

*République Algérienne Démocratique et Populaire*  
*Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*  
*Université des Science et de la Technologie*  
*Houari Boumediene*  
*Faculté des Mathématiques*



## Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

En : **MATHEMATIQUES**

Spécialité : **ANALYSE : Equations aux Dérivées Partielles**

Par : Mr. **CHIKH SALAH Abdelouahab**

*Sujet :*

### **Minoration du Spectre du Laplacien de Hodge De Rham**

Soutenu publiquement le : 07/09/2008, devant le jury composé de

**Mr.R.BEBBOUCHI**  
**Mr.D.BEHOUL**  
**Mr .K.BETINA**  
**Mr.A.KESSI**

**Professeur, USTHB**  
**Maître de Conférences, USTHB**  
**Professeur, USTHB**  
**Professeur, USTHB**

**Président**  
**Directeur de thèse**  
**Examineur**  
**Examineur**

# Remerciements



*Je remercie les professeurs des universités étrangères qui m'ont aidé et répondu à toutes mes interrogations :*

*M. Sylvestre Gallot de l'Université de Savoie, France*

*M. Ahmed El Soufi de l'Université de Tours, France*

*M. Saïd Ilyas de l'Université de Tours, France*

*M. Mohamed Boucetta de l'Université de Marrakech, Maroc*

*Je tiens également à remercier vivement:*

*M. Rachid Bebouchi de l'Université USTHB.*

*M. Djamel Smaï de l'Université USTHB.*

*pour leurs précieuses contributions.*

*J'adresse mes remerciements aux membres du jury.*

*Toute ma tendresse va à ma famille :*

*Mes Parents, mes frères, et ma femme pour m'avoir soutenu pour mes études et d'être toujours à mes côtés.*

*Et j'adresse particulièrement mes plus grands remerciements à mon directeur de thèse M. Djilali Behloul qui est beaucoup plus qu'un encadreur pour moi...*

*Abdelouahab Chikh Salah*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>4</b>
1.1	Variétés riemanniennes . . . . .	4
1.1.1	Les Variétés . . . . .	4
1.1.2	Espace tangent . . . . .	6
1.1.3	Champs de vecteurs . . . . .	7
1.1.4	Espace cotangent . . . . .	8
1.1.5	Les tenseurs . . . . .	8
1.1.6	p-formes différentielles . . . . .	11
1.1.7	La connexion . . . . .	15
1.1.8	Géométrie riemannienne . . . . .	15
1.1.9	Géodésiques . . . . .	18
1.1.10	Application exponentielle et coordonnées normales . . . . .	18
1.1.11	Connexion des p-formes . . . . .	19
1.1.12	La courbure . . . . .	20
1.1.13	Tenseur de Ricci et la courbure scalaire . . . . .	22
1.1.14	Extension de la courbure aux p-formes . . . . .	22
1.1.15	La divergence, la différentielle et la codifférentielle . . . . .	24
1.2	Le laplacien . . . . .	25
1.2.1	Le laplacien des fonctions . . . . .	25
1.2.2	Le laplacien de Hodge-de Rham . . . . .	26
1.2.3	L'opérateur de Hodge . . . . .	26
1.3	Estimation du spectre des 0-formes et des 1-formes . . . . .	28
1.3.1	Estimation du spectre des 0-formes . . . . .	28
1.3.2	Estimation du spectre des 1-formes . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Minoration du p-spectre de Hodge De Rham</b>	<b>30</b>
2.1	Formule de Weizenböck . . . . .	30
2.1.1	Théorème de Weizenböck . . . . .	30
2.1.2	Conséquences du théorème de Weizenböck . . . . .	35
2.2	Les identités de Ricci . . . . .	36
2.2.1	Les identités de Ricci . . . . .	36
2.2.2	Expression de "F" en fonction du tenseur de la courbure riemannienne "R" . . . . .	37

2.3	L'opérateur de courbure et minoration de " $F$ " . . . . .	44
2.3.1	L'opérateur de courbure . . . . .	44
2.3.2	Minoration de " $F$ " . . . . .	49
2.4	Minoration des valeurs propres du p-spectre . . . . .	54
2.4.1	La théorie de De Rham et le p-spectre . . . . .	54
2.4.2	Minoration de $\nabla\tau$ : . . . . .	59
2.4.3	Minoration du p-spectre . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Etude du spectre du laplacien sur la sphère</b>	<b>66</b>
3.1	Le spectre du laplacien pour les fonctions . . . . .	66
3.2	Le spectre du laplacien pour les formes différentielles . . . . .	72
3.2.1	Caractérisation du spectre du laplacien des p-formes . . . . .	75
3.3	Multiplicités des valeurs propres . . . . .	80

# Introduction

*L'une des questions centrales de l'analyse sur les variétés est l'estimation du spectre du laplacien des fonctions et des  $p$ -formes différentielles agissant sur une variété riemannienne compacte en fonction d'invariants géométriques. Des résultats importants ont été obtenus concernant la minoration de la première valeur propre du laplacien (i.e : la plus petite non nulle). Pour ce qui est des fonctions, le travail de Bochner et Lichnerowicz a donné un résultat remarquable par la minoration de la courbure de Ricci [Oba62], ainsi que les travaux de S.Gallot et D.Meyer qui ont donné une estimation optimale pour le spectre du laplacien des  $p$ -formes en fonction de l'opérateur de courbure.*

*Dans ce mémoire nous allons, en premier lieu, expliquer et détailler les démonstrations nécessaires ayant abouti à la minoration optimale de la première valeur propre du laplacien de Hodge et De Rham des  $p$ -formes différentielles agissant sur une variété riemannienne compacte connexe et orientée en fonction de l'opérateur de courbure, qui ont été faites par S.Gallot et D.Meyer [GHL05].*

*Ensuite, et en deuxième lieu, nous allons calculer les valeurs propres du laplacien des fonctions agissant sur la sphère, ainsi que les valeurs propres du laplacien des  $p$ -formes agissant sur la sphère. Le travail qui conclura à l'optimalité de la minoration, est basé sur les travaux de I.Iwasaki et K.Katase [IK79] et S.Gallot et D.Meyer [GHL05].*

*Nous terminerons notre mémoire par la détermination de l'espace propre pour chaque valeur propre du laplacien des  $p$ -formes agissant sur la sphère, et des multiplicités de ses valeurs propres. Résultats des travaux de I.Iwasaki et K.Katase [IK79] et A.Ikida et Y.Taniguchi [IT78].*

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Variétés riemanniennes

#### 1.1.1 Les Variétés

Variété topologique [GHL05], [Gud07]

**Définition 1.1.1** Une variété topologique de dimension  $n$  est un espace topologique séparé  $M$  localement homéomorphe à  $\mathbf{R}^n$ . Pour tout point  $m$  de  $M$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $M$  contenant  $m$  et un homéomorphisme  $\varphi$  de  $U$  sur un ouvert  $W$  de  $\mathbf{R}^n$ .

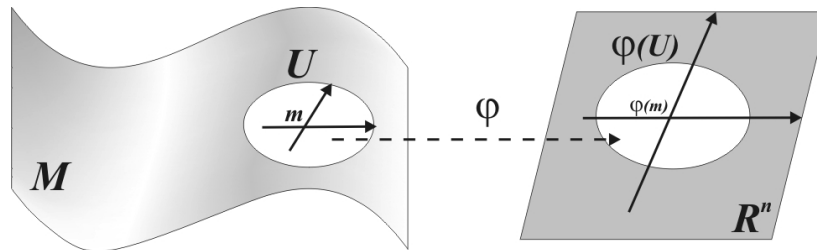
On appelle  $(U, \varphi)$  une carte locale autour de  $m$ .

On dit que deux cartes  $(U_1, \varphi_1)$  et  $(U_2, \varphi_2)$  de  $M$  telles que  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , sont compatibles si l'application changement de cartes

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

est un homéomorphisme.

Un atlas de  $M$  est un ensemble  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  de cartes tels que les ouverts  $U_\alpha$  recouvrent  $M$  et toutes les cartes de  $\mathcal{A}$  sont deux à deux compatibles.



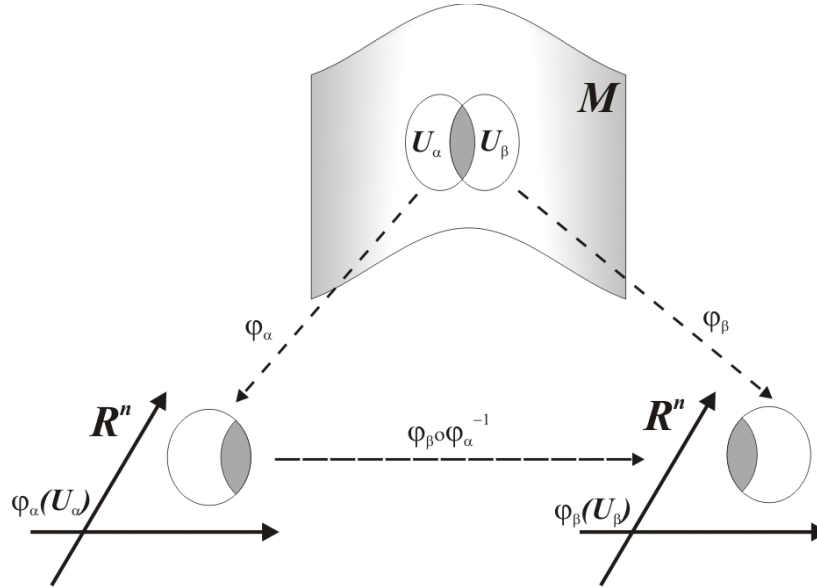
*Homéomorphisme  $\varphi$  de la Variété  $M$  dans  $\mathbf{R}^n$*

## Variété différentiable

### Définition 1.1.2 [Dom06]

1. Une variété différentiable de classe  $C^k$  où  $k$  est un entier tel que  $1 \leq k \leq +\infty$  est une variété topologique munie d'un atlas dans les homéomorphismes de changement de cartes sont de classe  $C^k$ .

Dans toute la suite on dira **variété différentiable** pour une variété de classe  $C^\infty$ .



*L'homéomorphisme de changement de cartes.*

### Exemples :

1. Les ouverts (non vides)  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$  dont l'atlas correspondant  $\mathcal{A}_\Omega$  contient la seule carte  $(\Omega, Id_\Omega)$ .
2. La sphère standard  $\mathbf{S}^n$  définie par :

$$\mathbf{S}^n = \left\{ x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} / f(x) = x_0^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0 \right\}$$

est une variété différentiable de dimension  $n$ .

3. Le tore  $\mathbf{T}^n$  défini par :

$$\mathbf{T}^n = \left\{ x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n} / (x_1^2 + x_2^2 = 1, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = 1) \right\}$$

est une variété différentiable de dimension  $n$ .

4. Le groupe spécial orthogonal :

$$SO(n) = \left\{ A \in M_n(\mathbf{R}) / \det(A) = 1 \quad \text{et} \quad {}^tAA = Id \right\}$$

est une variété de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

## 1.1.2 Espace tangent

**Première définition : tangente à une courbe** [Dom06][MAS03]

Soit  $m$  un point de la variété  $M$ .

On note par :  $\mathfrak{C}_m = \{\gamma : [-1, 1] \rightarrow M, \mathcal{C}^\infty \text{ tel que } \gamma(0) = m\}$  l'ensemble des courbes qui passent par le point  $m$ . Soit  $(U, \varphi)$  une carte locale ( $m \in U$ ) alors pour chaque  $\gamma \in \mathfrak{C}_m$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\gamma([- \varepsilon, \varepsilon]) \subset U$ . Sur  $[- \varepsilon, \varepsilon]$  posons  $\gamma^i(t) = x^i(\gamma(t))$ , où  $i \in \{1, \dots, n\}$  et les  $x^i$  sont les applications coordonnées associées à la carte locale  $(U, \varphi)$ . Sur  $\mathfrak{C}_m$ , nous définissons la relation suivante :

$$\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow \left( \frac{d\gamma^i(t)}{dt} \right)_{|t=0} = \left( \frac{d\gamma'^i(t)}{dt} \right)_{|t=0}, \quad \forall i.$$

La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence indépendante du choix du système de coordonnées sur  $U$ ,

*Définition : l'espace tangent en  $m$  à  $M$ , que l'on note  $T_m M$ , est l'ensemble des classes d'équivalences de la relation  $\sim$ .*

**Seconde définition : dérivation**

L'ensemble des germes des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de  $m$  (où  $m \in M$ ) est noté  $\mathcal{C}_m^\infty(M)$ .

**Définition 1.1.3** *Un vecteur tangent en  $m$  à  $M$  est une application :*

$$X : \mathcal{C}_m^\infty(M) \rightarrow \mathbf{R}$$

*qui à toute fonction  $f \in \mathcal{C}_m^\infty(M)$  fait correspondre un nombre  $X(f) = X(f)(m)$  de sorte que les règles suivantes soient vérifiées pour tous  $f$  et  $h \in \mathcal{C}_m^\infty(M)$  :*

- 1)  $X(\lambda f + h) = \lambda X(f) + X(h) \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$
- 2)  $X(f \cdot h) = X(f)h(m) + f(m)X(h)$
- 3)  $f$  est constante  $\Rightarrow X(f) = 0$

*L'ensemble des vecteurs tangents en  $m$  forme un espace vectoriel noté  $T_m M$ .*

**Remarque :**

Les deux définitions précédentes sont équivalentes.

On montre que  $T_m M$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , voir [MAS03].

Notons par  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormée de l'espace tangent  $T_m M$  au point  $m$ .

## Fibré tangent

On montre que l'ensemble défini par :

$$TM := \bigcup_{m \in M} T_m M$$

est une variété différentiable de dimension  $2n$ , qu'on appellera le fibré tangent.

### 1.1.3 Champs de vecteurs

**Définition 1.1.4** Soit  $U \subset M$  un ouvert. Un champ de vecteurs sur  $U$  est une application :

$$X : U \rightarrow TM \quad , \quad m \mapsto X_m \in T_m M$$

telle que :

$$\Pi(X_m) = m \quad \forall m \in U$$

avec :  $\Pi : TM \rightarrow M$  la projection canonique.

$\chi(M)$  désigne l'ensemble des champs de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $M$ .

#### Crochet de Lie :

On appelle crochet de Lie l'application notée  $[\cdot, \cdot]$ , définie par :

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] := XY - YX, \end{aligned}$$

tel que pour toute application  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  différentiable :  $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ .

**Propriétés** (du crochet de Lie) :

Pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ,  $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,  $X, Y, Z \in \chi(M)$  on a

- 1).  $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$ ,
- 2).  $[X, Y] = -[Y, X]$ , (antisymétrique)
- 3).  $[fX, hY] = f \cdot h \cdot [X, Y] + f \cdot (Xh) \cdot Y - h \cdot (Yf) \cdot X$ ,
- 4).  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ , c'est l'**identité de Jacobi**.

### 1.1.4 Espace cotangent

[M.B86] On appelle espace cotangent au point  $m$  de  $M$  l'espace dual de  $T_m M$  que nous notons  $T_m^* M$ , dont la base orthonormée au point  $m$  (associée à la base  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{1 \leq i \leq n}$ ) de  $T_m M$  est :  $\{dx^i|_m\}_{1 \leq i \leq n}$  avec :

$$dx^j|_m\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(m)\right) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(m) = \delta_i^j.$$

l'espace défini par :

$$T^* M := \bigcup_{m \in M} T_m^* M$$

est appelé le fibré cotangent de  $M$ .

#### Les 1-formes différentielles :

On appelle 1-forme différentielle une section de classe  $C^\infty$  du fibré cotangent (i.e :  $\alpha : M \rightarrow T^* M$ ).

Une section est une application qui a pour tout  $m \in M$  associe un élément  $\alpha|_m$  de  $T_m^* M$ .  $\Omega^1(M)$  désigne l'espace vectoriel des 1-formes différentielles de  $M$ .

Localement : au dessus d'une carte locale  $(U, \phi)$  de  $M$ , on a :

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i,$$

avec les  $\alpha_i : U \rightarrow \mathbf{R}$  des fonctions  $C^\infty$ .

### 1.1.5 Les tenseurs

#### Le produit tensoriel [Dom06] :

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels, de bases respectives  $\{e_i\}$ ,  $\{f_i\}$  et leur dual  $E^*$  et  $F^*$  de bases respectives  $\{e^i\}$  et  $\{f^i\}$ . Pour tous  $f \in E^*$  et  $g \in F^*$  le produit tensoriel de  $f$  et  $g$  est défini par :

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y).$$

où  $(x, y) \in E \times F$

On note par  $E^* \otimes F^*$  l'espace vectoriel  $\{f \otimes g / f \in E^*, g \in F^*\}$  qu'on appelle le produit tensoriel de  $E^*$  et  $F^*$ .

Tout élément  $T \in E^* \otimes F^*$  s'écrit sous la forme  $T = \sum_{i,j} T_{ij} e^i \otimes f^j$ , où  $T_{ij} \in \mathbf{R}$

Notons par :

$$\otimes^r E^* = \underbrace{E^* \otimes E^* \otimes \dots \otimes E^*}_{r \text{ fois}}.$$

Soit  $T$  un élément de  $\otimes^r E^*$  ( $T$  est appelé tenseur) de la forme  $T = \sum T^{i_1 i_2 \dots i_r} e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_r}$  on dit que :

$T$  est symétrique si  $T^{i_1 i_2 \dots i_r} = T^{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(r)}}$  pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ .

$T$  est antisymétrique si  $T^{i_1 i_2 \dots i_r} = (-1)^{\text{sign}(\sigma)} T^{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(r)}}$  pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ .

Où  $\mathfrak{S}_r$  est le groupe des permutations de l'ensemble  $\{1, \dots, r\}$ .

**Produit extérieur :**

$\Lambda^r E^*$  est le sous espace vectoriel de  $\otimes^r E^*$  des éléments antisymétriques.

On définit le produit extérieur par

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda^r E^* \times \Lambda^s E^* &\longrightarrow \Lambda^{r+s} E^* \\ (\omega, \eta) &\longmapsto \omega \wedge \eta, \end{aligned}$$

tel que :

$$(\omega \wedge \eta)(x_1, x_2, \dots, x_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \omega(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}) \cdot \eta(x_{\sigma(r+1)}, \dots, x_{\sigma(r+s)}).$$

Nous avons la propriété :  $\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega$ .

Les fibrés extérieurs de  $E$ , et de  $E^*$ , notés respectivement  $\Lambda E$  et  $\Lambda E^*$  sont définis par :

$$\Lambda E = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^p E \quad \text{et} \quad \Lambda E^* = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^p E^*.$$

**Les tenseurs sur une variété différentielle :**

**Définition 1.1.5** On appelle **tenseur  $T$  du type  $(q, p)$**  (ou  $(q, p)$ -tenseur) au dessus de  $m$ , un élément de l'espace vectoriel  $T_m^{(q,p)} M$ , avec

$$T_m^{(q,p)} M = \underbrace{T_m M \otimes \dots \otimes T_m M}_{q \text{ fois}} \otimes \underbrace{T_m^* M \otimes \dots \otimes T_m^* M}_{p \text{ fois}}$$

Dans une base associée à des coordonnées  $(x_i)$  au voisinage de  $m$ ,  $T$  s'écrit sous la forme :

$$T|_m = T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}(m) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}|_m \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_q}}|_m \otimes dx^{j_1}|_m \otimes \dots \otimes dx^{j_p}|_m$$

avec :

$$T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}(m) = T \left( \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}|_m, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_q}}|_m, dx^{j_1}|_m, \dots, dx^{j_p}|_m \right).$$

Un  $(p, q)$ -tenseur est aussi appelé "p(fois)-contravariant et q(fois)-covariant tenseur".

### Champs de tenseurs

On considère la variété différentiable

$$T^{(q,p)}M := \bigcup_{m \in M} T_m^{(q,p)}M$$

qui est un fibré au dessus de  $M$ , le **fibré des tenseurs de type  $(q, p)$** .

Les sections  $\mathcal{C}^\infty$  de  $T^{(q,p)}M$  sont appelées **champs de tenseurs de type  $(q, p)$** .

Un champ de tenseurs  $T$  de type  $(q, p)$  s'écrit au dessus d'une carte locale de  $M$ , de coordonnées  $(x_i)$ ,

$$T = T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_q}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_p}$$

L'ensemble des champs de tenseurs du type  $(q, p)$  est noté  $\Gamma(T^{(q,p)}M)$ . [GHL05]

### Groupe symétrique special :

Le groupe symétrique special ("Battage" ou "Shuffle") noté  $S(k, n)$ , où  $k \leq n$ , est l'ensemble des permutations défini par :

$$S(k, n) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(k) \quad \text{et} \quad \sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \dots < \sigma(n)\}.$$

$S(k, n)$  est un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$ .

### 1.1.6 p-formes différentielles

**Définition 1.1.6** [Dom06] Une **p-forme différentielle** (ou une **p-forme**) sur  $M$  est un champ de tenseurs de type  $(0, p)$  antisymétrique.

On note  $\Omega^p(M)$  l'espace des p-formes.

Pour  $p = 0$  :  $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ .

Pour  $p = 1$ , on retrouve les 1-formes différentielles.

Pour  $p > n$  ( $n$  dimension de  $M$ ) :  $\Omega^p(M) = \{0\}$ .

Une p-forme différentielle est donc une application  $\mathcal{C}^\infty$ -multilinéaire antisymétrique de  $\chi(M) \times \dots \times \chi(M)$  dans  $\mathcal{C}^\infty(M)$ .

$$\dim \Omega^p(M) = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Puisque :  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ , donc  $\dim \Omega^p(M) = \dim \Omega^{n-p}(M)$ .

#### **Expressions locales :**

Soit  $\{dx^i\}_{1 \leq i \leq n}$  est une base des 1-formes différentielles, au dessus d'un ouvert  $U$  d'une carte locale de  $M$ , de coordonnées  $(x_i)$ , on pose

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (-1)^{\text{sign}\sigma} dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma(p)}}$$

pour  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ .

$\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$  est une base de  $\Omega^p(M)$ .

C'est à dire que toute p-forme  $\tau$  s'écrit, au dessus de  $U$  :

$$\tau = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \tau_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

où les  $\tau_{i_1 \dots i_p}$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  de  $U \rightarrow \mathbf{R}$ .

**Produit extérieur des formes :**

Pour  $\omega \in \Omega^p(M)$  et  $\eta \in \Omega^q(M)$ , le **produit extérieur**  $\omega \wedge \eta \in \Omega^{p+q}(M)$  est défini par la formule :

$$\omega \wedge \eta(X_1, \dots, X_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \omega(X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(p)}) \cdot \eta(X_{\sigma(p+1)} \dots X_{\sigma(p+q)}).$$

L'espace  $\Omega^*(M) = \Omega^0(M) \oplus \Omega^1(M) \oplus \dots \oplus \Omega^n(M)$  a une structure d'algèbre. Il a la propriété de commutativité :

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{p \cdot q} \eta \wedge \omega.$$

**Différentielle ou dérivée extérieure :**

**Définition 1.1.7** [MAS03]

soit  $M$  une variété différentielle lisse (i.e :  $\mathcal{C}^\infty$ ), et  $p \in \mathbb{N}$  :

Il existe un unique opérateur  $d$  appelé **la dérivée extérieure** ou **la différentielle** (qui ne dépend que de la structure différentielle de  $M$ ) défini par :

$$\begin{aligned} d : \Omega^p(M) &\longrightarrow \Omega^{p+1}(M) \\ \tau &\longmapsto d\tau \end{aligned}$$

tels que :

i) Pour  $p=0$ ,  $d : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  est la différentielle des fonctions,

ii) Pour tout  $\tau \in \Omega^p(M)$  :

$$\begin{aligned} d\tau(X_0, X_1, \dots, X_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i X_i \cdot \tau(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \tau([X_i, X_j], \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p). \end{aligned}$$

où  $\hat{X}_i$  signifie que l'on omet  $X_i$  dans les arguments de  $\tau$ ,  
et  $X_i \cdot \tau(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p)$  est la dérivation sur la fonction  $\tau(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p)$ .

**Propriétés de la différentielle :**

1) En utilisant l'identité de Jacobi, on obtient :

$$d \circ d = 0.$$

2) Une forme  $\tau \in \Omega^p(M)$  est dite fermée si  $d\tau = 0$ , elle est dite exacte si il existe  $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$  telle que  $d\eta = \tau$ .

3) Pour  $\tau \in \Omega^p(M)$  et  $\eta \in \Omega^q(M)$  :

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha \wedge \beta) + (-1)^p(\alpha \wedge d\beta).$$

4) Dans un ouvert  $U$ ,  $\tau$  s'écrit :

$$\tau = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \tau_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

avec les  $\tau_{i_1 \dots i_p}$  des fonctions  $\mathcal{C}^\infty(M)$ . Alors

$$\begin{aligned} d\tau &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} d\tau_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{i_1 \dots i_p} \right) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned}$$

### ***Cohomologie de De Rham***

Dans chaque espace  $\Omega^p(M)$ , deux sous-espaces sont associés canoniquement à la différentielle  $d$ .

Le premier est le noyau de  $d$ , considérée comme application  $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$ . qu'on note  $Z^p(M) = \ker d \subset \Omega^p(M)$ .

Le second est l'image de  $d$ , considérée comme application  $d : \Omega^{p-1}(M) \rightarrow \Omega^p(M)$ . On note  $B^p(M) = \text{Im } d \subset \Omega^p(M)$ .

Comme  $d^2 = 0$ , alors :

$$B^p(M) \subset Z^p(M).$$

On appelle **cohomologie de de Rham** l'espace :

$$H^*(M, d) = \bigoplus_{p \geq 0} H^p(M, d).$$

où :

$$H^p(M, d) = Z^p(M) / B^p(M).$$

### ***Le produit intérieur :***

Soit  $X \in \chi(M)$ , on définit le produit intérieur  $i_X$  sur les formes différentielles par :

$$\begin{aligned} i_X : \Omega^p(M) &\longrightarrow \Omega^{p-1}(M) \\ \tau &\longrightarrow i_X(\tau), \end{aligned}$$

tel que :

$$(i_X(\tau))(X_1, X_2, \dots, X_{p-1}) = \tau(X, X_1, X_2, \dots, X_{p-1}). \quad (1.1)$$

**Propriétés** (du produit intérieur) :

- 1). Sur les fonctions :  $i_X f = 0$ .
- 2). Pour tout  $\tau \in \Omega^p(M)$ , et  $\psi \in \Omega^q(M)$  on a :

$$i_X(\tau \wedge \psi) = i_X(\tau) \wedge \psi + (-1)^p \tau \wedge i_X(\psi).$$

- 3). Le produit intérieur est un opérateur fermé :

$$(i_X)^2 = 0.$$

**La dérivée de Lie :**

La dérivée de Lie dans la direction du champ de vecteurs  $X$ , notée  $L_X$ , est définie par :

$$L_X : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(M).$$

avec

$$L_X = i_X d + di_X. \tag{1.2}$$

**Propriétés** (La dérivée de Lie) :

$$\begin{aligned} L_X d &= dL_X \\ \cdot [L_X, i_Y] &= i_{[X, Y]} \\ L_{[X, Y]} &= [L_X, L_Y] \end{aligned}$$

**Remarque :**

La dérivée de Lie est l'extension de la dérivation des fonctions, aux tenseurs et aux formes.

**Forme de volume**

Sur une variété différentiable  $M$  de dimension  $n$ , toute  $n$ -forme  $\omega$  qui ne s'annule en aucun point de  $M$  sera appelée une **forme de volume**. Il est facile de vérifier qu'il y a équivalence entre le fait que  $M$  soit orientable et le fait que  $M$  admette une forme de volume.

Pour  $M$  orientable, deux formes de volume  $\omega$  et  $\omega'$  ont même orientation s'il existe une fonction strictement positive  $h : M \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $\omega = h\omega'$ .

Ces formes de volumes ont des orientations opposées si  $h$  est strictement négative.

Si  $M$  est orientable, alors elle n'admet que deux orientations différentes possibles.

### 1.1.7 La connexion

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ .

#### Définition 1.1.8 [MAS03]

Une connexion sur  $M$  est une application  $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$  telles que pour tous  $X, X', Y, Y' \in \chi(M)$  et  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  :

- 1).  $\nabla_{X+X'}Y = \nabla_X Y + \nabla_{X'} Y$ ,
- 2).  $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ ,  $\mathcal{C}^\infty$ -linéaire sur le premier argument,
- 3).  $\nabla_X(Y + Y') = \nabla_X Y + \nabla_X Y'$ ,
- 4).  $\nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + (X.f)Y$ .

De cette définition, il est possible de montrer que  $(\nabla_X Y)|_m$  ne dépend que de  $X|_m$  et de  $Y$  avec ses dérivées en  $m$ . C'est à dire que pour tout ouvert  $U$  contenant  $m$ , le champ de vecteurs  $(\nabla_X Y)$  en  $m$  ne peut dépendre que de  $Y|_U$  et de  $X|_m$ .

On a aussi :  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ .

### 1.1.8 Géométrie riemannienne

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ .

**La Métrique** : [M.B86], [GHL05], [Küh06]

#### Définition 1.1.9 [Küh06]

On appelle métrique riemannienne  $g$  sur  $M$  un  $(0,2)$ -tenseur vérifiant les conditions suivantes :

- 1).  $g_m(X, Y) = g_m(Y, X) \quad \forall X, Y$  (symétrique).
- 2).  $g_m(X, X) > 0 \quad \forall X \neq 0$  (définie positive).
- 3). Les coefficients  $g_{ij}$  de représentation locale

$$g_m = \sum_{i,j} g_{ij}(m) dx^i|_m \otimes dx^j|_m, \quad g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

les  $g_{ij}$  sont des fonctions différentiables. (différentiabilité).

Le couple  $(M, g)$  est appelé **variété riemannienne**.

### Remarque :

La métrique introduit une distance sur la variété, et un produit scalaire sur l'espace tangent.

### L'isométrie

#### Définition 1.1.10 [CAR93]

Soit  $(M, g)$  et  $(N, h)$  deux variétés riemanniennes, un difféomorphisme  $f : M \rightarrow N$  est dit **isométrie** si  $\forall m \in M$  et  $\forall u, v \in T_m M$  :

$$g_m(u, v) = h_{f(m)}(h_{f(m)}(u), h_{f(m)}(v)).$$

on dit que les deux variétés  $M$  et  $N$  sont **isométriques** s'il existe une isométrie  $f : M \rightarrow N$ .

### Exemples :

i) Dans un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^n$ , et pour tout  $x \in U$ ,  $T_x U = \mathbf{R}^n$ , le produit scalaire euclidien  $\langle, \rangle = g_x$ , est une métrique sur  $U$

$$g = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i.$$

on l'appelle la métrique canonique et on note :  $Can_U$ .

ii) La sphère unitaire  $\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} / \|x\| = 1\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$  est une sous variété de dimension  $n$ , on peut la définir par sa projection stéréographique qui définit une structure de difféomorphisme local :

$$\pi : \mathbf{S}^n - \{N\} \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

donné par :

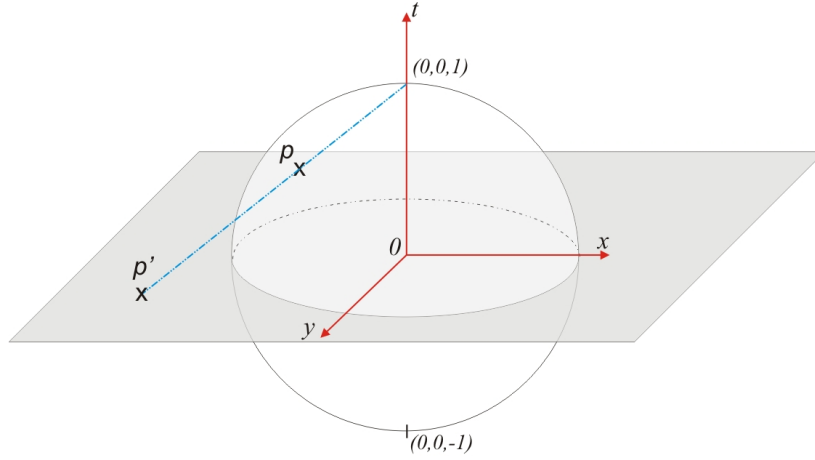
$$\pi(u_1, \dots, u_{n+1}) = \left( \frac{u_1}{1 + u_{n+1}}, \dots, \frac{u_n}{1 + u_{n+1}} \right).$$

avec  $N$  le pôle nord  $N = (0, \dots, 0, 1)$

alors :

$$(\mathbf{S}^n - \{N\}, Can_{\mathbf{S}^n}) \text{ est isométrique à } (\mathbf{R}^n, \frac{4}{(1 + \|x\|^2)^2} Can_{\mathbf{R}^n}).$$

On note  $Can_{\mathbf{S}^n} = \frac{4}{(1 + \|x\|^2)^2} Can_{\mathbf{R}^n}$  la métrique canonique de  $\mathbf{S}^n$ .



*La projection stéréographique de pôle  $(0, 0, 1)$  sur le plan  $t = 0$*

***Connexion de Levi-Civita :***

On appelle Connexion de Levi-Civita l'unique connexion  $\nabla$  symétrique et compatible avec la métrique  $g$ , ce qui veut dire :

$$\forall X, Y, Z \in \chi(M) : X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(X, \nabla_X Z).$$

***Symbole de Christoffel :***

Soit  $g$  une métrique riemannienne et  $X, Y \in \chi(M)$ , localement on a :

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

Le symbole de Christoffel est la fonction  $\Gamma_{jk}^i$   $C^\infty$  de  $M$  dans  $\mathbf{R}$ , définie par :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{i=1}^n \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Alors on a :

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i X^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Si on note  $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$  on obtient :

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}).$$

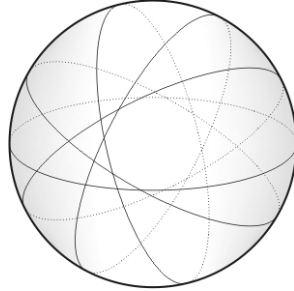
### 1.1.9 Géodésiques

**Définition 1.1.11** [GHL05] Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne et  $D$  la dérivation des courbes sur  $M$ . Une courbe différentiable  $\gamma : J \rightarrow M$  est une géodésique si :

$$\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) = 0, \quad t \in J \text{ (intervalle de } \mathbf{R}\text{)}.$$

**Théorème 1.1.1** [BUS04]

1. Pour tout  $m \in M$  et tout vecteur  $v \in T_m M$  il existe un intervalle  $J \subset \mathbf{R}$  avec  $0 \in J$  et une géodésique  $\gamma : J \rightarrow M$  telles que  $\gamma(0) = m$  et  $\dot{\gamma}(0) = v$ .
2. Soit  $c, \gamma : J \rightarrow M$  deux géodésiques, s'il existe  $t_0 \in J$  tels que  $c(t_0) = \gamma(t_0)$  et  $\dot{c}(t_0) = \dot{\gamma}(t_0)$ , alors  $c(t) = \gamma(t)$  pour tout  $t \in J$ .
3. Les géodésiques d'une variété riemannienne  $(M, g)$  sont des "courbes de longueurs minimums".



**Géodésique  $S^2$**

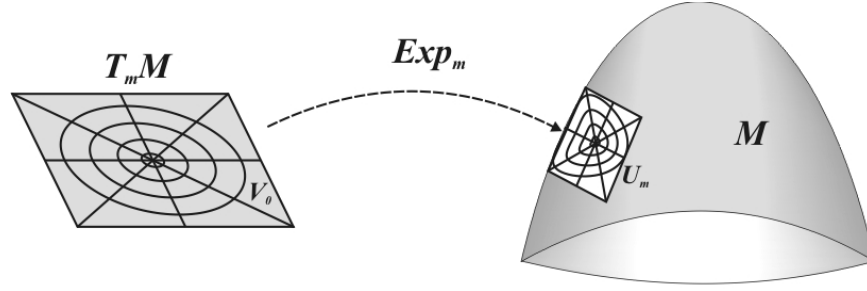
### 1.1.10 Application exponentielle et coordonnées normales

[MAS03]

Pour tout  $m \in M$  fixé, soit  $X|_m \in T_m M$ , il existe une unique géodésique autoparallèle  $\gamma_X$  sur  $M$  (i.e :  $\nabla_{\dot{\gamma}_X} \dot{\gamma}_X = 0$ ), telle que  $\gamma_X(0) = m$  et  $\dot{\gamma}_X(0) = X|_m$ . Soit  $V_0$  le plus grand ouvert de  $T_m M$  telle que  $X|_m \in V_0$ ,  $\gamma_X$  est définie en  $t = 1$  ; sur cet ouvert, l'**application exponentielle** au point  $m$  est définie par :

$$\begin{aligned} \exp_m : V_0 &\longrightarrow M \\ X_m &\longmapsto \gamma_X(1). \end{aligned}$$

c'est un difféomorphisme entre  $V_0$  et un voisinage ouvert  $U_m$  de  $m$  dans  $M$ .



*L'application exponentielle au point  $m$*

Si  $u : \mathbf{R}^n \rightarrow T_m M$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors  $exp_m \circ u : W \subset \mathbf{R}^n \rightarrow U_m$  définit une carte locale  $(U_m, (exp_m \circ u)^{-1})$  contenant  $m$ . Les coordonnées sur  $U_m$  données par cette carte sont **les coordonnées normales** en  $m$  associées à  $\nabla$  et  $u$ , et elles sont centrées en  $m$ .

**Exemple :** Soit la sphère unitaire  $\mathbf{S}^2$  de  $\mathbf{R}^3$  définie par la projection stéréographique, l'application exponentielle peut être exprimée par ses coordonnées sphériques, où les vecteurs tangents sont :  $r \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + r \sin \phi \frac{\partial}{\partial y}$ , exprimés en fonction de  $r$  et  $\phi$  :

$$exp_p(r, \phi) = \left( \cos \phi \cos\left(r - \frac{\pi}{2}\right), \sin \phi \cos\left(r - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(r - \frac{\pi}{2}\right) \right).$$

### 1.1.11 Connexion des p-formes

[Kni95] L'extension d'une connexion agissant sur des champs de vecteurs aux p-formes est définie par :

pour tout  $\tau \in \Omega^p(M)$  et pour tous  $X, X_1, X_2, \dots, X_p \in \chi(M)$

$$\nabla_X \tau(X_1, X_2, \dots, X_p) = X(\tau(X_1, X_2, \dots, X_p)) - \sum_{i=1}^p \tau(X_1, X_2, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_p). \quad (1.3)$$

on note :

$$\nabla \tau(X, X_1, X_2, \dots, X_p) := \nabla_X \tau(X_1, X_2, \dots, X_p). \quad (1.4)$$

**Remarque :**

Dorénavant  $M$  sera une variété riemannienne,  $\langle, \rangle$  sa métrique, et  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita associée.

$\Omega^p(M)$  désigne l'espace des p-formes différentielles sur  $M$ .

On note  $\langle, \rangle_m$  le produit scalaire sur  $\Lambda^p T_m^* M$  au point  $m$ , et  $|\cdot|$  sa norme.

Le produit scalaire globale sur  $\Omega^p(M)$ , où le produit scalaire de  $L^2(\Omega^p(M))$ , est donné par :

$$(\tau, \tau') = \int_M \langle \tau, \tau' \rangle_m d\nu \quad \forall \tau, \tau' \in \Omega^p(M), \quad (1.5)$$

avec  $d\nu$  l'élément de volume riemannien.

$\| \cdot \|$  est la norme associée au produit scalaire global  $(\cdot, \cdot)$ .

Soit  $m \in M$ , on note  $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$  un repère local orthonormé au voisinage de  $m$ , et  $\{X_i^*\}_{1 \leq i \leq n}$  son coorepère local orthonormé au voisinage de  $m$ .  
 $\{X_{i_1}^* \wedge X_{i_2}^* \wedge \dots \wedge X_{i_p}^*\}$  est la base orthonormée de  $\Lambda^p T_m^* M$ .

### Notation :

Pour tout  $\tau \in \Omega^p(M)$ , nous noterons par la suite :

$$\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) := \tau(X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_p}) \quad \forall \alpha_i \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ et } i = 1, 2, \dots, p.$$

### Isomorphismes musicaux :

$\sharp, \flat$  sont les isomorphismes définis pour tout  $m$  de  $M$  par :

$$\begin{aligned} \flat : T_m M &\longrightarrow T_m^* M \\ X_m &\longmapsto X_m^\flat \end{aligned}$$

avec  $\forall Y_m \in T_m M : X_m^\flat(Y_m) := \langle X_m, Y_m \rangle_m$ ,

et

$$\begin{aligned} \sharp : T_m^* M &\longrightarrow T_m M \\ \tau_m &\longmapsto \tau_m^\sharp \end{aligned}$$

avec  $\forall Y_m \in T_m M : \langle \tau_m^\sharp, Y_m \rangle := \tau_m(Y_m)$ .

Pour les 1-formes on a :  $\nabla_X \tau = (\nabla_X \tau^\sharp)^\flat$ .

## 1.1.12 La courbure

### Définition 1.1.12 [GHL05], [CAR93]

La courbure est le  $(1, 3)$ -tenseur  $R$  défini par :

$$\forall X, Y, Z \in \chi(M) : R(X, Y)Z := \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z. \quad (1.6)$$

Le tenseur de courbure riemannienne est le  $(0, 4)$ -tenseur, noté aussi  $R$  défini par :

$$\forall X, Y, Z, T \in \chi(M) : R(X, Y, Z, T) := \langle R(X, Y)Z, T \rangle \quad (1.7)$$

en tout point  $m \in M$ .

**Propriétés** (de la courbure) : pour tous champs de vecteurs  $X, Y, Z, T$  sur  $M$  on a :

$$1) \quad R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T) = -R(X, Y, T, Z). \quad (1.8)$$

$$2) \quad R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0. \quad (1.9)$$

$$3) \quad R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y). \quad (1.10)$$

la propriété 1.9 est appelée "Identité de Bianchi".

### **Courbure sectionnelle**[BUS04]

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne, pour tout point  $m \in M$  et pour tout couple de vecteurs  $x, y \in T_m M$  linéairement indépendants, on définit **la courbure sectionnelle** par :

$$K(x, y) := \frac{R_m(x, y, x, y)}{g_m(x, x) \cdot g_m(y, y) - (g_m(x, y))^2}.$$

### **Remarques :**

- 1).  $K(x, y)$  ne dépend que du plan  $\alpha \subset T_m M$  engendré par  $x$  et  $y$ , on le note  $K(\alpha)$ .
- 2). Dans une base orthonormée (repère local) on a :

$$K(x, y) := R_m(x, y, x, y).$$

### **Définition 1.1.13** [GHL05]

*On dit qu'une variété riemannienne est à courbure constante (resp. positive, négative), si sa courbure sectionnelle est constante (resp. positive, négative) pour tous les plans de la variété.*

### **Exemples :**

- 1). Dans l'espace  $\mathbf{R}^n$  : pour tout plan  $P$  de  $\mathbf{R}^n$  on a  $K(P) = 0$ ,
- 2). Dans l'espace  $\mathbf{S}^n$  : pour tout plan  $P$  de  $\mathbf{S}^n$  on a  $K(P) = 1$ ,
- 3). Dans l'espace hyperbolique  $\mathbf{H}^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} / x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 = 1, x_0 > 0\}$  qui est une sous variété de  $\mathbf{R}^{n+1}$  de dimension  $n$  : pour tout plan  $P$  de  $\mathbf{H}^n$  on a  $K(P) = -1$ .

### **Théorème 1.1.2** (Théorème de Classification)[GHL05]

*Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète (i.e :  $M$  espace topologique complet) de dimension  $n$ , de courbure constante  $K(P) = C$  :*

- 1). Si  $C = -1$  alors  $(M, g)$  est isométrique à  $(\mathbf{H}^n, \text{Can}_{\mathbf{H}^n})$ ,
- 2). Si  $C = 0$  alors  $(M, g)$  est isométrique à  $(\mathbf{R}^n, \text{Can}_{\mathbf{R}^n})$ ,
- 3). Si  $C = 1$  alors  $(M, g)$  est isométrique à  $(\mathbf{S}^n, \text{Can}_{\mathbf{S}^n})$ .

### 1.1.13 Tenseur de Ricci et la courbure scalaire

La courbure de Ricci est la courbure trace du tenseur de courbure. C'est le (0,2)-tenseur covariant symétrique, on le note  $Ric$ . [GHL05], [Kni95]

Soit  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormée de  $T_m M$ .

Le **tenseur de Ricci** au point  $m$  est défini par :

$$Ric_m(X) := \sum_{i=1}^n R(X, e_i)e_i.$$

La **courbure de Ricci** au point  $m$  est définie par :

$$Ric_m(X, Y) := \sum_{i=1}^n \langle R(X, e_i)e_i, Y \rangle.$$

La **courbure scalaire** au point  $m$  est définie par :

$$Scal(m) := \sum_{j=1}^n Ric_m(e_j, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle.$$

**Remarques :**

- 1). Connaître le  $Ric \Leftrightarrow$  Connaître la fonction symétrique associée,
- 2). Si la courbure sectionnelle  $K = c$  en  $m$ , alors  $Ric_m = (n - 1)c.g_m$ ,  
et  $Scal(m) = n(n - 1)c$ ,
- 3). En général l'information donné par le  $Ric$  est plus faible que celle de  $K$ , sauf dans les cas  $n = 2$  et  $3$ .

Si le  $Ric = k.g$  avec  $k = C^{ts}$ , on dit que  $M$  est une **variété d'Einstein**.

**Classement :**

**Variété à courbure Constante**  $\subset$  **Variété d'Einstein**  $\subset$  **Variété à courbure sectionnelle constante**.

### 1.1.14 Extension de la courbure aux p-formes

**Définition 1.1.14** [Kni95] *L'extension de la courbure aux p-formes différentielles est définie par :*

*pour tout  $\tau \in \Omega^p(M)$  et pour tous  $X_\alpha, X_\beta \in \chi(M)$*

$$R(\alpha, \beta)\tau := \nabla_{[\alpha, \beta]}\tau - \nabla_\alpha \nabla_\beta \tau + \nabla_\beta \nabla_\alpha \tau.$$

**Proposition 1.1.1** [GM75] :

Pour toute  $p$ -forme  $\tau$  et pour tous champs  $X_\alpha, X_\beta, X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_p}$  de la base ortho-normée au voisinage d'un point  $m$  de  $M$  on a :

$$R(\alpha, \beta)\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \sum_{i=1}^p \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, R(\alpha, \beta)\alpha_i, \dots, \alpha_p).$$

**Preuve**

D'une part : par définition de la connection des  $p$ -formes (1.3) on a :

$$\nabla_{[\alpha, \beta]}\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = [\alpha, \beta](\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)) - \sum_{i=1}^p \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \nabla_{[\alpha, \beta]}\alpha_i, \dots, \alpha_p). \quad (1.11)$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\beta \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) &= \nabla_\alpha \{ \nabla_\beta \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \} \\ &= \nabla_\alpha \{ \beta(\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)) - \sum_{i=1}^p \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \nabla_\beta \alpha_i, \dots, \alpha_p) \} \\ &= \nabla_\alpha (\beta(\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p))) - \sum_{i=1}^p \nabla_\alpha (\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \nabla_\beta \alpha_i, \dots, \alpha_p)) \\ &= \alpha(\beta(\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p))) \\ &\quad - \sum_{i=1}^p \beta(\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \nabla_\alpha \alpha_i, \dots, \alpha_p)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^p \alpha(\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \nabla_\beta \alpha_i, \dots, \alpha_p)) \\ &\quad + \sum_{i \neq j}^p \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \nabla_\alpha \alpha_i, \dots, \nabla_\beta \alpha_j, \dots, \alpha_p) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \nabla_\alpha \nabla_\beta \alpha_i, \dots, \alpha_p). \end{aligned} \quad (1.12)$$

de même pour  $\nabla_\beta \nabla_\alpha \tau$  :

$$\begin{aligned}
\nabla_\beta \nabla_\alpha \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) &= \beta(\alpha(\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p))) \\
&\quad - \sum_{i=1}^p \alpha(\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \nabla_\beta \alpha_i, \dots, \alpha_p)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^p \beta(\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \nabla_\alpha \alpha_i, \dots, \alpha_p)) \\
&\quad + \sum_{i \neq j}^p \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \nabla_\beta \alpha_i, \dots, \nabla_\alpha \alpha_j, \dots, \alpha_p) \\
&\quad + \sum_{i=1}^p \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \nabla_\beta \nabla_\alpha \alpha_i, \dots, \alpha_p). \tag{1.13}
\end{aligned}$$

les formules 1.11, 1.12 et 1.13, donnent :

$$\begin{aligned}
R(\alpha, \beta)\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) &= (\nabla_{[\alpha, \beta]} - \nabla_\alpha \nabla_\beta + \nabla_\beta \nabla_\alpha)\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&= [\alpha, \beta](\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)) - \sum_{i=1}^p \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \nabla_{[\alpha, \beta]} \alpha_i, \dots, \alpha_p) \\
&\quad \beta(\alpha(\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p))) + \sum_{i=1}^p \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \nabla_\beta \nabla_\alpha \alpha_i, \dots, \alpha_p) \\
&\quad - \alpha(\beta(\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p))) - \sum_{i=1}^p \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \nabla_\alpha \nabla_\beta \alpha_i, \dots, \alpha_p) \\
&= \sum_{i=1}^p \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \nabla_{[\alpha, \beta]} \alpha_i - \nabla_\alpha \nabla_\beta \alpha_i + \nabla_\beta \nabla_\alpha \alpha_i, \dots, \alpha_p).
\end{aligned}$$

finalemt on a :

$$R(\alpha, \beta)\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \sum_{i=1}^p \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, R(\alpha, \beta)\alpha_i, \dots, \alpha_p).$$

□

### 1.1.15 La divergence, la différentielle et la codifférentielle

**La divergence**[GHL05] est l'opérateur trace qui est défini par :

$$\begin{aligned}
div : \Omega^p(M) &\longrightarrow \Omega^{p-1}(M) \\
\tau &\longmapsto div \tau
\end{aligned}$$

tel que : pour toute p-forme  $\tau$  on a :

$$div \tau(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p) = \sum_{\alpha=1}^n \nabla_\alpha \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p). \tag{1.14}$$

**Propriété :** Par la notation 1.4 et pour tous  $X_\alpha, X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_p}$  et  $\tau \in \Omega^p(M)$  on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \nabla \tau(X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_p}) &= \sum_{\alpha=1}^n \nabla_{X_\alpha} \nabla \tau(X_\alpha, X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_p}) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \nabla_{X_\alpha} \nabla_{X_\alpha} \tau(X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_p}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

### **La différentielle**

On peut exprimer la différentielle  $d$  en fonction de la connexion  $\nabla$  par :  
 $\forall \tau \in \Omega^p(M)$  ,  $\forall \alpha_i \in \{1, 2, \dots, n\}$  et  $i = 1, 2, \dots, p$

$$d\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \nabla_{\alpha_i} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1}). \quad (1.16)$$

**La codifférentielle :** notée  $\delta$  est l'opérateur adjoint de la différentielle  $d$  relatif au produit scalaire de  $L^2(\Omega^p(M))$ , :

$$\begin{aligned} \delta : \Omega^p(M) &\longrightarrow \Omega^{p-1}(M) \\ \tau &\longmapsto \delta\tau \end{aligned}$$

tel que pour tous  $\tau \in \Omega^{p-1}(M)$  et  $\tau' \in \Omega^p(M)$  on a :

$$(d\tau, \tau') = (\tau, \delta\tau'). \quad (1.17)$$

qui a la propriété :

$$\delta\tau(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p) = - \sum_{\alpha=1}^n \nabla_\alpha \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p). \quad (1.18)$$

La définition de la divergence nous donne :  $\forall \tau \in \Omega^p(M)$ ,  $\delta\tau = -\operatorname{div} \tau$ .

## **1.2 Le laplacien**

### **1.2.1 Le laplacien des fonctions**

Les deux définitions suivantes sont équivalentes :

**Définition 1.2.1** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne, le laplacien est l'opérateur, noté  $\Delta$ , défini par :

$$\Delta f = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M),$$

avec "grad  $f$ " est le gradient de  $f$  :  $\operatorname{grad} f = Df(m) = (\frac{\partial}{\partial x_1} f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f)$

**Définition 1.2.2** [BGM71] Le laplacien est l'opérateur  $\Delta$  de  $\Omega^0(M)$  dans  $\Omega^0(M)$  défini par :

$$\Delta f = \delta df \quad f \in \Omega^0(M)$$

**Propriété :** Le laplacien est un opérateur différentiel elliptique du second ordre.

**Expression de  $\Delta$  en coordonnées locales :**

Dans un repère orthonormé, le laplacien s'exprime :

$$\Delta f = - \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

pour tous :  $\forall f$  et  $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$\begin{aligned} \Delta(f.h) &= f \sum_i \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} - 2 \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} - h \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\ &= -f\Delta h - 2(\nabla f, \nabla h) + h\Delta f. \end{aligned}$$

## 1.2.2 Le laplacien de Hodge-de Rham

On appelle laplacien de Hodge-de Rham l'opérateur différentiel du second ordre défini par :

$$\begin{aligned} \Delta : \Omega^p(M) &\longrightarrow \Omega^p(M) \\ \tau &\longmapsto \Delta\tau = (d \circ \delta + \delta \circ d)\tau. \end{aligned}$$

le laplacien  $\Delta$  est un opérateur autoadjoint pour le produit scalaire globale i.e :

$$\forall \tau, \tau' \in \Omega^p(M) \quad (\Delta\tau, \tau') = (\tau, \Delta\tau').$$

## 1.2.3 L'opérateur de Hodge

**Définition 1.2.3** [WAR83][MAS03]

Soit  $(M, \langle, \rangle)$  variété riemannienne compacte connexe et orientable, et  $d\nu$  la forme volume riemannienne.

Pour tout  $p \in \{0, 1, \dots, n\}$  l'opérateur de Hodge est l'unique isomorphisme défini par :

$$\begin{aligned} * : \Omega^p(M) &\longrightarrow \Omega^{n-p}(M) \\ \tau &\longmapsto *\tau \end{aligned}$$

tel que pour toutes formes  $\tau, \tau' \in \Omega^p(M)$  :

$$\tau \wedge *\tau' = \langle \tau, \tau' \rangle d\nu$$

**Propriété 1.2.1** Soit  $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$  le repère orthonormé de  $M$  et  $\{X_i^*\}_{1 \leq i \leq n}$  la base orthonormée associée, alors pour tout  $\sigma \in S(k, n)$  :

$$*(X_{\sigma(1)}^* \wedge X_{\sigma(2)}^* \wedge \cdots \wedge X_{\sigma(k)}^*) = \text{Sign}(\sigma)(X_{\sigma(k+1)}^* \wedge X_{\sigma(k+2)}^* \wedge \cdots \wedge X_{\sigma(n)}^*)$$

**Propriété 1.2.2** pour toutes formes  $\tau, \tau' \in \Omega^p(M)$

- $(\tau, \tau') = \int_M \tau \wedge * \tau'$
- $**\tau = (-1)^{p(n-p)}\tau$
- $\delta\tau = (-1)^{np-n+1} * d * \tau$
- $*\Delta\tau = \Delta * \tau$
- $\tau \wedge * \tau' = \tau' \wedge * \tau$
- $*1 = d\nu$  ,  $*d\nu = 1$
- $\langle * \tau, * \tau' \rangle = \langle \tau, \tau' \rangle$  .

## 1.3 Estimation du spectre des 0-formes et des 1-formes

### *Définitions et propriétés du spectre* [BGM71]

**Définition 1.3.1** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte, on appelle spectre du laplacien, noté  $\text{Spec}(M, g)$ , l'ensemble des réels  $\lambda$  pour lesquels il existe une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  non nulle telle que :

$$\Delta f = \lambda f.$$

On appelle espace propre associé à  $\lambda$ , noté  $V_\lambda$ , l'espace vectoriel constitué de l'ensemble des fonctions pour lesquelles  $\lambda$  est une valeur propre auquel on ajoute la fonction nulle. La dimension de l'espace propre est appelée : multiplicité de la valeur propre.

### **Propriété 1.3.1** [GHL05]

– Le spectre du laplacien forme une suite discrète tendant vers  $+\infty$  :

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k < \dots$$

– Pour tout  $\lambda \in \text{Spec}(M, g)$ ,  $V_\lambda(M, g)$  est de dimension finie.

### 1.3.1 Estimation du spectre des 0-formes

#### *Formule de Bochner-Lichnerowicz* [BGM71].

Le laplacien d'une variété riemannienne compacte  $(M, g)$  est un opérateur auto-adjoint défini positif. c'est à dire :  $\forall f$  et  $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$\begin{aligned} \langle \Delta f, h \rangle &= \langle f, \Delta h \rangle \\ \langle \Delta f, f \rangle &= \|\nabla f\|^2. \end{aligned}$$

### **Théorème 1.3.1 Formule de Bochner-Lichnerowicz :**

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte, pour toute  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  on a :

$$-\frac{1}{2}\Delta(|df|^2) = |Hess f|^2 - |\Delta f|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f).$$

$Hess f$  désigne le Hessien de  $f$  : la dérivée covariante seconde de  $f$ .  
 $Hess f = Ddf$  est une forme bilinéaire symétrique de  $T_m M$ .

**Théorème 1.3.2 de Lichnerowicz**

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension  $n$ .  
S'il existe un nombre  $k > 0$  tel que :

$$\text{Ric} \geq kg,$$

alors

$$\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1}k.$$

où  $\lambda_1$  est la première valeur propre non nulle du laplacien.

**Théorème 1.3.3 d'Obata** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension  $n$  telle que :

$$\text{Ric} \geq kg.$$

et si

$$\lambda_1 = \frac{n}{n-1}k,$$

alors  $(M, g)$  est isométrique à  $(\mathbf{S}^n, \text{can})$ .

**1.3.2 Estimation du spectre des 1-formes****Théorème 1.3.4 Théorème de Bochner-Lichnerowicz**

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension  $n$ .  
S'il existe un nombre  $k > 0$  tel que :

$$\text{Ric} \geq kg,$$

alors la première valeur propre  ${}^1\lambda_1$  est minorée par :

$${}^1\lambda_1 \geq k(n-1).$$

# Chapitre 2

## Minoration du p-spectre de Hodge De Rham

### 2.1 Formule de Weizenböck

Dans cette section on va démontrer la formule de Weizenböck qui nous permettra d'écrire le laplacien en fonction de la courbure et la connexion, et de décomposer le produit scalaire du laplacien  $\langle \Delta\tau, \tau \rangle$  en une somme de termes qu'on peut minorer.[GM75]

#### 2.1.1 Théorème de Weizenböck

**Théorème 2.1.1** *Weizenböck [GM75]*

*Pour tout  $\tau \in \Omega^p(M)$  et pour tous  $X_\alpha, X_\beta, X_{\alpha_2}, X_{\alpha_3}, \dots, X_{\alpha_p} \in \{X_i\}_{i \leq n}$  un repère ortho-normé et parallèle, on a :*

$$\langle \Delta\tau, \tau \rangle = \frac{1}{2} \Delta(|\tau|^2) + |\nabla\tau|^2 + F(\tau), \quad (2.1)$$

avec

$$F(\tau) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p). \quad (2.2)$$

Pour démontrer ce théorème on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.1.1** *Pour toute p-forme  $\tau$  on a :*

$$\Delta\tau = -\text{div} \nabla\tau + \mathfrak{R}(\tau)$$

avec

$$\mathfrak{R}(\tau)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) := \sum_{k=1}^p \sum_{\alpha=1}^n R(\alpha_k, \alpha) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_p).$$

pour tous  $1 \leq \alpha_i \leq n$  et  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$

**Preuve du théorème 2.1.1** On utilisant le lemme 2.1.1, on obtient :

$$\langle \Delta\tau, \tau \rangle = \langle -\operatorname{div} \nabla\tau, \tau \rangle + \langle \mathfrak{R}(\tau), \tau \rangle .$$

d'une part :

$$\begin{aligned} \langle -\operatorname{div} \nabla\tau, \tau \rangle &= -\sum_{\alpha=1}^n \langle \nabla_{\alpha} \nabla_{\alpha} \tau, \tau \rangle \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \{ \alpha \langle \nabla_{\alpha} \tau, \tau \rangle - \langle \nabla_{\alpha} \tau, \nabla_{\alpha} \tau \rangle \} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \alpha \alpha \langle \tau, \tau \rangle + \sum_{\alpha=1}^n \langle \nabla_{\alpha} \tau, \nabla_{\alpha} \tau \rangle \\ &= \frac{1}{2} \Delta |\tau|^2 + |\nabla\tau|^2 . \end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{R}(\tau), \tau \rangle &= \frac{1}{p!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} (\mathfrak{R}(\tau))(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{k=1}^p \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} R(\alpha_k, \alpha) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{k=1}^p \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\alpha_k} - \nabla_{\alpha_k} \nabla_{\alpha}) \tau(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{R}(\tau), \tau \rangle &= \frac{1}{p!} \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\alpha_1} - \nabla_{\alpha_1} \nabla_{\alpha}) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \right. \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\alpha_2} - \nabla_{\alpha_2} \nabla_{\alpha}) \tau(\alpha_1, \alpha, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\alpha_3} - \nabla_{\alpha_3} \nabla_{\alpha}) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \alpha_4, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\alpha_k} - \nabla_{\alpha_k} \nabla_{\alpha}) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\alpha_p} - \nabla_{\alpha_p} \nabla_{\alpha}) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha) \cdot \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \right\} . \end{aligned}$$

pour chaque ligne de l'égalité précédente, on fait le changement d'indice :  $\alpha_k = \beta$ ,  $k = 1, \dots, p$  :

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{R}(\tau), \tau \rangle &= \frac{1}{p!} \left\{ \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \right. \\
&+ \sum_{\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha_1, \alpha, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\alpha_1, \beta, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \\
&+ \sum_{\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \alpha_4, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\alpha_1, \alpha_2, \beta, \alpha_4, \dots, \alpha_p) \\
&\vdots \\
&+ \sum_{\alpha, \beta, \alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_k, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_p) \\
&\qquad \qquad \qquad \times \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \beta, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_p) \\
&\vdots \\
&+ \left. \sum_{\alpha, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha) \cdot \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, \beta) \right\}.
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{R}(\tau), \tau \rangle &= \frac{1}{p!} \left\{ \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \right. \\
&+ \sum_{\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\beta, \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \\
&+ \sum_{\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_p) \\
&\vdots \\
&+ \sum_{\alpha, \beta, \alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_k, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_p) \\
&\qquad \qquad \qquad \times \tau(\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_p) \\
&\vdots \\
&+ \left. \sum_{\alpha, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}) \cdot \tau(\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}) \right\}.
\end{aligned}$$

On fait un deuxième changement d'indices pour cette dernière équation, (qui est juste un décalage) :

pour tout k de 1 à p, (i.e kème ligne) :  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}) = (\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$  alors on a :

$$\begin{aligned}
\langle \Re(\tau), \tau \rangle &= \frac{1}{p!} \left\{ \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \right. \\
&+ \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&+ \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&\vdots \\
&+ \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&\vdots \\
&\left. + \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \right\}.
\end{aligned}$$

finalement :

$$\begin{aligned}
\langle \Re(\tau), \tau \rangle &= \frac{1}{p!} \left\{ p \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \right\} \\
&= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&= F(\tau).
\end{aligned}$$

□

### Preuve du lemme 2.1.1

D'une part :

à partir des formules (1.14), (1.18) on a :

$$\begin{aligned}
(\delta d + \operatorname{div} \nabla) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) &= (\operatorname{div} \nabla - \operatorname{div} d) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \operatorname{div}(\nabla - d) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \nabla_\alpha \{ (\nabla - d) \tau(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \} \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \nabla_\alpha \{ \nabla \tau(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) - d \tau(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \} \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \nabla_\alpha \left\{ \nabla_\alpha \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) - \nabla_\alpha \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) - \sum_{k=1}^p (-1)^k \nabla_{\alpha_k} \tau(\alpha, \alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_k, \dots, \alpha_p) \right\} \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \nabla_\alpha \left\{ \sum_{k=1}^p \nabla_{\alpha_k} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_p) \right\} \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{k=1}^p \nabla_\alpha \nabla_{\alpha_k} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_p).
\end{aligned}$$

d'où :

$$(\delta d + \operatorname{div} \nabla) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{k=1}^p \nabla_{\alpha} \nabla_{\alpha_k} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_p). \quad (2.3)$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} d\delta\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) &= \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \nabla_{\alpha_k} \delta\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \widehat{\alpha}_k, \dots, \alpha_p) \\ &= \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \nabla_{\alpha_k} \left\{ - \sum_{\alpha=1}^n \nabla_{\alpha} \tau(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \widehat{\alpha}_k, \dots, \alpha_p) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{\alpha=1}^n (-1)^k \nabla_{\alpha_k} \nabla_{\alpha} \tau(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \widehat{\alpha}_k, \dots, \alpha_p). \end{aligned}$$

d'où :

$$d\delta\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = - \sum_{k=1}^p \sum_{\alpha=1}^n \nabla_{\alpha_k} \nabla_{\alpha} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_p). \quad (2.4)$$

Finalement par (2.3) et (2.4), avec  $[\alpha, \alpha_k] = 0$  (repère parallèle) on obtient :

$$\begin{aligned} (\Delta\tau + \operatorname{div} \nabla)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) &= \sum_{k=1}^p \sum_{\alpha=1}^n (\nabla_{\alpha} \nabla_{\alpha_k} - \nabla_{\alpha_k} \nabla_{\alpha}) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_p) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{\alpha=1}^n R(\alpha_k, \alpha) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_p) \\ &= \mathfrak{R}(\tau)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p). \end{aligned}$$

□

## 2.1.2 Conséquences du théorème de Weizenböck

On va donner quelques conséquences immédiates de la formule de Weizenböck.

**Corollaire 2.1.1** [GM75] *Pour tout  $\tau$   $p$ -forme différentielle on a :*

$$(\Delta\tau, \tau) = \|\nabla\tau\|^2 + Q(\tau),$$

où  $Q$  est quadratique en  $\tau$  et

$$Q(\tau) = \int_M F(\tau) d\nu.$$

### Preuve

La formule de Weizenböck (2.1) donne :

$$\begin{aligned} (\Delta\tau, \tau) &= \int_M \langle \Delta\tau, \tau \rangle d\nu \\ &= 1/2 \int_M \Delta|\tau|^2 d\nu + \int_M |\nabla\tau|^2 + \int_M F(\tau) d\nu \\ &= 1/2 \int_M \Delta|\tau|^2 d\nu + \|\nabla\tau\|^2 + Q(\tau). \end{aligned}$$

or

$$\int_M \Delta(|\tau|^2) \cdot 1 d\nu = \int_M \langle \Delta|\tau|^2, 1 \rangle d\nu = \int_M \langle |\tau|^2, \Delta 1 \rangle d\nu = 0.$$

donc

$$(\Delta\tau, \tau) = \|\nabla\tau\|^2 + Q(\tau).$$

□

**Définition 2.1.1** *Une  $p$ -forme différentielle  $\tau$  est dite harmonique si  $\Delta\tau = 0$ .*

**Corollaire 2.1.2** [GM75]

*Si la forme quadratique  $Q$  est définie positive sur  $\Omega^p(M)$  alors : toute  $p$ -forme harmonique est identiquement nulle.*

### Preuve

Du corollaire (2.1.1) on a :

$$(\Delta\tau, \tau) = \|\nabla\tau\|^2 + Q(\tau).$$

$$\text{si } \Delta\tau = 0 \Rightarrow (\Delta\tau, \tau) = 0 \Rightarrow \|\nabla\tau\|^2 + Q(\tau) = 0.$$

$$\text{or } \|\nabla\tau\|^2 \geq 0 \text{ et } Q(\tau) \geq 0 \text{ et donc } Q(\tau) = 0.$$

d'où  $\tau = 0$ .

□

**Proposition 2.1.1** *Si  $Q$  est définie positive sur  $\Omega^p(M)$  alors  $\forall \tau \in \Omega^p(M)$  :*

$$\nabla \tau = 0 \Leftrightarrow \Delta \tau = 0.$$

**Preuve**

$\Leftarrow$ ) Identique à la preuve du corollaire (2.1.1).

$\Rightarrow$ ) Vu que :

$$d\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \nabla_{\alpha_i} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1}).$$

$$\delta\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}) = \sum_{\alpha=1}^n \nabla_{\alpha} \tau(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p).$$

si  $\nabla \tau = 0$  alors  $d\tau = 0$  et  $\delta\tau = 0$  et donc  $\Delta \tau = d\delta\tau + \delta d\tau = 0$ .

□

## 2.2 Les identités de Ricci

### 2.2.1 Les identités de Ricci

**Théorème 2.2.1** *Les identités de Ricci [GM75]*

$\forall \tau \in \Omega_p(M)$  et  $\forall X_{\alpha_2}, X_{\alpha_3}, \dots, X_{\alpha_p}, X_{\alpha}, X_{\beta} \in \{X_i\}_{0 \leq i \leq n}$  un repère orthonormé parallèle, avec  $\alpha_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , on a :

$$\sum_{\alpha=1}^n (\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} - \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha}) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) =$$

$$\sum_{1 \leq \alpha, k \leq n} \{R(\alpha, k, \alpha, \beta) \tau(k, \alpha_2, \dots, \alpha_p) - \sum_{l=2}^p R(k, \alpha_l, \alpha, \beta) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_{l-1}, k, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_p)\}.$$

**Preuve**

On utilisant la propriété de la courbure des  $p$ -formes (proposition 1.1.1), et l'identité de Bianchi de la courbure (1.9), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha, k} \left\{ R(\alpha, k, \alpha, \beta) \tau(k, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p) - \sum_{l=2}^p R(k, \alpha_l, \alpha, \beta) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_{l-1}, k, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_p) \right\} \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n R(\alpha, \beta, \alpha, k) \tau(k, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=2}^p \sum_{k=1}^n R(\alpha, \beta, \alpha_l, k) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_{l-1}, k, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_p) \right\} \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \tau \left( \sum_{k=1}^n R(\alpha, \beta, \alpha, k) k, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=2}^p \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_{l-1}, \sum_{k=1}^n R(\alpha, \beta, \alpha_l, k) k, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_p) \right\} \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \tau \left( \sum_{k=1}^n \langle R(\alpha, \beta) \alpha, k \rangle k, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=2}^p \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_{l-1}, \sum_{k=1}^n \langle R(\alpha, \beta) \alpha_l, k \rangle k, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_p) \right\} \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \tau(R(\alpha, \beta) \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p) + \sum_{l=2}^p \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_{l-1}, R(\alpha, \beta) \alpha_l, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_p) \right\} \\
&= \sum_{\alpha=1}^n R(\alpha, \beta) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&= \sum_{\alpha=1}^n (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p).
\end{aligned}$$

□

### 2.2.2 Expression de "F" en fonction du tenseur de la courbure riemannienne "R"

**Théorème 2.2.2** [GM75] Pour tout  $\tau \in \Omega_p(M)$  on a :

$$F(\tau) = \frac{1}{(p-1)!} \left[ A - \frac{p-1}{2} B \right], \quad (2.5)$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{\alpha_3, \dots, \alpha_p} \sum_{r, s, t, u} \tau(s, r, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \tau(t, r, \alpha_3, \dots, \alpha_p) R(s, u, t, u), \\
B &= \sum_{\alpha_3, \dots, \alpha_p} \sum_{r, s, t, u} \tau(r, s, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \tau(t, u, \alpha_3, \dots, \alpha_p) R(r, s, t, u).
\end{aligned}$$

**Remarque :** Pour permettre aux lecteurs de suivre les démonstrations dans le cas général ( $p$  quelconque), on donne d'abord les démonstrations dans le cas où  $p = 2$ .

**Preuve**

Du théorème de Weizenböck (2.1.1),  $F$  s'écrit :

$$F(\tau) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p).$$

Première étape pour  $p = 2$

$F$ ,  $A$ ,  $B$  et l'identité de Ricci s'écrivent :

$$F(\tau) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \gamma) \tau(\beta, \gamma),$$

$$A = \sum_{r, s, t, u} \tau(s, r) \tau(t, r) R(s, u, t, u),$$

$$B = \sum_{r, s, t, u} \tau(r, s) \tau(t, u) R(r, s, t, u),$$

$$\sum_{\alpha=1}^n (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \gamma) = \sum_{1 \leq \alpha, k \leq n} \{R(\alpha, k, \alpha, \beta) \tau(k, \gamma) - R(k, \gamma, \alpha, \beta) \tau(\alpha, k)\}.$$

en utilisant l'identité de Ricci dans l'expression de  $F$ , on obtient :

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma, k} \{R(\alpha, k, \alpha, \beta) \tau(k, \gamma) \tau(\beta, \gamma) - R(k, \gamma, \alpha, \beta) \tau(\alpha, k) \tau(\beta, \gamma)\} \\ &= \underbrace{\sum_{\alpha, \beta, \gamma, k} R(\alpha, k, \alpha, \beta) \tau(k, \gamma) \tau(\beta, \gamma)}_{(a)} - \underbrace{\sum_{\alpha, \beta, \gamma, k} R(k, \gamma, \alpha, \beta) \tau(\alpha, k) \tau(\beta, \gamma)}_{(a')}. \end{aligned}$$

on fait le changement d'indices suivant dans  $A$  :  $(r, s, t, u) = (\gamma, k, \beta, \alpha)$  alors :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{r, s, t, u} \tau(s, r) \tau(t, r) R(s, u, t, u) \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma, k} \tau(k, \gamma) \tau(\beta, \gamma) R(k, \alpha, \beta, \alpha) \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma, k} \tau(k, \gamma) \tau(\beta, \gamma) R(\alpha, k, \alpha, \beta) \\ &= (a). \end{aligned}$$

par l'identité de Bianchi de la courbure  $R$  (1.9) :

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{r,s,t,u} \tau(r,s)\tau(t,u)R(r,s,t,u) \\
&= \sum_{r,s,t,u} \tau(r,s)\tau(t,u)[-R(t,r,s,u) - R(s,t,r,u)] \\
&= - \underbrace{\sum_{r,s,t,u} \tau(r,s)\tau(t,u)R(t,r,s,u)}_{(b)} - \underbrace{\sum_{r,s,t,u} \tau(r,s)\tau(t,u)R(s,t,r,u)}_{(b')}.
\end{aligned}$$

les changements d'indices suivants :

(b) :  $(r, s, t, u)$  par  $(\gamma, \beta, k, \alpha)$ ,

(b') :  $(r, s, t, u)$  par  $(\alpha, k, \gamma, \beta)$ , donnent :

$$\begin{aligned}
B &= - \sum_{\alpha,\beta,\gamma,k} \tau(\gamma,\beta)\tau(k,\alpha)R(k,\gamma,\beta,\alpha) - \sum_{\alpha,\beta,\gamma,k} \tau(\alpha,k)\tau(\gamma,\beta)R(k,\gamma,\alpha,\beta) \\
&= 2 \sum_{\alpha,\beta,\gamma,k} \tau(\alpha,k)\tau(\beta,\gamma)R(k,\gamma,\alpha,\beta) \\
&= 2(a').
\end{aligned}$$

finalement :

$$F(\tau) = A - \frac{1}{2}B.$$

Deuxième étape cas général  $2 \leq p \leq n$ ,

L'identité de Ricci donne :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^n (\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} - \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha}) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&= \sum_{1 \leq \alpha, k \leq n} \{R(\alpha, k, \alpha, \beta) \tau(k, \alpha_2, \dots, \alpha_p) - \sum_{l=2}^p R(k, \alpha_l, \alpha, \beta) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_{l-1}, k, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_p)\}.
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
F(\tau) &= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p, k} \{ R(\alpha, k, \alpha, \beta) \tau(k, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&\quad - \sum_{l=2}^p R(k, \alpha_l, \alpha, \beta) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_{l-1}, k, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_p) \} \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&= \frac{1}{(p-1)!} \left\{ \underbrace{\sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p, k} R(\alpha, k, \alpha, \beta) \tau(k, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}_{(a)} \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{\sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p, k} \sum_{l=2}^p R(k, \alpha_l, \alpha, \beta) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_{l-1}, k, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_p) \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}_{(a')} \right\}.
\end{aligned}$$

alors :

$$F(\tau) = \frac{1}{(p-1)!} ((a) + (a')) \quad (2.6)$$

dans  $A$  on fait le changement d'indices suivant :

$(r, s, t, u, \alpha_3, \dots, \alpha_p) = (\alpha_2, k, \beta, \alpha, \alpha_3, \dots, \alpha_p)$  on obtient,

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{\alpha_3, \dots, \alpha_p} \sum_{r, s, t, u} \tau(s, r, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \tau(t, r, \alpha_3, \dots, \alpha_p) R(s, u, t, u) \\
&= \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p, k} \tau(k, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p) R(k, \alpha, \beta, \alpha) \\
&= \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p, k} \tau(k, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p) R(\alpha, k, \alpha, \beta) \\
&= (a).
\end{aligned}$$

alors :

$$A = (a) \quad (2.7)$$

pour  $B$ , par l'identité de Bianchi pour la courbure  $R$  (1.9) on obtient :

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{\alpha_3, \dots, \alpha_p} \sum_{r, s, t, u} \tau(r, s, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \tau(t, u, \alpha_3, \dots, \alpha_p) R(r, s, t, u) \\
&= \sum_{\alpha_3, \dots, \alpha_p, r, s, t, u} \tau(r, s, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \tau(t, u, \alpha_3, \dots, \alpha_p) [-R(t, r, s, u) - R(s, t, r, u)] \\
&= - \underbrace{\sum_{\alpha_3, \dots, \alpha_p, r, s, t, u} \tau(r, s, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \tau(t, u, \alpha_3, \dots, \alpha_p) R(t, r, s, u)}_{(b)} \\
&\quad - \underbrace{\sum_{\alpha_3, \dots, \alpha_p, r, s, t, u} \tau(r, s, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \tau(t, u, \alpha_3, \dots, \alpha_p) R(s, t, r, u)}_{(b')}.
\end{aligned}$$

alors

$$B = (b) + (b') \quad (2.8)$$

$$(a') = \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p, k} \sum_{l=2}^p R(k, \alpha_l, \alpha, \beta) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_{l-1}, k, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_p) \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p).$$

d'où :

$$\begin{aligned}
(a') &= \sum_{\alpha, \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p, k} R(k, \alpha_2, \alpha, \beta) \tau(\alpha, k, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&+ \sum_{\alpha, \beta, \alpha_3, \dots, \alpha_p, k} R(k, \alpha_3, \alpha, \beta) \tau(\alpha, \alpha_2, k, \alpha_4, \dots, \alpha_p) \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&\vdots \\
&+ \sum_{\alpha, \beta, \alpha_l, \dots, \alpha_p, k} R(k, \alpha_l, \alpha, \beta) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_{l-1}, k, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_p) \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&\vdots \\
&+ \sum_{\alpha, \beta, \alpha_p, \dots, \alpha_p, k} R(k, \alpha_p, \alpha, \beta) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, k) \tau(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_p).
\end{aligned}$$

Le premier changement d'indices :

pour chaque  $l \in \{2, \dots, p\}$  :

$$(\alpha, \beta, k, \alpha_l, \alpha_2, \dots, \hat{\alpha}_l, \dots, \alpha_p) = (u, s, t, r, \alpha_3, \dots, \alpha_p),$$

$$\begin{aligned}
(a') &= \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(t,r,u,s)\tau(u,t,\alpha_3,\dots,\alpha_p)\tau(s,r,\alpha_3,\dots,\alpha_p) \\
&+ \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(t,r,u,s)\tau(u,\alpha_3,t,\alpha_4,\dots,\alpha_p)\tau(s,\alpha_3,r,\alpha_4,\dots,\alpha_p) \\
&\vdots \\
&+ \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(t,r,u,s)\tau(u,\alpha_3,\dots,\alpha_{l-1},t,\alpha_{l+1},\dots,\alpha_p)\tau(s,\alpha_3,\dots,\alpha_{l-1},r,\alpha_{l+1},\dots,\alpha_p) \\
&\vdots \\
&+ \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(t,r,u,s)\tau(u,\alpha_3,\dots,\alpha_{p-1},t)\tau(s,\alpha_3,\dots,\alpha_p,r)
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
(a') &= - \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(t,r,s,u)\tau(t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p)\tau(r,s,\alpha_3,\dots,\alpha_p) \\
&- \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(t,r,s,u)\tau(t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p)\tau(r,s,\alpha_3,\dots,\alpha_p) \\
&\vdots \\
&- \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(t,r,s,u)\tau(t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p)\tau(r,s,\alpha_3,\dots,\alpha_p) \\
&\vdots \\
&- \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(t,r,s,u)\tau(t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p)\tau(r,s,\alpha_3,\dots,\alpha_p) \\
&= -(p-1) \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(t,r,s,u)\tau(t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p)\tau(r,s,\alpha_3,\dots,\alpha_p) \\
&= -(p-1)(b).
\end{aligned}$$

d'où :

$$(b) = \frac{-1}{p-1}(a'). \quad (2.9)$$

le deuxième changement d'indices est :

pour chaque  $l \in \{2, \dots, p\}$ ,

$$(\alpha, \beta, k, \alpha_l, \alpha_2, \dots, \hat{\alpha}_l, \dots, \alpha_p) = (r, u, s, t, \alpha_3, \dots, \alpha_p),$$

$$\begin{aligned}
(a') &= \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(s,t,r,u)\tau(r,s,\alpha_3,\dots,\alpha_p)\tau(u,t,\alpha_3,\dots,\alpha_p) \\
&+ \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(s,t,r,u)\tau(r,\alpha_3,s,\alpha_4,\dots,\alpha_p)\tau(s,\alpha_3,t,\alpha_4,\dots,\alpha_p) \\
&\vdots \\
&+ \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(s,t,r,u)\tau(r,\alpha_3,\dots,\alpha_{l-1},s,\alpha_{l+1},\dots,\alpha_p)\tau(s,\alpha_3,\dots,\alpha_{l-1},t,\alpha_{l+1},\dots,\alpha_p) \\
&\vdots \\
&+ \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(s,t,r,u)\tau(r,\alpha_3,\dots,\alpha_{p-1},s)\tau(s,\alpha_3,\dots,\alpha_p,t)
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
(a') &= - \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(s,t,r,u)\tau(t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p)\tau(r,s,\alpha_3,\dots,\alpha_p) \\
&- \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(s,t,r,u)\tau(t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p)\tau(r,s,\alpha_3,\dots,\alpha_p) \\
&\vdots \\
&- \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(s,t,r,u)\tau(t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p)\tau(r,s,\alpha_3,\dots,\alpha_p) \\
&\vdots \\
&- \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(s,t,r,u)\tau(t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p)\tau(r,s,\alpha_3,\dots,\alpha_p) \\
&- (p-1) \sum_{r,s,t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p} R(s,t,r,u)\tau(t,u,\alpha_3,\dots,\alpha_p)\tau(r,s,\alpha_3,\dots,\alpha_p) \\
&= -(p-1)(b').
\end{aligned}$$

d'où :

$$(b') = \frac{-1}{p-1}(a'). \quad (2.10)$$

récapitulons :

par la formule (2.6) :  $F(\tau) = \frac{1}{(p-1)!} ((a) + (a'))$ ,

par la formule (2.7) :  $A = (a)$ ,

par la formule (2.8) :  $B = (b) + (b')$ ,

par la formule (2.9) :  $(b) = \frac{-1}{p-1}(a')$ ,

par la formule (2.10) :  $(b') = \frac{-1}{p-1}(a')$ .

finalement :

$$f(\tau) \frac{1}{(p-1)!} \left( A - \frac{p-1}{2} B \right).$$

□

## 2.3 L'opérateur de courbure et minoration de "F"

### 2.3.1 L'opérateur de courbure

**Définition 2.3.1** [GM75]

Soit la variété riemannienne  $(M, \langle, \rangle)$ . **L'opérateur de courbure** est le tenseur de courbure, interprété en tout point  $m \in M$  comme l'endomorphisme  $\rho$ , de l'espace des formes bilinéaires antisymétriques sur l'espace tangent, défini par :

$$\rho : \Omega^2(M) \longrightarrow \Omega^2(M),$$

tel que :  $\forall m \in M$  et  $\forall x, y, u, v \in T_m M$  :

$$\langle \rho_m(x^* \wedge y^*), (u^* \wedge v^*) \rangle = \langle R(x, y)u, v \rangle .$$

#### Propriété

Pour tout  $m \in M$ , soit  $\{X_i\}_{i \leq n}$  est une base orthonormée de  $T_m M$ , l'opérateur de courbure au point  $m$  est :

$$\begin{aligned} \rho_m : \Lambda^2 T_m^* M &\longrightarrow \Lambda^2 T_m^* M \\ X_l^* \wedge X_k^* &\longmapsto \rho(X_l^* \wedge X_k^*), \end{aligned}$$

tel que :

$$\rho(X_l^* \wedge X_k^*) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle R(X_l^*, X_k^*)X_i^*, X_j^* \rangle X_i^* \wedge X_j^* .$$

**Définition 2.3.2** Pour tout  $m \in M$ , on dit que :

$$\rho_m \geq k \quad \text{si} \quad \forall u \in \Lambda^2 T_m^* M : \langle \rho_m(u), u \rangle \geq k|u|^2 .$$

et que

$$\rho \geq k \quad \text{si} \quad \forall m \in M : \rho_m \geq k .$$

**Proposition 2.3.1** Si  $\rho \geq k$  alors la courbure sectionnelle est supérieure ou égale à  $k$ .

**Preuve**

Dans un repère local orthonormé :

$$K(e_1, e_2) = R(e_1, e_2, e_1, e_2) = R((e_1, e_2)e_1, e_2) = \langle \rho_m(e_1 \wedge e_2), e_1 \wedge e_2 \rangle \geq k|e_1 \wedge e_2|^2 = k.$$

□

**Remarque**[GM75]

Les éléments diagonaux de la matrice symétrique associée à  $\rho_m$  dans la base orthonormée  $\{X_i^* \wedge X_j^*\}_{1 \leq i < j \leq n}$  sont des courbures sectionnelles, l'identité de Bianchi détermine complètement la dite matrice.

**Notations :** [GM75] Soient  $\tau \in \Omega^p(M)$ ,  $m \in M$ , dans la base orthonormée  $\{X_i\}_{i \leq n}$  on notes :

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)\tau &:= \sum_{i=1}^p \sum_{l_i=1}^n \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) X_{l_i}^* \wedge X_{\alpha_i}^*, \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)\theta &:= \langle \rho_m((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)\tau), (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)\tau \rangle, \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)^i A &:= \sum_{l_i, L_i} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) \\ &\quad \times \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, L_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) R(\alpha_i, l_i, \alpha_i, L_i), \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)^{i,j} B &:= \sum_{l_i, l_j} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) \\ &\quad \times \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}, l_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_p) R(\alpha_i, l_i, \alpha_j, l_j). \end{aligned}$$

**Proposition 2.3.2 :**

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)\theta = \sum_{i=1}^p (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)^i A + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)^{i,j} B.$$

**Remarque**

Pour alléger les notations posons :

$$\begin{aligned} {}_p\tau &:= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)\tau, \\ \theta &:= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)\theta, \\ {}^i A &:= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)^i A, \\ {}^{i,j} B &:= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)^{i,j} B. \end{aligned}$$

**Preuve :**

Première étape : pour  $p = 2$ ,

$$\begin{aligned}
{}_2\tau &= \sum_{l_1=1}^n \tau(l_1, \alpha_2) X_{l_1}^* \wedge X_{\alpha_1}^* + \sum_{l_2=1}^n \tau(\alpha_1, l_2) X_{l_2}^* \wedge X_{\alpha_2}^*, \\
\theta &= \langle \rho_m({}_2\tau), {}_2\tau \rangle, \\
{}^1A &= \sum_{l_1, L_1} \tau(l_1, \alpha_2) \tau(L_1, \alpha_2) R(\alpha_1, l_1, \alpha_1, L_1), \\
{}^2A &= \sum_{l_2, L_2} \tau(\alpha_1, l_2) \tau(\alpha_1, L_2) R(\alpha_2, l_2, \alpha_2, L_2), \\
{}^{1,2}B &= \sum_{l_1, l_2} \tau(l_1, \alpha_2) \tau(\alpha_1, l_2) R(\alpha_1, l_1, \alpha_2, l_2).
\end{aligned}$$

on remplace  ${}_2\tau$  dans  $\theta$  :

$$\begin{aligned}
\theta &= \langle \rho_m({}_2\tau), {}_2\tau \rangle \\
&= \langle \rho_m\left(\sum_{l_1=1}^n \tau(l_1, \alpha_2) X_{l_1}^* \wedge X_{\alpha_1}^* + \sum_{l_2=1}^n \tau(\alpha_1, l_2) X_{l_2}^* \wedge X_{\alpha_2}^*\right), \\
&\quad \sum_{l_1=1}^n \tau(l_1, \alpha_2) X_{l_1}^* \wedge X_{\alpha_1}^* + \sum_{l_2=1}^n \tau(\alpha_1, l_2) X_{l_2}^* \wedge X_{\alpha_2}^* \rangle.
\end{aligned}$$

comme  $\rho_m$  est linéaire :

$$\begin{aligned}
\theta &= \left\{ \sum_{l_1=1}^n \tau(l_1, \alpha_2) \sum_{L_1=1}^n \tau(L_1, \alpha_2) \right\} \langle \rho_m(X_{l_1}^* \wedge X_{\alpha_1}^*), X_{L_1}^* \wedge X_{\alpha_2}^* \rangle \\
&\quad + \left\{ \sum_{l_2=1}^n \tau(\alpha_1, l_2) \sum_{L_2=1}^n \tau(\alpha_1, L_2) \right\} \langle \rho_m(X_{l_2}^* \wedge X_{\alpha_2}^*), X_{L_2}^* \wedge X_{\alpha_1}^* \rangle \\
&\quad + \left\{ \sum_{l_1=1}^n \tau(l_1, \alpha_2) \sum_{l_2=1}^n \tau(\alpha_1, l_2) \right\} \langle \rho_m(X_{l_1}^* \wedge X_{\alpha_2}^*), X_{l_2}^* \wedge X_{\alpha_1}^* \rangle \\
&\quad + \left\{ \sum_{l_2=1}^n \tau(\alpha_1, l_2) \sum_{l_1=1}^n \tau(l_1, \alpha_2) \right\} \langle \rho_m(X_{l_2}^* \wedge X_{\alpha_1}^*), X_{l_1}^* \wedge X_{\alpha_2}^* \rangle.
\end{aligned}$$

mais  $\rho_m : \langle \rho_m(X^* \wedge Y^*), Z^* \wedge W^* \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle = R(X, Y, Z, W)$   
donc :

$$\begin{aligned}
\theta &= \sum_{l_1, L_1} \tau(l_1, \alpha_2) \tau(L_1, \alpha_2) R(l_1, \alpha_1, L_1, \alpha_1) \\
&\quad + \sum_{l_2, L_2} \tau(\alpha_1, l_2) \tau(\alpha_1, L_2) R(l_2, \alpha_2, L_2, \alpha_2) \\
&\quad + \sum_{l_1, l_2} \tau(l_1, \alpha_2) \tau(\alpha_1, l_2) R(l_1, \alpha_1, l_2, \alpha_2) \\
&\quad + \sum_{l_1, l_2}^n \tau(\alpha_1, l_2) \tau(l_1, \alpha_2) R(l_2, \alpha_2, l_1, \alpha_1), \\
&= \sum_{l_1, L_1} \tau(l_1, \alpha_2) \tau(L_1, \alpha_2) R(\alpha_1, l_1, \alpha_1, L_1) \quad (= {}^1A) \\
&\quad + \sum_{l_2, L_2} \tau(\alpha_1, l_2) \tau(\alpha_1, L_2) R(\alpha_2, l_2, \alpha_2, L_2) \quad (= {}^2A) \\
&\quad + \sum_{l_1, l_2} \tau(l_1, \alpha_2) \tau(\alpha_1, l_2) R(\alpha_1, l_1, \alpha_2, l_2) \quad (= {}^{1,2}B) \\
&\quad + \sum_{l_1, l_2} \tau(\alpha_1, l_2) \tau(l_1, \alpha_2) R(\alpha_1, l_1, \alpha_2, l_2). \quad (= {}^{1,2}B)
\end{aligned}$$

finalement :

$$\theta = {}^1A + {}^2A + 2({}^{1,2}B).$$

Deuxième étape cas général  $2 \leq p \leq n$ ,

Par les définitions :

$$\begin{aligned}
{}_p\tau &= \sum_{i=1}^p \sum_{l_i=1}^n \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) X_{l_i}^* \wedge X_{\alpha_i}^*, \\
\theta &= \langle \rho_m({}_p\tau), {}_p\tau \rangle, \\
{}^iA &= \sum_{l_i, L_i} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) \\
&\quad \times \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, L_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) R(\alpha_i, l_i, \alpha_i, L_i), \\
{}^{i,j}B &= \sum_{l_i, l_j} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) \\
&\quad \times \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}, l_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_p) R(\alpha_i, l_i, \alpha_j, l_j).
\end{aligned}$$

on remplace  ${}_p\tau$  dans  $\theta$  :

$$\begin{aligned}
\theta &= \langle \rho_m({}_p\tau), {}_p\tau \rangle \\
&= \langle \rho_m\left(\sum_{i=1}^p \sum_{l_i=1}^n \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) X_{l_i}^* \wedge X_{\alpha_i}^*\right), \\
&\quad \sum_{i=1}^p \sum_{l_i=1}^n \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) X_{l_i}^* \wedge X_{\alpha_i}^* \rangle \\
&= \sum_{i=1}^p \left\{ \sum_{l_i=1}^n \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) \right. \\
&\quad \times \sum_{L_i=1}^n \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, L_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) \langle \rho_m(X_{L_i}^* \wedge X_{\alpha_i}^*), X_{L_i}^* \wedge X_{\alpha_i}^* \rangle \left. \right\} \\
&\quad + \sum_{i \neq j}^p \left\{ \sum_{l_i=1}^n \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) \right. \\
&\quad \times \sum_{l_j=1}^n \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}, l_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_p) \langle \rho_m(X_{l_i}^* \wedge X_{\alpha_i}^*), X_{l_j}^* \wedge X_{\alpha_j}^* \rangle \left. \right\}.
\end{aligned}$$

mais :

$$\langle \rho_m(X^* \wedge Y^*), Z^* \wedge W^* \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle = R(X, Y, Z, W).$$

alors :

$$\begin{aligned}
\theta &= \sum_{i=1}^p \sum_{l_i, L_i} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, L_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) R(l_i, \alpha_i, L_i, \alpha_i) \\
&\quad + \sum_{i < j} \sum_{l_i, l_j} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}, l_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_p) R(l_i, \alpha_i, l_j, \alpha_j) \\
&\quad + \sum_{i > j} \sum_{l_j, l_i} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}, l_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_p) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) R(l_j, \alpha_j, l_i, \alpha_i) \\
\theta &= \sum_{i=1}^p \sum_{l_i, L_i} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, L_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) R(\alpha_i, l_i, \alpha_i, L_i) \\
&\quad + \sum_{i < j} \sum_{l_i, l_j} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}, l_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_p) R(\alpha_i, l_i, \alpha_j, l_j) \\
&\quad + \sum_{i < j} \sum_{l_i, l_j} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}, l_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_p) R(\alpha_i, l_i, \alpha_j, l_j) \\
&= \sum_{i=1}^p {}^iA + \sum_{i < j} {}^{i,j}B + \sum_{i < j} {}^{i,j}B.
\end{aligned}$$

finalement :

$$\theta = \sum_{i=1}^p {}^i A + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} {}^{i,j} B.$$

□

### 2.3.2 Minoration de "F"

**Théorème 2.3.1** *Pour tout  $\tau$   $p$ -forme différentielle on a :*

$$F(\tau) = \frac{1}{p!} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \theta.$$

Pour démontrer ce théorème on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.3.1** [GM75] *On a :*

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \theta = pA - \frac{p(p-1)}{2} B,$$

avec :

$$A = \sum_{\alpha_3, \dots, \alpha_p} \sum_{r, s, t, u} \tau(s, r, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \tau(t, r, \alpha_3, \dots, \alpha_p) R(s, u, t, u),$$

$$B = \sum_{\alpha_3, \dots, \alpha_p} \sum_{r, s, t, u} \tau(r, s, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \tau(t, u, \alpha_3, \dots, \alpha_p) R(r, s, t, u).$$

#### Preuve du théorème 2.3.1

Le théorème 2.2.2 donne :

$$F(\tau) = \frac{1}{(p-1)!} \left[ A - \frac{p-1}{2} B \right].$$

le lemme 2.3.1 nous donne :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \theta &= pA - \frac{p(p-1)}{2} B \\ &= p \left( A - \frac{(p-1)}{2} B \right) \\ &= p(p-1)! F(\tau). \end{aligned}$$

d'où :

$$F(\tau) = \frac{1}{p!} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} \theta.$$

□

### Preuve du lemme 2.3.1

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} {}^i A &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \sum_{l_i, L_i} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) \\ &\quad \times \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, L_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) R(\alpha_i, l_i, \alpha_i, L_i) \\ &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, l_i, L_i} \tau(l_i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_p) \tau(L_i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_p) R(\alpha_i, l_i, \alpha_i, L_i). \end{aligned}$$

montrons d'abord que pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  :

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} {}^i A = A.$$

en effet, pour  $i = 1$ , on effectue le changement d'indices :  $(l_1, L_1, \alpha_1 \alpha_2) = (s, t, u, r)$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} {}^1 A &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, l_1, L_1} \tau(l_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \tau(L_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) R(\alpha_1, l_1, \alpha_1, L_1) \\ &= \sum_{\alpha_3, \dots, \alpha_p} \sum_{r, s, t, u} \tau(s, r, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \tau(t, r, \alpha_3, \dots, \alpha_p) R(u, s, u, t) \\ &= A. \end{aligned}$$

pour  $i \in \{2, \dots, p\}$ , on effectue le changement d'indices suivant :

$$(l_i, L_i, \alpha_i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \hat{\alpha}_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) = (s, t, u, r, \alpha_3, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p).$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} {}^i A &= \sum_{\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_p} \sum_{\alpha_i, l_i, L_i} \tau(l_i, \alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_p) \tau(L_i, \alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_p) R(\alpha_i, l_i, \alpha_i, L_i) \\ &= \sum_{\alpha_3, \dots, \alpha_p} \sum_{r, s, t, u} \tau(s, r, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \tau(t, r, \alpha_3, \dots, \alpha_p) R(u, s, u, t) \\ &= \sum_{\alpha_3, \dots, \alpha_p} \sum_{r, s, t, u} \tau(s, r, \alpha_3, \dots, \alpha_p) \tau(t, r, \alpha_3, \dots, \alpha_p) R(s, u, t, u) \\ &= A. \end{aligned}$$

montrons maintenant que pour tous  $i, j \in \{1, \dots, p\}$  :

$$2 \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} {}^{i,j} B = -B.$$

on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} {}^{i,j}B &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \sum_{l_i, l_j} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) \\
&\quad \times \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}, l_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_p) R(\alpha_i, l_i, \alpha_j, l_j) \\
&= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, l_i, l_j} \tau(l_i, \alpha_j, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_p) \\
&\quad \times \tau(\alpha_i, l_j, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_p) R(l_i, \alpha_i, l_j, \alpha_j). \quad (2.11)
\end{aligned}$$

on effectue encore le changement d'indices suivant  $(l_j, \alpha_i) = (\alpha_i, l_j)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} {}^{i,j}B &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, l_i, l_j} \tau(l_i, \alpha_j, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_p) \\
&\quad \times \tau(\alpha_i, l_j, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_p) R(l_i, \alpha_i, l_j, \alpha_j) \\
&= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, l_i, l_j} \tau(l_i, \alpha_j, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_p) \\
&\quad \times \tau(l_j, \alpha_i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_p) R(l_i, l_j, \alpha_i, \alpha_j) \\
&= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, l_i, l_j} \tau(l_i, \alpha_j, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_p) \\
&\quad \times \tau(\alpha_i, l_j, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_p) R(l_j, l_i, \alpha_i, \alpha_j). \quad (2.12)
\end{aligned}$$

on additionnant les égalités de (2.11) et de (2.12), on trouve :

$$\begin{aligned}
2 \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} {}^{i,j}B &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, l_i, l_j} \tau(l_i, \alpha_j, \alpha_1, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_p) \cdot \tau(\alpha_i, l_j, \alpha_1, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_p) \\
&\quad \times \{R(l_i, \alpha_i, l_j, \alpha_j) + R(l_i, l_j, \alpha_i, \alpha_j)\}.
\end{aligned}$$

l'identité de Bianchi nous donne :

$$\begin{aligned}
2 \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} {}^{i,j}B &= - \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, l_i, l_j} \tau(l_i, \alpha_j, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_p) \\
&\quad \times \tau(\alpha_i, l_j, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_p) R(\alpha_i, l_j, l_i, \alpha_j).
\end{aligned}$$

le changement d'indices suivant :

$$\begin{aligned}
&(l_i, l_j, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_p) \\
&= (r, u, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{i+1}, t, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_j, s, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_p),
\end{aligned}$$

donne :

$$\begin{aligned}
2 \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}^{i,j} B &= - \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, l_i, l_j} \tau(l_i, \alpha_j, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_p) \\
&\quad \times \tau(\alpha_i, l_j, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_p) R(\alpha_i, l_j, l_i, \alpha_j) \\
&= - \sum_{\alpha_3, \dots, \alpha_p, r, s, t, u} \tau(r, s, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_p) \tau(t, u, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_p) R(t, u, r, s) \\
&= - \sum_{\alpha_3, \dots, \alpha_p, r, s, t, u} \tau(r, s, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_p) \tau(t, u, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_p) R(r, s, t, u) \\
&= B.
\end{aligned}$$

par la proposition (2.3.2) on a :

$$\alpha_{1, \dots, \alpha_p} \theta = {}^i A + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p}^{i,j} B.$$

et

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} {}^i A = A \quad , \quad 2 \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}^{i,j} B = -B.$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \alpha_{1, \dots, \alpha_p} \theta &= \sum_{i=1}^p \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} {}^i A + \sum_{1 \leq i < j \leq p} 2 \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}^{i,j} B \\
&= \sum_{i=1}^p A - \sum_{1 \leq i < j \leq p} B \\
&= pA - \frac{p(p-1)}{2} B.
\end{aligned}$$

□

**Proposition 2.3.3** [GM75] Soient  $m \in M$  et  $\tau \in \Omega^p(M)$ .

S'il existe  $k$  positif ou nul tel que  $\rho_m(\tau) \geq k$ , alors :

$$F(\tau) \geq k p(n-p) |\tau|^2.$$

**Preuve**

D'une part, la définition 2.3.2 et la définition 2.3.1 donnent :

$$\begin{aligned}
\rho_m \geq k \quad \text{si} \quad \forall u \in k^2 T_m^* M : \langle \rho_m(u), u \rangle \geq k |u|^2, \\
\text{avec } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \theta = \langle \rho_m((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \tau), (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \tau \rangle .
\end{aligned}$$

alors :

$${}_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}\theta \geq k |{}_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}\tau|^2.$$

du théorème 2.3.1 on obtient :

$$F(\tau) = \frac{1}{p!} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} {}_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}\theta.$$

d'où :

$$F(\tau) \geq \frac{1}{p!} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} k |{}_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}\tau|^2.$$

D'autre part, dans la base orthonormée  $\{X_i^* \wedge X_j^*\}_{1 \leq i < j \leq n}$  :

$${}_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}\tau = \sum_{i=1}^p \sum_{l_i=1}^n \tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) X_{l_i}^* \wedge X_{\alpha_i}^*.$$

donc pour tous  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  :

$$\begin{aligned} |{}_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}\tau|^2 &= \langle {}_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}\tau, {}_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}\tau \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^p \sum_{l_i=1}^n \tau(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) X_{l_i}^* \wedge X_{\alpha_i}^*, \\ &\quad \sum_{i=1}^p \sum_{l_i=1}^n \tau(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p) X_{l_i}^* \wedge X_{\alpha_i}^* \rangle. \end{aligned}$$

la base étant orthonormée alors :

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} |{}_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}\tau|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \sum_{l_i \neq \alpha_1, \dots, \alpha_p}^n [\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p)]^2.$$

donc :

$$\begin{aligned} F(\tau) &\geq k \sum_{i=1}^p \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \sum_{l_i \neq \alpha_1, \dots, \alpha_p} \frac{1}{p!} [\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, l_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p)]^2 \\ &\geq k \sum_{i=1}^p (n-p) |\tau|^2 \\ &\geq k p(n-p) |\tau|^2. \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.3.4** [GM75]

Si  $\rho > 0$ , alors la forme quadratique  $F$  est définie positive en tout point  $m$  de  $M$  et ceci pour tout  $p \in \{1, \dots, n-1\}$ .

**Preuve**

Si  $\rho > 0$  alors il existe  $k > 0$  tel que :  $\rho \geq k$  (car  $M$  est compacte) :

d'où  $\rho_m \geq k$  pour tout  $m \in M$  de la proposition 2.3.3 :  $F(\tau) \geq kp(n-p)|\tau|^2 \quad \forall \tau \in \Omega^p(M)$ .  
donc :

$$F(\tau) = 0 \Rightarrow |\tau|^2 = 0 \Rightarrow \tau = 0.$$

ainsi  $F$  est définie positive au point  $m$ .

□

**Corollaire 2.3.1** Si  $\rho > 0$ , alors toute  $p$ -forme harmonique ( $0 < p < n$ ) est identiquement nulle.

**Preuve** Il suffit d'utiliser la proposition (2.3.4) et le corollaire (2.1.1).

□

## 2.4 Minoration des valeurs propres du p-spectre

### 2.4.1 La théorie de De Rham et le p-spectre

**Définition 2.4.1** On appelle **p-spectre** de la variété  $M$  qu'on note  ${}^p\text{Spect}(M)$ , l'ensemble des valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham des  $p$ -formes différentielles agissant sur  $M$  ;

La multiplicité d'une valeur propre est la dimension de son espace propre.

La théorie spectrale nous permet de dire que :

**Proposition 2.4.1** Soit  $L$  un opérateur elliptique et auto-adjoint sur une variété  $M$ , alors le spectre de  $L$  est constitué d'une suite discrète, croissante de réels positifs, tendant vers  $+\infty$ . [GNT98]

**Théorème 2.4.1** (Décomposition de De-Rham) [WAR83]

Pour tout  $p$ , on a la décomposition suivante :

$$\Omega^p(M) = \text{Ker} \Delta^p \oplus \text{Im} d^{p-1} \oplus \text{Im} \delta^{p+1}.$$

c'est à dire :  $\forall \tau \in \Omega^p(M)$  on a :  $\tau = \eta + d\beta + \delta\gamma$ ,

avec :  $\Delta\eta = 0$  ,  $\beta \in \Omega^{p-1}(M)$  et  $\gamma \in \Omega^{p+1}(M)$

**Définition 2.4.2** On appelle sous-espace des  $p$ -formes fermées noté  $V'_\lambda$  le sous-espace de  $V_\lambda$  donné par :

$$V'_\lambda := V_\lambda \cap \text{Ker } d$$

On appelle sous-espace des  $p$ -formes cofermées noté  $V''_\lambda$  le sous-espace de  $V_\lambda$  donné par :

$$V''_\lambda := V_\lambda \cap \text{Ker } \delta$$

avec :

$$V_\lambda := \{\tau \in \Omega^p(M) / \Delta\tau = \lambda\tau\}.$$

**Proposition 2.4.2** [GM75] Pour toute valeur propre non nulle  $\lambda$  on a :

$$V_\lambda = V'_\lambda \oplus V''_\lambda.$$

**Preuve :**

La décomposition de De Rham donne

$$\begin{aligned} \Omega^p(M) &= \text{Ker } \Delta^p \oplus \text{Im } d^{p-1} \oplus \text{Im } \delta^{p+1} \\ \Rightarrow V_\lambda &= \Omega^p(M) \cap V_\lambda = \text{Ker } \Delta^p \cap V_\lambda \oplus \text{Im } d^{p-1} \cap V_\lambda \oplus \text{Im } \delta^{p+1} \cap V_\lambda. \end{aligned}$$

pour  $\lambda \neq 0$  :

$$\text{Ker } \Delta^p \cap V_\lambda = \{0\}. \quad (2.13)$$

montrons que :  $\text{Im } d^{p-1} \cap V_\lambda = V'_\lambda$  puis  $\text{Im } \delta^{p+1} \cap V_\lambda = V''_\lambda$ .

d'une part :

soit  $\tau \in \text{Im } d^{p-1} \cap V_\lambda$  donc  $\exists \tau' \in \Omega^{p-1}(M)$  tel que  $\tau = d\tau'$ ,

alors  $d\tau = dd\tau' = 0$  donc  $\tau \in \text{ker } d$ .

d'où :

$$\text{Im } d^{p-1} \cap V_\lambda \subset V'_\lambda.$$

d'autre part :

si  $\tau \in V'_\lambda$  alors  $d\tau = 0$  et  $\Delta\tau = d\delta\tau = \lambda\tau$ .

donc  $\tau = \frac{1}{\lambda}d\delta\tau = d(\frac{1}{\lambda}\delta\tau)$ .

or  $\frac{1}{\lambda}\delta\tau \in \Omega^{p-1}(M)$ ,

d'où :

$$\tau \in \text{Im } d^{p-1} \cap V_\lambda.$$

Finalement :

$$\text{Im } d^{p-1} \cap V_\lambda = V'_\lambda. \quad (2.14)$$

De même pour  $\text{Im } \delta^{p+1} \cap V_\lambda = V''_\lambda$

Soit  $\tau \in \text{Im } \delta^{p+1} \cap V_\lambda$ ,

$\tau \in \text{Im } \delta^{p+1}$  alors  $\exists \tau' \in \Omega^{p+1}(M)$  tel que  $\tau = \delta \tau'$ ,

donc  $\delta \tau = \delta \delta \tau' = 0$  d'où  $\tau \in \text{Ker } \delta$ .

alors :

$$\text{Im } \delta^{p+1} \cap V_\lambda \subset V''_\lambda.$$

si  $\tau \in V''_\lambda = \text{Ker } \delta \cap V_\lambda$  alors  $\delta \tau = 0$  et  $\Delta \tau = \delta d \tau = \lambda \tau$ ,

d'où  $\tau = \frac{1}{\lambda} \delta d \tau = \delta(\frac{1}{\lambda} d \tau)$ ,

donc :

$$\tau \in \text{Im } \delta^{p+1} \cap V_\lambda.$$

finalement

$$\text{Im } \delta^{p+1} \cap V_\lambda = V''_\lambda. \quad (2.15)$$

de (2.13),(2.14) et (2.15) on obtient :

$$V_\lambda = V'_\lambda \oplus V''_\lambda.$$

□

**Définition 2.4.3** [GHL05]

Soit  ${}^p \lambda_1$  la plus petite valeur propre non nulle du laplacien de Hodge-de Rham des  $p$ -formes, ( $1 \leq p < n$ ), on pose :

$$\begin{aligned} {}^p \lambda_1 &:= \inf\{\lambda > 0 \mid V_\lambda \neq \{0\}\}, \\ {}^p \lambda'_1 &:= \inf\{\lambda > 0 \mid V'_\lambda \neq \{0\}\}, \\ {}^p \lambda''_1 &:= \inf\{\lambda > 0 \mid V''_\lambda \neq \{0\}\}. \end{aligned}$$

**Proposition 2.4.3** [GM75]

Si  ${}^p\lambda_1$  est la plus petite valeur propre non nulle du laplacien de Hodge-de Rham sur les  $p$ -formes, ( $1 \leq p < n$ ) on a :

$${}^p\lambda_1 = \inf\{{}^p\lambda'_1, {}^p\lambda''_1\}.$$

**Preuve**

Montrons que :  ${}^p\lambda_1 \geq \inf\{{}^p\lambda'_1, {}^p\lambda''_1\}$ .

soit  $\tau \in V_{p\lambda_1} - \{0\}$  tel que  $\Delta\tau = {}^p\lambda_1\tau$ .

la proposition 2.4.2 donne :  $V_{p\lambda_1} = V'_{p\lambda_1} \oplus V''_{p\lambda_1}$ .

donc :  $\exists\tau' \in V'_{p\lambda_1}$  et  $\exists\tau'' \in V''_{p\lambda_1}$

tels que  $\tau = \tau' + \tau''$  et  $\Delta\tau' = {}^p\lambda_1\tau'$ ,  $\Delta\tau'' = {}^p\lambda_1\tau''$ .

si  $\tau' \neq 0$  alors  ${}^p\lambda_1 \in \{\lambda \neq 0 | V'_\lambda \neq \{0\}\}$  et donc  ${}^p\lambda_1 \geq {}^p\lambda'_1 \geq \inf\{{}^p\lambda'_1, {}^p\lambda''_1\}$ ,

et si  $\tau'' \neq 0$  alors  ${}^p\lambda_1 \in \{\lambda \neq 0 | V''_\lambda \neq \{0\}\}$  et donc  ${}^p\lambda_1 \geq {}^p\lambda''_1 \geq \inf\{{}^p\lambda'_1, {}^p\lambda''_1\}$ .

d'où

$${}^p\lambda_1 \geq \inf\{\lambda', \lambda''\}. \quad (2.16)$$

2- Montrons que :  ${}^p\lambda_1 \leq \inf\{{}^p\lambda'_1, {}^p\lambda''_1\}$ .

la définition 2.4.2 donne

$V'_{p\lambda_1} = V_{p\lambda_1} \cap \ker d \subset V_{p\lambda_1}$ , alors  $\exists\tau \in V_{p\lambda_1}$  tels que  $\Delta\tau = {}^p\lambda'_1\tau$  et  $d\tau = 0$ .

or  ${}^p\lambda_1$  est la plus petite valeur propre de  $V_{p\lambda_1}$ , donc

$${}^p\lambda_1 \leq {}^p\lambda'_1. \quad (2.17)$$

de même pour  ${}^p\lambda''_1$ , on a :  ${}^p\lambda_1 \leq {}^p\lambda''_1$ ,

$V''_{p\lambda_1} = V_{p\lambda_1} \cap \ker \delta \subset V_{p\lambda_1}$ , alors  $\exists\tau \in V_{p\lambda_1}$  tels que  $\Delta\tau = {}^p\lambda''_1\tau$  et  $\delta\tau = 0$ .

or  ${}^p\lambda_1$  est la plus petite valeur propre de  $V_{p\lambda_1}$ , donc

$${}^p\lambda_1 \leq {}^p\lambda''_1. \quad (2.18)$$

par (2.17) et (2.18) on obtient :

$${}^p\lambda_1 \leq \inf\{{}^p\lambda'_1, {}^p\lambda''_1\}. \quad (2.19)$$

finalement :

$${}^p\lambda_1 = \inf\{{}^p\lambda'_1, {}^p\lambda''_1\}.$$

□

**Proposition 2.4.4** [GM75]

Pour tout  $p \in \{1, \dots, n\}$  :

$${}^p\lambda''_1 = {}^{n-p}\lambda'_1.$$

**Preuve**

1- Montrons d'abord que :  ${}^p\lambda''_1 \geq {}^{n-p}\lambda'_1$ .

Soit  $\tau \in V''_{p\lambda'_1}$  de la définition 2.4.2 :

$$\begin{cases} \Delta\tau &= {}^p\lambda''_1\tau \\ \delta\tau &= 0 \end{cases}$$

en appliquant l'opérateur de Hodge "\*)" on obtient :

$$\begin{cases} *\Delta\tau &= *{}^p\lambda''_1\tau \\ \delta\tau &= 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \Delta * \tau &= {}^p\lambda''_1 * \tau \\ d * \tau &= 0 \end{cases}$$

donc  ${}^p\lambda''_1$  est une valeur propre de  $\Delta$  et  $*\tau$  son vecteur propre, avec  $*\tau \in V'_{n-p\lambda'_1}$ .

alors :

$${}^p\lambda''_1 \geq {}^{n-p}\lambda'_1. \tag{2.20}$$

2- Montrons aussi :  ${}^p\lambda''_1 \leq {}^{n-p}\lambda'_1$ ,

Soit  $\tau \in V'_{n-p\lambda'_1}$  de la définition 2.4.2 :

$$\begin{cases} \Delta\tau &= {}^{n-p}\lambda'_1\tau \\ d\tau &= 0 \end{cases}$$

en appliquant l'opérateur de Hodge "\*)" on obtient :

$$\begin{cases} *\Delta\tau &= *{}^{n-p}\lambda'_1\tau \\ d\tau &= 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \Delta * \tau = {}^{n-p}\lambda'_1 * \tau \\ \delta * \tau = 0 \end{cases}$$

donc  ${}^{n-p}\lambda'_1$  est une valeur propre de  $\Delta$  et  $*\tau$  son vecteur propre, avec  $*\tau \in V''_{p\lambda'_1}$ .

alors :

$${}^{n-p}\lambda'_1 \geq p\lambda''_1. \quad (2.21)$$

finalement :

$$p\lambda''_1 = {}^{n-p}\lambda'_1.$$

□

## 2.4.2 Minoration de $\nabla\tau$ :

**Lemme 2.4.1** [GM75]

Soit  $\tau$  dans  $\Omega^p(M)$  et pour tout  $m \in M$  alors :

$$|\nabla\tau|^2 \geq \frac{1}{p+1}|d\tau|^2 + \frac{1}{n-p+1}|\delta\tau|^2.$$

où  $n$  est la dimension de  $M$ .

**Preuve**

La définition de la norme et la connexion des p-formes donnent :

$$\begin{aligned} |\nabla\tau|^2 &= \frac{1}{p!} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \nabla_{\alpha}\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \nabla_{\alpha}\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \\ &= \underbrace{\frac{1}{p!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \sum_{\alpha_l \neq \alpha_1, \dots, \alpha_p} [\nabla_{\alpha_l}\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p)]^2}_{(a)} + \underbrace{\frac{1}{p!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \sum_{l=1}^p [\nabla_{\alpha_l}\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p)]^2}_{(a')}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

d'une part :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p!} \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p} \frac{1}{p+1} \sum_{l=0}^p [\nabla_{\alpha_l} \tau(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_l, \dots, \alpha_p)]^2 &= \frac{1}{p!} \cdot \frac{1}{p+1} \left\{ \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p} [\nabla_{\alpha_0} \tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p)]^2 \right. \\
&+ \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p} [\nabla_{\alpha_1} \tau(\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_p)]^2 \\
&\vdots \\
&+ \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p} [\nabla_{\alpha_l} \tau(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_l, \dots, \alpha_p)]^2 \\
&\vdots \\
&\left. + \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p} [\nabla_{\alpha_p} \tau(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1})]^2 \right\}.
\end{aligned}$$

le changement d'indices,

$$\begin{aligned}
\text{ligne 1} &: (\alpha_0, \alpha_1) = (\alpha_0, \alpha_1), \\
\text{ligne 2} &: (\alpha_1, \alpha_0) = (\alpha_0, \alpha_1), \\
&\vdots \\
\text{ligne } l &: (\alpha_l, \alpha_0) = (\alpha_0, \alpha_l), \\
&\vdots \\
\text{ligne } p &: (\alpha_p, \alpha_0) = (\alpha_0, \alpha_p).
\end{aligned}$$

donne,

$$\frac{1}{p!} \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p} \frac{1}{p+1} \sum_{l=0}^p [\nabla_{\alpha_l} \tau(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_l, \dots, \alpha_p)]^2 = \frac{1}{p!} \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p} [\nabla_{\alpha_0} \tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p)]^2. \quad (2.23)$$

de (2.22) et (2.23) :

$$(a) = \frac{1}{p!} \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p} \frac{1}{p+1} \sum_{l=0}^p [\nabla_{\alpha_l} \tau(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_l, \dots, \alpha_p)]^2. \quad (2.24)$$

d'autre part, de l'égalité 2.22 on obtient :

$$\begin{aligned}
(a') &= \frac{1}{p!} \left\{ \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \sum_{l=1}^p [\nabla_{\alpha_l} \tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p)]^2 \right. \\
&= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} [\nabla_{\alpha_1} \tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p)]^2 \\
&\quad + \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} [\nabla_{\alpha_2} \tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p)]^2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} [\nabla_{\alpha_l} \tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p)]^2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad \left. + \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} [\nabla_{\alpha_p} \tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p)]^2 \right\}.
\end{aligned}$$

par un premier changement d'indices pour tout  $l = 1, \dots, p$  :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, \dots, \alpha_p) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, k, \dots, \alpha_p),$$

$$\begin{aligned}
(a') &= \frac{1}{p!} \left\{ \sum_{k, \alpha_2, \dots, \alpha_p} [\nabla_k \tau(k, \alpha_2, \dots, \alpha_p)]^2 \right. \\
&\quad + \sum_{\alpha_1, k, \alpha_3, \dots, \alpha_p} [\nabla_k \tau(\alpha_1, k, \alpha_3, \dots, \alpha_p)]^2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}, k, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_p} [\nabla_k \tau(\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}, k, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_p)]^2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad \left. + \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, k} [\nabla_k \tau(\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, k)]^2 \right\}
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
(a') &= \frac{1}{p!} \left\{ \sum_{k, \alpha_2, \dots, \alpha_p} [\nabla_k \tau(k, \alpha_2, \dots, \alpha_p)]^2 \right. \\
&\quad + \sum_{\alpha_1, k, \alpha_3, \dots, \alpha_p} [\nabla_k \tau(k, \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_p)]^2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}, k, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_p} [\nabla_k \tau(k, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_p)]^2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad \left. + \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, k} [\nabla_k \tau(k, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})]^2 \right\}.
\end{aligned}$$

et par un deuxième le changement d'indices, pour tout  $l = 1, \dots, p$  :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, k, \dots, \alpha_p) = (k, \alpha_2, \dots, \alpha_p),$$

$$(a') = \frac{1}{p!} p \sum_{\alpha_2, \dots, \alpha_p} \sum_{k \neq \alpha_2, \dots, \alpha_p} [\nabla_k \tau(k, \alpha_2, \dots, \alpha_p)]^2. \quad (2.25)$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^p [\nabla_{\alpha_l} \tau(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_l, \dots, \alpha_p)]^2 &\geq \frac{1}{p+1} \left[ \sum_{l=0}^p (-1)^l \nabla_{\alpha_l} \tau(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_l, \dots, \alpha_p) \right]^2 \\
\sum_{k \neq \alpha_2, \dots, \alpha_p} [\nabla_k \tau(k, \alpha_2, \dots, \alpha_p)]^2 &\geq \frac{1}{n-p+1} \left[ - \sum_{k \neq \alpha_2, \dots, \alpha_p} \nabla_k \tau(k, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \right]^2 \\
&\geq \frac{1}{n-p+1} \left[ - \sum_{k=1}^n \nabla_k \tau(k, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \right]^2.
\end{aligned}$$

et

$$d\tau(X_0, X_1, \dots, X_p) = \sum_{j=1}^p (-1)^j (\nabla_{X_j} \tau)(X_0, X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p). \quad (2.26)$$

$$\delta\tau(X_1, \dots, X_{p-1}) = \sum_{j=1}^n (-1)^j (\nabla_{X_j} \tau)(X_j, X_1, \dots, X_{p-1}). \quad (2.27)$$

de (2.24), (2.25), (2.26), (2.27) et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned}
|\nabla\tau|^2 &\geq \frac{1}{p+1} \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p} \left[ \sum_{l=0}^p (-1)^l \nabla_{\alpha_l} \tau(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_l, \dots, \alpha_p) \right]^2 \\
&\quad + \frac{1}{n-p+1} \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\alpha_2, \dots, \alpha_p} \left[ - \sum_{k=1}^n \nabla_k \tau(k, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \right]^2 \\
&\geq \frac{1}{p+1} \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p} [d\tau(\alpha_0, \dots, \alpha_p)]^2 \\
&\quad + \frac{1}{n-p+1} \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\alpha_2, \dots, \alpha_p} [\delta\tau(\alpha_2, \dots, \alpha_p)]^2.
\end{aligned}$$

Finalement :

$$|\nabla\tau|^2 \geq \frac{1}{p+1} |d\tau|^2 + \frac{1}{n-p+1} |\delta\tau|^2.$$

□

### 2.4.3 Minoration du p-spectre

**Théorème 2.4.2** [GM75]

Soit  $M$  une variété riemannienne compacte de dimension  $n$ , si l'opérateur de courbure  $\rho \geq k > 0$  pour tout  $p \in \{1, \dots, n\}$ , alors la première valeur propre du laplacien de Hodge-de Rham des  $p$ -formes différentielles agissant sur  $M$  est minorée comme suit :

$${}^p\lambda_1 \geq \inf\{kp(n-p+1), k(p+1)(n-p)\}. \quad (2.28)$$

avec

$${}^p\lambda'_1 \geq kp(n-p+1), \quad (2.29)$$

$${}^p\lambda''_1 \geq k(p+1)(n-p). \quad (2.30)$$

**Preuve**

L'inégalité (2.28) :  ${}^p\lambda_1 \geq \inf\{kp(n-p+1), k(p+1)(n-p)\}$  est immédiate par la proposition 2.4.3 et les deux inégalités (2.29) , (2.30).

Montrons (2.29) :

Soit  $\tau \in V'_p\lambda_1 = V_p\lambda_1 \cap \ker d$  i.e. :  $\Delta\tau = {}^p\lambda'_1\tau$  et  $d\tau = 0$ .

le lemme 2.4.1 donne :

$$|\nabla\tau|^2 \geq \frac{1}{n-p+1} |\delta\tau|^2 \quad \Rightarrow \quad \|\nabla\tau\|^2 \geq \frac{1}{n-p+1} \|\delta\tau\|^2.$$

or :

$$\|\delta\tau\|^2 = \int_M \langle \delta\tau, \delta\tau \rangle = \int_M \langle \Delta\tau, \tau \rangle = \int_M {}^p\lambda'_1 \langle \tau, \tau \rangle = {}^p\lambda'_1 \|\tau\|^2.$$

donc :

$$\|\nabla\tau\|^2 \geq \frac{1}{n-p+1} {}^p\lambda'_1 \|\tau\|^2. \quad (2.31)$$

si  $\rho \geq k$  alors le corollaire 2.3.3 donne :

$$F(\tau) \geq kp(n-p)|\tau|^2. \quad (2.32)$$

et du corollaire de Weizenböck 2.1.1 on a :

$$(\Delta\tau, \tau) = {}^p\lambda'_1 \|\tau\|^2 = \|\nabla\tau\|^2 + \int_M F(\tau) d\nu. \quad (2.33)$$

de (2.31) , (2.32) et (2.33) on obtient :

$$\begin{aligned} {}^p\lambda'_1 \|\tau\|^2 &\geq \frac{1}{n-p+1} {}^p\lambda'_1 \|\tau\|^2 + \int_M kp(n-p)|\tau|^2 \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{n-p+1}\right) {}^p\lambda'_1 \|\tau\|^2 &\geq kp(n-p) \|\tau\|^2 \\ \Rightarrow {}^p\lambda'_1 \|\tau\|^2 &\geq kp(n-p+1) \|\tau\|^2. \end{aligned}$$

d'où :

$${}^p\lambda'_1 \geq kp(n-p+1). \quad (2.34)$$

Montrons (2.30) :

Soit  $\tau \in V''_{p\lambda'_1} = V_{p\lambda'_1} \cap \ker\delta$  i.e. :  $\Delta\tau = {}^p\lambda''_1\tau$  et  $\delta\tau = 0$ .

le lemme 2.4.1 nous donne :

$$|\nabla\tau|^2 \geq \frac{1}{p+1} |d\tau|^2 \Rightarrow \|\nabla\tau\|^2 \geq \frac{1}{p+1} \|d\tau\|^2.$$

et

$$\|d\tau\|^2 = \int_M \langle d\tau, d\tau \rangle = \int_M \langle \Delta\tau, \tau \rangle = \int_M {}^p\lambda''_1 \langle \tau, \tau \rangle = {}^p\lambda''_1 \|\tau\|^2.$$

d'où

$$\|\nabla\tau\|^2 \geq \frac{1}{p+1} {}^p\lambda''_1 \|\tau\|^2. \quad (2.35)$$

par (2.32) , (2.33) et (2.35) on a :

$$\begin{aligned} {}^p\lambda_1''\|\tau\|^2 &\geq \frac{1}{p+1}{}^p\lambda_1''\|\tau\|^2 + \int_M kp(n-p)|\tau|^2 \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{p+1}\right) {}^p\lambda_1''\|\tau\|^2 &\geq kp(n-p)\|\tau\|^2 \\ \Rightarrow {}^p\lambda_1''\|\tau\|^2 &\geq k(p+1)(n-p)\|\tau\|^2. \end{aligned}$$

finalement :

$${}^p\lambda_1'' \geq k(p+1)(n-p).$$

□

# Chapitre 3

## Etude du spectre du laplacien sur la sphère

L'espace  $\mathbf{R}^{n+1}$  est muni de sa métrique canonique  $\langle, \rangle$  et  $\| \cdot \|$  sa norme associée.

Sur la sphère unité  $\mathbf{S}^n$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$ , l'espace tangent  $T_m \mathbf{S}^n$  est exactement  $\{m\}^\perp$  pour tout  $m \in \mathbf{S}^n$ .

Notons par  $\pi$  la projection suivante :

$$\begin{aligned} \pi : \mathbf{R}^{n+1} - 0 &\longrightarrow \mathbf{S}^n \\ x &\longmapsto m = \pi(x) = \frac{x}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Sur  $\mathbf{S}^n$ , on note par  $\langle, \rangle_{\mathbf{S}^n}$  la métrique induite par  $\pi$ .

L'injection canonique de  $\mathbf{S}^n$  dans  $\mathbf{R}^{n+1}$  sera notée  $\iota : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ .

### 3.1 Le spectre du laplacien pour les fonctions

Étant donné  $m \in \mathbf{S}^n$ , il détermine un vecteur unitaire sur  $\mathbf{R}^{n+1}$ , on le note  $e^1$ .

On le complète avec des vecteurs  $e^2, \dots, e^{n+1}$  de façon à obtenir une base orthonormée  $\{e^1, e^2, \dots, e^{n+1}\}$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$ , donc  $\{e^2, \dots, e^{n+1}\}$  est une base orthonormée de  $T_m \mathbf{S}^n$ .

On définit la famille orthonormée des géodésiques de  $\mathbf{S}^n$  partant de  $m : \{\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_{n+1}\}$ , tels que  $\gamma'_i(0) = e^i$  et  $\gamma_i(0) = m$  pour tout  $i = 2, \dots, n+1$ .  
et  $\gamma_i$  données par :

$$\gamma_i : t \longrightarrow \cos t.e^1 + \sin t.e^i \quad i = 2, \dots, n+1.$$

**Remarque** : En effet, une géodésique  $\gamma_i$  est le grand cercle dans le 2-plan engendré par  $e^1$  et  $e^i$ .

A la base  $\{e^1, e^2, \dots, e^{n+1}\}$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$  on associe le système des coordonnées  $\{x^i\}_{1 \leq i \leq n+1}$ .

On désigne par  $\Delta$  le laplacien de  $(\mathbf{S}^n, \langle, \rangle_{\mathbf{S}^n})$ , et par  $\bar{\Delta}$  celui de  $(\mathbf{R}^{n+1}, \langle, \rangle)$ .

Notons  $Spect(\mathbf{S}^n)$  le spectre du laplacien sur la sphère.

**Proposition 3.1.1** [BGM71] Pour tout  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ , on a :

$$(\Delta f|_{\mathbf{S}^n})(m) = - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{d^2(f \circ \gamma_i)}{dt^2}(0).$$

**Proposition 3.1.2** [GHL05], [BGM71],

Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$  alors :

$$(\bar{\Delta} f)|_{\mathbf{S}^n} = \Delta(f|_{\mathbf{S}^n}) - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}|_{\mathbf{S}^n} - n \frac{\partial f}{\partial r}|_{\mathbf{S}^n}$$

**Preuve** :

Pour un point  $m$  de la sphère, on choisit les géodésiques  $\gamma_i$  comme ci dessus, la dérivée première, par rapport à  $t$  :

$$\frac{d(f \circ \gamma_i)}{dt} = -(\sin t) \frac{\partial f}{\partial x^1}(\gamma_i(t)) + (\cos t) \frac{\partial f}{\partial x^i}(\gamma_i(t)), \quad i = 2, \dots, n+1.$$

et la dérivée seconde au point  $m = \gamma_i(0)$  :

$$\frac{d^2(f \circ \gamma_i)}{dt^2}(0) = -\frac{\partial f}{\partial x^1}(m) + \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}(m), \quad i = 2, \dots, n+1.$$

par la proposition 3.1.1 on a :

$$\begin{aligned} \Delta(f|_{\mathbf{S}^n})(m) &= - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{d^2(f \circ \gamma_i)}{dt^2}(0) \\ &= - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}(m) + n \frac{\partial f}{\partial x^1}(m). \end{aligned} \quad (3.1)$$

mais :

$$\begin{aligned} (\bar{\Delta} f)(m) &= - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}(m) \\ &= - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}(m) - \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2}(m). \end{aligned} \quad (3.2)$$

de (3.1) et (3.2) on tire :

$$\Delta(f|_{\mathbf{S}^n})(m) = (\bar{\Delta}f)(m) + \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2}(m) + n \frac{\partial f}{\partial x^1}(m).$$

or, en un point  $m$  de la sphère,  $\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial r}$  et il s'ensuit que

$$(\bar{\Delta}f)(m) = \Delta f(m) - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(m) - n \frac{\partial f}{\partial r}(m).$$

où  $r(x) = \|x\|$  pour tout  $x \in \mathbf{R}^{n+1}$

□

### Définition 3.1.1 .

L'espace  $\bar{\mathbb{P}}_k$  désigne l'ensemble des polynômes homogènes de degré  $k$  sur  $\mathbf{R}^{n+1}$ .  
l'ensemble  $\mathbb{P}_k$  est donné par :  $\mathbb{P}_k = \{P = \bar{P}|_{\mathbf{S}^n}, \bar{P} \in \bar{\mathbb{P}}_k\}$

$\bar{\mathbb{H}}_k$  est l'ensemble des polynômes homogènes harmoniques de degré  $k$  sur  $\mathbf{R}^{n+1}$ .  
et  $\mathbb{H}_k = \{h = \bar{h}|_{\mathbf{S}^n}, \bar{h} \in \bar{\mathbb{H}}_k\}$ .

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}} &= \bigoplus_{k \geq 0} \bar{\mathbb{P}}_k & \text{et} & & \bar{\mathbb{H}} &= \bigoplus_{k \geq 0} \bar{\mathbb{H}}_k, \\ \mathbb{P} &= \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{P}_k & \text{et} & & \mathbb{H} &= \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{H}_k. \end{aligned}$$

On munit  $\bar{\mathbb{P}}$  d'une structure euclidienne en posant, pour tous  $\bar{P}, \bar{Q} \in \bar{\mathbb{P}}$ ,

$$(\bar{P}, \bar{Q}) = \int_{\mathbf{S}^n} P Q,$$

l'intégrale étant prise au sens de la mesure canonique de  $(\mathbf{S}^n, g)$ .

#### Propriétés :

1). Pour tout  $\bar{P} \in \bar{\mathbb{P}}_k$  :

$$\bar{P} = r^k P.$$

2). Pour tout  $\bar{P} \in \bar{\mathbb{P}}_k$  :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial r} = k r^{k-1} P \quad , \quad \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial r^2} = k(k-1) r^{k-2} P.$$

3). De la proposition (3.1.2) on tire :

$$\Delta P = (\bar{\Delta} \bar{P})|_{\mathbf{S}^n} + k(n+k-1)P.$$

4). Si  $\bar{P} = \bar{h}$ ,  $\bar{h}$  est harmonique alors :

$$\Delta h = k(n + k - 1)h.$$

de la propriété 4 on déduit que :  $k(n + k - 1) \in \text{Spect}(\mathbf{S}^n)$  et  $h$  est un vecteur propre associé.

**Proposition 3.1.3** [GHL05], [BGM71]

i) Le spectre du laplacien sur la variété riemannienne  $\mathbf{S}^n$  est exactement l'ensemble :

$$\text{Spect}_{\mathbf{S}^n} = \{\lambda_k = k(n + k - 1) \quad , \quad k \geq 0\}.$$

ii) Le sous-espace propre associé à  $\lambda_k$  est précisément  $\mathbb{H}_k$ .

### Remarque

Pour démontrer la proposition 3.1.3 il suffit de montrer que la somme directe des sous-espaces propres est dense dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{S}^n)$ . ie :  $\mathbb{H} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{H}_k$  est dense dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{S}^n)$ .

### Lemme 3.1.1

Pour tout  $k \geq 0$  on a :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}_{2k} &= \bar{\mathbb{H}}_{2k} \oplus r^2 \bar{\mathbb{H}}_{2k-2} \oplus \dots \oplus r^{2k} \bar{\mathbb{H}}_0, \\ \bar{\mathbb{P}}_{2k+1} &= \bar{\mathbb{H}}_{2k+1} \oplus r^2 \bar{\mathbb{H}}_{2k-1} \oplus \dots \oplus r^{2k} \bar{\mathbb{H}}_1. \end{aligned}$$

### Preuve de la proposition 3.1.3

Le théorème Stone-Weierstrass assure la densité de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{S}^n)$ .

A partir du lemme 3.1.1 :

$$\mathbb{H} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{H}_k = \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{P}_k = \mathbb{P}.$$

donc  $\mathbb{H}$  est dense dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{S}^n)$ .

□

### Preuve du lemme 3.1.1 :

Se fait par récurrence sur le degré  $k$ .

Pour  $k = 0$ , le résultat est vrai puisque on a  $\bar{\mathbb{H}}_0 = \bar{\mathbb{P}}_0$  et  $\bar{\mathbb{H}}_1 = \bar{\mathbb{P}}_1$ .  
Supposons que :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}_{2k} &= \bar{\mathbb{H}}_{2k} \oplus r^2 \bar{\mathbb{H}}_{2k-2} \oplus \dots \oplus r^{2k} \bar{\mathbb{H}}_0, \\ \bar{\mathbb{P}}_{2k+1} &= \bar{\mathbb{H}}_{2k+1} \oplus r^2 \bar{\mathbb{H}}_{2k-1} \oplus \dots \oplus r^{2k} \bar{\mathbb{H}}_1. \end{aligned}$$

sont vraies pour un entier  $k$ ,  
montrons d'abord l'identité suivante :

$$\bar{\mathbb{P}}_{k+2} = \bar{\mathbb{H}}_{k+2} \oplus r^2 \bar{\mathbb{P}}_k$$

il est clair que :  $\bar{\mathbb{H}}_{k+2} + r^2 \bar{\mathbb{P}}_k \subset \bar{\mathbb{P}}_{k+2}$ .

Montrons que cette somme est directe : ie :  $\bar{\mathbb{H}}_{k+2} \perp \bar{\mathbb{P}}_k$

$\mathbb{H}_{k+2}$  est inclus dans le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_{k+2}$ .  
où  $\lambda_{k+2} = (k+2)(n+k+1)$ ; l'hypothèse de récurrence assure que  $\mathbb{P}_k$  est une somme directe des  $\mathbb{H}_l$ , pour  $l \leq k$ . Or  $\mathbb{H}_l$  est inclus dans un sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_l = l(n+l-1)$ , mais pour tout  $l \leq k$  :  $\lambda_{k+2} \neq \lambda_l$  et les sous-espaces propres sont disjoints deux à deux. Donc  $\mathbb{H}_{k+2} \perp \mathbb{H}_l$ . d'où :

$$\mathbb{H}_{k+2} \perp \mathbb{P}_k \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbb{H}}_{k+2} \perp r^2 \bar{\mathbb{P}}_k.$$

Pour terminer, il suffit de montrer que si  $\bar{P}$  de  $\bar{\mathbb{P}}_{k+2}$  est orthogonal à  $r^2 \bar{\mathbb{P}}_k$  alors il est harmonique, ie :  $\bar{\Delta} \bar{P} = 0$ .

or  $\bar{\Delta} \bar{P} \in \bar{\mathbb{P}}_k$ , par l'hypothèse de récurrence :

$$\bar{\Delta} \bar{P} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\Delta} \bar{P} \perp r^{2l} \bar{\mathbb{H}}_{k-2l}, \quad 0 \leq 2l \leq k.$$

mais pour tous  $\bar{P} \in \bar{\mathbb{P}}_{k+2}$ ,  $\bar{h} \in \bar{\mathbb{H}}_{k-2l}$

$$\Delta(Ph) = \Delta P.h + \Delta h.P + 2(dP, dh)$$

avec :  $P = \bar{P}|_{S^n}$ ,  $h = \bar{h}|_{S^n}$ .

Montrons que :

$$\int_{S^n} \Delta(Ph) = \underbrace{\int_{S^n} \Delta P.h}_{(1)} + 2 \underbrace{\int_{S^n} (dP, dh)}_{(2)} + \underbrace{\int_{S^n} \Delta h.P}_{(3)} = 0.$$

pour (1) et (2) :

$$\Delta P = (\bar{\Delta} \bar{P})|_{S^n} + \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial r^2}|_{S^n} + n \frac{\partial \bar{P}}{\partial r}|_{S^n}.$$

donc :

$$\begin{aligned}
(1) &= \int_{S^n} \Delta P.h = \int_{S^n} (\bar{\Delta}\bar{P})|_{S^n}.h + (k+2)(n+k+1) \underbrace{\int_{S^n} P.h}_{=0} \\
&= \int_{S^n} (\bar{\Delta}\bar{P})|_{S^n}.h \\
&= -2 \int_{S^n} (dP, dh) \\
&= -2 \int_{S^n} P.\Delta h \\
&= -2(k-2l)(n+k-2l-1) \underbrace{\int_{S^n} P.h}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

et pour (3) :

$$\begin{aligned}
(3) &= \int_{S^n} \Delta h.P \\
&= (k-2l)(n+k-2l-1) \underbrace{\int_{S^n} h.P}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc  $\bar{P}$  est harmonique, d'où

$$\bar{\mathbb{P}}_{k+2} = \bar{\mathbb{H}}_{k+2} \oplus r^2 \bar{\mathbb{P}}_k$$

par suite et selon la parité de  $k$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbb{P}}_{2(k+1)} &= \bar{\mathbb{H}}_{2(k+1)} \oplus r^2 \bar{\mathbb{H}}_{2k} \oplus \dots \oplus r^{2(k+1)} \bar{\mathbb{H}}_0, \\
\bar{\mathbb{P}}_{2(k+1)+1} &= \bar{\mathbb{H}}_{2(k+1)+1} \oplus r^2 \bar{\mathbb{H}}_{2k+1} \oplus \dots \oplus r^{2(k+1)} \bar{\mathbb{H}}_1.
\end{aligned}$$

□

## 3.2 Le spectre du laplacien pour les formes différentielles

Soit  $\bar{\nabla}$  la connexion canonique sur  $(\mathbf{R}^{n+1}, \langle, \rangle)$ , et  $\nabla$  la connexion sur  $(\mathbf{S}^n, \langle, \rangle_{S^n})$  induite par l'injection  $\iota : S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ .

Alors, pour tous champs de vecteurs  $X, Y$  sur  $\mathbf{S}^n$ , on a :

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle X, Y \rangle X_{n+1} \quad \text{et} \quad \bar{\nabla}_X X_{n+1} = X \quad (3.3)$$

où  $X_{n+1}$  désigne le vecteur normal en chaque point de  $\mathbf{S}^n$  et de norme 1, que l'on prolonge à  $\mathbf{R}^{n+1}$  par transport parallèle le long des rayons issus de l'origine.

Et on note de même  $X, Y$  les prolongements locaux à  $\mathbf{R}^{n+1}$  de  $X, Y$ .

On prolongera le champ  $X$  de  $S^n$  de manière à ce que :  $[X, X_{n+1}] = 0$ . Une manière canonique de le faire est de transporter  $X$  parallèlement le long des rayons issus de l'origine puis multiplier par la distance à l'origine du point où on l'a transporté.

D'autre part on a :  $D_{X_{n+1}} X_{n+1} = 0$ .

Notons  $\bar{\Delta}, \bar{d}$  et  $\bar{\delta}$  respectivement le laplacien de Hodge-de Rham, la différentielle et la co-différentielle sur  $\Omega^p(\mathbf{R}^{n+1})$ , et  $\Delta, d$  et  $\delta$  celles de  $\Omega^p(S^n)$ .

Soit  $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$  un repère orthonormé local de  $\mathbf{S}^n$  qu'on prolonge à  $\mathbf{R}^{n+1}$  par le procédé décrit ci dessus.

### Proposition 3.2.1 [GM75]

Pour tout  $\tau$   $p$ -forme différentielle fermée de  $\mathbf{R}^{n+1}$ , (ie :  $\bar{d}\tau = 0$ ) et en tout point  $m$  de  $M$  et pour tout  $X_{\alpha_i}$  du repère on a :

$$\begin{aligned} [\Delta(\tau|_{S^n}) - (\bar{\Delta}\tau)|_{S^n}]|_m(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \\ = X_{n+1}|_m[X_{n+1}\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p)] + (n - 2p + 2)X_{n+1}|_m\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \end{aligned}$$

#### **Preuve**

D'une part :  
par la formule (3.3) et la définition 1.4 on trouve :

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\alpha \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) &= \alpha(\tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p)) - \tau(\bar{\nabla}_\alpha \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) - \sum_{l=2}^p \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \bar{\nabla}_\alpha \alpha_l, \dots, \alpha_p) \\
&= \alpha(\tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p)) - \tau(\nabla_\alpha \alpha - \langle \alpha, \alpha \rangle (n+1), \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&\quad - \sum_{l=2}^p \tau(\alpha, \dots, (\nabla_\alpha \alpha_l - \langle \alpha, \alpha_l \rangle (n+1)), \dots, \alpha_p) \\
&= \alpha(\tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p)) - \tau(\nabla_\alpha \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) - \sum_{l=2}^p \tau(\alpha, \dots, \nabla_\alpha \alpha_l, \dots, \alpha_p) \\
&\quad + \langle \alpha, \alpha \rangle \tau(n+1, \dots, \alpha_p) + \sum_{l=2}^p \langle \alpha, \alpha_l \rangle \tau(\alpha, \dots, n+1, \dots, \alpha_p) \\
&= \nabla_\alpha \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) + \tau(n+1, \dots, \alpha_p).
\end{aligned}$$

donc pour tout  $\alpha \neq \alpha_2, \dots, \alpha_p$

$$\bar{\nabla}_\alpha \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) - \nabla_\alpha \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \tau(n+1, \alpha_2, \dots, \alpha_p). \quad (3.4)$$

D'autre part : calculons  $\bar{\nabla}_{X_{n+1}} \tau(n+1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{n+1} \tau(n+1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) &= (n+1)(\tau(n+1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)) - \tau(\bar{\nabla}_{n+1} n+1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&\quad - \sum_{l=2}^p \tau(n+1, \alpha_2, \dots, \bar{\nabla}_{n+1} \alpha_l, \dots, \alpha_p) \\
&= (n+1)(\tau(n+1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)) \\
&\quad - \sum_{l=2}^p \tau(n+1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, \dots, \alpha_p) \\
&= (n+1)(\tau(n+1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)) \\
&\quad - (p-1)\tau(n+1, \alpha_2, \dots, \alpha_p). \quad (3.5)
\end{aligned}$$

par la propriété 1.18 et les égalités 3.4, 3.5, on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta(\tau|_{\mathbf{S}^n}) - (\bar{\delta}\tau)|_{\mathbf{S}^n} &= \sum_{\alpha=1}^n (\bar{\nabla}_\alpha - \nabla_\alpha) \tau(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_p) + \bar{\nabla}_{X_{n+1}} \tau(n+1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \\
&= (n-2p+2)\tau(n+1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) + X_{n+1} \tau(n+1, \alpha_2, \dots, \alpha_p).
\end{aligned}$$

or  $d(\tau|_{\mathbf{S}^n}) = (d\tau)|_{\mathbf{S}^n}$  donc :

$$[\Delta(\tau|_{\mathbf{S}^n}) - (\bar{\Delta}\tau)|_{\mathbf{S}^n}]|_m(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = X_{n+1}|_m[X_{n+1}\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p)] + (n-2p+2)X_{n+1}|_m\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p).$$

□

**Définition 3.2.1 .**

On appelle  $p$ -forme différentielle homogène de degré  $k$  toute forme du type :

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p},$$

où les coefficients  $\varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$  sont des polynômes homogènes de degré  $k$ .

$\mathbb{P}_k^p$  est l'ensemble des  $p$ -formes homogènes de degré  $k$ ,

**Propriété :**

Pour tous entiers  $k, p$  on a :

$$\begin{aligned} 1) \dim \mathbb{P}_k &= \binom{n+k}{k}, \\ 2) \dim \mathbb{P}_k^p &= \binom{n+k}{k} \binom{n+1}{p}. \end{aligned}$$

**Proposition 3.2.2 [GM75]**

Pour tout  $\tau$   $p$ -forme fermée harmonique et homogène de degré  $k$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$ , on a :

$$\Delta(\tau|_{\mathbf{S}^n}(\alpha_1, \dots, \alpha_p)) = (k+p)(n-p+k+1)\tau|_{\mathbf{S}^n}(\alpha_1, \dots, \alpha_p).$$

par conséquent :

$$(k+p)(n-p+k+1) \in {}^p\text{Spect}(\mathbf{S}^n).$$

**Preuve**

Soit  $x \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ , sa projection  $m$  sur la sphère  $\mathbf{S}^n$  est donnée par

$$m = x/\|x\| = x/r \in \mathbf{S}^n$$

Par linéarité, on se limitera aux formes homogènes  $\tau$  de forme :

$$\tau = \varphi dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p},$$

avec  $\varphi$  polynôme homogène de degré  $k$ . alors on a :

$$\varphi(x) = r^k \varphi(m),$$

et :

$$\tau_x(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = r^{k+p} \tau_m(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \quad \text{car} \quad dx^{\alpha_s}|_x(X_{\alpha_l}) = r dx^{\alpha_s}|_m(X_{\alpha_l})$$

donc :

$$X_{n+1}\tau_x(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = (k+p)\tau_m(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \quad \text{car} \quad \frac{\partial}{\partial r} r^{k+p}|_{r=1} = k+p.$$

d'où :

$$\begin{aligned} X_{n+1}|_m X_{n+1}\tau(\alpha_1, \dots, \alpha_p) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} r^{p+k}\right)\tau_m(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \\ &= (k+p)(k+p-1)\tau_m(\alpha_1, \dots, \alpha_p). \end{aligned}$$

finalemt grâce à la proposition 3.2.1 on obtient

$$\Delta(\tau|_{\mathbf{S}^n}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = (k+p)(n-p+k+1)\tau|_{\mathbf{S}^n}(\alpha_1, \dots, \alpha_p).$$

□

### 3.2.1 Caractérisation du spectre du laplacien des p-formes

**Théorème 3.2.1** [IK79]

Les  $\lambda_k = (k+p)(n-k+p+1)$  sont les seules valeurs propres du laplacien de Hodge de Rham des  $p$ -formes agissant sur la sphère, et les  $p$ -formes homogènes harmoniques et fermées de degré  $k$  sont les formes propres associées.

La démonstration de ce théorème nécessite le lemme, la proposition et le corollaire suivants :

Soit  $x = (x^0, x^1, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ , posons :

$$r^2 = \sum_{i=0}^n (x^i)^2, \quad r \frac{d}{dr} = \sum_{i=0}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad r dr = \sum_{i=0}^n x^i dx^i.$$

on définit alors l'opérateur  $e(rdr)$  par :

$$\begin{aligned} e(rdr) : \Omega(\mathbf{R}^{n+1}) &\longrightarrow \Omega(\mathbf{R}^{n+1}) \\ \tau &\longrightarrow e(rdr)\tau = r dr \wedge \tau. \end{aligned}$$

$i_{(r \frac{d}{dr})}$  désigne le produit intérieur de  $r \frac{d}{dr}$  sur  $\Omega(\mathbf{R}^{n+1})$ .

**Lemme 3.2.1** [IT78] Soit  $\tau \in \Omega^p(\mathbf{R}^{n+1})$ , alors :

- 1)  $i_{(r \frac{d}{dr})} * \tau = (-1)^p * e(rdr)\tau,$
- 2)  $* i_{(r \frac{d}{dr})} \tau = (-1)^{p+1} e(rdr) * \tau.$
- 3)  $e(rdr) \bar{d}\tau + \bar{d} e(rdr)\tau = 0,$
- 4)  $i_{(r \frac{d}{dr})} \bar{\delta}\tau + \bar{\delta} i_{(r \frac{d}{dr})} \tau = 0.$
- 5)  $i_{(r \frac{d}{dr})} \bar{d}\tau + \bar{d} i_{(r \frac{d}{dr})} \tau = L_{r(d/dr)} \tau.$
- 6)  $\bar{\delta} e(rdr)\tau + e(rdr) \bar{\delta}\tau = (-1)^{np+1} * L_{r(d/dr)} * \tau.$

où  $L_x$  est la dérivée de Lie.

**Preuve**

Puisque tous les opérateurs qui figurent dans le lemme 3.2.1 sont linéaires on fera nos démonstrations sur les éléments suivants :

$$\tau = dx^I := dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad , \quad r dr = dx^k \quad , \quad r \frac{d}{dr} = \partial^k := \frac{\partial}{\partial x^k}$$

avec  $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_p\}$  et  $I^c$  est le complémentaire de  $I$ .

Montrons 1) :

D'une part, pour  $k \notin I$  :

$$*e(rdr)\tau = *(dx^k \wedge dx^I) = (-1)^{p+1} sg(I, I^c) \widehat{dx^k} \wedge dx^{I^c},$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} i_{e^k} * \tau &= sg(I, I^c) i_{e^k} dx^{I^c} \\ &= sg(I, I^c) (-1) dx^k (e^k) \cdot dx^{I^c - \{k\}} \\ &= -sg(I, I^c) dx^{I^c - \{k\}}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Montrons 2) :

D'une part, pour tout  $k \in I$  :

$$\begin{aligned} e(rdr) * \tau &= e(rdr) (*dx^I) = dx^k \wedge (sg(I, I^c) dx^{I^c}) \\ &= sg(I, I^c) dx^k \wedge dx^{I^c}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

d'autre part :

$$*i_{(r \frac{d}{dr})} \tau = *i_{(\partial^k)} (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}),$$

mais  $i_{(\partial^k)} dx^j = \delta_k^j$ , (voir page 45 [Kni95]) donc :

$$\begin{aligned} *i_{(r \frac{d}{dr})} \tau &= * \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge i_{(\partial^k)} dx^{i_j} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= (-1)^{k+1} * [dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}] \\ &= (-1)^{k+1} (-1)^{p-k} sg(I, I^c) dx^k \wedge dx^{I^c} \\ &= (-1)^{p+1} sg(I, I^c) dx^k \wedge dx^{I^c}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

d'où le résultat.

Montrons 3) Le résultat est direct :

$$\bar{d} e(rdr)\tau = \bar{d}(dx^k \wedge \tau) = \bar{d} dx^k \wedge \tau - dx^k \wedge \bar{d}\tau = -e(rdr)\bar{d}\tau.$$

Montrons 4)

D'une part :

$$\begin{aligned} * e(rdr) \underbrace{\bar{d} * \tau}_{\substack{n+1-p \\ n-p}} &= (-1)^{n-p} i_{\left(\frac{d}{dr}\right)} * \bar{d} * \tau \\ &= (-1)^{n-p} (-1)^{(n+1)(p+1)+1} i_{\left(\frac{d}{dr}\right)} \bar{\delta} \tau \\ &= (-1)^{np} i_{\left(\frac{d}{dr}\right)} \bar{\delta} \tau, \end{aligned} \tag{3.8}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} * \bar{d} e(rdr) * \tau &= (-1)^{p+1} * \bar{d} * \underbrace{i_{\left(\frac{d}{dr}\right)} \tau}_{p-1} \\ &= (-1)^{p+1} (-1)^{(n+1)(p-1+1)+1} \bar{\delta} i_{\left(\frac{d}{dr}\right)} \tau \\ &= (-1)^{np} \bar{\delta} i_{\left(\frac{d}{dr}\right)} \tau. \end{aligned} \tag{3.9}$$

de (3.8) , (3.9) et 3) on obtient :

$$\begin{aligned} (-1)^{np} [\bar{\delta} i_{\left(\frac{d}{dr}\right)} \tau + i_{\left(\frac{d}{dr}\right)} \bar{\delta} \tau] &= * \bar{d} e(rdr) * \tau + * e(rdr) \bar{d} * \tau \\ &= * [\bar{d} e(rdr) * \tau + e(rdr) \bar{d} * \tau] = 0. \end{aligned}$$

d'où le résultat

Montrons 5)

On obtient le résultat directement grâce à la propriété suivante de la dérivée de Lie, pour tout champ de vecteurs  $X$  :

$$L_X = i_X \circ \bar{d} + \bar{d} \circ i_X.$$

(voir [GHL05] page 42)

Montrons 6) :

D'une part, du 1) :

$$\begin{aligned} * \bar{d} i_{\left(\frac{d}{dr}\right)} * \tau &= * \bar{d} (-1)^p * e(rdr) \tau \\ &= (-1)^p * \bar{d} * \underbrace{e(rdr) \tau}_{p+1} \\ &= (-1)^p (-1)^{(n+1)(p+2)+1} \bar{\delta} \tau \\ &= (-1)^{pn+1} \bar{\delta} \tau. \end{aligned} \tag{3.10}$$

d'autre part, du 2) :

$$\begin{aligned}
* i_{\left(r \frac{d}{dr}\right)} \underbrace{\bar{d} * \tau}_{\substack{n+1-p \\ n+2-p}} &= (-1)^{n+2-p+1} e(rdr) * \bar{d} * \tau \\
&= (-1)^{n-p+1} (-1)^{(n+1)(p+1)+1} e(rdr) \bar{\delta} \tau \\
&= (-1)^{np+1} e(rdr) \bar{\delta} \tau.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

de (3.10), (3.11) et 5) on obtient :

$$\begin{aligned}
*L_{r(d/dr)} * \tau &= * i_{\left(r \frac{d}{dr}\right)} \bar{d} * \tau + * \bar{d} i_{\left(r \frac{d}{dr}\right)} * \tau \\
&= (-1)^{pn+1} \bar{\delta} \tau + (-1)^{np+1} e(rdr) \bar{\delta} \tau \\
&= (-1)^{pn+1} (\bar{\delta} \tau + e(rdr) \bar{\delta} \tau).
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

**Proposition 3.2.3** [IT78]

Soit  $\tau \in \mathbb{F}_k^p$ , alors :

$$\bar{d} i\left(r \frac{d}{dr}\right) \tau + i\left(r \frac{d}{dr}\right) \bar{d} \tau = (k+p) \tau, \tag{3.12}$$

$$\bar{\delta} e(rdr) \tau + e(rdr) \bar{\delta} \tau = -(n+1-p+k) \tau. \tag{3.13}$$

**Preuve**

Pour tout champ de vecteur  $X = \sum_{i=0}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , et pour toute p-forme

$$\tau = \sum_{j_1 < \dots < j_p}$$

$$L_X \tau = \sum_{j_1 < \dots < j_p} (L_X \tau)_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p},$$

avec

$$(L_X \tau)_{j_1 \dots j_p} = \sum_{l=0}^n \left\{ X^l \frac{\partial}{\partial x^l} \tau_{j_1 \dots j_p} + \sum_{r=1}^p \tau_{j_1 \dots j_{r-1} l j_{r+1} \dots j_p} \frac{\partial X^l}{\partial x^{j_r}} \right\}.$$

(  $L_X$  désigne la dérivée de Lie, [MAS03] page 30),  
où  $\tau_{i_1 \dots i_p}$  sont des polynômes homogènes de degré  $k$ .

Montrons (3.12), on a :

$$(L_{r \frac{d}{dr}} \tau)_{i_1 \dots i_p} = \underbrace{\sum_{l=0}^n x^l \frac{\partial}{\partial x^l} \tau_{i_1 \dots i_p}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{l=0}^n \sum_{r=1}^p \tau_{i_1 \dots i_{r-1} l i_{r+1} \dots i_p} \frac{\partial x^l}{\partial x^{i_r}}}_{(2)},$$

alors (1) est exactement  $k\tau_{i_1 \dots i_p}$ ,

mais  $\frac{\partial x^l}{\partial x^{i_r}} = \delta_{i_r}^l$  donc (2) est égale à  $p\tau_{i_1 \dots i_p}$ , alors :

$$(L_{r \frac{d}{dr}} \tau)_{i_1 \dots i_p} = (p + k)\tau_{i_1 \dots i_p},$$

d'où

$$\bar{d}i(r \frac{d}{dr})\tau + i(r \frac{d}{dr})\bar{d}\tau = (k + p)\tau.$$

Montrons (3.13), par le résultat (3.12) :

$$\begin{aligned} (-1)^{np+1} * L_{r \frac{d}{dr}} \underbrace{* \tau}_{n+1-p} &= (-1)^{np+1} * (k + n + 1 - p) * \tau \\ &= (-1)^{np+1} (-1)^{p(n+1-p)} (k + n + 1 - p) \tau \\ &= (-1)^{p^2 - p + 1} (k + n + 1 - p) \tau \\ &= -(k + n + 1 - p) \tau, \end{aligned}$$

d'où

$$\bar{\delta}e(rdr)\tau + e(rdr)\bar{\delta}\tau = -(n + 1 - p + k)\tau.$$

□

**Corollaire 3.2.1** [IT78]

$$\mathbb{P}_k^p = (\ker \bar{d} \cap \mathbb{P}_k^p) \oplus (\ker i(r \frac{d}{dr}) \cap \mathbb{P}_k^p) \quad (k + p \neq 0), \quad (3.14)$$

$$\mathbb{P}_k^p = (\ker \bar{\delta} \cap \mathbb{P}_k^p) \oplus (\ker e(rdr) \cap \mathbb{P}_k^p) \quad (n + 1 - p + k \neq 0). \quad (3.15)$$

**Définition 3.2.2** .

i).  $\mathbb{H}_k^p$  désigne le sous-espace de  $\mathbb{P}_k^p$  constitué des  $p$ -formes harmoniques et cofermées .  
ie :

$$\tau \in \mathbb{H}_k^p : \Leftrightarrow \bar{\Delta}\tau = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\delta}\tau = 0.$$

ii).  $V_{\lambda_k}^p$  désigne le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_k$  dans  $\Omega^p(\mathbf{S}^n)$ .

**Proposition 3.2.4** [IT78]

Avec les notations précédentes on a :

$$\mathbb{H}_k^p \cap \ker \bar{d} \simeq V_{\lambda_k}^p \cap \ker d. \quad (3.16)$$

(ie : les deux espaces vectoriels sont isomorphes).

**Preuve du théorème 3.2.1**

La proposition 3.2.2 donne :

$$\Delta(\tau|_m(\alpha_1, \dots, \alpha_p)) = (k+p)(n-p+k+1)\tau|_m(\alpha_1, \dots, \alpha_p),$$

en tout point  $m \in \mathbf{S}^n$ , et pour tout  $\tau$  p-forme fermée homogène et harmonique et grâce à l'isomorphisme (3.16), on déduit que les seules valeurs propres sont :

$$\lambda_k = (k+p)(n-p+k+1).$$

□

### 3.3 Multiplicités des valeurs propres

**Lemme 3.3.1** [IK79] Avec les notations précédentes et les conditions du théorème 3.2.1 on a la décomposition en somme directe suivante :

$$\mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\delta} = (r^2\mathbb{P}_{k-2}^p \cap \ker \bar{\delta}) \oplus \mathbb{H}_k^p.$$

**Preuve :** Il est clair que :

$$(r^2\mathbb{P}_{k-2}^p \cap \ker \bar{\delta}) \oplus \mathbb{H}_k^p \subset \mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\delta}.$$

montrons maintenant que :

$$\mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\delta} \subset (r^2\mathbb{P}_{k-2}^p \cap \ker \bar{\delta}) \oplus \mathbb{H}_k^p.$$

comme  $\bar{\Delta}\bar{\delta} = \bar{\delta}\bar{\Delta}$  alors :

$$\bar{\Delta} : \mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\delta} \longrightarrow \mathbb{P}_{k-2}^p \cap \ker \bar{\delta},$$

d'où

$$(\mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\delta})|_{\ker \bar{\Delta}} \simeq \mathbb{P}_{k-2}^p \cap \ker \bar{\delta},$$

or :  $\ker \bar{\Delta} \subset \mathbb{H}_k^p$ , donc :

$$\dim \mathbb{H}_k^p + \dim(\mathbb{P}_{k-2}^p \cap \ker \bar{\delta}) \geq \dim(\mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\delta}).$$

de la décomposition (3.15) du corollaire 3.2.1 on obtient :

$$\mathbb{P}_k^p = (\ker \bar{\delta} \cap \mathbb{P}_k^p) \oplus (\ker e(rdr) \cap \mathbb{P}_k^p) \quad (n+1-p+k \neq 0),$$

d'où :

$$\dim \mathbb{P}_k^p = \dim(\mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\delta}) + \dim(\mathbb{P}_k^p \cap \ker e(rdr)).$$

alors :

$$\begin{aligned} \dim(r^2\mathbb{P}_{k-2}^p \cap \ker \bar{\delta}) &= \dim r^2\mathbb{P}_{k-2}^p - \dim(\ker e(rdr) \cap r^2\mathbb{P}_{k-2}^p) \\ &= \dim \mathbb{P}_{k-2}^p - \dim(\ker e(rdr) \cap \mathbb{P}_{k-2}^p) \\ &= \dim(\mathbb{P}_{k-2}^p \cap \ker \bar{\delta}). \end{aligned}$$

donc :

$$\dim \mathbb{H}_k^p + \dim(r^2\mathbb{P}_{k-2}^p \cap \ker \bar{\delta}) \geq \dim(\mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\delta}).$$

□

**Corollaire 3.3.1** [IK79] Avec les notations précédentes on a :

$$\mathbb{P}_k^p = \mathbb{H}_k^p \oplus (r^2\mathbb{P}_{k-2}^p \cap \ker \bar{\delta}) \oplus (r^2\mathbb{P}_{k-2}^p \cap \ker e(rdr)) \oplus (\mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\Delta} \cap \ker e(rdr)).$$

**Preuve**

De la décomposition (3.15) du corollaire 3.2.1 :

$$\mathbb{P}_k^p = (\ker \bar{\delta} \cap \mathbb{P}_k^p) \oplus (\ker e(rdr) \cap \mathbb{P}_k^p) \quad (n+1-p+k \neq 0)$$

et de la décomposition (voir [IK79] page 142)

$$\mathbb{P}_k^p = r^2\mathbb{P}_{k-2}^p \oplus (\mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\Delta}),$$

et du lemme 3.3.1, on obtient :

$$\mathbb{P}_k^p = \mathbb{H}_k^p \oplus (r^2\mathbb{P}_{k-2}^p \cap \ker \bar{\delta}) \oplus (r^2\mathbb{P}_{k-2}^p \cap \ker e(rdr)) \oplus (\mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\Delta} \cap \ker e(rdr)).$$

□

**Proposition 3.3.1** [IK79].

Les deux suites suivantes sont exactes :

$$0 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{P}_k^p \xrightarrow{\bar{\delta}} \mathbb{P}_{p-1}^{p-1} \xrightarrow{\bar{\delta}} \mathbb{P}_{p-2}^{p-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow 0. \quad (3.17)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{H}_{p+k}^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{H}_{k+1}^{p-1} \xrightarrow{\bar{d}} \mathbb{H}_k^p \xrightarrow{\bar{d}} \mathbb{H}_{k-1}^{p+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{H}_0^{p+k} \longrightarrow 0. \quad (3.18)$$

**Preuve :**

Montrons (3.17) :

On a  $\bar{\delta} \circ \bar{\delta} = 0$ , danc  $Im \bar{\delta} \subset \ker \bar{\delta}$ .

dans l'autre sens, par la formule (3.13) de la proposition 3.2.3 :

$$\bar{\delta}e(rdr)\tau + e(rdr)\bar{\delta}\tau = -(n+k-p+1)\tau.$$

si  $\tau \in \mathbb{P}_k^p$ ,  $\bar{\delta}\tau = 0$ , et  $(n+k-p+1) \neq 0$  alors :

$$\tau = \bar{\delta} \frac{e(rdr)\tau}{-(n+k-p+1)}.$$

or :

$$\frac{e(rdr)\tau}{-(n+k-p+1)} \in \mathbb{P}_{k+1}^{p+1},$$

donc  $\bar{\delta}\tau \in \mathbb{P}_k^p$ , d'où  $\ker \bar{\delta} \subset Im \bar{\delta}$ .

Montrons (3.18) :

soit  $\tau \in \mathbb{H}_k^p$ , alors  $\bar{d}\tau \in \mathbb{P}_{k-1}^{p+1}$  car  $\bar{d} \circ \bar{d} = 0$ .

mais  $\bar{\Delta}\bar{d}\tau = \bar{d}\bar{\Delta}\tau = 0$ , donc  $\bar{d}\tau \in \mathbb{H}_{k-1}^{p+1}$ .

dans l'autre sens, de la formule (3.12) de la proposition 3.2.3 :

$$\bar{d}i\left(r\frac{d}{dr}\right)\tau + i\left(r\frac{d}{dr}\right)\bar{d}\tau = (k+p)\tau.$$

soit  $\tau \in \mathbb{H}_k^p$ , avec  $\tau \in \ker \bar{d}$  et  $k+p \neq 0$  alors :

$$\tau = \frac{\bar{d}i\left(r\frac{d}{dr}\right)\tau}{k+p}.$$

or

$$i\left(r\frac{d}{dr}\right)\tau \in \mathbb{H}_{k+1}^{p-1},$$

donc  $\tau \in Im \bar{d}$ .

□

**Corollaire 3.3.2** [IK79] Avec les notations précédentes on a :

$$\dim(\mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\delta}) = \sum_{i=0}^{Min(p,k)} (-1)^i \dim \mathbb{P}_{k-i}^{p-i}.$$

**Preuve :**

De la suite exacte (3.17) de la proposition 3.3.1 on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{k|\ker \bar{\delta}^p}^p &\simeq \text{Im } \bar{\delta}^p = \ker \bar{\delta}^{p-1}, & \mathbb{P}_{k-1|\ker \bar{\delta}^{p-1}}^{p-1} &\simeq \text{Im } \bar{\delta}^{p-1} = \ker \bar{\delta}^{p-2}, \\ \mathbb{P}_{k-2|\ker \bar{\delta}^{p-2}}^{p-2} &\simeq \text{Im } \bar{\delta}^{p-2} = \ker \bar{\delta}^{p-3}, & \mathbb{P}_{k-3|\ker \bar{\delta}^{p-3}}^{p-3} &\simeq \text{Im } \bar{\delta}^{p-3} = \ker \bar{\delta}^{p-4}, \dots \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{P}_k^p - \dim \ker \bar{\delta}^p &= \dim \ker \bar{\delta}^{p-1}, \\ \dim \mathbb{P}_{k-1}^{p-1} - \dim \ker \bar{\delta}^{p-1} &= \dim \ker \bar{\delta}^{p-2}, \\ \dim \mathbb{P}_{k-2}^{p-2} - \dim \ker \bar{\delta}^{p-2} &= \dim \ker \bar{\delta}^{p-3}, \\ \dim \mathbb{P}_{k-3}^{p-3} - \dim \ker \bar{\delta}^{p-3} &= \dim \ker \bar{\delta}^{p-4}, \dots \end{aligned}$$

d'où

$$\dim \ker \bar{\delta}^p = \dim \mathbb{P}_k^p - \dim \ker \bar{\delta}^{p-1} + \dim \ker \bar{\delta}^{p-2} - \dim \ker \bar{\delta}^{p-3} + \dim \ker \bar{\delta}^{p-4} - \dots$$

mais  $\ker \bar{\delta}^p = \mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\delta}^p$  d'où.

$$\dim \mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\delta}^p = \sum_{i=0}^{\text{Min}(p,k)} (-1)^i \dim \mathbb{P}_{k-i}^{p-i}.$$

□

**Corollaire 3.3.3** [IK79] *Avec les notations précédentes on a la formule suivante :*

$$\dim(\mathbb{H}_k^p \cap \ker \bar{d}) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \dim \mathbb{H}_{k+j}^{p-j} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \left( \sum_{i=0}^{\text{Min}(p-j, k+j)} (-1)^i (\dim \mathbb{P}_{k+j-i}^{p-j-i} - \dim \mathbb{P}_{k+j-i-2}^{p-j-i}) \right) \\ &= \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} (\dim \mathbb{P}_{k+j}^{p-j} - \dim \mathbb{P}_{k-j}^{p-j}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

**Preuve :**

De la suite exacte de la proposition 3.3.1 :

$$\dots \longrightarrow \mathbb{H}_{k+5}^{p-5} \xrightarrow{\bar{d}^5} \mathbb{H}_{k+4}^{p-4} \xrightarrow{\bar{d}^4} \mathbb{H}_{k+3}^{p-3} \xrightarrow{\bar{d}^3} \mathbb{H}_{k+2}^{p-2} \xrightarrow{\bar{d}^2} \mathbb{H}_{k+1}^{p-1} \xrightarrow{\bar{d}^1} \mathbb{H}_k^p \xrightarrow{\bar{d}} \mathbb{H}_{k-1}^{p+1} \longrightarrow \dots$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_k^p|_{\ker \bar{d}} &\simeq \text{Im } \bar{d}, & \mathbb{H}_{k+1}^{p-1}|_{\ker \bar{d}^1} &\simeq \text{Im } \bar{d}^1 = \ker \bar{d}, \\
\mathbb{H}_{k+2}^{p-2}|_{\ker \bar{d}^2} &\simeq \text{Im } \bar{d}^2 = \ker \bar{d}^1, & \mathbb{H}_{k+3}^{p-3}|_{\ker \bar{d}^3} &\simeq \text{Im } \bar{d}^3 = \ker \bar{d}^2, \\
\mathbb{H}_{k+4}^{p-4}|_{\ker \bar{d}^4} &\simeq \text{Im } \bar{d}^4 = \ker \bar{d}^3, & \mathbb{H}_{k+5}^{p-5}|_{\ker \bar{d}^5} &\simeq \text{Im } \bar{d}^5 = \ker \bar{d}^4, \dots
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\dim \mathbb{H}_{k+1}^{p-1} - \dim \ker \bar{d}^1 &= \dim \ker \bar{d}, \\
\dim \mathbb{H}_{k+2}^{p-2} - \dim \ker \bar{d}^2 &= \dim \ker \bar{d}^1, \\
\dim \mathbb{H}_{k+3}^{p-3} - \dim \ker \bar{d}^3 &= \dim \ker \bar{d}^2, \\
\dim \mathbb{H}_{k+4}^{p-4} - \dim \ker \bar{d}^4 &= \dim \ker \bar{d}^3, \\
\dim \mathbb{H}_{k+5}^{p-5} - \dim \ker \bar{d}^5 &= \dim \ker \bar{d}^4, \dots
\end{aligned}$$

d'où :

$$\dim \ker \bar{d} = \dim \mathbb{H}_{k+1}^{p-1} - \dim \mathbb{H}_{k+2}^{p-2} + \dim \mathbb{H}_{k+3}^{p-3} - \dim \mathbb{H}_{k+4}^{p-4} + \dim \mathbb{H}_{k+5}^{p-5} - \dim \ker \bar{d}^5.$$

mais  $\ker \bar{d} = \ker \bar{d} \cap \mathbb{H}_k^p$ , donc on obtient la formule (3.19) :

$$\dim(\mathbb{H}_k^p \cap \ker \bar{d}) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \dim \mathbb{H}_{k+j}^{p-j}.$$

du lemme 3.3.1 on tire :

$$\mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\delta} = (r^2 \mathbb{P}_{k-2}^p \cap \ker \bar{\delta}) \oplus \mathbb{H}_k^p.$$

donc :

$$\dim(\mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\delta}) = \dim(r^2 \mathbb{P}_{k-2}^p \cap \ker \bar{\delta}) + \dim \mathbb{H}_k^p,$$

d'où :

$$\dim \mathbb{H}_k^p = \dim(\mathbb{P}_k^p \cap \ker \bar{\delta}) - \dim(\mathbb{P}_{k-2}^p \cap \ker \bar{\delta}).$$

en utilisant le corollaire 3.3.2 on obtient :

$$\begin{aligned}
\dim \mathbb{H}_k^p &= \sum_{i=0}^{\text{Min}(p,k)} (-1)^i \dim \mathbb{P}_{k-i}^{p-i} - \sum_{i=0}^{\text{Min}(p,k-2)} (-1)^i \dim \mathbb{P}_{k-2-i}^{p-i} \\
&= \sum_{i=0}^{\text{Min}(p,k)} (-1)^i (\dim \mathbb{P}_{k-i}^{p-i} - \dim \mathbb{P}_{k-2-i}^{p-i}). \tag{3.21}
\end{aligned}$$

de la formule (3.19) on tire :

$$\dim(\mathbb{H}_k^p \cap \ker \bar{d}) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \left( \sum_{i=0}^{\text{Min}(p-j, k+j)} (-1)^i (\dim \mathbb{P}_{k+j-i}^{p-j-i} - \dim \mathbb{P}_{k+j-2-i}^{p-j-i}) \right).$$

finalement

$$\dim(\mathbb{H}_k^p \cap \ker \bar{d}) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} (\dim \mathbb{P}_{k+i}^{p-i} - \dim \mathbb{P}_{k-i}^{p-i}).$$

□

**Proposition 3.3.2** [IK79] *Avec les notations précédentes on a les formules suivantes :*

$$\dim \mathbb{H}_k^p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \left\{ \binom{n+k-i}{k-i} - \binom{n+k-2-i}{k-2-i} \right\} \cdot \binom{n+1}{p-i}. \quad (3.22)$$

$$\dim(\mathbb{H}_k^p \cap \ker \bar{d}) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \left\{ \binom{n+k+i}{k+i} - \binom{n+k-i}{k-i} \right\} \cdot \binom{n+1}{p-i}. \quad (3.23)$$

**Preuve :**

Montrons (3.22) de (3.21) et (3.2) on obtient

$$\dim \mathbb{P}_k^p = \binom{n+k}{k} \binom{n+1}{p}.$$

On a :

$$\dim \mathbb{H}_k^p = \sum_{i=0}^{\text{Min}(p,k)} (-1)^i \left\{ \binom{n+k-i}{k-i} \binom{n+1}{p-i} - \binom{n+k-2-i}{k-2-i} \binom{n+1}{p-i} \right\}.$$

d'où le résultat :

$$\dim \mathbb{H}_k^p = \sum_{i=0}^{\text{Min}(p,k)} (-1)^i \left\{ \binom{n+k-i}{k-i} - \binom{n+k-2-i}{k-2-i} \right\} \binom{n+1}{p-i}.$$

montrons (3.23)

de (3.20) du corollaire 3.3.3 et (3.2) :

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{H}_k^p \cap \ker \bar{d}) &= \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} (\dim \mathbb{P}_{k+j}^{p-j} - \dim \mathbb{P}_{k-j}^{p-j}) \\ &= \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \left\{ \binom{n+k+j}{k+j} \binom{n+1}{p-j} - \binom{n+k-j}{k-j} \binom{n+1}{p-j} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \left\{ \binom{n+k+j}{k+j} - \binom{n+k-j}{k-j} \right\} \binom{n+1}{p-j}. \end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

**Lemme 3.3.2** [IK79] *Pour tous entiers  $n, p$  et  $k$  on a les identités suivantes :*

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{n+k-i}{k-i} \binom{n+1}{p-i} = \frac{(n+k+1)!}{p!k!(n-p)!(n+k-p+1)}. \quad (3.24)$$

$$\sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \binom{n+k+i}{k+i} \binom{n+1}{p-i} = \frac{(n+k+1)!}{(p-1)!k!(n-p+1)!(p+k)}. \quad (3.25)$$

**Corollaire 3.3.4** [IK79] *pour tous entiers  $p$  et  $k$*

$$\dim \mathbb{H}_k^p = \frac{(n+k-1)!(n^3 + (3k-p)n^2 + (2k^2 - (2p-1)k - p-1)n - 2pk)}{p!k!(n-p)!(n+k-p+1)(n+k-p-1)}. \quad (3.26)$$

$$\dim(\mathbb{H}_k^p \cap \ker \bar{d}) = \frac{(n+k)!(n+2k+1)}{(p-1)!k!(n-p)!(n+k-p+1)(k+p)}. \quad (3.27)$$

**Preuve :**

On remplace la formule (3.24) du lemme 3.3.2, dans la formule (3.22) de la proposition 3.3.2, on retrouve le (3.26) :

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{H}_k^p &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{n+k-i}{k-i} \binom{n+1}{p-i} - \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{n+k-2-i}{k-2-i} \binom{n+1}{p-i} \\ &= \frac{(n+k+1)!}{p!k!(n-p)!(n+k-p+1)} - \frac{(n+k-2+1)!}{p!(k-2)!(n-p)!(n+k-2-p+1)} \\ &= \frac{(n+k+1)!}{p!k!(n-p)!(n+k-p+1)} - \frac{(n+k-1)!k(k-1)}{p!k!(n-p)!(n+k-p-1)} \\ &= \frac{(n+k-1)![(n+k-p-1)(n+p+1)(n+k) - (n+k-p+1)k(k-1)]}{p!k!(n-p)!(n+k-p+1)(n+k-p-1)} \\ &= \frac{(n+k-1)!(n^3 + (3k-p)n^2 + (2k^2 - (2p-1)k - p-1)n - 2pk)}{p!k!(n-p)!(n+k-p+1)(n+k-p-1)}. \end{aligned}$$

pour (3.27), on remplace les formules (3.24) et (3.25) du lemme 3.3.2, dans la formule (3.23) de la proposition 3.3.2, on trouve :

$$\begin{aligned}
\dim(\mathbb{H}_k^p \cap \ker \bar{d}) &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \left\{ \binom{n+k+i}{k+i} - \binom{n+k-i}{k-i} \right\} \cdot \binom{n+1}{p-i} \\
&= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \binom{n+k+i}{k+i} \binom{n+1}{p-i} - \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \binom{n+k-i}{k-i} \binom{n+1}{p-i} \\
&= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \binom{n+k+i}{k+i} \binom{n+1}{p-i} + \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{n+k-i}{k-i} \binom{n+1}{p-i} \\
&\quad - \binom{n+k-0}{k-0} \binom{n+1}{p-0} \\
&= \frac{(n+k+1)!}{(p-1)!k!(n-p+1)!(p+k)} + \frac{(n+k+1)!}{p!k!(n-p)!(n+k-p+1)} \\
&\quad - \frac{(n+k)!}{k!(n+k-k)!} \cdot \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} \\
&= \frac{(n+k+1)!p(n+k-p+1) + (n+k+1)!(n-p+1)(p+k)}{k!p!(n-p+1)!(n+k-p+1)} \\
&\quad - \frac{(n+k)!(n+1)(p+k)(n+k-p+1)}{k!p!(n-p+1)!(n+k-p+1)} \\
&= \frac{(n+k)!(n+2k+1)}{(p-1)!k!(n-p)!(n+k-p+1)(k+p)}.
\end{aligned}$$

□

**Proposition 3.3.3** [IK79].

On a l'isomorphisme suivant :

$$d : V_{\lambda_k}^p \cap \ker \delta \xrightarrow{\cong} V_{\lambda_k}^{p+1} \cap \ker d. \quad (3.28)$$

**Preuve :**

De la proposition 2.4.2 on a :

$$V_\lambda = V_\lambda \cap \ker \delta \oplus V_\lambda \cap \ker d.$$

donc

$$dV_\lambda = d(V_\lambda \cap \ker \delta) \oplus d(V_\lambda \cap \ker d) = d(V_\lambda \cap \ker \delta).$$

soit  $\tau \in V_\lambda^p$  donc  $\Delta\tau = \lambda\tau$ .

d'où

$$d\Delta\tau = d\lambda\tau \Rightarrow d\Delta d\tau = \lambda d\tau \Rightarrow d\tau \in V_\lambda^{p+1}.$$

□

La valeur propre  ${}^{p+1}\lambda_{k'} = (k' + p + 1)(n - p + k')$  du laplacien  $\Delta$  dans  $\Omega^{p+1}(\mathbf{S}^n)$  est égale à la valeur propre  ${}^p\lambda_k = (k + p)(n - p + k + 1)$  si et seulement si  $n = 2p$ , dans ce cas  $k = k'$ .

De ce dernier résultat, la proposition 2.4.2, la proposition 3.3.3 et le corollaire 3.3.4 on établit le théorème suivant donné par Ichiro IWASAKI and Kiyoshi KATASE dans leur article [IK79] :

**Théorème 3.3.1** [IK79], [Bou07]

*Les valeurs propres du laplacien sur  $\Omega^p(\mathbf{S}^n)$ , ( $p \neq 0$ ) sont :*

$$\begin{aligned} {}^p\lambda_k &= (k + p)(n - p + k + 1) & k = 0, 1, 2, \dots, \\ {}^{p+1}\lambda'_k &= (k' + p + 1)(n - p + k') & k' = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

si  $n \neq 2p$ , la multiplicité de  ${}^p\lambda_k (\neq 0)$  est :

$$\frac{(n + k)!(n + 2k + 1)}{(p - 1)!k!(n - p)!(n + k - p + 1)(k + p)}.$$

et la multiplicité de  ${}^{p+1}\lambda_k (\neq 0)$  est :

$$\frac{(n + k)!(n + 2k + 1)}{p!k!(n - p - 1)!(n + k - p)(k + p + 1)}.$$

si  $n = 2p$ , la multiplicité de  ${}^p\lambda_k = {}^{p+1}\lambda_k$  est :

$$\frac{2(2p + k)!(2p + 2k + 1)}{p!(p - 1)!k!(k + p)(k + p)(k + p + 1)}.$$

□

# Bibliographie

- [Ber73] M. Berger. Sur les premières valeurs propres des variétés riemanniennes. *Compositio Mathematica*, 26 :129–149, 1973.
- [BGM71] M. Berger, P. Gauduchon, and E. Mazet. *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*. Springer-Verlag, 1971.
- [Bou07] M. Boucetta. Spectra and symmetric eigentensors of the lichnerowicz laplacian on  $\mathbf{S}^n$ . *arXiv*, 0704.136v1 :1–22, 11 Apr 2007.
- [BUS04] Peter BUSER. *Géométrie Riemannienne*. <http://sciences.ows.ch/mathematiques/GeoRiemannienne.pdf>, hiver 2003/2004.
- [BZ92] Yu. D. Burago and VI A. Zalgaller. *Geometry III - Theory of Surfaces*. Springer, 1992.
- [CAR93] Manfredo Perdigao DO CARMO. *Riemannian Geometry*. Birkhauser, 1993.
- [dC76] Manfredo Perdigao do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc, 1976.
- [Dom06] Joaquim M Domingos. *Geometrical Properties of Vectors and Covectors*. World Scientific, 2006.
- [Fec06] Marian Fecko. *Differential Geometry And Lie Groups For Physics*. Cambridge University Press, 2006.
- [GHL05] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, 2005.
- [GM75] S. Gallot and D. Meyer. Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne. *journal de mathématique pures et appliquées*, 54 :259–284, 1975.
- [GNT98] D. Gilbarg, S. Neil, and S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equation Of Second Order*. Springer, 1998.
- [Gri76] H.B. Griffiths. *Surfaces*. Cambridge University Press, 1976.

- [Gud07] S. Gudmundsson. *An Introduction to Riemannian Geometry (cours internet)*. <http://www.matematik.lu.se/matematiklu/personal/sigma/index.html>, 2007.
- [Hel78] Sigurdur Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Academic Press, Inc, 1978.
- [IK79] Ichiro IWASAKI and Kiyoshi KATASE. On the spectra of laplace operator on  $\Lambda^*(S^n)$ . *Proc. Japan Acad*, 55 :141–145, 1979.
- [IT78] Akira IKIDA and Yoshiharu TANIGUCHI. Spectra and eigenforms of the laplacien on  $S^n$  and  $P^n(C)$ . *Osaka J.Math.*, 15 :515–546, 1978.
- [KN63] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundation of Differential Geometry*, volume 1. Interscience Publishers, 1963.
- [Kni95] O. Knill. *Introduction to Geometry and geometric analysis*. <http://www.math.harvard.edu/knill/teach/index.html>, 1995.
- [Küh06] Wolfgang Kühnel. *Differential Geometry Curves Surfaces Manifolds*. American Mathematical Society, 2006.
- [Li80] Peter Li. On the sobolev and the p-spectrum of a compact riemannian manifold. *Annales Scientifiques de L'E.N.S*, 13 :451–468, 1980.
- [MAS03] Thierry MASSON. *Géométrie Différentielle, Groupes et Algèbres de Lie, Fibrés et Connexions*. [http://www.th.u-psud.fr/page\\_perso/Masson/index.php](http://www.th.u-psud.fr/page_perso/Masson/index.php), 2003.
- [M.B86] William M.BOUTHBY. *An Introduction To Differentiable Manifolds And Riemannian Geometry*. Acadimec Press, INC, 1986.
- [Mor93] Frank Morgan. *Riemannian Geometry - A Beginner's Guide*. Jones and Bartlett Publishers, 1993.
- [Mor00] Shigeyuki Morita. *Geometry of Differential Forms*. American Mathematical Society, 2000.
- [Nic96] Liviu I. Nicolaescu. *Lectures on the Geometry of Manifolds*. Wold Scientific, 1996.
- [Oba62] M. Obata. Certain conditions for a riemannian manifold to be isometric with a sphere. *J.Math.Soc.Japan*, 14 :333–340, 1962.
- [O'N66] Barrett O'Neill. *Elementary Differential Geometry*. Academic Press, Inc., 1966.
- [Pet06] Peter Petersen. *Riemannian Geometry*, volume 171. Springer, graduate texts in mathematics edition, 2006.

- [Pre01] Andrew Pressley. *Elementary Differential Geometry*. Springer, 2001.
- [Tal01] Yves Talpaert. *Differential Geometry With Applications To Mechanics And Physics*. Marcel Dekker, Inc, 2001.
- [WAR83] Frank WARNER. *Fondations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer, 1983.