

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENNE**

**FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES**



**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en  
Mathématiques**

**Spécialité : Recherche Opérationnelle**

**Option : Génie Mathématiques**

**Par**

**Nesrine BENYAHIA TANI**

**Thème**

**ÉTUDE DU POSET DES PARTITIONS D'UN ENTIER**

**Soutenu publiquement, le 10 /04/ 2006 devant le jury composé de :**

<b>A. BERRACHEDI</b>	Professeur	U.S.T.H.B.	Président
<b>S. BOUROUBI</b>	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse
<b>M. AIDER</b>	Professeur	U.S.T.H.B.	Examinateur
<b>H. AÏT-HADDADENE</b>	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinateur
<b>I. BOUCHEMAKH</b>	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinatrice
<b>F. BENCHERIF</b>	Chargé de Cours	U.S.T.H.B.	Examinateur



## *Remerciements*

Je remercie tout d'abord Dieu le tout puissant de m'avoir ouvert la porte du savoir, de m'avoir aidé dans les moments difficiles, et d'avoir permis la réalisation de ce travail.

Que Monsieur S. BOUROUBI, reçoive toute l'expression de ma reconnaissance et de ma sincère gratitude pour m'avoir proposé ce sujet, de m'avoir initié à la recherche, d'avoir assumé la lourde tâche de directeur de thèse, pour sa patience, son support indéfectible et ses compétences scientifiques, qui m'ont permis de mener à bien cette étude.

Mes remerciements vont également à Monsieur A. BERRACHEDI qui me fera l'honneur de présider les membres du jury.

Je prie Madame I. BOUCHEMAKH, ainsi que Messieurs M. AIDER, H. AÏT-HADDADENE et F. BENCHERIF de trouver ici l'expression de ma vive gratitude pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'examiner ce modeste travail.

Enfin j'adresse une pensée toute particulière à mes chers parents, mon frère Adel, ma soeur Amel et mon beau-frère Lakhdar, pour leur présence, leurs encouragements et leurs soutiens sans limite. A ma famille et mes amis particulièrement Mouna et Mehdi, à monsieur Youcef Bouguerra pour sa patience et ces précieux conseils, et à toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Merci à tous.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>1 Posets : Définitions et notations</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Définitions et concepts généraux . . . . .	7
1.3 Quelques opérations sur les posets . . . . .	11
1.3.1 Somme directe . . . . .	11
1.3.2 Somme linéaire . . . . .	12
1.3.3 Produit direct . . . . .	13
1.4 Treillis . . . . .	14
1.4.1 Exemples de treillis classiques . . . . .	16
1.5 Fonctions d'un poset . . . . .	18
1.5.1 Fonction de rang . . . . .	18
1.5.2 Niveau d'un poset . . . . .	18
1.5.3 Fonction de représentation . . . . .	19
1.5.4 Moyenne et variance d'une représentation . . . . .	19
1.5.5 Variance d'un poset . . . . .	20
1.5.6 Représentation optimale . . . . .	20
<b>2 Poset des partitions d'un entier</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction . . . . .	22
2.2 Définitions . . . . .	22
2.3 Résultats . . . . .	28

2.3.1	Résultats préliminaires . . . . .	28
2.3.2	Nouvelles identités . . . . .	32
2.3.3	Résultats secondaires . . . . .	35
2.3.4	Partition d'un entier et graphes transitifs . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Etude de l'optimalité de la fonction de rang dans le poset des partitions d'un entier</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction . . . . .	48
3.2	Définitions . . . . .	50
3.3	Conditions suffisantes d'optimalité de la fonction de rang dans un poset gradué . . . . .	52
3.3.1	Vérifications des conditions suffisantes pour l'optimalité de la fonction de rang du poset des partitions d'un entier . . . . .	52
3.4	Condition nécessaire et suffisante d'optimalité de la fonction de rang. . . . .	57
3.5	Etude de la propriété de Sperner . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Présentation des procédures du logiciel "BNBSIP" programmé pour l'étude de <math>\Pi(n)</math></b>	<b>67</b>
4.1	Introduction . . . . .	68
4.2	Présentation de la procédure diagramme de Hasse . . . . .	68
4.3	Présentation de la procédure modification de $n$ . . . . .	70
4.4	Présentation de la procédure propriétés de $\Pi(n)$ . . . . .	71
4.5	Présentation de la procédure Filtres de $\Pi(n)$ . . . . .	71
4.6	Conclusion . . . . .	72
	<b>Conclusion générale</b>	<b>74</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>75</b>

# Introduction générale

La combinatoire, appelée aussi analyse combinatoire, désigne la discipline des mathématiques qui étudie les configurations de collections finies d'objets. Citons quelques branches de cette discipline : la théorie des graphes, la combinatoire énumérative, les problèmes de dénombrement, la combinatoire polyédrale, l'optimisation combinatoire, etc... . Les frontières entre les branches ne sont pas hermétiques, les différentes branches expriment plutôt des orientations méthodologiques différentes.

La combinatoire débute au *XVII<sup>ème</sup>* siècle, en même temps que le calcul des probabilités. Initialement, cette partie des mathématiques avait pour objet la résolution des problèmes de dénombrement, provenant de l'étude des jeux de hasard. Elle se développa de façon significative sous l'influence du calcul des probabilités. Plus tard, elle se lia aux théories des nombres et des graphes.

Nous nous intéressons dans ce mémoire à l'étude du poset des partitions d'un entier. Nous entendons par cela, l'étude de l'ensemble partiellement ordonné des partitions d'un entier  $n$ . Chaque partition est composée de  $k$  parts,  $k = 1, \dots, n$ , la somme de ces  $k$  parts est égale à  $n$ . Les partitions sont ordonnées par raffinement, c'est à dire, si  $\pi$  et  $\sigma$  sont deux partitions de  $n$ , alors  $\pi$  sera dite inférieure à  $\sigma$ , si  $\sigma$  est obtenue en sommant deux ou plusieurs parts de  $\pi$ .

Le concept de partition des entiers appartient à la théorie des nombres aussi bien qu'à l'analyse combinatoire. Cette théorie a été établie à la fin du 18<sup>ème</sup> siècle par Leonhard Euler. Les propriétés des partitions des nombres, intensivement étudiées par Hardy et Ramânujan en 1918, se sont avérées être d'un intérêt mathématique exceptionnel[16].

La notion de partition d'un entier  $n$ , est de nature théorique. On peut la considérer

comme une généralisation du fameux problème de l'échange de monnaie : de combien de manières peut-on réaliser un montant de  $n$  dinars avec des pièces de 1, 2 et 5 dinars ? Comme Euler l'a montré, sans les séries entières, on n'arriverait à rien [30]. Cette théorie, dans sa généralité, touche au moins autant à l'arithmétique qu'à la combinatoire, c'est ce dernier aspect qui sera seul ici retenu.

La schématisation de n'importe quel problème, le simplifie et l'éclaircie, c'est l'une des caractéristiques attrayantes de la théorie des graphes, qui est son inhérent caractère pictural qui contribue à sa compréhension. Maintes propriétés et procédures, ont été pensées ou trouvées à partir d'un schéma avant d'être ensuite formalisées ou développées. C'est la raison pour laquelle nous avons programmé un logiciel nous permettant, entre autres, de visualiser le diagramme de Hasse du poset des partitions d'un entier, sachant que le diagramme de Hasse est un graphe orienté où l'ensemble des sommets représente les partitions, et deux sommets  $\pi$  et  $\sigma$  sont reliés par un arc si le sommet  $\pi$  est couvert par le sommet  $\sigma$ .

Notre rapport de mémoire comprendra :

Un premier chapitre consacré à l'introduction des définitions nécessaires pour la compréhension de ce mémoire. Nous y trouvons les définitions de bases et concepts relatifs aux posets.

Un second chapitre, dans lequel nous commençons par la présentation du poset des partitions d'un entier  $n$ , avec quelques propriétés qui lui sont connues, ensuite, nous exposons les résultats obtenus lors de l'analyse du diagramme de Hasse de ce poset, grace au logiciel *BNBSIP* développé à cette fin.

Dans le troisième chapitre, nous énonçons quelques résultats sur les conditions nécessaires et/ou suffisantes d'optimalité de la fonction de rang du poset des partitions de l'entier  $n$ . Nous nous intéressons par la suite aux antichaînes dans les posets motivés par le théorème de Sperner, où nous exposons quelques résultats supplémentaires.

Le quatrième chapitre, sera consacré à la présentation du logiciel *BNBSIP*, qui nous a permis d'observer et d'étudier, le comportement du poset des partitions d'un entier  $n$ . L'importance et la charge des calculs nécessaires à l'obtention des résultats présentés

dans les chapitres précédents, n'auraient pas pu être accomplis sans l'utilisation de ce logiciel.

Enfin, nous présentons une conclusion générale avec quelques perspectives de recherche pouvant faire l'objet d'un développement ultérieur, suivie de la description des plus importantes références bibliographiques.

Afin de simplifier la lecture de ce mémoire, nous avons proposé des démonstrations concernant des résultats portés en référence et n'ayant pas été étayés par une démonstration, ou bien lorsque cette dernière n'était pas suffisamment détaillée. Ces preuves seront suivies d'une étoile (\*). De plus, les résultats dont nous avons besoin, et déjà démontrés, ont été cités dans la bibliographie permettant ainsi de reprendre leurs démonstrations.

# Chapitre 1

## Posets : Définitions et notations

### Sommaire

---

1.1	Introduction	7
1.2	Définitions et concepts généraux	7
1.3	Quelques opérations sur les posets	11
1.3.1	Somme directe	11
1.3.2	Somme linéaire	12
1.3.4	Produit direct	13
1.4	Treillis	14
1.4.1	Exemples de treillis classiques	16
1.5	Fonctions d'un poset	18
1.5.1	Fonction de rang	18
1.5.2	Niveau d'un poset	18
1.5.3	Fonction de représentation	19
1.5.4	Moyenne et variance d'une représentation	19
1.5.5	Variance d'un poset	20
1.5.6	Représentation optimale	20

---

## 1.1 Introduction

Si nous regardons autour de nous, nous remarquerons, que tout ce qui nous entoure est constitué d'objets, de champs de forces hiérarchisées, et de relations ordonnées. C'est de là que vient l'importance de la notion d'ensemble ordonné. Pourtant les mathématiciens ont mis longtemps avant d'entreprendre l'étude de cet objet mathématique. Dedekind [16] a réalisé les premiers travaux, qui ont donné droit de cité à ces ensembles ordonnés remarquables.

Dans ce premier chapitre, nous nous contenterons de donner les définitions et notations indispensables à l'appréciation du contenu de notre mémoire.

## 1.2 Définitions et concepts généraux

### Poset

Le terme "*poset*", est l'abréviation de "**p**artially **o**rdered **s**et", un ensemble partiellement ordonné, noté  $(P, R)$ , où  $P$  représente l'ensemble et  $R$  la relation binaire sur l'ensemble  $P$  satisfaisant les conditions suivantes :

$R$  réflexive:  $\forall x \in P$ , on a  $(x, x) \in R$ ,

$R$  antisymétrique: si  $(x, y) \in R$  et  $(y, x) \in R$  alors  $x = y$ ,

$R$  transitive: si  $(x, y) \in R$ , et  $(y, z) \in R$  alors  $(x, z) \in R$ .

Une relation d'ordre est dite totale lorsque deux éléments quelconques sont comparables, i.e.  $(x, y) \in R$  où  $(y, x) \in R$  pour tout  $x, y \in P$ . Elle est dite partiel, lorsqu'il existe des couples d'éléments incomparables.

La relation  $R$  entre deux éléments comparables  $x$  et  $y \in P$ , sera représentée usuellement par  $x \leq y$  ou d'une façon équivalente  $y \geq x$ .

### Intervalle

Dans un poset  $P$ , nous définissons l'*intervalle* (ou segment) comme suit :

$$[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}.$$

Si l'ensemble  $P$  est fini alors tout intervalle dans  $P$  est de cardinal fini.

Dans toute la suite, on ne considèrera que les posets finis, et pour des raisons de simplification, on identifiera le poset à l'ensemble sous-jacent.

### Isomorphisme

Soient  $P$  et  $Q$  deux posets.  $P$  et  $Q$  sont *isomorphes* s'il existe une fonction bijective  $\varphi$  de  $P$  dans  $Q$  qui preserve l'ordre, c'est à dire :  $x \leq y$  dans  $P \iff \varphi(x) \leq \varphi(y)$  dans  $Q$ .

### Relation de couverture

Nous dirons pour deux éléments  $x$  et  $y$  de  $P$  que  $x$  est *couvert* par  $y$  (ou  $y$  *couvre*  $x$ ) noté  $x \lessdot y$  si  $x < y$  et s'il n'existe aucun élément  $z$  tel que  $x < z < y$ .

### Diagramme de Hasse

Le graphe d'un poset  $P$  est nommé *Diagramme de Hasse* (*DH*) d'après le nom de Helmut Hasse (1898–1979). C'est un graphe orienté dont l'ensemble des sommets est  $P$  et dont les arcs sont les paires de couvertures  $(x, y)$  dans le poset.

Nous traçons par convention le diagramme de Hasse d'un poset dans un plan de telle manière que, si  $y$  couvre  $x$ , alors le sommet représentant  $y$  est directement placé au dessus du sommet représentant  $x$ . Donc les flèches ne sont pas indispensables dans le graphe, puisque la direction des flèches est implicite.

**Exemple 1.2.1** *Le diagramme de Hasse du poset des sous-ensembles de  $\{1, 2, 3\}$  ordonnés par inclusion, est donné sur la figure 1.1 :*

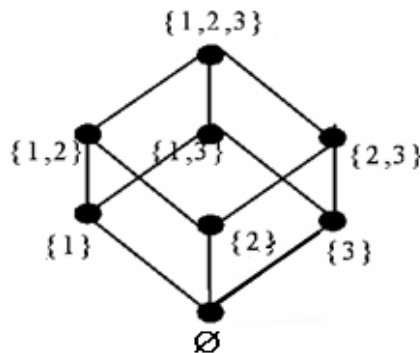


Figure 1.1

**Élément maximal (resp. minimal)**

Un élément  $x$  d'un poset  $P$  est dit *maximal* (resp. *minimal*) s'il n'existe aucun élément  $y \in P$  satisfaisant  $x < y$  (resp.  $y < x$ ).

Si  $P$  possède un unique élément maximal (resp. minimal) il sera noté 1 (resp. 0).

**Remarque 1.2.1** *Dans un poset en général, il peut ne pas y avoir d'élément maximal, ou encore il peut y en avoir plus d'un. Mais dans un poset fini il y a toujours au moins un élément maximal, qui peut être trouvé comme suit :*

*Choisir n'importe quel élément  $x$ ; s'il n'est pas maximal, le remplacer par un élément  $y$  satisfaisant  $x < y$ .*

*Répéter jusqu'à ce qu'un élément maximal soit trouvé.*

*Le processus doit s'arrêter, en raison de la réflexivité et de la transitivité. La procédure ne peut jamais revisiter le même élément.*

*Analogiquement, un poset fini doit contenir au moins un élément minimal.*

**Coatome (resp. Atome)**

Dans un poset  $P$ , tout élément couvert par 1 (resp. couvrant 0) sera appelé *coatome* (resp. *atome*).

**Exemple 1.2.2** *La figure 1.2, présente un 1, un 0, deux atomes et deux coatomes :*

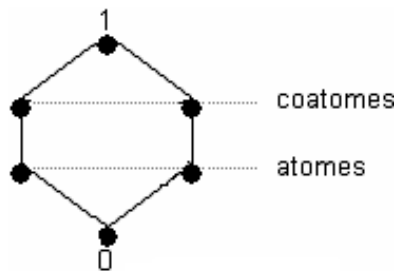


Figure 1.2

**Majorant (resp. Minorant)**

Un élément  $x$  est un *majorant* (resp. *minorant*) d'un sous-ensemble  $Q$  de  $P$  si pour tout  $y \in Q$ ,  $y \leq x$  (resp.  $x \leq y$ ).

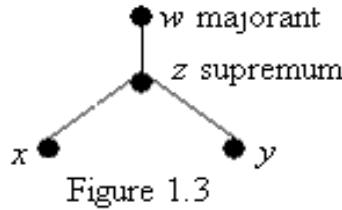
**Supremum (resp. Infimum)**

Un *supremum* (resp. *infimum*)  $z$  de deux éléments  $x$  et  $y$ , s'il existe, est le plus petit de leurs majorants (resp. le plus grand de leurs minorants), c'est à dire: que pour tout autre majorant (resp. tout autre minorant)  $w$  de  $x$  et  $y$ , nous aurons  $z \leq w$  (resp.  $w \leq z$ ). En d'autres termes, étant donnés  $x, y$  et  $z$  trois éléments de  $P$ , l'élément  $z$  est appelé supremum (resp. infimum) de  $x$  et  $y$  si,

$$\left\{ \begin{array}{l} (z \geq x \ \& \ z \geq y) \ \& \ ((w \geq x \ \& \ w \geq y) \implies z \leq w) \\ (resp. \ (z \leq x \ \& \ z \leq y) \ \& \ ((w \leq x \ \& \ w \leq y) \implies z \geq w)). \end{array} \right.$$

Nous noterons:  $sup(x, y) = x \vee y$  et  $inf(x, y) = x \wedge y$ .

**Exemple 1.2.3** Dans la figure 1.3,  $w$  et  $z$  représentent respectivement un majorant et le supremum de  $x$  et  $y$ .

**Chaîne**

Une *chaîne* dans un poset  $P$  est un sous-ensemble  $C$  de  $P$  totalement ordonné. On note  $C = c_0 < c_1 < \dots < c_n$ .

La chaîne  $C$  est dite saturée si elle est de la forme  $C = c_0 \triangleleft c_1 \triangleleft \dots \triangleleft c_n$ . Elle est dite maximale si de plus  $c_0$  et  $c_n$  sont respectivement un élément minimal et un élément maximal de  $P$ .

Le nombre d'arêtes dans une chaîne désigne sa *longueur*.

**Antichaîne**

Une *antichaîne* dans un poset  $P$  est un sous ensemble  $A$  de  $P$  d'éléments deux à deux incomparables.

L'antichaîne  $A$  est maximale si pour tout élément  $x \in P \setminus A$ , l'ensemble  $A \cup \{x\}$  n'est pas une antichaîne.

Les antichaînes sont aussi appelées *systeme* ou *famille* de *Sperner*.

Tout ensemble de sous-ensembles de  $P$  est appelé *famille*.

### Hauteur et largeur d'un poset

La longueur d'une chaîne maximum dans le poset  $P$ , est appelée *hauteur* de  $P$ , notée  $h(P)$ .

La longueur d'une antichaîne maximum dans le poset  $P$ , est appelée *largeur* de  $P$ ,  $d(P)$ .

### Filtre (resp. Idéal)

Une famille  $F$  (resp.  $I$ ) d'un poset  $P$ , est appelée *filtre* (resp. *idéal*) si,

$$x \in F \text{ (resp. } x \in I) \text{ et } x \leq y \text{ (resp. } y \leq x) \Rightarrow y \in F \text{ (resp. } y \in I) .$$

On dit qu'un filtre  $F$  (resp. *idéal*  $I$ ) est généré par une famille  $S \subset P$  si,

$$F = \{x \in P / y \leq x \text{ pour au moins un } y \in S\}$$

$$\text{(resp. } I = \{x \in P / y \geq x \text{ pour au moins un } y \in S\}) .$$

On appelle, *filtre* (resp. *idéal*) *principal*, un filtre (resp. *idéal*) généré par un seul élément.

## 1.3 Quelques opérations sur les posets

Il existe dans la littérature plusieurs opérations définies sur les posets, nous nous contenterons ici d'exposer certaines d'entre elles.

### 1.3.1 Somme directe

Soient  $P$  et  $Q$  deux posets, on appelle somme directe ou union disjointe de  $P$  et  $Q$  le poset  $P + Q$  sur l'union  $P \cup Q$  tel que :  $x \leq y$  dans  $P + Q$  si,

$$(x, y \in P \text{ et } x \leq_P y) \text{ ou } (x, y \in Q \text{ et } x \leq_Q y).$$

On trace le diagramme de Hasse de  $P + Q$ , en groupant les diagrammes de Hasse de  $P$  et de  $Q$  mais sans les relier.

**Exemple 1.3.1** La figure 1.4, montre la somme directe de deux posets :

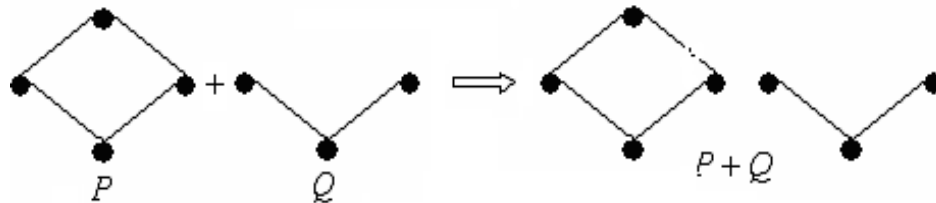


Figure 1.4

### 1.3.2 Somme linéaire

Soient  $P$  et  $Q$  deux posets, on appelle somme linéaire de  $P$  et  $Q$ , le poset  $P \oplus Q$  sur l'union  $P \cup Q$ , tel que :

$$x \leq y \text{ dans } P \oplus Q \text{ si } \begin{cases} x, y \in Q \text{ et } x \leq_Q y \\ \text{ou} \\ x \in P \text{ et } y \in Q \\ \text{ou} \\ x, y \in P \text{ et } x \leq_P y \end{cases}$$

Une chaîne à  $n$  sommets est isomorphe à  $\underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_{n \text{ fois}}$ .

On trace le diagramme de Hasse de  $P \oplus Q$ , de sorte que le diagramme de Hasse de  $P$  soit en dessous de celui de  $Q$ . En suite, on relie tout sommet maximal de  $P$  à tout sommet minimal de  $Q$ .

**Exemple 1.3.2** La figure 1.5, montre la somme linéaire de deux posets :

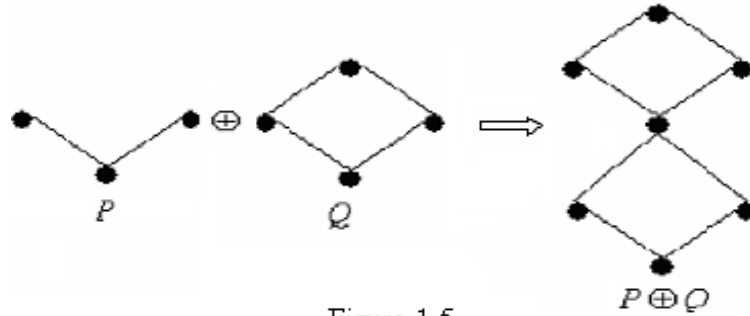


Figure 1.5

### 1.3.3 Produit direct

Soient  $P$  et  $Q$  deux posets, on appelle produit direct (ou produit cartésien) de  $P$  et  $Q$ , le poset  $P \times Q$  défini par l'ensemble des couples  $(x, y)$  où  $x \in P$  et  $y \in Q$ , ordonné par :

$$(x, y) \leq (x', y') \text{ dans } P \times Q \iff x \leq x' \text{ dans } P \text{ et } y \leq y' \text{ dans } Q.$$

On trace le diagramme de Hasse de  $P \times Q$ , en remplaçant chaque sommet du diagramme de Hasse de  $Q$ , par une copie du diagramme de Hasse de  $P$ . Deux sommets dans deux copies différentes sont liés dans  $P \times Q$ , si les sommets correspondants dans  $Q$  sont liés.

**Exemple 1.3.3** La figure 1.6, montre le produit direct de deux posets :

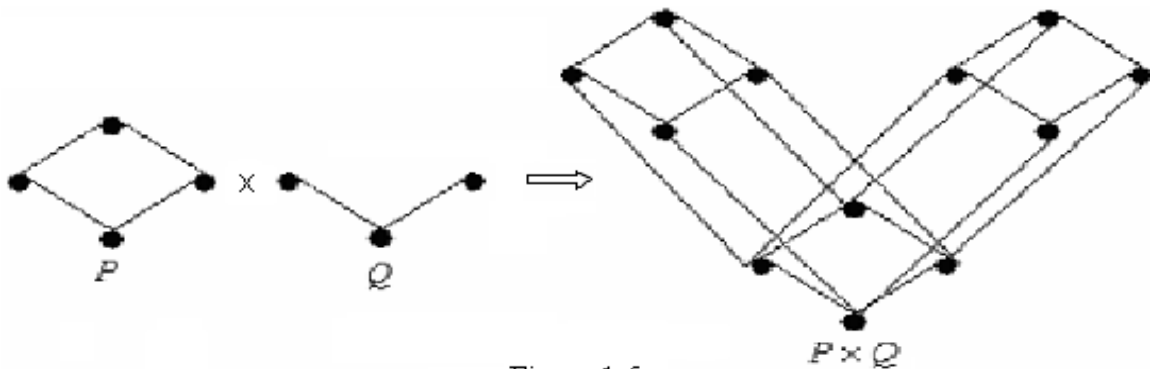


Figure 1.6

## 1.4 Treillis

Un treillis est un poset  $P$  vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x, y \in P, x \vee y \text{ et } x \wedge y \text{ existent.}$$

Un treillis est dit complet lorsque toute partie admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Les treillis peuvent être axiomatisés en termes de deux constantes 0 et 1 et les deux opérations  $\vee$  et  $\wedge$ .

### Proposition 1.4.1 [30]

Soit  $P$  un ensemble et  $\vee, \wedge$  deux opérations binaires définies sur  $P$ , et soient 0 et 1 deux éléments de  $P$ . Alors  $(P, \vee, \wedge, 0, 1)$  est un treillis si et seulement si les axiomes suivants sont satisfaits :

- i) lois associatives:  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$  et  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ;
- ii) lois commutatives:  $x \wedge y = y \wedge x$  et  $x \vee y = y \vee x$ ;
- iii) lois idempotentes:  $x \wedge x = x \vee x = x$ ;
- iv)  $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$ ;
- v)  $x \wedge 0 = 0, x \vee 1 = 1$ .

### Preuve. (\*)

i) Montrons :  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ .

Notons pour cela,

$$y \wedge z = w; x \wedge w = \gamma; x \wedge y = \delta \text{ et } \delta \wedge z = \sigma.$$

On a alors,

$$w \leq y \text{ et } w \leq z; \quad (1)$$

$$\gamma \leq x \text{ et } \gamma \leq w \quad (2)$$

$$\delta \leq x \text{ et } \delta \leq y \quad (3)$$

$$\sigma \leq \delta \text{ et } \sigma \leq z \quad (4)$$

En combinant (1) et (2), on trouve:  $\gamma \leq z$  et  $\gamma \leq \delta$ , i.e  $\gamma \leq \sigma$ .

En combinant (3) et (4), on trouve:  $\sigma \leq w$  et  $\sigma \leq x$ , i.e  $\sigma \leq \gamma$ .

D'où  $\gamma = \sigma$ .

• Montrons :  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ . Notons pour cela,

$y \vee z = w$ ;  $x \vee w = \gamma$ ;  $x \vee y = \delta$  et  $\delta \vee z = \sigma$ .

On a alors,

$$w \geq y \text{ et } w \geq z; \quad (1)$$

$$\gamma \geq x \text{ et } \gamma \geq w \quad (2)$$

$$\delta \geq x \text{ et } \delta \geq y \quad (3)$$

$$\sigma \geq \delta \text{ et } \sigma \geq z \quad (4)$$

En combinant (1) et (2), on trouve:  $\gamma \geq z$  et  $\gamma \geq \delta$ , i.e  $\gamma \geq \sigma$ .

En combinant (3) et (4), on trouve:  $\sigma \geq w$  et  $\sigma \geq x$ , i.e  $\sigma \geq \gamma$ .

D'où  $\gamma = \sigma$ .

ii) Montrons :  $x \wedge y = y \wedge x$ . Notons pour cela,

$x \wedge y = w$  et  $y \wedge x = z$ .

On a alors,

$$w \leq x \quad (1)$$

$$w \leq y \quad (2)$$

$$z \leq y \quad (3)$$

$$z \leq x \quad (4)$$

En combinant (1) et (2) on trouve:  $w \leq z$ .

En combinant (3) et (4) on trouve:  $z \leq w$ .

D'où  $w = z$ .

• Montrons :  $x \vee y = y \vee x$ . Notons pour cela,  $x \vee y = w$ ; et  $y \vee x = z$ .

On a alors,

$$w \geq x \quad (1)$$

$$w \geq y \quad (2)$$

$$z \geq y \quad (3)$$

$$z \geq x \quad (4)$$

En combinant (1) et (2) on trouve:  $w \geq z$ .

En combinant (3) et (4) on trouve:  $z \geq w$ .

D'où  $w = z$ .

iii)  $x \wedge x = x \vee x = x$ ; évidents.

iv) Montrons :  $x \wedge (x \vee y) = x$ . Notons pour cela  $x \wedge (x \vee y) = w$ .

Il est clair que  $w \leq x$ . Comme de plus  $x \leq x$  et  $x \leq x \vee y$ , on a  $x \leq w$ .

D'où  $w = x$ .

• Montrons :  $x \vee (x \wedge y) = x$ . Notons pour cela  $x \vee (x \wedge y) = w$ .

Il est clair que  $w \geq x$ . comme de plus  $x \geq x$  et  $x \geq x \wedge y$ , on a  $w \leq x$ .

D'où  $w = x$ .

v)  $x \wedge 0 = 0$  et  $x \vee 1 = 1$ , évidents. ■

### 1.4.1 Exemples de treillis classiques

#### Treillis des partitions d'un ensemble $P_n$

Le treillis des partitions d'un ensemble  $P_n$  est le poset de toutes les partitions d'un ensemble à  $n$  éléments, ordonné par raffinement, c'est-à-dire,

$$\pi \leq \sigma \text{ si et seulement si } \pi_i \cap \sigma_j \neq \emptyset \implies \pi_i \subseteq \sigma_j,$$

avec  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$  et  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l)$  deux partitions de  $P_n$ .

En d'autres termes

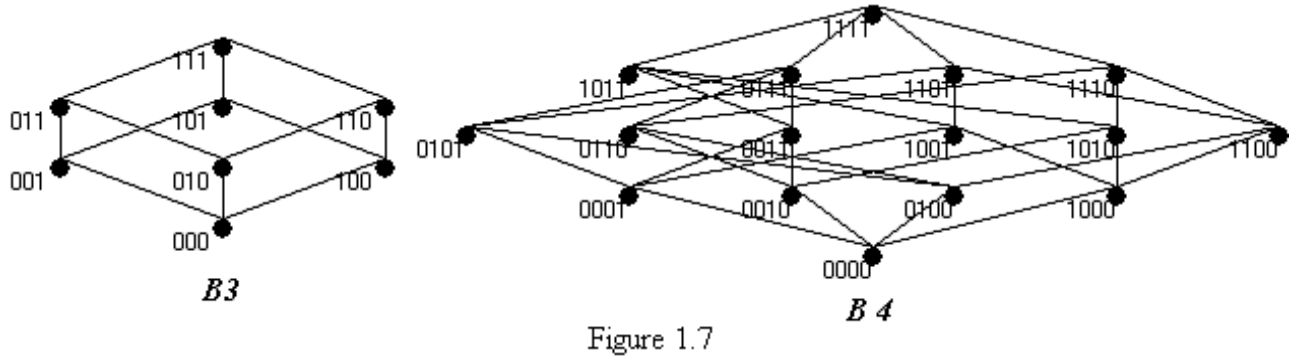
$\pi \leq \sigma \implies \sigma$  s'obtient à partir d'une subdivision en deux parties d'une seule classe de  $\pi$ .

Le treillis des partitions est un poset gradué, sa fonction de rang est définie par  $r(\pi) = n - b(\pi)$ ,  $\forall \pi \in P_n$ , où  $b(\pi)$  désigne le nombre de classes dans la partition  $\pi$ : Le rang de  $P_n$  est donc égal à  $n-1$ .

**Treillis booléen** Le treillis booléen  $B_n$  est le poset des sous-ensembles d'un ensemble à  $n$  éléments, ordonné par inclusion.

Il est facile de montrer que  $B_n$  est isomorphe à  $\{0, 1\}^n$ .

**Exemple 1.4.1** La figure 1.7, montre le diagramme de Hasse du treillis booléen  $B_3$  et  $B_4$ .



**Treillis distributif**

Un treillis est dit *distributif*, s'il satisfait les lois distributives :

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \text{ et } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \text{ pour tout } x, y, z.$$

Notons que les deux lois sont équivalentes [28].

**Treillis modulaire**

Un treillis est dit *modulaire*, s'il satisfait la loi modulaire :

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z \text{ pour tout } x, y, z \text{ tels que } x \leq z.$$

**Remarque 1.4.1** Tout treillis distributif est modulaire.

En effet soient  $x, y$  et  $z$  trois éléments d'un treillis distributif, si  $x \leq z$  alors  $x \vee z = z$ .

$$\begin{aligned} \text{par conséquent } x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ &= (x \vee y) \wedge z. \end{aligned}$$

**Exemple 1.4.2** La figure 1.8, présente le treillis  $N_5$  qui est non modulaire et donc non distributif, et un treillis  $M_3$  qui est modulaire mais pas distributif.

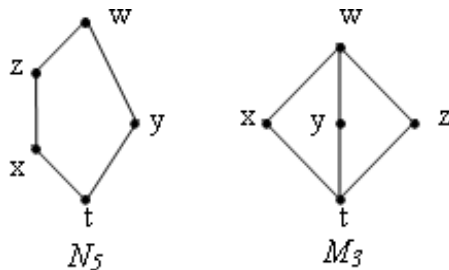


Figure 1.8

En effet dans  $N_5$ , on a :

$$\begin{cases} x \vee (y \wedge z) = x \vee t = x; \\ (x \vee y) \wedge z = w \wedge z = z. \end{cases}$$

Dans  $M_3$ , on a :

$$\begin{cases} x \wedge (y \vee z) = x \wedge w = x; \\ (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = t \vee t = t. \end{cases}$$

## 1.5 Fonctions d'un poset

### 1.5.1 Fonction de rang

Une *fonction de rang* d'un poset  $P$  est une fonction  $r$  définie de  $P$  dans  $\mathbb{N}$  vérifiant :

$$\begin{cases} r(x) = 0 & , \text{ si } x \text{ est un élément minimal} \\ r(y) = r(x) + 1 & , \text{ si } x \prec y. \end{cases}$$

Si une telle fonction existe, on dira que  $P$  est *rangé* ou *gradué* et la valeur  $r(P) = \max \{r(x), x \in P\}$  représente son *rang*.

Si  $P$  est un poset gradué et si tous ses éléments maximaux sont de rang  $r(P)$ , alors son poset dual  $P^*$  est aussi gradué et l'on a :

$$r_{P^*}(x) = r(P) - r(x); \forall x \in P.$$

Si  $P$  et  $Q$  sont deux posets gradués, alors le poset  $P \times Q$  l'est aussi et l'on a :

$$r_{P \times Q}((x, y)) = r_P(x) + r_Q(y).$$

### 1.5.2 Niveau d'un poset

Si  $P$  est gradué, on définit son *niveau*  $i$  par  $N_i(P) = \{x \in P : r(x) = i\}$ ,  $i = 0, \dots, r(P)$ .

Le cardinal du niveau  $N_i$  est noté  $W_i(P)$  et est appelé *nombre de Whitney*.

**Remarque 1.5.1** Dans un même niveau les éléments sont deux à deux incomparables. Donc les niveaux forment des antichaînes.

### 1.5.3 Fonction de représentation

Une *fonction de représentation*  $X$  est définie de  $P$  dans  $\mathbb{R}$ , et vérifie :

$$\forall x, y \in P : (x < y \Rightarrow X(y) - X(x) \geq 1).$$

Une fonction de représentation généralise la notion de fonction de rang (= devient  $<$ ).

1- Un poset  $P$  peut ne pas être muni d'une fonction de rang, mais il admet toujours une fonction de représentation. Il suffit de considérer la fonction hauteur qu'on peut associer à tout poset. Elle est définie de  $P$  dans  $\mathbb{N}$ , et associe à tout élément  $x \in P$ , le nombre d'éléments  $h(x)$  représentant la taille de la plus longue chaîne de  $P$  ayant  $x$  comme élément maximal moins 1. La fonction hauteur coïncide avec la fonction de rang dans les posets gradués.

2- Notons que le poset représenté par le diagramme  $N_5$  précédent, n'est pas gradué. En fait, tout poset avec un 1, qui admet dans son diagramme de Hasse un cycle de longueur impaire n'est pas gradué [10].

### 1.5.4 Moyenne et variance d'une représentation

La moyenne ou l'espérance d'une représentation  $X$  d'un poset  $P$ , est :

$$\mu_X(P) = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} X(p).$$

La moyenne d'une famille  $A \subset P$  est :

$$\mu_X(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{p \in A} X(p).$$

La variance d'une représentation  $X$  d'un poset  $P$ , est :

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} (X(p) - \mu_X(P))^2 = \left( \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} X^2(p) \right) - \mu_X^2(P).$$

### 1.5.5 Variance d'un poset

La variance d'un poset  $P$  est :

$$\sigma^2(P) = \inf \{ \sigma_X^2 : X \text{ représentation de } P \}.$$

### 1.5.6 Représentation optimale

Une représentation  $X^*$  d'un poset  $P$  est optimale si,  $\sigma_{X^*}^2 = \sigma^2(P)$ . Si le poset  $P$  est gradué et  $r$  est une représentation optimale, on dira que  $P$  est de rang comprimé.

**Remarque 1.5.2** *Les translations et les homothéties de rapport  $k \geq 1$  d'une fonction de représentation engendrent des fonctions de représentations.*

# Chapitre 2

## Poset des partitions d'un entier

### Sommaire

---

2.1	Introduction	22
2.2	Définitions	22
2.3	Résultats	28
2.3.1	Résultats préliminaires	28
2.3.2	Nouvelles identités	32
2.3.3	Résultats secondaires	35
2.3.4	Partition d'un entier et graphes transitifs	45

---

## 2.1 Introduction

Le concept de partition d'un entier appartient à la théorie des nombres aussi bien qu'à l'analyse combinatoire. Cette théorie a été établie à la fin du 18<sup>ème</sup> siècle par Leonhard Euler. Son importance a été renforcée par les travaux de Hardy et Ramanujan en 1918 et Rademacher de 1937 à 1943; qui ont engendré des généralisations qui n'ont pas encore été épuisées [20].

Dans ce chapitre, nous présenterons le poset des partitions d'un entier strictement positif  $n$ , avec quelques exemples d'adaptation des définitions vues dans le chapitre précédent, ainsi que des propriétés et résultats qui lui sont propres.

## 2.2 Définitions

Soit  $n$  un entier positif. On appelle *partition* de  $n$  toute suite croissante d'entiers positifs  $(n_1, n_2, \dots)$  dont la somme vaut  $n$ . Ces entiers  $n_i$  sont appelés *parts* de la partition.

Une partition d'un entier  $n$  en  $k$  parts,  $k = 1, \dots, n$ , est une solution entière du système :

$$\begin{cases} n = n_1 + \dots + n_k, \\ 1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Une partition d'un entier  $n$  peut aussi être représentée par un  $n$ -uplet d'entiers  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , où  $\sum_{i=1}^n ix_i = n$  et  $x_i$  représente le nombre de parts égales à  $i$  dans la partition.

Une solution de (2.2.1) est équivalente à une solution du système :

$$\begin{cases} n = x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n, \\ k = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ x_i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

où  $x_i$  représente le nombre de parts égales à  $i$  dans la partition.

Notons désormais par :

- ▷  $Pi(n)$  : l'ensemble de toutes les partitions de l'entier  $n$ ,
- ▷  $Pi(n, k)$  : l'ensemble de toutes les partitions de l'entier  $n$  en  $k$  parts,  $k = 1, \dots, n$ ,
- ▷  $Pi2(n)$  : l'ensemble de toutes les partitions de l'entier  $n$  sans parts égales à 1,

- ▷  $Pi2(n, k)$  : l'ensemble de toutes les partitions de l'entier  $n$  en  $k$  parts,  $k = 1, \dots, n$ , sans parts égales à 1,
- ▷  $Pim(n, k)$  : l'ensemble de toutes les partitions de l'entier  $n$  en  $k$  parts,  $k = 1, \dots, n$ , avec au plus  $m - 2$  parts égales à 1,
- ▷  $A(n, k)$  : l'ensemble de toutes les solutions entières du système :

$$\begin{cases} n = x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k. \end{cases}$$

- ▷  $p(n) = |Pi(n)|$  ;
- ▷  $p_2(n) = |Pi2(n)|$  ;
- ▷  $p(n, k) = |Pi(n, k)|$  ;
- ▷  $p_2(n, k) = |Pi2(n, k)|$  ;
- ▷  $p_m(n, k) = |Pim(n, k)|$  ;
- ▷  $a(n, k) = |A(n, k)|$  .

On peut alors écrire,

$$p(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(n, k).$$

Pour un entier  $n$  négatif, on pose  $p(n) = 0$ . Si  $n = 0$  on convient alors de poser  $p(0) = 1$ .

Le *diagramme de Ferrers* d'une partition d'un entier est un outil très pratique pour visualiser les parts des partitions. Il est construit par des rangées de cellules (ou de points), où le nombre de cellules dans chaque rangée correspond à la taille d'une part. La première rangée (de haut en bas) correspond à la plus grande part, la deuxième rangée correspond à la deuxième plus grande part, et ainsi de suite.

La figure suivante présente le diagramme de Ferrers pour la partition de  $27=10+7+3+2+2+1+1+1$ .

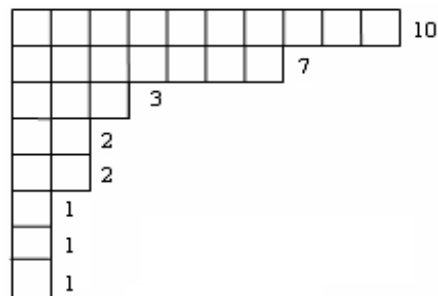


Figure 2.1

Un diagramme de Ferrers peut être transformé en un *tableau de Young* en remplissant chaque cellule par une valeur unique de 1 à  $n$ , tels que les valeurs dans chaque rangée soient croissantes de gauche à droite, et dans chaque colonne de haut en bas. On peut obtenir une telle affectation des valeurs aux cellules, en plaçant à chaque fois la plus grande valeur non affectée dans une position du coin, c-à-d, une cellule où il n'y a aucune cellule non affectée en-dessous d'elle ni à sa droite.

Un Tableau de Young pour la partition de  $27= 10+7+3+2+2+1+1+1$  est présenté dans la figure suivante :

<b>1</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>	<b>12</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>20</b>
<b>2</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>11</b>	<b>13</b>	<b>21</b>			
<b>3</b>	<b>17</b>	<b>22</b>							
<b>18</b>	<b>23</b>								
<b>19</b>	<b>24</b>								
<b>25</b>									
<b>26</b>									
<b>27</b>									

Figure 2.2

Le poset  $Pi(n)$  des partitions de l'entier  $n$ , est ordonné par raffinement, c'est-à-dire, pour deux partitions  $\pi$  et  $\sigma$  de  $n$  on a :

$$\pi \leq \sigma \iff \pi = \sigma \text{ ou bien } \sigma \text{ est obtenue en sommant deux ou plusieurs parts de } \pi.$$

Etant données deux partitions  $\pi$  et  $\sigma$  d'un entier  $n$ , la relation de *couverture* sur l'ensemble

$Pi(n)$  est définie par :

$$\pi \leq \sigma \iff \sigma \text{ est obtenue en sommant exactement 2 parts de } \pi.$$

Soient  $\pi = 113$ ;  $\sigma = 1112$ ;  $\gamma = 11111$  dans  $Pi(5)$ , on a :  $\sigma \leq \pi$  et  $\pi > \gamma$ .

Le poset  $Pi(n)$  est gradué, sa fonction de rang  $r$  est définie comme suit :

$$\begin{aligned} r : Pi(n) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \pi &\longmapsto r(\pi) = n - b(\pi). \end{aligned}$$

où  $b(\pi)$  représente le nombre de parts de la partition  $\pi$ .

Il est clair que si  $\pi$  couvre  $\sigma$  alors  $r(\pi) = r(\sigma) + 1$ , et que  $r(11\dots 1) = 0$ . Le rang de  $Pi(n)$  est donc  $r(P) = n - 1$ .

Le  $i$ ème niveau du poset  $Pi(n)$  est donné par :

$$N_i = \{ \pi \in Pi(n) : r(\pi) = n - i \}, \quad i = 0, \dots, r(p).$$

Le nombre de Whithney  $W_i$  est alors égal à  $p(n, n - i)$ .

Les diagrammes de Hasse des posets  $Pi(5)$  et  $Pi(9)$  sont illustrés dans la figure 2.3 ci dessous :

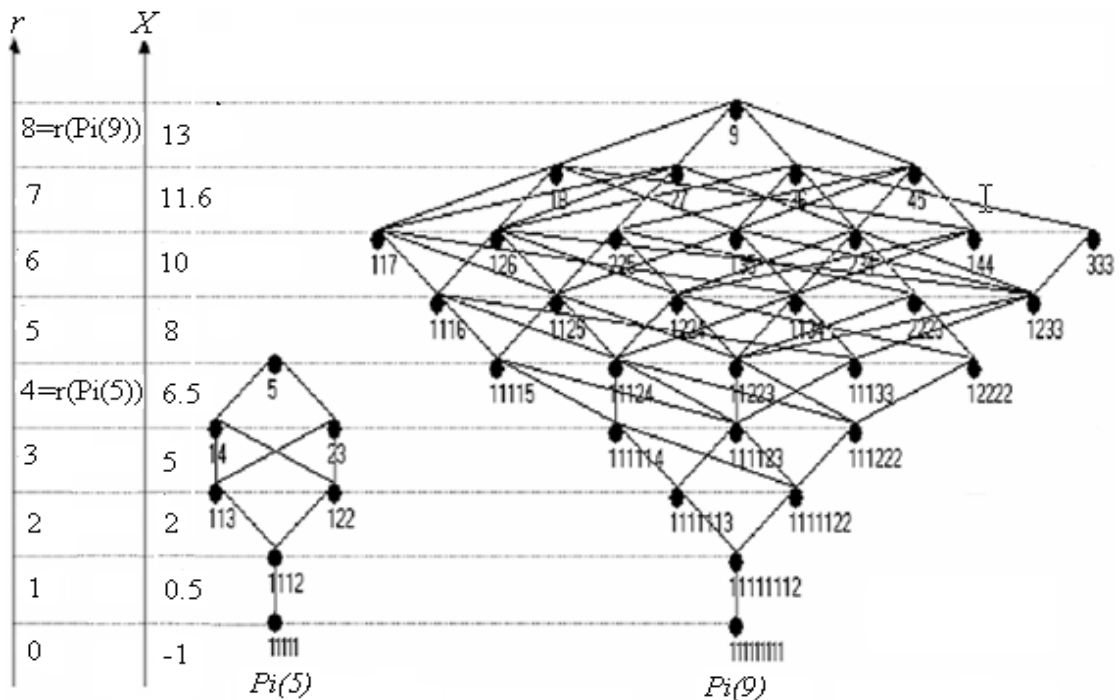


Figure 2.3

**Moyenne et variance de  $Pi(n)$**

Soit  $X$  une fonction de représentation de  $Pi(n)$ , alors :

$$\mu_X = \frac{1}{p(n)} \sum_{\pi \in Pi(n)} X(\pi).$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \frac{1}{p(n)} \sum_{\pi \in Pi(n)} (X(\pi) - \mu_X)^2 \\ &= \left( \frac{1}{p(n)} \sum_{\pi \in Pi(n)} X^2(\pi) \right) - \mu_X^2. \end{aligned}$$

Considérons la représentation des partitions de  $n$  par des  $n$ -uplets. Alors, on a :  $a < b$  si et seulement si la partition correspondante à  $a$  est obtenue en subdivisant une part de celle de  $b$  (disons de taille  $l$ ) en deux parts de taille  $i$  et  $j$  ( $i + j = l$ ). On distingue deux cas :

1/  $i = j$ , dans ce cas :

$$\begin{cases} a_k = b_k & , k \neq i, l, \\ a_l = b_l - 1, \\ a_i = b_i + 2. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

2/  $i \neq j$ , dans ce cas :

$$\begin{cases} a_k = b_k & , k \neq i, j, l, \\ a_l = b_l - 1, \\ a_i = b_i + 1, \\ a_j = b_j + 1. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Le  $k^{\text{ième}}$  niveau de  $Pi(n)$  est donné comme suit :

$$N_k = \{a \in Pi(n) : a_1 + \dots + a_n = n - k\}, \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

Le tableau 2.1 représente les partitions de  $n = 6$  (selon les deux manières décrites

ci-dessus), ainsi que leurs niveaux :

<i>Niveaux</i>	<i>Partitions</i>	<i>n - uplets</i>
$N_0$	1 1 1 1 1 1	(6, 0, 0, 0, 0, 0)
$N_1$	1 1 1 1 2	(4, 1, 0, 0, 0, 0)
$N_2$	1 1 1 3	(3, 0, 1, 0, 0, 0)
	1 1 2 2	(2, 2, 0, 0, 0, 0)
$N_3$	1 1 4	(2, 0, 0, 1, 0, 0)
	1 2 3	(1, 1, 1, 0, 0, 0)
	2 2 2	(0, 3, 0, 0, 0, 0)
$N_4$	1 5	(1, 0, 0, 0, 1, 0)
	2 4	(0, 1, 0, 1, 0, 0)
	3 3	(0, 0, 2, 0, 0, 0)
$N_5$	6	(0, 0, 0, 0, 0, 1)

Tableau2.1

La fonction de rang du poset dual  $Pi^*(n)$  de  $Pi(n)$ , notée  $r^*$ , est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
 r^* : Pi^*(n) &\longrightarrow \mathbb{N} \\
 \pi &\longmapsto r^*(\pi) = b(\pi) - 1
 \end{aligned}$$

où  $b(\pi)$  représente le nombre de parts de  $\pi$ .

**Remarque 2.2.1** *Nous avons vérifié que :*

$$r^*(\pi) = n - 1 - r(\pi), \quad \forall \pi \in Pi(n).$$

La figure2.4, représente les diagrammes de Hasse de  $Pi(5)$  et  $Pi^*(5)$  avec leurs fonctions

de rang.

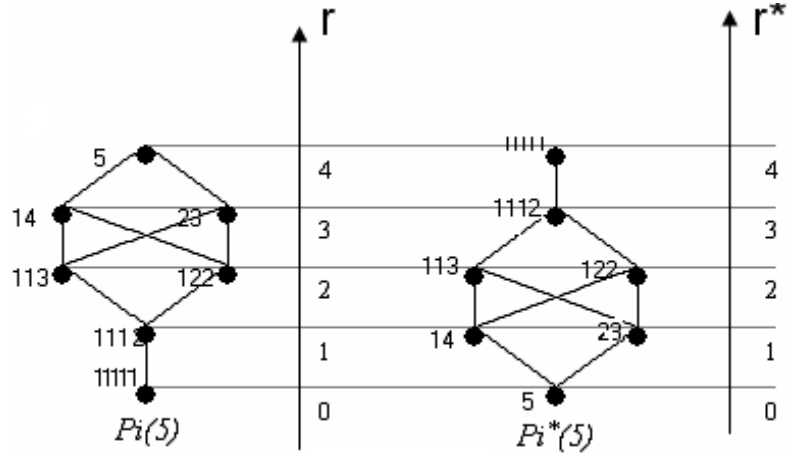


Figure 2.4

Soit  $F(\pi) = \{\sigma \in Pi(n) / \sigma \text{ est obtenue en contractant un certain nombre de parts de } \pi\}$ .

$F(\pi)$  est un filtre de  $Pi(n)$  généré par  $\pi$ .

Soit  $F^*(\pi) = \{\sigma \in Pi^*(n) / \sigma \text{ est obtenue en subdivisant un certain nombre de parts de } \pi\}$ .

$F^*(\pi)$  est un filtre de  $Pi^*(n)$  généré par  $\pi$  :

## 2.3 Résultats

Dans l'étude des partitions d'un entier, deux approches peuvent être utilisées. La première est l'approche des fonctions génératrices, et la seconde est celle des fonctions bijectives. Selon le cas, il est plus facile d'utiliser soit l'une, soit l'autre.

### 2.3.1 Résultats préliminaires

**Proposition 2.3.1** *Le poset des partitions d'un entier  $Pi(n)$  n'est pas un treillis pour  $n \geq 5$ .*

**Preuve.** Il suffit de remarquer que pour  $n \geq 5$ , le sous poset induit par les partitions :

$$\begin{aligned} \pi &= 1 + (n - 1), \\ \sigma &= 2 + (n - 2), \\ \delta &= 1 + 1 + (n - 2), \\ \xi &= 1 + 2 + (n - 3). \end{aligned}$$

est isomorphe à la configuration  $(1 + 1) \oplus (1 + 1)$  de la forme suivante :



Il est alors simple de vérifier que  $\delta \vee \xi$  et  $\pi \wedge \sigma$  n'existent pas. ■

**Exemple 2.3.1** La figure 2.5, montre la présence du cycle dans les diagrammes de Hasse des posets  $Pi(5)$  et  $Pi(6)$ .

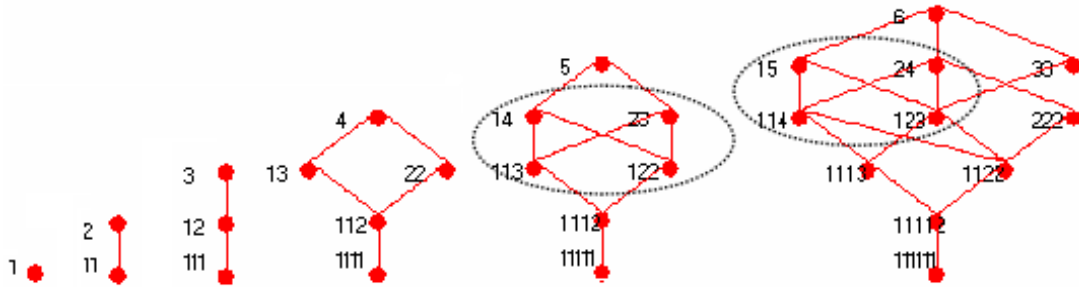


Figure 2.5

**Proposition 2.3.2** Le poset  $Pi(n)$  est isomorphe au poset  $Pi(n + 1) \setminus Pi2(n + 1)$ .

**Preuve.** Considérons l'application  $\varphi$  définie de  $Pi(n)$  dans  $Pi(n + 1) \setminus Pi2(n + 1)$  par :  $\varphi((a_1, a_2, \dots, a_n)) = (a_1 + 1, a_2, \dots, a_n, 0)$ , où  $a_i$  représente le nombre de parts de taille  $i$  dans la partition. L'application  $\varphi$  ainsi définie est injective par construction car  $a \neq b \Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b)$ . Elle est aussi surjective car si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in Pi(n + 1) \setminus Pi2(n + 1)$  alors  $x_1 \geq 1$  et  $x_{n+1} = 0$  et donc  $x = \varphi((x_1 - 1, x_2, \dots, x_n, 0))$ . D'où  $\varphi$  est bijective.

Montrons maintenant que si  $a \leq b$  alors  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ .

On a:

$$a \leq b \Rightarrow \exists l \in \{2, \dots, n\}, \exists i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ tels que } l = i + j.$$

· Si  $i = j = 1$  alors d'après (2.2.2) :

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (a_1 + 1, a_2, \dots, a_n, 0), \\ \varphi(b) &= (a_1 - 1, a_2 + 1, \dots, a_n, 0), \end{aligned}$$

et donc  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ .

· Si  $i = j \neq 1$  alors toujours d'après (2.2.2) :

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (a_1 + 1, \dots, a_i, \dots, a_l, \dots, a_n, 0), \\ \varphi(b) &= (a_1 + 1, \dots, a_i - 2, \dots, a_l + 1, \dots, a_n, 0), \end{aligned}$$

et donc  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ .

· Si  $1 \neq i \neq j \neq 1$  alors d'après (2.2.3) :

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (a_1 + 1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_l, \dots, a_n, 0), \\ \varphi(b) &= (a_1 + 1, \dots, a_i - 1, \dots, a_j - 1, \dots, a_l + 1, \dots, a_n, 0), \end{aligned}$$

et donc  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ .

· Si  $1 = i \neq j \neq 1$  alors d'après (2.2.3) :

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (a_1 + 1, \dots, a_j, \dots, a_l, \dots, a_n, 0), \\ \varphi(b) &= (a_1, \dots, a_j - 1, \dots, a_l + 1, \dots, a_n, 0), \end{aligned}$$

et donc  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ . ■

**Exemple 2.3.2** La figure 2.6, montre l'isomorphisme entre les posets  $P_i(n)$  et  $P_i(n +$

1) \setminus Pi2(n + 1), pour n = 1, \dots, 6.

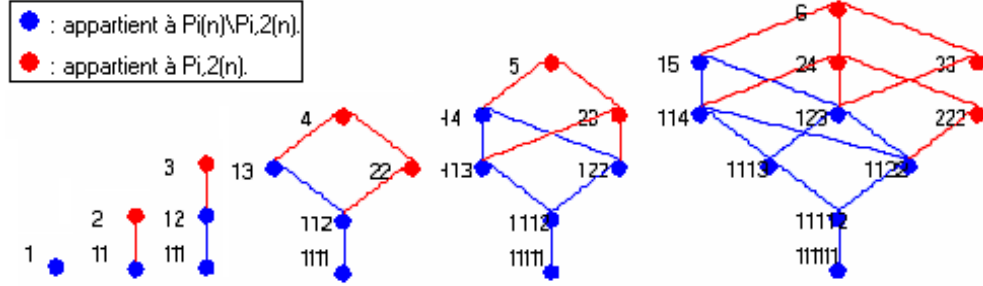


Figure 2.6

**Remarque 2.3.1** La proposition 2.3.2 est forte intéressante, dans la mesure où elle permet une construction recursive des DH de  $Pi(n)$ ,  $n \geq 1$ . Une telle construction réduit considérablement le temps d'exécution. En effet, pour tracer le DH de  $Pi(n + 1)$ , il suffit de tracer celui de  $Pi(n)$  (après avoir ajouté une part égale à 1 à chacune de ses partitions); au-dessus duquel on trace celui de  $Pi2(n + 1)$ . Ensuite, on relie les partitions maximales entre elles (celles ayant une seule part) ainsi que toute partition de  $Pi(n)$  ayant la deuxième part supérieur à 1, aux partitions qui la couvrent dans  $Pi2(n + 1)$ .

**Corollaire 2.3.1** On a, pour  $n \geq 2$  :

- 1)  $p(n, k) - p(n - 1, k - 1) = p_2(n, k)$ ,
- 2)  $p(n) - p(n - 1) = p_2(n)$ ,
- 3)  $p(n) = 1 + \sum_{k=2}^n p_2(k)$ ,
- 4) La suite  $(p(n))_n$  est convexe.

**Preuve.** 1) et 2) sont immédiates en vertu de la proposition 2.3.2.

3) De 2) on a:

$$\sum_{k=2}^n p_2(k) = \sum_{k=2}^n (p(k) - p(k - 1)) = p(n) - p(1) = p(n) - 1.$$

4) Il est possible d'injecter  $Pi2(n)$  dans  $Pi2(n + 1)$  en ajoutant 1 à la plus petite part, dans chaque partition de  $Pi2(n)$ .

Donc,

$$p_2(n) \leq p_2(n + 1).$$

Il vient en vertu de 2),

$$p(n+1) + p(n-1) - 2p(n) = p_2(n+1) - p_2(n) \geq 0. \blacksquare$$

### 2.3.2 Nouvelles identités

Les posets  $Pi(1)$ ,  $Pi(2)$  et  $Pi(3)$  sont des chaînes. C'est à partir de  $n \geq 4$  que le poset  $Pi(n)$  commence à prendre une autre forme. Dans ce qui suit on s'intéresse à l'étude de cette dernière.

**Théorème 2.3.1** *Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels tels que  $m < n$ , et soit  $Q(n, m)$  le sous poset de  $Pi(n)$ , formé des partitions ayant au minimum  $m$  parts égales à 1. Alors  $Q(n, m)$  est isomorphe au poset  $Pi(n - m)$ .*

**Preuve.** Considérons l'application  $\varphi$  définie de  $Pi(n - m)$  dans  $Q(n, m)$  par :

$$\varphi((a_1, a_2, \dots, a_{n-m})) = (a_1 + m, a_2, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0),$$

où  $a_i$  représente le nombre de parts de taille  $i$  dans la partition.

L'application  $\varphi$  ainsi définie est injective par construction car  $a \neq b \Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b)$ . Elle est aussi surjective car si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, \dots, x_n) \in Q(n, m)$  alors  $x_1 \geq m$  et  $x_j = 0$  pour  $n - m < j \leq n$  et donc  $x = \varphi(x_1 - m, x_2, \dots, x_{n-m})$ .

Ainsi  $\varphi$  est bijective.

Montrons maintenant que si  $a \leq b$  alors  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ .

On a :

$$a \leq b \Rightarrow \exists l \in \{2, \dots, n - m\}, \exists i, j \in \{1, \dots, n - m\} \text{ tels que } l = i + j.$$

· Si  $i = j = 1$  alors d'après (2.2.2) :

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (a_1 + m, a_2, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0), \\ \varphi(b) &= (a_1 - 2 + m, a_2 - 1, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

et donc  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ .

· Si  $i = j \neq 1$  alors toujours d'après (2.2.2) :

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (a_1 + m, \dots, a_i, \dots, a_l, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0), \\ \varphi(b) &= (a_1 + m, \dots, a_i - 2, \dots, a_l + 1, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

et donc  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ .

· Si  $1 \neq i \neq j \neq 1$  alors d'après (2.2.3) :

$$\varphi(a) = (a_1 + m, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_l, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0),$$

$$\varphi(b) = (a_1 + m, \dots, a_i - 1, \dots, a_j - 1, \dots, a_l + 1, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0),$$

et donc  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ .

· Si  $1 = i \neq j \neq 1$  alors d'après (2.2.3) :

$$\varphi(a) = (a_1 + m, \dots, a_j, \dots, a_l, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0),$$

$$\varphi(b) = (a_1 + m - 1, \dots, a_j - 1, \dots, a_l + 1, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0),$$

et donc  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ . ■

**Exemple 2.3.3** La figure 2.7, montre la correspondance entre le sous poset  $Q(9, 4)$  du poset  $Pi(9)$  et  $Pi(5)$ .

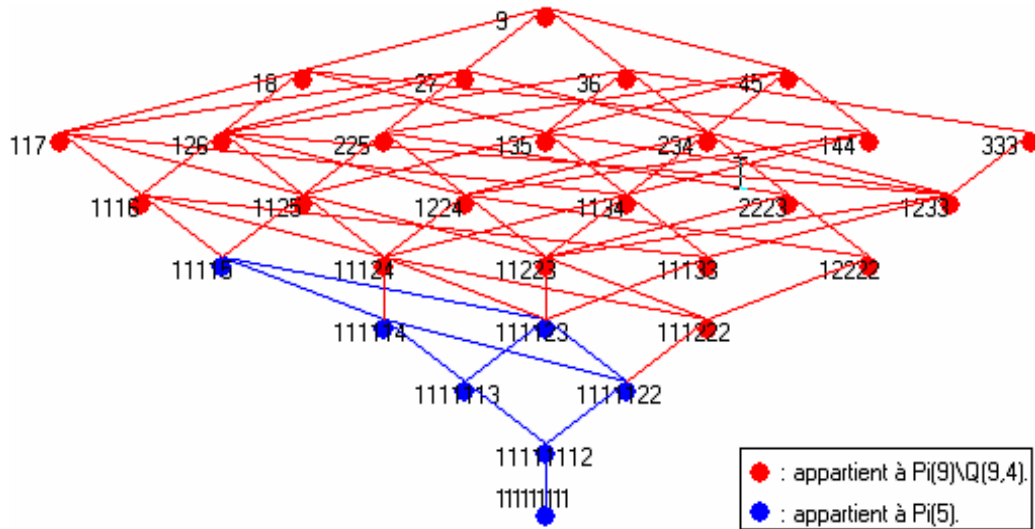


Figure 2.7

**Remarque 2.3.2** L'intérêt du théorème 2.3.1 est double. Il permet d'une part de déduire les DH des posets  $Pi(n - m)$ ,  $m \geq 1$ , de celui du poset  $Pi(n)$ , et ce en supprimant simplement les sommets qui correspondent aux partitions ayant moins de  $m$  parts égales à 1 dans  $Pi(n)$ . D'autre part, il permet de construire les DH des posets  $Pi(n + m)$ ,  $m \geq 1$ , à partir de celui de  $Pi(n)$ , en rajoutant en première étape  $m$  parts égales à 1 à

toutes partitions de  $Pi(n)$ , au-dessus duquel on insère les sommets qui correspondent aux partitions ayant moins de  $m$  parts égales à 1, qui seront reliées en respectant la relation de couverture. Les partitions ayant au moins  $m + 2$  parts égales à 1, à savoir celles de  $Q(n + m, m + 2)$  ( $\sim Pi(n - 2)$ ) ne seront pas concernées par l'étude de couverture.

**Corollaire 2.3.2** On a :

$$p(n, k) = p(n - m, k - m) + p_{m+1}(n, k).$$

La démonstration de ce corollaire est immédiate en vertu du théorème 2.3.1.

**Remarque 2.3.3** Si on choisit  $m = 1$  dans le corollaire 2.3.2, on retrouve le résultat de l'identité 1) du corollaire 2.3.1.

**Exemple 2.3.4** La figure 2.8, montre la couverture entre  $Pi_2(n)$  et  $Pi(n)$ , pour  $n = 8, 7, 6$ . La figure 2.9 montre la couverture entre  $Pi_2(8)$ ,  $Q(8, 3)$  et  $Pi(8) \setminus Pi_{1,2}(8)$  où  $Pi_{1,2}(8)$  désigne le sous poset de  $Pi(8)$  formé des partitions ayant une ou deux parts égales à 1.

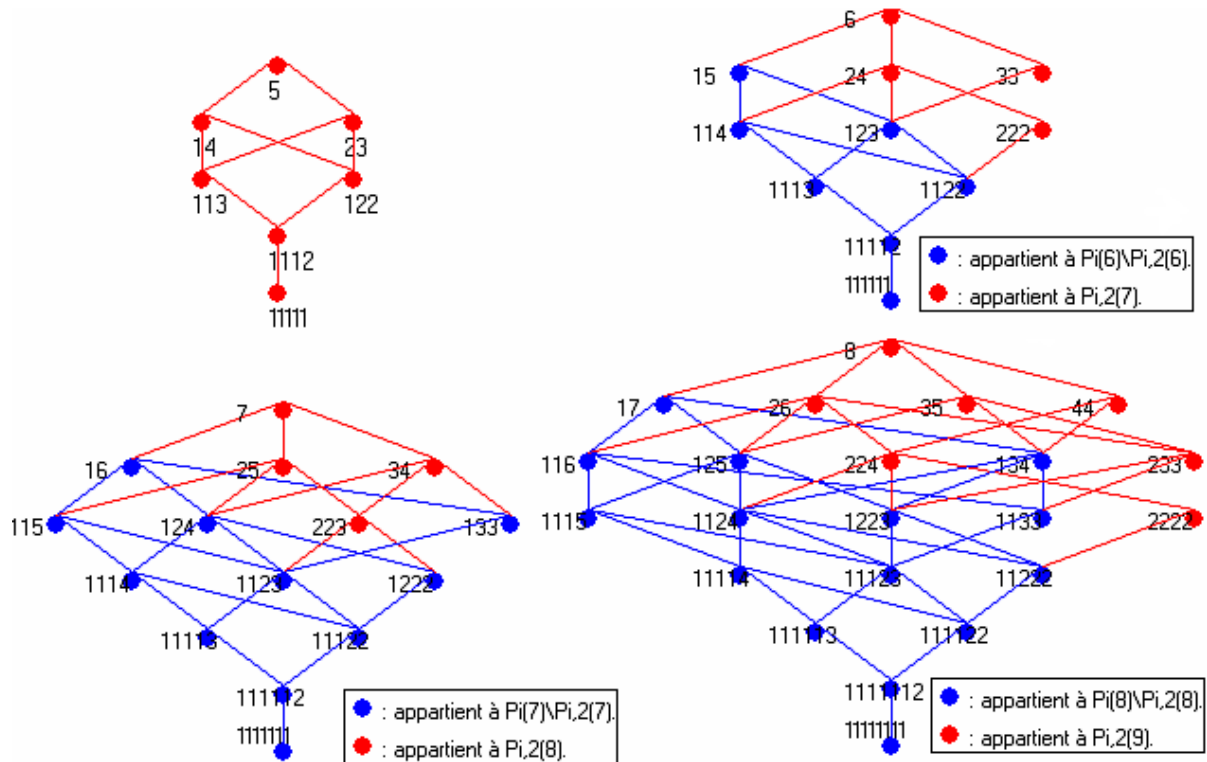


Figure 2.8

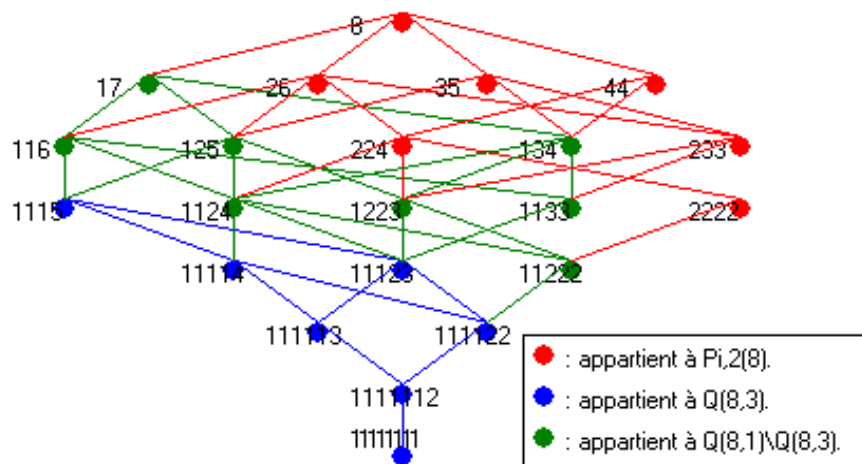


Figure 2.9

**Exemple 2.3.5** La figure 2.10, montre la couverture entre  $Pi(9) \setminus Q(9, 2)$  et  $Q(9, 2) \setminus Q(7, 2)$  et  $Pi(5)$ .

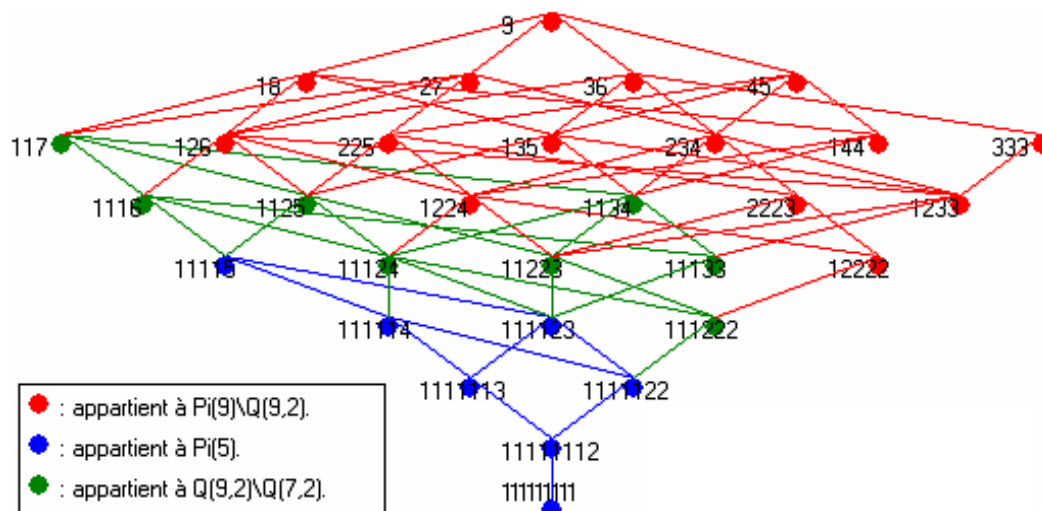


Figure 2.10

### 2.3.3 Résultats secondaires

#### Théorème 2.3.2 [20]

La fonction génératrice associée aux nombres  $p(n)$  s'exprime dans l'ensemble des nom-

bres complexes  $\mathbb{C}$  comme suit :

$$\begin{aligned}
 \phi(z) &= \sum_{n \geq 0} p(n) z^n \\
 &= 1 + \sum_{n \geq 1} p(n) z^n \\
 &= \prod_{i \geq 1} (1 - z^i)^{-1} \\
 &= \frac{1}{(1 - z).(1 - z^2).(1 - z^3) \dots}; \quad |z| < 1.
 \end{aligned}$$

**Théorème 2.3.3 [20]**

La fonction génératrice associée aux nombres  $p(n, k)$  s'exprime dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  comme suit :

$$\begin{aligned}
 \phi(z, u) &= 1 + \sum_{1 \leq k \leq n} p(n, k) z^n u^k \\
 &= \prod_{i \geq 1} (1 - uz^i)^{-1} \\
 &= \frac{1}{(1 - uz).(1 - uz^2).(1 - uz^3) \dots}; \quad |z| < 1.
 \end{aligned}$$

**Proposition 2.3.3 [14]**

La fonction génératrice associée aux nombres  $a(n, k)$  s'exprime dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  comme suit :

$$g_k(z) = \frac{1}{(1 - z) \dots (1 - z^k)}; \quad |z| < 1.$$

**Proposition 2.3.4 [13]**

On a :

$$a(n, k) = a(n, k - 1) + a(n - k, k).$$

**Proposition 2.3.5 [13]**

On a :

$$p(n, k) = a(n - k, k).$$

**Corollaire 2.3.3** [13]

On a :

$$p(n, k) = a(n, k) - a(n, k - 1) \text{ et } p(n) = a(n, n).$$

**Exemple 2.3.6** Ci-dessous nous présentons respectivement les listes des valeurs de  $p(n)$ ,  $p(n, k)$ ,  $a(n, k)$ , pour  $n \leq 20$ .

*Liste des valeurs de  $p(n)$*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p(n)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627

Liste 2.1

*Liste des valeurs de  $p(n, k)$*

k \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10
3	0	0	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33
4	0	0	0	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64
5	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84
6	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90
7	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82
8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	11	15	22
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	11	15
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7	11
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Liste 2.2

Liste des valeurs de  $a(n, k)$ 

k \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11
3	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33	37	40	44
4	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64	72	84	94	108
5	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	101	119	141	164	192
6	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110	136	163	199	235	282
7	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131	164	201	248	300	364
8	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116	146	186	230	288	352	434
9	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94	123	157	201	252	318	393	488
10	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75	97	128	164	212	267	340	423	530
11	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	76	99	131	169	219	278	355	445	560
12	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	100	133	172	224	285	366	460	582
13	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	134	174	227	290	373	471	597
14	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	175	229	293	378	478	608
15	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	230	295	381	483	615
16	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	296	383	486	620
17	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	384	488	623
18	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	489	625
19	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	626
20	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627

Liste2.3

**Proposition 2.3.6** [24]

Le nombre de partitions d'un entier  $n$  en  $m$  parts est égal au nombre de partitions de  $n - m$  avec au plus  $m$  parts, c'est à dire :

$$p(n, m) = \begin{cases} p(n - m) & \text{si } n - m \leq m, \\ \sum_{i=1}^m p(n - m, i) & \text{si } n - m \geq m. \end{cases}$$

**Preuve. (\*)**

Si  $n - m \leq m$  on a,

$$a(n - m, m) = a(n - m, n - m).$$

Comme de plus  $a(n - m, n - m) = p(n - m)$ , en vertu du corollaire 2.3.3, le résultat est établi.

Si maintenant  $n - m \geq m$ , alors d'après le corollaire 2.3.3, on a :

$$p(n - m, i) = a(n - m, i) - a(n - m, i - 1), \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Donc

$$\sum_{i=1}^m p(n - m, i) = a(n - m, m)$$

Le résultat est ainsi démontré en vertu de la proposition 2.3.5. ■

### **Théorème 2.3.4 [14]**

Si on désigne par  $d_n(k)$  la somme de tous les diviseurs de  $n$ , inférieurs ou égaux à  $k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , alors on a :

$$a(n, k) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} d_{n-i}(k) a(i, k),$$

et

$$p(n, k) = \frac{1}{n - k} \sum_{i=k}^{n-1} d_{n-i}(k) p(i, k).$$

### **Moyenne graduée du poset $Pi(n)$**

Nous avons déjà souligné en page 25, que le poset  $Pi(n)$  est gradué et que sa fonction de rang est définie par :  $r(\pi) = n - b(\pi)$ ,  $\forall \pi \in Pi(n)$ , où  $b(\pi)$ , représente le nombre de parts dans  $\pi$ .

La moyenne graduée, notée,  $\mu_n$ , est exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{1}{p(n)} \sum_{\pi \in Pi(n)} r(\pi) \\ &= \frac{1}{p(n)} \sum_{\pi \in Pi(n)} n - b(\pi) \\ &= n - \frac{1}{p(n)} \sum_{m=1}^n m p(n, m). \end{aligned}$$

**Théorème 2.3.5** Si on désigne par  $d(n)$  le nombre de diviseurs de  $n$ , alors on a :

$$\sum_{m=1}^n m p(n, m) = \sum_{k=0}^{n-1} p(k) d(n - k).$$

**Preuve.** D'après le théorème d'Euler 2.3.3, la fonction génératrice de  $p(n, m)$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \phi(t, u) &= 1 + \sum_{1 \leq m \leq n} p(n, m) t^n u^m \\
 &= \prod_{i \geq 0} (1 - ut^i)^{-1} \\
 &= \frac{1}{(1 - ut)} \cdot \frac{1}{(1 - ut^2)} \cdot \frac{1}{(1 - ut^3)} \cdots \\
 &= \sum_{i_1 \geq 0} (ut)^{i_1} \cdot \sum_{i_2 \geq 0} (ut^2)^{i_2} \cdot \sum_{i_3 \geq 0} (ut^3)^{i_3} \cdots \\
 &= \prod_{i \geq 1} \sum_{i_j \geq 0} (ut^i)^{i_j} \\
 &= \sum_{i_1, i_2, i_3, \dots \geq 0} u^{i_1 + i_2 + i_3 + \dots} t^{i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \dots}.
 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Si on pose  $i_1 + i_2 + i_3 + \dots = m$  et  $i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \dots = n$ , alors le coefficient du monôme  $u^m t^n$  est égal aux nombres de solutions du système  $S$  suivant :

$$S \begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n = m \\ i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \dots + ni_n = n \\ i_j \geq 0, j \geq 1. \end{cases}$$

qui est égal à  $p(n, m)$ .

Nous avons alors d'une part :

$$\begin{aligned}
 \phi(t, u) &= 1 + \sum_{1 \leq m \leq n} p(n, m) t^n u^m \\
 &= 1 + \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{m=1}^n p(n, m) u^m \right) t^n.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi(t, u)}{\partial u} &= \sum_{1 \leq m \leq n} m p(n, m) u^{m-1} t^n \\
 &= \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{m=1}^n m p(n, m) u^{m-1} \right) t^n.
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\left. \frac{\partial \phi(t, u)}{\partial u} \right|_{u=1} = \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{m=1}^n m p(n, m) \right) t^n. \tag{2.2.5}$$

D'autre part, en vertu de (2.2.4) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi(t, u)}{\partial u} &= \phi(t, u) \sum_{i \geq 1} \frac{t^i}{1 - ut^i} \\
&= \phi(t, u) \sum_{i \geq 1} \left( \sum_{j \geq 0} u^j t^{ij} \right) t^i \\
&= \phi(t, u) \sum_{i \geq 1} \left( \sum_{j \geq 0} u^j t^{i(j+1)} \right) \\
&= \phi(t, u) \sum_{i \geq 1} \left( \sum_{j \geq 1} u^{j-1} t^{ij} \right) \\
&= \phi(t, u) \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{\substack{d \geq 0 \\ d+1 \text{ divise } n}} u^d \right) t^n.
\end{aligned}$$

Il vient,

$$\left. \frac{\partial \phi(t, u)}{\partial u} \right|_{u=1} = \phi(t, 1) \sum_{n \geq 1} d(n) t^n.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \phi(t, u)}{\partial u} \right|_{u=1} &= \left( 1 + \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{m=1}^n p(n, m) \right) t^n \right) \left( \sum_{n \geq 1} d(n) t^n \right) \\
&= \sum_{n \geq 1} d(n) t^n + \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=1}^n \left( \sum_{m=1}^k p(k, m) \right) d(n-k) \right) t^n \\
&= \sum_{n \geq 1} \left( d(n) + \sum_{k=1}^n p(k) d(n-k) \right) t^n. \tag{2.2.6}
\end{aligned}$$

En identifiant (2.2.5) à (2.2.6), on trouve :

$$d(n) + \sum_{k=1}^n p(k) d(n-k) = \sum_{m=1}^n m p(n, m); \quad n \geq 1.$$

En posant  $p(0) = 1$ , on aura enfin,

$$\sum_{m=1}^n m p(n, m) = \sum_{k=0}^n p(k) d(n-k). \quad \blacksquare$$

**Corollaire 2.3.4** *La moyenne-graduée du poset  $Pi(n)$  est donnée par :*

$$\mu_n = n - \frac{1}{p(n)} \sum_{k=0}^{n-1} p(k) d(n-k).$$

**Preuve.** Conséquence directe du théorème 2.3.5. ■

**Théorème 2.3.6** [20]

*Le nombre de partitions de l'entier  $n$  dont la plus grande part est  $k$  est égal au nombre de partitions de  $n$  en  $k$  parts.*

**Preuve.** La preuve de ce théorème est évidente si on utilise le diagramme de Ferrers.

En effet, il suffit d'interchanger les lignes et les colonnes du diagramme de Ferrers, ou encore, considérer les colonnes de droite à gauche, ce qui donne une et une seule partition du même entier  $n$  en  $k$  parts. ■

**Exemple 2.3.7** *La figure 2.11 montre le diagramme de Ferrers de la partition  $27 = 8 + 5 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$ , qui engendre la partition  $27 = 10 + 7 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$  de la figure 2.1*

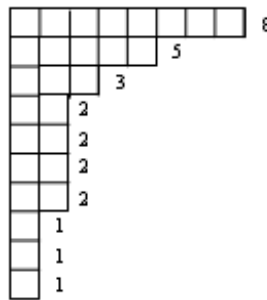


Figure 2.11

**Théorème 2.3.7** [20]

*Le nombre de partitions de  $n$  en parts distinctes est égal au nombre de partitions de  $n$  en parts impaires.*

**Preuve.** (\*)

Soit  $d_1 + d_2 + \dots + d_k$  une partition de  $n$  en parts distinctes.

Chaque part  $d_i$  peut être exprimée de manière unique avec une puissance de 2 fois un nombre impair. Ainsi on obtient :

$$n = 2^{\alpha_1} i_1 + 2^{\alpha_2} i_2 + \dots + 2^{\alpha_k} i_k.$$

où les  $i_j$  sont des entiers impairs.

En groupant ensemble les même nombres impairs on obtient :

$$\begin{aligned}
 n &= (2^{\theta_1} + 2^{\theta_2} + \dots).1 + (2^{\beta_1} + 2^{\beta_2} + \dots).3 + (2^{\gamma_1} + 2^{\gamma_2} + \dots).5 + \dots \\
 &= \mu_1.1 + \mu_2.3 + \mu_3.5 + \dots .
 \end{aligned}$$

Les  $\mu_i$  sont distincts, car les  $d_i$  sont des parts distinctes.

Considérons l'application  $\varphi$  qui associe à chaque partition en parts distinctes, une partition en parts impaires, définie par :

$$\varphi(d_1 + d_2 + \dots + d_k) = \underbrace{1 + \dots + 1}_{\mu_1 \text{ fois}} + \underbrace{3 + \dots + 3}_{\mu_2 \text{ fois}} + \dots ,$$

L'application  $\varphi$  ainsi définie est bijective par construction. ■

**Exemple 2.3.8** La partition  $3 + 4$  est une partition de  $n = 7$  en parts distinctes. On a :

$$3 + 4 = 2^0.3 + 2^2.1 = 2^2.1 + 2^0.3 = 4.1 + 1.3.$$

En utilisant l'application  $\varphi$  définie ci dessus, on obtient :

$$\varphi(3 + 4) = 1 + 1 + 1 + 1 + 3.$$

Le tableau 2.2 montre les partitions de  $n = 7$  en illustrant celles qui sont en parts distinctes et celles dont les parts sont toutes impaires.

Partitions	Impairs	Distinctes
1+1+1+1+1+1	X	
1+1+1+1+1+2		
1+1+1+1+3	X	
1+1+1+2+2		
1+1+1+4		
1+1+2+3		
1+2+2+2		
1+1+5	X	
1+2+4		X
1+3+3	X	
2+2+3		
1+6		X
2+5		X
3+4		X
7	X	X

Tableau 2.2

**Définition 2.3.1** Deux partitions d'un entier sont dites conjuguées (ou transposées), si le diagramme de Ferrers de la première se transforme en celui de la seconde en se reflétant par rapport à la ligne, où les coordonnées de la première case à gauche sont prises comme  $(0, 0)$ .

**Exemple 2.3.9** La figure 2.12 illustre deux partitions conjuguées de l'entier 15 qui sont  $6 + 3 + 3 + 2 + 1$  et  $5 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1$ .

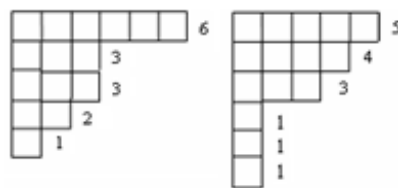


Figure 2.12

**Définition 2.3.2** Une partition est auto-conjuguée si elle est égale à son conjuguée, c'est-à-dire que son diagramme de Ferrers est symétrique par rapport à la diagonale.

**Exemple 2.3.10** La partition  $6+4+4+4+1+1$  de 20 est auto-conjuguée (voir figure 2.13).

### Théorème 2.3.8 [20]

Le nombre de partitions de  $n$  en parts impaires et distinctes, est égal au nombre de partitions auto-conjuguées de  $n$ .

**Preuve.** La démonstration de ce théorème repose sur le diagramme de Ferrers. En effet, étant donnée une partition de  $n$  en parts impaires et distinctes, on peut lui associer une unique partition auto-conjuguée en pliant les lignes du diagramme de Ferrers, au niveau de la case du milieu, de sorte qu'elles forment des côtés d'un triangle droit isocèle, et puis superposer les coins des parts en respectant leurs ordres dans la partition.

Ce procédé est inversible, puisqu'à partir d'une partition auto-conjuguée on peut obtenir une unique partition en parts distinctes et impaires, en faisant exactement le geste inverse. ■

**Exemple 2.3.11** La partition de 20 en parts impaires et distinctes  $11 + 5 + 3 + 1$  est illustrée sur la figure 2.13.

La partition :  $20 = 6 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1$  est auto-conjuguée.

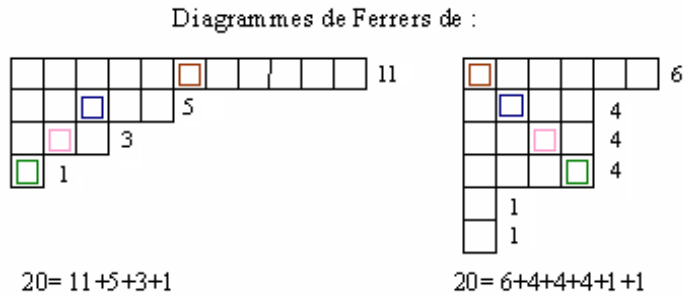


Figure 2.13

### 2.3.4 Partition d'un entier et graphes transitifs

**Définition 2.3.3** Un graphe simple est dit transitif si pour toute chaîne reliant deux sommets, il existe une arête reliant ces deux sommets, autrement dit, un graphe transitif est une somme disjointe de cliques.

**Exemple 2.3.12**

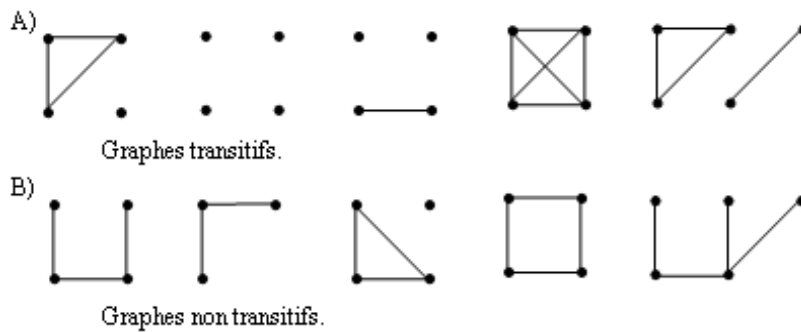


Figure 2.14

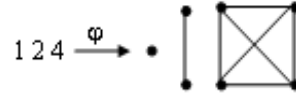
**Théorème 2.3.9 [5]**

Le nombre  $p(n)$  des partitions d'un entier  $n$  est égal au nombre de graphes transitifs d'ordre  $n$  (à isomorphisme près).

**Preuve. (\*)** Soit  $C(n)$  l'ensemble des graphes du type  $K_{n_1} + K_{n_2} + \dots + K_{n_k}$ , avec  $K_{n_i}$  le graphe complet d'ordre  $n_i$  et  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ , et soit l'application  $\varphi$  définie de  $P_i(n)$  dans  $C(n)$  par  $\varphi(\pi) = K_{n_1} + K_{n_2} + \dots + K_{n_k}$ , avec  $\pi = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ .

$\varphi$  est bijective par construction. ■

**Exemple 2.3.13**



Dans la figure 2.15 nous présentons les graphes transitifs de 1 à 5 sommets, associés aux partitions de  $n \leq 5$ .

**Exemple 2.3.14**

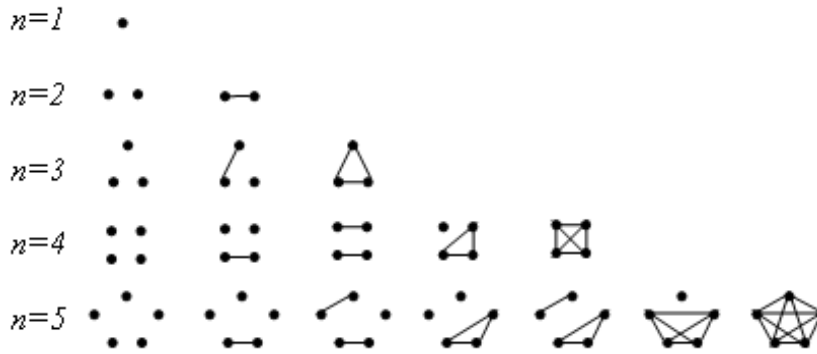


Figure 2.15

**Remarque 2.3.4** Dans l'étude de la théorie quantique des champs, ces graphes sont utilisés pour représenter schématiquement les termes de perturbation, en associant à chaque graphe une amplitude numérique.

On a illustré dans l'article [5] comment on peut imposer des contraintes purement combinatoires ou topologiques à la dynamique d'une théorie quantique des champs. En particulier, des exemples de théorie de champ qui génèrent différentes partitions de nombres entiers ont été démontrés.

# Chapitre 3

## Etude de l'optimalité de la fonction de rang dans le poset des partitions d'un entier

### Sommaire

---

3.1	Introduction	48
3.2	Définitions	50
3.3	Conditions suffisantes d'optimalité de la fonction de rang dans un poset gradué	52
3.3.1	Vérifications des conditions suffisantes pour l'optimalité de la fonction de rang de $P_i(n)$	52
3.4	Condition nécessaire et suffisante d'optimalité de la fonction de rang.	57
3.5	Etude de la propriété de Sperner	59

---

### 3.1 Introduction

Le poset des partitions d'un entier est-il de rang comprimé? C'est la question que nous nous sommes posée dans ce chapitre, et que nous nous proposons d'étudier. Comme le poset  $Pi(n)$  est fini, la question de l'existence et l'unicité d'une représentation optimale ne se pose pas [14]. Nous commençons alors notre travail par l'étude des conditions suffisantes d'optimalité, ensuite nous passerons à la condition nécessaire et suffisante d'Alekseev. En fin, nous exposons quelques résultats supplémentaires relatifs aux antichânes et aux filtres.

V.B. Alekseev [2] a établi une formule asymptotique relative à la taille maximum d'une antichâne dans le poset  $P^n \left( \underbrace{P \times \dots \times P}_{n \text{ fois}} \right)$ , où  $P$  est un poset fini non réduit à une antichâne.

#### Théorème 3.1.1 [2]

*Si  $P$  n'est pas une antichâne, alors*

$$d(P^n) \sim \frac{|P|^n}{\sqrt{2\pi n} \sigma(P)} \text{ quand } n \longrightarrow +\infty,$$

*où  $d(P^n)$  représente la taille maximum d'une antichâne dans le poset  $P^n$  et  $\sigma(P)$  représente la racine carrée de la variance du poset  $P$ .*

Le théorème d'Alekseev propose la recherche d'une représentation optimale parmi toutes les représentations du poset  $P$ , pour l'évaluation du paramètre  $\sigma(P)$ . Ce problème a attiré l'attention de plusieurs chercheurs, tels que K. Englel, H.-D.O.F Gronau, L. H. Harper, E.R.Canfield et S. Bouroubi.

Dans ce qui suit, nous passerons en revue les différents résultats obtenus dans ce cadre.

#### Théorème 3.1.2 [14]

*Soit  $X$  une représentation de  $P$  et soit  $c$  une constante réelle. La fonction  $X' = X + c$  possède les propriétés suivantes :*

- 1-  $X'$  est une représentation.
- 2-  $\mu_{X'} = \mu_X + c$  et  $\sigma_{X'}^2 = \sigma_X^2$ .

**Proposition 3.1.1** [14]

Pour toute représentation  $X$  de  $P$  et toute constante réelle  $\mu$ , il existe une représentation  $Y$  de  $P$  telle que :

$$\mu_Y = \mu \text{ et } \sigma_Y^2 = \sigma_X^2 .$$

**Corollaire 3.1.1** [14]

Pour toute constante réelle  $\mu$ ; on a :

$$\text{Inf} \{ \sigma_X^2, X \text{ représentation de } P \} = \text{Inf} \{ \sigma_X^2, X \text{ représentation de } P, \mu_X = \mu \} .$$

**Théorème 3.1.3** [21]

Pour tout poset  $P$ , et tout nombre réel  $\mu$ , il existe une et une seule représentation optimale de  $P$  de moyenne  $\mu$ .

Le problème de recherche d'une fonction de représentation optimale, revient au problème de recherche de la solution optimale du programme quadratique  $(PQ)$  suivant :

$$(PQ) \begin{cases} \text{Min } x^t(V - vv^t)x \\ -Ax \leq -1 \\ x_i \geq 0; \forall i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

où :

- $\hookrightarrow x$  : représente le vecteur de la fonction de représentation attribuée à  $P$ ,
- $\hookrightarrow V = \frac{1}{|P|}I_n$ , où  $I_n$  est la matrice identité d'ordre  $n$ ,
- $\hookrightarrow v = \frac{1}{|P|}1_n$ , où  $1_n = (1, \dots, 1)^t$ ,
- $\hookrightarrow$  et  $A$  représente la matrice d'incidence arcs-sommets de  $P$ .

Une des approches de la résolution du problème de la recherche de la représentation optimale, est basée sur l'étude de l'optimalité de la fonction de rang. Cette approche a été initiée par K.Engel :

$$P \text{ est un poset gradué et de rang comprimé } \iff \sigma(P) = \sigma_r(P).$$

Après la présentation de quelques résultats et définitions préliminaires, nous résumons les principaux résultats de la recherche des conditions suffisantes et/ou nécessaires d'optimalité de la fonction de rang dans un poset  $P$  gradué, principalement dans les Théorèmes 3.3.1 et 3.4.1 de ce chapitre.

## 3.2 Définitions

- ▷ Une chaîne  $C$  de  $P$  est dite symétrique si  $C$  est de la forme  $C = c_0 \triangleleft c_1 \triangleleft c_2 \triangleleft \dots \triangleleft c_k$ , avec  $r(c_0) + r(c_k) = r(P)$ .
- ▷ Une partition en chaînes symétriques, est une collection de chaînes symétriques formant une partition de  $P$ .
- ▷  $P$  est un ordre en chaînes symétriques s'il admet une partition en chaînes symétriques.
- ▷  $P$  est de rang symétrique si  $W_i = W_{r(P)-i}, \forall i, i = 0, \dots, r(P)$ .
- ▷  $P$  est de rang unimodal s'il existe  $k, 0 \leq k < r(P)$  tel que:

$$\begin{cases} |N_i| \leq |N_{i+1}|, \text{ si } i < k \\ |N_i| \geq |N_{i+1}|, \text{ si } i \geq k. \end{cases}$$

- ▷ On appelle  $k$ -famille, une famille de  $P$  ne contenant pas une chaîne à  $k+1$  éléments dans  $P$ . Une 1-famille est une antichaîne.
- ▷ On dit que  $P$  possède la propriété de  $k$ -Sperner si:

$$d_k(P) = \max_{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq r(P)} \sum_{l=1}^k |N_{i_l}|,$$

où  $d_k(P)$  est la taille maximum des  $k$ -familles dans  $P$ .

Si  $k = 1$ , on dit tout simplement que  $P$  possède la propriété de Sperner.

- ▷ On dit que  $P$  possède la propriété forte de Sperner, si  $P$  possède la propriété de  $k$ -Sperner,  $\forall k, k = 1, 2, \dots, r(P) + 1$ .

▷  $P$  est dit un *Peck – poset* s'il est de rang unimodal, de rang symétrique, et possède la propriété forte de Sperner.

▷ Soient  $P$  un poset gradué, et  $A$  une partie de  $P$ . On définit  $R^+(A)$  et  $R^-(A)$  respectivement l'ombre supérieur et l'ombre inférieur de  $A$  comme suit:

$$R^+(A) = \{x \in P : x \succ a \text{ pour au moins un } a \in A\},$$

$$R^-(A) = \{x \in P : a \succ x \text{ pour au moins un } a \in A\}.$$

$P$  est dit poset normal si,

$$\frac{|A|}{W_i} \leq \frac{|R^+(A)|}{W_{i+1}}, \forall A \subseteq N_i, i = 0, \dots, r(P) - 1. \quad (3.2.1)$$

**Proposition 3.2.1 [21]**

$P$  est normal si et seulement si, il vérifie la condition duale de normalité, soit :

$$\frac{|A|}{W_i} \leq \frac{|R^-(A)|}{W_{i-1}}, \forall A \subseteq N_i, i = 1, \dots, r(P). \quad (3.2.2)$$

**Preuve.** On démontre seulement que (3.2.1)  $\Rightarrow$  (3.2.2), l'autre implication se fait de manière analogue.

Soit  $A \subseteq N_i, i = 1, \dots, r(P)$ . Observons tout d'abord que  $R^+(N_{i-1} \setminus R^-(A)) \cap A = \emptyset$ , sinon il existerait  $x \in N_{i-1} \setminus R^-(A)$  et  $y \in A$  tels que  $x \prec y$  et donc  $x \in R^-(A)$ , contradiction.

Ainsi,

$$R^+(N_{i-1} \setminus R^-(A)) \subseteq N_i \setminus A.$$

Il vient,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{|A|}{W_i} &= \frac{W_i - |A|}{W_i} \\ &= \frac{|N_i \setminus A|}{W_i} \\ &\geq \frac{|R^+(N_{i-1} \setminus R^-(A))|}{W_i} \\ &\stackrel{(1)}{\geq} \frac{|N_{i-1} \setminus R^-(A)|}{W_{i-1}} \\ &= \frac{W_{i-1} - |R^-(A)|}{W_{i-1}} \\ &= 1 - \frac{|R^-(A)|}{W_{i-1}}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \frac{|A|}{W_i} \leq \frac{|R^-(A)|}{W_{i-1}}. \blacksquare$$

**Remarque 3.2.1**  $P$  normal  $\iff P^*$  normal.

### 3.3 Conditions suffisantes d'optimalité de la fonction de rang dans un poset gradué

**Théorème 3.3.1** [22]

*Si un poset gradué est normal ou un ordre en chaînes symétriques ou un Peck-poset ou un treillis distributif, alors il est de rang comprimé.*

#### 3.3.1 Vérifications des conditions suffisantes pour l'optimalité de la fonction de rang du poset des partitions d'un entier

**Proposition 3.3.1**  $Pi(n)$  n'est pas de rang symétrique, pour  $n \geq 4$ .

**Preuve.** Il suffit de remarquer tout simplement que  $\forall n \geq 4 : p(n, n-1) = 1 \neq p(n, 2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ .  $\blacksquare$

**Corollaire 3.3.1**  $Pi(n)$  n'est ni un ordre en chaînes symétriques, ni de Peck.

**Remarque 3.3.1** Les tests effectués par le logiciel BNBSIP, montre que  $Pi(n)$  est de rang unimodal pour tout  $n \leq 100$ . Pour ce nous posons la conjecture suivante.

**Conjecture 3.3.1** Le poset  $Pi(n)$  est de rang unimodal et le rang  $k(n)$  vérifie:

$$\lfloor \mu(n) \rfloor \leq k(n) \leq \lceil \mu(n) \rceil.$$

où  $\mu(n)$  est la moyenne graduée du poset  $Pi(n)$ .

**Remarque 3.3.2** Partant du fait qu'une suite log-concave est unimodale, nous avons été amené à tester par le logiciel BNBSIP la log-concavité de la suite  $(p(n, k))_k$  pour  $n$  fixé et  $k = 1, \dots, n-1$ .

### 3.3. Conditions suffisantes d'optimalité de la fonction de rang dans un poset gradué

Les résultats obtenus pour  $n = 20$  sont illustrés par le graphe représenté dans la figure 3.1, et le tableau 3.1 ci-dessous:

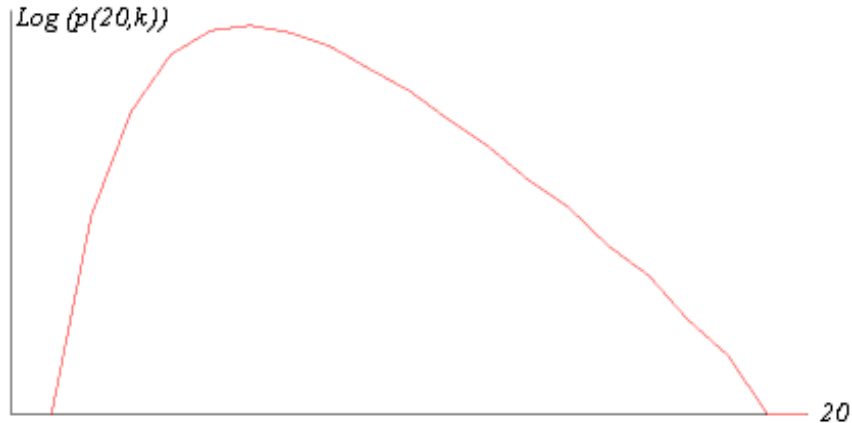


Figure 3.1

$k$	$p(n, k + 1)p(n, k - 1) - p(n, k)^2$	Observation
2	-67	< 0
8	-472	< 0
9	24	> 0
10	-144	< 0
11	24	> 0
12	-34	< 0
13	17	> 0

Tableau 3.1

**Remarque 3.3.3** En outre, nous nous sommes intéressés à la concavité de la suite  $(p(n, k))_k$  pour  $n$  fixé et  $k = 1, \dots, n - 1$ , les résultats obtenus par le logiciel BNBSIP ont montré qu'elle n'est pas concave.

Les résultats obtenus pour  $n = 20$  sont illustrés par le graphe représenté dans la figure

3.3. Conditions suffisantes d'optimalité de la fonction de rang dans un poset gradué

3.2, et le tableau 3.2 ci-dessous:

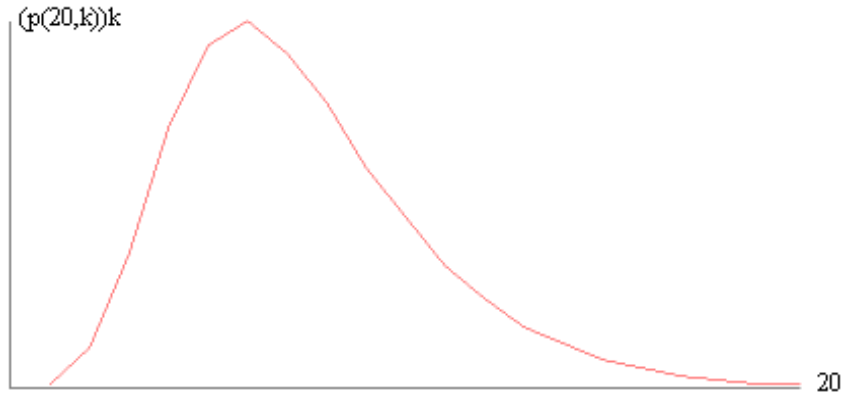


Figure 3.2

$k$	$p(n, k + 1) + p(n, k - 1) - 2p(n, k)$	Observation
2	14	$> 0$
3	8	$> 0$
4	-11	$< 0$
8	-4	$< 0$
9	4	$> 0$
10	0	$= 0$
11	4	$> 0$

Tableau 3.2

**Exemple 3.3.1** La figure 3.3, montre que le poset  $Pi(22)$  est de rang unimodal. En effet, la cardinalité des niveaux du poset  $Pi(22)$  augmente de niveau en niveau, jusqu'au niveau  $k = 17$  ( $|N_{17}| = 136$ ), au-delà duquel la cardinalité décroît de niveau en niveau, jusqu'au dernier.



Figure 3.3

*Pi(n)* poset distributif?

Le poset *Pi(n)* n'est pas un treillis pour  $n \geq 5$  (voir proposition 2.3.1). Par conséquent, il n'y a pas lieu de parler de la propriété de distributivité.

*Pi(n)* poset normal?

Les tests effectués par le logiciel *BNBSIP*, nous ont aussi permis de vérifier la normalité de *Pi(n)* pour  $n \leq 9$ . Nous démontrons ci-dessous que *Pi(n)* n'est pas normal pour  $n$  pair et  $\geq 10$ .

**Proposition 3.3.2** On a, pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$p(2n, k) = \sum_{r=1}^k p(2n - k, r), \quad \forall k \leq n.$$

**Preuve.** Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des solutions du système :

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_k = 2n - k, \quad z_1 \geq z_2 \geq \cdots \geq z_k \geq 0, \quad (3.3.1)$$

et soit  $\varphi$  l'application définie de  $P(2n, k)$  dans  $\mathcal{P}$  par :

$$\varphi((x_1, x_2, \cdots, x_k)) = (x_1 - 1, x_2 - 1, \cdots, x_k - 1),$$

avec bien sûr  $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 2n$  et  $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 1$ .

L'application  $\varphi$  ainsi définie est bijective par construction. Sa réciproque est définie par  $\varphi^{-1}(z_1, z_2, \cdots, z_k) = (z_1 + 1, z_2 + 1, \cdots, z_k + 1)$ .

Notons par  $\mathcal{P}_r$  l'ensemble des solutions du système (3.3.1), tel que:  $z_1 \geq z_2 \geq \cdots \geq z_r \geq 1$  et  $z_i = 0, i = r + 1, \cdots, k, r = 1, \cdots, k$ .

Il est clair que  $\mathcal{P} = \bigcup_{r=1}^k \mathcal{P}_r$  et  $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = \emptyset, i \neq j$ .

Donc

$$p(2n, k) = \sum_{r=1}^k |\mathcal{P}_r| = \sum_{r=1}^k p(2n - k, r).$$

Ce qui achève la démonstration. ■

**Corollaire 3.3.2** *On a :*

- 1)  $p(2n, n - 1) = p(n + 1) - 2$ ,
- 2)  $p(2n, n) = p(n)$ .

**Preuve.** Il suffit tout simplement de remplacer dans la proposition 3.3.2,  $k$  par  $n - 1$ , ensuite  $k$  par  $n$  ■

**Lemme 3.3.1** *Le poset  $Pi(n)$  vérifie :*

$$p(2n, n) < p(2n, n - 1) - 2; \forall n \geq 5.$$

**Preuve.** D'une part, en vertu du corollaire 3.3.2, on a :

$$p(2n, n - 1) - p(2n, n) = p(n + 1) - p(n) - 2.$$

D'autre part, en vertu du corollaire 2.3.1, on a :

$$p(n + 1) - p(n) = p_2(n + 1).$$

Comme  $p_2(n + 1) > 2, \forall n \geq 5$  (voir les partitions  $\pi = 2 + (n - 1)$ ,  $\sigma = 3 + (n - 2)$  et  $\delta = 2 + 2 + (n - 3)$ ).

La démonstration est achevée. ■

**Proposition 3.3.3** *Le poset  $Pi(n)$  n'est pas normal pour  $n$  pair et  $n \geq 10$ .*

**Preuve.** Soit  $n = 2k$  un entier pair,  $n \geq 10$ , et soit  $\pi$  la partition de  $n$  en parts toutes égales à 2. La partition  $\pi$  admet  $k$  parts, c'est-à-dire  $\pi \in N_k$ .

D'après le corollaire 3.3.2, et le lemme 3.3.1 on a :

$$p(n, k) = p(k) = |N_k| < p(n, k - 1) = |N_{k+1}|.$$

Si on considère  $A = \{\pi\}$ , alors  $R^+(A) = \left\{ \underbrace{2 + \dots + 2}_{k-2 \text{ fois}} + 4 \right\}$ .

Ainsi,

$$\frac{|A|}{|N_k|} = \frac{1}{p(k)} > \frac{1}{p(n, k - 1)} = \frac{|R^+(A)|}{|N_{k+1}|}.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

**Exemple 3.3.2** La figure 3.4, montre que le poset  $Pi(10)$  n'est pas normal. On voit bien que  $A = \{2 + 2 + 2 + 2 + 2\} \subset N_5$  et  $R^+(A) = \{2 + 2 + 2 + 4\} \subset N_4$  et  $\frac{1}{7} > \frac{1}{9}$ .

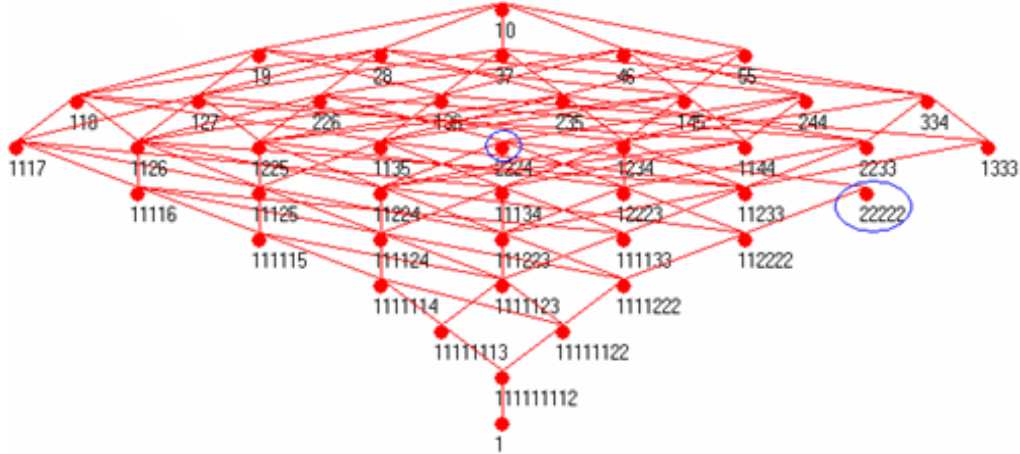


Figure 3.4

### 3.4 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité de la fonction de rang.

Après avoir étudié les conditions suffisantes de l'optimalité de la fonction de rang dans  $Pi(n)$ , nous nous sommes intéressés à l'étude des conditions équivalentes, nécessaires et suffisantes d'optimalité de la fonction de rang d'Alekseev.

#### Théorème 3.4.1 [2]

Soit  $P$  un poset gradué. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $r$  est une représentation optimale de  $P$ ,
- 2)  $\mu_r(F) \geq \mu_r(P)$ ,  $\forall F$ , filtre de  $P$ ,
- 3)  $\mu_r(I) \leq \mu_r(P)$ ,  $\forall I$ , idéal de  $P$ .

**Remarque 3.4.1** Les tests effectués par le logiciel BNBSIP, ont montré que les propositions équivalentes 2) et 3) du théorème ci-dessus sont vraies sur tous les filtres (idéaux) principaux, générés de manière aléatoire par le logiciel. De là, nous conjecturons que la condition d'Alekseev est vraie sur les filtres principaux pour  $n \leq 100$ .

3.4. Condition nécessaire et suffisante d'optimalité de la fonction de rang.

**Conjecture 3.4.1** La condition d'Alekseev sur les filtres principaux est vraie,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

$n$	$p(n)$	$C.Alekseev$	$\mu_r$
5	7	Vérifiée	2, 14
10	42	Vérifiée	5, 42
15	175	Vérifiée	8, 93
20	627	Vérifiée	12, 61
25	1958	Vérifiée	16, 39
30	5604	Vérifiée	20, 26
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	190569292	Vérifiée	78, 24

Tableau 3.3

**Exemple 3.4.1** La Figure 3.5, montre le filtre principal  $F(\pi)$ ,  $\pi = 1 + 2 + 2 + 4$ , dans le poset  $Pi(9)$ . La condition d'Alekseev est vérifiée pour ce filtre:  $\mu_r(F) = 5, 94 > \mu_9 = 4, 73$ .

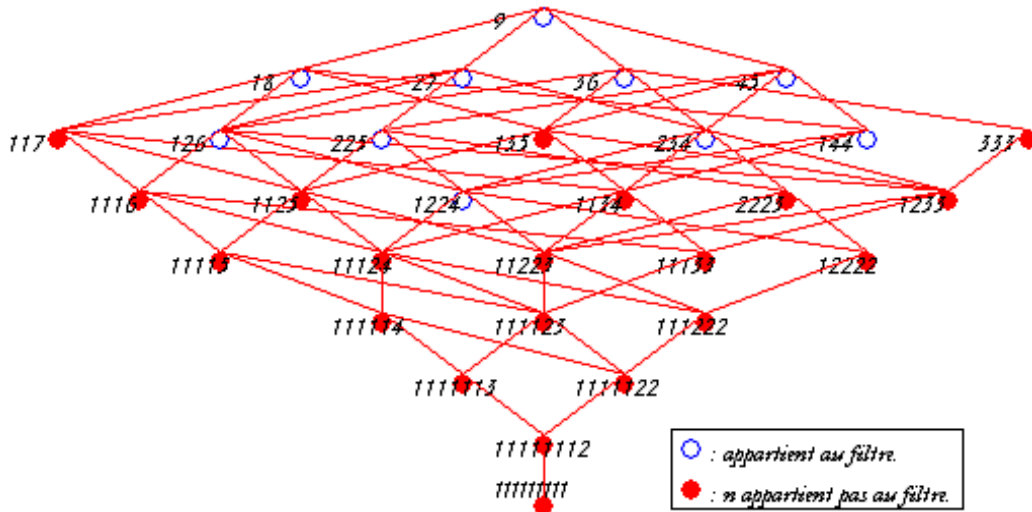


Figure 3.5

### 3.5 Etude de la propriété de Sperner

Soit  $P$  un poset gradué. Notons par :

$b(P)$  la taille maximum d'un niveau dans  $P$ ,

$d(P)$  la taille maximum d'une antichaîne dans  $P$ .

**Définition 3.5.1** *Un poset  $P$  gradué est dit de Sperner si,  $\frac{d(P)}{b(P)} = 1$ .*

*Il est clair que  $d(P) \geq b(P)$ , donc pour tout poset gradué, on a :*

$$\frac{d(P)}{b(P)} \geq 1.$$

**Théorème 3.5.1 [17]**

*Soit  $P$  un poset gradué. Alors :*

$$\frac{d(P)}{b(P)} \leq \max \left\{ \frac{|P|}{8} + \frac{1}{2}, 2 \right\}.$$

**Preuve. (\*)**

Raisonnons par induction sur  $r(P)$ .

Il est clair que si  $r(P) = 0$  alors le théorème est vrai, puisque dans ce cas  $d(P) = b(P)$  et  $\frac{d(P)}{b(P)} = 1 \leq 2$ .

Supposons maintenant le théorème vrai jusqu'à  $r(P) = m$  et montrons le pour  $r(P) = m + 1$ .

Soit  $A$  une antichaîne de taille maximum dans  $P$ .

On distingue trois cas:

**1<sup>er</sup> cas:** Supposons qu'il existe  $k \in \{0, 1, \dots, r(P)\}$  tel que  $N_k \subset A$ .

Etant donné que  $P$  est gradué alors pour tout  $x \in P \setminus N_k$ ,  $x$  est relié à au moins un élément de  $N_k$ , donc  $A = N_k$ .

Par conséquent

$$\frac{d(P)}{b(P)} = 1 \leq 2.$$

**2<sup>ème</sup> cas:** Supposons qu'il existe  $k \in \{1, \dots, r(P) - 1\}$  tel que  $|N_k \cap A| = |N_k| - 1$ , c'est à dire qu'il existe un unique élément de  $N_k$  n'appartenant pas à  $A$ , soit  $\omega$  cet élément.

Posons :

$$A_u = \bigcup_{i=0}^{k-1} A \cap N_i \text{ et } A_l = \bigcup_{i=k+1}^{r(P)} A \cap N_i.$$

Il est clair que  $A_l = \emptyset$  ou  $A_u = \emptyset$ , sinon, les éléments de  $A_l$  et  $A_u$  seront liés à travers  $w$ , ce qui est absurde puisque  $A_l \cup A_u \subset A$  et  $A$  est une antichaîne.

Sans perte de généralité, supposons par exemple  $A_u = \emptyset$  et posons  $Q = \bigcup_{i=0}^k N_i$ .

$Q$  est un sous poset gradué de  $P$ , vérifiant :

- $d(Q) = d(P) = A$ ,
- $b(Q) \leq b(P)$ ,
- $r(Q) \leq m$ .

Ceci entraîne :

$$\frac{d(P)}{b(P)} \leq \frac{d(Q)}{b(Q)}.$$

D'après l'hypothèse de l'induction, on déduit :

$$\frac{d(P)}{b(P)} \leq \frac{d(Q)}{b(Q)} \leq \max \left\{ \frac{|Q|}{8} + \frac{1}{2}, 2 \right\} \leq \max \left\{ \frac{|P|}{8} + \frac{1}{2}, 2 \right\}.$$

**3<sup>ème</sup> cas:** Plaçons nous maintenant dans le cas où les deux cas précédents ne se présentent pas, ce qui signifie qu'il existe au moins deux éléments de chaque niveau  $N_i$ ,  $i \in \{1, \dots, r(P) - 1\}$  n'appartenant pas à  $A$ , et au moins deux éléments l'un appartenant à  $N_0$  et l'autre à  $N_{r(P)}$  n'appartenant pas à  $A$ .

Donc

$$d(P) = |A| \leq |P| - 2(r(P) - 1) - 2 = |P| - 2(r(P) + 1) + 2. \quad (3.5.1)$$

Il est clair que

$$|P| \leq b(P) \cdot (r(P) + 1). \quad (3.5.2)$$

Il vient de (3.5.1) et (3.5.2) :

$$d(P) \leq |P| - 2 \frac{|P|}{b(P)} + 2 = |P| \frac{b(P) - 2}{b(P)} + 2.$$

Ainsi

$$\frac{d(P)}{b(P)} \leq |P| \frac{b(P) - 2}{b^2(P)} + \frac{2}{b(P)}. \quad (3.5.3)$$

Il est facile de voir que la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x-2}{x^2}$  atteint son maximum en  $x = 4$ . Par conséquent en vertu de (3.5.3) on a :

- i) Si  $b(P) \geq 4$ ,  $\frac{d(P)}{b(P)} \leq \frac{|P|}{8} + \frac{1}{2}$ ,
- ii) Si  $b(P) = 3$  et  $|P| < 12$ ,  $\frac{d(P)}{b(P)} \leq 2$ ,
- iii) Si  $b(P) = 3$  et  $|P| \geq 12$ ,  $\frac{d(P)}{b(P)} < \frac{|P|}{8} + \frac{1}{2}$ ,
- iv) Si  $b(P) = 2$ ,  $\frac{d(P)}{b(P)} \leq 2$ ,
- v) Si  $b(P) = 2$ ,  $\frac{d(P)}{b(P)} < 2$ .

D'où

$$\frac{d(P)}{b(P)} \leq \max \left\{ \frac{|P|}{8} + \frac{1}{2}, 2 \right\}.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

**Remarque 3.5.1** Si  $|P| \geq 12$  alors  $\frac{d(P)}{b(P)} \leq \frac{|P|}{8} + \frac{1}{2}$ .

**Proposition 3.5.1** Si  $|P| \geq 12$  alors la borne  $\frac{|P|}{8} + \frac{1}{2}$  est atteinte.

**Preuve.** Soit le poset gradué  $P$ , d'ordre multiple de 4, avec  $|N_i| = 4, \forall i \in \{0, \dots, r(P)\}$ . Notons par,  $x_{ij}$  ( $1 \leq i \leq |N_i|, 1 \leq j \leq 4$ ) les éléments du  $i$ ème niveau  $N_i$ . Les relations de couverture par niveau sont définies comme suit :

couverture du niveau  $N_0$  :

$$\begin{cases} x_{0,1} \text{ est couvert par tous les éléments du niveau } N_1. \\ x_{0,j} \text{ est couvert par } x_{1,2}, \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{cases}$$

couverture du niveau  $N_i$ , ( $1 \leq i \leq r(P) - 2$ ) :

$$\begin{cases} x_{i,3} \text{ est couvert par } x_{i+1,j}, j \in \{1, 3, 4\}. \\ x_{i,j} \text{ est couvert par } x_{i+1,2}, j \in \{1, 2, 4\}. \end{cases}$$

couverture du niveau  $N_{r(P)-1}$ :

$$\begin{cases} x_{r(P)-1,3} \text{ est couvert par tous les éléments du niveau } N_{r(P)}. \\ x_{r(P)-1,j} \text{ est couvert par } x_{r(P),4}, j \in \{1, 2, 4\}. \end{cases}$$

Le diagramme de Hasse du poset  $P$  est illustré par la figure 3.6 :

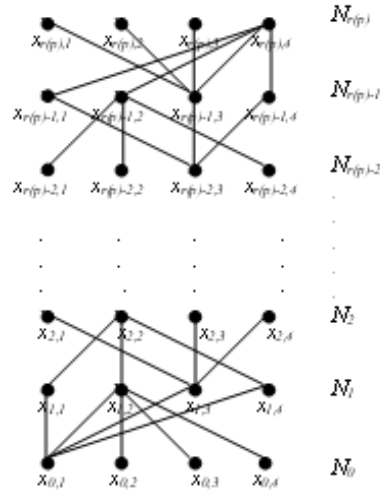


Figure 3.6

La figure 3.7 suivante illustre le diagramme de Hasse de  $P(24)$  :

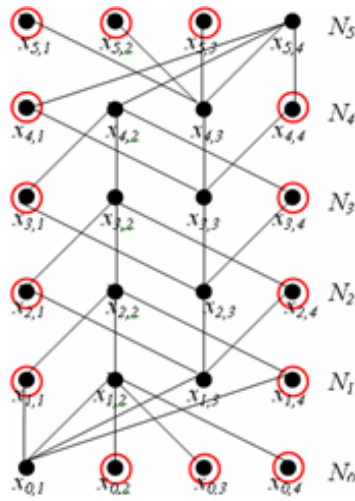


Figure 3.7

Considérons maintenant la partie  $A$  de  $P$  formée par :

- ▷ Les trois derniers éléments du premier niveau  $N_0$  :  $x_{02}, x_{03}, x_{04}$ .
- ▷ Le premier et le dernier élément de chaque niveau  $N_i$  :  $\{x_{i1}, x_{i4}\}$  ;  $(1 \leq i \leq r(P)-1)$ .
- ▷ Les trois premiers éléments du dernier niveau  $N_{r(P)}$  :  $x_{r(P),1}, x_{r(P),2}, x_{r(P),3}$ .
- ▷ Les sommets en rouges dans la figure 3.7 représentent la partie  $A$  dans  $P(24)$ .

Il est clair que  $A$  est une antichaîne. De plus :

$$|A| = 2 \times 3 + \left( \frac{|P|}{4} - 2 \right) \times 2 = \frac{|P|}{2} + 2 \quad \text{et} \quad \frac{|A|}{b(P)} = \frac{2 + \frac{|P|}{2}}{4} = \frac{|P|}{8} + \frac{1}{2}.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

**Théorème 3.5.2 [17]**

Soit  $Pi2(n)$  l'ensemble des partitions de  $n \geq 1$ , sans parts égales à 1, et soit  $d(Pi(n))$  la taille maximale d'une antichaine dans  $Pi(n)$ , on a :

$$d(Pi(n)) \leq |Pi2(n)|.$$

**Preuve. (\*)**

Considérons  $\varphi$  l'application définie de  $Pi(n) \setminus Pi2(n)$  dans  $Pi(n)$  par :  $\varphi(1 + i_2 + \dots + i_k) = i_2 + \dots + (i_k + 1)$ .

Il est clair que  $\varphi(\pi) \succ \pi$  dans  $Pi(n)$ ,  $\forall \pi \in Pi(n) \setminus Pi2(n)$ .

Montrons d'abord que  $\varphi$  est injective.

Soient  $\pi$  et  $\sigma \in Pi(n) \setminus Pi2(n)$ , tel que  $\pi \neq \sigma$ , et posons :

$$\pi = 1 + i_2 + \dots + i_k \quad \text{et} \quad \sigma = 1 + j_2 + \dots + j_l.$$

On distingue deux cas :

1)  $l \neq k$ , dans ce cas :  $\varphi(\pi) = i_2 + \dots + (i_k + 1) \neq \varphi(\sigma) = j_2 + \dots + (j_l + 1)$ .

2)  $l = k$ , ce cas engendre deux sous cas :

a)  $i_k \neq j_k$ , auquel cas  $i_k + 1 \neq j_k + 1$  et donc  $\varphi(\pi) \neq \varphi(\sigma)$ .

b)  $i_k = j_k$ , alors  $\exists s \in \{2, \dots, k-1\}$ ,  $i_s \neq j_s$  et donc  $\varphi(\pi) \neq \varphi(\sigma)$ .

D'où  $\varphi$  est injective.

Soit  $l(\pi)$  le premier entier pour lequel  $\varphi^{l(\pi)}(\pi) \in Pi2(n)$ , autrement dit le nombre de parts égales à 1 dans  $\pi$ .

Si  $\pi \in Pi2(n)$  alors  $l(\pi) = 0$  et  $\varphi^{l(\pi)}(\pi) = \pi$ .

Il est clair que si  $\pi$  et  $\sigma$  sont des partitions incomparables de  $Pi(n)$ , alors  $\varphi^{l(\pi)}(\pi) \neq \varphi^{l(\sigma)}(\sigma) \in Pi2(n)$ .

Donc  $|A| = |\{\varphi^{l(\pi)}(\pi) : \pi \in A\}| \leq |Pi2(n)|$ . ■

**Théorème 3.5.3 [17]**

On a :

$$|Pi2(n)| \sim \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{|Pi(n)|}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Théorème 3.5.4 [17]**

On a :

$$b(Pi(n)) \sim \frac{\pi}{e\sqrt{6}} \frac{|Pi(n)|}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Théorème 3.5.5 [17]**

On a :

$$1 \leq \frac{d(Pi(n))}{b(Pi(n))} \leq e + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

**Preuve. (\*)**

Nous avons déjà fait remarquer que  $\frac{d(Pi(n))}{b(Pi(n))} \geq 1$ .

Montrons alors la deuxième inégalité.

Nous avons d'une part d'après le théorème 3.5.2,

$$\frac{d(Pi(n))}{b(Pi(n))} \leq \frac{|Pi2(n)|}{b(Pi(n))},$$

d'autre part, nous avons, d'après les théorèmes 3.5.3 et 3.5.4 :

$$\frac{|Pi2(n)|}{b(Pi(n))} \sim e.$$

D'où le résultat. ■

Pour un poset gradué  $P$ , on note par  $M_k$ ,  $k = 0, \dots, r(p)-1$ , la 0-1 matrice de couverture associée à  $N_k \times N_{k+1}$ , c'est à dire :

$$M_k(p, q) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ; (p, q) \in N_k \times N_{k+1}.$$

**Théorème 3.5.6 [17]**

Soit  $k < \frac{n-1}{2}$  alors,

$$\text{rang}(M_k) = |N_k|.$$

**Preuve.** Tout le long de cette preuve, nous présentons les partitions de  $Pi(n)$  sous la forme de  $n$ -uplets d'entiers  $a = (a_1, \dots, a_n)$  avec  $\sum_{i=1}^n ia_i = n$  ( $a_i$  : représente le nombre de parts égales à  $i$  dans la partition).

On a  $a \prec b$  si et seulement si la partition correspondante à  $a$  est obtenue en subdivisant une part de celle associée à  $b$  (disons de taille  $l$ ) en deux parts  $i$  et  $j$  ( $i + j = l$ ). On distingue deux cas :

1<sup>er</sup> cas:  $i = j$ , dans ce cas :

$$\begin{cases} a_k = b_k, & \text{si } k \neq i, l. \\ a_l = b_l - 1, \\ a_i = b_i + 2. \end{cases}$$

2<sup>eme</sup> cas:  $i \neq j$ , dans ce cas :

$$\begin{cases} a_k = b_k, & \text{si } k \neq i, j, l. \\ a_l = b_l - 1, \\ a_i = b_i + 1, \\ a_j = b_j + 1. \end{cases}$$

Le  $k^{\text{ieme}}$  niveau de  $Pi(n)$  s'exprime comme suit :

$$N_k = \{a \in Pi(n) : a_1 + \dots + a_n = n - k\}, \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

Donc pour  $a \in N_k$  on a, d'une part  $a_1 + \dots + a_n = n - k$  et d'autre part  $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} n &= a_1 + 2a_2 + \dots + na_n \\ &\geq a_1 + 2(a_2 + \dots + a_n) \\ &\geq -a_1 + 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &\geq -a_1 + 2(n - k). \end{aligned}$$

D'où  $a_1 \geq n - 2k$ .

Par voie de conséquence, si  $k < \frac{n-1}{2}$  alors  $a_1 \geq 2$ .

Ordonnons les éléments de  $N_k$  de manière lexicographique, i.e. pour  $a, b \in N_k$ ,  $a \prec b$  si  $a_i > b_i$  pour le plus petit indice  $i$  pour lequel  $a_i \neq b_i$  et considérons  $\Psi$  l'application définie de  $N_k$  dans  $N_{k+1}$  par :  $\Psi(a) := (a_1 - 2, a_2 + 1, \dots, a_n)$  (On somme deux parts égales à 1 pour former une part égale à 2).

Il est clair que  $a \prec \Psi(a), \forall a \in Pi(n)$ .

Montrons que  $\Psi$  est injective.

Signalons tout d'abord que si  $a \prec b$  alors  $\Psi(a) \prec \Psi(b)$ .

En effet, soit  $s = \min_k \{a_k \neq b_k\}$ , alors  $a_s > b_s$ .

○ Si  $s = 1$  alors  $a_1 - 2 > b_1 - 2$  et donc  $\Psi(a) \prec \Psi(b)$ .

○ Si  $s = 2$  alors  $a_2 + 1 > b_2 + 1$  et donc  $\Psi(a) \prec \Psi(b)$ .

○ Si  $s \geq 3$  alors  $a_1 - 2 = b_1 - 2, a_2 + 1 = b_2 + 1, a_i = b_i, i = 3, \dots, s - 1$  et  $a_s > b_s$  et donc  $\Psi(a) \prec \Psi(b)$ .

Comme l'ordre lexicographique est un ordre total, on en déduit que  $\Psi$  est injective.

Si on désigne par  $S$  l'ensemble  $\{\Psi(a) : a \in N_k\}$  et par  $A$  la sous matrice de  $M_k$  constituée de toutes les lignes et toutes les colonnes de  $M_k$  indexées par les éléments de  $S$  et ordonnées lexicographiquement, alors  $A$  est une matrice carrée, du fait que  $\Psi$  est injective et ses éléments diagonaux sont tous égaux à 1 en vertu du fait que  $a \prec \Psi(a)$ . Il suffit de montrer que  $A$  est une matrice triangulaire inférieure. Raisonnons pour cela par l'absurde en supposant l'existence de deux partitions  $a$  et  $b \in N_k$  tels que  $a \prec b$  et  $a \prec \Psi(b)$ .

Il est clair que  $a \prec \Psi(b)$  signifie que  $\Psi(b)$  est obtenue en en sommant deux parts de  $a$  pour en former une part plus grande, mais ces deux parts ne peuvent pas être toutes les deux égales à 1 car sinon  $a$  serait égale à  $b$  ce qui serait absurde. Donc  $b_1 - 2$  est ou bien égal à  $a_1 - 1$  ou bien égal à  $a_1$ , ce qui entraîne  $b_1 > a_1$ , et par suite  $\Psi(b) \prec \Psi(a)$ . Par voie de conséquence, on aura :

$$\Psi(b) \prec \Psi(a) \prec \Psi(b),$$

Contradiction. ■

# Chapitre 4

## Présentation des procédures du logiciel "*BNBSIP*" programmé pour l'étude de $Pi(n)$

### Sommaire

---

4.1	Introduction	68
4.2	Présentation de la procédure diagramme de Hasse	68
4.3	Présentation de la procédure modification $n$ .	70
4.4	Présentation de la procédure propriétés de $Pi(n)$	71
4.5	Présentation de la procédure Filtres de $Pi(n)$	71
4.6	Conclusion	72

---

## 4.1 Introduction

Dans le second chapitre, nous avons utilisé des méthodes combinatoires et analytiques pour dénombrer les partitions, mais celles ci ne nous permettaient pas de les déterminer ni de les comparer, notamment en utilisant le diagramme de Ferrers qui considère les partitions indépendamment de l'ordre du poset.

Alors, dans le but d'étudier cet ordre, nous avons été amené à développer un logiciel *BNBSIP* (*Benyahia .N, Bouroubi. S, Integer Partition*) qui permet de tracer le diagramme de Hasse d'un poset n'ayant comme entrée que l'entier  $n$ .

Ce chapitre est consacré à la présentation des procédures que nous avons établies afin d'étudier explicitement les partitions d'un entier  $n$ , qui ont permis de schématiser le poset  $Pi(n)$ , et par conséquent de mettre en relief ses propriétés.

La première tâche de notre travail consistait à développer un algorithme qui nous permet de schématiser le diagramme de Hasse d'un poset  $Pi(n)$ .

L'environnement de programmation choisi est Delphi 5. Les avantages de ce langage sont évidents en ce qui concerne la première problématique à résoudre, notamment en raison de l'aspect de l'orienté objet qu'il présente.



## 4.2 Présentation de la procédure diagramme de Hasse

Entrée:  $n$  (l'entier dont on veut étudier le poset des partitions).

Sorties:  $MP(n)$  : Matrices des partitions de  $Pi(n)$ .

$MN(n)$  : Matrice des niveau de  $Pi(n)$ .

$MC(n)$  : Matrice de couvertures des partitions de  $Pi(n)$ .

$DH(n)$  : Diagramme de Hasse de  $Pi(n)$ .

**Début procédure DH;**

{\* Décalage +1 \*}

Soit  $n_{j,i}$ : la part i de la partition j.

$n_{1,1} = 1; n_{2,1} = 2;$

Pour  $j := 1$  à  $n - 1$  faire  $n_{j,i+1} := n_{j,i}; n_{j,1} = 1$  et  $n_{j+1,1} := j + 1,$

{\* couverture par niveaux \*}

Nous verifions les relations de couverture niveau par niveau.

{\* l'insertion et le decalage \*}

les nouvelles partitions générées par l'étape précédente sont classés parmi les anciennes.

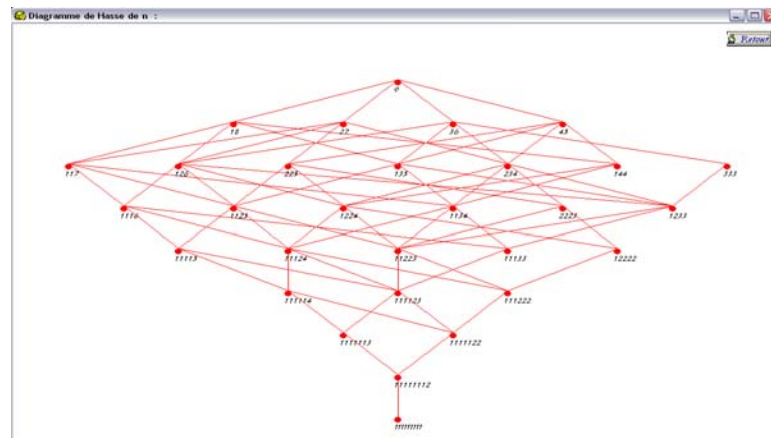
{\* Nombres de partitions \*}

à la fin on calcul le nombre de partitions obtenues pour l'entier  $n$ .

{\* Matrice des successeurs \*}

Nous remplissons la matrice de couverture en parallèle avec la deuxième et troisième étape.

**Fin;**



## 4.3 Présentation de la procédure modification de $n$

Entrées:  $n, MP(n), MN(n), MC(n), \acute{n}$  (le nouvel entier à étudier).

Sorties:  $MP(\acute{n})$  : Matrices des partitions de  $Pi(\acute{n})$ .

$MN(\acute{n})$  : Matrice des niveaux de  $Pi(\acute{n})$ .

$MC(\acute{n})$  : Matrice de couvertures des partitions de  $Pi(\acute{n})$ .

$DH(\acute{n})$  : Diagramme de Hasse de  $Pi(\acute{n})$ .

**Début** procédure **Modification \_n**;

Si  $\acute{n} < n$  alors

début

supprimer les partitions de  $Q(n, n - \acute{n})$ ;

pour  $i = 1$  à  $n - \acute{n}$  faire{\* Décalage -1 \*};

fin

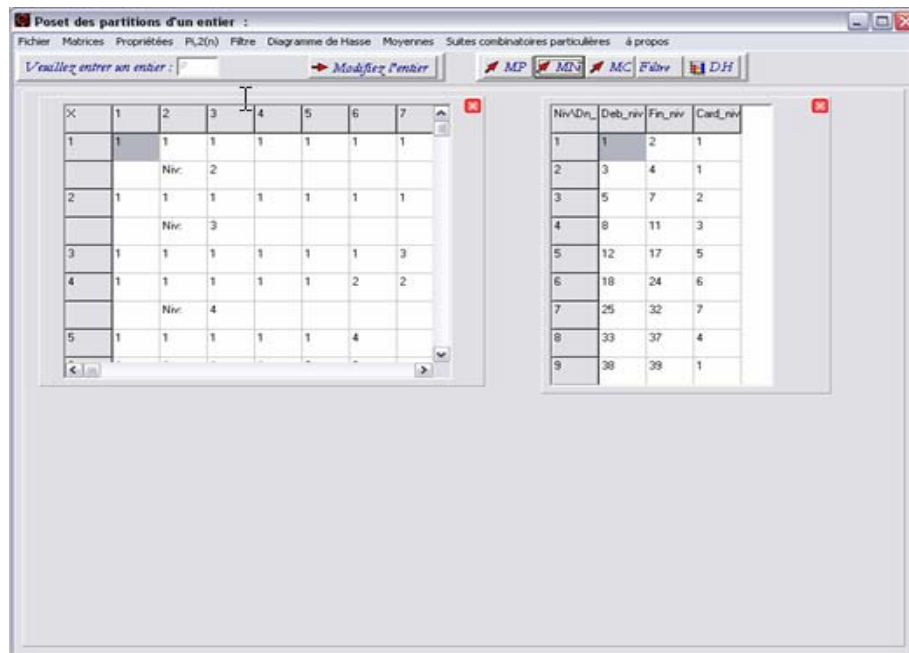
sinon début

Répéter  $n - \acute{n}$  fois {pour  $i = 1$  à  $n$  faire{\* Décalage +1 \*}};

{\*Cover $_{n-\acute{n}+1}$ \*}ajouter les nouvelles partitions d'après l'opération  $Cover_{n-\acute{n}+1}$ ;

fin;

**Fin**;



## 4.4 Présentation de la procédure propriétés de $Pi(n)$

Entrées:  $n, MP(n), MN(n), MC(n)$ .

Sorties:  $Vrif\_RS, Vrif\_CS, Vrif\_N, Vrif\_U$ .

**Début algorithme Propriétés\_n;**

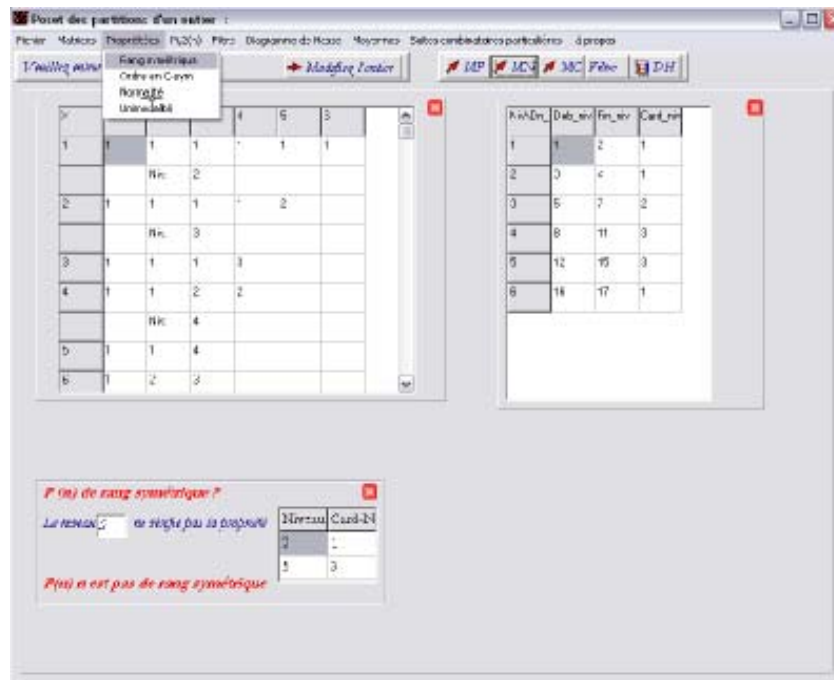
{\* $Vrif\_RS$ \*}: vérifie si  $Pi(n)$  est de rang symétrique.

{\* $Vrif\_CS$ \*}: Vérifie si  $Pi(n)$  est un ordre en chaînes symétriques.

{\* $Vrif\_N$ \*}: Vérifie si  $Pi(n)$  est normal.

{\* $Vrif\_U$ \*}: Vérifie si  $Pi(n)$  est unimodal.

**Fin;**



## 4.5 Présentation de la procédure Filtres de $Pi(n)$

Entrées:  $n, MP(n), MN(n), MC(n)$ .

Sorties:  $MF, Moy\_P, Moy\_F, Vrif\_Alk, DH\_F$ .

**Début procédure Filtres\_n;**

{\* $MF$ \*}: présente les partitions appartenant au filtre générées par la famille de partitions choisies personnellement ou aléatoirement.

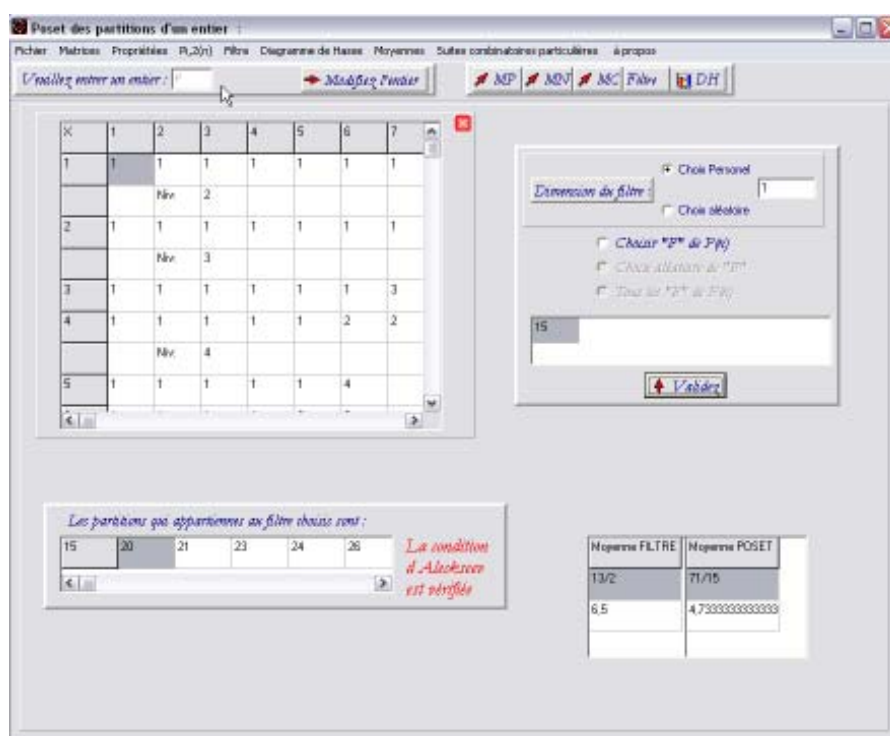
{\*Moy\_P\*}: Calcule la moyenne du poset  $Pi(n)$ .

{\*Moy\_F\*}: Calcule la moyenne du filtre  $F$ .

{\*Vrif\_Alk\*}: Vérification de la condition d'Alekseev, en comparant la moyenne du filtre avec celle du poset.

{\*DH\_F\*}: Trace le diagramme de Hasse de  $Pi(n)$  en illustrant les partitions appartenants au filtre  $F$

**Fin;**



## 4.6 Conclusion

L'implémentation de notre logiciel *BNBSIP* résout très élégamment les problèmes que nous voulions étudier. La programmation orientée objet donne les instructions à suivre pour étudier  $Pi(n)$ . Le programme démontre qu'il est facilement réutilisable et extensible.

Pour une extension future du programme, il serait souhaitable de prendre en considération quelques recommandations :

- Il est possible d'optimiser l'algorithme en utilisant des liste chaînées au lieu de tableaux.

- L'interface graphique pourrait être améliorée.
- Changer l'environnement de programmation, par exemple choisir maple.

Ces quelques recommandations ne se veulent pas exhaustives. Elles doivent être le point de départ d'une réflexion pouvant amener à une amélioration du logiciel actuel.

# Conclusion générale

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude de  $Pi(n)$ , le poset des partitions d'un entier  $n$ .

La nature des résultats que nous avons développés au cours de cette thèse est variée. En premier lieu, nous avons étudié les notions de bases d'un poset, ce qui nous a conduit à un important résultat, qui stipule que le poset  $Pi(n)$  n'est pas un treillis. En effet, pour  $n > 4$ ,  $Pi(n)$  possède dans son Diagramme de Hasse une configuration du type  $(1 + 1) \oplus (1 + 1)$  qu'on ne peut trouver dans un treillis.

En second lieu, et à la lumière des résultats obtenus grâce au logiciel programmé dans le but d'étudier  $Pi(n)$ , par l'exploration des relations entre les posets des partitions d'entiers successifs  $n, n - 1, \dots, n - i$ , nous avons montré qu'on peut obtenir n'importe quel poset  $Pi(n - k)$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$ , de même qu'on peut construire  $Pi(n + l)$ ,  $l \geq 1$ , à partir de  $Pi(n)$ , en un nombre réduit d'opérations.

Enfin, en dernier lieu, nous avons testé à l'aide de notre logiciel, les conditions nécessaires et/ou suffisantes de l'optimalité de la fonction de rang du poset  $Pi(n)$ . En effet, l'analyse du Diagramme de Hasse du poset  $Pi(n)$  a montré que pour  $n < 10$ ,  $Pi(n)$  est normal mais pour  $n \geq 10$  et non premier,  $Pi(n)$  n'est pas normal. Aussi, les résultats obtenus par le logiciel *BNBSIP*, pour l'étude de la condition d'Alekseev pour les filtres principaux, et la relation entre  $Pi(n)$  et  $Pi(n - k)$ , nous incitent à croire que la condition d'Alekseev est vérifiée pour les filtres principaux,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Le travail présenté dans ce rapport de mémoire ouvre plusieurs perspectives, nous proposons ici l'étude des problèmes suivants :

- 1) Démontrer que la condition d'Alekseev est vraie sur les filtres principaux

dans le poset des partitions d'un entier.

- 2) Démontrer que le poset des partitions d'un entier est de rang comprimé.
- 3) Implémenter l'algorithme de K. Engel pour la détermination d'une représentation optimale pour le poset des partitions d'un entier.
- 4) Etudier les conditions d'Aleekseev sur les idéaux de  $Pi(n)$ .
- 5) Etudier la normalité du poset des partitions d'un entier impair.
- 6) Etudier la complexité algorithmique du problème de la recherche d'une antichaîne de taille maximum dans le poset des partitions d'un entier, en vue d'étudier la propriété de Sperner.

# Bibliographie

- [1] M.Aigner, 'Combinatorial theory', Springer-verlag, Berlin / Heidelberg / NewYork, (1979).
- [2] V.B.Alekseev, 'On the number of k-valued functions', Probl. Kibernet, 28 (1974), 5-24.
- [3] V.B. Alekseev, 'Use of symmetry in finding the width of partially ordered set', Diskret Analiz Vyp. 26 Grafy i Testy, (1974), 20-35.
- [4] E.A.Bender and E.R.Canfield, 'Log concavity and a related property of the cycle index polynomials', preprint.
- [5] C.M.Bender and *al*, 'Quantum field theory of partitions', Journal of mathematical physics, Page 3239-3245, V° 40, N° 7, Juuly (1999).
- [6] M.Benoumhani, 'A sequence of binomial coefficients related to Lucas and Fibonacci numbers', Journal of Integer Sequences, Vol.6 (2003), Article 03.2.1.
- [7] G.Berman and K.D.Fryer, 'Intoduction to combinatorics', Academic press New York & London, 1972.
- [8] S.L.Bezrukov and K.Engel, 'Properties of graded posets preseved by some operation', In R.L.Graham and J. Nešetřil, editors, Mathematics of Paul Erdős, Springer-Verlag, Berlin, Algorithms Comb, 14, 79-85.
- [9] I. Bouchemakh, 'Sur quelques problèmes extrémaux dans les ordres partiels finis', Thèse de Doctorat d'Etat, université U.S.T.H.B, Alger, (2001).

- 
- [10] S.Bouroubi, ' Étude du treillis des partitions ', Thèse de magister, université U.S.T.H.B., Alger, (1991).
- [11] S.Bouroubi, ' The Alekseev condition on the principal filters in the partition lattice ', Maghreb Math.Rev, Page 37-42, V° 19, N°1 & 2, December (2000).
- [12] S.Bouroubi, ' Amélioration de la borne de convergence de l'algorithme de Konrad ENGEL pour la détermination d'une représentation optimale dans un poset fini ', Maghreb Math.Rev, Page126-135, Vol1, N°2, December (2002).
- [13] S.Bouroubi and M.Mihoubi, ' Sur quelques relations relatives aux nombres des partitions d'un entier ', Maghreb Math.Rev, Page 14-19, V° 111, N°1, June (2002).
- [14] S.Bouroubi, ' Optimisation dans les posets ', Thèse de Doctorat d'Etat, université U.S.T.H.B, Alger, (2004).
- [15] T.Britz and P.Cameron, ' Partially ordered sets ', Syracuse University, November 2001.
- [16] C.P.Bruter, ' Introduction aux méthodes de dénombrement ', 1974, I.M.D
- [17] E.R.Canfield and K.Engel, ' An upper bound for the size of the largest antichain in the poset of partitions on an integer ', (1998).
- [18] E.R.Canfield and L.H.Harper, ' Large antichains in the partition lattice ', Random structures Algorithms, 6, 89-104, (1995).
- [19] A.Charalambos Charalambides, ' Enumerative Combinatorics ', Chapman & Hall / CRC, 2002.
- [20] L.Comtet, ' Advanced Combinatorics ', D.Reided, Dorecht, (1974).
- [21] K.Engel and H.-D.O.F.Gronau, ' Sperner Theory in partially Ordered Sets ', BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, (1985).
- [22] K.Engel, ' About k-optimal Representation of Posets ', J.Inform, Process, Cybern, EIK25 (1989), 3-10.

- [23] K.Engel, ' On the Average Rank of an element in a filter of the partition lattice ', J.Combin.Theory Ser, A 64, (1994), 67-78.
- [24] M. François Claudel et M.Daniel Barsky et *al*, ' Les partitions d'entier ', Math en Jeans, (1995).
- [25] Gian-Carlo.Rota, ' The number of partitions ', American Math. Monthly 71, (1964), 498-504.
- [26] G. Kreweras, ' Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au treillis des partitions des entiers ', Cahiers du BURO, 6, ISUP, 1965, 9-103.
- [27] L.Lovász, ' Combinatorial problems and exercises', Akadémiai Kiadó, Budapest, (1979).
- [28] B.Mongardet, M.Barbut, ' Ordre et classification : Algèbre et Combinatoire ', Paris, Librairie Hachette, 1970, 2 Vols, 176 + 173.
- [29] J.H.Van Lint and R.M.Wilson, ' A Course in Combinatorics ', Cambridge University Press, Second edition, (2001).
- [30] H.S.Wilf, ' lectures on integer partitions ', university of Pennsylvania, Juillet 2000.