERVALLES DU TREILLIS BOOLEEN**

Soutenue le 06/ 10/ 2007, devant le jury :

S. BOUROUBI, Maître de Conférence, USTHB

I. BOUCHEMAKH, Maître de Conférence, USTHB

M. MOULAÏ, Maître de Conférence, USTHB

A. SEMRI, Maître de Conférences, USTHB

Président

Directrice de thèse

Examineur

Examineur

Remerciements

En premier lieu, je remercie DIEU le tout puissant de m'avoir permis de mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier particulièrement ma directrice de thèse madame Isma Bouchemakh, maître de conférence à l'USTHB, pour m'avoir proposé un sujet de recherche aussi intéressant et pour m'avoir suivie avec ses conseils et remarques le long de cette thèse. Je la remercie aussi pour sa patience et gentillesse. Qu'elle trouve ici l'expression de mon respect et ma gratitude.

Je remercie monsieur S. Bouroubi, maître de conférence à l'U.S.T.H.B pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Mes remerciement vont également à messieurs M. Moulai et A. Semri maîtres de conférence à l'U.S.T.H.B pour m'avoir fait l'honneur de faire parti du jury.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et ma gratitude à mes parents pour le soutien quotidien et les encouragements qu'ils m'ont apportés tout au long de mes études et pendant la réalisation de cette thèse.

Je remercie également tous ceux qui m'ont conseillé et encouragé.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : DEFINITIONS ET CONCEPTS	3
1.1 Concepts généraux sur les Posets	3
1.2 Exemples de posets classiques.....	7
1.3 Opérations sur les posets.....	9
1.4 Concepts généraux sur les graphes	12
1.5 Concepts généraux sur les hypergraphes	14
1.6 Hypergraphe des intervalles d'un poset	15
1.7 Introduction à théorie de la complexité	16
1.8 Aperçu sur la domination.....	19
CHAPITRE 2 : LE NOMBRE DE DOMINATION D'UN GRAPHE	24
2.1 Bornes en terme d'ordre du graphe.....	24
2.2 Bornes en terme d'ordre et de degré	28
2.3 Bornes en termes d'ordre et de taille du graphe	29
2.4 Bornes en terme de degré, diamètre et girth	30
2.5 Résultats du type Nordhaus-Gaddum	31
2.6 Bornes en terme d'indépendance et de recouvrement	33
2.7 Domination et nombre chromatique	35
2.8 Bornes sur des classes de graphes particuliers.....	36
2.9 Complexité du problème du nombre de domination.....	44
CHAPITRE 3 : LE NOMBRE DOMATIQUE D'UN GRAPHE	49
3.1 Bornes en terme de degré, d'ordre et de diamètre	49
3.2 Bornes algorithmiques	51

3.3 Nombre domatique et degré de connexité	52
3.4 Résultats du type Nordhaus-Gaddum	52
3.5 Relations entre le nombre domatique et d'autres invariants de domination	54
3.6 Union et jointure de graphes	55
3.7 Bornes sur des classes de graphes particuliers.....	56
3.8 Relations entre le nombre domatique et nombre de domination :	68
3.9 Complexité du problème du nombre domatique:.....	69
CHAPITRE 4 : NOMBRE DE DOMINATION DANS $G_{n;l,u}$	74
4.1 Résultats sur le treillis booléen	74
4.2 Nombre de domination de $G_{n;l,u}$	76
4.2.1 Procédure de recherche de D_{min}	77
4.2.2 Nombre de domination de $G_{n;l,l+1}$	78
4.2.3 Nombre de domination de $G_{n;l,n}$	79
4.2.4 Nombre de domination de $G_{n;1,u}$	80
CHAPITRE 5 : NOMBRE DOMATIQUE DANS $G_{n;l,u}$	81
5.1 Nombre domatique de $G(P*Q)$	81
5.2 Le nombre domatique de $G(C_{n_1} \times C_{n_2})_{l,u}$	83
5.3 Nombre domatique de $G_{n;l,u}$	83
5.3.1 Nombre domatique de $G_{n;l,l+1}$	84
5.3.2 Nombre domatique de $G_{n;1,n-1}$	91
5.3.3 Nombre domatique de $G_{n;1,n}$	92
5.3.4 Nombre domatique de $G_{n;1,u}$	92
CONCLUSION	93
REFERENCES	94

INTRODUCTION

La théorie des graphes est un domaine très vaste de la recherche opérationnelle qui est en évolution constante tant du point de vue des recherches fondamentales que de celui des applications. Elle intervient dans la modélisation de nombreux problèmes combinatoires, qui seraient sans cela difficilement abordables par des techniques classiques comme l'analyse mathématique.

Notre travail concerne l'étude de la domination dans les graphes. Nous nous intéressons en particulier au nombre domatique et au nombre de domination.

Un ensemble dominant dans un graphe est un sous ensemble de sommets où tout sommet du graphe est ou bien dans cet ensemble ou bien adjacent à un sommet de cet ensemble. Le nombre de domination est la taille minimum d'un ensemble dominant et le nombre domatique est la taille maximum d'une partition des sommets du graphe en ensembles dominants.

La théorie de domination a des racines historiques remontant à l'année 1862, lorsque Jaenisch [37] a étudié le problème qui consiste à déterminer le nombre minimum de reines nécessaires pour couvrir (ou dominer) un échiquier.

En 1958 Claude Berge a défini pour la première fois le concept de domination d'un graphe. Cependant ce n'est que lorsque le Survey de Cockayne et Hedetniemi est apparu en 1977 [31], que l'intérêt croissant à la domination s'est révélé. Actuellement elle est considérée comme l'un des domaines les plus florissants de la théorie des graphes, vu son utilité dans de nombreuses applications réelles (réseaux de communication, réseaux informatiques, système de surveillance, ...).

Soit P un poset fini et $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe dont les sommets sont les points de P et dont les arêtes sont ses intervalles maximaux. Quelques invariants classiques de la théorie des hypergraphes, tels que les nombres de recouvrement, de couplage, de stabilité,...ont été étudiés pour cette classe particulière et d'intéressants résultats sont prouvés.

L'objet de ce mémoire est de faire un survey sur deux paramètres de domination dans les graphes et l'étude de ces deux paramètres dans le cas du graphe 2-section $G_{n;l,u}$ de l'hypergraphe des intervalles maximaux de $(B_n)_{l,u}$ où $(B_n)_{l,u}$ est le sous poset induit par l'union des niveaux consécutifs $\bigcup_{i=l}^u N_i$ du treillis booléen B_n , $0 \leq l < u \leq n$.

Dans le Chapitre 1, nous présentons des notions de base et des définitions concernant les posets, les hypergraphes et la complexité algorithmique puis nous donnons un aperçu sur la domination dans les graphes.

Les Chapitres 2 et 3 ont pour objectif d'exposer les résultats déjà établis concernant respectivement le nombre de domination et le nombre domatique pour différentes classes de graphes. Nous exposons aussi quelques classes de graphes où la NP-complétude du problème du nombre de domination et du nombre domatique est prouvée puis les classes de graphes où des algorithmes efficaces ont été construits.

Dans le Chapitre 4, nous établissons quelques résultats sur le nombre de domination dans $G_{n;l,u}$ pour différentes valeurs de l et u .

Dans le Chapitre 5, nous présentons des résultats déjà établis sur le nombre domatique dans le graphe représentatif des intervalles d'un poset, ensuite nous établissons quelques résultats concernant le nombre domatique dans $G_{n;l,u}$. Nous déterminons dans certains cas des valeurs exactes et dans d'autres cas des bornes.

CHAPITRE 1

DEFINITIONS ET CONCEPTS

Dans ce chapitre nous présentons des définitions générales et des notations sur les posets et les hypergraphes. Nous introduisons également des notions de la théorie de complexité, puis nous donnons enfin un aperçu sur la domination.

1.1 Concepts généraux sur les Posets

Poset

Un *poset* (P, \leq) est un ensemble P partiellement ordonné, c.à.d muni d'une relation ' \leq ' d'ordre partiel telle que ' \leq ' est réflexive, antisymétrique et transitive.

Dans tout ce qui suivra, nous noterons brièvement P au lieu de (P, \leq) et nous nous intéressons seulement au cas où P est fini.

Pour deux éléments comparables x et y du poset P , on écrira d'une manière usuelle $x \leq y$ ou d'une façon équivalente $y \geq x$.

Couverture

Un élément $y \in P$ *couvre* un autre élément $x \in P$ (noté $y \text{ H } x$) si :

$$(y > x) \text{ et } (y \geq z > x \Rightarrow z = y).$$

Diagramme de Hasse

La notion de couverture permet de représenter tout poset P sous forme de *diagramme de Hasse* comme suit :

- A chacun des éléments de P est associé, de façon injective, un point du plan.
- Si un élément y couvre un élément x , le point x sera relié au point y par un segment de droite ascendant.

Un exemple de poset est représenté dans la Figure 1.

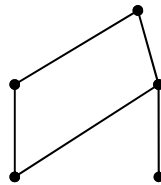


Figure 1.

Élément minimal (resp. maximal)

Un élément x de P est dit *minimal* (resp. *maximal*) si :

$$\forall y \in P : (y \leq x \text{ (resp. } y \geq x) \Rightarrow y = x).$$

En d'autres termes, un élément minimal (resp. maximal) ne couvre (resp. n'est couvert par) aucun élément.

Intervalle

Un *intervalle* est un sous-ensemble I de P de la forme $\{v \in P : p \leq v \leq q\}$, noté $[p, q]$. Si en plus p est un élément minimal et q un élément maximal, alors I est appelé *intervalle maximal*.

Isomorphisme

Deux posets P et Q sont dit *isomorphes* (on note $P \cong Q$), s'il existe une application bijective φ de P sur Q , telle que $x \leq_P y \iff \varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$.

Poset dual

Le *dual* de P , noté P^* , est un poset ayant les même sommets que P mais ordonné par la relation ' \leq_{P^*} ' définie par : $x \leq_{P^*} y$ ssi $x \geq_P y$.

Treillis

Un poset est appelé *treillis* si tout couple d'éléments $\{x,y\}$ de P possède une borne inférieure et une borne supérieure. Par exemple, le poset P de la Figure 2 est un treillis mais le poset Q ne l'est pas car la borne inférieure de $\{3,4\}$ et la borne supérieure de $\{1,2\}$ n'existent pas.

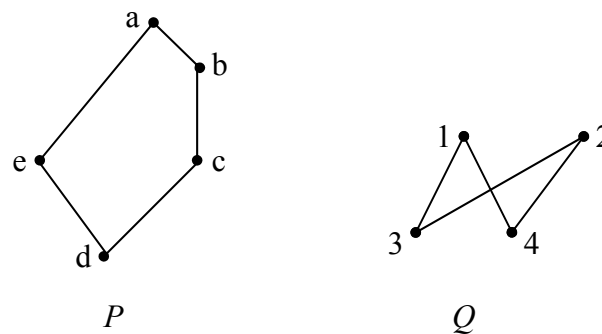


Figure 2.

Notons qu'un treillis admet un unique élément minimal et un unique élément maximal.

Fonction de rang

Une *fonction de rang* est une fonction r de P dans \mathbb{N} vérifiant $r(x)=0$ si x est un élément minimal et $r(y)=r(x)+1$ si $y \text{ H } x$. Si une telle fonction de rang existe, on dira que P est *rangé* (ou *gradué*) et la valeur $r(P) = \text{Max} \{r(x), x \in P\}$ représente son rang.

Si P est un poset rangé et si tout élément maximal est de rang $r(P)$ alors le poset dual P^* est aussi rangé et on a : $r_{P^*}(x) = r(P) - r(x)$ pour tout $x \in P$.

Si P est rangé, on définit son *niveau* i par : $N_i(P) = \{x \in P : r(x) = i\}$.

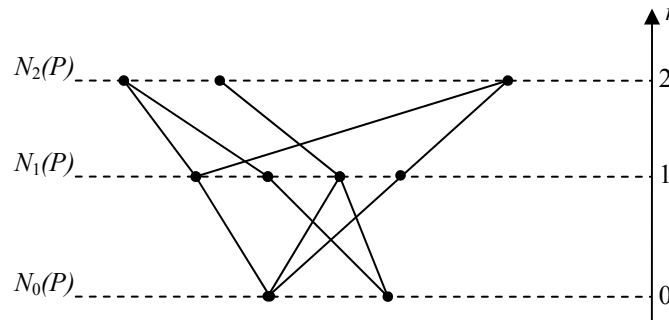


Figure 3.

Le nombre $W_i(P) = |N_i(P)|$ est appelé : $i^{\text{ème}}$ nombre de Whitney pour tout $i = 0, \dots, r(P)$.

Les nombres de Whitney sont dits unimodaux s'il existe un nombre entier h tel que : $W_i(P) \leq W_{i+1}(P)$ pour $i < h$ et $W_i(P) \geq W_{i+1}(P)$ pour $i \geq h$. Ils sont symétriques si $W_i(P) = W_{r(P)-i}(P)$ pour tout i . Dans ce cas P est dit de rang unimodal et de rang symétrique respectivement.

Les nombres de Whitney sont dits logarithmiquement concaves si pour tout i , $W_i^2(P) \geq W_{i-1}(P) \cdot W_{i+1}(P)$. De plus la concavité logarithmique implique l'unimodalité.

Ombre inférieure (resp. supérieure)

Soit P un poset rangé et soit A un sous ensemble de P , on définit l'*ombre inférieure* (resp. *supérieure*) de A par l'ensemble $R^-(A) = \{x \in P : x \Gamma a, \text{ pour un certain } a \in A\}$ (resp. $R^+(A) = \{x \in P : x \text{ H } a, \text{ pour un certain } a \in A\}$).

Chaîne

Un sous-ensemble de P d'éléments deux à deux comparables est appelé *chaîne*. Une chaîne est notée par : $C = (c_0 < \dots < c_k)$. L'entier k représente sa longueur. Elle est symétrique si pour P rangé on a $r(c_0) + r(c_k) = r(P)$.

Une chaîne est dite saturée si elle est de la forme $C = (c_0 \Gamma \dots \Gamma c_k)$, elle est dite maximale si de plus c_0 (resp. c_k) est un élément minimal (resp. maximal) de P .

Antichaîne

Une antichaîne est un sous-ensemble de P d'éléments deux à deux incomparables. Une antichaîne est appelé aussi famille de Sperner. Plus généralement, une k -famille est une famille dans P ne contenant pas une chaîne de longueur k d'où une 1-famille est une antichaîne. La taille maximum d'une antichaîne notée $w(P)$ est appelée largeur de P .

1.2 Exemples de posets classiques

Le treillis booléen

Soit B_n le poset défini par $B_n = (\{0,1\}^n, \leq)$ où la relation d'ordre est telle que :

$\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \leq \underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ ssi $a_i \leq b_i$ pour tout i .

B_n est appelé le *treillis booléen*.

Le treillis booléen B_3 est représenté dans la Figure 4 :

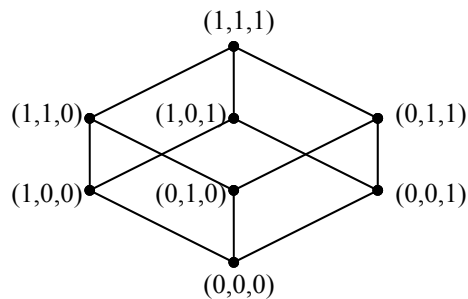


Figure 4.

Notons que le diagramme de Hasse du treillis Booléen B_n est l'hypercube (ou le n -cube) que nous verrons dans la section 3.7.1 du Chapitre 3.

Comme $B_n = (\{0,1\}^n, \leq)$ et $(P(\{1, \dots, n\}), \subseteq)$ sont isomorphes (en considérant l'application $\varphi(\underline{a}) = \{i : a_i = 1\}$), il est possible de définir le treillis booléen comme le treillis de tous les sous ensembles de $\{1, \dots, n\}$ ordonné par inclusion.

Le rang d'un élément de B_n est son cardinal. Le $i^{\text{ème}}$ niveau $N_i(B_n)$, $i=1, \dots, n$ est l'ensemble de toutes les parties à i éléments, c.à.d., $W_i(B_n) = \binom{n}{i}$.

Soient x et y deux éléments de B_n de niveau respectifs l et u . Dans le Chapitre 4 nous montrons que l'intervalle $[x,y]$ est isomorphe à B_{u-l} .

Le treillis $S(k_1, \dots, k_n)$

C'est l'ensemble de tous les n -uples $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ tels que $0 \leq a_i \leq k_i$ pour tout $i=1, \dots, n$.

La relation d'ordre est telle que :

$$\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \leq \underline{b} = (b_1, \dots, b_n) \text{ ssi } a_i \leq b_i \text{ pour tout } i.$$

En particulier le treillis B_n est isomorphe à $S(1, \dots, 1)$.

L'isomorphisme entre $S(k_1, \dots, k_n)$ et $\prod_{i=1}^n (0 \Gamma 1 \Gamma \dots \Gamma k_i)$ lui confère le nom de *produit de chaînes*.

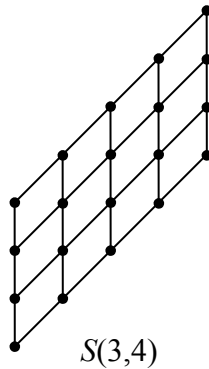


Figure 5.

$S(k_1, \dots, k_n)$ est rangé par la fonction de rang, $r(\underline{a}) = a_1 + \dots + a_n$ et son rang vaut $k_1 + \dots + k_n$.

Les éléments du niveau i sont tous les n -uples dont la somme des composantes est égale à i .

Le treillis des faces du n -cube

Soit le n -cube suivant : $Q_n = \{ \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1 \}$.

Une face de Q_n est un sous ensemble F de la forme suivante :

$F_{I,J} = \{ \underline{x} \in Q_n : x_i = 0 \text{ pour } i \text{ dans } I, x_i = 1 \text{ pour } i \text{ dans } J \text{ et } 0 \leq x_i \leq 1 \text{ sinon} \}$, ou I et J sont des sous ensembles de $[n]$, vérifiant $I \cap J = \emptyset$.

Le treillis C_n est l'ensemble des faces de Q_n (auquel on rajoute un élément qui est inférieur à tous les éléments du niveau N_0) ordonné par inclusion. C_n est isomorphe au produit cartésien de n copies de T ou T est un poset à trois éléments $\{0,1,2\}$ ordonné par $0 < 2 > 1$.

La Figure 6 représente C_2 .

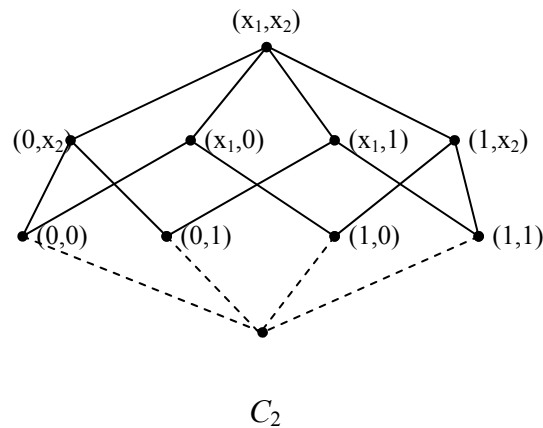


Figure 6.

C_n est rangé. Le rang d'une face F de Q_n est égal au nombre de ses composantes libres (c.à.d celles qui diffèrent de 0 et 1). Le nombre de Whitney W_i vaut $2^{n-i} \binom{n}{i}$.

Lemme [11] Soient F_1 et F_2 deux faces de Q_n telles que $F_1 \leq F_2$. Si le rang de F_1 (resp. de F_2) est l (resp. u) alors l'intervalle $[F_1, F_2]$ est isomorphe au treillis booléen B_{u-l} .

1.3 Opérations sur les posets

1.3.1 Somme directe

La *somme directe* ou *l'union disjointe* de deux posets P et Q et le poset $P+Q$ sur l'union $P \cup Q$ tel que $x \leq y$ dans $P+Q$ si $x, y \in P$ et $x \leq_P y$ ou $x, y \in Q$ et $x \leq_Q y$. La somme directe de P avec lui-même n fois est notée par nP . En particulier une antichaîne est isomorphe à $n1$.

Exemple

Soient P et Q les posets représentés dans la Figure 7, ci dessous :

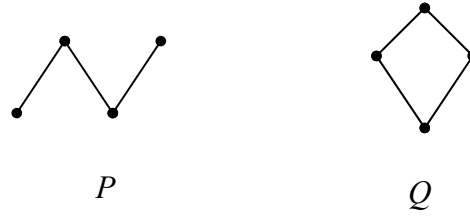


Figure 7.

La Figure 8 représente le poset $P+Q$

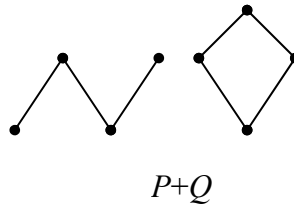


Figure 8.

1.3.2 Somme linéaire

La *somme linéaire* de deux posets P et Q est le poset $P\oplus Q$ sur l'union $P\cup Q$ tel que $x \leq y$ dans $P\oplus Q$ si $(x,y \in P \text{ et } x \leq_P y)$ ou $(x,y \in Q \text{ et } x \leq_Q y)$ ou $(x \in P \text{ et } y \in Q)$. Par exemple, une chaîne de longueur n est isomorphe à $1 \oplus \dots \oplus 1$ (n fois). Pour tracer le diagramme de Hasse de $P\oplus Q$, on trace d'abord celui de P , puis au dessus de lui on trace celui de Q et on relie tous les éléments maximaux de P à tous les éléments minimaux de Q .

Considérons les posets P et Q de la Figure 7, La Figure 9 représente le diagramme de Hasse de $P\oplus Q$.

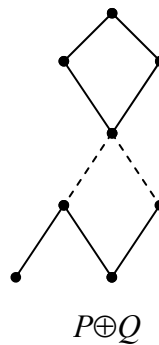


Figure 9.

1.3.3 Poset série-parallèle

Un *poset série-parallèle* P est un poset construit seulement à partir des singletons, ou encore, P peut être décomposé en singletons en utilisant la somme directe (+) ou la somme linéaire (\oplus). P est caractérisé par la non existence de sous poset isomorphe à N où N est le sous ensemble à quatre éléments $\{x,y,z,t\}$ tel que les seules relations de comparabilité sont $x < y > z < t$.

La Figure 10 représente le poset série-parallèle suivant : $(1 \oplus 1) \oplus ((1 \oplus 1) + 1 + 1)$.

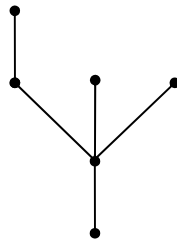


Figure 10.

1.3.4 Produit direct

Le *produit direct* (ou *cartésien*) de deux posets P et Q est le poset $P \times Q$ sur l'ensemble $\{(x,y) : x \in P \text{ et } y \in Q\}$ tel que $(x,y) \leq (x',y')$ dans $P \times Q$ si $x \leq_P x'$ et $y \leq_Q y'$. Le produit direct de P avec lui-même n fois est notée par P^n . Pour tracer le diagramme de Hasse de $P \times Q$, on trace d'abord celui de P , on remplace chaque élément x de P par une copie Q_x de Q , et on relie les éléments correspondants de Q_x et Q_y si x et y sont reliés dans P .

Soient P et Q les posets représentés dans la Figure 11.

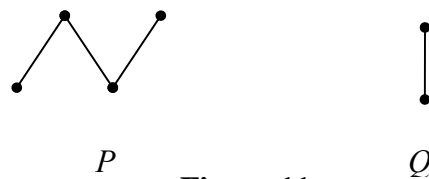


Figure 11.

La Figure 12 représente le poset $P \times Q$

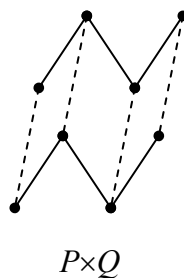


Figure 12.

1.4 Concepts généraux sur les graphes

1.4.1 Définitions préliminaires

Un *graphe* $G = (V, E)$ consiste en un ensemble fini noté par V et une collection E de paires non ordonnées (u, v) d'éléments distincts de V . Chaque élément de V est appelé *sommet* et chaque élément de E est appelé *arête*. Le cardinal de V est appelé *ordre* de G , et le cardinal de E est appelé *taille* de G . Une *arête* $e \in E$ est un couple de sommets $\{u, v\}$ notée par $e = uv$ ou bien $e = vu$, où u et v sont les extrémités de e . On dira dans ce cas que u et v sont *adjacents* et que e est *incidente* à u et v . Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe est dit *simple* s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Le *voisinage ouvert* d'un sommet v est $N(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$ et le *voisinage fermé* de v est $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le voisinage ouvert est $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ et le voisinage fermé est $N[S] = N(S) \cup S$. Le *degré* d'un sommet $v \in V$ noté $deg(v)$ est égal au cardinal de son voisinage ouvert. Un sommet de degré nul sera dit un *sommet isolé* et un sommet de degré égal à un sera dit *pendant*. On notera par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le *degré maximum* et *minimum* dans G respectivement.

1.4.2 Quelques graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le *sous graphe induit par S* noté par $\langle S \rangle$ est le graphe ayant S pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans S . Pour un sous-ensemble $U \subseteq E$ le *graphe partiel* de G défini par U noté G_U est le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et U .

Le graphe *complémentaire* de G noté \overline{G} est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est dans \overline{G} si elle n'est pas dans G .

Une *chaîne* P_k dans un graphe G est une séquence finie de sommets v_1, v_2, \dots, v_k telle que pour tout i , $1 \leq i \leq k-1$, $e_i = v_i v_{i+1} \in E$. L'entier $k-1$ représente la longueur de P_k (au sens des arêtes). Un *cycle* est une chaîne dont les deux extrémités coïncident. Un *cycle élémentaire* ne contient pas d'autres cycles.

La *distance* entre deux sommets x et y d'un graphe G notée $d(x,y)$ est la longueur de la plus courte chaîne joignant x et y .

Un graphe est dit *connexe* si pour toute paire de sommets du graphe il existe une chaîne les reliant. Une *composante connexe* d'un graphe est un sous graphe maximal (au sens de l'inclusion) connexe.

Un graphe G est dit *complet* si toute paire de sommets de G est liée par une arête. Il est noté K_n si n est l'ordre de G . L'ensemble des sommets d'un sous graphe complet est appelé *clique*.

Une *partition* des sommets d'un graphe $G = (V,E)$ est une famille disjointe d'ensembles de sommets telle que leur union est V .

Un graphe est dit *biparti* si l'on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que les sous graphes $\langle V_1 \rangle$ et $\langle V_2 \rangle$ ne contiennent aucune arête. Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycles de longueur impair. Un graphe *biparti complet*, $G = (V_1 \cup V_2, E)$, est noté $K_{p,q}$ avec $p = |V_1|$ et $q = |V_2|$.

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle. Une *forêt* est un graphe où chaque composante connexe est un arbre.

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré k est appelé un graphe *k-régulier*. Ainsi les cycles élémentaires C_n sont des graphes 2-réguliers.

Soient G un graphe et C un sous-graphe de G ; C est un cycle hamiltonien de G si C est un cycle du même ordre que G . Un graphe *hamiltonien* est un graphe qui contient un cycle hamiltonien.

Un *sous-graphe recouvrant* d'un graphe G est un sous-graphe contenant tous les sommets de G . Un *arbre recouvrant* d'un graphe est un sous-graphe recouvrant qui est un arbre.

Deux graphes sont dits *isomorphes* s'il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux graphes telle que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes si et seulement si leurs images correspondantes par la fonction bijective sont adjacentes dans l'autre graphe.

Si deux graphes sont isomorphes alors ils ont les mêmes propriétés. Ces propriétés communes sont appelées *invariants* de graphes. Les nombres de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe.

1.5 Concepts généraux sur les hypergraphes

Les *hypergraphes* sont des objets mathématiques généralisant la notion de graphes, ils furent introduits par *Claude Berge* en 1960. Plus précisément, les arêtes ne relient plus un ou deux sommets, mais un nombre quelconque de sommets.

Les hypergraphes ont des applications dans tous les domaines utilisant la théorie des graphes comme la résolution de problèmes de satisfaction de contraintes, traitement d'images, optimisation d'architecture réseaux, etc.

Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini et $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_m)$ une famille des parties de X vérifiant : $E_i \neq \emptyset, i=1, \dots, m$, et $\bigcup_{i=1}^m E_i = X$.

Le couple $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ s'appelle *hypergraphe*, ses *sommets* sont les *éléments* de X et ses *arêtes* sont les éléments de E .

Si toute arête de \mathcal{H} a au plus deux éléments, l'hypergraphe sera appelé un *graphe*. Deux sommets x et y de \mathcal{H} sont dits *adjacents* s'il existe une arête de E qui les contienne et deux arêtes sont dites *adjacentes* si leur intersection est non vide.

Rang d'un hypergraphe

On appelle *rang* d'un hypergraphe le nombre maximal de sommets d'une arête :

$$\text{Rang}(\mathcal{H}) = \text{Max}_{i \in \{1, \dots, m\}} |E_i|.$$

Hypergraphe dual

Le dual $\mathcal{H}^* = (X, \mathcal{E}^*)$ de \mathcal{H} est l'hypergraphe dont les sommets sont les points e_1, \dots, e_m (représentant respectivement les arêtes E_1, \dots, E_m de \mathcal{H}) et ses arêtes sont les sous ensembles X_1, \dots, X_n (représentant respectivement les sommets x_1, \dots, x_n de \mathcal{H}) où pour tout j , $X_j = \{e_i : x_j \in E_i\}$.

Exemple

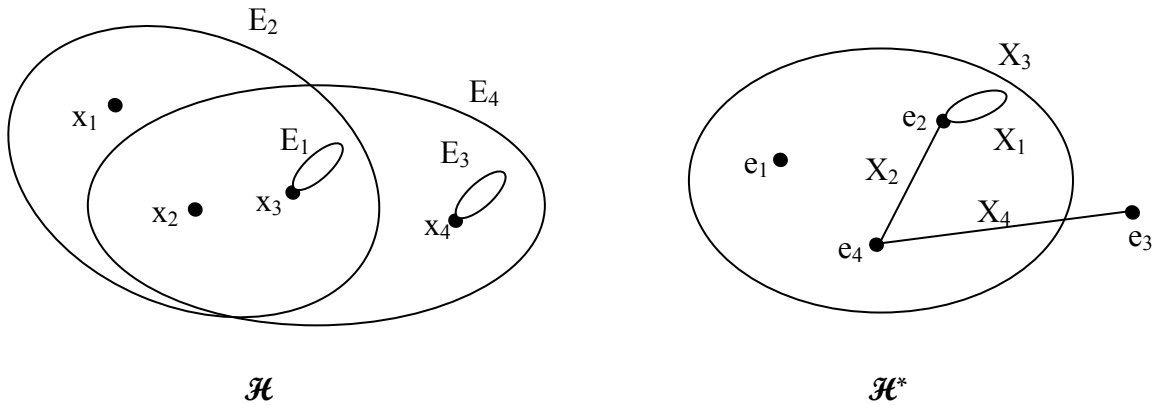


Figure 13.

Line graphe ou graphe représentatif des arêtes

Le *line graphe* ou le *graphe représentatif des arêtes* de l'hypergraphe \mathcal{H} est un graphe simple noté $L(\mathcal{H})$ dont les sommets sont les arêtes de \mathcal{H} et deux sommets sont adjacents dans $L(\mathcal{H})$ si les arêtes correspondantes dans \mathcal{H} ont au moins un sommet en commun.

1.6 Hypergraphe des intervalles d'un poset

Soit P un poset et $I(P)$ l'ensemble de ses intervalles maximaux. L'hypergraphe $\mathcal{H}(P) = (P, I(P))$ dont les sommets sont les éléments de P et dont les arêtes sont les intervalles maximaux de P est dit *hypergraphe des intervalles* de P . Notons par $\mathcal{H}^*(P)$ son dual.

Pour un poset gradué de rang $r(P)$, nous noterons par $P_{l,u}$ le sous poset induit par l'union des niveaux consécutifs $\cup_{i=l}^u N_i$ de P où l et u sont deux entiers tels que $0 \leq l < u \leq r(P)$. L'hypergraphe de ses intervalles maximaux sera noté brièvement par $\mathcal{H}_{l,u}$.

1.6.1 Graphe représentatif des intervalles d'un poset

Soit P un poset. Le graphe représentatif des intervalles de P , noté $G(P)$, est le graphe dont les sommets sont les éléments de P et deux sommets sont adjacents si et seulement si ils appartiennent à un même intervalle de P . Il s'agit en fait du graphe représentatif des arêtes de $\mathcal{H}^*(P)$. Ainsi, $G(P) = L(\mathcal{H}^*(P))$.

Exemple

Soit le poset P représenté dans la Figure 14. Les intervalles maximaux sont :

$I_1 = [x_1, x_5] = \{x_1, x_3, x_5\}$, $I_2 = [x_2, x_5] = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $I_3 = [x_2, x_6] = \{x_2, x_4, x_6\}$.

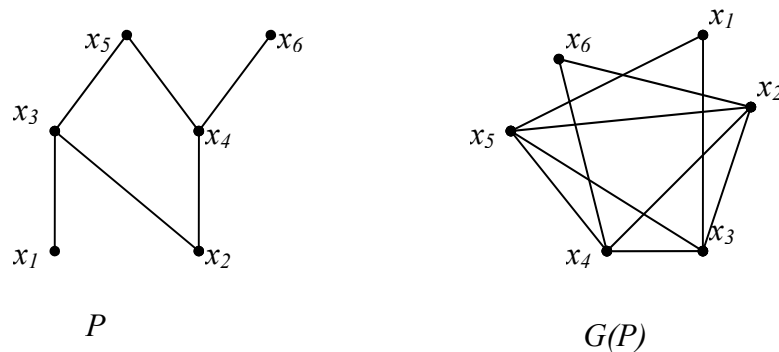


Figure 14.

1.7 Introduction à la théorie de la complexité

La théorie de la complexité s'intéresse à l'étude formelle de la *difficulté* des problèmes d'optimisation en informatique. Elle se distingue de la théorie de la calculabilité qui s'attache à savoir si un problème peut ou pas être résolu par un ordinateur. La théorie de la complexité se concentre donc sur les problèmes qui peuvent effectivement être résolus, la question étant de savoir s'ils peuvent être résolus efficacement ou pas en se basant sur une estimation (théorique) des *temps de calcul* et des besoins en *mémoire informatique*.

1.7.1 Généralités

Dans la théorie de la complexité, un problème est formalisé de la manière suivante : un ensemble de données (ou instance) en entrée, et une question sur ces données (pouvant demander éventuellement un calcul). La théorie de la complexité ne traite que des

problèmes de décision binaire (ou problèmes de *reconnaissance*), c'est-à-dire en posant une question dont la réponse est soit *oui* soit *non*. Cependant, on étend la notion de complexité aux problèmes d'optimisation. En effet, il est facile de transformer un problème d'optimisation en un problème de décision. Si par exemple, on cherche à optimiser une valeur n , on traite le problème de décision qui consiste à comparer n à un certain k . En traitant plusieurs valeurs de k , on peut déterminer une valeur optimale.

1.7.2 Algorithme déterministe

Un algorithme déterministe effectue toujours un seul calcul à la fois. Ce calcul est constitué d'étapes élémentaires. A chacune de ces étapes, pour un état donné de la mémoire, l'action élémentaire effectuée sera toujours la même. De ce fait, l'ordinateur est considéré comme étant déterministe.

1.7.3 Algorithme non-déterministe

Un algorithme non-déterministe est une variante purement théorique de l'algorithme déterministe. Il effectue, à chaque étape de son calcul, un *choix non-déterministe*; il a le choix entre plusieurs actions, et il en effectue une (sans spécifier comment) tel que son choix conduit toujours à la réponse *oui*. En quelque sorte, il devine toujours juste.

1.7.4 Classes de complexité

La théorie de la complexité repose sur la définition de classes de complexité qui permettent de classer les problèmes en fonction de la complexité des algorithmes qui existent pour les résoudre. Parmi ces classes nous citons deux qui nous intéressent : la classe P et la classe NP.

1.7.4.1. Classe P :

Un problème de décision est dans P s'il peut être décidé par un algorithme déterministe en un temps *polynomial* par rapport à la taille de l'instance. On dira alors qu'un tel algorithme est *efficace* et on qualifiera le problème de *polynomial*.

1.7.4.2. Classe NP :

La classe NP est la classe des problèmes de décision pour lesquels la réponse *oui* peut être décidée par un algorithme non-déterministe polynomial, c.à.d qu'il est facile, pour une solution donnée, de vérifier en un temps polynomial, par rapport à la taille de l'instance, si celle-ci répond au problème; mais que le nombre de solutions à tester pour résoudre le problème est exponentiel par rapport à la taille de l'instance. Le non-déterminisme permet de masquer la taille exponentielle des solutions à tester tout en permettant à l'algorithme de rester polynomial.

1.7.4.2.1 Problème NP-complet

On dit qu'un problème est NP-complet si

- il est dans NP,
- il est NP-dur, c.à.d tout autre problème dans NP est *réductible* à lui.

"Réductible" veut dire que pour tout problème q , il existe un algorithme déterministe qui transforme des instances q en des instances p , tel que la réponse à p est *oui* ssi la réponse à q est *oui*. Pour montrer qu'un problème p de NP est NP-complet, il suffit de montrer qu'un problème NP-complet se réduit de manière polynomiale à p .

Les problèmes NP-complets sont les problèmes les plus difficiles dans NP. Beaucoup de problèmes intéressants sont NP-complets et qu'on ne sait pas résoudre efficacement à cause du non déterminisme. Le problème $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ revient à savoir si on peut résoudre un problème NP-complet avec un algorithme polynomial.

On a trivialement $\mathbf{P} \subset \mathbf{NP}$ car un algorithme déterministe est un algorithme non déterministe particulier. En revanche la réciproque $\mathbf{NP} \subset \mathbf{P}$ (concluant à $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$) est l'un des problèmes ouverts les plus fondamentaux et intéressants en informatique théorique depuis 1970.

Un problème d'optimisation dans quelques graphes consiste à énumérer toutes les solutions du problème pour trouver l'optimum. Il faut trouver toutes les possibilités en temps raisonnable. Mais le nombre de possibilités varie avec la taille du graphe, plus il y a de sommets, plus il y a de possibilités. Dans ce cas, le nombre de possibilités augmente exponentiellement, ce qui donne un temps non raisonnable pour produire une solution, il est alors NP-complet car il ne peut être résolu en temps polynomial.

Le seul espoir possible pour ce type de problème est de construire un algorithme exact avec un temps d'exécution exponentiel assez bon. Le temps d'exécution peut atteindre 10^n , 2^n ou c^n pour une constante $c > 1$. Le meilleur temps à espérer est lorsque c est relativement petit.

Par ailleurs, l'une des avenues de recherche dans les problèmes de graphes NP-complets est de considérer leur complexité algorithmique lorsqu'ils sont restreints à des classes de graphes particuliers. Beaucoup d'algorithmes polynomiaux ont été construits dans ce contexte.

Ainsi, dans les Chapitres 2 et 3, nous verrons différentes classes de graphes pour lesquels des algorithmes en temps exponentiel et en temps polynomial ont été construits pour le nombre de domination et pour le nombre domotique.

1.8 Aperçu sur la domination

Le problème de domination survient dans l'étude de nombreux problèmes de localisation, comme la localisation optimale des hôpitaux, des écoles, des stations de radio,...etc. Il survient aussi dans des situations concernant la surveillance, affectation du personnel, communication et jeux,...etc.

Définition Soit $G=(V,E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble de sommets D de V est un *dominant* si tout sommet de $V-D$ est adjacent à au moins un sommet de D .

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. Nous citons par exemple :

- $D \subseteq V$ est un ensemble dominant si pour tout $x \in V-D$, $N(x) \cap D \neq \emptyset$.
- $D \subseteq V$ est un ensemble dominant si $\bigcup_{v \in D} N[v] = V$.
- Soit $f: V \rightarrow \{0,1\}$ tel que pour tout $v \in V$, $\sum_{u \in N[v]} f(u) \geq 1$. (f est appelée *fonction de domination*).

Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G est appelé *nombre de domination* et noté par $\gamma(G)$. Le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal de G est appelé *nombre de domination supérieur* et noté par $\Gamma(G)$.

Le problème de domination peut se formuler sous forme d'un programme linéaire à variables bivalentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_i = w(\min) \\ Ax \geq 1_n, x \in \{0,1\}^n \text{ où } A = A_G + I, A_G \text{ est la matrice d'adjacence du graphe et } I \text{ est} \\ \text{la matrice unité d'ordre } n. \end{array} \right.$$

Dans le graphe de la Figure 15, les noeud en noire forment un ensemble dominant.

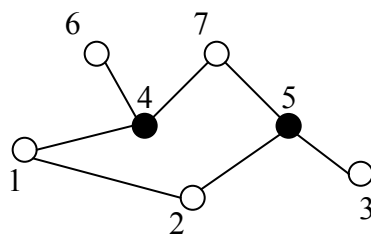


Figure 15.

Notons que si D est un ensemble dominant alors pour tout $D' : D \subseteq D'$, D' est un ensemble dominant. Un ensemble dominant D est minimal si D ne contient aucun autre ensemble dominant.

Un *sommet dominant* est un sommet qui constitue un ensemble dominant, c.à.d. un sommet adjacent à tous les autres sommets du graphe.

Une *partition domatique* de G est une partition des sommets de G en ensembles dominants. Le *nombre domatique* d'un graphe G , noté $d(G)$, est une partition maximum des sommets de G en ensembles dominants. Une telle partition existe toujours dans un graphe en considérant la partition grossière (voir Théorème 3.3, page 50).

Le nombre domatique peut être défini d'une façon équivalente par ce qu'on appelle la *coloration domatique*. Une *coloration domatique* d'un graphe G est une coloration des sommets de G avec la propriété que si x est un sommet arbitraire de G , alors pour chaque couleur différente de celle de x , il existe un sommet coloré avec cette couleur qui est adjacent à x (deux sommets portant la même couleur, peuvent être adjacents). L'ensemble de tous les sommets colorés par une même couleur représente une classe de la partition domatique. Ainsi le nombre domatique de G est le nombre maximal de couleurs dans la coloration domatique de G .

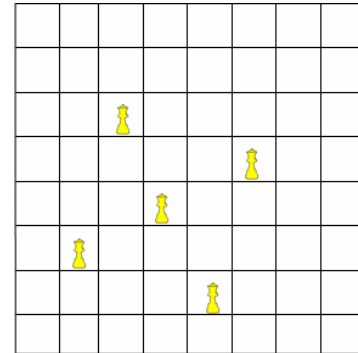
L'une des motivations pour l'étude de domination est la formation naturelle des paramètres de domination. Plusieurs paramètres de domination ont été formés en combinant la domination avec une autre propriété théorique P de graphe. Les paramètres peuvent être définis en imposant des conditions supplémentaires sur l'ensemble dominant D . Par exemple, imposer la condition que le sous-graphe induit par l'ensemble dominant D soit indépendant donne la domination indépendante. La domination totale exige que le sous-graphe induit par D ne contienne pas de sommets isolés. D'autres propriétés imposées sur l'ensemble dominant exigent que le sous graphe induit par D soit connexe, une clique ou possède un cycle hamiltonien.

Par ailleurs, la domination peut être généralisée à la k -uple domination qui signifie que chaque sommet en dehors de D possède au moins k voisins dans D .

L'application de la domination dans une large variété de champs a élargie sa popularité. On la trouve dans les réseaux de communication, réseaux informatiques, systèmes de surveillance, théorie de codage...,etc.).

Le concept de domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu : c'est en 1862, que *de Jaenisch* [37] posa le problème suivant :

Déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum dans un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [55].



Le problème des cinq reines

Figure 16.

En 1958, *Claude Berge* [6] donna une formulation théorique de la domination dans la théorie des graphes. Le nombre de domination s'appelait alors coefficient de stabilité externe noté $\beta(G)$. L'appellation actuelle du nombre de domination est due à *Ore* [97] en 1962 qui utilisa la notation $\delta(G)$ pour désigner le nombre de domination dans un graphe non orienté. A l'exception de quelques résultats, la domination n'a connue sa véritable expansion qu'après la parution de l'article de *Cockayne* et *Hedetniemi* [31] en 1977, où ils ont introduit la notation $\gamma(G)$ pour noter le nombre de domination.

En 1990, un numéro spécial de la revue *Discrete Mathematics* édité par *Hedetniemi* et *Laskar* [71] a été consacré entièrement à la domination dans les graphes. Depuis, le nombre de papiers de recherche sur la domination connaît une augmentation régulière.

On dénombre actuellement quelques 80 types de domination (certains ont été définis avec des applications pratiques) et plus de 1200 références dans le domaine.

Le problème du nombre de domination et du nombre domatique étant NP-complet pour les graphes quelconques [56], de vastes recherches ont été entreprises pour trouver des bornes pour ces nombres. Durant les deux chapitres suivants nous exposerons les résultats trouvés dans la littérature pour chacun de ces nombres.

CHAPITRE 2

LE NOMBRE DE DOMINATION D'UN GRAPHE

Dans ce chapitre, nous présentons des bornes pour le nombre de domination $\gamma(G)$ ainsi que des bornes en terme de paramètres graphiques et sur des graphes particuliers. Ensuite nous exposons les résultats sur la complexité algorithmique du problème de domination. Des résultats intéressants concernant la relation entre le nombre de domination $\gamma(G)$ et le nombre domatique $d(G)$ seront présentés à la fin du prochain chapitre.

2.1 Bornes en terme d'ordre du graphe

Une borne supérieure évidente pour le nombre de domination est le nombre de sommets existant dans le graphe. Comme au moins un sommet est nécessaire pour dominer un graphe, on a $1 \leq \gamma(G) \leq n$ pour tout graphe d'ordre n , où $\gamma(G)$ atteint la borne inférieure ssi G contient un sommet de degré $n-1$ et atteint la borne supérieure ssi $G = \overline{K_n}$, c.à.d, G est un ensemble de sommets isolés. Pour des graphes sans sommets isolés la borne supérieure est nettement améliorée par *Ore* dans le théorème suivant :

Théorème 2.1 [97] Si G ne contient pas de sommets isolés, alors $\gamma(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

La couronne $G_1 \circ G_2$ est le graphe formé à partir d'une copie de G_1 et $|V(G_1)|$ copies de G_2 pour lequel le $i^{\text{ème}}$ sommet de G_1 est adjacent à chaque sommet dans la $i^{\text{ème}}$ copie de G_2 . En particulier, $G = H \circ K_1$ est le graphe obtenu par une copie de H où chaque sommet de H est adjacent à un sommet pendent.

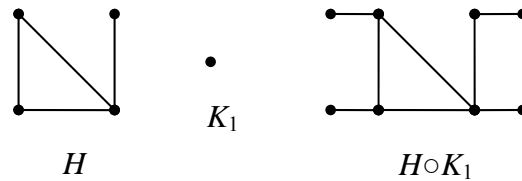
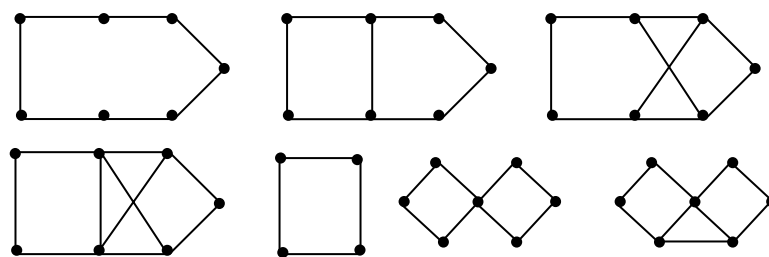


Figure 1.

Théorème 2.2 [99,50] Pour un graphe G d'ordre n pair et sans sommet isolé, $\gamma(G) = n/2$ ssi les composantes de G sont soit le cycle C_4 soit la couronne $H \circ K_1$ pour tout graphe connexe H .

En imposant des restrictions sur le graphe G , McCuaig et Shepherd [90] ont amélioré la borne supérieure.

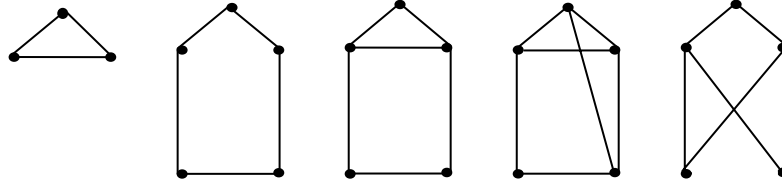
Théorème 2.3 [90] Si G est un graphe connexe avec $\delta(G) \geq 2$ et $G \notin \mathcal{A}$, alors $\gamma(G) \leq \frac{2n}{5}$.



Graphes dans la famille \mathcal{A}

Figure 2.

Lemme 2.4 [4] Si G est un graphe connexe avec $\delta(G) \geq 2$ et $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, alors $G \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.



Graphes dans la famille \mathcal{B}

Figure 3.

Lemme 2.5 [4] Si $G = (V, E)$ est un graphe connexe avec $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, alors il existe au plus un sommet pendant adjacent à chaque $v \in V$ sauf peut être pour un sommet qui peut être adjacent à exactement deux sommets pendants lorsque n est impair.

Dans le but de caractériser les graphes connexes avec $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, six classes de graphes ont été définies dans [1,106]:

Soient $\mathcal{G}_1 = \{C_4\} \cup \{G : G = H \circ K_1 \text{ ou } H \text{ est connexe}\}$ et $\mathcal{G}_2 = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} - \{C_4\}$

Pour tout graphe H , soit $S(H)$ l'ensemble des graphes connexes dont chacun peut être formé à partir de $H \circ K_1$ en ajoutant un nouveau sommet x et des arêtes joignant x à un ou plusieurs sommets de H . On définit alors

$$\mathcal{G}_3 = \bigcup_H S(H).$$

Soit y un sommet d'une copie de C_4 et pour $G \in \mathcal{G}_3$, soit $\theta(G)$ le graphe obtenu en reliant G à C_4 par l'arête xy , où x est le nouveau sommet ajouté en formant G . On définit alors

$$\mathcal{G}_4 = \{ \theta(G) : G \in \mathcal{G}_3 \}$$

Soient u, v, w une séquence de sommets dans un chemin P_3 . Pour tout graphe H , soit $\mathcal{P}(H)$ l'ensemble de graphes connexes qui peuvent être formés à partir de $H \circ K_1$ en joignant chacun de u et w à un ou plusieurs sommets de H . On définit alors

$$\mathcal{G}_5 = \bigcup_H \mathcal{P}(H).$$

Soit H un graphe et $X \in \mathcal{B}$. Soit $\mathcal{R}(H, X)$ l'ensemble des graphes connexes qui peuvent être formés à partir de $H \circ K_1$ en joignant chaque sommet de $U \subseteq V(X)$ à un ou plusieurs sommets de H tel que aucun ensemble avec moins de $\gamma(G)$ sommets de X domine $V(X) - U$. On définit alors $\mathcal{G}_6 = \bigcup_{H, X} \mathcal{R}(H, X)$.

Un exemple d'un graphe $G \in \mathcal{G}_6$ est donné dans la Figure 4. (Les sommets en noire forment un ensemble dominant de cardinalité minimum).

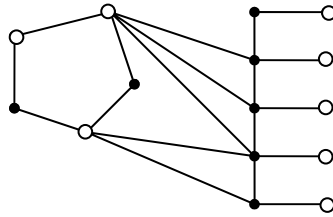


Figure 4. Graphe $G \in \mathcal{G}_6$ avec $U = \{u, v\}$

Théorème 2.6 [1,106] Un graphe connexe G satisfait $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ssi $G \in \mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^6 \mathcal{G}_i$.

Dans [109], *Reed* a encore amélioré la borne supérieure sur le nombre de domination en imposant des restrictions sur le degré minimum de G .

Théorème 2.7 [109] Si G est un graphe connexe de degré minimum 3, alors $\gamma(G) \leq \frac{3n}{8}$.

Un résultat due a *Cockayne, Ko et Shepherd* [33] concerne les graphes qui ne possèdent pas une étoile $K_{1,3}$ ou un réseau $K_3 \circ K_1$ comme sous graphe induit.

Théorème 2.8 [33] Si un graphe connexe G est sans étoile et sans réseau alors $\gamma(G) \leq \lceil n/3 \rceil$.

2.2 Bornes en terme d'ordre et de degré

Les bornes présentées dans cette section sont en terme du nombre de sommets et des degrés minimum et maximum.

Dans le résultat suivant, la borne supérieure est attribué à Berge et la borne inférieure est attribué a *Walikar, Acharya et Sampathkumar*.

Théorème 2.9 [6,123] Pour tout graphe G , $\left\lceil \frac{n}{1 + \Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G)$.

D'autres bornes supérieures ont été déterminées en terme du degré minimum du graphe.

Théorème 2.10 [19,20] Pour tout graphe G , $\gamma(G) \leq n \left[1 - \delta \left(\frac{1}{1 + \delta} \right)^{1 + \frac{1}{\delta}} \right]$.

Théorème 2.11 [28] Si G est un graphe sans sommets isolés, alors

$$\gamma(G) \leq n \left(1 - \prod_{k=1}^{\delta(G)+1} \frac{k}{k + 1/\delta(G)} \right).$$

En 1995, *Slater* donna une valeur exacte pour le nombre de domination.

Théorème 2.12 [115] Si G a une séquence de degrés $(\deg_1, \deg_2, \dots, \deg_n)$ avec $\deg_i \geq \deg_{i-1}$ alors $\gamma(G) = \min \{k : k + (\deg_1 + \deg_2 + \dots + \deg_k) \geq n\}$.

Une subdivision d'une arête uv est obtenu en supprimant l'arête uv et en ajoutant un nouveau sommet w et les arêtes uw et vw . Un 'wounded spider' est le graphe formé en subdivisant au plus $t-1$ des arêtes de l'étoile $K_{1,t}$ pour $t \geq 0$. Des exemples de 'wounded spider' incluent K_1 , l'étoile $K_{1,n-1}$, et la couronne $K_{1,t} \circ K_1$.

Théorème 2.13 [38] Pour tout arbre T , $\gamma(T) = n - \Delta(T)$ ssi T est un 'wounded spider'.

Flach et Volkmann ont donné une borne supérieure en terme de degré maximum et minimum de G et en terme d'ordre de G .

Théorème 2.14 [51] Pour tout graphe G , $\gamma(G) \leq \frac{1}{2} \left(n + 1 - (\delta(G) - 1) \frac{\Delta(G)}{\delta(G)} \right)$.

Un corollaire immédiat du théorème ci-dessus est dû à *Payan* :

Corollaire 2.15 [98] Si G est un graphe sans sommets isolés, alors

$$\gamma(G) \leq \frac{n+2-\delta(G)}{2}.$$

Marcu a donné une légère amélioration :

Théorème 2.16 [92] Si G est un graphe sans sommets isolés et $\gamma(G) \geq 3$ alors

$$\gamma(G) \leq \frac{n+1-\delta(G)}{2}.$$

Théorème 2.17 [2,3,98] Si G est un graphe sans sommets isolés, alors

$$\gamma(G) \leq \frac{n(1+\ln(\delta(G)+1))}{\delta(G)+1}.$$

Théorème 2.18 [3,98] Si G est un graphe sans sommets isolés, alors

$$\gamma(G) < \frac{n}{\delta(G)+1} \sum_{j=1}^{\delta(G)+1} 1/j.$$

Lemme 2.19 [26] Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$ ayant un unique sommet de degré $\Delta(G)$. Si $(n-\Delta(G)-1)(n-\delta(G)-2) < n-1$ alors $\gamma(G) \leq 2$.

2.3 Bornes en termes d'ordre et de taille du graphe

Nous donnons ici les bornes connues sur le nombre de domination en terme d'ordre, noté n , et de taille, noté m , du graphe considéré.

Le théorème suivant de *Vizing* donne une borne sur la taille d'un graphe G ayant un nombre de domination donné.

Théorème 2.20 [122] Si un graphe G vérifie $\gamma(G) \geq 2$ alors :

$$m \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(n-\gamma(G))(n-\gamma(G)+2) \right\rfloor.$$

Théorème 2.21 [113] Si un graphe G a $\gamma(G) \geq 2$ et $\Delta(G) \leq n - \gamma(G) - 1$, alors

$$m \leq \frac{1}{2}(n - \gamma(G))(n - \gamma(G) + 1).$$

Dans le résultat suivant la borne supérieure est un corollaire immédiat du Théorème de *Vizing* [122] et la borne inférieure a été donnée par *Berge* [6].

Une *galaxie* est une forêt dans laquelle chaque composante est une étoile.

Théorème 2.22 [67] Pour tout graphe G , $n - m \leq \gamma(G) \leq n + 1 - \sqrt{1 + 2m}$, de plus $\gamma(G) = n - m$ ssi G est une galaxie.

L'un des premiers théorèmes fondamentaux sur le nombre de domination est due à *Nieminen* :

Soit $\varepsilon_F(G)$ le nombre maximum d'arêtes pendantes dans une forêt recouvrante de G .

Théorème 2.23 [95] Pour tout graphe G , $\gamma(G) + \varepsilon_F(G) = n$.

2.4 Bornes en terme de degré, diamètre et girth

Deux sommets d'un graphe connexe G sont à distance p ssi la plus courte chaîne les reliant est de longueur p . Le diamètre de G est la distance maximum entre deux sommets de G , il est noté $diam(G)$.

Dans un graphe G de diamètre 2, le voisinage ouvert de tout sommet $v \in V(G)$ domine G , d'où le résultat suivant:

Théorème 2.24 [67] Si un graphe G vérifie $diam(G) = 2$, alors $\gamma(G) \leq \delta(G)$.

D'autres résultats incluant le diamètre ont été obtenu pour le nombre de domination.

Théorème 2.25 [67] Pour tout graphe connexe G , $\left\lceil \frac{diam(G) + 1}{3} \right\rceil \leq \gamma(G)$.

Théorème 2.26 [16] Si $\gamma(\overline{G}) \geq 3$ alors $diam(G) \leq 2$.

Théorème 2.27 [67] Si G est un graphe sans sommets isolés et $diam(G) \geq 3$ alors $\gamma(\overline{G}) = 2$.

Le *girth* $g(G)$ est la longueur du plus court cycle dans un graphe G . *Brigham* et *Dutton* ont obtenu plusieurs bornes incluant le paramètre $g(G)$.

Théorème 2.28 [18] Si un graphe G a $\delta(G) \geq 2$ et $g(G) \geq 5$, alors

$$\gamma(G) < \left\lceil \frac{n - \lfloor g(G)/3 \rfloor}{2} \right\rceil.$$

Théorème 2.29 [18] Pour tout graphe G

- (a) si $g(G) \geq 5$ alors $\gamma(G) \geq \delta(G)$.
- (b) si $g(G) \geq 6$ alors $\gamma(G) \geq 2(\delta(G)-1)$.

Théorème 2.30 [18] Si un graphe G vérifie $\delta(G) \geq 2$ et $g(G) \geq 7$, alors $\gamma(G) \geq \Delta(G)$.

2.5 Résultats du type Nordhaus-Gaddum

Les relations entre les paramètres graphiques sont toujours intéressantes. Un résultat du type *Nordhaus-Gaddum* est une borne inférieure ou supérieure sur la somme ou le produit d'un paramètre du graphe et de son complémentaire.

En 1956, l'article original de *Nordhaus* et *Gaddum* apparut [94] dans lequel ils ont donnés des bornes fortes sur la somme et le produit du nombre chromatique d'un graphe et de son complémentaire. Depuis, d'autres résultats ont été donnés pour plusieurs paramètres [41,64,73,58].

Notons que le nombre de *codomination* $\gamma(\overline{G})$ est le nombre de domination du graphe complémentaire \overline{G} .

En 1972 *Jaegar* et *Payan* [73] ont publié les premiers résultats du type Nordhaus-Gaddum concernant la domination.

Théorème 2.31 [73] Pour tout graphe G , $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n+1$ et $\gamma(G) \cdot \gamma(\overline{G}) \leq n$.

Cockayne et *Hedetniemi* ont déterminés l'égalité pour la borne supérieure.

Théorème 2.32 [31] Pour tout graphe G , $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n+1$ avec égalité ssi $G = K_n$ ou $G = \overline{K}_n$.

Laskar et Peters ont améliorés cette borne lorsque G et \overline{G} sont connexes.

Théorème 2.33 [85] Si G et \overline{G} sont connexes, alors $\gamma(G)+\gamma(\overline{G}) \leq n$ avec égalité ssi $G = P_4$.

Théorème 2.34 [73,99] Pour tout graphe G , $\gamma(G)+\gamma(\overline{G}) \leq n+1$, avec égalité ssi $G = K_n$ ou $G = \overline{K}_n$. De plus $\gamma(G).\gamma(\overline{G}) \leq n$, avec égalité ssi $\{\gamma(G),\gamma(\overline{G})\}=\{1,n\},\{2,n/2\},\{3,3\}$.

Il existe une variété d'autres résultats qui donnent des bornes supérieures en n ou en $n+1$ pour la somme de deux paramètres de domination pour des graphes en général. Cependant, parfois une simple restriction (par exemple G et \overline{G} n'ont aucun sommet isolé) suffit pour réduire considérablement la borne supérieure. Le théorème suivant améliore la borne sur $\gamma(G)+\gamma(\overline{G})$ pour les graphes G et \overline{G} lorsqu'ils n'ont aucun sommet isolé.

Théorème 2.35 [75] Si G et \overline{G} sont sans sommet isolé, alors $\gamma(G)+\gamma(\overline{G}) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 2$,

De plus l'égalité est vérifiée pour $n \neq 9$ ssi $\{\gamma(G),\gamma(\overline{G})\}=\{\lfloor n/2 \rfloor, 2\}$.

Corollaire 2.36 [4] Si G et \overline{G} sont sans sommet isolé, alors $\gamma(G)+\gamma(\overline{G}) = \lfloor n/2 \rfloor + 2$ ssi $G = K_3 \times K_3$ ou $\{\gamma(G),\gamma(\overline{G})\} = \{\lfloor n/2 \rfloor, 2\}$.

Théorème 2.37 [4] Soient G et \overline{G} sans sommet isolé.

- (i) Si G est connexe, alors $\gamma(G)+\gamma(\overline{G}) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 2$ ssi $G = K_3 \times K_3$ ou l'un des graphe G ou \overline{G} est dans \mathcal{G} , tel que $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^6 \mathcal{G}_i$.
- (ii) Si G est non connexe avec les composantes G_1, \dots, G_t ($t \geq 2$), alors $\gamma(G)+\gamma(\overline{G}) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 2$ ssi il existe au plus une composante G_i avec un nombre impair de sommets et pour tout $i = 1, \dots, t$, $G_i \in \mathcal{G}$.

Théorème 2.38 [67] Soit G un graphe et \bar{G} son complémentaire,

- si $\delta(G)$ et $\delta(\bar{G}) \geq 2$, alors $\gamma(G) + \gamma(\bar{G}) \leq \frac{2n}{5} + 3$.
- si $\delta(G)$ et $\delta(\bar{G}) \geq 3$, alors $\gamma(G) + \gamma(\bar{G}) \leq \frac{3n}{8} + 4$.

Le *degré de connexité* $\omega(G)$ d'un graphe G connexe est le plus petit nombre de sommets à supprimer pour déconnecter le graphe G .

Théorème 2.39 [16,125] Pour tout graphe G avec $\gamma(\bar{G}) \geq 3$, $\gamma(G) + \gamma(\bar{G}) \leq \omega(G) + 3$.

Théorème 2.40 [93] Si $G=(V,E)$ est un graphe sans sommet isolé et $\gamma(G) > 3$, alors $\gamma(G) + \gamma(\bar{G}) \leq n - \delta(G) + 2$.

Théorème 2.41 [93] Si $G=(V,E)$ est un graphe sans sommet isolé et $\gamma(\bar{G}) > 3$, alors $\gamma(G) + \gamma(\bar{G}) \leq \delta(G) + 3$.

Corollaire 2.42 [93] Si $G=(V,E)$ est un graphe sans sommet isolé tel que $\gamma(G) > 3$ et $\gamma(\bar{G}) > 3$, alors $\gamma(G) + \gamma(\bar{G}) \leq \lfloor (n + 5) / 2 \rfloor$.

2.6 Bornes en terme d'indépendance et de recouvrement

Le long de cette section, nous définirons quelques invariants de graphe ayant une relation avec le nombre de domination.

Un sous-ensemble $\Sigma \subseteq \mathcal{S}$ est dit *ensemble indépendant* ou *stable* de Γ si les sommets de Σ sont non adjacents deux à deux. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un ensemble stable maximal de Γ noté $i(G)$ (resp. $\beta_0(G)$) est appelé le nombre de domination stable ou nombre de domination total (resp. le nombre de stabilité) de Γ .

Proposition 2.43 [6] Un ensemble indépendant S est indépendant maximal ssi il est indépendant dominant.

Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est dit *irrédondant* si pour tout sommet $x \in S$, on a $N[x] - N[S - \{x\}] \neq \emptyset$. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un ensemble irrédondant maximal noté $ir(G)$ (resp. $IR(G)$) est appelé le *nombre d'irrédondance* (resp. le nombre d'*irrédondance supérieure*). De plus tout ensemble dominant minimal est un ensemble irrédondant.

En 1978, *Cockayne, Hedetniemi et Miller* [32] ont donné de très intéressantes bornes sur $\gamma(G)$. Ils ont établi la *célèbre chaîne d'inégalités* qui relie les six paramètres de domination pour tout graphe G :

$$ir(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G) \leq IR(G).$$

La caractérisation des graphes qui vérifient l'égalité dans une ou plusieurs de ces bornes a été l'objet de plusieurs recherches. L'un des problèmes les plus étudiés dans ce contexte est la caractérisation des graphes pour lesquels $\gamma(G) = i(G)$. *Allan et Laskar* [1] ont présentés une condition suffisante pour $\gamma(G) = i(G)$.

Théorème 2.44 [1] Si G est sans étoile, alors $\gamma(G) = i(G)$.

Comme tout line-graphe est sans étoile, alors

Corollaire 2.45 [67] Pour tout line-graphe $L(G)$ d'un graphe G , $\gamma(L(G)) = i(L(G))$.

Soit $S(G)$ le graphe de subdivision de G , obtenu à partir de G en subdivisant chaque arête de G .

Corollaire 2.46 [104] Pour tout graphe G , $\gamma(S(G)) = i(S(G))$.

Un *recouvrement par sommets* dans G est un ensemble de sommets qui couvre toutes les arêtes et un *recouvrement par arêtes* dans G est un ensemble d'arêtes qui couvre tous les sommets. La cardinalité minimum d'un recouvrement par sommets (resp. arêtes) est noté $\alpha_0(G)$ (resp. $\alpha_1(G)$).

Un *couplage* dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes non incidentes deux à deux. On notera par $\beta_1(G)$ la taille maximale d'un couplage dans G . Le couplage est dit parfait dans G si $\beta_1(G)=n/2$.

Dans [67] il a été observé que si G est un graphe sans sommet isolé, alors $\gamma(G) \leq \min\{\alpha_0(G),\beta_0(G)\}$ et $\gamma(G) \leq \min\{\alpha_1(G),\beta_1(G)\}$.

Un 1-couplage maximal $M \subseteq E$ est *2-maximal* s'il n'est pas possible de supprimer une arête de M et d'ajouter deux autres pour produire un autre couplage. On note par $\beta_2(G)$ la cardinalité minimum d'un 2-couplage maximal de G . Par exemple, considérons la chaîne $P_4 = v_1, v_2, v_3, v_4$, l'arête $v_2 v_3$ est un 1-couplage maximal de P_4 mais elle n'est pas 2-maximal puisqu'en supprimant $v_2 v_3$ et en rajoutant $v_1 v_2$ et $v_3 v_4$ nous obtenons un autre couplage.

Théorème 2.47 [67] Si G est un graphe sans sommet isolé, alors $\gamma(G) \leq \beta_2(G)$.

Corollaire 2.48 [67] Si G est un graphe sans sommet isolé, alors

$$\gamma(G) \leq \frac{\alpha_1(G) + \beta_2(G)}{2} \leq \frac{\alpha_1(G) + \beta_1(G)}{2} = \frac{n}{2}.$$

Corollaire 2.49 [67] Si G est un graphe sans sommet isolé, alors

$$\gamma(G) \leq \min\{\alpha_1(G),\beta_2(G)\}.$$

2.7 Domination et nombre chromatique

Une *coloration* d'un graphe G est une affectation des couleurs aux sommets de G de telle manière que deux sommets adjacents quelconques ont des couleurs différentes. Le *nombre chromatique* $\chi(G)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour une coloration de G .

Gernert [57] a montré que $\gamma(G) + \chi(G) \leq n+1$. Il a aussi considéré le produit de $\gamma(G)$ et $\chi(G)$.

Théorème 2.50 [57] Pour tout graphe connexe G avec $n \geq 5$, $\gamma(G) \cdot \chi(G) \leq \frac{n^2}{4}$. L'égalité est satisfaite ssi G est la couronne $K_{2k} \circ K_1$.

Topp et *Vokmann* ont aussi exploré le produit de $\gamma(G)$ et $\chi(G)$.

Théorème 2.51 [117] Si G est un graphe connexe avec $\delta(G) \geq 2$, alors

$$\gamma(G) \cdot \chi(G) \leq \frac{\delta(G)}{8 \cdot (\delta(G) - 1)} (n + 1)^2.$$

2.8 Bornes sur des classes de graphes particuliers

2.8.1 Graphes avec $\gamma(G) = \gamma(\bar{G})$

Proposition 2.52 [17] Si $\gamma(G) = \gamma(\bar{G})$, alors $\gamma(G) \leq \sqrt{n}$.

Notons qu'un graphe G vérifie $\gamma(G) = \gamma(\bar{G}) = 1 = \sqrt{n}$ ssi $G \cong K_1$ et vérifie $\gamma(G) = \gamma(\bar{G}) = 2 = \sqrt{n}$ ssi G est la chaîne P_4 ou le cycle C_4 .

Payan et *Xuong* [99] ont prouvé que le seul graphe pour lequel $\gamma(G) = \gamma(\bar{G}) = 3 = \sqrt{n}$ est le graphe $K_3 \times K_3$.

Proposition 2.53 [17] Si G est un graphe non trivial pour lequel $\gamma(G) = 1$, alors \bar{G} est non connexe et $\gamma(\bar{G}) \geq 2$.

Brigham, *Chinn* et *Dutton* [16] ont obtenu une relation intéressante entre le diamètre et le nombre de codomination d'un graphe.

Théorème 2.54 [16] Si $\gamma(\bar{G}) \geq 3$, alors $diam(G) \leq 2$.

La réciproque a été établie dans [62].

Théorème 2.55 [62] Si G ne contient pas de sommet isolé et $diam(G) \geq 3$ alors $\gamma(\bar{G}) = 2$.

Le résultat suivant est obtenu de l' Proposition 2.54 et des Théorèmes 2.54 et 2.55

Théorème 2.56 [17] Si G ne contient pas de sommet isolé et $\gamma(G) = \gamma(\bar{G})$, alors soit $\gamma(G) = \gamma(\bar{G}) = 2$ soit $diam(G) = diam(\bar{G}) = 2$.

Lemme 2.57 [17] Soit G un graphe qui ne contient pas de sommet isolé. Alors, G est non connexe et $\gamma(G) = \gamma(\overline{G})$ ssi G a exactement deux composantes connexes G_1 et G_2 , avec $\gamma(G_1) = \gamma(G_2) = 1$.

Soit $N(v)$ le voisinage ouvert de v dans G . Le *lien* d'un sommet v est le sous graphe induit $\langle N(v) \rangle$.

Lemme 2.58 [17] Pour un graphe G de diamètre 2, $\gamma(\overline{G})=2$ ssi il existe un sommet dans G qui a un sommet isolé dans son lien.

Théorème 2.59 [69] Si G est un graphe connexe, alors $(1+diam(G))/3 \leq \gamma(\overline{G})$.

Théorème 2.60 [17] Si G et \overline{G} sont connexes, alors $\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) = 2$ ssi G et \overline{G} vérifient l'une des deux propriétés :

- 1) Le diamètre vaut 3,4 ou 5.
- 2) Le diamètre vaut 2 et il existe un sommet $v \in G$ avec un sommet isolé dans son lien.

Corollaire 2.61 [17] Les cycles C_n et les chemins P_n vérifient $\gamma(G) = \gamma(\overline{G})$ ssi $n = 4,5$ ou 6.

Corollaire 2.62 [17] Si G et \overline{G} sont connexes et $\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) \geq 2$, alors $2 \leq diam(G)$ et $diam(\overline{G}) \leq 5$.

Lemme 2.63 [17] Si $\gamma(\overline{G}) = k \geq 2$, alors les sommets de tout sous ensemble $S \subset V$ où $|S| \leq k-1$ ont un voisin en commun dans G .

Corollaire 2.64 [17] Si $\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) \geq 2$, alors tout K_i , $1 \leq i \leq \gamma(G)-1$, est contenu dans un certain K_{i+1} .

Lemme 2.65 [17] Si $\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) \geq 3$, alors $3 \leq \gamma(G) \leq \omega(G) \leq \delta(G)$.

Théorème 2.66 [15] Si $\gamma(\overline{G}) \geq 3$, alors $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq \omega(G) + 3$.

Théorème 2.67 [17] Si $\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) \geq 3$, alors G contient C_4 .

Théorème 2.68 [17] Si G est un graphe r -régulier pour lequel $\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) \geq 3$, alors

$$\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) \leq \frac{r+3}{2}.$$

Soient X un ensemble de sommets non vide et $N_X = \{y / y \in \bigcap_{x \in X} N(x) - X\}$.

Posons $n_X = |N_X|$.

Théorème 2.69 [17] Si $\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) \geq 2$, alors pour tout ensemble X à $t \geq 1$ sommets, $n_X \geq (\gamma(G)-1)^2 - t(\gamma(G)-1)+1$.

Corollaire 2.70 [17] Si $\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) \geq 2$, alors $\gamma(G) \leq \frac{3}{2} + \sqrt{\delta(G) - 3/4}$.

Corollaire 2.71 [17] Si $\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) \geq 2$, alors $\gamma(G) \leq 2 + \sqrt{\omega(G) - 1}$.

Corollaire 2.72 [17] Si $\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) \geq 2$, alors $\gamma(G) \leq 2 + \sqrt{\delta(G)(\Delta(G) - 1)/(n - 1)}$.

2.8.2 Produit de graphe et conjecture de Vizing

Le *produit cartésien* de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ est le graphe $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, E)$ où $E = \{(a,c)(a,d) : a \in V_1 \text{ et } \{c,d\} \in E_2\} \cup \{(a,c)(b,c) : \{a,b\} \in E_1 \text{ et } c \in V_2\}$.

2.8.2.1 Conjecture de Vizing

En 1963, *Vizing* [120] a suggéré le problème de déterminer une borne inférieure pour le nombre de domination d'un produit de graphes en terme des nombres de domination de ses facteurs G et H . Plus tard il a présenté la conjecture suivante :

Conjecture 2.73 [121] Pour tout graphes G et H , on a

$$\gamma(G \times H) \geq \gamma(G) \cdot \gamma(H).$$

En 1979, *Barcalkin* et *German* ont prouvé que la Conjecture de *Vizing* est vraie pour une large classe de graphes.

Théorème 2.74 [5] Si K est un sous-graphe recouvrant d'un graphe décomposable G où $\gamma(K) = \gamma(G)$, alors pour tout graphe H , $\gamma(K \times H) \geq \gamma(K) \cdot \gamma(H)$.

Les deux théorèmes suivants représentent les cas où la Conjecture de *Vizing* est vérifiée pour toute paire G_1, G_2 de graphes δ -réguliers.

Théorème 2.75 [27] Si G_1 et G_2 sont deux graphes δ -réguliers avec $\delta \geq 27$ ou $\delta \leq 3$ alors la Conjecture de *Vizing* est vérifiée pour le couple G_1, G_2 .

Théorème 2.76 [27] Si G_1 et G_2 sont deux graphes δ -réguliers d'ordre n_1 et n_2 respectivement avec $n_1, n_2 \leq 16$ alors la conjecture de *Vizing* est vérifiée pour le couple G_1, G_2 avec l'exception possible $n_1=n_2=16$ et $\delta=5$.

Théorème 2.77 [27] Soient G_1 et G_2 deux graphes d'ordre n_1 et n_2 et de degré minimum δ_1 et δ_2 respectivement. Si $n_1, n_2 \leq n$ et $\delta_1, \delta_2 \geq \sqrt{n \ln n}$, alors la conjecture de *Vizing* est vérifiée pour le couple G_1, G_2 .

Soit P_k une chaîne de longueur k . Le produit cartésien $P_j \times P_k$ est appelé produit de chaînes. Le problème du nombre de domination est NP-complet pour les sous graphes de produit de chaînes [8,74]. Cependant *Hare* et *Hedetniemi* [65] ont développé un algorithme linéaire pour résoudre ce problème pour le produit $P_j \times P_k$ pour tout j .

Le nombre de domination pour le produit de chaînes $P_j \times P_k$ a été déterminé pour des petites valeurs de j . *Jacobson* et *Kinch* [72] ont établi des valeurs exactes pour $j=1,2,3,4$ et tout k . De plus *Chang* et *Clark* [22] ont déterminé $\gamma(P_j \times P_k)$ pour $j=5,6$.

$$\gamma(P_1 \times P_k) = \left\lfloor \frac{k+2}{3} \right\rfloor, k \geq 1;$$

$$\gamma(P_2 \times P_k) = \left\lfloor \frac{k+2}{2} \right\rfloor, k \geq 1;$$

$$\gamma(P_3 \times P_k) = \left\lfloor \frac{3k+4}{4} \right\rfloor, k \geq 1;$$

$$\gamma(P_4 \times P_k) = \begin{cases} k+1 & k = 1,2,3,5,6,9 \\ k & \text{sin on pour } k \geq 1 \end{cases};$$

$$\gamma(P_5 \times P_k) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{6k+6}{5} \right\rfloor & k = 2,3,7 \\ \left\lfloor \frac{6k+8}{5} \right\rfloor & \text{sin on pour } k \geq 1 \end{cases} ;$$

$$\gamma(P_6 \times P_k) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{10k+10}{7} \right\rfloor & k \geq 6 \text{ et } k \equiv 1 \pmod{7}, \\ \left\lfloor \frac{10k+12}{10} \right\rfloor & \text{sin on pour } k \geq 4. \end{cases}$$

Théorème 2.78 [30]

$$(1/5)(k^2+k-3) \leq \gamma(P_k \times P_k) \leq \begin{cases} (1/5)(k^2+4k-16) & k = 5t-2 \\ (1/5)(k^2+4k-17) & k = 5t-1 \\ (1/5)(k^2+4k-20) & k = 5t, \quad t \geq 2 \\ (1/5)(k^2+4k-20) & k = 5t+1 \\ (1/5)(k^2+4k-17) & k = 5t+2 \end{cases}$$

Le nombre de domination pour le produit cartésien de cycles est étudié dans [78].

2.8.3 Graphes planaires

Un graphe est planaire s'il peut être tracé sur un plan sans que ses arêtes ne s'intersectent. *MacGillivray* et *Seyffarth* ont étudié le problème du nombre de domination dans les graphes planaires avec un petit diamètre.

Théorème 2.79 [89] Si G est un graphe planaire avec $diam(G)=2$ alors $\gamma(G) \leq 3$.

Théorème 2.80 [89] Si G est un graphe planaire avec $diam(G)=3$ alors $\gamma(G) \leq 10$.

2.8.4 Graphes factorés

Soient G_1, G_2, \dots, G_t des graphes définis sur le même ensemble de sommets V avec des arêtes disjointes, alors $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_t$ représente le graphe avec l'ensemble de sommets V et l'ensemble d'arêtes $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \dots \cup E(G_t)$. Les graphes G_1, G_2, \dots, G_t sont appelés une t -factorisation de G .

Un cas particulier de la 2-factorisation d'un graphe complet K_n est simplement une factorisation de K_n en un graphe G et son complémentaire.

Goddard, Henning et Swart [58] ont étendu les résultats de types Nordhaus-Gaddum pour un graphe complet factoré en au moins deux graphes.

Théorème 2.81 [58] Soit $s \geq 3$ un entier et $G_1 \oplus G_2 = K_{s,s}$, alors

$$5 \leq \gamma(G_1) + \gamma(G_2) \leq 2s+2 \text{ et } 6 \leq \gamma(G_1)\gamma(G_2) \leq \lfloor (s/2 + 2)^2 \rfloor.$$

Théorème 2.82 [58] Si $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = K_n$, alors $\gamma(G_1) + \gamma(G_2) + \gamma(G_3) \leq 2n+1$.

Théorème 2.83 [58] Si $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = K_n$, alors la valeur maximum du produit $\gamma(G_1)\gamma(G_2)\gamma(G_3)$ est $n^3 / 27 + \theta(n^2)$.

c.à.d, il existe deux constantes c_1 et c_2 tel que la valeur maximum du triple produit reste entre $n^3 / 27 + c_1 n^2$ et $n^3 / 27 + c_2 n^2$.

2.8.5 Graphes cubiques

Notons qu'un *graphe cubique* est un graphe 3-régulier.

Reed [109] a conjecturé que le nombre de domination de tout graphe connexe cubique est au plus $\lceil n/3 \rceil$. Dans [79,116] cette conjecture a été désapprouvée.

Théorème 2.84 [79] Il existe une séquence $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ de graphes connexes cubiques telle que pour tout k , $|V(G_k)| = 46k$ et $\gamma(G_k) \geq 16k$, ainsi $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma(G_k)}{|V(G_k)|} \geq \frac{8}{23}$.

Théorème 2.85 [116] Il existe une séquence $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ de graphes connexes cubiques tel que pour tout k , $|V(G_k)| = 26k$ et $\gamma(G_k) \geq 9k$, ainsi $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma(G_k)}{|V(G_k)|} \geq \frac{9}{26}$.

Théorème 2.86 [116] Il existe une séquence $\{G'_l\}_{l=1}^{\infty}$ de graphes connexes cubiques tel que pour tout l , $|V(G'_l)| = 46l+34$ et $\gamma(G'_l) \geq 16l+12$, ainsi $\frac{\gamma(G'_l)}{|V(G'_l)|} > \frac{8}{23}$. De plus G'_l est un graphe connexe cubique de 80 sommets avec $\frac{\gamma(G'_l)}{|V(G'_l)|} = \frac{1}{3} + \frac{1}{60}$.

D'autre part, *Kawarabayashi, Plummer et Saito* [77] ont donné une borne supérieure pour les graphes sans cycles de petite longueur.

Théorème 2.87 [77] Si G est un graphe connexe cubique avec n sommets ayant un girth $g(G) \geq 3$, alors $\gamma(G) \leq n \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9 \lceil g(G)/3 \rceil + 3} \right)$.

Ainsi, la conjecture de *Reed* est 'presque vraie' pour les graphes cubiques avec un large girth.

Théorème 2.88 [35] Si G est un graphe Hamiltonien cubique avec $(3k+1)$ sommets, alors $\gamma(G) \leq k$.

Théorème 2.89 [80] Soit $n > 8$. Si G est un graphe connexe cubique d'ordre n , alors $\gamma(G) \leq 4n/11$.

Théorème 2.90 [80] Si G est un graphe connexe cubique d'ordre n , alors

$$\gamma(G) \leq n \left(\frac{1}{3} + \frac{8}{(g(G))^2} \right)$$

2.8.6 Graphes Critiques

La domination dans les graphes a des applications dans les réseaux de communications, où les sommets représentent des ordinateurs et une arête représente un lien direct entre deux paires d'ordinateurs. Une considération importante dans la conception d'un réseau est l'habilité du réseau de fournir un service même s'il contient des composants défaillants. Le comportement d'un réseau lorsqu'une défaillance se produit peut être analysé en déterminant l'effet qu'engendre la suppression d'un sommet (resp. arête) sur le graphe sous-jacent. Dans [101] *Phillips, Haynes et Slater* se sont intéressés à l'effet de la suppression des sommets.

Un ensemble $P \subset V(G)$ est un *2-ensemble* ('2-packing'), ou juste un *ensemble* si la distance entre toute paire de sommets dans P est supérieure à 2. La cardinalité maximum d'un ensemble P de G est appelée le *nombre d'ensemble* et est notée

$\rho(G)$. Un assemblage P de cardinalité k est appelé $[k]$ -assemblage et un sommet $v \in P$ est appelé un sommet $[k]$ -assemblé.

Théorème 2.91 [67] Pour tout graphe G , $\rho(G) \leq \gamma(G)$.

Un graphe G est $(\gamma(G), t)$ -critique si $\rho(G) \geq t$ et pour tout $[t]$ -assemblage P , $\gamma(G-P) = \gamma(G) - t$.

Corollaire 2.92 [101] Pour tout graphe non trivial connexe $(\gamma(G), t)$ -critique, $t \leq \gamma(G) - 1$.

Théorème 2.93 [101] Si a et b sont deux entiers positifs avec $a > b$, alors il existe un graphe connexe G tel que $\gamma(G) = a$ et G est (a, b) -critique.

2.8.7 'Inflated graphe'

Schmidt et *Haynes* [114] ont défini une opération de graphe qui produit un graphe transformé, appelé *inflated-clique* ou 'inflated graphe'.

Soit $G = (V, E)$ un graphe, le 'inflated' graphe G_1 est construit en remplaçant chaque sommet $v \in V$ par une clique sur $\deg(v)$ sommets, c.à.d. si l'ensemble des sommets de G est $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ alors tout sommet v_i est remplacé par une clique R_i ayant $\deg(v_i)$ sommets et toute arête $v_i v_j \in E(G)$ est remplacée par une arête uv tel que u est dans R_i et v est dans R_j . Donc, les arêtes originales de G sont préservées dans G_1 . Alors tout sommet de la clique de R_i est adjacent à $\deg(v_i) - 1$ sommets de la clique R_i et exactement un sommet de la clique de R_i correspondant à un voisin v_j de v_i dans G . Ainsi dans G_1 tout sommet u dans R_i a un degré égal à $\deg(v_i)$ dans G .

Comme le 'inflated' graphe d'un graphe G est le line graphe du graphe de subdivision de G , on a le résultat suivant d'après Corollaire 2.45.

Proposition 2.94 [39] Pour tout graphe G , $\gamma(G_1) = i(G_1)$.

Corollaire 2.95 [39] Pour le 'inflated' graphe G_1 , $\gamma(G_1) = i(G_1) = n - \rho(G)$.

Corollaire 2.96 [39] Pour le 'inflated' graphe G_1 , $\gamma(G_1) = i(G_1) \leq n - 1$.

Notons que $diam(G) \leq 2$ ssi $\rho(G)=1$, d'où le résultat suivant :

Théorème 2.97 [39] Pour le 'inflated' graphe G_I , $\gamma(G_I) = n-1$ ssi $diam(G) \leq 2$.

Et comme $|V(G_I)|=2m$, on a d'après théorème 2.1

Corollaire 2.98 [39] Pour tout graphe G avec m arêtes et sans sommets isolés, $\gamma(G_I) \leq m$.

Comme G_I a un ordre pair et C_4 n'est pas un 'inflated' graphe, on a d'après Théorème 2.2.

Proposition 2.99 [39] Pour un graphe connexe G , $\gamma(G_I) = \lfloor |V(G_I)|/2 \rfloor = m$ ssi $G_I = K_m \circ K_1$. Dans ce cas, $G = K_{1,m}$.

De plus d'après Théorème 2.3, on a

Proposition 2.100 [39] Si $\delta(G) \leq 2$, alors $\gamma(G_I) \leq 4m/5$.

Et d'après Théorème 2.7, on a

Corollaire 2.101 [39] Si G est un graphe connexe et $\delta(G) \geq 3$, alors $\gamma(G_I) \leq 3m/4$.

Théorème 2.102 [39] Si un graphe connexe G est sans étoile, alors $\gamma(G_I) \leq \lceil 2m/3 \rceil$.

Proposition 2.103 [39] Pour le 'inflated' graphe G_I , $\left\lceil \frac{2m}{\Delta(G)+1} \right\rceil \leq \gamma(G_I) \leq 2m - \Delta(G)$.

Proposition 2.104 [39] Pour tout graphe G , $\frac{2diam(G)}{3} \leq \gamma(G_I)$.

2.9 Complexité du problème du nombre de domination

Dans cette section, nous nous intéressons à la difficulté du problème de domination dans un graphe, nous présentons les différents résultats concernant la complexité et les algorithmes de résolution pour ce problème dans des graphes quelconques ou particuliers.

Quelle est la difficulté de calculer le nombre de domination dans un graphe quelconque ?

Soit $G = (V, E)$ un graphe avec n sommets, le nombre de domination se trouve dans l'intervalle $1 \leq \gamma(G) \leq n$. Ainsi, il y a un nombre fini d'ensembles dominants de G à cardinalité minimum. Un algorithme trivial pour trouver un ensemble dominant minimum consiste à énumérer toutes les combinaisons de sommets possibles et vérifier pour tout sous ensemble donné $S \subseteq V$ si S est un ensemble dominant, ensuite comparer ces ensembles dominants pour trouver le minimum. Un tel algorithme nécessite $O(2^n)$ étapes dans le pire des cas. Il a un temps de complexité exponentiel par rapport à l'ordre du graphe G .

Problème de domination :

Instance : un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif k .

Question : G contient-il un ensemble dominant de taille $\leq k$?

David Johnson [56] a été le premier à montrer que ce problème est NP-Complet, en utilisant la réduction à partir du problème de 3-SAT.

Théorème 2.105 [56] Le problème de l'ensemble dominant de taille $\leq k$ est NP-complet.

Ce théorème représente le résultat de complexité le plus essentiel concernant la domination dans les graphes et le début d'une vaste collection de résultats apparentés. Ainsi pour calculer le nombre de domination d'un graphe dans un temps polynomial, il faut restreindre les instances à des classes de graphes autres que les graphes quelconques. Cependant, le problème reste NP-complet dans la majorité de ces classes.

Dewdney [43], *Chang* et *Nemhauser* [23], *Bertossi* [9] ont indépendamment montré le résultat suivant :

Théorème 2.106 [9,23,43] Le problème du nombre de domination dans les graphes bipartis est NP-complet.

Le même résultat a été montré aussi pour d'autres classes de graphes.

Un graphe de *comparabilité* est un graphe non orienté dont les arêtes peuvent être orienté transitivement.

Théorème 2.107 [43] Le problème du nombre de domination est NP-complet pour les graphes de comparabilité.

Un graphe G est un *split* s'il existe une partition de l'ensemble de ses sommets telle que $V=V' + V''$ ou V' est une clique et V'' est un stable.

Théorème 2.108 [9,34] Le problème du nombre de domination est NP-complet pour les graphes split.

Un graphe est *triangulé* si tout cycle de longueur au moins 4 contient une corde.

Théorème 2.109 [13] Le problème du nombre de domination est NP-complet pour les graphes triangulés.

Corollaire 2.110 [39] Pour le '*inflated*' graphe G_1 d'un graphe G avec $diam(G) \geq 3$, le problème du nombre de domination est NP-complet.

D'autre part, plusieurs algorithmes polynomiaux calculant le nombre de domination ont été construits pour différentes classes de graphes. Nous définissons d'abord 3 classes de graphes nécessaires dans ce contexte.

Graphe d'intervalles

G est un graphe d'intervalles si on peut associer à chaque sommet de G un intervalle de la droite réelle de telle sorte que deux sommets sont adjacents dans G si et seulement si l'intersection des intervalles associés est non vide.

Voici un exemple de graphe d'intervalles à 7 sommets avec ses intervalles associés.

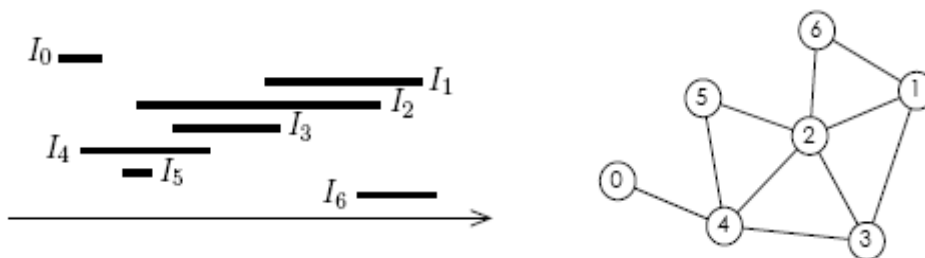


Figure 5.

Graphe de permutation

Un graphe de permutation est défini en terme d'une permutation π des nombres $1,2,3,\dots,n$. Soit π la séquence $[\pi(1),\dots,\pi(n)]$. $\pi^{-1}(i)$ représente la position du nombre i dans la permutation π . Chaque permutation π définit un graphe d'inversion ou un graphe de permutation $G(\pi) = (\{1,2,\dots,n\}, E(\pi))$, où $\{i,j\} \in E$ ssi $i < j$ et $\pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(j)$.

Exemple

Soit $\pi = [3,5,6,2,1,4]$, le graphe de permutation π de est représenté dans la figure..

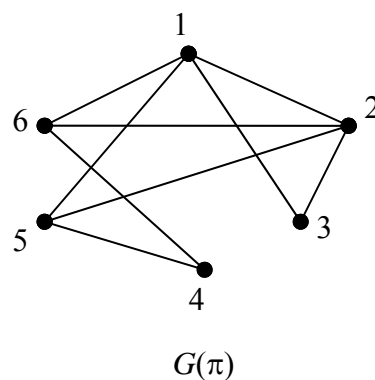


Figure 6.

Graphes arc-circulaires

Les graphes *arc-circulaires* sont les graphes pour lesquels il existe une correspondance entre leurs sommets et les arêtes d'un cercle telle que deux sommets quelconques sont adjacents ssi les arêtes correspondantes dans le cercle chevauchent. Lorsqu'aucune arête du cercle n'est proprement incluse dans une autre arête, ils sont appelés graphes *arc-circulaires propres*.

Exemple



Figure 7.

Farber [46,47] a construit un algorithme en $O(n+m)$ pour les graphes fortement triangulés et les graphes d'intervalles. *Chang* [24] a montré comment construire un algorithme efficace pour les graphes d'intervalles et les graphes arc-circulaires. Dans [48,110,118], on trouve un algorithme en $O(n+m)$ et en $O(n \log \log n)$ pour les graphes de permutation.

Remarque

Soit G une sous classe de la classe du graphe G' , alors tout algorithme polynomial qui résout un problème P dans G' peut forcément résoudre le problème P dans G .

De plus si le problème P reste NP-complet lorsqu'il est restreint à G alors il reste également NP-complet dans G' . Nous citons ici quelques relations d'inclusion entre différentes classes de graphe :

biparti \subset comparabilité ;

intervalle \subset fortement triangulé \subset triangulé;

split \subset triangulé;

permutation \subset comparabilité.

Jusqu'à très récemment, l'algorithme trivial exact en $O(2^n)$ était l'algorithme utilisé pour résoudre le problème du nombre de domination sur un graphe quelconque à n sommets. En 2004, de meilleurs algorithmes ont été obtenus. *Fomin, Kratsch et Woeginger* [54] ont déterminés un algorithme qui s'exécute en un temps $O(1,93782^n)$. L'algorithme de *Randerath et Schiermeyer* [105] s'exécute en $O(1,8999^n)$. *Grandoni* [59,60], a décrit un algorithme en $O(1,8019^n)$ et finalement, *Fomin, Grandoni et Kratsch* [53] ont réduit le temps d'exécution à $O(1,5137^n)$.

Pour des classes spéciales de graphe split, graphe biparti et graphe de degré maximum 3, les temps d'exécutions ont atteint $O(1,41422^n)$, $O(1,73206^n)$, $O(1,51433^n)$ respectivement [54].

CHAPITRE 3

LE NOMBRE DOMATIQUE D'UN GRAPHE

Dans ce chapitre, nous présentons des bornes pour le nombre domatique $d(G)$ dans un graphe G quelconque, ainsi que des relations liant le nombre domatique à d'autres invariants de domination en général et sur quelques classes de graphes, puis nous présentons les classes de graphes domatiquement pleins. Nous donnons aussi des bornes concernant le produit et la somme du nombre de domination $\gamma(G)$ et du nombre domatique $d(G)$. Nous concluons ce chapitre par l'étude de la complexité algorithmique de $d(G)$.

3.1 Bornes en terme de degré, d'ordre et de diamètre

Nous commençons cette section par des bornes en terme du degré minimum.

Cockayne et Hedetniemi [31] étaient les premiers à donner des bornes supérieures pour le nombre domatique :

Théorème 3.1 [31] Pour tout graphe G sans sommets isolés, $2 \leq d(G) \leq \delta(G)+1$.

De plus, un graphe G pour lequel $d(G) = \delta(G)+1$ est appelé *domatiquement plein*.

Exemple

La Figure 1 représente un graphe domatiquement plein avec $d(G)=2$ où la partition domatique peut être constituée des deux ensembles dominants $\{1,2\}$ et $\{3,4\}$.

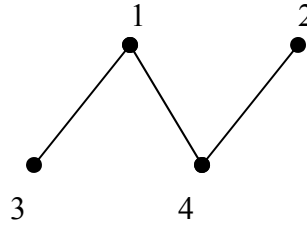


Figure 1.

Théorème 3.2 [97] Pour tout graphe G , $d(G)=1$ ssi G contient un sommet isolé.

Théorème 3.3 [97] Tout graphe connexe G , d'ordre $n \geq 2$, a un ensemble dominant S dont le complémentaire $V-S$ est aussi un ensemble dominant.

Le complémentaire d'un ensemble dominant de cardinalité minimum d'un graphe G sans sommets isolés est aussi un ensemble dominant. Ainsi, les sommets de G peuvent être partitionnés en au moins deux ensembles dominants disjoints.

Une amélioration du Théorème 3.1 est donnée dans [91].

Théorème 3.4 [91] Pour tout graphe G d'ordre n ,

$$d(G) \leq \min(\delta(G) + 1, \lfloor (|V| + |V_{n-1}|) / 2 \rfloor),$$

où V_{n-1} représente un sous ensemble de sommets de V qui sont de degré égal à $n-1$.

Une borne inférieure pour le nombre domatique a été établie dans [132].

Théorème 3.5 [132] Pour tout graphe G d'ordre n , $d(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{n - \delta(G)} \right\rfloor$.

Pour les sommets dominants, on a :

Proposition 3.6 [21] Si x est un sommet dominant d'un graphe G , alors $d(G)=d(G-x)+1$.

Théorème 3.7 [133,128] Pour tout entier $k \neq 0$, il existe un graphe G dans lequel $d(G) = 2$ et chaque sommet a un degré $\geq k$.

Rappelons que le diamètre de G est la distance maximum entre deux sommets de G .

Théorème 3.8 [73] Si $diam(G) \leq 2$ et chaque arête est dans un triangle, alors $d(G) \geq 3$.

Théorème 3.9 [83] Pour toute séquence d'entiers positifs monotone non décroissante, il existe un graphe G avec des sommets distincts v_1, v_2, \dots, v_n tels que $d(G) = a_0$ et $d(G - v_1 - v_2 - \dots - v_i) = a_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Théorème 3.10 [83] Pour toute séquence d'entiers $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n$ avec $a_i - a_{i+1} \leq 1$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$, il existe un graphe G avec des sommets distincts v_1, v_2, \dots, v_n tels que $d(G) = a_0$ et $d(G - v_1 - v_2 - \dots - v_i) = a_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Théorème 3.11 [83] Pour toute séquence d'entiers $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n$ monotone non décroissante et vérifiant $a_i - a_{i+1} \leq 1$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$, il existe un graphe G avec des arêtes distinctes e_1, e_2, \dots, e_n telles que $d(G) = a_0$ et $d(G - e_1 - e_2 - \dots - e_i) = a_i$.

3.2 Bornes algorithmiques

L'approximation algorithmique du nombre domatique a été étudiée dans [49].

Théorème 3.12 [49] Tout graphe G admet une partition domatique (constructible en temps polynomial) de taille $\frac{(\delta(G)+1)(1-O(\log \log n / \log n))}{\ln n}$.

Lemme 3.13 [49] Tout graphe G admet une partition domatique de taille $(1/3 - o(1)) \frac{\delta}{\ln \Delta(G)}$, où le terme $o(1)$ tend vers zéro lorsque $\Delta \rightarrow \infty$.

Le résultat suivant améliore la valeur $(1/3 - o(1))$ du Lemme 3.13.

Théorème 3.14 [49] Tout graphe G vérifie $d(G) \geq (1 - o(1)) \frac{\delta + 1}{\ln \Delta(G)}$.

Théorème 3.15 [49] Il existe une constante $a > 0$ tel que pour tout graphe G avec

$$\Delta(G) \geq 3, d(G) \geq \left\lfloor \frac{\delta}{\ln \Delta + a \ln \ln \Delta} \right\rfloor.$$

3.3 Nombre domatique et degré de connexité

Le *dgré de connexité* $\omega(G)$ (resp. $\sigma(G)$) des sommets (resp. des arêtes) du graphe connexe G est la cardinalité minimum d'un sous ensemble de sommets (resp. d'arêtes) de G tel que sa suppression déconnecte le graphe. Supprimer un sous ensemble de sommets de G veut dire supprimer tous les sommets de cet ensemble et toutes les arêtes incidentes à ces sommets. De même, supprimer un sous ensemble d'arêtes de G veut dire ne supprimer que les arêtes de cet ensemble.

Théorème 3.16 [135] Si p et q sont deux entiers non négatifs tels que $p < q$, alors il existe un graphe G tel que $\omega(G)=p$ et $d(G)=q$.

Théorème 3.17 [135] Si p et q sont deux entiers non négatifs tels que $p < q$, alors il existe un graphe G tel que $\sigma(G)=p$ et $d(G)=q$.

Théorème 3.18 [135] Soit h un entier positif. Il existe un graphe G tel que :

$$\omega(G)-d(G) = \sigma(G)-d(G) = h.$$

3.4 Résultats du type Nordhaus-Gaddum

Dans le chapitre précédent nous avons vu les résultats du type Nordhaus-Gaddum concernant le nombre de domination. Des résultats du même type ont été établis pour le nombre domatique. Rappelons qu'un résultat du type Nordhaus-Gaddum est une borne inférieure ou supérieure sur la somme ou le produit d'un paramètre du graphe et son complémentaire.

Théorème 3.19 [31] Pour tout graphe G d'ordre n , $d(G)+d(\overline{G}) \leq n+1$. L'égalité est vérifiée ssi $G=K_n$ ou $G=\overline{K}_n$.

Théorème 3.20 [41] Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 4$, $2 \leq d(G).d(\overline{G}) \leq \frac{n^2}{4}$, et ces bornes sont atteintes.

En 1999, *Dunbar, Haynes et Henning* [41] ont déterminé les graphes atteignant la borne supérieure du Théorème 3.20, de la façon suivante :

Pour tout entier $k \geq 2$, on définit la famille ζ_k de graphes définis comme suit :

Soit $I = \{1, 2, \dots, k\}$. Si $G \in \zeta_k$, les sommets de G peuvent être indexés $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_k$ tels que pour tout $i \in I$, l'une des conditions suivantes est satisfaite :

C1 : pour tout $l \in I - \{i\}$,

Soit $u_i u_l, v_i v_l \in E(G)$ et $u_i v_l, v_i u_l \in E(\overline{G})$, soit $u_i u_l, v_i v_l \in E(\overline{G})$ et $u_i v_l, v_i u_l \in E(G)$;

C2 : il existe $j \in I - \{i\}$ tel que :

(i) pour tout $l \in \{i, j\}$,

Soit $u_i u_l, v_i v_l \in E(G)$ et $u_i v_l, v_i u_l \in E(\overline{G})$, soit $u_i u_l, v_i v_l \in E(\overline{G})$ et $u_i v_l, v_i u_l \in E(G)$;

(ii) $u_i u_j, u_i v_j, v_i u_j \in E(G)$ et $u_i v_i, u_j v_j, v_i v_j \in E(\overline{G})$;

(iii) dans le graphe G , $N(u_i) - V_{ij} = N(u_j) - V_{ij}$ et $N(v_i) - V_{ij} = N(v_j) - V_{ij}$ où $V_{ij} = \{u_i, u_j, v_i, v_j\}$.

Exemple :

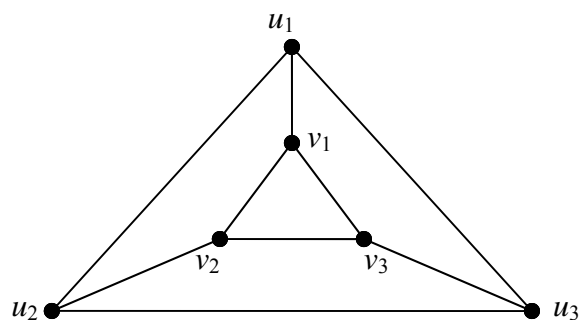


Figure 2. Graphe $G \in \zeta_3$

Théorème 3.21 [41] Pour tout graphe G d'ordre pair $n \geq 4$, $d(G).d(\overline{G}) = n^2/4$ ssi $G \pi K_4$ ou $G \in \zeta_k$ pour tout entier $k \geq 2$.

Théorème 3.22 [41] Pour tout graphe G , $d(G).d(\overline{G})=2$ ssi G ou \overline{G} a un sommet de degré $n-1$ et un sommet de degré 1.

Concernant les arbres, on a les résultats suivants :

Théorème 3.23 [41] Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$, on a

$$3 \leq d(T)+d(\overline{T}) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 2 \quad \text{et} \quad 2 \leq d(T).d(\overline{T}) \leq n,$$

et ces bornes sont atteintes. Les bornes inférieures sont atteintes ssi $T \pi K_{1,n-1}$, et les bornes supérieures sont atteintes ssi $d(\overline{T}) = \lfloor n/2 \rfloor$, et pour le produit n est pair.

Une caractérisation des arbres T pour lesquels $d(\overline{T}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.24 [41] Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors $d(\overline{T}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ssi $\Delta(T) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Théorème 3.25 [42] Un arbre T vérifie $d(T)=d(\overline{T})$ ssi T est le graphe trivial K_1 , le chemin P_5 ou l'étoile $K_{1,t}$, $t \geq 2$, avec exactement une arête subdivisée.

3.5 Relations entre le nombre domatique et d'autre invariants de domination

Zelinka a établi des relations entre le nombre domatique et d'autre invariants de domination:

3.5.1 Nombre domatique connexe

Le *nombre domatique connexe* $d_c(G)$ est la cardinalité maximum de la partition de $V(G)$ en ensembles dominants connexes.

Théorème 3.26 [129] Pour tout entier arbitraire q , il existe un graphe G tel que : $d(G) - d_c(G) = q$.

3.5.2 Nombre adomatique

Un ensemble dominant dans un graphe G est appelé indivisible, s'il n'est pas l'union de deux ensembles dominants distincts de G . Le nombre minimum de classes d'une partition de $V(G)$ en ensembles dominants indivisibles est appelé le *nombre adomatique* de G est noté $ad(G)$.

Evidemment, $d(G) \geq ad(G)$ pour tout graphe G . Le théorème suivant montre que la différence entre ces deux nombres peut être large.

Théorème 3.27 [128] Pour tout entier positif n , il existe un graphe G pour lequel $d(G) - ad(G) = n$. Chaque partition des sommets en ensembles dominants indivisibles possède $d(G)$ ou $ad(G)$ éléments.

3.5.3 Nombre domatique total

Un ensemble D de V est dit ensemble *dominant total* si $\forall x \in V(G), \exists y \in D$ adjacent à x .

Le nombre domatique total $d_t(G)$ est la cardinalité maximum de la partition de $V(G)$ en ensembles dominants totaux.

Théorème 3.28 [127] Pour tout graphe G , $\left\lfloor \frac{1}{2} d(G) \right\rfloor \leq d_t(G) \leq d(G)$.

3.6 Union et jointure de graphes

Soient $G_1=(V_1,E_1)$ et $G_2=(V_2,E_2)$ deux graphes tel que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ et $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. L'union de G_1 et G_2 est le graphe $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. La jointure de G_1 et G_2 est le graphe $G_1 + G_2$ constitué de $G_1 \cup G_2$ et toutes les arêtes joignant V_1 et V_2 .

Proposition 3.29 [21] Soient G_1 et G_2 deux graphes, on a $d(G_1 \cup G_2) = \min \{d(G_1), d(G_2)\}$.

Théorème 3.30 [21] Soit $r \geq 2$ et G_1, G_2, \dots, G_r des graphes avec n_1, n_2, \dots, n_r sommets respectivement et sans sommet dominant. Si $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$ et $n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1} \geq n_r$ alors $d(G_1 + G_2 + \dots + G_r) = \lfloor (n_1 + n_2 + \dots + n_r) / 2 \rfloor$.

Pour un entier m non négatif, une *partition m -domatique* de G est une collection D_1, D_2, \dots, D_k de k ensembles dominants disjoints telle que $|D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k| \leq m$. Le nombre m -domatique $d(G|m)$ de G est la nombre maximum k tel qu'une partition m -domatique en k ensembles dominants existe. Notons que $d(G) = d(G|n)$ pour tout graphe G à n sommets.

Proposition 3.31 [21] $d(G|m) \leq d(G|m')$ pour tout graphe G et tous entiers non négatifs $m \leq m'$.

Théorème 3.32 [21] Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_1 \leq n_2$. Si $G_i = (V_i, E_i)$ est un graphe à n_i sommets et sans sommet dominant, alors

$$d(G_1 + G_2 | m) = \begin{cases} \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil & \text{si } 0 \leq m \leq 2n_1, \\ n_1 + d(G_2 | m - 2n_1) & \text{si } 2n_1 < m \leq n_1 + n_2. \end{cases}$$

Corollaire 3.33 [21] Soit $r \geq 2$ et G_1, G_2, \dots, G_r des graphes à n_1, n_2, \dots, n_r sommets respectivement et sans sommet dominant. Si $n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1} < n_r$, alors $d(G_1 + G_2 + \dots + G_r) = n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1} + d(G_r | n_r - n_1 - \dots - n_{r-1})$.

Corollaire 3.34 [21] Si $r \geq 2$ et $n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1} < n_r$, alors

$$d(\overline{K}_{n_1} + \overline{K}_{n_2} + \dots + \overline{K}_{n_r}) = n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1}.$$

Théorème 3.35 [31] Pour tout graphe G , $d(K_n + G) = n + d(G)$.

3.7 Bornes sur des classes de graphes particuliers

3.7.1 L'hypercube

L'hypercube de dimension n ou le n -cube, noté Q_n , est le graphe dont les sommets représentent les n -uplets de $\{0,1\}^n$ et deux sommets sont adjacents ssi ils diffèrent en une seule composante. Q_n possède 2^n sommets et $n2^{n-1}$ arêtes, il est régulier de degré n et son diamètre est égal à n .

Notons que l'hypercube de dimension n représente le diagramme de Hasse du treillis Booléen d'ordre n .

La structure de l'hypercube intervient souvent dans les réseaux informatiques de multiprocesseurs où chaque sommet de l'hypercube représente un processeur et chaque arête désigne un lien de communication direct entre deux processeurs.

En 1983, *Zelinka* [134] prouva le théorème suivant :

Théorème 3.36 [134] Soit k un entier positif. L'hypercube de dimension 2^k-1 et l'hypercube de dimension 2^k ont tous les deux un nombre domatique égal à 2^k .

Comme un graphe régulier G est domatiquement plein ssi le nombre domatique $d(G)$ divise le nombre de ses sommets [128], on déduit que le nombre domatique de Q_n est au plus $n+1$ et ne peut être égal à $n+1$ que si $n+1$ divise 2^n , et ceci est possible seulement si $n=2^k-1$ avec k un entier non négatif.

Dans [134], *Zelinka* posa la conjecture suivante :

Conjecture 3.37 [134] Si n est un entier positif tel que $n+1$ n'est pas une puissance de 2, alors $d(Q_n)=n$.

En 1985, *Kys* [83] a montré que cette conjecture n'est pas vérifiée pour $n=5$. Il a prouvé que $d(Q_5)=4$, et a supposé alors qu'elle n'est pas vérifiée aussi pour $n>5$.

3.7.2 Graphes ayant $d(G) = d(\bar{G})$

Proposition 3.38 [42] Pour tout graphe G , $d(G) = d(\bar{G}) = 1$ ssi $G \pi K_1$.

Théorème 3.39 [42] Un graphe G non connexe vérifie $d(G) = d(\bar{G}) = 2$ ssi $G \pi K_2 \cup K_p$ pour $p \geq 2$ ou $G \pi K_2 \cup K_p - e$ pour une arête quelconque e et $p \geq 3$.

On dit qu'un ensemble d'arêtes E' couvre un graphe G si tout sommet de G est incident à au moins une arête de E' . Un ensemble d'arêtes qui couvre G est dit un *recouvrement par des arêtes*. Un recouvrement par des arêtes où chaque sommet est de degré 1 est appelé un *1-facteur*.

Théorème 3.40 [42] Si G est un graphe biparti régulier d'ordre $2t$, alors $d(G) = d(\bar{G})$ ssi $G \pi K_{t,t}$ ou G est obtenu à partir de $K_{t,t}$ en supprimant les arêtes d'un 1-facteur.

Lemme 3.41 [42] Si G est un graphe biparti régulier d'ordre $2t$, alors $d(\overline{G}) = t$.

3.7.2.1 Graphes cubiques

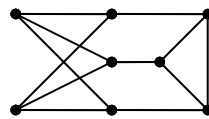
Lemme 3.42 [42] Si G un graphe cubique alors soit $G \cong K_4$ soit G possède deux sommets adjacents qui n'ont aucun voisin en commun.

Lemme 3.43 [42] Si G un graphe cubique d'ordre n et vérifie $d(G) = d(\overline{G})$ alors $n \leq 12$.

Théorème 3.44 [42] Si G est un graphe cubique d'ordre $n \geq 6$ alors $d(\overline{G}) = \frac{n}{2}$ ou $d(\overline{G}) = \frac{n}{2} - 1$.

Lemme 3.45 [40] Si G un graphe cubique d'ordre n et vérifie $d(\overline{G}) = \frac{n}{2} - 1$ alors $n \leq 10$.

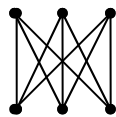
Théorème 3.46 [40] Si G est un graphe cubique d'ordre n , différent de K_4 et de G_1 alors $d(\overline{G}) = \frac{n}{2}$.



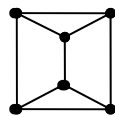
G_1

Figure 3.

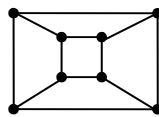
Théorème 3.47 [42] Si G est un graphe cubique d'ordre n , alors $d(G) = d(\overline{G})$ ssi $G \cong 2K_4$ ou $G \in \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$.



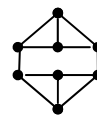
G_1



G_2



G_3



G_4

Figure 4.

3.7.2.2 Arbres, chaînes et cycles

Une arête est dite *subdivisée* quand elle est supprimée et remplacée par une chaîne de longueur 2 connectant ses extrémités.

Théorème 3.48 [42] Un arbre T vérifie $d(T)=d(\overline{T})$ ssi T est le graphe trivial K_1 , la chaîne P_4 ou l'étoile $K_{1,t}$, $t \geq 2$ avec exactement une arête subdivisée.

Corollaire 3.49 [42] La chaîne P_n vérifie $d(P_n)=d(\overline{P_n})$ ssi $n = 3$ ou $n = 4$.

Théorème 3.50 [42] Le cycle C_n vérifie $d(C_n)=d(\overline{C_n})$ ssi $n = 4,5,6$.

3.7.3 Graphes ayant un sommet d'articulation

Un *sommet d'articulation* dans un graphe G est un sommet de G , dont la suppression déconnecte le graphe G s'il est connexe et augmente le nombre de ses composantes connexes s'il ne l'est pas.

Vestergaard et Zelinka [119] ont considéré le cas où le graphe G est l'union de deux graphes G_1 et G_2 avec exactement un sommet en commun, qui est d'articulation. Soient G'_1 et G'_2 les sous graphes induits de G_1 et G_2 respectivement, obtenus par la suppression de ce sommet d'articulation.

Théorème 3.51 [119]

1. Pour tout graphe G , on a :

$$\min\{d(G_1),d(G_2)\} \leq d(G) \leq 1+\min\{d(G'_1),d(G'_2)\}.$$

2. Pour tout entier positif q , il existe un graphe G tel que

$$d(G)=\min\{d(G_1),d(G_2)\}+q.$$

3. Pour tout entier positif q , il existe un graphe G tel que

$$d(G)=\min\{d(G'_1),d(G'_2)\}-q.$$

3.7.4 Graphes ayant un isthme

Un *isthme* est une arête, dont la suppression déconnecte le graphe s'il est connexe et augmente le nombre de ses composantes connexes s'il ne l'est pas.

Vestergaard et *Zelinka* [119] ont considéré le cas où le graphe H est obtenu à partir de deux graphes disjoints H_1 et H_2 en reliant un sommet a_1 de H_1 à un sommet a_2 de H_2 par un isthme. Notons par H'_1 (resp. H'_2) le sous graphe induit de H_1 (resp. H_2), obtenu par la suppression de a_1 (resp. a_2).

Théorème 3.52 [119] Les nombres domatiques de H, H_1, H_2 vérifient

$$\min\{d(H_1), d(H_2)\} \leq d(H) \leq 1 + \min\{d(H_1), d(H_2)\}.$$

Théorème 3.53 [119] Pour les graphes H, H_1, H_2 , on a $d(H) = 1 + \min\{d(H_1), d(H_2)\}$ ssi pour tout $i \in \{1, 2\}$ tel que $d(H_i) = \min\{d(H_1), d(H_2)\}$ il existe une partition $\{D_1^i, \dots, D_{d+1}^i\}$ (où $d = d(H_i)$) de l'ensemble des sommets de H_i telle que D_1^i, \dots, D_d^i sont des ensembles dominants dans H_i et D_{d+1}^i est un ensemble dominant dans H'_i mais pas dans H_i .

Théorème 3.54 [119] Si $d(H) = 1 + d(H_1)$, alors il existe un sommet de H_1 qui n'est pas adjacent à a_1 avec la propriété suivante : si on joint ce sommet à a_1 par un arête, on obtient le graphe \tilde{H}_1 vérifiant $d(\tilde{H}_1) = 1 + d(H_1)$.

3.7.5 Nombre domatique et bichromaticité dans un graphe biparti

La *bichromaticité* est un invariant numérique défini seulement pour les graphes bipartis connexes. Si $B = (C \cup D, E)$ est un graphe biparti connexe alors un *homomorphisme bicomplet* de B est un homomorphisme Φ de B dans un graphe biparti complet $K_{r,s}$ avec la propriété que $\Phi(x) = \Phi(y)$ si x et y sont tous les deux dans C ou dans D . La valeur maximum de $r+s$ pour tous les graphes $K_{r,s}$ avec la propriété qu'il existe un homomorphisme bicomplet de B sur $K_{r,s}$ est appelé la *bichromaticité* de B , elle est notée

$\beta(B)$. On appelle *majorité* de B le nombre $\mu = \max(|C|, |D|)$. La bichromaticité d'un graphe biparti connexe a été introduite par F. Harrary, D. Hsu et Z. Miller [61].

Zelinka [131] a étudié la relation entre la bichromaticité et le nombre domatique.

Lemme 3.55 [131] Si $B=(C \cup D, E)$ est un graphe biparti connexe et \mathcal{P} une partition domatique de B , alors soit $\mathcal{P} = \{C, D\}$ soit $C \cap X \neq \emptyset$ et $D \cap X \neq \emptyset$, pour tout $X \in \mathcal{P}$.

Théorème 3.56 [131] Pour tout graphe biparti complet B , on a $\beta(B) \geq \mu + \left\lceil \frac{1}{2} d(B) \right\rceil$.

Corollaire 3.57 [131] Pour tout graphe biparti fini B avec $d(B) \geq 3$, on a $\beta(B) \geq \left\lceil \frac{3}{2} d(B) \right\rceil$.

3.7.6 Les graphes factorés

Soient G_1, G_2, \dots, G_t des graphes définis sur le même ensemble de sommets V mais ayant des arêtes disjointes, $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_t$ représente le graphe sur l'ensemble de sommets V et l'ensemble d'arêtes $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \dots \cup E(G_t)$. Les graphes G_1, G_2, \dots, G_t sont appelés une *t-factorisation* de G .

Dans [58] il a été montré que le graphe $K_{s,s}$ peut remplacer le graphe complet K_n dans les résultats de Nordhaus-Gaddum. D'où le théorème suivant :

Théorème 3.58 [68] Soit $s \geq 2$ un entier et $G_1 \oplus G_2 = K_{s,s}$, alors $d(G_1) + d(G_2) \leq s+2$. De plus $d(G_1) + d(G_2) = s+2$ ssi G_1 ou G_2 est isomorphe à sK_2 .

Lemme 3.59 [68] Soit $s \geq 2$ un entier et $G_1 \oplus G_2 = K_{s,s}$. Si $\gamma(G_1) = 2$, alors $d(G_1) \cdot d(G_2) \leq 2s$. De plus $d(G_1) \cdot d(G_2) = 2s$ ssi G_1 ou G_2 est isomorphe à sK_2 .

Lemme 3.60 [68] Soit $s \geq 3$ un entier et $G_1 \oplus G_2 = K_{s,s}$. Si $\gamma(G_1) = 3$ alors $d(G_1) \cdot d(G_2) \leq 2s$.

Lemme 3.61 [68] Soit $s \geq 4$ un entier et $G_1 \oplus G_2 = K_{s,s}$. Si $\gamma(G_1) \geq 4$ alors $d(G_1) \cdot d(G_2) \leq \lfloor s/2 \rfloor^2$.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate des Lemmes 3.59, 3.60 et 3.61.

Théorème 3.62 [68] Soit $s \geq 2$ un entier et $G_1 \oplus G_2 = K_{s,s}$, alors

$$d(G_1) \cdot d(G_2) \leq \begin{cases} 2s & \text{pour } s \leq 9 \\ \lfloor s/2 \rfloor^2 & \text{pour } s \geq 10 \end{cases}, \text{ et ces bornes sont atteintes}$$

Dans [68], *Haynes* a considéré une autre généralisation des résultats du type Nordhaus-Gaddum en examinant le graphe complet factoré en trois graphes disjoints. *Plesnik* [102] a étendu les résultats de Nordhaus et Gaddum sur le nombre chromatique lorsque le graphe complet est factoré en au moins trois graphes.

Théorème 3.63 [68] Si $n \geq 3$ est un entier et $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_t = K_n$ un t -facteur de K_n ,

$$\text{alors } t \leq \sum_{i=1}^t d(G_i) \leq n+t-1.$$

Comme cas particulier du Théorème 3.64, on a

Corollaire 3.64 [68] Si $n \geq 3$ est un entier et $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = K_n$, alors

$$3 \leq d(G_1) + d(G_2) + d(G_3) \leq n+2.$$

Lemme 3.65 [68] Si $\gamma(G_i) = 1$ pour un certain $i \in \{1, 2, 3\}$, alors $d(G_1) \cdot d(G_2) \cdot d(G_3) \leq n$.

Théorème 3.66 [68] Soit $n \geq 27$ un entier impair avec $n \notin \{29, 35, 37, 53\}$ ou $n \geq 42$ un entier pair avec $n \notin \{44, 50, 52, 56\}$. Si $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = K_n$, alors $d(G_1) \cdot d(G_2) \cdot d(G_3) \leq \lfloor n/3 \rfloor^3$.

Lemme 3.67 [68] Si $\gamma(G_i) \geq 3$ pour tout $i=1, 2, 3$, alors $d(G_1) \cdot d(G_2) \cdot d(G_3) \leq \lfloor n/3 \rfloor^3$.

Lemme 3.68 [68] Si n est pair, alors $d(G_1) \cdot d(G_2) \cdot d(G_3) \leq \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n+4}{4} \right\rfloor^2$.

Lemme 3.69 [68] Si n est impair, alors $d(G_1) \cdot d(G_2) \cdot d(G_3) \leq \frac{n-1}{2} \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor^2$.

3.7.7 Produit de chaînes

Soit r un entier. Le produit de chaînes de dimension r , $P_{n_1} \times P_{n_2} \times \dots \times P_{n_r}$ possède

$\prod_{i=1}^r (n_i + 1)$ sommets de la forme (a_1, \dots, a_r) où $0 \leq a_i \leq n_i$ pour $1 \leq i \leq r$. Les sommets

(a_1, \dots, a_r) et (b_1, \dots, b_r) sont adjacents ssi il existe un unique j tel que $|a_j - b_j| = 1$ et $\forall i \neq j, a_i = b_i$.

On a $d(P_{n_1} \times P_{n_2} \times \dots \times P_{n_r}) \leq \delta(P_{n_1} \times P_{n_2} \times \dots \times P_{n_r}) + 1 = r + 1$ et P_n est domatiquement pleine pour tout $n \geq 1$.

Pour le produit de chaînes de dimension 2, les ensembles $D_1 = \{(a, b) : a \text{ est impair}\}$ et $D_2 = \{(a, b) : a \text{ est pair}\}$ forment une partition domatique de $P_{n_1} \times P_{n_2}$. Donc

$$2 \leq d(P_{n_1} \times P_{n_2}) \leq 3.$$

Théorème 3.70 [21] Si $n_1 \geq n_2 \geq 1$, alors $d(P_{n_1} \times P_{n_2}) = 3$ avec seulement deux exceptions : $d(P_1 \times P_1) = d(P_3 \times P_1) = 2$.

Théorème 3.71 [21] Si r et n sont des entiers positifs et $(n_1, n_2, \dots, n_r) \in \{n, 2n\}$, alors $d(P_{n_1} \times P_{n_2} \times \dots \times P_{n_r}) \geq d(P_n \times P_n \times \dots \times P_n)$.

Pour tout n , n et $2n-1$ sont premiers entre eux, donc il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $m \geq n_0$, on peut écrire $m = r.n + s(2n-1)$ pour deux entiers non-négatifs r et s . Le plus petit entiers n_0 tel que l'égalité précédente est vérifiée est noté $M(n)$.

Théorème 3.72 [21] Si r et n sont des entiers positifs et $(n_1, n_2, \dots, n_r) \geq M(n+1)-1$, alors $d(P_{n_1} \times P_{n_2} \times \dots \times P_{n_r}) \geq d(P_n \times P_n \times \dots \times P_n)$.

Théorème 3.73 [84,130] Si k est un entier positif et $r = 2^k - 1$, alors le produit de chaînes $P_1 \times P_1 \times \dots \times P_1$ de dimension r est domatiquement plein.

Corollaire 3.74 [21] Si k est un entier positif et $r = 2^k - 1$, alors tout produit de chaînes $P_{n_1} \times P_{n_2} \times \dots \times P_{n_r}$ de dimension r est domatiquement plein.

3.7.8 Graphes réguliers

Si un graphe possède un degré minimum élevé alors $\gamma(G)$ est petit [86]. Cependant ceci ne veut pas nécessairement dire que le nombre domatique est grand. Zelinka [132] a donné des exemples de graphes ayant un degré minimum élevé avec un nombre domatique égal à 2.

Dans [36], il a été montré que le nombre domatique d'un graphe 3-régulier quelconque est presque sûrement égal à 3, et que la borne supérieure $r+1$ sur le nombre domatique d'un graphe r -régulier n'est presque jamais atteinte. De plus, pour les graphes réguliers, un degré minimum large garanti un nombre domatique large.

Théorème 3.75 [36] Si G un graphe 3-régulier aléatoire, alors $d(G) \geq 3$.

Théorème 3.76 [36] Si G un graphe r -régulier aléatoire, alors $d(G) \leq r$.

Théorème 3.77 [36] Soit G un graphe d'ordre n de degré minimum δ et de degré maximum Δ . Si k est un entier non négatif, et $e(\Delta^2 + 1)k \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{\delta+1} < 1$, alors $d(G) \geq k$.

Corollaire 3.78 [36] Si G un graphe r -régulier, alors $d(G) \geq \frac{r+1}{3 \ln(r+1)}$.

Dans [126], il a été montré qu'en considérant seulement la classe des graphes avec un degré minimum k et un degré maximum au plus kC , pour une constante $C \geq 1$, on a $d(G)$ assez large.

Soit k un entier positif et soit $C \geq 1$ un nombre réel. Un graphe est appelé (k, C) -régulier si $\delta(G) = k$ et $\Delta(G) \leq kC$. En particulier, un graphe $(k, 1)$ -régulier est un graphe k -régulier. Soit $f(k, C)$ la plus petite valeur de $d(G)$ prise sur tous les graphes (k, C) -réguliers.

Théorème 3.79 [126] Si $C \geq 1$ est un nombre réel, alors $f(k, C) \geq \frac{k}{2 \ln k} (1 + o_k(1))$.

Théorème 3.80 [126] Si $C \geq 1$ est un nombre réel, alors $f(k, C) \leq \frac{k}{\ln k} (1 + o_k(1))$.

3.7.9 Graphe domatique unique

Un graphe est appelé *domatique unique* s'il existe une unique partition domatique de G avec $d(G)$ classes.

Lemme 3.81 [135] Chaque graphe domatique unique avec un nombre domatique au moins 2 est connexe.

Théorème 3.82 [135] Un graphe G avec un nombre domatique égal à 2 est domatique unique ssi G est une étoile $K_{1,n}$ ou un graphe complet K_2 .

3.7.10 Les graphes domatiquement pleins

Rappelons qu'un graphe G est domatiquement plein si $d(G) = \delta(G)+1$. Cette propriété intéressante a fait l'objet de multiples recherches visant à caractériser les graphes domatiquement plein.

Un graphe est *planaire* s'il peut être représenté sur un plan de telle sorte que deux arêtes ne se coupent qu'en un sommet. Une *face* d'un graphe planaire est une région du plan limitée par des arêtes où deux points quelconques intérieurs à cette région peuvent toujours être reliés par un trait continu ne rencontrant ni sommets ni arêtes.

Un graphe *planaire extérieur* est un graphe planaire qui contient une face avec la propriété que tous les sommets du graphe sont représentés sur ses frontières. Il est dit maximal s'il est maximal pour cette propriété.

Exemple :

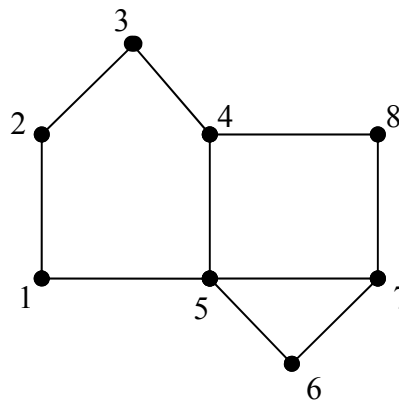


Figure 5. Graphe planaire extérieur

Le graphe complet K_n , son complémentaire $\overline{K_n}$, le cycle C_{3n} , les arbres et les graphes planaires extérieurs maximaux sont domatiquement pleins.

Nous donnons dans la suite d'autres classes de graphes qui sont domatiquement pleins.

3.7.10.1 Les graphes fortement triangulés

Soit $G=(V,E)$ un graphe. Un *ordre d'élimination fort* de G est un ordre v_1, v_2, \dots, v_n de V avec la propriété que pour tout i, j, k, l et $i < j, k < l, v_k, v_l \in N[v_i]$, et $v_k \in N[v_j]$ alors $v_l \in N[v_j]$.

Un graphe est *fortement triangulé* s'il admet un ordre d'élimination fort. Les graphes fortement triangulé ont été définis et caractérisés pour la première fois par *Farber* [45], qui a donné aussi un algorithme polynomial de reconnaissance des graphes de cette classe.

Théorème 3.83 [45] Les graphes fortement triangulés sont domatiquement pleins.

3.7.10.1.2 Graphe d'intervalles

Les graphes d'intervalles sont une sous classe des graphes fortement triangulé, par suite il sont domatiquement pleins.

3.7.10.2 Graphes bloc-cactus

Un graphe connexe sans sommet d'articulation est appelé un *bloc*. Un bloc d'un graphe G est un sous graphe de G qui est lui-même un bloc et qui est maximal par rapport à cette propriété. Un graphe dont les blocs sont des cycles ou des graphes complets K_2 , sont appelé graphes *cactus*. Les graphes dont les blocs sont tous complets sont appelés des *graphes blocs* et les graphes dont les blocs sont des graphes complets ou des cycles sont appelés des graphes *blocs-cactus*.

Comme les graphes bloc sont fortement triangulés [45], alors tous les graphes bloc sont domatiquement pleins.

Théorème 3.84 [108] Soit G un graphe bloc-cactus connexe. Si $\delta(G) \geq 4$ ou $\delta(G)=2$ et G ne contient pas de cycles C_l de longueur $l \neq 0 \pmod{3}$ comme bloc, ou si $\delta(G)=3$ et G ne contient pas de cycles C_5 comme bloc, alors G est domatiquement plein.

Théorème 3.85 [108] Soit G un graphe bloc-cactus connexe avec $\delta(G)=3$ et soient B_1, \dots, B_l les blocs de G qui sont des cycles de longueur 5 et F_1, \dots, F_r des composantes connexes de $G[\bigcup_{j=1}^l E(B_j)]$.

G est domatiquement plein ssi pour tout $i=1, \dots, r$, au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée.

1. Dans F_i , il existe un sommet x appartenant à au moins trois cycles B_j .
2. Dans F_i , il existe un sommet x appartenant à exactement deux cycles B_j avec $\deg(x) \geq 5$.
3. Dans F_i , il existe un sommet x appartenant à exactement un cycle B_j avec $\deg(x) \geq 4$.

Théorème 3.86 [108] Soit G un graphe bloc-cactus connexe de degré minimum 3. Si $d(G) \neq 3$ alors G est domatiquement plein.

3.7.10.3 Graphes k -critiques

Cockayne [29] a défini un graphe G comme *domatiquement k -critique* si $d(G)=k \geq 2$ et $d(G-e) < k$ pour tout arête $e \in E(G)$.

Zelinka [128] a caractérisé la domination dans les graphes k -critiques.

Théorème 3.87 [128] Si G est un graphe k -critique, alors l'ensemble des sommets de G est l'union de k ensembles dominants deux à deux disjoints V_1, \dots, V_k avec la propriété que pour deux nombres arbitraires différents i, j de l'ensemble $\{1, \dots, k\}$, le sous graphe G_{ij} de G induit par l'union $V_i \cup V_j$ est un graphe biparti et toutes ses composantes connexes sont des étoiles.

Théorème 3.88 [128] Un graphe G est domatiquement plein, régulier, d'ordre n ssi le nombre domatique d divise n . Un tel graphe est aussi domatiquement d -critique et sa structure est comme suit : L'ensemble de ses sommets est l'union de d ensembles deux à deux disjoints V_1, \dots, V_d où chacun d'eux contient $\frac{n}{d}$ éléments avec la propriété que le sous graphe $G_{i,j}$ de G induit par l'union $V_i \cup V_j$ (où i et j sont deux nombres arbitraires de l'ensemble $\{1, \dots, d\}$) est un graphe régulier de degré 1.

Théorème 3.89 [104] Tout graphe 2-critique ou 3-critique est domatiquement plein. Pour tout $k \geq 4$, il existe un graphe k -critique non domatiquement plein.

3.7.11 Graphe de permutation

Théorème 3.90 [91] Tout graphe de permutation régulier de degré pair n'est pas domatiquement plein.

3.8 Relations entre le nombre domatique et nombre de domination

Nous présentons ici des bornes concernant le produit et la somme de deux paramètres de domination $\gamma(G)$ et $d(G)$.

Théorème 3.91 [31] Pour tout graphe d'ordre n , $\gamma(G).d(G) \leq n$.

Théorème 3.92 [73] Pour tout graphe G , $\gamma(\overline{G}) \leq d(G)$.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Théorème 3.47.

Corollaire 3.93 [42] Soit G un graphe cubique d'ordre n . Si $d(G) = d(\overline{G})$, alors $\gamma(G) = \gamma(\overline{G}) = 2$.

3.8.1 Bornes pour $\gamma(G)+d(G)$

Cockayne et Hedetniemi ont établi une borne sur la somme du nombre de domination et du nombre domatique d'un graphe.

Théorème 3.94 [31] Pour tout graphe G d'ordre n , $\gamma(G)+d(G) \leq n+1$. L'égalité est vérifiée ssi $G=K_n$ ou $G=\overline{K}_n$.

Ce théorème a été amélioré lorsque G et \bar{G} sont sans sommets isolés.

Théorème 3.95 [63] Si G et \bar{G} n'ont aucun sommet isolé, alors

$$\gamma(G)+d(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 2 .$$

Corollaire 3.96 [4] Tous les graphes mentionnés dans le Théorème 2.38 du Chapitre 2 satisfont $\gamma(G)+d(G) = \lfloor n/2 \rfloor + 2$.

Théorème 3.97 [4] Si G et \bar{G} sont sans sommets isolés, alors $\gamma(G)+d(G) = \lfloor n/2 \rfloor + 2$ ssi $\{\gamma(G),d(G)\} = \{\lfloor n/2 \rfloor, 2\}$ ou $n=9$ et $\gamma(G) = d(G) = 3$.

Le résultat suivant est une déduction du Théorème 3.98 et du Corollaire 2.36 du Chapitre 2.

Corollaire 3.98 [4] Si F et \bar{F} sont des graphes sans sommets isolés, F est dans la classe \mathcal{G} ssi $n=9$, $\gamma(F)=d(F)=3$ et $\gamma(\bar{F})=2$ ou $2 = \gamma(F) \leq \gamma(\bar{F}) < d(F) = \lfloor n/2 \rfloor$.

3.9 Complexité du problème du nombre domatique

Le problème de la partition domatique (*DPP*) consiste à partitionner les sommets de G en $d(G)$ ensembles dominants. Le problème du nombre domatique (*DNP*) est de décider pour un graphe G et une constante k si $d(G) \geq k$.

Théorème 3.99 [56] Le problème de la partition domatique est NP-dur.

Théorème 3.100 [56] Le problème du nombre domatique est NP-complet pour tout $k \geq 3$.

Plusieurs résultats ont été établis sur DNP pour des classes spéciales de graphes.

Théorème 3.101 [76] Le problème du nombre domatique est NP-complet pour les graphes bipartis pour tout entier fixé $k \geq 3$.

Bonucelli [10] a prouvé que DNP est NP-complet pour les graphes arc circulaire. *Kaplan* et *Shamir* [76] ont montré que le DNP est NP-complet pour le graphe split et le graphe de comparabilité.

Théorème 3.102 [76] Le problème du nombre domatique pour les graphes split est NP-complet pour tout entier fixé $k \geq 3$.

Corollaire 3.103 [76] Le problème du nombre domatique est NP-complet pour les graphes de comparabilité pour tout entier fixé $k \geq 3$.

Un graphe de comparabilité qui a exactement deux orientations transitives est appelé *uniquement partiellement ordonné*.

Corollaire 3.104 [76] Le problème du nombre domatique est NP-complet pour les graphes uniquement partiellement ordonnés pour tout entier fixé $k \geq 3$.

Un graphe est *co-triangulé* si son complémentaire est chordal. Comme les graphes split sont triangulés et co-triangulés [42], on a le résultat suivant :

Corollaire 3.105 [76] Le problème du nombre domatique est NP-complet pour les graphes triangulés et co-triangulés.

Théorème 3.106 [81,103] Déterminer si un graphe k -régulier est domatiquement plein est NP-complet, pour tout $k \geq 3$.

Un grand intérêt a été porté à la construction d'algorithmes exacts à temps exponentiel qui soient meilleurs que l'algorithme à temps exponentiel trivial. En particulier, si l'algorithme trivial s'exécute en temps $O(3^n)$ mais que l'on peut trouver un algorithme $O(c^n)$ pour ce problème avec $c < 3$, alors cet algorithme peut traiter de plus grandes instances de problèmes que l'algorithme trivial dans la même période de temps. Cette différence peut être assez importante en pratique.

Le résultat suivant est une amélioration au temps de complexité de $O(3^n)$.

Corollaire 3.107 [52] Il existe un algorithme pour calculer le nombre domatique d'un graphe G à n sommets en un temps $O(2.8805^n)$.

En particulier, le problème du nombre 3-domatique consiste à déterminer si un graphe donné peut être partitionné en 3 ensembles dominants.

Le premier résultat améliore l'algorithme en $O(3^n)$ pour le problème du nombre 3-domatique est due à *Riege* et *Rothe* [112] qui ont présenté un l'algorithme en $O(2.9416^n)$. Puis, en utilisant le Corollaire 3.108 [52], *Riege*, *Rothe* et *Spakowski* [111] ont apporté une autre amélioration dans le théorème suivant :

Théorème 3.108 [111] Il existe un algorithme exact pour résoudre le problème du nombre 3-domatique en temps $O(2.695^n)$.

Ils ont également prouvés que le problème du nombre 3-domatique dans G peut être résolu avec un degré maximum borné $\Delta(G)$ par un algorithme aléatoire.

D'autre part, des algorithmes efficaces calculant le nombre domatique ont été donnés pour les graphes domatiquement pleins. En effet, la majorité des résultats sont basés sur le fait que les graphes fortement triangulés sont domatiquement pleins [46]. Il existe un algorithme efficace pour calculer une partition domatique pour les graphes fortement triangulés dans [76,100] et les graphes d'intervalles [76,87,88,107].

3.9.1 NP-complétude du nombre domatique pour le graphe représentatif des intervalles d'un poset

Soit P un poset et $G(P)$ le graphe obtenu à partir de P . Les sommets de $G(P)$ sont les points de P et deux sommets sont adjacents s'ils appartiennent à un même intervalle de P .

Théorème 3.109 [96] Le problème du nombre domatique $d(G(P)) \geq k$ est NP-complet, pour tout $k \geq 3$.

Théorème 3.110 [96] Le problème du nombre domatique total $d_r(G(P)) \geq k$ est NP-complet.

3.9.2 NP-complétude de quelques problèmes relatifs à l'hypergraphe des intervalles d'un poset

Soit $\mathcal{H}(P)$ hypergraphe des intervalles d'un poset rangé P et soit k en entier. On définit les problèmes de reconnaissance suivants :

Stable maximum

Soit P un poset et $k \leq |P|$. Déterminer s'il existe un ensemble stable de cardinalité $\geq k$ est le problème de reconnaissance associé au problème du stable maximum. On écrit brièvement : le problème de reconnaissance $\beta_0(\mathcal{H}(P)) \geq k$ (avec P et k donnés).

Recouvrement par arêtes minimum

Soit P un poset et $k \leq |N_0| \cdot |N_{r(P)}|$. Déterminer s'il existe un recouvrement par arêtes de cardinalité $\leq k$ est le problème de reconnaissance associé au problème de recouvrement par arêtes minimum. On écrit brièvement : le problème de reconnaissance $\alpha_1(\mathcal{H}(P)) \leq k$ (avec P et k donnés).

Couplage maximum

Soit P un poset et $k \leq \min\{|N_0|, |N_{r(P)}|\}$. Déterminer s'il existe un couplage de cardinalité $\geq k$ est le problème de reconnaissance associé au problème de couplage maximum. On écrit brièvement : le problème de reconnaissance $\beta_1(\mathcal{H}(P)) \geq k$ (avec P et k donnés).

Recouvrement par sommets minimum

Soit P un poset et $k \leq |P|$. Déterminer s'il existe un recouvrement par sommets de cardinalité $\leq k$ est le problème de reconnaissance associé au problème de recouvrement par sommets minimum. On écrit brièvement : le problème de reconnaissance $\alpha_0(\mathcal{H}(P)) \leq k$ (avec P et k donnés).

Coloration minimum

$\chi(\mathcal{H}(P)) \leq k ; k \leq |P|$: déterminer s'il existe une coloration des sommets de P de cardinalité $\leq k$.

Soit P un poset et $k \leq |P|$. Déterminer s'il existe une coloration des sommets de P de cardinalité $\leq k$ est le problème de reconnaissance associé au problème de coloration minimum. On écrit brièvement : le problème de reconnaissance $\chi(\mathcal{H}(P)) \leq k$ (avec P et k donnés).

Théorème 3.111 [11] Les problèmes de reconnaissance $\beta_0(\mathcal{H}(P)) \geq k$, $\alpha_1(\mathcal{H}(P)) \leq k$, $\beta_1(\mathcal{H}(P)) \geq k$, $\alpha_0(\mathcal{H}(P)) \leq k$ et $\chi(\mathcal{H}(P)) \leq k$, où P et k sont donnés, sont NP-complets.

CHAPITRE 4

NOMBRE DE DOMINATION DANS $G_{n;l,u}$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème du nombre de domination dans $G((B_n)_{l,u})$; le graphe représentatif des intervalles de $(B_n)_{l,u}$ où $(B_n)_{l,u}$ est le sous poset induit par l'union des niveaux consécutifs $\bigcup_{i=l}^u N_i$ du treillis booléen B_n . Suivant les valeurs de l et u , nous proposons dans certains cas des valeurs exactes et dans d'autres cas des bornes.

Notons brièvement $G((B_n)_{l,u})$ par $G_{n;l,u}$ et $\gamma(G_{n;l,u})$ par $\gamma_{n;l,u}$. Les sommets de $G_{n;l,u}$ sont les éléments de $(B_n)_{l,u}$ et deux sommets sont adjacents ssi il existe un intervalle de $(B_n)_{l,u}$ qui les contient.

4.1 Résultats sur le treillis booléen

Dans cette section nous établissons quelques résultats concernant des propriétés du treillis booléen.

Remarque 1

Dans $(B_n)_{l,u}$, deux éléments X et Y sont dans un même intervalle ssi $|X \cap Y| \geq l$ et $|X \cup Y| \leq u$.

Le lemme suivant a déjà été établi dans la littérature. Nous lui donnons ici une preuve.

Lemme 4.1

Si X et Y sont deux éléments du treillis booléen B_n où $r(X) = l$ et $r(Y) = u$, $0 \leq l \leq u \leq n$, alors l'intervalle $[X, Y]$ est isomorphe au treillis booléen B_{u-l} .

Preuve

Soient X et Y deux éléments de B_n qui sont dans un même intervalle, de niveaux respectifs l et u . En supprimant tous les éléments de X dans chaque sous ensemble qui se présente dans l'intervalle $[X, Y]$, nous obtenons l'isomorphisme entre $[X, Y]$ et B_{u-l} . Plus précisément si on considère l'application φ définie de $[X, Y]$ sur B_{u-l} par $\varphi(U) = U \setminus X$, alors φ est bien un isomorphisme. ;

Exemple 1

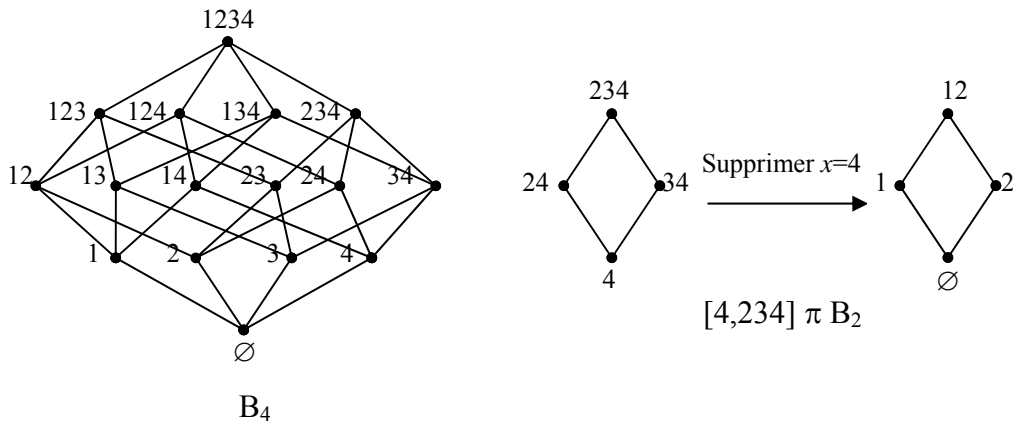


Figure 1.

Le treillis booléen B_n peut être défini à partir de B_{n-1} grâce à l'isomorphisme entre B_n et $B_{n-1} \times C_1$ où C_1 est une chaîne de longueur 1. Ainsi, le diagramme de Hasse de B_n est obtenu en traçant deux copies de B_{n-1} , et en reliant les éléments correspondants de chaque copie s'ils sont reliés dans B_{n-1} .

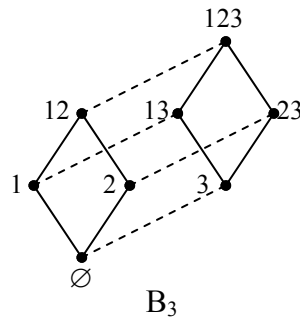


Figure 2.

Notons par $D_{n;l,u}$ un ensemble dominant du graphe $G_{n;l,u}$.

Lemme 4.2

L'ensemble $D_{n-1;l,u} \cup \{v \cup \{n\}, v \in D_{n-1;l-1,u-1}\}$ avec $0 < l \leq u < n$, est un ensemble dominant de $G_{n;l,u}$.

Preuve

Notons par $(B_n')_{l,u}$ (resp. $(B_n'')_{l,u}$) le sous poset induit par les éléments de B_n qui contiennent (resp. ne contiennent pas) l'élément n . $(B_n')_{l,u}$ et $(B_n'')_{l,u}$ sont isomorphes à $(B_{n-1})_{l-1,u-1}$ et $(B_{n-1})_{l,u}$ respectivement.

Soient $l, u, n \in \mathbb{N}$ tels que $0 < l \leq u < n$ et soit $D'_{n;l,u} = \{v \cup \{n\}, v \in D_{n-1;l-1,u-1}\}$. Si $x \notin D_{n-1;l,u} \cup D'_{n;l,u}$ alors $x \notin D_{n-1;l,u}$ et $x \notin D'_{n;l,u}$. Comme $D_{n-1;l,u}$ (resp. $D'_{n;l,u}$) est un ensemble dominant alors pour tout $x \in V/D_{n-1;l,u}$ (resp. $x \in V/D'_{n;l,u}$), il existe $y \in D_{n-1;l,u}$ (resp. $y \in D'_{n;l,u}$) adjacent à x . Donc pour tout $x \notin D_{n-1;l,u} \cup D'_{n;l,u}$, il existe $y \in D_{n-1;l,u} \cup D'_{n;l,u}$ adjacent à x . D'où $D_{n-1;l,u} \cup D'_{n;l,u}$ est un ensemble dominant de $G_{n;l,u}$. ;

4.2 Nombre de domination de $G_{n;l,u}$

Interprétation combinatoire de $\gamma_{n;l,u}$

Soient $n, l, u \in \mathbb{N}$, tels que $0 \leq l \leq u \leq n$. On dit que D a la propriété \mathcal{P} si :

$$\forall X, X \notin D, l \leq |X| \leq u, \exists Y \in D, l \leq |X \cap Y| \text{ et } |X \cup Y| \leq u.$$

Il est clair que D est un ensemble dominant dans $G_{n;l,u}$ ssi D vérifie \mathcal{P} .

Nous nous intéressons à la cardinalité minimum $\gamma_{n;l,u}$ d'un ensemble $D \subset \{1, \dots, n\}$ vérifiant la propriété \mathcal{P} .

Proposition 4.3

Si $l < u \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ou $(l < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < u \leq n-l)$, alors $\gamma_{n;l,u} \leq \binom{n}{l}$.

Si $u > l \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ou $(l < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \text{ et } u \geq n-l > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$, alors $\gamma_{n;l,u} \leq \binom{n}{u}$.

Preuve

Soit $l \leq i \leq u$. Chaque niveau N_i de $(B_n)_{l,u}$ représente un ensemble dominant de $G_{n;l,u}$ donc $\gamma_{n;l,u} \leq \binom{n}{i}$. De plus, dans B_n les nombres de Whitney sont unimodaux et symétriques, nous avons donc, $\gamma_{n;l,u} \leq \min \left\{ \binom{n}{l}, \binom{n}{u} \right\}$.

Nous distinguons 3 cas:

a) Si $l < u \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ alors $|N_l| \leq |N_u|$ donc $\gamma_{n;l,u} \leq |N_l| = \binom{n}{l}$,

b) Si $u > l \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ alors $|N_u| \leq |N_l|$ donc $\gamma_{n;l,u} \leq |N_u| = \binom{n}{u}$,

c) Si $l < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ et $u > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ alors,

1) si $u \geq n-l$ nous avons $|N_u| \leq |N_l|$ donc $\gamma_{n;l,u} \leq |N_u| = \binom{n}{u}$.

2) si $u \leq n-l$ nous avons $|N_l| \leq |N_u|$ donc $\gamma_{n;l,u} \leq |N_l| = \binom{n}{l}$. ;

Remarque 2

Comme B_n est isomorphe à son dual, nous avons : $G_{n;l,u} \cong G_{n;n-u,n-l}$ et par suite $\gamma_{n;l,u} = \gamma_{n;n-u,n-l}$.

4.2.1 Procédure de recherche de D_{min}

Trouver un ensemble de sommets qui domine G revient à partitionner les sommets de G en deux ensembles : l'ensemble dominant S et l'ensemble dominé $V-S$.

Trouver un ensemble dominant de cardinalité minimum est NP-dur, d'où la nécessité de construire un algorithme approximatif qui donne une solution approchée.

Nous présentons un algorithme glouton très simple pour un graphe quelconque. Soit v un sommet du graphe, notons par $w(u)$ le nombre de sommets non dominés parmi les éléments du voisinage fermé de u .

Algorithme glouton

- $D := \emptyset$;
- Tant qu'il existe des sommets non dominés, faire
- $v := \{v : w(v) = \max_u \{w(u)\}\}$;
- $D := D \cup v$;
- Fin.

Cet algorithme fournit une approximation pour le nombre de domination.

Théorème 4.4 [82] L'algorithme glouton calcule une $\ln \Delta(G)$ -approximation, où l'ensemble dominant calculé D et l'ensemble dominant optimal D^* vérifient

$$\frac{|D|}{|D^*|} \leq \ln \Delta(G).$$

Cette approximation représente une borne inférieure pour $\gamma(G)$. De plus $|D|$ est une

borne supérieure pour $\gamma(G)$. D'où $\frac{|D|}{\ln \Delta(G)} \leq \gamma(G) \leq |D|$.

4.2.2 Nombre de domination de $G_{n;l,l+1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\gamma_{n, n-1, n} = 1$ puisque l'élément $[n] = \{1, \dots, n\}$ est un sommet dominant. Pour $l < n-1$, nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.5

Pour tout $l, n \in \mathbb{N}^*$, $l < n-1$, $n \geq 3$, nous avons $\gamma_{n, l, l+1} \leq \prod_{i=1}^l \left(\frac{n-i}{i} \right)$.

Preuve

Nous montrons ce résultat par récurrence.

Si $n = 3$ alors $l = 1$ et nous avons $\gamma_{3;1,2} = \prod_{i=1}^1 \left(\frac{n-i}{i} \right) = 2$.

Supposons que $\gamma_{n-1;l,l+1} \leq \prod_{i=1}^l \left(\frac{(n-1)-i}{i} \right)$ et montrons que $\gamma_{n;l,l+1} \leq \prod_{i=1}^l \left(\frac{n-i}{i} \right)$.

D'après le Lemme 4.2, l'union disjointe $D_{n-1;l,l+1} \cup D'_{n;l,l+1}$, où $D'_{n;l,l+1}$ est isomorphe à $D_{n-1;l-1,l}$, représente un ensemble dominant de $G_{n;l,l+1}$. En particulier pour les ensembles dominants optimaux, nous avons

$$\gamma_{n;l,l+1} \leq \gamma_{n-1;l,l+1} + \gamma_{n-1;l-1,l} \leq |D_{n-1;l,l+1}| + |D'_{n;l,l+1}| = |D_{n-1;l,l+1}| + |D_{n-1;l-1,l}|$$

$$\text{D'où, } \gamma_{n;l,l+1} \leq \prod_{i=1}^l \left(\frac{(n-1)-i}{i} \right) + \prod_{i=1}^{l-1} \left(\frac{(n-1)-i}{i} \right).$$

$$\text{c.à.d, } \gamma_{n;l,l+1} \leq \frac{(n-2)(n-3)\dots(n-l-1)}{1\dots l} + \frac{(n-2)(n-3)\dots(n-l)}{1\dots(l-1)}.$$

$$\text{et par suite } \gamma_{n;l,l+1} \leq \frac{(n-2)(n-3)\dots(n-l-1)[1+(n-l).l]}{1\dots l}.$$

Or : $l < n-1$ donc $(n-l).l < (n-l)(n-1)$ et par suite $1+(n-l).l \leq (n-l)(n-1)$.

$$\text{Ainsi } \gamma_{n;l,l+1} \leq \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-l-1)(n-l)}{1\dots l}.$$

$$\text{Il s'ensuit, } \gamma_{n;l,l+1} \leq \prod_{i=1}^l \left(\frac{n-i}{i} \right). \quad ;$$

4.2.3 Nombre de domination de $G_{n;l,n}$

Notons que $\gamma_{n;l,n} = \gamma_{n;\emptyset,n-l} = 1$, car il existe un unique élément $\{1, \dots, n\}$ (resp. \emptyset) dans N_n (resp. N_0) adjacent à tous les autres éléments de $G_{n;l,n}$ (resp. $G_{n;\emptyset,n-l}$), donc cet élément est un sommet dominant de $G_{n;l,n}$ (resp. $G_{n;\emptyset,n-l}$) de taille minimale.

4.2.4 Nombre de domination de $G_{n;1,u}$

Soit D_{min} l'ensemble dominant de taille $\gamma_{n;1,u}$ dans $G_{n;1,u}$. Notons par $D_{n;1,u}$ un ensemble dominant du graphe $G_{n;1,u}$.

Proposition 4.6

Pour tout $n, u \in \mathbb{N}^*$, $u \leq n$, nous avons $\gamma_{n;1,u} = \gamma_{n; n-u, n-1} = n-u+1$.

Preuve

Nous établissons la preuve par récurrence sur n :

Si $n = 2$ alors $u = 2$, le résultat est évident. Il suffit de prendre le sommet dominant $D = \{1, 2\}$ qui constitue un dominant optimal.

Supposons que $\gamma_{n-1;1,u} = (n-1)-u+1$ et montrons $\gamma_{n;1,u} = n-u+1$.

Si $D_{n-1;1,u}$ est un ensemble dominant de $G_{n-1;1,u}$, alors l'ensemble $D_{n-1;1,u} \cup [n]$ est un ensemble dominant de $G_{n;1,u}$, puisque les éléments de $G_{n;1,u}$ ne contenant pas n sont dominés par au moins un élément de $D_{n-1;1,u}$ et ceux qui contiennent n sont dominés par $[n]$. Ainsi $\gamma_{n;1,u} \leq \gamma_{n-1;1,u} + 1 = n-u+1$. Comme $\gamma_{n;1,u} > \gamma_{n-1;1,u} = n-u$, on déduit $\gamma_{n;1,u} = n-u+1$.

De plus, l'isomorphisme entre $G_{n;1,u}$ et $G_{n; n-u, n-1}$ conduit à l'égalité entre les invariants $\gamma_{n;1,u}$ et $\gamma_{n; n-u, n-1}$;

CHAPITRE 5

NOMBRE DOMATIQUE DANS $G_{n;l,u}$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème du nombre domatique dans $G((B_n)_{l,u})$. Nous exposons d'abord des résultats concernant le nombre domatique dans la classe de graphe représentatif des intervalles d'un poset puis nous exposons nos résultats sur le nombre domatique de $G((B_n)_{l,u})$, nous proposons dans certains cas des valeurs exactes et dans d'autre cas des bornes.

Dans tout ce qui suivra, nous notons brièvement $(G(B_n)_{l,u})$ par $G_{n;l,u}$ et $\psi(G_{n;l,u})$ par $\psi_{n;l,u}$ où ψ est un invariant de G .

5.1 Nombre domatique de $G(P*Q)$

Plusieurs posets s'obtiennent à partir de la somme ou le produit d'autres posets, citons par exemple le cas du treillis booléen qui est isomorphe au produit direct de n chaînes de longueur une, et le treillis des faces du n -cube C_n qui est isomorphe au produit de n posets [133],...etc. D'où l'intérêt d'étudier certaines propriétés sur ces opérations.

Soit $G(P)$ le graphe représentatif des intervalles d'un poset P .

Proposition 5.1 [96] Soient P et Q deux posets, alors

$$d(G(P+Q)) = \min\{d(G(P)), d(G(Q))\}.$$

Proposition 5.2 [96] Soient P et Q deux posets, alors $d(G(P\oplus Q)) \geq d(G(P)) + d(G(Q))$.

Le résultat suivant découle immédiatement de la Proposition 5.2.

Conséquence 5.3 [96] Si P et Q sont deux posets rangés alors :

$$\forall l, u \text{ tel que } 0 \leq l \leq u \leq r(P) + r(Q) + 1, d(G(P\oplus Q)_{l,u}) \geq d(G(P_{l,r(P)})) + d(G(Q_{0,u-r(P)-1})).$$

Conséquence 5.4 [96]

1. Si Q est un ordre série-parallèle connexe alors :

$$d(G(P\oplus Q)) \geq d(G(P)) + |\min(Q)| + d(G(Q_0)) \text{ où } Q_0 \text{ est un sous poset induit par } Q\text{-}\min(Q) \text{ et } \min(Q) \text{ est l'ensemble des éléments minimaux de } Q.$$

2. Si P est un ordre série-parallèle connexe alors :

$$d(G(P\oplus Q)) \geq d(G(Q)) + |\max(P)| + d(G(P_r)) \text{ où } P_r \text{ est un sous poset induit par } P\text{-}\max(P) \text{ et } \max(P) \text{ est l'ensemble des éléments maximaux de } P.$$

Proposition 5.5 [12] Si P et Q sont deux posets, alors $d(G(P \times Q)) \geq d(G(P)) \cdot d(G(Q))$.

Proposition 5.6 [12] Si P et Q sont deux posets tels que $G(P)$ et $G(Q)$ sont domatiquement pleins, alors $d(G(P \times Q)) = d(G(P)) \cdot d(G(Q))$.

Proposition 5.7 [96] Soient P un poset et P_n une chaîne de longueur n , alors

$$d(G(P_n \times P)) \geq (n+1)d(G(P)).$$

Corollaire 5.8 [96] Soient P un poset et P_n une chaîne de longueur n . Si G est domatiquement plein alors $d(G(P_n \times P)) = (n+1)d(G(P))$.

5.2 Le nombre domatique de $G(P_{n_1} \times P_{n_2})_{l,u}$

Soit $P = P_{n_1} \times P_{n_2}$ le produit direct de deux chaînes de longueur respectivement n_1 et n_2 . $P_{l,u}$ est le sous poset induit par l'union des niveaux consécutifs de P , $P_{l,u} = N_1 \cup \dots \cup N_u$, $0 \leq l \leq u \leq n_1 + n_2$ et $d(G_{l,u})$ est le nombre domatique du graphe représentatif de ses intervalles maximaux.

Par l'isomorphisme existant entre $P_{n_1} \times P_{n_2}$ et $P_{n_2} \times P_{n_1}$, on suppose sans perte de généralité que $n_1 \leq n_2$.

Proposition 5.9 [96] Si $l \leq u - n_2$ alors l'intervalle $D = [(l, l), (u - n_2, u - n_1)]$ représente l'ensemble des sommets dominants de $G_{l,u}$.

Lemme 5.10 [96] L'intervalle $[(i, j), (i', j')]$ est isomorphe au produit $P_{i'-i} \times P_{j'-j}$, $\forall i, i', j, j' \in \mathbb{N}$ tel que $i \leq i'$ et $j \leq j'$.

Théorème 5.11 [96] Si $(u > n_2$ et $l \geq n_1)$ ou $u \leq n_2$, alors $d(G_{l,u}) = u - l + 1$.

Théorème 5.12 [96] Pour tout l, u tel que $l < n_1$ et $u > n_2$ ou $u \leq n_2$, on a

$$d(G_{l,u}) = \begin{cases} (u - n_2 + 1)(n_2 - l + 1) & \text{si } l + u \leq n_1 + n_2, \\ (u - n_1 + 1)(n_1 - l + 1) & \text{si } l + u > n_1 + n_2. \end{cases}$$

5.3 Nombre domatique de $G_{n;l,u}$

Interprétation combinatoire de $d_{n;l,u}$

Soient $n, l, u \in \mathbb{N}$, tel que $0 \leq l \leq u \leq n$. On dit que D a la propriété \mathcal{P} si :

$$\forall X, X \notin D, l \leq |X| \leq u, \exists Y \in D, l \leq |X \cap Y| \text{ et } |X \cup Y| \leq u.$$

Nous nous intéressons à la taille maximale $d_{n;l,u}$ d'une partition de l'ensemble $\{X \subset [n] : l \leq |X| \leq u\}$ en sous ensembles ayant la propriété \mathcal{P} .

Proposition 5.13

Pour tout n, l, u tel que $l \leq u \leq n$, nous avons $d_{n;l,u} \geq u-l+1$.

Preuve

Soit N_i le $i^{\text{ème}}$ niveau de B_n , $l \leq i \leq u$. La famille $\{N_l, N_{l+1}, \dots, N_u\}$ représente une partition domatique de $G_{n;l,u}$ D'où $d_{n;l,u} \geq u-l+1$. ;

Proposition 5.14

Si $n-l > \delta_{n;l,u}$, alors $G_{n;l,u}$ n'est pas domatiquement plein.

Preuve

Soient $n, l, u \in \mathbb{N}^*$, $l \leq u \leq n$ et $n-l > \delta_{n;l,u}$. Supposons que $d_{n;l,u} = \delta_{n;l,u} + 1$ et considérons une partition domatique $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_{\delta_{n;l,u}+1}\}$ de $G_{n;l,u}$. En attribuant aux sommets de D_i la couleur i pour tout $i \in \{1, 2, \dots, \delta_{n;l,u} + 1\}$, nous pouvons dire que tout voisinage fermé d'un sommet de D_i contient les $\delta_{n;l,u} + 1$ couleurs.

Soit $x_i \in N_l$ tel que $x_i = \{1, 2, \dots, l-1, l+i\}$ où $i \in \{0, \dots, n-l\}$. Le sous ensemble A défini par $A = \{x_i, i=0, \dots, n-l\}$ vérifie $|A| > \delta_{n;l,u} + 1$. Par suite, il y a au moins 2 sommets x et y de A qui ont la même couleur. Soit $w \in N_j$, $j \in \{l+1, \dots, u\}$ tel que $x < w$ et $y < w$ et $\delta_{n;l,u} = \text{deg}(w)$. Le voisinage fermé de w contient au plus $\delta_{n;l,u}$ couleurs, donc il existe $k \in \{1, 2, \dots, \delta_{n;l,u} + 1\}$ tel que w n'est pas adjacent dans $G_{n;l,u}$ à un élément de D_k . Ceci contredit le fait que D_k est un ensemble dominant.

Ainsi $d_{n;l,u} \neq \delta_{n;l,u} + 1$ et $G_{n;l,u}$ n'est pas domatiquement plein. ;

Remarque 1

Comme B_n est isomorphe à son dual on a : $G_{n;l,u} \pi G_{n;n-u,n-l}$, et par suite $d_{n;l,u} = d_{n;n-u,n-l}$.

5.3.1 Nombre domatique de $G_{n;l,l+1}$ **Lemme 5.15**

Pour tout $l, n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\delta_{n;l,l+1} = \min \{n-l, l+1\}$.

Preuve

Soient $l, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $l \leq n$. Notons par $deg_{l,n}(u)$ (resp. $deg_{l,n}(v)$) le nombre de voisins de u (resp. v) dans $G_{n;l,l+1}$. Comme B_n est régulier nous avons

$$\delta_{n;l,l+1} = \min \{ deg_{l,n}(u), deg_{l,n}(v) \}, \forall u \in N_l \text{ et } v \in N_{l+1}.$$

Et d'après Lemme 4.1 du Chapitre 4, nous avons $[u, 12\dots n] \pi B_{n-l}$. Ainsi $deg_{l,n}(u) = |R^+(\{u\})| = |N_l(B_{n-l})| = n-l$.

De même, nous avons $[\emptyset, v] \pi B_{l+1}$ et par suite $deg_{l,n}(v) = |R^-(\{v\})| = |N_l(B_{l+1})| = l+1$.

D'où $\delta_{n;l,l+1} = \min \{ n-l, l+1 \}$. ;

Lemme 5.16

Pour tout $l, n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $d_{n;l,l+1} \leq l+2$ si $l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ et $d_{n;l,l+1} \leq n-l+1$ si $l \geq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

Preuve

On a $n-l \geq l+1$ ssi $l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. D'après Lemme 5.15, on a $\delta_{n;l,l+1} = l+1$ si $l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, or $d_{n;l,l+1} \leq \delta_{n;l,l+1} + 1$ d'où $d_{n;l,l+1} \leq l+2$.

De même, on a $n-l \leq l+1$ ssi $l \geq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. D'après Lemme 5.15, on a $\delta_{n;l,l+1} = n-l$ si $l \geq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, or $d_{n;l,l+1} \leq \delta_{n;l,l+1} + 1$ alors $d_{n;l,l+1} \leq n-l+1$. ;

Dans le cas où $n \geq 2(l+1)$ on a $\delta_{n;l,l+1} = l+1$ d'après Lemme 5.15 et Proposition 5.14, et le Corollaire 5.17 en découle.

Corollaire 5.17

si $n \geq 2(l+1)$, alors $2 \leq d_{n;l,l+1} \leq l+1$.

5.3.1.1 Nombre domatique de $G_{n;1,2}$

Corollaire 5.18

Si $n \geq 4$ alors $d_{n;1,2} = d_{n;n-2,n-1} = 2$. De plus $G_{n;1,2}$ et $G_{n;n-2,n-1}$ ne sont pas domatiquement pleins.

Preuve

Pour $l=1$, le résultat découle immédiatement du Corollaire 5.17.

La partition $\mathcal{D} = \{N_1, N_2\}$ (resp. $\mathcal{D} = \{N_{n-2}, N_{n-1}\}$) est une partition domatique de $G_{n;1,2}$ (resp. $G_{n;n-2,n-1}$) de taille 2.

Notons que $\forall x \in N_1, |\mathcal{R}^+(\{x\})| = n-1$ et $\forall x \in N_2, |\mathcal{R}^-(\{x\})| = 2$;

Remarque 2

$G_{n;1,2}$ est domatiquement plein ssi $n \leq 3$, puisque $d_{2;1,2} = 2$ en considérant la partition $\mathcal{D} = \{\{12\}, \{1,2\}\}$ et $d_{3;1,2} = 3$ en considérant la partition $\mathcal{D} = \{\{1,23\}, \{2,13\}, \{3,12\}\}$.

5.3.1.2 Nombre domatique de $G_{n;2,3}$

Nous donnons dans cette section des résultats exacts concernant le nombre domatique de $G_{n;2,3}$. Nous vérifions que $d_{n;2,3}=3$ lorsque $5 \leq n \leq 12$ puis nous prouvons que $d_{n;2,3}=2$ pour tout $n \geq 17$.

Remarque 3

La partition domatique est obtenue en utilisant la coloration domatique défini dans le Chapitre 1. La procédure de coloration est comme suit :

On suppose que $d(G) = \delta+1$ alors pour tout sommet x de G , le voisinage fermé de x doit contenir $\delta+1$ couleurs différentes. Dès qu'un sommet est coloré, le choix des couleurs pour les sommets de son voisinage est restreint, on obtient alors une arborescence de toutes les couleurs possibles pour les sommets de G qu'on explore un à un jusqu'à ce que tous les sommets soient colorés, sinon si un sommet ne peut être coloré par les $\delta+1$ couleurs, on réduit le nombre de couleurs de 1, et on répète la procédure jusqu'à obtention d'une partition domatique.

$d_{4;2,3} = 2$:

$G_{4;2,3}$ est le dual de $G_{4;1,2}$. D'où $d_{4;2,3} = d_{4;1,2} = 2$ avec $\mathcal{D} = \{N_2, N_3\}$.

$d_{5;2,3} = 3$:

On a $2 \leq d_{5;2,3} \leq \delta_{5;2,3} + 1 = 4$. Montrons que $d_{5;2,3} = 3$.

Supposons que $d_{5;2,3} = 4$ et soit $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_4\}$ une partition domatique de $G_{5;2,3}$.

Soit x un sommet de $G_{5;2,3}$, alors pour tout D_i , $i=1, \dots, 4$, il existe un sommet de $N[x]$ qui appartient à D_i .

Supposons sans perte de généralité que $12 \in D_1$, $13 \in D_2$, $23 \in D_3$, $123 \in D_4$, alors $124 \in D_2$ ou D_3 car 124 et $123 \in N[12]$ (les sommets d'un même voisinage fermé doivent être de $\delta+1$ couleurs différentes).

Si $124 \in D_2$ alors $24 \in D_4$ (car 12 et $24 \in N[124]$ et 23 et $24 \in N[234]$) et $234 \in D_1$ (car 123 et $234 \in N[23]$ et 124 et $234 \in N[24]$). De plus $34 \in D_2$ (car 23 , 24 et $34 \in N[234]$), mais 13 et $34 \in N[134]$ alors $34 \notin D_2$. Contradiction.

Si $124 \in D_3$ alors $14 \in D_4$ (car 12 et $14 \in N[124]$ et 13 et $14 \in N[134]$) et $134 \in D_1$ (car 123 et $134 \in N[13]$ et 124 et $134 \in N[14]$). De plus $34 \in D_3$ (car 13 , 14 et $34 \in N[134]$), mais 23 et $34 \in N[234]$ alors $34 \notin D_3$. Contradiction.

Donc $d_{5;2,3} \neq 4$. De plus on a $d_{5;2,3} \geq 3$, où

$$D_1(G_{5;2,3}) = \{12, 15, 34, 123, 145, 235, 245\}$$

$$D_2(G_{5;2,3}) = \{13, 25, 45, 124, 135, 234\}$$

$$D_3(G_{5;2,3}) = \{14, 23, 24, 35, 125, 134, 345\}$$

D'où $d_{5;2,3} = 3$.

$d_{6;2,3} = 3$:

D'après Corollaire 5.17, on a $d_{6;2,3} \leq 3$. Montrons que $d_{6;2,3} = 3$.

En utilisant Lemme 4.2 du Chapitre 4, on a $D_{5;2,3} \cup D'_{6;2,3}$ est un ensemble dominant de $G_{6;2,3}$ où $(B_6')_{2,3}$ est l'ensemble des éléments de B_6 qui contiennent l'élément 6.

Comme $d_{5;2,3} = 3$, alors on peut démarrer de la partition de $G_{5;2,3}$ en 3 ensembles dominants et on continue la coloration pour les éléments restants de $G_{6;2,3}$. On obtient $d_{6;2,3} \geq 3$ où

$$D_1(G_{6;2,3}) = D_1(G_{5;2,3}) \cup \{36, 146, 246, 256, 456\}$$

$$D_2(G_{6;2,3}) = D_2(G_{5;2,3}) \cup \{16, 46, 236, 356\}$$

$$D_3(G_{6;2,3}) = D_3(G_{5;2,3}) \cup \{26, 56, 126, 136, 156, 346\}$$

Par suite $d_{6;2,3} = 3$.

On procède de la même manière pour tout $7 \leq n \leq 12$, et d'après Corollaire 5.17, on a $\forall n \geq 6, 2 \leq d_{n;2,3} \leq 3$. On obtient alors

$d_{7;2,3} = 3$ où

$$D_1(G_{7;2,3}) = D_1(G_{6;2,3}) \cup \{37, 57, 147, 167, 247, 267, 467\}$$

$$D_2(G_{7;2,3}) = D_2(G_{6;2,3}) \cup \{17, 27, 47, 357, 367, 567\}$$

$$D_3(G_{7;2,3}) = D_3(G_{6;2,3}) \cup \{67, 127, 137, 157, 237, 257, 347, 457\}$$

$d_{8;2,3} = 3$ où

$$D_1(G_{8;2,3}) = D_1(G_{7;2,3}) \cup \{48, 58, 68, 138, 178, 238, 278\}$$

$$D_2(G_{8;2,3}) = D_2(G_{7;2,3}) \cup \{18, 28, 348, 358, 368, 378, 568, 578, 678\}$$

$$D_3(G_{8;2,3}) = D_3(G_{7;2,3}) \cup \{38, 78, 128, 148, 158, 168, 248, 258, 268, 458, 468, 478\}$$

$d_{9;2,3} = 3$ où

$$D_1(G_{9;2,3}) = D_1(G_{8;2,3}) \cup \{29, 79, 89, 139, 149, 169, 359, 459, 469, 569\}$$

$$D_2(G_{9;2,3}) = D_2(G_{8;2,3}) \cup \{19, 59, 239, 249, 269, 349, 369, 379, 389, 479, 489, 679, 689, 789\}$$

$$D_3(G_{9;2,3}) = D_3(G_{8;2,3}) \cup \{39, 49, 69, 129, 159, 179, 189, 259, 279, 289, 579, 589\}$$

$d_{10;2,3}=3$ où

$$D_1(G_{10;2,3})=D_1(G_{9;2,3})\cup\{110,610,710,2310,2410,2510,2810,3510,3810,3910,4510,4910,5910\}$$

$$D_2(G_{10;2,3})=D_2(G_{9;2,3})\cup\{210,310,410,910,1510,5610,5710,5810,6710,6810,7810\}$$

$$D_3(G_{10;2,3})=D_3(G_{9;2,3})\cup\{510,810,1210,1310,1410,1610,1710,1810,1910,2610,2710,2910,3410,3610,3710,4610,4710,4810,6910,7910,8910\}$$

$d_{11;2,3}=3$ où

$$D_1(G_{11;2,3})=D_1(G_{10;2,3})\cup\{111,411,611,2311,2511,2711,2811,21011,3511,3811,3911,31011,5911,51011,7811,81011,91011\}$$

$$D_2(G_{11;2,3})=D_2(G_{10;2,3})\cup\{311,511,711,811,1211,1411,11011,2411,2611,2911,4911,6911,61011\}$$

$$D_3(G_{11;2,3})=D_3(G_{10;2,3})\cup\{211,911,1011,1311,1511,1611,1711,1811,1911,3411,3611,3711,4511,4611,4711,4811,41011,5611,5711,4811,6711,6811,7911,71011,8911\}$$

$d_{12;2,3}=3$ où

$$D_1(G_{12;2,3})=D_1(G_{11;2,3})\cup\{212,412,512,1012,1312,1612,1712,1812,1912,3812,3912,31112,6712,6912,7812,71112,81112,91112\}$$

$$D_2(G_{12;2,3})=D_2(G_{11;2,3})\cup\{612,712,812,912,1212,1412,1512,11012,11112,2312,2412,21112,3512,3612,41112,5612,51012,101112\}$$

$$D_3(G_{12;2,3})=D_3(G_{11;2,3})\cup\{112,312,1112,2512,2612,2712,2812,2912,21012,3412,3712,31012,4512,4612,4712,4812,4912,41012,5712,5812,5912,51112,6812,61012,61112,7912,71012,8912,81012,91012\}$$

Proposition 5.19

Si $n \geq 17$, alors $d_{n,2,3} = 2$.

Preuve

Soit $n \geq 17$. Alors nous avons $d_{n,2,3} \leq 3$ d'après Proposition 5.14.

Supposons que $d_{n,2,3} = 3$. Alors il existe $i_0 \in \{1,2,3\}$ tel que : $|D_{i_0} \cap \{\{1,n\}, \dots, \{n-1,n\}\}| \geq 6$.

Supposons sans perte de généralité que $i_0=1$ et $\{1,n\}, \dots, \{6,n\} \in D_1$. Il s'ensuit que les sous ensembles $A \subset \{1, \dots, 6, n\}$ tel que $|A|=3$ et $n \in A$ sont dans $D_2 \cup D_3$. De plus, si $\{i,j,n\} \in D_2$ (resp. D_3) et $\{i,j\} \subset \{1, \dots, 6\}$ alors $\{i,j\} \in D_3$ (resp. D_2) car D_3 (resp. D_2) est un ensemble dominant. Ainsi les sous ensembles $\{i,j\} \subset \{1, \dots, 6\}$ appartiennent à D_2 ou D_3 .

Il existe trois éléments parmi $\{1,2\}, \{1,3\}, \dots, \{1,6\}$ qui sont dans D_2 ou D_3 . Supposons sans perte de généralité que $\{1,i\}, \{1,j\}, \{1,k\} \in D_2$. De $\{1,i\}, \{1,j\} \in D_2$ on déduit que $\{1,i,j\} \in D_1$ et donc $\{i,j\} \in D_3$. De même $\{1,i\}, \{1,k\} \in D_2$ (resp. $\{1,j\}, \{1,k\}$) implique que $\{1,i,k\} \in D_1$ (resp. $\{1,j,k\}$) et donc $\{i,k\} \in D_3$ (resp. $\{j,k\}$). Finalement, nous obtenons $\{i,j\}, \{i,k\}, \{j,k\} \in D_3$, qui implique que D_1 (resp. D_2) n'est pas un ensemble dominant si $\{i,j,k\} \in D_2$ (resp. D_1). Absurde.

Donc $d_{n,2,3} \leq 2$ et comme $d_{n,2,3} \geq 2$ alors $d_{n,2,3} = 2$.

5.3.1.3 Nombre domatique de $G_{n,3,4}$

Nous donnons dans cette section quelques résultats exacts concernant le nombre domatique de $G_{n,3,4}$.

$d_{5;3,4} = d_{5;1,2} = 2$ avec $\mathcal{D} = \{N_3, N_4\}$.

$d_{6;3,4} = d_{6;2,3} = 3$, où

$D_1(G_{6,3,4}) = \{123, 126, 235, 345, 456, 1245, 1346, 1356, 2346, 2456\}$.

$D_2(G_{6,3,4}) = \{135, 136, 245, 246, 346, 1234, 1256, 1345, 1456, 2356\}$

$D_3(G_{6,3,4}) = \{134, 145, 156, 236, 256, 1235, 1236, 1246, 2345, 3456, 124, 125, 146, 234, 256, 356\}$.

De plus d'après Corollaire 5.17, on a $2 \leq d_{n,3,4} \leq 4$, $\forall n \geq 8$.

5.3.2 Nombre domatique de $G_{n;1,n-1}$

Proposition 5.20

Nous avons $d_{n;1,n-1} = 2^{n-1} - 1$ et $G_{n;1,n-1}$ est domatiquement plein. De plus $\mathcal{D}_{n;1,n-1} = \{\{x, \bar{x}\}, x \in (B_n)_{1,n-1}\}$ est une partition domatique de $G_{n;1,n-1}$.

Preuve

Soit x un élément de $(B_n)_{1,n-1}$, et soit \bar{x} son complémentaire, x et \bar{x} n'appartiennent pas à un même intervalle, car $x \cap y = \emptyset \notin (B_n)_{1,n-1}$.

Soit $x = \{x_1, \dots, x_p\}$, $\bar{x} = \{x_{p+1}, \dots, x_n\}$, où $p \geq 1$, et soit y un élément de $(B_n)_{1,n-1}$, alors deux cas se présentent :

- 1) y est dans le même intervalle que x donc $|x \cap y| \geq 1$ et $|x \cup y| \leq n-1$.
- 2) y n'est pas dans le même intervalle que x alors $x \cap y = \emptyset$ ou $x \cup y = [n]$.

Si $x \cap y = \emptyset$ alors $y \subseteq \bar{x}$ et si $x \cup y = [n]$ alors $\overline{x \cup y} = \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$ c.à.d $\bar{x} \subseteq y$.

Ainsi y est dans le même intervalle que \bar{x} .

On déduit que tout élément de $B_{n;1,n-1}$ est dans le même intervalle maximal que x ou \bar{x} . D'où $D = \{x, \bar{x}\}$ est un ensemble dominant de $G_{n;1,n-1}$.

Par suite, $(B_n)_{1,n-1}$ peut être partitionné en $|V(G_{n;1,n-1})|/2$ ensembles dominants, or $|V(G_{n;1,n-1})| = |V(G_{n;\emptyset,n})| - 2 = 2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1)$ d'où $2^{n-1} - 1 \leq d_{n;1,n-1}$.

Par ailleurs, $d_{n;1,n-1} \leq \delta_{n;1,n-1} + 1 \leq \deg\{1\} + 1$.

Comme l'intervalle $[1, 1..n] \in B_{n-1}$, alors $V(B_{n-1}) = 2^{n-1}$, et $\deg\{1\}$ dans $G_{n;1,n}$ est égal à $2^{n-1} - 1$. Ainsi $\deg\{1\}$ dans $G_{n;1,n-1}$ est égal à $2^{n-1} - 2$. De là, on obtient $\delta_{n;1,n-1} + 1 \leq 2^{n-1} - 2 + 1 = 2^{n-1} - 1$.

Il s'ensuit, $2^{n-1} - 1 \leq d_{n;1,n-1} \leq \delta_{n;1,n-1} + 1 \leq 2^{n-1} - 1$. Ainsi, $d_{n;1,n-1} = \delta_{n;1,n-1} + 1 = 2^{n-1} - 1$ et la partition domatique optimale est donnée par : $\mathcal{D}_{n;1,n-1} = \{\{x, \bar{x}\}, x \in (B_n)_{1,n-1}\}$;

5.3.3 Nombre domatique de $G_{n;1,n}$

Proposition 5.21

$d_{n;1,n} = d_{n;\emptyset,n-1} = 2^{n-1}$ et $G_{n;1,n}$ est domatiquement plein. De plus $\mathcal{D}_{n;1,n} = \{1, \dots, n\} \cup \{\{x, \bar{x}\}, x \in (B_n)_{1,n-1}\}$ est une partition domatique de $G_{n;1,n}$.

Preuve

Le sommet $\{1, \dots, n\}$ est adjacent à tous les autres sommets de $G_{n;1,n}$, donc c'est un sommet dominant. En considérant la partition domatique de $G_{n;1,n-1}$ établie dans Proposition 5.20 et ce sommet dominant, on obtient $d_{n;1,n} \geq d_{n;1,n-1} + 1 = 2^{n-1}$.

De plus $\delta_{n;1,n} = \delta_{n;1,n-1} + 1 = 2^{n-1} - 1$ (d'après Proposition 5.20). Par conséquent $d_{n;1,n} \leq \delta_{n;1,n} + 1 = 2^{n-1}$ et nous obtenons $d_{n;1,n} = 2^{n-1}$. La partition domatique optimale de $G_{n;1,n}$ est donnée par $\mathcal{D}_{n;1,n} = \{1, \dots, n\} \cup \{\{x, \bar{x}\}, x \in (B_n)_{1,n-1}\}$. ;

5.3.4 Nombre domatique de $G_{n;1,u}$

Proposition 5.22

Soient $n, u \in \mathbb{N}^*$, $u < n$. Si $n > 2^u - 1$, alors $u \leq d_{n;1,u} = d_{n;n-u,n-1} \leq 2^u - 2$.

Preuve

Soit $x \in N_u$, $u < n$, alors dans $G_{n;1,u}$ on a $\deg\{x\} = 2^u - 2$ car $\deg\{x\} = \sum_{i=1}^{u-1} C_u^i$.

D'après Proposition 5.20, nous avons $\delta_{u+1;1,u} = 2^u - 2 = \deg\{x\} = \delta_{n;1,u}$ puisque $\deg\{x\}$ est indépendant de $n, \forall n > u$.

D'après Proposition 5.14, si $n-l > \delta_{n;l,u}$, alors $d_{n;l,u} \leq \delta_{n;l,u}$ et par suite $d_{n;l,u} \leq 2^u - 2$. De plus, d'après Proposition 5.13, on a $d_{n;1,u} \geq u$.

Par conséquent, nous obtenons $u \leq d_{n;1,u} \leq 2^u - 2$. ;

CONCLUSION

Dans le cadre de ce mémoire nous nous sommes intéressés à l'étude de la domination dans une classe de graphes particulière, à savoir les graphes représentatifs des intervalles de $(B_n)_{l,u}$ où $(B_n)_{l,u}$ est le sous poset induit par l'union les niveaux consécutif $\bigcup_{i=l}^u N_i$ du treillis booléen B_n . Notre but était de déterminer des bornes ou des valeurs exactes pour deux paramètres importants de la domination : le nombre de domination et le nombre domatique.

Dans un premier temps, nous avons réalisé un survey de la majorité des travaux établis dans la littérature concernant le nombre de domination et le nombre domatique d'un graphe.

Puis nous avons établi des résultats concernant des propriétés de $(B_n)_{l,u}$ et la structure d'un ensemble dominant dans son graphe représentatif des intervalles, ensuite nous avons donné des bornes sur le nombre de domination de $G_{n;l,u}$ pour différentes valeurs de l et u . Dans le cas particulier de $\gamma_{n;l,l+1}$, nous avons déterminé une borne supérieure. De plus, une valeur exacte a été déterminée pour $\gamma_{n;1,u}$ et $\gamma_{n;l,n}$ avec l'ensemble dominant minimum associé.

D'autre part, nous avons établi des bornes pour le nombre domatique de $G_{n;l,u}$ suivant des valeurs de l et u , puis nous avons déterminé les valeurs de l et u pour lesquelles $G_{n;l,u}$ est domatiquement plein et nous avons construits la partition domatique optimale correspondante. Dans le dernier résultat, le calcul du degré minimum était très utile pour déterminer une borne supérieure de $d_{n;1,u}$.

Comme perspectives, nous proposons l'étude des problèmes suivants:

- Déterminer une valeur exacte pour le nombre de domination de $G_{n;l,l+1}$.
- Déterminer une valeur exacte pour le nombre domatique de $G_{n;l,n}$.
- Déterminer d'autres valeurs de l et u pour lesquels $G_{n;l,u}$ est domatiquement plein.
- Déterminer le nombre domatique de $G_{n;2,3}$ pour $n = 13,14,15,16$.

REFERENCES

- [1]. R.B. Allan and R. Laskar. On domination and independent domination numbers of a graph. *Discrete Math.* 23: 73-76, (1978).
- [2]. K. Alon and J.H. Spencer. The probabilistic method. John Wiley & Sons, Inc, (1992).
- [3]. V.I. Arnautov. Estimation of the exterior stability number of a graph by means of the minimal degree of the vertices. (*Russian*) *Prikl. Mat. Iprammirovaniye., Vyp.*, 11: 3-8, 126, (1974).
- [4]. X. Baogen, E.J. Cockayne, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, Z. Shangchao. Extremal graphs for inequalities involving domination parameters. *Discrete Mathematics* 216: 1-10 (2000).
- [5]. A.M. Barcalikn and L.F. German. The external stability number of the cartesian product of graphs. *Bul. Akad. Stiince RSS Moldoven*, No. 1: 5-8, 94, (1979).
- [6]. C. Berge. Theory of graphs and its applications. Methuen. London, (1962).
- [7]. C. Berge. Graphes et hypergraphes. Dunod, Paris, (1970).
- [8]. F. Berman, F.T. Leighton, P. Shor and L. Synder. Generalized planar matching. *Technocal report MIT/LCS/TM-273*, MIT, (1985).
- [9]. A.A. Bertossi. Dominating sets for split and bipartite graphs. *Inform. Process. Lett.* 19, 37-40, (1984).
- [10]. M.A. Bonucelli. Dominating sets and domatic number of circular arc graphs. *Discrete. Appl. Math.*, 12: 203-213, (1985).
- [11]. I. Bouchemakh. Sur quelques problèmes extrémaux dans les ordres partiels finis. Thèse de doctorat, USTHB, Algérie, (2001).

- [12]. I. Bouchemakh, S. Ouatiki. On the domatic and the total domatic number of the 2-section graph of the order interval hypergraph of a finite poset. *Discrete Mathematics*. To appear.
- [13]. K.S. Booth and J.H. Johnson. Dominating sets in chordal graphs. *SIAM J. Comput.* 11: 191-199, (1982).
- [14]. B. Bresar, S. Klavzar, D.F. Rall. Dominating direct products of graphs. *Discrete Mathematics*. To appear.
- [15]. R.C. Brigham and R.D. Dutton. Factor domination in graphs. *Discrete Math.* 86: 127-136, (1990).
- [16]. R.C. Brigham, P.Z. Chinn and R.D. Dutton. Vertex domination-critical graphs, *Networks* 18: 173-179, (1998).
- [17]. R.C. Brigham, R.D. Dutton, F. Harrary, T.W. Haynes. On graphs having equal domination and codomination numbers. *Utilitas Mathematica* 50: 53-64, (1996).
- [18]. R.C. Brigham and R.D. Dutton. Bounds on the domination number of a graph. *Quart. J. Math. Oxford Ser. 2.* 41: 269-275 (1990).
- [19]. Y. Caro and Y. Roditty. On the vertex-independence number and star decomposition of graphs. *Ars. Combin.* 20: 167-180, (1985).
- [20]. Y. Caro and Y. Roditty. A note on the k -domination number of a graph. *Internat. J. Math. Sci.* 13: 205-206, (1990).
- [21]. G.J. Chang. The domatic number problem. *Discrete Mathematics* 125: 115-122, North Holland (1994).
- [22]. T.Y. Chang and W.E. Clark. The domination number of the $5 \times n$ and $6 \times n$ grid graphs. *J. Graph Theory*, 17: 81-107, (1993).
- [23]. G.J. Chang and G.L. Nemhauser. The k -domination and k -stability on sun-free chordal graphs. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 5, 332-345, (1984).
- [24]. M.S. Chang. Efficient algorithms for the domination problems on interval and circular-arc graphs. *SIAM J. Comput.* 27, 1671-1694, (1998).

- [25]. M. Chellali. Etude de quelques invariants de graphes. Thèse de doctorat, USTHB, Algérie, (2005).
- [26]. W.E. Clark , L.A. Dunning. Tight upper bounds for the domination numbers of graphs with given order and minimum degree. *The electronic journal of combinatorics* 4, R26, 1-25 (1997).
- [27]. W.E. Clark, M.E.H. Ismail, S. Suen. Application for upper and lower bounds for the domination number to vizing's conjecture. *Ars Combin.* 69, 97-108, (2003).
- [28]. W.E. Clark, D. Fisher, B. Shekhtman, and S. Suen. Upper bounds of the domination number of a graph. *Congr. Numer.*, 132: 99-123, (1998).
- [29]. E.J. Cockayne. Domination in undirected graphs- a survey. In Y. Alavi and D.R. Lick, editors, *Theory and Applications of graphs in America's Bicentennial year*, 141-147, Springer-Verlag, Berlin (1978).
- [30]. E.J. Cockayne, E.O. Hare, S.T. Hedetniemi and T.V. Wimer. Bounds for the domination number of grid graphs. *Congr. Numer.*, 47: 217-228,(1985).
- [31]. E.J. Cockayne, S. Hedetniemi. Towards a theory of domination in graphs. *Networks* 7: 247-261, (1977).
- [32]. E.J. Cockayne, S.T. Hedetniemi and D.J. Miller. Properties of hereditary hypergraphs and middle graphs. *Canad. Math. Bull.* 21: 461-468, (1978).
- [33]. E.J. Cockayne, C.W. Ko and F.B. Shepherd. Inequalities concerning dominating sets in graphs. *Technical Report DM-370-IR*, Dept. Math., Univ. Victoria, (1985).
- [34]. D.G. Corneil and Y. Perl. Clustering and domination in perfect graphs. *Discrete Appl. Math.* 9, 27-39, (1984).
- [35]. M. Cropper, D. Greenwell, A.J.W. Hilton and A. Kostochka. The domination number of cubic Hamiltonian graphs. *AKCE Int. J. Graphs Comb.* 2, no. 2, 137-144, (2005).
- [36]. P. Dankelmann, N. Calkin. The domatic number of regular graphs. *Ars Combin.* 73, pp. 247-255, (2004).

- [37]. C.F. de Jaenisch. Applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs. Petrograde(1862).
- [38]. G.S. Domke, J.E. Dunbar, L. Markus. Gallai-type theorems and domination parameters. *Discrete Math.* 167/168, 237-248, (1997).
- [39]. J.E. Dunbar and T.W. Haynes. Domination in inflated graphs. *Congressus Numerantium* 118: 143-154, (1996).
- [40]. J.E. Dunbar, T.W. Haynes, M.A. Henning. The codomatic number of cubic graphs. *The Journal of combinatorial mathematics and combinatorial computing (JCMCC)* 32: 139-147, (2000).
- [41]. J.E. Dunbar, T.W. Haynes, M.A. Henning. Nordhaus-Gaddum type results for the domatic number of a graph. *In Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications*, John Wiley & Sons, Inc. Vol. 1, 303-312 (1999).
- [42]. J.E. Dunbar, T.W. Haynes, M.A. Henning. The domatic number of a graph and its complement. *Congressus Numerantium* 126: 53-63 (1997).
- [43]. A.K. Dewdney. Fast turing reductions between problems in NP, chapter 4, reduction between NP-complete problems. *Technical report 71*, Dept. Computer Science, University of Western Ontario (1981).
- [44]. K. Engel. Optimal representations of partially ordered sets and a limit Sperner theorem. *European J. Combin.*, 7 : 287-302, (1986).
- [45]. M. Farber. Characterizations of strongly chordal graphs. *Discrete Math.* 43: 173-189, (1983).
- [46]. M. Farber. Domination, independent domination, and duality in strongly chordal graphs. *Discrete Appl. Math.* 7: 115-130 (1984).
- [47]. M. Farber. Application of linear programming duality to problems involving independence and domination. Ph.D. Dissertation, Simon Fraser University, TR-81-13, (1981).
- [48]. M. Farber and J.M. Keil. Domination in permutation graphs. *J. Algorithms* 6, 309-321, (1985).

- [49]. U. Feige, M.M. Halldorsson, G. Kortsarz. Approximating the domatic number. *In Proc. 32nd Ann. ACM Symp. Theory Comput.*, 134-143, (2000).
- [50]. J.F. Fink, M.S. Jacobson, L.F. Kinch and J. Roberts. On graphs having domination number half their order. *Period. Math. Hungar.*, 16: 287-293, (1985).
- [51]. P. Flach and L. Volkmann. Estimations for the domination number of a graph. *Discrete Math.*, 80: 145-151, (1990).
- [52]. F.V. Fomin, F. Grandoni, A. Pyatkin, A.A. Stepanov. Bounding the number of minimal dominating sets: A measure and conquer approach. *In Proceedings of the 16th International Symposium on Algorithms and Computation*, pages 573–582, 2005.
- [53]. F.V. Fomin, F. Grandoni, and D. Kratsch, Measure and conquer: Domination - a case study. *In Proceedings of the 32nd International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2005)*, LNCS, pages 191–203, Springer, Berlin, (2005).
- [54]. F.V. Fomin, D. Kratsch, and G.J. Woeginger, Exact (exponential) algorithms for the dominating set problem. *In Proceedings of the 30th Workshop on Graph Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2004)*, vol. 3353 of LNCS, 245-256, Springer, Berlin, (2004).
- [55]. G.H. Fricke, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. McRae, C.K. Wallis, M.S. Jacobson, H.W. Martin and W.D. Weakley. Combinatorial problems on chessboards: A brief survey. *In Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs*, vol. 1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, pp. 507-528, (1995).
- [56]. M.R. Garey et D.S. Johnson. *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman and co., San Francisco, (1979).
- [57]. D. Gernert. Inequalities between the domination number and the chromatic number of a graph. *Discrete Math.*, 76: 151-153, (1989).

- [58]. W. Goddard, M.A. Henning, and H.C. Swart. Some Nordhaus Gaddum-type results. *J. Graph Theory* 16: 221-231, (1992).
- [59]. F. Grandoni. A note on the complexity of minimum dominating set. *Journal of Discrete Algorithms*, 4(2): 209–214, (2006).
- [60]. F. Grandoni. Exact algorithms for hard graph problems. PhD thesis, Università di Roma ‘Tor Vergata’, Roma, Italy, (March 2004).
- [61]. F. Harary, D. Hsu et Z. Miller. The bichromaticity of a tree. *In theory and applications of graphs, proc. Michigan 1976, ed. By Y. Alavi and D.R. Lick.* Springer Verlag Berlin-Heidelberg- New York (1978).
- [62]. F. Harary, T.W. Haynes, and M. Lewinter. On the codomination number of a graph, *Proyecciones* 12: 149-153, (1993).
- [63]. F. Harary, T.W. Haynes. The k -tuple domatic number of a graph. *Math. Slovaca*, 48, No. 2, 161-166 (1998).
- [64]. F. Harary, T.W. Haynes. Nordhaus-Gaddum inequalities for domination in graphs. *Discrete Mathematics* 155: 99-105 (1996).
- [65]. E.O. Hare, W.R. Hare and S.T. Hedetniemi. Algorithms for computing the domination number of $k \times n$ complete grid graphs. *Congr. Numer.*, 55: 81-92, (1986).
- [66]. T.W. Haynes. Domination in graphs: A brief Overview, *JCMCC*. 24: 225-237, (1997).
- [67]. T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, and P.J. Slater. Fundamentals of domination in graphs. Marcel Dekker, (1998).
- [68]. T.W. Haynes, M.A. Henning. The domatic numbers of factors of graphs. *ARS Combinatoria* 56: 161-173 (2000).
- [69]. S.T. Hedetniemi and R. Laskar, Recent results and open problems in domination theory. *In R. Ringeisen and F. Roberts, editors, Applications of discrete mathematics, SIAM, Philadelphia, PA, 205-218, (1988).*

- [70]. S.T. Hedetniemi et R.C. Laskar. Introduction. *Discrete Mathematics* 86: 3-9, (1990).
- [71]. S.T. Hedetniemi and R.C. Laskar. Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of domination parameters. *Discrete Mathematics* 86: 257-277, (1990).
- [72]. M.S. Jacobson and L.F. Kinch. On the domination number of products of graphs. *I, Ars. Combin.*, 18: 33-44, (1984).
- [73]. F. Jaeger and C. Payan. Relations du type Nordhaus Gaddum pour le nombre d'absorption d'un graphe simple, *C.R. Acad. Sci. Paris A* 274: 728-730, (1972).
- [74]. D.S. Johnson. The NP-completeness column: an ongoing guide. *J. Algorithms*, 6: 291-305, 434-451, 1985.
- [75]. J.P. Joseph and S. Arumugam. A note on domination in graphs. *Internat. J. Management systems*, to appear.
- [76]. H. Kaplan, R. Shamir. The domatic number problem on some perfect graph families. *Inform. process. Lett.* 49: 51-56 (1994).
- [77]. K. Kawarabayashi, M. Plummer et A. Saito. Domination in graphs with a 2-factor. *J. of Graph Theory*, 52, 1-6, (2006).
- [78]. S. Klavzar and N. Seifter. Dominating Cartesian products of cycles. *Discrete Appl. Math.*, 59(2): 129-136, (1995).
- [79]. A.V. Kostochka, B.Y. Stodolsky. On domination in connected cubic graphs. *Discrete Math.* , 304: 45-50, (2005).
- [80]. A.V. Kostochka, B.Y. Stodolsky. An upper bound on domination number of n -vertex connected cubic graphs. December 2005, Submitted.
- [81]. J. Kratochvil. Regular codes in regular graphs are difficult. *Discrete Math.*, 133:191-205, (1994).

- [82]. F. Kuhn and R. Wattenhofer. Constant-Time Distributed Dominating Set Approximation. In *Proc. of the Annual ACM Symp. on Principles of Distributed Computing (PODC)*, pages 25–32, (2003).
- [83]. P. Kyš. Remarks on domatic number. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, XLVI-XLVII (1985).
- [84]. J.M. Laborde. Sur le nombre domatique du n -cube et une conjecture de Zelinka. *European J. Combin.* 8 : 175-177 (1987).
- [85]. R. Laskar and K. Peters, Vertex and edge domination parameters in graphs. *Cong. Numer.* 48: 291-305, (1985).
- [86]. L. Lovasz. On the ratio of optimal and integral fractional covers, *Disc. Math.* 13: 383-390, (1975).
- [87]. T.L. Lu, P.H. Ho and G.J. Chang. The domatic number problem in interval graphs. *SIAM J. Discrete Math.* 3, 531-536, (1990).
- [88]. G.K. Manacher and T.A. Mankus. Finding a domatic partition of an interval graph in time $O(n)$. *SIAM J. Discrete Math.* 9, 167-172, (1996).
- [89]. G. MacGillivray and K. Seyffarth. Domination numbers of planar graphs. *J. Graph Theory*, 22: 213-129, (1996).
- [90]. W. McCuaig, B. Shepherd. Domination in graphs with minimum degree two. *J. Graph theory*, 13: 749-762, (1989).
- [91]. A. Majumder, A. Jas et S. Sur-Kolay, Efficient domatic partitioning of split and permutation graphs. Jadavpur University, Calcuta, India, Final year B. E project, (1995/1996).
- [92]. D. Marcu. A new upper bound for the domination number of a graph. *Quart. J. Math. Oxford Ser. 2.* 36: 221-223, (1985).
- [93]. D. Marcu. A note on the domination number of a graph and its complement. *Mathematica Bohemica* 126 No. 1, 63–65 (2001).

- [94]. E.A. Nordhaus et J.W. Gaddum. On complementary graphs. *Amer. Math.* 63: 175-177, (1956).
- [95]. J. Nieminen. Two bounds for the domination number of a graph. *J. Inst. Math. Applics.*, 14: 183-187, (1974).
- [96]. S. Ouatiki. Sur le nombre domatique du graphe représentatif des intervalles d'un poset. Thèse de magister, USTHB, Algérie, (2003).
- [97]. O. Ore. Theory of graphs. *Amer. Math. Soc. colloq. publ.*, 38 (*Amer. Math. soc. Providence, RI*), (1962).
- [98]. C. Payan. Sur le nombre d'absorption d'un graphe simple. *Cahiers Centre Etudes Rech. Opér.* (2.3.4): 171, (1975).
- [99]. C. Payan, N.H. Xuong, Domination-balanced graphs. *J. Graph Theory* 6: 23-32, (1982).
- [100]. S.L. Peng et M.S. Chang. A simple linear time algorithm for the domatic partition on strongly chordal graphs. *Inform. Process. Lett.*, 43: 297-300, (1992).
- [101]. J.B. Phillips and T.W. Haynes and P. Slater. A generalization of domination critical graphs. *Utilitas Mathematica* 58: 129-144, (2000).
- [102]. J. Plesnik. Bounds on chromatics numbers of multiple factors of a complete graph. *J. Graph Theory* 2: 9-17, (1978).
- [103]. A. Proskurowski and J. Telle. Complexity of graph covering problems. *Nordic J. Computing*, 5:173-195, (1998).
- [104]. D.F. Rall. Domatically critical and domatically full graphs. *Discrete Math.*, 86: 81-87, (1990).
- [105]. B. Randerath and I. Schiermeyer, Exact algorithms for minimum dominating set. *Technical Report zaik-469, Zentrum für Angewandte Informatik Köln, Germany, (2004).*

- [106]. B. Randerath and L. Volkmann. Characterization of graphs with equal domination and covering number. *Discrete Math.* Volume 191 ,Issue 1-3, 159-169, (1998).
- [107]. A.S. Rao et C.P. Rangan. Linear algorithm for domatic number problem on interval graphs. *Inform. Process. Lett.*, 33: 29-33, (1989).
- [108]. D. Rautenbach, L. Volkmann. The domatic number of block-cactus graphs. *Discrete Mathematics* 187: 185-193 (1998).
- [109]. B. Reed. Paths, stars, and the number three. *Combin. Probab. Comput.* 5: 277-295, (1996).
- [110]. C. Rhee, Y.D. Liang, S.K. Dhall and S. Laskshmivarahan. An $O(n+m)$ algorithm for finding a minimum-weight dominating set in a permutation graph. *SIAM J. Comput.* 25, 404-419, (1996).
- [111]. T. Riege, J. Rothe, H. Spakowski. An Improved Exact Algorithm for the Domatic Number Problem. *arXiv:cs.CC/0603060* v1, March 2006.
- [112]. T. Riege and J. Rothe. An exact 2.9416^n algorithm for the three domatic number problem. In *Proceedings of the 30th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, pages 733–744. Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science #3618, August 2005
- [113]. L.A. Sanchis. Maximum number of edges in connected graphs with a given domination number. *Discrete Math.*, 87: 65-72, (1991).
- [114]. P.J. Schmidt and T.W. Haynes. On a graph transformation where nodes are placed by complete subgraphs. *Congr. Numer.* 78: 99-107, (1990).
- [115]. P.J. Slater. Locating dominating sets and locating-dominating sets. In *Y. Alavi and Schwenk, editors, Graph Theory, Combinatorics and Applications. Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the theory and Applications of graphs, Vol.2* pages 1073-1079, (1995).
- [116]. B.Y. Stodolsky. On domination in 2-connected cubic graphs. March 2006. to appear.

- [117]. J. Topp and L. Volkmann. Some upper bounds of the product of the domination number and the chromatic number of a graph. *Discrete Math.*, 118: 289-292, (1993).
- [118]. K. Tsai and W.L. Hsu. Fast algorithms for the dominating set problem on permutation graphs. *Algorithmica* 9, 109-117, (1993).
- [119]. P.D. Vestergaard, B. Zelinka. Cut vertices and domination in graphs. *Mathematica Bohemica* 120, No.2, 135-143 (1995).
- [120]. V.G. Vizing. The Cartesian product of graphs. *vyčisl, sistemy* 9: 31-43, (1963).
- [121]. V.G. Vizing. Some unsolved problems in graph theory. *Uspekhy Mat. Nauk*, 23(6 (144)): 117-134, (1968).
- [122]. V.G. Vizing. A bound on the external stability number of a graph. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 164: 729-731, (1965).
- [123]. H.B. Walikar, B.D. Acharya, and E. Sampathkumar recent developments in the theory of domination in graphs. Mehta Research Institute, Allahabad, MRI *Lecture Notes in Math.* , No. 1 (1979).
- [124]. K. Weber. Domination number for almost every graph. *Rostock. Math. Kolloq.*, 16: 31-43, (1981).
- [125]. H. Whitney. Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Amer. J. Math.* 54: 150-168, (1932).
- [126]. R. Yuster. The domatic number of regular and almost regular graphs. *arXiv: math*. CO/0111257, v1, (2001).
- [127]. B. Zelinka. Total domatic number and degrees of vertices of a graph. *Math. Slovaca* 39 ,7-11, (1989).
- [128]. B. Zelinka. Domatically critical graphs. *Czech. Math. J.* 30, 468-489, (1980).
- [129]. B. Zelinka. Connected domatic number of a graph. *Math. Slovaca* 36, N°4, 387-392, (1986).
- [130]. B. Zelinka. Domatic number and bichromaticity of a graph. *In lecture notes in Mathematics, Graph Theory Lagow*, 1981. Springer, Berlin, 1018, 278-285 (1983).

- [131]. B. Zelinka. Bichromaticity and domatic number of a bipartite graph. *Časopis pro pěstování matematiky*. Vydává Matematický ústav, Praha. Svazek 110* PRAHA 31.5.1985* ČÍSLO 2.
- [132]. B. Zelinka. Domatic number and degrees of vertices of a graph. *Math. Slovaca* 33, No.2, 145-147 (1983).
- [133]. B. Zelinka. Domatic number of a graph and its variants (extended abstract). *Fourth Czechoslovakian Symposium on Combinatorics, Graphs and Complexity*, Elsevier Science Publishers, (ed.J. Nešetřil and M. Fiedler editors), (1992).
- [134]. B. Zelinka. Domatic numbers of cube graphs. *Math. Slovaca* 32, No.2, 117-119 (1982).
- [135]. B. Zelinka. Some remarks on domatic numbers of graphs. *Časopis pro pěstování matematiky*, roč. 106, Praha (1981).