N° d'ordre : 09/2018-C/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseigement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiène

Faculté de Mathématiques

THESE

Présentée pour l'obtention du **grade** de **DOCTEUR 3ème Cycle**

En : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Fondamentales et Cryptographie

Par

Adnène CHERGUI

Quasi-connexions sur des variétés semi-riemanniennes stationnaires

Soutenue publiquement, le 06/03/2018, devant le jury composé de :

M. BETINA Kamel	Professeur	USTHB	Président
M. AFFANE Atallah	Professeur	USTHB	Directeur de thèse
M. KESSI Arezki	Professeur	USTHB	Examinateur
M. BEKKAR Mohammed	Professeur	Univ. d'Oran 1	Examinateur
M. NGUIFFO BOYOM Michel	Professeur	Univ. de Montpellier	Examinateur
M. OUAKKAS Seddik	Professeur	Univ. de Saïda	Examinateur
M. ABBACI Brahim	MCA	USTHB	Examinateur

Ecole Doctorale : Mathématiques Fondamentales et Cryptographie
Département d'Algèbre et Théorie des Nombres
Faculté de Mathématiques
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiène
BP 32 El Alia 16111, Bab Ezzouar, Alger, ALGERIE.

Résumé

Le résultat principal de cette thèse est l'analogue du Théorème de Levi-Civita pour les variétés semi-riemanniennes stationnaires. Tout d'abord, sur une variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$ le fibré tangent est remplacé par un faisceau adéquat qui permet d'avoir un calcul différentiel sur lequel on définit les notions de quasi-champ de vecteurs, de quasi-champ tensoriel, $\ldots$, etc. On introduit la notion de quasi-connexion sur la variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$ qu'on munie d'un quasi-champ tensoriel g^* non-dégénéré de type $(0, 2)$ qui fait office de métrique semi-riemannienne, et par suite un Théorème de Levi-Civita est obtenu. Pour finir, le radical d'une variété semi-riemannienne stationnaire induit une variété feuilletée portant un quasi-champ tensoriel non-dégénéré de type $(0, 2)$ et ainsi on obtient le résultat souhaité.

Mots clés : Variété semi-riemannienne stationnaire, variété feuilletée, faisceau, connexion.

Abstarct

Quasi-connections on stationary Semi-Riemannian Manifolds

The main result of this thesis is the analogue of the Levi-Civita Theorem for stationary semi-Riemannian manifolds. First, on a foliated manifold $(M, \mathcal{N})$ the tangent bundle is replaced by a suitable sheaf in order to obtain the notion of vector quasi-field. From this sheaf we can define the concepts of tensorial quasi-field, differential quasi-form and quasi-connection. After that, the foliated manifold $(M, \mathcal{N})$ is provided with a $(0, 2)$ non-degenerate tensoriel quasi-field g^* which act as semi-Riemannian metric and the triple $(M, \mathcal{N}, g^*)$ is called foliated quasi-Riemannian manifold, on which we prove that exists a unique quasi-connection called Levi-Civita quasi-connection. For the end, we prove that any stationary semi-Riemannian manifold induces a structur of foliated quasi-Riemannian manifold and the expected result is obtained.

Keywords : Stationary semi-Riemannian Manifold, Foliated Manifold, Sheaf, Connection.

A mes parents.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à M. Atallah Affane pour m'avoir encadré durant ces années de thèse, pour ses efforts, sa disponibilité et surtout l'intérét qu'il a porté à ce travail. J'ai beaucoup apprécié de travailler à ses côtés et je ne saurai trouver les mots pour exprimer toute ma gratitude.

je remercie M. Kamel Betina d'avoir accepté la présidence de mon jury de soutenance. Je lui adresse mes sentiments les plus respectueux.

Mes remerciements vont aussi à M. Arezki Kessi, M. Mohammed Bekkar, M. Michel Nguiffo Boyom, M. Seddik Ouakkas et M. Brahim Abbaci pour avoir accepté de juger mon travail en tant qu'examinateur.

J'adresse mes chaleureux remerciements à M. Ali Debbache pour ses encouragements durant toutes ces années et l'intérêt qu'il porte à la jeune génération de chercheurs.

Mes remerciements particuliers vont de plus à Mehdi Belraouti pour son soutient, ses conseils et ses encouragements.

Je voudrai adresser ma reconnaissance envers Ahmed Zeglaoui pour ses conseils ainsi que pour son aide qu'il m'a donné pour l'aboutissement de ma thèse.

Je remercie aussi mes collègues doctorants en particulier : Abderraouf, Hamza, Abdelhamid, Hichem, Mohamed, Yugurta, Nassim, Abdelkader, Yacine, Saïd, Wided et tant d'autres avec lesquels j'ai traversé à leurs côtés ce long fleuve rempli de difficultés qu'est la préparation d'une thèse.

Un grand merci à mes parents qui m'ont soutenu durant toutes ces années et qui ont en grande partie contribué à ma réussite. Je leur suis sincérement reconnaissant pour tous ce qu'ils ont fait. J'exprime aussi ma gratitude envers mon frère Nazim et ma soeur Hiba.

Pour finir, je tiens à remercier mes amis qui m'ont suivis et écoutés durant ces longues années avec une pensée particulière à : Abdesselam, Mohamed, Yanis, Oussama Ben, Cherif, Aymen, Oussama Bou, Abderrahim, Abdelhak, Azzedine, Abderrezak et Tarik.

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans la géométrie riemannienne l'objet d'étude central étant les variétés différentiables munies d'un champ tensoriel symétrique et défini positif de signature $(0, 0, n_+)$, où communément appelé métrique riemannienne, le théorème de Levi-Civita assure l'existence d'une unique connexion symétrique et compatible avec la métrique. L'unicité de cette connexion est garantie par la non-dégénérescence de la métrique. Bon nombre d'outils fondamentaux sont définis grâce à cette connexion, on cite comme exemple : la courbure, le transport parallèle, les géodésiques, ..., etc.

Une première extention s'est faite dans la direction des variétés semi-riemanniennes dont la métrique est non-dégénérée de signature $(0, n_-, n_+)$. Une deuxième approche s'est faite à travers les variétés lorentziennes dont leurs métriques sont elles aussi non-dégénérées mais de signature $(0, 1, n_+)$. Ces variétés lorentziennes sont les exemples fondamentaux de variétés semi-riemanniennes à cause de leurs importances dans la physique et précisément en relativité générale.

Le cas des variétés semi-riemanniennes singulières, où la métrique n'est rien d'autre qu'un champ tensoriel symétrique et dégénéré, est abordé dans des travaux récents. Plusieurs appellations existent : variété dégénérée, espace de Riemann singulier, variété de Reinhart, variété de lumière et variété semi-riemannienne dégénérée. Les termes qu'on retrouve le plus dans la littérature anglaise sont : Singular semi-riemannian manifold, Lightlike manifold et Degenerate semi-riemannian manifold. Le choix du titre « Variété semi-riemannienne stationnaire »dans cette thèse est du au fait que dès le départ la variété (M, g) est supposée stationnaire. En effet, dans [9], S. E. Kozlov à montré qu'une connexion symétrique et compatible avec une métrique dégénérée existe si et seulement si la variété vérifie la condition de stationnarité. Or, dans ce cas cette connexion n'est pas unique et il en existe une infinité. Dans [10, 11], avec la condition de stationnarité, Demir N. Kupeli a pu extraire une connexion particulière qu'on appelle connexion de Koszul. En effet, l'idée est de remplacer le fibré tangent par un fibré vectoriel défini de façon naturelle grâce aux propriétés de la métrique.

Dans cette thèse on traite le cas des variétés munies d'une métrique dégénérée de type quelconque (n_0, n_-, n_+), vérifant deux hypothèses. La première est que la métrique induit un champ de plans régulier, c'est-à-dire que son radial est un sous-fibré vectoriel du fibré tangent. La seconde est que la variété vérifie la condition de stationnarité. Grâce à cette dernière, le champ de plans induit par la métrique est intégrable, ce qui nous a orienté en premier lieu vers les variétés feuilletées. En effet, sur une variété feuilletée, nous avons défini des outils adéquats qui permettent d'obtenir des notions analogues aux objets classiques de la géométrie semi-riemannienne. Par exemple : les champs de vecteurs, les formes différentielles, les connexions, ..., etc. Celà grâce au cadre fourni par les faisceaux qui est d'une richesse non négligeable. Cette richesse a été exploitée et des résultats intéréssants ont été démontrés (chapitres 3, 4 et 5) qui sont publiés dans [5].

0.1 Présentation des résultats

Nous donnons dans cette partie les principaux résultats obtenus dans cette thèse. Tout d'abord, on appelle variété quasi-riemannienne feuilletée Toute variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$ munie d'un quasi-champ tensoriel non-dégénéré g^* de type $(0, 2)$. Notre premier résultat est l'analogue du théorème de Levi-Civita sur le triplet $(M, \mathcal{N}, g^*)$.

Théorème A. Pour une variété quasi-riemannienne feuilletée $(M, \mathcal{N}, g^*)$, il existe une unique quasi-connexion symétrique ∇, telle que $\nabla g^* = 0$, et elle est notée $\nabla(g^*)$.

De plus, voici l'analogue au Lemme de Schur pour les variétés quasi-riemanniennes feuilletées.

Proposition A. Soient $(M, \mathcal{N}, g^*)$ une variété quasi-riemannienne feuilletée et *Ricc* le quasi-champ tensoriel de Ricci de $\nabla(g^*)$. On suppose que M est connexe et $m-n > 2$. S'il existe une fonction λ telle que $Ricc = \lambda g^*$, alors λ est constante.

Par la suite, on démontre que toute variété différentiable M munie d'une structure quasi-riemannienne feuilletée $(\mathcal{N}, g^*)$, et de courbure identiquement nulle, est localement isométrique à $\mathbb{R}^{m-n}$.

Proposition B. Soit $(M, \mathcal{N}, g^*)$ une variété quasi-riemannienne feuilletée. On suppose que la courbure R de $\nabla(g^*)$ est identiquement nulle. Alors, en chaque point p de M, il existe un système de coordonnées de Frobénius sur un voisinage ouvert de p, tel que g^* est représenté par une matrice constante.

Notre dernier résultats sur les variétés quasi-riemanniennes feuilletées donne une correspondance entre la quasi-connexion de Levi-Civita $\nabla(g^*)$ et une connexion linéaire sur le fibré quotient canonique $\overline{TM}$. Dans le cas où g^* est issu d'une métrique dégénérée, cette connexion linéaire n'est rien d'autre que la connexion de Koszul.

Théorème B. Soient $(M, \mathcal{N}, g^*)$ une variété quasi-riemannienne feuilletée, $\overline{g}$ le champ tensoriel induit sur $\overline{TM}$ par g^* et $\overline{\nabla}$ la connexion linéaire sur $\overline{TM}$ induite par $\nabla(g^*)$. Alors $\overline{\nabla}$ est l'unique connexion linéaire Δ sur $\overline{TM}$ telle que pour tout champs de vecteurs X, Y et Z dans $\Gamma(TM)$, nous ayons

- $\Delta_X \overline{\Pi}(Y) - \Delta_Y \overline{\Pi}(X) - \overline{\Pi}([X, Y]) = 0$,
- $Z\overline{g}(\overline{\Pi}(X), \overline{\Pi}(Y)) - \overline{g}(\Delta_Z \overline{\Pi}(X), \overline{\Pi}(Y)) - \overline{g}(\overline{\Pi}(X), \Delta_Z \overline{\Pi}(Y)) = 0$.

On appelle variété semi-riemannienne stationnaire toute variété différentiable munie d'une métrique dégénérée dont le champ de plans induit par le radical est intégrable. Dans la chapite 5 on démontre que toute variété semi-riemannienne stationnaire posséde une structure naturelle de variété quasi-riemannienne feuilletée. Ainsi, on peut énoncé le théorème suivant :

Théorème C. Soient (M,g) une variété semi-riemannienne stationnaire et g^* le quasi-champ tensoriel de type $(0, 2)$ induit par g. On note ∇ la quasi-connexion de Levi-Civita induite par g^*, et soit R sa courbure.

- Si $R \equiv 0$, alors au voisinage de chaque point $p \in M$, il existe un système de coordonnées $\{x^k\}_{k=1}^m$ telle que la matrice $(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ est constante.
- Si $\nabla R \equiv 0$, alors (M, g) est localement symétrique.

Pour finir, on appelle structure quasi-complexe la structure induite par une structure presque complexe et stationnaire, et voici le dernier résultat de ce manuscrit.

Théorème D. Soient (M,g) une variété semi-riemannienne stationnaire et J une structure presque complexe sur M stationnaire et orthogonale par rapport à g. On note J^* la structure quasi-complexe induite par J sur le triplet $(M, \mathcal{N}, g^*)$. Soient ∇ la quasi-connexion de Levi-Civita de g^* et ω la 2-forme différentielle définie sur M par $\omega(X, Y) = g(X, JY)$. Alors $\nabla J^* = 0$ si et seulement si $d\omega = 0$.

0.2 Organisation de la thèse

Nous terminons cette introduction en décrivant la structure de ce manuscrit.

Chapitre 1. Ce chapitre contient les prérequis nécessaires pour introduire le sujet de cette thèse : on y trouve des rappels et définitions ainsi que des résultats qui nous seront utiles par la suite.

Chapitre 2. Ce chapitre comporte une introduction aux métriques dégénérées. On commence par donner quelques exemples ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de telles métriques. Pour la suite du chapitre, on donne un aperçu des travaux de Demir N. Kupeli ([10, 11]). On commence par voir la notion de dérivée de Koszul sur une variété semi-riemannienne singulière ainsi que ses propriétés. Après, la métrique dégénérée va induire un champ tensoriel non-dégénéré de type $(0, 2)$ sur le fibré quotient canonique qui est le quotient du fibré tangent par le radical de la métrique. Ce qui permet d'avoir une unique connexion linéaire symétrique et parallèle appelée connexion de Koszul qui est en fait l'analogue de la connexion de Levi-Civita sur le fibré quotient canonique.

Chapitre 3. Ce chapitre a pour but principal l'introduction des faisceaux $\mathcal{N}^{\perp}$ et $\mathcal{T}$ qui sont induits par l'espace des feuilles d'une variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$. En fait, ces deux faisceaux jouent respectivement les rôles de fonctions lisses et de fibré tangent. Les sections du faisceau $\mathcal{T}$ sont appelées quasi-champs de vecteurs, qui sont bien entendus analogues aux champs de vecteurs et les sections du faisceau dual de $\mathcal{T}$ noté $\mathcal{T}^*$, sont appelées 1-quasi-forme différentielles. Plus généralement, on définit les notions de quasi-champ tensoriel de type (r, s) et de r-quasi-forme différentielle, où $r, s \in \mathbb{N}$. Pour finir, grâce aux décompositions de Frobénius (voir 3.6) nous ferons les correspondances des résultats de ce chapitre avec ce qui a été fait par Demir N. Kupeli (chapitre 2) et le cas d'une variété euclidienne.

Chapitre 4. Dans ce chapitre on définit la notion de quasi-connexion sur une variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$, à laquelle sont associée les notions de torsion et de courbure. Ensuite, on munit la variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$ d'une structure quasi-riemannienne feuilletée qui est la donnée d'un faisceau noté g^* qui fait office de métrique semi-riemannienne lequel est aussi appelé quasi-champs tensoriel de type $(0, 2)$ vérifiant la condition de non-dégénérescence. Après, on donnera l'un des résultats centrals de cette thèse qui est l'existence d'une unique quasi-connexion appelée quasi-connexion de Levi-Civita sur une variété munie d'une structure quasi-riemannienne feuilletée. En outre, plusieurs résultats fondamentaux de la géométrie semi-riemannienne classique sont réecris : lemme de Schur, test theorem, . . . , etc. Pour finir, on définit une nouvelle structure sur une variété feuilletée appelée structure quasi-complexe.

Chapitre 5. Dans ce chapitre on va voir qu'à toute variété semi-riemannienne stationnaire est associée une structure quasi-riemannienne feuilletée naturelle. Ainsi, tous les résultats du chapitre 4 sont valables, et en plus, on va démontrer que si la condition $\nabla R \equiv 0$ est vérifiée, où ∇ est la quasi-connexion de Levi-Civita et R sa courbure, alors la variété est localement symétrique. Pour terminer, on va étudier les structures quasi-complexes.

1. NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Sommaire

1.1 Théorie élémentaire des faisceaux

Dans cette partie nous allons introduire des notions élémentaires sur la théorie des faisceaux, plus précisement sur les faisceaux et préfaisceaux d'ensembles sur un espace topologique. Nous nous intéressons uniquement au cas des structures algébriques commutatives. Pour plus de détails nous renvoyons à [7].

1.1.1 Préfaisceaux

Soit E un espace topologique.

Définition 1.1.1. *Un préfaisceau $\mathcal{F}$ d'ensembles sur E est la donnée, pour tout couple d'ouverts $U \subset V$ de E, d'ensembles $\mathcal{F}(U)$ et $\mathcal{F}(V)$ et d'une application r_U^V de $\mathcal{F}(V)$ dans $\mathcal{F}(U)$ appelée morphisme de restricition, tel que pour tout ouvert W de E avec $U \subset V \subset W$, nous ayons*

- $r_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$,

- $r_U^V \circ r_V^W = r_U^W$.

Lorsque chaque ensemble $\mathcal{F}(U)$ est muni d'une structure de groupe (resp. d'anneau, d'algèbre, d'algèbre de Lie, ..., etc) tel que les morphismes de restrictions deviennent des morphismes de groupes (resp. d'anneaux, d'algèbres, d'algèbres de Lie, ..., etc), on dit que $\mathcal{F}$ est un préfaisceau de groupes (resp. d'anneaux, d'algèbres, d'algèbres de Lie, ..., etc). On peut aussi parler d'un préfaisceau de modules $\mathcal{D}$ sur E avec la donnée d'un préfaisceau d'anneaux $\mathcal{F}$. En effet, pour tout ouvert U de E, l'ensemble $\mathcal{D}(U)$ est muni d'une structure de $\mathcal{F}(U)$-module tel que les morphismes de resrictions soit des morphismes de modules et dans ce cas $\mathcal{D}$ est dit un préfaisceau de $\mathcal{F}$-modules.

Maintenant, soient $\mathcal{F}$ un préfaisceau d'ensembles sur E et $x \in E$. Sur l'ensemble des éléments $s \in \mathcal{F}(U)$, où U parcourt tous les ouverts contenants x, on définit la relation d'équivalence

$$s \underset{x}{\mathcal{R}} s' \iff \text{ il existe un ouvert } W \mid x \in W \subset U \cap V \text{ et } r_W^U(s) = r_W^V(s'),$$

où $s \in \mathcal{F}(U)$ et $s' \in \mathcal{F}(V)$. Les classes d'équivalences s_x pour cette relation sont appelées germes de $\mathcal{F}$ en x et l'ensemble de ces germes est noté $\widetilde{\mathcal{F}}_x$. Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau de groupes (resp. d'anneaux, ..., etc) alors l'ensemble $\widetilde{\mathcal{F}}_x$ hérite à partir des $\mathcal{F}(U)$ d'une structure de groupe (resp. d'anneau, ..., etc).

On pose $\widetilde{\mathcal{F}} = \bigsqcup_{x \in E} \widetilde{\mathcal{F}}_x$.

Définition 1.1.2. *L'ensemble $\widetilde{\mathcal{F}}$ est appelé le faisceau engendré par le préfaisceau $\mathcal{F}$.*

Pour un ouvert U de E et un élément $s \in \mathcal{F}(U)$, on définit l'application $\widetilde{s}$ de U dans $\widetilde{\mathcal{F}}$ par $\widetilde{s}(x) = s_x$ pour tout $x \in U$. On munit l'ensemble $\widetilde{\mathcal{F}}$ de la topologie la plus fine qui rend les applications $\widetilde{s}$ continues et dans ce cas la projection $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to E$ qui envoie $\widetilde{\mathcal{F}}_x$ sur x est un homéomorphisme local. Dans [7], le couple $(\widetilde{\mathcal{F}}, \pi)$ est appelé l'espace étalé associé au préfaisceau $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.3. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux préfaisceaux d'ensembles sur E. Un morphisme de préfaisceaux $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ est la donnée d'une applications $\theta(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}'(U)$ pour tout ouvert U de E, telle que pour tout élément s de $\mathcal{F}(U)$ et tout ouvert $\Omega \subset U$, nous ayons*

$$\theta(\Omega)(r_\Omega^U(s)) = r'^U_\Omega(\theta(U)(s)),$$

où r et r' désignent repectivement les morphismes de restrictions des préfaisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$.

De façon équivalente θ est un morphisme de préfaisceaux lorsque le diagramme ci-dessous est commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\theta(U)"] \arrow[d, "r^U_\Omega"'] & \mathcal{F}'(U) \arrow[d, "r'^U_\Omega"] \\ \mathcal{F}(\Omega) \arrow[r, "\theta(\Omega)"'] & \mathcal{F}'(\Omega) \end{tikzcd}$$

On peut définir de manière analogue un morphisme de préfaisceaux $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ entre deux préfaisceaux de groupes (resp. d'anneaux, ..., etc) tel que pour tout ouvert U de E, l'application $\theta(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}'(U)$ est un morphisme de groupes (resp. d'anneaux, ..., etc). Un morphisme de préfaisceaux $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ induit pour chaque $x \in E$ une application $\theta_x : \widetilde{\mathcal{F}}_x \to \widetilde{\mathcal{F}}'_x$ définie par $\theta_x(s_x) = (\theta(U)(s))_x$. De plus, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont des préfaisceaux de groupes (resp. d'anneaux, ..., etc) alors l'application θ_x est un morphisme de groupes (resp. d'anneaux, ..., etc).

Définition 1.1.4. *Soient θ un morphisme de préfaisceaux entre deux préfaisceaux d'ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$.*

- *θ est dit injectif si pour tout ouvert U de E l'application $\theta(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}'(U)$ est injective.*
- *θ est dit surjectif si pour tout $x \in E$, l'application $\theta_x : \widetilde{\mathcal{F}}_x \to \widetilde{\mathcal{F}}'_x$ est surjective.*
- *θ est dit bijectif s'il existe un morphisme de préfaisceaux $\phi : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ tel que $\theta \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}'}$ et $\phi \circ \theta = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$, où id est le morphisme de préfaisceaux identité.*

Si un morphisme θ est injectif alors pour tout $x \in E$, l'application $\theta_x : \widetilde{\mathcal{F}}_x \to \widetilde{\mathcal{F}}'_x$ est injective. Cependant, si le morphisme θ est surjectif alors pour un ouvert U de E l'application $\theta(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}'(U)$ n'est pas forcément surjective, on peut trouver un contre exemple dans [7].

1.1.2 Faisceaux

Soit E un espace topologique.

Définition 1.1.5. *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau d'ensembles sur E. $\mathcal{F}$ est dit un faisceau d'ensembles lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- ***Localisation.*** *Soient $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert d'un ouvert U et s, s' deux éléments de $\mathcal{F}(U)$ tels que, $\forall i \in I$, $r^U_{U_i}(s) = r^U_{U_i}(s')$, alors $s = s'$.*
- ***Recollement.*** *Pour tout recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ d'un ouvert U et pour toute famille $\{s_i\}_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ avec $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $\forall i \in I$, telle que*

  $$r^{U_i}_{U_i\cap U_j}(s_i) = r^{U_j}_{U_i\cap U_j}(s_j),$$

  il existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tel que, $\forall i \in I$, $r^U_{U_i}(s) = s_i$.

De la même façon que pour les faisceaux d'ensembles, on définit un faisceau de groupes (resp. d'anneaux, ..., etc) en considérant un préfaisceau de groupes (resp. d'anneaux, ..., etc) vérifant les conditions de la définition. On peut aussi parler d'un faisceau $\mathcal{D}$ de $\mathcal{F}$-modules avec $\mathcal{F}$ un faisceau d'anneaux en considéreant $\mathcal{D}$ comme un préfaisceau de $\mathcal{F}$-modules qui vérifie les conditions de la définition.

Maintenant, soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau d'ensembles sur E. On note $\widetilde{\mathcal{F}}$ le faisceau engendré par le préfaisceau $\mathcal{F}$ et π la projection canonique de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur E.

Définition 1.1.6. *Soit A un sous-ensemble de E. On appelle section de $\widetilde{\mathcal{F}}$ au-dessus de A toute section de l'espace étalé $(\widetilde{\mathcal{F}}, \pi)$, c'est-à-dire une application continue $s : A \to \widetilde{\mathcal{F}}$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}_A$.*

L'ensemble des sections de $\widetilde{\mathcal{F}}$ au-dessus de A est noté $\Gamma(A, \widetilde{\mathcal{F}})$ ou bien $\widetilde{\mathcal{F}}(A)$.

Lorsque $\mathcal{F}$ est un préfaisceau de groupes (resp. d'anneaux, ..., etc), $\widetilde{\mathcal{F}}(A)$ posséde une structure naturelle de groupe (resp. d'anneau, ..., etc). De plus, pour un sous-ensemble $A' \subset A$ la restriction $\widetilde{\mathcal{F}}(A) \to \widetilde{\mathcal{F}}(A')$ est un morphisme de groupes (resp. d'anneaux, ..., etc), et donc la correspondance $U \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{F}}(U)$ définit un faisceau de groupes (resp. d'anneaux, ..., etc) sur E. Ce faisceau est appelé faisceau des sections de $\widetilde{\mathcal{F}}$. De plus, dans la définition 1.1.2 l'appellation de $\widetilde{\mathcal{F}}$ par faisceau engendré est due en fait que ses sections forment un faisceau d'ensembles.

Pour un ouvert U de E et un élément $s \in \mathcal{F}(U)$, on note $\widetilde{s}$ une section dans $\widetilde{\mathcal{F}}(U)$ définie pour tout $x \in U$, par $\widetilde{s}(x) = s_x$. On obtient ainsi un morphisme de préfaisceaux $\Phi : \mathcal{F} \to \widetilde{\mathcal{F}}$ défini pour un ouvert quelconque U' par $\Phi(U')(s') = \widetilde{s'}$, où $s' \in \mathcal{F}(U')$. De plus, si le préfaisceau $\mathcal{F}$ est un faisceau alors le morphisme Φ est bijectif, et on a le théorème suivant :

Théorème 1.1.1. *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau d'ensembles sur E. Alors*

- *$\mathcal{F}$ vérifie la condition de localisation si et seulement si le morphisme Φ est injectif.*
- *$\mathcal{F}$ vérifie la condition de recollement si et seulement si pour tout sous-ensemble ouvert U de E, l'application $\Phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \widetilde{\mathcal{F}}(U)$ est surjective.*

Ainsi, lorsque $\mathcal{F}$ est un faisceau d'ensembles, il y'a une correspondance bijective entre les éléments du préfaisceau $\mathcal{F}$ et les sections du faisceau engendré $\widetilde{\mathcal{F}}$. Le morphisme Φ est appelé isomorphisme naturel du faisceau $\mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux préfaisceaux d'ensembles sur E.

Définition 1.1.7. *Un mophisme de faisceaux est la donnée d'une application continue $\Theta : \widetilde{\mathcal{F}} \to \widetilde{\mathcal{F}'}$, telle que $\forall x \in E$, $\Theta(\widetilde{\mathcal{F}}_x) \subset \widetilde{\mathcal{F}'}_x$.*

On pose $\Theta_x = \Theta_{|\widetilde{\mathcal{F}}_x}$.

Un morphisme de préfaisceaux $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ induit un morphisme de faisceaux $\widetilde{\theta} : \widetilde{\mathcal{F}} \to \widetilde{\mathcal{F}'}$, tel que pour tout $x \in E$, $\widetilde{\theta}_{|\widetilde{\mathcal{F}}_x} = \theta_x$. Inversement, un morphisme de faisceaux n'induit pas en général un morphisme de préfaisceaux. Par contre, c'est le cas lorsque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont des faisceaux d'ensembles. En effet, un mophisme de faisceaux $\Theta : \widetilde{\mathcal{F}} \to \widetilde{\mathcal{F}}'$, induit un morphisme de préfaisceaux défini pour un ouvert U par $\Theta(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}'(U)$ avec $\Theta(U)(s) = (\Phi'(U))^{-1} \circ \Theta \circ \Phi(U) \circ s$, où $s \in \mathcal{F}(U)$ et Φ, Φ' sont respectivement les isomorphismes naturels des faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$.

Définition 1.1.8. *Un mophisme de faisceaux $\Theta : \widetilde{\mathcal{F}} \to \widetilde{\mathcal{F}'}$ est dit :*

- *injectif si pour tout $x \in E$, l'application $\Theta_x : (\widetilde{\mathcal{F}}_x) \to \widetilde{\mathcal{F}'}_x$ est injective,*
- *surjectif si pour tout $x \in E$, l'application $\Theta_x : (\widetilde{\mathcal{F}}_x) \to \widetilde{\mathcal{F}'}_x$ est surjective,*

Nous allons voir maintenant quelques résultats sur les morphismes de préfaisceaux. Tout d'abord nous avons le lemme suivant :

Lemme 1.1.1. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux faisceaux d'ensembles sur E et $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ un morphisme de préfaisceaux. Alors θ est injectif si et seulement si le morphisme de faisceaux qu'il induit $\widetilde{\theta}$ est injectif.*

Dans plusieurs démonstrations de ce manuscrit on aura besoin du théorème suivant :

Théorème 1.1.2. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux faisceaux d'ensembles sur E et $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ un morphisme de préfaisceaux. On note $\widetilde{\theta}$ le morphisme de faisceaux induit par θ. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) θ est bijectif,

ii) $\widetilde{\theta}$ est bijectif,

iii) θ est injectif et surjectif.

Si θ est un morphisme entre deux préfaisceaux de groupes (resp. d'anneaux, de modules, d'algèbres, d'algèbres de Lie, ..., etc), alors dans le théorème précedent θ est un isomorphisme.

1.1.3 Faisceaux duals

Soient E un espace topologique, $\mathcal{F}$ un faisceau d'anneaux sur E, $\mathcal{D}$ un préfaisceau de $\mathcal{F}$-modules et $x \in E$. Sur l'ensemble des éléments $\xi \in \mathcal{D}^*(U)$, où $\mathcal{D}^*(U)$ est le dual de $\mathcal{D}(U)$ et U parcourt tous les ouverts contenant x, on définit la relation d'équivalence

$$\xi \underset{x}{\mathcal{R}^*} \xi' \iff \text{il existe un ouvert } W \mid x \in W \subset U \cap V \text{ et } {r^*}^U_W(\xi) = {r^*}^V_W(\xi'),$$

où $\xi \in \mathcal{D}^*(U)$ et $\xi' \in \mathcal{D}^*(V)$. L'ensemble des classes d'équivalences ξ_x pour cette relation est noté $\widetilde{\mathcal{D}}^*_x$. L'ensemble $\widetilde{\mathcal{D}}^*_x$ hérite à partir des $\mathcal{D}^*(U)$ d'une structure de $\widetilde{\mathcal{F}}_x$-Module.

On pose $\widetilde{\mathcal{D}}^* = \bigsqcup_{x \in E} \widetilde{\mathcal{D}}^*_x$.

Définition 1.1.9. *L'ensemble $\widetilde{\mathcal{D}}^*$ est appelé le faisceau dual engendré par le pré-faisceau $\mathcal{D}$.*

Le faisceau dual $\widetilde{\mathcal{D}}^*$ engendré par $\mathcal{D}$ est aussi appelé le faisceau dual du faisceau engendré $\widetilde{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$. Pour un ouvert U de E et un élément $\xi \in \mathcal{D}^*(U)$, on définit l'application $\widetilde{\xi}$ de U dans $\widetilde{\mathcal{D}}^*$ par $\widetilde{\xi}(x) = \xi_x$ pour tout $x \in U$. On munit l'ensemble $\widetilde{\mathcal{D}}^*$ de la topologie la plus fine qui rend les applications $\widetilde{\xi}$ continues et dans ce cas la projection $\pi^* : \widetilde{\mathcal{D}}^* \to E$ qui envoie $\widetilde{\mathcal{D}}^*_x$ sur x est un homéomorphisme local.

On note $\widetilde{\mathcal{D}}^*(U)$ l'ensemble des sections de l'espace étalé $(\widetilde{\mathcal{D}}^*, \pi^*)$. La correspondance $U \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{D}}^*(U)$ est un faisceau de $\mathcal{F}$-modules.

Remarque. *Lorsque $\mathcal{D}$ est un faisceau de $\mathcal{F}$-modules, le morphisme de faisceaux $\Phi^* : \mathcal{D}^* \to \widetilde{\mathcal{D}}^*$ défini pour un ouvert U par $\Phi^*(U)(\xi) = \widetilde{\xi}$ est bijectif et donc les espaces étalés $(\widetilde{\mathcal{D}}, \pi)$ et $(\widetilde{\mathcal{D}}^*, \pi^*)$ sont isomorphes.*

Maintenant soit $\mathcal{L}$ un préfaisceau d'algèbres de Lie sur E. Pour tout ouvert U de E on note $\mathcal{L}^*(U)$ le dual de $\mathcal{L}(U)$. Comme on a fait précédement pour le cas d'un préfaisceau de modules, nous avons l'ensembles des germes $\widetilde{\mathcal{L}}^*_x$ en un point $x \in E$ qui posséde une structure naturelle d'algèbre de Lie hérité à partir des $\mathcal{L}^*(U)$. L'ensemble $\widetilde{\mathcal{L}}^* = \bigsqcup_{x\in E} \widetilde{\mathcal{L}}^*_x$ est appelé le faisceau dual engendré par le préfaisceau $\mathcal{L}$ et bien sûr la correspondance $U \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{L}}^*(U)$ est un faisceau d'algèbres de Lie.

1.1.4 Produit de faisceaux

Soit $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ une famille de faisceaux d'ensembles sur un même espace topologique E. Pour chaque $i \in I$ on note r_i les morphismes de restriction pour le faisceau $\mathcal{F}_i$. La correspondance $U \rightsquigarrow \prod_{i\in I} \mathcal{F}_i(U)$ est un faisceau d'ensembles appelé faisceau produit des $\mathcal{F}_i$. Les morphismes de restrictions sont définis comme étant le produit des morphismes de restriction des faisceaux $\mathcal{F}_i$, c'est-à-dire que pour tout couple d'ouverts U, V de E avec $U \subset V$ le morphisme de restriction $r^V_U : \prod_{i\in I} \mathcal{F}_i(V) \to \prod_{i\in I} \mathcal{F}_i(U)$ est défini par

$$r^V_U(\prod_{i\in I} s_i) = \prod_{i\in I} r_{iU}^{\,V}(s_i).$$

Le faisceau produit est noté par $\prod_{i\in I} \mathcal{F}_i$. Lorsque l'ensemble $I = \{1, \ldots, n\}$ est fini, le faisceau produit est noté simplement par $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \ldots \times \mathcal{F}_n$.

1.1.5 Sous-faisceaux

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux d'ensembles sur un espace topologique E.

Définition 1.1.10. *On dit que $\mathcal{G}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{F}$ si pour tout sous-ensemble ouvert U de E, $\mathcal{G}(U)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}(U)$, et si pour tout couple ouverts U, V de E avec $U \subset V$, ${r'}_U^V = r^V_{U|\mathcal{G}(V)}$, où r et r' sont respectivement les morphismes de restrictions des préfaisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.*

De manière équivalente, $\mathcal{G}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{F}$ si $\widetilde{\mathcal{G}}$ est un sous-espace ouvert de $\widetilde{\mathcal{F}}$ tel que $\widetilde{\mathcal{G}}_x \subseteq \widetilde{\mathcal{F}}_x$, pour tout $x \in E$, où $\widetilde{\mathcal{G}}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}$ sont respectivement les faisceaux engendrés par les préfaisceaux $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ sont des préfaisceaux de groupes (resp. d'anneaux, de modules, d'algèbre de Lie, ..., etc) alors $\mathcal{G}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{F}$ si pour tout ouvert U, $\mathcal{G}(U)$ est un sous-groupe (resp. sous-anneaux, sous-modules, sous-algèbre de Lie, ..., etc) de $\mathcal{F}(U)$ avec bien sûr les mêmes conditions que la définition précédente.

1.1.6 Faisceaux quotients

Soient $\mathcal{F}$ un faisceau d'anneaux sur un espace topologique E et $\mathcal{D}'$ un sous-faisceau d'un faisceau $\mathcal{D}$ de $\mathcal{F}$-modules. Pour un ouvert U de E, on note $\mathcal{D}(U)/\mathcal{D}'(U)$ le quotient du $\mathcal{F}(U)$-module $\mathcal{D}(U)$ par le $\mathcal{F}(U)$-module $\mathcal{D}'(U)$. La correspondance $U \rightsquigarrow \mathcal{D}(U)/\mathcal{D}'(U)$ est un préfaisceau de $\mathcal{F}$-modules qui vérifie la condition de localisation et il est appelé préfaisceau quotient.

Définition 1.1.11. *Le faisceau engendré par le préfaisceau $U \rightsquigarrow \mathcal{D}(U)/\mathcal{D}'(U)$ est appelé le faisceau quotient du faisceau $\mathcal{D}$ par le faisceau $\mathcal{D}'$ et il est noté $\overline{\mathcal{D}}$.*

L'ensemble des sections de $\overline{\mathcal{D}}$ au dessus d'un ouvert U est noté $\overline{\mathcal{D}}(U)$ et la correspondance $U \rightsquigarrow \overline{\mathcal{D}}(U)$ est évidemment un faisceau de $\mathcal{F}$-modules. De plus, le morphisme de préfaisceaux naturel in : $\mathcal{D}/\mathcal{D}' \to \overline{\mathcal{D}}$ est injectif. Pour un ouvert U, on note $\mathrm{Pr}(U)$ la projection canonique de $\mathcal{D}(U)$ dans $\mathcal{D}(U)/\mathcal{D}'(U)$, ce qui définit un morphisme de préfaisceaux surjectif noté Pr.

Maintenant, soit $\mathcal{L}'$ un sous-faisceau d'un faisceau d'algèbres de Lie $\mathcal{L}$ sur E. Pour tout ouvert U de E on suppose que $\mathcal{L}'(U)$ est idéal de $\mathcal{L}(U)$. Par passage au quotient, on obtient un préfaisceau d'algèbres de Lie $U \rightsquigarrow \mathcal{L}(U)/\mathcal{L}'(U)$ sur E qui vérifie la condition de localisation. Le faisceau qu'il engendre est noté $\overline{\mathcal{L}}$, et il est appelé faisceau quotient du faisceau $\mathcal{L}$ par le faisceau $\mathcal{L}'$.

L'ensemble des sections du faisceau quotient au dessus d'un ouvert U de E est noté $\overline{\mathcal{L}}(U)$. Comme dans la cas des faisceaux de modules le morphisme naturel in : $\mathcal{L}/\mathcal{L}' \to \overline{\mathcal{L}}$ est injectif et non surjectif en général. Pour plus de détails concernant les strucutres d'algèbres, on oriente le lecteur vers [4] (Chap. 10).

1.2 Rappels de géométrie différentielle

Dans cette partie nous donnerons les définitions ainsi que les résultats classiques de la géométrie différentielle élémentaires. Les conventions de sommation d'Einstein sont utilisés pour faciliter la lecture.

1.2.1 Généralités

Dans tout ce manuscrit M est une variété différentiable réelle de classe C^∞ et de dimension m.

Définition 1.2.1. *Soient M' une variété différentiable et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Une application $f : M \to M'$ est dite de classe C^k lorsque pour tout point $p \in M$, il existe une carte (U, Φ, V) de M, une carte (U', Φ', V') de M' telles que $p \in U$, $f(U) \subseteq U'$ et $\Phi' \circ f \circ \Phi^{-1} \in C^k(V, \mathbb{R}^{dim(M')})$.*

L'ensemble de telles applications est noté $C^k(M, M')$. De plus, les applications de classe C^k vérifient le principe de *localisation*. C'est-à-dire que si $\{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de M et si $f : M \to M'$ est une application dont la restriction à chaque U_i est de classe C^k, alors $f \in C^k(M, M')$. Les applications de classe C^k vérifient aussi le principe des *recollements par morçeaux*. Cela signifie que si l'on dispose d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de M et d'applications $f_i \in C^k(U_i, M')$ telles que $f_i = f_j$ sur $U_i \cap U_j$, alors, il existe une unique application $f \in C^k(M, M')$ dont la restriction à chaque U_i est justement f_i. Le cas $M' = \mathbb{R}$ est particulièrement intéressant. On parle alors de fonctions de classe C^k sur M. L'ensemble des fonctions de classe C^k sur la variété M est noté simplement $C^k(M)$. C'est naturellement une algèbre commutative, associative et unitaire.

Remarque. *En associant à tout ouvert U de la variété M l'algèbre $C^k(U)$, on obtient un faisceau d'algèbres. Ce faisceau est noté $\mathcal{C}^k$.*

Maintenant, pour tout point p de la variété M, on note

$$\mathcal{E}_p = \{(U, f) \mid U \text{ est un voisinage ouvert de } p \text{ et } f \in C^\infty(U)\}.$$

On désigne par $C^\infty(p)$ le quotient de cet ensemble par la relation d'équivalence

$$(U, f)\mathcal{R}(V, g) \iff \text{il existe un ouvert } \Omega \text{ tel que } p \in \Omega \subseteq U \cap V \text{ et } f = g \text{ sur } \Omega.$$

$C^\infty(p)$ hérite, à partir de $\mathbb{R}$ d'une structure d'algèbre associative, commutative et unitaire. Ses éléments sont les germes du préfaisceau $\mathcal{C}^\infty$ au point p. En général, on désigne souvent un germe et tout représentant de ce germe par la même lettre.

Définition 1.2.2. *Un vecteur tangent à la variété M en un point p est une forme linéaire ξ sur $C^\infty(p)$ vérifiant la régle de Leibniz*

$$\xi(fg) = f(p)\xi(g) + g(p)\xi(f).$$

L'ensemble des vecteurs tangents à M au point p est noté T_pM.

Proposition 1.2.1. *T_pM est un espace vectoriel réel de dimension m.*

Soient M' une variété différentiable de dimension m' et f une application dans $C^\infty(M, M')$. La composition à droite par f induit pour tout $p \in M$ un morphisme d'algèbres $f_p^* : C^\infty(f(p)) \to C^\infty(p)$. On vérifie que sa transposée applique T_pM sur $T_{f(p)}M'$.

Définition 1.2.3. *On appelle application linéaire tangente ou différentielle de f au point p la transposée du morphisme f_p^* et on la note f_{*p} ou d_pf.*

On entend par rang de f en un point p, le rang de l'application linéaire d_pf.

Définition 1.2.4. *L'ensemble $TM = \{(x, \xi) \mid x \in M$ et $\xi \in T_xM\}$ est appelé fibré tangent de M.*

Le fibré tangent posséde une structure naturelle de variété différentiable de dimension $2m$, qui ne depend pas de la structure de variété de M.

Définition 1.2.5. *Un champ de vecteurs X sur M est une application C^∞ qui associe à chaque point $p \in M$ un vecteur tangent $X_p \in T_pM$. L'ensemble des champs de vecteurs sur M est noté $\Gamma(TM)$.*

L'ensemble $\Gamma(TM)$ posséde les structure d'algèbre de Lie et de $C^\infty(M)$-module et la correspondance $U \rightsquigarrow \Gamma(U, TM)$ est un faisceau d'algèbres de Lie et un faisceau de $\mathcal{C}^\infty$-modules. De plus, un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ peut être vu comme une dérivation de $C^\infty(M)$. En effet, pour une fonction $f \in C^\infty(M)$, $(Xf)(p) = X_pf_p$, où f_p désigne le germe de la fonction f en p. Ainsi, au voisinage d'une carte (U, x), un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ s'écrit $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, tel que pour $1 \leq i \leq m$, $X^i = X(x^i) \in C^\infty(M)$.

On introduit en tout point p, le dual de l'espace tangent en ce point. Ce dual est noté T_p^*M.

Définition 1.2.6. *L'ensemble $T^*M = \{(x, \alpha) | x \in M$ et $\alpha \in T_p^*M\}$ est appelé fibré cotangent de M.*

Toute fonction $f \in C^\infty(p)$ induit un élément d_pf de T_p^*M, défini par $d_pf(\xi) = \xi(f)$. Ainsi pour tout système de coordonnées $\{x^j\}_{j=1}^m$ sur un ouvert U, la famille $\{dx^j\}_{j=1}^m$ est en tout point de U la base duale de $\{\frac{\partial}{\partial x^j}\}_{j=1}^m$.

Définition 1.2.7. *Toute application lisse θ qui associe à chaque point $p \in M$ un vecteur θ_p de T_p^*M est appelée 1-forme différentielle sur M. L'ensemble des 1-formes différentielles sur M est noté $\Gamma(T^*M)$.*

Plus généralement, on appelle k-forme différentielle, où $k \in \mathbb{N}$, toute application lisse qui associe à chaque point $p \in M$ un vecteur de $\Omega_p^k(M)$ telle que $\Omega_p^k(M)$ est l'espace vectoriel des k-formes multilinéaires alternées de T_pM. L'ensemble des k-formes différentielles est noté $\Omega^k(M)$. Cet ensemble muni de l'addition point par point et du produit extérieur des k-formes différentielles ainsi que du produit externe sur le corps des réelles est une algèbre associative et unitaire. De plus, La correspondance $U \rightsquigarrow \Omega^k(U)$ est un faisceau d'algèbres.

Définition 1.2.8. *Un champ tensoriel T de type (r,s) sur M , où $r, s \in \mathbb{N}$, est la donnée d'une application lisse qui associe à chaque point p de M une forme multilinéaire*

$$T_p : \underbrace{T_p^*M \times \ldots \times T_p^*M}_{r fois} \times \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{s fois} \to \mathbb{R}.$$

L'ensemble des champs tensoriels de type (r,s) sur M est noté $\Gamma(T_s^r(M))$.

L'ensemble $\Gamma(T_s^r(M))$ est un $C^\infty(M)$-module. De plus, la correspondance $U \rightsquigarrow \Gamma(U, T_s^r(M))$ est un faisceau de $\mathcal{C}^\infty$-modules.

Définition 1.2.9. *Soit M' une variété différentiable de dimension n. Une fonction $f \in C^\infty(M, M')$ est dite :*

- *une submersion si sa différentielle en chaque point de la variété est surjective,*
- *une immersion si sa différentielle en chaque point de la variété est injective,*
- *un plongement si elle est une immersion injective et un homéomorphisme de M sur son image $f(M)$ pour la topologie induite de M'.*

Définition 1.2.10. *Un sous-ensemble N de la variété M est dit une sous-variété plongée (resp. immergée) si l'injection naturelle $\mathrm{i} : N \to M$ est un plongement (resp. une immersion).*

Les ouverts de la variété M sont les sous-variétés plongées de dimension m. On va donner ci-dessous un des théorèmes d'existence qu'on appelle théorème du rang constant.

Théorème 1.2.1. *(**Rang constant**) Soit f une application de classe C^∞ entre deux variétés différentiables M et M' de dimension respectivement m et n. On suppose que le rang de f est constant égal à k. Alors au voisinage de chaque* *point p de M il existe une carte (U, ϕ, V) et une carte (Ω, ψ, W) de M' telles que $\phi(p) = 0$, $f(p) \in \Omega$, $f(U) \subset \Omega$ et*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0).$$

Démonstration. Voir [15] page 43. □

1.2.2 Fibrés vectoriels et connexions

Définition 1.2.11. *Un fibré vectoriel de dimension n sur la variété M est la donné d'une variété E et d'une application lisse $\pi : E \to M$ telles que*

- *$\forall x \in M$, $E_x = \pi^{-1}(x)$ est un espace vectoriel de dimension n.*
- *$\forall x \in M$, il exsite un voisinage ouvert U de x et un C^∞ difféomorphisme $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ tel que $\Phi = \pi \times \phi$ et $\forall y \in U$, $\phi_{|E_y} : E_y \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

Le fibré tangent TM et le fibré cotangent T^*M munis de leurs projections naturelles sont des fibrés vectoriels de dimension m.

Une section d'un fibré vectoriel E est une application lisse $s : M \to E$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$. L'ensemble des sections d'un fibré vectoriel E est noté $\Gamma(E)$. De plus, $\Gamma(E)$ est un $C^\infty(M)$-module.

Définition 1.2.12. *Une connexion linéaire sur un fibré vectoriel E, est la donnée d'une application $\mathbb{R}$-bilinéaire $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, telle que pour tout champ de vecteurs X, pour toute section Y de E et toute fonction f dans $C^\infty(M)$, nous ayons*

- *$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,*
- *$\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$.*

Lorsque le fibré vectoriel E est remplacé par le fibré tangent, ∇ est appelée connexion affine.

En coordonnées locales (U, x) au voisinage d'un point $p \in M$, la restriction d'une connexion affine ∇ à U s'écrit :

$$\begin{aligned}
(\nabla_X Y)_{|U} &= (\nabla_{|U})_{X_{|U}} Y_{|U} \\
&= (\nabla_{|U})_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} Y j \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= (X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(Y^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \frac{\partial}{\partial x^k},
\end{aligned}$$

où $\Gamma_{ij}^k = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j})(x^k)$ sont des fonctions dans $C^\infty(U)$, $\forall i, j, k \in \{1, \dots, m\}$. Ils sont appelés symboles de Christoffel de la connexion ∇ sur U.

Si (V, y) est une seconde carte au voisinage de p, alors nous avons

$$(\nabla_{|V})_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\beta}(y^s) = \Gamma^s_{\alpha\beta}.$$

De plus, sur $U \cap V$ nous avons

$$\begin{aligned}
\Gamma^s_{\alpha\beta} &= ((\nabla_{|U\cap V})_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\beta})(y^s) \\
&= ((\nabla_{|U\cap V})_{\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial}{\partial x^j})(y^s) \\
&= \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta})\frac{\partial y^s}{\partial x^j} + \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^s}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij} \\
&= \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^\alpha y^\beta}\frac{\partial y^s}{\partial x^l} + \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^s}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij},
\end{aligned}$$

donc les symboles de Christoffel d'une connexion affine ∇ sont régis par la régle de transformation :

$$\Gamma^s_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^\alpha y^\beta}\frac{\partial y^s}{\partial x^l} + \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^s}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}. \tag{1.1}$$

Définition 1.2.13. *La torsion d'une connexion ∇ est le $(1,2)$ champ tensoriel $T^\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$, défini pour tous champs de vecteurs X et Y dans $\Gamma(TM)$, par*

$$T^\nabla(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Une connexion ∇ est dite symétrique si $T^\nabla \equiv 0$.

1.2.3 Variétés semi-riemanniennes

Une métrique semi-riemannienne est un champ tensoriel de type $(0,2)$ symétrique et non-dégénéré. Une variété munie d'une telle métrique est appelée variété semi-riemannienne. La non dégénéréscence d'une métrique semi-riemannienne implique l'existence d'une unique connexion vérifiant certaines conditions, et nous avons ci-dessous le théorème fondamental de la géométrie semi-riemannienne.

Théorème 1.2.2. ***(Levi-Civita)*** *Soit (M,g) une variété semi-riemannienne. Alors il existe une unique connexion affine symétrique et compatible avec la métrique g.*

Démonstration. Voir [13] page 61. □

L'unique connexion du théorème ci-dessus est appelée la connexion de Levi-Civita. Grâce à la non dégénéréscence de la métrique g, la matrice $(g_{ij})_{1\leq i,j\leq \dim(M)}$ est inversible et on note son inverse par $(g^{ij})_{1\leq i,j\leq \dim(M)}$.

Les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita ∇ sont donnés dans une carte (U,x) par

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}g^{kl}(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{l}}).$$

La Courbure de ∇ notée R est le champ tensoriel de type $(1,3)$ définie pour tous champs de vecteurs X, Y et Z par

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Théorème 1.2.3. *Soit (M,g) une variété semi-riemannienne. On suppose que la courbure R est identiquement nulle. Alors au voisinage de chaque point $p \in M$, il existe un système de coordonnées, tel que la métrique g est représentée par une matrice constante.*

Démonstration. Voir [16] page 197. □

1.2.4 Feuilletages

Définition 1.2.14. *Un atlas de cartes feuilletées de classe C^∞ et de dimension n sur M est la donnée d'un atlas différentiable $\mathcal{A}$ sur M dont les applications de changement de cartes sont lisse et qui vérifient les conditions suivantes :*

- *Pour toute carte (U,ϕ) de $\mathcal{A}$, $\phi(U) = U' \times U'' \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$, où U' et U'' sont respectivement des ouverts connexes de $\mathbb{R}^{m-n}$ et $\mathbb{R}^n$.*
- *Si (U,ϕ) et (V,ψ) sont deux cartes dans $\mathcal{A}$ telles que $U \cap V \neq \emptyset$, alors l'application de changement de carte $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ est de la forme $\psi \circ \phi^{-1}(x,y) = (f(x), g(x,y))$, où $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{m-n}, \mathbb{R}^{m-n})$ et $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}, \mathbb{R}^n)$.*

Un feuilletage de classe C^∞ et de dimension n sur M est une classe d'équivalence d'un atlas de cartes feuilletées de classe C^∞ et de dimension n. On désigne le feuilletage et l'atlas par la même lettre $\mathcal{A}$ et on dit que $\mathcal{A}$ est une structure feuilletée de dimension n sur M. Le couple $(M,\mathcal{A})$ est appelé variété feuilletée et les cartes de $\mathcal{A}$ sont appelées carte feuilletées.

Pour une carte feuilletée (U,ϕ) de $\mathcal{A}$ telle que $\phi(U) = U' \times U'' \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$, les parties $\phi^{-1}(U'' \times \{c\})$ de U , où $c \in U'$, sont appelés feuilles locales de $\mathcal{A}$. L'application $\phi^{-1}_{|U''\times\{c\}} : U'' \times \{c\} \to U$ est un plongement et donc les feuilles locales sont des sous-variétés plongées connexes de dimension n. De plus, les feuilles locales forment une base d'une topologie sur M appelée topologie des feuilles qui est en générale plus fine que la topologie de variété de M. Les composantes connexes pour cette topologie sont appelées feuille du feuilletage $\mathcal{A}$.

Théorème 1.2.4. *Chaque feuille F d'un feuilletage $\mathcal{A}$ sur M posséde une structure de variété C^∞ de dimension n, telle que les domaines des cartes locales sont les feuilles locales de $\mathcal{A}$ et l'injection naturelle $\mathrm{i} : F \to M$ est une immersion.*

Démonstration. Voir [3] page 32. □

Maintenant, soient $(M, \mathcal{A})$ une variété feuilletée et F_x la feuille qui passe par un point $x \in M$. Sur M on définit la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x et y sont dans la même feuille. Les classes d'équivalences pour cette relation sont évidement les feuilles du feuilletage $\mathcal{A}$ et l'ensemble quotient $M/\mathcal{A}$ qu'on note $\overline{M}$ est appelé l'espace des feuilles. On munit l'espace des feuilles de la topologie quotient et on note $\pi : M \to \overline{M}$ la projection canonique.

Pour un sous-ensemble M' de la variété M on appelle le saturé de M' l'ensemble $\mathcal{A}(M') = \{x \in M \mid \exists y \in M' \text{ et } x\mathcal{R}y\}$ qui est la réunion de toutes les feuilles qui passent par chaque point de M' et on a le théorème suivant :

Théorème 1.2.5. *Le saturé de tout sous-ensemble ouvert de M est aussi un ouvert de M, ou de manière équivalente, la projection canonique π est une application ouverte.*

Démonstration. Voir [3] page 47. □

Remarque. *En général, l'espace des feuilles ne posséde pas une structure de variété différentiable, telle que la topologie de variété pour cette structure coïncide avec la topologie quotient. Par contre, si une telle structure existe et rend la projection $\pi : M \to \overline{M}$ une submersion, alors elle est unique (voir [14], page 274 proposition 3.1).*

1.2.5 Champs de plans

Définition 1.2.15. *Un champ de plans D de dimension n sur la variété M est la donnée pour tout point $p \in M$, d'un sous-espace vectoriel D_p de T_pM de dimension n.*

Un champ de plans D de dimension n est dit de classe C^k, où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si en chaque point $p \in M$ il existe un voisinage ouvert U de p et n champs de vecteur $X_1, \ldots, X_n$ de classe C^k définis sur U tels que en tout point $x \in U$ la famille $\{X_1(x), \ldots, X_n(x)\}$ engedre D_x. Un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ est dit tangent à un champ de plans D, si pour tout point $p \in M$, X_p est dans D_p. On note $\Gamma(U, D)$ l'ensemble des champs de vecteurs tangents à D au-dessus d'un sous-ensemble ouvert U de M. $\Gamma(U, D)$ est un sous-module de $\Gamma(U, TM)$ et la correspondance $U \rightsquigarrow \Gamma(U, D)$ est un sous-faisceau de $\mathcal{C}^\infty$-modules de $U \rightsquigarrow \Gamma(U, TM)$.

Maintenant, soit $\mathcal{A}$ un feuilletage de classe C^∞ et de dimension n dans M. Pour chaque point $p \in M$, on note $T_p\mathcal{A}_p$ l'espace tangent au point p de la feuille qui passe par p, ce qui nous donne un champ de plans de dimension n et de classe C^∞ sur M, et donc tout feuilletage de dimension n lui correspond un champ de plans de même dimension. Par contre, un champs de plans de dimension n et de classe C^∞ n'est forcément induit à partir d'un feuilletage, des contres exemples sont donnés par [3]. Un champs de plans de dimension n et de classe C^∞ est dit intégrable s'il est induit à partir d'un feuilletge C^∞ qui est bien sûr de même dimension et si un tel feuilletage existe alors il est unique.

Notons qu'un champ de plans D est dit involutif si le crochet de Lie de deux champs de vecteurs tangents à D est aussi tangent à D, et dans ce cas, pour tout ouvert U de M, $\Gamma(U, D)$ est une sous-algèbre de Lie de $\Gamma(U, TM)$. De plus, la correspondance $U \rightsquigarrow \Gamma(U, D)$ est un sous-faisceau d'algèbre de Lie de $U \rightsquigarrow \Gamma(U, TM)$, et nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.2.6. *(**Frobénius**) Soit D un champ de plans de dimension n et de classe C^∞. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) D est intégrable.

ii) D est involutif.

iii) Pour tout point $p \in M$, il existe un voisinage ouvert Ω de p et un système de coordonnées $\{x^i\}_{i=1}^m$ sur Ω, tel que la famille $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=m-n+1}^m$ soit un repère de D.

Démonstration. Pour la première équivalence $i) \iff ii)$, voir les référence [2] et [12]. Pour la seconde $ii) \iff iii)$,voir la référence [6]. □

Dans le théorème précédent, le système de coordonnées $\{x^i\}_{i=1}^m$ est appelé système de coordonnées de Frobénius.

2. GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTRIQUES DÉGÉNÉRÉES

Sommaire

Dans ce chapitre nous allons voir les principaux outils développés sur une variété différentiable munie d'une métrique dégénérée. Parmis les travaux qui existent, on va s'intéresser en particulier à ceux de Demir N. Kupeli [10] et [11].

2.1 Produit scalaires

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie m.

Définition 2.1.1. *Un produit scalaire sur V est la donnée d'une forme bilinéaire symétrique dégénérée.*

D'après le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (voir [4]), à tout produit scalaire g sur V, il existe une base orthonormée $\{e_i\}_{i=1}^m$ et des entiers $n_0, n_-, n_+ \in \mathbb{N}$ tels que

- $g(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$,
- $g(e_i, e_i) = 0$ si $1 \leq i \leq n_0$,
- $g(e_i, e_i) = -1$ si $n_0 + 1 \leq i \leq n_0 + n_-$,
- $g(e_i, e_i) = 1$ si $n_0 + n_- + 1 \leq i \leq n_0 + n_- + n_+$.

On dit que le produit scalaire g est de signature (n_0, n_-, n_+), où $n_0 + n_- + n_+ = m$. Les entiers n_0, n_- et n_+ ne dépendent que du produit scalaire g et non pas de la base orthonormée $\{e_i\}_{i=1}^m$. Si g a pour signature $(0, n_-, n_+)$ alors le produit scalaire g est dit non-dégénéré. Dans le cas où $n_0 = n_- = 0$, le produit scalaire g est dit défini positif.

Définition 2.1.2. *On appelle radical d'un produit scalaire g l'ensemble*

$$N_g = \{u \in V \mid g(u, v) = 0, \forall v \in V\}$$

des vecteurs dégénérés et c'est un sous-espace vectoriel de V de dimension n_0.

Un produit scalaire g induit un morphisme $g^\flat$ de V dans son duale V^* défini pour un vecteur v de V par $g^\flat(v) = g(v, .)$. Si g est non-dégénéré alors $g^\flat$ est un isomorphisme et dans ce cas, $\ker(g^\flat) = N_g = \{0\}$.

Un produit scalaire g de signature (n_0, n_-, n_+) induit un produit scalaire $\overline{g}$ sur le quotient de V par N_g qui est noté par $\overline{V}$. De plus, $\overline{g}$ est non-dégénéré de signature $(0, n_-, n_+)$.

2.2 Métriques dégénérées

Soit M une variété différentiable de classe C^∞ et dimension finie m.

Définition 2.2.1. *Une métrique dégénérée sur M est la donnée d'un champ tensoriel g de type $(0, 2)$ qui est symétrique et de signature constante (n_0, n_-, n_+) sur M, c'est-à-dire que pour tout point $x \in M$, le produit scalaire g_x sur T_xM a pour signature (n_0, n_-, n_+), où $n_0, n_-, n_+ \in \mathbb{N}$.*

Exemples.

(1) *Sur l'espace $\mathbb{R}^m$ munit du système de coordonnées usuel $(x^1, \ldots, x^m)$, on définit la métrique $\langle , \rangle = -\sum_{i=n_0+1}^{n_0+n_-} dx^i \otimes dx^i + \sum_{j=n_0+n_-+1}^{m} dx^j \otimes dx^j$, où $m = n_0 + n_- + n_+$. Cette métrique ainsi définie est une métrique dégénérée qui a pour signature (n_0, n_-, n_+). Le couple $(\mathbb{R}^m, \langle , \rangle)$ est appelé* espace pseudo-euclidien singulier*.*

(2) *Plus généralement, toute variété différentiable M de dimension m dont le fibré tangent est trivial admet une métrique dégénérée de signature (n_0, n_-, n_+) quelconque, avec $n_0 + n_- + n_+ = m$.*

Dans [1] l'auteur donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une métrique dégénérée. En effet, nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *Sur une variété différentiable paracompacte M, il existe une métrique dégénérée de signature (n_0, n_-, n_+) si et seulement si le fibré tangent se décompose en trois champs de plans qui sont mutuellement complémentaire de dimension respectivement n_0, n_- et n_+.*

Définition 2.2.2. *Le radical d'une métrique dégénérée g est le champ de plans, qu'on note $\mathcal{N}$, défini par*

$$x \in M \to \mathcal{N}_x = \{u \in T_xM \mid g_x(u,v) = 0, \forall v \in T_xM\}.$$

Comme la métrique g est de signature constante (n_0, n_-, n_+), le radical $\mathcal{N}$ définit un sous-fibré vectoriel du fibré tangent TM de dimension n_0. En effet, il suffit de poser

$$\mathcal{N} = \{(x,u) \mid x \in M, u \in T_xM \text{ et } g_x(u,v) = 0, \forall v \in T_xM\}.$$

Définition 2.2.3. *On appelle variété semi-riemannienne singulière toute variété différentiable M munie d'une métrique dégénérée g.*

2.3 Dérivées de Koszul

Soit (M,g) une variété semi-riemannienne singulière.

Définition 2.3.1. *Une dérivée de Koszul sur (M,g) est une application D : $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$, notée $(X,Y) \mapsto D_XY$, telle que, pour tous champs de vecteurs $X, X', Y, Y', Z \in \Gamma(TM)$ et pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, nous ayons*

1. $g(D_{X+X'}Y, Z) = g(D_XY, Z) + g(D_{X'}Y, Z)$,
2. $g(D_{fX}Y, Z) = fg(D_XY, Z)$,
3. $g(D_X(Y+Y'), Z) = g(D_XY, Z) + g(D_XY', Z)$,
4. $g(D_XfY, Z) = X(f)g(Y,Z) + fg(D_XY, Z)$,
5. $Zg(X,Y) = g(D_ZX, Y) + g(X, D_ZY)$,
6. $g(D_XY, Z) - g(D_YX, Z) = g([X,Y], Z)$.

Il faut noter que si g est une métrique non-dégénérée (semi-riemannienne) alors il existe une unique dérivée de Koszul qui est en fait la connexion de Levi-Civita de la variété semi-riemannienne (M,g). En général, une dérivée de Koszul n'est pas nécessairement une connexion. Par exemple, on munit $\mathbb{R}^3$ de deux métriques $g = dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3$ et $h = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3$. Soit ∇ la connexion de Levi-Civita de la variété riemannienne $(\mathbb{R}^3, h)$. Il est clair que ∇ est aussi une connexion sans torsion sur (M,g) et g compatible, donc c'est aussi une dérivée de Koszul sur (M,g). Maintenant, soit $\mathcal{D} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(\mathcal{N})$ une application définie par $\mathcal{D}(X,Y) = \left(\frac{h(X,X)}{h(Y,Y)}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x^1}$, alors $\nabla + \mathcal{D}$ est une dérivée de Koszul mais n'est pas une connexion sur M. La question qui se pose maintenant est de savoir sous quelles conditions a-t-on l'existence d'une dérivée de Koszul ? En fait, nous allons voir plus loin que si une variété semi-riemannienne singulière est intégrable au sens qu'on va voir dans la définition ci-dessous, alors elle admet une dérivée de Koszul et on a la définition suivante :

Définition 2.3.2. *Une variété semi-riemannienne singulière (M, g) est dite stationnaire si $\mathcal{L}_\xi g = 0$ pour tout $\xi \in \Gamma(\mathcal{N})$.*

Avant de donner un critère sur l'existence d'une dérivée de Koszul, nous avons d'abord besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.1. *Soient (M, g) une variété semi-riemannienne singulière de signature (n_0, n_-, n_+) et ω une 1-forme sur M telle que $\omega(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \Gamma(\mathcal{N})$. Alors il existe une unique section $\omega^\flat \in \Gamma(TM)$ modulo les sections de $\mathcal{N}$ (i.e. unique ssi $n_0 = 0$), tel que $\omega(Y) = \left\langle \omega^\flat, Y \right\rangle$ pour tout $Y \in \Gamma(TM)$.*

Démonstration. Voir [10], page 263. □

Théorème 2.3.1. *Une variété semi-riemannienne singulière (M, g) admet une dérivée de Koszul si et seulement si elle est stationnaire.*

Démonstration.
Supposons que la variété (M, g) admet une dérivée de Koszul D, alors pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\xi \in \Gamma(\mathcal{N})$ nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi g(X, Y) &= \xi g(X, Y) - g([\xi, X], Y) - g(X, [\xi, Y]) \\
&= g(D_\xi X, Y) + g(X, D_\xi Y) - g(D_\xi X, Y) + g(D_X \xi, Y) - g(X, D_\xi Y) \\
&+ g(X, D_Y \xi) \\
&= g(D_X \xi, Y) + g(X, D_Y \xi) \\
&= Xg(\xi, Y) - g(\xi, D_X Y) + Yg(X, \xi) - g(D_Y X, \xi) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pour la réciproque nous avons besoin de la forme de Koszul $\mathcal{K}$ définie pour tous X, Y et Z dans $\in \Gamma(TM)$ par

$$\mathcal{K}(X, Y, Z) = X.g(Y, Z) + Y.g(Z, X) - Z.g(X, Y)$$

$$-g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]).$$

On définit la 1-forme $\mu_{X,Y}$ pour $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ par $\mu_{X,Y}(Z) = \mathcal{K}(X, Y, Z)$. Puisque $\mathcal{L}_\xi g = 0$ pour tout $\xi \in \Gamma(\mathcal{N})$ alors $\mu_{X,Y}(\xi) = 0$, et donc d'après le lemme 2.3.1, il existe une section $\mu^\flat_{X,Y}$ de TM telle que $g(\mu^\flat_{X,Y}, Z) = \mu_{X,Y}(Z)$ pour tout $Z \in \Gamma(TM)$. On définit $D_X Y = \mu^\flat_{X,Y} \in \Gamma(TM)$. Pour finir en utilisant la forme de Koszul il est facile de voir que D est une dérivée de Koszul sur (M, g). □

La forme de Koszul qui est définie dans la démonstration ci-dessus intervient pour montrer l'existence d'une dérivée de Koszul, on la retrouve aussi dans la démonstration du théorème de Levi-Civita (voir le théorème 1.2.2).

Définition 2.3.3. *On appelle variète semi-riemannienne stationnaire toute variété semi-riemannienne singulière qui vérifie la condition de stationnarité.*

Dans ce qui suit (M, g) est une variété semi-riemannienne stationnaire.

Proposition 2.3.1. *Soient D_1 et D_2 deux dérivées de Koszul sur (M, g). Alors l'application $\mathcal{D} = D_1 - D_2$ possède ses valeurs dans $\Gamma(\mathcal{N})$. Inversement, si on a une application $\mathcal{D} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(\mathcal{N})$ et une dérivée de Koszul D' sur (M, g), alors $\mathcal{D} + D'$ est aussi une dérivée de Koszul sur (M, g).*

Corollaire 2.3.1. *Soit D une dérivée de Koszul sur la variété (M, g). Alors,*

- *$D_X\xi \in \Gamma(\mathcal{N})$ pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et $\xi \in \Gamma(\mathcal{N})$,*
- *$\mathcal{N}$ est un champ de plans intégrable.*

2.3.1 Torsion d'une dérivée de Koszul

Soit (M, g) une variété semi-riemannienne stationnaire.

Définition 2.3.4. *Soit D une dérivée de Koszul sur la variété (M, g). La torsion T^D de D est une application définie pour $X, Y \in \Gamma(TM)$ par*

$$T^D(X, Y) = D_XY - D_YX - [X, Y].$$

Si $T^D \equiv 0$ alors la dérivée de Koszul D est dite sans torsion.

Remarque. *Il est important de voir que la torsion d'une dérivée de Koszul n'est pas nécessairement un tenseur. De plus, par la condition 6 de la définition 2.3.1, T^D à ses valeurs dans $\Gamma(\mathcal{N})$.*

Proposition 2.3.2. *Soient D et D' deux dérivées de Koszul sur (M, g). Alors D et D' ont la même torsion i.e. $T^D = T^{D'}$, si et seulement si, l'application $\mathcal{D} = D' - D$ est symétrique.*

Notons que toute connexion sans torsion ∇ sur (M, g) et compatible avec g est une dérivée de Koszul sans torsion. Ainsi, d'après la proposition ci-dessus s'il existe une telle connexion ∇ sur (M, g) alors toute dérivée de Koszul D sur (M, g) peut s'écrire $D = \nabla + \mathcal{D}$, où $\mathcal{D} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(\mathcal{N})$ est une application symétrique. Par contre, la question inverse n'a pas été étudiée par Kupeli dans [10]. Néanmois dans [9], Kozlov a montré que la condition de stationnarité de la variété (M, g) est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une connexion sans torsion et compatible avec la métrique dégénérée g.

2.3.2 Courbure d'une dérivée de Koszul

Soit (M, g) une variété semi-riemannienne stationnaire.

Définition 2.3.5. *Soit D une dérivée de Koszul sur la variété (M, g). La courbure $R^D : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ de D est une application définie pour $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ par*

$$R^D(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z.$$

Remarque. *$R^D(X, Y)\xi$ est toujours dans $\Gamma(\mathcal{N})$ pour chaque $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\xi \in \Gamma(\mathcal{N})$, et cela est dû au fait que $D_X\xi$ est dans $\Gamma(\mathcal{N})$.*

Lemme 2.3.2. *Soient D et D' deux dérivées de Koszul sur (M, g) munies de leurs courbures R^D et $R^{D'}$ respectivement. Alors l'application $R^{D'} - R^D$ posséde ses valeurs dans $\Gamma(\mathcal{N})$. De plus, pour tous $X, Y, Z, Z' \in \Gamma(TM)$, nous avons*

$$g(R^{D'}(X, Y)Z, Z') = g(R^D(X, Y)Z, Z').$$

Proposition 2.3.3. *Soient D une dérivée de Koszul sur la variété (M, g) et R^D sa courbure. Alors pour tous $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2, Z, Z', Z_1, Z_2 \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$, nous avons*

(1) $g(R^D(X_1 + X_2, Y)Z, Z') = g(R^D(X_1, Y)Z, Z') + g(R^D(X_2, Y)Z, Z')$,

(2) $g(R^D(fX, Y)Z, Z') = fg(R^D(X, Y)Z, Z')$,

(3) $g(R^D(X, Y_1 + Y_2)Z, Z') = g(R^D(X, Y_1)Z, Z') + g(R^D(X, Y_2)Z, Z')$,

(4) $g(R^D(X, fY)Z, Z') = fg(R^D(X, Y)Z, Z')$,

(5) $g(R^D(X, Y)(Z_1 + Z_2), Z') = g(R^D(X, Y)Z_1, Z') + g(R^D(X, Y)Z_2, Z')$,

(6) $g(R^D(X, Y)fZ, Z') = fg(R^D(X, Y)Z, Z')$.

Remarque. *Pour une dérivée de Koszul D sur (M, g) munie de sa courbure R^D, la proposition précédente implique que pour tous champs $X, Y, Z, Z' \in \Gamma(TM)$, nous avons*

$$(g(R^D(X, Y)Z, Z'))(x) = g_x(R^D(X_x, Y_x)Z_x, {Z'}_x),$$

où $x \in M$.

Proposition 2.3.4. *Soit R^D la courbure d'une dérivée de Koszul D sur (M, g). Si $u, v, w, \eta \in T_xM$, où $x \in M$, alors*

1. $g_x(R^D(u, v)w, \eta) = -g_x(R^D(v, u)w, \eta)$,
2. $g_x(R^D(u, v)w, \eta) = -g_x(R^D(v, u)\eta, w)$,
3. $g_x(R^D(u, v)w, \eta) + g_x(R^D(v, w)u, \eta) + g_x(R^D(w, u)v, \eta) = 0$,

4. $g_x(R^D(u,v)w,\eta) = g_x(R^D(w,\eta)u,v$.

Donc d'après la proposition précédente et la définition 2.3.5 (remarque), pour tous $u,v,w,\eta \in T_xM$ et $\nu \in \mathcal{N}_x$, où $x \in M$, nous avons

$$g_x(R^D(\nu,v)w,\eta) = g_x(R^D(u,\nu)w,\eta) = g_x(R^D(u,v)\nu,\eta) = 0.$$

2.3.3 Courbure sectionnelle

Soit (M,g) une variété semi-riemannienne stationnaire. Pour définir la courbure sectionnelle nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.3. *Soient D_1 et D_2 deux dérivées de Koszul sur (M,g) munies de leurs courbures R^{D_1} et R^{D_2} respectivement. Alors l'application $\mathcal{R} = R^{D_1} - R^{D_2}$ posséde ses valeurs dans $\Gamma(\mathcal{N})$. En particulier, $g_x(R^{D_1}(u,v)w,\eta) = g_x(R^{D_2}(u,v)w,\eta)$ pour tous $u,v,w,\eta \in T_xM$ et $x \in M$.*

Rappelons qu'un plan tangent $\mathcal{P}$ à la variété M en un point x est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace tangent T_xM. Un plan tangent $\mathcal{P}$ est dit non-dégénéré si la restriction du produit scalaire g_x à $\mathcal{P}$ est non-dégénéré, et on a le lemme suivant :

Lemme 2.3.4. *Soit $\mathcal{P}$ un plan tangent à la variété M en un point x et soient u et v deux vecteurs tangents qui engendrent $\mathcal{P}$. Alors $\mathcal{P}$ est non-dégénéré si et seulement si $\mathcal{Q}(u,v) \neq 0$, où $\mathcal{Q}$ est une forme bilinéaire sur T_xM définie par*

$$\mathcal{Q}(u,v) = g_x(u,u)g_x(v,v) - g_x(u,v)^2.$$

Définition 2.3.6. *Soit $\mathcal{P}$ un plan non-dégénéré tangent à la variété (M,g) en un point x. La courbure sectionnelle $K(\mathcal{P})$ de $\mathcal{P}$ est définie par*

$$K(\mathcal{P}) = g_x(R^D(u,v)v,u)/\mathcal{Q}(u,v)$$

où les vecteurs $u,v \in T_xM$ forment une base de $\mathcal{P}$ et R^D est la courbure d'une dérivée de Koszul sur (M,g).

Il est clair que d'après le lemme 2.3.3 la courbure sectionnelle $K(\mathcal{P})$ est bien définie.

Proposition 2.3.5. *Si la courbure sectionnelle $K(\mathcal{P}) = 0$ pour chaque plan $\mathcal{P}$ non-dégénéré tangent en un point x de M, alors $g_x(R^D(u,v)w,\eta) = 0$ pour tous vecteurs $u,v,w,\eta \in T_xM$, où R^D est la courbure d'une dérivée de Koszul sur (M,g).*

Définition 2.3.7. *Une variété (M,g) est dite de courbure sectionnelle constante C si $K(\mathcal{P}) = C$ pour tout plan tangent non-dégénéré $\mathcal{P}$ en tout point $x \in M$.*

Lemme 2.3.5. *Soient $\mathcal{P}$ un plan non-dégénéré tangent à (M,g) en un point x et $u, v \in T_xM$ deux vecteurs tangents qui engendrent $\mathcal{P}$. Alors pour chaque plan $\mathcal{P}'$ engendré par $\{u+\omega_1, v+\omega_2\}$, $K(\mathcal{P}) = K(\mathcal{P}')$, tels que $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{N}_x$.*

Proposition 2.3.6. *Soit R^D la courbure d'une dérivée de Koszul D sur (M,g). Si (M,g) est de courbure sectionnelle constante c, alors en tout point $x \in M$,*

$$g_x(R^D(u,v)w,\eta) = c(g_x(v,w)g_x(u,\eta) - g_x(w,u)g_x(v,\eta)),$$

pour tous $u, v, w, \eta \in T_xM$.

2.4 Le fibré quotient canonique

Dans tout ce qui suit (M,g) est une variété semi-riemannienne stationnaire de signature (n_0, n_-, n_+).

Définition 2.4.1. *On appelle fibré quotient canonique induit par la variété (M,g) le fibré vectoriel $(\overline{\pi}, \overline{TM},\ M)$ de dimension $m - n_0$ défini par*

$$\overline{TM} = TM/\mathcal{N} = \bigcup_{x\in M} T_xM/\mathcal{N}_x,$$

et $\overline{\pi} : \overline{TM} \to M$ est la projection naturelle.

Pour tout point $p \in M$, les éléments de l'espace $\overline{T_pM} = T_xM/\mathcal{N}_x$ sont appelés vecteur quotient. La métrique dégénérée g de signature (n_0, n_-, n_+) induit un champ tensoriel $\overline{g}$ de type $(0,2)$ sur $\overline{TM}$ non-dégénéré de signature $(0, n_-, n_+)$ défini par

$$\overline{g}(\overline{X}, \overline{Y}) = g(X,Y),$$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$ avec $\overline{X} = \overline{\Pi}(X)$, $\overline{Y} = \overline{\Pi}(Y)$ et $\overline{\Pi} : TM \to \overline{TM}$ est la projection canonique.

Maintenant, pour tout point $p \in M$, on note $\overline{T_pM}^*$ le dual de l'espace quotient $\overline{T_pM}$. Le champ tensoriel $\overline{g}$ induit une application $\overline{\Pi}^* : \overline{TM} \to \overline{TM}^*$, où $\overline{TM}^* = \cup_{p\in M}\overline{T_pM}^*$, qui est définie pour un vecteur $\overline{v} \in \overline{T_pM}$ par

$$\overline{\Pi}^*(\overline{v}) = \overline{g}(\overline{v}, .)$$

Comme le champ tensoriel $\overline{g}$ est non-dégénéré alors en tout point $p \in M$, l'application $\overline{\Pi}_p^* : \overline{T_pM} \to \overline{T_pM}^*$ est un isomorphisme.

2.4.1 Connexion de Koszul

Dans [10] et [11] l'auteur a remplacé le fibré tangent par le fibré quotient canonique $\overline{TM}$ et la métrique dégénérée g par le champ tensoriel $\overline{g}$ et il a ainsi obtenu l'analogue d'une métrique semi-riemannienne, ce qui permet de définir une connexion linéaire sur $\overline{TM}$ sans torsion et compatible avec $\overline{g}$ qui est appelée la connexion de Koszul.

Théorème 2.4.1. *Une variété semi-riemannienne singulière (M, g) admet une connexion linéaire sur $\overline{TM}$ sans torsion et compatible avec $\overline{g}$ si et seulement si elle est stationnaire.*

Démonstration.
Supposons que (M, g) est stationnaire alors d'après le théorème 2.3.1, il existe une dérivée de Koszul D sur (M, g). Soit $\overline{\nabla}$ la connexion linéaire définie par $\overline{\nabla}_X\overline{Y} = \overline{\Pi}(D_XY)$ ou $X, Y \in \Gamma(TM)$ avec $\overline{Y} = \overline{\Pi}(Y)$. Maintenant soient D et D' deux dérivées de Koszul sur (M, g) et $Y' \in \Gamma(TM)$ avec $\overline{\Pi}(Y') = \overline{\Pi}(Y)$ tel que $Y' = Y + \xi$ et $\xi \in \Gamma(\mathcal{N})$, alors d'après la proposition 2.3.1, l'application $\mathcal{D} = D' - D$ a ses valeurs dans $\Gamma(\mathcal{N})$ et ainsi par le corollaire 2.3.1, pour tout $Z \in \Gamma(TM)$ avec $\overline{Z} = \overline{\Pi}(Z)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\overline{\Pi}(D'_XY'), \overline{Z}) &= g(D'_XY', Z) = g(D'_X(Y + U), Z) \\
&= g(D'_XY, Z) + g(D'_XU, Z) \\
&= g(D'_XY, Z) \\
&= g(D_XY + \mathcal{D}(X, Y), Z) \\
&= g(D_XY, Z), \\
&= \overline{g}(\overline{\Pi}(D_XY), \overline{Z})
\end{aligned}$$

D'où la non-dégénérescence de $\overline{g}$ implique que $\overline{\Pi}(D'_XY) = \overline{\Pi}(D_XY)$, ce qui veut dire que $\overline{\nabla}$ est bien définie.

Il découle directement de la définition d'une dérivée de Koszul que $\overline{\nabla}$ est une connexion linéaire et compatible avec $\overline{g}$. Pour l'unicité, nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{Y}, \overline{Z}) &= X\overline{g}(\overline{Y}, \overline{Z}) - \overline{g}(\overline{Y}, \overline{\nabla}_X\overline{Z}) \\
&= X\overline{g}(\overline{Y}, \overline{Z}) - \overline{g}(\overline{Y}, \overline{\nabla}_Z\overline{X} + \overline{\Pi}([X, Z])) \\
&= X\overline{g}(\overline{Z}, \overline{Z}) - Z\overline{g}(\overline{Y}, \overline{X}) + \overline{g}(\overline{\nabla}_Z\overline{Y}, \overline{X}) + \overline{g}(\overline{Y}, \overline{\Pi}([Z, X])) \\
&= X\overline{g}(\overline{Y}, \overline{Z}) - Z\overline{g}(\overline{X}, \overline{Y}) + \overline{g}(\overline{\nabla}_Y\overline{Z} + \overline{\Pi}([Z, Y]), \overline{X}) + \overline{g}(\overline{Y}, \overline{\Pi}([Z, X]))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X\overline{g}(\overline{Y},\overline{Z}) - Z\overline{g}(\overline{X},\overline{Y}) + Y\overline{g}(\overline{Z},\overline{X}) \\
&- \overline{g}(\overline{Z},\overline{\nabla}_Y\overline{X}) - \overline{g}(\overline{X},\overline{\Pi}([Y,Z])) + \overline{g}(\overline{Y},\overline{\Pi}([Z,X])) \\
&= X\overline{g}(\overline{Y},\overline{Z}) + Y\overline{g}(\overline{Z},\overline{X}) - Z\overline{g}(\overline{X},\overline{Y}) + \overline{g}(\overline{Z},\overline{\Pi}([X,Y])) \\
&+ \overline{g}(\overline{Y},\overline{\Pi}([Z,X])) - \overline{g}(\overline{X},\overline{\Pi}([Y,Z])) - \overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{Y},\overline{Z}),
\end{aligned}$$

ou $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ avec $\overline{X} = \overline{\Pi}(X)$,$\overline{Y} = \overline{\Pi}(Y)$ et $\overline{Z} = \overline{\Pi}(Z)$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{Y},\overline{Z}) = \frac{1}{2}\Big(& X\overline{g}(\overline{Y},\overline{Z}) + Y\overline{g}(\overline{Z},\overline{X}) - Z\overline{g}(\overline{X},\overline{Y}) \\
&- \overline{g}(\overline{X},\overline{\Pi}([Y,Z])) + \overline{g}(\overline{Y},\overline{\Pi}([Z,X])) + \overline{g}(\overline{Z},\overline{\Pi}([X,Y]))\Big).
\end{aligned}$$

Cette identité reste vérifier pour toute connexion sans torsion et compatible avec $\overline{g}$. De plus, la non-dégénéréscence de $\overline{g}$ nous assure l'unicité de $\overline{\nabla}$.

Réciproquement, on suppose qu'il existe une connexion linéaire $\overline{\nabla}$ sans torsion et compatible avec $\overline{g}$. Pour tous $\xi \in \Gamma(\mathcal{N})$, $X, Y \in \Gamma(TM)$ avec $\overline{X} = \overline{\Pi}(X)$ et $\overline{Y} = \overline{\Pi}(Y)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi g(X,Y) &= \xi g(X,Y) - g([\xi,X],Y) - g(X,[\xi,Y]), \\
&= \xi\overline{g}(\overline{X},\overline{Y}) - \overline{g}(\overline{\Pi}([\xi,X]),\overline{Y}) - \overline{g}(\overline{X},\overline{\Pi}([\xi,Y])), \\
&= \xi\overline{g}(\overline{X},\overline{Y}) - \overline{g}(\overline{\nabla}_\xi\overline{X},\overline{Y}) - \overline{g}(\overline{X},\overline{\nabla}_\xi\overline{Y}), \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et ainsi (M, g) est stationnaire. □

La stationnarité assure en fait l'existence d'une unique connexion sans torsion et compatible avec $\overline{g}$. De plus, si une telle connexion existe alors elle est unique. Dans le cas où (M, g) est une variété semi-riemannienne, l'unique connexion du théorème est en fait la connexion de Levi-Civita.

Définition 2.4.2. *Soit (M, g) une variété semi-riemannienne stationnaire, alors l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec $\overline{g}$ est appelée connexion de Koszul de la variété (M, g).*

Dans le reste de ce manuscrit toute variété semi-riemannienne stationnaire est munie de sa connexion de Koszul.

Définition 2.4.3. *La courbure de la connexion de Koszul $\overline{\nabla}$ est le champ tensoriel $\overline{R}$ dans $\Gamma(\Lambda^2(TM, \Lambda^1(\overline{TM}, \overline{TM})))$ défini par*

$$\overline{R}(X,Y)\overline{Z} = \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\overline{Z} - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\overline{Z} - \overline{\nabla}_{[X,Y]}\overline{Z},$$

ou $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ avec $\overline{Z} = \overline{\Pi}(Z)$.

Lemme 2.4.1. *Soit D une dérivée de Koszul sur (M, g) munie de sa courbure R^D, alors pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $\overline{Z} = \overline{\Pi}(Z)$ on a*

$$\overline{R}(X, Y)\overline{Z} = \overline{\Pi}(R^D(X, Y)Z).$$

Théorème 2.4.2. *Pour $X, Y, Z, Z' \in \Gamma(TM)$ avec $\overline{X} = \overline{\Pi}(X)$, $\overline{Y} = \overline{\Pi}(Y)$, $\overline{Z} = \overline{\Pi}(Z)$ et $\overline{Z'} = \overline{\Pi}(Z')$ nous avons les identitées suivantes :*

1) $\overline{R}(X, Y)\overline{Z} = -\overline{R}(Y, X)\overline{Z}$,
2) $\overline{g}(\overline{R}(X, Y)\overline{Z}, \overline{Z'}) = -\overline{g}(\overline{R}(X, Y)\overline{Z'}, \overline{Z})$,
3) $d^{\overline{\nabla}}\overline{R} = 0$, *ou $d^{\overline{\nabla}}$ est l'opérateur de dérivation covariante extérieur par rapport à $\overline{\nabla}$,*
4) $\overline{R}(X, Y)\overline{Z} + \overline{R}(Y, Z)\overline{X} + \overline{R}(Z, X)\overline{Y} = 0$,
5) $\overline{g}(\overline{R}(X, Y)\overline{Z}, \overline{Z'}) = \overline{g}(\overline{R}(Z, Z')\overline{X}, \overline{Y})$.

Le tenseur de courbure d'une connexion linéaire quelconque vérifie les égalités 1), 2) et 3) mais pas nécessairement 4) et 5) du théorème ci-dessus.

3. CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS UNE VARIÉTÉ FEUILLETÉE

Sommaire

Le but de ce chapitre est de construire un cadre qui nous permet d'avoir un calcul différentiel sur une variété feuilletée, c'est-à-dire définir des objets analogues aux fonctions lisses, aux champs de vecteurs, aux champs tensoriels, . . . , etc.

Dans le reste de ce manuscrit, $\mathcal{N}$ est un champ de plans intégrable de dimension n et de classe C^∞ sur la variété M. On note $\pi : M \to \overline{M}$ la projection canonique sur l'espace des feuilles.

3.1 Variétés feuilletées

Dans cette partie, on va d'abord s'intéresser aux fonctions constantes sur les feuilles. L'ensemble de ces fonctions posséde les strucutres algébriques voulues, et elles sont caractérisées par le lemme suivant :

Lemme 3.1.1. *Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\forall p \in M, \forall \xi \in \mathcal{N}_p, d_pf(\xi) = 0,$

ii) Pour tous $x, y \in M$, $\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$.

Démonstration.
$i) \Rightarrow ii)$. Soit F une feuille qui passe par deux points x et y. Comme F est connexe, il existe une courbe lisse par morceaux $c : [a, b] \to M$ telle que $c'(t) \in T_{c(t)}F = \mathcal{N}_{c(t)}$ pour $a < t < b$ avec $c(a) = x$ et $c(b) = y$. D'après $i)$, pour $a < t < b$, nous avons $(foc)'(t) = c'(t)(f) = 0$, et donc la fonction $f \circ c$ est constante.

$ii) \Rightarrow i)$. Soient $p \in M$, $\xi \in \mathcal{N}_p$ et une fonction $f \in C^\infty(M)$ constante sur la feuille F_p qui passe par p. On choisit une section X de $\mathcal{N}$ définie dans un voisinage U de p telle que $X_p = \xi$. Soit $c :]-\epsilon, \epsilon[\to U$ une courbe intégrale de X telle que $c(0) = p$. Il est clair que pour tout t, $c'(t) = X_{c(t)} \in \mathcal{N}_{c(t)}$, et donc, $\pi(c(t)) = \pi(p)$. Il s'ensuit que la fonction $f \circ c$ est constante. Ainsi, pour tout t, $c'(t)(f) = X_{c(t)}(f) = 0$. En particulier, pour $t = 0$, $d_p f(\xi) = \xi(f) = X_{c(0)}(f) = 0$. □

Pour un sous-ensemble ouvert U de M, on introduit l'ensemble

$$\mathcal{N}^\perp(U) = \{f \in C^\infty(U) \mid \forall u \in U, \forall \xi \in \mathcal{N}_u, d_u f(\xi) = 0\}.$$

Toute fonction $f \in \mathcal{N}^\perp(U)$ définit une fonction $\overline{f}$ sur $\pi(U)$, telle que $f = \overline{f} \circ \pi$, et on a la proposition suivante :

Proposition 3.1.1. *On suppose que $\overline{M}$ posséde une structure de variété différentiable pour laquelle la projection $\pi : M \to \overline{M}$ est une submersion. Soit W un ouvert de $\overline{M}$. Alors, $C^\infty(W)$ est isomorphe à $\mathcal{N}^\perp(\pi^{-1}(W))$.*

Démonstration.
C'est basé sur l'identité $\mathcal{N} = \ker(d\pi)$. D'abord, puisque π est surjective, l'application $\lambda \in C^\infty(W) \rightsquigarrow \pi^*(\lambda) = \lambda \circ \pi \in \mathcal{N}^\perp(\pi^{-1}(W))$ est injective.

Inversement, d'après le lemme 3.1.1, une fonction f dans $\mathcal{N}^\perp(\pi^{-1}(W))$ est constante sur les feuilles. On vient donc de définir une fonction λ sur W telle que $f = \lambda \circ \pi$ et il reste uniquement à vérifier que λ est C^∞. Par le théorème 1.2.1 du rang constant, pour chaque point $\omega \in W$, il existe un voisinage V de ω et une application lisse $j : V \to M$, tel que $\pi \circ j = \mathrm{id}_{|V}$. Ainsi, la fonction $\lambda_{|V} = f \circ j$ est lisse. □

Proposition 3.1.2. *La correspondance $U \rightsquigarrow \mathcal{N}^\perp(U)$ est un faisceau d'algèbres. Ce faisceau est noté par $\mathcal{N}^\perp$.*

Démonstration.
L'ensemble $\mathcal{N}^\perp(U)$ est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions lisses $C^\infty(U)$. En effet, $\mathcal{N}^\perp(U)$ est un sous-espace vectoriel réel de $C^\infty(U)$, de plus, $\forall u \in U, \forall \xi \in \mathcal{N}_u$ et pour toutes fonctions f, g dans $\mathcal{N}^\perp(U)$, nous avons $\xi(fg) = \xi(f)g + f\xi(g) = 0$. Il s'ensuit que $\mathcal{N}^\perp$ est un préfaisceau d'algèbres. Il reste à vérifier les conditions de localisation et de recollement. Soient $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de U et $\{f_i\}_{i \in I}$ une famille de fonctions telle que $\forall i, j \in I$, $f_i \in \mathcal{N}^\perp(U_i)$ et $f_{i|U_i \cap U_j} = f_{j|U_i \cap U_j}$. Comme les fonctions f_i sont lisses, alors d'après les conditions de localisation et de recollement pour le faisceau $\mathcal{C}^\infty$, il existe une unique fonction $f \in C^\infty(U)$, telle que $f_{|U_i} = f_i, \forall i \in I$. Maintenant, soient $p \in U$, $\xi \in \mathcal{N}_p$ et $X \in \Gamma(U, \mathcal{N})$ avec $X_p = \xi$. Pour $i \in I$, tel que $p \in U_i$, nous avons

$$\xi(f) = X_p(f) = (X(f))_{|U_i}(p) = X_{|U_i}(f_{|U_i})(p) = X_{|U_i}(f_i)(p) = \xi(f_i) = 0,$$

et donc $f \in \mathcal{N}^\perp(U)$. $\square$

En fait, $\mathcal{N}^\perp$ est un sous-faisceau du faisceau des fonctions lisse $\mathcal{C}^\infty$. Dans le reste du manuscrit, on fera uniquement usage de fonctions dans $\mathcal{N}^\perp$.

Pour finir cette partie sur le faisceau $\mathcal{N}^\perp$, on va s'intéresser à sa relation avec le faisceau des sections du champ de plans $\mathcal{N}$. en effet, nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.1.3. *La correspondance $U \rightsquigarrow \Gamma(U, \mathcal{N})$ est un faisceau d'algèbres de Lie et un faisceau de $\mathcal{N}^\perp$-modules.*

Démonstration.
Comme le champ de plans $\mathcal{N}$ est intégrable alors d'après le théorème de Frobénius, il est involutif et donc la correspondance $U \rightsquigarrow \Gamma(U, \mathcal{N})$ est un faisceau d'algèbres de Lie. Il s'ensuit directement que les conditions de localisation et de recollement sont vérifiés. Pour le reste, il suffit de voir que pour tout ouvert U de M, $\Gamma(U, \mathcal{N})$ est un $\mathcal{N}^\perp(U)$-module. $\square$

Dans le reste de ce manuscrit, on note le champ de plans $\mathcal{N}$ et le faisceau de ses sections par la même lettre $\mathcal{N}$. L'ensemble des sections de $\mathcal{N}$ au dessus d'un ouvert U est alors noté $\mathcal{N}(U)$.

Maintenant, pour un sous-ensemble ouvert U de M, on pose

$$D[\mathcal{N}^\perp(U)] = \{X \in \Gamma(U, TM) \mid X[\mathcal{N}^\perp(U)] \subseteq \mathcal{N}^\perp(U)\}.$$

Proposition 3.1.4. *Pour un ouvert U de M, $D[\mathcal{N}^\perp(U)]$ est une sous-algèbre de Lie de $\Gamma(U, TM)$ qui contient $\mathcal{N}(U)$.*

Démonstration.
Soit $Z \in \mathcal{N}(U)$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{N}^\perp(U)$, $Z(f) = 0$, et donc $Z \in D[\mathcal{N}^\perp(U)]$.

Maintenant, soient X, Y dans $D[\mathcal{N}^\perp(U)]$ et μ_1, μ_2 dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction f dans $\mathcal{N}^\perp(U)$, nous avons $(\mu_1 X + \mu_2 Y)(f) = \mu_1 X(f) + \mu_2 Y(f) \in \mathcal{N}^\perp(U)$ et $(XY)(f) = X(f)Y(f) \in \mathcal{N}^\perp(U)$, donc $\mu_1 X + \mu_2 Y$ et $X.Y$ sont dans $D[\mathcal{N}^\perp(U)]$. Par conséquent, $D[\mathcal{N}^\perp(U)]$ est une sous-algèbre de Lie de $\Gamma(U, TM)$. $\square$

L'inconveniant de l'algèbre de Lie $D[\mathcal{N}^\perp(U)]$ est qu'elle ne donne pas lieu à un préfaisceau. En effet, pour un ouvert $U' \subset U$ et $X \in D[\mathcal{N}^\perp(U)]$, la restriction de X à U' n'est pas forcément dans $D[\mathcal{N}^\perp(U')]$. Pour y remédier, on pose

$$\mathcal{H}(U) = \{X \in \Gamma(U, TM) \mid \text{ pour tout ouvert } U' \subseteq U, X_{|U'} \in D[\mathcal{N}^\perp(U')]\}.$$

Proposition 3.1.5. *La correspondance $U \rightsquigarrow \mathcal{H}(U)$ est un faisceau d'algèbres de Lie.*

Démonstration.
D'après la proposition 3.1.4 et la définition de $\mathcal{H}$, il est clair que la correspondance $U \rightsquigarrow \mathcal{H}(U)$ est un préfaisceau d'algèbres de Lie. Il reste à vérifier les conditions de localisation et de recollement. Soient $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert d'un ouvert U et $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille de champs de vecteurs telle que $\forall i, j \in I$, $X_i \in \mathcal{H}(U_i)$ et $X_{i|U_i\cap U_j} = X_{j|U_i\cap U_j}$. D'après les conditions de localisation et de recollement pour le faisceau des sections du fibré tangent, il existe une unique section $X \in \Gamma(U, TM)$ telle que $X_{|U_i} = X_i$, $\forall i \in I$. En fait, $X \in \mathcal{H}(U)$. En effet, soient Ω un ouvert de U et $f \in \mathcal{N}^\perp(\Omega)$. On écrit $\Omega = \cup_{i\in I}\Omega_i$ avec $\Omega_i = U_i \cap \Omega$. Sur chaque Ω_i, on a

$$(Xf)_{|\Omega_i} = X_{i|\Omega_i}(f_{|\Omega_i}) \in \mathcal{N}^\perp(\Omega_i).$$

□

On note le faisceau $U \rightsquigarrow \mathcal{H}(U)$ par $\mathcal{H}$.

Remarque. *Pour un ouvert U de M, $\mathcal{H}(U)$ est un $\mathcal{N}^\perp(U)$-module et ainsi, $\mathcal{H}$ est aussi un faisceau de $\mathcal{N}^\perp$-modules. De plus, pour toutes sections X, Y de $\mathcal{H}(U)$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{N}^\perp(U)$, nous avons*

$$[X, fY] = (Xf)Y + f[X, Y].$$

Le lemme ci-dessous donne une caractérisation des sections de $\mathcal{H}$.

Lemme 3.1.2. *Soit $\{x^i\}_{i=1}^m$ un système de coordonnées de Frobénius sur un ouvert Ω, et soit $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ un champ de vecteurs sur Ω. Alors $X \in \mathcal{H}(\Omega)$ si et seulement si $X^i \in \mathcal{N}^\perp(\Omega)$ pour $i \leq m - n$.*

Démonstration.
Supposons que $X \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pour $i \leq m-n$, les fonctions coordonnées x^i sont dans $\mathcal{N}^\perp(\Omega)$ et donc $X^i = X(x^i) \in \mathcal{N}^\perp(\Omega)$.

Réciproquement, soit $\Omega' \subseteq \Omega$ un ouvert. Pour $f \in \mathcal{N}^\perp(\Omega')$ et $k > m - n$, nous avons $\frac{\partial(Xf)}{\partial x^k} = \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial x^i} + X^i\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} = 0$ car $\frac{\partial X^i}{\partial x^k} \equiv 0$ pour $i \leq m-n$, $\frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv 0$ pour $i > m - n$ et $\frac{\partial f}{\partial x^k} \equiv 0$, ce qui suffit. □

En particulier, pour un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$ quelconque sur Ω, les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sont dans $\mathcal{H}(\Omega)$ pour $i \leq m - n$. Ainsi, si $\{y^i\}_{i=1}^m$ est un second système de coordonnées de Frobénius sur Ω, nous avons

$$\frac{\partial y^k}{\partial x^i} = 0 \text{ pour } k \leq m-n, i > m-n, \text{ et } \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \in \mathcal{N}^\perp(\Omega) \text{ pour } 1 \leq i, k \leq m-n. \tag{3.1}$$

Proposition 3.1.6. *Pour un ouvert quelconque U de M, $\mathcal{N}(U)$ est un idéal d'algèbre de Lie de $\mathcal{H}(U)$. Réciproquement, si ξ est un champ de vecteurs sur U tel que, pour tout ouvert $V \subseteq U$ et toute section $Y \in \mathcal{N}(V)$, $[\xi, Y] \in \mathcal{N}(V)$, alors $\xi \in \mathcal{H}(U)$.*

Démonstration.
Pour le premier point, on peut supposer que U est domaine d'un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$. Soient $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ dans $\mathcal{H}(U)$ et $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ dans $\mathcal{N}(U)$. On écrit $[Y, X] = Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ avec $Z^i = YX^i - XY^i$. Pour $i \leq m - n$, les fonctions Y^i s'annulent et donc $Z^i = Y^s \frac{\partial X^i}{\partial x^s}$. Puisque $Y^s = 0$ pour $s \leq m - n$, et par le lemme 3.1.2, $\frac{\partial X^i}{\partial x^s} = 0$ pour $s > m - n$, on a $Z^i = 0$ pour $i \leq m - n$. Ainsi, $[Y, X] \in \mathcal{N}(U)$.

Pour le second point, soit $V \subseteq U$ un domaine d'un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$. On écrit $\xi_{|V} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Pour $k > m-n$, on a $[\frac{\partial}{\partial x^k}, \xi_{|V}] = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{N}(V)$. Donc, $\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} = 0$ pour $k > m - n$ et $i \leq m - n$. Par conséquent, $\xi_{|V} \in \mathcal{H}(V)$ d'après le lemme 3.1.2. □

Grâce à la proposition précédente, on peut maintenant donner l'origine de l'ensemble $D[\mathcal{N}^\perp(U)]$.

Proposition 3.1.7. *On suppose que M est paracompacte et que $\overline{M}$ posséde une structure de variété différentiable pour laquelle la projection $\pi : M \to \overline{M}$ est une submersion. Pour un ouvert W de $\overline{M}$, l'algèbre de Lie $\Gamma(W, T\overline{M})$ est isomorphe à l'algèbre de Lie quotient $D[\mathcal{N}^\perp(\pi^{-1}(W))]/\mathcal{N}(\pi^{-1}(W))$.*

Démonstration.
Soient $X \in D[\mathcal{N}^\perp(\pi^{-1}(W))]$ et $\lambda \in C^\infty(W)$. D'après la proposition 3.1.1, il existe une unique fonction $\lambda' \in C^\infty(W)$, telle que $X(\lambda \circ \pi) = \lambda' \circ \pi$. On peut vérifier que la correspondance $\lambda \rightsquigarrow \lambda'$ est une dérivation de l'algèbre $C^\infty(W)$. Par conséquent, on obtient une correspondance $\delta\pi : D[\mathcal{N}^\perp(\pi^{-1}(W))] \to \Gamma(W, T\overline{M})$ telle que X et $\delta\pi(X)$ sont π-reliés pour tout $X \in D[\mathcal{N}^\perp(\pi^{-1}(W))]$. Ainsi, $\delta\pi$ devient un morphisme d'algèbre de Lie et son noyau est exactement $\mathcal{N}(\pi^{-1}(W))$.

Inversement, puisque M est paracompacte, un champ de $(m - n)$-plans $\mathcal{M}$ peut être construit pour obtenir la décomposition $TM = \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}$. En utilisant les isomorphismes $d_x\pi : \mathcal{M}_x \to T_{\pi(x)}\overline{M}$, chaque champ de vecteurs $\xi \in \Gamma(W, T\overline{M})$ peut être relevé de manière unique à un champ de vecteurs $X \in \Gamma(\pi^{-1}(W), \mathcal{M})$. Bien entendu, X et ξ sont π-reliés et il reste à vérifier que $X \in D[\mathcal{N}^\perp(\pi^{-1}(W))]$. En fait, une fonction $f \in \mathcal{N}^\perp(\pi^{-1}(W))$ s'écrit sous la forme $f = \lambda \circ \pi$, où $\lambda \in C^\infty(W)$. Donc $Xf = (\xi\lambda) \circ \pi \in \mathcal{N}^\perp(\pi^{-1}(W))$, ce qui suffit. □

3.2 Quasi-champs de vecteurs

Par la proposition 3.1.6, on introduit le préfaisceau quotient $\mathcal{H}/\mathcal{N}$. On note $\mathcal{T}$ le faisceau qu'il engendre.

Définition 3.2.1. *On appelle quasi-champ de vecteurs sur la variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$ toute section du faisceau $\mathcal{T}$.*

Par définition, pour un ouvert U de M un quasi-champ de vecteurs $X \in \mathcal{T}(U)$ est donné par un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de U, tel que chaque U_i est domaine d'un système de coordonnées de Frobénius, et des sections $X_i \in \mathcal{H}(U_i)$ qui satisfont la condition de recollement,

$$X_{i|U_i\cap U_j} - X_{j|U_i\cap U_j} \in \mathcal{N}(U_i \cap U_j).$$

On écrit alors $X = \{(U_i, X_i)\}_{i\in I}$.

D'autre part, le faisceau $\mathcal{T}$ a comme résultats, deux propriétés importantes. D'abord, grâce à la proposition 3.1.6, $\mathcal{T}$ hérite d'une structure d'algèbre de Lie et d'une structure de $\mathcal{N}^\perp$-module. De plus, un quasi-champ de vecteurs au-dessus d'un ouvert U peut être vu comme une dérivation de l'algèbre $\mathcal{N}^\perp(U)$ qui satisfait la régle de Leibniz. En effet, nous avons

$$\forall X, Y \in \mathcal{T}(U), \forall f \in \mathcal{N}^\perp(U), [X, fY] = (Xf)Y + f[X, Y]. \tag{3.2}$$

Le faisceau $\mathcal{T}$ va remplacer le fibré tangent et ses sections remplaceront les champs de vecteurs sur la variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$.

On note in l'injection naturelle de $\mathcal{H}/\mathcal{N}$ dans $\mathcal{T}$ et pr la projection canonique de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}/\mathcal{N}$.

Proposition 3.2.1. *Pour un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$ sur un ouvert Ω, les quasi-champs de vecteurs $\partial_i x = \mathrm{in} \circ \mathrm{pr}(\frac{\partial}{\partial x^i})$ pour $i = 1, \ldots, m - n$, forment une base du $\mathcal{N}^\perp(\Omega)$-module $\mathcal{T}(\Omega)$. Par ailleurs, si $\{\partial_j y\}_{j=1}^{m-n}$ est une seconde base induite par un second système de coordonnées $\{y^j\}_{j=1}^m$ sur Ω, alors*

$$\forall j \leq m - n, \partial_j y = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \partial_i x.$$

Démonstration.
Considérons une section $X = \{(\Omega_i, X_i)\}_{i\in I}$ de $\mathcal{T}$ au-dessus de Ω. Chaque champ de vecteurs X_i s'écrit $X_i = X_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ avec $X_i^k \in \mathcal{N}^\perp(\Omega_i)$ pour $k \leq m - n$. D'après la condition de recollement, nous avons

$$\forall k \leq m - n, X^k_{i\ |\Omega_i\cap\Omega_j} - X^k_{j\ |\Omega_i\cap\Omega_j} = 0.$$

Par conséquent, pour tout $k \leq m-n$, il existe une fonction $\xi^k \in \mathcal{N}^{\perp}(\Omega)$ telle que $\xi^k_{|\Omega_i} = X^k_i$ pour tout indice i. Evidemment, le champ de vecteurs $\xi = \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ appartient à $\mathcal{H}(\Omega)$, et induit alors un élément $\overline{\xi} = \xi^k \partial_k x$ de $\mathcal{T}(\Omega)$. Puisque, pour tout indice i, $\xi|_{\Omega_i} - X_i \in \Gamma(\Omega_i, \mathcal{N})$, on obtient que $X = \overline{\xi}$. Ceci prouve que la famille $\{\partial_k x\}_{k=1}^{m-n}$ engendre le $\mathcal{N}^{\perp}(\Omega)$-module $\mathcal{T}(\Omega)$.

Pour montrer que cette famille est libre, on considère la famille $\{f^i\}_{i=1}^{m-n}$ dans $\mathcal{N}^{\perp}(\Omega)$ telle que $f^i \partial_i x = 0$. Cela signifie que le champ de vecteurs $f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ appartient à $\Gamma(\Omega, \mathcal{N})$ et les fonctions f^i sont donc identiquement nulles.

Pour finir on applique $\mathrm{in} \circ \mathrm{pr}$ à $\frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$ dans $\mathcal{H}(\Omega)$ afin d'obtenir la formule de transformation du lemme. □

3.3 1-quasi-formes différentielles

Pour un ouvert U de M, toute fonction $f \in \mathcal{N}^{\perp}(U)$ induit grâce à sa différentielle df une forme δf défini de $\mathcal{T}(U)$ dans $\mathcal{N}^{\perp}(U)$. En effet, pour tout ouvert $U' \subseteq U$, df s'annule sur $\Gamma(U', \mathcal{N})$, et envoie $\mathcal{H}(U')$ dans $\mathcal{N}^{\perp}(U')$. D'autre part, δf est un élément de $\mathcal{T}^*(U)$, où $\mathcal{T}^*$ est le faisceau dual du faisceau $\mathcal{T}$.

Définition 3.3.1. *Une* 1*-quasi-forme différentielle sur la variété feuilletée* $(M, \mathcal{N})$ *est une section du faisceau* $\mathcal{T}^*$.

Le faisceau dual $\mathcal{T}^*$ de $\mathcal{T}$ sera considéré comme l'analogue au fibré cotangent et les 1-quasi-formes différentielles vont remplacer le faisceau des 1-formes différentielles sur la variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$. En outre, nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. *Si* $\{x^i\}_{i=1}^m$ *un système de coordonnées de Frobénius sur un ouvert* Ω*, alors la famille* $\{\delta x^i\}_{i=1}^{m-n}$ *est une base du* $\mathcal{N}^{\perp}(\Omega)$*-module* $\mathcal{T}^*(\Omega)$*. De plus, si* $\{\delta y^j\}_{j=1}^{m-n}$ *est une seconde base induite par un second système de coordonnées de Frobénius* $\{y^j\}_{j=1}^m$ *sur* Ω*, alors*

$$\forall j \leq m-n, \delta y^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \delta x^i.$$

Démonstration.
Il est clair que pour $i \leq m-n$, $x^i \in \mathcal{N}^{\perp}(\Omega)$. Après, on utilise la proposition 3.2.1 et les égalités $\delta x^i(\partial_j x) = \delta^i_j$. □

3.4 Quasi-champs tensoriels

Pour deux entiers $r \geq 0$ et $s \geq 0$, on introduit le faisceau $\mathcal{T}_s^r$ des morphismes de préfaisceaux $\mathcal{N}^\perp$-multilinéaires

$$\underbrace{\mathcal{T}^* \times ... \times \mathcal{T}^*}_{r\ fois} \times \underbrace{\mathcal{T} \times ... \times \mathcal{T}}_{s\ fois} \to \mathcal{N}^\perp.$$

Définition 3.4.1. *Un quasi-champ tensoriel de type (r, s) sur la variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$ est la donnée d'un élément du faisceau $\mathcal{T}_s^r$.*

Bien entendu, on pose $\mathcal{T}_0^0 = \mathcal{N}^\perp$. Les faisceaux $\mathcal{T}_0^1, \mathcal{T}_1^0$ s'identifient respectivement aux faisceaux $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^*$.

L'analogue des champs tensoriels sont évidements les quasi-champs tensoriels et la notion de produit tensoriel pour les quasi-champs tensoriels est défini comme étant le morphisme de préfaisceaux associatif et $\mathcal{N}^\perp$-bilinéaire $\bigotimes : \mathcal{T}_s^r \times \mathcal{T}_{s'}^{r'} \to \mathcal{T}_{s+s'}^{r+r'}$ tel que pour tout ouvert U de M, pour tout $T \in \mathcal{T}_s^r(U)$ et pour tout $S \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}(U)$, nous ayons

$$\bigotimes_U (T, S)(\theta^1, \ldots, \theta^r, \theta^{r+1}, \ldots, \theta^{r+r'}, X_1, \ldots, X_s, X_{s+1}, \ldots, X_{s+s'}) =$$

$$T(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) S(\theta^{r+1}, \ldots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \ldots, X_{s+s'}),$$

où, r', s' sont des entiers positifs, $\theta^i \in \mathcal{T}^*(U)$ pour $i \in \{1, \ldots, r, r+1, \ldots, r+r'\}$ et $X_j \in \mathcal{T}(U)$ pour $j \in \{1, \ldots, s, s+1, \ldots, s+s'\}$.

Définition 3.4.2. *Pour un ouvert U de M, le produit tensoriel de deux quasi-champs tensoriels $T \in \mathcal{T}_s^r(U)$ et $S \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}(U)$ noté $T \otimes S$ est le quasi-champ tensoriel de type $(r + r', s + s')$ défini par*

$$T \otimes S = \bigotimes_U (T, S).$$

Lorsque $r' = s' = 0$, S est réduit à une fonction $f \in \mathcal{N}^\perp(U)$, et on a

$$f \otimes T = T \otimes f = fT.$$

Lemme 3.4.1. *Soit $\{x^i\}_{i=1}^m$ un système de coordonnées de Frobénius sur un ouvert Ω. Un quasi-champ tensoriel $T \in \mathcal{T}_s^r(\Omega)$ s'écrit sous la forme*

$$T = T_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} \partial_{i_1} x \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} x \otimes \delta x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \delta x^{j_s},$$

où $T_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} \in \mathcal{N}^\perp(\Omega)$ pour $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, m-n\}$ et $j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, m-n\}$.

Démonstration.
Pour une famille de r 1-quasi-formes $\{\theta^k = \theta^k_{i_k}\delta x^{i_k}\}_{k=1}^r$ et une famille de s quasi-champs de vecteurs $\{X_l = X_l^{j_l}\partial_{j_l}x\}_{l=1}^s$ dans Ω, T s'écrit

$$\begin{aligned} &T(\theta^1_{i_1}\delta x^{i_1}, \ldots, \theta^r_{i_r}\delta x^{i_r}, X_1^{j_1}\partial_{j_1}x, \ldots, X_s^{j_s}\partial_{j_s}x) \\ &\qquad = \theta^1_{i_1}\ldots\theta^r_{i_r}X_1^{j_1}\ldots X_s^{j_s}T(\delta x^{i_1}, \ldots, \delta x^{i_r}, \partial_{j_a}x, \ldots, \partial_{j_s}x) \\ &\qquad = T(\delta x^{i_1}, \ldots, \delta x^{i_r}, \partial_{j_a}x, \ldots, \partial_{j_s}x)\theta^1(\partial_{i_1}x)\ldots\theta^r(\partial_{i_r}x)\delta x^{j_1}(X_1)\ldots\delta x^{j_s}(X_s), \end{aligned}$$

on pose $T(\delta x^{i_1}, \ldots, \delta x^{i_r}, \partial_{j_a}x, \ldots, \partial_{j_s}x) = T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots, j_s}$, et ainsi on obtient

$$\begin{aligned} &T(\theta^1_{i_1}\delta x^{i_1}, \ldots, \theta^r_{i_r}\delta x^{i_r}, X_1^{j_1}\partial_{j_1}x, \ldots, X_s^{j_s}\partial_{j_s}x) \\ &\qquad = T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\partial_{i_1}x \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r}x \otimes \delta x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \delta x^{j_s}(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.4.1. *Si $\{x^i\}_{i=1}^m$ est un système de coordonnées de Frobénius sur un ouvert Ω, alors la famille*

$$\{\partial_{i_1}x \otimes \cdots \otimes \partial_{i_r}x \otimes \delta x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \delta x^{j_s}\}_{1\leq i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s\leq m-n}$$

est une base du $\mathcal{N}^\perp(\Omega)$-module $\mathcal{T}^r_s(\Omega)$.

Démonstration. Conséquence directe du lemme 3.4.1. □

Le faisceau $\mathcal{T}^r_s$ va remplacer le faisceau des champs tensoriels de type (r, s) sur la variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$.

Maintenant, en utilisant la représentation locale de la proposition précédente, on définit la contraction des indices sur le faisceau $\mathcal{T}^r_s$ par l'application $C^k_l : \mathcal{T}^r_s(\Omega) \to \mathcal{T}^{r-1}_{s-1}(\Omega)$, où $1 \leq k \leq r$ et $1 \leq l \leq s$, telle que pour tout $T = T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\partial_{i_1}x \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r}x \otimes \delta x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \delta x^{j_s}$ dans $\mathcal{T}^r_s(\Omega)$, nous ayons

$$C^k_l(T) = \sum_{\alpha=1}^{m-n} T^{i_1\ldots i_{k-1}\alpha i_{k+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{l-1}\alpha j_{l+1}\ldots j_s}\partial_{i_1}x \otimes \ldots \otimes \partial_{i_{k-1}}x \otimes \partial_\alpha x \otimes \partial_{i_{k+1}}x \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r}x$$

$$\otimes \delta x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \delta x^{j_{l-1}} \otimes \delta x^\alpha \otimes \delta x^{j_{l+1}} \otimes \ldots \otimes \delta x^{j_s}.$$

3.5 Quasi-formes différentielles

Pour un entier $0 \leq r \leq m-n$, on introduit le faisceau Λ^r des morphismes de préfaisceaux $\mathcal{N}^{\perp}$-multilinéaires et antisymétriques

$$\underbrace{\mathcal{T} \times ... \times \mathcal{T}}_{r \ fois} \rightarrow \mathcal{N}^{\perp}.$$

C'est un sous-faisceau du faisceau des quasi-champs tensoriels $\mathcal{T}_r^0$.

Définition 3.5.1. *On appelle r-quasi-forme différentielle sur la variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$ tout élément du faisceau Λ^r.*

Bien entendu une 0-quasi-forme différentielle est une fonction de $\mathcal{N}^{\perp}$. Le faisceau Λ^r va remplacer le faisceau des r-formes différentielles sur la variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$.

Maintenant, soit le morphisme de préfaisceaux $Alt : \mathcal{T}_r^0 \rightarrow \Lambda^r$ défini pour un ouvert U et pour un quasi-champ tensoriel $T \in \mathcal{T}_r^0(U)$ par

$$Alt(U)(T) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} sgn(\sigma) T \circ \sigma,$$

où S_r est l'ensemble des permutation de $\{1, \ldots, r\}$.

Pour un sous-ensemble ouvert U de M, le morphisme de préfaisceaux Alt vérifie les propriétés suivantes :

- Pour tout $T \in \mathcal{T}_r^0(U)$, $Alt(U)(T) \in \Lambda^r(U)$.
- Pour toute quasi-forme $\omega \in \Lambda^r(U)$, $Alt(U)(\omega) = \omega$.
- Pour toutes quasi-formes $\omega \in \Lambda^r(U)$, $\eta \in \Lambda^s(U)$ et $\theta \in \Lambda^t(U)$, nous avons

$$Alt(U)(Alt(U)(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = Alt(U)(\omega \otimes Alt(U)(\eta \otimes \theta)) = Alt(U)(\omega \otimes \eta \otimes \theta).$$

Ainsi, on peut définir le produit extérieur sur le faisceau des quasi-formes différentielles Λ^r comme étant le morphisme de préfaisceaux $\mathbb{R}$-bilinéaire $\Lambda : \Lambda^r \times \Lambda^s \rightarrow \Lambda^{r+s}$ défini pour un sous-ensemble ouvert U et pour toutes quasi-formes $\omega \in \Lambda^r(U)$ et $\eta \in \Lambda^s(U)$ par

$$\Lambda(U)(\omega, \eta) = \frac{(r+s)!}{r!s!} Alt(U)(\omega \otimes \eta).$$

Lemme 3.5.1. *Pour un sous-ensemble ouvert U de M, le produit extérieur vérifie pour toutes quasi-formes différentielles $\omega \in \Lambda^r(U)$, $\eta \in \Lambda^s(U)$ et $\theta \in \Lambda^t(U)$ les propriétés suivantes :*

- $\Lambda(U)(\omega, \eta) = (-1)^{rs} \Lambda(U)(\eta, \omega)$,

- $\Lambda(U)(\Lambda(U)(\omega,\eta),\theta) = \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!} Alt(U)(\omega\otimes\eta\otimes\theta)$.

Démonstration. Similaire au cas classique. Voir [15] pour plus de détails. □

Dans ce qui suit afin de simplifier l'écriture, on notera la produit extérieur de deux quasi-formes différentielles ω et η par $\omega\Lambda\eta$ au lieu de $\Lambda(U)(\omega,\eta)$.

Proposition 3.5.1. *Si $\{x^i\}_{i=1}^m$ est un système de coordonnées de Frobénius sur un ouvert Ω, alors la famille*

$$\{\delta x^{i_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{i_r}\}_{1\le i_1<\ldots<i_r\le m-n}$$

est une base du $\mathcal{N}^\perp(\Omega)$-module $\Lambda^r(\Omega)$.

Démonstration.
Soit $\omega\in\Lambda^r(\Omega)$. Etant donné que le faisceau Λ^r est un sous-faisceau du faisceau des quasi-champs tensoriels $\mathcal{T}_r^0$, nous avons

$$\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{m-n} \omega_{i_1\ldots i_r}\delta x^{i_1}\otimes\ldots\otimes\delta x^{i_r}.$$

Or, d'après les propriétés du morphisme *Alt*,

$$\omega = Alt(\Omega)(\omega) = \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{m-n} \omega_{i_1\ldots i_r} Alt(\Omega)(\delta x^{i_1}\otimes\ldots\otimes\delta x^{i_r}).$$

Par la définition du produit extérieur sur les quasi-formes différentielles, chaque $Alt(\Omega)(\delta x^{i_1}\otimes\ldots\otimes\delta x^{i_r})$ est soit égale à 0, ou bien égale à $\pm\frac{1}{r!}Alt(U)(\delta x^{i_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{i_r})$ pour des indices $i_1<\ldots<i_r$, et donc d'après le lemme 3.5.1, la famille $\{\delta x^{i_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{i_r}\}_{1\le i_1<\ldots<i_r\le m-n}$ est une partie génératrice de $\Lambda^r(\Omega)$.

Pour montrer qu'elle est libre, on applique $(\partial_{i_1},\ldots,\partial_{i_r})$ à la quasi-forme

$$\alpha = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le m-n} f_{i_1\ldots i_r}\delta x^{i_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{i_r},$$

où les $f_{i_1\ldots i_r}$ sont dans $\mathcal{N}^\perp(\Omega)$, on obtient que pour tous indices $i_1,\ldots,i_r$ dans $\{1,\ldots,m-n\}$ tels que $i_1<\ldots<i_r$, $\alpha\equiv 0$ si et seulement si, $f_{i_1\ldots i_r}\equiv 0$. □

Sur un sous-ensemble ouvert quelconque U de M, le crochet de Lie sur $\mathcal{T}(U)$ permet de définir la différentielle extérieur d'une r-quasi-forme différentielle $\alpha\in\Lambda^r(U)$, où $r\ge 0$, par

$$\delta\alpha(X_0,\ldots,X_r) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i(\alpha(X_0,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_r))$$

$$+\sum_{0\leq i<j\leq r}(-1)^{i+j}\alpha([X_i,X_j],X_0,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,\widehat{X_j},\ldots,X_r),$$

telle que les $\widehat{X_i}$ sont omis. La différentielle extérieur d'une r-quasi-forme différentielle α notée $\delta(\alpha)$ est une $(r+1)$-quasi-forme différentielle sur la variété feuilletée $(M,\mathcal{N})$. De plus, l'opérateur δ satisfait les même identités que la différentielle extérieur classique d. En effet, nous avons la proposition suivantes :

Proposition 3.5.2. *Sur un sous-ensemble ouvert U, pour toutes quasi-formes différentielles $\omega,\omega'\in\Lambda^r(U)$ et $\eta\in\Lambda^s(U)$, nous avons*

- $\delta(\omega+\omega')=\delta(\omega)+\delta(\omega')$,
- $\delta(\omega\Lambda\eta)=\delta(\omega)\Lambda\eta+(-1)^r\omega\Lambda\delta(\eta)$,
- $\delta\circ\delta\equiv 0$.

Démonstration.
La première égalité est une conséquence directe de la définition. Pour le reste, on va supposé que U est domaine d'un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$. La différentielle extérieur d'une quasi-forme $\alpha\in\Lambda^r(U)$ s'écrit

$$\delta(\alpha)=\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_r\leq m-n}\delta(\alpha_{i_1\ldots i_r})\Lambda\delta x^{i_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{i_r}.$$

Ainsi, pour toutes quasi-formes $\omega\in\Lambda^r(U)$ et $\eta\in\Lambda^s(U)$, nous avons

$$\begin{aligned}\delta(\omega\Lambda\eta)&=\delta\Big(\sum_{i_1<\ldots<i_r,j_1<\ldots<j_s}\omega_{i_1\ldots i_r}\eta_{j_1\ldots j_s}(\delta x^{i_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{i_r})\Lambda(\delta x^{j_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{j_s})\Big)\\&=\sum_{i_1<\ldots<i_r,j_1<\ldots<j_s}\delta(\omega_{i_1\ldots i_r}\eta_{j_1\ldots j_s})(\delta x^{i_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{i_r})\Lambda(\delta x^{j_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{j_s})\\&=\sum_{i_1<\ldots<i_r,j_1<\ldots<j_s}\eta_{j_1\ldots j_s}\delta(\omega_{i_1\ldots i_r})\Lambda(\delta x^{i_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{i_r})\Lambda(\delta x^{j_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{j_s})\\&\quad+\sum_{i_1<\ldots<i_r,j_1<\ldots<j_s}\omega_{i_1\ldots i_r}\delta(\eta_{j_1\ldots j_s})\Lambda(\delta x^{i_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{i_r})\Lambda(\delta x^{j_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{j_s})\\&=\delta(\omega)\Lambda\eta+(-1)^r\sum_{i_1<\ldots<i_r,j_1<\ldots<j_s}\omega_{i_1\ldots i_r}(\delta x^{i_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{i_r})\Lambda\delta(\eta_{j_1\ldots j_s})\\&\quad\Lambda(\delta x^{j_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{j_s})\\&=\delta(\omega)\Lambda\eta+(-1)^r\omega\Lambda\delta(\eta).\end{aligned}$$

Pour le dernier point, soit $\alpha \in \Lambda^r(U)$. Nous avons

$$\begin{aligned}\delta \circ \delta(\alpha) &= \delta\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_r\leq m-n} \delta(\alpha_{i_1\ldots i_r})\Lambda\delta x^{i_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{i_r}\Big)\\ &= \delta\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_r\leq m-n}\sum_{k=1}^{m-n} \partial_k x(\alpha_{i_1\ldots i_r})\delta x^k\Lambda\delta x^{i_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{i_r}\Big)\\ &= \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_r\leq m-n}\sum_{k=1}^{m-n}\sum_{l=1}^{m-n} \partial_k x\circ\partial_l x(\alpha_{i_1\ldots i_r})\delta x^l\Lambda\delta x^k\Lambda\delta x^{i_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{i_r}.\end{aligned}$$

Lorsque $k \neq l$, $\partial_k x\circ\partial_l x(\alpha_{i_1\ldots i_r})\delta x^l\Lambda\delta x^k = -\partial_l x\circ\partial_k x(\alpha_{i_1\ldots i_r})\delta x^k\Lambda\delta x^l$. Pour $k = l$, $\delta x^l\Lambda\delta x^k = 0$. Il s'ensuit que $\delta\circ\delta(\alpha) = 0$. □

3.6 Décomposition de Frobénius

Les quasi-champs tensoriels peuvent être considérés comme des champs tensoriels sur le fibré quotient canonique $\overline{TM}$. En effet, pour un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$ sur un ouvert Ω, un quasi-champ tensoriel $T = T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\partial_{i_1}x\otimes\ldots\otimes\partial_{i_r}x\otimes\delta x^{j_1}\otimes\ldots\otimes\delta x^{j_s}\in\mathcal{T}^r_s(\Omega)$ induit un champ tensoriel $\overline{T}$ de $\Gamma(\Omega, T^r_s(\overline{TM}))$, défini par

$$\overline{T} = T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\overline{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}}\otimes\ldots\otimes\overline{\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}}\otimes\overline{dx^{j_1}}\otimes\ldots\otimes\overline{dx^{j_s}},$$

où, $\{\overline{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \overline{\Pi}(\frac{\partial}{\partial x^i})\}_{i=1}^{m-n}$ est une base du $C^\infty(\Omega)$-module $\Gamma(\Omega,\overline{TM})$ et $\{\overline{dx^i}\}_{i=1}^{m-n}$ est sa base duale dans le $C^\infty(\Omega)$-module $\Gamma(\Omega,\overline{TM}^*)$.

De plus, si $\{y^j\}_{j=1}^m$ est un second systèmes de coordonnées de Frobénius sur Ω, alors les deux bases $\{\overline{\frac{\partial}{\partial x^i}}\}_{i=1}^{m-n}$ et $\{\overline{\frac{\partial}{\partial y^j}}\}_{j=1}^{m-n}$ de $\Gamma(\Omega,\overline{TM})$ définies par ces deux systèmes sont liées par la régle de transformation

$$\overline{\frac{\partial}{\partial y^j}} = \frac{\partial x^s}{\partial y^j}\overline{\frac{\partial}{\partial y^s}}.$$

On peut facilement voir que c'est exactement la même régle donnée dans la proposition 3.2.1. Ce qui permet d'avoir une injection de l'ensemble des quasi-champs tensoriels dans celui des champs tensoriels de $\overline{TM}$.

D'un autre côté on peut également voir que l'algèbre des quasi-champs tensoriels s'identifie localement à l'algèbre des champs tensoriels usuels d'un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^{m-n}$. Pour cela, on considère un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$ d'un ouvert Ω sur un produit cartésien $\Omega'\times\Omega''$, où Ω' (resp. Ω'') est un sous-ensemble ouvert connexe de $\mathbb{R}^{m-n}$ (resp. $\mathbb{R}^n$). L'image d'un point

$p \in \Omega$ est notée par (p', p'').

Maintenant, soit $\{e_i\}_{i=1}^{m-n}$ la base canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{m-n}$ et soit $\{e^i\}_{i=1}^{m-n}$ sa base duale. En identifiant une fonction $f \in \mathcal{N}^{\perp}(\Omega)$ avec une fonction $f' \in C^{\infty}(\Omega')$ telle que $f = f' \circ x'$, où $x' = (x^1, \ldots, x^{m-n})$, on définit un isomorphisme qu'on note I_0^0. Ainsi, l'isomorphisme naturel $I_s^r : \mathcal{T}_s^r(\Omega) \to \mathbf{T}_s^r(\Omega')$ donné par

$$\begin{aligned} I_s^r(T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \partial_{i_1} x \otimes \cdots \otimes \partial_{i_r} x \otimes \delta x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \delta x^{j_s}) \\ = I_0^0(T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} \end{aligned}$$

est bien défini, où $\mathbf{T}_s^r(\Omega')$ est l'ensemble des champs tensoriels de type (r, s) usuels sur la variété Ω'.

Définition 3.6.1. *Le triplet $(\Omega, \{x^i\}_{i=1}^m, \Omega' \times \Omega'')$ est appelé décomposition de Frobénius sur la variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$ et l'application I_s^r, où $r \geq 0$ et $s \geq 0$, est appelée l'isomorphisme miroir de type (r, s) associé.*

Proposition 3.6.1. *Soit $(\Omega, \{x^i\}_{i=1}^m, \Omega' \times \Omega'')$ une décomposition de Frobénius sur une variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$, pour deux entier positifs quelconques r et s et un point $p \in U$ tel que $x(p) = (p', p'')$ nous avons les identitées suivantes :*

- *Pour tous $T \in \mathcal{T}_s^r(\Omega)$, $X_1, \ldots, X_s \in \mathcal{T}(\Omega)$ et $\theta^1, \ldots, \theta^r \in \mathcal{T}^*(\Omega)$,*

$$\begin{aligned} T(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p) = \\ I_s^r(T)(I_1^0(\theta^1), \ldots, I_1^0(\theta^r), I_0^1(X_1), \ldots, I_0^1(X_s))(p'). \end{aligned} \quad (3.3)$$

- *Pour tous $X, Y \in \mathcal{T}(\Omega)$,*

$$I_0^1([X, Y])(p') = [I_0^1(X), I_0^1(Y)](p'). \quad (3.4)$$

- *Pour tout $\alpha \in \Lambda^r(\Omega)$,*

$$I_r^0(\alpha) \in \Omega^r(\Omega') \text{ et } I_{r+1}^0(\delta\alpha) = d(I_r^0(\alpha)), \quad (3.5)$$

où $\Omega^r(\Omega')$ est l'ensemble des r-formes différentielles sur Ω'.

Démonstration.
Pour le premier point, nous avons

$$
\begin{aligned}
T(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)(p) &= T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}(p)\theta^1_k(p)\delta^k_{i_1}\ldots\theta^r_k(p)\delta^k_{i_r}X^k_1(p)\delta^{j_1}_k\ldots X^k_s(p)\delta^{j_s}_k\\
&= I^0_0(T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s})(p')I^0_0(\theta^1_k)(p')\delta^k_{i_1}\ldots I^0_0(\theta^r_k)(p')\delta^k_{i_r}\\
&\quad I^0_0(X^k_1)(p')\delta^{j_1}_k\ldots I^0_0(X^k_s)(p')\delta^{j_s}_k\\
&= I^0_0(T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s})(p')e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\ldots\otimes e^{j_s}\\
&\quad\Big(I^0_0(\theta^1_k)(p')e^k,\ldots,I^0_0(\theta^r_k)(p')e^k,\\
&\quad I^0_0(X^k_1)(p')e_k,\ldots,I^0_0(X^k_s)(p')e_k\Big)\\
&= I^r_s(T)(p')\Big(I^0_1(\theta^1)(p'),\ldots,I^0_1(\theta^r)(p'),\\
&\quad I^1_0(X_1)(p'),\ldots,I^1_0(X_s)(p')\Big)\\
&= I^r_s(T)(I^0_1(\theta^1),\ldots,I^0_1(\theta^r),I^1_0(X_1),\ldots,I^1_0(X_s))(p').
\end{aligned}
$$

Pour le deuxième point, il faut voir que pour toute fonction f dans $\mathcal{N}^{\perp}(\Omega)$, $I^0_0(\partial_i x(f))(p') = D_i(I^0_0(f))(p')$ pour $i\in\{1,\ldots,m-n\}$, et ainsi pour tous quasi-champs de vecteurs $X = X^i\partial_i x$ et $Y = Y^j\partial_j x$ dans $\mathcal{T}(\Omega)$ nous avons

$$
\begin{aligned}
I^1_0([X,Y])(p') &= I^1_0\Big(X^i\partial_i x(Y^k) - Y^j\partial_j x(X^k))\partial_k x\Big)(p')\\
&= \Big(I^0_0(X^i)(p')I^0_0(\partial_i x(Y^k))(p') - I^0_0(Y^j)(p')I^0_0(\partial_j x(X^k))(p')\Big)e_k\\
&= \Big((I^0_0(X^i)(p')D_i(I^0_0(Y^k))(p') - I^0_0(Y^j)(p')D_j(I^0_0(X^k))(p')\Big)e_k\\
&= [I^1_0(X),I^1_0(Y)](p').
\end{aligned}
$$

Pour le dernier point, il faut remarquer que pour tous indices $i_1,\ldots,i_r$ dans $\{1,\ldots,m-n\}$, on a

$$I^0_r(\delta x^{i_1}\Lambda\ldots\Lambda\delta x^{i_r}) = e^{i_1}\Lambda\ldots\Lambda e^{i_r},$$

et donc il est clair que si α est une r-quasi-forme différentielle, alors $I^0_r(\alpha)\in\Omega^r(\Omega')$.

Maintenant, d'après la définition de la différentielle extérieur sur les quasi-formes différentielles, pour tous quasi-champs $X_0,\ldots,X_r\in\mathcal{T}(\Omega)$, nous avons

$$
\begin{aligned}
I^0_0(\delta\alpha(X_0,\ldots,X_r)) = I^0_0\Big(&\sum_{k=0}^{r}\sum_{i_0,\ldots,i_r=1}^{m-n}(-1)^k\partial_{i_k}x(\alpha_{i_0\ldots\widehat{i_k}\ldots i_r})X^{i_0}_0\times\ldots\times X^{i_k}_k\times\ldots\\
&\times X^{i_r}_r - \sum_{0\leq i<j\leq r}(-1)^{i+j}\{X^k_i\partial_k x(X^l_j) - X^k_j\partial_k x(X^l_i))\partial_k x\}\\
&X^{k_0}_0\times\ldots\times\widehat{X^{k_i}_i}\times\ldots\times\widehat{X^{k_j}_j}\times\ldots\times X^{k_r}_r\times\alpha_{lk_0\ldots\widehat{k_i}\ldots\widehat{k_j}\ldots k_r}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{r} \sum_{i_0,\ldots,i_r=1}^{m-n} (-1)^k D_{i_k}(I_0^0(\alpha_{i_0\ldots\widehat{i_k}\ldots i_r})) I_0^0(X_0^{i_0}) \times \ldots \times I_0^0(X_k^{i_k}) \\
&\qquad \times \ldots \times I_0^0(X_r^{i_r}) - \sum_{0\leq i<j\leq r} (-1)^{i+j} \{ I_0^0(X_i^k) D_k(I_0^0(X_j^l)) \\
&\qquad - I_0^0(X_j^k) D_k(I_0^0(X_i^l)) \} I_0^0(X_0^{k_0}) \times \ldots \times \widehat{I_0^0(X_i^{k_i})} \\
&\qquad \times \ldots \times \widehat{I_0^0(X_j^{k_j})} \times \ldots \times I_0^0(X_r^{k_r}) \times I_0^0(\alpha_{lk_0\ldots\widehat{k_i}\ldots\widehat{k_j}\ldots k_r}) \\
&= d(I_r^0(\alpha))(I_0^1(X_0), \ldots, I_0^1(X_r)).
\end{aligned}
$$

□

4. QUASI-CONNEXIONS SUR UNE VARIÉTÉ FEUILLETÉE

Sommaire

Dans ce chapitre la variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$ est munie des faisceaux $\mathcal{N}^{\perp}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^*$, $\mathcal{T}_s^r$ et Λ^r.

4.1 Quasi-connexions

Définition 4.1.1. *Une quasi-connexion sur la variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$ est la donnée d'un morphisme de préfaisceaux $\mathbb{R}$-bilinéaire $\nabla : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ tel que, pour tout ouvert $\Omega \subseteq M$, toute fonction $f \in \mathcal{N}^{\perp}(\Omega)$ et tous quasi-champs X, Y dans $\mathcal{T}(\Omega)$, nous ayons*

- $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,
- $\nabla_X fY = f \nabla_X Y + (Xf)Y$.

En coordonnées locales sur un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$ sur un ouvert Ω, l'expression d'une quasi-connexion ∇ est donnée pour tous quasi-champs de vecteurs $X = X^i \partial_i x$ et $Y = Y^j \partial_j x$ dans $\mathcal{T}(\Omega)$ par

$$\nabla_X Y = X^i \partial_i x(Y^j) \partial_j x + X^i Y^j \nabla_{\partial_i x} \partial_j x.$$

Une quasi-connexion ∇ induit un morphisme de préfaisceaux sur l'algèbre des quasi-champs tensoriels qu'on note aussi par ∇. En effet, ce morphisme $\nabla : \mathcal{T} \times \mathcal{T}_s^r \to \mathcal{T}_s^r$ est défini pour un ouvert U comme suit :

- pour tout $f \in \mathcal{N}^{\perp}(U)$, $\nabla_X f = X(f)$,

- pour tous $\theta \in \mathcal{T}^*(U)$ et $X, Y \in \mathcal{T}(U)$,

$$(\nabla_X \theta)(Y) = X(\theta(Y)) - \theta(\nabla_X Y),$$

- pour tout $T \in \mathcal{T}^r_s(U)$, pour tous les 1-quasi-formes $\theta^1, \dots, \theta^r \in \mathcal{T}^*(U)$ et pour tous les quasi-champ de vecteurs $Y_1, \dots, Y_s \in \mathcal{T}(U)$,

$$\begin{aligned}(\nabla_X T)(\theta^1, \dots, \theta^r, Y_1, \dots, Y_s) = {} & X(T(\theta^1, \dots, \theta^r, Y_1, \dots, Y_s)) \\ & - T(\nabla_X \theta^1, \dots, \theta^r, Y_1, \dots, Y_s) \\ & - \cdots - T(\theta^1, \dots, \theta^r, Y_1, \dots, \nabla_X Y_s).\end{aligned}$$

De plus, la quasi-connexion ∇ induit un morphisme de préfaisceaux de $\mathcal{T}^r_s$ dans $\mathcal{T}^r_{s+1}$, noté aussi par ∇ tel que pour un ouvert U quelconque, pour tout $T \in \mathcal{T}^r_s(U)$, pour toutes les 1-quasi-formes $\theta^1, \dots, \theta^r$ dans $\mathcal{T}^*(U)$ et pour tous les quasi-champ de vecteurs $Y_1, \dots, Y_{s+1}$ dans $\mathcal{T}(U)$, nous ayons

$$\nabla T(\theta^1, \dots, \theta^r, Y_1, \dots, Y_{s+1}) = \nabla_{Y_{s+1}} T(\theta^1, \dots, \theta^r, Y_1, \dots, Y_s).$$

4.2 Symboles de Christoffel

Définition 4.2.1. *Pour un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$ sur un ouvert Ω, les symboles de Christoffel d'une quasi-connexion ∇ sont les fonctions :*

$$\Gamma^k_{ij} = \delta x^k (\nabla_{\partial_i x} \partial_j x) \text{ pour } 1 \leq i, j, k \leq m - n.$$

Evidemment les fonctions Γ^k_{ij} sont dans $\mathcal{N}^\perp(\Omega)$. De plus, si $\Gamma^\eta_{\alpha\beta}$ sont les symboles de Christoffel de la quasi-connexion ∇ sur un second système de coordonnées de Frobénius $\{y^\alpha\}_{\alpha=1}^m$, alors d'après le lemme 3.2.1 et la régle de transformation (1.1), on a

$$\Gamma^\alpha_{\beta\eta} = \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^k}{\partial y^\eta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \Gamma^i_{jk} + \frac{\partial^2 x^s}{\partial y^\eta \partial y^\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^s}. \tag{4.1}$$

Une quasi-connexion ∇ induit naturellement une connexion linéaire $\overline{\nabla}$ sur le fibré quotient canonique $\overline{TM}$. En effet, pour un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$, on pose

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \begin{cases} \Gamma^i_{jk} & \text{pour } 1 \leq i, j, k \leq m - n, \\ 0 & \text{pour } 1 \leq i, k \leq m - n \text{ et } m - n + 1 \leq j \leq m. \end{cases}$$

En utilisant (3.1) et la régle de transformations (4.1), on obtient que ces fonctions obéissent à la régle de transformation

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\eta} = \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial x^k}{\partial y^\eta}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\overline{\Gamma}^i_{jk} + \frac{\partial^2 x^s}{\partial y^\eta \partial y^\beta}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^s} \text{ pour } 1 \leq \alpha, \eta \leq m-n \text{ et } 1 \leq \beta \leq m.$$

Par conséquent, il existe une unique connexion linéaire $\overline{\nabla}$ sur $\overline{TM}$ telle que, pour tout système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$, nous ayons

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \overline{\frac{\partial}{\partial x^j}} = \sum_{k=1}^{m-n} \overline{\Gamma}^k_{ij} \overline{\frac{\partial}{\partial x^k}} \text{ pour } 1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq m-n.$$

4.3 Torsion d'une quasi-connexion

Définition 4.3.1. *La torsion d'une quasi-connexion ∇ est le morphisme de pré-faisceaux $\mathcal{N}^\perp$-bilinéaire et antisymétrique $T^\nabla : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ tel que pour tout ouvert $U \subseteq M$ et tous quasi-champs de vecteurs X, Y dans $\mathcal{T}(U)$, nous ayons*

$$T^\nabla(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

La torsion T^∇ de ∇ peut être considérée comme un quasi-champ tensoriel de type $(1,2)$. Lorsque $T^\nabla \equiv 0$, la quasi-connexion ∇ est dite *symétrique*.

En coordonnées locales sur un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$ sur un ouvert Ω, et pour les quasi-champs de vecteurs $X = X^i\partial_i x$, $Y = Y^j\partial_j x$ dans $\mathcal{T}(\Omega)$, nous avons

$$T^\nabla(X,Y) = X^i Y^j T^k_{ij}\partial_k x \text{ avec } T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji},$$

où Γ^k_{ij} sont les symboles de Christoffel de la quasi-connexion ∇.

4.4 Courbure d'une quasi-connexion

Définition 4.4.1. *La courbure d'une quasi-connexion ∇ est le morphisme de pré-faisceaux $\mathcal{N}^\perp$-trilinéaire $R^\nabla : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ tel que pour tout ouvert $U \subseteq M$ et tous quasi-champs de vecteurs X, Y et Z dans $\mathcal{T}(U)$, nous ayons*

$$R^\nabla(X,Y,Z) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

La courbure d'une quasi-connexion peut être considérée comme un quasi-champ tensoriel de type $(1,3)$ qui est antisymétrique par rapport à (X,Y).

En coordonnées locales sur un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$ sur un ouvert Ω, et pour tous quasi-champs de vecteurs $X = X^i\partial_i x$, $Y = Y^j\partial_j x$ et $Z = Z^l\partial_l x$ dans $\mathcal{T}(\Omega)$, nous avons

$$R^{\nabla}(X,Y,Z) = R^k_{ijl}\partial_k x,$$

tel que

$$R^k_{ijl} = \sum_{r=1}^{m-n} \partial_i x(\Gamma^k_{jl}) - \partial_j x(\Gamma^k_{il}) + \Gamma^r_{jl}\Gamma^k_{ir} - \Gamma^r_{il}\Gamma^k_{jr}. \tag{4.2}$$

Ainsi, comme pour une connexion affine, le quasi-champ tensoriel de Ricci est défini par la contraction des indices. En effet, sur un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$ sur un ouvert Ω, le quasi-champ tensoriel de Ricci est donné pour tous quasi-champs de vecteurs X et Y dans $\mathcal{T}(\Omega)$, par

$$Ricc(X,Y) = C^1_2(R^{\nabla})(X,Y) = \delta x^i(R^{\nabla}(X,\partial_i x, Y)).$$

Maintenant, soient $(\Omega, \{x^i\}_{i=1}^m, \Omega' \times \Omega'')$ une décomposition de Frobénius et $\{\Gamma^k_{ij}\}_{i,j,k=1}^{m-n}$ les symboles de Christoffel de la quasi-connexion ∇ sur Ω. Ces symboles définissent une connexion affine sur Ω' qui est notée $I\nabla$. En effet, il suffit de posé $(I\nabla)_{e_i}e_j = I^0_0(\Gamma^k_{ij})e_k$ et nous avons le lemme suivant :

Lemme 4.4.1. *La connexion affine $I\nabla$ vérifie pour tout quasi-champ tensoriel H dans $\mathcal{T}^r_s(\Omega)$ et pour tout quasi-champ de vecteurs X dans $\mathcal{T}(\Omega)$ l'identitée suivante :*

$$I^r_s(\nabla_X H) = (I\nabla)_{I^1_0(X)}(I^r_s(H)). \tag{4.3}$$

Démonstration.
Soient $\theta^1, \ldots, \theta^r$ des 1-quasi-formes dans $\mathcal{T}^*(\Omega)$ et $Y_1, \ldots, Y_s$ des quasi-champs de vecteurs dans $\mathcal{T}(\Omega)$. On applique $I^r_s(\nabla_X H)$ à $(I^0_1(\theta^1), \ldots, I^0_1(\theta^r), I^1_0(Y_1), \ldots, I^1_0(Y_s))$ et on voit que c'est égale à l'expression du champ tensoriel $(I\nabla)_{I^1_0(X)}(I^r_s(H))$ appliqué à $(I^0_1(\theta^1), \ldots, I^0_1(\theta^r), I^1_0(Y_1), \ldots, I^1_0(Y_s))$. □

Ainsi, si T^{∇}, R^{∇} et $Ricc$ sont respectivement la torsion, la courbure et le quasi-champ tensoriel de Ricci de ∇, alors les formules (3.3) et (3.4) impliques que $I^1_2(T^{\nabla}), I^1_3(R^{\nabla}), I^0_2(Ricc)$ sont respectivement la torsion, la courbure et le tenseur de Ricci de $I\nabla$.

Pour formuler les identités de Bianchi on définit la notation somme cyclique $\mathcal{S}$ d'une expréssion $A(X,Y,Z)$ par

$$\mathcal{S}\{A(X,Y,Z)\} = A(X,Y,Z) + A(Y,Z,X) + A(Z,X,Y).$$

Soient ∇ une quasi-connexion sur la variété feuilletée $(M,\mathcal{N})$ et U un sous-ensemble ouvert quelconque de M.

Proposition 4.4.1. *Pour tous quasi-champs de vecteurs X, Y, Z et W dans $\mathcal{T}(U)$, nous avons les identités de Bianchi*

- $\mathcal{S}\{R^{\nabla}(X,Y,Z)\} = \mathcal{S}\{\nabla_X T^{\nabla}(Y,Z)\} + \mathcal{S}\{T^{\nabla}(T^{\nabla}(X,Y),Z)\}$,
- $\mathcal{S}\{(\nabla_Z R^{\nabla})(X,Y,W)\} + \mathcal{S}\{R^{\nabla}(T^{\nabla}(X,Y),Z,W)\} = 0$.

Démonstration.
Les identités de Bianchi sont vérifiées par une connexion affine quelconque (voir par exemple [16] page 244). Donc, en utilisant les isomorphismes miroirs I^r_s, nos deux formules sont vraie sur un système de coordonnées de Frobénius, et on conclut par la condition de localisation des faisceaux. □

4.5 Quasi-connexion de Levi-Civita

Maintenant, soit g^* un quasi-champ tensoriel de type $(0,2)$ sur la variété feuilletée $(M,\mathcal{N})$. On suppose que g^* est symétrique, i.e. $g^*(X,Y) \equiv g^*(Y,X)$. De manière naturelle, ce quasi-champ tensoriel g^* implique l'existence d'un morphisme de préfaisceaux $\flat : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^*$ défini comme suit : soient $U \subseteq M$ un ouvert et $X \in \mathcal{T}(U)$. On défini $\flat(X) \in \mathcal{T}^*(U)$ en posant pour un sous-ensemble ouvert quelconque $V \subseteq U$, et tout $Y \in \mathcal{T}(V)$,

$$\langle \flat(X), Y\rangle = g^*(X|_V, Y).$$

Définition 4.5.1. *Lorsque $\flat$ est un isomorphisme, le triplet $(M,\mathcal{N},g^*)$ est appelé variété quasi-riemannienne feuilletées.*

Le théorème de Levi-Civita est donné dans le cadre d'une structure semi-riemannienne sur une variété différentiable. Nous donnons ci-dessous un énoncé analogue à ce thèorème dans le cadre d'une variété quasi-riemannienne feuilletée.

Théorème 4.5.1. *Pour une variété quasi-riemannienne feuilletées $(M,\mathcal{N},g^*)$, il existe une unique quasi-connexion symétrique ∇, telle que $\nabla g^* = 0$.*

Démonstration.
En fait, c'est une simple adaptation du théorème classique de Levi-Civita. L'unicité provient du fait que ∇ doit vérifier l'identité

$$g^*(\nabla_X Y, Z) = \mathcal{K}(X,Y,Z), \tag{4.4}$$

où

$$\begin{aligned} 2\mathcal{K}(X,Y,Z) = Xg^*(Y,Z) + Yg^*(Z,X) - Zg^*(X,Y) - g^*(X,[Y,Z]) \\ + g^*(Y,[Z,X]) + g^*(Z,[X,Y]). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Pour l'existence, on démarre de la forme de Koszul $\mathcal{K}(X,Y,Z)$ qui est stable par restriction. En utilisant la formule de Leibniz (3.2), on obtient les identités suivantes :

$$\text{i) } \mathcal{K}(X,Y,fZ) = f\mathcal{K}(X,Y,Z),$$
$$\text{ii) } \mathcal{K}(fX,Y,Z) = f\mathcal{K}(X,Y,Z),$$
$$\text{iii) } \mathcal{K}(X,fY,Z) = f\mathcal{K}(X,Y,Z) + g^*((Xf)Y,Z),$$

pour un ouvert quelconque $U \subseteq M$, toute fonction $f \in \mathcal{N}^\perp(U)$, et tout quasi-champs $X,Y,Z \in \mathcal{T}(U)$. Etant donnée deux sections $X,Y \in \mathcal{T}(U)$, l'identité $i)$ détermine une unique section $\nabla_X Y \in \mathcal{T}(U)$ qui satisfait (4.4). Pour finir, en faisant usage de $ii)$, $iii)$ et de la compatibilité de la forme $\mathcal{K}$ avec les restrictions, on obtient que ∇ est une quasi-connexion sur $(M,\mathcal{N})$. □

Définition 4.5.2. *La quasi-connexion donnée par le théorème précedent est appelée quasi-connexion de Levi-Civita de g^*, et elle est notée par $\nabla(g^*)$.*

On considère maintenant une décomposition de Frobénius $(\Omega, \{x^i\}_{i=1}^m, \Omega' \times \Omega'')$. Dans la base $\{\partial_i x\}_{i=1}^{m-n}$, le quasi-champ tensoriel g^* est représenté par une matrice inversible dont ses coefficients $(g_{ij})_{i,j=1}^{m-n}$ appartiennent à $\mathcal{N}^\perp(\Omega)$. Son inverse est notée par (g^{ij}). Comme pour une variété semi-riemannienne, les symboles de Christoffel de $\nabla(g^*)$ sont donnés par

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} [\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}]. \tag{4.6}$$

De plus, soit I_2^0 l'isomorphisme miroir de type $(0,2)$ associé à cette décomposition de Frobénius. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^{m-n}$, le champ tensoriel $I_2^0(g^*)$ est représenté par une matrice qu'on note $I(g_{ij})$ donnée par les coéfficients $(I_0^0(g_{ij}))_{i,j=1}^{m-n}$. Par conséquent, $I_2^0(g^*)$ est une métrique semi-riemannienne sur la variété Ω', et le résultat ci-dessous paraît naturel.

Proposition 4.5.1. *$I\nabla(g^*)$ est exactement la connexion de Levi-Civita de la variété semi-riemannienne $(\Omega', I_2^0(g^*))$.*

Démonstration. Il est clair que $I\nabla(g^*)$ est symétrique, après on applique la formule (4.3). □

Grâce à la proposition précedente, beaucoup de résultats locaux de la géométrie semi-riemannienne peuvent être réecrits dans le cas d'une variété quasi-riemannienne feuilletée. En effet, on a les deux propositions suivantes :

Proposition 4.5.2. ***(Schur)*** *Soient $(M,\mathcal{N},g^*)$ une variété quasi-riemannienne feuilletée et Ricc le quasi-champ tensoriel de Ricci de $\nabla(g^*)$. On suppose que M*

est connexe et $m-n>2$. S'il existe une fonction λ telle que $Ricc=\lambda g^*$, alors λ est constante.

Démonstration.
On va se restreindre à la décomposition de Frobénius $(\Omega, \{x^i\}_{i=1}^m, \Omega'\times\Omega'')$. Il est clair que la fonction λ est dans $\mathcal{N}^\perp(\Omega)$. Ainsi, $\lambda(p)=I_0^0(\lambda)(p')$, où $p'=x'(p)$ avec $x'=(x^1,\dots,x^{m-n})$. Evidemment, nous avons $I_2^0(Ricc)=I_0^0(\lambda)I_2^0(g^*)$. Ensuite dans la variété semi-riemannienne $(\Omega', I_2^0(g^*))$, on applique le lemme de Schur et on obtient que $I_0^0(\lambda)$ est constante. □

Proposition 4.5.3. ***(Test Theorem)*** *Soit $(M,\mathcal{N},g^*)$ une variété quasi-riemannienne feuilletée. On suppose que la courbure R de $\nabla(g^*)$ est identiquement nulle. Alors, en chaque point p de M, il existe un système de coordonnées de Frobénius sur un voisinage ouvert de p, tel que g^* est représenté par une matrice constante.*

Démonstration.
On considère une décomposition de Frobénius $(\Omega, x=\{x^i\}_{i=1}^m, \Omega'\times\Omega'')$ telle que $p\in\Omega$. La variété semi-riemannienne $(\Omega', I_2^0(g^*))$ est de courbure nulle car sa courbure est $I_3^1(R)$. Alors quitte à réduire le domaine, il existe un système de coordonnées $\{y^i\}_{i=1}^{m-n}$ sur Ω' où la métrique semi-riemannienne $I_2^0(g^*)$ est représentée par une matrice constante. La carte $(\Omega, \{y^i\circ x\}_{i=1}^{m-n}, x^{m-n+1},\dots,x^m)$ convient. □

Le théorème ci-dessous fournit un lien vers [10, 11].

Théorème 4.5.2. *Soient $(M,\mathcal{N},g^*)$ une variété quasi-riemannienne feuilletée, $\overline{g}$ le champ tensoriel induit sur $\overline{TM}$ par g^* et $\overline{\nabla}$ la connexion linéaire sur $\overline{TM}$ induite par $\nabla(g^*)$. Alors $\overline{\nabla}$ est l'unique connexion linéaire Δ sur $\overline{TM}$ telle que pour tout champs de vecteurs X,Y et Z dans $\Gamma(TM)$, nous ayons*

- $\Delta_X\overline{\Pi}(Y)-\Delta_Y\overline{\Pi}(X)-\overline{\Pi}([X,Y])=0,$
- $Z\overline{g}(\overline{\Pi}(X),\overline{\Pi}(Y))-\overline{g}(\Delta_Z\overline{\Pi}(X),\overline{\Pi}(Y))-\overline{g}(\overline{\Pi}(X),\Delta_Z\overline{\Pi}(Y))=0.$

Démonstration.
Soit Δ une connexion linéaire sur $\overline{TM}$ qui satisfait les deux conditions ci-dessus. On considère ses symboles de Christoffel δ_{ij}^k définis sur un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$ par $\Delta_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\overline{\frac{\partial}{\partial x^j}}=\delta_{ij}^k\overline{\frac{\partial}{\partial x^k}}$. Un calcul classique et la formule (4.6) conduisent à $\delta_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k$ lorsque $1\le i,j,k\le m-n$. Maintenant pour $i>m-n$ et $j\le m-n$, nous avons $0=\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i}=2\delta_{ij}^k g_{jk}$. Il s'ensuit que $\delta_{ij}^k=0$ pour $1\le j,k\le m-n$ et $i>m-n$. Alors on obtient que $\Delta=\overline{\nabla}$. Ainsi, nous avons seulement à vérifier que $\overline{\nabla}$ satisfait les conditions du théorème. Par la $C^\infty(M)$-multilinéarité par rapport à X,Y et Z nous pouvons nous restreindre à la base induite par le système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$. On pose $X=\frac{\partial}{\partial x^i}, Y=\frac{\partial}{\partial x^j}$, et $Z=\frac{\partial}{\partial x^k}$ avec $1\le i,j\le m-n, 1\le k\le m$. La première formule découle de

la symétrie de $\nabla(g^*)(\Gamma^s_{ij} = \Gamma^s_{ji})$. La seconde formule est évidente dans le cas où $k > m - n$. Lorsque $i, j, k \leq m - n$, on utilise $\overline{\nabla} g^* = 0$. $\square$

4.6 Structures quasi-complexes sur une variété feuilletée

Soit $(M, \mathcal{N}, g^*)$ une variété quasi-riemannienne feuilletée.

Définition 4.6.1. *Une structure quasi-complexe sur le triplet $(M, \mathcal{N}, g^*)$ est la donnée d'un morphisme de préfaisceaux $J^* : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ telle que $J^* \circ J^* = -\mathrm{id}$ et $g^*(X, Y) \equiv g^*(J^*X, J^*Y)$.*

La 2-quasi-forme différentielle associée à la structure quasi-complexe J^* est donnée par $\omega^*(X, Y) = g^*(X, J^*Y)$, et pour une quasi-connexion ∇ la quasi-connexion induite ∇J^* est définie en posant

$$(\nabla_X J^*)Y = \nabla_X(J^*Y) - J^*(\nabla_X Y).$$

Proposition 4.6.1. *Soient J^* une structure quasi-complexe sur $(M, \mathcal{N}, g^*)$, ω^* sa 2-quasi-forme différentielle associée et $\nabla(g^*)$ la quasi-connexion de Levi-Civita de g^*. Alors $\delta\omega^* = 0$ si et seulement si $\nabla_X J^* \equiv 0$.*

Démonstration.
Sur une décomposition de Frobénius $(\Omega, \{x^i\}_{i=1}^m, \Omega' \times \Omega'')$, on pose $g' = I^0_2(g^*)$, $J' = I^1_0 \circ J^* \circ (I^1_0)^{-1}$, $\nabla' = I\nabla$ et $\omega' = I^0_2(\omega^*)$. Il est clair que J' est une structure presque complexe sur Ω', orthogonale par rapport à g' et nous avons l'indentité $\omega'(X, Y) \equiv g'(X, J'Y)$, où X, Y sont des champs de vecteurs dans Ω'. L'équivalence $\nabla' J' = 0 \Leftrightarrow \nabla J = 0$ est une conséquence de la formule (4.3). Pour finir, on utilise l'identité (3.5) et l'équivalence $\nabla' J' = 0 \Leftrightarrow d\omega' = 0$. $\square$

5. QUASI-CONNEXIONS SUR UNE VARIÉTÉS SEMI-RIEMANNIENNES STATIONNAIRES

Sommaire

5.1 *Structure quasi-riemannienne feuilletée induite*

Dans tout ce qui suit, la variété M est munie d'une métrique dégénérée g de signature (n_0, n_-, n_+). On suppose que (M, g) est une variété semi-riemannienne stationnaire et on note $\mathcal{N}$ le radical g. D'après le corollaire 2.3.1, le champ de plans $\mathcal{N}$ est intégrable et donc le couple $(M, \mathcal{N})$ est une variété feuilletée. Cette variété feuilletée est munie des faisceaux $\mathcal{N}^\perp$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^*$, $\mathcal{T}^r_s$ et Λ^r.

Dans un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$ la métrique g est représentée par une matrice (g_{ij}) de rang $m - n_0$ qui satisfait les deux conditions suivantes :

1. $g_{ij} = 0$ pour $\max(i, j) > m - n_0$,
2. $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$ pour $k > m - n_0$.

La matrice $(g_{ij})_{i,j \leq m-n_0}$ est inversible et on note $(g^{ij})_{i,j \leq m-n_0}$ son inverse.

Lemme 5.1.1. *Soit U un ouvert de M. Alors pour X, Y dans $\mathcal{H}(U)$, les fonctions $g(X, Y)$ sont dans $\mathcal{N}^\perp(U)$. Inversement si ξ est un champ de vecteurs sur U tel que pour tout ouvert $W \subseteq U$ et tout $Y \in \mathcal{H}(W)$, la fonction $g(\xi_{|W}, Y)$ est dans $\mathcal{N}^\perp(W)$, alors ξ est dans $\mathcal{H}(U)$.*

Démonstration.
Pour $u \in U$ et $\xi \in \mathcal{N}_u$, on choisit $Z \in \Gamma(U, \mathcal{N})$ tel que $Z_u = \xi$. Il est clair que nous avons $(\xi g(X, Y))(u) = [Zg(X, Y)](u)$. Mais d'après la stationnarité de g, nous avons $Zg(X, Y) = g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]) = 0$, puisque $[Z, X]$ et $[Z, Y]$ sont dans $\Gamma(U, \mathcal{N})$ d'après la proposition 3.1.6.

Pour la seconde assertion, soit $W \subseteq U$ un domaine d'un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$. Le champ de vecteurs $\xi_{|W}$ s'écrit $\xi_{|W} = \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k}$. Les fonctions

$\{\xi^k\}_{k=1}^{m-n_0}$ satisfont la condition

$$g_{jk}\xi^k \in \mathcal{N}^\perp(W) \text{ pour } j \leq m - n_0.$$

Puisque les coefficients g^{ij} sont aussi dans $\mathcal{N}^\perp(W)$, on obtient que $\xi^k \in \mathcal{N}^\perp(W)$ pour $k \leq m - n_0$ et pour finir on fait usage du lemme 3.1.2. □

Ainsi, la métrique g induit un quasi-champ tensoriel g^* de type $(0,2)$ sur la variété feuilletée $(M, \mathcal{N})$. On verra plus loin que le triplet $(M, \mathcal{N}, g^*)$ est une variété quasi-riemannienne feuilletée et pour cela on a d'abord besoin du lemme suivant :

Lemme 5.1.2. *Soit $\{x^i\}_{i=1}^m$ un système de coordonnées de Frobénius sur un ouvert Ω. Pour toute forme $\mathcal{N}^\perp(\Omega)$-linéaire θ sur $\mathcal{H}(\Omega)$ qui s'annulle sur $\Gamma(\Omega, \mathcal{N})$ il existe une section $X \in \mathcal{H}(\Omega)$ unique modulo $\Gamma(\Omega, \mathcal{N})$ telle que*

$$\forall Y \in \mathcal{H}(\Omega), \theta(Y) = g(X, Y).$$

Démonstration.
On considère le champ de vecteurs $X = \sum_{i,j=1}^{m-n_0} g^{ij}\theta(\frac{\partial}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^j}$. Il est clair que les coordonnées de X sont dans $\mathcal{N}^\perp(\Omega)$ et ainsi d'après le lemme 3.1.2, $X \in \mathcal{H}(\Omega)$. Maintenant pour $Y = Y^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{H}(\Omega)$, on trouve $g(X, Y) = \sum_{i \leq m-n_0} Y^i\theta(\frac{\partial}{\partial x^i})$. Lorsque $\theta(\frac{\partial}{\partial x^i}) = 0$ pour $i > m - n_0$, la somme est exactement $\theta(Y)$. Maintenant, si un élément $Z = Z^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{H}(\Omega)$ satisfait l'identité $g(Z, Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors d'après la forme de la matrice (g_{ij}) on déduit que $Z^k = 0$ pour $k \leq m - n_0$, ce qui veut dire que $Z \in \Gamma(\Omega, \mathcal{N})$. □

Maintenant, soit $\flat : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^*$ le morphisme de préfaisceaux induit par g^* qu'on a vu dans la section 4.5. On va voir que le morphisme g^* est non-dégénéré au sens défini ci-dessous.

Proposition 5.1.1. *Le morphisme de préfaisceaux $\flat : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^*$ est un isomorphisme.*

Démonstration.
Pour l'injectivité, on considère le quasi-champ de vecteurs $X = \{(U_i, X_i)\}_{i\in I} \in \mathcal{T}(U)$ tel que $\flat(X) = 0$. Cette hypothèse implique que $g(X_i, Y) = 0$ pour tout indice $i \in I$ et tout $Y \in \mathcal{T}(U_i)$. D'après le lemme précedent pour tout indice i, $X_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{N})$, et ainsi $X = 0$.

Pour la surjectivité, on considère un recouvrement de U par des domaines de systèmes de coordonnées de Frobénius $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ et on pose $N(I) = \{(i,j) \in I^2 \mid \Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset\}$. D'après la définition du faisceau dual $\mathcal{T}^*$, une forme $\theta \in \mathcal{T}^*(U)$ nous donne

- pour tout $i \in I$, une forme $\overline{\theta}^i$ $\mathcal{N}^\perp(\Omega_i)$-linéaire sur $\mathcal{T}(\Omega_i)$,

- pour tout $(i,j) \in N(I)$, une forme $\overline{\theta}^{ij}$ $\mathcal{N}^{\perp}(\Omega_i \cap \Omega_j)$-linéaire sur $\mathcal{T}(\Omega_i \cap \Omega_j)$ tel que

$$\forall (i,j) \in N(I), \forall X \in \mathcal{T}(\Omega_i), \overline{\theta}^{ij}(X_{|\Omega_i \cap \Omega_j}) = [\overline{\theta}^{i}(X)]_{|\Omega_i \cap \Omega_j}.$$

Après, on pose $\theta^i = \overline{\theta}^i \circ in \circ pr$ et $\theta^{ij} = \overline{\theta}^{ij} \circ in \circ pr$. Bien sur, nous avons

$$\forall (i,j) \in N(I), \forall Y \in \mathcal{H}(\Omega_i), \theta^{ij}(Y_{|\Omega_i \cap \Omega_j}) = [\theta^{i}(Y)]_{|\Omega_i \cap \Omega_j}.$$

Le lemme 5.1.2 nous procure deux quasi-champs de vecteurs $X_i \in \mathcal{H}(\Omega_i)$ et $X_{ij} \in \mathcal{H}(\Omega_i \cap \Omega_j)$ tels que

$$\forall Y \in \mathcal{H}(\Omega_i), g(X_i, Y) = \theta^i(Y) \text{ et } \forall Z \in \mathcal{H}(\Omega_i \cap \Omega_j), g(X_{ij}, Z) = \theta^{ij}(Z).$$

Maintenant, on va voir que la famille $\{X_i\}_{i \in I}$ détermine une section $X \in \mathcal{T}(U)$ telle que $\flat(X) = \theta$. Pour cela, on considère le couple $(i,j) \in N(I)$ et un système de coordonnées de Frobénius $\{x^i\}_{i=1}^m$ sur Ω_i. Pour un indice s, on écrit successivement

$$\begin{aligned} g(X_{ij}, \frac{\partial}{\partial x^s} \,|_{\Omega_i \cap \Omega_j}) = \theta^{ij}(\frac{\partial}{\partial x^s} \,|_{\Omega_i \cap \Omega_j}) &= [\theta^{i}(\frac{\partial}{\partial x^s})]_{|\Omega_i \cap \Omega_j} \\ &= [g(X_i, \frac{\partial}{\partial x^s})]_{|\Omega_i \cap \Omega_j} = g(X_{i|\Omega_i \cap \Omega_j}, \frac{\partial}{\partial x^s} \,|_{\Omega_i \cap \Omega_j}). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\forall Y \in \mathcal{H}(\Omega_i \cap \Omega_j), g(X_{i|\Omega_i \cap \Omega_j}, Y) = g(X_{ij}, Y),$$

et donc $X_{i|\Omega_i \cap \Omega_j} - X_{ij} \in \Gamma(\Omega_i \cap \Omega_j, \mathcal{N})$. Il est clair qu'on a aussi $X_{j|\Omega_i \cap \Omega_j} - X_{ij} \in \Gamma(\Omega_i \cap \Omega_j, \mathcal{N})$. Après sommation, la condition de recollement $X_{i|\Omega_i \cap \Omega_j} - X_{j|\Omega_i \cap \Omega_j} \in \Gamma(\Omega_i \cap \Omega_j, \mathcal{N})$ est obtenue.

Pour finir on vérifie que le quasi-champ de vecteurs $X = \{(\Omega_i, X_i)\}_{i \in I}$ est approprié. Pour un indice i, on considère un système de coordonnées de Frobénius $\{x^s\}_{s=1}^m$ sur Ω_i. Soit $V \subseteq \Omega_i$ un ouvert, et soit $\overline{\theta}^V$ la forme définie sur $\mathcal{T}(V)$ par θ. Pour un indice s, nous avons

$$\overline{\theta}^V(\partial_s x_{|V}) = [\overline{\theta}^i(\partial_s x)]_{|V} = [\theta^i(\frac{\partial}{\partial x^s})]_{|V} = [g(X_i, \frac{\partial}{\partial x^s})]_{|V} = g^*(X_{|V}, \partial_s x_{|V}).$$

Ceci prouve que

$$\forall i \in I, [\flat(X)]_{|\Omega_i} = \theta_{|\Omega_i},$$

et on conclue par la condition de localisation des faisceaux. □

Ainsi, toute variété semi-riemannienne stationnaire posséde une structure naturelle de variété quasi-riemannienne feuilletée, et donc tous les résultats obtenus dans le chapitre 4 sont valables et nous avons :

Corollaire 5.1.1. *Soient* (M, g) *une variété semi-riemannienne stationnaire et* g^* *le quasi-champ tensoriel de type* $(0,2)$ *induit par* g*. Alors il existe une unique quasi-connexion symétrique* ∇*, telle que* $\nabla g^* = 0$*.*

Démonstration. Découle directement de la proposition 4.5.1. □

Corollaire 5.1.2. *Soient* (M, g) *une variété semi-riemannienne stationnaire,* g^* *le quasi-champ tensoriel de type* $(0,2)$ *induit par* g *et Ricc le quasi-champ tensoriel de Ricci induit par la quasi-connexion de Levi-Civita. On suppose que* M *est connexe et* $m - n > 2$*. S'il existe une fonction* λ *telle que* $Ricc = \lambda g^*$*, alors* λ *est constante.*

Démonstration. Découle directement de la proposition 4.5.2. □

Corollaire 5.1.3. *Soient* (M, g) *une variété semi-riemannienne stationnaire,* $\overline{g}$ *le champ tensoriel induit sur* $\overline{TM}$ *par* g *et* $\overline{\nabla}$ *la connexion linéaire sur* $\overline{TM}$ *induite par la quasi-connexion de Levi-Civita* ∇*. Alors* $\overline{\nabla}$ *est la connexion de Koszul.*

Démonstration. Découle directement du théorème 4.5.2. □

En prime nous avons le théorème suivant :

Théorème 5.1.1. *Soient* (M, g) *une variété semi-riemannienne stationnaire et* g^* *le quasi-champ tensoriel de type* $(0,2)$ *induit par* g*. On note* ∇ *la quasi-connexion de Levi-Civita induite par* g^**, et soit* R *sa courbure.*

- *Si* $R \equiv 0$*, alors au voisinage de chaque point* $p \in M$*, il existe un système de coordonnées* $\{x^k\}_{k=1}^m$ *telle que la matrice* $(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ *est constante.*
- *Si* $\nabla R \equiv 0$*, alors* (M, g) *est localement symétrique.*

Démonstration.
Pour le premier point on applique la proposition 4.5.3 au $(0,2)$ quasi-champ tensoriel g^*. Pour le second point, nous savons qu'une variété semi-riemannienne est localement symétrique (voir [8]) si et seulement si son tenseur de courbure est parallèle par rapport à sa connexion de Levi-Civita. Pour un point $\sigma \in M$ on considère la décomposition de Frobénius $(\Omega, \{x^i\}_{i=1}^m, \Omega' \times \Omega'')$ tels que $\sigma \in \Omega$, et est envoyé à l'origine de $\mathbb{R}^m$. Il est clair que la variété semi-riemannienne $(\Omega', I_2^0(g^*))$ est localement symétrique. Ainsi, quitte à réduire le domaine, on peut supposer que

- $M = \Omega' \times \Omega''$,
- L'origine de $\mathbb{R}^{m-n_0}$ est l'unique point fixe d'une isométrie involutive τ de la variété semi-riemannienne $(\Omega', I_2^0(g^*))$,
- Ω'' est invariant sous la symétrie s autour de l'origine.

La transformation $(x', x'') \in \Omega' \times \Omega'' \rightsquigarrow (\tau(x'), s(x'')) \in \Omega' \times \Omega''$ est une isométrie involutive pour g, et son unique point fixe est l'origine. □

5.2 Structures quasi-complexes

Maintenant, soit J une structure presque complexe sur la variété M, orthogonale par rapport à g. Il est clair que $J(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$. Par conséquent, lorsque $J(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$ (et dans ce cas, l'inclusion est une égalité), J induit une structure quasi-complexe J^* sur $(M, \mathcal{N}, g^*)$. Par ailleurs, ce champ tensoriel J induit aussi une 2-forme différentielle ω sur M définie par $\omega(X,Y) = g(X, JY)$. Evidemment, $\omega(X,Y) = 0$ lorsque X ou Y est une section de $\mathcal{N}$. Suivant [11], on peut dire qu'une structure presque complexe J est stationnaire si $\mathcal{L}_X\omega = 0$ pour toute section X de $\mathcal{N}$.

Lemme 5.2.1. *$J(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$ si et seulement si J est stationnaire.*

Démonstration.
Soit Ω un ouvert de M. Pour $X \in \Gamma(\Omega, \mathcal{N})$ et $Y, Z \in \mathcal{H}(\Omega)$, nous avons

$$\mathcal{L}_X\omega(Y,Z) = X\omega(Y,Z) - \omega([X,Y],Z) - \omega(Y,[X,Z]) = X\omega(Y,Z)$$

$$= Xg(Y,JZ).$$

Supposons que $J(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$. Soient x un point de M et u, v deux vecteurs tangents en x et soit X une section de $\mathcal{N}$ definie sur un voisinage U de x. On considère un voisinage $W \subseteq U$ de x et $Y, Z \in \mathcal{H}(W)$ tels que $Y_x = u$ et $Z_x = v$. On obtient

$$(\mathcal{L}_X\omega)_x(u,v) = [\mathcal{L}_X\omega(Y,Z)](x) = [Xg(Y,JZ)](x) = 0$$

car d'après la première partie du lemme 5.1.1, $Xg(Y,JZ) \equiv 0$. Inversement, on suppose que J est stationnaire et soit $Z \in \mathcal{H}(U)$. Pour un sous-ensemble ouvert quelconque $W \subseteq U$ et toute section $Y \in \mathcal{H}(W)$, la fonction $g(Y, JZ_{|W})$ est dans $\mathcal{N}^{\perp}(W)$. Ainsi, d'après la deuxième partie du lemme 5.1.1, JZ est une section de $\mathcal{H}(U)$. □

Théorème 5.2.1. *Soient (M,g) une variété semi-riemannienne stationnaire et J une structure presque complexe sur M stationnaire et orthogonale par rapport à g. On note J^* la structure quasi-complexe induite par J sur le triplet $(M, \mathcal{N}, g^*)$. Soient ∇ la quasi-connexion de Levi-Civita de g^* et ω la 2-forme différentielle définie sur M par $\omega(X,Y) = g(X,JY)$. Alors $\nabla J^* = 0$ si et seulement si $d\omega = 0$.*

Démonstration.
Soit ω^* la 2-quasi-forme différentielle induite par J^*. L'identité

$$d\omega(X,Y,Z) = \delta\omega^*(in \circ pr(X), in \circ pr(Y), in \circ pr(Z))$$

provient directement des définitions. Alors l'équivalence entre $d\omega = 0$ et $\delta\omega^* = 0$ est immédiate sur un domaine d'un système de coordonnées de Frobénius, et reste uniquement à appliquer la proposition 4.6.1. □

Bibliographie

[1] I. V. Bel'ko. Degenerate Riemannian metrics. Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR. 18(5) : 1046-1049, 1975.

[2] W. M. Boothby. An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry. Academic Press, San Diego, 1986. 2d ed.

[3] C. Camacho and A. Lins Neto. Geometric Theory of Foliations. Birkhäuser, Boston, 1985.

[4] L. Chambadal. et J. L. Ovaert. Algèbre linéaire et algèbre tensorielle. Dunod, Paris, 1968.

[5] A. Chergui and A. Affane. Quasi-connections On Degenerate Semi-Riemannian Manifolds. Mediterranean Journal of Mathematics. (2017) 14 : 101. doi :10.1007/s00009-017-0906-x.

[6] S. S. Chern, W. H. Chern and K. S. Lam. Lectures On Differential Geometry. World Scientific, Singapore, 2000.

[7] R. Godement. Topologie algébrique et Théorie des faisceaux. Hermann, 1958.

[8] S. Kobayashi and K. Nomizu. Foundations of Differential Geometry, Vol. 2. Interscience Publishers, New york, 1969.

[9] S. E. Kozlov. Levi-Civita connections on degenerate pseudo-Riemannian manifolds. Journal of Mathematical Sciences. 104(4) : 1338-1342, 2001.

[10] D. N. Kupeli. Degenerate manifolds. Geometriae Dedicata. 23(3) : 259-290, 1987.

[11] D. N. Kupeli. Singular Semi-Riemannian Geometry. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[12] P. Molino. Riemannian Foliations. Birkhäuser, Boston, 1988.

[13] B. O'Neill. Semi-Riemannian Geometry : With Applications to Relativity. Academic Press, 1983.

[14] A. Pambira. Harmonic Morphisms Between Degenerate Semi-Riemannian Manifolds. Contributions to Algebra and Geometry. 46(1) : 261-281, 2005.

[15] M. Spivak. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1. Publish or Perish Inc, Houston, 1999. 3d ed.

[16] M. Spivak. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 2. Publish or Perish Inc, Houston, 1999. 3d ed.