

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE-ALGER
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



THÈSE

Présentée par

Madame BOUADJENAK née TITRI Chahrazad

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : ANALYSE

Option : Equations aux dérivées partielles.

**MODÉLISATION ET ÉTUDE THÉORIQUE
D'ÉCOULEMENTS DE FLUIDES
PERTURBÉS PAR UN OBSTACLE**

Soutenue publiquement le **23 janvier 2014 à 10 h** à l'**U.S.T.H-B**, devant le jury composé de :

Mr Keddour	LEMRABET	Professeur à l'U.S.T.H-B	Président
Mr Djamel-Eddine	TENIOU	Professeur à l'U.S.T.H-B	Directeur de thèse
Mr Yves	DERMENJIAN	Professeur à l'Université d'Aix Marseille	Examineur
Mr Abdelhafid	MOKRANE	Professeur à l'E.N.S de Kouba	Examineur
Mr Mohamed Said	MOULAY	Professeur à l'U.S.T.H-B	Examineur

Modélisation et étude théorique d'écoulements de fluides perturbés par un obstacle

thèse de Doctorat présentée par

Chahrazad Titri-Bouadjenak

Remerciements

Plusieurs personnes m'ont aidée à réaliser ce travail et je tiens à les en remercier.

Je pense en premier lieu à mon directeur de thèse, Djamel-Eddine Teniou, qui restera pour moi un modèle pour ses méthodes de travail. Il a toujours été disponible pour répondre de façon claire et précise à mes questions et pour guider mes recherches. Je l'en remercie chaleureusement.

Le laboratoire de mathématiques appliquées de l'université d'Aix Marseille m'a accueillie maintes fois pour des courts séjours et je souhaite exprimer ma gratitude tout particulièrement à Assia Benabdallah, qui n'a ménagé aucun effort pour m'aider et m'encourager ainsi qu'à Yves Dermenjian, qui a pris sur son temps pour répondre à mes questions, m'orienter et discuter avec moi à chaque fois que je l'ai sollicité. Yves Dermenjian a également accepté de faire partie du jury et je lui suis de ce fait doublement reconnaissante.

Je remercie Rachida Ait-Yahia Djouadi et Dahbia Hernane Boukari pour ce que nous avons accompli ensemble. Nos multiples séances de collaboration, empreintes de convivialité et de sérieux à la fois, furent le terreau de fructueux travaux mais aussi de liens amicaux.

Keddour Lemrabet me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, il a toute ma gratitude.

Abdelhafid Mokrane a accepté de faire partie du jury, je l'en remercie infiniment.

Mes plus sincères remerciements vont à Mohamed-Saïd Moulay pour l'intérêt qu'il manifeste à mon travail en acceptant de l'examiner et de faire partie du jury.

Mes remerciements s'adressent aussi à mes collègues et amies Isma Bouchemakh, Rabéa Djouadi, Djamila Hamroun, Ferroudja Smadhi et Ouahiba Zaïr, ainsi que tant d'autres (qui me pardonneront de ne pas les citer), qui ne manquaient pas une occasion de me gratifier de la fameuse phrase "interro-exclamative" : - Tu en es où dans ton travail? Tu dois persévérer!

Leurs encouragements et leur amitié me furent précieuses.

Je ne peux oublier de remercier Djamel Smaï pour toutes les discussions que nous avons eues et qui m'ont aidée à appréhender l'aspect physique des problèmes étudiés, ainsi que Tarik Aliziane à qui j'ai fait appel tant de fois pour le traitement de texte et qui a toujours répondu avec sollicitude.

Mes parents, mon mari, ma grand-mère, mon frère et mes soeurs ainsi que mes enfants (personne n'a été épargné!) ont contribué en m'assurant l'équilibre et le bien-être familiaux qui m'ont permis de mener à bien la

laborieuse tâche que représente une thèse. Cette page est l'occasion de leur exprimer mes remerciements. Enfin, à des moments de grand découragement, il s'est toujours trouvé sur mon chemin une personne, collègue, ami, parent ou anonyme croisé occasionnellement pour me rappeler que le chemin du succès est jalonné aussi de faux pas et qu'on ne peut apprendre à marcher sans trébucher ! Un grand merci à tous !

Table des matières

Notations	1
Notations	2
Notations	3
Introduction générale	7
Notations	15
1 Cadre Physique	17
1.1 Les hypothèses et leurs Interprétations	19
1.1.1 Notion de fluide parfait	19
1.1.2 Ecoulement irrotationnel (ou potentiel)	20
1.1.3 Ecoulement bidimensionnel	21
1.1.4 Condition d'incompressibilité	22
1.1.5 Le mouvement stationnaire	22
1.1.6 La condition de glissement	22
1.1.7 Les conditions asymptotiques	23
1.1.8 La tension superficielle	23
1.2 Outils et notations	25
1.2.1 La dérivée particulaire	25
1.2.2 L'équation de Bernoulli	26
2 Outils Mathématiques	29
2.1 Adimensionnement	30
2.1.1 Introduction	30
2.1.2 Description de la technique	30
2.1.3 Application	31
2.1.4 Le nombre de Froude	32
2.2 La Fonction de Green	33
2.2.1 Introduction.	33
2.2.2 Applications.	34
2.2.3 Propriétés.	38
2.3 Les espaces fonctionnels	39
2.3.1 Définitions	39
2.3.2 Propriétés	40

3	Existence and Uniqueness of the Solution of a Supercritical Free Surface Flow Problem over an Obstacle	41
3.1	Position of the problem	44
3.2	Nondimensionalization	45
3.3	Transformation of the domain and the governing equations	46
3.3.1	Governing equations in the fix domain	46
3.3.2	The choice of the spaces	48
3.4	Existence and uniqueness result	49
3.4.1	Differentiability of T with respect to b and γ	49
3.4.2	Calculus of $\frac{\partial T}{\partial \gamma}(0,0).h$	50
3.4.3	Invertibility of $\frac{\partial T}{\partial \gamma}(0,0)$	50
3.4.4	Main result	55
3.5	Conclusion	55
4	Flows of Two Immiscible Fluids over an Obstacle	56
4.1	Introduction	58
4.2	Position of the problem	61
4.2.1	Notations	61
4.2.2	Derivation of the equations	62
4.2.3	Dimensionless equations	63
4.2.4	Equations with the stream function	64
4.2.5	Equations with the perturbation stream function	65
4.2.6	Equations in fixed domains	66
4.3	Resolution	68
4.3.1	The spaces	68
4.3.2	Main result	69
4.3.3	Differentiability of \vec{T} with respect to b and γ_1, γ_2	70
4.3.4	Invertibility of $\frac{\partial \vec{T}}{\partial \gamma}(0,0,0)$	75
4.4	Conclusion	79
4.5	Appendix	80
4.5.1	Theorem	80
4.5.2	Proof of proposition 27	80
4.5.3	Construction of f	84
4.5.4	An example to illustrate the introduction of the functions spaces	85
5	Perspectives	87
5.1	Perspectives à long terme	87
5.2	Perspectives à court terme	87
5.2.1	Problème avec tension superficielle	88
	Conclusion générale	89
	Bibliographie	90
	Index	95

Introduction générale

Les travaux de cette thèse sont consacrés à la modélisation et à l'étude théorique d'écoulements bidimensionnels (ou plans) de fluides parfaits et incompressibles dans un canal. Le domaine où a lieu l'écoulement est délimité d'un côté (le bas) par le fond du canal et de l'autre côté (le haut) par une frontière susceptible de se déformer : la frontière libre.

L'expression "frontière libre" ou "surface libre" désigne une surface de séparation entre deux fluides (en général, le second fluide est l'air). Une telle frontière doit son appellation au fait qu'elle est assujettie à des variations sous l'effet de diverses perturbations. Lorsqu'on considère deux fluides immiscibles superposés (en plus de l'air), on désigne par le terme "interface" la surface de séparation entre les deux fluides.

Le fond du canal est supposé plat partout sauf sur une partie bornée où la présence d'un obstacle induit une perturbation de la frontière libre.

Il s'agit d'un sujet qui fait partie du vaste domaine des ondes de surface des problèmes à frontière libre ; un domaine qui a suscité l'intérêt des scientifiques en général et des mathématiciens en particulier depuis fort longtemps.

J.J. Stoker [1] attribue à J.L. Lagrange (1736-1813) les premiers pas de la théorie des ondes de surface et il cite dans son introduction de [1] les mathématiciens les plus célèbres qui se sont penchés sur le sujet depuis Lagrange jusqu'à la première moitié du XX^e siècle, en précisant que de nombreux problèmes ont été formulés pendant la seconde guerre mondiale.

Dans les années 70, H. Brezis et G. Duvaut [2], H. Brezis et G. Stampacchia [3], H. Brezis et D. Kinderlehrer [4] ainsi que L.A. Caffarelli [5], à l'instar d'autres auteurs cités dans leurs références bibliographiques, ont développé de nombreux travaux sur les écoulements à frontière libre avec obstacle, basés sur la théorie des inégalités variationnelles. Cette théorie, que nous ne faisons que citer dans cette introduction, pourrait constituer une perspective puisque notre approche du problème étudié est différente.

Dans la préface du recueil des exposés du symposium interdisciplinaire [6], qui a eu lieu à Montecatini (Italie) le 17 juin 1981, A. Fasano et M. Primicerio citent plusieurs rencontres scientifiques internationales depuis 1974 sur les problèmes à frontières libres.

En fait, le problème à frontière libre dans le cas de l'écoulement avec un obstacle dans un canal a connu un essor particulier depuis les années quatre-vingt comme en témoignent les articles cités dans la bibliographie de cette thèse. Plusieurs auteurs s'y sont intéressés en considérant tantôt un obstacle sur la frontière libre, tantôt un obstacle autour duquel a lieu l'écoulement, ou encore, un obstacle se trouvant au fond du canal, qui est le cas des problèmes que nous avons abordés et nous allons citer quelques auteurs qui nous ont particulièrement inspirés.

Pagani et Pierotti ont considéré un cylindre qui flotte sur la frontière libre

dans [7] et [8]. Ces mêmes auteurs ont travaillé également sur le cas d'un obstacle assimilé à un cylindre immergé dans le fluide, mais qui ne touche pas le fond du canal dans [9].

Quant au cas d'un obstacle se trouvant au fond du canal, R. Ait-Yahia, D. Boukari et D. Teniou ont établi des résultats d'existence et d'unicité de la frontière libre dans [10], [11] et [12] mais également des résultats d'identifiabilité dans [13]. De plus, en utilisant la méthode de l'hodographe dans [11], ils ont obtenu un résultat d'existence et d'unicité où la régularité requise pour la fonction qui représente le fond du canal est C^1 , mais à travers des discussions que nous avons eues, il s'est avéré que les résultats de [11] pourraient s'étendre au cas où la fonction qui représente le fond est uniquement C^1 par morceaux ; c'est à dire dans le cas d'un obstacle qui présenterait des points anguleux ! Il reste donc à étudier ce cas dans les détails pour s'en assurer.

Les travaux de F. Helein dans [14] constituent une initiation au problème d'un écoulement à frontière libre car la dérivation des équations qui régissent le mouvement y est détaillée. Par ailleurs, l'auteur utilise ensuite la méthode du point fixe pour résoudre le problème linéarisé. Toujours dans le cadre des travaux théoriques, nous pouvons citer l'article d'Abergel et Bona [15]. Dans cet article, les auteurs considèrent l'écoulement d'un fluide visqueux dans un canal, dont le fond est un plan incliné qui contient un obstacle. Le problème est modélisé à l'aide des équations de Navier-Stokes et le théorème des fonctions implicites est utilisé. La vérification des hypothèses de ce théorème passe par la résolution d'un problème auxiliaire qui s'écrit à l'aide du bilaplacien et de certaines conditions aux limites.

Toutefois, même si la liste de nos références est sûrement loin d'être exhaustive, nous avons rencontré dans la littérature moins de résultats théoriques sur ce sujet, qui présente pourtant un large spectre de problèmes ouverts (voir chapitre 5), que de travaux numériques et expérimentaux. La consultation de ces derniers nous a tout de même été fort utile. En effet, même si nos travaux actuels sont tous théoriques, les résultats numériques et expérimentaux nous ont conforté dans certaines des hypothèses que nous avons considérées, comme le comportement à l'infini de la frontière libre lors de la modélisation. Plus précisément, nous supposons que la frontière libre tend à devenir plate et est à une hauteur fixe du fond du canal à l'infini, en amont comme en aval de l'obstacle. Cette hypothèse correspond au cas torrentiel décrit par M. Bouhadeh dans [16].

Après avoir placé ainsi notre travail dans le contexte général des problèmes à frontière libre, nous allons introduire à présent les spécificités des cas que nous avons étudiés, les hypothèses que nous avons émises, et nous terminerons par la description de la démarche utilisée pour résoudre les problèmes posés. Cette démarche est pratiquement la même pour tous les cas étudiés mais des différences essentielles existent aussi bien sur le plan physique que sur le plan mathématique et nous les soulignerons au fur et à mesure du

traitement de chaque cas.

En fait, notre intérêt s'est porté sur des études théoriques de problèmes issus des situations physiques suivantes :

1. L'écoulement d'un fluide au dessus d'un obstacle en tenant compte uniquement des effets de gravité et en négligeant les effets de tension superficielle.
2. L'écoulement de deux fluides immiscibles au dessus d'un obstacle toujours sous les mêmes hypothèses .
3. L'écoulement d'un fluide au dessus d'un obstacle en tenant compte des effets de la gravité ainsi que de la tension superficielle.

Les deux premiers cas sont traités dans cette thèse et ont fait l'objet de publications tandis que le troisième cas est un travail en cours. Dans les problèmes qui nous intéressent, le fluide considéré s'écoule à l'infini amont avec une vitesse constante $(U_0, 0)$ (lorsqu'il s'agira de deux fluides superposés, on considérera deux vitesses constantes $(u_1, 0)$ et $(u_2, 0)$ à l'infini amont) dans un canal limité d'un côté par son fond (sur lequel est placé un obstacle), et de l'autre côté par une frontière libre perturbée (à cause de la présence de l'obstacle) et qui est l'inconnue principale du problème.

Ces écoulements, régis par les équations de Navier-Stokes, sont en général très difficiles à appréhender si on devait tenir compte de tous les aspects de l'écoulement réel et la considération de certaines hypothèses peut s'avérer une mesure fort utile. Ainsi les études théoriques que nous présentons sont faites sous les hypothèses suivantes :

- Le fluide est parfait,
- le fluide est incompressible,
- l'écoulement est irrotationnel,
- l'écoulement est stationnaire,
- nous tiendrons compte des forces de gravité et négligerons les effets de tension superficielle.

Cependant, malgré ces hypothèses simplificatrices classiques conférant au problème un aspect relativement abordable, puisqu'elles permettent de formuler la question à l'aide des équations d'Euler, une double difficulté caractérise ce type de problèmes : la non-linéarité (due à l'équation de Bernoulli que nous écrivons sur la frontière libre) et la frontière libre qui est une inconnue du problème.

Lors de la modélisation, on écrit une condition de glissement sur le fond et sur la frontière libre, et comme il faut une seconde condition sur cette frontière inconnue, l'équation de Bernoulli s'impose, avec le lot de complications dû à la non-linéarité.

Ces hypothèses, qui permettent de modéliser le problème, font l'objet d'un paragraphe où il est question notamment de leur interprétation physique, le paragraphe 1.1 en l'occurrence.

Les équations sont ensuite adimensionnées et une description de cette technique ainsi que son utilité font l'objet du paragraphe 3.2. En particulier, c'est grâce à l'adimensionnement qu'un nombre (sans dimension) caractérisant l'écoulement, noté F et appelé nombre de Froude, apparaît. L'écoulement est dit torrentiel (ou super-critique) lorsque $F > 1$, ce qui signifie que l'énergie cinétique l'emporte sur l'énergie potentielle. Lorsque $F < 1$, l'écoulement est dit fluvial (ou sous-critique). Des études expérimentales et numériques (voir par exemple les travaux numériques de M. Bouhadeh dans [16] et ceux de R. Djouadi dans [17]) ont prouvé que :

- dans le cas $F > 1$, la frontière libre est plate à l'infini amont et tend à redevenir plate à l'infini aval, et qu'au dessus de l'obstacle une unique élévation de la même forme que l'obstacle apparaît ;
- dans le cas $F < 1$, la surface libre est plate à l'infini amont, puis une dépression apparaît au niveau de l'obstacle, ensuite un train d'ondes persiste à l'infini aval (voir figure. 1).

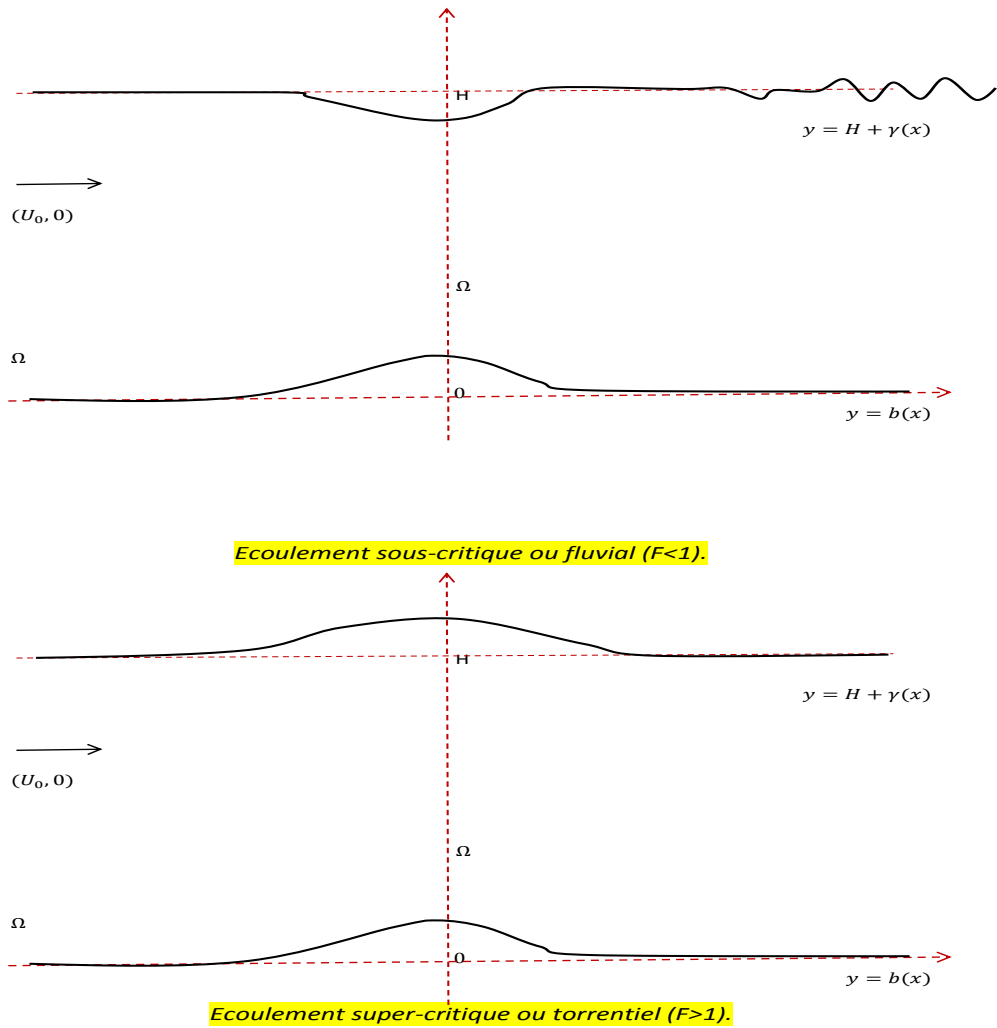


FIGURE 1 – Allures des surfaces libres.

Comme il a déjà été précisé au début de l'introduction, deux problèmes ont fait l'objet d'études théoriques dans le cadre de cette thèse et la démarche suivie dans chacun de nos travaux est la suivante :

1. Les équations qui régissent le mouvement sont transformées d'abord par adimensionnement, ensuite la fonction de courant, qui est un outil classique en mécanique des fluides, est utilisée.
2. le domaine de l'écoulement subit également une transformation : il est assujéti à un changement de variables qui permet de réécrire le problème dans un domaine fixe noté Q .
Ainsi, on passe d'un système d'équations à coefficients constants dans

un domaine variable à un système d'équations à coefficients variables dans un domaine fixe.

3. La preuve de l'existence et l'unicité de la solution est obtenue grâce à l'application du théorème des fonctions implicites sur des algèbres de Banach notées $B_c^{m,\lambda}(\overline{Q})$ et $B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R})$, définies au paragraphe 2.3 et déjà utilisés par F. Abergel et J.L. Bona dans [15].

Un opérateur T (fonction de b et γ) est défini sur $B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R})$ et une des difficultés majeures de notre travail fût d'établir l'inversibilité de $\frac{\partial T}{\partial \gamma}(0, 0)$.

Le résultat principal est obtenu à l'issue des deux étapes suivantes :

- La première étape consiste en la résolution du problème linéarisé grâce à une formulation variationnelle.
- La seconde étape concerne l'étude de la régularité de la solution et le comportement asymptotique qui est obtenu à l'aide des propriétés de la fonction de Green.

Le concept de “fonction de Green” fût un outil appréciable pour nous car il nous a permis d'établir des résultats de régularité et de comportement à l'infini de la solution dans une bande de \mathbb{R}^2 infinie dans la direction des x et nous lui avons consacré le paragraphe 2.2.

La régularité et le comportement asymptotique dans un ouvert de \mathbb{R}^n , représentant un cylindre infini borné dans une direction, sont des thèmes qui ont été étudiés par plus d'un auteur, et nous pouvons citer Charles J. Amick pour les résultats qu'il a établis dans [18] et [19] ainsi que Adams pour son livre [21]. Une étude théorique sur des problèmes aux limites elliptiques dans un cylindre infini a également été développée par V. Maz'ya, S. Nazarov et B. Plamenevskij dans [22]; mais les espaces fonctionnels introduits dans cet ouvrage ne sont pas des algèbres de Banach et n'assurent pas le comportement asymptotique dans les deux sens ($+\infty$ et $-\infty$).

Cette thèse est constituée de cinq chapitres. Les chapitres 3 et 4, sont consacrés aux études théoriques dont nous avons décrit la démarche ci-dessus. Les travaux y sont présentés en anglais tels qu'ils ont été publiés mais complétés par une introduction en français.

- Le premier chapitre est consacré à des rappels de physique. En effet, les travaux présentés revêtent un aspect physique et un aspect mathématique. C'est donc tout naturellement que le premier chapitre s'est imposé pour décrire l'écoulement, justifier les hypothèses introduites et les mettre en équation tout en fournissant quelques rudiments de mécanique des fluides indispensables à la bonne compréhension de la suite. Toutefois, nous ne nous attarderons pas sur la physique et invitons le lecteur intéressé par un approfondissement du sujet à consulter les ouvrages spécialisés en mécanique des fluides (citons par exemple [23],[24],[26] ainsi que [25]).

- Dans le second chapitre, les outils mathématiques utilisés dans les études théoriques réalisées sont introduits. Il s'agit notamment du concept de fonction de Green et de l'adimensionnement des équations qui régissent les écoulements.
- Dans le troisième chapitre, nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution d'un problème d'écoulement torrentiel à frontière libre d'un fluide supposé parfait et incompressible, dans un canal infini dont le fond présente un obstacle (modélisant l'écoulement de l'eau d'une rivière par exemple). Nous tenons compte des effets de la gravité mais négligeons la tension superficielle.
Il s'agit d'un travail intitulé : ” **Existence and uniqueness of the solution of a supercritical free surface flow problem over an obstacle**”, publié en avril 2010 dans la revue ”Revista matematica complutense”, avec D. Hernane, R. Ait-Yahia et D. E. Teniou [28].
- L'objet du quatrième chapitre est un travail intitulé : ” **Flows of two immiscible fluids over an obstacle**”. Il s'agit d'une contribution à l'étude du problème des écoulements bidimensionnels de deux fluides immiscibles (avec deux frontières libres : air-fluide et fluide-fluide) au dessus d'un obstacle dans un canal. Ce papier a été écrit en collaboration avec mon directeur de thèse D. E. Teniou et sera publié dans la revue ”SeMA journal” [29]. Quelques similitudes avec le papier précédent y sont décelables naturellement puisque dans les deux travaux, les effets de tension superficielle sont négligés et la démarche suivie pour la résolution est identique mais les techniques utilisées sont différentes. En effet, lorsqu'on considère deux fluides superposés, la condition de transmission sur l'interface entre les deux fluides induit un couplage dans le problème. Ceci amène donc une difficulté supplémentaire qu'il a fallu gérer, lors de l'écriture de la formulation variationnelle, lors de l'étude de la coercivité de la forme bilinéaire ainsi qu'au niveau de l'étude de la régularité et du comportement asymptotique de la solution. Signalons enfin qu'à propos de problèmes aux limites de transmission de façon générale, on pourra consulter [40] ainsi que les travaux de K. lemrabet dans [30] et [31].
- Le dernier chapitre est consacré aux travaux en cours et à ceux en perspective. Nous nous intéresserons en particulier aux effets de la tension superficielle sur les écoulements déjà étudiés. Une différence essentielle existe entre les deux premiers travaux et celui-ci. Elle réside dans l'aspect physique et concerne plus précisément l'échelle des écoulements.
En effet, le premier cas étudié, où on a négligé les effets de tension superficielle, peut modéliser, par exemple, le mouvement de l'eau d'une rivière ou tout autre écoulement d'eau à l'air libre où la surface de séparation entre l'air et l'eau est déformable et où il est tout à fait raisonnable de négliger les effets de capillarité. Pour être plus précis, sans entrer dans les détails, on pourra retenir que l'on doit prendre en compte les effets de tension superficielle lorsqu'on étudie un phénomène où la surface de séparation entre les deux phases devient importante

par rapport au volume(d'après [26]).

Lorsqu'on tient compte des effets de capillarité, le modèle peut illustrer des écoulements dont la profondeur est de l'ordre de quelques millimètres (dispositifs industriels), ou même l'écoulement de l'eau d'une rivière lorsqu'on s'intéresse à une longueur d'onde, par exemple. À ce propos, des exemples pratiques sont cités dans l'introduction du mémoire de Doctorat, option "Physique théorique" [32].

En fait, même si le phénomène de capillarité (ou tension superficielle) n'est pas prépondérant lorsqu'on s'intéresse à l'écoulement de l'eau d'une rivière à grandes échelles, ce phénomène devient important à petites échelles, d'autant plus qu'il permet de maîtriser les instabilités de Kelvin-Helmholtz (d'après les commentaires de D. Lannes dans [33] et [34]). Ainsi, la tension superficielle a un effet stabilisateur physiquement parlant, mais du point de vue mathématique, les équations semblent plus difficiles à traiter car un terme supplémentaire, inhérent au rayon de courbure de la surface libre, vient compliquer davantage l'équation de Bernoulli, et une méthode de résolution différente devra probablement être utilisée.

Notations

- g : constante de gravité ;
- b : fonction scalaire, définie sur \mathbb{R} , de classe $C^2(\mathbb{R})$, à support compact, représentant le fond du canal ;
- γ : fonction scalaire, définie sur \mathbb{R} , représentant la perturbation de la frontière libre dans le chapitre 3 ;
- γ_1, γ_2 : fonctions scalaires, définie sur \mathbb{R} , représentant respectivement la perturbation de la frontière libre et la perturbation de l'interface au chapitre 4 ;
- Ω : ouvert de \mathbb{R}^2 représentant le domaine de l'écoulement ;
- Ω_b^γ : ouvert de \mathbb{R}^2 représentant le domaine de l'écoulement adimensionné ;
- $Q := \mathbb{R} \times (0, 1)$ au chapitre 3 ;
- $Q := \mathbb{R} \times (0, H) \cup \mathbb{R} \times (H, 1)$; $0 < H < 1$, au chapitre 4 ;
- $C^0(Q)$: ensemble des fonctions continues sur Q ;
- $C^m(Q)$: ensemble des fonctions m fois continûment différentiables sur Q , m entier positif ;
- $C^{0,\lambda}(\overline{Q}) = \{u \in C^0(\overline{Q}); \sup_{x,y \in Q} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\lambda} < \infty\}$ avec $0 < \lambda < 1$;
- $C^{m,\lambda}(\overline{Q}) = \{u \in C^m(\overline{Q}); \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x,y \in Q} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\lambda} < \infty\}$; $0 < \lambda < 1$;
- F : nombre de Froude ;
- H : hauteur du fluide au repos dans le chapitre 3 ;
- H : hauteur adimensionnée au chapitre 4 avec $0 < H < 1$;
- $H_1, H_2, :$ hauteurs respectives des deux fluides au repos dans le chapitre 4 ;
- $H_0 = H_1 + H_2$;
- U_0, u_1, u_2 : constantes désignant la composante horizontale du champ de vitesse à l'infini ;
- $c_i, i \in \mathbb{N}$: constantes réelles ;
- σ : coefficient de tension superficielle ;
- $\vec{\nu}$: vecteur unitaire de la normale extérieure en un point quelconque de la frontière du domaine considéré ;
- $\vec{\tau}$: vecteur unitaire tangent en un point quelconque de la frontière du domaine considéré ;
- φ : potentiel du champ de vitesse ($\vec{U} = \vec{\nabla} \varphi$) ;
- ψ : fonction de courant ;

- ψ_p : fonction de courant de perturbation ;
- G : fonction de Green ;
- $\delta(x - x')$: distribution de Dirac centrée au point x' ;
- c : constante strictement positive ;
- \tilde{c} : constante strictement positive, $\tilde{c} > c$;
- D^k : opérateur de différentiabilité d'ordre k par rapport aux variables d'espace x et y ;
- D_x^k : opérateur de différentiabilité partielle d'ordre k par rapport à la variable x ;
- $\frac{D}{Dt}$: dérivée particulaire ;
- $B_c^{m,\lambda}(\mathbb{Q})$ et $B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R})$: algèbres de Banach définies au paragraphe 2.3 ;
- $\text{div}\vec{U}$: divergence scalaire du champ de vecteurs \vec{U} ;
- $\text{rot}\vec{U}$ ou $\text{curl}\vec{U}$: rotationnel du vecteur \vec{U} .

Chapitre 1

Cadre Physique

Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons de rappeler succinctement quelques rudiments de mécanique des fluides absolument indispensables à la modélisation des écoulements que nous avons étudiés tout en citant des références bibliographiques pour l'approfondissement des notions introduites.

L'étude du mouvement d'un fluide est très complexe car au cours du mouvement, le fluide est assujéti à des "déformations" de façon continue. On parle d'écoulement pour désigner le mouvement d'un fluide. On évoquera souvent la notion de particule fluide pour décrire l'écoulement.

Pour se fixer les idées, on pourra toujours munir le domaine de l'écoulement d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et considérer le parallélépipède infinitésimal de volume $dV = dx dy dz$ et de masse dm comme étant une particule de fluide. Nous pouvons alors préciser ce que nous entendons par "déformations" du fluide : chaque particule de fluide subit au cours du mouvement une translation, une rotation et une déformation.

Il existe deux méthodes connues pour décrire l'écoulement d'un fluide :

- **la méthode de Lagrange** qui consiste à déterminer les positions d'une même particule fluide au cours du temps ; c'est à dire la trajectoire d'une particule qui se trouve à l'instant t_0 au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$. On détermine cette trajectoire en cherchant les coordonnées

$$x(t), y(t), z(t).$$

La vitesse de la particule s'écrit $\vec{U}(x, y, z, t) = (U_1, U_2, U_3)$ avec

$$U_1 = \frac{\partial x}{\partial t}; U_2 = \frac{\partial y}{\partial t}; U_3 = \frac{\partial z}{\partial t};$$

La méthode de Lagrange est peu employée en mécanique des fluides. En effet, on peut facilement imaginer la difficulté rencontrée à tenter de suivre expérimentalement les particules de fluide.

- **la méthode d'Euler** qui est la plus couramment utilisée car plus pratique autant du point de vue mathématique que du point de vue physique. Elle consiste à déterminer le champ de vitesse noté $\vec{U}(x, y, z, t)$ des particules qui passent par le point $M(x, y, z)$ de l'espace à l'instant t . On définit alors la **ligne de courant** comme étant la courbe tangente en tout point $M(x, y, z)$ à $\vec{U}(x, y, z, t)$ à l'instant t et dont l'équation s'obtient en résolvant les équations différentielles

$$\frac{dx}{U_1} = \frac{dy}{U_2} = \frac{dz}{U_3};$$

On retiendra que :

- L'approche de Lagrange est liée à la notion de trajectoire.
- L'approche d'Euler est liée à la notion de ligne de courant.
- Il ne faut pas confondre trajectoire et ligne de courant, en général.
- Ligne de courant et trajectoire sont confondues en cas de mouvement stationnaire (c'est à dire lorsque la vitesse ne dépend pas explicitement du temps.)

Comme nous nous sommes intéressés exclusivement à des écoulements stationnaires, la description d'Euler s'est naturellement imposée.

Lorsqu'on veut modéliser le mouvement d'un fluide en vue d'une étude théorique, il est impossible de tenir compte de tous les phénomènes de l'écoulement réel. En effet, les équations de Navier-Stokes qui régissent les écoulements de fluides étant très complexes, il est d'usage courant d'introduire certaines hypothèses afin de présenter un modèle "viable" du mouvement, c'est à dire un modèle mû par la possibilité pratique de résolution des équations tout en privilégiant les phénomènes physiques prépondérants selon le cas étudié. Nous donnerons, dans le paragraphe suivant, une interprétation de chacune des hypothèses que nous avons utilisées dans nos travaux.

Enfin, un intérêt particulier est porté à l'équation de Bernoulli, car malgré toutes les hypothèses simplificatrices introduites, cette équation contient un terme non linéaire qui complique les études théoriques des écoulements de fluides. De plus, il est important de signaler ses différentes formes et en particulier la différence qui existe entre cette équation lorsqu'elle est écrite dans tout le domaine fluide et lorsqu'elle est valable uniquement sur une ligne de Courant.

1.1 Les hypothèses et leurs Interprétations

Nous nous sommes particulièrement inspirés du chapitre VI intitulé "fluides parfaits" dans [26] ainsi que de [24] et de [27] pour fournir à chaque hypothèse que nous avons utilisée dans nos modèles, une interprétation et une explication aussi claire que possible dans le souci permanent de permettre une lecture "fluide" du sujet traité.

1.1.1 Notion de fluide parfait

L'hypothèse de fluide parfait consiste à négliger tous les termes où interviennent la viscosité et la conductivité thermique dans les équations générales de Navier-Stokes, ce qui les simplifie considérablement. La viscosité d'un fluide se traduit par des contraintes de cisaillement que le fluide subit au cours des déformations provoquées par le mouvement. Les contraintes de cisaillement sont définies comme étant une pression, appliquée tangentielle-ment, et ont pour ordre de grandeur le produit du coefficient de viscosité μ par le gradient de vitesse perpendiculaire à la direction du cisaillement :

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy}.$$

Par ailleurs, les variations ΔP de la pression (contrainte normale) au sein de l'écoulement ont pour ordre de grandeur :

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho V^2.$$

Si on s'intéresse à des fluides tels que l'eau ou l'air, le coefficient de viscosité μ est tellement faible que τ sera toujours négligeable devant ΔP . Toutefois, dans les zones de l'écoulement qui sont proches des parois solides, il est prouvé expérimentalement que le gradient de vitesse atteint des valeurs considérables et il y est alors impossible de négliger τ devant ΔP . Mais on sait aussi que pour bon nombre d'écoulements, ces zones appelées couches limites, sont extrêmement minces et l'étude du mouvement du fluide peut se faire en négligeant les contraintes tangentielles à condition de remplacer la couche limite par une condition aux limites appropriée (voir paragraphe 1.1.6).

1.1.2 Écoulement irrotationnel (ou potentiel)

La condition d'irrotationnalité exprime le fait que le déplacement de toute particule fluide a lieu sans rotation de celle-ci sur elle-même, c'est à dire que l'écoulement est une simple translation entre différentes positions de la particule (éventuellement déformée) sur sa trajectoire. Ce qui se traduit par

$$\text{rot} \vec{U} = 0,$$

et implique l'existence d'un unique (à une constante additive près) **potentiel de vitesse**, noté ϕ , dans toute région simplement connexe, vérifiant :

$$\vec{U} = \vec{\nabla} \phi.$$

1.1.3 Écoulement bidimensionnel

Un écoulement bidimensionnel est un écoulement dont le champ de vitesse est parallèle à un plan (Ox, Oz) et est invariant par translation perpendiculaire à celui-ci (cf.[27]).

Considérons un canal en 3D dans lequel s'écoule un fluide. Au fond de ce canal se trouve un obstacle que nous assimilons à un cylindre dont la longueur est très grande par rapport à ses autres dimensions. Le fluide s'écoule perpendiculairement aux droites génératrices du cylindre (voir figure 1.1). Dans ce cas, on peut étudier l'écoulement dans le plan (\vec{Ox}, \vec{Oz}) , c'est à dire en "négligeant" l'axe selon lequel la dimension de l'obstacle est "infinie".

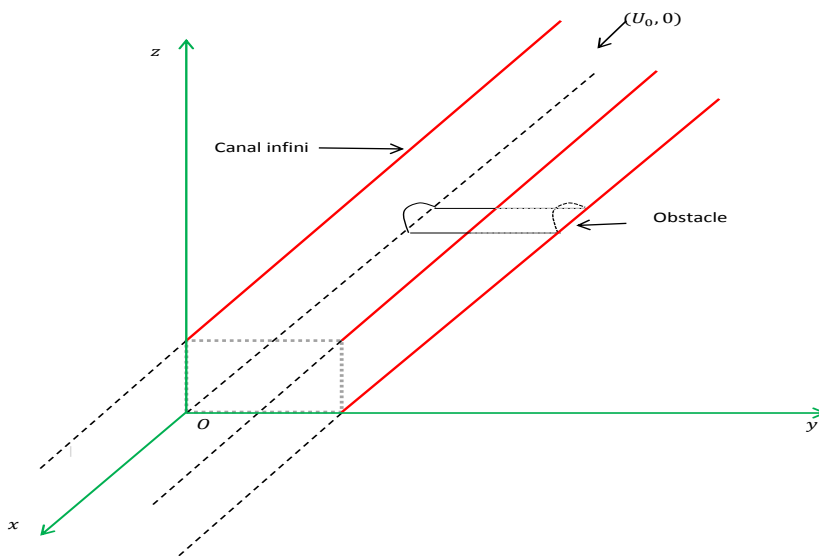


FIGURE 1.1 – Écoulement dans un canal avec obstacle en 3D.

1.1.4 Condition d'incompressibilité

Cette condition exprime le fait que la masse volumique ρ du fluide reste constante au cours du mouvement en tout point du domaine de l'écoulement et se traduit par une dérivée particulaire du champ scalaire de la masse volumique nulle. Si $\vec{U} = \vec{U}(M, t)$ désigne la vitesse d'une particule de fluide en un point M à l'instant t , un écoulement incompressible se caractérise par $\text{div} \vec{U} = 0$.

En effet, d'après le principe de conservation de la masse, on a

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{U} = 0,$$

ce qui donne la caractérisation par la divergence du champ de vitesse nulle. Cette condition, qui fait partie de nos hypothèses dans la suite, est tout à fait réaliste dans le cas de l'écoulement de l'eau.

Les conditions d'application de cette hypothèse sont discutées, par exemple, dans le livre de J.N. Gence [27] à la page 42.

1.1.5 Le mouvement stationnaire

Un mouvement stationnaire est un mouvement dans lequel tous les champs qui interviennent dans sa description, par la méthode d'Euler, sont indépendants du temps. Dans les écoulements que nous avons étudiés, cela veut dire que le champ de vitesse \vec{U} ne dépend pas du temps, ce qui se traduit par

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = 0$$

et induit une dérivée particulaire (voir paragraphe 1.2.1) réduite à

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}.$$

1.1.6 La condition de glissement

Cette condition qu'on retrouve dans tous les travaux présentés ici, traduit l'hypothèse physique selon laquelle aucune particule fluide ne traverse le fond du canal et si une particule fluide se trouve sur la surface libre, elle ne la quitte pas.

Autrement dit, sur la surface libre, comme sur le fond du domaine de l'écoulement, la composante normale du champ de vitesse est nulle, soit

$$\vec{U} \cdot \vec{\nu} = 0. \quad (1.1)$$

Comme l'écoulement est potentiel (le champ de vitesse dérive d'un potentiel),

$$\vec{U} = \vec{\nabla} \phi,$$

puis en introduisant la fonction conjuguée harmonique de ϕ , notée ψ , appelée **fonction de courant**, on a

$$\vec{U} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}; -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

et l'équation (1.1) est alors équivalente à

$$\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\tau} = 0,$$

ce qui se réécrit

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0$$

et en rappelant qu'entre deux points quelconques A et B , tous deux sur le fond ou tous les deux sur la frontière libre, l'intégrale curviligne s'exprime par

$$\int_{(A)}^{(B)} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \psi(A) - \psi(B).$$

On en déduit que

$$\psi = \text{constante} \quad \text{sur le fond et} \quad \psi = \text{constante} \quad \text{sur la surface libre.} \quad (1.2)$$

1.1.7 Les conditions asymptotiques

Les conditions asymptotiques imposées aussi bien au voisinage de $+\infty$ qu'au voisinage de $-\infty$ sont induites par le caractère torrentiel de l'écoulement étudié. En effet, des études expérimentales ainsi que des études numériques telles que [16] et [17] montrent que dans le cas d'un écoulement supercritique(ou torrentiel), la frontière libre est plate à l'infini en amont de l'obstacle et tend à redevenir plate à l'infini aval, ce qui suggère la condition

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \gamma(x) = 0 \quad (1.3)$$

où γ est la fonction réelle qui représente la perturbation de la frontière libre.

1.1.8 La tension superficielle

Ce paragraphe est destiné, sans aucune prétention d'exhaustivité, à expliquer la notion de tension superficielle au sein d'un fluide; ce qui nous a permis de négliger ce phénomène dans les études théoriques réalisées. Nous le clôturerons en donnant les équations d'un modèle où les effets de tension de surface sont pris en considération.

Définition

On peut définir la tension superficielle comme étant une force qui existe au niveau de toute interface entre deux milieux (a priori quelconques) différents. A l'intérieur d'un fluide (et plus particulièrement un liquide), chaque molécule subit de la part de molécules voisines des forces d'attraction qui se compensent par symétrie. Ceci n'est plus vrai à la surface du fluide où la résultante des forces intermoléculaires n'est pas nulle et est dirigée vers l'intérieur du fluide. C'est cette force qui est responsable de la courbure de la surface libre du fluide. La tension superficielle est négligeable lorsque la courbure de la surface libre reste "suffisamment petite". Mais il faut préciser le sens à donner à cette expression "suffisamment petite" et surtout par rapport à quoi ?

Mise en évidence de la tension de surface

Les phénomènes suivants sont dus à l'existence de forces de tension de surface :

1. Dans un tube, la surface libre de l'eau forme un ménisque près des bords.
2. Une aiguille en acier flotte à la surface de l'eau.
3. Certains insectes peuvent se déplacer sur l'eau.
4. La surface libre d'un liquide tend naturellement à être la plus petite possible. Ainsi, si les gouttes d'eau ont une forme sphérique, c'est parce que c'est cette forme qui donne une enveloppe de surface minimale pour un volume liquide donné.

Modèle avec tension superficielle

Lorsqu'on veut étudier l'écoulement de l'eau d'une rivière par exemple, le phénomène de tension superficielle n'est pas prépondérant car on s'intéresse, en général, à cet écoulement à grandes échelles et dans ce cas la courbure de la surface libre peut être considérée comme négligeable. Mais dès lors qu'on décide d'étudier ce même écoulement à petites échelles, la tension superficielle revêt un caractère important.

Dans la plupart des processus industriels, elle est souvent primordiale. Par exemple, lorsqu'on veut fabriquer un matériau tel que la peinture ou la colle, à appliquer sur un autre matériau, plus la tension superficielle est élevée, plus l'adhésion de la substance appliquée sera bonne.

Dans l'écoulement que nous avons étudié et qui est décrit d'abord dans l'introduction puis avec plus de détails dans le chapitre 3, lorsque nous tenons compte des effets de tension superficielle, un terme supplémentaire apparaît dans l'équation de Bernoulli que nous écrivons sur la frontière libre. Ce terme fait naturellement intervenir le rayon de courbure de la surface noté $C(x)$ ainsi que le coefficient de tension superficielle noté σ . le système d'équations suivant modélise l'écoulement d'un fluide parfait dans un canal en 2D, lorsqu'on tient compte de la force de gravité et des effets de tension superficielle.

Dans les équations qui suivent

- $b : x \in \mathbb{R} \mapsto b(x)$ est une fonction scalaire donnée, qui représente le fond du canal ;
- $\gamma : x \in \mathbb{R} \mapsto \gamma(x)$ est une fonction scalaire inconnue, qui représente la déformation de la frontière libre ;
- $\vec{U} : (x, y) \mapsto \vec{U}(x, y)$ est une fonction vectorielle inconnue, qui représente le champ de vitesse ;
- $(U_0, 0)$ est une constante donnée, désignant la vitesse à l'infini amont et aval.

Les équations qui régissent l'écoulement sont données par :

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega; \quad (1.4)$$

$$\operatorname{curl} \vec{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega; \quad (1.5)$$

$$\vec{U} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sur } y = H + \gamma(x); \quad (1.6)$$

$$\vec{U} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sur } y = b(x); \quad (1.7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \vec{U}(x, y) = (U_0, 0); \quad (1.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \gamma(x) = 0; \quad (1.9)$$

$$\frac{\rho}{2} |\vec{U}|^2 + \rho g y + \sigma C(x) = \text{cste} \quad \text{sur } y = H + \gamma(x). \quad (1.10)$$

1.2 Outils et notations

1.2.1 La dérivée particulaire

Dans l'approche d'Euler, la trajectoire n'est pas connue. Il est alors naturel de chercher à exprimer les fonctions liées à une particule en mouvement à l'aide du champ de vitesse eulérien noté $\vec{U}(x, y, z, t)$ qui est connu ou tout au moins à déterminer.

L'accélération d'une particule, par exemple, est obtenue en dérivant le champ de vitesse \vec{U} par rapport au temps. Lorsqu'on écrit les équations du mouvement, d'autres fonctions interviennent par leurs dérivées par rapport au temps. Considérons de manière générale une fonction $F(x, y, z, t)$ associée à une particule dont la trajectoire est donnée par le vecteur

$$\vec{X} = (x(t), y(t), z(t)).$$

Notons U_1, U_2, U_3 les composantes du champ de vitesse : $\vec{U}(x, y, z, t) = (U_1, U_2, U_3)$.

$$U_1(x, y, z, t) = x'(t); \quad U_2(x, y, z, t) = y'(t); \quad U_3(x, y, z, t) = z'(t);$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{DF}{Dt} &:= \frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} z'(t) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} U_1 + \frac{\partial F}{\partial y} U_2 + \frac{\partial F}{\partial z} U_3 + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) F + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Définition : $\frac{DF}{Dt}$ déterminée par (1.11) est la **dérivée particulaire** de F . Elle exprime la variation temporelle de $F(x, y, z, t)$.

Remarque

Désignons par \vec{a} l'accélération d'une particule. Alors

$$\vec{a} = \frac{D\vec{U}}{Dt} = (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \quad (1.12)$$

1.2.2 L'équation de Bernoulli

La difficulté des problèmes étudiés découle de leur non linéarité, et celle-ci vient de l'équation de Bernoulli (connue aussi sous la dénomination de "Théorème de Bernoulli"), qui constitue un outil incontournable dans la modélisation de ce type d'écoulement.

Il existe plusieurs formulations de cette équation et nous avons choisi de présenter formellement les calculs qui vont suivre afin d'étayer le choix des formulations que nous avons utilisées dans nos travaux.

Considérons un fluide de masse volumique constante ρ , en mouvement avec un champ de vitesse \vec{U} et une accélération \vec{a} . Nous munissons le domaine de l'écoulement d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Nous noterons toutes les grandeurs sans les variables d'espace et de temps, par exemple on notera simplement P au lieu de $P(x, y, z, t)$.

Nous admettons que trois types de forces agissent sur une particule fluide en mouvement :

- Les forces de viscosité.
- Les forces de pression mécanique. Nous admettons qu'elles sont de la forme $-\vec{\nabla}P$.
- La force due au champ de pesanteur \vec{g} . Elle est de la forme $-\vec{\nabla}(\rho gz)$ où g est la constante de gravité et z la hauteur.

Comme nous supposons le fluide parfait, les forces de viscosité seront négligées et en appliquant l'équation fondamentale de la dynamique à une particule fluide de masse dm , et en notant formellement $d\vec{f}$ une force agissant sur l'élément de volume dV (c'est à dire par exemple $d\vec{f} = -\vec{\nabla}P dV$), on a :

$$\sum d\vec{f} = dm \vec{a},$$

ce qui se réécrit, en utilisant (1.12) et le fait que $dm = \rho dV$,

$$-\vec{\nabla} \rho gz - \vec{\nabla} P = \rho [(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}].$$

Comme le fluide est homogène, cette équation se réécrit

$$-\vec{\nabla}(gz) - \vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right) = (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}. \quad (1.13)$$

En utilisant l'identité vectorielle

$$(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = \vec{\nabla}\left(\frac{U^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} \wedge \vec{U},$$

on obtient la forme équivalente suivante de l'équation (1.13) :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{U^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} \wedge \vec{U} = -\vec{\nabla}(gz) - \vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right). \quad (1.14)$$

Notons $d\vec{r}$ un élément (déplacement élémentaire) d'une ligne de courant.

On a

$$d\vec{r} = \vec{U} dt,$$

et en multipliant par $d\vec{r}$ les deux membres de l'équation (1.14), tout en tenant compte du fait que

$$(\vec{rot}\vec{U} \wedge \vec{U}) \cdot \vec{U} = 0 \text{ (produit mixte qui comporte deux vecteurs parallèles),}$$

on obtient

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\vec{r} + \vec{\nabla} \left(\frac{U^2}{2} \right) d\vec{r} + \vec{\nabla} (gz) d\vec{r} + \vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} \right) d\vec{r} = 0. \quad (1.15)$$

En intégrant entre deux points quelconques A et B d'une ligne de courant, on a :

$$\int_A^B \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\vec{r} + \int_A^B \vec{\nabla} \left(\frac{U^2}{2} \right) d\vec{r} + \int_A^B \vec{\nabla} (gz) d\vec{r} + \int_A^B \vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} \right) d\vec{r} = 0. \quad (1.16)$$

Lorsque l'écoulement est stationnaire, l'équation (1.16) devient :

$$\left[\frac{U^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right]_A^B = 0$$

et on obtient finalement l'équation de Bernoulli sous la forme

$$\frac{U^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{constante}, \quad (1.17)$$

ou encore sous la forme équivalente

$$\rho \frac{U^2}{2} + P + \rho gz = \text{constante}. \quad (1.18)$$

Cette équation est la forme la plus courante de l'équation de Bernoulli pour un écoulement homogène stationnaire d'un fluide parfait et incompressible soumis aux seules forces de pression et à des forces dérivant d'une énergie potentielle. Elle traduit le bilan de l'énergie le long d'une ligne de courant.

Remarques :

1. A travers ces calculs, il apparaît clairement que la valeur de la constante du second membre dépend de la ligne de courant considérée.
2. Si on fait l'hypothèse supplémentaire que l'écoulement est irrotationnel, alors on a $\vec{rot}\vec{U} \wedge \vec{U} = 0$, puisque $\vec{rot}\vec{U} = 0$. Il n'est plus nécessaire d'intégrer entre deux points A et B d'une ligne de courant dans l'équation (1.15) car on peut obtenir le même résultat en intégrant entre deux points quelconques du domaine fluide. Dans ce cas, la constante du second membre ne dépend plus d'aucune ligne de courant et a la même valeur dans tout le domaine de l'écoulement. On retiendra donc que dans le cas d'un écoulement irrotationnel, la constante de l'équation de Bernoulli est la même dans tout le domaine fluide.

3. Il faut garder à l'esprit que cette constante n'est pas universelle et reste propre à l'écoulement considéré. Cela est bien visible lorsqu'on passe de la formulation (1.17) à la formulation (1.18), où la constante du second membre dépend de la densité ρ .
4. Il existe d'autres formulations de l'équation de Bernoulli, plus générales, pour un fluide compressible ainsi qu'une formulation thermodynamique. Toutefois, dans les modélisations, la lenteur des échanges thermiques permet souvent de considérer que ces échanges sont négligeables entre particules de fluides.
5. les remarques 2 et 3 ci-dessus nous ont été particulièrement utiles dans le chapitre 4, lors de la modélisation des écoulements de deux fluides superposés.

Chapitre 2

Outils Mathématiques

Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation, sous une forme adaptée à l'usage que nous en avons fait, des principaux outils mathématiques utilisés. Chaque concept (en particulier adimensionnement et fonction de Green) est suivi d'un exemple d'application, qu'on retrouvera dans les études réalisées aux chapitres suivants, ce qui permet d'en alléger la lecture.

2.1 Adimensionnement

2.1.1 Introduction

L'adimensionnement est une technique couramment utilisée dans la modélisation de phénomènes physiques car elle permet :

- **Dans la pratique** : La réalisation de maquettes à l'échelle dont on connaît l'importance (surtout dans les constructions aéronautique et navale, même à l'ère des simulations numériques) lorsqu'il s'agit de prendre des mesures pour étudier un phénomène réel.

- **Dans la théorie** : La réécriture des équations qui régissent le phénomène étudié en introduisant des éléments qui le caractérisent tel que le nombre de Froude, par exemple, pour les écoulements que nous avons considérés.

Nous allons décrire cette technique dans le paragraphe suivant puis nous l'appliquerons aux équations qui régissent l'un des écoulements que nous avons étudié.

Il faut signaler que la manière d'adimensionner peut varier selon les auteurs. En effet, nous avons choisi d'adimensionner les équations d'Euler en rapportant toutes les longueurs à la hauteur constante H de l'écoulement asymptotiquement en amont.

D. Lannes dans[33], ainsi que N. Bouam-Mehdi dans[32] ont adimensionné respectivement les équations d'Euler et les équations de Navier-Stokes en rapportant l'échelle de longueur suivant la direction de l'écoulement à une longueur d'onde caractérisant l'évolution longitudinale de l'écoulement.

2.1.2 Description de la technique

Nous allons décrire la méthode en quelques points, puis nous l'utiliserons aussitôt dans l'application qui suit.

Pour adimensionner les équations relatives à un problème donné :

1. On fait le rapport des variables indépendantes ainsi que les "fonctions" qui en dépendent sur des données choisies du problème, qui ont respectivement obligatoirement les mêmes unités de mesure, et si possible, les mêmes ordres de grandeur ;
2. On écrit les nouvelles variables en fonctions des anciennes ;
3. on indique clairement les "fonctions" à adimensionner et celles qui le seront implicitement ;

4. on réécrit les équations en fonction des nouvelles variables et "fonctions", en veillant à :
- i. obtenir un maximum de termes avec des coefficients égalant 1 ;
 - ii. Mettre en évidence les éléments qui caractérisent le phénomène étudié (par exemple : nombre de Froude dans nos travaux, nombre de Reynolds, nombre de Nusselt etc...dans d'autres modèles d'écoulements).

2.1.3 Application

Considérons un fluide parfait qui s'écoule dans un canal sous les hypothèses citées dans l'introduction générale. De plus nous tenons compte des effets de tension superficielle.

Désignons par

- $b : x \in \mathbb{R} \mapsto b(x)$ une fonction scalaire donnée, représentant le fond du canal ;
- $\gamma : x \in \mathbb{R} \mapsto \gamma(x)$ une fonction scalaire inconnue, représentant la perturbation de la frontière libre ;
- $\vec{u} : (x, y) \mapsto \vec{u}(x, y)$ une fonction vectorielle inconnue représentant le champ de vitesse ;
- $(U_0, 0)$ la vitesse à l'infini, donnée.

Nous allons adimensionner le système d'équations suivant (qui modélise donc l'écoulement d'un fluide parfait dans un canal en 2D, lorsqu'on tient compte de la **force de gravité et des effets de tension superficielle**, voir chapitre 5 pour plus de détails.)

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega; \quad (2.1)$$

$$\operatorname{curl} \vec{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega; \quad (2.2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sur } y = H + \gamma(x); \quad (2.3)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sur } y = b(x); \quad (2.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \vec{u}(x, y) = (U_0, 0); \quad (2.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \gamma(x) = 0; \quad (2.6)$$

$$\frac{\rho}{2} |\vec{u}|^2 + \rho g y + \sigma C(x) = cste \quad \text{sur } y = H + \gamma(x). \quad (2.7)$$

Nous choisissons de rapporter toutes les longueurs à H et les champs de vitesse à U_0 .

Notons $x^*, y^*, \vec{u}^*, b^*, \gamma^*$, les variables et les fonctions adimensionnées. Posons :

$$x = Hx^*; y = Hy^*; \vec{u} = U_0 \vec{u}^*;$$

Ω se transforme en

$$\Omega_{b^*}^{\gamma^*} = \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2; b^*(x^*) < y^* < 1 + \gamma^*(x^*)\},$$

avec

$$b^*(x^*) = \frac{1}{H}b(x^*H); \gamma^*(x^*) = \frac{1}{H}\gamma(x^*H).$$

Et les équations (2.1)-(2.7) se réécrivent :

$$\operatorname{div} \vec{u}^* = 0 \text{ dans } \Omega_{b^*}^{\gamma^*}; \quad (2.8)$$

$$\operatorname{curl} \vec{u}^* = 0 \text{ dans } \Omega_{b^*}^{\gamma^*}; \quad (2.9)$$

$$\vec{u}^* \cdot \vec{\nu}^* = 0 \text{ sur } y^* = 1 + \gamma^*(x^*); \quad (2.10)$$

$$\vec{u}^* \cdot \vec{\nu}^* = 0 \text{ sur } y^* = b^*(x^*); \quad (2.11)$$

$$\lim_{x^* \rightarrow \pm\infty} \vec{u}^*(x^*, y^*) = (1, 0); \quad (2.12)$$

$$\lim_{x^* \rightarrow \pm\infty} \gamma^*(x^*) = 0; \quad (2.13)$$

$$\frac{F^2}{2} |\vec{u}^*|^2 + y^* + \sigma^* C^*(x^*) = cste \text{ sur } y^* = 1 + \gamma^*(x^*); \quad (2.14)$$

où : $F = \frac{U_0}{\sqrt{gH}}$ est le nombre de Froude, $\sigma^* = \frac{\sigma}{\rho g H^2}$ est le coefficient de tension superficielle adimensionné, et

$$C^*(x^*) = \frac{-\gamma^{*''}(x^*)}{[1 + (\gamma^{*'}(x^*))^2]^{\frac{3}{2}}}$$

le rayon de courbure adimensionné.

2.1.4 Le nombre de Froude

Le nombre de Froude est un nombre sans dimension (analogue au nombre de Mach dans les écoulements compressibles), obtenu par adimensionnement des équations qui régissent le mouvement d'un fluide (souvent de l'eau) dans un canal. Il est noté Fr ou simplement F et son expression est donnée par

$$F = \frac{U_0}{\sqrt{gH}}. \quad (2.15)$$

Dans cette expression, g désigne la gravité; $(U_0; 0)$ et H désignent respectivement la vitesse de l'écoulement et la profondeur du fluide à l'infini amont. On peut ainsi constater que le nombre de Froude correspond au rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse des ondes de surface, qui se propagent en eau peu profonde avec une vitesse \sqrt{gH} . Certains auteurs désignent par

nombre de Froude le carré de l'expression (2.15) et ainsi le nombre de Froude peut également être interprété comme le rapport de l'énergie cinétique des particules de fluide sur l'énergie potentielle.

En architecture navale, la hauteur de l'eau H est remplacée par la longueur de la carène du navire. Rappelons à ce propos que ce nombre tire son origine (et son nom) de là, grâce à l'ingénieur et hydrodynamicien britannique William Froude (1810-1879).

2.2 La Fonction de Green

2.2.1 Introduction.

La fonction de Green fut un outil précieux dans les travaux de cette thèse car ses propriétés ont permis d'établir le comportement à l'infini des solutions de quelques problèmes linéaires à coefficients constants.

Avant d'aborder l'approche utilisée pour calculer les fonctions de Green dans les deux exemples, qui constituent des problèmes auxiliaires dans les résolutions à venir, quelques remarques s'imposent concernant le vocabulaire et la notation utilisés.

A propos de vocabulaire, la "fonction de Green" est une expression utilisée classiquement par les physiciens tandis que les mathématiciens parlent de "solution élémentaire". En effet, il existe des cas où la solution élémentaire n'est pas une fonction, mais une distribution. Par exemple la solution élémentaire, notée G , de l'équation des ondes en 3D dans un domaine non borné a pour expression

$$G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{\delta(t - \tau - \frac{R}{C})}{4\pi R}, \quad R \neq 0.$$

où $x, y, z \in \mathbb{R}$ sont les variables d'espace et ξ, η, ζ leurs duales, tandis que $t > 0$ désigne le temps et $\tau > 0$ sa variable duale, et où δ désigne la distribution de Dirac (cf. [51]).

Dans les travaux présentés dans ce document, aucune ambiguïté n'est à redouter car les solutions élémentaires que nous avons calculées sont toutes des fonctions (voir fonctions de Green du laplacien dans [52]). Nous parlerons donc de "fonctions de Green" et cela présente l'avantage d'uniformiser le langage entre mathématiciens et physiciens. La notation G ou \mathcal{G} pour désigner ces fonctions en découle naturellement et nous l'avons adoptée.

Parmi les ouvrages de référence qui nous ont aidés à comprendre le concept de base et à mener à bien les calculs, nous citons [51], [52],[24] et [53].

2.2.2 Applications.

Exemple 1 : Calcul de la fonction de Green associée au problème linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ dans } Q = \mathbb{R} \times (0, 1) \\ u(x, 0) = 0, x \in \mathbb{R} \\ -u(x, 1) + F^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0, x \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \quad (2.16)$$

où f est une fonction donnée dans $L^2(Q)$ et F une constante réelle.

Par définition, calculer la fonction de Green associée à ce système revient à déterminer G , unique solution(en supposant $F > 1$) du problème aux limites suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta G = -\delta(x - x')\delta(y - y') \text{ dans } Q, \\ G(x - x', 0, y') = 0, \\ -G(x - x', 1, y') + F^2 \frac{\partial G}{\partial y}(x - x', 1, y') = 0, \\ |G| < \infty \text{ pour } |x| \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

G est naturellement fonction de x et de y mais également de leurs variables duales respectives notées x' et y' . Nous écrirons donc $G(x, y; x', y')$ mais la structure du problème nous permet aussi de noter $G(x - x', y, y')$. Il existe plusieurs méthodes pour calculer G . Nous nous sommes inspirés de celle utilisée par Dean G. Duffy dans [51](paragraphe 5.4) et qui consiste à exprimer la fonction de Green sous forme d'un développement en série.

Mais il faut préciser que dans le cas d'un domaine rectangulaire borné (donc compact), les valeurs propres de l'opérateur différentiel du système considéré sont dénombrables et dans ce cas, la fonction de Green admet un développement en série à l'aide de ces valeurs propres et des vecteurs propres associés(on pourra lire à ce propos les commentaires dans le chapitre V de [24]) mais dans notre cas, le domaine Q est borné uniquement dans une direction et la démarche utilisée pour trouver la fonction de Green sous la forme d'une série est un peu différente et elle part de la considération suivante :

Pour $x \neq x'$, la première équation du système(2.17) devient

$$\Delta G = 0. \quad (2.18)$$

Soit x' fixé dans \mathbb{R} .

Désignons par A^+ et A^- les deux sous-ensembles de \mathbb{R} suivants :

$$A^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > x'\} \text{ et } A^- = \{x \in \mathbb{R}; x < x'\}$$

et notons

$$G^+ = G/A^+ \times (0,1) \text{ et } G^- = G/A^- \times (0,1).$$

Les fonctions G^+ et G^- vérifient l'équation (2.18) respectivement sur $A^+ \times (0, 1)$ et $A^- \times (0, 1)$.

1ère étape : séparation des variables

Il s'agit de trouver une solution particulière du système suivant par la méthode de la "séparation des variables".

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \{Q, x \neq x'\} \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ -u(x, 1) + F^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ |u| < \infty & \text{pour } |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.19)$$

On pose $u(x, y) = v(x)w(y)$; en utilisant la première équation du système (2.19), on obtient les deux équations différentielles ordinaires suivantes (où β est une constante réelle) :

$$v'' - \beta v = 0 \quad \text{et} \quad w'' + \beta w = 0, \quad (2.20)$$

qu'on résout.

Grâce aux conditions au bord du système (2.19), on obtient

$$w(y) = K \sin(\sqrt{\beta}y) \quad \text{et} \quad v(x) = C_1 e^{\sqrt{\beta}(x-x')} + C_2 e^{-\sqrt{\beta}(x-x')} \quad (2.21)$$

où K, C_1 et C_2 sont des constantes réelles et β une constante réelle positive telle que $\sqrt{\beta}$ vérifie

$$\tan x = F^2 x. \quad (2.22)$$

Si de plus, on tient compte de la dernière condition du système (2.19), alors on aura

$$v(x) = K e^{-\sqrt{\beta}|x-x'|}, \quad (2.23)$$

et les solutions particulières trouvées par séparation des variables sont de la forme

$$u(x, y) = K \sin(\sqrt{\beta}y) e^{-\sqrt{\beta}|x-x'|}. \quad (2.24)$$

Posons $\sqrt{\beta} = \lambda$.

Notons $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le système dénombrable des solutions positives de (2.22), avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$

Cette résolution nous permet d'écrire la distribution de Dirac sous la forme

$$\delta(y - y') = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{c_n^2} \sin(\lambda_n y) \sin(\lambda_n y'), \quad (2.25)$$

et nous incite, en tenant compte de la propriété de symétrie de G , à chercher la fonction de Green sous la forme

$$G(x, y; x', y') = \sum_{n \geq 1} G_n(x; x') \frac{1}{c_n^2} \sin(\lambda_n y) \sin(\lambda_n y'); \quad (2.26)$$

où

$$G_n(x; x') = K_n e^{-\lambda_n |x-x'|},$$

avec $\{K_n, n \in \mathbb{N}\}$, des constantes à déterminer, et

$$c_n^2 = \int_0^1 \sin^2(\lambda_n y) dy.$$

Remarque 1 :

On vérifie aisément que

1. $\lambda_1 > 1$
2. $n\frac{\pi}{2} < \lambda_n < (n+1)\frac{\pi}{2}$, $\forall n > 1$
3. $\frac{1}{4} < c_n^2 < \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 1$

2ème étape : calcul de G

A partir de l'expression (2.26) de G , on dérive formellement autant de fois que nécessaire, puis on substitue les dérivées secondes ainsi que l'expression (2.25) de δ dans la première équation de (2.17). On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \left[\frac{\partial^2 G_n}{\partial x^2} - \lambda_n^2 G_n \right] \frac{1}{c_n^2} \sin(\lambda_n y) \sin(\lambda_n y') = \\ -\delta(x - x') \sum_{n \geq 1} \frac{1}{c_n^2} \sin(\lambda_n y) \sin(\lambda_n y'); \end{aligned} \quad (2.27)$$

puis par identification :

$$\frac{\partial^2 G_n}{\partial x^2} - \lambda_n^2 G_n = -\delta(x - x'); \quad x, x' \in \mathbb{R}. \quad (2.28)$$

Il faut à présent déterminer K_n , et pour cela, on procède comme suit :

notons

$$G_n^+ = G_n /_{A^+ \times (0,1)} \quad \text{et} \quad G_n^- = G_n /_{A^- \times (0,1)},$$

puis, utilisons la formule des sauts (pour les distributions) pour transformer l'équation (2.28), en désignant par $\frac{\partial G}{\partial x}(x; x')$ la dérivée de G au sens des distributions et par $[\frac{\partial G}{\partial x}(x; x')]$ la dérivée de G au sens presque partout (p.p). Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_n}{\partial x^2}(x; x') = (G_n^+(x = x'; x') - G_n^-(x = x'; x')) \delta'(x - x') + \\ \left(\frac{\partial G_n^+}{\partial x}(x = x'; x') - \frac{\partial G_n^-}{\partial x}(x = x'; x') \right) \delta(x - x') + \left[\frac{\partial^2 G_n}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

En injectant (2.29) dans (2.28), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial^2 G_n}{\partial x^2}(x; x') \right] - \lambda_n^2 G_n = 0 \quad \text{pour } x \neq x', \\ G_n^+(x = x'; x') - G_n^-(x = x'; x') = 0, \\ \frac{\partial G_n^+}{\partial x}(x = x'; x') - \frac{\partial G_n^-}{\partial x}(x = x'; x') = -1, \end{array} \right. \quad (2.30)$$

ce qui entraîne :

$$-K_n \lambda_n - K_n \lambda_n = -1$$

et donc

$$K_n = \frac{1}{2\lambda_n}.$$

D'où

$$G_n(x; x') = \frac{1}{2\lambda_n} \exp(-\lambda_n |x - x'|); \quad \forall x \in \mathbb{R}; \forall x' \in \mathbb{R},$$

et

$$G(x - x'; y, y') = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n c_n^2} e^{-\lambda_n |x - x'|} \sin(\lambda_n y) \sin(\lambda_n y'). \quad (2.31)$$

Exemple 2 :

$$\begin{cases} -\Delta V = f & \text{dans } Q_2, \\ V(x, H) + k \frac{\partial V}{\partial y}(x, H) = 0 & \text{sur } \{y = H\}, \\ V(x, 1) = 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

où f est une fonction donnée dans $L^2(Q_2)$; k une constante réelle positive, H une constante $0 < H < 1$ et $Q_2 = \mathbb{R} \times (H, 1)$.

On procède avec la même méthode que pour l'exemple 1, et on trouve :

$$G(x - x', y, y') = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n c_n^2} \exp(-\lambda_n |x - x'|) \sin(\lambda_n (y - 1)) \sin(\lambda_n (y' - 1)),$$

où λ_0 est l'unique solution positive de l'équation

$$\coth(x(H - 1)) = -kx,$$

et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont les solutions positives de l'équation

$$\tan(x(H - 1)) = -kx,$$

avec

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

et

$$c_n^2 = \int_H^1 \sin^2(\lambda_n (y - 1)) dy$$

Remarque 2 :

$$\lambda_n \geq \alpha_0 > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{où } \alpha_0 = \min(\lambda_0; \lambda_1).$$

2.2.3 Propriétés.

Les propriétés de G , établies ci-dessous, seront utilisées pour l'étude du comportement à l'infini de la solution des problèmes traités dans les chapitres 3 et 4.

Théorème :

G étant donnée par l'expression (2.31), alors

1. $\exists K_0 > 0$ tel que $|G(x - x'; y, y')| \leq K_0 |\ln(|x - x'| + |y - y'|)|$,
 $\forall x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $|x - x'| \leq 1$, $\forall y, y' \in (0; 1)$.
2. $\exists K_m > 0$ tel que $|D^m G(x - x'; y, y')| \leq K_m (|x - x'| + |y - y'|)^{-m}$,
 $\forall x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $|x - x'| \leq 1$, $\forall y, y' \in]0; 1[$; $1 \leq m \leq 2$.
3. $\exists C_m > 0$ tel que $|D^m G(x - x'; y, y')| \leq C_m \exp(-c|x - x'|)$,
 $\forall x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $|x - x'| \geq 1$, $\forall y, y' \in]0; 1[$; $0 \leq m \leq 2$.

Démonstration :

Soit E la fonction de Green du laplacien dans \mathbb{R}^2 , c'est à dire :

$$E(x, x'; y, y') = -\frac{\ln(\sqrt{|x - x'|^2 + |y - y'|^2})}{2\pi}.$$

Posons

$$h = G + E,$$

et notons

$$\Gamma_0 = \mathbb{R} \times \{0\} \text{ et } \Gamma_1 = \mathbb{R} \times \{1\}.$$

La fonction h est harmonique et vérifie

$$\begin{cases} h|_{\Gamma_0} = E|_{\Gamma_0}, \\ (F^2 \frac{\partial h}{\partial n} - h)|_{\Gamma_1} = (F^2 \frac{\partial E}{\partial n} - E)|_{\Gamma_1}. \end{cases}$$

Comme h est harmonique sur Q alors elle y est C^∞ , donc elle est bornée sur tout compact contenu dans Q .

Par ailleurs, au voisinage de (x', y') , $\ln(|x - x'| + |y - y'|)$ tend vers l'infini. Il en résulte que sur un compact contenu dans Q tel que $|x - x'| \leq 1$, h est dominée par $\ln(|x - x'| + |y - y'|)$; ce qui implique qu'il existe une constante positive C telle que l'on ait

$$|h(x - x'; y, y')| \leq C |\ln(|x - x'| + |y - y'|)|,$$

$$\forall x, x' \in \mathbb{R} \text{ tels que } |x - x'| \leq 1, \forall y, y' \in]0; 1[.$$

Et comme

$$G = -E + h = \frac{\ln(\sqrt{|x - x'|^2 + |y - y'|^2})}{2\pi} + h,$$

la première inégalité du théorème est établie.

Le raisonnement fait ci-dessus sur G sera réitéré sur $D^m G$ pour obtenir les inégalités correspondantes lorsque $|x - x'| \leq 1$.

Pour démontrer les inégalités du dernier point du théorème, il suffit d'utiliser quelques artifices élémentaires de calcul ainsi que les résultats de la remarque 1, sur les valeurs $(\lambda_n)_n$. En effet ; on écrit

$$\exp(-\lambda_n|x-x'|) = \exp\left(-\frac{\lambda_n}{2}|x-x'|\right) \exp\left(-\frac{\lambda_n}{2}|x-x'|\right),$$

puis, comme

$$|x-x'| \geq 1 \text{ et } \lambda_n \geq \lambda_1 \quad \forall n, n \geq 1$$

alors

$$\exp\left(-\frac{\lambda_n}{2}|x-x'|\right) \exp\left(-\frac{\lambda_n}{2}|x-x'|\right) \leq \exp\left(-\frac{\lambda_n}{2}\right) \exp\left(-\frac{\lambda_1}{2}|x-x'|\right),$$

ce qui entraîne

$$\sum_{n \geq 1} \exp(-\lambda_n|x-x'|) \leq \exp\left(-\frac{\lambda_1}{2}|x-x'|\right) \sum_{n \geq 1} \exp\left(-\frac{\lambda_n}{2}\right).$$

Et comme la série $\sum_{n \geq 1} \exp\left(-\frac{\lambda_n}{2}\right)$ est convergente, l'inégalité est établie pour $m = 0$. On procède de la même façon pour $m \geq 1$.

2.3 Les espaces fonctionnels

Dans ce paragraphe, nous allons introduire le cadre fonctionnel utilisé dans la résolution des problèmes présentés dans l'introduction en définissant les espaces. Il s'agit d'espaces de fonctions qui sont des algèbres de Banach et que nous avons rencontrés pour la première fois dans les articles de F. Abergel et J.L. Bona [15] et Charles J. Amick[18]. Ce sont des espaces qui se prêtent parfaitement à l'usage que nous en avons fait dans le cadre de l'application du théorème des fonctions implicites dans les espaces de Banach.

Une fois leur définition donnée, il apparaît clairement que ce sont des espaces de fonctions régulières dont le comportement à l'infini convient à la donnée du problème que nous souhaitons résoudre (à savoir, la fonction scalaire notée b qui représente le fond du canal). En effet, rappelons que pour les écoulements présentés dans l'introduction générale, la donnée principale est la fonction b , qui est supposé régulière (de classe C^2) et à support compact. Or dans ces espaces, les fonctions ont cette régularité et de plus elles "s'écrasent" à l'infini. Prouver l'existence de la solution dans ce type d'espace revient donc à en assurer régularité ainsi que comportement à l'infini.

2.3.1 Définitions

Pour tous $m \in \mathbb{N}$; $\lambda \in \mathbb{R}$; $0 < \lambda < 1$; $c > 0$, on définit les espaces et les normes suivants :

$$B_c^{m,\lambda}(\bar{Q}) = \left\{ v \in C^{m,\lambda}(\bar{Q}) / \sup_{k+l \leq m} \sup_{(x,y) \in \bar{Q}} e^{c|x|} \left| D_x^k D_y^l v(x,y) \right| < \infty \right\} \quad (2.33)$$

muni de la norme :

$$\begin{aligned} \|v\|_{m,c,\lambda} &= \sum_{k+l \leq m, (x,y) \in \bar{Q}} \sup e^{c|x|} \left| D_x^k D_y^l v(x,y) \right| + \\ &+ \sup_{k+l=m, (x,y) \neq (x',y')} \sup \frac{|D_x^k D_y^l v(x,y) - D_x^k D_y^l v(x',y')|}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^\lambda} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R}) = \left\{ v \in C^{m,\lambda}(\mathbb{R}) / \sum_{0 \leq k \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{c|x|} \left| D_x^k v(x) \right| < \infty \right\} \quad (2.35)$$

muni de la norme :

$$\|v\|_{m,c,\lambda} = \sum_{0 \leq k \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{c|x|} \left| D_x^k v \right| + \sup_{\substack{(x,x') \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq x'}} \frac{|D_x^m v(x) - D_x^m v(x')|}{|x-x'|^\lambda} \quad (2.36)$$

2.3.2 Propriétés

Les propositions suivantes donnent les principales propriétés qui caractérisent ces espaces

Proposition 1 *Les espaces $B_c^{m,\lambda}(\bar{Q})$ et $B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R})$ munis de leurs normes respectives sont des algèbres de Banach.*

Proposition 2 *Les fonctions de $B_c^{m,\lambda}(\bar{Q})$, ainsi que leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à m sont des fonctions à décroissance rapide vers zéro.*

Chapitre 3

Existence and Uniqueness of the Solution of a Supercritical Free Surface Flow Problem over an Obstacle

Introduction

Dans ce chapitre, nous modélisons et étudions l'écoulement d'un fluide supposé parfait et incompressible, dans un canal de longueur infinie et de profondeur finie dans le cas bidimensionnel, stationnaire et irrotationnel, à l'aide des équations d'Euler .

Nous prenons en compte la force de gravité et négligeons les effets de la tension de surface.

Le fond du canal est plat partout sauf sur une partie bornée où se trouve un obstacle. À l'infini amont et aval, la profondeur du canal est constante et est désignée par H et la vitesse de l'écoulement est supposée uniforme et notée $(U_0, 0)$. La perturbation de la frontière libre est représentée par une fonction scalaire inconnue notée γ tandis que le fond est représenté par une fonction scalaire donnée, "régulière", notée b .

Les équations sont adimensionnées, puis réécrites à l'aide de la fonction de courant ψ . le domaine de l'écoulement, qui est limité inférieurement par le fond du canal avec l'obstacle et supérieurement par la frontière libre (inconnue du problème), est transformé via un changement de variable en un domaine fixe et les équations qui régissent le mouvement sont à nouveau modifiées.

Un cadre propice à l'application du théorème des fonctions implicites sur un opérateur noté T défini sur des algèbres de Banach, est alors mis en place. L'inversibilité de l'opérateur $\frac{\partial T}{\partial \gamma}(0, 0)$ est une étape délicate qu'on finit par franchir pour aboutir à un résultat d'existence et d'unicité de γ . De plus, les espaces fonctionnels choisis assurent la régularité ainsi que le comportement à l'infini de la solution.

Cet article a été publié le 08 avril 2010 dans la revue "Revista Matemática Complutense 2010".

Introduction

In a bidimensional channel, a state of a problem concerning an irrotational and stationary flow of an incompressible and inviscid fluid is considered. An obstacle, given by $y = b(x)$, lies on the bottom of the channel. Far upstream the obstacle, the fluid comes with a uniform velocity $(U_0; 0)$, and the channel is infinite and has a uniform depth H . We take into account the gravity g and neglect the superficial tension effects. As is known, the main difficulty of problems of this kind is due to the presence of a nonlinear condition on a free boundary. The problem is formulated as an equation of a non linear operator $T(b, \gamma)$ (Bernoulli equation), defined on the free surface $y = H + \gamma(x)$; $\gamma(x)$ is the perturbation of the free boundary and is the principal unknown of the problem.

Note that when the bottom is flat, the free surface is also flat, so $T(0, 0) = 0$. We look for γ by applying the implicit function theorem to the equation $T(b, \gamma) = 0$. The difficulty which this would involve is essentially the proof of the invertibility of $\frac{\partial T}{\partial \gamma}(0, 0)$.

We will see, in the second section, that after nondimensionalization, it appears in the Bernoulli equation, a dimensionless number F ($F = \frac{U_0}{\sqrt{gH}}$), called "Froude number", characterizing the flow. The flow is said 'torrential' or 'supercritical' when $F > 1$ and 'fluvial' or 'subcritical' when $F < 1$. This problem has been studied numerically and theoretically by several authors, for example A. C. King and M. I. G. Bloor [49], F. Helein [14], L. K. Forbes [41], M. Bouhadeh [16] and D. Boukari, R. Djouadi and D. Teniou [10]. In [13] some stability results of the solution of the problem considered are given.

In this work, we establish a result of existence and uniqueness of the solution for Froude number F greater than one. This paper is organized as follows : in section 2, we give the governing equations of the problem, first with the stream function, then with the perturbation stream function. The section 3 consists of change the domain fluid on a fixed domain and the new equations and spaces are given in order to apply the implicit function theorem to the equation $T(b, \gamma) = 0$. In section 4, we verify the conditions of the application of this theorem and we establish our main result.

3.1 Position of the problem

We consider a bidimensional, irrotational and stationary flow of an ideal and incompressible fluid in an infinite channel Ω , with a finite depth and an obstacle on the bottom. We consider the supercritical case ($F > 1$), so we suppose that the flow is uniform with a velocity $(U_0; 0)$ and the depth of the flow is constant and denoted by H , at the infinity downstream and upstream of the obstacle (see the following figure).

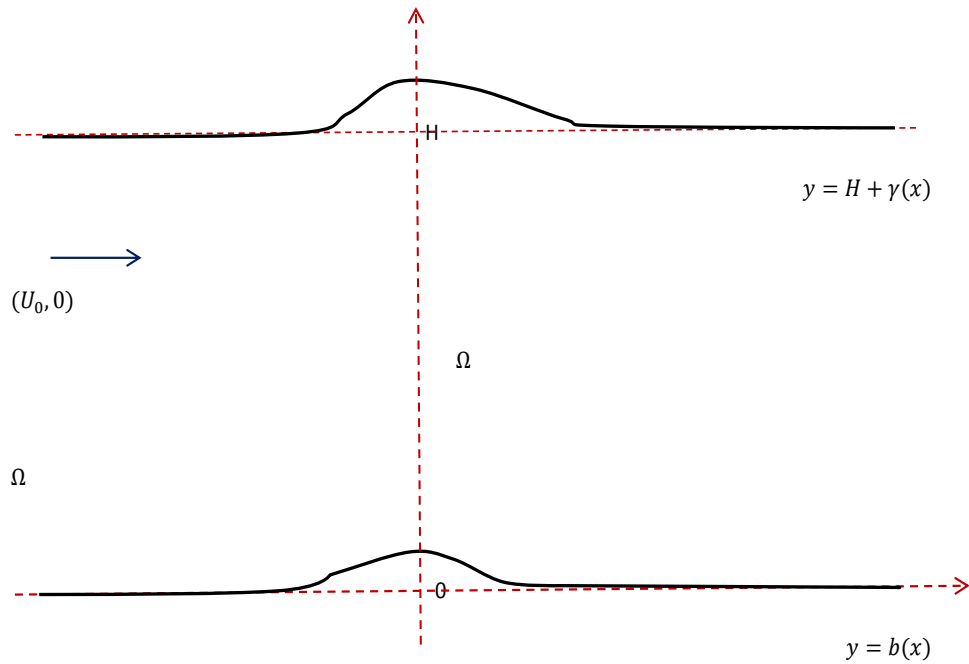


FIGURE 3.1 – Flow domain.

The bottom is flat everywhere except in a place where lies an obstacle. The equations of the bottom Γ_2 and the free surface Γ_1 are respectively given by

$y = b(x)$ and $y = H + \gamma(x)$. The fluid domain Ω is given by :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / b(x) < y < H + \gamma(x)\}.$$

The irrotationality of the flow of the fluid allows us to introduce an harmonic stream function ψ in Ω and the incompressibility gives $\Delta\psi = 0$ in Ω . The bottom and the free surface of Ω are streamlines so ψ is constant on Γ_2 and on Γ_1 . We choose $\psi = 0$ on the bottom and so it will be equal to the rate of flow on the free surface. In addition, we have an equilibrium condition on the free surface, called the Bernoulli equation, which expresses the continuity of the pressure across the free surface. It is given by :

$$\frac{\rho}{2}|\nabla\psi|^2 + \rho gy = C^{te} \text{ on } y = H + \gamma(x), \quad (3.1)$$

where ρ is the density of the fluid. The constant which appears in the relation (3.1) will be evaluated later.

3.2 Nondimensionalization

Using the values of U_0 and H , we nondimensionalize the equations verified by ψ ; we put

$$x = Hx^*; \quad \gamma^*(x^*) = \frac{1}{H}\gamma(x); \quad b^*(x^*) = \frac{1}{H}b(x). \quad (3.2)$$

Details are given in paragraphs 2.1 and 4.2.3; then it appears a number $F = \frac{U_0}{\sqrt{gH}}$, called the Froude number which characterizes the flow.

Remark 3 *After the nondimensionalization, the symbol '*' is dropped everywhere and the free surface profile $y = H + \gamma(x)$ is written $y = 1 + \gamma(x)$, instead of $y^* = 1 + \gamma^*(x^*)$, and Ω will be denoted by*

$$\Omega_b^\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / b(x) < y < 1 + \gamma(x)\}.$$

The Bernoulli equation becomes

$$\frac{F^2}{2}|\nabla\psi|^2 + y = C^{te} \text{ on } y = 1 + \gamma(x). \quad (3.3)$$

Since ψ is constant on the free surface, the tangential derivative of ψ is equal to zero on this surface. Then the Bernoulli equation takes the new form :

$$\frac{F^2}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)^2 + y = C^{te} \text{ on } y = 1 + \gamma(x), \quad (3.4)$$

where $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ is the normal derivative of ψ at the free surface. The constant in equation (3.4) is equal to $(\frac{F^2}{2} + 1)$; indeed at the infinity upstream of the obstacle, we have :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial\psi}{\partial n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 1, \text{ and } y = 1,$$

so $\frac{F^2}{2} + 1 = C^{te}$. The flow being uniform at the infinity upstream and downstream of the obstacle, the function ψ equals y when x tends to $\pm\infty$. Finally ψ verifies the following system :

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{on } y = b(x), \\ \psi = 1 & \text{on } y = 1 + \gamma(x), \\ \frac{F^2}{2}|\nabla\psi|^2 + y = \frac{F^2}{2} + 1 & \text{on } y = 1 + \gamma(x), \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x, y) = y. \end{cases} \quad (3.5)$$

Taking into account that ψ equals to y when $b(x) = 0$, we can write $\psi = y + \psi_p$, where ψ_p is the perturbation stream function ; so the system (3.5) becomes

$$\begin{cases} \Delta\psi_p = 0 & \text{in } \Omega, \\ \psi_p = -b(x) & \text{on } y = b(x), \\ \psi_p = -\gamma(x) & \text{on } y = 1 + \gamma(x), \\ \frac{F^2}{2}(|\nabla\psi_p|^2 + 2\frac{\partial\psi_p}{\partial y}) + \gamma(x) = 0 & \text{on } y = 1 + \gamma(x), \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi_p(x, y) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

3.3 Transformation of the domain and the governing equations

3.3.1 Governing equations in the fix domain

We transform the domain Ω_b^γ into the infinite strip :

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\infty < x < +\infty, 0 < y < 1\},$$

by the following change of variables :

$$\begin{cases} \tilde{x} = x, \\ \tilde{y} = \frac{y-b(x)}{1+\gamma(x)-b(x)}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Γ_l and Γ_u denote respectively the lower bound and the upper bound of Q (see figure 3.2 below).

We put $\psi_p(x, y) = \tilde{\psi}_p(\tilde{x}, \tilde{y})$, then the system (3.6) becomes :

$$\begin{cases} \Delta\tilde{\psi}_p + \mathcal{P}_b^\gamma\tilde{\psi}_p = 0 & \text{in } Q, \\ \tilde{\psi}_p(\tilde{x}, 0) = -b(\tilde{x}), & \tilde{x} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\psi}_p(\tilde{x}, 1) = -\gamma(\tilde{x}), & \tilde{x} \in \mathbb{R}, \\ \frac{F^2}{2} \left[\left| \tilde{\nabla}_{b,\gamma}\tilde{\psi}_p \right|^2(\tilde{x}, 1) + \frac{2}{1+\gamma-b} \frac{\partial\tilde{\psi}_p}{\partial\tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right] + \gamma(\tilde{x}) = 0, \\ \lim_{\tilde{x} \rightarrow \pm\infty} \tilde{\psi}_p(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

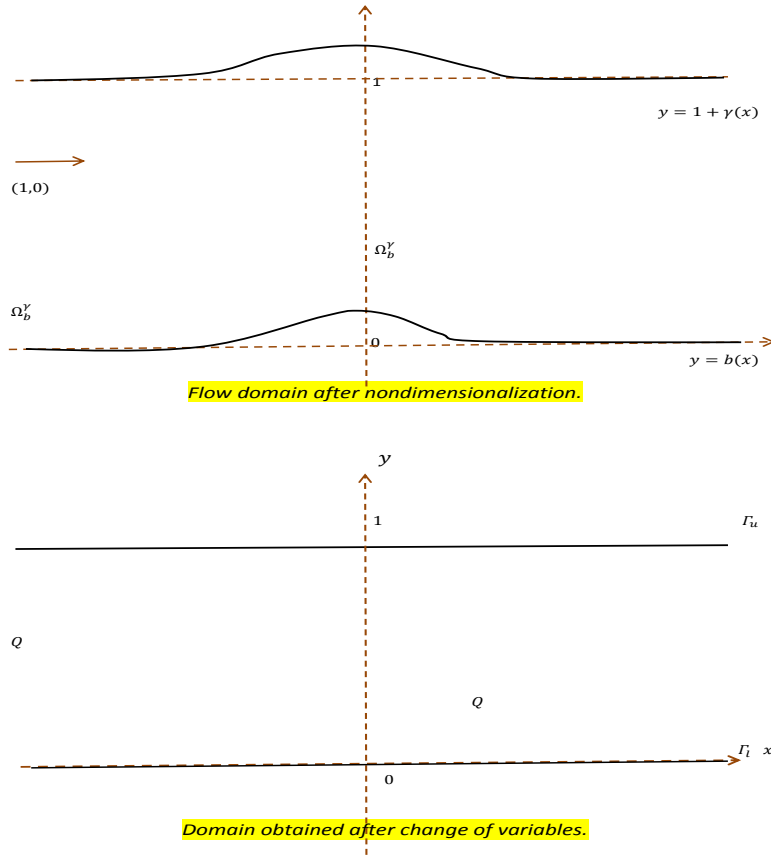


FIGURE 3.2 – Flow domain after nondimensionalization and its transformed domain by change of variables.

where the unknowns are $\gamma(\tilde{x})$ and $\tilde{\psi}_p(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Henceforth, we denote $\tilde{\psi}$ instead of $\tilde{\psi}_p$. The gradient operator $\tilde{\nabla}_{b,\gamma}$ is given by :

$$\tilde{\nabla}_{b,\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{-b' - \tilde{y}(\gamma' - b')}{1 + \gamma - b} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{1}{1 + \gamma - b} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \end{pmatrix},$$

and \mathcal{P}_b^γ is an operator defined by :

$$\mathcal{P}_b^\gamma = a_1 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + a_3 \frac{\partial}{\partial \tilde{y}},$$

where

$$a_1 = 2 \frac{\tilde{y}(b' - \gamma') - b'}{1 + \gamma - b},$$

$$a_2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - 1 + \frac{1}{(1 + \gamma - b)^2}$$

and

$$a_3 = \frac{-1}{1 + \gamma - b} [b'' + \tilde{y}(\gamma'' - b'')] + \frac{2}{(1 + \gamma - b)^2} (\gamma' - b') [b' + \tilde{y}(\gamma' - b')].$$

Note that $\mathcal{P}_0^0 \equiv 0$.

In the following sections, for b fixed in a Banach space, which will be chosen, we prove the existence and the uniqueness of γ in the same space as b , verifying the fourth equation of the system (3.8), where $\tilde{\psi}$ is the solution of :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\psi} + \mathcal{P}_b^\gamma \tilde{\psi} = 0 & \text{in } Q, \\ \tilde{\psi}(\tilde{x}, 0) = -b(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\psi}(\tilde{x}, 1) = -\gamma(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}, \\ \lim_{\tilde{x} \rightarrow \pm\infty} \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

3.3.2 The choice of the spaces

We use the implicit function theorem to solve the equation

$$\frac{F^2}{2} \left[\left| \tilde{\nabla}_{b,\gamma} \tilde{\psi} \right|^2(\tilde{x}, 1) + \frac{2}{1 + \gamma - b} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right] + \gamma(\tilde{x}) = 0, \quad (3.10)$$

so we define an operator T from $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ into $B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$, which associate to (b, γ) , $T(b, \gamma)$ given by :

$$T(b, \gamma) := \frac{F^2}{2} \left[\left| \tilde{\nabla}_{b,\gamma} \tilde{\psi} \right|^2(\tilde{x}, 1) + \frac{2}{1 + \gamma - b} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right] + \gamma(\tilde{x}). \quad (3.11)$$

The functions b and γ are in the space :

$$B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) = \left\{ v \in C^{2,\lambda}(\mathbb{R}) / \sum_{0 \leq k \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{c|x|} |D_x^k v(x)| < \infty \right\},$$

and $\tilde{\psi}$ in the space :

$$B_c^{2,\lambda}(\bar{Q}) = \left\{ v \in C^{2,\lambda}(\bar{Q}) / \sup_{k+l \leq 2} \sup_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \bar{Q}} e^{c|\tilde{x}|} |D_{\tilde{x}}^k D_{\tilde{y}}^l v(\tilde{x}, \tilde{y})| < \infty \right\},$$

with $0 < \lambda < 1$ and $c > 0$.

Remark 4 1. The space $B_c^{m,\lambda}(\overline{Q})$ defined by :

$$B_c^{m,\lambda}(\overline{Q}) = \left\{ v \in C^{m,\lambda}(\overline{Q}) / \sup_{k+l \leq m} \sup_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \overline{Q}} e^{c|\tilde{x}|} \left| D_{\tilde{x}}^k D_{\tilde{y}}^l v(\tilde{x}, \tilde{y}) \right| < \infty \right\}, \text{ provided with the norm :}$$

$$\|v\|_{m,c,\lambda} = \sum_{k+l \leq m} \sup_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \overline{Q}} e^{c|\tilde{x}|} \left| D_{\tilde{x}}^k D_{\tilde{y}}^l v(\tilde{x}, \tilde{y}) \right| + \sup_{k+l=m} \sup_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq (\tilde{x}', \tilde{y}')} \frac{\left| D_{\tilde{x}}^k D_{\tilde{y}}^l v(\tilde{x}, \tilde{y}) - D_{\tilde{x}}^k D_{\tilde{y}}^l v(\tilde{x}', \tilde{y}') \right|}{\left[(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2 \right]^\lambda},$$

is a Banach algebra.

2. The space $B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R})$ defined by :

$$B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R}) = \left\{ v \in C^{m,\lambda}(\mathbb{R}) / \sum_{0 \leq k \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{c|x|} \left| D_x^k v(x) \right| < \infty \right\}, \text{ provided with}$$

the norm :

$$\|v\|_{m,c,\lambda} = \sum_{0 \leq k \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{c|x|} \left| D_x^k v \right| + \sup_{\substack{(x,x') \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq x'}} \frac{|D_x^m v(x) - D_x^m v(x')|}{|x - x'|^\lambda},$$

is also a Banach algebra.

3.4 Existence and uniqueness result

Note that if there is no obstacle on the bottom, then the free surface is flat. So, we have $T(0,0) = 0$. We fix b in $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ and we apply the implicit function theorem to the equation :

$$T(b, \gamma) = 0 \tag{3.12}$$

The hypothesis of this theorem are verified in the following subsections :

3.4.1 Differentiability of T with respect to b and γ

The differentiability of T with respect to b and γ is based on some results established in [15]. There exists an open ball \mathcal{B} of radius r_0 centered at the origin of $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ such that T is continuously differentiable in this ball with respect to b and γ .

3.4.2 Calculus of $\frac{\partial T}{\partial \gamma}(0,0).h$

Let $h \in B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$. The expression of $\frac{\partial T}{\partial \gamma}(0,0).h$ is obtained by executing the following steps :

1. we put $b = 0$ in the expression of $T(b, \gamma)$, given by (3.11);
2. we derive with respect to γ in the direction of h ;
3. we evaluate the derivative at $\gamma = 0$, by taking into account that $\tilde{\psi}$ is the unique solution of the system (3.9) and that $\tilde{\psi} \equiv 0$ when $b \equiv \gamma \equiv 0$;

we set

$$w_h = \left. \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma} \right|_{b=\gamma=0} .h,$$

then we obtain :

$$\frac{\partial T}{\partial \gamma}(0,0).h = h + F^2 \frac{\partial w_h}{\partial y}(\cdot, 1),$$

where $w_h = \left. \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma} \right|_{b=\gamma=0} .h$ and verifies :

$$\begin{cases} \Delta w_h = 0 & \text{in } Q, \\ w_h(\tilde{x}, 0) = 0, & \tilde{x} \in \mathbb{R}, \\ w_h(\tilde{x}, 1) = -h(\tilde{x}), & \tilde{x} \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.13)$$

3.4.3 Invertibility of $\frac{\partial T}{\partial \gamma}(0,0)$

The invertibility of the operator $\frac{\partial T}{\partial \gamma}(0,0)$ consists to prove that for a given q in $B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$, there exists one and only one h in $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ such that

$$h + F^2 \frac{\partial w_h}{\partial y}(\cdot, 1) = q, \quad (3.14)$$

with w_h verifying the system (3.13). From here onwards, we omit the symbol tilda for simplicity. The following theorem ensures us the result (3.14).

Theorem 5 *The operator $h \mapsto h + F^2 \frac{\partial w_h}{\partial y}(\cdot, 1)$ is an isomorphism from $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ into $B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$, w_h is the solution of the system (3.13).*

The proof of this theorem is deduced from the following one.

Theorem 6 *Consider the boundary value problem*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } Q, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ -u(x, 1) + F^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = q(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.15)$$

with assumption that $q \in B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$; for $F > 1$, the problem (3.15) has a unique solution u in $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$.

Proof of theorem 6 :

The proof consists of three stages :

First stage :

Existence and uniqueness of a weak solution.

Let V the space

$$V = \{v \in H^1(Q) / v(x, 0) = 0\}. \quad (3.16)$$

The variational formulation of the problem (3.15) is :

$$\text{find } u \in V \text{ such that } a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V, \quad (3.17)$$

where

$$a(u, v) = \int_Q \nabla u \nabla v \, dx dy - \frac{1}{F^2} \int_{\Gamma_u} u v \, d\sigma \quad \text{and} \quad l(v) = \frac{1}{F^2} \int_{\Gamma_u} q v \, d\sigma,$$

and Γ_u is the upper bound of Q .

We verify the coercivity of the bilinear form $a(., .)$:

we have

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_Q |\nabla u|^2 \, dx dy - \frac{1}{F^2} \int_{\Gamma_u} u^2 \, d\sigma = \\ &= \int_Q |\nabla u|^2 \, dx dy - \frac{1}{F^2} \int_{\mathbb{R}} (u(x, 1))^2 \, dx \\ &= \int_Q |\nabla u|^2 \, dx dy - \frac{1}{F^2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \, dt \right)^2 \, dx. \end{aligned}$$

Using the Cauchy-Schwartz inequality, we obtain :

$$\left(\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \, dt \right)^2 \leq \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \right)^2 \, dt \leq \int_0^1 |\nabla u|^2 \, dt,$$

then we have

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq \left(1 - \frac{1}{F^2}\right) \|\nabla u\|_{L^2(Q)}^2 = \left(1 - \frac{1}{F^2}\right) \left(\frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(Q)}^2\right) \geq \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{F^2}\right) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c_1} \|u\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(Q)}^2\right) \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{F^2}\right) \min\left(\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2}\right) (\|u\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(Q)}^2), \end{aligned}$$

so we obtain

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H^1(Q)}^2 \quad \forall u \in V,$$

with $\alpha = \left(1 - \frac{1}{F^2}\right) \min\left(\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2}\right) > 0$ because $F > 1$ (c_1 is the inequality Poincaré constant).

Moreover, the bilinear form "a" is continuous on $V \times V$ and the linear form "l" is continuous on V , then the Lax-Milgram theorem implies that the problem (3.15) has a unique solution u in V .

The following remark is useful in the next stage.

Remark 7 $u \in H^2(Q)$ because u is in $H^1(Q)$ and $q \in B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$ (see pb (3.15)).

The aim of the following stages is to prove that the solution u is in the space $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$.

Second stage :

Before proving that $u \in C^{2,\lambda}(\overline{Q})$, note the three following results :

1. $\Delta u = 0$ in Q implies $u \in C^{m,\lambda}(Q)$ for $m \in \mathbb{N}$ (we can see for example [40]).
2. $u \in H^2(Q) \subset C^{0,\lambda}(\overline{Q})$ (see [21] page 108 lemma 5.17)
3. $u \in C^{2,\lambda}(Q \cup \Gamma_l)$ (see [42] page 109, lemma 6.18).

To establish that $u \in C^{2,\lambda}(Q \cup \Gamma_u)$, we use theorem 6.31 of Gilbarg-Trudinger [42], where the condition $\gamma(\beta, \nu)$ can be modified according to the comments at the end of the proof of this theorem (page 130 in [42]).

So we conclude that $u \in C^{2,\lambda}(\overline{Q})$.

To prove that $u \in B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$, it remains to verify

$$\sup_{k+l \leq 2} \sup_{\overline{Q}} e^{c|x|} \left| D_x^k D_y^l u \right| < \infty, \quad (3.18)$$

which is equivalent to

$$\sup_{\overline{Q}} e^{c|x|} \left| D_x^k D_y^l u \right| < \infty \quad \forall k, l \in \mathbb{N}; k + l \leq 2. \quad (3.19)$$

Third stage :

This stage is devoted to prove the relation (3.19).

Let

$$v = u + \frac{y}{F^2} \int_{x+y-1}^x q(s) ds, \quad (3.20)$$

where u is the solution of the problem(3.15). Then v is the solution of the following homogeneous problem

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{in } Q, \\ v(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ -v(x, 1) + F^2 \frac{\partial v}{\partial y}(x, 1) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.21)$$

where $f = -\Delta(\frac{y}{F^2} \int_{x+y-1}^x q(s) ds)$ is in $B_c^{0,\lambda}(\overline{Q})$ because the function $\frac{y}{F^2} \int_{x+y-1}^x q(s) ds$ is in $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$; so it is sufficient to prove the relation (3.19) for v .

Introduce the Green's function \mathbf{g} associated to the problem (3.21). Because of the structure of the problem, $\mathbf{g}(x, y; x', y')$ can be written as $G(x - x'; y, y')$, where G is the solution of

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(x - x')\delta(y - y') & \text{in } Q, \\ G(x - x', 0, y') = 0, \\ -G(x - x', 1, y') + F^2 \frac{\partial G}{\partial y}(x - x', 1, y') = 0, \\ |G| < \infty & \text{for } |x| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

After calculations, we obtain :

$$G(x - x', y, y') = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n c_n^2} e^{-\lambda_n |x - x'|} \sin(\lambda_n y) \sin(\lambda_n y') \quad (3.22)$$

where each λ_n , $n \in \mathbb{N}^*$, is a positive solution of the equation $\tan \lambda = F^2 \lambda$; and $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$

Remark 8 *We can easily check that*

1. $\lambda_1 > 1$,
2. $n \frac{\pi}{2} < \lambda_n < (n + 1) \frac{\pi}{2}$, $\forall n > 1$,
3. $\frac{1}{4} < c_n^2 < \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 1$.

Denote by D^k the differential operator in the variables x and y of order k . Then, using the expression (3.22), we obtain strictly positive constants C and \tilde{c} such that

$$|D^k G(x - x', y, y')| \leq C e^{-\tilde{c}|x - x'|}, \quad (3.23)$$

for $|x - x'| \geq 1$.

Remark 9 *The constant \tilde{c} can be taken equal to $\frac{\lambda_1}{2}$ or $\frac{\lambda_1}{3}$ or more generally $\frac{\lambda_1}{m}$ where m is an integer fixed in such a way that $\tilde{c} - c > 0$.*

Thanks to classical theory of Green's functions, $G(x - x', y, y')$ can be written as sum of the free Green's function in the whole space \mathbb{R}^2 and an harmonic function $H(x, y; x', y')$:

$$G(x - x', y, y') = -\frac{1}{2\pi} \text{Log}[|x - x'| + |y - y'|] + H(x, y; x', y'). \quad (3.24)$$

Using this expression of G , we obtain that G enjoys the following properties : There exist two strictly positives constants K and k such that

$$|G(x - x', y, y')| \leq K |\text{Log}[|x - x'| + |y - y'|]| + k, \quad (3.25)$$

$$|DG(x - x', y, y')| \leq K [|x - x'| + |y - y'|]^{-1}, \quad (3.26)$$

$$|D^2 G(x - x', y, y')| \leq K [|x - x'| + |y - y'|]^{-2}, \quad (3.27)$$

whenever $|x - x'| \leq 1$.

Now, to prove (3.19) for v , use the Green's function to write

$$v(x, y) = \int_Q G(x - x', y, y') f(x', y') dx' dy', \quad (3.28)$$

so that

$$e^{c|x|} |v(x, y)| \leq e^{c|x|} (C \int_{|x - x'| \geq 1} \int_0^1 e^{-\tilde{c}|x - x'|} |f(x', y')| dy' dx' +$$

$$K \int_{|x-x'|\leq 1} \int_0^1 |\text{Log}[|x-x'|+|y-y'|]|f(x', y')|dy'dx' + k \int_{|x-x'|\leq 1} \int_0^1 |f(x', y')|dy'dx'.$$

Let $M = \sup_{\bar{Q}} e^{c|x|}|f(x, y)|$ and continue the estimate in the last display as follows :

$$\begin{aligned} e^{c|x|}|v(x, y)| &\leq e^{c|x|}K_1M\left(\int_{-\infty}^{x-1} e^{-\tilde{c}|x-x'|}e^{-c|x'|}dx' + \right. \\ &\int_{x+1}^{+\infty} e^{-\tilde{c}|x-x'|}e^{-c|x'|}dx' + \int_{x-1}^{x+1} e^{-c|x'|} \int_0^1 |\text{Log}[|x-x'|+|y-y'|]|dy'dx' + \\ &\left. \int_{x-1}^{x+1} e^{-c|x'|}dx'\right). \end{aligned}$$

Because $|x-x'| \leq 1$, we can easily check that $\int_0^1 |\text{Log}[|x-x'|+|y-y'|]|dy'$ is bounded by a positive constant.

Attention is first drawn to the case wherein $x \rightarrow -\infty$. Assuming that $x+1 \leq 0$, the estimation becomes

$$\begin{aligned} e^{c|x|}|v(x, y)| &\leq e^{c|x|}K_2M\left(\int_{-\infty}^{x-1} e^{-\tilde{c}(x-x')}e^{cx'}dx' + \right. \\ &\int_{x+1}^0 e^{-\tilde{c}(x'-x)}e^{cx'}dx' + \int_0^{+\infty} e^{-\tilde{c}(x'-x)}e^{-cx'}dx' + \\ &\left. \int_{x-1}^{x+1} e^{cx'}dx'\right). \end{aligned}$$

Finally

$$e^{c|x|}|v(x, y)| \leq K_3\left[\frac{e^{-(c+\tilde{c})}}{c+\tilde{c}} + \frac{e^{(c-\tilde{c})}}{\tilde{c}-c} + \frac{1}{\tilde{c}-c} + \frac{1}{c+\tilde{c}} + \frac{e^c - e^{-c}}{c}\right],$$

where K_1, K_2 and K_3 are strictly positive constants.

Taking into account remark 9, we obtain the result for $x \rightarrow -\infty$.

When $x \rightarrow +\infty$, similar considerations lead to :

$$\sup_{\bar{Q}} e^{c|x|}|v(x, y)| < \infty.$$

We proceed in exactly the same fashion to obtain an estimate for the weighted norm of the first derivatives of v , because differentiation under the integral sign is legitimate since the first derivatives have integrable singularities at $(x, y) = (x', y')$.

To estimate the weighted norm of the second derivatives of v , consider the function $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$; $\eta = e^{c|x|}$ for $|x| \geq 1$ and $\eta \geq \eta_0 > 0$ and work out the boundary-value problem to which the function $w = \eta v$ is the solution. Indeed, w is solution of the following elliptic problem :

$$\begin{cases} -\Delta w + 2\frac{\eta'}{\eta}\frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\eta''}{\eta} - 2\frac{\eta'^2}{\eta^2}\right)w = \eta f & \text{in } Q, \\ w(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ -w(x, 1) + F^2\frac{\partial w}{\partial y}(x, 1) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.29)$$

w and the first derivatives of w are already known to be bounded so we use classical Hölder estimates for elliptic equations to conclude. We have established that $v \in B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$, so from (3.20), $u \in B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$.

Then, for q given in $B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$, we conclude that the problem :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } Q, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ -u(x, 1) + F^2\frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = q(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.30)$$

has a unique solution u in $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$ and $h = -u(x, 1)$ is the solution of (3.14), so $\frac{\partial T}{\partial \gamma}(0, 0)$ is invertible.

3.4.4 Main result

Using the two last subsections and the fact that $T(0, 0) = 0$, we give our existence and uniqueness result :

Theorem 10 *There exists $\tilde{c} > 0$ such that whenever $0 < c < \tilde{c}$, there exist an open ball \mathcal{B} of radius r_0 centered at the origin of $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$, $0 < \lambda < 1$, an open neighborhood \mathcal{V}_b of zero in $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$, and a mapping $g: \mathcal{V}_b \rightarrow B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ of class C^1 , such that the following equivalence holds : $\{\forall (b, \gamma) \in \mathcal{B}, T(b, \gamma) = 0\} \Leftrightarrow \{b \in \mathcal{V}_b, \gamma = g(b)\}$.*

3.5 Conclusion

In this paper, the implicit function theorem is used to solve Bernoulli equation. It is shown that, given a bottom of the channel, there exists a unique free surface configuration and that this solution has the same regularity and the same asymptotic behavior as the function which describes the bottom when the flow is supercritical. An interesting perspective is to consider the "inverse" problem i.e : for a given free surface described by a regular function γ , we look for a function b describing the bottom which has created this free surface. Moreover, if the existence of b was established, we can obtain an interesting logarithmic stability result of the bottom $b(x)$ versus the free surface flow $\gamma(x)$, using some results obtained by J. Cheng and M. Yamamoto in [39].

Chapitre 4

Flows of Two Immiscible Fluids over an Obstacle

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du mouvement de deux fluides immiscibles superposés dans un canal de profondeur finie. Nous supposons que les deux fluides sont parfaits, de densités respectives $\rho_1 > \rho_2$ et que leurs mouvements sont irrotationnels, bidimensionnels et uniformes à l'infini (en amont et en aval) avec des vitesses respectives $(u_1, 0), (u_2, 0)$.

Nous tenons compte de la force de gravité tandis que les effets de tension superficielle sont négligés.

Le fond du canal est plat partout sauf sur une partie bornée, où se trouve un obstacle. Nous nous intéressons à l'effet de cet obstacle sur l'interface (surface de séparation entre les deux fluides) qui se trouve à une hauteur fixe H_1 du fond lorsque le mouvement est uniforme, ainsi qu'à l'effet de cet obstacle sur la frontière libre (surface de séparation air-fluide) qui se trouve à une hauteur fixe H_2 du premier fluide lorsque le mouvement est uniforme (voir figure 4.1).

Plus précisément, en faisant l'hypothèse que l'obstacle est "assez petit", nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème issu de la modélisation du mouvement, à l'aide des équations d'Euler, où les inconnues principales sont les fonctions γ_1 et γ_2 , qui représentent les perturbations respectives de l'interface et de la frontière libre ainsi que les champs de vitesses \vec{U}_1 et \vec{U}_2 des écoulements.

Le théorème des fonctions implicites est utilisé sur des espaces de Banach appropriés qui assurent de surcroît le comportement asymptotique de la solution.

4.1 Introduction

Two immiscible fluids superposed move in a plane channel with a finite depth. Asymptotically, we consider a homogeneous fluid of depth H_2 and density ρ_2 moving with a uniform velocity $(u_2, 0)$ over another homogeneous fluid of depth H_1 and density $\rho_1 > \rho_2$, moving with a uniform velocity $(u_1, 0)$.

The bottom of the channel is presumed to be horizontal and flat everywhere except in a place where lies an obstacle while a free boundary separates the air and the top of the second fluid. The two fluids are separated by an interface (see figure 4.1). When the bottom is flat everywhere, we assume that both the free boundary and the interface between the two fluids are also flat. We take gravity into account and we neglect the effects of capillarity.

Most of the mathematical works on free boundary problems which have been identified in the literature, deal with numerical methods but a lot of theoretical studies exist. Concerning the flow of one fluid, with a free boundary separating the fluid and the air, we can quote the following authors and their works :

F. Helein [14], where the derivation of the governing system is detailed, and so this report is an initiation to this kind of free boundary problems; M. Bouhadef [16] for the numerical study of his thesis; F. Abergel and J. L. Bona [15], where the bottom of the channel is an inclined plane; S. R. Belward [36], where an interpolation method is used; D. Pierroti [45], where the case of a free boundary when a semi-submerged cylinder in a heavy fluid of constant depth is considered; D. Boukari; D. Teniou and R. Ait-Yahia [10] and L.K. Forbes [41].

In the case of two fluids, J. L. Bona, D. Lannes and J-C. Saut have studied asymptotic models for internal waves in [33], considering two immiscible fluids of different densities under the rigid lid assumption and with a flat bottom, which is a different situation and we can also quote the papers of W. Choi and R. Camassa [64], V. Duchene [65] and [66].

The main result of our article claims the existence of a unique interface and a unique free boundary, represented respectively by real functions γ_1 and γ_2 belonging to Banach algebra (introduced by F. Abergel and J. L. Bona in [15]) whereas the function b , which represents the bottom, is 'small' for each x and belongs to the same space. Moreover, the spaces chosen ensure the asymptotic behavior of the solution.

As said above, capillarity effects are neglected and we point out that it has been proved that the evolution problem for two fluids of different densities is ill-posed in Sobolev spaces (or in C^k spaces) when surface tension is not taken into account, because of Kelvin-Helmholtz instabilities. In connection with this, we can quote [67] and [68]. Indeed, surface tension stabilizes the short wavelength instability but the movement of waves is not affected if we consider only large-scale and D. Lannes has proved in [34] that the evolution

problem is well-posed when surface tension is small enough and stabilizes the Kelvin-Helmholtz instabilities but does not affect the waves observed. According to his paper, the shape of a stationary flow, if it exists, should not be significantly affected by capillarity and we therefore neglect it. Always within the framework of the hypothesis, we assume the following conditions on the sizes of the bottom, the interface and the free boundary, to avoid intersections between them :

$$\max_{x \in \mathbb{R}} b(x) < H_1 + \min_{x \in \mathbb{R}} \gamma_1(x), \quad (4.1)$$

$$H_1 + \max_{x \in \mathbb{R}} \gamma_1(x) < (H_1 + H_2) + \min_{x \in \mathbb{R}} \gamma_2(x), \quad (4.2)$$

and these assumptions are made on the fluids and their flows :

- The fluids are inviscid.
- The fluids are incompressible.
- The flows are irrotational.
- The flows are stationary.
- The fluid particles do not cross the bottom.
- The bottom, with the obstacle, is represented by the equation $y = b(x)$, where b is a given 'smooth' real function defined on \mathbb{R} with a compact support.
- The interface between the two fluids and the free boundary (air-fluid) are represented respectively by the equations $y = H_1 + \gamma_1(x)$ and $y = (H_1 + H_2) + \gamma_2(x)$, where γ_1 and γ_2 are unknown real functions.

We derive the equations describing the motion of the fluids, and when we nondimensionalize these equations, a number denoted by F (see (4.15)) appears. This number will have a great importance in the resolution of the problem. In the case of one fluid, F is called 'Froude number'.

In addition to the velocities fields, the free boundary and the interface are the main unknowns.

As said above, we will establish a result of existence and uniqueness. More precisely, we will prove the theorem 11, which is our main result. The strategy followed here is inspired by the method used in [15] and [?], where the case of one fluid over an obstacle has been studied.

In [?], the bottom, with the obstacle, is represented by the equation $y = b(x)$, where b is a given 'smooth' real function defined on \mathbb{R} with a compact support and the free boundary (air-fluid) is represented by the equation $y = H + \gamma(x)$ where H is the depth of the fluid when it is at rest and γ is an unknown real function.

By writing Bernoulli's condition on the free boundary, the authors have obtained an equation in the form $T(b, \gamma) = 0$ where $T(b, \gamma)$ is an expression in terms of b and γ . The operator T is defined on a product of appropriate Banach algebras into \mathbb{R} . As b and γ are assumed to be 'small' and as one considers that when the bottom is flat everywhere ($b \equiv 0$), the free boundary is also flat ($\gamma \equiv 0$), the condition $T(0, 0) = 0$ is realized and the implicit function theorem became an essential tool.

The aim of the present work is to extend this method to the case of two superposed fluids (the given function b is always assumed to be 'small').

In this case, the difficulties are more important. First the transformation of the fluids domains into fixed domains is more delicate (see subsection 4.2.6). Then, using Bernoulli's equation written three times (i.e. in each fluid domain and on the free boundary), we obtain an equation in the form $\vec{T}(b, \gamma_1, \gamma_2) = (0, 0)$, where $\vec{T}(b, \gamma_1, \gamma_2)$ is an expression in terms of b, γ_1 and γ_2 and we define a new operator \vec{T} (see subsection 4.3.1). We have $\vec{T}(0, 0, 0) = (0, 0)$ because we assume that when the bottom is flat everywhere, the free boundary as well as the interface are flat. We apply the implicit function theorem to solve the problem and as $\vec{T}(b, \gamma_1, \gamma_2)$ is a vector so $\frac{\partial \vec{T}}{\partial \gamma}(0, 0, 0)$ is a matrix of which we have to prove the invertibility. Then new difficulties, due to the transmission condition which makes the system to solve coupled, arise. This is a crucial step in the application of implicit function theorem and we achieve that through two stages in subsection 4.3.4, by using appropriate Banach spaces defined in subsection 4.3.1.

The next theorem, where F is defined by (4.15), is finally proved. It claims the existence and the uniqueness of two real functions γ_1 and γ_2 , representing respectively the free boundary and the interface. Moreover, these functions are expressed in terms of the given function b , in a C^1 way and satisfy a condition of quick decrease at the infinity as b .

Theorem 11 *For $F^2 > \max(1; \frac{u_1}{u_2} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}})$, there exist*

- *an open ball \mathcal{B} of radius $r_0 > 0$, centered at the origin of an appropriate Banach algebra,*
- *a C^1 - mapping Λ*

such that :

$$\{\vec{T}(b, \gamma_1, \gamma_2) = (0, 0), (b, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}\} \Leftrightarrow \{b \in \mathcal{B}, (\gamma_1, \gamma_2) = \Lambda(b)\}.$$

Apart from the introduction and the conclusion, this paper contains two sections and an appendix :

- In section 2, we introduce the notations and we derive the equations describing the motion. Then we nondimensionalize these equations and rewrite them using the stream function. Finally, a convenient diffeomorphism is used to transform the fluids domains into fixed domains on which the equations become a variable coefficients elliptic system.
- In section 3, we prove our main result under the previous condition on F , by using the implicit function theorem in Banach spaces. This section consists of three parts :
 1. In the first subsection, we introduce the functions spaces that are central to our analysis and define the operator \vec{T} .
 2. The second subsection is devoted to prove the continuous differentiability of \vec{T} .
 3. The third subsection, where we prove the invertibility of $\frac{\partial \vec{T}}{\partial \gamma}(0, 0, 0)$, is the most critical stage.

- In the appendix, we give the proof of a crucial result for the invertibility of the operator $\frac{\partial \vec{T}}{\partial \gamma}(0, 0, 0)$ and we build a diffeomorphism which transforms the fluids domains into fixed domains. Moreover, we give an example to illustrate the asymptotic behavior in the functions spaces used.

4.2 Position of the problem

4.2.1 Notations

Before giving the governing equations, some notations are useful :

- g is the gravity.
- H_1 and H_2 are respectively the depths of the two fluids when they are unperturbed, H_0 is the total depth when the two fluids are unperturbed ($H_0 = H_1 + H_2$).
- $y = b(x)$ is the bottom equation, $y = H_1 + \gamma_1(x)$ is the interface equation, $y = H_0 + \gamma_2(x)$ is the free surface equation. The function b is at least of class $C^2(\mathbb{R})$ and has a compact support. The functions γ_1 and γ_2 are unknown real functions.
- $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; b(x) < y < H_1 + \gamma_1(x)\}$ is the first fluid domain.
- $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; H_1 + \gamma_1 < y < H_0 + \gamma_2(x)\}$ is the second fluid domain.
- $\vec{\nu}_i$ is the unit outward normal to the boundary of the domain Ω_i , $i \in \{1, 2\}$.
- $\vec{U}_i(x, y)$ is the velocity of the fluid, ρ_i its density assumed to be constant, $i \in \{1, 2\}$.
- $(u_1, 0)$ and $(u_2, 0)$ are respectively the uniform velocities of the fluids at the infinity.
- $P(x, y)$ is a scalar function which describes the pressure at each point of the domain.

The fluids domains are represented in the following figure.

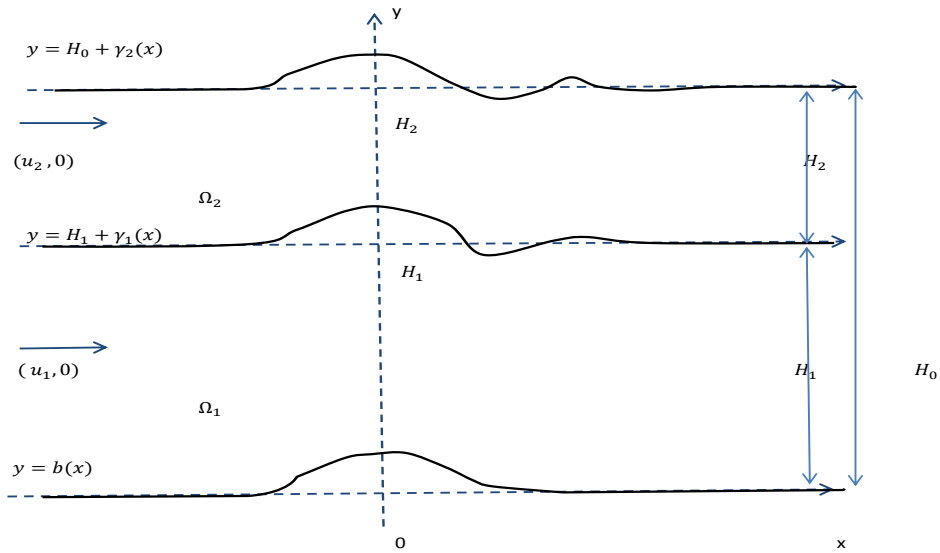


FIGURE 4.1 – Fluids domains.

4.2.2 Derivation of the equations

We can formulate the problem as follows : For a given 'smooth' function b , $b(x)$ 'small' enough for each real x , find two real functions γ_1 and γ_2 and two vectorial functions $\vec{U}_1 : (x, y) \mapsto \vec{U}_1(x, y)$ and $\vec{U}_2 : (x, y) \mapsto \vec{U}_2(x, y)$ such

that

$$\operatorname{div} \vec{U}_i = 0 \quad \text{in } \Omega_i, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (4.3)$$

$$\operatorname{curl} \vec{U}_i = 0 \quad \text{in } \Omega_i, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (4.4)$$

$$\vec{U}_1 \cdot \vec{\nu}_1 = 0 \quad \text{on } y = b(x), \quad (4.5)$$

$$\vec{U}_1 \cdot \vec{\nu}_1 = \vec{U}_2 \cdot \vec{\nu}_2 = 0 \quad \text{on } y = H_1 + \gamma_1(x), \quad (4.6)$$

$$\vec{U}_2 \cdot \vec{\nu}_2 = 0 \quad \text{on } y = H_0 + \gamma_2(x), \quad (4.7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \vec{U}_i = (u_i, 0), \quad i \in \{1, 2\}, \quad (4.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \gamma_i(x) = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{2} \rho_1 |\vec{U}_1|^2 + P(x, y) + \rho_1 g y = c_1 \quad \text{in } \Omega_1, \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{2} \rho_2 |\vec{U}_2|^2 + P(x, y) + \rho_2 g y = c_2 \quad \text{in } \Omega_2, \quad (4.11)$$

$$\frac{\rho_2}{2} |\vec{U}_2|^2 + P_a + \rho_2 g y = c_3 \quad \text{on } y = H_0 + \gamma_2(x), \quad (4.12)$$

where c_1, c_2 and c_3 are real constants and P_a is the atmospheric pressure. Equations (4.3) express the incompressibility of the fluids, and (4.4) the irrotationality of the flows. As the fluid cannot cross the bottom, we write (4.5). Equations (4.6) express the fact that the fluids are immiscible and (4.7) indicates that no fluid leaves the flow. The equations (4.8)- (4.9) ensure the asymptotic behavior of the flow. Assuming that the densities $\rho_i, i \in \{1, 2\}$ are constant, we write Bernoulli's equation inside the fluid, namely equations (4.10) and (4.11). The equation (4.12) expresses Bernoulli's condition on the free surface. Moreover, on the free surface, we assume that the pressure is constant and equals the atmospheric pressure. For these interpretations, we can see for example [24], [25] and [26].

Remark 12 *As capillarity effects are neglected, using the continuity of the pressure at the interface, one may equal the term $P(x, y)$ in the equations (4.10) and (4.11). This yields the transmission condition :*

$$\frac{\rho_1}{2} |\vec{U}_1|^2 + \rho_1 g y - \frac{\rho_2}{2} |\vec{U}_2|^2 - \rho_2 g y = c, \quad \text{on } y = H_1 + \gamma_1(x), \quad c \text{ real constant.} \quad (4.13)$$

4.2.3 Dimensionless equations

Dimensionless variables and unknowns are defined by referring all lengths to H_0 (the total depth when the fluids are at rest) and velocities to u_1 (one of the asymptotic constant velocities). Let us denote by $x^*, y^*, \vec{U}_i^*, b^*, \gamma_i^*$, the dimensionless variables and unknowns. If we put $x = H_0 x^*, y = H_0 y^*, \vec{U}_1 = u_1 \vec{U}_1^*, \vec{U}_2 = u_1 \vec{U}_2^*$, then $\Omega_i, i \in \{1, 2\}$, becomes

$$\Omega_1^* = \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2; b^*(x^*) < y^* < H + \gamma_1^*(x^*)\},$$

and

$$\Omega_2^* = \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2; H + \gamma_1^*(x^*) < y^* < 1 + \gamma_2^*(x^*)\},$$

where $b^*(x^*) = \frac{1}{H_0}b(x^*H_0)$, $\gamma_i^*(x^*) = \frac{1}{H_0}\gamma_i(x^*H_0)$; $i \in \{1, 2\}$, and

$$H = \frac{H_1}{H_0} < 1. \quad (4.14)$$

Likewise, we introduce the following dimensionless parameters which appear in the transformed equations of (4.3)-(4.12)

$$F = \frac{u_1}{\sqrt{gH_0}}, \quad (4.15)$$

$$\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1} < 1. \quad (4.16)$$

By another hand, thanks to the conditions at infinity (4.8) and (4.9), one can evaluate the constants involved in (4.12) and (4.13). So Equations (4.3)-(4.9), (4.12) and (4.13) become

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{U}_i^* = 0 \text{ in } \Omega_i^*; \quad i \in \{1, 2\}, \\ \operatorname{curl} \vec{U}_i^* = 0 \text{ in } \Omega_i^*; \quad i \in \{1, 2\}, \\ \vec{U}_1^* \cdot \vec{\nu}_1^* = 0 \text{ on } y^* = b^*(x^*), \\ \vec{U}_1^* \cdot \vec{\nu}_1^* = 0 \text{ on } y^* = H + \gamma_1^*(x^*), \\ \vec{U}_2^* \cdot \vec{\nu}_2^* = 0 \text{ on } y^* = H + \gamma_1^*(x^*), \\ \vec{U}_2^* \cdot \vec{\nu}_2^* = 0 \text{ on } y^* = 1 + \gamma_2^*(x^*), \\ \lim_{x^* \rightarrow \pm\infty} \vec{U}_1^*(x^*, y^*) = (1, 0), \\ \lim_{x^* \rightarrow \pm\infty} \vec{U}_2^*(x^*, y^*) = \left(\frac{u_2}{u_1}, 0\right), \\ \lim_{x^* \rightarrow \pm\infty} \gamma_i^*(x^*) = 0, \\ \frac{F^2}{2} |\vec{U}_2^*|^2 + \gamma_2^*(x^*) = \frac{u_2^2}{2gH_0} \text{ on } y^* = 1 + \gamma_2^*(x^*), \\ \frac{F^2}{2} (|\vec{U}_1^*|^2 - \rho |\vec{U}_2^*|^2) + (1 - \rho)\gamma_1^*(x^*) = \frac{F^2}{2} \left[1 - \rho \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2\right] \\ \text{on } y^* = H + \gamma_1^*(x^*). \end{array} \right. \quad (4.17)$$

The symbol * which indicates the nondimensional quantities will be systematically dropped henceforth.

4.2.4 Equations with the stream function

The irrotationality of the flows and the incompressibility of the fluids allow us to introduce harmonic stream functions ψ_1 and ψ_2 respectively in Ω_1 and Ω_2 such that

$$\vec{U}_i(x, y) = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial \psi_i}{\partial x}(x, y) \right), \quad i \in \{1, 2\}.$$

It follows that the equations (4.17) are transformed into

$$\Delta\psi_i = 0 \text{ in } \Omega_i, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (4.18)$$

$$\psi_1 = c_4 \text{ on } y = b(x), \quad (4.19)$$

$$\psi_1 = c_5 \text{ on } y = H + \gamma_1(x), \quad (4.20)$$

$$\psi_2 = c_6 \text{ on } y = H + \gamma_1(x), \quad (4.21)$$

$$\psi_2 = c_7 \text{ on } y = 1 + \gamma_2(x), \quad (4.22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi_1(x, y) = y, \quad (4.23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi_2(x, y) = \frac{u_2}{u_1}y, \quad (4.24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \gamma_i(x) = 0, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (4.25)$$

$$\frac{F^2}{2}|\vec{\nabla}\psi_2|^2 + \gamma_2(x) = \frac{u_2^2}{2gH_0} \text{ on } y = 1 + \gamma_2(x) \quad (4.26)$$

$$\frac{F^2}{2}(|\vec{\nabla}\psi_1|^2 - \rho|\vec{\nabla}\psi_2|^2) + (1 - \rho)\gamma_1(x) = \frac{F^2}{2}\left[1 - \rho\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2\right], \text{ on } \quad (4.27)$$

$$y = H + \gamma_1(x);$$

where c_4, c_5, c_6 and c_7 are real constants.

4.2.5 Equations with the perturbation stream function

Using conditions (4.23) and (4.24), one can introduce the perturbation stream functions ψ_{ip} , $i \in \{1, 2\}$, defined by :

$$\psi_1(x, y) = y + \psi_{1p}(x, y) \text{ and } \psi_2(x, y) = \frac{u_2}{u_1}y + \psi_{2p}(x, y).$$

The interest of the use of the perturbation stream function is double. First, it is more pleasant to introduce the main unknowns γ_1 and γ_2 in the equations (see equations (4.30)-(4.30)). Moreover, as the limit of the perturbation stream function is zero at infinity, the conditions (4.23)-(4.24) will be 'linearized'. Then the system (4.18)-(4.27) becomes

$$\Delta\psi_{ip} = 0 \text{ in } \Omega_i, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (4.28)$$

$$\psi_{1p} = -b(x) \text{ on } y = b(x), \quad (4.29)$$

$$\psi_{1p} = -\gamma_1(x) \text{ on } y = H + \gamma_1(x), \quad (4.30)$$

$$\psi_{2p} = -\frac{u_2}{u_1}\gamma_1(x) \text{ on } y = H + \gamma_1(x), \quad (4.31)$$

$$\psi_{2p} = -\frac{u_2}{u_1}\gamma_2(x) \text{ on } y = 1 + \gamma_2(x), \quad (4.32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \gamma_i(x) = 0, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (4.33)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi_{ip}(x, y) = 0, \quad (4.34)$$

$$\frac{F^2}{2(1 - \rho)}\left\{|\vec{\nabla}\psi_{1p}|^2 + 2\frac{\partial\psi_{1p}}{\partial y} - \rho|\vec{\nabla}\psi_{2p}|^2 - 2\rho\frac{u_2}{u_1}\frac{\partial\psi_{2p}}{\partial y}\right\} + \gamma_1(x) = 0 \text{ on } y = H + \gamma_1(x), \quad (4.35)$$

$$\frac{F^2}{2} \{ |\vec{\nabla} \psi_{2p}|^2 + 2 \frac{u_2}{u_1} \frac{\partial \psi_{2p}}{\partial y} \} + \gamma_2(x) = 0 \text{ on } y = 1 + \gamma_2(x). \quad (4.36)$$

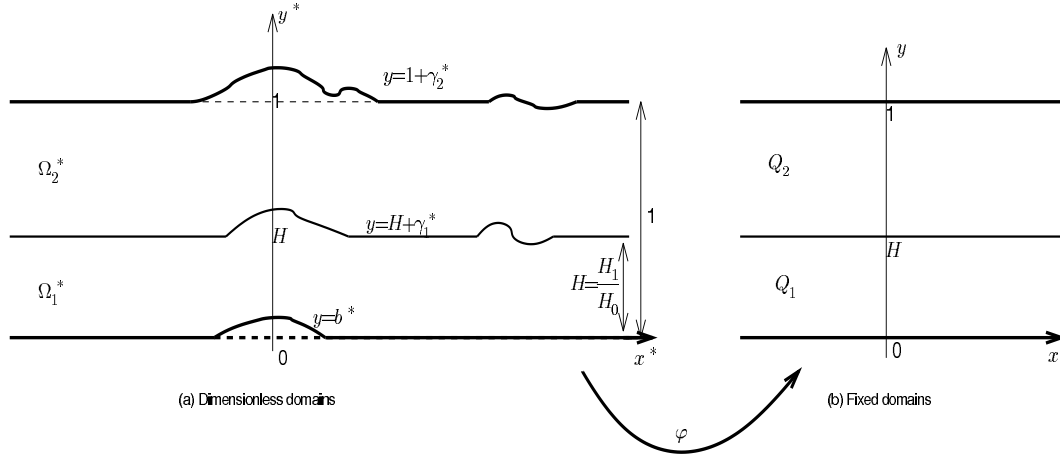
For the sake of simplicity, we write ψ_i instead of ψ_{ip} henceforth.

4.2.6 Equations in fixed domains

In this subsection, using a convenient diffeomorphism, we transform the constant coefficients elliptic problem (4.28)-(4.36) in the non flat domains Ω_i , $i \in \{1, 2\}$, into a variable coefficients elliptic problem in the flat strips Q_1, Q_2 defined as

$$Q_1 = \mathbb{R} \times (0, H) \text{ and } Q_2 = \mathbb{R} \times (H, 1). \quad (4.37)$$

The following figures represent the dimensionless fluids domains and the fixed domains obtained after transformation of the dimensionless domains by the diffeomorphism.



Choice of a diffeomorphism

In the appendix, we build a function $f : \mathbb{R}^4 \ni (u, v, w, y) \mapsto f(u, v, w, y) \in \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow \varphi(x, y) = (\bar{x}, \bar{y}) = (x, f(b(x), \gamma_1(x), \gamma_2(x), y)), \end{aligned}$$

is a diffeomorphism which transforms $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; b(x) < y < H + \gamma_1(x)\}$ and $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; H + \gamma_1(x) < y < 1 + \gamma_2(x)\}$ respectively onto Q_1 and Q_2 defined by (4.37). The function f has the following properties :

$$\bullet f \in C^3([-\alpha, +\alpha]^3 \times [0, 1 + \alpha]; \mathbb{R}), \quad (4.38)$$

where α is a small real number specified in the appendix, $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \bullet f(b(x), \gamma_1(x), \gamma_2(x), b(x)) &= 0, \\ f(b(x), \gamma_1(x), \gamma_2(x), H + \gamma_1(x)) &= H, \\ f(b(x), \gamma_1(x), \gamma_2(x), 1 + \gamma_2(x)) &= 1, \\ \bullet f(0, 0, 0, y) &= y, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \\ \bullet \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, y) &\neq 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

We introduce the functions $\bar{\psi}_i$, $i \in \{1, 2\}$, defined by

$$\bar{\psi}_i(\bar{x}, \bar{y}) = \psi_i(x, y), \quad i \in \{1, 2\}. \quad (4.40)$$

Before transforming the equations, the following notations are useful :

$$\mathcal{P}_b^{\gamma_1, \gamma_2} := a_1 \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + a_3 \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \quad (4.41)$$

where a_1, a_2, a_3 are defined by

$$\begin{cases} a_1(x, y) &:= \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}(x, y)\right)^2 - 1, \\ a_2(x, y) &:= 2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(x, y), \\ a_3(x, y) &:= \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2}(x, y). \end{cases} \quad (4.42)$$

Remark 13 Note that $\mathcal{P}_0^{0,0} \equiv 0$.

The equations (4.28)-(4.34) are transformed into

$$\Delta \bar{\psi}_i + \mathcal{P}_b^{\gamma_1, \gamma_2} \bar{\psi}_i = 0 \text{ in } Q_i, \quad (4.43)$$

$$\bar{\psi}_1(\bar{x}, H) = -\gamma_1(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}, \quad (4.44)$$

$$\bar{\psi}_1(\bar{x}, 0) = -b(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}, \quad (4.45)$$

$$\bar{\psi}_2(\bar{x}, H) = -\frac{u_2}{u_1} \gamma_1(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}, \quad (4.46)$$

$$\bar{\psi}_2(\bar{x}, 1) = -\frac{u_2}{u_1} \gamma_2(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}, \quad (4.47)$$

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \pm\infty} \gamma_i(\bar{x}) = 0, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (4.48)$$

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \pm\infty} \bar{\psi}_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (4.49)$$

The equation (4.35) is transformed into

$$\begin{aligned}
T_1(b, \gamma_1, \gamma_2) := & \frac{F^2}{2(1-\rho)} \left[\left(\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} (\bar{x}, H + \gamma_1(\bar{x})) \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} (\bar{x}, H + \gamma_1(\bar{x})) \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right. \\
& + 2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} (\bar{x}, H + \gamma_1(\bar{x})) \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{y}} - \rho \left(\left(\frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} (\bar{x}, H + \gamma_1(\bar{x})) \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} (\bar{x}, H + \gamma_1(\bar{x})) \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right) - 2\rho \frac{u_2}{u_1} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} (\bar{x}, H + \gamma_1(\bar{x})) \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{y}} \right] + \gamma_1(\bar{x}) = 0 \\
& \text{on } \bar{y} = H, \tag{4.50}
\end{aligned}$$

and the equation (4.36) is transformed into

$$\begin{aligned}
T_2(b, \gamma_1, \gamma_2) := & \frac{F^2}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} (\bar{x}, 1 + \gamma_2(\bar{x})) \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} (\bar{x}, 1 + \gamma_2(\bar{x})) \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right. \\
& \left. + 2 \frac{u_2}{u_1} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} (\bar{x}, 1 + \gamma_2(\bar{x})) \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{y}} \right] + \gamma_2(\bar{x}) = 0 \text{ on } \bar{y} = 1. \tag{4.51}
\end{aligned}$$

4.3 Resolution

4.3.1 The spaces

We introduce the following spaces which have been already used by F. Abergel and J.L. Bona in [15]. Their use is inspired by the results established by Amick in section 3. of [18] and it is also related to the behavior of the Green function given in the lemma 31 of the present paper. For more details concerning the behavior at infinity in these spaces and the apparition of the real number c , see the example in the last paragraph of the appendix.

We define the operator \vec{T} from $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ into $B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$ which associates to (b, γ_1, γ_2) , $\vec{T}(b, \gamma_1, \gamma_2) = (T_1(b, \gamma_1, \gamma_2), T_2(b, \gamma_1, \gamma_2))$, where T_1 and T_2 are given respectively by (4.50) and (4.51). The functions spaces that are central to our analysis, with $m \geq 0$ an integer, $0 < \lambda < 1$ and $c > 0$, are :

1. The spaces $B_c^{m,\lambda}(\bar{Q}_i)$, $i \in \{1; 2\}$ defined by

$$B_c^{m,\lambda}(\bar{Q}_i) = \left\{ v \in C^{m,\lambda}(\bar{Q}_i) / \sum_{k+l \leq m} \sup_{(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Q}_i} e^{c|\bar{x}|} \left| D_{\bar{x}}^k D_{\bar{y}}^l v(\bar{x}, \bar{y}) \right| < \infty \right\},$$

provided with the norm

$$\begin{aligned}
\|v\|_{B_c^{m,\lambda}(\bar{Q}_i)} = & \sum_{k+l \leq m} \sup_{(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Q}_i} e^{c|\bar{x}|} \left| D_{\bar{x}}^k D_{\bar{y}}^l v(\bar{x}, \bar{y}) \right| \\
& + \sup_{k+l=m} \sup_{(\bar{x}, \bar{y}) \neq (\bar{x}', \bar{y}')} \frac{\left| D_{\bar{x}}^k D_{\bar{y}}^l v(\bar{x}, \bar{y}) - D_{\bar{x}}^k D_{\bar{y}}^l v(\bar{x}', \bar{y}') \right|}{\left[(\bar{x} - \bar{x}')^2 + (\bar{y} - \bar{y}')^2 \right]^{\lambda/2}},
\end{aligned}$$

which are Banach algebra.

2. The space $B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R})$ defined by

$$B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R}) = \left\{ v \in C^{m,\lambda}(\mathbb{R}) / \sum_{0 \leq k \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{c|x|} |D_x^k v(x)| < \infty \right\}, \text{ provided}$$

with the norm

$$\|v\|_{B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R})} = \sum_{0 \leq k \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{c|x|} |D_x^k v| + \sup_{\substack{(x,x') \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq x'}} \frac{|D_x^m v(x) - D_x^m v(x')|}{|x - x'|^\lambda},$$

which is also a Banach algebra.

The choice of these spaces is motivated by the fact that they are Banach algebras and that they ensure the behavior of the solution $(\bar{\psi}_1; \bar{\psi}_2; \gamma_1; \gamma_2)$ at infinity, when b is given in $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$. The following remark will find use later.

Remark 14 *The bilinear mapping $(f, g) \mapsto fg$ is continuous, as a mapping of*

1. $B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R}) \times \tilde{C}^{n,\lambda}(\mathbb{R})$ into $B_c^{m',\lambda}(\mathbb{R})$,
2. $B_c^{m,\lambda}(\bar{Q}_i) \times \tilde{C}^{n,\lambda}(\bar{Q}_i)$ into $B_c^{m',\lambda}(\bar{Q}_i)$,
3. $B_c^{m,\lambda}(\bar{Q}_i) \times C^n(K)$ into $B_c^{m',\lambda}(K)$,

where $m' = \min(m, n)$, K is a compact subset of \mathbb{R}^2 , $K \subset \bar{Q}_i \subset \mathbb{R}^2$ and $\tilde{C}^{n,\lambda}(\mathbb{R})$ (resp. $\tilde{C}^{n,\lambda}(\bar{Q}_i)$) is the subspace of $C^{n,\lambda}(\mathbb{R})$ (resp. $C^{n,\lambda}(\bar{Q}_i)$) of bounded functions as well as their derivatives .

Note that $\vec{T}(0, 0, 0) = (0, 0)$, and we have now defined the spaces used in our main result which will be proved by using the implicit functions theorem applied to the equation

$$\vec{T}(b, \gamma_1, \gamma_2) = (0, 0).$$

Namely, we will establish that for a ‘small’ b , given in $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$, there exists a unique (γ_1, γ_2) in $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$, such that equations (4.43)-(4.49) and the equations (4.50),(4.51) are verified. All the next subsections are devoted to this proof. The hypothesis of the implicit functions theorem are verified stage by stage through some theorems and propositions.

4.3.2 Main result

We can now formulate our main result, already claimed in theorem 11, using the spaces introduced above, in the following theorem

Theorem 15 *For $F^2 > \max(1; \frac{u_1}{u_2} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}})$ and c small enough, there exist*

- \mathcal{B} , an open ball centered at the origin of $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$,
 - a C^1 - mapping $\Lambda : \mathcal{B} \rightarrow B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$,
- such that
- $$\{\vec{T}(b, \gamma_1, \gamma_2) = (0, 0), (b, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}\} \Leftrightarrow \{b \in \mathcal{B}, (\gamma_1, \gamma_2) = \Lambda(b)\}.$$

4.3.3 Differentiability of \vec{T} with respect to b and γ_1, γ_2 .

We establish the differentiability of \vec{T} with respect to b and γ_1, γ_2 by proving differentiability of T_1 and T_2 with respect to b and γ_1, γ_2 . For this purpose, we need the following lemmas and propositions.

Lemma 16 *Let (b, γ_1, γ_2) in $(B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}))^3$, then (a_1, a_2, a_3) , defined in (4.42), is in $(B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}_i))^3$, $i \in \{1; 2\}$ and furthermore*

$$\|a_j\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}_i)} \leq L_j(\|b\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma_1\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma_2\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}), \quad j \in \{1, 2, 3\}; \quad (4.52)$$

where $L_j(\cdot, \cdot, \cdot)$ are continuous functions verifying $L_j(0, 0, 0) = 0$.

Proof. Thanks to remark 14 and to the fact that $f \in C^3([-\alpha, +\alpha]^3 \times [0, 1 + \alpha]; \mathbb{R})$, we easily get $a_1, a_2 \in B_c^{1,\lambda}(\overline{Q}_i)$ and $a_3 \in B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}_i)$. We have

$$\|a_j\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}_i)} = \sup_{(x,y) \in \overline{Q}_i} e^{c|x|} |a_j(x, y)| + \sup_{(x,y) \neq (x',y')} \frac{|a_j(x, y) - a_j(x', y')|}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{\lambda/2}}.$$

We shall prove the inequality (4.52) for $j = 2$. The inequalities for the cases $j = 1$ and $j = 3$ can be obtained by analogy. We have

$$a_2(x, y) = 2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(x, y),$$

$$a_2(x, y) = 2b'(x) \frac{\partial f}{\partial u}(b, \gamma_1, \gamma_2, y) + 2\gamma_1'(x) \frac{\partial f}{\partial v}(b, \gamma_1, \gamma_2, y) + 2\gamma_2'(x) \frac{\partial f}{\partial w}(b, \gamma_1, \gamma_2, y).$$

We recall that b, γ_1, γ_2 are so ‘small’ that we can consider :

$$b(x), \gamma_1(x), \gamma_2(x) \in [-\alpha, +\alpha] \quad \text{for each } x \in \mathbb{R},$$

and as $f \in C^3([-\alpha, +\alpha]^3 \times [0, 1 + \alpha]; \mathbb{R})$ so f and all its derivatives up to order 3 are bounded. Denote by :

$$M = \max_{|\beta| \leq 2} \left(\sup_{(x,y) \in \overline{Q}_j} \left| \frac{\partial^{|\beta|} f(b(x), \gamma_1(x), \gamma_2(x), y)}{\partial^{\beta_1} u \partial^{\beta_2} v \partial^{\beta_3} w \partial^{\beta_4} y} \right| \right);$$

where $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ is a multi-index, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$. Then

$$\|a_2\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}_i)} \leq 2M(\|b'\|_{B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})} + \|\gamma_1'\|_{B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})} + \|\gamma_2'\|_{B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})}),$$

$$\|a_2\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}_i)} \leq 2M(\|b\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} + \|\gamma_1\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} + \|\gamma_2\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}).$$

So the inequality is established by taking

$$L_2(\|b\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma_1\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma_2\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}) = 2M(\|b\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} + \|\gamma_1\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} + \|\gamma_2\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}).$$

■

Lemma 17 Let (g_1, \dots, g_9) the following functions

$$g_j = b^{(j-1)} \quad \text{for } j \in \{1; 2; 3\},$$

$$g_j = \gamma_1^{(j-4)} \quad \text{for } j \in \{4; 5; 6\},$$

$$g_j = \gamma_2^{(j-7)} \quad \text{for } j \in \{7; 8; 9\},$$

where $h^{(j)}$ is the derivative of order j of h with the convention $h^{(0)} = h$ and

$$A_i : (B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{0,\lambda}(\mathbb{R}))^3 \longrightarrow B_c^{0,\lambda}(\mathbb{R})$$

$$(g_1, \dots, g_9) \longmapsto A_i(g_1, \dots, g_9) = a_i.$$

Then the operators A_i are continuously differentiable in a neighborhood of the origin, where a_i are given by (4.42).

Proof. The continuous differentiability of A_i follows from the chain rule, the property of f , that is $f \in C^3([-\alpha, +\alpha]^3 \times [0, 1 + \alpha]; \mathbb{R})$ (introduced in (4.38)) and the fact that b, γ_1, γ_2 are so ‘small’ that we can consider :

$$b(x), \gamma_1(x), \gamma_2(x) \in [-\alpha, +\alpha] \quad \text{for each } x \in \mathbb{R}.$$

Indeed, for example, we can easily see that A_2 is continuously differentiable :

$$A_2(g_1, \dots, g_9) = a_2(x, y) \quad \text{and} \quad a_2(x, y) = 2 \frac{\partial y}{\partial x}(x, y), \quad \text{so}$$

$$A_2(g_1, \dots, g_9) = 2b'(x) \frac{\partial f}{\partial u}(b, \gamma_1, \gamma_2, y) + 2\gamma_1'(x) \frac{\partial f}{\partial v}(b, \gamma_1, \gamma_2, y) + 2\gamma_2'(x) \frac{\partial f}{\partial w}(b, \gamma_1, \gamma_2, y).$$

As $f \in C^3([-\alpha, +\alpha]^3 \times [0, 1 + \alpha]; \mathbb{R})$, so A_2 is continuously differentiable with respect to b, γ_1, γ_2 (see remark14). A_2 is obviously continuously differentiable with respect to b', γ_1', γ_2' . We proceed in the same fashion for A_1 and A_3 . ■

Proposition 18 Consider the boundary value problem

$$\begin{cases} \Delta v &= b_1(x) \text{ in } Q, \\ v(x, 1) &= b_2(x), x \in \mathbb{R}, \\ v(x, 0) &= b_3(x), x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.53)$$

where $(b_1, b_2, b_3) \in B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ and $Q = \mathbb{R} \times]0; 1[$, then there exists \tilde{c} such that whenever $0 < c < \tilde{c}$, problem (4.53) has a unique solution v in $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$; furthermore, the solution map is a topological isomorphism between the corresponding spaces.

Proof. The proposition 18 has been proved in [10]. The same result holds if we replace Q by Q_i and 1 by H , or 0 by H in the second and third equations of the system. ■

The next proposition is essential for the proof of theorem 20 and is based on the two previous lemmas and proposition 18.

Proposition 19 *There exists $\tilde{c} > 0$ such that for all $c \in]0, \tilde{c}[$ and for all $\lambda \in]0, 1[$, there exists an open ball \mathcal{B} of radius $r_0 > 0$, centered at the origin of $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ such that whenever $(b, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, the following statements hold*

1. *Each one of the following problems*

$$\begin{cases} \Delta\psi_1 &= 0 \text{ in } \Omega_1, \\ \psi_1(x, H + \gamma_1(x)) &= -\gamma_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \psi_1(x, b(x)) &= -b(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\psi_2 &= 0 \text{ in } \Omega_2, \\ \psi_2(x, 1 + \gamma_2(x)) &= -\frac{u_2}{u_1}\gamma_2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \psi_2(x, H + \gamma_1(x)) &= -\frac{u_2}{u_1}\gamma_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

has a unique solution ψ_i , $i \in \{1; 2\}$, such that $\overline{\psi}_i$, the transform of ψ_i by (4.40), is in $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}_i)$.

2. *The mapping $S^{(i)} : (b, \gamma_1, \gamma_2) \mapsto \overline{\psi}_i$, is continuously differentiable from $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ into $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}_i)$.*

Proof. Proof of 1. for ψ_1

Denote by $\mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2}$ the linear operator defined by :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2} : B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}_1) &\rightarrow B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}_1) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) = \mathcal{Y}_1, \\ v &\mapsto (\Delta v + \mathcal{P}_b^{\gamma_1, \gamma_2} v, v(\cdot, 0), v(\cdot, H)) \end{aligned}$$

and denote $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0^{0,0}$. We shall verify that :

$$\|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2})v\|_{\mathcal{Y}_1} \leq L(\|b\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma_1\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma_2\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}) \cdot \|v\|_{B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}_1)},$$

where $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ is a continuous function on \mathbb{R}^3 verifying $L(0, 0, 0) = 0$.

As we have $(\mathcal{A} - \mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2})v = (-\mathcal{P}_b^{\gamma_1, \gamma_2} v, 0, 0)$, then

$$\|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2})v\|_{\mathcal{Y}_1} = \|\mathcal{P}_b^{\gamma_1, \gamma_2} v\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}_1)} = \left\| a_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \overline{y}^2} + a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \overline{x} \partial \overline{y}} + a_3 \frac{\partial v}{\partial \overline{y}} \right\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}_1)};$$

so we obtain

$$\|\mathcal{P}_b^{\gamma_1, \gamma_2} v\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}_1)} \leq \left\| a_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \overline{y}^2} \right\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}_1)} + \left\| a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \overline{x} \partial \overline{y}} \right\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}_1)} + \left\| a_3 \frac{\partial v}{\partial \overline{y}} \right\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}_1)},$$

$$\leq (\|a_1\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}_1)} + \|a_2\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}_1)} + \|a_3\|_{B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}_1)}) \|v\|_{B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}_1)}.$$

Now, thanks to the Lemma 16, we get :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_b^{\gamma_1, \gamma_2} v\|_{B_c^{0, \lambda}(\overline{Q}_1)} &\leq (L_1(\|b\|_{B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma_1\|_{B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma_2\|_{B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R})}) + \\ &\quad L_2(\|b\|_{B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma_1\|_{B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma_2\|_{B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R})}) + \\ &\quad + L_3(\|b\|_{B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma_1\|_{B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma_2\|_{B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R})})) \|v\|_{B_c^{2, \lambda}(\overline{Q}_1)}. \end{aligned}$$

So

$$\|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2})v\|_{\mathcal{Y}_1} \leq L(\|b\|_{B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma_1\|_{B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma_2\|_{B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R})}) \|v\|_{B_c^{2, \lambda}(\overline{Q}_1)}, \quad (4.54)$$

where $L(., ., .) = L_1(., ., .) + L_2(., ., .) + L_3(., ., .)$ is a continuous function verifying

$$L(0, 0, 0) = 0. \quad (4.55)$$

The operator \mathcal{A} being an isomorphism (thanks to proposition 18), we show that $\mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2}$ is also an isomorphism for ‘small’ values of b and γ_1, γ_2 . Indeed, the set of the isomorphisms $Isom(B_c^{2, \lambda}(\overline{Q}_1), \mathcal{Y}_1)$ being open, then

$$\exists r_0 > 0; B(\mathcal{A}, r_0) \subset Isom(B_c^{2, \lambda}(\overline{Q}_1), \mathcal{Y}_1).$$

The relation (4.54) gives

$$\|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2})\|_{\mathcal{L}(B_c^{2, \lambda}(\overline{Q}_1), \mathcal{Y}_1)} \leq L(\|b\|_{B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma_1\|_{B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R})}, \|\gamma_2\|_{B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R})}).$$

The continuity of the function L and (4.55) imply that

$$\text{‘small’}(b, \gamma_1, \gamma_2) \Rightarrow \mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2} \in B(\mathcal{A}, r_0).$$

Hence $\mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2}$ is an isomorphism from $B_c^{2, \lambda}(\overline{Q}_1)$ to \mathcal{Y}_1 . Thus the problem

$$\begin{cases} \Delta \overline{\psi}_1 + \mathcal{P}_b^{\gamma_1, \gamma_2} \overline{\psi}_1 = 0 \text{ in } Q_1, \\ \overline{\psi}_1(\overline{x}, H) = -\gamma_1(\overline{x}), \quad \forall \overline{x} \in \mathbb{R}, \\ \overline{\psi}_1(\overline{x}, 0) = -b(\overline{x}), \quad \forall \overline{x} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

has a unique solution in $B_c^{2, \lambda}(\overline{Q}_1)$. We proceed exactly in the same way for $\overline{\psi}_2$.

So Point 1. of proposition 20 is proved.

Proof of 2.

We must show that the application

$$\begin{aligned} S^{(1)} : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} &\subset (B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R}))^3 \rightarrow B_c^{2, \lambda}(\overline{Q}_1) \\ (b, \gamma_1, \gamma_2) &\mapsto \overline{\psi}_1 \end{aligned}$$

is continuously differentiable.

We note S instead of $S^{(1)}$ for simplicity. We define S_1 and S_2 as follows :

$$S_1 : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(B_c^{2, \lambda}(\overline{Q}_1), \mathcal{Y}_1)$$

$$\begin{aligned}
(b, \gamma_1, \gamma_2) &\mapsto \mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2}, \\
S_2 : \text{Isom}(B_c^{2, \lambda}(\overline{Q}_1), \mathcal{Y}_1) &\rightarrow \text{Isom}(\mathcal{Y}_1, B_c^{2, \lambda}(\overline{Q}_1)) \\
L &\mapsto L^{-1},
\end{aligned}$$

and we put

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(b, \gamma_1, \gamma_2) &:= (0, -b(\overline{x}), -\gamma_1(\overline{x})) = \mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2} \overline{\psi}_1; \\
\mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2} \overline{\psi}_1 &\in \mathcal{Y}_1.
\end{aligned}$$

We have

$$S_2 \circ S_1(b, \gamma_1, \gamma_2) = (\mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2})^{-1} \quad \text{with } (b, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B},$$

and

$$S(b, \gamma_1, \gamma_2) = (S_2 \circ S_1(b, \gamma_1, \gamma_2)) \mathcal{F}(b, \gamma_1, \gamma_2) = (\mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2})^{-1} (\mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2} \overline{\psi}_1) = \overline{\psi}_1.$$

To prove the differentiability of $\overline{\psi}_1$, one just needs to prove differentiability of S_1, S_2 and \mathcal{F} .

\mathcal{F} is obviously continuously differentiable with respect to b and γ_1, γ_2 . S_2 is a C^∞ operator. It remains to prove the continuous differentiability of S_1 . We have :

$$S_1 : (b, \gamma_1, \gamma_2) \rightarrow \mathcal{A}_b^{\gamma_1, \gamma_2} = \Delta + a_1 \frac{\partial^2}{\partial \overline{y}^2} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial \overline{x} \partial \overline{y}} + a_3 \frac{\partial}{\partial \overline{y}}.$$

It is sufficient to prove that $a_i, i \in \{1; 2; 3\}$, which are functions of $(g_j)_{j \in \{1; \dots; 9\}}$, are continuously differentiable with respect to b, γ_1, γ_2 . The lemma 17 ensures this and gives the continuous differentiability of S_1 with respect to b and γ_1, γ_2 . ■

Now all the necessary ingredients are available to claim :

Theorem 20 *There exists $\tilde{c} > 0$, such that for all $c \in]0, \tilde{c}[$ and for all $\lambda \in]0, 1[$, there exists an open ball \mathcal{B} of radius $r_0 > 0$, centered at the origin of $B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R})$ such that the operators $T_i : (B_c^{2, \lambda}(\mathbb{R}))^3 \rightarrow B_c^{1, \lambda}(\mathbb{R}), i \in \{1; 2\}$, defined by (4.50) and (4.51) are continuously Fréchet differentiable on $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.*

Proof. Proposition 19 gives the continuous differentiability of $\overline{\psi}_1$ and $\overline{\psi}_2$ and as already said in the proof of lemma 17, the continuous differentiability of the derivatives of \overline{y} follows from the chain rule and from the property of f , that is $f \in C^3([-\alpha, +\alpha]^3 \times [0, 1 + \alpha])$. So the continuous differentiability of T_1 and T_2 (we recall that their expressions are given by (4.50) and (4.51)) is proved. ■

4.3.4 Invertibility of $\frac{\partial \vec{T}}{\partial \gamma}(0, 0, 0)$

Denoting by $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ and by $\frac{\partial \vec{T}}{\partial \gamma}(0, 0, 0)$ the matrix defined by (4.56), we have

Theorem 21 *If $F^2 > \max(1; \frac{u_1}{u_2} \frac{1}{\sqrt{\rho}})$, then the operator*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{T}}{\partial \gamma}(0, 0, 0) : B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) &\longrightarrow B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R}) \\ (h_1, h_2) &\longmapsto \frac{\partial \vec{T}}{\partial \gamma}(0, 0, 0)(h_1, h_2) = (q_1, q_2), \end{aligned}$$

is invertible.

Proof. This proof is crucial and is organized in two stages : a first stage where we transform the result to establish into a linearized system to solve ; a second stage devoted to prove two propositions which lead to the invertibility of $\frac{\partial \vec{T}}{\partial \gamma}(0, 0, 0)$. ■

First stage : we have

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial \gamma}(0, 0, 0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial \gamma_1}(0, 0, 0) & \frac{\partial T_1}{\partial \gamma_2}(0, 0, 0) \\ \frac{\partial T_2}{\partial \gamma_1}(0, 0, 0) & \frac{\partial T_2}{\partial \gamma_2}(0, 0, 0) \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

to prove the invertibility of the operator $\frac{\partial \vec{T}}{\partial \gamma}(0, 0, 0)$ consists of establishing that for a given (q_1, q_2) in $B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$, there exists one and only one (h_1, h_2) in $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ such that

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial \gamma_1}(0, 0, 0) & \frac{\partial T_1}{\partial \gamma_2}(0, 0, 0) \\ \frac{\partial T_2}{\partial \gamma_1}(0, 0, 0) & \frac{\partial T_2}{\partial \gamma_2}(0, 0, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Henceforth, we write ψ_i, x , and y instead of $\bar{\psi}_i, \bar{x}$, and \bar{y} .

Before describing with more details the method used to obtain the invertibility of the operator $\frac{\partial \vec{T}}{\partial \gamma}(0, 0, 0)$, let us introduce the following notation which will be very useful :

$$w_{ij}(\cdot, \cdot) = \frac{\partial \psi_i}{\partial \gamma_j} \Big|_{b=\gamma_1=\gamma_2=0}(\cdot, \cdot). h_j. \quad (4.58)$$

We will write the equations verified by (w_{ij}) , deduced from (4.43)-(4.47) and (4.57) and so we obtain a new problem. The main difficulty is to prove existence and uniqueness of the solution of this problem in the good spaces (namely $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}_i)$).

Getting around this difficulty, we finally obtain the existence of a unique (h_1, h_2) in $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ from the relation existing between w_{ii} and h_i , deduced from (4.44)-(4.47). After calculations, we obtain

$$\frac{\partial T_1}{\partial \gamma_1}(0, 0, 0).h_1 = \frac{F^2}{(1-\rho)} \left[\frac{\partial w_{11}}{\partial y}(x, H) - \rho \frac{u_2}{u_1} \frac{\partial w_{21}}{\partial y}(x, H) \right] + h_1, \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \gamma_2}(0, 0, 0).h_2 = \frac{F^2}{(1-\rho)} \left[\frac{\partial w_{12}}{\partial y}(x, H) - \rho \frac{u_2}{u_1} \frac{\partial w_{22}}{\partial y}(x, H) \right], \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \gamma_1}(0, 0, 0).h_1 = F^2 \frac{u_2}{u_1} \frac{\partial w_{21}}{\partial y}(x, 1), \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \gamma_2}(0, 0, 0).h_2 = F^2 \frac{u_2}{u_1} \frac{\partial w_{22}}{\partial y}(x, 1) + h_2, \quad (4.62)$$

then (4.57) is equivalent to the two following equations :

$$\frac{F^2}{(1-\rho)} \left[\frac{\partial(w_{11} + w_{12})}{\partial y}(x, H) - \rho \frac{u_2}{u_1} \frac{\partial(w_{21} + w_{22})}{\partial y}(x, H) \right] + h_1 = q_1, \quad (4.63)$$

$$F^2 \frac{u_2}{u_1} \frac{\partial(w_{21} + w_{22})}{\partial y}(x, 1) + h_2 = q_2, \quad (4.64)$$

and w_{ij} , $i, j \in \{1, 2\}$, are such that

$$w_{11}(x, H) = -h_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad w_{22}(x, 1) = -\frac{u_2}{u_1} h_2(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.65)$$

Moreover, w_{ij} , $i, j \in \{1, 2\}$, verify the following problem

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w_{ij} = 0 \text{ in } Q_i, \\ w_{11}(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ w_{11}(x, H) = \frac{u_1}{u_2} w_{21}(x, H), \quad x \in \mathbb{R}, \\ w_{21}(x, 1) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ w_{22}(x, H) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ -w_{11}(x, H) + \frac{F^2}{1-\rho} \left[\frac{\partial w_{11}}{\partial y}(x, H) - \right. \\ \left. \rho \frac{u_2}{u_1} \left(\frac{\partial(w_{21} + w_{22})}{\partial y}(x, H) \right) \right] = q_1(x), \\ -\frac{u_1}{u_2} w_{22}(x, 1) + F^2 \frac{u_2}{u_1} \frac{\partial(w_{21} + w_{22})}{\partial y}(x, 1) = q_2(x). \end{array} \right. \quad (4.66)$$

So now, we have to solve this problem in a suitable space.

Remark 22 Note that $w_{12} \equiv 0$.

Before writing the variational formulation (see the proof of the next proposition), it is useful to transform the set of equations (4.66) by setting

$$\begin{cases} w_1 = w_{11} & \text{in } Q_1, \\ w_2 = \frac{u_1}{u_2}(w_{21} + w_{22}) & \text{in } Q_2, \end{cases} \quad (4.67)$$

and

$$\alpha_0 = \rho \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^2. \quad (4.68)$$

The problem, constituted by the set of equations (4.66), where (w_{ij}) are the unknowns, is equivalent (in the sense specified in the following remark) to the next one :

Find w_i in $B_c^{2,\lambda}(\bar{Q}_i)$, $i \in \{1; 2\}$, solution of

$$\begin{cases} \Delta w_i = 0 & \text{in } Q_i, \\ w_1(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ w_1(x, H) = w_2(x, H), & x \in \mathbb{R}, \\ -w_1(x, H) + \frac{F^2}{1-\rho} \left[\frac{\partial w_1}{\partial y}(x, H) - \right. \\ \quad \left. \alpha_0 \left(\frac{\partial w_2}{\partial y}(x, H) \right) \right] = q_1(x), \\ -w_2(x, 1) + F^2 \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^2 \frac{\partial w_2}{\partial y}(x, 1) = q_2(x). \end{cases} \quad (4.69)$$

Remark 23 *The problems (4.66) and (4.69) are equivalent in the following sense :*

If w_{11}, w_{21} and w_{22} verify (4.66), then w_1, w_2 defined by (4.67) verify (4.69). And reciprocally, if w_1, w_2 verify (4.69), then, setting $w_{11} = w_1$, we obtain $w_{21}(x, H)$ and so w_{21} and finally, we obtain w_{22} from w_2 and w_{21} .

Second stage :

Proposition 24 *If $F^2 > \max(1; \frac{u_1}{u_2} \frac{1}{\sqrt{\rho}})$, there exists a unique solution (w_1, w_2) in $H^1(Q_1) \times H^1(Q_2)$, of the problem (4.69).*

Proof. Setting

$$1. Q = Q_1 \cup Q_2 \cup (\bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2) = \mathbb{R} \times]0, 1[\text{ and } w = \begin{cases} w_1 & \text{in } Q_1 \\ w_2 & \text{in } Q_2 \end{cases},$$

$$2. V = \{v \in H^1(Q); v(x, 0) = 0\}, \text{ which enable us to define the bilinear form } A(.,.) \text{ on } V \text{ by}$$

$$\begin{aligned} A(u, v) := & \int_{Q_1} \vec{\nabla} u \vec{\nabla} v dx dy + \alpha_0 \int_{Q_2} \vec{\nabla} u \vec{\nabla} v dx dy - k_1 \int_{\mathbb{R}} u(x, H) v(x, H) dx - \\ & \alpha_0 k_2 \int_{\mathbb{R}} u(x, 1) v(x, 1) dx, \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\text{where } k_1 = \frac{1-\rho}{F^2} \text{ and } k_2 = \left(\frac{u_1}{u_2} \right)^2 \frac{1}{F^2}$$

3. the continuous linear form on V

$$l(v) = k_1 \int_{\mathbb{R}} q_1(x)v(x, H)dx + \alpha_0 k_2 \int_{\mathbb{R}} q_2(x)v(x, 1)dx,$$

we write the variational formulation of the problem (4.69) : find w in V such that

$$A(w, v) = l(v), \quad \forall v \in V.$$

It remains to prove that, under the assumption that $F^2 > \max(1; \frac{u_1}{u_2} \frac{1}{\sqrt{\rho}})$, the bilinear form $A(., .)$ is coercive on V and then applying Lax-Milgram theorem, the proposition is established.

Coercivity : let $u \in V$,

$$A(u, u) = \int_{Q_1} |\vec{\nabla}u|^2 dx dy + \alpha_0 \int_{Q_2} |\vec{\nabla}u|^2 dx dy - k_1 \int_{\mathbb{R}} (u(x, H))^2 dx - \alpha_0 k_2 \int_{\mathbb{R}} (u(x, 1))^2 dx.$$

Using Cauchy-Schwartz's inequality we have

$$(u(x, H))^2 = \left(\int_0^H \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) dt \right)^2 \leq H \int_0^H \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \right)^2 dt \leq H \int_0^H |\nabla u|^2 dt, \quad (4.71)$$

and

$$(u(x, 1))^2 = \left(\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \right)^2 dt \leq \int_0^1 |\nabla u|^2 dt, \quad (4.72)$$

so we obtain

$$A(u, u) \geq (\min(1; \alpha_0) - k_1 - \alpha_0 k_2) \int_Q |\vec{\nabla}u|^2 dx dy.$$

Then using Poincaré's inequality, we have : $A(u, u) \geq \kappa \|u\|_{H^1(Q)}^2, \quad \forall u \in V$,

where $\kappa = (\min(1; \alpha_0) - k_1 - \alpha_0 k_2) \min(\frac{1}{2c_0}, \frac{1}{2})$ and c_0 is Poincaré constant.

Note that $\kappa > 0$ provided that $(\min(1; \alpha_0) - k_1 - \alpha_0 k_2) > 0$, i.e. $F^2 > \max(1; \frac{u_1}{u_2} \frac{1}{\sqrt{\rho}})$. ■

Remark 25 As a consequence of the proposition above, there exists a unique solution $(w_{ij})_{i,j \in \{1,2\}}$ of the problem (4.66), $w_{ij} \in H^1(Q_i)$, $i, j \in \{1, 2\}$.

Remark 26 The last step to demonstrate the invertibility of the operator $\frac{\partial \vec{T}}{\partial \gamma}(0, 0, 0)$ consists of proving that the solution of problem (4.66) is in the space $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q_1}) \times B_c^{2,\lambda}(\overline{Q_2}) \times B_c^{2,\lambda}(\overline{Q_2})$ and then to take : $h_1(x) = -w_{11}(x, H)$ and $h_2(x) = -\frac{u_1}{u_2} w_{22}(x, 1)$.

The following proposition is devoted to this aim. Its proof is given in the appendix (see subsection 4.5.2).

Proposition 27 *If $F^2 > \max(1; \frac{u_1}{u_2} \frac{1}{\sqrt{\rho}})$, then for any given $(q_1, q_2) \in B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$, there exists a unique solution (w_{11}, w_{21}, w_{22}) in $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}_1) \times B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}_2) \times B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}_2)$, of the problem (4.66).*

Once this proposition proved, we obtain that :

If $F^2 > \max(1; \frac{u_1}{u_2} \frac{1}{\sqrt{\rho}})$, the operator $(h_1, h_2) \mapsto$

$$\left(h_1 + \frac{F^2}{1-\rho} \left[\frac{\partial w_{11}}{\partial y}(\cdot, H) - \rho \frac{u_2}{u_1} \left(\frac{\partial(w_{21} + w_{22})}{\partial y}(\cdot, H) \right) \right], h_2 + F^2 \frac{u_2}{u_1} \frac{\partial(w_{21} + w_{22})}{\partial y}(\cdot, 1) \right),$$

is an isomorphism from $(B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}))^2$ into $(B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R}))^2$. So theorem 21 is established.

The continuous differentiability of the operator \vec{T} and the invertibility of $\frac{\partial \vec{T}}{\partial \gamma}(0, 0, 0)$ proved, our main result claimed in the theorems 11 and 15 is established.

4.4 Conclusion

In this paper, we have extended a result obtained in [28] to the case of two fluids, which is more delicate and one of the main difficulties is the coupled equation on the interface between the two fluids. We proposed a new variational formulation and the coercivity of the bilinear form as well as the regularity of the solution are not easy to establish. Indeed, Considering two immiscible ideal fluids of different densities ρ_1 and ρ_2 ($\rho_1 > \rho_2$), moving in a plane channel with an obstacle on its bottom and supposing that this bottom is represented by the graph of a given smooth function b , with an appropriate asymptotic behavior, we have established the existence, the uniqueness, the regularity and the asymptotic behavior of two real functions representing the free boundary and the interface. We have proved this result using the implicit function theorem in Banach spaces, under the assumptions that $b(x)$ is ‘small’ enough for each x real and for F such that $F^2 > \max(1; \frac{u_1}{u_2} \frac{1}{\sqrt{\rho}})$.

Moreover, one can note that the free surface and the interface are represented by the graphs of two functions having the same regularity and the same asymptotic behavior as the given function b .

By another hand, in the initial formulation of the problem, we assumed that the function b had a compact support because of physical considerations (geometry of the bottom), but once we have achieved the mathematical study, this condition on the support was not anymore necessary and we have obtained our results with b given in the space $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$, defined in section 4.3.1, where the functions satisfy a condition of quick decrease at the infinity.

Finally, we point out that when $\rho_2 \rightarrow \rho_1$ and $u_2 \rightarrow u_1$ and only if we assume that $F^2 > \max(1; \frac{u_1}{u_2} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}) + \varepsilon_0$ in the main result, where $\varepsilon_0 > 0$ is a fixed positive constant, then we can consider that the one fluid case can be recovered as a limit of the case of two fluids.

4.5 Appendix

This appendix is constituted of three parts. In the first one, we give the proof of the result stated in proposition 27. In the second part, we propose a function f which satisfies all the conditions required in subsection 2.6.1 to obtain the diffeomorphism φ . In the third part, we give an example to illustrate the asymptotic behavior in the functions spaces.

4.5.1 Theorem

We recall the next theorem (established in [28]) which will find use in the proof of proposition 27.

Theorem 28 *Consider the boundary value problem*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ in } Q = \mathbb{R} \times]0, 1[, \\ u(x, 0) = 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ -u(x, 1) + F^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = q(x), \ x \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \quad (4.73)$$

with assumption that $q \in B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$. For $F > 1$, the problem (4.95) has a unique solution u in $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$.

Remark 29 *Note that in this theorem, it is assumed that $F > 1$ but this condition is only necessary to prove existence and uniqueness of the solution in $H^1(Q)$ and not for proving that the solution is in $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$.*

4.5.2 Proof of proposition 27

Now we will prove the proposition 27 by using a cut-off function.

Proof. We have that (w_{11}, w_{21}, w_{22}) is the unique solution of (4.66) in $H^1(Q_1) \times H^1(Q_2) \times H^1(Q_2)$ (see remark (25)). It remains to prove that :

if $(q_1, q_2) \in B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$, then $w_{ij} \in B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}_i)$.

The strategy used to establish this consists of treating the problem locally by truncation. We consider a 'smooth' function η (precisely $\eta \in C^{2,\lambda}(\overline{Q})$) which vanishes in a neighborhood of the boundary portion $\{y = 1\}$ and which equals 1 in a neighborhood of the boundary portion $\{y = H\}$ of Q_2 ; then, denoting by

$$W(x, y) = \eta(x, y)[w_1(x, 2H - y) - w_2(x, y)], \quad (4.74)$$

and

$$U(x, y) = \eta(x, y)[w_1(x, 2H - y) + w_2(x, y)], \quad (4.75)$$

and considering the problems respectively verified by W and U , we prove that both of W and U are in $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q_2})$, so we deduce the result of the theorem stated.

More precisely, let η be a function such that :

$$\begin{cases} \eta \in C^{2,\lambda}(\overline{Q}), \\ \eta \equiv 1 & \text{in a neighbourhood of } \{y = H\}, \\ \eta \equiv 0 & \text{in a neighbourhood of } \{y = 1\}, \\ \vec{\nabla}\eta \in (B_c^{1,\lambda}(\overline{Q_2}))^2, \end{cases} \quad (4.76)$$

and W and U defined on Q_2 (see next remark 30), respectively by (4.74) and (4.75).

The function W verifies the problem

$$\begin{cases} \Delta W = f_1 & \text{on } Q_2, \\ W|_{\partial Q_2} = 0, \end{cases} \quad (4.77)$$

where f_1 is defined on Q_2 (see next remark 30) by

$$f_1(x, y) = (w_1(x, 2H - y) - w_2(x, y))\Delta\eta + 2\vec{\nabla}\eta\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}, -\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^t - 2\vec{\nabla}\eta\vec{\nabla}w_2. \quad (4.78)$$

And U verifies the equations

$$\begin{cases} \Delta U = f_2 & \text{on } Q_2, \\ U + \frac{2F^2}{1-\rho}\frac{\partial U}{\partial y} = -2q_1(x) & \text{on } \{y = H\}, \\ U(x, 1) = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, 1) = 0, \end{cases} \quad (4.79)$$

where f_2 is defined on Q_2 by

$$f_2(x, y) = (w_1(x, 2H - y) + w_2(x, y))\Delta\eta + 2\vec{\nabla}\eta\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}, -\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^t + 2\vec{\nabla}\eta\vec{\nabla}w_2. \quad (4.80)$$

Remark 30 W, U, f_1 and f_2 are defined on Q_2 because :

- If $H \geq \frac{1}{2}$, then W, U, f_1 and f_2 , given respectively by (4.74), (4.75), (4.78) and (4.80) are clearly defined in Q_2 .
- If $H < \frac{1}{2}$, then W, U, f_1 and f_2 given respectively by (4.74), (4.75), (4.78) and (4.80) are defined for $H < y < 2H$ and we complete (for $2H \leq y < 1$) by choosing the neighborhood of $\{y = 1\}$ on which $\eta \equiv 0$ to define them in Q_2 .

Now, $w_1(x, 2H - y)$ and $w_2(x, y)$ are in $C^{2,\lambda}(Q_2)$ (apply lemma 6.16 of Gilbarg and Trudinger [42]) and thanks to the properties (4.76) of η and to remark 14 we have that f_1 and f_2 are in $B_c^{0,\lambda}(\overline{Q_2})$. Then, applying the proposition 19, we obtain that $W \in B_c^{2,\lambda}(\overline{Q_2})$.

The smoothness of U up to the boundaries follows by standard regularity results for weak solutions of elliptic problems (see [42] and references therein, for example [50]); so $U \in C^{2,\lambda}(\overline{Q_2})$. To prove that $U \in B_c^{2,\lambda}(\overline{Q_2})$, it remains to establish that

$$\sup_{k+l \leq 2} \sup_{\overline{Q_2}} e^{c|x|} |D_x^k D_y^l U| < \infty, \quad (4.81)$$

which is equivalent to

$$\sup_{\overline{Q_2}} e^{c|x|} |D_x^k D_y^l U| < \infty, \forall k, l \in \mathbb{N}, k + l \leq 2. \quad (4.82)$$

We proceed in the same way as we have already done for a similar problem in [28], i.e : first, we consider the problem verified by

$$V = U + \frac{y-1}{k_3(H-1)} \int_{x+y-H}^x q(s) ds, \quad (4.83)$$

where $k_3 = \frac{2F^2}{1-\rho}$, namely the problem

$$\begin{cases} -\Delta V = f & \text{on } Q_2, \\ V(x, H) + k_3 \frac{\partial V}{\partial y}(x, H) = 0 & \text{on } \{y = H\}, \\ V(x, 1) = 0, \end{cases} \quad (4.84)$$

where $f \in B_c^{0,\lambda}(\overline{Q_2})$. Then we introduce the Green function G associated to the problem (4.84).

Let $x' \in \mathbb{R}$ and $y' \in]0; 1[$. Upon the definition, G is the solution of the boundary value problem

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(x-x')\delta(y-y') & \text{in } Q_2, \\ G(x, x', 1, y') = 0, \\ G(x, x', H, y') + k_3 \frac{\partial G}{\partial y}(x, x', H, y') = 0, \\ |G| < \infty & \text{for } |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4.85)$$

By classical calculations(see [51], for example), we obtain

$$G(x-x', y, y') = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n K_n^2} e^{-\lambda_n |x-x'|} \sin(\lambda_n(y-1)) \sin(\lambda_n(y'-1)), \quad (4.86)$$

where λ_0 is the unique positive solution of the equation : $\coth(x(H-1)) = -k_3 x$ and $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ are the positive solutions of the equation $\tan(x(H-1)) = -k_3 x$, with

$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$, and $K_n = \int_H^1 \sin^2(\lambda_n(y-1)) dy$. Moreover, we have

$$\lambda_n \geq \bar{\alpha} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{where } \bar{\alpha} = \min(\lambda_0; \lambda_1).$$

Thanks to classical theory of Green's functions, we can establish that G enjoys the properties given in the following lemma

Lemma 31 $\exists K > 0, \exists k > 0, \exists C > 0, \exists \tilde{c} > 0$, such that

$$\begin{aligned} & \bullet |G(x - x'; y, y')| \leq K |\ln(|x - x'| + |y - y'|)| + k \\ & \forall x, x' \in \mathbb{R} \text{ such that } |x - x'| \leq 1, \quad \forall y, y' \in]0; 1[, \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} & \bullet |D^m G(x - x'; y, y')| \leq K (|x - x'| + |y - y'|)^{-m} \\ & \forall x, x' \in \mathbb{R} \text{ such that } |x - x'| \leq 1, \quad \forall y, y' \in]0; 1[, m \in \{1; 2\}, \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} & \bullet |D^m G(x - x'; y, y')| \leq C.e^{-\tilde{c}|x-x'|} \\ & \forall x, x' \in \mathbb{R} \text{ such that } |x - x'| \geq 1, \quad \forall y, y' \in]0; 1[, m \in \{0; 1; 2\}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

To prove (4.82) for V , use the Green's function to write

$$V(x, y) = \int_{Q_2} G(x - x', y, y') f(x', y') dx' dy',$$

and consider c such that $\tilde{c} - c > 0$.

Then, using this expression of V and lemma31, we have

$$\begin{aligned} e^{c|x|} |V(x, y)| & \leq e^{c|x|} \left(C \int_{|x-x'| \geq 1} \int_H^1 e^{-\tilde{c}|x-x'|} |f(x', y')| dy' dx' \right. \\ & + K \int_{|x-x'| \leq 1} \int_H^1 |\ln(|x - x'| + |y - y'|)| |f(x', y')| dy' dx' \\ & \left. + k \int_{|x-x'| \leq 1} \int_H^1 |f(x', y')| dy' dx' \right). \end{aligned}$$

We continue the estimate in the last display by taking into consideration that :

- For $|x - x'| \leq 1$, $\int_H^1 |\ln(|x - x'| + |y - y'|)| dy'$ is bounded by a positive constant,
- $M = \sup_{\overline{Q_2}} e^{c|x|} |f(x, y)|$,
- In the case wherein $x \rightarrow -\infty$, assume that $x + 1 \leq 0$.

Finally, we obtain that

$$\sup_{\overline{Q_2}} e^{c|x|} |V(x, y)| < \infty.$$

We proceed in the same way to obtain an estimate for the weighted norm of the first derivatives of V because differentiation under the integral sign is legitimate since the first derivatives have integrable singularities at $(x, y) = (x', y')$.

To estimate the weighted norm of the second derivatives of V , consider the function

$$v = e^{c|x|} V \quad \text{for } |x| > 1,$$

and work out the boundary value problem to which this function is the solution. As v and its first derivatives already known to be bounded, we use

the classical Hölder estimates for elliptic equations to conclude.

We have proved that $V \in B_c^{2,\lambda}(\overline{Q_2})$ so $U \in B_c^{2,\lambda}(\overline{Q_2})$.

Then $U + W$ gives that w_1 is in $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q_1})$ and we use theorem 28 for w_2 .

Proposition 27 is proved by taking :

$$h_1(x) = -w_{11}(x, H) \text{ and } h_2(x) = -\frac{u_1}{u_2}w_{22}(x, 1).$$

■

4.5.3 Construction of f

Using cut-off functions denoted by χ_0 , χ_1 and χ_2 , We will construct :

- a first function G_0 which transforms the boundary $\{y = b(x)\}$ into $\{y = 0\}$ and leaves $\{y = H + \gamma_1(x)\}$ and $\{y = 1 + \gamma_2(x)\}$ unchanged,
- a second function G_1 which transforms the boundary $\{y = H + \gamma_1(x)\}$ into $\{y = H\}$ and leaves $\{y = 0\}$ and $\{y = 1 + \gamma_2(x)\}$ unchanged,
- a third function G_2 which transforms $\{y = 1 + \gamma_2(x)\}$ into $\{y = 1\}$ and leaves $\{y = 0\}$ and $\{y = H\}$ unchanged.

Then by setting $\varphi = G_2 \circ G_1 \circ G_0$, we obtain a diffeomorphism which transforms $\overline{\Omega}$ into \overline{Q} , where Ω and Q are defined by

- $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2})$ (Ω_i is the domain defined as Ω_i^* in subsection 4.2.3).
- $Q_1 = \mathbb{R} \times]0, H[$, $Q_2 = \mathbb{R} \times]H, 1[$, $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup (\overline{Q_1} \cap \overline{Q_2}) = \mathbb{R} \times]0, 1[$.

Construction of φ :

For this construction, the following notations are used :

$\max_{x \in \mathbb{R}} b(x) = M$, $\max_{x \in \mathbb{R}} \gamma_i(x) = M_i$, $\min_{x \in \mathbb{R}} \gamma_i(x) = m_i$, $i \in \{1, 2\}$, $\varepsilon > 0$, a small real and the following steps are achieved :

1. We consider three cut-off functions C^∞ on $[0, 1 + M_2]$, denoted by χ_0 , χ_1 and χ_2 such that $0 \leq \chi_i(y) \leq 1$, $\forall y \in [0, 1 + M_2]$, and

$$\chi_0(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq y \leq M + \varepsilon \\ 0 & \text{if } y \geq M + 2\varepsilon \end{cases}, \quad (4.90)$$

$$\chi_1(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } H + m_1 - \varepsilon \leq y \leq H + M_1 + \varepsilon \\ 0 & \text{if } y \leq H + m_1 - 2\varepsilon \text{ or } y \geq H + M_1 + 2\varepsilon \end{cases} \quad (4.91)$$

$$\chi_2(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } 1 + m_2 - \varepsilon \leq y \leq 1 + M_2 \\ 0 & \text{if } y \leq 1 + m_2 - 2\varepsilon \end{cases}. \quad (4.92)$$

2. Let g_0, g_1 and g_2 be the functions defined by

$g_0(x, y) := y - \chi_0(y)b(x)$, $g_1(x, y) := y - \chi_1(y)\gamma_1(x)$, and $g_2(x, y) := y - \chi_2(y)\gamma_2(x)$, and G_0, G_1, G_2 , the functions defined by

$$G_0 : (x, y) \mapsto G_0(x, y) = (x, g_0(x, y)),$$

$$G_1 : (x, y) \mapsto G_1(x, y) = (x, g_1(x, y)),$$

$$G_2 : (x, y) \mapsto G_2(x, y) = (x, g_2(x, y)).$$

The function G_0 transforms the boundary $\{y = b(x)\}$ into $\{y = 0\}$, leaves the boundaries $\{y = H + \gamma_1(x)\}$ and $\{y = 1 + \gamma_2(x)\}$ unchanged

and transforms Ω into a domain denoted by $\Omega^{(1)}$ (and transforms $\overline{\Omega}$ into $\overline{\Omega^{(1)}}$).

The function G_1 transforms $\{y = H + \gamma_1(x)\}$ into $\{y = H\}$, leaves the boundaries $\{y = 0\}$ and $\{y = 1 + \gamma_2(x)\}$ unchanged and transforms $\Omega^{(1)}$ into a domain denoted by $\Omega^{(2)}$ (and transforms $\overline{\Omega^{(1)}}$ into $\overline{\Omega^{(2)}}$).

The function G_2 transforms $\{y = 1 + \gamma_2(x)\}$ into $\{y = 1\}$, leaves the boundaries $\{y = 0\}$ and $\{y = H\}$ unchanged and transforms $\overline{\Omega^{(2)}}$ into \overline{Q} .

3. We set $\varphi = G_2 \circ G_1 \circ G_0$ and we prove that φ is a bijection.

Lemma 32 *The function φ is a bijection from $\overline{\Omega}$ onto \overline{Q} .*

Proof. We prove that G_0, G_1 and G_2 are bijections on their respective images. For this purpose, let us consider a small positive real constant $\alpha \neq 0$ such that

$$\max_{x \in \mathbb{R}} (|b(x)|, |\gamma_1(x)|, |\gamma_2(x)|) < \alpha, \quad (4.93)$$

and χ_0, χ_1 and χ_2 such that

$$|\chi'_0(y)| < \frac{1}{\alpha}, |\chi'_1(y)| < \frac{1}{\alpha}, |\chi'_2(y)| < \frac{1}{\alpha}, \forall y \in [0, M_2 + 1]. \quad (4.94)$$

Indeed, for each real x , $b(x), \gamma_1(x)$ and $\gamma_2(x)$ are in a neighborhood of zero. So α is very small but the condition (4.94) signifies that the derivatives of χ_0, χ_1 and χ_2 are bounded. By another hand, denoting by g'_{iy} the derivative of the function g_i with respect to the variable y , we have

$$g'_{0y}(x, y) = 1 - \chi'_0(y)b(x), \quad g'_{1y}(x, y) = 1 - \chi'_1(y)\gamma_1(x), \quad g'_{2y}(x, y) = 1 - \chi'_2(y)\gamma_2(x),$$

so thanks to the conditions (4.93) and (4.94), we obtain that g_0, g_1 and g_2 are strictly increasing with respect to y and as they are also continuous functions, they are bijective from $[0, 1 + M_2]$ onto $[0, 1]$ as functions of the variable y (for x fixed). ■

We can now define the function f by setting $f = f_2 \circ f_1 \circ f_0$ with

- $f_0(u, v, w, y) = (u, v, w, y - \chi_0(y)u)$,
- $f_1(u, v, w, y) = (u, v, w, y - \chi_1(y)v)$,
- $f_2(u, v, w, y) = y - \chi_2(y)w$,

The function f is defined from \mathbb{R}^4 into \mathbb{R} , is connected to φ by the relation $\varphi(x, y) = (x, f(b(x), \gamma_1(x), \gamma_2(x), y))$ and $f \in C^3([-\alpha, +\alpha]^3 \times [0, 1 + \alpha]; \mathbb{R})$.

4.5.4 An example to illustrate the introduction of the functions spaces

We close this section by giving an example (from [8]) to illustrate the behavior at infinity in the spaces $B_c^{m, \lambda}(\overline{Q})$.

Let us denote by S_h the strip $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -h < y < 0\}$ with $B = \mathbb{R} \times \{-h\}$ its bottom and on the upper margin $\mathbb{R} \times \{0\}$, we denote by $I = (-x_0, x_0) \times \{0\}$ and $F = \mathbb{R} \setminus [-x_0, x_0] \times \{0\}$. We consider the following boundary value problem : find a solution $v \in H^1(S_h)$ of

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v = 0 \text{ in } S_h, \\ v = g \text{ on } I, \\ -\mu v + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ on } F, \\ v = 0 \text{ on } B, \end{array} \right. \quad (4.95)$$

with assumption that g is given and defined on I and $0 < \mu < \frac{1}{h}$, a real constant. Let us consider a positive real number R . We restrict v to the domain $(R, +\infty) \times (-h, 0)$. By separation of variables one easily gets that the solution of this problem can be written under the form

$$v = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\lambda_n x} \sin(\lambda_n(y+h))$$

where $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ are the positive solutions of the equation $\tan(\lambda h) = \frac{\lambda}{\mu}$. The coefficients c_n are uniquely determined by the values of the function $v(R, \cdot)$. And thus, $v \sim C e^{-\lambda_1 x}$ for large positive values of x , uniformly with respect to y . Then for every $R > x_0$, we have

$$\sup_{|x| \geq R, -h \leq y \leq 0} e^{\lambda_1 |x|} |v(x, y)| < \infty.$$

and for every $0 < c < \lambda_1$ the previous bound holds if we put c instead of λ_1 . For more details, see [8](proposition 3.2).

Chapitre 5

Perspectives

5.1 Perspectives à long terme

Les travaux de cette thèse ont permis d'établir des résultats théoriques concernant l'existence, l'unicité ainsi que le comportement à l'infini de la solution du problème de l'écoulement d'un fluide ou de deux fluides superposés au dessus d'un obstacle dans le cas torrentiel en négligeant les effets de tension de surface.

Les perspectives qui peuvent se profiler à long terme à la suite de ces travaux sont multiples et variées. En effet, en examinant une à une les hypothèses émises pour les modèles étudiés (rappelons que ces hypothèses ont été détaillées dans le chapitre 2), on peut se rendre compte qu'elles peuvent aboutir à de nouveaux problèmes si on les occultait ou modifiait (une à une). Ainsi, au lieu de considérer un fluide parfait, on pourrait tenir compte de la viscosité ou encore on pourrait envisager les mêmes problèmes en 3D (au lieu de 2D), ce qui laisse présager d'une approche complètement différente puisqu'il ne sera plus question de fonction de courant, ni d'analyse harmonique ; quoique dans [70], les auteurs ont ramené un tel problème en 3D à une suite de problèmes en 2D pour les coefficients de Fourier, en faisant un développement de Fourier du potentiel de vitesse. On pourrait encore s'intéresser à des écoulements instationnaires, etc...

5.2 Perspectives à court terme

A plus court terme, un travail où on tiendrait compte des effets de tension de surface est déjà à l'étude. En effet, nous avons rencontré très peu d'articles dans la littérature où les auteurs tiennent compte de la tension de surface. Celle-ci représente un phénomène qui a de l'importance uniquement à petites échelles, mais elle permet de maîtriser les instabilités de Kelvin-Helmholtz qui apparaissent à l'interface entre deux fluides par exemple. On pourra lire à ce propos le papier, et en particulier les commentaires qu'il contient, de D. Lannes [34].

5.2.1 Problème avec tension superficielle

Lorsque nous avons abordé le cas de l'écoulement d'un fluide en tenant compte des effets de la tension superficielle, en travaillant par analogie avec les cas déjà étudiés, nous avons rencontré une difficulté pour établir l'inversibilité de l'opérateur $\frac{\partial T}{\partial \gamma}(0, 0)$ car il fallait pour cela trouver une formulation variationnelle du problème auxiliaire suivant et le résoudre,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w = 0 \text{ dans } Q, \\ w(x, 0) = 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ w(x, 1) = -h(x), \ x \in \mathbb{R}, \\ -w(x, 1) + F^2 \frac{\partial w}{\partial y}(x, 1) + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, 1) = f, \ x \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

où σ est un paramètre réel strictement positif, représentant le coefficient de tension superficielle, et F est le nombre de Froude.

Plus précisément, il ne nous a pas été possible de construire un sous-espace adéquat sur lequel la forme bilinéaire induite par la formulation variationnelle serait coercive. Nous avons alors contourné cette difficulté en résolvant une équation différentielle ordinaire, moyennant une condition assez restrictive sur le nombre de Froude. Le résultat ainsi obtenu pourrait être amélioré si on arrivait à construire un sous-espace sur lequel la forme bilinéaire impliquée dans la formulation variationnelle serait coercive. La recherche d'un tel sous-espace constitue un travail délicat mais la difficulté majeure réside dans la preuve que la solution faible, donnée par le théorème de Lax-Milgram, est aussi solution forte. Un travail dans ce sens, où nous essayerons de nous inspirer des papiers de D. Pierotti [45] et [8], est envisagé.

Conclusion générale

Les principaux travaux qui constituent cette thèse sont des études théoriques qui concernent des problèmes d'écoulements bidimensionnels et stationnaires, de fluides, dans un canal dont le fond présente un obstacle.

Il s'agit plus précisément de résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution de problèmes dont l'inconnue principale est la frontière libre.

Nous avons d'abord considéré un seul fluide en écoulement torrentiel ($F > 1$), et nous nous sommes placés sous des hypothèses qui nous ont permis de formuler la question à l'aide des équations d'Euler, que nous avons adimensionnées, puis traduites en terme de fonction de courant. Ensuite, nous définissons un opérateur dans un contexte d'espaces fonctionnels adéquats, qui nous permet d'utiliser le théorème des fonctions implicites. Dans le cadre de la vérification des hypothèses de ce théorème, nous résolvons un problème auxiliaire linéaire. La régularité de la solution est obtenue grâce à la fonction de Green associée au problème, que nous calculons.

Nous avons ensuite formulé un second problème en considérant deux fluides immiscibles superposés en mouvement, sous les mêmes hypothèses que le premier travail. Dans ce cas, nous avons deux frontières inconnues, la surface libre air-fluide et la surface de séparation entre les deux fluides. Nous suivons les mêmes étapes de résolution que précédemment mais le problème linéaire auxiliaire que nous devons résoudre ici est plus délicat car les équations sont couplées. Nous avons réussi à écrire une formulation variationnelle, et à prouver existence et unicité ; ensuite, pour établir la régularité de la solution, nous utilisons des fonctions de troncature.

Par ailleurs, avant d'introduire nos travaux, nous avons donné, à travers les chapitres 1 et 2 tous les outils nécessaires à une lecture confortable des études réalisées. En effet, il nous a semblé utile de présenter au lecteur des notions telles que la formule de Bernoulli ou la fonction de Green sous des formes adaptées à l'usage que nous en avons fait.

Enfin, dans le chapitre intitulé "Perspectives", quelques travaux envisagés ou même déjà en cours sont exposés mais nous avons abordé une infime partie d'un sujet tellement vaste que des voies insoupçonnées pourraient émerger au fil d'un butinage à travers la documentation.

Bibliographie

- [1] J.J. Stoker; *Water Waves. The Mathematical Theory with Applications*; Interscience Publishers, INC, New York, (1957).
- [2] H. Brezis and G. Duvaut, *Ecoulement avec sillage autour d'un profilé symétrique sans incidence*; C. R. Acad. Sci. Paris 276, 875-878, (1973).
- [3] H. Brezis and G. Stampacchia *The hodograph method in fluid-dynamics in the light of variational inequalities*; Arch. Rational Mech. Anal. 61, 1-18, (1976).
- [4] H. Brezis and D. Kinderlehrer; *The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities*; Indiana J. Math. 23, 831-844, (1974).
- [5] L. A. Caffarelli, *The smoothness of a free boundary in a filtration problem*; Arch. Rational Mech. Anal. 63, 77-86, (1976).
- [6] A. Fasano et M. Primicerio, *Free boundary problems : theory and applications. Volume I, Research notes in Mathematics, Pitman Advanced Publishing Program, Boston. London. Melbourne.*
- [7] C. D. Pagani and D. Pierotti, *On Solvability of the Non-linear Wave-Resistance Problem for a surface-Piercing Symmetric Cylinder*; Siam J. Math Anal, vol. 36, n.1, 69-93, (2004).
- [8] C. D. Pagani and D. Pierotti, *The Neumann-Kelvin Problem for a beam*; J. Math. Anal. Appl, 240, 60-79, (1999).
- [9] C. D. Pagani and D. Pierotti, *Exact Solution of the Wave-Resistance Problem for a Submerged Cylinder.II. The Non-linear Problem*; Arch. Rational Mech. Anal. 149 289-327, Springer-Verlag, (1999).
- [10] D. Boukari , R. Djouadi and D. Teniou , *Free surface flow over an obstacle. Theoretical study of the fluvial case*; Abstract and Applied Analysis, 6, no.7, 413-429, (2001).
- [11] D. Boukari , R. Djouadi and D. Teniou , *A free boundary problem for a torrential flow*; Portugaliae Mathematica, vol 65, issue 1, 49-65, (2008).
- [12] D. Boukari , R. Djouadi and D. Teniou , *A study of the inverse of a free surface problem*; Abstract and Applied Analysis, (2004).
- [13] D. Teniou, R. Ait-Yahia and D. Hernane, *Identifiability and stability of boundaries in a supercritical free surface flow*; Revista Matemàtica complutense, **21**, no.1, 61-73, (2008).
- [14] F. Helein, *Ecoulement stationnaire dans un canal à fond presque plat*, Groupe d'hydrodynamique navale, URA CNRS 853, ENSTA, Centre de l'Yvette, 91120 Palaiseau, France, CMLA, (1991).

- [15] F. Abergel and J. L. Bona, *A mathematical theory for viscous, free surface flows over a perturbed plane* ; Arch. Rational mech. Anal. ISSN 0003-9527 coden avrmaw , vol. 118, 71-93, (1992).
- [16] M. Bouhadef, *Contribution à l'étude des ondes de surface dans un canal. Application à l'écoulement au dessus d'un obstacle immergé* ; Thèse de Doctorat Es Sciences Physiques présentée à l'université de Poitiers (U.E.R. Centre d'Etudes Aérodynamiques et thermiques), (1988).
- [17] Ait-Yahia née Djouadi Rachida, *Contribution à l'étude théorique et numérique d'écoulements de fluides à frontière libre* ; Thèse de Doctorat d'Etat présentée à l'université des sciences et de la technologie Houari-Boumediène(U.S.T.H.B) Alger, (2006).
- [18] Charles J. Amick, *On the Dirichlet Problem for Infinite Cylinders and Equations with Transversely Varying Coefficients* ; Journal of Differential Equations, , 30, 248-279, (1978).
- [19] Charles J. Amick, *Properties of Steady Navier-Stokes Solutions for Certain Unbounded channels and Pipes* ; Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications Vol 2 No 6, 689-720, (1978).
- [20] Charles J. Amick, *Steady solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded channels and pipes* ; Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 4, pp 473-513, (1977).
- [21] R. A. J. Adams , J. F. Fournier ; Sobolev spaces, Pure and applied mathematics series. Academic Press. Elsevier science Ltd, The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, Oxford OX5 1GB, UK, (2003).
- [22] V. Maz'ya, S. Nazarov , B. Plamenevskij ; Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Domain, vol 1, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, ISBN 3-7643-6397-5.
- [23] Y. Bamberger ; Mécanique de l'ingénieur IV fluides, Hermann, Éditeurs des sciences et des arts.
- [24] R. Courant and D. Hilbert ; Methods of Mathematical Physics, Volume 1, Interscience Publishers, INC., New York.
- [25] P. Germain ; Mécanique, Tome I, École polytechnique, Ellipses.
- [26] M. Hug ; Mécanique des fluides appliquée aux Problèmes d'aménagement et d'énergie. Editions Eyrolles, Cours de l'École nationale des Ponts et Chaussées.
- [27] J.N. Gence ; Mécanique des fluides. Les écoulements de fluides Newtoniens, principaux mécanismes associés aux mouvements de fluides. Editions Ellipses, (2007).
- [28] C. Titri-Bouadjenak,D. Hernane,R. Ait-Yahia and D. Teniou , *Existence and uniqueness of the solution of a supercritical free surface flow problem over an obstacle* ; Revista Matematica Complutense, (2010).
- [29] C. Titri-Bouadjenak and D.E. Teniou , *Flows of two immiscible fluids over an obstacle* ; à paraître dans SeMa journal.

- [30] K. Lemrabet, *Etude de divers problèmes aux limites de transmission d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers*; Thèse de Doctorat d'Etat présentée à l'université d'Alger, (1987).
- [31] O. Belhamiti, R. Labbas, K. Lemrabet and A. Medeghri *Study of Boundary Value and transmission problems in the Hölder spaces*; Applied Mathematics and Computation, vol 202, issue 2, 608-6019, (2008).
- [32] Mehdi née Bouam Nadia; *Stabilité, bifurcation et comportement chaotique d'une interface entre deux fluides*, Mémoire de Doctorat Es Sciences; Option : Physique théorique; Université de Bejaïa.
- [33] J. L. Bona, D. Lannes and J-C. Saut , *Asymptotic Models for internal Waves*; hal-00201083, version1 december 23, (2007).
- [34] D. Lannes : A stability criterion for two fluid interfaces and applications, Arch. Rational Mech. Anal, (2013).
- [35] J-L. Lions et E. Magenes; Problèmes aux Limites Non Homogènes, volume 1. Dunod, (1968).
- [36] S.R. Belward, W. W. Read and P. J. Higgins, *Iterative schemes for series solutions to Laplacian free boundary problems in Computational techniques and applications*; CTAC95 (eds. R.L. May and A.K. Easton), (World Scientific, Singapore), 669-676, C98, C102, C104, C112, (1996).
- [37] S.R. Belward, W. W. Read and P. J. Higgins, *An efficient iterative scheme for series solutions to Laplacian free boundary problems*; Anziam J. 44 (E), C644-C663, (2003).
- [38] H. Brezis; Analyse Fonctionnelle; Masson, Paris, (1983).
- [39] J. Cheng, M. Yamamoto, *Unique continuation on a line for harmonic functions; inverse problems*; volume 14, no. 4, 869-882, (1998).
- [40] R. Dautray, J-L. Lions; Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques; vol 2, Masson, (1988).
- [41] L. K. Forbes, *Non-linear, drag-free flow over a submerged semi-elliptical body*; J. Eng. Math. 16, no. 2, 171-180, (1982). L.K. Forbes : Dept of applied Mathematics, Univ. Adelaide, Adelaide, Australia.
- [42] D. Gilbarg, N. S. Trudinger; Elliptic partial differential equations of second order, Springer-Verlag edition, (1998).
- [43] O. A . Ladyzenskaja ,N. N. Ural'ceva; Equations aux dérivées partielles de type elliptique; Dunod, Editeur. Paris, (1968).
- [44] L. C. Evans; Partial Differential Equations; Graduate Studies in Mathematics Volume 19; American Mathematical Society.
- [45] D. Pierotti , *On unique solvability and regularity in the linearized two-dimensional wave resistance problem*; n. 442/P, (2000).
- [46] C. Bardos and D. Lannes , *Mathematics for 2d Interfaces*; hal-00487357, version1, (2010).
- [47] P. Huerre, *Mécanique des fluides, Mécanique des milieux continus*, Ecole Polytechnique, Département de Mécanique, (1992).

- [48] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia; An introduction to variational inequalities and their applications.
- [49] A.C. King and M.I.G. Bloor, *Free Streamline Flow Over Curved Topography*; Quarterly Of applied Mathematics, Vol XLVIII, no. 2, 281-293. Univ. Nottingham, dep. mathematics, Royaume-Uni, (1990).
- [50] N. M Günter; Potential theory and its applications.
- [51] G. D. Duffy; Green's functions with applications, Studies In Advanced Mathematics, Chapman and Hall/CRC, (2001).
- [52] W. A. Strauss; Partial differential equations, an introduction; Second edition.
- [53] D. H. Armitage and S. J. Gardiner; Classical Potential Theory, Springer, ISBN : 1-85233-61868, (2001).
- [54] I.C. Gohberg, M.G. Krein; Introduction to the Theory of Linear Non-selfadjoint Operators, AMS, RI, Providence, (1969).
- [55] E.I. Sigal, I.C. Gohberg, *Operator Generalization of the Logarithmic Residue Theorem and the Theorem of Rouché*; Matem. Sbornik, 84(3), pp 607-629, (1971).
- [56] Carlo D. Pagani and Dario Pierotti, *The Subcritical Motion of a Semi-submerged Body : Solvability of the Free boundary problem*; SIAM J. Math. Analysis, (2004).
- [57] P. Grisvard; Elliptic problems in nonsmooth domains; monographs and studies in mathematics. 24-Pitman. London, (1985).
- [58] J. W. Choi, *Free surface waves over a depression*; Bull. Aust. Math. Soc. 65, n2, pp 329-335, (2002).
- [59] C. D. Pagani and D. Pierotti, *Variational Linear Problems in Wave-Obstacle Interaction*; Proceedings of the Steklov institute of Mathematics, vol 255, issue 1, 203-214, (2006).
- [60] J. Nečas; Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques; Masson, Paris, (1967).
- [61] R. Temam; Navier-Stokes equations, Theory and numerical analysis.
- [62] K. Yosida; Functional Analysis- Fourth edition.
- [63] A. J. Chorin and J. E. Marsden; A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Third Edition, Springer.
- [64] W. Choi and R. Canmassa, *Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system*; J. Fluid Mech., 313, 83-103, (1996).
- [65] V. Duchene, *Asymptotic shallow water Models for internal Waves in a two-fluid system with a free surface*; SIAM J. Math. Anal. 42, (2010).
- [66] V. Duchene, *Boussinesq/ Boussinesq systems for internal Waves with a free surface, and the Kdv approximation*; M2AN Math. Model. Numer. Anal., 42, 2229-2260, (2011).
- [67] T. Iguchi, N. Tanaka and A. Tani, *On the two-phase free boundary problem for two dimensional water waves*; Math. Ann. 309 , 199-223, (1997).

- [68] V. Kamotski and G-Lebeau, *On 2D Rayleigh-Taylor instabilities*; Asymptot. Anal. 42, 1-27, (2005).
- [69] D. Pierotti, *The subcritical motion of a surface-piercing cylinder : existence and regularity of waveless solutions of the linearized problem*; Advances in Differential Equations, vol7,n4,pp 385-418, (2002).
- [70] S. Gatti and D. Pierotti, *Solvability of a plane elliptic problem for the flow in a channel with a surface-piercing obstacle*; Journal of Analysis and its Applications, vol22,n2, 357-381, (2003).

Index

adimensionnement, 30

cut-off functions, 90

dérivée particulière, 25

Écoulement bidimensionnel, 20

Écoulement irrotationnel, 19

Equation de Bernoulli, 25

fluide parfait, 19

fonction de courant, 22

fonction de Green, 33

incompressibilité, 21

mouvement stationnaire, 21

nombre de Froude, 33

perturbation stream function, 68

tension superficielle, 23