

N° d'ordre : **32/2017-C/MT**

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat 3^{ème} cycle (LMD)

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Équations aux Dérivées Partielles et Applications

Par :

HAMADOUCHE Taklit

SUJET

Comportement asymptotique des solutions de quelques systèmes hyperboliques élastiques et thermoélastiques de type Bresse

Soutenue publiquement le **23 Mai 2017**, devant le jury composé de

M. TENIOU DJAMEL EDDINE	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Président
M. KHEMMOUDJ AMMAR	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Directeur de thèse
M. MOULAY MOHAMED SAID	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Examineur
M. BENAÏSSA ABBES	Professeur	à l'Université de Sidi Bel Abbes	Examineur
M. HAKEM ALI	Professeur	à l'Université de Sidi Bel Abbes	Examineur

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse le Professeur **A. Khemmoudj**. Je le remercie pour sa disponibilité, sa patience et sa gentillesse ainsi que pour la confiance qu'il m'a prodiguée durant la réalisation de cette thèse.

Je remercie le Professeur **D. E. Teniou** pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également les Professeurs **M.S. Moulay**, **A. Benaïssa** et **A. Hakem**, d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury.

Je tiens à remercier ma famille : mes parents, mes soeurs et mes frères, pour leur amour et leur soutien sans faille. Je les remercie de m'avoir supportée et encouragée depuis le début. Je n'aurai jamais pu faire cette thèse sans eux.

Enfin, toute personne ayant aidé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse est vivement remerciée.

Résumé

Dans cette thèse nous étudions l'existence globale, la stabilité et le taux de décroissance des solutions de quelques systèmes hyperboliques élastiques et thermoélastiques de type Bresse. Le contenu de la thèse est divisé en trois parties.

La première partie est consacrée à l'étude de la stabilisation du système de Bresse avec conditions aux limites dynamiques. On présente d'abord le résultat d'existence et d'unicité de la solution globale. Ensuite, nous montrons que l'énergie de la solution associée au système décroît exponentiellement vers zéro quand t tend vers l'infini.

Dans la deuxième partie, nous considérons le problème de Cauchy du système de Bresse en thermoélasticité non classique où la conduction thermique est décrite soit par la loi de Cattaneo, soit par la théorie de Green et Naghdi. Nous montrons que pour les deux systèmes, la solution décroît lentement avec une perte de régularité.

Dans la troisième partie, nous considérons un système de Bresse multidimensionnel non linéaire dans un domaine borné avec des termes mémoires sur une partie de la frontière. Nous établissons un résultat de décroissance explicite et général pour lequel les estimations de décroissance exponentielle et polynomiale ne sont que des cas particuliers.

Mots clés : Système de Bresse; Stabilisation exponentielle; Conditions aux limites dynamiques; Existence globale; Thermoélasticité de type III; Loi de Cattaneo; Contrôle frontière; Terme mémoire; Taux de décroissance.

Abstract

In this thesis we study the global existence, the stability and the decay rate of the solutions of some hyperbolic elastic and thermoelastic systems of Bresse type. The content of the thesis is divided into three parts.

The first part is devoted to the study of the stabilization of the Bresse system with dynamic boundary conditions. We first present the result of existence and uniqueness of a global solution. Then we show that the energy of the system decays exponentially to zero when t tends to infinity.

In the second part, we consider the Cauchy problem of the Bresse system in nonclassical thermoelasticity where thermal conduction is described either by the Cattaneo law or by the Green and Naghdi theory. We show that for the two systems, the solution has a slow decay rate and it is of regularity-loss type.

In the third part, we are concerned with a nonlinear multidimensional Bresse system, in a bounded domain, where the memory-type damping is acting on a portion of the boundary. We establish a general decay result, from which the usual exponential and polynomial decay rates are only special cases.

Keywords : Bresse system ; Exponential stabilization ; Dynamic boundary conditions ; Global existence ; Thermoelasticity of type III ; Cattaneo's law ; Boundary control ; Memory term ; Rate of decay.

Table des matières

1	Introduction générale	1
2	Préliminaires	15
2.1	Définition et propriétés élémentaires des espaces L^p	15
2.2	Notions de base sur les distributions	16
2.2.1	Fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact	17
2.2.2	Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$	17
2.3	Espaces de Sobolev	18
2.3.1	Espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$	18
2.3.2	Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	19
2.3.3	Espace de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$	20
2.4	Quelques inégalités utiles	21
2.5	Transformée de Fourier	22
2.5.1	La transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$	22
2.5.2	La transformée de Fourier inverse dans $L^1(\mathbb{R})$	23
2.5.3	La transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	23
2.5.4	La transformée de Fourier inverse dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	24
2.5.5	La transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$	25
2.5.6	Théorème de Plancherel-Parseval	25
2.5.7	Propriété de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$	25
2.6	Théorème de Lax-Milgram	26
2.7	Semi-groupes d'opérateurs linéaires	27

2.7.1	Quelques définitions	27
2.7.2	C_0 Semi-groupe généré par un opérateur dissipatif	28
3	Système de Bresse avec conditions aux limites dynamiques	30
3.1	Introduction	30
3.2	Formulation du problème	31
3.3	Résultat principal	41
4	Thermoélasticité	53
4.1	Introduction	53
4.2	Thermoélasticité classique	54
4.2.1	Dérivation des équations	54
4.3	Thermoélasticité non classique	60
5	Stabilisation du système de Bresse en thermoélasticité non-classique	64
5.1	Introduction	64
5.2	Modèle de Bresse-Cattaneo	68
5.2.1	Méthode de l'énergie dans l'espace de Fourier	68
5.2.2	Résultat principal	81
5.2.3	Démonstration du Théorème 5.2.1	82
5.3	Modèle de Bresse en thermoélasticité de type III	84
5.3.1	Position du problème	84
5.3.2	Méthode de l'énergie dans l'espace de Fourier	86
5.3.3	Estimations de décroissance de la solution	97
5.3.4	Taux de décroissance amélioré	100
6	Stabilisation frontière du système de Bresse multidimensionnel	102
6.1	Introduction	102
6.2	Préliminaires	104
6.3	Comportement asymptotique	110
7	Conclusion et perspectives	125

Chapitre 1

Introduction générale

Au cours des dernières décennies, différents types d'équations aux dérivées partielles (EDP) ont été utilisées comme modèles mathématiques décrivant les systèmes physiques, chimiques, biologiques ou mécaniques. Parmi eux, les modèles mathématiques de la vibration des structures flexibles ont été considérablement stimulés ces dernières années par un nombre croissant de questions d'intérêt pratique. La recherche sur la stabilisation des systèmes de paramètres distribués a largement focalisé sur la stabilisation des modèles dynamiques de structures particulières, telles que des chaînes, des membranes et des poutres.

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à l'étude de la stabilisation du problème d'arc circulaire connu aussi comme le système de Bresse. Les structures élastiques de type arcs sont des objets d'étude largement explorés dans l'ingénierie, l'architecture, l'ingénierie marine, l'aéronautique etc.... En particulier, les vibrations libres des structures élastiques en fonction de leurs propriétés naturelles sont un sujet de recherche important dans l'ingénierie et aussi en mathématiques.

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations par rétro-action (feedback), elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par des mécanismes de dissipation.

Plus précisément, le problème de stabilisation auquel nous nous intéressons revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que nous notons par $E(t)$, à étudier sa limite afin de déterminer si cette dernière est nulle ou pas, et, si cette limite est nulle, à donner une estimation de la vitesse de décroissance de l'énergie vers zéro.

Il existe plusieurs types de stabilité que l'on peut étudier. Le premier type consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e.

$$E(t) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty. \quad (1.0.1)$$

C'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.

Pour le second, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e.

$$E(t) \leq Ce^{-\delta t}, \quad \forall t > 0, \quad (1.0.2)$$

où C et δ sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance de l'énergie n'est pas exponentielle, mais du type polynomiale ou logarithmique par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^\alpha}, \quad \forall t > 0 \quad (1.0.3)$$

ou bien

$$E(t) \leq \frac{C'}{\log(1+t)^k}, \quad \forall t > 0, \quad (1.0.4)$$

où C, C', α et k sont des constantes positives avec C et C' qui dépendent des données initiales.

Dans le domaine de l'analyse mathématique, il est intéressant de connaître les propriétés qui concernent le comportement de l'énergie associée au modèle dynamique. Pour les feedbacks, par exemple, on peut se poser la question : quelles sont les conditions que doivent vérifier ces derniers (feedback) pour obtenir la décroissance de l'énergie. Dans ce sens la stabilisation a été étudiée pour des problèmes dynamiques dans des structures élastiques modélisées par des équations aux dérivées partielles. La décroissance exponentielle ne peut être obtenue que dans des situations particulières (voir [51]).

En 1856, Bresse [3] a introduit le système linéaire suivant couplant trois équations d'ondes

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = Q_x + lN + F_1, \\ \rho_2 \psi_{tt} = M_x - Q + F_2, \\ \rho_1 w_{tt} = N_x - lQ + F_3. \end{cases} \quad (1.0.5)$$

où $t > 0$ et $0 < x < L$. L'indice t désigne la dérivée par rapport à la variable t , l'indice x désigne la dérivée par rapport à la variable spatiale et F_i , ($i = 1, 2, 3$), N, Q et M désignent les forces extérieures, la force axiale, la force de cisaillement et le moment de flexion, respectivement. N, Q et M sont les relations contrainte-déformation (stress-strain) pour le comportement élastique et elles sont données par :

$$\begin{aligned} N &= \kappa_0 (w_x - l\varphi), \\ Q &= \kappa (\varphi_x + \psi + lw), \\ M &= b\psi_x \end{aligned} \tag{1.0.6}$$

Les fonctions φ, ψ et w désignent le déplacement transversal, l'angle de rotation d'un filament et le déplacement longitudinal de la poutre respectivement. Les coefficients $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $\kappa = kAG$, $\kappa_0 = EA$, $b = EI$ et $l = R^{-1}$ sont des constantes positives caractérisant les propriétés élastiques des matériaux. Physiquement, ρ est la densité du matériau, E est le module d'élasticité, G est le module de cisaillement, k est le facteur de cisaillement, A est l'aire de la section transversale, I est le second moment de la section transversale et R est le rayon de courbure.

Le modèle décrit les mouvements d'une poutre élastique plane sous l'effet de petites déformations.

Pour plus de détails, voir aussi l'étude sur les réseaux des poutres flexibles de Lagnese, Leugering et Schmidt [51].

Considérons le couplage des équations (1.0.5)-(1.0.6) avec $F_i = 0, i = 1, 2, 3$, nous obtenons le système de Bresse donné par

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l (w_x - l\varphi) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi + lw) = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0 (w_x - l\varphi)_x + \kappa l (\varphi_x + \psi + lw) = 0, \end{cases} \tag{1.0.7}$$

Remarque 1 Si $R \rightarrow \infty$, alors $l \rightarrow 0$ et ce modèle se réduit au système de Timoshenko ([51]).

Les vitesses de propagation d'ondes dans les première, seconde et troisième équations sont, respectivement, données par

$$v_1 = \frac{\kappa}{\rho_1}, \quad v_2 = \frac{b}{\rho_2}, \quad v_3 = \frac{\kappa_0}{\rho_1} \quad (1.0.8)$$

En tenant compte des conditions aux limites appropriées, l'énergie associée au système est donnée par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + \kappa_0 (w_x - l\varphi)^2 + \kappa (\varphi_x + \psi + lw)^2 + b\psi_x^2 \right\} dx$$

Comme nous ne disposons pas d'un amortissement (damping) dans le système (1.0.7), $E'(t) = 0$. Par conséquent l'énergie $E(t)$ est constante le long des trajectoires. L'une des questions importantes dans le domaine de la stabilisation des systèmes de type Bresse est de trouver une dissipation minimale par laquelle l'énergie décroît uniformément vers zéro en temps. Plusieurs types de mécanismes dissipatifs ont été introduits : de type frottement, de type viscoélastique et de nature thermique. Le sujet de la stabilisation des systèmes de type Bresse (ou problème d'arc circulaire) a suscité l'intérêt de nombreux auteurs ces dernières années.

Santos et Junior [95] ont considéré le système (1.0.7) avec trois amortissements par frottement, sous certaines conditions initiales et des conditions aux limites de type Dirichlet-Dirichlet, les auteurs ont montré que le système suivant

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l (w_x - l\varphi) + \gamma_1 \varphi_t = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi + lw) + \gamma_2 \psi_t = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0 (w_x - l\varphi)_x + \kappa l (\varphi_x + \psi + lw) + \gamma_3 w_t = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, \infty) \end{cases} \quad (1.0.9)$$

est exponentiellement stable sans aucune restriction sur les coefficients. Le cas d'un seul amortissement par frottement (i.e. $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$) a été étudié par Alabau Boussouira et al. [1] où les auteurs montrent que le semi-groupe associé au système de Bresse suivant

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l (w_x - l\varphi) = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi + lw) + \gamma \psi_t = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0 (w_x - l\varphi)_x + \kappa l (\varphi_x + \psi + lw) = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, \infty) \end{cases} \quad (1.0.10)$$

avec des conditions aux limites de type Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet ou des conditions aux limites mixtes est exponentiellement stable sous la condition

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\kappa}{b} \quad \text{et} \quad \kappa = \kappa_0. \quad (1.0.11)$$

(i.e., les vitesses de propagation d'ondes sont égales), sinon il y a absence de stabilité exponentielle. Dans ce cas, ils ont montré que la solution décroît polynomialement vers zéro avec des taux $t^{-1/6+\epsilon}$ ou $t^{-1/3+\epsilon}$ pour ϵ assez petit.

Noun et Wehbe [68] ont étudié le taux de décroissance de l'énergie du système de Bresse sous l'action d'une seule dissipation interne, localement distribuée, agissant sur l'équation de rotation angulaire. Sous la condition d'égalité des vitesses de propagation d'ondes (1.0.11), ils ont montré que le système est exponentiellement stable. Dans le cas contraire, ils ont établi un nouveau taux de décroissance polynomial de l'énergie.

Wehbe et Youssef [102] ont considéré le même système de Bresse avec deux amortissements agissant seulement dans l'équation de l'angle de rotation et dans l'équation du déplacement longitudinal. Ils ont obtenu un résultat de stabilité exponentielle du système dans le cas où les vitesses de propagation dans l'équation du déplacement vertical et l'équation de l'angle de rotation sont égales. Dans le cas contraire ils ont obtenu un résultat de stabilité polynomiale.

La condition sur les vitesses de propagation d'ondes a été utilisé dans de nombreux travaux en vue d'établir des taux de décroissance exponentielle. Fatori et Monteiro [20] ont montré l'optimalité du taux de décroissance polynomiale pour le système de Bresse (1.0.10) avec la condition aux limites de type Dirichlet-Neumann-Neumann. Dans [97], les auteurs ont considéré le système de Bresse avec un mécanisme d'amortissement indéfinie agissant sur l'équation de l'angle de rotation. Sous la condition d'égalité des vitesses de propagation d'ondes et seulement avec des conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann-Neumann, ils ont démontré la stabilité exponentielle du système.

Charles et al. [13] ont étudié la stabilité asymptotique du système de Bresse avec dissipation non linéaire

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l (w_x - l\varphi) + \alpha_1(x) g_1(\varphi_t) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi + lw) + \alpha_2(x) g_2(\psi_t) = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0 (w_x - l\varphi)_x + \kappa l (\varphi_x + \psi + lw) + \alpha_3(x) g_3(w_t) = 0, \end{cases}$$

dans $(0, L) \times (0, \infty)$ par la méthode d'énergie. Toutefois, pour obtenir l'estimation du taux de décroissance de l'énergie, les auteurs exigeaient que α_i et les termes d'amortissement $g_i(\cdot)$ doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_i = \alpha_i(x) \in L^\infty(0, L), \quad \alpha_i(x) \geq C > 0, \\ g_i(s)s > 0, \quad \text{pour } s \neq 0, \quad cs \leq g_i(s) \leq ds \quad \text{pour } |s| > 1, i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{1.0.12}$$

où C, c, d sont des constantes positives. Li et al [52] généralisent le comportement de $\alpha_i, g_i(\cdot)$ à des conditions qui ne vérifient pas nécessairement (1.0.12) et ils ont obtenu une estimation explicite du taux de décroissance de l'énergie du système.

En ce qui concerne le comportement asymptotique du système de Bresse avec terme mémoire infini agissant dans les trois équations nous citons le travail de Guesmia et al [37]. Les auteurs ont considéré le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l (w_x - l\varphi) + \int_0^{+\infty} g_1(s) \varphi_{xx}(x, t-s) ds = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi + lw) + \int_0^{+\infty} g_2(s) \psi_{xx}(x, t-s) ds = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0 (w_x - l\varphi)_x + \kappa l (\varphi_x + \psi + lw) + \int_0^{+\infty} g_3(s) w_{xx}(x, t-s) ds = 0, \end{cases}$$

dans $(0, L) \times (0, \infty)$ et ils ont montré sous des conditions appropriées sur les données initiales et les termes mémoires, que l'énergie du système de Bresse converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini et ils fournissent un lien entre le taux de décroissance de l'énergie et la croissance des termes mémoires à l'infini.

Dans [96] Santos et al. ont considéré le système de Bresse avec terme mémoire infini agissant seulement sur l'équation d'angle de rotation. Ils ont montré la décroissance exponentielle de la solution si et seulement si les vitesses de propagation d'ondes sont identiques. Dans le cas contraire, ils ont montré que le système de Bresse est polynomialement stable avec un taux de décroissance optimal.

Concernant la stabilisation par un effet thermique , Liu et Rao [56] ont considéré le système de Bresse avec deux mécanismes dissipatifs différent, donné par deux températures couplées au système. Les auteurs ont considéré le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l (w_x - l\varphi) + l\kappa_1 \theta^1 = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi + lw) + \kappa_1 \theta_x = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0 (w_x - l\varphi)_x + \kappa l (\varphi_x + \psi + lw) + \kappa_1 \theta_x^1 = 0, \\ \rho_3 \theta_t^1 - \alpha \theta_{xx}^1 + \kappa_1 (w_x - l\varphi) = 0, \\ \rho_3 \theta_t - \alpha \theta_{xx} + \kappa_1 \psi_{tx} = 0, \end{array} \right. \quad (1.0.13)$$

dans $(0, L) \times \mathbb{R}^+$ et ils ont montré la décroissance exponentielle seulement quand les vitesses de propagation d'ondes sont identiques. Si les vitesses de propagation d'ondes sont différentes ils ont prouvé que l'énergie du système décroît polynomialement vers zéro avec le taux $t^{-1/2}$ ou $t^{-1/4}$, sous des conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann-Neumann ou Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet , respectivement.

Si $\theta^1 = 0$ dans (1.0.13) Fatori et Munoz Rivera [21] ont analysé la stabilité exponentielle du système de Bresse couplé avec la loi de la thermoélasticité classique , ils ont montré qu'en général, le système est stable de manière exponentielle mais qu'il existe une stabilité polynomiale avec des taux qui dépendent des vitesses de propagation d'ondes et de la régularité des données initiales. Récemment, Najdi et Wehbe dans [67] ont amélioré les résultats de [21] lorsque la dissipation thermique est localement distribuée.

Thermoélasticité non classique

Le modèle classique de thermoélasticité est basé sur la loi de Fourier, i.e. le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température. Au cours des deux dernières décennies, plusieurs travaux sur l'existence locale, l'existence globale, et le comportement asymptotique des solutions de problèmes aux limites ainsi que des problèmes de Cauchy en thermoélasticité unidimensionnelle et multidimensionnelle ont été effectués.

Récemment, il a été établi que la conduction thermique classique (loi de Fourier) ne décrit pas le phénomène de propagation de la chaleur correctement. Par conséquent, cette théorie

prédit une vitesse infinie de la propagation de la chaleur. Autrement dit, toute perturbation thermique en un point a un effet instantané partout dans le corps. Ceci est physiquement irréaliste et des expériences ont montré que la conduction de la chaleur dans certains cristaux diélectriques à basse température sont indépendants de ce paradoxe et des changements de température, qui sont presque entièrement thermiques, se propagent à vitesse finie. Ce phénomène dans les cristaux diélectriques est appelé second son. Pour remédier à cette insuffisance, de nombreuses théories ont été développées telles que la thermoélasticité de second son et la thermoélasticité de type III, dans lesquels le flux de chaleur obéissant à la loi de Cattaneo et la théorie de Green et Naghdi respectivement.

Thermoélasticité de second son

Cette théorie suggère que nous devrions remplacer la loi de Fourier

$$q + k\nabla\theta = 0. \quad (1.0.14)$$

par la loi de Cattaneo (qui est également connu sous le nom de Maxwell-Cattaneo ou Maxwell-Cattaneo-Vernotte)

$$\tau q_t + q + k\nabla\theta = 0. \quad (1.0.15)$$

Lorsque la loi de Fourier (1.0.14) est remplacée par la loi de Cattaneo (1.0.15) les équations de thermoélasticité deviennent purement hyperboliques et prédisent une vitesse de signal finie. Plusieurs résultats concernant l'existence et le comportement asymptotique des solutions en thermoélasticité de second son ont été établis au cours des deux dernières décennies. Voir [100], [79], [12].

Dans [24] Fernández Sare et Racke ont étudié le système de Timoshenko-Cattaneo

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - \alpha \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta \theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t + \gamma q_x + \delta \psi_{tx} = 0, \\ \tau q_t + q + k\theta_x = 0, \end{cases} \quad (1.0.16)$$

où $t \in (0, \infty)$, $x \in [0, L]$ et $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \tau, \delta, k, \gamma$ sont des constantes positives. Sous certaines conditions initiales et conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann-Dirichlet, ils ont

montré que le système n'est pas exponentiellement stable même si les vitesses de propagation d'ondes sont égales. Par ailleurs, ils ont montré que même avec la présence d'un amortissement viscoélastique de la forme

$$\int_0^{+\infty} g(s)\psi_{xx}(x, t-s)ds$$

dans la seconde équation de (1.0.16) n'est pas suffisant pour avoir la stabilité exponentielle.

Une version non linéaire du système (1.0.16) a été étudié avec un amortissement de la forme $\mu\varphi_t$ par Messaoudi et al. [60]. Ils ont considéré le problème suivant

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x + \mu\varphi_t = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - \alpha\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, \\ \rho_3\theta_t + \gamma q_x + \delta\psi_{tx} = 0, \\ \tau q_t + q + k\theta_x = 0, \end{cases} \quad (1.0.17)$$

où $(x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)$ et la fonction non linéaire σ est supposée suffisamment lisse et qui satisfait

$$\sigma_{\varphi_x}(0, 0) = \sigma_{\psi}(0, 0) = k \quad (1.0.18)$$

et

$$\sigma_{\varphi_x\varphi_x}(0, 0) = \sigma_{\varphi_x\psi}(0, 0) = \sigma_{\psi\psi} = 0. \quad (1.0.19)$$

Plusieurs résultats de décroissance exponentielle pour les deux cas linéaire et non linéaire ont été établis.

Récemment, Santos et al. [94] ont considéré le système (1.0.16) et ils ont introduit un nouveau nombre de stabilité de la forme

$$\mu = \left(\tau - \frac{\rho_1}{k\rho_3} \right) \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k} \right) - \frac{\tau\rho_1\delta^2}{kb\rho_3}$$

et ils ont utilisé la méthode des semigroupes pour obtenir le résultat de décroissance exponentielle pour $\mu = 0$ et la décroissance polynomiale pour $\mu \neq 0$.

Thermoélasticité de type III

A la fin du dernier centenaire, Green et Naghdi [26],[27],[28] avait introduit trois nouveaux type de théories thermoélastiques basées sur le remplacement de l'inégalité d'entropie

usuelle par une loi sur l'équilibre de l'entropie. Dans chacune de ces théories, le flux de chaleur est donné par une autre hypothèse constitutive. Comme un résultat les trois théories obtenues sont respectivement appelées thermoélasticité type I, type II, et type III.

Pour comprendre ces nouvelles théories et leurs applications, plusieurs contributions mathématiques et physiques ont été faites; voir par exemple, , Chandrasekharaiah [10], [11],[12], Quintanilla [73], [74], [75] et Quintanilla et Racke [77].

La théorie de la thermoélasticité de type III est caractérisée par l'équation constitutive de flux de chaleur

$$q + \kappa^* \tau_x + \tilde{\kappa} \theta_x = 0 \quad (1.0.20)$$

où τ représente le déplacement thermique qui vérifie $\tau_t = \theta$ et $\kappa^*, \tilde{\kappa}$ sont des constantes positives. Cette théorie a fait l'objet de quelques travaux intéressants ces deux dernières décennies. Dans [77] Quintanilla et Racke ont considéré un système de thermoélasticité de type III de la forme

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha u_{xx} + \beta \theta_x = 0, \\ \theta_{tt} - \delta \theta_{xx} + \gamma u_{ttx} - \kappa \theta_{txx}, \\ u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = u_1(x), \theta(0, x) = \theta_0(x), \theta_t(0, x) = \theta_1(x) \end{cases} \quad (1.0.21)$$

dans $(0, L) \times \mathbb{R}^+$, où u est le déplacement, θ est la température et $\alpha, \beta, \delta, \gamma, \kappa$ sont des constantes physiques positives. Ils ont utilisé la méthode de l'analyse spectrale et la méthode de l'énergie pour établir la stabilité exponentielle en dimension une pour différentes conditions aux limites. On rappelle aussi la contribution de Quintanilla [76], dans laquelle il a démontré que les solutions de la thermoélasticité de type III convergent vers les solutions de la thermoélasticité classique aussi bien que vers les solutions de la thermoélasticité sans dissipation d'énergie. Zhung et Zuazua [112] ont étudié le comportement asymptotique de la solution du système

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} u) + \Delta \theta = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \theta_{tt} - \Delta \theta - \Delta \theta_t + \operatorname{div} u_{tt} = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = u_1(x), \theta(0, x) = \theta_0(x), \theta_t(0, x) = \theta_1(x), & \text{dans } \Omega \\ u(t, x) = \theta(t, x) = 0, & \text{dans } \partial\Omega \times (0, \infty) \end{cases} \quad (1.0.22)$$

et ils ont démontré, que sous des conditions convenables sur le domaine, l'énergie du système décroît exponentiellement. Mais la majorité des domaines en deux dimension, l'énergie des solutions régulières décroît polynômialement.

Messaoudi et Said Houari dans [58] ont considéré le système de Timoshenko en thermoélasticité de type III suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}^+ \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \beta\theta_x = 0, \quad \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}^+ \\ \rho_3 \theta_{tt} - \delta\theta_{xx} + \gamma\psi_{ttx} - k\theta_{txx} = 0, \quad \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}^+ \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \psi(x, 0) = \psi_0(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(1, t) = 0. \end{array} \right. \quad (1.0.23)$$

et ils ont prouvé un résultat de décroissance similaire à celui démontré par Munoz Rivera et Racke dans [66] pour la thermoélasticité classique.

Le même problème (1.0.23), avec la présence d'un amortissement viscoélastique de la forme $\int_0^{+\infty} g(s)\psi_{xx}(x, t-s)ds$ dans la seconde équation, a été analysé dans [59]. Les auteurs ont démontré que le système décroît exponentiellement (respectivement polynômialement) si g décroît exponentiellement (respectivement polynômialement) dans le cas de l'égalité des vitesses de propagation ($\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$). Cependant la décroissance est polynomiale dans le cas contraire.

Ce résultat a été amélioré récemment par Guesmia et al [36] et un taux de décroissance général a été obtenu.

Note historique sur les systèmes hybrides

Au cours des dernières décennies, les problèmes aux limites pour une poutre élastique avec une charge attachée appelés également systèmes hybrides ont été étudiés par plusieurs auteurs. En 1988, Littman et Markus [54] ont établi la stabilisation forte du modèle SCOLE, qui prend en compte l'inertie de rotation de la charge, en appliquant une force et un moment

contrôle au point de contact entre la poutre et la charge. Ce travail a été suivi par une explosion des contributions sur les systèmes hybrides linéaires et non linéaires pour l'équation de la poutre d' Euler-Bernoulli et l'équation des ondes avec des amortissements interne ou frontière par plusieurs auteurs, Rao [81], Grobbelaar [31],[32] et Mifdal [64]. Parmi les problèmes qui apparaissent dans de nombreuses applications physiques, le problème des structures spatiales flexibles qui est intéressant du point de vue mathématique, car s'il y a un contact parfait entre la poutre et la charge, l'équation différentielle décrivant le processus dynamique à l'extrémité où la charge est attachée devient une condition aux limites dynamique pour l'équation aux dérivées partielles qui décrit les vibrations de la poutre.

Les modèles élastiques hybrides pour la poutre de Timoshenko ont attiré un grand intérêt au cours des vingt dernières années. Dans ce domaine, les contributions avant 2000 sur la stabilisation de ces modèles sont dus à Bruch et Mitchell [5] et Morgul [65]. Bruch et Mitchell ont considéré comme un modèle pour les vibrations d'une poutre de Timoshenko cantilever avec un moment d'inertie constant localisé à l'extrémité libre. L'équation de fréquence pour la poutre est déterminée et les formes de mode résultantes du système Poutre-Corps sont présentées à l'aide de méthodes numériques. Morgul a utilisé une méthode de Lyapunov pour obtenir une stabilisation uniforme d'une structure hybride comprenant un corps rigide en rotation, par exemple un engin spatial et une poutre flexible qui est fixée au corps à une extrémité et libre à l'autre extrémité, qui est équipé de contrôles frontières appropriées. Plus récemment Q. Yan et D. Feng [106] ont considéré comme un modèle de poutre de Timoshenko-corps rigide dans lequel la poutre est non uniforme. La méthode des semigroupes est utilisée pour établir l'existence et l'unicité de la solution du système tandis que la méthode des multiplicateurs de domaine de fréquence est appliquée pour obtenir un résultat de stabilité exponentielle quand le schéma de stabilisation comprenant trois feedback frontières. Cependant, l'inertie de rotation du corps rigide n'est pas pris en compte dans le modèle. Une approche numérique par la méthode des éléments finis a été réalisée par Zietsman et al. [111]. Dans leurs études empiriques, ils n'ont pas pu conclure une stabilisation uniforme ni dans le cas où l'inertie rotatif de la charge I_m est non nulle, ni quand I_m est négligée. Leur méthode FEM a été suivie plus récemment par une méthode des différences

finies due à F. Li et al. [53] dans lequel l'unicité de la solution, la stabilité inconditionnelle et la convergence de leur schéma de différences du problème qui inclut l'inertie de rotation de la charge sont prouvés.

Il y a aussi une vaste littérature sur les modèles de dimensions supérieures pour les structures composées, par exemple systèmes de plaque poutre dans lequel les composantes peuvent être une poutre d'Euler-Bernoulli ou plaques de Kirchhoff ou plaques de von Karman ou poutres extensibles à fournir pour les grands déflexions. Voir par exemple les travaux de You [109] et Grobbelaar [33],[34].

Description et objectif de la thèse

Le but de cette thèse est l'étude du comportement asymptotique des solutions de quelques systèmes de type Bresse. Nous étudions plusieurs problèmes en considérant différents types de mécanismes de dissipation et nous montrons leurs effets sur la stabilisation de ces systèmes. Cette thèse comporte cinq chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques notions et rappels sur les espaces de Sobolev, la transformée de Fourier et la théorie des semi-groupes. Le contenu de ce chapitre sera d'une grande utilité pour les chapitres suivants. Dans le chapitre 2, nous étudions l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique de la solution d'un système unidimensionnel de Bresse dans un domaine ouvert borné $]0, L[$ avec trois conditions aux limites dynamiques en L et des conditions de type Dirichlet en 0 . Les conditions aux limites dynamiques génèrent des dissipations pour les trois équations du système. Ce modèle décrit les vibrations d'un système hybride élastique constitué de la poutre de Bresse et une charge attachée à son extrémité libre $x = L$ de telle sorte que le centre de la charge coïncide avec le point de son attachement à la poutre. Nous supposons l'interaction entre la poutre et la charge. Ainsi, les forces et les moments à l'intérieur de la poutre vibrante sont transmis à la charge qui se déplace en conformité avec la loi de Newton. Nous montrons que la stabilisation exponentielle peut être obtenue en utilisant trois contrôles frontières au point de contact entre la charge et la poutre. La stratégie utilisée est la technique des multiplicateurs et la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov appropriée. Le troisième chapitre

comporte un bref résumé de la théorie de la thermoélasticité classique et non classique où nous introduisons les cadres physiques utilisés dans une partie de cette thèse. Dans le chapitre 4, nous étudions le comportement asymptotique des solutions du problème de Cauchy pour le système unidimensionnel de Bresse par un effet thermique et un terme d'amortissement supplémentaire de la forme δw_t agissant sur la troisième équation du système. Nous considérons séparément le couplage avec la loi de Cattaneo et la théorie de Green et Naghdi de conduction de la chaleur. En utilisant la méthode de l'énergie dans l'espace de Fourier et la méthode des multiplicateurs pour la construction d'une fonction de Lyapunov équivalente à l'énergie, nous montrons quelques estimations ponctuelles de la transformée de Fourier de la solution, puis en utilisant ces estimations ponctuelles nous montrons pour les deux systèmes que la solution décroît lentement avec une perte de régularité. En fait, nous montrons que la norme L^2 de la solution décroît avec un taux de $(1+t)^{-\frac{1}{12}}$ à condition que les données initiales soient dans $L^1(\mathbb{R}) \cap H^s(\mathbb{R})$, ($s \geq 2$). De plus, en restreignant les données initiales à $L^{1,\gamma}(\mathbb{R}) \cap H^s(\mathbb{R})$ avec $\gamma \in [0, 1]$ nous pouvons obtenir des estimations de décroissance plus rapide avec l'amélioration du taux de décroissance par un facteur de $t^{-\frac{\gamma}{6}}$.

Dans le chapitre 5, nous étudions le comportement asymptotique de la solution d'un système de Bresse multidimensionnel non linéaire dans un domaine ouvert borné avec des termes mémoires agissant sur une partie de la frontière. Nous établissons un résultat de décroissance explicite et général pour lequel les taux de décroissance exponentiel et polynomial ne sont que des cas particuliers. La démonstration est basée sur la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov appropriée équivalente à l'énergie de la solution en considération et qui satisfait une inégalité différentielle conduisant au résultat de décroissance souhaité.

Chapitre 2

Préliminaires

Dans ce chapitre, on présentera quelques notions et théorèmes fondamentaux que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

2.1 Définition et propriétés élémentaires des espaces

L^p

Définition 1 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . L'espace $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty[$ est l'espace vectoriel des (classes de) fonctions u définies sur Ω à valeurs dans K où $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , telles que u est mesurable et $|u|^p$ est intégrable au sens de Lebesgue sur Ω . L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{pour } p \in [1, +\infty[$$

est un espace de Banach.

Définition 2 On appelle $L^\infty(\Omega)$ l'espace constitué des (classes de) fonctions mesurables et bornées presque partout sur Ω . Muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |u(x)|$$

où

$$\sup_{x \in \Omega} \text{ess } |u(x)| = \{ \inf C > 0 \text{ tel que } |u(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}.$$

Remarque 2 $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.

Dans le cas où $p = 2$, $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

Définition 3 On dit qu'une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $1_K u \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Définition 4 Pour $\gamma \in [0, +\infty)$, on définit l'espace à poids $L^{p,\gamma}(\mathbb{R})$ comme suit :

$u \in L^{p,\gamma}(\mathbb{R})$ ssi $u \in L^p(\mathbb{R})$ et

$$\|u\|_{L^{p,\gamma}(\mathbb{R})}^p = \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^{p\gamma} |u(x)|^p dx < +\infty. \quad (2.1.1)$$

2.2 Notions de base sur les distributions

Rappels et notations

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et une application $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ (ou \mathbb{C}^n) définie par $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Rappelons que l'application f est de classe \mathcal{C}^k sur Ω , ce que l'on note par $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, si toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k sont des fonctions continues sur Ω . L'espace $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{C})$ selon le contexte est noté par $\mathcal{C}^k(\Omega)$.

Un multi-indice α est un n-uple d'entiers, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. A tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on associe sa longueur $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Pour chaque multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note les dérivées partielles itérées d'une fonction v de classe \mathcal{C}^∞ sur Ω par

$$D^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

2.2.1 Fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact

Définition 5 Soit une fonction continue ϕ définie sur un espace topologique X et à valeur dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Le support de la fonction ϕ est

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in X, \phi(x) \neq 0\}}.$$

L'espace de base $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 6 On appelle espace des fonctions d'essai, et que l'on note par $\mathcal{D}(\Omega)$, l'espace des fonctions ϕ définies et indéfiniment dérivables et à support compact dans Ω . Autrement dit

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{ \text{espace des fonctions } C^\infty \text{ à support compact } \subset \Omega \}.$$

On désigne par $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ l'espace des restrictions à $\bar{\Omega}$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 3

$$\text{supp}(\varphi\psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\psi), \text{ pour tout } \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Définition 7 (Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$)

On dit qu'une suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge vers une fonction, s'il existe un compact K contenu dans Ω tel que

1. $\text{supp}(\varphi_n) \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $D^\alpha(\varphi_n)$ converge uniformément vers $D^\alpha(\varphi), \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

Proposition 1 $\forall p \geq 1$, l'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

2.2.2 Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 8 (Notion et caractérisation de distribution)

Soient $n \geq 1$ un entier et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Une distribution T sur Ω est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ à valeurs réelles (ou complexes) vérifiant la propriété de continuité suivante :

Pour tout compact K , il existe $C_K > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\text{supp}(\varphi) \subset K$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Autrement dit

$$T \in \mathcal{D}'(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \varphi \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ est linéaire de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } \mathbb{R} . \\ 2) & \text{Si } \varphi_j \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega) \text{ alors } \langle T, \varphi_j \rangle \rightarrow 0 \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

On note toujours par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}) des distributions sur Ω (à valeurs respectivement réelles ou complexes).

Définition 9 On dit, que deux distributions T_1 et T_2 sur Ω sont égales si elles le sont en tant qu'applications de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans \mathbb{R}

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Remarque 4 Toute fonction f de $L^2(\Omega)$ engendre une distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ définie par

$$T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

2.3 Espaces de Sobolev

En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles.

2.3.1 Espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 10 L'espace de Sobolev, noté $W^{1,p}(\Omega)$ est constitué des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont la dérivée au sens des distributions, s'identifie à une fonction de $L^p(\Omega)$. La définition précédente s'écrit donc comme ceci :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Pour $p = 2$, il est d'usage de remplacer la notation $W^{1,2}(\Omega)$ par $H^1(\Omega)$.

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i(\cdot) \quad \text{et} \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = \text{grad } u. \quad (2.3.1)$$

Proposition 2 1. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}, \quad (2.3.2)$$

est un espace de Banach.

2. L'espace $H^1(\Omega)$, muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} \quad (2.3.3)$$

est un espace de Hilbert.

Démonstration. (voir[4]). ■

Théorème 2.3.1 (Friedrichs) Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$. Alors il existe une suite (u_n) dans $D(\mathbb{R}^n)$ telle que

1. $u_n|_{\Omega} \rightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$
2. $\nabla u_n|_{\omega} \rightarrow \nabla u|_{\omega}$ dans $L^p(\omega)^N$ pour tout $\omega \subset\subset \Omega$.

(rappelons que la notation $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que ω est un ouvert tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$ et $\bar{\omega}$ est compact).

Démonstration. (voir[4]). ■

2.3.2 Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 11 Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $m \geq 2$ un entier et soit p un réel avec $1 \leq p \leq +\infty$. On définit par récurrence l'espace

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega); \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}. \quad (2.3.4)$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \quad (2.3.5)$$

est un espace de Banach.

On pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$; H^m est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \quad (2.3.6)$$

est un espace de Hilbert.

2.3.3 Espace de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$

Définition 12 *Etant donné $1 \leq p < +\infty$ et $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$. On note*

$$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega).$$

Proposition 3 *Muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

L'espace dual de $H_0^1(\Omega)$

On désigne par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$. On identifie $L^2(\Omega)$ à son dual mais on n'identifie pas $H_0^1(\Omega)$ à son dual, on a le schéma

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega). \quad (2.3.7)$$

avec injections continues et denses.

Formule de Green

On définit la trace de u sur la frontière Γ , l'application linéaire continue,

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u &\rightarrow u|_{\Gamma} \end{aligned}$$

Théorème 2.3.2 *L'application trace $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est surjective et son noyau est l'espace $H_0^1(\Omega)$, on a*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma} = 0\}. \quad (2.3.8)$$

Proposition 4 *(Formule de Green). Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n .*

Si $f, g \in H^1(\Omega)$, alors pour $1 \leq i \leq n$, on a

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} (\gamma_0 f) (\gamma_0 g) \nu_i d\Gamma,$$

où $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ est la normale unitaire extérieure à Γ . Si $f \in H^2(\Omega)$ et $g \in H^1(\Omega)$, on a la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \Delta f g dx = - \int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx + \int_{\Gamma} g \frac{\partial f}{\partial \nu} d\Gamma.$$

2.4 Quelques inégalités utiles

Soit $1 < p \leq \infty$; on désigne par q l'exposant conjugué de p c'est à dire

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Inégalité de Hölder [4]

Théorème 2.4.1 Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Remarque 5 Si $p = q = 2$ on aura l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Inégalité de Poincaré[4]

Théorème 2.4.2 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Alors il existe une constante c_p (dépendant de Ω et p) telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty). \quad (2.4.1)$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, la quantité $\|\nabla u\|_{L^p}$ est une norme équivalente à la norme usuelle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Inégalité de Young [4]

Théorème 2.4.3 Soient $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $a, b \geq 0$. Alors pour tout $\eta > 0$,

$$ab \leq \eta a^p + C_\eta b^q$$

où

$$C_\eta = \frac{1}{q(\eta p)^{\frac{p}{q}}},$$

Remarque 6 pour $p = q = 2$, l'inégalité précédente s'écrit sous la forme

$$ab \leq \eta a^2 + \frac{b^2}{4\eta}. \quad (2.4.2)$$

2.5 Transformée de Fourier

2.5.1 La transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 13 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de f , que l'on note \hat{f} ou $\mathcal{F}f$, est la fonction sur \mathbb{R} définie par,

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.5.1)$$

Théorème 2.5.1 (de Riemann-Lebesgue)- Etant donnée $f \in L^1(\mathbb{R})$ on a :

- (i) $\mathcal{F}f$ est une fonction continue et bornée sur \mathbb{R} .
- (ii) \mathcal{F} est un opérateur linéaire et continu de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad (2.5.2)$$

- (iii) $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.

Démonstration. (voir[25]). ■

La formule suivante est essentielle pour introduire la transformée de Fourier inverse.

Proposition 5 Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. $f\hat{g}$ et $\hat{f}g$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{g}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx \quad (2.5.3)$$

Démonstration. (voir[25]). ■

Proposition 6 (Transformée de Fourier et dérivation)

1. Si $x^k f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, \hat{f} est n fois dérivable et on a

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (-2\pi i \xi)^k \hat{f}(\xi) \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n \quad (2.5.4)$$

2. Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^n(\mathbb{R})$ et si toutes les dérivées $f^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2\pi i \xi)^k \hat{f}(\xi) \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5.5)$$

3. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est à support borné alors $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Démonstration. (voir[25]). ■

2.5.2 La transformée de Fourier inverse dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 14 Pour toute fonction f appartenant à $L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier inverse par

$$\overline{\mathcal{F}}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2\pi i x \xi} dx \quad (2.5.6)$$

On a alors le théorème d'inversion suivant :

Théorème 2.5.2 Si f et \hat{f} sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors on a,

$$\overline{\mathcal{F}}\hat{f}(x) = f(x) \quad (2.5.7)$$

en tout point $x \in \mathbb{R}$ où f est continue.

Démonstration. (voir[25]). ■

2.5.3 La transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Les fonctions à décroissance rapide

Définition 15 Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite à décroissance rapide si, pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^p f(x)| = 0 \quad (2.5.8)$$

Proposition 7 1. Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ à décroissance rapide. Alors \hat{f} est indéfiniment dérivable.

2. Soit f une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ alors \hat{f} est à décroissance rapide.

Démonstration. (voir[25]). ■

L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Définition 16 On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ou tout simplement \mathcal{S} l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} qui vérifient les deux propriétés suivantes :

- f est indéfiniment dérivable.

– f ainsi que toutes ses dérivées est à décroissance rapide.

Théorème 2.5.3 *L'espace \mathcal{S} est stable par transformation de Fourier.*

(i.e. $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}$).

Démonstration. (voir[25]). ■

2.5.4 La transformée de Fourier inverse dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Nous avons vu du théorème 2.5.2 que si f et \hat{f} étaient des fonctions intégrables, alors en tout point x de continuité de f on avait la formule d'inversion

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (2.5.9)$$

Si f est un élément de \mathcal{S} , \hat{f} est dans \mathcal{S} donc intégrable. f étant partout continue on a donc (2.5.9) pour tout x dans \mathbb{R} . Ou encore

$$\forall f \in \mathcal{S} \quad f = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f) \quad (2.5.10)$$

De la même façon on a $f = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}f)$. \mathcal{F} est donc une bijection sur \mathcal{S} et son inverse est

$$\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$$

Théorème 2.5.4 *La transformation de Fourier \mathcal{F} est une application linéaire bijective et bicontinue de \mathcal{S} sur \mathcal{S} . L'application inverse est $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ c'est à dire que les relations*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx$$

et

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

sont équivalentes pour un élément f de \mathcal{S} .

Démonstration. (voir[25]). ■

2.5.5 La transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Nous avons vu à la section précédente que l'étude de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ présente des inconvénients notant en terme d'inversion. Dans ce qui suit, nous allons voir comment l'on peut définir la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ comme une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ à partir des résultats établis sur \mathcal{S} .

Proposition 8 (*Densité de \mathcal{S} dans $L^2(\mathbb{R})$*) \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. (voir[25]). ■

2.5.6 Théorème de Plancherel-Parseval

Théorème 2.5.5 Soient f et g dans \mathcal{S} , on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\bar{\hat{g}}(\xi)d\xi \quad (2.5.11)$$

Si $f = g$, on a la propriété suivante : $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$.

Démonstration. (voir[25]). ■

2.5.7 Propriété de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

L'extension de \mathcal{F} à $L^2(\mathbb{R})$ se fait en utilisant la densité de \mathcal{S} dans $L^2(\mathbb{R})$ et la complétion de $L^2(\mathbb{R})$. C'est une application du résultat suivant :

Proposition 9 Soient E et F deux espaces vectoriels normés, F complet et G un sous-espace vectoriel dense dans E . Si A est un opérateur linéaire continu de G dans F alors il existe un prolongement unique \tilde{A} linéaire continu de E dans F et la norme de \tilde{A} est égale à la norme de A .

Démonstration. (voir[25]). ■

\mathcal{F} est une isométrie sur \mathcal{S} muni de la norme induite par celle de $L^2(\mathbb{R})$. On applique le résultat précédent avec $E = F = L^2(\mathbb{R})$, $G = \mathcal{S}$. On obtient :

Théorème 2.5.6 *La transformation de Fourier \mathcal{F} (resp $\overline{\mathcal{F}}$) se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$. Désignons toujours par \mathcal{F} (resp $\overline{\mathcal{F}}$) ce prolongement.*

On a

$$(i) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(f) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(f) = f \quad \text{presque partout.}$$

$$(ii) \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)\overline{\mathcal{F}(g)}d\xi.$$

$$(iii) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2}.$$

Démonstration. (voir[25]). ■

2.6 Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram est un outil simple et efficace pour la résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques.

Définition 17 *Soit H un espace de Hilbert muni de la norme $|\cdot|$. On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est*

(i) **continue** s'il existe une constante C telle que

$$|a(u, v)| \leq C|u||v| \quad \forall u, v \in H, \quad (2.6.1)$$

(ii) **coercive** s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq \alpha|v|^2 \quad \forall v \in H. \quad (2.6.2)$$

Théorème 2.6.1 (voir [4]) *Soit H un espace de Hilbert et H' son dual. Soit a une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H. \quad (2.6.3)$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}. \quad (2.6.4)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne les crochets de dualité entre H' , H .

2.7 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$.

2.7.1 Quelques définitions

Définition 18 Une famille $S(t)$ ($0 \leq t < \infty$) d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach X est appelée un semi-groupe fortement continu (ou C_0 semi-groupe) si

- $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geq 0,$
- $S(0) = I,$
- Pour tout $x \in X, S(t)x$ est continu en t sur $[0, \infty)$.

Définition 19 On dit que $S(t)$ est un semi-groupe borné si

$$\exists M > 0 \quad \text{tel que} \quad \|S(t)\| \leq M, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.7.1)$$

Si $M \leq 1$ $S(t)$ est dit de contraction.

Définition 20 On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$, l'opérateur linéaire (non-borné) $A : D(A) \rightarrow X$ défini par

$$D(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\} \quad (2.7.2)$$

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(S(t)x - x). \quad (2.7.3)$$

Théorème 2.7.1 (voir [69])

Soit $S(t)$ un C_0 semi-groupe, alors son générateur infinitésimal A est fermé et son domaine $D(A)$ est dense dans X .

Théorème 2.7.2 (voir [69])

Si $S(t)$ et $T(t)$ sont deux C_0 semi-groupes de même générateur infinitésimal A , alors $S(t) = T(t)$.

On notera souvent $S(t) = e^{At}$ l'unique C_0 semi-groupe associé à A .

Exemples de C_0 semi-groupes :

Exemple 1 Soit H un espace de Hilbert. Soit A un opérateur linéaire continu sur H . Alors

$$S(t) = e^{At} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k A^k}{k!} \quad (2.7.4)$$

est un C_0 semi-groupe puisque :

$$S(0) = I, S(t+s) = e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As} = S(t)S(s) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{At}x - x}{t} = Ax. \quad (2.7.5)$$

Donc A est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t)$.

Exemple 2 Soit ℓ_2 l'espace défini par

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n, \dots), \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 < +\infty \right\} \quad (2.7.6)$$

$(S(t)x)_n = \left(e^{-\frac{t}{n}x_n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un C_0 semi-groupe et $(Ax)_n = \left(-\frac{x_n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est son générateur infinitésimal.

2.7.2 C_0 Semi-groupe généré par un opérateur dissipatif

Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) et la norme associée $\|\cdot\|$.

Définition 21 Soit A un opérateur linéaire à domaine dense dans H , i.e,

$A : D(A) \subseteq H \rightarrow H$. On dit que A est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$,

$$\operatorname{Re}(Ax, x) \leq 0. \quad (2.7.7)$$

Supposons qu'un opérateur linéaire A génère un C_0 semi-groupe e^{At} sur un espace de Hilbert H . Alors on a (voir Pazy [69]) :

Théorème 2.7.3 (Hille-Yosida) Un opérateur linéaire non-borné A est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t)$ sur H , $t \geq 0$, si et seulement si

- A est fermé et $\overline{D(A)} = H$,
- L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient \mathbb{R}^+ et pour tout $\lambda > 0$,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}. \quad (2.7.8)$$

Théorème 2.7.4 (Lumer-Phillips) Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ dense dans H .

1. Si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 I - A$ est surjectif sur H alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction sur H .
2. Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction sur H , alors $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$ et A est dissipatif.

Théorème 2.7.5 Soit A un opérateur linéaire à domaine dense $D(A)$ dans un espace de Hilbert H . Si A est dissipatif et $0 \in \rho(A)$, l'ensemble résolvant de A alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semigroupe de contraction sur H .

Démonstration. (voir [55]). ■

Chapitre 3

Système de Bresse avec conditions aux limites dynamiques

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère un modèle hybride élastique constitué de la poutre de Bresse et une charge attachée à son extrémité libre $x = L$ de telle sorte que le centre de la charge coïncide avec le point de son attachement à la poutre. On suppose que l'extrémité gauche de la poutre $x = 0$ est fixé, le système est gouverné par les équations suivantes

$$\begin{aligned} \rho\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l(w_x - l\varphi) &= 0, & \text{sur }]0, L[\times \mathbb{R}_+, \\ I_\rho\psi_{tt} - EI\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) &= 0, & \text{sur }]0, L[\times \mathbb{R}_+, \\ \rho w_{tt} - \kappa_0(w_x - l\varphi)_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) &= 0, & \text{sur }]0, L[\times \mathbb{R}_+, \\ \varphi(0, t) = 0, \psi(0, t) = 0, w(0, t) &= 0, & \text{sur } \mathbb{R}_+, \\ m\varphi_{tt}(L, t) + k_0\varphi_t(L, t) + \kappa(\varphi_x(L, t) + \psi(L, t) + lw(L, t)) &= 0, & \text{sur } \mathbb{R}_+, \\ I_m\psi_{tt}(L, t) + k_1\psi_t(L, t) + EI\psi_x(L, t) &= 0, & \text{sur } \mathbb{R}_+, \\ mw_{tt}(L, t) + k_2w_t(L, t) + \kappa_0(w_x(L, t) - l\varphi(L, t)) &= 0, & \text{sur } \mathbb{R}_+, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

où les fonctions φ, ψ et w désignent, respectivement, le déplacement transversal de la poutre, l'angle de rotation d'un filament de la poutre et le déplacement longitudinal de la poutre. Les coefficients ρ, E et I sont la densité du matériau, le module d'élasticité et le

second moment de la section transversale de la poutre. Les coefficients κ , κ_0 et l sont égales à EA , kGA et R^{-1} , respectivement où G est le module de cisaillement, k est le facteur de cisaillement, A est l'aire de la section transversale et R est le rayon de courbure. Les coefficients m et I_m désignent respectivement la masse et l'inertie de rotation de la charge attachée à l'extrémité libre de la poutre.

On considère le système (3.1.1) avec les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \varphi_0(x), & \psi(x, 0) &= \psi_0(x), & w(x, 0) &= w_0(x) \\ \varphi_t(x, 0) &= \varphi_1(x), & \psi_t(x, 0) &= \psi_1(x), & w_t(x, 0) &= w_1(x) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Le but de ce chapitre est de montrer l'existence, l'unicité de la solution et la stabilisation du système (3.1.1). Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème. Dans la section 3, nous montrons notre résultat principal concernant la décroissance exponentielle de l'énergie associée à la solution du problème.

3.2 Formulation du problème

On va formuler le problème (3.1.1)-(3.1.2) dans un espace de Hilbert approprié. Pour définir l'approche de semi-groupe associé au système (3.1.1)-(3.1.2). On considère les conditions aux limites suivantes

$$\varphi_t(L, t) = u(t), \quad \psi_t(L, t) = v(t) \quad \text{et} \quad w_t(L, t) = z(t), \quad \text{pour } t > 0. \quad (3.2.1)$$

où u , v et z sont solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{ll} mu_t(t) + k_0u(t) + \kappa(\varphi_x(L, t) + \psi(L, t) + lw(L, t)) & = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}_+, \\ I_mv_t(t) + k_1v(t) + EI\psi_x(L, t) & = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}_+, \\ \rho_2z_t(t) + k_2z(t) + \kappa_0(w_x(L, t) - l\varphi(L, t)) & = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}_+, \end{array} \right. \quad (3.2.2)$$

sous la condition initiale

$$u(0) = \varphi_1(L), \quad v(0) = \psi_1(L) \quad \text{et} \quad z(0) = w_1(L). \quad (3.2.3)$$

Si on note par $U = (\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}, w, \tilde{w}, u, v, z)^T$, où

$$\tilde{\varphi} = \varphi_t, \quad \tilde{\psi} = \psi_t, \quad \tilde{w} = w_t,$$

alors U est une solution du problème de Cauchy de premier ordre suivant

$$U_t = \mathcal{A}U, \quad U(t=0) = U_0 \quad (3.2.4)$$

où

$$U_0 = (\varphi_0(x), \varphi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x), w_0(x), w_1(x), u_0, v_0, z_0)^T \in \mathcal{H}$$

et $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est donné par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa_0}{\rho_1} (\cdot)_{xx} - \frac{\kappa_0 l^2}{\rho_1} I_d & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1} (\cdot)_x & 0 & \frac{l(\kappa - \kappa_0)}{\rho_1} (\cdot)_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{\rho_2} (\cdot)_x & 0 & \frac{EI}{\rho_2} (\cdot)_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2} I_d & 0 & -\frac{\kappa l}{\rho_2} I_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l(\kappa + \kappa_0)}{\rho_1} (\cdot)_x & 0 & -\frac{\kappa l}{\rho_1} I_d & 0 & \frac{\kappa_0}{\rho_1} (\cdot)_{xx} - \frac{\kappa l^2}{\rho_1} I_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} T_1 & 0 & -\frac{1}{m} T_2 & 0 & -\frac{1}{m} T_3 & 0 & -\frac{\kappa_1}{m} I_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m} T_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa_2}{m} I_d & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} T_5 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} T_6 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa_3}{m} I_d & 0 \end{pmatrix}$$

où I_d désigne l'opérateur identité et T_i , $i = 1, \dots, 6$ sont les opérateurs trace donné par

$$\begin{aligned} T_1(\varphi) &= \kappa \varphi_x(L, t), & T_2(\psi) &= \kappa \psi(L, t), \\ T_3(w) &= \kappa w(L, t), & T_4(\psi) &= EI \psi_x(L, t), \\ T_5(\varphi) &= \kappa_0 \varphi(L, t), & T_6(w) &= \kappa_0 w_x(L, t). \end{aligned}$$

On désigne par \mathcal{H} l'espace de l'énergie associé au système (3.1.1)-(3.1.2) par

$$\mathcal{H} = (\mathcal{V} \times L^2(0, L))^3 \times \mathbb{C}^3,$$

où

$$\mathcal{V} = \{y \in H^1(0, L) : y(0) = 0\}.$$

Par conséquent, le domaine de l'opérateur \mathcal{A} est

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ U \in \mathcal{H}; \varphi, \psi, w \in H^2(0, L) \cap \mathcal{V}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{w} \in \mathcal{V}, \tilde{\varphi}(L) = u, \tilde{\psi}(L) = v, \tilde{w}(L) = z \right\},$$

et le produit scalaire dans \mathcal{H} est défini par

$$\begin{aligned}
(U_1, U_2)_{\mathcal{H}} &= \int_0^L \kappa_0(w_{1x} - l\varphi_1)\overline{(w_{2x} - l\varphi_2)}dx \\
&+ \int_0^L \kappa(\varphi_{1x} + \psi_1 + lw_1)\overline{(\varphi_{2x} + \psi_2 + lw_2)}dx + \int_0^L EI\psi_{1x}\overline{\psi_{2x}}dx \\
&+ \int_0^L \rho\tilde{\varphi}_1\overline{\tilde{\varphi}_2}dx + \int_0^L I_\rho\tilde{\psi}_1\overline{\tilde{\psi}_2}dx + \int_0^L \rho\tilde{w}_1\overline{\tilde{w}_2}dx \\
&+ mu_1\overline{u_2} + I_m v_1\overline{v_2} + mz_1\overline{z_2},
\end{aligned}$$

où $U_k = (\varphi_k, \tilde{\varphi}_k, \psi_k, \tilde{\psi}_k, w_k, \tilde{w}_k, u_k, v_k, z_k)^T \in \mathcal{H}$, $k = 1, 2$.

Alors, la norme correspondante est

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \kappa\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + EI\|\psi_x\|_2^2 + \kappa_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 \\
&+ \rho\|\tilde{\varphi}\|_2^2 + I_\rho\|\tilde{\psi}\|_2^2 + \rho\|\tilde{w}\|_2^2 + m|u|^2 + I_m|v|^2 + m|z|^2,
\end{aligned}$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme usuelle dans $L^2(0, L)$.

Il est facile de voir que \mathcal{H} est un espace de Hilbert et que $D(\mathcal{A})$ est dense dans \mathcal{H} . Avant d'énoncer le théorème de l'existence et l'unicité de la solution du système (3.1.1)-(3.1.2), on a besoin de démontrer le lemme suivant

Lemme 1 *Il existe une constante positive C telle que pour tout (φ, ψ, w) dans \mathcal{V}^3 , on a*

$$\begin{aligned}
\int_0^L (|\varphi_x|^2 + |\psi_x|^2 + |w_x|^2) dx &\leq C \int_0^L (\kappa|\varphi_x + \psi + lw|^2 + EI|\psi_x|^2 \\
&+ \kappa_0|w_x - l\varphi|^2) dx.
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Démonstration. Soit $(\varphi, \psi, w) \in \mathcal{V}^3$. On va démontrer ce résultat par l'absurde. Supposons alors que pour toute constante $C > 0$, il existe $(\varphi, \psi, w) \in \mathcal{V}^3$, tel que

$$\int_0^L (\kappa|\varphi_x + \psi + lw|^2 + EI|\psi_x|^2 + \kappa_0|w_x - l\varphi|^2) dx \leq \frac{1}{C} \int_0^L (|\varphi_x|^2 + |\psi_x|^2 + |w_x|^2) dx.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver une suite $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_n$ dans \mathcal{V}^3 telle que

$$\int_0^L (\kappa|\varphi_x^n + \psi^n + lw^n|^2 + EI|\psi_x^n|^2 + \kappa_0|w_x^n - l\varphi^n|^2) dx \leq \frac{1}{n} \tag{3.2.6}$$

et

$$\int_0^L (|\varphi_x^n|^2 + |\psi_x^n|^2 + |w_x^n|^2) dx = 1. \quad (3.2.7)$$

De(3.2.7), la suite $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_n$ est bornée dans \mathcal{V}^3 et comme l'injection $\mathcal{V} \hookrightarrow L^2(0, L)$ est compacte alors la suite $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_n$ converge fortement dans $(L^2(0, L))^3$. D'autres part, quand $n \rightarrow +\infty$ on a de (3.2.6)

$$\psi_x^n \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^2(0, L) \quad (3.2.8)$$

et par l'inégalité de Poincaré on déduit que

$$\psi^n \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^2(0, L) \quad (3.2.9)$$

Ensuite, soit $\varphi_n \rightarrow \varphi$ et $w_n \rightarrow w$ fortement dans $L^2(0, L)$. D'après (3.2.6), on a

$$\varphi_x^n + \psi^n + lw^n \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^2(0, L). \quad (3.2.10)$$

Alors

$$\varphi_x^n + \psi^n + lw^n = \varphi_x^n + \psi^n + l(w^n - w) + lw \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^2(0, L) \quad (3.2.11)$$

Donc

$$\varphi_x^n \rightarrow -lw \quad \text{fortement dans } L^2(0, L). \quad (3.2.12)$$

Alors $(\varphi^n)_n$ est une suite de Cauchy dans $H^1(0, L)$. Donc $(\varphi^n)_n$ converge vers une fonction φ_1 dans $H^1(0, L)$. Par conséquent $(\varphi^n)_n$ converge vers φ_1 dans $L^2(0, L)$. D'où $\varphi_1 = \varphi$, par l'unicité de la limite. De plus, $\varphi \in \mathcal{V}$ car l'espace \mathcal{V} est fermé dans $H^1(0, L)$. Par suite, (3.2.12) implique que

$$\varphi_x + lw = 0 \quad \text{p.p. } x \in (0, L) \quad (3.2.13)$$

De la même manière, on trouve que

$$w_x - l\varphi = 0 \quad \text{p.p. } x \in (0, L) \quad (3.2.14)$$

et $w \in \mathcal{V}$. Donc, on déduit de (3.2.13), (3.2.14) et de la continuité de φ et w que

$$\varphi = c_1 \cos(lx) \quad \text{et} \quad w = c_2 \sin(lx) \quad (3.2.15)$$

Donc $\varphi|_{x=0} = 0$ implique $\varphi = w \equiv 0$. Par conséquent

$$\int_0^L (|\varphi_x^n|^2 + |\psi_x^n|^2 + |w_x^n|^2) dx \rightarrow 0,$$

ce qui contredit (3.2.7). ■

Théorème 3.2.1 *L'opérateur \mathcal{A} est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t)$ de contraction dans \mathcal{H} . Ainsi pour toute condition initiale $U_0 \in \mathcal{H}$, le problème (3.2.4) admet une unique solution faible $U \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathcal{H})$. Par ailleurs, si $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, alors U est une solution forte de (3.2.4) vérifiant, $U \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1([0, \infty), \mathcal{H})$.*

Démonstration. Pour montrer le théorème 3.2.1, on utilise l'approche des semi groupes et le théorème de Lummer-Phillips. A cet effet, nous montrons tout d'abord que l'opérateur \mathcal{A} est dissipatif dans l'espace de l'énergie \mathcal{H} . En effet , pour tout

$$U = (\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}, w, \tilde{w}, u, v, z)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

par définition de l'opérateur \mathcal{A} et du produit scalaire dans \mathcal{H} , on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} &= \int_0^L \kappa_0(\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi})(\overline{w_x - l\varphi})dx + \int_0^L \kappa(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w})(\overline{\varphi_x + \psi + lw})dx \\ &+ EI \int_0^L \tilde{\psi}_x \overline{\psi_x} dx + \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + lw) \overline{\tilde{\varphi}_x} dx \\ &+ \kappa_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\tilde{\varphi}} dx - \int_0^L EI \psi_x \overline{\tilde{\psi}_x} dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\tilde{\psi}} dx \\ &- \int_0^L \kappa_0 (w_x - l\varphi) \overline{\tilde{w}_x} dx - \kappa l \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\tilde{w}} dx \\ &- k_0 |u(t)|^2 - k_1 |v(t)|^2 - k_2 |z(t)|^2. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
(U, \mathcal{A}U)_{\mathcal{H}} &= \int_0^L \kappa_0(w_x - l\varphi)(\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi})dx + \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + lw)(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w})dx \\
&+ EI \int_0^L \psi_x \tilde{\psi}_x dx + \int_0^L \kappa \tilde{\varphi}_x (\varphi_x + \psi + lw) dx \\
&+ \kappa_0 l \int_0^L \tilde{\varphi} (\overline{w_x - l\varphi}) dx - \int_0^L EI \tilde{\psi}_x \overline{\psi_x} dx - \kappa \int_0^L \tilde{\psi} (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx \\
&- \int_0^L \kappa_0 \tilde{w}_x (\overline{w_x - l\varphi}) dx - \kappa l \int_0^L \tilde{w} (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx \\
&- k_0 |u(t)|^2 - k_1 |v(t)|^2 - k_2 |z(t)|^2.
\end{aligned}$$

Ensuite par un calcul direct on aura

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Re}(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} &= (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} + (U, \mathcal{A}U)_{\mathcal{H}} \\
&= -2k_0 |u(t)|^2 - 2k_1 |v(t)|^2 - 2k_2 |z(t)|^2.
\end{aligned}$$

Alors

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = -k_0 |u(t)|^2 - k_1 |v(t)|^2 - k_2 |z(t)|^2 \leq 0 \quad (3.2.16)$$

ce qui implique que \mathcal{A} est un opérateur dissipatif dans \mathcal{H} .

Il nous reste à démontrer que $0 \in \rho(\mathcal{A})$ i.e. \mathcal{A} est inversible et \mathcal{A}^{-1} est borné.

Pour démontrer que \mathcal{A} est inversible, il faut démontrer que pour tout

$$F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9)^T \in \mathcal{H},$$

il existe un unique $U = (\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}, w, \tilde{w}, u, v, z) \in D(\mathcal{A})$ telle que

$$\mathcal{A}U = F, \quad (3.2.17)$$

i.e. le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi} = f_1 \\ \frac{\kappa}{\rho}(\varphi_x + \psi + lw)_x + \frac{\kappa_0 l}{\rho}(w_x - l\varphi) = f_2 \\ \tilde{\psi} = f_3 \\ \frac{EI}{I_\rho}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{I_\rho}(\varphi_x + \psi + lw) = f_4 \\ \tilde{w} = f_5 \\ \frac{\kappa_0}{\rho}(w_x - l\varphi)_x - \frac{\kappa l}{\rho}(\varphi_x + \psi + lw) = f_6 \\ -\frac{\kappa}{m}(\varphi_x + \psi + lw)(L) - \frac{k_0}{m}u = f_7 \\ -\frac{EI}{I_m}\psi_x(L) - \frac{k_1}{I_m}v = f_8 \\ -\frac{\kappa_0}{m}(w_x - l\varphi)(L) - \frac{k_2}{m}z = f_9 \end{array} \right. \quad (3.2.18)$$

admet une unique solution. De la première, troisième et cinquième équations de (3.2.18), on obtient

$$\tilde{\varphi} = f_1, \quad \tilde{\psi} = f_3, \quad \tilde{w} = f_5.$$

Alors il nous reste à démontrer que le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x + \kappa_0 l(w_x - l\varphi) = \rho f_2 \\ EI\psi_{xx} - \kappa(\varphi_x + \psi + lw) = I_\rho f_4 \\ \kappa_0(w_x - l\varphi)_x - \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) = \rho f_6 \end{array} \right. \quad (3.2.19)$$

admet une unique solution (φ, ψ, w) dans \mathcal{H}_1 , où l'espace $\mathcal{H}_1 = \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ est muni de la norme suivante

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \kappa\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + EI\|\psi_x\|_2^2 + \kappa_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 \quad (3.2.20)$$

On définit donc la forme bilinéaire b sur \mathcal{H}_1 par

$$\begin{aligned} b((\varphi_1, \psi_1, w_1), (\varphi_2, \psi_2, w_2)) &= \kappa(\varphi_{1x} + \psi_1 + lw_1, \varphi_{2x} + \psi_2 + lw_2) \\ &\quad + \kappa_0(w_{1x} - l\varphi_1, w_{2x} - l\varphi_2) + EI(\psi_{1x}, \psi_{2x}). \end{aligned}$$

où $(., .)$ désigne le produit scalaire de $L^2(0, L)$.

Il est facile de vérifier que la forme bilinéaire b est coercive et bornée sur $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1$. D'autre part, en multipliant la première, deuxième et troisième équations de (3.2.19) par φ_2 , ψ_2 et w_2 respectivement, on obtient

$$\begin{aligned} b((\varphi_1, \psi_1, w_1), (\varphi_2, \psi_2, w_2)) &= -(\rho f_2, \varphi_2) - (I_\rho f_4, \psi_2) - (\rho f_6, w_2) + k_0 f_1(L)\varphi_2(L) + m f_7 \varphi_2(L) \\ &\quad + k_1 f_3(L)\psi_2(L) + I_m f_8 \psi_2(L) + k_2 f_5(L)w_2(L) + m f_9 w_2(L) \end{aligned}$$

Définissons maintenant l'application ℓ sur H_1 par

$$\begin{aligned} \ell(\varphi_2, \psi_2, w_2) &= -(\rho f_2, \varphi_2) - (I_\rho f_4, \psi_2) - (\rho f_6, w_2) + k_0 f_1(L) \varphi_2(L) + m f_7 \varphi_2(L) \\ &\quad + k_1 f_3(L) \psi_2(L) + I_m f_8 \psi_2(L) + k_2 f_5(L) w_2(L) + m f_9 w_2(L). \end{aligned}$$

Il est clair que ℓ est une forme linéaire continue sur \mathcal{H}_1 , alors d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $(\varphi, \psi, w) \in \mathcal{H}_1$ tel que

$$b((\varphi_1, \psi_1, w_1), (\varphi_2, \psi_2, w_2)) = \ell(\varphi_2, \psi_2, w_2), \quad \forall (\varphi_2, \psi_2, w_2) \in \mathcal{H}_1. \quad (3.2.21)$$

D'autres part, pour $F \in \mathcal{H}$ et $(\varphi, \psi, w) \in \mathcal{H}_1$, on a $(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}, w, \tilde{w}, u, v, z) \in D(\mathcal{A})$. En effet, en prenant $(\varphi_2, \psi_2, w_2) = (\varphi_2, 0, 0)$ dans (3.2.21), on obtient

$$\begin{aligned} \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \varphi_{2x} dx - \kappa_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi) \varphi_2 dx &= - \int_0^L \rho f_2 \varphi_2 dx + k_0 f_1(L) \varphi_2(L) \\ &\quad + m f_7 \varphi_2(L), \quad \forall \varphi_2 \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Par une integration par parties, on aura

$$\kappa \varphi_{xx} = -\kappa \psi_x - (\kappa + \kappa_0) l w_x - \kappa_0 l^2 \varphi + \rho f_2 \in L^2(0, L). \quad (3.2.23)$$

Par conséquent, on a

$$\varphi \in H^2(0, L) \cap \mathcal{V}.$$

De même, en prenant $(\varphi_2, \psi_2, w_2) = (0, \psi_2, 0)$ dans (3.2.21), on obtient

$$\begin{aligned} \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \psi_2 dx - EI \int_0^L \psi_{xx} \psi_2 dx &= - \int_0^L I_\rho f_4 \psi_2 dx + k_1 f_3(L) \psi_2(L) \\ &\quad + I_m f_8 \psi_2(L), \quad \forall \psi_2 \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Donc

$$EI \psi_{xx} = \kappa (\varphi_x + \psi + lw) + I_\rho f_4 \in L^2(0, L). \quad (3.2.25)$$

Par conséquent, on a

$$\psi \in H^2(0, L) \cap \mathcal{V}.$$

De même, en prenant $(\varphi_2, \psi_2, w_2) = (0, 0, w_2)$ dans (3.2.21), on obtient

$$\begin{aligned} \kappa l \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) w_2 dx - \kappa_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) w_2 dx &= - \int_0^L \rho f_6 w_2 dx + k_2 f_5(L) w_2(L) \\ &\quad + m f_9 w_2(L), \quad \forall w_2 \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Donc

$$\kappa_0 w_{xx} = \kappa_0 l \varphi_x + \kappa l (\varphi_x + \psi + lw) + \rho f_6 \in L^2(0, L). \quad (3.2.27)$$

Par conséquent, on a

$$w \in H^2(0, L) \cap \mathcal{V}.$$

Il nous reste à démontrer que \mathcal{A} est borné, on a

$$\begin{aligned} \|(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}, w, \tilde{w}, u, v, z)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \rho \|\tilde{\varphi}\|_2^2 + I_\rho \|\tilde{\psi}\|_2^2 + \rho \|\tilde{w}\|_2^2 + EI \|\psi_x\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 \\ &\quad + \kappa_0 \|w_x - l\varphi\|_2^2 + m|u|^2 + I_m |v|^2 + m|z|^2. \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Donc de la première, troisième et cinquième équations de (3.2.18), on obtient

$$\begin{aligned} \|(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}, w, \tilde{w}, u, v, z)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \rho \|f_1\|_2^2 + I_\rho \|f_3\|_2^2 + \rho \|f_5\|_2^2 + |b((\varphi, \psi, w), (\varphi, \psi, w))| \\ &\quad + m|\tilde{\varphi}(L)|^2 + I_m |\tilde{\psi}(L)|^2 + m|\tilde{w}(L)|^2. \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \|(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}, w, \tilde{w}, u, v, z)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \rho \|f_1\|_2^2 + I_\rho \|f_3\|_2^2 + \rho \|f_5\|_2^2 + |\ell(\varphi, \psi, w)| \\ &\quad + m|\tilde{\varphi}(L)|^2 + I_m |\tilde{\psi}(L)|^2 + m|\tilde{w}(L)|^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré et le lemme 1, on obtient

$$\begin{aligned} &\rho \|\tilde{\varphi}\|_2^2 + I_\rho \|\tilde{\psi}\|_2^2 + \rho \|\tilde{w}\|_2^2 \\ &\leq C_1 \left(EI \|\tilde{\psi}_x\|_2^2 + \kappa \|\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w}\|_2^2 + \kappa_0 \|\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi}\|_2^2 \right) \\ &\leq C_1 \left(EI \|f_{3x}\|_2^2 + \kappa \|f_{1x} + f_3 + lf_5\|_2^2 + \kappa_0 \|f_{5x} - lf_1\|_2^2 \right) \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

où C_1 est une constante positive dépendant de la constante de Poincaré, ρ, I_ρ et la constante C du lemme 1.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
& m|\tilde{\varphi}(L)|^2 + I_m|\tilde{\psi}(L)|^2 + m|\tilde{w}(L)|^2 \\
& \leq m\|\tilde{\varphi}_x\|_2^2 + I_m\|\tilde{\psi}_x\|_2^2 + m\|\tilde{w}_x\|_2^2 \\
& \leq C_2 \left(EI\|\tilde{\psi}_x\|_2^2 + \kappa\|\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w}\|_2^2 + \kappa_0\|\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi}\|_2^2 \right) \\
& \leq C_2 \left(EI\|f_{3x}\|_2^2 + \kappa\|f_{1x} + f_3 + lf_5\|_2^2 + \kappa_0\|f_{5x} - lf_1\|_2^2 \right) \tag{3.2.30}
\end{aligned}$$

où C_1 est une constante positive dépendant de la constante de Poincaré, m , I_m et la constante C du lemme 1.

D'autres part, en utilisant l'inégalité de Poincaré, l'inégalité de Young et le lemme 1, on obtient

$$\begin{aligned}
|\ell(\varphi_2, \psi_2, w_2)| & \leq C_3 \left(\rho\|f_2\|_2^2 + I_\rho\|f_4\|_2^2 + \rho\|f_6\|_2^2 \right) \\
& \quad + C_4 \left(EI\|\tilde{\psi}_x\|_2^2 + \kappa\|\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w}\|_2^2 + \kappa_0\|\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi}\|_2^2 \right) \\
& \quad + \varepsilon C_5 \left(EI\|\psi_x\|_2^2 + \kappa\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + \kappa_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 \right), \tag{3.2.31}
\end{aligned}$$

où ε est une constante positive et C_3, C_4, C_5 sont des constantes positives dépendant de la constante de Poincaré et ε .

Par conséquent, en choisissant $0 < \varepsilon < \frac{1}{C_5}$ et en insérant (3.2.29), (3.2.30), (3.2.31) dans (3.2.28), on obtient

$$\begin{aligned}
& \rho\|\tilde{\varphi}\|_2^2 + I_\rho\|\tilde{\psi}\|_2^2 + \rho\|\tilde{w}\|_2^2 + m|u|^2 + I_m|v|^2 + m|z|^2 \\
& \quad + (1 - \varepsilon C_5) \left(EI\|\psi_x\|_2^2 + \kappa\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + \kappa_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 \right) \\
& \leq C_3 \left(\rho\|f_2\|_2^2 + I_\rho\|f_4\|_2^2 + \rho\|f_6\|_2^2 \right) \\
& \quad + C_4 \left(EI\|f_{3x}\|_2^2 + \kappa\|f_{1x} + f_3 + lf_5\|_2^2 + \kappa_0\|f_{5x} - lf_1\|_2^2 \right) \tag{3.2.32}
\end{aligned}$$

Alors

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall F \in \mathcal{H}, \tag{3.2.33}$$

i.e.

$$\|\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall F \in \mathcal{H}, \tag{3.2.34}$$

Donc \mathcal{A}^{-1} est borné. Par conséquent $0 \in \rho(\mathcal{A})$ et par le théorème de Lummer-Phillips, l'opérateur \mathcal{A} génère un C_0 -semi-groupe de contraction $S(t) = e^{At}$ sur \mathcal{H} . ■

3.3 Résultat principal

Le but de cette partie est de montrer que l'énergie associée au problème (3.1.1)-(3.1.2) décroît exponentiellement en utilisant la méthode de Lyapunov. Pour cela, nous allons généraliser le résultat de M. Grobbelaar-Van Dalsen [31] pour le cas du système de Timoshenko au cas du système de Bresse. En la présence de la charge, cette approche nous poussera à faire une restriction sur les valeurs au bord des solutions, c'est à dire, en $x = L$, dans lesquelles les paramètres physiques du problème, par exemple, la masse et l'inertie de rotation de la charge jouent un rôle.

Nous allons maintenant procéder à la restriction des valeurs des solutions au bord $x = L$. La restriction est "suggérée" par les conditions aux limites dynamiques en $x = L$, au sens que les fonctions feedbacks $\varphi_t(L, t)$, $\psi_t(L, t)$ et $w_t(L, t)$ fournissent des bornes supérieures pour les produits des fonctions $[m\varphi_{tt}\kappa(\varphi_x + \psi + lw)](L, t)$, $[I_m\psi_{tt}EI\psi_x](L, t)$ et $[mw_{tt}\kappa_0(w_x - l\varphi)](L, t)$ dans lesquelles les paramètres $m, I_m, EI, \kappa, \kappa_0$ sont supposés être strictement positifs, c'est à dire que l'on a :

$$\begin{aligned} [m\varphi_{tt}\kappa(\varphi_x + \psi + lw)](L, t) &\leq \frac{k_0^2}{4}\varphi_t^2(L, t) \\ [I_m\psi_{tt}EI\psi_x](L, t) &\leq \frac{k_1^2}{4}\psi_t^2(L, t) \\ [mw_{tt}\kappa_0(w_x - l\varphi)](L, t) &\leq \frac{k_2^2}{4}w_t^2(L, t) \end{aligned}$$

(où l'on a utilisé $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2 \leq (a+b)^2$, $a, b \in \mathbb{R}$). Nous avons aussi par exemple que $k_0^2\varphi_t^2(L, t) + \frac{1}{\kappa}[m\varphi_{tt}\kappa(\varphi_x + \psi + lw)](L, t) > 0$, $\forall t \in [0, +\infty[$, si le produit des fonctions $[m\varphi_{tt}\kappa(\varphi_x + \psi + lw)](L, t)$ est strictement positif. Dans le cas où les produits $[m\varphi_{tt}\kappa(\varphi_x + \psi + lw)](L, t)$, $[I_m\psi_{tt}EI\psi_x](L, t)$ et $[mw_{tt}\kappa_0(w_x - l\varphi)](L, t)$ sont négatifs, on considère l'hypothèse suivante :

Condition S. Il existe des constantes positives η_1, η_2 et η_3 telles que

$$\begin{aligned} \eta_1 k_0^2 \varphi_t^2(L, t) + \frac{1}{\kappa} [m\varphi_{tt}\kappa(\varphi_x + \psi + lw)](L, t) &> K_1 > 0, \quad \text{si} \quad [m\varphi_{tt}\kappa(\varphi_x + \psi + lw)](L, t) < 0 \\ \eta_2 k_1^2 \psi_t^2(L, t) + \frac{1}{2EI} [I_m\psi_{tt}EI\psi_x](L, t) &> K_2 > 0, \quad \text{si} \quad [I_m\psi_{tt}EI\psi_x](L, t) < 0 \\ \eta_3 k_2^2 w_t^2(L, t) + \frac{1}{\kappa_0} [mw_{tt}\kappa_0(w_x - l\varphi)](L, t) &> K_3 > 0, \quad \text{si} \quad [mw_{tt}\kappa_0(w_x - l\varphi)](L, t) < 0 \end{aligned}$$

On définit l'énergie associée au système (3.1.1)-(3.1.2) par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I_\rho \psi_t^2 + \rho \varphi_t^2 + \rho w_t^2 + \kappa_0 (w_x - l\varphi)^2 + \kappa (\varphi_x + \psi + lw)^2 + EI \psi_x^2 \right\} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(I_m \psi_t^2(L, t) + m \varphi_t^2(L, t) + m w_t^2(L, t) \right). \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Notre résultat principal est le suivant

Théorème 3.3.1 *Soit U une solution de (3.1.1)-(3.1.2). Supposons que la condition S est satisfaite. Soit*

$$k_0 > 0, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0, \quad \kappa = \kappa_0.$$

Alors il existe deux constantes positives C et ω indépendantes de t et de conditions initiales, telles que

$$\mathcal{E}(t) \leq C \mathcal{E}(0) e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

L'idée principale est de construire une fonctionnelle de Lyapunov $\mathcal{L}(t)$, en utilisant la méthode des multiplicateurs, qui satisfait pour tout $t \geq 0$:

$$\beta_1 \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta_2 \mathcal{E}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \text{et} \quad \beta_1, \beta_2 > 0$$

et

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\beta \mathcal{L}(t) \quad \text{pour } \beta > 0.$$

Pour la démonstration de notre résultat, on a besoin des lemmes suivants

Lemme 2 *Soit U une solution de (3.1.1)-(3.1.2). L'énergie $\mathcal{E}(t)$ satisfait pour tout $t \geq 0$,*

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = -k_0 \varphi_t^2(L, t) - k_1 \psi_t^2(L, t) - k_2 w_t^2(L, t) \leq 0. \quad (3.3.2)$$

Démonstration. En multipliant la première équation de (3.1.1) par φ_t , la deuxième par ψ_t et la troisième par w_t , en intégrant sur $(0, L)$, en utilisant les conditions aux limites, en sommant tous les résultats, on obtient (3.3.2). ■

Lemme 3 Soit U une solution de (3.1.1)-(3.1.2). On introduit les fonctionnelles suivantes

$$\mathcal{L}_1(t) = -I_\rho \int_0^L \psi_t \psi dx$$

$$\mathcal{L}_2(t) = -\rho \int_0^L w_t w dx$$

$$\mathcal{L}_3(t) = -\rho \int_0^L \varphi_t \varphi dx.$$

et on définit la fonctionnelle \mathcal{L}_4 comme suit :

$$\mathcal{L}_4(t) = \mathcal{L}_1(t) + \mathcal{L}_2(t) + \mathcal{L}_3(t) \quad (3.3.3)$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_4(t)}{dt} \leq & EI(1+\alpha) \int_0^L \psi_x^2 dx + \kappa(1+\alpha) \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx - I_\rho \int_0^L \psi_t^2 dx \\ & + \kappa_0(1+\alpha) \int_0^L (w_x - l\varphi)^2 dx - \rho \int_0^L w_t^2 dx - \rho \int_0^L \varphi_t^2 dx + \left(\frac{1}{2EI} + 2\eta_2 \right) k_1^2 \psi_t^2(L, t) \\ & + \left(\frac{1}{\kappa_0} + 2\eta_3 \right) k_2^2 w_t^2(L, t) + \left(\frac{1}{\kappa} + 2\eta_1 \right) k_0^2 \varphi_t^2(L, t) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Démonstration. En dérivant la fonctionnelle \mathcal{L}_1 et en utilisant les équations de (3.1.1), on obtient

$$\frac{d\mathcal{L}_1(t)}{dt} = -EI \int_0^L \psi_{xx} \psi dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \psi dx - I_\rho \int_0^L \psi_t^2 dx. \quad (3.3.5)$$

En intégrant par parties sur $(0, L)$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_1(t) &= -EI \psi_x(L, t) \psi(L, t) + EI \int_0^L \psi_x^2 dx + \kappa \int_0^L \varphi_x \psi dx + \kappa \int_0^L \psi^2 dx \\ &+ \kappa l \int_0^L w \psi dx - I_\rho \int_0^L \psi_t^2 dx. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Ensuite, en dérivant la fonctionnelle \mathcal{L}_2 par rapport à t et en utilisant les équations de (3.1.1), on obtient

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_2(t) = -\kappa_0 \int_0^L (w_x - l\varphi)_x w dx + \kappa l \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) w dx - \rho \int_0^L w_t^2 dx. \quad (3.3.7)$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}_2(t) &= -\kappa_0(w_x - l\varphi)(L, t)w(L, t) + \kappa_0 \int_0^L w_x^2 dx - \kappa_0 l \int_0^L \varphi w_x dx \\ &\quad + \kappa l \int_0^L \varphi_x w dx + \kappa l \int_0^L \psi w dx + \kappa l^2 \int_0^L w^2 dx - \rho \int_0^L w_t^2 dx \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Ensuite, en dérivant la fonctionnelle \mathcal{L}_3 par rapport à t , on obtient

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_3(t) = -\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x \varphi dx - \kappa_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi) \varphi dx - \rho \int_0^L \varphi_t^2 dx. \quad (3.3.9)$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}_3(t) &= -\kappa(\varphi_x + \psi + lw)(L, t)\varphi(L, t) + \kappa \int_0^L \varphi_x^2 dx + \kappa \int_0^L \psi \varphi_x dx \\ &\quad + \kappa l \int_0^L w \varphi_x dx - \kappa_0 l \int_0^L w_x \varphi dx + \kappa_0 l^2 \int_0^L \varphi^2 dx - \rho \int_0^L \varphi_t^2 dx. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

En sommant (3.3.6), (3.3.8), (3.3.10), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}_4(t) &= -EI\psi_x(L, t)\psi(L, t) - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)(L, t)\varphi(L, t) - \kappa_0(w_x - l\varphi)(L, t)w(L, t) \\ &\quad + EI \int_0^L \psi_x^2 dx + \kappa \int_0^L \varphi_x \psi dx + \kappa \int_0^L \psi^2 dx + \kappa l \int_0^L w \psi dx \\ &\quad - I_\rho \int_0^L \psi_t^2 dx + \kappa_0 \int_0^L w_x^2 dx - \kappa_0 l \int_0^L \varphi w_x dx + \kappa l \int_0^L \varphi_x w dx \\ &\quad + \kappa l \int_0^L \psi w dx + \kappa l^2 \int_0^L w^2 dx - \rho \int_0^L w_t^2 dx + \kappa \int_0^L \varphi_x^2 dx + \kappa \int_0^L \psi \varphi_x dx \\ &\quad + \kappa l \int_0^L w \varphi_x dx - \kappa_0 l \int_0^L w_x \varphi dx + \kappa_0 l^2 \int_0^L \varphi^2 dx - \rho \int_0^L \varphi_t^2 dx. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$-EI\psi_x(L, t)\psi(L, t) \leq \frac{EI}{2}\psi_x^2(L, t) + \frac{EI}{2}\psi^2(L, t) \leq \frac{EI}{2} \left(\psi_x^2(L, t) + L \int_0^L \psi_x^2 dx \right)$$

où nous avons utilisé l'inégalité $\psi^2(L, t) \leq L \int_0^L \psi_x^2 dx$.

- Analyse du terme $\psi_x^2(L, t)$

$$\begin{aligned} \frac{EI}{2} \psi_x^2(L, t) &= \frac{1}{2EI} [(EI\psi_x + I_m\psi_{tt})(L, t) - I_m\psi_{tt}(L, t)] [EI\psi_x(L, t)] \\ &\leq \frac{1}{4EI} k_1^2 \psi_t^2(L, t) + \frac{EI}{4} \psi_x^2(L, t) - \frac{1}{2EI} [I_m\psi_{tt}EI\psi_x](L, t) \end{aligned}$$

D'après la condition S, on obtient

$$\frac{EI}{2} \psi_x^2(L, t) < \begin{cases} \frac{1}{4EI} k_1^2 \psi_t^2(L, t) + \frac{EI}{4} \psi_x^2(L, t), & \text{si } [I_m\psi_{tt}EI\psi_x](L, t) > 0, \\ \left(\frac{1}{4EI} + \eta_2\right) k_1^2 \psi_t^2(L, t) + \frac{EI}{4} \psi_x^2(L, t), & \text{si } [I_m\psi_{tt}EI\psi_x](L, t) < 0 \end{cases}$$

il en résulte que

$$\frac{EI}{2} \psi_x^2(L, t) < \left(\frac{1}{2EI} + 2\eta_2\right) k_1^2 \psi_t^2(L, t). \quad (3.3.12)$$

Alors

$$-EI\psi_x(L, t)\psi(L, t) \leq \left(\frac{1}{2EI} + 2\eta_2\right) k_1^2 \psi_t^2(L, t) + \frac{EIL}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx. \quad (3.3.13)$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} -\kappa(\varphi_x + \psi + lw)(L, t)\varphi(L, t) &\leq \frac{\kappa}{2}(\varphi_x + \psi + lw)^2(L, t) + \frac{\kappa}{2}\varphi^2(L, t) \\ &\leq \frac{\kappa}{2}(\varphi_x + \psi + lw)^2(L, t) + \frac{\kappa L}{2} \int_0^L \varphi_x^2 dx \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité $\varphi^2(L, t) \leq L \int_0^L \varphi_x^2 dx$.

- Analyse du terme $\kappa(\varphi_x + \psi + lw)^2(L, t)$

$$\begin{aligned} \kappa(\varphi_x + \psi + lw)^2(L, t) &= \frac{1}{\kappa} [(m\varphi_{tt} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw))(L, t) - m\varphi_{tt}(L, t)] [\kappa(\varphi_x + \psi + lw)](L, t) \\ &\leq \frac{1}{2\kappa} k_0^2 \varphi_t^2(L, t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_x + \psi + lw)^2(L, t) - \frac{1}{\kappa} [m\varphi_{tt}\kappa(\varphi_x + \psi + lw)](L, t). \end{aligned}$$

D'après la condition S, on a

$$\kappa(\varphi_x + \psi + lw)^2(L, t) < \begin{cases} \frac{1}{2\kappa} k_0^2 \varphi_t^2(L, t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_x + \psi + lw)^2(L, t), & \text{si } [m\varphi_{tt}\kappa(\varphi_x + \psi + lw)](L, t) > 0, \\ \left(\frac{1}{2\kappa} + \eta_1\right) k_0^2 \varphi_t^2(L, t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_x + \psi + lw)^2(L, t), & \text{si } [m\varphi_{tt}\kappa(\varphi_x + \psi + lw)](L, t) < 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\frac{\kappa}{2}(\varphi_x + \psi + lw)^2(L, t) \leq \left(\frac{1}{\kappa} + 2\eta_1\right)k_0^2\varphi_t^2(L, t). \quad (3.3.14)$$

Alors

$$-\kappa(\varphi_x + \psi + lw)(L, t)\varphi(L, t) \leq \left(\frac{1}{\kappa} + 2\eta_1\right)k_0^2\varphi_t^2(L, t) + \frac{\kappa L}{2} \int_0^L \varphi_x^2 dx \quad (3.3.15)$$

En utilisant l'inégalité de Young, on a

$$-\kappa_0(w_x - l\varphi)(L, t)w(L, t) \leq \frac{\kappa_0}{2}(w_x - l\varphi)^2(L, t) + \frac{\kappa_0}{2}w^2(L, t) \leq \frac{\kappa_0}{2} \left((w_x - l\varphi)^2(L, t) + L \int_0^L w_x^2 dx \right)$$

où nous avons utilisé l'inégalité $w^2(L, t) \leq L \int_0^L w_x^2 dx$.

- Analyse du terme $\kappa_0(w_x - l\varphi)^2(L, t)$

$$\begin{aligned} \kappa_0(w_x - l\varphi)^2(L, t) &= \frac{1}{\kappa_0} [(mw_{tt} + \kappa_0(w_x - l\varphi))(L, t) - mw_{tt}(L, t)] [\kappa_0(w_x - l\varphi)(L, t)] \\ &\leq \frac{1}{2\kappa_0} k_2^2 w_t^2(L, t) + \frac{\kappa_0}{2} (w_x - l\varphi)^2(L, t) - \frac{1}{\kappa_0} [mw_{tt}\kappa_0(w_x - l\varphi)](L, t) \end{aligned}$$

$$\kappa_0(w_x - l\varphi)^2(L, t) < \begin{cases} \frac{1}{2\kappa_0} k_2^2 w_t^2(L, t) + \frac{\kappa_0}{2} (w_x - l\varphi)^2(L, t), & \text{si } [mw_{tt}\kappa_0(w_x - l\varphi)](L, t) > 0, \\ \left(\frac{1}{2\kappa_0} + \eta_3\right) k_2^2 w_t^2(L, t) + \frac{\kappa_0}{2} (w_x - l\varphi)^2(L, t), & \text{si } [mw_{tt}\kappa_0(w_x - l\varphi)](L, t) < 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\frac{\kappa_0}{2}(w_x - l\varphi)^2(L, t) < \left(\frac{1}{\kappa_0} + 2\eta_3\right) k_2^2 w_t^2(L, t) \quad (3.3.16)$$

Alors

$$-\kappa_0(w_x - l\varphi)(L, t)w(L, t) \leq \left(\frac{1}{\kappa_0} + 2\eta_3\right) k_2^2 w_t^2(L, t) + \frac{\kappa_0 L}{2} \int_0^L w_x^2 dx. \quad (3.3.17)$$

D'après le lemme 1, on a

$$\begin{aligned} &\frac{EIL}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\kappa L}{2} \int_0^L \varphi_x^2 dx + \frac{\kappa_0 L}{2} \int_0^L w_x^2 dx \\ &\leq \alpha \int_0^L (EI\psi_x^2 + \kappa(\varphi_x + \psi + lw)^2 + \kappa_0(w_x - l\varphi)^2) dx \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

où $\alpha = C \max \left\{ \frac{EIL}{2}, \frac{\kappa L}{2}, \frac{\kappa_0 L}{2} \right\}$. En sommant (3.3.13), (3.3.15), (3.3.17) et en utilisant (3.3.18) ensuite en substituant le résultat dans (3.3.11), on obtient (3.3.4). ■

Lemme 4 Soit U une solution de (3.1.1)-(3.1.2). On définit la fonctionnelle \mathcal{L}_5 par

$$\mathcal{L}_5(t) = I_\rho \int_0^L x \psi_t \psi_x dx. \quad (3.3.19)$$

Alors pour tout $\delta_1 > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_5(t)}{dt} &\leq -\left(\frac{EI}{2} - \delta_1\right) \int_0^L \psi_x^2 dx - \frac{I_\rho}{2} \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{\kappa^2}{4\delta_1} \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx \\ &\quad + \left[\left(\frac{1}{2EI} + 2\eta_2\right) k_1^2 + \frac{I_\rho}{2} \right] \psi_t^2(L, t). \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Démonstration. En dérivant la fonctionnelle \mathcal{L}_5 par rapport à t et en utilisant les équations de (3.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_5(t)}{dt} &= EI \int_0^L x \psi_{xx} \psi_x dx - \int_0^L \kappa x (\varphi_x + \psi + lw) \psi_x dx + I_\rho \int_0^L x \psi_t \psi_{xt} dx \\ &= \frac{EI}{2} \psi_x^2(L, t) - \frac{EI}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{I_\rho}{2} \psi_t^2(L, t) - \frac{I_\rho}{2} \int_0^L \psi_t^2 dx \\ &\quad - \int_0^L \kappa x (\varphi_x + \psi + lw) \psi_x dx \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

D'après l'inégalité de Young, on a

$$\left| - \int_0^L \kappa x (\varphi_x + \psi + lw) \psi_x dx \right| \leq \delta_1 \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\kappa}{4\delta_1} \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx. \quad (3.3.22)$$

En remplaçant (3.3.22) et (3.3.12) dans (3.3.21), on obtient (3.3.20). ■

Lemme 5 Soit U une solution de (3.1.1)-(3.1.2) et $\kappa = \kappa_0$. On définit les fonctionnelles \mathcal{L}_6 et \mathcal{L}_7 par

$$\mathcal{L}_6(t) = \rho \int_0^L x \varphi_t (\varphi_x + \psi + lw) dx \quad (3.3.23)$$

et

$$\mathcal{L}_7(t) = \rho \int_0^L x w_t (w_x - l\varphi) dx. \quad (3.3.24)$$

Ensuite, on considère la fonctionnelle

$$\mathcal{L}_8(t) = \mathcal{L}_6(t) + \mathcal{L}_7(t) \quad (3.3.25)$$

alors on a pour $\delta_2 > 0$ l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_8(t)}{dt} &\leq \frac{-\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx - \frac{\kappa_0}{2} \int_0^L (w_x - l\varphi)^2 dx - \left(\frac{\rho}{2} - \delta_2\right) \int_0^L \varphi_t^2 dx \\ &\quad - \frac{\rho}{2} \int_0^L w_t^2 dx + \frac{\rho}{4\delta_2} \int_0^L \psi_t^2 dx + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_0} + 2\eta_3 \right) k_2^2 + \frac{\rho}{2} \right] w_t^2(L, t) \\ &\quad + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} + 2\eta_1 \right) k_0^2 + \frac{\rho}{2} \right] \varphi_t^2(L, t). \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Démonstration. En dérivant \mathcal{L}_6 par rapport à t et en utilisant les équations de (3.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_6(t)}{dt} &= \int_0^L \kappa x (\varphi_x + \psi + lw)_x (\varphi_x + \psi + lw) dx + \int_0^L \kappa_0 l x (w_x - l\varphi) (\varphi_x + \psi + lw) dx \\ &\quad + \int_0^L \rho x \varphi_t \varphi_{xt} dx + \int_0^L \rho x \varphi_t \psi_t dx + \int_0^L \rho l x \varphi_t w_t dx \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

En intégrant par parties, on aura

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_6(t)}{dt} &= \frac{\kappa}{2} (\varphi_x + \psi + lw)^2(L, t) - \frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + \int_0^L \kappa_0 l x w_x \varphi_x dx \\ &\quad + \int_0^L \kappa_0 l x w_x \psi dx - \int_0^L \kappa_0 l^2 x w_x w dx - \int_0^L \kappa_0 l^2 x \varphi \varphi_x dx + \int_0^L \rho l x \varphi_t w_t dx \\ &\quad - \int_0^L \kappa_0 l^2 x \varphi \psi dx - \int_0^L \kappa_0 l^3 x \varphi w dx + \int_0^L \rho x \varphi_t \varphi_{xt} dx + \int_0^L \rho x \varphi_t \psi_t dx. \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Ensuite, en dérivant \mathcal{L}_7 par rapport à t et en utilisant les équations de (3.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_7(t)}{dt} &= \int_0^L \kappa_0 x (w_x - l\varphi)_x (w_x - l\varphi) dx - \int_0^L \kappa l x (w_x - l\varphi) (\varphi_x + \psi + lw) dx \\ &\quad + \rho \int_0^L x w_t w_{xt} dx - \rho l \int_0^L x w_t \varphi_t dx. \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Une intégration par parties de (3.3.29) donne

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{L}_7(t)}{dt} &= \frac{\kappa_0}{2}(w_x - l\varphi)^2(L, t) - \frac{\kappa_0}{2} \int_0^L (w_x - l\varphi)^2 dx - \int_0^L \kappa l x \varphi_x w_x dx \\
&+ \int_0^L \kappa l^2 x \varphi_x \varphi dx - \int_0^L x \kappa l \psi w_x dx + \int_0^L x \kappa l^2 \psi \varphi dx - \int_0^L x \kappa l^2 w w_x dx \\
&+ \int_0^L x \kappa l^3 w \varphi dx + \rho \int_0^L x w_t w_{xt} dx - \rho l \int_0^L x w_t \varphi_t dx
\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

En sommant (3.3.30) et (3.3.28), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{L}_8(t)}{dt} &= \frac{\kappa_0}{2}(w_x - l\varphi)^2(L, t) - \frac{\kappa_0}{2} \int_0^L (w_x - l\varphi)^2 dx + \frac{\kappa}{2}(\varphi_x + \psi + lw)^2(L, t) \\
&- \frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx - \frac{\rho}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx - \frac{\rho}{2} \int_0^L w_t^2 dx + \frac{\rho}{2} \varphi_t^2(L, t) \\
&+ \frac{\rho}{2} w_t^2(L, t) + \rho \int_0^L x \varphi_t \psi_t dx.
\end{aligned} \tag{3.3.31}$$

D'après l'inégalité de Young et les estimations (3.3.16), (3.3.14), on obtient (3.3.26). Ceci achève la démonstration du Lemme 5. ■

Pour $N, N_1, N_2 > 0$, on définit la fonctionnelle \mathcal{L} par

$$\mathcal{L}(t) = N\mathcal{E}(t) + N_1\mathcal{L}_5(t) + N_2\mathcal{L}_8(t) + \mathcal{L}_4(t). \tag{3.3.32}$$

En combinant (3.3.2) , (3.3.20), (3.3.26), (3.3.4), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq & - \left[\rho + N_2 \left(\frac{\rho}{2} - \delta_2 \right) \right] \int_0^L \varphi_t^2 dx - \left[I_\rho + \frac{N_1 I_\rho}{2} - \frac{\rho}{4\delta_2} \right] \int_0^L \psi_t^2 dx \\
& - \left[\rho + N_2 \frac{\rho}{2} \right] \int_0^1 w_t^2 dx - \left[N_1 \left(\frac{EI}{2} - \delta_1 \right) - EI(1 + \alpha) \right] \int_0^L \psi_x^2 dx \\
& - \left[\frac{N_2 \kappa_0}{2} - \kappa_0(1 + \alpha) \right] \int_0^L (w_x - l\varphi)^2 dx \\
& - \left[\frac{N_2 \kappa}{2} - \frac{N_1 \kappa^2}{4\delta_1} - \kappa(1 + \alpha) \right] \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx \\
& - \left[Nk_1 - N_1 \left(\left(\frac{1}{2EI} + 2\eta_2 \right) k_1^2 + \frac{I_\rho}{2} \right) - \frac{k_1^2}{2} \left(\frac{1}{2EI} + 2\eta_2 \right) \right] \psi_t^2(L, t) \\
& - \left[Nk_0 - N_2 \left(k_0^2 \left(\frac{1}{\kappa} + 2\eta_1 \right) + \frac{\rho}{2} \right) - \frac{k_0^2}{2} \left(\frac{1}{\kappa} + 2\eta_1 \right) \right] \varphi_t^2(L, t) \\
& - \left[Nk_2 - N_2 \left(k_2^2 \left(\frac{1}{\kappa_0} + 2\eta_3 \right) + \frac{\rho}{2} \right) - \frac{k_2^2}{2} \left(\frac{1}{\kappa_0} + 2\eta_3 \right) \right] w_t^2(L, t). \quad (3.3.33)
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant choisir les différents paramètres dans le second membre de (3.3.33) de telle sorte que les constantes entre crochets soient toutes positives. Premièrement, on choisit δ_1 et δ_2 assez petits tels que

$$\delta_2 < \min \left\{ \frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{4I_\rho} \right\}, \quad \delta_1 < \frac{EI}{2}$$

Ensuite, on sélectionne N_1 et N_2 assez grandes telles que

$$N_1 > \max \left\{ \frac{EI(1 + \alpha)}{\left(\frac{EI}{2} - \delta_1 \right)}, 2I_\rho \left(\frac{\rho}{4\delta_2} - I_\rho \right) \right\} \quad N_2 > \max \left\{ 2(1 + \alpha), \frac{N_1 \kappa}{2\delta_1} + 2(1 + \alpha) \right\},$$

Enfin, nous choisissons N assez grand telle que

$$\begin{aligned}
N > \max \left\{ \frac{N_1}{k_1} \left(\left(\frac{1}{2EI} + 2\eta_2 \right) k_1^2 + \frac{I_\rho}{2} \right) + \frac{k_1}{2} \left(\frac{1}{2EI} + 2\eta_2 \right), \frac{N_2}{k_0} \left(k_0^2 \left(\frac{1}{\kappa} + 2\eta_1 \right) + \frac{\rho}{2} \right) + \frac{k_0}{2} \left(\frac{1}{\kappa} + 2\eta_1 \right), \right. \\
& \left. \frac{N_2}{k_2} \left(k_2^2 \left(\frac{1}{\kappa_0} + 2\eta_3 \right) + \frac{\rho}{2} \right) + \frac{k_2}{2} \left(\frac{1}{\kappa_0} + 2\eta_3 \right) \right\}
\end{aligned}$$

Par conséquent (3.3.33) devient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq & - \frac{M_1}{2} \left[\int_0^L \left\{ I_\rho \psi_t^2 + \rho \varphi_t^2 + \rho w_t^2 + \kappa_0 (w_x - l\varphi)^2 + \kappa (\varphi_x + \psi + lw)^2 + EI \psi_x^2 \right\} dx \right. \\
& \left. + \left(I_m \psi_t^2(L, t) + m \varphi_t^2(L, t) + m w_t^2(L, t) \right) \right]. \quad (3.3.34)
\end{aligned}$$

On peut donc déduire à partir de (3.3.34) que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\lambda\mathcal{E}(t), \quad (3.3.35)$$

où λ est une constante positive. On considère la fonctionnelle

$$H(t) = N_1\mathcal{L}_5(t) + N_2\mathcal{L}_8(t) + \mathcal{L}_4(t).$$

Nous devons montrer que

$$|H(t)| \leq M\mathcal{E}(t). \quad (3.3.36)$$

En effet, en utilisant les inégalités de Poincaré et Young, on obtient les estimations suivantes

$$|\mathcal{L}_5(t)| \leq I_\rho \left(\int_0^L \psi_t^2 dx + \int_0^L \psi_x^2 dx \right) \leq M_1\mathcal{E}(t) \quad (3.3.37)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_8(t)| &\leq \rho \left(\int_0^L \varphi_t^2 dx + \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + \int_0^L w_t^2 dx + \int_0^L (w_x - l\varphi)^2 dx \right) \\ &\leq M_2\mathcal{E}(t) \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_4(t)| &\leq I_\rho \left(\int_0^L \psi_t^2 dx + \int_0^L \psi^2 dx \right) + \rho \int_0^L (w_t^2 + w^2 + \varphi_t^2 + \varphi^2) dx \\ &\leq M_3\mathcal{E}(t) \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

où M_1, M_2, M_3 sont des constantes positives. En sommant (3.3.37), (3.3.38) et (3.3.39), on obtient (3.3.36) avec $M = M_1 + M_2 + M_3$.

On prend $\tilde{N} > \max\{N, M\}$ et on définit la fonctionnelle de Lyapunov $\tilde{\mathcal{L}}$ par

$$\tilde{\mathcal{L}}(t) = \tilde{N}\mathcal{E}(t) + H(t).$$

Par conséquent, on obtient

$$\beta_2\mathcal{E}(t) \leq \tilde{\mathcal{L}}(t) \leq \beta_1\mathcal{E}(t), \quad (3.3.40)$$

où $\beta_1 = \tilde{N} + L > 0$, $\beta_2 = \tilde{N} - L > 0$. On a

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{L}}(t) \leq -M\mathcal{E}(t) \leq -\omega\tilde{\mathcal{L}}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.3.41)$$

où $\omega = \frac{M}{\beta_1}$. En intégrant (3.3.41), on obtient

$$\tilde{\mathcal{L}}(t) \leq \tilde{\mathcal{L}}(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.3.42)$$

Enfin, d'après (3.3.42) et (3.3.40), on obtient

$$\mathcal{E}(t) \leq C\mathcal{E}(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.3.43)$$

où $C = \frac{\beta_1}{\beta_2}$. Ceci achève la démonstration du théorème 3.3.1.

Chapitre 4

Thermoélasticité

4.1 Introduction

La thermoélasticité est une branche de la mécanique appliquée, elle s'intéresse aux effets de la chaleur sur les contraintes et déformations dans les corps solides élastiques et vice-versa. Ainsi, c'est une extension de la théorie conventionnelle d'élasticité isotherme. Cette extension prend en compte les processus, où les contraintes et les déformations proviennent non seulement des forces mécaniques, mais également des variations de la température.

Les processus thermoélastiques ne sont pas totalement réversibles. Si la partie élastique peut être récupérée, attendu que les déformations causées par la chaleur sont réversibles théoriquement (par refroidissement), la partie thermique peut être perdue à jamais. Ce phénomène doit son existence à la dissipation d'énergie durant les transferts thermiques : la chaleur se diffuse spontanément des zones les plus chaudes aux zones les plus froides de sorte qu'il faut une intervention externe pour ramener le système à ses conditions thermiques initiales.

L'effet du champ de température sur le champ de déformation n'est pas un phénomène à sens unique. Il est connu, expérimentalement, que la déformation d'un corps produit un changement de sa température. En d'autres termes, la déformation agit comme une source ou un puits de chaleur.

En toute rigueur, les aspects mécaniques et thermiques sont couplés et inséparables, ce qui peut vite compliquer la résolution des problèmes thermoélastiques. Cependant, en

pratique il est souvent possible de réduire ce couplage et d'évaluer les champs de température et de déformation dans cet ordre, séparément.

Malgré le couplage entre la température et les déformations, le chauffage ou le refroidissement d'un corps n'est pas toujours accompagné de contraintes. Prenons l'exemple d'un corps homogène est libre de s'étendre à ses frontières. Si on élève sa température uniformément, on n'y verra pas apparaître de contraintes. Par contre, dès qu'on confine les extrémités de ce corps entre deux obstacles immobiles (murs,...), des contraintes vont s'y développer.

Si la source des contraintes est la chaleur, on parle de contraintes thermiques. De plus, si le matériau est élastique, les contraintes sont dites thermoélastiques. Les contraintes thermiques qui apparaissent dans des matériaux non élastiques sont le sujet de disciplines telles que la thermoplasticité et la thermovisco-élasticité [43].

Dans ce chapitre on présente un bref résumé de la théorie de la thermoélasticité classique et non classique, où nous allons introduire les cadres physiques utilisés dans quelques problèmes à étudier dans les chapitres suivants et nous allons exposer le formalisme mathématique de la théorie de la thermoélasticité. Pour plus de détails sur cette théorie, on pourra consulter par exemple l'ouvrage de S. Jiang et R. Racke [44].

4.2 Thermoélasticité classique

4.2.1 Dérivation des équations

Dans la suite nous donnons un bref résumé de la dérivation des équations non linéaires décrivant le comportement thermoélastique d'un corps \mathcal{B} : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$ ou 3 un domaine borné représentant la configuration de référence d'un corps élastique thermiquement conducteur \mathcal{B} . Désignons par $X(x, t)$ la position du point de référence x à l'instant t , par $U(x, t) = X(x, t) - x$ le déplacement (vecteur) et par $\theta = T - T_0$ la différence de température, respectivement, T et T_0 étant la température absolue et la température de référence.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement qui décrit les déformations du corps et l'équation de conservation de l'énergie s'écrivent

$$\rho X_{tt}(x, t) = \operatorname{div} S(x, t) + \rho b(x, t). \quad (4.2.1)$$

et

$$\rho e_t(x, t) = \text{tr}(S(x, t)F_t(x, t)) - \text{div}q(x, t) + \rho r(x, t). \quad (4.2.2)$$

où

$$\begin{aligned} \rho & \text{ la densité,} \\ S & \text{ le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff,} \\ e & \text{ l'énergie interne,} \\ F = I + \nabla U & \text{ le tenseur de gradient de déformation,} \\ q & \text{ le flux de chaleur,} \\ b & \text{ la force externe du corps,} \\ r & \text{ l'apport de chaleur externe.} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Notons l'entropie par η et par

$$\psi = e - (\theta + T_0)\eta \quad (4.2.4)$$

l'énergie libre de Helmholtz.

Sous des hypothèses de régularité appropriées, les équations de conservation (4.2.1), (4.2.2) sont équivalentes aux deux équations de conservation suivantes sous forme intégrale respectivement. Pour toute partie P de Ω on a

$$\int_P X_{tt} dm = \int_P b dm + \int_{\partial P} S \cdot \nu ds. \quad (4.2.5)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_P X_t^2 dm + \int_P e_t dm = \int_P (X_t b + r) dm + \int_{\partial P} (X_t \cdot S n - q \cdot \nu) ds. \quad (4.2.6)$$

où dm désigne l'élément de masse dans le corps, ∂P le bord de P , ds l'élément de surface dans la configuration à l'instant t et ν la normale unitaire extérieure à ∂P .

L'hypothèse constitutive en thermoélasticité est que les fonctions S, q, ψ et η dépendent des valeurs de F, T et ∇T .

$$S = \widehat{S}(F, T, \nabla T), \quad q = \widehat{q}(F, T, \nabla T). \quad (4.2.7)$$

$$\psi = \widehat{\psi}(F, T, \nabla T), \quad \eta = \widehat{\eta}(F, T, \nabla T). \quad (4.2.8)$$

Ces fonctions sont supposées être lisses et

$$\det F \neq 0, \quad T > 0. \quad (4.2.9)$$

La cohérence avec la seconde loi de la thermodynamique exige que l'inégalité de Clausius-Duhem

$$\frac{d}{dt} \int_P \rho \eta dx \geq \int_P \rho \frac{r}{T} dx - \int_{\partial P} \frac{q \cdot n}{T} ds. \quad (4.2.10)$$

est satisfaite pour tout sous-corps P de \mathcal{B} . En particulier, la forme locale de la seconde loi de la thermodynamique s'écrit

$$\eta_t \geq -\operatorname{div} \frac{q}{T} + \frac{r}{T}. \quad (4.2.11)$$

En combinant (4.2.11) avec (4.2.2), on obtient l'inégalité de dissipation locale

$$\psi_t + \eta T_t - \operatorname{tr}\{S F_t\} + \frac{q \cdot \nabla T}{T} \leq 0. \quad (4.2.12)$$

La seconde loi de la thermodynamique (Inégalité de Clausius-Duhem) impose des restrictions sur la forme des relations constitutives pour S, η, ψ, q . Coleman et Mizel [14] et Coleman et Noll [15] ont montré que la condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité (4.2.12) est toujours satisfaite, si on a les trois assertions suivantes :

i) Les fonctions $\widehat{S}, \widehat{\eta}$ et $\widehat{\psi}$ sont indépendantes du gradient de la température ∇T

$$S = \widehat{S}(F, T), \quad \psi = \widehat{\psi}(F, T), \quad \eta = \widehat{\eta}(F, T). \quad (4.2.13)$$

ii) $\widehat{\psi}$ détermine \widehat{S} par la relation de contrainte

$$\widehat{S} = \frac{\partial \psi}{\partial F}(F, T). \quad (4.2.14)$$

et $\widehat{\eta}$ par la relation d'entropie

$$\widehat{\eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial T}(F, T). \quad (4.2.15)$$

iii) q obéit à l'inégalité de conduction thermique

$$\widehat{q}(F, T, \nabla T) \cdot \nabla T \leq 0, \quad (4.2.16)$$

où l'exemple typique est la loi de Fourier

$$q = -\kappa \nabla T \quad (4.2.17)$$

avec $\kappa = \kappa(F, T)$ est le tenseur de conductivité thermique.

A l'aide des représentations ci-dessus, la loi de conservation de l'énergie (4.2.2) peut être réécrite comme suit

$$\psi_t + T_t \eta + T \eta_t - \text{tr}(SF_t) + \text{div}q = r, \quad (4.2.18)$$

ou

$$\text{tr}(SF_t) - \eta T_t + T_t \eta + T \eta_t - \text{tr}(SF_t) + \text{div}q = r, \quad (4.2.19)$$

ce qui implique

$$T \eta_t + \text{div}q = r, \quad (4.2.20)$$

ou

$$T \left[-\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} T_t - \frac{\partial^2 \psi}{\partial F \partial T} F_t \right] + \text{div}q = r. \quad (4.2.21)$$

L'équation (4.2.1) est principalement un système hyperbolique pour X ; l'équation (4.2.21) est principalement une équation parabolique pour T .

Au lieu de X la variable $U(= X - x)$ est souvent utilisé. Nous écrivons

$$\psi(F, T) = \psi(\nabla U, \theta)$$

Avec le même symbole ψ , de façon analogue pour les autres fonctions.

Le problème de trouver U et θ devient mathématiquement bien posé, si de plus les conditions initiales

$$U(t=0) = U_0, \quad U_t(t=0) = U_1, \quad \theta(t=0) = \theta_0, \quad (4.2.22)$$

et les conditions aux limites (si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$) sont prescrits, par exemple si "un milieu assujetti rigidement avec la température constante sur les limites"

$$U = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad (\text{condition de Dirichlet}), \quad (4.2.23)$$

ou "traction libre isolée"

$$S\nu = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial \nu} = 0 \quad (\text{condition de Neumann}), \quad (4.2.24)$$

ou d'autres combinaisons de conditions aux limites pour U et θ . Ici $\nu = \nu(x)$ est le vecteur normal unitaire au point $x \in \partial\Omega$.

L'investigation des équations linéarisées jouera un rôle important. Supposons que

$$|\nabla u|, |\nabla u_t|, |\theta|, |\theta_t|, |\nabla \theta|$$

sont petits. En utilisant le développement de Taylor par exemple

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial(\nabla u) \partial \theta}(\nabla u, \theta, x) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial(\nabla u) \partial \theta}(0, 0, x) + \mathcal{O}(|\nabla u| + |\theta|) \quad (4.2.25)$$

la linéarisation du système (4.2.1) et (4.2.21) conduit alors au système ($T_0 = 1$ sans perte de généralité)

$$\begin{aligned} \rho U_{tt} \mathcal{D}^T S \mathcal{D} U + \mathcal{D}^T \Gamma \theta &= \rho b, \\ \delta \theta_t - \nabla^T \kappa \nabla \theta + \Gamma^T \mathcal{D} U_t &= r, \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

où $\rho(x)$ peut être considérée comme une matrice densité symétrique, $S = S(x) \in M \times M$ est une matrice symétrique et définie positive contenant le module élastique ($M = 6$ dans \mathbb{R}^3 , $\Gamma = \Gamma(x)$ est un vecteur avec les coefficients de détermination que l'on appelle le tenseur de contrainte thermique, $\delta = \delta(x)$ est la chaleur spécifique et $\kappa = \kappa(x)$ est le tenseur de conductivité thermique. Toutes les fonctions sont supposées être lisses. \mathcal{D} est une abréviation pour un gradient généralisé

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{D} = \partial_1 \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

De cette manière, le cas général (linéaire) non homogène et anisotrope est décrit. La contrepartie linéaire des conditions aux limites (4.2.24) s'écrivent

$$\mathcal{N}^T (S \mathcal{D} U - \Gamma \theta) = 0, \quad \nu^T \kappa \nabla \theta = 0, \quad (4.2.27)$$

où \mathcal{N} provient du vecteur normal ν de la même façon que \mathcal{D} provient du vecteur gradient ∇ .

Les modules élastiques C_{ijkl} , $i, j, k, l = 1, \dots, n$ qui sont donnés en général par

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial(\partial_j u_j) \partial(\partial_k u_l)}(0, 0, x) \quad (4.2.28)$$

satisfont dans le cas linéaire

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl}. \quad (4.2.29)$$

L'hypothèse de positivité de C_{ijkl} est dans le sens

$$\exists k_0 > 0, \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji} \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \Omega : \xi_{ij} C_{ijkl} \xi_{kl} \geq k_0 \sum_{j,k=1}^n |\xi_{jk}|^2, \quad (4.2.30)$$

ce qui implique que la matrice $S = S(x)$ est uniformément définie positive car

$$S = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ \cdot & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ \cdot & \cdot & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{3131} & C_{3112} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{1212} \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3,$$

$$S = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112} \\ \cdot & C_{2222} & C_{2212} \\ \cdot & \cdot & C_{1212} \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, S = C_{1111} \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

Dans le cas simple d'un milieu homogène isotrope, nous avons

$$S = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3,$$

$$S = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \cdot & 2\mu + \lambda & 0 \\ \cdot & \cdot & \mu \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, S = \tau > 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

et le système réduit dans le cas bidimensionnel ou tridimensionnel est donné par :

$$\begin{aligned} U_{tt} - \mu \Delta U - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} U + \gamma \nabla \theta &= b, \\ \delta \theta_t - \kappa \Delta \theta + \gamma \operatorname{div} U_t &= r, \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

où la densité $\rho = 1$ sans perte de généralité, μ et λ sont les modules de lamé avec $\mu > 0$ et $2\mu + n\lambda > 0$, de plus $\delta, \kappa > 0$ et $\gamma \neq 0$.

Dans l'espace unidimensionnel, sous certaines hypothèses, le système linéaire de base s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} U_{tt} - \tau U_{xx} + \gamma \theta_x &= b, \\ \delta \theta_t - \kappa \theta_{xx} + \gamma U_{tx} &= r, \end{aligned} \tag{4.2.32}$$

et le système non linéaire peut s'écrire comme le système suivant :

$$\begin{aligned} U_{tt} - a(U_x, \theta) U_{xx} - b(u_x, \theta) \theta_x &= b, \\ c(U_x, \theta) \theta_t - [d(U_x, \theta) \theta_x]_x + b(U_x, \theta) U_{tx} &= r. \end{aligned} \tag{4.2.33}$$

4.3 Thermoélasticité non classique

Dans la théorie classique, on obtient un système couplé hyperbolique-parabolique tel que le système hyperbolique d'élasticité couplé avec le modèle parabolique classique de conduction de la chaleur, typiquement donné par la loi de Fourier

$$q = -\kappa \nabla \theta, \tag{4.3.1}$$

qui exprime le flux de chaleur proportionnellement au gradient spatial de température. Alors dans le cas classique, cette théorie prédit une vitesse infini de propagation de la chaleur. Autrement dit, toute perturbation thermique en un point a un effet instantané partout dans le corps. Ceci est physiquement irréaliste et des expériences ont montré que la conduction de la chaleur dans certains cristaux diélectriques à basse température sont indépendant de ce paradoxe et des changements de temperature, qui sont presque entièrement thermique, se propagent à vitesse finie. Ce phénomène dans les cristaux diélectriques est appelé second son. Il a d'abord été détecté dans l'hélium **He**, puis dans des cristaux de diélectriques purtés de floride de sodium **Naf**, et bismath **Bi**. La gamme de température, pour laquelle le deuxième son est détectable, est en fait la propagation tout à fait petite et normale diffusive qui intervient au-dessus de lui.

Pour remédier à ce paradoxe, de nombreuses théories ont été développés . Les théories de thermoélasticité non classique impliquant des équations de transport de chaleur de type hyperbolique admettant des vitesses finies pour les signaux thermiques ont été formulés soit par l'incorporation d'un terme de changement de flux dans la loi de Fourier ou bien par rajout d'une variation de temperature dans les variables constitutives.

En thermoélasticité de second son , l'énergie libre de Helmholtz ψ donné dans (4.2.4) est une fonction de $(\nabla u, \theta, q)$ et la loi de transfert de chaleur est donnée par la loi de Cattaneo [7] au lieu de la loi de Fourier

$$\tau q_t + q + \kappa(\nabla u, \theta)\nabla\theta = 0, \quad (4.3.2)$$

où $\tau > 0$ est le temps de relaxation.

De (4.2.14) et (4.2.15), nous obtenons

$$S(\nabla U, \theta, q) = \frac{\partial\psi}{\partial(\nabla U)}(\nabla U, \theta, q), \quad \eta(\nabla U, \theta, q) = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\nabla U, \theta, q), \quad (4.3.3)$$

et la loi de conservation de l'énergie (4.2.2) peut être donc réécrite comme suit :

$$(\theta + T_0)\eta_t + \frac{\partial\psi}{\partial q}q_t + \operatorname{div}q = r, \quad (4.3.4)$$

ce qui est équivalent à

$$(\theta + T_0) [-\psi_{\theta\theta}\theta_t - \operatorname{tr}(S_\theta\nabla U_t)] + [\psi_q - (\theta + T_0)\psi_{\theta q}]q_t + \operatorname{div}q = r. \quad (4.3.5)$$

Le système d'équations (4.2.1), (4.3.2) et (4.3.5) est purement hyperbolique qui peut s'écrire dans le cas unidimensionnel comme suit

$$\begin{aligned} U_{tt} - a(U_x, \theta, q)U_{xx} + d(U_x, \theta, q)\theta_x - \alpha_1(U_x, \theta)qq_x &= b, \\ \theta_t - c(U_x, \theta, q)q_x + d(U_x, \theta, q)U_{tx} - \alpha_2(U_x, \theta)qq_t &= r, \\ \tau(U_x, \theta)q_t + q + \kappa(U_x, \theta)\theta_x &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

et dans le cas linéaire, le système de base est donné par :

$$\begin{aligned} U_{tt} - \alpha U_{xx} + \beta\theta_x &= b, \\ c_0\theta_t - \gamma q_x + \beta U_{tx} &= r, \\ \tau q_t + q + \kappa\theta_x &= 0, \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Le système linéaire multidimensionnel ($n = 2, 3$) est donnée par :

$$\begin{aligned} U_{tt} - \mu\Delta U - (\mu + \lambda)\nabla(\operatorname{div}U) + \beta\nabla\theta &= b, \\ c_0\theta_t - \gamma\operatorname{div}q + \beta\operatorname{div}U_t &= r, \\ \tau q_t + q + \kappa\nabla\theta &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

A la fin du dernier centenaire, Green et Naghdi [26],[27],[28] avait introduit trois nouveaux type de théories thermoélastiques basés sur le remplacement de l'inégalité d'entropie usuelle par une loi sur l'équilibre de l'entropie. Dans chacune de ces théories, le flux de chaleur est donné par une autre hypothèse constitutive. Comme un résultat les trois théories obtenus sont respectivement appelés thermoélasticité type I, type II et type III. Ce développement est effectué d'une manière rationnelle afin d'obtenir une théorie entièrement compatible qui intégrera la transmission d'impulsion thermique d'une manière très logique et enlève le paradoxe de la vitesse infinie de propagation de la chaleur induite par la théorie classique. Lorsque ces théories sont linéarisées, le type I conduit à la conduction de la chaleur habituelle par la loi de Fourier , le type II conduit à une équation du télégraphe

$$\theta_{tt} + \frac{1}{\tau}\theta_t = c^2\Delta\theta \quad (4.3.9)$$

qui est hyperbolique et transmet des ondes à une vitesse finie c , et le type III conduit à l'équation de type de Jeffrey

$$\tau q_t + q + \kappa\nabla\theta + \tau\kappa_1\nabla\theta_t = 0. \quad (4.3.10)$$

Les deux théories de types II et III pour le flux de chaleur dans un solide rigide fixe accommodent la vitesse d'onde finie, mais seulement le type II n'implique aucune dissipation d'énergie.

Conformément à la classification utilisée dans [26] pour le flux de la chaleur dans un solide rigide fixe, la dérivation de Green et Naghdi [27] est appelé thermoélasticité classique (ou thermoélasticité de type I). Cependant, la procédure qu'ils ont utilisé pour le développement d'équations constitutives est basée sur la procédure proposée dans [29] qui emploie une loi de balance de l'entropie et exige la satisfaction de l'équation d'énergie réduite avant d'imposer toute autre restriction résultante de la seconde loi de la thermodynamique. En outre, ils ont considéré dans une autre théorie thermoélastique, la partie thermique qui résulte de la transmission de la chaleur sous forme d'ondes est analogue à celle de la réponse d'un matériau élastique dans une théorie mécanique. Ils se sont référés à lui comme thermoélasticité sans dissipation d'énergie (thermoélasticité de type II), car il ne comporte aucune dissipation

d'énergie. Les modèles unidimensionnel et multidimensionnel sont

$$\begin{aligned} U_{tt} - \alpha U_{xx} + \beta \theta_x &= 0, \\ \theta_{tt} - \kappa \theta_{xx} + \beta U_{txx} &= g, \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

et

$$\begin{aligned} U_{tt} - \mu \Delta U - (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} U) + \beta \nabla \theta &= 0, \\ \theta_{tt} - \kappa \Delta \theta + \beta \operatorname{div} U_{tt} &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

respectivement. Plus tard dans [28], Green et Naghdi dérivent des modèles de thermoélasticité de type III pour les milieux isotrope en utilisant les équations constitutives développées dans [26].

Le système unidimensionnel est donné par :

$$\begin{aligned} U_{tt} - \alpha U_{xx} + \beta \theta_x &= 0, \\ \theta_{tt} - \kappa \theta_{xx} - \delta \theta_{txx} + \beta U_{txx} &= g, \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

et le système multidimensionnel par :

$$\begin{aligned} U_{tt} - \mu \Delta U - (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} U) + \beta \nabla \theta &= 0, \\ \theta_{tt} - \kappa \Delta \theta - \delta \Delta \theta_t + \beta \operatorname{div} U_{tt} &= 0. \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Chapitre 5

Stabilisation du système de Bresse en thermoélasticité non-classique

5.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'effet thermique sur le comportement asymptotique des solutions du système de Bresse avec un terme d'amortissement (damping) supplémentaire agissant sur l'équation du déplacement longitudinal. La dissipation thermique est décrite soit par la loi de Cattaneo soit par la loi de la thermoélasticité de type III.

Dans la première partie de ce chapitre, on considère le problème de Cauchy du système de Bresse-Cattaneo

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x - \psi - lw)_x - k_0^2 l (w_x - l\varphi) = 0, \\ \psi_{tt} - a^2 \psi_{xx} - (\varphi_x - \psi - lw) + m\theta_x = 0, \\ w_{tt} - k_0^2 (w_x - l\varphi)_x - l(\varphi_x - \psi - lw) + \delta w_t = 0, \\ \theta_t + q_x + m\psi_{tx} = 0, \\ \tau_q q_t + \beta q + \theta_x = 0, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

avec les conditions initiales

$$(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t, \theta, q)(x, 0) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0, q_0), \quad (5.1.2)$$

où $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, les fonctions φ, ψ et w , désignent, respectivement, le déplacement transversal de la poutre, l'angle de rotation d'un filament de la poutre et le déplacement longitudinal de la poutre, la fonction θ est la température et $a, l, m, k_0, \delta, \beta$ sont des constantes positives. Le système (5.1.1) est le système de Bresse couplé au système de Cattaneo (écrit en une dimension)[7]

$$\begin{cases} \theta_t + \operatorname{div} q = 0, \\ \tau_q q_t + q + \kappa \nabla \theta = 0. \end{cases} \quad (5.1.3)$$

Dans (5.1.3), la première équation représente l'équation d'énergie de la conduction thermique, tandis que la seconde équation est la loi de Cattaneo de la conduction thermique. Le système (5.1.3) est un système hyperbolique et il est connu comme un modèle alternatif au système de Fourier

$$\begin{cases} \theta_t + \operatorname{div} q = 0, \\ q + \kappa \nabla \theta = 0. \end{cases} \quad (5.1.4)$$

On sait que l'utilisation de la loi de Cattaneo élimine le paradoxe de la vitesse de propagation infinie de la loi de Fourier.

Notons ici que les effets dissipatifs introduits par la loi de Cattaneo sont généralement plus faibles que celles induites par la loi de Fourier.

Le système de Cattaneo (5.1.3) a été utilisé dans différents modèles tels que : équations de Navier-Stokes [80], Chimiotaxie [19], flux de circulation [45], Gaz thermiquement relaxants[46] etc..., les scientifiques se posent une question naturelle dans ce contexte :

(Q) :Le couplage avec le système de Cattaneo conduit-il au même comportement comme le couplage avec la loi de Fourier ?

La réponse à la question ci-dessus a été faite pour certains systèmes. En effet, une première réponse a été obtenue par Racke [79], où il a montré que la solution du système thermoélastique classique (la loi de Fourier) se comporte exactement comme la solution du système thermoélastique de second son (loi de Cattaneo).

Fernández Sare et Racke [24] ont montré que pour les systèmes de Timoshenko-Cattaneo et Timoshenko-Fourier, sous les mêmes hypothèses sur les paramètres physiques (pour les deux systèmes), les solutions peuvent avoir des comportements différents.

Dans [94], M.L. Santos et al ont étudié le système de Timoshenko-Cattaneo avec de nouvelles hypothèses sur les paramètres physiques et ont montré que la solution a le même comportement que celle du système de Timoshenko-Fourier.

Dans ce travail, nous voulons étudier le système de Bresse-Cattaneo (5.1.1) et donner une réponse à la question (Q). En fait, la réponse s'avère positive. En effet, nous montrons que le même paramètre

$$\alpha = (\tau_q - 1)(1 - a^2) - \tau_q m^2 \quad (5.1.5)$$

obtenu dans [94] pour le système de Timoshenko-Cattaneo contrôle encore le comportement asymptotique du système (5.1.1). En fait, nous avons montré les estimations de décroissance suivantes

– Pour $\alpha = 0$

$$\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-1/12-k/6} \|U_0\|_{L^1} + C(1+t)^{-\ell/2} \|\partial_x^{k+\ell} U_0\|_{L^2}. \quad (5.1.6)$$

– Pour $\alpha \neq 0$

$$\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-1/12-k/6} \|U_0\|_{L^1} + C(1+t)^{-\ell/10} \|\partial_x^{k+\ell} U_0\|_{L^2}, \quad (5.1.7)$$

où k, ℓ sont des entiers positifs satisfaisant $k + \ell \leq s$ et C une constante positive et $U = (\varphi_x - \psi - lw, \varphi_t, a\psi_x, \psi_t, k_0(w_x - l\varphi), w_t, \theta, q)^T$.

Si $\tau_q = 0$, alors le système (5.1.1) se réduit au modèle de Bresse en thermoélasticité classique qui a été étudié récemment par Said-Houari et Soufyane [87] et les mêmes taux de décroissance que (5.1.6) et (5.1.7) ont été obtenus sous l'hypothèse $a = 1$ et $a \neq 1$, respectivement. Il est clair de (5.1.5) que pour $\tau_q = 0$

$$\alpha = 0 \quad \text{est équivalent à} \quad a = 1.$$

La démonstration des estimations de décroissance (5.1.6)-(5.1.7) est basée sur la construction des fonctions de compensation pour capturer la dissipation des composantes de la solution en utilisant la méthode des multiplicateurs basant sur la construction d'une fonction de Lyapunov équivalente à l'énergie afin d'obtenir des estimations sur la transformée de Fourier de la solution. Ensuite, nous nous utilisons le théorème de Plancherel et des inégalités asymptotique pour montrer les estimations de décroissance souhaitées dans le théorème 5.2.1.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on considère le problème de Cauchy pour le système de Bresse en thermoélasticité de type III

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x - \psi - lw)_x - k_0^2 l(w_x - l\varphi) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \psi_{tt} - a^2 \psi_{xx} - (\varphi_x - \psi - lw) + m\theta_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ w_{tt} - k_0^2 (w_x - l\varphi)_x - l(\varphi_x - \psi - lw) + \delta w_t = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \theta_{tt} - k_1 \theta_{xx} + \beta \psi_{ttx} - k_2 \theta_{txx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \end{cases} \quad (5.1.8)$$

avec les conditions initiales

$$(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t, \theta, \theta_t)(x, 0) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0, \theta_1), \quad (5.1.9)$$

Toutes les constantes dans (5.1.8) sont positives. En utilisant la même méthode comme dans le modèle (5.1.1) avec des modifications nécessaires imposées par la nature du système, nous montrons des estimations de décroissance similaires à (5.1.6)-(5.1.7) avec $U = \left(\varphi_x - \psi - lw, \varphi_t, a\psi_x, \psi_t, k_0(w_x - l\varphi), w_t, \tilde{\theta}_t, \tilde{\theta}_x \right)^T$ où $\tilde{\theta}$ est défini par (5.1.10) et nous avons constaté aussi que les vitesses de propagation d'ondes des deux premières équations du système (5.1.8) contrôle le taux de décroissance de la solution. De plus, nous montrons que le taux de décroissance peut être amélioré avec un taux de $t^{-\frac{7}{6}}$ en considérant les données initiales dans un certain espace à poids. (Voir Théorème 5.3.1 dans la sous-section 5.3.3 et le théorème 5.3.2 dans la sous section 5.3.4)

Afin de présenter la nature du système dissipatif (5.1.8), nous utilisons la transformation (voir [82]) :

$$\tilde{\theta}(x, t) = \int_0^t \theta(x, s) ds + \chi(x) \quad (5.1.10)$$

avec la fonction $\chi := \chi(x)$ satisfaisant

$$k_1 \chi_{xx} = \theta_1 - k_2 \theta_{0xx} + \beta \psi_{1x}. \quad (5.1.11)$$

Ensuite, le système (5.1.8) devient (On écrit, pour plus de simplicité, θ au lieu de $\tilde{\theta}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{tt} - (\varphi_x - \psi - lw)_x - k_0^2 l(w_x - l\varphi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \psi_{tt} - a^2 \psi_{xx} - (\varphi_x - \psi - lw) + m\theta_{tx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ w_{tt} - k_0^2 (w_x - l\varphi)_x - l(\varphi_x - \psi - lw) + \delta w_t = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \theta_{tt} - k_1 \theta_{xx} + \beta \psi_{tx} - k_2 \theta_{txx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \end{array} \right. \quad (5.1.12)$$

avec les conditions initiales associées

$$(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t, \theta, \theta_t)(x, 0) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \tilde{\theta}(x, 0), \tilde{\theta}_t(x, 0)). \quad (5.1.13)$$

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la sous-section 5.2.1 nous montrons des estimations ponctuelle sur la transformée de Fourier de la solution du système (5.1.1)-(5.1.2). Notre outil principal pour montrer ces estimations est la méthode de l'énergie dans l'espace de Fourier. Dans la sous-section 5.2.2, nous discutons du comportement asymptotique de la solution du système (5.1.1)-(5.1.2). Section 5.3 est consacrée à l'étude du système (5.1.8)-(5.1.9), premièrement, nous montrons quelques taux de décroissance de la solution et de ses dérivées spatiales dans la norme L^2 . En outre, certains taux de décroissance seront montrés pour certaines données initiales à poids.

5.2 Modèle de Bresse-Cattaneo

5.2.1 Méthode de l'énergie dans l'espace de Fourier

Notre objectif dans cette section est de transformer notre problème initial (5.1.1)-(5.1.2) en un système de premier ordre ensuite, en appliquant la méthode d'énergie dans l'espace de Fourier pour montrer certaines estimations ponctuelles qui nous aiderons dans la démonstration des estimations de décroissance de la solution.

On introduit les nouvelles variables

$$v = \varphi_x - \psi - lw, \quad u = \varphi_t, \quad z = a\psi_x, \quad y = \psi_t, \quad \phi = k_0(w_x - l\varphi), \quad \eta = w_t \quad (5.2.1)$$

Par conséquent, le système (5.1.1) peut s'écrire sous la forme du système de premier ordre suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} v_t - u_x + y + l\eta = 0, \\ u_t - v_x - lk_0\phi = 0, \\ z_t - ay_x = 0, \\ y_t - az_x - v + m\theta_x = 0, \\ \phi_t - k_0\eta_x + lk_0u = 0, \\ \eta_t - k_0\phi_x - lv + \delta\eta = 0, \\ \theta_t + q_x + my_x = 0, \\ \tau_q q_t + \beta q + \theta_x = 0, \end{array} \right. \quad (5.2.2)$$

et les conditions initiales (5.1.2)

$$(v, u, z, y, \phi, \eta, \theta, q)(x, 0) = (v_0, u_0, z_0, y_0, \phi_0, \eta_0, \theta_0, q_0)(x), \quad (5.2.3)$$

où

$$v_0 = \varphi_{0x} - \psi_0 - lw_0, \quad u_0 = \varphi_1, \quad z_0 = a\psi_{0x}, \quad y_0 = \psi_1, \quad \phi_0 = k_0w_{0x} - lk_0\varphi_0, \quad \eta = w_1.$$

Le problème (5.2.2)-(5.2.3) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t + AU_x + LU = 0, \\ U(x, 0) = U_0(x), \end{array} \right. \quad (5.2.4)$$

où $U = (v, u, z, y, \phi, \eta, \theta, q)^T$, $U_0 = (v_0, u_0, z_0, y_0, \phi_0, \eta_0, \theta_0, q_0)^T$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -lk_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & lk_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

En prenant la transformée de Fourier de(5.2.2) et (5.2.3) , on obtient

$$\begin{cases} \hat{v}_t - i\xi\hat{u} + \hat{y} + l\hat{\eta} = 0, \\ \hat{u}_t - i\xi\hat{v} - lk_0\hat{\phi} = 0, \\ \hat{z}_t - ai\xi\hat{y} = 0, \\ \hat{y}_t - ai\xi\hat{z} - \hat{v} + mi\xi\hat{\theta} = 0, \\ \hat{\phi}_t - i\xi k_0\hat{\eta} + lk_0\hat{u} = 0, \\ \hat{\eta}_t - i\xi k_0\hat{\phi} - l\hat{v} + \delta\hat{\eta} = 0, \\ \hat{\theta}_t + i\xi\hat{q} + mi\xi\hat{y} = 0, \\ \tau_q\hat{q}_t + \beta\hat{q} + i\xi\hat{\theta} = 0, \end{cases} \quad (5.2.5)$$

et

$$(\hat{v}, \hat{u}, \hat{z}, \hat{y}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{\theta}, \hat{q})(\xi, 0) = (\hat{v}_0, \hat{u}_0, \hat{z}_0, \hat{y}_0, \hat{\phi}_0, \hat{\eta}_0, \hat{\theta}_0, \hat{q}_0)(\xi). \quad (5.2.6)$$

On définit la fonctionnelle d'énergie par

$$\hat{E}(\xi, t) := \frac{1}{2}(|\hat{v}|^2 + |\hat{u}|^2 + |\hat{z}|^2 + |\hat{y}|^2 + |\hat{\phi}|^2 + |\hat{\eta}|^2 + |\hat{\theta}|^2 + \tau_q|\hat{q}|^2)(\xi, t). \quad (5.2.7)$$

Lemme 6 Soit $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{z}, \hat{y}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{\theta}, \hat{q})$ une solution de (5.2.5)-(5.2.6). Alors l'énergie $\hat{E}(\xi, t)$ est une fonction décroissante et satisfait pour tout $t \geq 0$

$$\frac{d\hat{E}(\xi, t)}{dt} = -\beta|\hat{q}|^2 - \delta|\hat{\eta}|^2. \quad (5.2.8)$$

Démonstration. Multiplions la première équation de (5.2.5) par \bar{v} , la deuxième équation par \bar{u} , la troisième équation par \bar{z} , la quatrième équation par \bar{y} , la cinquième équation par $\bar{\phi}$, la sixième équation par $\bar{\eta}$, la septième équation par $\bar{\theta}$, la huitième équation par \bar{q} , en sommant ces identités et en prenant la partie réelle, on obtient (5.2.8). ■

Lemme 7 Soit $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{z}, \hat{y}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{\theta}, \hat{q})$ une solution de (5.2.5)-(5.2.6). On définit la fonctionnelle $F_1(\xi, t)$ par

$$F_1(\xi, t) = \operatorname{Re} \left\{ i\xi(\hat{\eta}\bar{\phi} + l\hat{\phi}\bar{y}) \right\}. \quad (5.2.9)$$

Alors on a pour tout $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon'_1 > 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{dF_1(\xi, t)}{dt} + (k_0 - \varepsilon_1)\xi^2|\hat{\phi}|^2 \\ & \leq \varepsilon'_1 \frac{\xi^2}{1 + \xi^2} |\hat{u}|^2 + C(\varepsilon_1)\xi^2(|\hat{z}|^2 + |\hat{\theta}|^2) + C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1)(1 + \xi^2)(|\hat{y}|^2 + |\hat{\eta}|^2). \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Démonstration. Multiplions la cinquième équation de (5.2.5) par $-i\xi\bar{\eta}$, la sixième équation par $i\xi\bar{\phi}$, en sommant le résultat et en prenant la partie réelle, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \operatorname{Re}(i\xi\hat{\eta}\bar{\phi}) \right\} + k_0\xi^2(|\hat{\phi}|^2 - |\hat{\eta}|^2) \\ & = \operatorname{Re}(il\xi\hat{v}\bar{\phi}) - \operatorname{Re}(i\delta\xi\hat{\eta}\bar{\phi}) + \operatorname{Re}(ik_0l\xi\hat{u}\bar{\eta}). \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Ensuite, multiplions la quatrième équation de (5.2.5) par $-i\xi l\bar{\phi}$, la cinquième équation par $i\xi l\bar{y}$, et en prenant la partie réelle de leur somme, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \operatorname{Re}(i\xi l\hat{\phi}\bar{y}) \right\} & = -\operatorname{Re}(k_0l\xi^2\hat{\eta}\bar{y}) - \operatorname{Re}(i\xi k_0l^2\hat{u}\bar{y}) + \operatorname{Re}(al\xi^2\hat{z}\bar{\phi}) \\ & \quad - \operatorname{Re}(il\xi\hat{v}\bar{\phi}) - \operatorname{Re}(ml\xi^2\hat{\theta}\bar{\phi}). \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

En ajoutant (5.2.12) à (5.2.11), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{dF_1(\xi, t)}{dt} + k_0\xi^2(|\hat{\phi}|^2 - |\hat{\eta}|^2) \\ & = -\operatorname{Re}(i\delta\xi\hat{\eta}\bar{\phi}) + \operatorname{Re}(ik_0l\xi\hat{u}\bar{\eta}) + \operatorname{Re}(al\xi^2\hat{z}\bar{\phi}) - \operatorname{Re}(k_0l\xi^2\hat{\eta}\bar{y}) \\ & \quad - \operatorname{Re}(i\xi k_0l^2\hat{u}\bar{y}) - \operatorname{Re}(ml\xi^2\hat{\theta}\bar{\phi}). \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

En appliquant l'inégalité de Young, on obtient (5.2.10). ■

Lemme 8 Soit $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{z}, \hat{y}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{\theta}, \hat{q})$ une solution de (5.2.5)-(5.2.6). On a pour tout $\varepsilon_2 > 0$ l'estimation suivante

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{\hat{\phi}\bar{\hat{u}}\} + (k_0 l - \varepsilon_2) |\hat{u}|^2 \\ & \leq \varepsilon_2 |\hat{v}|^2 + C(\varepsilon_2)(1 + \xi^2) |\hat{\phi}|^2 + C(\varepsilon_2) \xi^2 |\hat{\eta}|^2, \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Démonstration. Multiplions la deuxième équation de (5.2.5) par $\bar{\hat{\phi}}$, la cinquième équation par $\bar{\hat{u}}$, en sommant les résultats et en prenant la partie réelle, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{\hat{\phi}\bar{\hat{u}}\} + k_0 l (|\hat{u}|^2 - |\hat{\phi}|^2) \\ & = k_0 \operatorname{Re}(i\xi \hat{u} \bar{\hat{\eta}}) + \operatorname{Re}(i\xi \hat{v} \bar{\hat{\phi}}). \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

En appliquant l'inégalité de Young au second membre de (5.2.15), on trouve que (5.2.14) est vraie pour tout $\varepsilon_2 > 0$. ■

Lemme 9 Pour tout $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{z}, \hat{y}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{\theta}, \hat{q})$ solution de (5.2.5)-(5.2.6), on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{i\xi \tau_q \hat{q} \bar{\hat{\theta}}\} + \xi^2 (1 - \varepsilon_3) |\hat{\theta}|^2 \\ & \leq \varepsilon'_3 \frac{\xi^4}{1 + \xi^2} |\hat{y}|^2 + C(\varepsilon_3, \varepsilon'_3) (1 + \xi^2) |\hat{q}|^2, \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

et

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{i\xi \hat{\theta} \bar{\hat{y}}\} + \xi^2 (m - \varepsilon_4) |\hat{y}|^2 \\ & \leq C(\varepsilon'_4) (1 + \xi^2) |\hat{\theta}|^2 + \varepsilon'_4 \xi^2 |\hat{z}|^2 + C(\varepsilon_4) \xi^2 |\hat{q}|^2 + \varepsilon'_4 \xi^2 |\hat{v}|^2. \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

où $\varepsilon_3, \varepsilon'_3, \varepsilon_4$ et ε'_4 sont des constantes positives arbitraires.

Démonstration. Multiplions la huitième équation de (5.2.5) par $-i\xi \bar{\hat{\theta}}$, la septième équation par $i\xi \tau_q \bar{\hat{q}}$, en sommant les résultats et en prenant la partie réelle, on obtient

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{i\xi \tau_q \hat{q} \bar{\hat{\theta}}\} + \xi^2 (|\hat{\theta}|^2 - \tau_q |\hat{q}|^2) \\ & = \operatorname{Re}(i\xi \beta \hat{q} \bar{\hat{\theta}}) + \operatorname{Re}(m \tau_q \xi^2 \hat{y} \bar{\hat{q}}). \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

En appliquant l'inégalité de Young au second membre de (5.2.18), on déduit que (5.2.16) est vraie pour tout $\varepsilon_3, \varepsilon'_3 > 0$.

Ensuite, multiplions la septième équation de (5.2.5) par $-i\xi\bar{\hat{y}}$, la quatrième équation par $i\xi\bar{\hat{\theta}}$, en sommant les résultats et en prenant la partie réelle, on obtient

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dt}Re\{i\xi\hat{\theta}\bar{\hat{y}}\} + m\xi^2\left(|\hat{y}|^2 - |\hat{\theta}|^2\right) \\ & = -Re(\xi^2\hat{q}\bar{\hat{y}}) - Re(a\xi^2\hat{z}\bar{\hat{\theta}}) + Re(i\xi\hat{v}\bar{\hat{\theta}}). \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

Par l'inégalité de Young, on obtient (5.2.17) pour tout $\varepsilon_4, \varepsilon'_4 > 0$. ■

Lemme 10 Soit $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{z}, \hat{y}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{\theta}, \hat{q})$ une solution de (5.2.5)-(5.2.6). Soit

$$\alpha = (\tau_q - 1)(1 - a^2) - \tau_q m^2.$$

On définit la fonctionnelle $F_4(\xi, t)$ par

$$F_4(\xi, t) = \tau_q a l F_2(\xi, t) + \xi^2 F_3(\xi, t), \quad (5.2.20)$$

où

$$\begin{aligned} F_3(\xi, t) & = Re \left\{ -\tau_q \hat{y}\bar{\hat{v}} - \tau_q a \hat{u}\bar{\hat{z}} + m \left(\tau_q + \frac{1}{m^2} - \frac{a^2}{m^2} \right) \hat{\theta}\bar{\hat{u}} \right\} \\ & \quad - \frac{(1 - a^2)}{m} Re(\tau_q \hat{v}\bar{\hat{q}}) \end{aligned}$$

et

$$F_2(\xi, t) = Re \{ i\xi(l\hat{y}\bar{\hat{z}} + \hat{z}\bar{\hat{\eta}}) \}.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} & \frac{dF_4(\xi, t)}{dt} + \tau_q a^2 l^2 \xi^2 |\hat{z}|^2 + \tau_q \xi^2 |\hat{v}|^2 - \tau_q (a^2 l^2 + 1) \xi^2 |\hat{y}|^2 \\ & = \tau_q (1 - a^2) l Re(\xi^2 \hat{y}\bar{\hat{\eta}}) + \tau_q Re(i a l \delta \xi \hat{\eta}\bar{\hat{z}}) + \tau_q Re(a m l^2 \xi^2 \hat{\theta}\bar{\hat{z}}) + \alpha Re(i \xi^3 \hat{y}\bar{\hat{u}}) \\ & \quad + \frac{\alpha}{m} Re(i \xi^3 \hat{u}\bar{\hat{q}}) + \frac{\beta(1 - a^2)}{m} Re(\xi^2 \hat{q}\bar{\hat{v}}) + \frac{\tau_q(1 - a^2)}{m} Re(\xi^2 \hat{y}\bar{\hat{q}}) \\ & \quad + \frac{\tau_q(1 - a^2)}{m} Re(l \xi^2 \hat{\eta}\bar{\hat{q}}) + m l k_0 \left(\tau_q + \frac{1}{m^2} - \frac{a^2}{m^2} \right) Re(\xi^2 \hat{\phi}\bar{\hat{\theta}}), \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

Démonstration. Multiplions la troisième équation de (5.2.5) par $-il\xi\bar{\hat{y}}$, la quatrième équation par $il\xi\bar{\hat{z}}$ et en prenant la partie réelle de leur somme, on obtient

$$\frac{d}{dt} \{ Re(il\xi\hat{y}\bar{\hat{z}}) \} + a l \xi^2 (|\hat{z}|^2 - |\hat{y}|^2) = Re(il\xi\hat{v}\bar{\hat{z}}) + Re(m l \xi^2 \hat{\theta}\bar{\hat{z}}). \quad (5.2.22)$$

Ensuite, multiplions la sixième équation de (5.2.5) par $-i\xi\bar{z}$, la troisième équation par $i\xi\bar{\eta}$, on trouve que

$$\frac{d}{dt}\{Re(i\xi\bar{z}\bar{\eta})\} = Re(k_0\xi^2\hat{\phi}\bar{z}) - Re(il\xi\hat{v}\bar{z}) + Re(i\delta\xi\hat{\eta}\bar{z}) - Re(a\xi^2\hat{y}\bar{\eta}). \quad (5.2.23)$$

En sommant (5.2.23) et (5.2.22), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{dF_2(\xi, t)}{dt} + a\xi^2(|\hat{z}|^2 - |\hat{y}|^2) \\ &= Re(k_0\xi^2\hat{\phi}\bar{z}) - Re(a\xi^2\hat{y}\bar{\eta}) + Re(i\delta\xi\hat{\eta}\bar{z}) + Re(ml\xi^2\hat{\theta}\bar{z}). \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

Multiplions la quatrième équation de (5.2.5) par $-\bar{v}$, la première équation par $-\bar{y}$ et en prenant la partie réelle de leur somme, on aura

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dt}\{Re(\hat{y}\bar{v})\} + |\hat{v}|^2 - |\hat{y}|^2 \\ &= -Re(i\xi\hat{u}\bar{y}) - Re(ia\xi\hat{z}\bar{v}) + Re(im\xi\hat{\theta}\bar{v}) + Re(l\hat{\eta}\bar{y}). \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

Ensuite, multiplions la deuxième équation dans (5.2.5) par $-a\bar{z}$, la troisième équation par $-a\bar{u}$ et en prenant la partie réelle de leur somme, on obtient

$$-\frac{d}{dt}\{Re(a\hat{u}\bar{z})\} = -Re(ia\xi\hat{v}\bar{z}) - Re(ak_0l\hat{\phi}\bar{z}) - Re(ia^2\xi\hat{y}\bar{u}). \quad (5.2.26)$$

Par conséquent, multiplions la septième équation dans (5.2.5) par $m\bar{u}$, la deuxième équation par $m\bar{\theta}$ et en prenant la partie réelle de leur somme, on trouve comme ci-dessus

$$\frac{d}{dt}\{Re(m\hat{\theta}\bar{u})\} = -Re(im\xi\hat{q}\bar{u}) - Re(im^2\xi\hat{y}\bar{u}) + Re(im\xi\hat{v}\bar{\theta}) + Re(lmk_0\hat{\phi}\bar{\theta}). \quad (5.2.27)$$

Multiplions la neuvième équation dans (5.2.5) par $-\bar{v}$, la première équation par $-\tau_q\bar{q}$, on trouve comme ci-dessus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{Re(-\tau_q\hat{v}\bar{q})\} &= Re(\beta\hat{q}\bar{v}) + Re(i\xi\hat{\theta}\bar{v}) - Re(i\tau_q\xi\hat{u}\bar{q}) \\ &+ Re(\tau_q\hat{y}\bar{q}) + Re(\tau_q l\hat{\eta}\bar{q}). \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

Calculons $\tau_q(5.2.25) + \tau_q(5.2.26) + (\tau_q + \frac{1}{m^2} - \frac{a^2}{m^2})(5.2.27) + \frac{(1-a^2)}{m}(5.2.28)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{dF_3(\xi, t)}{dt} + \tau_q|\hat{v}|^2 - \tau_q|\hat{y}|^2 \\ &= \alpha Re(i\xi\hat{y}\bar{u}) + \tau_q l Re(\hat{\eta}\bar{y}) - \tau_q Re(ak_0l\hat{\phi}\bar{z}) \\ &+ \frac{\alpha}{m} Re(i\xi\hat{u}\bar{q}) + \frac{\beta(1-a^2)}{m} Re(\hat{q}\bar{v}) + \frac{\tau_q(1-a^2)}{m} Re(\hat{y}\bar{q}) \\ &+ \frac{\tau_q(1-a^2)}{m} Re(l\hat{\eta}\bar{q}) + mlk_0 \left(\tau_q + \frac{1}{m^2} - \frac{a^2}{m^2} \right) Re(\hat{\phi}\bar{\theta}). \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

Multiplions (5.2.24) par $\tau_q a l$ et (5.2.29) par ξ^2 et en sommant les résultats, on obtient (5.2.21). Ceci achève la démonstration du lemme 10. ■

Notre résultat principal est basé sur la proposition suivante inspirée du travail de K. Ide, K. Haramoto et S. Kawashima [40]

Proposition 10 *Soit $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{z}, \hat{y}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{\theta}, \hat{q})$ une solution de (5.2.5)-(5.2.6) et*

$$\alpha = (\tau_q - 1)(1 - a^2) - \tau_q m^2.$$

Alors, pour tout $t \geq 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$, on a les estimations ponctuelle suivantes :

$$\hat{E}(\xi, t) \leq \begin{cases} C e^{-c\rho_1(\xi)t} \hat{E}(\xi, 0), & \rho_1(\xi) = \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^4}, \quad \text{si } \alpha = 0, \\ C e^{-c\rho_2(\xi)t} \hat{E}(\xi, 0), & \rho_2(\xi) = \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^8}, \quad \text{si } \alpha \neq 0, \end{cases} \quad (5.2.30)$$

où C et c sont des constantes positives.

Démonstration. Pour montrer la Proposition 10, on considère les deux cas, $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$ séparément.

Cas 1. $\alpha = 0$. Dans ce cas, (5.2.21) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{dF_4(\xi, t)}{dt} + (\tau_q a^2 l^2 - \varepsilon_5) \xi^2 |\hat{z}|^2 + (\tau_q - \varepsilon_5) \xi^2 |\hat{v}|^2 \\ & \leq C(\varepsilon_5) \xi^2 |\hat{y}|^2 + C(\varepsilon_5)(1 + \xi^2) |\hat{\eta}|^2 + C(\varepsilon_5) \xi^2 |\hat{q}|^2 \\ & \quad + \varepsilon'_5 \frac{\xi^4}{1 + \xi^2} |\hat{\phi}|^2 + C(\varepsilon_5, \varepsilon'_5)(1 + \xi^2) |\hat{\theta}|^2. \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

On définit la fonctionnelle de Lyapunov $L_1(\xi, t)$ par

$$\begin{aligned} L_1(\xi, t) = & N_1(1 + \xi^2) \hat{E}(\xi, t) + \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2} \left\{ F_1(\xi, t) + \mu_2 \frac{\xi^2}{1 + \xi^2} \operatorname{Re}(\hat{\phi} \bar{\hat{u}}) \right\} \\ & + \mu_3 \operatorname{Re}(-i \xi \tau_q \hat{q} \bar{\hat{\theta}}) + \mu_4 \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)} \operatorname{Re}(-i \xi \hat{\theta} \bar{\hat{y}}) + \mu_5 \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)} F_4(\xi, t). \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

où μ_i , ($i = 2, \dots, 5$) et N_1 sont des constantes positives qui seront choisis ultérieurement.

En dérivant la fonctionnelle $L_1(\xi, t)$ par rapport à t et en utilisant (5.2.8), (5.2.10), (5.2.14), (5.2.17), (5.2.16) et (5.2.31), on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{dL_1(\xi, t)}{dt} + \left\{ (k_0 - \varepsilon_1) - \mu_2 C(\varepsilon_2) - \mu_5 \varepsilon'_5 \right\} \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^2} |\hat{\phi}|^2 \\
& + \left\{ \mu_2 (k_0 l - \varepsilon_2) - \varepsilon'_1 \right\} \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^3} |\hat{u}|^2 \\
& + \left\{ \mu_3 (1 - \varepsilon_3) - \mu_4 C(\varepsilon'_4) - C(\varepsilon_1) - \mu_5 C(\varepsilon_5, \varepsilon'_5) \right\} \xi^2 |\hat{\theta}|^2 \\
& + \left\{ \mu_4 (m - \varepsilon_4) - C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1) - \mu_3 \varepsilon'_3 - \mu_5 C(\varepsilon_5) \right\} \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)} |\hat{y}|^2 \\
& + \left\{ \mu_5 (\tau_q a^2 l^2 - \varepsilon_5) - \mu_4 \varepsilon'_4 - C(\varepsilon_1) \right\} \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)} |\hat{z}|^2 \\
& + \left\{ \mu_5 (\tau_q - \varepsilon_5) - \mu_2 \varepsilon_2 - \mu_4 \varepsilon'_4 \right\} \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)} |\hat{v}|^2 \\
\leq & \left\{ C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_2, \varepsilon_5, \mu_2, \mu_5) - N_1 \delta \right\} (1 + \xi^2) |\hat{\eta}|^2 \\
& + \left\{ C(\varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon'_3, \varepsilon_5, \mu_4, \mu_3, \mu_5) - N_1 \beta \right\} (1 + \xi^2) |\hat{q}|^2.
\end{aligned} \tag{5.2.33}$$

Dans les estimations ci-dessus, nous avons utilisé plusieurs inégalités triviales, telles que $\frac{\xi^2}{1 + \xi^2} \leq \min(1, \xi^2)$. À ce stade, nous devons choisir soigneusement nos constantes dans (5.2.33). En choisissant $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ et ε_5 assez petit tels que

$$\varepsilon_1 < k_0, \quad \varepsilon_2 < k_0 l, \quad \varepsilon_3 < 1, \quad \varepsilon_4 < m, \quad \varepsilon_5 < \min \{ \tau_q, \tau_q a^2 l^2 \}. \tag{5.2.34}$$

Ensuite, on prend μ_2 assez petit tel que

$$\mu_2 < \frac{k_0 - \varepsilon_1}{C(\varepsilon_2)}. \tag{5.2.35}$$

et on fixe μ_5 assez grand tel que

$$\mu_5 > \max \left\{ \frac{C(\varepsilon_1)}{\tau_q a^2 l^2 - \varepsilon_5}, \frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\tau_q - \varepsilon_5} \right\}. \tag{5.2.36}$$

Après cela, nous choisissons ε'_1 assez petit tel que

$$\varepsilon'_1 < \mu_2 (k_0 l - \varepsilon_2). \tag{5.2.37}$$

En outre, nous choisissons μ_4 assez grand tel que

$$\mu_4 (m - \varepsilon_4) > C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1) + \mu_5 C(\varepsilon_5). \tag{5.2.38}$$

Une fois μ_4 est fixé, on choisit ε'_4 assez petit tel que

$$\varepsilon'_4 < \min \left\{ \frac{\mu_5(\tau_q a^2 l^2 - \varepsilon_5) - C(\varepsilon_1)}{\mu_4}, \frac{\mu_5(\tau_q - \varepsilon_5) - \mu_2 \varepsilon_2}{\mu_4} \right\}. \quad (5.2.39)$$

Ensuite, on choisit ε'_5 assez petit tel que

$$\varepsilon'_5 < \frac{(k_0 - \varepsilon_1) - \mu_2 C(\varepsilon_2)}{\mu_5}. \quad (5.2.40)$$

Une fois ε'_5 est fixé, on choisit μ_3 assez grand tel que

$$\mu_3 > \frac{\mu_4 C(\varepsilon'_4) + C(\varepsilon_1) + \mu_5 C(\varepsilon_5, \varepsilon'_5)}{1 - \varepsilon_3}. \quad (5.2.41)$$

On choisit ε'_3 assez petit tel que

$$\varepsilon'_3 < \frac{\mu_4(m - \varepsilon_4) - C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1) - \mu_5 C(\varepsilon_5)}{\mu_3}. \quad (5.2.42)$$

Une fois toutes les constantes ci-dessus sont fixés, nous choisissons N_1 assez grand tel que

$$N_1 > \max \left\{ \frac{C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_2, \varepsilon_5, \mu_2, \mu_5)}{\delta}, \frac{C(\varepsilon_3, \varepsilon'_3, \varepsilon_5, \varepsilon_4, \mu_3, \mu_4, \mu_5)}{\beta} \right\}. \quad (5.2.43)$$

Par conséquent, on en déduit qu'il existe une constante positive λ telle que

$$\frac{dL_1(\xi, t)}{dt} + \lambda Q_1(\xi, t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (5.2.44)$$

où

$$\begin{aligned} Q_1(\xi, t) &= \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^2} |\hat{\phi}|^2 + \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^3} |\hat{u}|^2 + (1 + \xi^2)(|\hat{\eta}|^2 + |\hat{q}|^2) \\ &\quad + \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)} (|\hat{z}|^2 + |\hat{v}|^2 + |\hat{y}|^2) + \xi^2 |\hat{\theta}|^2. \end{aligned} \quad (5.2.45)$$

Il est facile de voir que, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$Q_1(\xi, t) \geq \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^3} (|\hat{u}|^2 + |\hat{z}|^2 + |\hat{y}|^2 + |\hat{\theta}|^2 + |\hat{v}|^2 + |\hat{\phi}|^2 + |\hat{\eta}|^2 + |\hat{q}|^2). \quad (5.2.46)$$

En combinant (5.2.8), (6.3.21) et (5.2.46), on déduit qu'il existe une constante positive $\lambda_1 > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$, On a

$$\frac{dL_1(\xi, t)}{dt} \leq -\lambda_1 \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^3} \hat{E}(\xi, t), \quad \forall t \geq 0. \quad (5.2.47)$$

D'autre part, nous avons pour N_1 assez grand, l'existence de deux constantes positives β_1 , β_2 telle que pour tout $t \geq 0$;

$$\beta_1(1 + \xi^2)\hat{E}(\xi, t) \leq L_1(\xi, t) \leq \beta_2(1 + \xi^2)\hat{E}(\xi, t), \quad \forall t \geq 0, \quad (5.2.48)$$

avec $\beta_1 = N_1 - C_1$ et $\beta_2 = N_1 + C_1$. Maintenant, En combinant les estimations (5.2.48) et (5.2.47), on trouve que

$$\frac{dL_1(\xi, t)}{dt} \leq -\frac{\lambda_1}{\beta_1}\rho_1(\xi)L_1(\xi, t), \quad \forall t \geq 0, \quad (5.2.49)$$

et par intégration par parties on aura

$$L_1(\xi, t) \leq Ce^{-c\rho_1(\xi)t}L_1(\xi, 0), \quad \forall t \geq 0. \quad (5.2.50)$$

En utilisant une nouvelle fois l'estimation (5.2.48) avec (5.2.50), on déduit la première estimation de la proposition 10.

Cas 2. $\alpha \neq 0$

Dans ce cas (5.2.21) est estimée par

$$\begin{aligned} & \frac{dF_4(\xi, t)}{dt} + (\tau_q a^2 l^2 - \varepsilon_6)\xi^2|\hat{z}|^2 + (\tau_q - \varepsilon_6)\xi^2|\hat{v}|^2 \\ & \leq \varepsilon'_6 \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2}|\hat{u}|^2 + C(\varepsilon_6, \varepsilon'_6)\xi^2(1 + \xi^2)^2|\hat{y}|^2 + C(\varepsilon_6)(1 + \xi^2)|\hat{\eta}|^2 \\ & \quad + \varepsilon'_6 \frac{\xi^4}{1 + \xi^2}|\hat{\phi}|^2 + C(\varepsilon_6, \varepsilon'_6)(1 + \xi^2)|\hat{\theta}|^2 \\ & \quad + C(\varepsilon_6, \varepsilon'_6)\xi^2(1 + \xi^2)^2|\hat{q}|^2, \end{aligned} \quad (5.2.51)$$

où nous avons utilisé les estimations

$$\begin{aligned} |\alpha Re(i\xi^3 \hat{u} \bar{\hat{y}})| & \leq \varepsilon'_6 \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2}|\hat{u}|^2 + C(\varepsilon'_6)\xi^2(1 + \xi^2)^2|\hat{y}|^2, \\ \left| \frac{\alpha}{m} Re(i\xi^3 \hat{u} \bar{\hat{q}}) \right| & \leq \varepsilon'_6 \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2}|\hat{u}|^2 + C(\varepsilon'_6)\xi^2(1 + \xi^2)^2|\hat{q}|^2 \end{aligned}$$

et

$$\left| mlk_0 \left(\tau_q + \frac{1}{m^2} - \frac{a^2}{m^2} \right) Re(\xi^2 \hat{\phi} \bar{\hat{\theta}}) \right| \leq \varepsilon'_6 \frac{\xi^4}{1 + \xi^2}|\hat{\phi}|^2 + C(\varepsilon'_6)(1 + \xi^2)|\hat{\theta}|^2,$$

pour tout $\varepsilon'_6 > 0$.

Ainsi, en utilisant l'estimation

$$|Re(m\tau_q \xi^2 \hat{y} \bar{\hat{q}})| \leq \varepsilon'_3 \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2}|\hat{y}|^2 + C(\varepsilon'_3)(1 + \xi^2)^2|\hat{q}|^2,$$

(5.2.16) peut être réécrite comme

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{i\xi\tau_q\hat{q}\bar{\hat{\theta}}\} + \xi^2(1 - \varepsilon_3)|\hat{\theta}|^2 \\ & \leq \varepsilon'_3 \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2} |\hat{y}|^2 + C(\varepsilon_3, \varepsilon'_3)(1 + \xi^2)^2 |\hat{q}|^2. \end{aligned} \quad (5.2.52)$$

De même, (5.2.17) peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(-i\xi\hat{\theta}\bar{\hat{y}}) + (m - \varepsilon_4)\xi^2|\hat{y}|^2 \\ & \leq \varepsilon'_4 \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} |\hat{v}|^2 + \varepsilon'_4 \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} |\hat{z}|^2 \\ & \quad + C(\varepsilon'_4)(1 + \xi^2)^2 |\hat{\theta}|^2 + C(\varepsilon_4)\xi^2 |\hat{q}|^2, \end{aligned} \quad (5.2.53)$$

où nous avons utilisé l'estimation

$$\left| -\operatorname{Re}(a\xi^2\hat{z}\bar{\hat{\theta}}) + \operatorname{Re}(i\xi\hat{v}\bar{\hat{\theta}}) \right| \leq \varepsilon'_4 \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} |\hat{z}|^2 + C(\varepsilon'_4)(1 + \xi^2)^2 |\hat{\theta}|^2.$$

Enfin, nous définissons la fonctionnelle de Lyapunov $L_2(\xi, t)$ par

$$\begin{aligned} L_2(\xi, t) = & N_2(1 + \xi^2)^2 \hat{E}(\xi, t) + \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^5} \left\{ F_1(\xi, t) + \tilde{\mu}_2 \frac{\xi^2}{1 + \xi^2} \operatorname{Re}(\hat{\phi}\bar{\hat{u}}) \right\} \\ & + \tilde{\mu}_3 \operatorname{Re}(-i\xi\tau_q\hat{q}\bar{\hat{\theta}}) + \tilde{\mu}_4 \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} \operatorname{Re}(-i\xi\hat{\theta}\bar{\hat{y}}) + \tilde{\mu}_5 \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)^4} F_4(\xi, t). \end{aligned}$$

où $\tilde{\mu}_i$, ($i = 2, \dots, 5$) et N_2 sont des constantes positives qui seront fixées ultérieurement.

En dérivant la fonctionnelle $L_2(\xi, t)$ par rapport à t et en utilisant (5.2.8), (5.2.10), (5.2.14), (5.2.53), (5.2.52) et (5.2.51), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{dL_2(\xi, t)}{dt} + \left\{ (k_0 - \varepsilon_1) - \tilde{\mu}_2 C(\varepsilon_2) - \tilde{\mu}_5 \varepsilon'_6 \right\} \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^5} |\hat{\phi}|^2 \\ & + \left\{ \tilde{\mu}_2(k_0 l - \varepsilon_2) - \varepsilon'_1 - \tilde{\mu}_5 \varepsilon'_6 \right\} \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^6} |\hat{u}|^2 \\ & + \left\{ \tilde{\mu}_3(1 - \varepsilon_3) - \tilde{\mu}_4 C(\varepsilon'_4) - C(\varepsilon_1) - \tilde{\mu}_5 C(\varepsilon_6, \varepsilon'_6) \right\} \xi^2 |\hat{\theta}|^2 \\ & + \left\{ \tilde{\mu}_4(m - \varepsilon_4) - C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1) - \tilde{\mu}_3 \varepsilon'_3 - \tilde{\mu}_5 C(\varepsilon_6, \varepsilon'_6) \right\} \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2} |\hat{y}|^2 \\ & + \left\{ \tilde{\mu}_5(\tau_q a^2 l^2 - \varepsilon_6) - \tilde{\mu}_4 \varepsilon'_4 - C(\varepsilon_1) \right\} \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^4} |\hat{z}|^2 \\ & + \left\{ \tilde{\mu}_5(\tau_q - \varepsilon_6) - \tilde{\mu}_2 \varepsilon_2 - \tilde{\mu}_4 \varepsilon'_4 \right\} \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^4} |\hat{v}|^2 \\ & \leq \left\{ C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_5) - N_2 \delta \right\} (1 + \xi^2)^2 |\hat{\eta}|^2 \\ & + \left\{ C(\varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon'_3, \varepsilon_6, \varepsilon'_6, \tilde{\mu}_4, \tilde{\mu}_3, \tilde{\mu}_5) - N_2 \beta \right\} (1 + \xi^2)^2 |\hat{q}|^2. \end{aligned} \quad (5.2.54)$$

Nous choisissons nos constantes dans (5.2.54) comme suit : soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ et ε_6 assez petits de telle sorte que

$$\varepsilon_1 < k_0, \quad \varepsilon_2 < k_0 l, \quad \varepsilon_3 < 1, \quad \varepsilon_4 < m, \quad \varepsilon_6 < \min \{ \tau_q, \tau_q a^2 l^2 \}. \quad (5.2.55)$$

Ensuite, on prend $\tilde{\mu}_2$ suffisamment petit de telle sorte que

$$\tilde{\mu}_2 < \frac{k_0 - \varepsilon_1}{C(\varepsilon_2)}. \quad (5.2.56)$$

et on fixe $\tilde{\mu}_5$ suffisamment grand de telle sorte que

$$\tilde{\mu}_5 > \max \left\{ \frac{C(\varepsilon_1)}{\tau_q a^2 l^2 - \varepsilon_6}, \frac{\tilde{\mu}_2 \varepsilon_2}{\tau_q - \varepsilon_6} \right\}. \quad (5.2.57)$$

on peut alors choisir ε'_1 et ε'_6 suffisamment petit de telle sorte que

$$\varepsilon'_1 < \tilde{\mu}_2(k_0 l - \varepsilon_2), \quad \varepsilon'_6 < \min \left\{ \frac{\tilde{\mu}_2(k_0 l - \varepsilon_2) - \varepsilon'_1}{\tilde{\mu}_5}, \frac{(k_0 - \varepsilon_1) - \tilde{\mu}_2 C(\varepsilon_2)}{\tilde{\mu}_5} \right\}. \quad (5.2.58)$$

En outre, nous choisissons $\tilde{\mu}_4$ suffisamment grand de telle sorte que

$$\tilde{\mu}_4(m - \varepsilon_4) > C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1) + \tilde{\mu}_5 C(\varepsilon_6, \varepsilon'_6). \quad (5.2.59)$$

Une fois $\tilde{\mu}_4$ est fixé, on choisit ε'_4 suffisamment petit de telle sorte que

$$\varepsilon'_4 < \min \left\{ \frac{\tilde{\mu}_5(\tau_q a^2 l^2 - \varepsilon_6) - C(\varepsilon_1)}{\tilde{\mu}_4}, \frac{\tilde{\mu}_5(\tau_q - \varepsilon_6) - \tilde{\mu}_2 \varepsilon_2}{\tilde{\mu}_4} \right\}. \quad (5.2.60)$$

Ensuite, nous choisissons $\tilde{\mu}_3$ assez grand telle que

$$\tilde{\mu}_3 > \frac{\tilde{\mu}_4 C(\varepsilon'_4) + C(\varepsilon_1) + \tilde{\mu}_5 C(\varepsilon_6, \varepsilon'_6)}{1 - \varepsilon_3}. \quad (5.2.61)$$

alors on peut choisir ε'_3 assez petit tel que

$$\varepsilon'_3 < \frac{\tilde{\mu}_4(m - \varepsilon_4) - C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1) - \tilde{\mu}_5 C(\varepsilon_6, \varepsilon'_6)}{\tilde{\mu}_3}. \quad (5.2.62)$$

Une fois toutes les constantes ci-dessus sont fixées, nous choisissons N_2 assez grand tel que

$$N_2 > \max \left\{ \frac{C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_5)}{\delta}, \frac{C(\varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon'_3, \varepsilon_6, \varepsilon'_6, \mu_3, \mu_4, \mu_5)}{\beta} \right\}. \quad (5.2.63)$$

Par conséquent, on en déduit qu'il existe une constante positive $\tilde{\lambda} > 0$, telle que

$$\frac{dL_2(\xi, t)}{dt} + \tilde{\lambda} Q_2(\xi, t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (5.2.64)$$

où

$$\begin{aligned}
Q_2(\xi, t) &= \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^5} |\hat{\phi}|^2 + \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^6} |\hat{u}|^2 + \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^4} (|\hat{z}|^2 + |\hat{v}|^2) \\
&\quad + \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2} |\hat{y}|^2 + \xi^2 |\hat{\theta}|^2 + (1 + \xi^2)^2 (|\hat{\eta}|^2 + |\hat{q}|^2).
\end{aligned} \tag{5.2.65}$$

Il est facile de voir maintenant que, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$Q_2(\xi, t) \geq \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^6} \left(|\hat{u}|^2 + |\hat{z}|^2 + |\hat{y}|^2 + |\hat{\theta}|^2 + |\hat{v}|^2 + |\hat{\phi}|^2 + |\hat{\eta}|^2 + |\hat{q}|^2 \right). \tag{5.2.66}$$

D'autre part, il existe deux constantes positives, β_3 et β_4 , de telle sorte que, pour tout $t \geq 0$,

$$\beta_3(1 + \xi^2)^2 \hat{E}(\xi, t) \leq L_2(\xi, t) \leq \beta_4(1 + \xi^2)^2 \hat{E}(\xi, t). \tag{5.2.67}$$

En combinant (5.2.7), (5.2.64), (5.2.66) et (5.2.67), on obtient la seconde estimation dans (5.2.30), ce qui complète la démonstration de la Proposition 10. ■

5.2.2 Résultat principal

Dans cette section, on montre quelques estimations de décroissance de l'énergie du système (5.1.1)-(5.1.2).

Théorème 5.2.1 *Soit s un entier positif et*

$$\alpha = (\tau_q - 1)(1 - a^2) - \tau_q m^2,$$

on suppose que $U_0 \in H^s(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Alors, la solution U du problème (5.1.1)-(5.1.2) satisfait les estimations de décroissance suivantes :

– Pour $\alpha = 0$

$$\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2} \leq C(1 + t)^{-1/12 - k/6} \|U_0\|_{L^1} + C(1 + t)^{-\ell/2} \|\partial_x^{k+\ell} U_0\|_{L^2}. \tag{5.2.68}$$

– Pour $\alpha \neq 0$

$$\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2} \leq C(1 + t)^{-1/12 - k/6} \|U_0\|_{L^1} + C(1 + t)^{-\ell/10} \|\partial_x^{k+\ell} U_0\|_{L^2}, \tag{5.2.69}$$

où k et ℓ sont des entiers positifs satisfaisant $k + \ell \leq s$ et C est une constante positive.

5.2.3 Démonstration du Théorème 5.2.1

Dans cette section, nous montrons le théorème 5.2.1. Nos principaux outils sont les estimations de décroissance de l'image de Fourier de la solution obtenue dans la proposition 10 et quelques estimations intégrales.

Tout d'abord, nous supposons que $\alpha = 0$. En appliquant le théorème de Plancherel et en observant que $|\hat{U}(\xi, t)|^2$ et $\hat{E}(\xi, t)$ sont équivalentes et en utilisant la première estimation dans (5.2.30), on obtient

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2k} |\hat{U}(\xi, t)|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2k} e^{-c\rho_1(\xi)t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \\
&= C \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2k} e^{-c\rho_1(\xi)t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi + C \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2k} e^{-c\rho_1(\xi)t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned} \tag{5.2.70}$$

L'intégrale est divisé en deux parties : la partie basse fréquence ($|\xi| \leq 1$) et la partie à haute fréquence ($|\xi| \geq 1$). Comme $\rho_1(\xi) \geq \frac{1}{16}\xi^6$, pour $|\xi| \leq 1$, alors que nous avons pour la partie à basse fréquence

$$I_1 \leq C \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2k} e^{-\frac{1}{16}|\xi|^6 t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \leq C \|\hat{U}_0\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2k} e^{-\frac{1}{16}|\xi|^6 t} d\xi. \tag{5.2.71}$$

Puis, en utilisant l'inégalité suivante

$$\int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^\alpha e^{-c|\xi|^\lambda t} d\xi \leq (1+t)^{-(\alpha+1)/\lambda}, \tag{5.2.72}$$

on estime I_1 par

$$I_1 \leq C \|U_0\|_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{1}{6} - \frac{k}{3}}. \tag{5.2.73}$$

Pour estimer le terme I_2 , nous utilisons l'inégalité $\rho_1(\xi) \geq \frac{1}{16}\xi^{-2}$, pour $|\xi| \geq 1$ pour obtenir

$$I_2 \leq C \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2k} e^{-c\frac{1}{16}\xi^{-2}t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi. \tag{5.2.74}$$

En utilisant l'inégalité

$$\sup_{|\xi| \geq 1} \left\{ |\xi|^{-2\ell} e^{-c\xi^{-2}t} \right\} \leq C(1+t)^{-\ell}, \tag{5.2.75}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \sup_{|\xi| \geq 1} \left\{ |\xi|^{-2\ell} e^{-\frac{1}{16}\xi^{-2}t} \right\} \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2(k+\ell)} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \\
&\leq C(1+t)^{-\ell} \|\partial_x^{k+\ell} U_0\|_2^2.
\end{aligned} \tag{5.2.76}$$

En remplaçant (5.2.73) et (5.2.76) dans (5.2.70), on obtient (5.2.68).

Ensuite, nous supposons que $\alpha \neq 0$, alors

$$\begin{cases} \rho_2(\xi) \geq c\xi^6, & \text{pour } |\xi| \leq 1, \\ \rho_2(\xi) \geq c\xi^{-10}, & \text{pour } |\xi| \geq 1, \end{cases} \tag{5.2.77}$$

où $c > 0$. Comme ci-dessus, en utilisant la seconde estimation de (5.2.30), on obtient

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2k} |\hat{U}(\xi, t)|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2k} e^{-c\rho_2(\xi)t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \\
&= C \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2k} e^{-c\rho_2(\xi)t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi + C \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2k} e^{-c\rho_2(\xi)t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \\
&= J_1 + J_2.
\end{aligned} \tag{5.2.78}$$

La partie à basse fréquence J_1 est estimée comme I_1 , on a

$$J_1 \leq C \|U_0\|_1^2 (1+t)^{-\frac{1}{6} - \frac{k}{3}}. \tag{5.2.79}$$

Pour la partie à haute fréquence J_2 , en utilisant la seconde inégalité de (5.2.77), on déduit

$$J_2 \leq C \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2k} e^{-c\xi^{-10}t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \tag{5.2.80}$$

En utilisant l'inégalité

$$\sup_{|\xi| \geq 1} \left\{ |\xi|^{-2\ell} e^{-c\xi^{-10}t} \right\} \leq C(1+t)^{-\frac{\ell}{5}}, \tag{5.2.81}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq C \sup_{|\xi| \geq 1} \left\{ |\xi|^{-2\ell} e^{-c\xi^{-10}t} \right\} \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2(k+\ell)} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{\ell}{5}} \|\partial_x^{k+\ell} U_0\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{5.2.82}$$

En combinant les estimations (5.2.79) et (5.2.82), alors la seconde estimation (5.2.69) est établie. Ceci achève la démonstration du Théorème 5.2.1.

5.3 Modèle de Bresse en thermoélasticité de type III

5.3.1 Position du problème

Dans cette sous-section, on considère le problème(5.1.12)-(5.1.13). On procède par la même méthode utilisée dans la section précédente. on réécrit notre problème sous forme d'un système de premier ordre (en temps) en introduisant les nouvelles fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} v &= \varphi_x - \psi - lw, & u &= \varphi_t, & z &= a\psi_x, & y &= \psi_t, \\ \phi &= k_0(w_x - l\varphi), & \eta &= w_t, & \vartheta &= \theta_t, & \sigma &= \theta_x. \end{aligned}$$

Par conséquent le système (5.1.12) peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_t - u_x + y + l\eta = 0, \\ u_t - v_x - k_0l\phi = 0, \\ z_t - ay_x = 0, \\ y_t - az_x - v + m\vartheta_x = 0, \\ \phi_t - k_0\eta_x + k_0lu = 0, \\ \eta_t - k_0\phi_x - lv + \delta\eta = 0, \\ \vartheta_t - k_1\sigma_x + \beta y_x - k_2\vartheta_{xx} = 0, \\ \sigma_t - \vartheta_x = 0, \end{array} \right. \quad (5.3.1)$$

et les conditions initiales correspondantes deviennent

$$(v, u, z, y, \phi, \eta, \vartheta, \sigma)(x, 0) = (v_0, u_0, z_0, y_0, \phi_0, \eta_0, \vartheta_0, \sigma_0)(x) \quad (5.3.2)$$

avec

$$\begin{aligned} v_0 &= \varphi_{0,x} - \psi_0 - lw_0, & u_0 &= \varphi_1, & z_0 &= a\psi_{0,x}, & y_0 &= \psi_1, \\ \phi_0 &= k_0(w_{0,x} - l\varphi_0), & \eta_0 &= w_1, & \vartheta_0 &= \theta_1, & \sigma_0 &= \theta_{0,x} \end{aligned}$$

Le problème (5.3.1)-(5.3.2) peut aussi s'écrire sous la forme d'un système hyperbolique-parabolique de premier ordre (en temps) :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t + AU_x + LU = BU_{xx}, \\ U(x, 0) = U_0(x) \end{array} \right. \quad (5.3.3)$$

où $U = (v, u, z, y, \phi, \eta, \vartheta, \sigma)^T$, $U_0 = (v_0, u_0, z_0, y_0, \phi_0, \eta_0, \vartheta_0, \sigma_0)^T$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_0 l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_0 l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.3.4)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.3.5)$$

En prenant la transformée de Fourier du système (5.3.3), on obtient

$$\begin{cases} \hat{U}_t + i\xi A \hat{U} + L \hat{U} = -\xi^2 B \hat{U}, \\ \hat{U}(\xi, 0) = \hat{U}_0(\xi), \end{cases} \quad (5.3.6)$$

où $\hat{U}(\xi, t) = (\hat{v}, \hat{u}, \hat{z}, \hat{y}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{\vartheta}, \hat{\sigma})^T(\xi, t)$. La première équation de (5.3.6) peut être réécrite comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{v}_t - i\xi\hat{u} + \hat{y} + l\hat{\eta} = 0, \\ \hat{u}_t - i\xi\hat{v} - k_0l\hat{\phi} = 0, \\ \hat{z}_t - ia\xi\hat{y} = 0, \\ \hat{y}_t - ia\xi\hat{z} - \hat{v} + im\xi\hat{\vartheta} = 0, \\ \hat{\phi}_t - ik_0\xi\hat{\eta} + k_0l\hat{u} = 0, \\ \hat{\eta}_t - ik_0\xi\hat{\phi} - l\hat{v} + \delta\hat{\eta} = 0, \\ \hat{\vartheta}_t - ik_1\xi\hat{\sigma} + i\xi\beta\hat{y} + \xi^2k_2\hat{\vartheta} = 0, \\ \hat{\sigma}_t - i\xi\hat{\vartheta} = 0, \end{array} \right. \quad (5.3.7)$$

L'énergie associée au système (5.3.6) est définie par

$$\hat{E}(\xi, t) = \frac{1}{2} \left\{ \beta|\hat{v}|^2 + \beta|\hat{u}|^2 + \beta|\hat{z}|^2 + \beta|\hat{y}|^2 + \beta|\hat{\phi}|^2 + \beta|\hat{\eta}|^2 + m|\hat{\vartheta}|^2 + mk_1|\hat{\sigma}|^2 \right\} \quad (5.3.8)$$

Lemme 11 Soit $\hat{U}(\xi, t)$ une solution de (5.3.6), alors l'énergie $\hat{E}(\xi, t)$ est une fonction décroissante et satisfait pour tout $t \geq 0$

$$\frac{d\hat{E}(\xi, t)}{dt} \leq -\beta\delta|\hat{\eta}|^2 - \xi^2mk_2|\hat{\vartheta}|^2. \quad (5.3.9)$$

Démonstration. En multipliant la première équation de (5.3.7) par $\beta\bar{\hat{v}}$, la seconde équation par $\beta\bar{\hat{u}}$, la troisième équation par $\beta\bar{\hat{z}}$, la quatrième équation par $\beta\bar{\hat{y}}$, la cinquième équation par $\beta\bar{\hat{\phi}}$, la sixième équation par $\beta\bar{\hat{\eta}}$, la septième équation par $m\bar{\hat{\vartheta}}$ et la huitième équation par $k_1m\bar{\hat{\sigma}}$, en sommant les résultats et en prenant la partie réelle, d'ou (6.3.7) . Ceci achève la démonstration du Lemme 11. ■

5.3.2 Méthode de l'énergie dans l'espace de Fourier

Dans la proposition suivante, on donne les estimations ponctuelle de la fonctionnelle $\hat{E}(\xi, t)$

Proposition 11 Soit $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{z}, \hat{y}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{\vartheta}, \hat{\sigma})$ est une solution de (5.3.7). Alors pour tout $t \geq 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$, on a les estimations ponctuelles suivantes :

$$\hat{E}(\xi, t) \leq \begin{cases} Ce^{-c\rho_1(\xi)t} \hat{E}(\xi, 0), & \text{si } a = 1 \\ Ce^{-c\rho_2(\xi)t} \hat{E}(\xi, 0), & \text{si } a \neq 1 \end{cases} \quad (5.3.10)$$

où

$$\rho_1(\xi) = \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^4}, \quad \rho_2(\xi) = \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^7}$$

et C, c sont des constantes positives.

Afin de démontrer la Proposition 11, nous avons besoin de plusieurs lemmes.

Lemme 12 Soit $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{z}, \hat{y}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{\vartheta}, \hat{\sigma})$ une solution de (5.3.7) et soit

$$F_1(\xi, t) = \operatorname{Re} \left\{ i\xi(\hat{\eta}\bar{\hat{\phi}} + l\hat{y}\bar{\hat{\phi}}) \right\}. \quad (5.3.11)$$

Alors, pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon'_1 > 0$, nous avons l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{dF_1(\xi, t)}{dt} + (k_0 - \varepsilon_1)\xi^2|\hat{\phi}|^2 \\ & \leq \varepsilon'_1 \frac{\xi^2}{1 + \xi^2} |\hat{u}|^2 + C(\varepsilon_1)\xi^2 \left(|\hat{z}|^2 + |\hat{\vartheta}|^2 \right) \\ & \quad + C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1)(1 + \xi^2)(|\hat{y}|^2 + |\hat{\eta}|^2). \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Démonstration. En multipliant la cinquième équation de (5.3.7) par $-i\xi\bar{\hat{\eta}}$, la sixième équation par $i\xi\bar{\hat{\phi}}$ en sommant les résultats et en prenant la partie réelle, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \operatorname{Re}(i\xi\hat{\eta}\bar{\hat{\phi}}) \right\} + k_0\xi^2 \left(|\hat{\phi}|^2 - |\hat{\eta}|^2 \right) \\ & = \operatorname{Re}(il\xi\hat{v}\bar{\hat{\phi}}) - \operatorname{Re}(i\delta\xi\hat{\eta}\bar{\hat{\phi}}) + \operatorname{Re}(ik_0l\xi\hat{u}\bar{\hat{\eta}}). \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

En multipliant la quatrième équation de (5.3.7) par $-i\xi l\bar{\hat{\phi}}$, la cinquième équation par $i\xi l\bar{\hat{y}}$ et en prenant la partie réelle de leur somme, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \operatorname{Re}(i\xi l\hat{y}\bar{\hat{\phi}}) \right\} & = -\operatorname{Re}(k_0l\xi^2\hat{\eta}\bar{\hat{y}}) - \operatorname{Re}(i\xi k_0l^2\hat{u}\bar{\hat{y}}) + \operatorname{Re}(al\xi^2\hat{z}\bar{\hat{\phi}}) \\ & \quad - \operatorname{Re}(il\xi\hat{v}\bar{\hat{\phi}}) - \operatorname{Re}(ml\xi^2\hat{\vartheta}\bar{\hat{\phi}}). \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

En sommant (5.3.14) et (5.3.13), on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{dF_1(\xi, t)}{dt} + k_0 \xi^2 \left(|\hat{\phi}|^2 - |\hat{\eta}|^2 \right) \\
&= -\operatorname{Re}(i\delta \xi \hat{\eta} \bar{\hat{\phi}}) + \operatorname{Re}(ik_0 l \xi \hat{u} \bar{\hat{\eta}}) + \operatorname{Re}(a l \xi^2 \hat{z} \bar{\hat{\phi}}) - \operatorname{Re}(k_0 l \xi^2 \hat{\eta} \bar{\hat{y}}) \\
&\quad - \operatorname{Re}(i \xi k_0 l^2 \hat{u} \bar{\hat{y}}) - \operatorname{Re}(m l \xi^2 \hat{\vartheta} \bar{\hat{\phi}}).
\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

En appliquant l'inégalité de Young au termes du second membre de (5.3.15), on obtient (5.3.12). Ceci termine la démonstration du Lemme 12. ■

Lemme 13 Soit $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{z}, \hat{y}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{\vartheta}, \hat{\sigma})$ une solution de (5.3.7). Soit

$$F_2(\xi, t) = \operatorname{Re} \left\{ i \xi \left(a k_1 \hat{\vartheta} \bar{\hat{\sigma}} + \beta a \hat{\vartheta} \bar{\hat{y}} + 2 k_1 \beta \hat{z} \bar{\hat{\sigma}} \right) \right\}. \tag{5.3.16}$$

Alors, on a pour tout $\varepsilon_2, \varepsilon'_2 > 0$, l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
& \frac{dF_2(\xi, t)}{dt} + (a k_1^2 - \varepsilon_2) \xi^2 |\hat{\sigma}|^2 + (a \beta^2 - \varepsilon_2) \xi^2 |\hat{y}|^2 \\
& \leq \varepsilon'_2 \xi^2 |\hat{v}|^2 + \varepsilon'_2 \xi^2 |\hat{z}|^2 + C(\varepsilon_2, \varepsilon'_2) (1 + \xi^2 + \xi^4) |\hat{\vartheta}|^2.
\end{aligned} \tag{5.3.17}$$

Démonstration.

En multipliant la septième équation de (5.3.7) par $i a k_1 \xi \bar{\hat{\sigma}}$, la huitième équation par $-i a k_1 \xi \bar{\hat{\vartheta}}$, en sommant tous les résultats et en prenant la partie réelle, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \{ \operatorname{Re}(i a k_1 \xi \hat{\vartheta} \bar{\hat{\sigma}}) \} + \xi^2 (a k_1^2 |\hat{\sigma}|^2 - a k_1 |\hat{\vartheta}|^2) \\
&= \operatorname{Re}(a k_1 \beta \xi^2 \hat{y} \bar{\hat{\sigma}}) - \operatorname{Re}(i a k_1 k_2 \xi^3 \hat{\vartheta} \bar{\hat{\sigma}}).
\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

De même, en multipliant la septième équation par $-i a \beta \xi \bar{\hat{y}}$ et la quatrième équation (5.3.7) par $i a \beta \xi \bar{\hat{\vartheta}}$, on obtient par le même procédé que ci-dessus

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \{ \operatorname{Re}(i a \beta \xi \hat{\vartheta} \bar{\hat{y}}) \} + \xi^2 (a \beta^2 |\hat{y}|^2 - m a \beta |\hat{\vartheta}|^2) \\
&= \operatorname{Re}(a k_1 \beta \xi^2 \hat{\sigma} \bar{\hat{y}}) + \operatorname{Re}(i a k_2 \beta \xi^3 \hat{\vartheta} \bar{\hat{y}}) - \operatorname{Re}(a^2 \beta \xi^2 \hat{z} \bar{\hat{\vartheta}}) + \operatorname{Re}(i a \beta \xi \hat{v} \bar{\hat{\vartheta}}).
\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Ensuite, en multipliant la troisième équation par $2 i k_1 \beta \xi \bar{\hat{\sigma}}$ et la huitième équation dans (5.3.7) par $-2 i k_1 \beta \xi \bar{\hat{z}}$, on aura

$$\frac{d}{dt} \{ \operatorname{Re}(i 2 k_1 \beta \xi \hat{z} \bar{\hat{\sigma}}) \} - \operatorname{Re}(2 k_1 \beta \xi^2 \hat{\vartheta} \bar{\hat{z}}) + \operatorname{Re}(2 a k_1 \beta \xi^2 \hat{y} \bar{\hat{\sigma}}) = 0. \tag{5.3.20}$$

En sommant (5.3.18), (5.3.19) et (5.3.20), on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} F_2(\xi, t) + \xi^2(ak_1^2|\hat{\sigma}|^2 + a\beta^2|\hat{y}|^2) - \xi^2(ak_1|\hat{v}|^2 + ma\beta|\hat{v}|^2) \\
= & -Re(iak_1k_2\xi^3\hat{v}\bar{\hat{\sigma}}) + Re(iak_2\beta\xi^3\hat{v}\bar{\hat{y}}) \\
& + Re(ia\beta\xi\hat{v}\bar{\hat{v}}) - (2k_1 + a^2)\beta Re(\xi^2\hat{v}\bar{\hat{z}}).
\end{aligned} \tag{5.3.21}$$

Une application de l'inégalité de Young, nous permet d'avoir (5.3.17). Ceci achève la démonstration du Lemme 13. ■

Lemme 14 Soit $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{z}, \hat{y}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{v}, \hat{\sigma})$ une solution de (5.3.7). On définit la fonctionnelle

$$F_3(\xi, t) = Re(\hat{\phi}\bar{\hat{u}}). \tag{5.3.22}$$

Alors, on a pour tout $\varepsilon_3 > 0$,

$$\begin{aligned}
& \frac{dF_3(\xi, t)}{dt} + (k_0l - \varepsilon_3)|\hat{u}|^2 \\
\leq & \varepsilon_3|\hat{v}|^2 + C(\varepsilon_3)(1 + \xi^2)|\hat{\phi}|^2 + C(\varepsilon_3)\xi^2|\hat{\eta}|^2.
\end{aligned} \tag{5.3.23}$$

Démonstration. En multipliant la seconde équation par $\bar{\hat{\phi}}$, la cinquième équation par $\bar{\hat{u}}$, En sommant les résultats et en prenant la partie réelle, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{dF_3(\xi, t)}{dt} + k_0l \left(|\hat{u}|^2 - |\hat{\phi}|^2 \right) \\
= & k_0Re(i\xi\bar{\hat{u}}\hat{\eta}) + Re(i\xi\hat{v}\bar{\hat{\phi}}).
\end{aligned} \tag{5.3.24}$$

En appliquant l'inégalité de Young au second membre de (5.3.24), on aura (5.3.23). Ce qui achève la démonstration du Lemme14. ■

Lemme 15 Soit $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{z}, \hat{y}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{v}, \hat{\sigma})$ une solution de (5.3.7). On introduit la fonctionnelle

$$F_4(\xi, t) = Re \{ i\xi(l\hat{y}\bar{\hat{z}} + \hat{z}\bar{\hat{\eta}}) \}. \tag{5.3.25}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
& \frac{dF_4(\xi, t)}{dt} + a\xi^2(|\hat{z}|^2 - |\hat{y}|^2) \\
= & Re(k_0\xi^2\hat{\phi}\bar{\hat{z}}) - Re(a\xi^2\hat{y}\bar{\hat{\eta}}) + Re(id\xi\hat{\eta}\bar{\hat{z}}) + Re(m\xi^2\hat{v}\bar{\hat{z}}).
\end{aligned} \tag{5.3.26}$$

Démonstration. En multipliant la troisième équation par $-il\xi\bar{y}$, la quatrième équation par $il\xi\bar{z}$ et en prenant la partie réelle de leur somme, on obtient

$$\frac{d}{dt} \{Re(il\xi\hat{y}\bar{z})\} + al\xi^2(|\hat{z}|^2 - |\hat{y}|^2) = Re(il\xi\hat{v}\bar{z}) + Re(ml\xi^2\hat{v}\bar{z}). \quad (5.3.27)$$

Ensuite, en multipliant la sixième équation par $-i\xi\bar{z}$, la troisième équation par $i\xi\bar{\eta}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{Re(i\xi\hat{z}\bar{\eta})\} &= Re(k_0\xi^2\hat{\phi}\bar{z}) - Re(il\xi\hat{v}\bar{z}) \\ &\quad + Re(i\delta\xi\hat{\eta}\bar{z}) - Re(a\xi^2\hat{y}\bar{\eta}). \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

En sommant (5.3.28) et (5.3.27), on aboutit à (5.3.26) ■

Lemme 16 Soit $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{z}, \hat{y}, \hat{\phi}, \hat{\eta}, \hat{v}, \hat{\sigma})$ est une solution de (5.3.7). Soit

$$F_5(\xi, t) = Re(\hat{y}\bar{v} + a\hat{u}\bar{z}). \quad (5.3.29)$$

Alors on a

$$\begin{aligned} &\frac{dF_5(\xi, t)}{dt} + |\hat{y}|^2 - |\hat{v}|^2 \\ &= (a^2 - 1)Re(i\xi\hat{y}\bar{u}) - Re(im\xi\hat{v}\bar{v}) - Re(l\hat{\eta}\bar{y}) + Re(ak_0l\hat{\phi}\bar{z}). \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

Démonstration. En multipliant la quatrième équation par \bar{v} , la première équation par \bar{y} et en prenant la partie réelle de leur somme, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \{Re(\hat{y}\bar{v})\} + |\hat{y}|^2 - |\hat{v}|^2 \\ &= Re(i\xi\hat{u}\bar{y}) + Re(ia\xi\hat{z}\bar{v}) - Re(im\xi\hat{v}\bar{v}) - Re(l\hat{\eta}\bar{y}). \end{aligned} \quad (5.3.31)$$

En multipliant la seconde équation par $a\bar{z}$, la troisième équation par $a\bar{u}$ et en prenant la partie réelle de la somme, on obtient

$$\frac{d}{dt} \{Re(a\hat{u}\bar{z})\} = Re(ia\xi\hat{v}\bar{z}) + Re(ak_0l\hat{\phi}\bar{z}) + Re(a^2\xi\hat{y}\bar{u}). \quad (5.3.32)$$

En sommant (5.3.32) et (5.3.31), on obtient (5.3.30). ■

Lemme 17 On définit la fonctionnelle

$$F_6(\xi, t) = alF_4(\xi, t) - \xi^2F_5(\xi, t) \quad (5.3.33)$$

Alors, on a :

– Pour $a = 1$, alors on a pour tout $\varepsilon_4 > 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{dF_6(\xi, t)}{dt} + (a^2l^2 - \varepsilon_4)\xi^2|\hat{z}|^2 + (1 - \varepsilon_4)\xi^2|\hat{v}|^2 \\ & \leq (a^2l^2 + 1)\xi^2|\hat{y}|^2 + C(\varepsilon_4)(1 + \xi^2)|\hat{\eta}|^2 \\ & + C(\varepsilon_4)(\xi^4 + \xi^2)|\hat{\vartheta}|^2. \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

– Pour $a \neq 1$, on obtient pour tout $\varepsilon_5 > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{dF_6(\xi, t)}{dt} + (a^2l^2 - \varepsilon_5)\xi^2|\hat{z}|^2 + (1 - \varepsilon_5)\xi^2|\hat{v}|^2 \\ & \leq \varepsilon_5\xi^4|\hat{u}|^2 + C(\varepsilon_5)\xi^2|\hat{y}|^2 + C(\varepsilon_5)(1 + \xi^2)|\hat{\eta}|^2 \\ & + C(\varepsilon_5)(\xi^4 + \xi^2)|\hat{\vartheta}|^2. \end{aligned} \quad (5.3.35)$$

Démonstration. En dérivant la fonctionnelle (5.3.33) et en utilisant (5.3.26) et (5.3.30), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{dF_6(\xi, t)}{dt} + a^2l^2\xi^2|\hat{z}|^2 + \xi^2|\hat{v}|^2 - (a^2l^2 + 1)\xi^2|\hat{y}|^2 \\ = & (1 - a^2)Re(i\xi^3\hat{y}\hat{u}) + Re(im\xi^3\hat{\vartheta}\hat{v}) + l(1 - a^2)Re(\xi^2\hat{y}\hat{\eta}) \\ & + Re(ial\delta\xi\hat{\eta}\hat{z}) + Re(aml^2\xi^2\hat{\vartheta}\hat{z}). \end{aligned} \quad (5.3.36)$$

Afin d'estimer les termes sur la partie droite de (5.3.36), nous distinguons deux cas :

Cas 1. $a = 1$. Dans ce cas, on a , pour tout $\varepsilon_4 > 0$,

$$\begin{aligned} & Re(im\xi^3\hat{\vartheta}\hat{v}) + Re(ial\delta\xi\hat{\eta}\hat{z}) + Re(aml^2\xi^2\hat{\vartheta}\hat{z}) \\ & \leq \varepsilon_4\xi^2|\hat{z}|^2 + \varepsilon_4\xi^2|\hat{v}|^2 + C(\varepsilon_4)(\xi^4 + \xi^2)|\hat{\vartheta}|^2 + C(\varepsilon_4)(1 + \xi^2)|\hat{\eta}|^2. \end{aligned} \quad (5.3.37)$$

En insérant l'estimation (5.3.37) dans (5.3.36), on aboutit à (5.3.34).

Cas 2. $a \neq 1$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} & Re(im\xi^3\hat{\vartheta}\hat{v}) + (1 - a^2)Re(i\xi^3\hat{y}\hat{u}) + (1 - a^2)lRe(\xi^2\hat{y}\hat{\eta}) \\ & + Re(ial\delta\xi\hat{\eta}\hat{z}) + Re(aml^2\xi^2\hat{\vartheta}\hat{z}) \\ & \leq \varepsilon_5\xi^2|\hat{z}|^2 + \varepsilon_5\xi^2|\hat{v}|^2 + \varepsilon_5\xi^4|\hat{u}|^2 + C(\varepsilon_5)\xi^2|\hat{\vartheta}|^2 \\ & + C(\varepsilon_5)(1 + \xi^2)|\hat{\eta}|^2 + C(\varepsilon_5)(\xi^2 + \xi^4)|\hat{\vartheta}|^2 + C(\varepsilon_5)\xi^2|\hat{y}|^2. \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

En substituant l'estimation (5.3.38) dans (5.3.36), on obtient (5.3.53). Ceci termine la démonstration du Lemme 17. ■

Démonstration de la Proposition 11.

D'abord, on suppose que $a = 1$ et on définit la fonctionnelle de Lyapunov $L_1(\xi, t)$ comme suit :

$$\begin{aligned} L_1(\xi, t) &= N_1 \hat{E}(\xi, t) + \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^3} \left(F_1(\xi, t) + \alpha_3 \frac{\xi^2}{1 + \xi^2} F_3(\xi, t) \right) \\ &\quad + \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} \left(\alpha_2 F_2(\xi, t) + \alpha_4 F_6(\xi, t) \right), \end{aligned} \quad (5.3.39)$$

où α_i , $i = 2, \dots, 4$ sont des constantes positives qui seront fixées ultérieurement.

En dérivant la fonctionnelle $L_1(\xi, t)$ par rapport à t et en utilisant (6.3.7), (5.3.12), (5.3.17), (5.3.23) et (5.3.34), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{dL_1(\xi, t)}{dt} + \left((k_0 - \varepsilon_1) - \alpha_3 C(\varepsilon_3) \right) \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^3} |\hat{\phi}|^2 \\ &+ \left(\alpha_3 (k_0 l - \varepsilon_3) - \varepsilon'_1 \right) \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^4} |\hat{u}|^2 + \alpha_2 (ak_1^2 - \varepsilon_2) \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2} |\hat{\sigma}|^2 \\ &+ \left(\alpha_2 (a\beta^2 - \varepsilon_2) - C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1) - \alpha_4 (a^2 l^2 + 1) \right) \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2} |\hat{y}|^2 \\ &+ \left(\alpha_4 (a^2 l^2 - \varepsilon_4) - \alpha_2 \varepsilon'_2 - C(\varepsilon_1) \right) \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2} |\hat{z}|^2 \\ &+ \left(\alpha_4 (1 - \varepsilon_4) - \alpha_2 \varepsilon'_2 - \alpha_3 \varepsilon_3 \right) \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2} |\hat{v}|^2 \\ &\leq (C(\varepsilon_i, \varepsilon'_j, \alpha_r) - N_1 \beta \delta) |\hat{\eta}|^2 + (C(\varepsilon_i, \varepsilon'_j, \alpha_r) - N_1 m k_2) \xi^2 |\hat{\vartheta}|^2, \end{aligned} \quad (5.3.40)$$

où $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, 2$ et $r = 2, 3, 4$. Dans la dernière estimation, nous avons utilisé le fait que $\frac{\xi^2}{1 + \xi^2} \leq \min(1, \xi^2)$ et $\frac{1}{1 + \xi^2} \leq 1$.

Nous devons choisir soigneusement nos constantes. On choisit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ et ε_4 assez petit tel que

$$\varepsilon_1 < k_0, \quad \varepsilon_2 < \min(ak_1^2, a\beta^2), \quad \varepsilon_3 < k_0 l, \quad \varepsilon_4 < \min(1, a^2 l^2).$$

Ensuite, on prend α_3 assez petit tel que

$$\alpha_3 < \frac{k_0 - \varepsilon_1}{C(\varepsilon_3)}.$$

et on fixe α_4 assez grand tel que

$$\alpha_4 > \max \left\{ \frac{C(\varepsilon_1)}{a^2 l^2 - \varepsilon_4}, \frac{\alpha_3 \varepsilon_3}{1 - \varepsilon_4} \right\}.$$

On peut alors choisir ε'_1 assez petit tel que

$$\varepsilon'_1 < \alpha_3 (k_0 l - \varepsilon_3)$$

Par conséquent, on choisit α_2 assez grand tel que

$$\alpha_2(a\beta^2 - \varepsilon_2) > C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1) + \alpha_4(a^2l^2 + 1)$$

Une fois α_2 est fixé, on choisit ε'_2 assez petit tel que

$$\varepsilon'_2 < \min \left\{ \frac{\alpha_4(a^2l^2 - \varepsilon_4) - C(\varepsilon_1)}{\alpha_2}, \frac{\alpha_4(1 - \varepsilon_4) - \alpha_3\varepsilon_3}{\alpha_2} \right\}.$$

Une fois toutes les constantes ci-dessus sont fixés, on choisit N suffisamment grand de telle sorte que

$$N > \max \left\{ \frac{C(\varepsilon_i, \varepsilon'_j, \alpha_r)}{\beta\delta}, \frac{C(\varepsilon_i, \varepsilon'_j, \alpha_r)}{mk_2} \right\}. \quad (5.3.41)$$

Par conséquent, on en déduit qu'il existe une constante positive λ tel que

$$\frac{dL_1(\xi, t)}{dt} + \lambda G_1(\xi, t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.3.42)$$

où

$$\begin{aligned} G_1(\xi, t) &= \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^3} |\hat{\phi}|^2 + \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^4} |\hat{u}|^2 \\ &\quad + \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2} (|\hat{z}|^2 + |\hat{y}|^2 + |\hat{\sigma}|^2 + |\hat{v}|^2) + \xi^2 |\hat{\vartheta}|^2 + |\hat{\eta}|^2. \end{aligned} \quad (5.3.43)$$

Il est facile de voir maintenant que, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$G_1(\xi, t) \geq \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^4} (|\hat{u}|^2 + |\hat{z}|^2 + |\hat{y}|^2 + |\hat{\sigma}|^2 + |\hat{v}|^2 + |\hat{\phi}|^2 + |\hat{\vartheta}|^2 + |\hat{\eta}|^2). \quad (5.3.44)$$

En combinant, (5.3.8), (6.3.23) et (5.3.44), on déduit qu'il existe une constante positive $\lambda_1 > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\frac{dL(\xi, t)}{dt} \leq -\lambda_1 \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^4} \hat{E}(\xi, t), \quad \forall t \geq 0 \quad (5.3.45)$$

D'autre part, on voit de (5.3.8), (5.3.11), (5.3.16), (5.3.33) et (5.3.22) que pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$|F_1(\xi, t)| + |F_2(\xi, t)| + |F_6(\xi, t)| \leq C(1 + \xi^2) \hat{E}(\xi, t) \quad (5.3.46)$$

et

$$|F_3(\xi, t)| \leq C \hat{E}(\xi, t). \quad (5.3.47)$$

En tenant compte des inégalités (5.3.46) et (5.3.47), on déduit de (6.3.22) que

$$|L_1(\xi, t) - \hat{E}(\xi, t)| \leq C_1 \hat{E}(\xi, t), \quad \forall t \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (5.3.48)$$

où C_1 est une constante positive dépendant que de $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Cette dernière inégalité implique que

$$(N_1 - C_1)\hat{E}(\xi, t) \leq L_1(\xi, t) \leq (N_1 + C_1)\hat{E}(\xi, t), \quad \forall t \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R} \quad (5.3.49)$$

En prenant N_1 assez grand tel que (5.3.41) est vérifié et $N_1 - C_1 > 0$, alors on déduit que

$$\beta_1 \hat{E}(\xi, t) \leq L_1(\xi, t) \leq \beta_2 \hat{E}(\xi, t), \quad \forall t \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R} \quad (5.3.50)$$

avec $\beta_1 = N_1 - C_1$ et $\beta_2 = N_1 + C_1$. Ensuite, en combinant les estimations (5.3.50) et (5.3.45), on obtient

$$\frac{dL_1(\xi, t)}{dt} \leq -\frac{\lambda_1}{\beta_2} \rho_1(\xi) \hat{E}(\xi, t), \quad \forall t \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (5.3.51)$$

ce qui donne

$$L_1(\xi, t) \leq C e^{-c\rho_1(\xi)t} L(\xi, 0), \quad \forall t \geq 0 \quad (5.3.52)$$

En utilisant une nouvelle fois l'estimation (5.3.50) avec (5.3.52), on déduit la première inégalité de la Proposition 11.

Pour le cas $a \neq 1$, (5.3.36) est estimée comme suit :

$$\begin{aligned} & \frac{dF_6(\xi, t)}{dt} + (a^2 l^2 - \varepsilon_5) \xi^2 |\hat{z}|^2 + (1 - \varepsilon_5) \xi^2 |\hat{v}|^2 \\ & \leq \varepsilon'_5 \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2} |\hat{u}|^2 + C(\varepsilon_5, \varepsilon'_5) \xi^2 (1 + \xi^2)^2 |\hat{y}|^2 \\ & \quad + C(\varepsilon_5) (1 + \xi^2) |\hat{\eta}|^2 + C(\varepsilon_5) (\xi^4 + \xi^2) |\hat{v}|^2, \end{aligned} \quad (5.3.53)$$

où $\varepsilon_5, \varepsilon'_5$ sont des constantes positives qui seront fixés ultérieurement. Dans la dernière estimation, nous avons utilisé l'inégalité suivante

$$|(1 - a^2) Re(i\xi^3 \hat{y} \hat{u})| \leq \varepsilon'_5 \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2} |\hat{u}|^2 + C(\varepsilon'_5) \xi^2 (1 + \xi^2)^2 |\hat{y}|^2.$$

Ainsi, (5.3.21) peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} & \frac{dF_2(\xi, t)}{dt} + (ak_1^2 - \varepsilon_2) \xi^2 |\hat{\sigma}|^2 + (a\beta^2 - \varepsilon_2) \xi^2 |\hat{y}|^2 \\ & \leq \varepsilon'_2 \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} |\hat{v}|^2 + \varepsilon'_2 \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} |\hat{z}|^2 + C(\varepsilon'_2, \varepsilon_2) (1 + \xi^2 + \xi^4) |\hat{v}|^2 \\ & \quad + C(\varepsilon'_2) \xi^2 (1 + \xi^2 + \xi^4) |\hat{v}|^2, \end{aligned} \quad (5.3.54)$$

où nous avons utilisé les inégalités

$$\left| \operatorname{Re}(ia\beta\xi\hat{v}\bar{\hat{v}}) \right| \leq \varepsilon'_2 \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2} |\hat{v}|^2 + C(\varepsilon'_2)(1+\xi^2)^2 |\hat{v}|^2 \quad (5.3.55)$$

et

$$\left| (2k_1 - a^2)\beta \operatorname{Re}(\xi^2\hat{v}\bar{\hat{z}}) \right| \leq \varepsilon'_2 \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2} |\hat{z}|^2 + C(\varepsilon'_2)\xi^2(1+\xi^2)^2 |\hat{v}|^2. \quad (5.3.56)$$

On définit la fonctionnelle de Lyapunov L_2 comme suit

$$\begin{aligned} L_2(\xi, t) = & N_2 \hat{E}(\xi, t) + \frac{\xi^4}{(1+\xi^2)^6} \left\{ F_1(\xi, t) + \mu_3 \frac{\xi^2}{1+\xi^2} F_3(\xi, t) \right\} \\ & + \mu_2 \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^3} F_2(\xi, t) + \mu_1 \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^5} F_6(\xi, t). \end{aligned} \quad (5.3.57)$$

où μ_i , ($i=1, \dots, 3$) et N_2 sont des constantes positives qui seront fixés ultérieurement.

En dérivant la fonctionnelle $L_2(\xi, t)$ par rapport à t et en utilisant (6.3.7), (5.3.12), (5.3.54), (5.3.23) et (5.3.53), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{dL_2(\xi, t)}{dt} + \left((k_0 - \varepsilon_1) - \mu_3 C(\varepsilon_3) \right) \frac{\xi^6}{(1+\xi^2)^6} |\hat{\phi}|^2 \\ & + \left(\mu_3(k_0 l - \varepsilon_3) - \varepsilon'_1 - \mu_1 \varepsilon'_5 \right) \frac{\xi^6}{(1+\xi^2)^7} |\hat{u}|^2 + \mu_2 (ak_1^2 - \varepsilon_2) \frac{\xi^4}{(1+\xi^2)^3} |\hat{\sigma}|^2 \\ & + \left(\mu_2(a\beta^2 - \varepsilon_2) - C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1) - \mu_1 C(\varepsilon_5, \varepsilon'_5) \right) \frac{\xi^4}{(1+\xi^2)^3} |\hat{y}|^2 \\ & + \left(\mu_1(a^2 l^2 - \varepsilon_5) - \mu_2 \varepsilon'_2 - C(\varepsilon_1) \right) \frac{\xi^4}{(1+\xi^2)^5} |\hat{z}|^2 \\ & + \left(\mu_1(1 - \varepsilon_5) - \mu_2 \varepsilon'_2 - \mu_3 \varepsilon_3 \right) \frac{\xi^4}{(1+\xi^2)^5} |\hat{v}|^2 \\ \leq & \left(C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5, \mu_1, \mu_3) - N_2 \beta \delta \right) |\hat{\eta}|^2 \\ & + \left(C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_2, \varepsilon_5, \mu_1, \mu_2) - N_2 m k_2 \right) \xi^2 |\hat{v}|^2. \end{aligned} \quad (5.3.58)$$

Dans la dernière estimation, nous avons utilisé les inégalités suivantes :

$$\frac{\xi^2}{1+\xi^2} \leq 1, \quad \frac{1}{(1+\xi^2)^2} \leq 1, \quad \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2} \leq 1.$$

On choisit nos constantes dans (5.3.58) comme suit

$$\varepsilon_1 < k_0, \quad \varepsilon_2 < \min \{ ak_1^2, a\beta^2 \}, \quad \varepsilon_3 < k_0 l, \quad \varepsilon_5 < \min \{ 1, a^2 l^2 \}. \quad (5.3.59)$$

Ensuite, on prend μ_3 assez petit tel que

$$\mu_3 < \frac{k_0 - \varepsilon_1}{C(\varepsilon_3)}. \quad (5.3.60)$$

et on fixe μ_1 assez grand telle que

$$\mu_1 > \max \left\{ \frac{C(\varepsilon_1)}{a^2 l^2 - \varepsilon_5}, \frac{\mu_3 \varepsilon_3}{1 - \varepsilon_5} \right\}. \quad (5.3.61)$$

On peut choisir alors ε'_1 et ε'_5 assez petit tels que

$$\varepsilon'_1 < \mu_3(k_0 l - \varepsilon_3), \quad \varepsilon'_5 < \frac{\mu_3(k_0 l - \varepsilon_3) - \varepsilon'_1}{\mu_1} \quad (5.3.62)$$

Par conséquent, on prend μ_2 assez grand tel que

$$\mu_2(a\beta^2 - \varepsilon_2) > C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1) + \mu_1 C(\varepsilon_5, \varepsilon'_5). \quad (5.3.63)$$

Une fois μ_2 est fixé, on choisit ε'_2 assez petit tel que

$$\varepsilon'_2 < \min \left\{ \frac{\mu_1(a^2 l^2 - \varepsilon_5) - C(\varepsilon_1)}{\mu_2}, \frac{\mu_1(1 - \varepsilon_5) - \mu_3 \varepsilon_3}{\mu_2} \right\}. \quad (5.3.64)$$

Une fois les constantes ci-dessus sont fixées, nous choisissons N_2 assez grand tel que

$$N_2 > \max \left\{ \frac{C(\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5, \mu_1, \mu_3)}{\beta \delta}, \frac{C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_2, \varepsilon_5, \mu_1, \mu_2)}{mk_2} \right\}. \quad (5.3.65)$$

Par conséquent, on en déduit l'existence d'une constante positive λ_2 telle que

$$\frac{dL_2(\xi, t)}{dt} + \lambda_2 G_2(\xi, t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (5.3.66)$$

où

$$\begin{aligned} G_2(\xi, t) &= \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^6} |\hat{\phi}|^2 + \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^7} |\hat{u}|^2 + \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^3} (|\hat{y}|^2 + |\hat{\sigma}|^2) \\ &\quad + \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^5} (|\hat{z}|^2 + |\hat{v}|^2) + \xi^2 |\hat{\vartheta}|^2 + |\hat{\eta}|^2. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$G_2(\xi, t) \geq \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^7} (|\hat{u}|^2 + |\hat{z}|^2 + |\hat{y}|^2 + |\hat{\sigma}|^2 + |\hat{v}|^2 + |\hat{\phi}|^2). \quad (5.3.67)$$

En combinant, (5.3.8), (5.3.66) et (5.3.67), on déduit qu'il existe une constante positive $\lambda_3 > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\frac{dL_2(\xi, t)}{dt} \leq -\lambda_3 \frac{\xi^6}{(1 + \xi^2)^7} \hat{E}(\xi, t), \quad \forall t \geq 0 \quad (5.3.68)$$

D'autre part, on a pour N_2 assez grand, il existe deux constantes positives β_3, β_4 telles que pour tout $t \geq 0$;

$$\beta_3 \hat{E}(\xi, t) \leq L_2(\xi, t) \leq \beta_4 \hat{E}(\xi, t), \quad \forall t \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R} \quad (5.3.69)$$

Cette dernière inégalité avec (5.3.68) nous permet d'avoir la seconde inégalité de (5.3.10), ce qui achève la démonstration de la Proposition 11. ■

5.3.3 Estimations de décroissance de la solution

Dans cette section, nous établissons certaines estimations de décroissance de la solution $U(x, t)$ du système (5.3.3). Notre résultat principal est le suivant

Théorème 5.3.1 *Soit s un entier positif et supposons que $U_0 \in H^s(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Alors, la solution du problème U de (5.3.1)-(5.3.2) satisfait les estimations de décroissance suivantes :*

- Pour $a = 1$

$$\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-1/12-k/6} \|U_0\|_{L^1} + C(1+t)^{-\ell/2} \|\partial_x^{k+\ell} U_0\|_{L^2}. \quad (5.3.70)$$

- Pour $a \neq 1$

$$\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-1/12-k/6} \|U_0\|_{L^1} + C(1+t)^{-\ell/8} \|\partial_x^{k+\ell} U_0\|_{L^2} \quad (5.3.71)$$

où k et l sont des entiers positifs satisfaisant $k + \ell \leq s$ et C, c sont des constantes positifs.

Démonstration. La démonstration est basée sur les estimations ponctuelles de la Proposition 11. D'abord, on suppose que $a = 1$. Alors

$$\begin{cases} \rho_1(\xi) \geq \frac{1}{16}\xi^6, & \text{pour } |\xi| \leq 1, \\ \rho_1(\xi) \geq \frac{1}{16}\xi^{-2}, & \text{pour } |\xi| \geq 1 \end{cases} \quad (5.3.72)$$

En appliquant le théorème de Plancherel, en remarquant que $|\hat{U}(\xi, t)|^2$ et $\hat{E}(\xi, t)$ sont équivalentes et en utilisant la première estimation dans (5.3.10), on obtient

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2k} |\hat{U}(\xi, t)|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2k} e^{-c\rho_1(\xi)t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \\
&= C \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2k} e^{-c\rho_1(\xi)t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi + C \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2k} e^{-c\rho_1(\xi)t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \\
&= K_1 + K_2.
\end{aligned} \tag{5.3.73}$$

Par conséquent, en utilisant la première inégalité dans (5.3.72) on obtient,

$$\begin{aligned}
K_1 &\leq C \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2k} e^{-\frac{1}{16}|\xi|^6 t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \\
&\leq C \|\hat{U}_0\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2k} e^{-\frac{1}{16}|\xi|^6 t} d\xi.
\end{aligned} \tag{5.3.74}$$

Puis, en utilisant l'inégalité suivante (pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$),

$$\int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^\alpha e^{-c\frac{1}{16}|\xi|^6 t} d\xi \leq (1+t)^{-(\alpha+1)/6}, \tag{5.3.75}$$

On estime

$$K_1 \leq C \|U_0\|_{L^1}^2 (1+t)^{-1/6-k/3}. \tag{5.3.76}$$

Pour K_2 , en utilisant la seconde inégalité de (5.3.72), on trouve que

$$K_2 \leq C \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2k} e^{-c\frac{1}{16}\xi^{-2}t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi. \tag{5.3.77}$$

En exploitant l'inégalité

$$\sup_{|\xi| \geq 1} \left\{ |\xi|^{-2\ell} e^{-c\frac{1}{16}\xi^{-2}t} \right\} \leq C(1+t)^{-\ell}, \tag{5.3.78}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
K_2 &\leq \sup_{|\xi| \geq 1} \left\{ |\xi|^{-2\ell} e^{-\frac{1}{16}\xi^{-2}t} \right\} \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2(k+\ell)} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \\
&\leq C(1+t)^{-\ell} \|\partial_x^{k+\ell} U_0\|_2^2.
\end{aligned} \tag{5.3.79}$$

donc, en remplaçant (5.3.76) et (5.3.79) dans (5.3.73), on déduit (5.3.70).

Pour le cas $a \neq 1$, on a

$$\begin{cases} \rho_2(\xi) \geq \frac{1}{128}\xi^6, & \text{pour } |\xi| \leq 1, \\ \rho_2(\xi) \geq \frac{1}{128}\xi^{-8}, & \text{pour } |\xi| \geq 1 \end{cases} \quad (5.3.80)$$

Comme ci-dessus, en utilisant la seconde estimation dans (5.3.10), on obtient

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k U(t)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2k} |\hat{U}(\xi, t)|^2 d\xi \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2k} e^{-c\rho_2(\xi)t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \\ &= C \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2k} e^{-c\rho_2(\xi)t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi + C \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2k} e^{-c\rho_2(\xi)t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (5.3.81)$$

La partie à basse fréquence J_1 est estimée comme I_1 , on a

$$J_1 \leq C \|U_0\|_1^2 (1+t)^{-\frac{1}{6}-\frac{k}{3}} \quad (5.3.82)$$

En utilisant la deuxième inégalité dans (5.3.80), J_2 peut être estimé comme suit

$$J_2 \leq C \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2k} e^{-c\frac{1}{128}\xi^{-8}t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \quad (5.3.83)$$

En utilisant l'inégalité suivante

$$\sup_{|\xi| \geq 1} \left\{ |\xi|^{-2l} e^{-c\xi^{-8}t} \right\} \leq C(1+t)^{-\frac{l}{4}} \quad (5.3.84)$$

on obtient

$$\begin{aligned} J_2 &\leq C \sup_{|\xi| \geq 1} \left\{ |\xi|^{-2l} e^{-c\xi^{-8}t} \right\} \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2(k+l)} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{l}{4}} \|\partial_x^{k+l} U_0\|_2^2 \end{aligned} \quad (5.3.85)$$

En combinant les estimations (5.3.82) et (5.3.85), on obtient la seconde estimation (5.3.71).

Ceci achève la démonstration du Théorème 5.3.1. ■

5.3.4 Taux de décroissance amélioré

Dans cette section, nous montrons que le taux de décroissance dans le théorème 5.3.1 peut être amélioré d'un facteur de $t^{-\gamma/6}$, $\gamma \in [0, 1]$ si les données initiales sont dans $H^s(\mathbb{R}) \cap L^{1,\gamma}(\mathbb{R})$. La démonstration est basée sur les estimations de la proposition 11 et la méthode introduite par Ikehata dans [41] adaptée à notre problème. Le résultat principal de cette section est donné par le théorème suivant

Théorème 5.3.2 *Soit $\gamma \in [0, 1]$. Soit s un entier positif et on suppose que $U_0 \in H^s(\mathbb{R}) \cap L^{1,\gamma}(\mathbb{R})$. Alors, la solution U du problème (5.3.1)-(5.3.2) satisfait les estimations de décroissance suivantes :*

- Si $a=1$

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k U(t)\|_2^2 &\leq C(1+t)^{-\frac{1}{12}-\frac{k}{6}-\frac{\gamma}{6}} \|U_0\|_{L^{1,\gamma}}^2 + C(1+t)^{-\frac{\ell}{2}} \|\partial_x^{k+\ell} U_0\|_2^2 \\ &\quad + C(1+t)^{-\frac{1}{12}-\frac{k}{6}} \left| \int_{\mathbb{R}} U_0(x) dx \right|^2. \end{aligned} \quad (5.3.86)$$

- Si $a \neq 1$

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k U(t)\|_2^2 &\leq C(1+t)^{-\frac{1}{12}-\frac{k}{6}-\frac{\gamma}{6}} \|U_0\|_{L^{1,\gamma}}^2 + C(1+t)^{-\frac{\ell}{8}} \|\partial_x^{k+\ell} U_0\|_2^2 \\ &\quad + C(1+t)^{-\frac{1}{12}-\frac{k}{6}} \left| \int_{\mathbb{R}} U_0(x) dx \right|^2 \end{aligned} \quad (5.3.87)$$

où k et l sont des entiers positifs satisfaisant $k+l \leq s$ et C, c sont deux constantes positives.

Démonstration. On voit de la démonstration du théorème 5.3.1 que le taux de décroissance de la solution est gouverné par le taux de décroissance de la partie à basse fréquence ($|\xi| \leq 1$).

En effet,

$$I_1 = C \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2k} e^{-c\rho_1(\xi)t} |\hat{U}(\xi, 0)|^2 d\xi \quad (5.3.88)$$

En utilisant le lemme 3.1 dans [41], le terme $|\hat{U}_0(\xi)|$ peut être estimé comme suit :

$$\begin{aligned} |\hat{U}_0(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} U_0(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\cos(x\xi) - 1| |U_0(x)| dx + \int_{\mathbb{R}} |\sin(x\xi)| |U_0(x)| dx \\ &\quad + \left| \int_{\mathbb{R}} U_0(x) dx \right|. \end{aligned} \quad (5.3.89)$$

Comme

$$\begin{cases} K_\gamma = \sup_{\theta \in \mathbb{R}/\{0\}} \frac{1-\cos \theta}{\theta^\gamma} < \infty, \\ M_\gamma = \sup_{\theta \in \mathbb{R}/\{0\}} \frac{\sin \theta}{|\theta|^\gamma} < \infty, \end{cases} \quad (5.3.90)$$

pour $0 \leq \gamma \leq 1$, alors on déduit

$$|\hat{U}_0(\xi)| \leq C_\gamma |\xi|^\gamma \|U_0\|_{L^{1,\gamma}} + \left| \int_{\mathbb{R}} U_0(x) dx \right|. \quad (5.3.91)$$

où $C_\gamma = K_\gamma + M_\gamma$. Par conséquent, on obtient

$$I_1 \leq C \|U_0\|_{L^{1,\gamma}}^2 \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2(k+\gamma)} e^{-c\rho_1(\xi)t} d\xi + \left| \int_{\mathbb{R}} U_0(x) dx \right|^2 \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2k} e^{-c\rho_1(\xi)t} d\xi. \quad (5.3.92)$$

Comme dans la partie à basse fréquence, $|\xi| \leq 1$, on a $\rho_1(\xi) \geq \frac{\xi^6}{16}$, alors (5.3.92) devient

$$I_1 \leq C \|U_0\|_{L^{1,\gamma}}^2 \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2(k+\gamma)} e^{-c|\xi|^6 t} d\xi + \left| \int_{\mathbb{R}} U_0(x) dx \right|^2 \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2k} e^{-c|\xi|^6 t} d\xi. \quad (5.3.93)$$

En utilisant l'inégalité (5.3.75), on obtient

$$I_1 \leq C(1+t)^{-(k+\gamma)/3-1/6} \|U_0\|_{L^{1,\gamma}}^2 + C(1+t)^{-k/3-1/6} \left| \int_{\mathbb{R}} U_0(x) dx \right|^2. \quad (5.3.94)$$

Ensuite, il suffit de combiner (5.3.94) et (5.3.85), on aboutit à (5.3.86). Par le même procédé, nous pouvons montrer aussi l'estimation (5.3.87). Ainsi la démonstration du théorème 5.3.2 est achevée. ■

Remarque 7 On voit clairement du théorème 5.3.1 que le taux de décroissance de la solution du système (5.1.12) est le même taux de décroissance de la solution de (5.1.8). En effet, soit $W = (v, u, z, y, \phi, \eta, \theta_t, \theta_x)$ est une solution de (5.1.8) où v, u, z, y, ϕ et η sont définis dans (5.3.1). Il est clair que les six premières composantes de W décroît avec le même taux obtenu dans le théorème 5.3.1 comme se sont les mêmes composantes de U . Les autres deux composantes θ et θ_x de W décroît plus rapide que les deux dernières composantes $\tilde{\theta}$ et $\tilde{\theta}_x$ de U puisque selon (5.1.10), $\theta = \tilde{\theta}_t$ et $\theta_x = \tilde{\theta}_{tx}$.

Chapitre 6

Stabilisation frontière du système de Bresse multidimensionnel

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère le système de Bresse multidimensionnel suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 u_{tt} - \Delta u - \alpha_1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} - (\alpha_1 + \alpha_2) \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} + \beta_1 u + a(x) f_1(u, v, w) = 0, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 v_{tt} - \Delta v + \alpha_1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta_2 v + \beta_2 w + a(x) f_2(u, v, w) = 0, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_1 w_{tt} - \Delta w + (\alpha_1 + \alpha_2) \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta_2 v + \beta_2 w + a(x) f_3(u, v, w) = 0, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{array} \right. \quad (6.1.1)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u(x, t) = v(x, t) = w(x, t) &= 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, t) &= - \int_0^t h_1(t-s) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + b_1(x)v + b_1(x)w \right) ds, & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ v(x, t) &= - \int_0^t h_2(t-s) \frac{\partial v}{\partial \nu} ds, & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ w(x, t) &= - \int_0^t h_3(t-s) \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} - b_2(x)u \right) ds, & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

et les conditions initiales

$$\begin{aligned} (u(0), v(0), w(0)) &= (u^0, v^0, w^0), \\ (\sqrt{\rho_1} u_t(0), \sqrt{\rho_2} v_t(0), \sqrt{\rho_1} w_t(0)) &= (\sqrt{\rho_1} u^1, \sqrt{\rho_2} v^1, \sqrt{\rho_1} w^1), \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ avec une frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$. Soient Γ_0 et Γ_1 deux sous ensembles fermés, non vides et disjoints de Γ avec $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$ et $meas(\Gamma_0) > 0, meas(\Gamma_1) > 0$. On désigne par $\frac{\partial}{\partial \nu}$ la dérivée normale où ν représente la normale unitaire extérieure à Γ_1 .

Nous supposons que $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sont des nombres positifs suffisamment petit, tels que $\beta_1 > n\alpha_2, \beta_2 > n\alpha_1$, et

$$a \in C^1(\bar{\Omega}), \quad a(x) \geq a_0 > 0 \quad p.p. \quad dans \quad \bar{\Omega},$$

où a_0 est une constante et nous supposons qu'il existe $x^0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : \nu \cdot m(x) \leq 0\}, \quad \Gamma_1 = \{x \in \Gamma : \nu \cdot m(x) > 0\},$$

où $m(x) = x - x_0$.

Ainsi nous supposons que $\rho_i \in C^1(\bar{\Omega}), i = 1, 2, 3$, sont des fonctions positives vérifiant l'hypothèse suivante

$$\nabla \rho_i \cdot m \geq 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3. \quad (6.1.4)$$

On considère les fonctions $b_j(x) \in W^{1,\infty}(\Gamma_1), j = 1, 2$, données par

$$b_j(x) = \alpha_j \left(\sum_{i=1}^n \nu_i(x) \right), \quad j = 1, 2.$$

Les équations intégrales dans les conditions aux limites (6.1.2) décrivent les effets de mémoire qui peuvent être causés, par exemple par l'interaction avec un autre corps viscoélastique.

Le modèle de Timoshenko avec des conditions aux limites de type mémoire a été étudié par Santos [91]. En considérant k_i les noyaux résolvants de $(-h'_i/h_i(0))$, $i = 1, 2$, il a montré que l'énergie de la solution décroît exponentiellement (polynomialement) quand k_i et $-k'_i$, $i = 1, 2$ décroît exponentiellement (polynomialement). Le même résultat a été établi par Messaoudi et Soufyane [61] sans supposer la décroissance exponentielle (polynomiale) de k_1 et k_2 mais seulement que leurs normes sont assez petites. Dans [63] la décroissance générale pour le même système a été établie.

D'autres modèles ont été proposés dans [8], [9], [62] et [90] pour l'étude de l'équation des ondes, dans [71] et [92] pour le système des plaques de von Karman et dans [47], [23] et

[93] dans le contexte des équations de type Kirchhoff .

Le but de ce chapitre est d'étudier le comportement asymptotique du système (6.1.1)-(6.1.3) pour les noyaux résolvants de décroissance générale et d'obtenir un résultat de décroissance explicite et général pour lequel les taux de décroissance exponentiel et polynomial ne sont que des cas particuliers. La démonstration est basée sur la méthode des multiplicateurs et l'introduction d'une fonctionnelle de Lyapunov appropriée.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, on introduit les hypothèses sur les fonctions de relaxation (les noyaux) h_i , $i = 1, 2, 3$ et les nonlinéarités f_i , $i = 1, 2, 3$ et on rappelle quelques définitions et lemmes qui sont nécessaires pour la suite du chapitre. L'énoncé et la démonstration de notre résultat de décroissance de l'énergie du système (6.1.1)-(6.1.3) seront donnés à la section 3.

6.2 Préliminaires

On considère l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire et la norme associée notés respectivement par (u, v) et $\|u\|$. On désigne par V l'espace de Hilbert suivant

$$V = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

On considère les hypothèses suivantes

(H1) Les fonctions de relaxation (les noyaux) h_i , $i = 1, 2, 3$ sont considérées positives décroissantes et appartenant à $W^{1,2}(0, +\infty)$.

(H2) Pour les termes sources f_i , $i = 1, 2, 3$, on suppose que

1. $f_i \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $i = 1, 2, 3$.

2. De plus, nous supposons qu'il existe une fonction positive $F(u, v, w) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$f_1(u, v, w) = \frac{\partial F}{\partial u}, \quad f_2(u, v, w) = \frac{\partial F}{\partial v}, \quad f_3(u, v, w) = \frac{\partial F}{\partial w}, \quad (6.2.1)$$

3. D'autres part, supposons que F est homogène d'ordre $p + 1$:

$$F(\lambda u, \lambda v, \lambda w) = \lambda^{p+1} F(u, v, w), \text{ pour tout } \lambda > 0, \quad (u, v, w) \in \mathbb{R}^3. \quad (6.2.2)$$

Comme F est homogène, le théorème d'Euler pour les fonctions homogènes nous donne l'identité utile suivante :

$$u f_1(u, v, w) + v f_2(u, v, w) + w f_3(u, v, w) = (p + 1) F(u, v, w).$$

L'homogénéité de F implique l'existence d'une constante $M > 0$ telle que

$$|F(u, v, w)| \leq M (|u|^{p+1} + |v|^{p+1} + |w|^{p+1}) \quad (6.2.3)$$

Remarque 8 *Il existe une classe large de fonctions qui vérifient les hypothèses (6.2.1)-(6.2.3). Par exemple les fonctions de la forme*

$$F(u, v, w) = a |u|^{p+1} + b |v|^{p+1} + c |w|^{p+1},$$

où a, b, c sont des constantes positives, vérifiant les hypothèses (6.2.1)-(6.2.3) avec $p \geq 1$.

En effet, par un simple calcul, on montre qu'il existe $c_0 > 0$ telle que

$$F(u, v, w) = c_0 \{ |u|^{p+1} + |v|^{p+1} + |w|^{p+1} \}.$$

D'ailleurs, il est facile de calculer et de trouver que

$$u f_1(u, v, w) + v f_2(u, v, w) + w f_3(u, v, w) = (p + 1) F(u, v, w).$$

Produit de convolution

On définit le produit de convolution de deux fonctions h et φ par

$$(h * \varphi)(t) = \int_0^t h(t-s) \varphi(s) ds, \quad (6.2.4)$$

et on introduit les notations suivantes

$$(h \circ \varphi)(t) = \int_0^t h(t-s) |\varphi(t) - \varphi(s)|^2 ds, \quad (6.2.5)$$

et

$$(h \odot \varphi)(t) = \int_0^t h(t-s)(\varphi(t) - \varphi(s))ds. \quad (6.2.6)$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$|(h \odot \varphi)(t)|^2 \leq \left(\int_0^t |h(s)|ds \right) (|h| \circ \varphi)(t). \quad (6.2.7)$$

Le lemme suivant donne une identité pour le produit de convolution.

Lemme 18 (Voir le Lemme 2.2, [9]) Soit $h, \varphi \in C^1(\mathbb{R}^+)$, on a

$$(h * \varphi)\varphi_t = -\frac{1}{2}h(t)|\varphi(t)|^2 + \frac{1}{2}h' \circ \varphi - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(h \circ \varphi - \left(\int_0^t h(s)ds \right) |\varphi|^2 \right). \quad (6.2.8)$$

Noyau résolvant

Soit X un espace de Hilbert.

D'après des résultats classiques pour les équations intégrales (voir Le Théorème 2.3.5 [30]) on a, pour tout noyau $h \in L^1_{loc}(0, \infty)$ et tout $\psi \in L^1_{loc}(0, \infty; X)$, le problème

$$\varphi(t) - h * \varphi(t) = \psi(t), \quad t \geq 0, \quad (6.2.9)$$

admet une solution unique $\varphi \in L^1_{loc}(0, \infty; X)$. En particulier, il existe une solution unique $r \in L^1_{loc}(0, \infty)$ de

$$r(t) - h * r(t) = h(t), \quad t \geq 0. \quad (6.2.10)$$

Une telle solution est appelée le noyau résolvant de h . De plus, la solution φ de (6.2.9) est donnée par la formule de la variation de la constante

$$\varphi(t) = \psi(t) + r * \psi(t), \quad t \geq 0, \quad (6.2.11)$$

où r est le noyau résolvant de h .

La résolvante

Nous rappelons la notion de la résolvante de l'équation abstraite

$$u''(t) + Au(t) - \int_0^t h(t-s)Au(s)ds = 0, \quad (6.2.12)$$

où A est un opérateur linéaire auto adjoint sur un espace de Hilbert X avec domaine dense $D(A)$ et $h \in L^1_{loc}(0, \infty)$.

Définition 22 Une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert X est appelée **résolvante** de l'équation (6.2.12) si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $S(0) = I$ et $S(t)$ est fortement continue sur $[0, \infty)$, i.e. pour tout $x \in X$, $S(\cdot)x$ est continue,

(ii) $S(t)$ commute avec $A : S(t)D(A) \subset D(A)$ et

$$AS(t)x = S(t)Ax, \quad x \in D(A), \quad t \geq 0,$$

(iii) pour tout $x \in D(A)$, $S(\cdot)x$ est deux fois continûment différentiable dans X sur $[0, \infty)$ et $S'(0)x = 0$,

(iv) pour tout $x \in D(A)$ et tout $t \geq 0$,

$$S''(t)x + AS(t)x - \int_0^t h(t-\tau)AS(\tau)x d\tau = 0.$$

Afin d'estimer les termes $\frac{\partial u}{\partial \nu}, \frac{\partial v}{\partial \nu}$ et $\frac{\partial w}{\partial \nu}$, nous allons utiliser la deuxième, troisième et quatrième équations de (6.1.2).

Pour cela, en dérivant ces dernières, nous arrivons aux équations de Volterra suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + b_1(x)v + b_1(x)w + \frac{1}{h_1(0)}h'_1 * \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu} + b_1(x)v + b_1(x)w \right\} = -\frac{1}{h_1(0)}u_t, \quad (6.2.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} + \frac{1}{h_2(0)}h'_2 * \frac{\partial v}{\partial \nu} = -\frac{1}{h_2(0)}v_t, \quad (6.2.14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} - b_2(x)u + \frac{1}{h_3(0)}h'_3 * \left\{ \frac{\partial w}{\partial \nu} - b_2(x)u \right\} = -\frac{1}{h_3(0)}w_t. \quad (6.2.15)$$

En appliquant l'opérateur inverse de Volterra, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + b_1(x)v + b_1(x)w = -\frac{1}{h_1(0)}\{u_t + k_1 * u_t\}, \quad (6.2.16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = -\frac{1}{h_2(0)}\{v_t + k_2 * v_t\}, \quad (6.2.17)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} - b_2(x)u = -\frac{1}{h_3(0)}\{w_t + k_3 * w_t\}, \quad (6.2.18)$$

où les noyaux résolvants vérifient

$$k_i + \frac{1}{h_i(0)} h_i' * k_i = -\frac{1}{h_i(0)} h_i' \quad \text{pour } i = 1, 2, 3. \quad (6.2.19)$$

En notant par $\tau_1 = \frac{1}{h_1(0)}$, $\tau_2 = \frac{1}{h_2(0)}$ et $\tau_3 = \frac{1}{h_3(0)}$. Les dérivées normales de u, v et w peuvent s'écrire comme

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\tau_1 \{u_t + k_1(0)u - k_1(t)u_0 + k_1' * u\} - b_1(x)v - b_1(x)w, \quad (6.2.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = -\tau_2 \{v_t + k_2(0)v - k_2(t)v_0 + k_2' * v\}, \quad (6.2.21)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = -\tau_3 \{w_t + k_3(0)w - k_3(t)w_0 + k_3' * w\} + b_2(x)u. \quad (6.2.22)$$

Réciproquement, en prenant les données initiales telles que $u^0 = v^0 = w^0 = 0$ sur Γ_1 , Les relations (6.2.20), (6.2.21) et (6.2.22) donnent la deuxième, troisième et quatrième équations de (6.1.2) respectivement. Puisque, on s'intéresse à des fonctions de relaxation de décroissance générale et les conditions aux limites (6.2.20), (6.2.21) et (6.2.22) incluant des noyaux résolvants k_i , ($i = 1, 2, 3$), on veut savoir si k_i ont les mêmes propriétés de décroissance. Le lemme suivant répond à cette question.

Soit h est une fonction de relaxation et k son noyau résolvant,

$$k(t) - (k * h)(t) = h(t). \quad (6.2.23)$$

Lemme 19 (Voir Lemme 2.1, [9]) *Si h est une fonction continue positive, alors k est aussi continue et positive. Supposons que*

$$h(t) \leq c_0 e^{-\int_0^t \gamma(\zeta) d\zeta},$$

où $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante vérifiant, pour une certaine constante positive $\varepsilon < 1$,

$$c_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^s (1-\varepsilon)\gamma(\zeta) d\zeta} < \frac{1}{c_0}.$$

Alors k vérifie

$$k(t) \leq \frac{c_0}{1 - c_0 c_1} e^{-\varepsilon \int_0^t \gamma(\zeta) d\zeta}.$$

Corollaire 1 (Voir [62]). Supposons que

$$h(t) \leq c_0 e^{-\gamma t}, \quad (6.2.24)$$

pour $\gamma > c_0$. Alors, il existe une constante positive $\varepsilon < 1$ telle que

$$k(t) \leq \beta e^{-\varepsilon \gamma t}, \quad (6.2.25)$$

où $\beta > 0$ est une constante.

Corollaire 2 (Voir [62]) Supposons que

$$h(t) \leq \frac{c_0}{(1+t)^p}, \quad (6.2.26)$$

pour $c_0 < p - 1$. Alors, il existe une constante positive $\varepsilon < 1$ telle que

$$k(t) \leq \frac{\beta}{(1+t)^{\varepsilon p}}, \quad (6.2.27)$$

où $\beta > 0$ est une constante.

En se basant sur le lemme 19, nous utilisons les conditions aux limites (6.2.20), (6.2.21) et (6.2.22) au lieu de (6.1.2)₂, (6.1.2)₃ et (6.1.2)₄.

Le résultat d'existence et d'unicité de la solution du système (6.1.1) - (6.1.3) est donné par le théorème suivant.

Théorème 6.2.1 Soit $k_i \in W^{2,1}(\mathbb{R}^+) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)$, $\rho_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2$. Supposons que $(u^0, v^0, w^0) \in (H^2 \cap V)^3$ et $(u^1, v^1, w^1) \in V^3$ avec

$$\begin{cases} \frac{\partial u^0}{\partial \nu} + \tau_1 u^1 + b_1 v^0 + b_1 w^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial v^0}{\partial \nu} + \tau_2 v^1 = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial w^0}{\partial \nu} + \tau_3 w^1 - b_2 u^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (6.2.28)$$

Alors il existe une unique solution forte (u, v, w) du système de Bresse (6.1.1)-(6.1.3) vérifiant

$$u, v, w \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega) \cap V), \quad \sqrt{\rho_1} u_t, \sqrt{\rho_2} v_t, \sqrt{\rho_1} w_t \in L^\infty([0, \infty), L^2(\Omega)),$$

$$u_t, v_t, w_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V), \quad \sqrt{\rho_1} u_{tt}, \sqrt{\rho_2} v_{tt}, \sqrt{\rho_1} w_{tt} \in L^\infty([0, \infty), L^2(\Omega)).$$

Démonstration. Le théorème peut être démontré, en utilisant des arguments standard de semi-groupes de P. Pei et al. [70]). ■

6.3 Comportement asymptotique

Dans cette section nous étudions le comportement asymptotique des solutions du système (6.1.1)-(6.1.3) quand les noyaux resolvants $k_i, i = 1, 2, 3$ vérifient

$$k_i(0) > 0, \quad k_i(t) \geq 0, \quad k_i'(t) \leq 0, \quad k_i''(t) \geq \gamma_i(t)(-k_i'(t)), \quad (6.3.1)$$

où $\gamma_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction satisfaisant les conditions suivantes

$$\gamma_i(t) > 0, \quad \gamma_i'(t) \leq 0, \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \gamma_i(t) dt = +\infty \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.3.2)$$

En multipliant la première équation de (6.1.1) par u_t , la seconde par v_t et la troisième par w_t , en intégrant sur Ω et en utilisant l'intégration par parties, les conditions aux limites et (6.2.20)-(6.2.22), on peut facilement trouver que l'énergie du système (6.1.1), (6.2.20)-(6.2.22) est donnée par

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\rho_1 u_t|^2 + |\rho_2 v_t|^2 + |\rho_3 w_t|^2 + (\beta_1 - n\alpha_2)|u|^2 + (\beta_2 - n\alpha_1)(|v| + |w|)^2) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{(1 - \alpha_1)}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{(1 - \alpha_2)}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \\ & + \frac{\alpha_1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + v + w \right|^2 dx + \frac{\alpha_2}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} - u \right|^2 dx \\ & + \int_{\Omega} a(x) F(u, v, w) dx + \frac{\tau_1}{2} \int_{\Gamma_1} (k_1(t)|u|^2 - k_1' \circ u) d\Gamma_1 \\ & + \frac{\tau_2}{2} \int_{\Gamma_1} (k_2(t)|v|^2 - k_2' \circ v) d\Gamma_1 + \frac{\tau_3}{2} \int_{\Gamma_1} (k_3(t)|w|^2 - k_3' \circ w) d\Gamma_1. \end{aligned}$$

Notre résultat principal est le suivant

Théorème 6.3.1 *Etant donné $((u^0, u^1), (v^0, v^1), (w^0, w^1)) \in (V \times L^2(\Omega))^3$. Sous les hypothèses **(H1)**-**(H2)** et les conditions (6.1.4), (6.3.1) et (6.3.2), avec*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.3.3)$$

$$((-n + \varepsilon_0)\delta - n + \varepsilon_0)a + 2m \cdot \nabla a < 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (6.3.4)$$

alors pour un certain t_0 assez grand, si $(u_0, v_0, w_0) = (0, 0, 0)$ sur Γ_1 , on a

$$E(t) \leq cE(0)e^{-\omega \int_0^t \gamma(s) ds}, \forall t \geq t_0. \quad (6.3.5)$$

Sinon, si $(u_0, v_0, w_0) \neq (0, 0, 0)$ sur Γ_1 alors

$$E(t) \leq c \left\{ E(0) + \int_0^t k_0(s) [1 + e^{\omega \int_{t_0}^s \gamma(\zeta) d\zeta}] ds \right\} e^{-\omega \int_0^t \gamma(s) ds}, \quad (6.3.6)$$

où

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \min\{\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)\}, \\ k_0(t) &= k_1^2(t) \int_{\Gamma_1} |u^0|^2 d\Gamma_1 + k_2^2(t) \int_{\Gamma_1} |v^0|^2 d\Gamma_1 + k_3^2(t) \int_{\Gamma_1} |w^0|^2 d\Gamma_1, \end{aligned}$$

et ω, c sont des constantes positives.

Lemme 20 *Sous les hypothèses du Théorème 6.3.1, l'énergie de la solution de (6.1.1)-(6.1.3), satisfait*

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &\leq -\frac{\tau_1}{2} \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma_1 + \frac{\tau_1}{2} \int_{\Gamma_1} k_1^2(t) |u^0|^2 d\Gamma_1 - \frac{\tau_1}{2} \int_{\Gamma_1} k_1'' \circ u d\Gamma_1 \\ &\quad - \frac{\tau_2}{2} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma_1 + \frac{\tau_2}{2} \int_{\Gamma_1} k_2^2(t) |v^0|^2 d\Gamma_1 - \frac{\tau_2}{2} \int_{\Gamma_1} k_2'' \circ v d\Gamma_1 \\ &\quad - \frac{\tau_3}{2} \int_{\Gamma_1} |w_t|^2 d\Gamma_1 + \frac{\tau_3}{2} \int_{\Gamma_1} k_3^2(t) |w^0|^2 d\Gamma_1 - \frac{\tau_3}{2} \int_{\Gamma_1} k_3'' \circ w d\Gamma_1. \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

Démonstration. En multipliant la première équation dans (6.1.1) par u_t et en intégrant par parties sur Ω on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho_1 |u_t|^2 + |\nabla u|^2 + \beta_1 |u|^2) dx \\ &\quad - \alpha_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} u_t dx - (\alpha_1 + \alpha_2) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} u_t dx \\ &\quad + \int_{\Omega} a(x) f_1(u, v, w) u_t dx \\ &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t d\Gamma_1. \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Par le théorème de Gauss, on a

$$\alpha_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} u_t dx = \alpha_1 \int_{\Gamma_1} v u_t \left(\sum_{i=1}^n \nu_i \right) d\Gamma_1 - \alpha_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_t}{\partial x_i} v dx \quad (6.3.9)$$

et

$$\alpha_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} u_t dx = \alpha_1 \int_{\Gamma_1} w u_t \left(\sum_{i=1}^n \nu_i \right) d\Gamma_1 - \alpha_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_t}{\partial x_i} w dx. \quad (6.3.10)$$

En remplaçant les estimations (6.3.9) et (6.3.10) dans (6.3.8), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho_1 |u_t|^2 + |\nabla u|^2 + \beta_1 |u|^2) dx \\ & + \alpha_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_t}{\partial x_i} v dx + \alpha_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_t}{\partial x_i} w dx \\ & - \alpha_2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} u_t dx + \int_{\Omega} a(x) f_1(u, v, w) u_t dx \\ & = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t d\Gamma_1 + \alpha_1 \int_{\Gamma_1} v u_t \left(\sum_{i=1}^n \nu_i \right) d\Gamma_1 + \alpha_1 \int_{\Gamma_1} w u_t \left(\sum_{i=1}^n \nu_i \right) d\Gamma_1. \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

Ensuite, en multipliant la seconde équation de (6.1.1) par v_t et en intégrant par parties sur Ω on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho_2 |v_t|^2 + |\nabla v|^2 + \beta_2 |v|^2) dx \\ & + \alpha_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} v_t dx + \beta_2 \int_{\Omega} w v_t dx \\ & + \int_{\Omega} a(x) f_2(u, v, w) v_t dx \\ & = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial v}{\partial \nu} v_t d\Gamma_1. \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

Enfin, en multipliant la troisième équation de (6.1.1) par w_t et en intégrant par parties sur Ω on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho_3 |w_t|^2 + |\nabla w|^2 + \beta_2 |w|^2) dx \\
& + (\alpha_1 + \alpha_2) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} w_t dx + \beta_2 \int_{\Omega} v w_t dx \\
& + \int_{\Omega} a(x) f_3(u, v, w) w_t dx \\
& = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial \nu} w_t d\Gamma_1.
\end{aligned} \tag{6.3.13}$$

Par le théorème de Gauss, on a

$$\alpha_2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} w_t dx = \alpha_2 \int_{\Gamma_1} u w_t \left(\sum_{i=1}^n \nu_i \right) d\Gamma_1 - \alpha_2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_t}{\partial x_i} u dx. \tag{6.3.14}$$

En substituant l'équation (6.3.14) dans (6.3.13), on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho_3 |w_t|^2 + |\nabla w|^2 + \beta_2 |w|^2) dx \\
& + \alpha_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} w_t dx - \alpha_2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_t}{\partial x_i} u dx \\
& + \beta_2 \int_{\Omega} v w_t dx + \int_{\Omega} a(x) f_3(u, v, w) w_t dx \\
& = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial \nu} w_t d\Gamma_1 - \alpha_2 \int_{\Gamma_1} u w_t \left(\sum_{i=1}^n \nu_i \right) d\Gamma_1.
\end{aligned} \tag{6.3.15}$$

En sommant les équations (6.3.11), (6.3.12) et (6.3.15), en utilisant (6.2.20), (6.2.21), (6.2.22) et le lemme 18 on obtient le résultat désiré. ■

Soit $\varepsilon > 0$ une constante assez petite et on définit la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= \int_{\Omega} [(2m \cdot \nabla u + (n - \varepsilon_0)u) \rho_1 u_t + (2m \cdot \nabla v + (n - \varepsilon_0)v) \rho_2 v_t] dx \\
&+ \int_{\Omega} (2m \cdot \nabla w + (n - \varepsilon_0)w) \rho_1 w_t dx.
\end{aligned}$$

Le lemme suivant joue un rôle important pour la construction de la fonctionnelle de Lyapunov.

Lemme 21 *Sous les hypothèses du théorème 6.3.1, la solution de (6.1.1)-(6.1.3), satisfait*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi(t) &\leq \int_{\Gamma_1} m.\nu(\rho_1|u_t|^2 + \rho_2|v_t|^2 + \rho_1|w_t|^2)d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} m.\nu|\nabla u|^2d\Gamma_1 \\
&\quad - c_1 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + v + w \right|^2 dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} (2m.\nabla u + (n - \varepsilon_0)u) d\Gamma_1 \\
&\quad - \varepsilon_0 \int_{\Omega} (\rho_1|u_t|^2 + \rho_2|v_t|^2 + \rho_1|w_t|^2) dx - c_2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} - u \right|^2 dx \\
&\quad - (1 - \varepsilon_0) \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2) dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial v}{\partial \nu} (2m.\nabla v + (n - \varepsilon_0)v) d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} m.\nu|\nabla v|^2 d\Gamma_1 \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial \nu} (2m.\nabla w + (n - \varepsilon_0)w) d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} m.\nu|\nabla w|^2 d\Gamma_1 \\
&\quad + \int_{\Omega} ((-n + \varepsilon_0)\delta - n + \varepsilon_0)a + 2m.\nabla a) F(u, v, w) dx. \tag{6.3.16}
\end{aligned}$$

Démonstration. En multipliant la première équation de (6.1.1) par $2m.\nabla u + (n - \varepsilon_0)u$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (2m.\nabla u + (n - \varepsilon_0)u)\rho_1 u_t dx &= \int_{\Omega} 2\rho_1 m.\nabla u_t u_t dx + (n - \varepsilon_0) \int_{\Omega} \rho_1 |u_t|^2 dx \\
&\quad + \int_{\Omega} 2m.\nabla u \Delta u dx + (n - \varepsilon_0) \int_{\Omega} u \Delta u dx \\
&\quad + \alpha_1 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (2m.\nabla u + (n - \varepsilon_0)u) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \\
&\quad + (\alpha_1 + \alpha_2) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (2m.\nabla u + (n - \varepsilon_0)u) \frac{\partial w}{\partial x_i} dx \\
&\quad - \int_{\Omega} (a(x)f_1(u, v, w) + \beta_1 u)[2m.\nabla u + (n - \varepsilon_0)u] dx.
\end{aligned}$$

En intégrant par parties et en utilisant la relation $\operatorname{div} m = n$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (2m \cdot \nabla u + (n - \varepsilon_0)u) \rho_1 u_t dx &\leq \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu \rho_1 |u_t|^2 d\Gamma_1 - \int_{\Omega} \nabla \rho_1 \cdot m |u_t|^2 dx \\
&+ \int_{\Gamma_1} (2m \cdot \nabla u + (n - \varepsilon_0)u) \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma_1 \\
&- \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu |\nabla u|^2 d\Gamma_1 - (1 - \varepsilon_0) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\
&+ \alpha_1 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (2m \cdot \nabla u + (n - \varepsilon_0)u) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \\
&+ (\alpha_1 + \alpha_2) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (2m \cdot \nabla u + (n - \varepsilon_0)u) \frac{\partial w}{\partial x_i} dx \\
&- \beta_1 \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu |u|^2 d\Gamma_1 + \beta_1 \varepsilon_0 \int_{\Omega} |u|^2 dx - \varepsilon_0 \int_{\Omega} \rho_1 |u_t|^2 dx \\
&- \int_{\Omega} a(x) f_1(u, v, w) [2m \cdot \nabla u + (n - \varepsilon_0)u] dx.
\end{aligned}$$

De même, en multipliant la seconde équation de (6.1.1) par $(2m \cdot \nabla v + (n - \varepsilon_0)v)$ et en intégrant par parties sur Ω , on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (2m \cdot \nabla v + (n - \varepsilon_0)v) \rho_2 v_t dx &\leq \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu \rho_2 |v_t|^2 d\Gamma_1 - \varepsilon_0 \int_{\Omega} \rho_2 |v_t|^2 dx - \int_{\Omega} \nabla \rho_2 \cdot m |v_t|^2 dx \\
&+ \int_{\Gamma_1} (2m \cdot \nabla v + (n - \varepsilon_0)v) \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma_1 \\
&- \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu |\nabla v|^2 d\Gamma_1 + \beta_2 \varepsilon_0 \int_{\Omega} |v|^2 dx \\
&- (1 - \varepsilon_0) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \beta_2 \varepsilon_0 \int_{\Omega} v w dx \\
&- \alpha_1 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (2m \cdot \nabla v + (n - \varepsilon_0)v) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \\
&- \beta_2 \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu |v|^2 d\Gamma_1 - \beta_2 \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu v w d\Gamma_1 \\
&- \int_{\Omega} a(x) f_2(u, v, w) [2m \cdot \nabla v + (n - \varepsilon_0)v] dx.
\end{aligned}$$

Enfin, en multipliant la troisième équation de (6.1.1) par $(2m \cdot \nabla w + (n - \varepsilon_0)w)$ et en intégrant par parties sur Ω , on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (2m \cdot \nabla w + (n - \varepsilon_0)w) \rho_1 w_t dx &\leq \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu \rho_1 |w_t|^2 d\Gamma_1 - \varepsilon_0 \int_{\Omega} \rho_1 |w_t|^2 dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \nabla \rho_1 \cdot m |w_t|^2 dx - \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu |\nabla w|^2 d\Gamma_1 \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} (2m \cdot \nabla w + (n - \varepsilon_0)w) \frac{\partial w}{\partial \nu} d\Gamma_1 + \beta_2 \varepsilon_0 \int_{\Omega} v w dx \\
&\quad - (1 - \varepsilon_0) \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \beta_2 \varepsilon_0 \int_{\Omega} |w|^2 dx \\
&\quad - (\alpha_1 + \alpha_2) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (2m \cdot \nabla w + (n - \varepsilon_0)w) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \\
&\quad - \int_{\Omega} a(x) f_3(u, v, w) [2m \cdot \nabla w + (n - \varepsilon_0)w] dx \\
&\quad - \beta_2 \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu |w|^2 d\Gamma_1 - \beta_2 \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu v w d\Gamma_1.
\end{aligned}$$

En sommant les trois inégalités ci-dessus, en tenant compte de la condition (6.1.4) et le fait qu'il existe une constante positive c telle que

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} m \cdot \nabla u + \frac{\partial u}{\partial x_i} m \cdot \nabla v + \frac{\partial w}{\partial x_i} m \cdot \nabla u + \frac{\partial u}{\partial x_i} m \cdot \nabla w \right) dx \\
&+ \alpha_2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} m \cdot \nabla u + \frac{\partial u}{\partial x_i} m \cdot \nabla w \right) dx \\
&\leq c \max \{ \alpha_1, \alpha_2 \} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2) dx,
\end{aligned}$$

et en exploitant les conditions (6.2) et (6.2.1), telles que

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} a(x) f_1(u, v, w) [2m \cdot \nabla u + (n - \varepsilon_0)u] dx - \int_{\Omega} a(x) f_2(u, v, w) [2m \cdot \nabla v + (n - \varepsilon_0)v] dx \\
& - \int_{\Omega} a(x) f_3(u, v, w) [2m \cdot \nabla w + (n - \varepsilon_0)w] dx \\
& = - \int_{\Omega} a(x) \frac{\partial F}{\partial u} [2m \cdot \nabla u + (n - \varepsilon_0)u] dx - \int_{\Omega} a(x) \frac{\partial F}{\partial v} [2m \cdot \nabla v + (n - \varepsilon_0)v] dx \\
& - \int_{\Omega} a(x) \frac{\partial F}{\partial w} [2m \cdot \nabla w + (n - \varepsilon_0)w] dx \\
& \leq (-n + \varepsilon_0)(1 + \delta) \int_{\Omega} a(x) F(u, v, w) dx - 2 \int_{\Omega} a(x) m \cdot \nabla F(u, v, w) dx \\
& \leq ((-n + \varepsilon_0)\delta - n + \varepsilon_0) \int_{\Omega} a(x) F(u, v, w) dx + \int_{\Omega} (2m \cdot \nabla a) F(u, v, w) dx \\
& - \int_{\Gamma_1} a(x) (2m \cdot \nu) F(u, v, w) d\Gamma_1 \\
& \leq \int_{\Omega} ((-n + \varepsilon_0)\delta - n + \varepsilon_0) a + 2m \cdot \nabla a) F(u, v, w) dx.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Phi(t) & \leq \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu (\rho_1 |u_t|^2 + \rho_2 |v_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2) d\Gamma_1 - \varepsilon_0 \int_{\Omega} (\rho_1 |u_t|^2 + \rho_2 |v_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2) dx \\
& + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} (2m \cdot \nabla u + (n - \varepsilon_0)u) d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu |\nabla u|^2 d\Gamma_1 \\
& - (1 - \varepsilon_0) \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2) dx - c_1 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + v + w \right|^2 dx \\
& + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial v}{\partial \nu} (2m \cdot \nabla v + (n - \varepsilon_0)v) d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu |\nabla v|^2 d\Gamma_1 \\
& + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial \nu} (2m \cdot \nabla w + (n - \varepsilon_0)w) d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu |\nabla w|^2 d\Gamma_1 \\
& - \beta_1 \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu |u|^2 d\Gamma_1 - \beta_2 \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu (|v| + |w|)^2 d\Gamma_1 - c_2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} - u \right|^2 dx \\
& + \int_{\Omega} ((-n + \varepsilon_0)\delta - n + \varepsilon_0) a + 2m \cdot \nabla a) F(u, v, w) dx.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré et en prenant ε_0 assez petit, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi(t) &\leq \int_{\Gamma_1} m.\nu(\rho_1|u_t|^2 + \rho_2|v_t|^2 + \rho_1|w_t|^2)d\Gamma_1 - \varepsilon_0 \int_{\Omega} (\rho_1|u_t|^2 + \rho_2|v_t|^2 + \rho_1|w_t|^2)dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(2m.\nabla u + (n - \varepsilon_0)u)d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} m.\nu|\nabla u|^2 d\Gamma_1 \\
&\quad - (1 - \varepsilon_0) \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2)dx - c_1 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + v + w \right|^2 dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial v}{\partial \nu}(2m.\nabla v + (n - \varepsilon_0)v)d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} m.\nu|\nabla v|^2 d\Gamma_1 - c_2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} - u \right|^2 dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial \nu}(2m.\nabla w + (n - \varepsilon_0)w)d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} m.\nu|\nabla w|^2 d\Gamma_1 \\
&\quad + \int_{\Omega} ((-n + \varepsilon_0)\delta - n + \varepsilon_0)a + 2m.\nabla a)F(u, v, w)dx.
\end{aligned}$$

La démonstration du lemme 21 est achevée. ■

Démonstration du Théorème 6.3.1

Maintenant, on introduit la fonctionnelle de Lyapunov \mathcal{L} . Pour $N > 0$ assez grand, on considère

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + \Phi(t). \quad (6.3.17)$$

En appliquant l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré aux intégrales de la frontière de (6.3.16), on a pour $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(2m.\nabla u + (n - \varepsilon_0)u)d\Gamma_1 &\leq \varepsilon \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma_1} m.\nu|\nabla u|^2 d\Gamma_1 \right) + C_\varepsilon \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma_1, \\
\int_{\Gamma_1} \frac{\partial v}{\partial \nu}(2m.\nabla v + (n - \varepsilon_0)v)d\Gamma_1 &\leq \varepsilon \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma_1} m.\nu|\nabla v|^2 d\Gamma_1 \right) + C_\varepsilon \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma_1, \\
\int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial \nu}(2m.\nabla w + (n - \varepsilon_0)w)d\Gamma_1 &\leq \varepsilon \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \int_{\Gamma_1} m.\nu|\nabla w|^2 d\Gamma_1 \right) + C_\varepsilon \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma_1.
\end{aligned}$$

On réécrit les conditions aux limites (6.2.20), (6.2.21) et (6.2.22) comme suit

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \nu} &= -\tau_1\{u_t + k_1(t)u - k_1(t)u_0 - k'_1 \odot u\}, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} &= -\tau_2\{v_t + k_2(t)v - k_2(t)v_0 - k'_2 \odot v\}, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &= -\tau_3\{w_t + k_3(t)w - k_3(t)w_0 - k'_3 \odot w\}, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

et en combinant toutes les relations ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}}{dt}(t) &\leq -\left(\frac{N\tau_1}{2} - C_\varepsilon - m.\nu\rho_1\right) \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma_1 + \frac{N\tau_1}{2} \int_{\Gamma_1} k_1^2(t)|u^0|^2 d\Gamma_1 \\ &\quad - (1 - \varepsilon) \int_{\Gamma_1} m.\nu|\nabla u|^2 d\Gamma_1 - \frac{N\tau_1}{2} \int_{\Gamma_1} k_1'' \circ u d\Gamma_1 \\ &\quad - (1 - \varepsilon_0 - \varepsilon - C_\varepsilon k_1^2(t)) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad - \left(\frac{N\tau_2}{2} - C_\varepsilon - m.\nu\rho_2\right) \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma_1 + \frac{N\tau_2}{2} \int_{\Gamma_1} k_2^2(t)|v^0|^2 d\Gamma_1 \\ &\quad - (1 - \varepsilon_0 - \varepsilon - C_\varepsilon k_2^2(t)) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \\ &\quad - (1 - \varepsilon) \int_{\Gamma_1} m.\nu|\nabla v|^2 d\Gamma_1 - \frac{N\tau_2}{2} \int_{\Gamma_1} k_2'' \circ v d\Gamma_1 \\ &\quad - \left(\frac{N\tau_3}{2} - C_\varepsilon - m.\nu\rho_1\right) \int_{\Gamma_1} |w_t|^2 d\Gamma_1 + \frac{N\tau_3}{2} \int_{\Gamma_1} k_3^2(t)|w^0|^2 d\Gamma_1 \\ &\quad - (1 - \varepsilon) \int_{\Gamma_1} m.\nu|\nabla w|^2 d\Gamma_1 - \frac{N\tau_3}{2} \int_{\Gamma_1} k_3'' \circ w d\Gamma_1 - (1 - \varepsilon_0 - \varepsilon - C_\varepsilon k_3^2(t)) \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \\ &\quad - \varepsilon_0 \int_{\Omega} (\rho_1|u_t|^2 + \rho_2|v_t|^2 + \rho_1|w_t|^2) dx - c_1 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + v + w \right|^2 dx \\ &\quad - c_2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} - u \right|^2 dx + \int_{\Omega} ((-n + \varepsilon_0)\delta + n + \varepsilon_0)a + 2m.\nabla a) F(u, v, w) dx \\ &\quad + C_\varepsilon \int_{\Gamma_1} |k'_1 \odot u|^2 d\Gamma_1 + C_\varepsilon \int_{\Gamma_1} |k'_2 \odot v|^2 d\Gamma_1 + C_\varepsilon \int_{\Gamma_1} |k'_3 \odot w|^2 d\Gamma_1 \\ &\quad + C_\varepsilon k_1^2(t) \int_{\Gamma_1} |u^0|^2 d\Gamma_1 + C_\varepsilon k_2^2(t) \int_{\Gamma_1} |v^0|^2 d\Gamma_1 + C_\varepsilon k_3^2(t) \int_{\Gamma_1} |w^0|^2 d\Gamma_1. \end{aligned}$$

Nous choisissons nos constantes comme suit, en prenant

$$\varepsilon = \varepsilon_0 < \frac{1}{2}. \quad (6.3.18)$$

Une fois que ε est fixé, nous choisissons N assez grand telle que

$$N > \sup \left\{ \frac{2(C_\varepsilon + \max |m.\nu\rho_1|)}{\tau_1}, \frac{2(C_\varepsilon + \max |m.\nu\rho_2|)}{\tau_2}, \frac{2(C_\varepsilon + \max |m.\nu\rho_1|)}{\tau_3} \right\}. \quad (6.3.19)$$

En utilisant le fait que $\lim_{t \rightarrow \infty} k_i(t) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et (6.2.7), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt}(t) &\leq -C_1 E(t) \\ &+ C_2 \int_{\Gamma_1} [k_1^2(t)|u^0|^2 d\Gamma_1 + k_2^2(t)|v^0|^2 d\Gamma_1 + k_3^2(t)|w^0|^2] d\Gamma_1 \\ &- C_3 \int_{\Gamma_1} [k'_1 \circ u + k'_2 \circ v + k'_3 \circ w] d\Gamma_1, \quad \forall t \geq t_0, \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

pour t_0 assez grand et certaines constantes positives C_1 , C_2 et C_3 .

Si $\gamma(t) = \min\{\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)\}$, pour $t \geq t_0$, on multiplie les deux côtés de (6.3.20) par $\gamma_1(t)$ on obtient

$$\begin{aligned} \gamma(t) \frac{d\mathcal{L}}{dt}(t) &\leq -C_1 \gamma(t) E(t) \\ &+ C_2 \gamma(t) \int_{\Gamma_1} [k_1^2(t)|u^0|^2 + k_2^2(t)|v^0|^2 + k_3^2(t)|w^0|^2] d\Gamma_1 \\ &- \gamma(t) C_3 \int_{\Gamma_1} [k'_1 \circ u + k'_2 \circ v + k'_3 \circ w] d\Gamma_1 \\ &\leq -C_1 \gamma(t) E(t) \\ &+ C_2 \int_{\Gamma_1} [\gamma_1(t) k_1^2(t) |u^0|^2 \\ &+ \gamma_2(t) k_2^2(t) |v^0|^2 + \gamma_3(t) k_3^2(t) |w^0|^2] d\Gamma_1 \\ &+ C_3 \int_{\Gamma_1} [\gamma_1(t) (-k'_1) \circ u \\ &+ \gamma_2(t) (-k'_2) \circ v + \gamma_3(t) (-k'_3) \circ w] d\Gamma_1, \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

En utilisant (6.3.1) et le fait que $\gamma_i(t)$ est décroissante, on obtient

$$\begin{aligned}
\gamma(t) \frac{d\mathcal{L}}{dt}(t) &\leq -C_1 \gamma(t) E(t) \\
&\quad + C_2 \int_{\Gamma_1} [\gamma_1(t) k_1^2(t) |u^0|^2 \\
&\quad + \gamma_2(t) k_2^2(t) |v^0|^2 + \gamma_3(t) k_3^2(t) |w^0|^2] d\Gamma_1 \\
&\quad + C_3 \int_{\Gamma_1} [\gamma_1(t) k_1'' \circ u d\Gamma_1 \\
&\quad + \gamma_2(t) k_2'' \circ v + \gamma_3(t) k_3'' \circ w] d\Gamma_1, \quad \forall t \geq t_0.
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant (6.3.7), on voit facilement que

$$\begin{aligned}
\gamma(t) \frac{d\mathcal{L}}{dt}(t) &\leq -C_1 \gamma(t) E(t) + C_4 \int_{\Gamma_1} [k_1^2(t) |u^0|^2 \\
&\quad + k_2^2(t) |v^0|^2 + k_3^2(t) |w^0|^2] d\Gamma_1 \\
&\quad - C \frac{dE}{dt}, \quad \forall t \geq t_0,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\gamma(t) \frac{d\mathcal{L}}{dt}(t) + C \frac{dE}{dt} &\leq -C_1 \gamma(t) E(t) + C_4 \int_{\Gamma_1} [k_1^2(t) |u^0|^2 \\
&\quad + k_2^2(t) |v^0|^2 + k_3^2(t) |w^0|^2] d\Gamma_1,
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \{ \gamma(t) \mathcal{L}(t) + C E(t) \} - \gamma'(t) \mathcal{L}(t) &\leq -C_1 \gamma(t) E(t) + C_4 \int_{\Gamma_1} [k_1^2(t) |u^0|^2 \\
&\quad + k_2^2(t) |v^0|^2 + k_3^2(t) |w^0|^2] d\Gamma_1.
\end{aligned} \tag{6.3.21}$$

Ainsi en utilisant le fait que $\gamma_1(t)$ est décroissante et posons

$$\mathcal{L}_1(t) = \gamma(t) \mathcal{L}(t) + C E(t) \sim E(t), \tag{6.3.22}$$

l'estimation (6.3.21) nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{L}_1}{dt}(t) &\leq -\omega \gamma(t) \mathcal{L}_1(t) + c \int_{\Gamma_1} k_1^2 |u^0|^2 d\Gamma_1 \\
&\quad + c \int_{\Gamma_1} k_2^2(t) |v^0|^2 d\Gamma_1 + c \int_{\Gamma_1} k_3^2(t) |w^0|^2 d\Gamma_1, \quad \forall t \geq t_0.
\end{aligned} \tag{6.3.23}$$

(i) Si $u^0 = v^0 = w^0 = 0$ sur Γ_1 , alors (6.3.23) devient

$$\frac{d\mathcal{L}_1}{dt}(t) \leq -\omega\gamma(t)\mathcal{L}_1(t), \quad \forall t \geq t_0. \quad (6.3.24)$$

Par une intégration sur (t_0, t) , on obtient

$$\mathcal{L}_1(t) \leq \mathcal{L}_1(t_0)e^{-\omega \int_{t_0}^t \gamma(s)ds}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (6.3.25)$$

En utilisant (6.3.22), on obtient pour une constante positive c

$$E(t) \leq cE(t_0)e^{-\omega \int_{t_0}^t \gamma(s)ds}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (6.3.26)$$

Ensuite, on obtient

$$E(t) \leq cE(0)e^{-\omega \int_0^t \gamma(s)ds}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (6.3.27)$$

(ii) Si $(u^0, v^0, w^0) \neq (0, 0, 0)$ sur Γ_1 , alors (6.3.23) donne

$$\frac{d\mathcal{L}_1}{dt}(t) \leq -\omega\gamma(t)\mathcal{L}_1(t) + C_1k_1^2(t) + C_2k_2^2(t) + C_3k_3^2(t) \quad \forall t \geq t_0, \quad (6.3.28)$$

où $C_1 = c \int_{\Gamma_1} |u^0|^2 d\Gamma_1$, $C_2 = c \int_{\Gamma_1} |v^0|^2 d\Gamma_1$ and $C_3 = c \int_{\Gamma_1} |w^0|^2 d\Gamma_1$.

Dans ce cas, on introduit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(t) = & \mathcal{L}_1(t) - C_1 e^{-\omega \int_{t_0}^t \gamma(s)ds} \int_{t_0}^t k_1^2(s) e^{\omega \int_{t_0}^s \gamma(\zeta)d\zeta} ds \\ & - C_2 e^{-\omega \int_{t_0}^t \gamma(s)ds} \int_{t_0}^t k_2^2(s) e^{\omega \int_{t_0}^s \gamma(\zeta)d\zeta} ds \\ & - C_3 e^{-\omega \int_{t_0}^t \gamma(s)ds} \int_{t_0}^t k_3^2(s) e^{\omega \int_{t_0}^s \gamma(\zeta)d\zeta} ds. \end{aligned}$$

En dérivant \mathcal{L}_2 et en utilisant (6.3.23), on obtient

$$\frac{d\mathcal{L}_2}{dt}(t) \leq -\omega\gamma(t)\mathcal{L}_2(t), \quad \forall t \geq t_0. \quad (6.3.29)$$

Ainsi, par une intégration sur (t_0, t) , on obtient

$$\mathcal{L}_2(t) \leq \mathcal{L}_2(t_0)e^{-\omega \int_{t_0}^t \gamma(s)ds}, \quad \forall t \geq t_0, \quad (6.3.30)$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(t) &\leq \mathcal{L}_1(t_0) \cdot e^{-\omega \int_{t_0}^t \gamma(s) ds} \\ &+ \left(C_1 \int_{t_0}^t k_1^2(s) e^{\omega \int_{t_0}^s \gamma(\zeta) d\zeta} ds + C_2 \int_{t_0}^t k_2^2(s) e^{\omega \int_{t_0}^s \gamma(\zeta) d\zeta} ds \right) e^{-\omega \int_{t_0}^t \gamma(s) ds} \\ &+ C_3 \left(\int_{t_0}^t k_3^2(s) e^{\omega \int_{t_0}^s \gamma(\zeta) d\zeta} ds \right) e^{-\omega \int_{t_0}^t \gamma(s) ds}, \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

En utilisant (6.3.22) et (6.3.7), on obtient pour une constante positive C

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \left\{ E(0) + C_1 \int_0^t k_1^2(s) \left[\frac{\tau_1}{2c} + e^{\omega \int_{t_0}^s \gamma(\zeta) d\zeta} \right] ds \right\} e^{\omega \int_0^{t_0} \gamma(s) ds} e^{-\omega \int_0^t \gamma(s) ds} \\ &+ C \left\{ C_2 \int_0^t k_2^2(s) \left[\frac{\tau_2}{2c} + e^{\omega \int_{t_0}^s \gamma(\zeta) d\zeta} \right] ds \right\} e^{\omega \int_0^{t_0} \gamma_1(s) ds} e^{-\omega \int_0^t \gamma_1(s) ds} \\ &+ C \left\{ +C_3 \int_0^t k_3^2(s) \left[\frac{\tau_3}{2c} + e^{\omega \int_{t_0}^s \gamma_1(\zeta) d\zeta} \right] ds \right\} e^{\omega \int_0^{t_0} \gamma_1(s) ds} e^{-\omega \int_0^t \gamma_1(s) ds}. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du théorème 6.3.1.

Remarque 9 Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} k_i(t) = 0$ et $\int_0^{+\infty} \gamma(t) dt = +\infty$ alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0.$$

Exemples. Nous donnons quelques exemples pour illustrer les taux de décroissance de l'énergie obtenus dans (6.3.5).

Exemple 3 Si $k_1(t) = k_2(t) = k_3(t) = ae^{-b(1+t)^p}$, $0 < p \leq 1$ alors,

$$k_i''(t) \geq -\gamma(t)k_i'(t), \quad \text{où } \gamma_i(t) = bp(1+t)^{p-1}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Pour des constantes positives convenablement choisies, k_i vérifient les conditions (6.3.1), de (6.3.5) on a

$$E(t) \leq ce^{-\omega b(1+t)^p}.$$

Exemple 4 Si $k_1(t) = \frac{a_1}{(1+t)^q}$, $q > 0$, $k_2(t) = a_2 e^{-b_1(1+t)^{p_1}}$, $0 < p_1 \leq 1$ et $k_3(t) = a_3 e^{-b_2(1+t)^{p_2}}$, $0 < p_2 \leq 1$ alors

$$E(t) \leq \frac{c}{(1+t)^{q\omega}}$$

Les deux exemples ci-dessus sont inclus dans le suivant qui est plus général.

Exemple 5 Pour des fonctions décroissantes $k_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ qui vérifient la condition (6.3.1), avec $\gamma_i = \frac{-k'_i}{k_i}$ sont également des fonctions décroissantes et différentiables telles que

$$c\gamma_1(t) \leq \min\{\gamma_2(t), \gamma_3(t)\} \quad \text{pour } 0 < c \leq 1,$$

on a de (6.3.5)

$$E(t) \leq c[k_1(t)]^\omega.$$

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié l'existence des solutions et la stabilisation de quelques systèmes élastiques et thermoélastiques de type Bresse.

La première partie a été consacrée à l'étude de l'existence et l'unicité ainsi que la stabilisation du modèle de Bresse avec une masse attachée à son extrémité libre.

- Un résultat d'existence et d'unicité de la solution a été démontré.
- Un résultat de stabilité exponentielle a été obtenu en considérant trois amortissements linéaires frontières de type $k_0\varphi_t(L, t)$, $k_1\psi_t(L, t)$, $k_2w_t(L, t)$ agissant sur les trois équations.

De nombreuses perspectives sont envisageables. En particulier, Il serait intéressant d'étudier le taux de décroissance de l'énergie en considérant des dissipations plus faible par exemple de type viscoélastique de la forme :

$$k_0 \int_0^t g_1(t-s)\varphi(L, s)ds, \quad k_1 \int_0^t g_2(t-s)\psi(L, s)ds, \quad k_2 \int_0^t g_3(t-s)w(L, s)ds.$$

Dans la deuxième partie, nous avons étudié le comportement asymptotique du problème de Cauchy du système de Bresse en thermoélasticité non classique, nous avons considéré séparément les modèles suivants :

- Modèle de Bresse couplé avec la loi de Cattaneo.
- Modèle de Bresse couplé avec la loi de Green et Naghdi-type III.

Nous avons montré que la solution des deux systèmes décroît lentement avec le même taux de décroissance $(1+t)^{-1/12}$ et avec une perte de régularité malgré la présence d'un terme d'amortissement linéaire de la forme δw_t dans l'équation du déplacement longitudinal.

Le comportement des solutions du système de Bresse-Cattaneo dépend d'un certain nombre de stabilité α qui est une fonction des paramètres du système.

Le comportement des solutions du système de Bresse en thermoélasticité de type III dépend des vitesses de propagation d'ondes des équations.

Il y a plusieurs questions ouvertes concernant l'étude du taux de décroissance de la solution des deux systèmes :

- Quel sera le taux de décroissance de la solution pour $\delta = 0$?
- Quelles sont les taux de décroissance qu'on peut obtenir en considérant le terme d'amortissement (damping) dans l'équation du déplacement transversal au lieu du déplacement longitudinal et quelles seront les conditions sur les paramètres physiques ?

La troisième partie a été consacrée à l'étude de la stabilisation du système de Bresse multidimensionnel non linéaire dans un domaine borné. Nous avons établi un résultat de décroissance explicite et général en considérant trois termes mémoires sur une partie de la frontière du domaine. En guise de perspectives, nous envisageons d'étudier le comportement asymptotique en considérant des termes de retard au lieu des termes sources.

Bibliographie

- [1] F. Alabau-Bousouira, J. E. Munoz Rivera and D. S. Almeida Junior, Stability to weak dissipative Bresse system, *Journal of Math. Anal. and Appl.*, 374 :481-498, 2011.
- [2] K.T.Andrews and M.Shillor, Vibrations of a beam with a damping tip body, *Mathematical and Computer Modelling*, 35 :1033-1042, 2002.
- [3] J. A. C. Bresse, *Cours de Mécanique Appliquée*, Mallet Bachelier, Paris, 1859.
- [4] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Application*, Dunod, Paris 1999.
- [5] J.C. Bruch and T.P. Mitchell, Vibrations of a mass-loaded clamped-free Timoshenko beam, *J. Sound Vibration* 114 :341-345, 1987.
- [6] M. Budak, A.A. Samarskii and A.N. Tikhonov, *A Collection of Problems in Mathematical Physics*, Pergamon Press, 1964.
- [7] C. Cattaneo, Sulla conduzione del calore, *Atti Sem. Math. Fis Univ. Modena*, 3 :83-101, 1948.
- [8] M. M. Cavalcanti and A. Guesmia, General decay rates of solutions to a nonlinear wave equation with boundary conditions of memory type, *Differential Integral Equations*, 18 (5), 583–600, 2005.
- [9] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti and M. L. Santos, Existence and uniform decay rates of solutions to a degenerate system with memory conditions at the boundary, *Appl. Math. Comput* , 150 :439–465, 2004.
- [10] D.S. Chandrasekharaiah, A note on uniqueness of solution in the linear theory of thermoelasticity without energy dissipations, *J. Thermal Stresses*, 19 :695-710, 1996.
- [11] D.S. Chandrasekharaiah, Complete solutions in the theory of thermoelasticity without energy dissipations, *Mech. Res. Commun.*, 24 : 625-630, 1997.

- [12] D. S. Chandrasekharaiah, Hyperbolic thermoelasticity : a review of recent literature, *Appl. Mech. Rev.*, 51 :705-729, 1998.
- [13] W.Charles , J.A. Soriano , F.A.F. Nascimento and J.H. Rodrigues, Decay rates for Bresse system with arbitrary nonlinear localized damping, *J Differential Equations*, 255 :2267-2290, 2013.
- [14] B. D. Coleman and V. J. Mizel, Existence of caloric equations of state in thermodynamics, *J. Chem. Phys.*, 40 :1116-1125, 1964.
- [15] B. D. Coleman and W. Noll, The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 13 :167-178, 1963.
- [16] C.M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer- Verlag, New York, Heidelberg, 2000.
- [17] Y. Deng, Exponential uniform stabilization of cantilevered Timoshenko beam with a tip body via boundary feedback control, in : *Proc. 5th Symp. on Control of Distributed Parameter Systems*, Perpignan, France, 1989.
- [18] L.Djouamai and B.Said-Houari, Decay property of regularity-loss type for solutions in elastic solids with voids, *J. Math. Anal. Appl.* 409 :705-715, 2014.
- [19] Y. Dolak and T. Hillen, Cattaneo models for chemosensitive movement, *J. Math. Biol.* 46(2) 153-170, 2003.
- [20] L.H. Fatori and R.N. Monteiro, The optimal decay rate for a weak dissipative Bresse system, *Applied Mathematics Letters.* 25 :600-604, 2012.
- [21] L.H. Fatori and J.E. Muñoz Rivera, Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system, *IMA Journal of Applied Mathematics* 75 :881-904, 2010.
- [22] A.J.R. Feitosa, M. Milla Miranda and M.L. Oliveira, Nonlinear boundary stabilization for Timoshenko beam system, *J. Math. Anal. Appl.* 428, 194–216, 2015.
- [23] J. Ferreira, D. C. Pereira, C. A. Rapaso and M. L. Santos, Global existence and stability for wave equation of Kirchhoff type with memory condition at the boundary, *Nonlinear Anal.TMA*, 54 959–976, 2003.
- [24] H. D. Fernández Sare and R. Racke, On the stability of damped Timoshenko system-Cattaneo versus Fourier law, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 194 (1), 221-251, 2009.

- [25] C.Gasquet and P. Witomski, *Analyse de Fourier et applications :filtrage, calcul numérique et ondelettes*.Dunod, 2000.
- [26] A.E. Green and P.M. Naghdi, A re-examination of the basic postulates of thermomechanics, *Proc. Royal Society London A*, 432, 171-194, 1991.
- [27] A.E. Green and P.M. Naghdi, On undamped heat waves in elastic solid, *J. Thermal Stresses*, 15, 253-264, 1992.
- [28] A.E. Green and P.M. Naghdi, Thermoelasticity without energy dissipation, *J. Elasticity*, 15, 189-208, 1993.
- [29] A. E. Green and P. M. Naghdi, On thermodynamics and the nature of the second law, *Proc. Royal soc. London. A. Mathematical Physical Sciences*, 357, 253-270, 1977.
- [30] G. Gripenberg, S.O. Londen and O.J. Staffans, *Volterra Integral and Functional Equations*, *Encyclopedia Math. Appl.*, vol. 34, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [31] M. Grobbelaar-Van Dalsen, On the initial-boundary-value problem for an extensible beam with attached load, *Math. Methods Appl. Sci.* 19 : 943-957, 1996.
- [32] M. Grobbelaar-Van Dalsen and A. Van der Merwe, Boundary stabilization for the extensible beam with attached load, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 9 (3) 379-394, 1999.
- [33] M. Grobbelaar-Van Dalsen, On fractional powers of a pair of matrices and a plate-beam problem, *Appl. Anal.* 72 369-390, 1999.
- [34] M. Grobbelaar-Van Dalsen, Interlude of operator pairs and a von Kármán plate-beam problem with rotational inertia, *Appl. Anal.* 75 349-369, 2000.
- [35] M.Grobbelaar-Van Dalsen, Uniform stability for the Timoshenko beam with tip load, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 361 :392-400, 2010.
- [36] A. Guesmia and S.A. Messaoudi, On the control of solutions of a viscoelastic equation, *Applied Math and Computations* Vol. 206 2, 589-597, 2008.
- [37] A. Guesmia and M. Kafini, Bresse system with infinite memories, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2014.
- [38] F. L.Huang, Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, *Ann. Differential Equations*, 1 : 43-53, 1985.

- [39] T.Hosono and S.Kawashima, Decay property of regularity-loss type and application to some nonlinear hyperbolicelliptic system, *Math. Models Methods Appl. Sci*, 16 :1839-1859, 2006.
- [40] K. Ide, K .Haramoto and S. Kawashima, Decay property of regularity-loss type for dissipative Timoshenko system, *Math. Models Methods Appl. Sci*, 18 :647-667, 2008.
- [41] R. Ikehata, New decay estimates for linear damped wave equations and its application to nonlinear problem, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 27(8) :865-889, 2004.
- [42] R. Ikehata, Diffusion phenomenon for linear dissipative wave equations in an exterior domain, *J. Differential Equations* 186(2) 633-651, 2002.
- [43] H. Jellab, Modélisation thermoélastique des tissus mous par éléments finis, Thèse M.Sc., Université de Montréal, 1999.
- [44] S. Jiang and R. Racke, Evolution equation in thermoelasticity, π Monographs and Surveys, *Pure Appl. Math.* 112, Champan Hall / CRC, Boca Raton, 2000.
- [45] P. M Jordan, Growth and decay of shock and acceleration waves in a traffic flow model with relaxation, *Phys. D* 207(3) 220-229, 2005.
- [46] P. M Jordan, Second-sound phenomena in inviscid, thermally relaxing gases, *Discrete Contin. Dynam. Syst. B* 19(7) 2189-2205, 2014.
- [47] J. R. Kang, General decay for Kirchoff plates with a boundary condition of memory type, *Boundary Value Problems*, 29 , 1–11, 2012.
- [48] A.Khemmoudj and T. Hamadouche, Boundary stabilization of a Bresse-type system, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Volume 39, Number 12, pp. 3282-3293(12), 1 August 2016.
- [49] J.U.Kim and Y. Renardy, Boundary control of the Timoshenko beam, *SIAM Journal of Control and Optimization* ; 25(6) :1417-1429, 1987.
- [50] V. Komornik, Exact controllability and stabilization, *The Multiplier Method*, RAM : Research in Applied Mathematics, Masson, Paris ; 1994.
- [51] J. E. Lagnese, Günter Leugering, and E. J. P. G. Schmidt, Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures, *Systems Control : Foundations Applications*, Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 1994.

- [52] D.Li, C. Zhang, Q. Hu and H. Zhang, Energy Decay Rate for Bresse System with Nonlinear Localized Damping, *British Journal of Mathematics Computer Science*; 4(12) : 1665-1677, 2014.
- [53] F. Li, Z. Wu and K. Huang, A difference scheme for solving the Timoshenko beam equations with tip body and boundary damping, *Acta Math. Appl. Sin.Engl. Ser.* 24 (2) 337-352, 2008.
- [54] W. Littman and L. Markus, Stabilization of a hybrid system of elasticity by feedback boundary damping, *Ann. Mat. Pura Appl.* 152 281-330, 1988.
- [55] Z. Liu and S. Zheng, Semigroups Associated with Dissipative Systems, *Research Notes in Mathematics*, vol. 398. Chap-man Hall/CRC : Boca Raton, 1999.
- [56] Z.Y. Liu and B.P. Rao, Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik* ; 60 :54-69, 2009.
- [57] S.A.Messaoudi and M.I.Mustafa, On the internal and boundary stabilization of Timoshenko beams, *NoDEA Nonlinear Differential Equations and Applications* ; 15 :655-671, 2008.
- [58] S.A. Messaoudi and B. Said-Houari, Energy decay in Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III, *J. Math. Anal. Appl.* 384 298-307, 2008.
- [59] S.A. Messaoudi and B. Said-Houari, Energy decay in Timoshenko-type system with history in thermoelasticity of type III, *Adv. Diff. Equa.* 14, 375-400, 2009.
- [60] S. A. Messaoudi, M. Pokojovy and B. Said-Houari, Nonlinear damped Timoshenko systems with second sound-global existence and exponential stability, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 32 (5), 505-534, 2009.
- [61] S. A. Messaoudi and A. Soufyane, Boundary stabilization of solutions of a nonlinear system of Timoshenko type, *Nonlinear Anal*, 67 2107–2121, 2007.
- [62] S. A. Messaoudi and A. Soufyane, General decay of solutions of a wave equation with a boundary control of memory type, *Nonlinear Anal,RWA*, 11, 2896–2904, 2010.
- [63] S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa, Energy decay rates for a Timoshenko system with viscoelastic boundary conditions, *Appl. Math. Comput*, 218, 9125–9131, 2012.

- [64] A. Mifdal, Stabilisation uniforme d'un système hybride, C. R. Acad. Sci. Paris 324 37-42, 1987.
- [65] O. Morgul, Boundary control of a Timoshenko beam attached to a rigid body : Planar motion, Internat. J. Control 54 763-791, 1991.
- [66] J.E. Munoz Rivera and R. Racke, Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems global existence and exponential stability, J. Math. Anal. Appl. 276, 248-278, 2002.
- [67] N. Najdi and A. Wehbe, Weakly locally thermal stabilization of bresse system, Electron. J. Diff. Equ,(182) :1-19, 2014.
- [68] N.Noun and A.Wehebe, Weakly locally internal stabilization of elastic Bresse system, C R Acad Sci Paris. Ser. I. 350 :493-498, 2012.
- [69] A.Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag : New York, 1983.
- [70] P. Pei, M. A. Rammaha and D. Toundykov, Local and global well-posedness of semilinear Reissner Mindlin Timoshenko plate equations, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, 105, Pages 62-85, August 2014.
- [71] H. Portillo Oquendo, J. E. Munoz Rivera and M. L. Santos, Asymptotic behavior to a von Kármán plate with boundary memory conditions, Nonlinear Analysis, 62, 1183–1205, 2005.
- [72] J.Prüss, On the spectrum of C_0 semigroups, Trans. Amer. Math. Soc., 284 :847-857, 1984.
- [73] R. Quintanilla, Instability and non-existence in the nonlinear theory of thermoelasticity without energy dissipation, Continuum Mech. Thermodyn., 13, 121-129, 2001.
- [74] R. Quintanilla, Structural stability and continuous dependence of solutions in thermoelasticity of type III, Discrete and Continuous Dynamical Systems B, 1, 463-470, 2001.
- [75] R. Quintanilla, On existence in thermoelasticity without energy dissipation, J. Thermal Stresses, 25, 195-202, 2002.
- [76] R. Quintanilla, Convergence and structural stability in thermoelasticity, AppMath. and Comp., 153, 287-300, 2003.

- [77] R. Quintanilla and R. Racke, Stability in thermoelasticity of type III, *Discrete and Continuous Dynamical Systems B*, 3, 383-400, 2003.
- [78] R. Racke, Lectures on nonlinear evolution equations, Initial value problems. Aspects of mathematics, E19. Friedrich Vieweg and Sohn : Braunschweig, Wiesbaden, 1992.
- [79] R. Racke, Thermoelasticity with second sound-exponential stability in linear and non-linear 1-d, *Math. Methods. Appl. Sci.*, 25(5) :409-441, 2002.
- [80] R. Racke and J. Saal, Hyperbolic Navier-Stokes equations I : Local well-posedness, *Evol. Equ. Control Theory* 1(1) 195-215, 2012.
- [81] B. Rao, Stabilisation du modèle SCOLE par un contrôle a priori borné, *C. R. Acad. Sci. Paris* 316 1061-1066, 1993.
- [82] M. Reissig and G.Y.Wang, Cauchy problems for linear thermoelastic systems of type III in one space variable, *Math. Methods Appl. Sci.* 28 :1359-1381, 2005.
- [83] B.Said-Houari, Decay rates of the solution to the cauchy problem of the type III Timoshenko model without any mechanical damping, *Demonstratio Math*, 48 :379-380, 2015.
- [84] B.Said-Houari and R.Rahali, Asymptotic behavior of the Cauchy problem of the Timoshenko system in thermoelasticity of type III, *Evol. Equ. Control Theory*, 2 :423-440, 2013.
- [85] B. Said-Houari, Diffusion phenomenon for linear dissipative wave equations, *Z. Anal. Anwend.* 31(3) 267-282, 2012.
- [86] B. Said-Houari and A. Kasimov, Damping by heat conduction in the Timoshenko system : Fourier and Cattaneo are the same, *J. Differential Equations* 255(4) 611-632, 2013.
- [87] B. Said-Houari and A. Soufyane, The Bresse system in thermoelasticity, to appear in *Math. Methods Appl. Sci.* ; DOI : 10.1002/mma.3305.
- [88] B. Said-Houari and T.Hamadouche, The asymptotic behavior of the Bresse-Cattaneo system, *Commun. Contemp. Math.*1550045 (2015) 18 pages.
- [89] B.Said-Houari and T.Hamadouche, The Cauchy problem of the Bresse system in thermoelasticity of type III, *Applicable Analysis*.DOI :10.1080/00036811.2015.1089237

- [90] M. L. Santos, Asymptotic behavior of solutions to wave equations with a memory conditions at the boundary, *Electron. J. Differ. Equ*, 78 1–11, 2001.
- [91] M. L. Santos, Decay rates for solutions of a Timoshenko system with a memory condition at the boundary, *Abstr. Appl. Anal*, 7 7, 531–546, 2002.
- [92] M. L. Santos and A. Soufyane, General decay to a von Karman plate system with memory boundary conditions, *Diff Int Equ*, 24 (1/2), 69–81, 2011.
- [93] M. L. Santos and C. C. S. Tavares, On the Kirchhoff plates equations with thermal effects and memory boundary conditions, *Appl. Math. Comput*, 213, 25–38, 2009.
- [94] M.L. Santos, D.S. Almeida Júnior and J.E. Munoz Rivera, The stability number of the Timoshenko system with second sound, *J.Differential Equations*, 253(9) :2715-2733, 2012.
- [95] M.L. Santos and D.S.A. Junior, Numerical exponential decay to dissipative Bresse System, *J Appl Math*.848620 :1-17, 2010.
- [96] M. L. Santos, A. Soufyane and D. Almeida Júnior, Asymptotic behavior to Bresse system with past history, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol.73. (1) 23-54, 2015.
- [97] J.A.Soriano , J.E.M.Rivera and L.H. Fatori, Bresse system with indefinite damping, *J Math Anal Appl*. 387 : 284-290, 2012.
- [98] J.A. Soriano , W.Charles and R.Schulz, Asymptotic stability for Bresse systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 412 :369-380, 2014.
- [99] A. Soufyane and B. Said-Houari, The effect of frictional damping terms on the decay rate of the Bresse system, *Evol. Eqs. Control Theory* 3(4) 713-738, 2014.
- [100] M. A. Tarabek, On the existence of smooth solutions in one-dimensional nonlinear thermoelasticity with second sound, *Quart. Appl. Math.*, 50(4) :727-742, 1992.
- [101] Y.Ueda and S.Kawashima, Decay property of regularity-loss type for the Euler-Maxwell system, *Methods Appl. Anal*, 18 :245-267, 2011.
- [102] A.Wehebe and W.Youssef, Exponential and polynomial stability of an elastic Bresse system with two locally distributed feedbacks, *Journal of Mathematical Physics*, 51(103523)1-17, 2010.

- [103] C.Wenden, J.A.Soriano, F.A.Falcão Nascimento and J.H.Rodrigues, Decay rates for Bresse system with arbitrary nonlinear localized damping, *Journal of Differential Equations*, 255 :2267-2290, 2013.
- [104] GQ.Xu and SP.Yung, Exponential decay rate for a Timoshenko beam with boundary damping, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 123(3) :669-693, 2004.
- [105] Q-X.Yan, Boundary stabilization of Timoshenko beam, *Systems Science and Mathematical Sciences* 13 no. 4, 376-384, 2000.
- [106] Q. Yan and D. Feng, Boundary feedback stabilization of nonuniform Timoshenko beam with a tipload, *Chinese Ann. Math. Ser. B* 22 485-494, 2001.
- [107] H. Yang and A. Milani, On the diffusion phenomenon of quasilinear hyperbolic waves, *Bull. Sci. Math.* 124(5) 415-433, 2000.
- [108] Q-X.Yan, H-C.Zou and D-X.Feng, Nonlinear boundary stabilization of nonuniform Timoshenko beam, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica* 19 no. 2, 239-246, 2003.
- [109] Y. You, Boundary stabilization of two-dimensional Petrovsky equation : Vibrating plate, *Differential Integral Equations* 4 617-638, 1991.
- [110] W.Youssef, Contrôle et stabilisation de systèmes élastiques couplés, PhD thesis, University of Metz, France, 2009.
- [111] L. Zietsman, N.F.J. Van Rensburg and A.J. Van der Merwe, A Timoshenko beam with tip body and boundary damping, *Wave Motion* 39 199-211, 2004.
- [112] X. Zhang and E. Zuazua, Decay of solutions of the system of thermoelasticity of type III, *Commun. Contemp. Math.* 5 (1), 25-83, 2003.