

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté d'Electronique et d'Informatique



MEMOIRE

Présenté

Pour l'obtention du Diplôme

de Magister en Electronique

Spécialité : Instrumentation

Par : Mr BELGUIDOUM ADEL BOUZID

Thème :

Contribution à l'analyse en mode hybride des circuits planaires à supraconducteurs HTC en configuration multicouche

Soutenu publiquement, le 18 Décembre 2011 devant le jury composé de

Mme R.TOUHAMI	Professeur	à	L'USTHB	Présidente de Jury
Mr M.L.TOUNSI	Maître de Conférences	à	L'USTHB	Directeur de thèse
Mr K.MAZIGHI	Maître de Conférences	à	L'USTHB	Examineur
Mr Y.LAMHENE	Maître de Conférences	à	L'USTHB	Examineur

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, j'exprime mes sincères remerciements à Mohamed Lamine TOUNSI, Directeur de Thèse, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B, pour avoir directement encadré et suivi ces travaux de recherche, de m'avoir accordé toute sa confiance en acceptant de diriger ma thèse et je le remercie également pour ses précieux conseils et orientations.

Je voudrais vivement remercier Mme Rachida TOUHAMI Professeur à l'USTHB, d'avoir accepté de présider le jury.

Par la même occasion, je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. Youcef LAMHENE Maître de Conférences à l'USTHB ainsi que M. Khaled MAZIGHI Maître de Conférences à l'USTHB, pour avoir accepté d'examiner ce travail et de participer au jury de thèse, ainsi que pour l'intérêt qu'ils ont montré pour mes travaux de recherche.

Je remercie également tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

DEDICACES

Je dédie ce travail à ma chère mère et mes Sœurs Isfahene, Chahinez, Amel, Leila, pour leur soutien, leurs encouragements et leur présence. Je les remercie vivement.

Sans oublier ma chère grand-mère Yi, mes tantes Chahrazed, Dalila et Badia et mes oncles Farouk, Amirouche, et Surtout Yacine et Fayçal de Paris et à toute leur famille !! A tous mes amis. Aussi, j'ai une pensée pour toute ma famille et tous mes amis de l'autre côté de la méditerranée.

A tous ceux qui comptent pour moi. Et à la mémoire de ceux qui sont partis mon père, mes grands parents et mes deux oncles Nacer et Djamel.

SOMMAIRE

Introduction Générale.....	1
-----------------------------------	----------

Chapitre 1 : Généralités sur les matériaux supraconducteurs

1.1. Introduction	3
1.1.1. Un peu d'histoire.....	3
1.1.2. Découverte de la supraconductivité.....	4
1.2. Définition de la supraconductivité.....	5
1.3. Comportement magnétique des supraconducteurs.....	6
1.3.1. La lévitation.....	6
1.3.2. Effet Meissner.....	7
1.3.3. Champs critiques et supraconducteurs de type I et de type II.....	8
1.3.4. Courant critique.....	9
1.4. Les supraconducteurs à haute température critique (SHTC)	10
1.5. Récentes découvertes sur les supraconducteurs.....	12
1.6. Conclusion.....	14

Chapitre 2 : Théorie de la supraconductivité

2.1. Introduction.....	15
2.2. Théorie de London.....	15
2.2.1. Première équation de London.....	15
2.2.2. Deuxième équation de London.....	18
2.2.3. Modèle à deux fluides.....	19
2.2.3.1. Impédance de surface.....	21
2.2.3.1.1. Conductivité complexe.....	21
2.2.3.1.2. Résistance et réactance de surface.....	22

2.3. Théorie de Ginzburg-Landau.....	23
2.4. Théorie BCS.....	24
2.5. Théorie d'Abrikosov.....	26
2.6. Effet Josephson.....	26
2.7. Les supraconducteurs à haute température critique (SHTC).....	27
2.7.1. Longueurs caractéristiques.....	27
2.7.2. Les vortex.....	29
2.7.3. Structure macroscopique et problème des jonctions faibles.....	29
2.8. La modélisation des supraconducteurs à haute température critique (SHTC).....	31
2.9. Conclusion.....	31

Chapitre 3 : Diverses applications des Supraconducteurs

3.1. Introduction.....	32
3.1. Applications aux fréquences micro-ondes.....	32
3.1.1. Lignes de transmission.....	35
3.1.2. Filtres.....	35
3.1.3. Cavités résonnantes.....	35
3.1.4. Antennes.....	35
3.2. Autres applications de la supraconductivité.....	36
3.2.1 Applications médicales.....	36
3.2.2. Applications énergétiques.....	37
3.2.3. Les aimants pour la recherche.....	38
3.2.4. Les tokamaks.....	38
3.2.5. Les trains à lévitation magnétique.....	38
3.3. Applications militaires : La bombe électromagnétique.....	39

3.4. Applications dans les nouvelles technologies.....	39
3.5. Conclusion.....	40

Chapitre 4 : Modélisation des circuits planaires multicouches anisotropes supraconducteurs

4.1. Introduction.....	41
4.2. Principe général de la méthode spectrale pour le cas anisotrope.....	41
4.3. Formulation du problème.....	43
4.4. Equations de Maxwell dans les milieux à pertes.....	43
4.5. Equations de continuité	44
4.6. Détermination des composantes du champ EM tangentiel en fonction des composantes normales $E_{y(i)}$ et $H_{y(i)}$	45
4.7. Evaluation des fonctions de Green: utilisation de la méthode <i>immitance approach</i>	46
4.7.1. Application de la méthode <i>immitance approach</i> pour une structure multicouche..	46
4.7.2. Equations de continuité dans le domaine spectral.....	47
4.7.3. Equations de propagation des champs normaux \tilde{E}_y et \tilde{H}_y dans le diélectrique.	48
4.7.4. Cas des milieux diélectriques limités par des supraconducteurs.....	49
4.7.5. Equations de propagation des champs normaux \tilde{E}_y et \tilde{H}_y	49
4.7.6. Détermination des fonctions de Green pour une structure multicouche à conducteurs normaux.....	50
4.7.6.1. Calcul des admittances ramenées aux interfaces.....	51
4.8. Détermination des fonctions de Green.....	56
4.8.1. Détermination de la matrice admittance de Green d'yadique Y.....	56
4.8.2. Détermination de la matrice de Green G (forme impédance).....	59
4.9. Résolution par la technique de Galerkin : cas des circuits infiniment minces et infiniment Conducteurs.....	59

4.10. Prise en compte de l'épaisseur finie des métallisations.....	62
4.11. Conclusion.....	62
Chapitre 5 : Programmation de la MADS : Résultats et discussions	
5.1. Introduction.....	63
5.2. Choix des fonctions de bases.....	63
5.3. Description du programme principal.....	65
5.3.1. Lecture des données.....	65
5.3.2. Les différents sous programmes pour le calcul du diagramme de dispersion...65	
5.4. Organigramme global.....	66
5.5. Résultats et discussions.....	67
5.6. Etude de la convergence.....	73
5.7. Temps de calcul.....	74
5.8. Conclusion	76
Conclusion Générale.....	77
Bibliographie.....	78
Annexe	
Annexe A. Les supraconducteurs atypiques.....	80
Annexe B. Anisotropie des supraconducteurs de type 2.....	83
Annexe C. Calcul des composantes tangentielles du champ EM en fonction des composantes normales.....	86
Annexe D. Calcul des admittances ramenées aux interfaces.....	91
Annexe E. influence de l'épaisseur du ruban.....	98

Depuis la découverte de Kamerlingh Onnes en 1911 de la supraconductivité, beaucoup d'éléments chimiques ont été identifiés comme matériaux supraconducteurs, mais le défi portait sur la découverte d'autres matériaux supraconducteurs à des températures critiques plus élevées. La course aux hautes températures a alors commencé. Cette découverte qui ne doit rien au hasard a été rendue possible grâce à la conjonction de recherches techniques et appliquées - la liquéfaction des gaz et l'obtention des très basses températures - et de recherches fondamentales. Ce phénomène était totalement inexplicable à l'époque, mais on découvre très rapidement qu'il n'est pas rare.

La supraconductivité est la propriété possédée par certains matériaux de conduire le courant électrique sans résistance. D'autres découvertes sur la supraconductivité se sont succédées dans un laps de temps relativement court faisant naître beaucoup d'espoirs pour leurs applications pratiques et ont suscité de très nombreux travaux théoriques et expérimentaux.

De grands progrès ont été accomplis pour la compréhension de la supraconductivité mais beaucoup de points fondamentaux n'ont pas encore été éclaircis et sont encore l'objet de recherches poussées. L'utilisation des matériaux supraconducteurs en hyperfréquences repose sur les avantages suivants:

- Pertes très faibles : entraînant une réduction de l'atténuation et du niveau de bruit.
- Dispersion très faible.
- Miniaturisation des dispositifs micro-ondes; ce qui permet une large échelle d'intégration.
- Réduction du temps de propagation des signaux dans les circuits planaires.

Les applications des supraconducteurs en hyperfréquence sont très nombreuses parmi lesquels les filtres, transmission d'impulsions etc. En technologie classique, les lignes à retard nécessitent l'emploi de dispositifs compliqués et coûteux (par exemple, une mémoire permettant de stocker provisoirement le signal sous forme numérique).

Le but de notre travail repose sur une contribution à l'analyse en mode hybride des circuits planaires hyperfréquence à supraconducteurs anisotrope HTC en configuration multicouche.

Le plan de ce mémoire est le suivant :

- ✓ Dans le premier chapitre, nous décrivons quelques généralités sur les matériaux supraconducteurs et leurs propriétés physiques intéressantes en passant en revue les modèles proposés pour décrire la supraconductivité.

- ✓ Le chapitre 2 est consacré aux différentes théories de la supraconductivité parmi lesquelles la théorie de London afin d'étudier l'influence des supraconducteurs sur les circuits planaires micro-ondes.
- ✓ Le chapitre 3, présente les applications de la supraconductivité dans les différents domaines (énergétique, hyperfréquence, médicale....).
- ✓ Dans le chapitre 4, nous présentons la méthode d'approche dans le domaine spectral en mode hybride en tenant compte des propriétés des supraconducteurs de Type II.
- ✓ La dernière partie est consacrée aux résultats et interprétations. Elle décrit la mise en oeuvre numérique de la méthode sur micro-ordinateur.

1.1. Introduction

Au début du siècle dernier et alors qu'on essayait d'atteindre la température de liquéfaction de l'hélium, un extraordinaire phénomène fut découvert, laissant la communauté scientifique perplexe, et qui reste jusqu'à ce jour insuffisamment expliqué. Il s'agit de la supraconductivité, dont la découverte et la connaissance approfondie ouvriront de larges perspectives pouvant entraîner des changements importants dans notre mode de vie actuel. Dès les premières années de la connaissance de ce phénomène, de nombreux laboratoires y travaillent de par le monde vu l'énorme enjeu que peuvent présenter ces derniers. Il est important tout d'abord, pour pouvoir comprendre les différents résultats et théories obtenus, de les placer dans leur contexte compte tenu des quelques divergences que peuvent présenter quelques unes.

1.1.1. Un peu d'histoire

L'histoire de la supraconductivité est certainement l'une des aventures les plus passionnantes et des plus extraordinaires de la physique. Depuis sa découverte jusqu'à son rebondissement avec les céramiques "hautes températures", elle s'étale sur l'ensemble du vingtième siècle en le parsemant de prix Nobel. De façon directe, on ne lui doit pas moins de quatre prestigieuses récompenses:

Heike Kamerlingh Onnes [1], pour la découverte du phénomène (1913), John Bardeen, Leon Cooper et Robert Schrieffer[2], pour la théorie microscopique (BCS) qui portent leur nom (1972), Brian Josephson et Ivar Giaever pour les effets de cohérence quantique (1973), Alex Müller et J. Georg Bednorz [3] pour la découverte des supraconducteurs à haute température critique (1987).

D'autres chercheurs, tels que Lev Landau [4], (1962) ou Pierre-Gilles De Gennes (1991), ont apporté des contributions majeures à la supraconductivité et ont acquis là une part de leur notoriété. Plusieurs physiciens de renom y ont aussi laissé leur empreinte. Citons, Meissner pour l'effet qui porte son nom (1933), les frères Fritz et Heinz London [5] pour la théorie électromagnétique (1935) ou encore Brian Pippard, Alexei Abrikosov [6] et plus récemment Paul Chu, autant de noms qui y ont apporté leur contribution.

Enfin de nombreux chercheurs lui ont consacré leur temps et leur enthousiasme. Ils continuent de le faire aujourd'hui. Parmi ceux-là, vraisemblablement de futurs prix Nobel, ce sont ceux qui expliqueront de façon définitive la supraconductivité à haute température ou ceux qui découvriront de nouveaux matériaux à extrêmement haute température critique proche de la température ambiante !!.

C'est donc une histoire récente et actuelle, celle d'un phénomène physique spectaculaire et celle de chercheurs de renom de ce siècle qui par leur travail et leur imagination ont expliqué ce phénomène et continuent à le faire.

1.1.2. Découverte de la supraconductivité

L'histoire de la supraconductivité débute à Leiden en Hollande. Depuis 1908 (le 10 juillet), le groupe de H.K. Onnes a travaillé sur la liquéfaction de l'hélium à températures aussi basses que 4.2K ou même 1K.

Pendant plusieurs années, Onnes était le seul à disposer du rare et précieux élément qu'est l'hélium en quantité suffisante pour le liquéfier. Il le tient de Caroline du Nord aux Etats-Unis où se trouvent l'essentiel des ressources mondiales. Il a donc pu sans concurrence immédiate effectuer des mesures de résistivité électrique des matériaux à basse température. La préoccupation essentielle était de déterminer son comportement lorsqu'on s'approche du zéro absolu. La résistivité tend-elle vers 0 avec l'affaiblissement de l'agitation thermique? augmente-t-elle avec une localisation possible des électrons? ou atteint-elle une valeur limite due aux impuretés ?

La tâche de Gilles Holst (étudiant de K.Onnes) visait alors à mesurer la résistivité électrique du mercure dont il est possible de distiller et de l'obtenir à un état très pur. La difficulté expérimentale était de réaliser des fils en coulant le mercure dans des tubes capillaires à température ambiante et en le refroidissant à une température inférieure à sa température de solidification. Holst débouche par une courte note à l'Académie Royale des Pays Bas le 28 avril 1911 qui annonce "sous toute réserve" que la résistivité du mercure apparemment disparaît juste au-dessus de 4K.

Holst fit et refit les expériences, vérifia les instruments de mesure mais le doute n'était plus permis: le comportement extraordinaire se confirmait. D'ailleurs, l'année suivante, Onnes découvrit que l'étain et le plomb perdaient leur résistance respectivement à 3.7K et à 6K. La disparition de la résistivité électrique, en courant continu, est donc la première et la plus spectaculaire manifestation de la supraconductivité. La résistivité ne devient pas faible, très faible, elle devient nulle et apparemment strictement nulle. La dissipation d'énergie par effet joule ne serait qu'un mauvais souvenir.

1.2. Définition de la supraconductivité

La supraconductivité, est un phénomène observé sur certains métaux, alliages ou céramiques, au-dessous d'une certaine température critique T_c . Elle se manifeste par deux effets spectaculaires: l'annulation de la résistance électrique (le matériau conduit l'électricité sans dissipation d'énergie) et l'expulsion des lignes de champ magnétique appelé aussi effet Meissner à l'origine de la lévitation magnétique sujette à plusieurs applications industrielles notamment les trains à grande vitesse

L'effet Meissner [7] permet à un supraconducteur, placé dans un champ magnétique, de léviter; le supraconducteur est dans ce cas, un matériau *diamagnétique* ⁽¹⁾ parfait. Le moment magnétique \vec{M} du supraconducteur s'oppose au champ \vec{H} ($\vec{M} = -\vec{H}$).

Mais dès les premières expériences, les chercheurs ont montré que la supraconductivité disparaît à une certaine valeur de champ magnétique H_c dite critique et de courant critique J_c . Outre la T_c , deux autres facteurs limitant étaient découverts (Fig.1.2). Un matériau n'est donc supraconducteur que dans certaines conditions :

- la température doit être inférieure à la température critique T_c
- le champ magnétique appliqué doit être inférieur à une certaine valeur H_c
- la densité de courant appliqué doit être inférieure à la densité de courant critique J_c

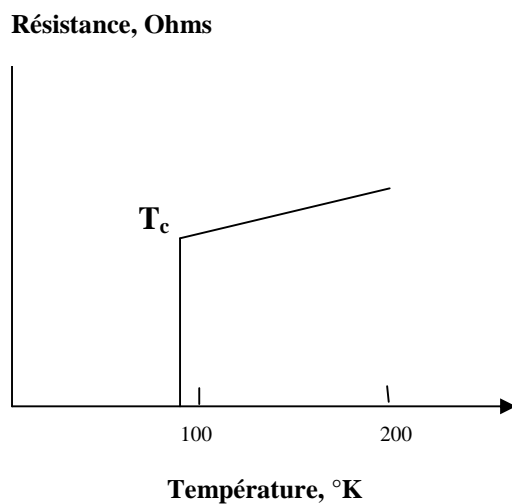


Fig. 1.1 Disparition de la résistance électrique en dessous de la température critique T_c .

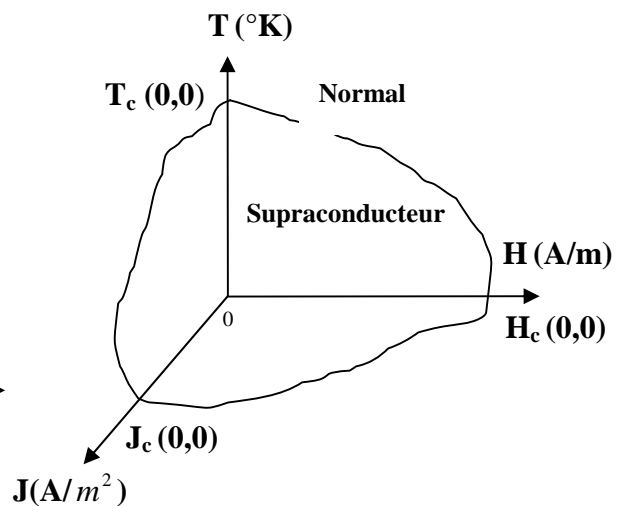


Fig. 1.2 Zone critique délimitant la région où existe la supraconductivité.

¹ Un matériau est dit diamagnétique si ses électrons se regroupent par paires annulant leurs moments magnétiques respectifs. En exposant cette substance à un champ magnétique extérieur, elles induisent un moment magnétique opposé à la direction de ce champ, ce qui explique leur répulsion par les aimants

La figure ci-dessous donne l'évolution de la résistance en fonction de la température critique des supraconducteurs au cours du 20^{ème} siècle.

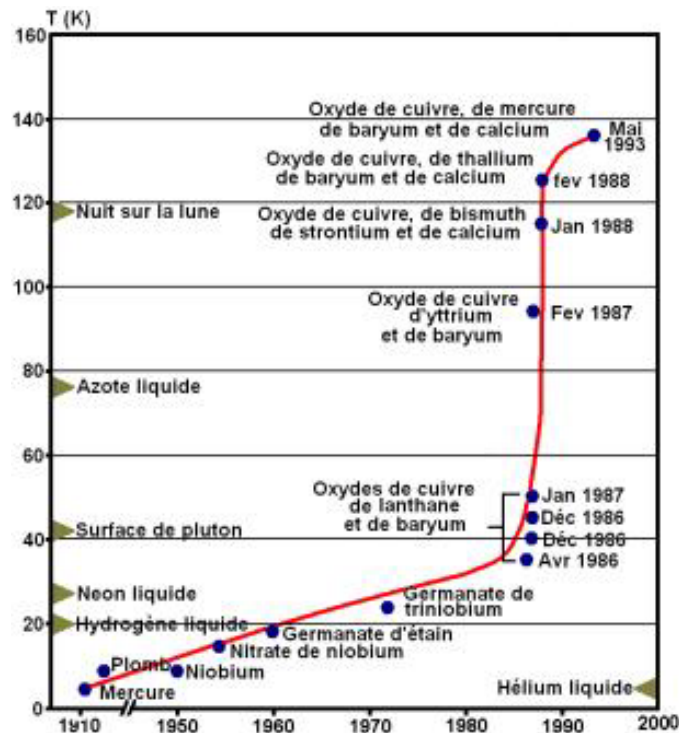


Fig. 1.3 : Evolution de la température critique des supraconducteurs au cours du 20e siècle

1.3. Comportement magnétique des supraconducteurs

Si l'annulation de la résistivité électrique des supraconducteurs est le phénomène le plus spectaculaire, leur comportement en présence de champs magnétiques s'est révélé tout aussi inattendu et particulièrement riche.

1.3.1. La lévitation

Une des expériences les plus amusantes de la supraconductivité est le phénomène de lévitation. On dispose de 4 aimants noyés dans une résine dont le pôle nord est situé vers le haut (fig. 1.4). Leur disposition est telle que le champ magnétique soit maximal à la verticale des aimants et présente un minimum local au centre de la résine.

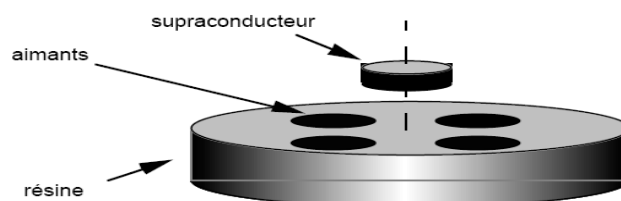


Fig. 1.4 Lévitation d'une pastille de supraconducteur YBCO sur un groupe d'aimants

On place sur ce dispositif une pastille de supraconducteur YBaCuO refroidi à la température de l'azote liquide. On observe alors un phénomène de lévitation. Le supraconducteur se soulève et vient se placer dans le minimum local du champ magnétique, à la verticale du centre du disque. L'équilibre est stable. Si l'on vient écarter le supraconducteur de sa position d'équilibre, latéralement ou verticalement, il y revient. Manifestement le supraconducteur se place là où le champ magnétique est le plus faible, dans la mesure cependant où son poids le lui permet. Au bout de quelques minutes, la pastille d'YBaCuO vient se poser sur la résine. Cela correspond à la perte de son état supraconducteur à la suite de son réchauffement dans l'air.

La pastille semble se comporter comme un aimant dont le pôle nord serait vers le bas. Retourner la pastille ne modifie en rien son comportement. Inverser la polarité des aimants conduit toujours à la lévitation. Manifestement une aimantation opposée à celle qui lui donne naissance se produit. Le supraconducteur apparaît comme un matériau diamagnétique particulièrement fort.

1.3.2. Effet Meissner

Si la chute brutale de la résistivité reste la manifestation la plus spectaculaire de la supraconductivité, le comportement magnétique tout à fait original des supraconducteurs s'avère être la signature la plus profonde du phénomène.

En 1933, le centre de supraconductivité se déplace de Leiden à Berlin. C'est là que Walter Meissner et Robert Ochsenfeld découvrent que le champ magnétique \vec{B} est expulsé des supraconducteurs. Ainsi, lorsqu'un champ magnétique extérieur est appliqué à un matériau supraconducteur, celui-ci réagit de telle sorte que le champ magnétique en son sein reste nul.

Une autre façon de présenter les choses est de dire qu'une densité d'aimantation \vec{M} égale à l'opposé de l'excitation magnétique \vec{H} se développe dans l'échantillon. Le champ \vec{B} est nul puisque ces grandeurs sont reliées par $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$. Le matériau se comporte comme un diamagnétique parfait ce qui est à la base du phénomène de lévitation. Après bien des incertitudes, il est apparu que l'aimantation \vec{M} était égale à $-\vec{H}$, quel que soit le chemin suivi: après refroidissement en champ nul et application du champ à $T < T_c$, ou bien après refroidissement de l'échantillon sous champ magnétique.

L'état supraconducteur apparaît comme une véritable phase thermodynamique. La transition phase normale - phase supraconductrice en champ nul est accompagnée d'une anomalie de chaleur spécifique mais n'engendre aucune chaleur latente. Elle sera cataloguée comme une transition du second ordre.

1.3.3. Champs critiques et supraconducteurs de type I et de type II

En fait, l'état supraconducteur déjà limité en température, connaît aussi une limite en champ et se trouve détruit lorsque un champ magnétique suffisamment élevé est appliqué. La supraconductivité disparaît selon deux scénarios différents. Ces scénarios conduisent à un classement des matériaux en supraconducteurs de type I et de type II (fig. 1.5).

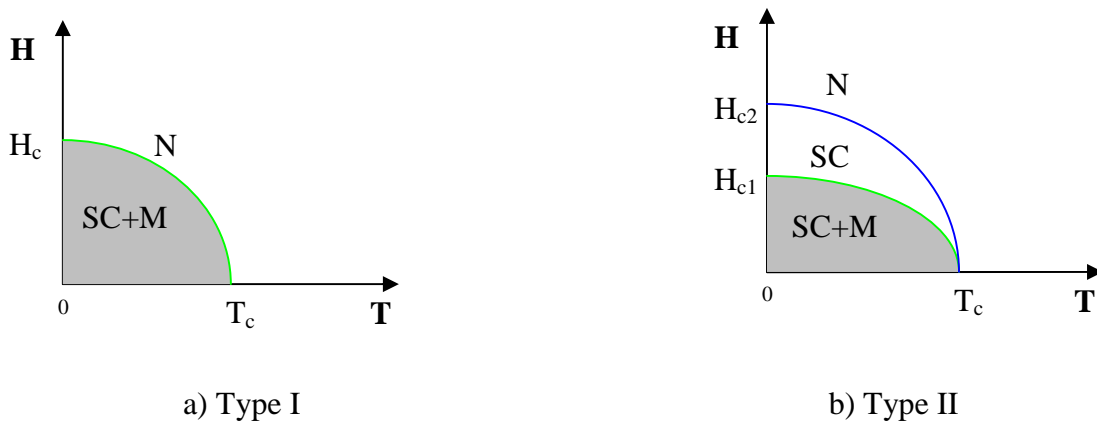


Fig. 1.5 Champ magnétique en fonction de la température pour un supraconducteur (N : Etat normal, SC : Etat supraconducteur (résistivité nulle), M : Effet Meissner)

◆ Supraconducteur de type I

Lorsque, dans un supraconducteur de type I, l'excitation magnétique \vec{H} atteint une valeur critique H_c , le matériau devient subitement normal avec une transition abrupte. D'un point de vue thermodynamique, cette transition en champ est du premier ordre et s'effectue avec une chaleur latente de transformation.

La ligne $H_c(T)$ sépare dans un diagramme (H, T) le domaine de stabilité de la phase normale du domaine de stabilité de la phase supraconductrice. Les supraconducteurs de type I sont essentiellement des corps purs. Quelques valeurs de H_c sont données dans le tableau I.1, [8].

Elément	Al	In	Sn	Hg	Pb
T_c (°K)	1.19	3.40	3.71	4.15	7.19
$H_c(0)$ (oe)	99	278	303	412	803

Tab I.1 Valeurs des champs critiques $H_c(0)$ de quelques métaux supraconducteurs de type I

Les excitations magnétiques critiques sont données en Oersteds ($1 \text{ oe} = 7.96 \text{ A/m}$; 1 oe est équivalent à 10^{-4} Tesla). Les champs magnétiques critiques des corps purs, supraconducteurs de type I, sont relativement faibles puisqu'ils ne dépassent pas 0.2 Tesla.

◆ Supraconducteurs de type II

Comme les supraconducteurs de type I, les supraconducteurs de type II voient sous champ faible leur aimantation \vec{M} compenser l'induction magnétique \vec{H} et le champ magnétique \vec{B} rester nul dans le matériau. Cependant à la différence des précédents, l'aimantation des supraconducteurs de type II ne chute pas brusquement de $\vec{M} = -\vec{H}$ à $\vec{M} = \mathbf{0}$ à $H = H_c$ mais décroît lentement à partir d'un premier champ critique inférieur noté H_{c1} pour décroître à 0 à un second champ critique supérieur H_{c2} . Le diagramme des phases devient celui de la figure 1.5.b Il fait apparaître un domaine d'effet Meissner complet, un domaine d'effet Meissner incomplet appelé aussi phase de Shubnikov et un domaine normal.

Il est intéressant de noter (Table I.2) [8], que le champ critique supérieur peut être très élevé et peut atteindre 60 Teslas. Pour cette raison, les matériaux de type II seront les plus utilisés dans les applications magnétiques et électromécaniques. Les composés autres que les métaux purs sont pratiquement tous des supraconducteurs de type II.

Composés	$T_c(^{\circ}\text{K})$	$\mu_0 H_{c1}(\text{T})$	$\mu_0 H_{c2}(\text{T})$
Nb (fil)	9.3	0.0181	2
Nb (fil écroui)	9.3	0.0248	10
Nb Ti	9.5		13
Nb₃ Sn (A15)	18.2	0.0035	23
Nb₃ Sn (A15)	23.1		30
PbMo₆ Se₈ (chevrel)	3.8		3.8
PbMo₆ Se₈ (chevrel)	15		60
Rb₃ C₆₀	29.6	0.0013	32
Y Ba Cu O	91.2	0.0032	115
Hg Ba₂ Ca₂ Cu₃ O₈	131	0.0045	190

Tab. I.2 Valeurs critiques H_{c1} et H_{c2} de quelques supraconducteurs de type II

1.3.4. Courant critique

Un troisième facteur vient, lorsqu'il dépasse une valeur critique, éliminer la supraconductivité: c'est le courant.. La résistivité passe subitement de la valeur 0 à une valeur non nulle. Dans les supraconducteurs de type I, la densité de courant critique est étroitement liée au champ critique H_c .

1.4. Les supraconducteurs à haute température critique (SHTC)

Ce sont des matériaux dont la transition de l'état normal à l'état supraconducteur (résistance électrique nulle) se produit à une température très élevée, comparée à celles des supraconducteurs classiques. A l'heure actuelle, il n'y a qu'une seule catégorie de matériaux qui sont supraconducteurs à haute température, celle des oxydes de cuivre de terres rares avec divers types de dopants.

Alors qu'avec les supraconducteurs conventionnels (qu'ils soient de type I ou II) on assistait à une chute brutale de la résistivité lors du passage à l'état supraconducteur, les SHTC présentent parfois un saut de résistivité moins franc (Fig.1.6).

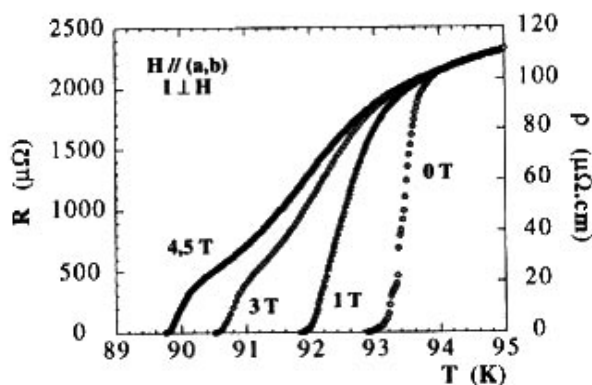


Fig. 1.6 Variation de la résistivité en fonction de la température dans les SHTC [27]

Composés	T_c
$\text{La}_{1.85}\text{Sr}_{0.5}\text{CuO}_4$	40k
$\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$	95k
$\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$	85k
$\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_2\text{O}_{10}$	110k
$\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$	108k
$\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$	125k
$\text{Hg}_{0.8}\text{Tl}_{0.2}\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{8.33}$	138k

Tab. 1.3 Températures critiques de quelques oxydes SHTC [27]

◆ Leur structure microscopique

Les SHTC sont des oxydes intermétalliques. Leur structure est fortement anisotrope : leurs propriétés ne sont pas les mêmes dans toutes les directions. Deux directions principales se dégagent (fig. 1.7), l'une constituée d'empilements de plans de dioxyde de cuivre CuO_2 (appelés plans ab), l'autre lui étant perpendiculaire (notée c).

Une maille élémentaire comporte n couches de plans CuO_2 , chacun séparé par des atomes de calcium (Ca) ou d'yttrium (Y). Ces n plans sont encadrés par deux blocs contenant des métaux, des terres rares et de l'oxygène, qui constituent des réservoirs de charges positives.

On admet actuellement que la supraconductivité apparaît au niveau des plans CuO_2 . Les blocs "réservoirs" jouent le rôle d'isolants, canalisant le courant suivant une direction précise, le plan ab . La densité de courant critique est beaucoup plus grande suivant la direction ab que suivant c .

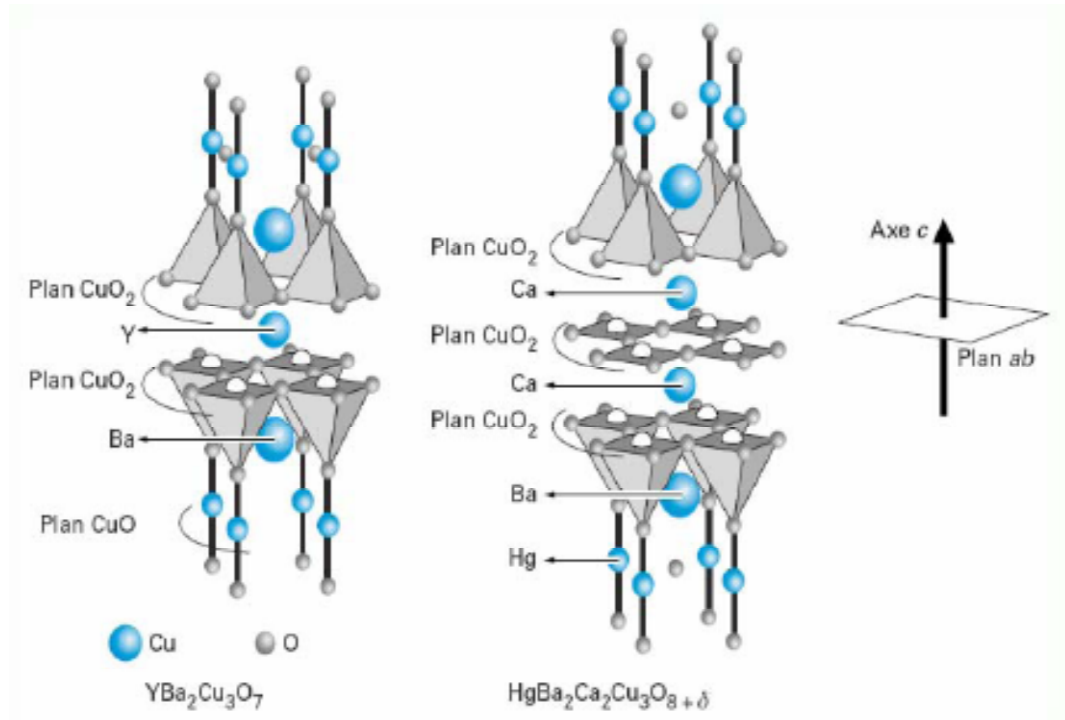


Fig. 1.7 Structures des oxydes supraconducteurs YBaCuO et Hg [27]

La nature des atomes utilisés dans les blocs isolants définit les différentes familles des SHTC. Les principales sont celles à base de bismuth (Bi), de thallium (Tl) et de mercure (Hg). Chaque famille contient un grand nombre d'oxydes supraconducteurs puisque le nombre de plans CuO_2 joue un rôle fondamental, de même que la stœchiométrie du composé (le dopage).

Pour les applications micro-ondes, les composés SHTC sont déposés sous forme de couches minces épitaxiées sur des substrats monocristallins de sorte que l'axe c soit orienté perpendiculairement à la surface. Ainsi, le courant induit circule dans le plan ab et la structure est considérée dans les simulations électromagnétiques comme isotrope.

Notons que d'autres types de supraconducteurs dits « atypiques » comprenant entre autres les fullerènes, les supraconducteurs organiques et les borocarbures ont trouvé été découverts et présentent des propriétés différentes notamment dans la valeur de leur température critique T_c [Annexe A].

1.5. Récentes découvertes sur les supraconducteurs

◆ Les supraconducteurs plastiques

Les scientifiques de l'unité Recherche et Développement des laboratoires Bell, ont créé la première matière plastique au monde dans laquelle la résistance à l'écoulement de l'électricité disparaît au-dessous d'une certaine température, produisant donc un supraconducteur. Le plastique, est un matériau peu coûteux qui pourrait être largement répandu à l'avenir pour des applications dans le domaine de l'électronique.

Cette percée des laboratoires Bell vient après une recherche de 20 ans sur les polymères organiques agissant en tant que supraconducteurs. Les polymères organiques sont des molécules chimiques qui contiennent une longue chaîne d'atomes de carbone, ce qui en fait des plastiques souples.

Néanmoins, la création d'un polymère organique supraconducteur s'est avérée être plus difficile que prévu. Le défi était de surmonter l'aspect aléatoire de la structure inhérent au polymère qui empêchait les interactions électroniques nécessaires pour la supraconductivité. Les scientifiques des laboratoires Bell ont pu surmonter ceci en créant un mélange contenant le plastique, en l'occurrence le *polythiophene* ⁽²⁾. Mais, plutôt que d'ajouter des impuretés chimiques pour changer les propriétés électriques du matériel, comme c'est souvent le cas, les chercheurs ont employé une nouvelle technique dans laquelle ils ont retiré des électrons du polythiophene.

La température en dessous de laquelle le polythiophene est devenu supraconducteur était de 2.35K. Bien que ce soit extrêmement froid, les scientifiques sont optimistes et pensent pouvoir augmenter la température à l'avenir en changeant la structure moléculaire du polymère.

◆ Nanotubes de carbone pur

Un groupe de recherche chinois, de l'université des Sciences et de technologie de Hong-Kong a développé des nanotubes de carbone individuels fortement alignés possédant un comportement supraconducteur à environ 15K [9]. Une température beaucoup plus élevée que celles des paquets de nanotubes.

² C'est un hétérocycle de soufre, qui peut devenir conducteur quand des électrons sont ajoutés ou enlevés

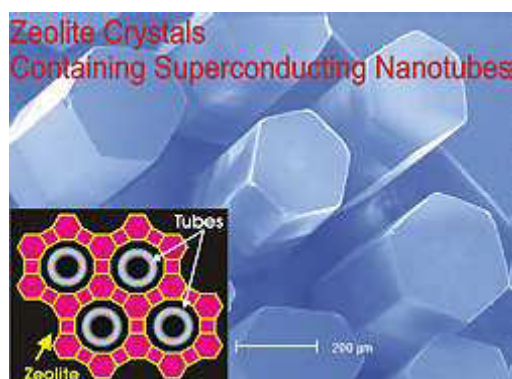


Fig. 1.8 Nanotubes de carbone pur, supraconducteur

Ping Sheng, un membre de l'équipe de recherche, a dit: "le carbone pur peut supraconduire à des températures plus élevées lorsqu'une feuille de carbone est roulée dans les tubes. C'est la première fois qu'on a observé la signature d'une dimensionnalité sur la supraconductivité".

◆ Supraconductivité dans les gènes !

Toujours en quête d'électronique de plus en plus petite, les scientifiques ont longtemps rêvé de construire des circuits atome par atome. Mais, trouver des molécules capables de conduire le courant électrique n'est pas chose facile. Alik Kasumov et ses collègues du *Laboratoire de Physique des Solides* de France ⁽³⁾ ont prouvé que les molécules d'ADN agissent en tant que conducteurs ohmiques au-dessus de 1 K et qu'au-dessous de cette température elles peuvent supraconduire [10].

Avec la découverte que les nanotubes de carbone peuvent agir en tant que fils électriques, Kasumov a démontré que les feuilles de graphite d'atomes perdent leur résistance, une fois reliées à un supraconducteur. Kasumov a prouvé que cela est valable également pour l'ADN en reliant les molécules *bicaténaires* ⁽⁴⁾ d'ADN aux électrodes supraconductrices de *Rhénium* ⁽⁵⁾ et de carbone. En refroidissant les électrodes au-dessous de leurs températures supraconductrice de transition, les chercheurs ont observé la supraconductivité induite, prétendue "par proximité" dans l'ADN.

La mise en évidence de la conductivité électrique dans les molécules d'ADN a été peu concluante jusqu'ici. Les expériences optiques ont prouvé qu'un transfert de charge peut être possible sur de telles molécules. Mais ces mesures étaient partagées : certains ont indiqué que

³ associé au CNRS, Université Paris-Sud

⁴ Les molécules d'ADN sont les plus grosses molécules du monde vivant. La double hélice est composée de deux brins enroulés l'un autour de l'autre ; on dit que l'ADN est bicaténaire

⁵ Élément métallique rare, blanc argenté, de symbole Re et de numéro atomique 75

l'ADN pourrait être un conducteur tandis que d'autres suggéraient que l'ADN soit un isolateur. Kasumov et ses collègues ont constaté qu'au-dessus de 1 K, la résistance par molécule est de moins de 100 k Ω [10], une figure qui change faiblement avec la température. Même aux températures très basses, les chercheurs ont constaté que les molécules d'ADN peuvent conduire sur des distances de quelques 100 nanomètres.

Cependant, le mécanisme physique responsable de la conduction de l'ADN demeure peu clair et il est possible que les contacts agissent en tant que dopants forts des électrons ou des trous.

1.6. Conclusion

Ce que nous venons de décrire plus haut donne une idée succincte de la supraconductivité. Nous pouvons comprendre maintenant les raisons de cette course effrénée que connaît le monde, depuis presque un siècle maintenant, en vue de comprendre ce phénomène et de pouvoir créer un jour, un supraconducteur à température ambiante. Si un tel objectif sera atteint, ce serait l'une des plus grandes avancées scientifiques accomplies par l'homme depuis son existence, eu égard aux nombreux avantages que cela pourra procurer par exemple en microélectronique.

La réalisation de microprocesseurs dont les composants seraient construits à base de matériaux supraconducteurs décuplerait la puissance des ordinateurs. En effet, sans résistance, il n'y a pas d'échauffement, et sans échauffement, la miniaturisation de plus en plus problématique pourrait reprendre de plus belle. La basse température critique reste, néanmoins, l'obstacle majeur à la réalisation de ce projet.

2.1. Introduction

Les approches théoriques qui seront exposées dans ce chapitre ont été élaborées par leurs auteurs pour rendre compte du comportement macroscopique et microscopique des supraconducteurs. Les théories les plus marquantes continuent à être utilisées aujourd'hui, lorsqu'il n'est pas indispensable de remonter aux phénomènes microscopiques pour expliquer certains comportements, électromagnétiques en particuliers.

2.2. Théorie de London

L'approche développée par les frères Fritz et Heinz London [11] (1935) a été conçue pour expliquer le comportement électromagnétique des supraconducteurs connus à leur époque, c'est-à-dire ceux du premier type. Ce n'est que plus tard qu'elle s'est révélée être mieux adaptée aux supraconducteurs de deuxième type. Cela a donné à cette théorie un champ d'application beaucoup plus vaste qu'il n'était prévisible, de sorte qu'elle soit utilisée, aujourd'hui encore, pour rendre compte de certaines propriétés des supraconducteurs à haute température critique.

Fritz avait été intrigué par la publication de Meissner qui montrait qu'à l'intérieur d'un supraconducteur, le champ magnétique \vec{B} restait nul. Les frères London avaient bien compris que l'effet clé de la supraconductivité n'était pas la chute à zéro de la résistance électrique mais plutôt l'exclusion du champ magnétique dans l'échantillon.

Les équations de Maxwell qui ont consacré l'électromagnétisme s'avèrent être incapables à elles seules de rendre compte de la disparition du champ magnétique dans le supraconducteur. Il fallait donc ajouter un ingrédient supplémentaire aux équations de Maxwell. C'est ce qu'ont fait les frères London.

2.2.1. Première équation de London

La possibilité d'observer le passage d'un courant électrique dans un supraconducteur sans dissipation d'énergie peut se traduire, pour les particules transportant le courant, par la relation dynamique suivante :

$$m_s \frac{d\vec{v}_s}{dt} = q_s \vec{E} \quad (2.1)$$

Dans cette relation, \vec{E} est le champ électrique à l'intérieur du supraconducteur, m_s la masse des particules supraconducteurs (présentées plus tard par la théorie BCS comme étant les paires de Cooper), q_s leur charge et \vec{v}_s leur vitesse.

Dans un conducteur normal (où se produit une dissipation d'énergie), une force s'opposant au déplacement des particules apparaît dans le second membre de l'équation.

Si n_s est le nombre de supercourants par unité de volume circulant à une vitesse locale moyenne $\langle \vec{v}_s \rangle$, alors la densité de courant peut s'écrire :

$$\vec{j}_s = n_s q_s \langle \vec{v}_s \rangle \quad (2.2)$$

Ainsi, de (2.1) et de (2.2) on obtient :

$$\frac{d\vec{j}_s}{dt} = n_s q_s \frac{d\langle \vec{v}_s \rangle}{dt} = \frac{n_s q_s^2}{m_s} \vec{E} \quad (2.3)$$

\vec{H} étant le champ magnétique, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{H} = 0 \quad (2.5)$$

La conservation des charges en régime stationnaire permet d'écrire:

$$\text{div } \vec{j}_s = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_s + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.7)$$

En prenant les définitions habituelles du déplacement électrique $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ et de l'induction magnétique $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Si on néglige le courant de déplacement (ce qui est généralement justifié dans un métal) et partant de (2.7), on obtient les relations suivantes :

$$\text{rot } \frac{d\vec{H}}{dt} = \left(\frac{n_s q_s^2}{m_s} \right) \vec{E} \quad (2.8)$$

et

$$\text{rot } \text{rot } \frac{d\vec{H}}{dt} = - \left(\frac{n_s q_s^2}{m_s} \right) \mu_0 \frac{d\vec{H}}{dt} \quad (2.9)$$

Des équations (2.3) et (2.4), on peut écrire :

$$\text{rot} \frac{d\vec{j}_s}{dt} = -\frac{n_s q_s^2}{m_s} \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.10)$$

A l'aide de (2.8), on obtient :

$$\Rightarrow \text{rot} \text{rot} \frac{d\vec{j}_s}{dt} = -\frac{n_s q_s^2}{m_s} \mu_0 \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} \quad (2.11)$$

sachant que : $\text{rot}(\text{rot}) = \text{grad}(\text{div}) - \Delta$

Les équations (2.9) et (2.11) donnent finalement :

$$\text{donc} \quad \Delta \frac{d\vec{H}}{dt} = \left(\frac{n_s q_s^2}{m_s} \right) \mu_0 \frac{d\vec{H}}{dt} \quad (2.12)$$

$$\text{et} \quad \Delta \frac{d\vec{j}_s}{dt} = \left(\frac{n_s q_s^2}{m_s} \right) \mu_0 \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} \quad (2.13)$$

Si on pose :

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n_s q_s^2}} \quad (2.14)$$

Il vient :

$$\Delta \frac{d\vec{j}_s}{dt} = \left(\frac{1}{\lambda_L^2} \right) \frac{d\vec{j}_s}{dt} \quad (2.15)$$

ou encore

$$\Delta \frac{d\vec{H}}{dt} = \left(\frac{1}{\lambda_L^2} \right) \frac{d\vec{H}}{dt} \quad (2.16)$$

λ_L est appelée "longueur de pénétration de London".

L'équation (2.16) exprime le fait que le champ local dans le matériau supraconducteur, et donc l'induction magnétique, ne peut varier de façon significative que dans une épaisseur de l'ordre de λ_L . Dans l'équation (2.15), on voit que le courant dans le supraconducteur est confiné dans une couche superficielle d'épaisseur voisine de λ_L .

Dans un supraconducteur décrit par l'équation de London, il ne peut donc exister que des courants superficiels.

2.2.2. Deuxième équation de London

En effet, les équations précédentes résultent directement du fait que le courant électrique circule sans dissipation d'énergie; des courants induits permanents peuvent donc s'opposer à la variation du flux magnétique à l'intérieur de celui-ci. Or, cette conclusion est en contradiction avec l'effet Meissner qui montre que c'est l'induction magnétique qui est nulle au sein du supraconducteur et non la variation de celle-ci.

Cela a conduit les frères London à modifier, sans justification théorique les équations (2.15) et (2.16) en l'écrivant sous la forme :

$$\Delta \vec{h} = \left(\frac{1}{\lambda_L^2} \right) \vec{h} \quad (2.17)$$

$$\Delta \vec{j}_s = \left(\frac{1}{\lambda_L^2} \right) \vec{j}_s \quad (2.18)$$

Les équations (2.17) et (2.18) sont les célèbres équations de London. Il faut noter qu'elles ne préjugent pas de la nature des porteurs de charge créant le courant électrique, bien que l'idée sous-jacente soit l'existence de deux types d'électrons, les uns ayant un comportement normal et les autres un comportement spécifique, qui est à l'origine des propriétés particulières des supraconducteurs. Le passage de l'équation (2.16) à (2.17), montre qu'on ne peut pas définir un supraconducteur comme étant un conducteur parfait, car ce faisant on ne prendra pas compte de l'effet Meissner.

Pour illustrer la signification physique de l'équation de London, considérons un demi- espace supraconducteur plongé dans un champ magnétique H_{ext} parallèle à sa surface (fig. 2.1) et créé par des sources de courant extérieures au supraconducteur.

La résolution de l'équation (2.17) et (2.18) donne dans ce cas :

$$h(x) = h(0) \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right) = H_{ext} \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right) \quad (2.19)$$

$$j_s(x) = j_s(0) \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right) \quad (2.20)$$

Il apparaît clairement que l'induction magnétique décroît rapidement à l'intérieur du supraconducteur avec une constante d'espace égale à λ_L . Donc pour un supraconducteur, dont les dimensions sont supérieures à λ_L , l'inductance moyenne dans celui-ci est pratiquement nulle, ce qui traduit bien l'effet Meissner.

De plus, le courant pénètre dans le supraconducteur sur la profondeur λ_L . Mais l'expérience montre que λ_L augmente lorsque la température (T) s'élève, et tend vers l'infini quand $T=T_c$.

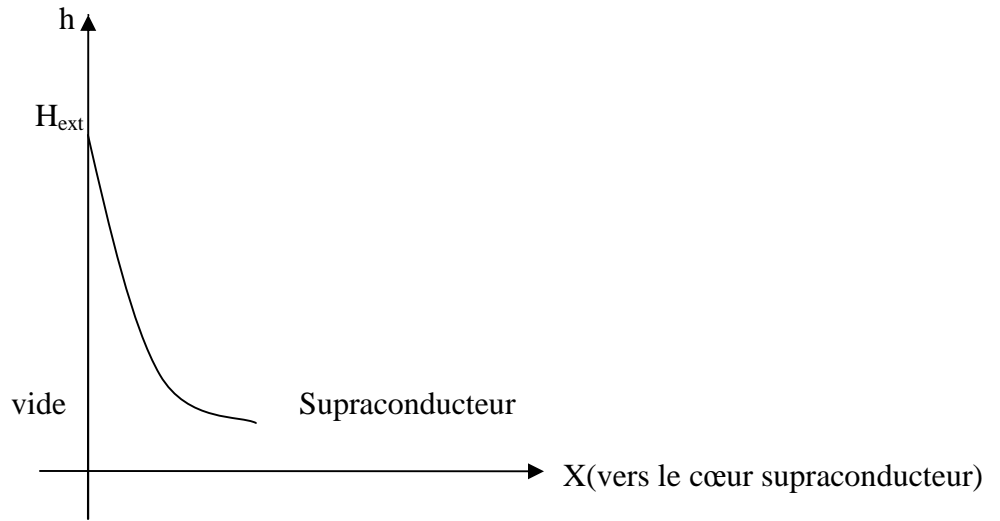
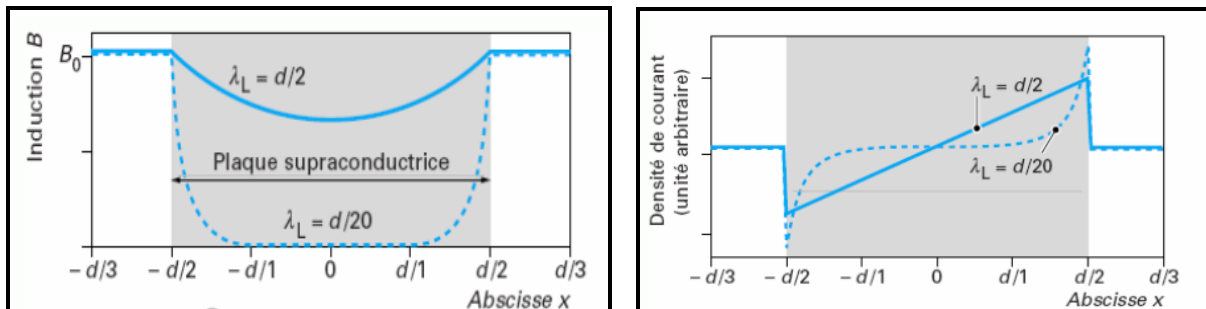


Fig. 2.1- Pénétration du champ magnétique dans un demi-espace supraconducteur.



2.2. Induction magnétique en fonction de λ_L 2.3. Courant d'écrantage en fonction de λ_L

2.2.3. Modèle à deux fluides

Nous avons indiqué précédemment que la profondeur de pénétration λ_L dépend de la température. C'est pour expliquer cela qu'a été imaginé le modèle à deux fluides proposé par Casimir et Gorter [12]. Ce modèle suppose la coexistence au sein du matériau supraconducteur de deux sortes d'électrons de conduction, les uns se comportant comme dans un métal classique, les autres présentant des propriétés particulières, comme celle de pouvoir transporter un courant électrique sans dissipation d'énergie.

Afin de rendre compte des observations expérimentales, il faut donc supposer que les densités volumiques, n_n et n_s , d'électrons normaux et supraconducteurs varient en fonction de la température, mais, si n est la densité totale d'électrons de conduction du matériau considéré, on doit évidemment toujours avoir $n = n_n + n_s$. La divergence de la profondeur de pénétration

à la température critique montre, grâce à la relation (2.16), que n_s doit s'annuler à $T = T_c$. A partir de cette observation, on peut donc poser : $n_s(0) = n$ et $n_s(T_c) = 0$

La forme de la variation de n_s en fonction de la température peut être déduite de celle de λ_L .

Une expérience classique pour déterminer la profondeur de pénétration est schématisée sur la figure 2.4. Un circuit résonnant est constitué par une capacité C et une self-inductance L_s , qui est formée d'une bobine de fil conducteur entourant un barreau cylindrique de matériau supraconducteur. La pulsation de résonance du circuit ω_r , est telle que $L_s C \omega_r^2 = 1$. La valeur de l'inductance L_s dépend du flux magnétique dans la bobine. Or, ce flux varie selon l'état du matériau : à l'état normal, l'induction magnétique induite par le courant dans la bobine pénètre entièrement dans le matériau, alors qu'à l'état supraconducteur elle ne peut pénétrer que sur une profondeur de l'ordre de λ_L , et comme la profondeur de pénétration varie en fonction de la température, en dessous de T_c , il en est de même pour L_s et donc pour ω_r .

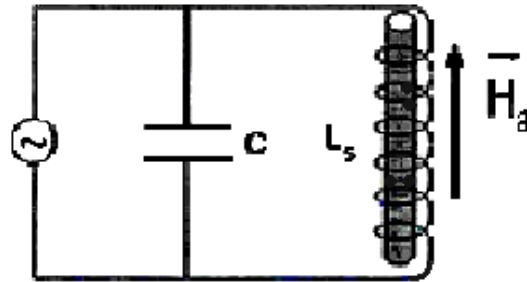


Fig. 2.4- Montage expérimental de mesure de la profondeur de pénétration λ_L dans un barreau cylindrique supraconducteur plongé dans un champ magnétique \vec{H}_a parallèle à son axe.

La mesure de la variation de la fréquence de résonance du circuit permet de déterminer $\lambda_L(T)$ et, grâce à la relation (2.16), on peut obtenir la variation de n_s en fonction de la température. On établit ainsi les lois empiriques suivantes [12]:

$$\lambda_L(T) = \lambda_L(0) \sqrt{\left(\frac{1}{1-m^4}\right)} \quad \text{avec} \quad m = \frac{T}{T_c} \quad (2.21)$$

$$\text{et} \quad n_s(T) = n(1-m^4) \quad (2.22)$$

Une autre loi empirique intéressante a été établie expérimentalement ; elle concerne la variation en fonction de la température du champ critique thermodynamique H_c [12]:

$$H_c(T) = H_c(0) (1-m^2) \quad \text{avec} \quad m = \frac{T}{T_c} \quad (2.23)$$

Il convient de ne pas oublier que les relations (2.21), (2.22) et (2.23) ne sont pas issues d'une théorie microscopique de la supraconductivité. Les vraies lois théoriques, moins simples, n'en sont toutefois pas très éloignées, et donc on utilise souvent ces relations empiriques par commodité. Sur la figure 2.5, on peut voir une courbe expérimentale de $H_c(t)$ et la courbe théorique issue de la relation (2.23) ; on constate que l'accord est assez bon.

Toutefois, ce modèle ne propose aucune explication à la coexistence d'électrons normaux et d'électrons supraconducteurs au sein du même corps en dessous de la température critique. La compréhension de ce phénomène ne viendra qu'avec la découverte de l'appariement des électrons pour former des paires de Cooper.

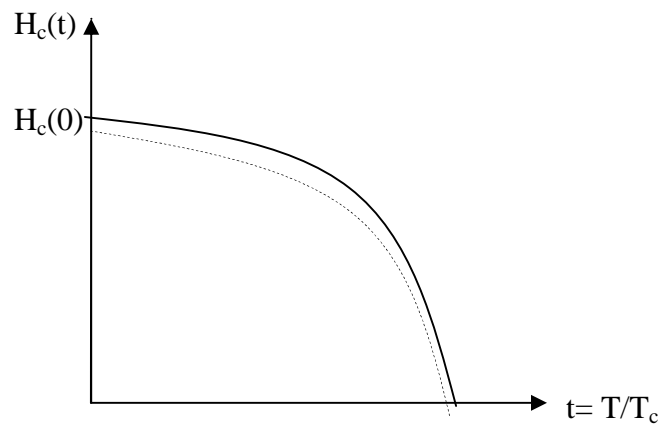


Fig. 2.5 Variation du champ critique thermodynamique en fonction de la température réduite :
 _____ courbe théorique, -----courbe expérimentale.

2.2.3.1. Impédance de surface

2.2.3.1.1. Conductivité complexe

Selon le modèle à deux fluides, la densité de courant \vec{J} peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{J}_n = \sigma \vec{E} \quad (2.24)$$

où σ est une conductivité complexe [13] :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = (\sigma_a - i\sigma_b)\vec{E} \quad (2.25)$$

En négligeant les collisions subies par les paires, il est possible de calculer les composantes réelle et imaginaire de la conductivité, qui se présentent sous la forme [13]:

$$\sigma_a = \frac{n_n e^2 \tau}{m(1 + \omega^2 \tau^2)} \quad (2.26)$$

$$\sigma_b = \frac{n_s e^2}{m\omega} + \frac{n_n e^2 \omega^2 \tau^2}{m\omega(1 + \omega^2 \tau^2)} \quad (2.27)$$

τ est le temps caractéristique d'établissement d'un courant stationnaire dans un conducteur normal (dû à l'effet de collision des électrons normaux).

2.2.3.1.2. Résistance et réactance de surface

La conductivité d'un supraconducteur en hyperfréquence n'étant pas infinie, on s'attend à ce qu'il se comporte comme un métal normal très bon conducteur. L'impédance de surface est définie comme le rapport des composantes parallèles (à la surface) des champs électrique et magnétique; on montre que pour un métal normal, elle est liée à la conductivité par [14]:

$$Z_s = \frac{E_{//}}{H_{//}} = \sqrt{\frac{i\omega\mu_0}{\sigma}} \quad (2.28)$$

En insérant dans cette dernière relation l'expression de σ donnée par les équations (2.26) et (2.27), on trouve une impédance complexe dont les parties réelle et imaginaire sont données par:

$$Z_s = R_s + iX_s = \sqrt{\left(\|\sigma\| - \sigma_b\right) \frac{\omega\mu_0}{2\|\sigma\|^2}} + i \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\|\sigma\|^2} \left(\|\sigma\| + \sigma_b\right)} \quad (2.29)$$

Il en découle immédiatement que l'impédance tend vers 0 lorsque ω tend vers 0, ce qui justifie la distinction entre les hautes fréquences d'une part, pour lesquelles l'impédance de surface joue un rôle (typiquement au-dessus de quelques centaines de mégahertz), et les basses fréquences d'autre part, où elle n'intervient pas (fréquences industrielles). La résistance de surface conduit à une puissance dissipée par unité de surface donnée par:

$$P = \frac{1}{2} R_s H_{//}^2 \quad (2.30)$$

2.3. Théorie de Ginzburg-Landau

En 1950, Ginzburg et Landau (GL) décrivent d'une façon phénoménologique la supraconductivité. Ils introduisirent la notion de paramètre d'ordre supraconducteur qui est une fonction d'onde complexe dont l'amplitude donne la probabilité de présence des électrons supraconducteurs et dont la phase conditionne la circulation du courant. Cette théorie est fondée sur l'étude des transitions de phase du second ordre telles que celle qui se produit lors du passage d'un métal de l'état paramagnétique désordonné à haute température vers l'état ferromagnétique ordonné à basse température.

Elle considère l'existence d'un paramètre d'ordre, noté $\psi(\vec{r})$ qui dans le cas de la supraconductivité, est complexe. Il est nul dans la phase normale et non nul dans la phase supraconductrice. Ginzburg et Landau proposèrent deux équations très riches permettant de décrire l'état supraconducteur [4].

Ces équations rendent compte de l'effet Meissner avec la longueur caractéristique de London d'établissement du champ mais introduisent une nouvelle longueur caractéristique appelée longueur de cohérence qui représente la distance sur laquelle s'établit l'état supraconducteur. C'est du rapport entre ces longueurs caractéristiques (nommé κ) que dépend le comportement en supraconducteurs de type I ou de type II C'est d'ailleurs en résolvant ces équations que Abrikosov, au milieu des années 50, prédisait l'existence des supraconducteurs de type II et décrivit l'origine de ce phénomène.

Les variations du paramètre d'ordre se font sur une longueur caractéristique appelée longueur de cohérence, notée $\xi(T)$, telle que :

$$\xi(T) \approx \xi(0) \sqrt{\frac{T_c}{T_c - T}} \quad (2.31)$$

L'équation de GL montre que si on applique un faible champ magnétique externe, ce champ décroît à partir de la surface sur une longueur caractéristique appelée longueur de pénétration $\lambda(T)$ telle que :

$$\lambda(T) \approx \lambda(0) \sqrt{\frac{T_c}{T_c - T}} \quad (2.32)$$

La théorie GL définit également un paramètre: $\kappa = \frac{\lambda}{\xi}$.

Ce paramètre permet de classer les supraconducteurs en deux catégories [4]:

-Si $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$: alors le supraconducteur est dit de type I.

-Si $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$: alors il est dit de type II.

Mais la théorie GL a ses limites de validité ; celles-ci ont été introduites par la théorie BCS. L'équation GL peut être obtenue comme limite de la théorie BCS lorsque T tend vers Tc.

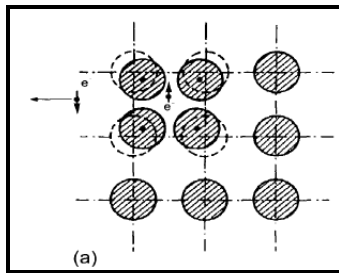
Matériau	T _c (°K)	ξ_{ab} (n.m)	ξ_c (n.m)	λ_L^{ab} (n.m)	λ_L^c (n.m)
YBa₂Cu₃O₇	93	3	0,4	30	200
Bi₂Sr₂CaCu₂O₈ (Bi-2212)	85	4	0,2	25	500
(Bi,Pb)₂Sr₂Ca₂Cu₃O₁₀ (Bi-2223)	110	1	0,2	200	1000
Nb₃Sn	18	4	4	80	80
NbTi	9.5	5	5	300	300

Tab II.1. Longueurs caractéristiques (à T= 0 K) de certains supraconducteurs

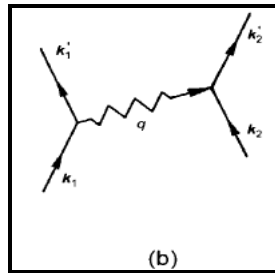
2.4. Théorie BCS

Si la supraconductivité était en 1955 riche de résultats expérimentaux et forte de deux théories phénoménologiques successives, aucune explication microscopique du phénomène n'était apparue. La théorie Bardeen-Cooper-Schrieffer est la première théorie cohérente pour expliquer la supraconductivité à l'échelle microscopique et leur a valu le prix Nobel de la physique en 1957. Notons que c'est le 2ème prix Nobel pour John Bardeen, qui avait déjà reçu un premier prix Nobel pour la découverte du transistor C'est le seul scientifique dans toute l'histoire à avoir reçu 2 prix Nobel.

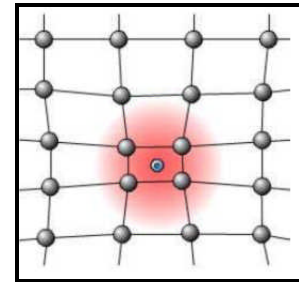
Basée sur l'interaction de Fröhlich en 1950 et l'hypothèse que les électrons à l'état supraconducteur forment *des paires de Cooper*, deux électrons peuvent en apparence s'attirer via un mécanisme indirect à savoir l'interaction électron-phonon



2.6.a. Les électrons



2.6.b. Le phonon



2.6.c. Paires de Cooper

Les paires de Cooper sont en fait une représentation pour illustrer un mouvement coordonné des électrons dans la structure cristalline (une fonction d'onde qui s'étend à l'échelle macroscopique).

Le mouvement coordonné des électrons permet un déplacement sans collision, donc sans pertes en courant continu. Ceci n'est possible que lorsque le réseau cristallin est relativement "calme", donc à basse température. Ceci est contraire au modèle de Drude (dit aussi modèle des "boules de billard"), dans lequel la conductivité est déterminée par le libre parcours moyen entre 2 collisions.

◆ Rôle des phonons

Le rôle des vibrations de réseau (phonons) est reconnu au travers de l'effet isotopique et de calculs d'interaction effectués par H. Fröhlich. La température de transition T_c est sensible à l'isotope et en particulier à la masse atomique, ce qui change la fréquence de vibration des atomes.

◆ Paires de Cooper

Cooper a montré que deux électrons situés au niveau de Fermi et en interaction attractive forment une paire. Les électrons d'une même paire présentent des vecteurs d'onde opposés. C'est un appariement dans l'espace des quantités de mouvement et non pas dans l'espace réel. Les électrons d'une même paire ne sont pas voisins mais sont séparés d'une distance typiquement égale à la longueur de cohérence. Une telle paire s'appelle paire de Cooper.

2.5. Théorie d'Abrikosov

En 1957, Abrikosov prédit l'existence de 2 types de supraconducteurs

Type I: tel que décrit précédemment.

Type II: une nouvelle phase: l'état mixte.

Dans l'état mixte, on observe expérimentalement une pénétration de flux à l'intérieur du volume du supraconducteur. Abrikosov avait prédit ceci en 1957, avant même que l'on ait observé le phénomène. La pénétration du flux résulte en un phénomène thermodynamique lié à l'énergie de surface lorsque la longueur de cohérence $\xi < \lambda_L$ (profondeur de pénétration de London).

2.6. Effet Josephson

La supraconductivité allait subir un nouveau rebondissement en 1962 avec une prédiction de Josephson qui laissa pantois la communauté scientifique. Selon ce jeune et brillant étudiant en thèse, un courant électrique non nul pouvait circuler d'un bloc de supraconducteur à un second bloc séparé du premier d'une mince couche isolante (fig. 2.7) en l'absence même de différence de potentiel entre les deux blocs.

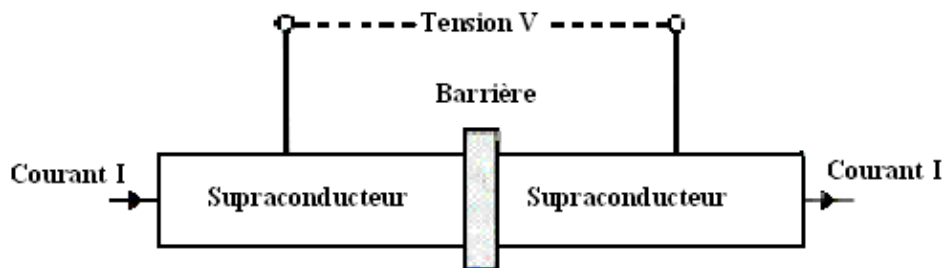


Fig. 2.7. Effet Josephson

Mieux encore il prédisait qu'en présence d'une différence de potentiel continue, le courant circulant entre les deux blocs devait être alternatif. C'est-à-dire que les paires de Cooper peuvent passer d'un supraconducteur à l'autre par effet tunnel. Ces prédictions furent vérifiées expérimentalement quelques années plus tard et pour cette découverte Josephson et Giaver reçurent le prix Nobel en 1974.

2.7. Les supraconducteurs à haute température critique (SHTC)

Depuis leur découverte par Bednorz et Müller en 1986 [3], les SHTC ont fait naître une véritable vague d'euphorie. Comme on a vu précédemment, ce sont des oxydes intermétalliques avec une structure fortement anisotrope, ils présentent donc quelques différences avec les supraconducteurs conventionnels.

2.7.1. Longueurs caractéristiques

L'état supraconducteur est caractérisé par deux longueurs caractéristiques, la longueur de pénétration de London λ_L et la longueur de cohérence ξ dont le concept fondamental est le suivant : le passage de l'état normal à l'état supraconducteur ne peut pas être abrupt. Une zone de transition sépare l'état normal de l'état supraconducteur parfait.

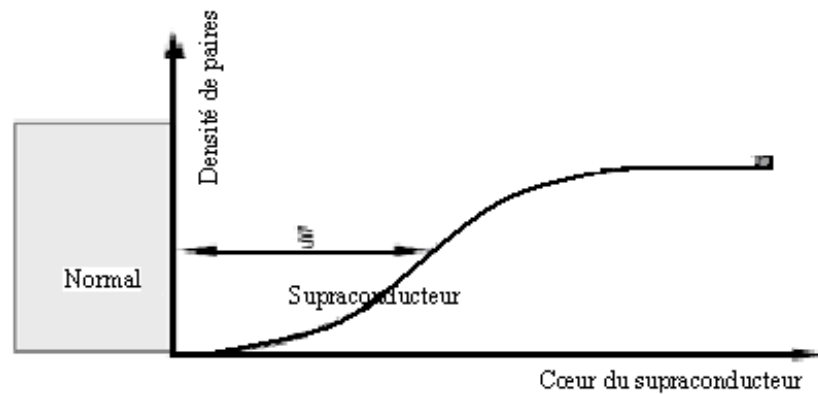


Fig.2.8 Profil de densité des paires supraconductrices au voisinage d'une surface

Si on caractérise chacune des phases par la densité d'électrons "supraconducteurs" dont on sait qu'ils se groupent en paires de Cooper, on peut définir:

- Etat normal: zone dans laquelle la densité de paires de Cooper est nulle.
- Etat supraconducteur parfait: domaine dans lequel la densité de paires de Cooper est uniformément n .

Il paraît alors concevable qu'il puisse exister entre les deux phases, une zone de transition dans laquelle le nombre de paires supraconductrices croît progressivement de 0 à n . Cette zone s'étend sur une longueur caractéristique ξ appelée longueur de cohérence qui est avec l'épaisseur de London λ_L la deuxième longueur caractéristique de la supraconductivité.

Compte tenu de l'anisotropie des SHTC, ces paramètres dépendent des axes cristallographiques a , b et c . Leurs longueurs caractéristiques sont différentes de celles des supraconducteurs conventionnels. En particulier les longueurs de cohérence relatives à l'axe c sont extrêmement faibles. Compte tenu du rapport $\frac{\lambda_L}{\xi}$, les oxydes supraconducteurs sont tous de type II. Les figures suivantes montrent les différences entre les longueurs caractéristiques des supraconducteurs de type I et II :

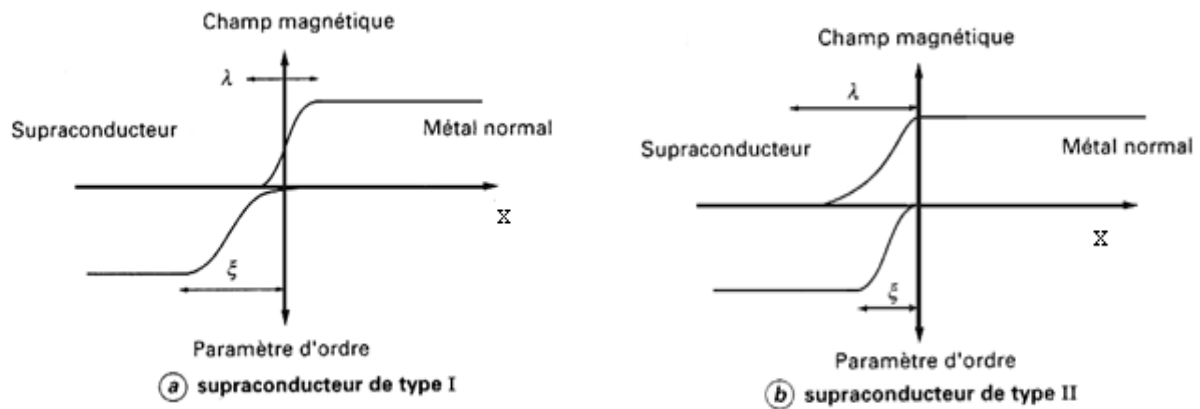


Fig.2.9 Variation du champ magnétique entre un supraconducteur et un conducteur normal

Nous savons que le champ magnétique ne pénètre dans un supraconducteur que dans l'épaisseur λ_L .

Dans le cas d'un *supraconducteur de type I* (figure.2.9.a), nous observons que la profondeur de pénétration de London λ_L , est nettement inférieure à celle de la longueur de cohérence ξ , ce qui explique le fait que le champ magnétique ne peut pas le traverser.

Par contre, dans un *supraconducteur de type II* (figure 2.9.b), la profondeur de pénétration de London λ_L est supérieure à la longueur de cohérence ξ permettant ainsi au champ magnétique de traverser quelques zones où se trouve le maximum de paires de Cooper, ce qui explique le fait qu'un supraconducteur de type II laisse passer l'induction magnétique dans des "tubes", appelés vortex.

2.7.2. Les vortex

La zone de London est à la fois une zone de pénétration du champ et une zone de circulation des supercourants (paires de Cooper) dont le rôle est d'écranter le champ magnétique dans le coeur du supraconducteur.

Lorsque, sous l'effet d'un champ magnétique extérieur, un cylindre supraconducteur laisse place à un filament normal, deux boucles de supercourants sont observées:

- la boucle de courant habituelle qui circule sur la surface extérieure du cylindre
- une boucle de courant localisée autour du filament normal.

Les sens de circulation des supercourants sont opposés de telle sorte que chacun d'eux génère un champ magnétique dans une direction opposée.

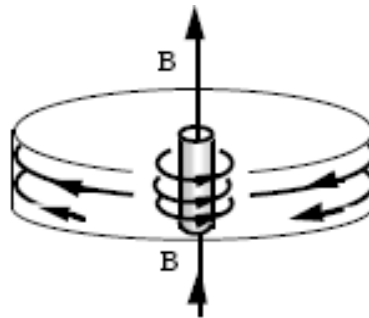


Fig.2.10- Boucle de courant "entourant" un vortex

La boucle de courant extérieure écranter le champ B (champ extérieur) à l'intérieur du supraconducteur. La boucle de courant autour du filament normal rétablit le champ qui traverse ce dernier. Le tourbillon de courant électrique associé au filament normal constituent un vortex.

2.7.3. Structure macroscopique et problème des jonctions faibles

La structure microscopique étant déjà abordée, nous allons nous intéresser à présent à l'aspect macroscopique. Alors que pour un supraconducteur conventionnel les propriétés sont assez semblables pour un monocristal (atomes arrangés de manière parfaite) ou un polycristal (assemblage de cristaux de tailles et de formes différentes, orientés aléatoirement), ce n'est pas le cas pour les SHTC.

Ceci est dû à l'anisotropie qui, dans l'état polycristallin, présentent des grains orientés aléatoirement et donc des plans (a,b) non parallèles. Une dégradation des performances s'ensuit. Par ailleurs, ces matériaux polycristallins sont composés de grains accolés entre eux par des joints de grains, qui constituent à leur interface une barrière au passage du courant et se comportent comme des jonctions Josephson.

L'épaisseur de la barrière doit être comparée à celle de la longueur de cohérence ξ qui détermine la variation spatiale de l'état supraconducteur. Si le joint de grain est plus petit que ξ , il n'aura qu'une influence limitée, et le courant sera peu affecté par cette barrière. C'est le cas des supraconducteurs conventionnels. Par contre, les SHTC étant fortement anisotropes, les longueurs de cohérence ξ sont différentes suivant la direction cristallographique choisie, et le rapport $\frac{\xi_{ab}}{\xi_c}$ n'est plus négligeable. Les joints de grains peuvent alors constituer des obstacles non négligeables au passage du courant, en particulier le long de la direction c. Pour cette raison, ils sont appelés jonctions faibles.

En ce moment, il existe plusieurs méthodes pour résoudre ce problème qui consiste à orienter les plans (a,b) parallèlement.

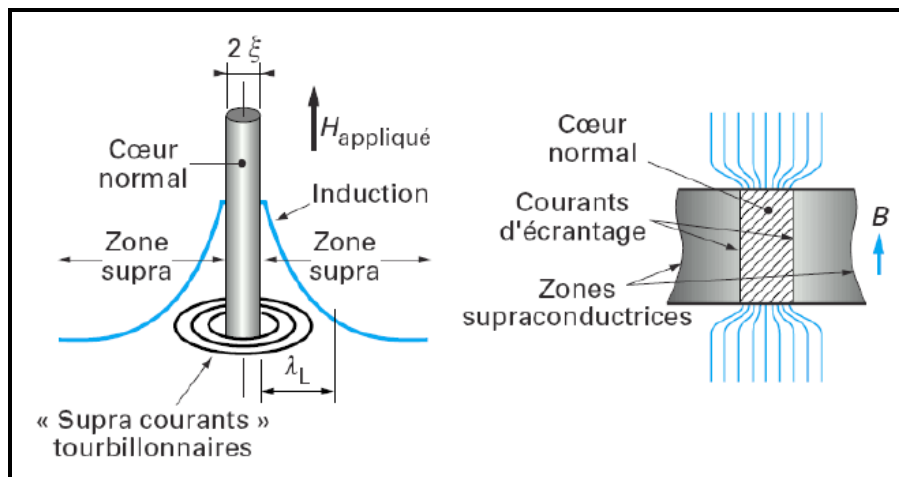


Fig. 2.11. Structure d'un vortex

Les vortex se repoussent mutuellement (comme toute ligne de champ magnétique, qui ne peut jamais en croiser une autre). En absence de défaut dans le matériau, ils s'organisent en réseau régulier (prédiction d'Abrikosov). La présence de vortex créés par des "supercourants" indique que le matériau est bel et bien supraconducteur dans l'état mixte. Cependant, s'il fait circuler un courant dans un matériau à l'état mixte sans défauts, on mesurera des pertes.

2.8. Modélisation des supraconducteurs à haute température critique (SHTC)

Dans le cas d'un supraconducteur, un modèle phénoménologique permet d'obtenir qualitativement la physique des pertes, c'est le modèle à deux fluides cité au paragraphe (2.2.3). Ce modèle suppose la présence de deux types de particules dans le supraconducteur qui sont indépendantes : des quasiparticules, électrons normaux, et paires de Cooper, électrons supraconducteurs. Le courant circulant dans le supraconducteur serait donc la somme de deux courants constitués de ces particules.

Dans le cas des supraconducteurs anisotropes de haute température critique les σ_n et σ_s ne seront pas les mêmes dans toutes les directions. Nous aurons l'équation suivante sous forme de tenseurs. [Annexe B]

$$\sigma_{sc} = \begin{bmatrix} \sigma_{n,a} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{n,b} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{n,a} \end{bmatrix} - j \left(\frac{1}{\omega \mu_0} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_a^2} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

2.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé différentes théories de la supraconductivité, jugées essentielles, afin de les rendre accessibles au lecteur. Toutefois, la supraconductivité est un domaine très vaste qui ne peut être traité de manière approfondie et exhaustive dans le cadre de notre travail. De plus, de nombreuses théories ont vu le jour ces dernières années qu'il est actuellement difficile de confirmer ou d'infirmer.

Il y a lieu de noter également qu'un nombre important de chercheurs se sont penchés sur ce sujet sans tout connaître sur la supraconductivité qui reste actuellement l'un des domaines de recherche parmi les plus attractifs.

3.1. Introduction

Bien que l'industrie électrique ne soit pas prête à adopter la nouvelle technologie des supraconducteurs (cela constitue pour elle un grand changement), il existe déjà plusieurs applications de la supraconductivité. Nous retrouvons la supraconductivité dans plusieurs domaines, entre autres, le domaine médical, le domaine de la recherche, le domaine de la fusion nucléaire, le stockage d'énergie électrique, les trains à lévitation magnétique mais aussi pour la propulsion (magnétohydrodynamique). Ces applications constituent les applications à grande échelle, car on entre dans le domaine industriel, avec toutes les conséquences économiques que cela implique.

Les dispositifs supraconducteurs précédemment cités constituent donc les applications à grande échelle. Mais il existe aussi d'autres applications plus anciennes, mais moins parlantes par leurs noms : diode Josephson, SQUID, etc ...

De nos jours, les supraconducteurs sont de plus en plus utilisés en hyperfréquences, vu l'énorme avantage que procurent ses derniers dans ce domaine.

3.1. Applications aux fréquences micro-ondes

Peu de temps après l'apparition de l'YBaCuO (ou YBCO) comme supraconducteur, les ingénieurs ont été séduits par les perspectives d'employer la technologie HTS dans la conception de composants et de sous-ensembles micro-ondes.

Aux Etats-Unis, le Naval Research Laboratory (NRL) a établi un programme, connu sous le nom de High Temperature Superconductivity Space Experiment (HTSSE), qui fut un catalyseur important à l'essor de la supraconductivité dans les hyperfréquences. Il s'est déroulé en deux phases. Tout d'abord, des éléments indépendants tels que des résonateurs et des filtres ont été réalisés (HTSSE-I, 1989-1992). Puis, des systèmes complets ont été mis au point (HTSSE-II, 1992-1996). Ce projet, auquel collaborèrent de nombreux organismes de par le monde, démontra que des dispositifs HTS, viables et robustes, pourraient être développés, fabriqués et placés dans des packagings cryogéniques, pour des applications à la fois terrestres et spatiales [7]. L'utilisation des SHTC dans le domaine des micro-ondes a également été favorisée par l'émergence de plusieurs start-up (Superconductor Technologies Inc. – STI – à Santa Barbara, Conductus à Sunnyvale, Illinois Superconductor Corporation – ISCO – à Chicago...), correspondant aux progrès rapides enregistrés au niveau des technologies sans fil au cours de la dernière décennie.

Les applications aux fréquences micro-ondes sont nombreuses dont nous pouvons citer :

3.1.1. Lignes de transmission

◆ Transmission d'impulsions

Pour les fréquences où la résistance de surface des supraconducteurs est très inférieure à celle d'un métal normal, il est possible de fabriquer des lignes de transmission présentant un affaiblissement très faible [13]. Des mesures réalisées au moyen de lignes coplanaires en niobium ont montré que l'amplitude du champ électrique à 50 GHz était dix fois moins atténuée (sur 3 mm) à 2,6 K ($T_c = 9,2$ K) que celle le cuivre.

On notera par ailleurs que, contrairement à ce qui se passe pour un conducteur normal, la profondeur de pénétration dans un supraconducteur est une grandeur caractéristique d'un matériau à une température donnée: elle ne dépend pas de la fréquence. Or cette dépendance en fréquence de l'effet de peau dans un métal normal est une cause importante de dispersion dans les lignes de transmission, et on constate que les lignes supraconductrices présentent effectivement une dispersion très faible, ce qui va permettre de transmettre par exemple des signaux impulsionnels avec un minimum de déformation.

◆ Lignes à retard

Les lignes à retard sont utilisées pour stocker un signal en attendant d'en effectuer le traitement [13]. Il est donc important qu'elles introduisent les plus faibles distorsions et atténuations possibles de ce signal. L'intérêt des supraconducteurs pour de tels composants réside donc dans leurs propriétés de faibles pertes et de non-dispersivité.

Lorsqu'il faut atteindre, dans la gamme de fréquence de quelques GHz, des valeurs élevées du retard (de l'ordre de 100 ns et plus), les lignes coaxiales classiques présentent un niveau de pertes si élevé qu'il est indispensable de leur adjoindre des amplificateurs large bande et faible bruit pour compenser l'atténuation du signal. Cela rend le système plus complexe et plus coûteux. Il y a donc là une opportunité pour l'introduction des lignes à retard à supraconducteurs pour faire l'économie des amplificateurs.

3.1.2. Filtres

En général, une réponse micro-onde des filtres passe-bande est obtenue grâce à un ou plusieurs résonateurs. Si leur fréquence de résonance correspond à la fréquence du signal, l'énergie se propage d'un élément à un autre, entre un accès d'entrée et un accès de sortie.

De nombreux filtres hyperfréquences interviennent dans les chaînes de réception émission des charges utiles des satellites. L'introduction des matériaux supraconducteurs dans certains éléments de ces chaînes doit permettre de réduire le poids et le volume et d'atteindre des performances de très grande qualité non accessibles par d'autres technologies.

Certaines géométries de films minces supraconducteurs sont utilisées comme filtres hyperfréquences [14] à bande étroite, au-dessus de 100 MHz. Fabriqués en niobium, ils sont utilisés dans les radars et en télécommunications. Plus récemment, de nombreux travaux ont été réalisés avec des céramiques supraconductrices à haute température critique.

Des comparaisons ont été faites [14] entre les performances de filtres en niobium et en YBaCuO dans la même géométrie: il s'agissait de plaquettes ne dépassant pas deux centimètres (figure 2.7.a), alors qu'un filtre hyperfréquence classique de performances comparables serait formé de cavités considérablement plus volumineuses. Les filtres ainsi obtenus présentent une bande de fréquence située entre 4,1 et 4,3 GHz [14]. De plus, ils sont accordables au moyen de la température, du fait de la dépendance en température de la profondeur de pénétration.

Ce type de filtre présente une bande de transition très étroite et une légère ondulation dans la bande passante, ce qui correspond à l'approximation de Tchebychev du filtre idéal. Sur un substrat de 2,56 cm², des microrubans de céramique supraconductrice, déposés selon une configuration soigneusement étudiée, constituent un filtre passe-bande, de 300 MHz de largeur de bande centrée autour de 9.1 GHz avec une bande de transition de quelques dizaines de MHz. De plus, f_0 se trouve décalée d'environ 50 MHz lorsque la température passe de 20 K à 82 K [14].

La figure 3.1.b montre une géométrie un peu différente (technologie microruban utilisant de l'YBaCuO), qui donne une bande passante comprise entre 54 et 57 GHz et une atténuation de 1,5 dB à 55 GHz, à comparer avec les 7,3 dB d'atténuation obtenue au moyen d'un même filtre fabriqué en or. Une géométrie en spirale a également été étudiée.

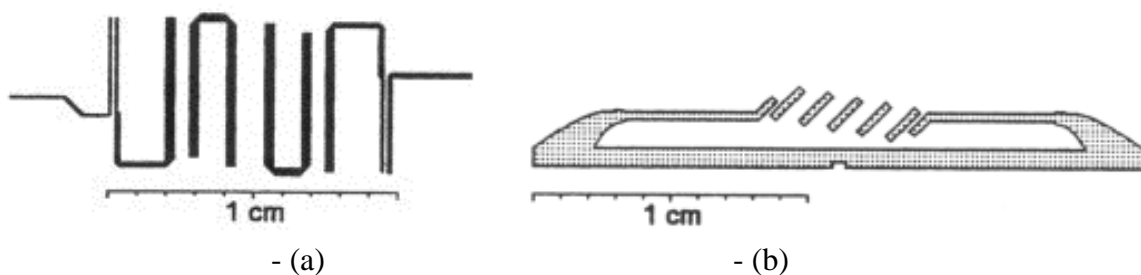


Fig.3.1 Configurations géométriques de filtres à microrubans d'YBaCuO.

3.1.3. Cavités résonnantes

◆ Cavités destinées aux accélérateurs de particules

Une particule chargée qui suit une trajectoire non rectiligne et perd de l'énergie par rayonnement, est dite synchrotron: la puissance rayonnée étant inversement proportionnelle au carré de la masse au repos de la particule, elle devient très importante pour les particules "légères", tels que les électrons. Dans les accélérateurs d'électrons, des cavités résonnantes fournissent l'énergie perdue par rayonnement synchrotron. Ces cavités sont souvent formées de plusieurs cellules dans lesquelles le champ électrique oscille de manière à ce que la particule soit accélérée (et non freinée) dans chacune des cellules successivement traversées [15] (figure 3.2).



Fig.3.2. Passage d'un électron dans une cavité résonnante accélératrice.

Rien ne distingue fondamentalement une cavité accélératrice normale (en cuivre) d'une cavité supraconductrice. Cette dernière, toutefois, ne consommera typiquement que quelques kilowatts (y compris le système de refroidissement à l'hélium liquide), contre plusieurs centaines de kilowatts pour une cavité en cuivre.

◆ Oscillateurs à cavité

Les oscillateurs à cavité supraconductrice présentent une stabilité inégalable par des moyens classiques et une très large bande de fréquences pouvant atteindre les 100 GHz. Ils trouvent des applications dans les horloges servant de base de temps à des systèmes électroniques, ou en métrologie¹ pour des mesures très précises de fréquence ou de constantes fondamentales, ainsi que dans les interféromètres².

3.1.4. Antennes

Parallèlement aux détecteurs spectraux utilisant des jonctions Josephson [15] - que l'on peut qualifier d'actifs, un simple film supraconducteur peut fonctionner comme antenne réceptrice ou émettrice. Les antennes supraconductrices présentent un rendement proche de 100%, alors que les antennes en métal normal ont normalement un rendement d'environ 50%. Dans l'évaluation des pertes, il convient toutefois de tenir compte également du circuit d'adaptation d'impédance.

¹ science des mesures, visant à déterminer les dimensions et les quantités, et à les exprimer en unités conventionnelles

² utilisés pour mesurer très précisément les longueurs d'onde de la lumière, des petites distances et pour étudier certains phénomènes optiques

Actuellement, la tendance est donc d'adapter l'impédance de l'antenne au moyen d'un circuit dont les connexions (comportant des lignes de transmission) sont également supraconductrices.

De même, dans le cas d'un réseau d'antennes conçu pour obtenir une forte directivité, les déphaseurs et les atténuateurs (qui permettent de pondérer, en phase et en amplitude, les composantes du signal émis ou reçu par chaque antenne individuelle), peuvent être formés d'éléments supraconducteurs. C'est ainsi que deux antennes hélicoïdales de mêmes dimensions, l'une en cuivre et l'autre en YBaCuO, équipées de leur circuit d'adaptation, ont été fabriquées et comparées: la différence de gain était de 6dB en faveur du dispositif supraconducteur.

◆ Antennes électriques de petites dimensions

Alors que les dimensions des antennes dipôles doivent généralement se rapprocher de la longueur d'onde du signal émis, les antennes supraconductrices, du fait de leur rendement élevé, se révèlent déjà efficaces pour des dimensions linéaires cinq ou dix fois plus faibles. C'est ainsi que des antennes dipôles combinées à deux lignes de transmission supraconductrices parallèles ont été fabriquées en YBaCuO. Le tout constituait un dispositif en forme de U de 4 mm de largeur et de 85 mm de longueur qui a servi à émettre des ondes de 740 MHz (soit une longueur d'onde de 405 mm). Le gain s'est révélé supérieur de 3dB à celui d'une antenne en cuivre de même géométrie [15].

Une étude théorique a montré qu'une antenne dipôle supraconductrice de 45 cm de long pourrait travailler à 100 MHz à des puissances de l'ordre du kW [15]. L'encombrement réduit d'un tel système pourrait s'avérer particulièrement avantageux dans des communications par satellite.

◆ Réseau directionnel

La superposition des diagrammes de rayonnement de plusieurs antennes convenablement disposées les unes par rapport aux autres, conduit à une augmentation très forte du gain dans une direction donnée. Cette méthode, déjà mise en oeuvre avec des antennes normales, permet d'obtenir une directivité élevée, mais se heurte rapidement à certaines limites inhérentes à la résistance de surface; ce problème a été étudié en détail par Hansen [16]. Il trouve tout naturellement sa solution dans l'utilisation des céramiques supraconductrices: des structures simples ont de ce fait été réalisées depuis quelques années.

3.2. Autres applications de la supraconductivité

3.2.1 Applications médicales

L'imagerie par résonance magnétique (I.R.M) est l'une des applications médicales basée sur le principe suivant : un noyau atomique doté d'un moment magnétique et soumis à une induction B_0 constante, décrit un mouvement de précession autour de son axe avec une vitesse angulaire

proportionnelle à B_0 . En appliquant un champ magnétique perpendiculaire à B_0 , on observe un phénomène de résonance si la fréquence d'excitation f est égale à la vitesse angulaire de précession. On recueille ainsi un signal caractéristique. L'induction de polarisation B_0 varie dans l'espace, et f aussi donc, ce qui permet l'obtention des images.

L'induction magnétique de 0,5 à 4 Testas nécessaire ne peut être obtenue qu'à l'aide d'aimants supraconducteurs. De plus, mis à part la phase d'établissement du courant, l'alimentation électrique n'a plus lieu d'être. La consommation "froid" est très faible et le poids de l'engin est réduit. Le grand gagnant est le patient : celui-ci ne subit aucun effet nocif connu à ce jour et les images prises de son corps (crâne, corps, membre...) sont d'excellente qualité, ce qui permet aux médecins de faire un diagnostic correct.

3.2.2. Applications énergétiques

◆ Le stockage de l'électricité

Le seul moyen de conserver indéfiniment l'électricité serait son stockage sous forme magnétique, évidemment dans des bobines supraconductrices. A l'heure actuelle, l'énergie est stockée sous forme d'énergie primaire : pétrole, charbon, uranium ; eau (dans les barrages), etc....Le problème c'est qu'une fois transformée en énergie électrique, il faut la consommer dans fraction de seconde qui suit...

◆ Économie et transport d'énergie

L'idée est de créer des réseaux supraconducteurs qui ne perdent pas d'énergie par effet Joule, l'enjeu est triple.

- créer des lignes qui transportent des courants élevés mais à basse tension et sans perte d'énergie. Aujourd'hui, les lignes de forts courants électriques sont à très hautes tensions pour limiter les pertes qui demeurent cependant importantes.
- créer des circuits intégrés qui perdent peu d'énergie par effet Joule et donc réduire leur consommation électrique, ce qui est important pour les appareils portatifs.
- créer des puces électroniques dont les pistes sont plus resserrées sans craindre les effets néfastes de la chaleur dégagée et ainsi augmenter considérablement le nombre de transistors et par suite les performances des processeurs actuels.

3.2.3. Les aimants pour la recherche

Il y a les aimants pour les laboratoires, qui génèrent plusieurs Teslas. Ils permettent l'étude des propriétés physiques des matériaux sous l'effet de champs magnétiques. Ces aimants supraconducteurs servent à l'étude de la supraconductivité ! Des inductions de 31 ; 35 Teslas ont été obtenues et cette valeur était le record mondial en 1993. Ces aimants supraconducteurs servent aussi dans la physique des particules : pour bien guider les particules, les maintenir sur des orbites définies, focaliser et recentrer les faisceaux. D'autres aimants servent à la détection de particules élémentaire émises lors des collisions dans les accélérations. On a donc des aimants supraconducteurs sur tout le parcours des particules.

3.2.4. Les tokamaks

L'électricité d'origine nucléaire actuellement produite provient de la fission de noyaux d'atomes. On casse les gros noyaux et on en récupère l'énergie. Mais il existe aussi la fusion nucléaire (ce qui se passe dans le soleil par exemple) : des atomes légers se combinent pour former des atomes plus lourds. Il faut pour cela chauffer les noyaux très fortement (100 millions de degrés). Il va de soi que les noyaux chauffés ne doivent toucher aucune paroi: il faut les maintenir à l'état de plasma confiné dans un réacteur, et le tokamak est une voie prometteuse. Ce confinement est obtenu par voie magnétique et comme il faut des inductions très élevées (dizaine de Testas) et que les volume concernés sont grands, les bobines toroïdales supraconductrices s'y prêtent bien.

3.2.5. Les trains à lévitation magnétique

Pour propulser le train, il faut d'abord qu'il entre en lévitation. Deux méthodes sont possibles : la lévitation magnétique de type électromagnétique ou celle de type électrodynamique. La première ne fait pas appel à la supraconductivité, contrairement à la seconde. Cette dernière est basée sur la répulsion entre les éléments embarqués sur le train et des plaques conductrices (ou des bobines court-circuitées) situées sur la voie. L'avantage des bobines est de réduire la puissance dissipée. L'entrefer (distance sol train) peut être de 10 cm si les aimants du train sont suffisamment puissants. Il faut faire appel à la supraconductivité par interaction entre un inducteur embarqué et des bobines sur la voie, le train se déplace pour le plus grand bonheur des voyageurs.

En 1977, le prototype ML 500 japonais atteignit la vitesse record de 517 km/h. même le TGV Atlantique français ne put faire mieux treize ans après avec 515,3 km/h (chiffre qui reste cependant le record mondial de vitesse sur rails). Ces trains à lévitation présentent plusieurs avantages : outre le fait qu'ils circulent à de très hautes vitesses (ce qui raccourcit la durée des trajets), ils n'usent pas les voies (car il n'y a pas de contact direct). Néanmoins, les problèmes liés à leur mise au point (problème du captage d'énergie vu qu'il n'y a plus de contact !) et les infrastructures nécessaires font qu'aujourd'hui, les trains conventionnels ont encore de beaux jours devant eux.

3.3. Applications militaires : La bombe électromagnétique

Les militaires voient l'utilisation des supraconducteurs comme moyen de réduire la longueur des antennes de très basse fréquence employées sur les sous-marins. Normalement, plus la fréquence est basse, plus la longueur de l'antenne doit être longue. Cependant, en insérant une bobine de fil au début d'une antenne la fera fonctionner comme si elle était beaucoup plus longue. Malheureusement, cette bobine de fil augmente aussi les pertes en ajoutant de la résistance au fil de la bobine. L'utilisation de fil supraconducteur peut dans ce cadre réduire significativement les pertes dans cette bobine, aussi bien que la possibilité de fabrication d'une longueur plus courte de fil d'antenne.

L'utilisation militaire la plus honteuse des supraconducteurs peut venir avec le déploiement de la "E-bomb". Ceux-ci sont des dispositifs qui se servent, des domaines dérivés de la supraconductivité magnétique pour créer une haute intensité d'impulsion rapide électromagnétique pour mettre hors service l'équipement électronique d'un ennemi.

L'US Air Force prévoit d'équiper ses bombardiers, missiles de croisière et véhicules aériens des fonctionnalités de cette bombe.

3.4. Applications dans les nouvelles technologies

Quant au secteur des technologies de l'information et de la communication, il faut, bien sûr, évoquer l'impact gigantesque que représenterait l'avènement d'une électronique supraconductrice. Indépendamment de l'explosion des performances des ordinateurs en termes de rapidité et de puissance, un chiffre macro-économique fait réfléchir: aux Etats-Unis, on estime que la consommation d'énergie représentée par l'usage exponentiel de l'Internet, approchera bientôt 10% de l'électricité distribuée par les réseaux. C'est ainsi que des routeurs digitaux supraconducteurs ont été conçus pour des communications de données ultra-rapides. Puisque le trafic Internet augmente exponentiellement, la technologie des supraconducteurs permet de couvrir les futurs besoins.

Selon des projections futures, le marché mondial des produits à base de supraconducteurs sera de près de 5 milliards US\$ à l'année 2010 (fig. 3.3) ⁽³⁾ et passera à 38 milliards US\$ en 2020 (Fig. 3.4.) soit une augmentation de près de 800 % en 10 ans. On s'attend à ce que les supraconducteurs de basse température continuent à jouer un rôle dominant dans des domaines bien établis tels que l'IRM et la recherche scientifiques. De plus, les HTS vont favoriser l'avènement de nouvelles industries selon un taux de croissance linéaire.

⁽³⁾ Ce tableau a été dressé en décembre 2001 par le Consortium of European Companies Determined to Use Superconductivity

Années	1997	2000	2003	2010
Appareillages scientifiques destinés à la recherche	355	415	550	840
Imagerie par résonance magnétique (IRM)	1400	1900	2100	2750
Sous-total	1755	2315	2650	3590
Nouvelles applications électrotechniques	35	25	55	980
Nouvelles applications électroniques	20	30	75	680
Sous-total	55	55	130	1660
Estimation du marché mondial global	1810	2370	2780	5250
Part prise par les LTS(1)	1805	2355	2730	3650
Part prise par les HTS	5	15	50	1600

Figure 3.3 Evolutions des applications des supraconducteurs jusqu'à l'horizon 2020 (LTS: Low temperature superconductor, HTS : High temperature superconductor)

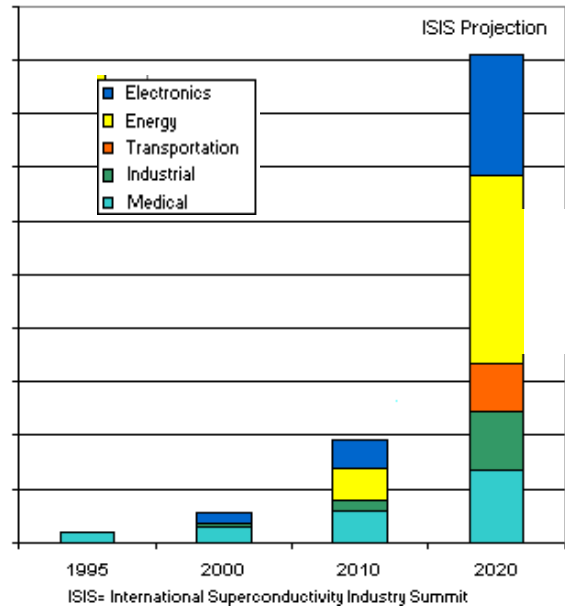


Figure 3.4 Perspectives économiques des applications de la supraconductivité à l'échelle mondiale (en millions d'euros)

3.5. Conclusion

Vu les diverses applications des supraconducteurs, les potentialités futures de la supraconductivité sont infinies. Pensons par exemple à l'informatique. La réalisation de microprocesseurs dont les composants seraient construits à base de matériau supraconducteur décuplerait la puissance des ordinateurs. En effet, sans résistance, il n'y a pas d'échauffement, et sans échauffement, la miniaturisation de plus en plus problématique pourrait reprendre de plus belle.

La basse température critique reste toujours l'obstacle majeur à la réalisation de ce genre de projet. Le jour où sera découvert un matériau supraconducteur à température ambiante, la technologie connaîtra sans aucun doute un nouvel âge d'or.

4.1. Introduction

Depuis la découverte des circuits planaires hyperfréquences, beaucoup d'efforts ont été consentis pour le développement de méthodes numériques en vue de déterminer les caractéristiques de propagation de ces circuits. Un grand nombre de méthodes furent proposées et améliorées selon les applications voulues.

En général, le choix d'une méthode numérique est basé sur un compromis entre la précision, l'efficacité, l'adaptation à la structure étudiée, etc... et ce choix n'est pas unique. La méthode d'approche dans le domaine spectrale (M.A.D.S) proposée par T. Itoh et R. Mittra [19] a été largement appliquée à l'étude des caractéristiques d'un grand nombre de circuits planaires blindés ou ouverts (microstrip, lignes à fente, ligne à ailette etc...). Son utilisation dans le domaine de Fourier revient à résoudre les problèmes de propagation à partir d'équations algébriques via l'outil de la transformée de Fourier. Sa manipulation est plus aisée dans la mesure où elle évite la résolution d'équations intégrales couplées qui apparaissant d'habitude lorsque l'étude s'effectue dans le domaine spatial.

Cette méthode doit inclure l'influence des métallisations (épaisseur finies), la discontinuité latérale doit ainsi être prise en compte. Ces effets peuvent devenir significatifs en hyperfréquences.

Dans ce chapitre, nous allons développer cette étude tout en préservant les avantages inhérents à la méthode spectrale. Ceci nous amènerait ainsi, à transposer cette méthode aux supraconducteurs en procédant au préalable, à quelques menus adaptatifs et tirer en conséquence, tous les bénéfices de la supraconductivité. Nous prendrons, aussi en compte, l'aspect anisotrope des substrats diélectriques constituant les circuits à analyser.

4.2. Principe général de la méthode spectrale pour le cas anisotrope

Elle peut être résumée par les étapes suivantes :

- 1- Le champ électromagnétique est d'abord exprimé dans chaque couche diélectrique anisotrope, à partir des équations de Maxwell, sous forme de séries discrètes de Fourier, en terme de champs se propageant suivant les modes L.S.E (Longitudinal Section Electric) ($E_y = 0$) et L.S.M (Longitudinal Section Magnetic) ($H_y = 0$)).
- 2- Application des relations de continuité sur toutes les interfaces, sous forme de relations récurrentes en tenant compte des courants (ou champs) sur les rubans (ou fentes). On déduit alors une relation dans le domaine spectral entre les composantes tangentielles du champ EM (ou densités de courants) $E_x = 0$ et $E_z = 0$ (ou J_x et J_z) et celles des densités de courant (ou champs EM) J_x et J_z (ou E_x et E_z) sur les

rubans (fentes). Cette relation fait apparaître les fonctions de Green de la structure et s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix} = [G(\alpha_n, \beta)] \begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

G est une matrice 2x2, connue sous le nom de matrice de Green. Ses éléments peuvent être exprimés analytiquement. Les inconnues dans le système (4.1) sont E_x et E_z , J_x et J_z .

3- la méthode de Galerkin (cas particulier de la méthode des moments) est ensuite appliquée pour la détermination des quatre inconnues E_x et E_z , J_x et J_z . Dans ce qui suit, nous présentons l'application de cette méthode dans le cas de l'analyse des structures planaires pour lesquels, c'est le courant qui est modélisé.

Dans une première étape, on décompose les densités de courant J_x et J_z suivant des fonctions de base appropriées ressemblant autant que possible aux densités physiques et respectant la géométrie des courants sur le ruban.

$$\tilde{J}_x(x) = \sum_{r=1}^R a_r \tilde{J}_{xr}(x) \quad \text{et} \quad \tilde{J}_z(x) = \sum_{m=1}^M b_m \tilde{J}_{zm}(x) \quad (4.2)$$

Il est souhaitable de choisir des fonctions de base qui respectent les critères physiques et dont les transformées de Fourier doivent être connues analytiquement.

Dans une seconde étape, après avoir remplacé les densités de courant dans le domaine spectral, par leur expressions dans (4.1), nous aboutissons à un système où les inconnues sont les coefficients scalaires complexes (a_r et b_m) en utilisant :

- le produit interne à l'aide des fonctions tests choisies égales aux fonctions de base,
- les relations de complémentarité qui existent entre le courant et le champ électrique à l'interface métallisée.
- Le théorème de Parseval,

On aboutit finalement à un système où les inconnues a_r et b_m , sont évaluées numériquement. On peut alors calculer la constante de propagation β et tous les autres paramètres recherchés (impédance caractéristique, la longueur d'onde guidée, paramètres S etc.).

4.3. Formulation du problème

On suppose tout d'abord que la structure est uniforme et infinie dans la direction z . on suppose également que le substrat est à faibles pertes. Les composantes du champ hybride peuvent être exprimées en terme de superposition des champs de LSE et LSM. Les variations de toutes les grandeurs suivant z sont de la forme $e^{-j\beta \cdot z}$ (β : désigne la constante de phase), En régime sinusoïdal, toute fonction $F(x, y, z, t)$ peut s'écrire :

$$F(x, y, z, t) = f(x, y) \exp[j(\omega t - \beta z)] \quad (4.3)$$

On tachera dans ce qui suit d'étudier les paramètres de propagation des lignes supraconductrices en prenant en compte l'influence de l'épaisseur restreinte du ruban en utilisant la technique M.A.D.S pour des structures planaires blindées multicouches où le nombre de couches diélectriques est arbitraire. Mais commençons tout d'abord, par quelques rappels préliminaires sur la propagation.

4.4. Equations de Maxwell dans les milieux à pertes

Les équations de Maxwell s'écrivent en régime sinusoïdal pour un milieu diélectrique à pertes d'indice i à anisotropie uniaxiale, de caractéristiques $(\varepsilon_i, \mu_i, \sigma_{di})$ comme suit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}_i = -j\omega \vec{B}_i \quad (4.4.a)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{H}_i = (j\omega \varepsilon_i + \sigma_{di}) \vec{E}_i = j\omega \varepsilon_i^* \vec{E}_i \quad (4.4.b)$$

$$\text{div} \vec{B}_i = 0 \quad (4.4.c)$$

$$\text{div} \vec{D}_i = 0 \quad (4.4.d)$$

avec $\varepsilon_i^* = \varepsilon_i (1 - j \tan \Psi)$ où $\tan \Psi$ désigne le facteur de pertes donné par $\tan \Psi = \frac{\sigma_{di}}{\omega \varepsilon_i}$

où $\vec{E}_i, \vec{D}_i, \vec{H}_i, \vec{B}_i$ représentent respectivement, le champ électrique, le déplacement électrique, le champ magnétique et l'induction magnétique, avec les relations suivantes :

$$\vec{D}_i = \varepsilon_i \vec{E}_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ri} \vec{E}_i \quad (4.4.e)$$

$$\vec{B}_i = \mu_i \vec{H}_i = \mu_0 \mu_{ri} \vec{H}_i \quad (4.4.f)$$

ϵ_{ri} et μ_{ri} désignent respectivement la permittivité relative et la perméabilité relative du milieu d'indice i . Dans le cas d'une anisotropie uniaxiale, ces deux paramètres sont des tenseurs d'ordre 2 tel que :

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{rx} \end{bmatrix} ; \mu = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{rx} \end{bmatrix} \text{ et } \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{bmatrix}$$

4.5. Equations de continuité

Les équations de Maxwell ne sont valables que dans un espace au voisinage duquel les propriétés physiques du milieu varient de façon continue. Cependant lorsqu'on traverse une surface qui limite un corps ou, qui sépare un milieu d'un autre, les paramètres ϵ , μ et σ du milieu subissent des variations brusques. Il en résulte que les champs subissent des discontinuités sur cette surface de séparation.

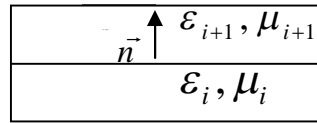


Figure 4.1. Surface de séparation entre deux milieux diélectriques

Les relations de continuité du champ électromagnétique à travers une surface séparent deux milieux d'indice i et $i+1$ sont [20] :

$$\vec{n} \wedge (\vec{E}_{i+1} - \vec{E}_i) = 0 \quad (4.5.a)$$

$$\vec{n} \wedge (\vec{H}_{i+1} - \vec{H}_i) = \vec{j}_s \quad (4.5.b)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_{i+1} - \vec{D}_i) = \rho_s \quad (4.5.c)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_{i+1} - \vec{B}_i) = 0 \quad (4.5.d)$$

\vec{j}_s et ρ_s sont respectivement la densité de courant et la densité de charge susceptibles d'exister sur l'interface. \vec{n} est la normale orientée de (i) vers ($i+1$).

4.6. Détermination des composantes du champ EM tangentiel en fonction des composantes normales $E_{y(i)}$ et $H_{y(i)}$:

Les équations (4.4.a) et (4.4.b) permettent d'écrire respectivement dans le repère cartésien :

$$\frac{\partial E_{z(i)}}{\partial y_{(i)}} + j\beta E_{y(i)} = -j\omega\mu_{x(i)} H_{x(i)} \quad (4.6.a)$$

$$\frac{\partial E_{z(i)}}{\partial x_{(i)}} + j\beta E_{x(i)} = j\omega\mu_{y(i)} H_{y(i)} \quad (4.6.b)$$

$$\frac{\partial E_{y(i)}}{\partial x_{(i)}} - \frac{\partial E_{x(i)}}{\partial y_{(i)}} = -j\omega\mu_{x(i)} H_{z(i)} \quad (4.6.c)$$

$$\frac{\partial H_{z(i)}}{\partial y} + j\beta H_{y(i)} = j\omega\varepsilon_{x(i)}^* E_{x(i)} \quad (4.7.a)$$

$$-\frac{\partial H_{z(i)}}{\partial x_{(i)}} - j\beta H_{x(i)} = j\omega\varepsilon_{y(i)}^* E_{y(i)} \quad (4.7.b)$$

$$\frac{\partial H_{y(i)}}{\partial x_{(i)}} - \frac{\partial H_{x(i)}}{\partial y_{(i)}} = j\omega\varepsilon_{x(i)}^* E_{z(i)} \quad (4.7.c)$$

Pour passer au domaine fréquentiel, on utilise l'outil de la transformée de Fourier et la propriété suivante :

$$TF\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right) = (-j\alpha_n)^m \cdot \tilde{f}$$

\tilde{f} : désigne la transformée de Fourier de f et α_n le paramètre spectral de Fourier.

La résolution du système obtenu dans le domaine spectral permet d'écrire [Annexe C].

$$\tilde{E}_{x(i)} = -j\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n^2 + \beta^2}\right) \frac{\varepsilon_{y(i)}^*}{\varepsilon_{x(i)}^*} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_{y(i)}}{\partial y_{(i)}} + \frac{\beta}{\alpha_n^2 + \beta^2} \omega\mu_{y(i)} \tilde{H}_{y(i)} \quad (4.8.a)$$

$$\tilde{E}_{z(i)} = -j\left(\frac{\beta}{\alpha_n^2 + \beta^2}\right) \frac{\varepsilon_{y(i)}^*}{\varepsilon_{x(i)}^*} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_{y(i)}}{\partial y_{(i)}} - \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2 + \beta^2} \omega\mu_{y(i)} \tilde{H}_{y(i)} \quad (4.8.b)$$

$$\tilde{H}_{x(i)} = -j\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n^2 + \beta^2}\right) \frac{\mu_{y(i)}}{\mu_{x(i)}} \cdot \frac{\partial \tilde{H}_{y(i)}}{\partial y_{(i)}} - \frac{\beta}{\alpha_n^2 + \beta^2} (\omega\varepsilon_{y(i)}^*) \tilde{E}_{y(i)} \quad (4.8.c)$$

$$\tilde{H}_{z(i)} = -j\left(\frac{\beta}{\alpha_n^2 + \beta^2}\right) \frac{\mu_{y(i)}}{\mu_{x(i)}} \cdot \frac{\partial \tilde{H}_{y(i)}}{\partial y_{(i)}} + \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2 + \beta^2} (\omega\varepsilon_{y(i)}^*) \tilde{E}_{y(i)} \quad (4.8.d)$$

4.7. Evaluation des fonctions de Green: utilisation de la méthode *immitance approach*

La méthode dite immitance approach [21] présente l'avantage de déterminer les fonctions de Green des structures multicouches et multiconducteurs sans passer par le calcul des coefficients des potentiels électriques et magnétiques au niveau de ces couches. Une résolution par la méthode des moments (méthode de Galerkin), avec un choix convenable des fonctions de base pour J (ou E) aboutit à l'équation de dispersion recherchée à partir de laquelle on peut déterminer les caractéristiques de propagation des structures étudiées. Toutefois, nous supposons pour l'instant que l'épaisseur des métallisations est nulle et leur conductivité est infinie. L'effet de cette épaisseur sera pris en compte ultérieurement.

4.7.1. Application de la méthode *immitance approach* pour une structure multicouche

Pour allier la simplicité de calcul et richesse de l'interprétation physique de certains phénomènes, un changement de repère adéquat est effectué. Les composantes du champ EM dans chaque couche diélectrique peuvent être considérées comme la superposition d'ondes planes inhomogènes en y , se propageant dans la direction θ , par rapport à l'axe z comme illustré sur la figure ci-dessous :



Figure 4.2. Présentation des modes LSE et LSM dans le repère (u,v,y) (repère d'Itoh).

Pour chaque valeur de θ , les champs peuvent être décomposés en ondes TM_y , de composantes $(\tilde{E}_y, \tilde{E}_v, \tilde{H}_u)$ et en ondes TE_y de composantes $(\tilde{H}_y, \tilde{E}_u, \tilde{H}_v)$ dans le système de coordonnées (v,y,u).

$$\begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_x \\ X_z \end{pmatrix} \quad \text{où } (X=E \text{ ou } H) \quad (4.9)$$

On définira l'angle θ tel que $\cos\theta = \frac{\beta}{\rho}$ et $\sin\theta = \frac{\alpha_n}{\rho}$ avec $\rho = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta^2}$

En remplaçant (4.8.a) et (4.8.b) dans (4.9), il vient :

$$\tilde{E}_u = - \frac{\omega\mu_y}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta^2}} \tilde{H}_y \quad (4.10.a)$$

$$\tilde{E}_v = - \frac{j}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta^2}} \frac{\varepsilon_y^*}{\varepsilon_x^*} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} \quad (4.10.b)$$

De même, en substituant (4.8.c) et (4.8.d) dans (4.9), il vient pour le champ magnétique :

$$\tilde{H}_u = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta^2}} (\omega\varepsilon_y^*) \tilde{E}_y \quad (4.11.a)$$

$$\tilde{H}_v = - \frac{j}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta^2}} \frac{\mu_y}{\mu_x} \cdot \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} \quad (4.11.b)$$

Finalement, en récapitulant les expressions des champs dans le repère d'Itoh (fig. 4.2), pour une couche diélectrique d'indice (i), on obtient :

$$\tilde{E}_{u_i} = - \frac{\omega\mu_{y_i}}{\rho} \tilde{H}_{y_i} \quad (4.12.a)$$

$$\tilde{E}_{v_i} = - \frac{j}{\rho} \frac{\varepsilon_{y_i}^*}{\varepsilon_{x_i}^*} \frac{\partial \tilde{E}_{y_i}}{\partial y} \quad (4.12.b)$$

$$\tilde{H}_{u_i} = \frac{1}{\rho} (\omega\varepsilon_{y_i}^*) \tilde{E}_{y_i} \quad (4.12.c)$$

$$\tilde{H}_{v_i} = - \frac{j}{\rho} \frac{\mu_{y_i}}{\mu_{x_i}} \cdot \frac{\partial \tilde{H}_{y_i}}{\partial y} \quad (4.12.d)$$

4.7.2. Equations de continuité dans le domaine spectral

Les équations de continuité du champ EM peuvent s'écrire dans le domaine spectral:

$$\tilde{E}_{z(i+1)} - \tilde{E}_{z_i} = 0 \quad (4.13.a)$$

$$\tilde{E}_{x(i+1)} - \tilde{E}_{x_i} = 0 \quad (4.13.b)$$

$$\tilde{H}_{z(i+1)} - \tilde{H}_{z_i} = \tilde{j}_x(\alpha_n) \quad (4.13.c)$$

$$\tilde{H}_{x(i+1)} - \tilde{H}_{x_i} = -\tilde{j}_z(\alpha_n) \quad (4.13.d)$$

Dans le repère d'Itoh (u,y,v), on a :

$$\tilde{E}_{u(i+1)} - \tilde{E}_{u_i} = 0 \quad (4.14.a)$$

$$\tilde{E}_{v(i+1)} - \tilde{E}_{v_i} = 0 \quad (4.14.b)$$

$$\tilde{H}_{u(i+1)} - \tilde{H}_{u_i} = -\tilde{j}_v(\alpha_n) \quad (4.14.c)$$

$$\tilde{H}_{v(i+1)} - \tilde{H}_{v_i} = \tilde{j}_u(\alpha_n) \quad (4.14.d)$$

4.7.3. Equations de propagation des champs normaux \tilde{E}_y et \tilde{H}_y dans le diélectrique :

En utilisant les équations de Maxwell dans le domaine spectral, on peut établir les équations de propagation des champs \tilde{E}_y et \tilde{H}_y comme suit [Annexe C] :

Pour le mode LSM :

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial y^2} - (\gamma_i^{LSM})^2 \tilde{E}_y = 0 \quad (4.15)$$

sachant que :

$$(\gamma_i^{LSM})^2 = \frac{\epsilon_{xi}^*}{\epsilon_{yi}^*} [\alpha_n^2 + \beta^2 - \omega^2 \epsilon_{yi}^* \mu_{xi}]$$

Pour le mode LSE:

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}_y}{\partial y^2} - (\gamma_i^{LSE})^2 \tilde{H}_y = 0 \quad (4.16)$$

sachant que :

$$(\gamma_i^{LSE})^2 = \frac{\mu_{xi}}{\mu_{yi}} [\alpha_n^2 + \beta^2 - \omega^2 \epsilon_{xi}^* \mu_{yi}]$$

4.7.4. Cas des milieux diélectriques limités par des supraconducteurs

Les équations de Maxwell s'écrivent en régime sinusoïdal dans un milieu diélectrique d'indice i à anisotropie uniaxiale, de caractéristique $(\varepsilon_i, \mu_i, \sigma_{di}, \sigma_{sc})$ comme suit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_i = -j\omega \vec{B}_i \quad (4.17.a)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}_i = (j\omega\varepsilon_i + \sigma_{di})\vec{E}_i + \vec{J}_i = (j\omega\varepsilon_i^* + \sigma_{sc})\vec{E}_i \quad (4.17.b)$$

$$\text{div} \vec{B}_i = 0 \quad (4.17.c)$$

$$\text{div} \vec{D}_i = 0 \quad (4.17.d)$$

avec $\varepsilon_i^* = \varepsilon_i - j\frac{\sigma_{di}}{\omega}$, $\tan \psi = \frac{\sigma_{di}}{\omega\varepsilon_i}$, $\vec{J}_i = \sigma_{sc}\vec{E}_i$

\vec{J}_i , et σ_{sc} représentent respectivement la densité de courant supraconducteur et la supraconductivité total dans le milieu (diélectrique-supraconducteur).

Comme il a été expliqué précédemment, dans le cas des supraconducteurs à haute température critique, σ_s ne sera pas la même dans toute les directions. De l'équation (2.46), il vient (pour $\sigma_x = \sigma_z$) [Annexe B]:

$$\sigma_{sc} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{n,a} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{n,b} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{n,a} \end{bmatrix} - j\left(\frac{1}{\omega\mu_0}\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_a^2} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

4.7.5. Equations de propagation des champs normaux \tilde{E}_y et \tilde{H}_y

En utilisant les équations de Maxwell dans le domaine spectral et en refaisant les mêmes calculs, nous obtenons les équations de propagation des champs \tilde{E}_y et \tilde{H}_y [Annexe C]:

Pour le mode LSM :

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial y^2} - (\gamma_i^{LSM})^2 \tilde{E}_y = 0 \quad (4.19)$$

sachant que :

$$(\gamma_i^{LSM})^2 = \frac{\epsilon_{xi}^*}{\epsilon_{yi}^*} [\alpha_n^2 + \beta^2 - \omega^2 \epsilon_{yi}^* \mu_{xi} + j\omega \mu_{xi} \sigma_{yi}]$$

Pour le mode LSE:

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}_y}{\partial y^2} - (\gamma_i^{LSE})^2 \tilde{H}_y = 0 \quad (4.20)$$

sachant que :

$$(\gamma_i^{LSE})^2 = \frac{\mu_{xi}}{\mu_{yi}} [\alpha_n^2 + \beta^2 - \omega^2 \epsilon_{xi}^* \mu_{yi} + j\omega \mu_{yi} \sigma_{xi}]$$

4.7.6. Détermination des fonctions de Green pour une structure multicouche à conducteurs normaux

Afin de développer cette approche, considérons la structure planaire multicouche schématisée

sur la figure (4.3) où : $H_i = \sum_{k=1}^i h_k$

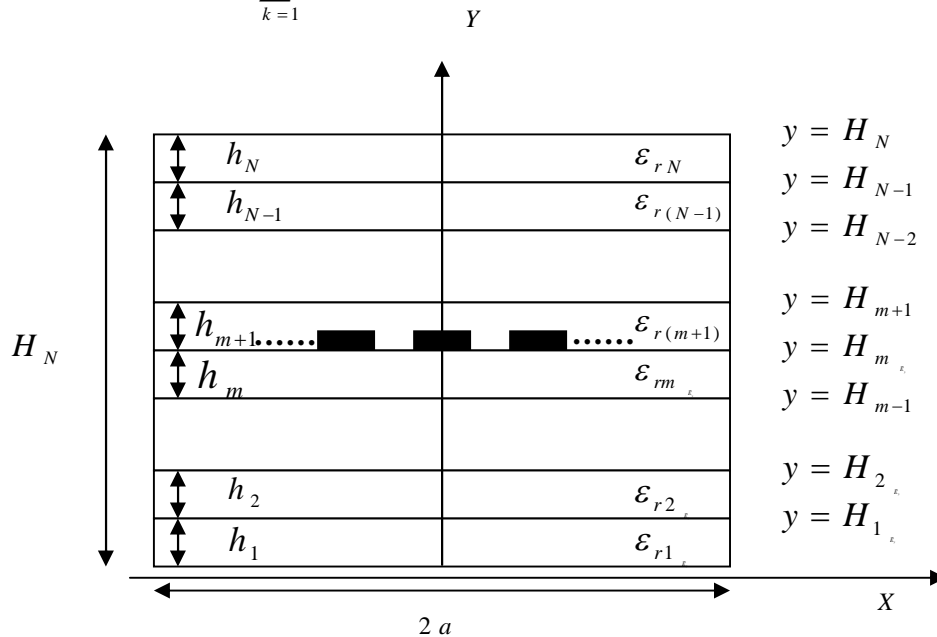


Figure 4.3. Section droite d'une structure planaire multicouches blindée [28]

4.7.6.1. Calcul des admittances ramenées aux interfaces

En utilisant la technique des lignes transverses par analogie avec les lignes TEM, on peut établir une relation entre \tilde{E}_u et \tilde{H}_v d'une autre part le mode LSE et entre \tilde{E}_v et \tilde{H}_u pour le mode LSM. Chaque paire de modes peut être interprétée comme une propagation d'ondes transverses dans la direction y .

♦ Cas des couches situées au-dessous du plan de métallisation

Pour le mode LSE:

Les expressions du champ EM dans la première couche ($0 \leq y \leq h_1$) s'écrivent:

$$\tilde{H}_{y1} = A_1^h \sinh(\gamma_1^{LSE} y) + B_1^h \cosh(\gamma_1^{LSE} y) \quad (4.17)$$

Ensuite, en utilisant les conditions aux limites sur les parois métalliques à $y=0$, on aurait :

$$\tilde{E}_{u1} = 0 \Rightarrow \tilde{H}_{y1} /_{y=0} = 0 \quad (4.18)$$

En remplaçant (4.17) dans (4.18), on aura $B_1^h = 0$.d'où l'expression du champ magnétique qui devient :

$$\tilde{H}_{y1} = A_1^h \sinh(\gamma_1^{LSE} y) \quad (4.19)$$

Puis en remplaçant l'expression (4.19) dans les équations (4.12.a) et (4.12.d) on aura :

$$\tilde{E}_{u1} = - \frac{\omega \mu_{y1} A_1^h}{\rho} \sinh(\gamma_1^{LSE} h_1) \quad (4.20.a)$$

$$\tilde{H}_{v1} = - \frac{j \mu_{y1} \gamma_1^{LSE} A_1^h}{\rho \mu_{x1}} \cosh(\gamma_1^{LSE} h_1) \quad (4.20.b)$$

A_1^h : étant une constante.

En posant :

$$Y_1^{LSE} = \frac{\gamma_1^{LSE}}{j\omega\mu_{x1}} \quad (4.21)$$

L'admittance équivalente vue au plan $y = H_1$ est :

$$Y_1^h = -\frac{\tilde{H}_{v1}}{\tilde{E}_{u1}} = Y_1^{LSE} \coth(\gamma_1^{LSE} h_1) \quad (4.22)$$

En généralisant aux autres interfaces pour (i+1) allant de 2 à m-1 couches ($1 \leq i \leq m-2$), il vient [Annexe D] :

$$Y_{i+1}^h = -\frac{\tilde{H}_{v(i+1)}}{\tilde{E}_{u(i+1)}} = Y_{i+1}^{LSE} \frac{Y_{i+1}^{LSE} + Y_i^h \coth(\gamma_{i+1}^{LSE} h_{i+1})}{Y_i^h + Y_{i+1}^{LSE} \coth(\gamma_{i+1}^{LSE} h_{i+1})} \quad (4.23)$$

$$\text{avec : } Y_{i+1}^{LSE} = \frac{\gamma_{i+1}^{LSE}}{j\omega\mu_{x(i+1)}} \quad (4.24)$$

$$\text{et } (\gamma_{i+1}^{LSE})^2 = \frac{\mu_{x(i+1)}}{\mu_{y(i+1)}} [\alpha_n^2 + \beta^2 - \omega^2 \varepsilon_{x(i+1)}^* \mu_{y(i+1)}]$$

Pour le mode LSM:

Les expressions du champ EM dans la première couche ($0 \leq y \leq h_1$) s'écrivent comme suit :

$$\tilde{E}_{y1} = A_1^e \sinh(\gamma_1^{LSM} y) + B_1^e \cosh(\gamma_1^{LSM} y) \quad (4.25)$$

Ensuite, en utilisant les conditions aux limites sur les parois métalliques de la structure à $y=0$, on aurait :

$$\tilde{E}_{v1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{E}_{y1}}{\partial y} /_{y=0} = 0 \quad (4.26)$$

En remplaçant (4.25) dans (4.26), on aura $A_1^e = 0$.d'où l'expression du champ magnétique devient :

$$\tilde{E}_{y1} = B_1^e \cosh(\gamma_1^{LSM} y) \quad (4.27)$$

Puis en remplaçant l'expression (4.27) dans les équations (4.12.b) et (4.12.c) on aura :

$$\tilde{E}_{v1} = -j \frac{\varepsilon_{y1}^* B_1^e \gamma_1^{LSM}}{\varepsilon_{x1} \rho} \sinh(\gamma_1^{LSM} h_1) \quad (4.28.a)$$

$$\tilde{H}_{u1} = \frac{(\omega \varepsilon_{y1}^*) B_1^e}{\rho} \cosh(\gamma_1^{LSM} h_1) \quad (4.28.b)$$

B_1^e : étant une constante.

En posant :

$$Y_1^{LSM} = \frac{j\omega \varepsilon_{y1}^*}{\varepsilon_{y1}^* \gamma_1^{LSM}} \varepsilon_{x1}^* \quad (4.29)$$

L'admittance équivalente vue au plan $y = H_1$ est :

$$Y_1^e = \frac{\tilde{H}_{u1}}{\tilde{E}_{v1}} = Y_1^{LSM} \coth(\gamma_1^{LSE} h_1) \quad (4.30)$$

En généralisant aux autres interfaces pour (i) allant de 2 à m-1 couches ($1 \leq i \leq m-2$), on trouve [Annexe D] :

$$Y_{i+1}^e = \frac{\tilde{H}_{u(i+1)}}{\tilde{E}_{v(i+1)}} = Y_{i+1}^{LSM} \frac{Y_{i+1}^{LSM} + Y_i^e \coth(\gamma_{i+1}^{LSM} h_{i+1})}{Y_i^e + Y_{i+1}^{LSM} \coth(\gamma_{i+1}^{LSM} h_{i+1})} \quad (4.31)$$

$$\text{avec : } Y_{i+1}^{LSM} = \frac{j\omega \varepsilon_{y(i+1)}^*}{\varepsilon_{y(i+1)}^* \gamma_{i+1}^{LSM}} \varepsilon_{x(i+1)}^* \quad (4.32)$$

$$\text{et } (\gamma_{i+1}^{LSM})^2 = \frac{\varepsilon_{x(i+1)}^*}{\varepsilon_{y(i+1)}^*} [\alpha_n^2 + \beta^2 - \omega^2 \mu_{x(i+1)} \varepsilon_{y(i+1)}^*]$$

♦ **Cas des couches situées au-dessus du plan de métallisation**

Pour le mode LSE:

Les expressions du champ EM dans la couche d'indice N, ($h_{N-1} \leq y \leq h_N$) s'écrivent comme suit :

$$\tilde{H}_{yN} = A_N^h \sinh(\gamma_N^{LSE} (H_N - y)) + B_N^h \cosh(\gamma_N^{LSE} (H_N - y)) \quad (4.33)$$

Ensuite, en utilisant les conditions aux limites sur les parois métalliques de la structure à $y=0$, on aurait :

$$\tilde{E}_{uN} = 0 \Rightarrow \tilde{H}_{yN} /_{y=H_N} = 0 \quad (4.34)$$

En remplaçant (4.33) dans (4.34), on aura $B_1^h = 0$.d'où l'expression du champ magnétique qui devient :

$$\tilde{H}_{yN} = A_N^h \sinh(\gamma_N^{LSE} (H_N - y)) \quad (4.35)$$

Puis en remplaçant l'expression (4.35) dans les équations (4.12.a) et (4.12.d), les expressions du champ EM dans la N^{ieme} couche s'écrivent :

$$\tilde{E}_{uN} = - \frac{\omega \mu_{yN} A_N^h}{\rho} \sinh(\gamma_N^{LSE} h_N) \quad (4.36.a)$$

$$\tilde{H}_{vN} = - \frac{j \mu_{yN} \gamma_N^{LSE} A_N^h}{\rho \mu_{xN}} \cosh(\gamma_N^{LSE} h_N) \quad (4.36.b)$$

A_N^h : étant une constante.

En posant :

$$Y_N^{LSE} = \frac{\gamma_N^{LSE}}{j\omega\mu_{xN}} \quad (4.37)$$

L'admittance équivalente vue au plan $y = H_{N-1}$ est :

$$Y_1^h = \frac{\tilde{H}_{vN}}{\tilde{E}_{uN}} = Y_N^{LSE} \coth(\gamma_N^{LSE} h_N) \quad (4.38)$$

En généralisant aux autres interfaces pour (i) allant de N à m+1 couches ($N \leq i \leq m+1$), on trouve [Annexe D] :

$$Y_{i-1}^h = \frac{\tilde{H}_{v(i-1)}}{\tilde{E}_{u(i-1)}} = Y_{i-1}^{LSE} \frac{Y_{i-1}^{LSE} + Y_i^h \coth(\gamma_{i-1}^{LSE} h_{i-1})}{Y_i^h + Y_{i-1}^{LSE} \coth(\gamma_{i-1}^{LSE} h_{i-1})} \quad (4.39)$$

$$\text{avec : } Y_{i-1}^{LSE} = \frac{\gamma_{i-1}^{LSE}}{j\omega\mu_{x(i-1)}}$$

$$\text{et } (\gamma_{i-1}^{LSE})^2 = \frac{\mu_{x(i-1)}}{\mu_{y(i-1)}} [\alpha_n^2 + \beta^2 - \omega^2 \varepsilon_{x(i-1)}^* \mu_{y(i-1)}] \quad (4.40)$$

Pour le mode LSM:

Les expressions du champ EM dans la N^{ieme} couche ($h_{N-1} \leq y \leq h_N$) s'écrivent:

$$\tilde{E}_{yN} = A_N^e \sinh(\gamma_N^{LSM} (H_N - y)) + B_N^e \cosh(\gamma_N^{LSM} (H_N - y)) \quad (4.41)$$

Ensuite, en utilisant les conditions aux limites sur les parois métalliques de la structure à $y=0$, on aurait :

$$\tilde{E}_{vN} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{E}_{yN}}{\partial y} /_{y=H_N} = 0 \quad (4.42)$$

En remplaçant (4.41) dans (4.42), on aura $A_N^e = 0$.d'où l'expression du champ magnétique devient :

$$\tilde{E}_{yN} = B_N^e \cosh(\gamma_N^{LSM} (H_N - y)) \quad (4.43)$$

Puis en remplaçant l'expression (4.43) dans les équations (4.12.b) et (4.12.c) on aura :

$$\tilde{E}_{vN} = -j \frac{\varepsilon_{yN}^* B_N^e \gamma_N^{LSM}}{\varepsilon_{xN}^* \rho} \sinh(\gamma_N^{LSM} h_N) \quad (4.44.a)$$

$$\tilde{H}_{uN} = \frac{(\omega \varepsilon_{yN}^*) B_N^e}{\rho} \cosh(\gamma_N^{LSM} h_N) \quad (4.44.b)$$

B_N^e : étant une constante.

En posant :

$$Y_N^{LSM} = \frac{j\omega\epsilon_{yN}^*}{\epsilon_{yN}^*\gamma_N^{LSM}} \epsilon_{xN}^* \quad (4.45)$$

L'admittance équivalente vue au plan $y = H_N$ est :

$$Y_1^e = -\frac{\tilde{H}_{uN}}{\tilde{E}_{vN}} = Y_N^{LSM} \coth(\gamma_N^{LSE} h_N) \quad (4.46)$$

En généralisant aux autres interfaces pour (i) allant de N à (m+1) couches ($(m+1) \leq i \leq N$), on trouve [Annexe D] :

$$Y_{i-1}^e = -\frac{\tilde{H}_{u(i-1)}}{\tilde{E}_{v(i-1)}} = Y_{i-1}^{LSM} \frac{Y_{i-1}^{LSM} + Y_i^e \coth(\gamma_{i-1}^{LSM} h_{i-1})}{Y_i^e + Y_{i-1}^{LSM} \coth(\gamma_{i-1}^{LSM} h_{i-1})} \quad (4.47)$$

$$\text{avec : } Y_{i-1}^{LSM} = \frac{j\omega\epsilon_{y(i-1)}^*}{\epsilon_{y(i-1)}^*\gamma_{i-1}^{LSM}} \epsilon_{x(i-1)}^* \quad (4.48)$$

$$\text{et } (\gamma_{i-1}^{LSM})^2 = \frac{\epsilon_{x(i-1)}^*}{\epsilon_{y(i-1)}^*} [\alpha_n^2 + \beta^2 - \omega^2 \mu_{x(i-1)} \epsilon_{y(i-1)}^*]$$

4.8. Détermination des fonctions de Green

4.8.1. Détermination de la matrice admittance de Green d'yadique Y

Pour établir les circuits équivalents relatifs aux modes (fig), il suffit d'écrire les relations de discontinuité au niveau des plans métallisés ($y = 0$ et $y = H_N$) qui sont données par les équations (4.14.c) et (4.14.d), \tilde{J}_u et \tilde{J}_v représentent les courants sur les rubans qui génèrent les modes LES et LSM respectivement.

◆ Pour le mode LSM

D'après les équations de continuité sur l'interface métallisée, on a pour \tilde{J}_v :

$$\tilde{H}_{u_m} - \tilde{H}_{u_{(m+1)}} = \tilde{J}_v \quad (4.49)$$

avec :

$$Y_+^e = -\frac{\tilde{H}_{u(m+1)}}{\tilde{E}_{v(m+1)}} \quad \text{et} \quad Y_-^e = \frac{\tilde{H}_{um}}{\tilde{E}_{vm}} \quad (4.50)$$

$$\Rightarrow Y_-^e \tilde{E}_{vm} + Y_+^e \tilde{E}_{v(m+1)} = \tilde{J}_v \quad (4.51)$$

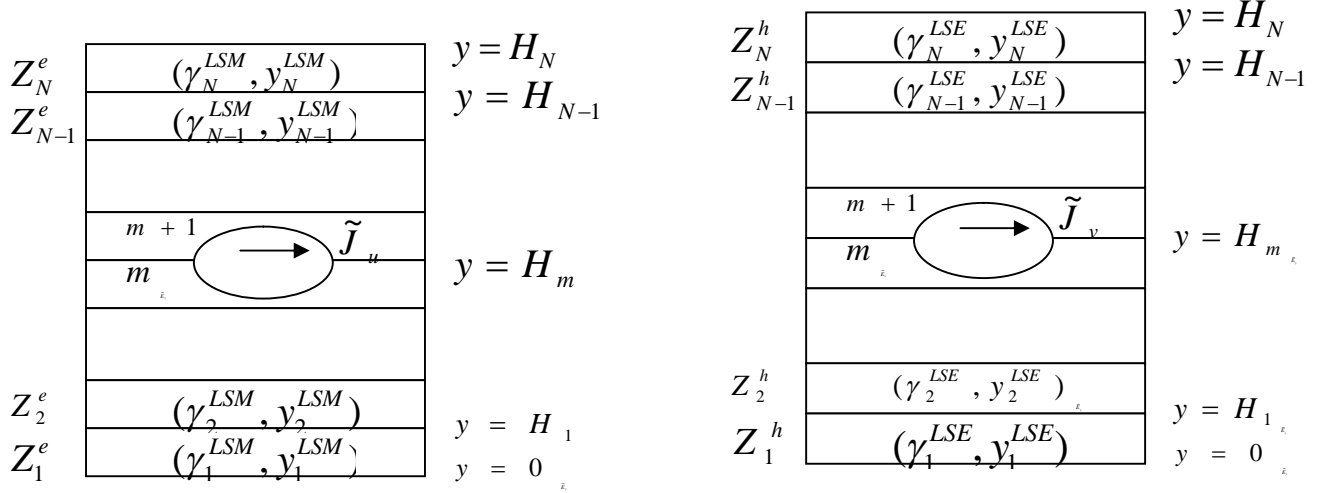


Figure 4.4. Schéma équivalents des modes LSM et LSE

Tel que : Y_-^e et Y_+^e représentent les admittances équivalentes ramenées aux interfaces métallisées dans le cas des modes LSM, elles s'obtiennent respectivement en exécutant les processus itératifs (4.23) pour $i=1$ à $m-1$ et (4.39) pour $i=N$ à $m+1$

Sachant que : $\tilde{E}_{vm} = \tilde{E}_{v(m+1)} = \tilde{E}_v$ (continuité du champ électrique).

Alors :

$$(Y_-^e + Y_+^e)\tilde{E}_v = \tilde{J}_v \quad (4.52)$$

Ou encore :

$$Y^e \tilde{E}_v = \tilde{J}_v \quad \text{avec} \quad Y_-^e + Y_+^e = Y^e \quad (4.53)$$

◆ Pour le mode LSE

D'après les équations de continuité sur l'interface métallisée, on a pour \tilde{J}_u :

$$\tilde{H}_{vm} - \tilde{H}_{v(m+1)} = -\tilde{J}_u \quad (4.54)$$

avec :

$$Y_+^h = \frac{\tilde{H}_{v(m+1)}}{\tilde{E}_{u(m+1)}} \quad \text{et} \quad Y_-^h = -\frac{\tilde{H}_{vm}}{\tilde{E}_{um}} \quad (4.55)$$

$$\Rightarrow Y_-^h \tilde{E}_{um} + Y_+^h \tilde{E}_{u(m+1)} = \tilde{J}_u \quad (4.56)$$

où Y_-^h et Y_+^h représentent les admittances équivalentes ramenées aux interfaces métallisées dans le cas des modes LSE, elles s'obtiennent respectivement en exécutant les processus itératifs (4.31) pour $i=1$ à $m-1$ et (4.47) pour $i=N$ à $m+1$

Comme : $\tilde{E}_{um} = \tilde{E}_{u(m+1)} = \tilde{E}_v$ (continuité du champ électrique), alors :

$$(Y_-^h + Y_+^h) \tilde{E}_u = \tilde{J}_u \quad (4.57)$$

Ou encore : $Y^h \tilde{E}_u = \tilde{J}_u$ avec $Y_-^h + Y_+^h = Y^h$ (4.58)

Donc, on aboutit à un système qui relie les densités de courants \tilde{J}_v et \tilde{J}_u aux champs électriques \tilde{E}_v et \tilde{E}_u qui est le suivant :

$$\begin{pmatrix} \tilde{J}_u \\ \tilde{J}_v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Y^h & 0 \\ 0 & Y^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_u \\ \tilde{E}_v \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

Partant du système (v,y,u), on revient au repère cartésien initial (x,y,z) en utilisant la matrice de passage (4.9). Ce qui permet d'écrire alors :

$$\begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^h & 0 \\ 0 & Y^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Y^h \cos^2 \theta + Y^e \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta (Y^e - Y^h) \\ \cos \theta \sin \theta (Y^e - Y^h) & Y^e \cos^2 \theta + Y^h \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

Par identification, on détermine la matrice admittance de Green dyadique Y qui relie dans le domaine spectral $(\tilde{J}_x, \tilde{J}_z)$ à $(\tilde{E}_x, \tilde{E}_z)$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

avec :

$$Y_{11} = Y^h \cos^2 \theta + Y^e \sin^2 \theta \quad (4.63.a)$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \cos \theta \sin \theta (Y^e - Y^h) \quad (4.63.b)$$

$$Y_{22} = Y^e \cos^2 \theta + Y^h \sin^2 \theta \quad (4.63.c)$$

4.8.2. Détermination de la matrice de Green G (forme impédance)

Il s'agit de déterminer une relation dans le domaine spectral qui relie le champ électrique à la densité de courant sur l'interface métallisée.

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} = [G(\alpha_n, \beta)] \begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_z \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Les éléments de la matrice de Green $[G]$ sont alors obtenus par simple inversion de la matrice admittance $[Y]$.

4.9. Résolution par la technique de Galerkin : cas des circuits infiniment minces et infiniment conducteurs

L'utilisation de la méthode des moments et plus particulièrement de la méthode de Galerkin, permettra la détermination de la constante de phase β dont la connaissance permettrait la détermination de toutes les autres grandeurs restantes. Il est donc souhaitable de transformer le système précédent (4.64) en un système d'équations algébriques, mettant en jeu des coefficients scalaires, facilement représentables sur ordinateurs.

Nous reprenons ici le système d'équations (4.64) pour plus de commodités :

$$\tilde{E}_x = G_{11}(\alpha_n, \beta) \tilde{J}_x + G_{12}(\alpha_n, \beta) \tilde{J}_z \quad (4.65.a)$$

$$\tilde{E}_z = G_{21}(\alpha_n, \beta) \tilde{J}_x + G_{22}(\alpha_n, \beta) \tilde{J}_z \quad (4.65.b)$$

Dans la méthode de Galerkin, on commence tout d'abord par développer les composantes du courant transformé comme combinaison linéaire de fonctions de base connues a priori :

$$\tilde{J}_x(x) = \sum_{r=1}^R a_r \tilde{J}_{xr}(x) \quad (4.66.a)$$

$$\tilde{J}_z(x) = \sum_{m=1}^M b_m \tilde{J}_{zm}(x) \quad (4.66.b)$$

Les fonctions de base sont choisies de telle sorte que leurs transformées de Fourier inverse soient non nulles sur le ruban conducteur. En portant ensuite les expressions (4.66.a) et (4.66.b) dans (4.65.a) et (4.65.b), respectivement il vient:

$$\tilde{E}_x = G_{11}(\alpha_n, \beta) \sum_{r=1}^R a_r \tilde{J}_{xr}(x) + G_{12}(\alpha_n, \beta) \sum_{m=1}^M b_m \tilde{J}_{zm}(x) \quad (4.67.a)$$

$$\tilde{E}_z = G_{21}(\alpha_n, \beta) \sum_{r=1}^R a_r \tilde{J}_{xr}(x) + G_{22}(\alpha_n, \beta) \sum_{m=1}^M b_m \tilde{J}_{zm}(x) \quad (4.67.b)$$

Pour appliquer la technique de Galerkin, nous définissons le produit scalaire de deux fonctions X et Y tel que:

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} X(x) Y^*(x) dx \quad (4.68)$$

En utilisant ensuite l'identité de Parseval, le produit scalaire peut aussi s'écrire dans le domaine spectral selon :

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} X(x) Y^*(x) dx = \sum_n \tilde{X} \tilde{Y}^* \quad (4.69)$$

L'étape suivante consiste à appliquer le produit scalaire aux équations (4.67) à l'aide des fonctions test $\tilde{J}_{z,m}(\alpha_n)$ et $\tilde{J}_{x,r}(\alpha_n)$ (choisies égales aux fonctions de base dans le cadre de la technique de Galerkin), tels que :

$$\langle \tilde{E}_x, \tilde{J}_{xr'} \rangle = \left\langle G_{11}(\alpha_n, \beta) \sum_{r=1}^R a_r \tilde{J}_{xr}(x) + G_{12}(\alpha_n, \beta) \sum_{m=1}^M b_m \tilde{J}_{zm}(x), \tilde{J}_{xr'} \right\rangle ; r'=1,2, R \quad (4.70.a)$$

$$\langle \tilde{E}_z, \tilde{J}_{zm'} \rangle = \left\langle G_{21}(\alpha_n, \beta) \sum_{r=1}^R a_r \tilde{J}_{xr}(x) + G_{22}(\alpha_n, \beta) \sum_{m=1}^M b_m \tilde{J}_{zm}(x), \tilde{J}_{zm'} \right\rangle ; m'=1,2, M \quad (4.70.b)$$

Les produits scalaires (4.70) deviennent alors :

$$\sum_{r=1}^R C_{r,r'}^{11}(\beta) a_r + \sum_{m=1}^M C_{m,r'}^{12}(\beta) b_m = 0 \quad r'=1,2, R \quad (4.71.a)$$

$$\sum_{r=1}^R C_{r,m'}^{21}(\beta) a_r + \sum_{m=1}^M C_{m,m'}^{22}(\beta) b_m = 0 \quad m'=1,2, M \quad (4.71.b)$$

avec :

$$C_{r,r'}^{11}(\alpha_n, \beta) = \sum_n G_{S11}(\alpha_n, \beta) \tilde{J}_{x,r}(x) \tilde{J}_{x,r'}^* \quad (4.74.a)$$

$$C_{m,r'}^{12}(\alpha_n, \beta) = \sum_n G_{S12}(\alpha_n, \beta) \tilde{J}_{z,m}(x) \tilde{J}_{x,r'}^* \quad (4.74.b)$$

$$C_{r,m'}^{21}(\alpha_n, \beta) = \sum_n G_{S21}(\alpha_n, \beta) \tilde{J}_{x,r}(x) \tilde{J}_{z,m'}^* \quad (4.74.c)$$

$$C_{m,m'}^{22}(\alpha_n, \beta) = \sum_n G_{S22}(\alpha_n, \beta) \tilde{J}_{z,m}(x) \tilde{J}_{z,m'}^* \quad (4.74.d)$$

On obtient un système algébrique de (R+M) équations linéaires homogènes en fonction des (R+M) coefficients inconnus a_r et b_m . ce système se présente sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} C^{11}(\beta) & C^{12}(\beta) \\ C^{21}(\beta) & C^{22}(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_r \\ b_m \end{bmatrix} = 0 \quad (4.75)$$

Les solutions non triviales du système d'équations homogènes (4.75) fournissent à une fréquence F donnée, les constantes de propagation des modes guidés par la structure. Ceci permettra de tracer le diagramme de dispersion. Les solutions non triviales sont obtenues en annulant le déterminant de la matrice $[C(\beta, \omega)]$.

$$\det[C(\beta, \omega)] = 0$$

4.10. Prise en compte de l'épaisseur finie des métallisations

Afin de tenir compte de l'épaisseur des métallisations, nous avons introduit des modifications au niveau du calcul des fonctions de Green dyadiques. Les détails peuvent être consultés dans l'annexe E.

4.11. Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons décrit le principe de la méthode spectrale appliqué aux circuits supraconducteurs de type 2. Du point de vue mathématique, la méthode spectrale transforme un problème d'équations d'intégrales en un système d'équations algébriques relativement simples à programmer sur micro-ordinateur. Son principal avantage reste la simplification du traitement analytique et numérique.

5.1. Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la programmation numérique de la méthode d'approche dans le domaine spectral appliquée aux circuits planaires multicouches à supraconducteurs anisotropes. Pour cela, nous avons élaboré un programme de calcul à l'aide du langage MATLAB qui est un logiciel de calcul interactif permettant de réaliser des simulations numériques basées sur des algorithmes d'analyse numérique. Le but étant de calculer le diagramme de dispersion, la permittivité effective et la constante de propagation complexe pour différents types de circuits planaires à anisotropie uniaxiale et à rubans supraconducteurs HTC anisotropes.

5.2. Choix des fonctions de bases

Le choix des fonctions de base est une étape essentielle pour l'efficacité du programme de calcul. En effet, un choix judicieux d'un ensemble correct de fonctions de base permet d'augmenter la précision, de faciliter l'évaluation des éléments de la matrice $C(\beta)$ et réduire sa taille impliquant ainsi un temps de calcul relativement faible. Cependant, ces fonctions doivent remplir un certain nombre de critères pour pouvoir représenter au mieux la nature de la solution physique et alléger les calculs numériques. Ce choix doit donc respecter les critères suivants :

- 1- Les fonctions de base choisies pour le courant (ou le champ électrique) doivent être non nulles sur le ruban métallique (ou les fentes).
- 2- Ce choix doit tenir compte du comportement singulier du champ électromagnétique au voisinage des bords. Ceci permet d'éviter la convergence relative et améliore le conditionnement de la matrice $C(\beta)$.
- 3- Ces fonctions doivent modéliser convenablement le courant (ou le champ électrique) sur le ruban (ou la fente) et assurer une bonne convergence des résultats. Pour cela, l'expansion de la densité du courant doit se faire dans une base complète.
- 4- Un choix particulier de fonctions de base est obtenu en choisissant les courants J_x et J_z comme étant dérivés l'un de l'autre ($J_x = \frac{dJ_z}{dx}$). Ce choix astucieux permet de déterminer la TF de J_x et J_z , de façon automatique et rapide.
- 5- Critère de parité des modes

Dans le but d'assurer une convergence optimale, nous proposons des fonctions de base obéissant à certains des ces critères et qui seront testés du point de vue précision et efficacité. Les fonctions de base choisies s'écrivent comme suit [17]:

Fonctions de base	Lignes microruban		Lignes à fentes	
	J_{xr}	J_{zm}	E_{xr}	E_{zm}
Mode pair	$\frac{\sin(r\pi x/w)}{\sqrt{1-(x/w)^2}}$	$\frac{\cos[(r-1)\pi x/w]}{\sqrt{1-(x/w)^2}}$	/	/
Mode impair	/	/	$\frac{\cos[(r-1)\pi x/s]}{\sqrt{1-(x/s)^2}}$	$\frac{\sin(r\pi x/s)}{\sqrt{1-(x/s)^2}}$

Fonctions de base			$-2w-s < x < -s$	$s < x < 2w+s$
Lignes microruban couplées	Mode pair	J_{xr}	$\frac{\sin[r\pi(x+w+s)/w]}{\sqrt{1-((x+w+s)/w)^2}}$ $r \neq 0$	$\frac{\sin[r\pi(x-w-s)/w]}{\sqrt{1-((x-w-s)/w)^2}}$ $r \neq 0$
		J_{zm}	$\frac{\cos[m\pi(x+w+s)/w]}{\sqrt{1-((x+w+s)/w)^2}}$ $m = 0,1,2$	$\frac{\cos[m\pi(x-w-s)/w]}{\sqrt{1-((x-w-s)/w)^2}}$ $m = 0,1,2$
	Mode impair	J_{xr}	$\frac{\sin[r\pi(x+w+s)/w]}{\sqrt{1-((x+w+s)/w)^2}}$ $r \neq 0$	$-\frac{\sin[r\pi(x-w-s)/w]}{\sqrt{1-((x-w-s)/w)^2}}$ $r \neq 0$
		J_{zm}	$\frac{\cos[m\pi(x+w+s)/w]}{\sqrt{1-((x+w+s)/w)^2}}$ $m = 0,1,2$	$-\frac{\cos[m\pi(x-w-s)/w]}{\sqrt{1-((x-w-s)/w)^2}}$ $m = 0,1,2$
Fonctions de base			$2s-w < x < -w$	$w < x < 2s+w$
Lignes coplanaires	Mode pair	E_{xr}	$\frac{\cos[m\pi(x+w+s)/w]}{\sqrt{1-((x+w+s)/w)^2}}$ $m = 0,1,2$	$\frac{\cos[m\pi(x-w-s)/w]}{\sqrt{1-((x-w-s)/w)^2}}$ $m = 0,1,2$
		E_{zm}	$\frac{\sin[r\pi(x+w+s)/w]}{\sqrt{1-((x+w+s)/w)^2}}$ $r \neq 0$	$\frac{\sin[r\pi(x-w-s)/w]}{\sqrt{1-((x-w-s)/w)^2}}$ $r \neq 0$
	Mode impair	E_{xr}	$\frac{\cos[m\pi(x+w+s)/w]}{\sqrt{1-((x+w+s)/w)^2}}$ $m = 0,1,2$	$-\frac{\cos[m\pi(x-w-s)/w]}{\sqrt{1-((x-w-s)/w)^2}}$ $m = 0,1,2$
		E_{zm}	$\frac{\sin[r\pi(x+w+s)/w]}{\sqrt{1-((x+w+s)/w)^2}}$ $r \neq 0$	$-\frac{\sin[r\pi(x-w-s)/w]}{\sqrt{1-((x-w-s)/w)^2}}$ $r \neq 0$

5.3. Description du programme principal

Les différentes étapes de déroulement du programme de calcul sont les suivantes :

- 1- Lecture des paramètres physiques, électriques et magnétiques des circuits à analyser.
- 2- Appel des différents sous programmes dans le but de générer la matrice globale $C(\beta)$ et calculer son déterminant.
- 3- Calcul des zéros du déterminant pour l'évaluation de la constante de propagation (coefficient d'affaiblissement, constante de phase), de la et de la permittivité effective ε_{eff} .
- 4- Affichage des résultats.

5.3.1. Lecture des données

Le programme principal lit les données relatives aux différents circuits planaires

- N_c : nombre de couches diélectriques.
- $\varepsilon_r(i)$: le tenseur des permittivités relatives à la couche (i), avec $i=1,2,\dots,N_c$.
- $\mu_r(i)$: le tenseur de perméabilité relative à la couche (i), avec $i=1,2,\dots,N_c$.
- w : largeur des rubans supraconducteurs.
- s : distance inter-ruban.
- a : largeur du plan de masse.
- $h(i)$: l'épaisseur de la couche (i), avec $i=1,2,\dots,N_c$.
- N_{tf} : nombre de terme de Fourier.
- N_{bf} : nombre de fonctions de bases.
- N_{inf} : nombre de couches en dessous du plan de métallisation.
- N_{ech} : nombre d'échantillons sur lequel est définie la constante de phase.
- t : l'épaisseur des rubans supraconducteurs.
- $Mode$: permet de choisir le type de mode de propagation (pair ou impair).
- P_f : fréquence de travail.
- T_c : température critique.
- T : température de travail.
- $segman$: conductivité à une température $T=T_c$.
- pL_0 : longueur de pénétration de London à $T=0K^\circ$

5.3.2. Les différents sous programmes pour le calcul du diagramme de dispersion

Afin de calculer le déterminant de la matrice $C(\beta)$, le programme principal fait appel des sous programmes suivants :

a. Sous programme CP1

Il permet de calculer les spectres des fonctions de base, qui seront utilisés dans le calcul des éléments de la matrice globale $C(\beta)$, tout en tenant compte des modifications introduites par l'épaisseur du ruban et sa supraconductivité.

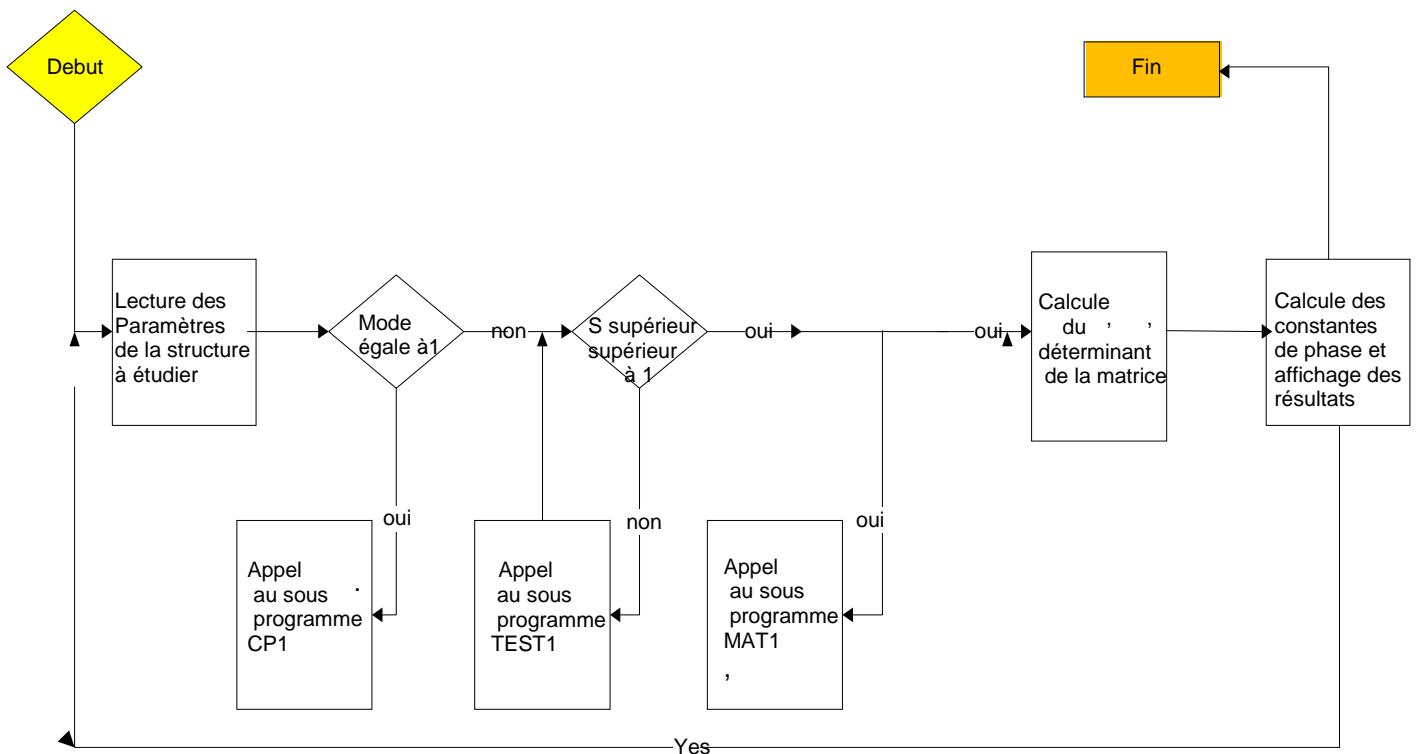
b. Sous programme TEST1

Il permet de calculer les valeurs des fonctions de Green et les stocker dans des vecteurs de dimension Ntf.

c. Sous programme MAT1

Il permet de calculer les éléments de la matrice globale $C(\beta)$. Les paramètres d'entrée de ce sous programme sont les éléments des fonctions de Green et les transformées de Fourier des fonctions de base. La taille de cette matrice est égale au nombre total de fonctions de base (R+M).

5.4. Organigramme global



5.5. Résultats et discussions

Un programme de calcul en langage Matlab a été réalisé dans le but de calculer les caractéristiques de propagation (constante de propagation, permittivité effective et diagramme de dispersion) en régime dispersif de diverses structures planaires micro-ondes à base de matériaux supraconducteurs HTS de caractère anisotrope, en configuration microstrip, coplanaire, et microstrip couplé Les films supraconducteurs sont déposés sur des substrats anisotropes ou isotropes. Les résultats ont été comparés aux résultats publiés et un bon accord a été trouvé, l'erreur relative moyenne ne dépasse pas 1 %. Notons que ces résultats ont été obtenus sur un ordinateur avec un processeur Core 2 Duo de 2.4 GHZ et de 2Go de RAM.

La fabrication de films supraconducteurs HTc de bonne qualité nécessite d'assurer une bonne adhérence au substrat, une couche tampon mince est ainsi utilisée permettant aussi de séparer le substrat et le film supraconducteur. La figure 10 donne la permittivité effective et le coefficient d'atténuation avec ou sans couche tampon. Cette couche est supposée être sans pertes avec une épaisseur $t_b=100 \mu\text{m}$ et une permittivité relative $\epsilon_b= 500$ à 77 K. Les résultats montrent que la permittivité effective a augmenté de 0,5% en présence de la couche tampon malgré la valeur élevée de permittivité relative de cette dernière. Les pertes du supraconducteur sont par contre sensiblement les mêmes.

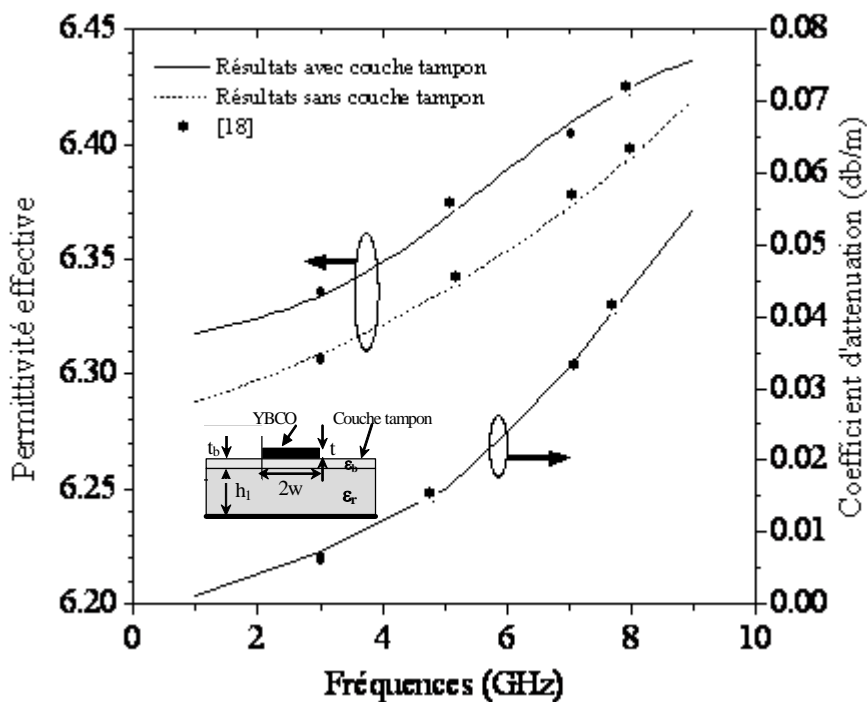


Figure 10 Permittivité effective et atténuation d'un microstrip supraconducteur YBCO avec et sans couche tampon ($w=160\mu\text{m}$, $t=0.3\mu\text{m}$, $h_1=500\mu\text{m}$, $\epsilon_r=10$, $t_b=0.01\mu\text{m}$, $\epsilon_b=500$, $\lambda_{L0}=0.2\mu\text{m}$, $\sigma(77^\circ\text{K})=1\text{S}/\mu\text{m}$, $T_c=93$, $T=77\text{K}$, $\lambda_c= 5 \lambda_{a,b}$)

Afin d'étudier l'effet de l'anisotropie des supraconducteurs HTc dans le cas du YBCO, deux lignes de dimensions différentes sont examinées. L'axe-c du film supraconducteur est supposé être parallèle à oy avec $\lambda_c = 5 \lambda_{a,b}$.

En pratique, la réalisation de la ligne triplaque pose un problème complexe en raison de la difficulté à maîtriser la croissance épitaxiale des diélectriques en multicouche sur YBCO. Une façon alternative consiste à plaquer une couche diélectrique à l'aide d'une presse à ressort sur un microstrip à YBCO [18]. Cette technique, introduit néanmoins, un gap d'air dont l'effet sur les caractéristiques de propagation a été examiné.

Les résultats de la permittivité effective et du coefficient d'atténuation sont donnés sur la figure 5.1 pour $t = 0.3$ et $1 \mu\text{m}$ avec et sans gap d'air. On constate ainsi que la permittivité effective ϵ_{eff} diminue légèrement. Vu que l'inductance cinétique d'un stripline supraconducteur augmente lorsque l'épaisseur du ruban diminue [19], ϵ_{eff} s'avère relativement faible en comparaison au stripline supraconducteur mince. Toutefois, les deux striplines sans gap d'air présentent un ϵ_{eff} plus grand que ϵ_r ($\epsilon_r = 23,5$), illustrant l'effet de l'inductance cinétique pour ces géométries [20], [21]

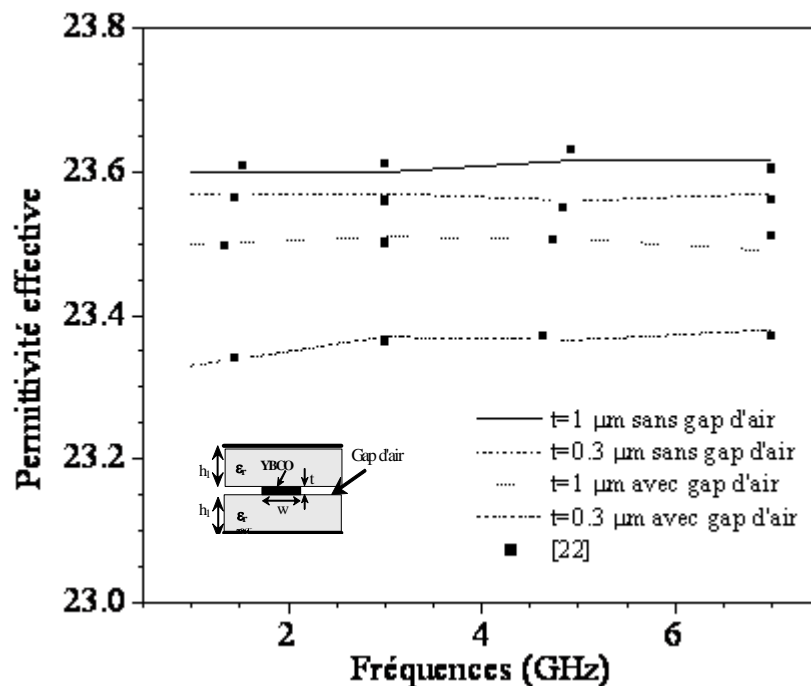


Figure 5.1 Permittivité effective et atténuation d'un microstrip supraconducteur YBCO avec et sans gap d'air ($w=120\mu\text{m}$, $\epsilon_r = 23.5$, $\lambda_{L0}=0.2\mu\text{m}$, $T_c=93 \text{ K}$, $T=77\text{K}$, $h_1=500\mu\text{m}$, $\sigma(77^\circ\text{K})=1\text{S}/\mu\text{m}$, $\lambda_c = 5\lambda_{a,b}$)

Les figures 5.2 a-b, illustrent la variation de ϵ_{eff} et du coefficient de qualité Q pour deux géométries de circuits CPW en niobium. Une erreur relative de 4% a été constatée vis-à-vis des valeurs expérimentales rapportées dans [22]. Ceci est dû au fait que les mesures réalisées sur des résonateurs ont négligé les effets de bord. Notons qu'en augmentant la largeur w de 2,5 fois, le coefficient de qualité Q est 2 fois plus élevé pour $s=87.5\mu\text{m}$ que pour $s=35\mu\text{m}$. La différence dans les résultats de Q résulte de la variation de distribution de courant dans les bandes supraconductrices. Notons que tous les résultats sont conformes aux résultats théoriques publiés [22]-[23], l'erreur ne dépasse guère 0.5%.

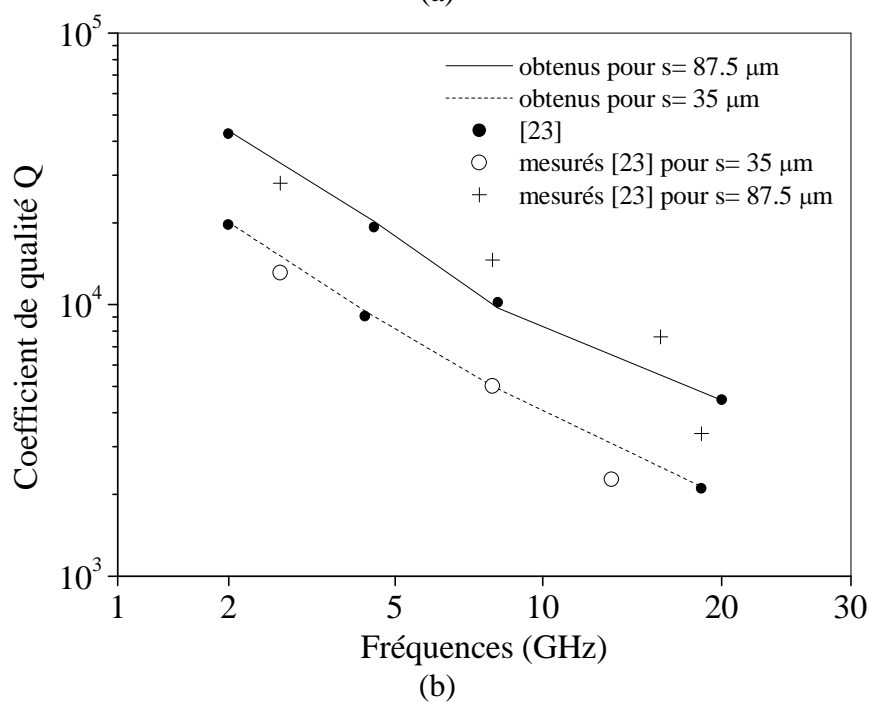
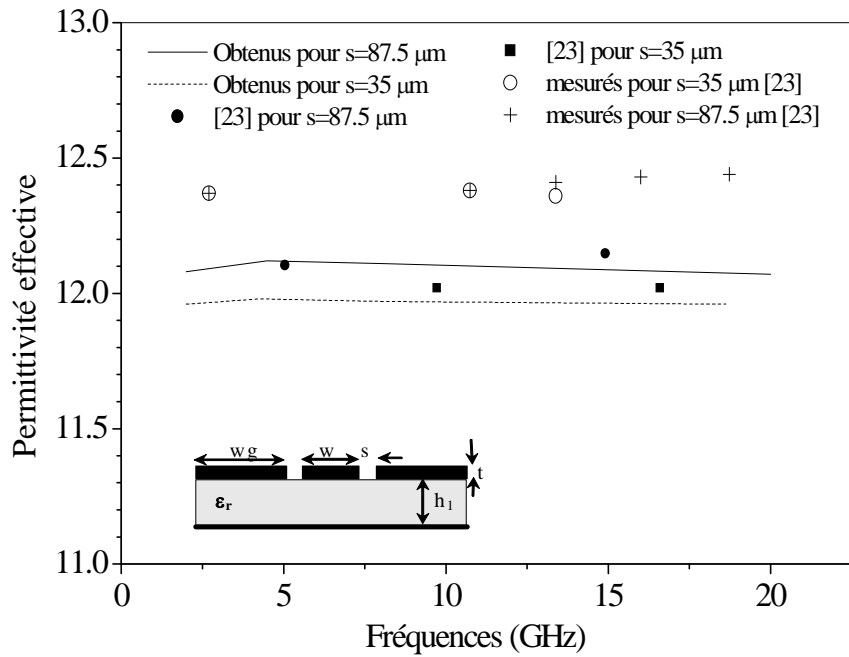


Figure 5.2 Permittivité effective et coefficient de qualité Q d'un CPW supraconducteur en niobium ($w=20\mu\text{m}$, $t=0.4\mu\text{m}$, $w_g=600\mu\text{m}$, $T_c=9.25\text{K}$, $T=4\text{K}$, $\lambda_{L0}=0.07\mu\text{m}$, $\sigma(T_c)=3000\text{S}/\mu\text{m}$)

D'autres résultats numériques sont présentés pour un microstrip supraconducteur YBCO ($T_c=90\text{ K}$ et $\lambda_L = 0.15\ \mu\text{m}$) blindé sur un substrat de saphir ($\epsilon_{rx} = \epsilon_{rz}=9,4$, $\epsilon_{ry}=11.6$). La figure 5.3 donne la variation du coefficient d'atténuation normalisé (α/β_0) et de la constante de phase normalisée (β/β_0) en fonction de la fréquence. β_0 étant la constante de phase dans le vide. Un changement important est ainsi constaté pour deux fréquences de travail différentes 10 GHz et 20 GHz. L'atténuation s'avère importante avec une tendance vers une augmentation rapide avec la fréquence. L'erreur relative moyenne ne dépasse pas 1% par rapport à [24].

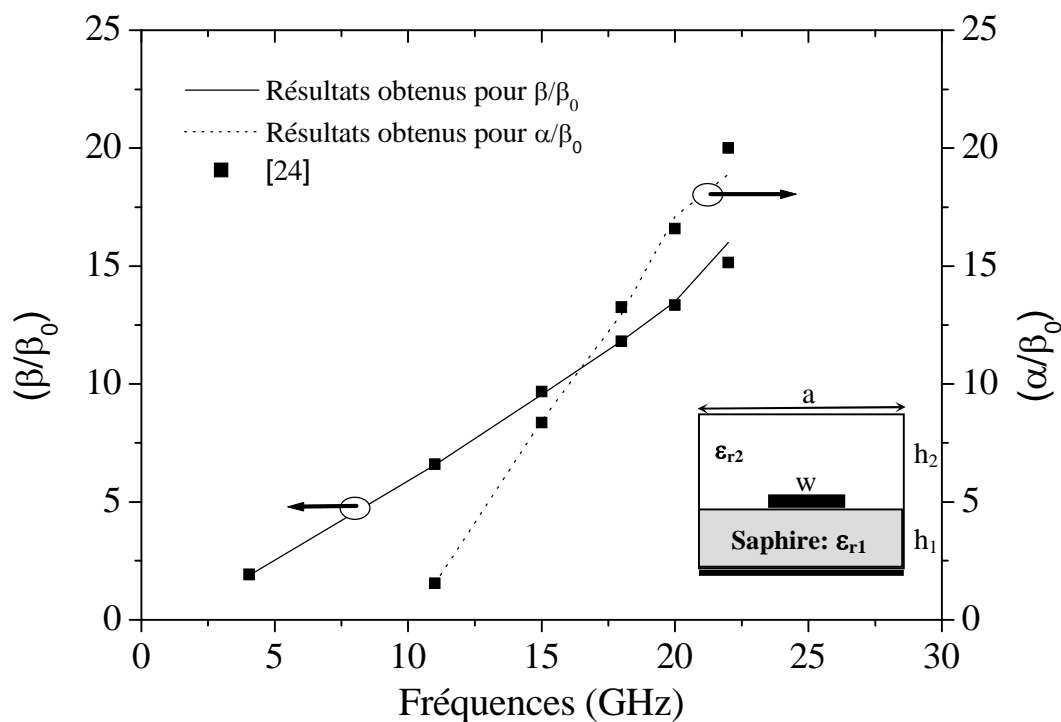


Figure 5.3 Dispersion d'un microstrip supraconducteur sur substrat anisotrope (saphire) avec $\epsilon_{r1} = \text{diag}(9.4, 11.6, 9.4)$ avec un revêtement supérieur faiblement anisotrope $\epsilon_{r2} = \text{diag}(1.2, 1, 1.2)$ ($a=6.35\text{mm}$, $w=1.27\text{ mm}$, $h_1=1.27\text{ mm}$, $h_2= 2.54\text{ mm}$).

Le circuit étudié sur la figure 5.4 est une ligne coplanaire CPW à trois couches. Le substrat utilisé étant le niobure de Lithium (LNO). Il s'agit d'un matériau anisotrope, ses propriétés ne sont pas les même dans toutes les directions ($\epsilon_{rx}=\epsilon_{rz} =43$, $\epsilon_{ry} =28$).

La figure 5.4 montre l'influence de l'épaisseur de la couche tampon (couche 2) qui est soit le YSZ (Ytria-stabilized zirconia, $\epsilon_r= 29$) ou bien le SiO_2 ($\epsilon_r= 3.8$); sur l'indice de propagation ($n_m=\beta/\beta_0$). Cette couche permet d'assurer au film supraconducteur YBCO une croissance épitaxiale proportionnée par rapport au substrat diélectrique qui est ici le

LNO [25]. Elle est aussi nécessaire pour obtenir moins de pertes et une augmentation de la bande passante.

Nous constatons ainsi que l'épaisseur ' t_b ' de la couche tampon YSZ n'influe pas beaucoup sur l'index de propagation effectif n_m ; par contre pour le SiO_2 ce dernier n_m décroît rapidement avec l'augmentation de l'épaisseur du SiO_2 .

C'est ainsi que pour la couche diélectrique YSZ ($\epsilon_r= 3.8$), l'épaisseur a été fixée au minimum à $0.8 \mu\text{m}$ pour obtenir une variation importante de l'indice de propagation n_m . Les résultats numériques obtenus sont en bon accord avec ceux publiés [25], l'erreur relative moyenne ne dépasse pas 1%.

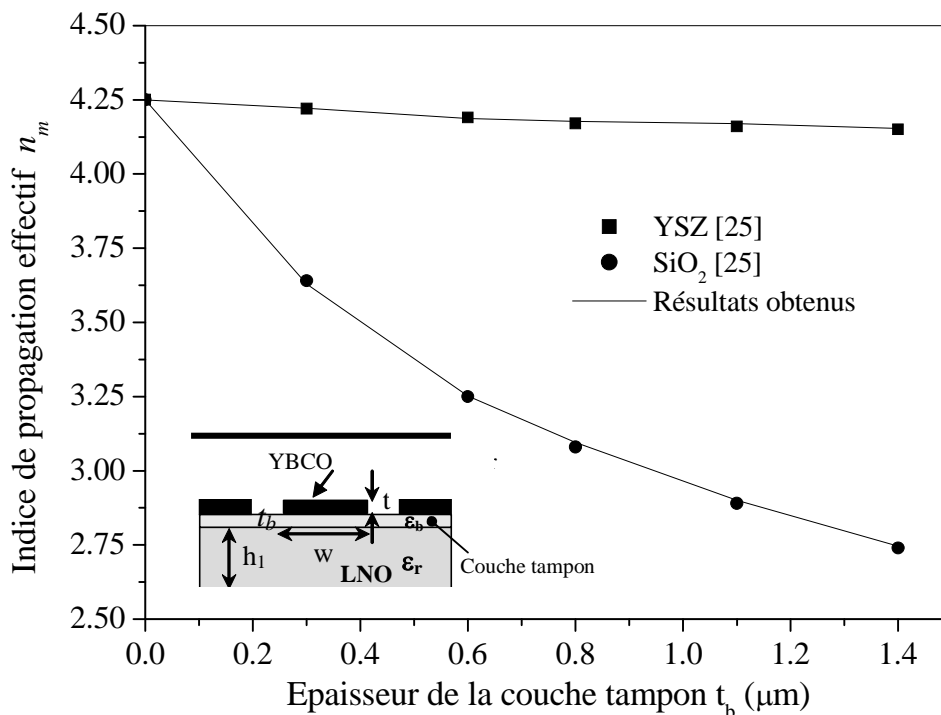


Figure 5.4 Dépendance de l'indice de propagation n_m en fonction de l'épaisseur de la couche diélectrique tampon (SiO_2 ou YSZ). ($w=100\mu\text{m}$ $a=40w$, $s=50\mu\text{m}$, $t=0.2\mu\text{m}$, $h_1=1\text{mm}$, $h_3=20\text{mm}$, $\epsilon_b=29$, $\lambda_{L0}=0.2\mu\text{m}$, $\sigma_n=1\text{S}/\mu\text{m}$, $T_c=92 \text{ K}$, $T=77\text{K}$, $f=20 \text{ GHz}$)

Sur les figures 5.5 et 5.6, nous avons représenté les courbes de variation du coefficient d'atténuation pour la cas des lignes à rubans couplés (coplanar strips CPS) et de la ligne coplanaire CPW à supraconducteurs anisotropes YBCO ($\lambda_{L0y} = 5\lambda_{L0x}$) en fonction de la fréquence. La température de travail $T=77\text{K}^\circ$ et la température critique est $T_C=90\text{K}^\circ$.

Nous constatons ainsi que les pertes sont beaucoup moins faibles pour le supraconducteur YBCO (à 77 K), par rapport au cuivre. Ceci démontre l'importance d'utiliser des rubans à supraconducteur.

Ces résultats ont été comparés aux résultats théoriques et expérimentaux publiés [26] et un bon accord a été constaté.

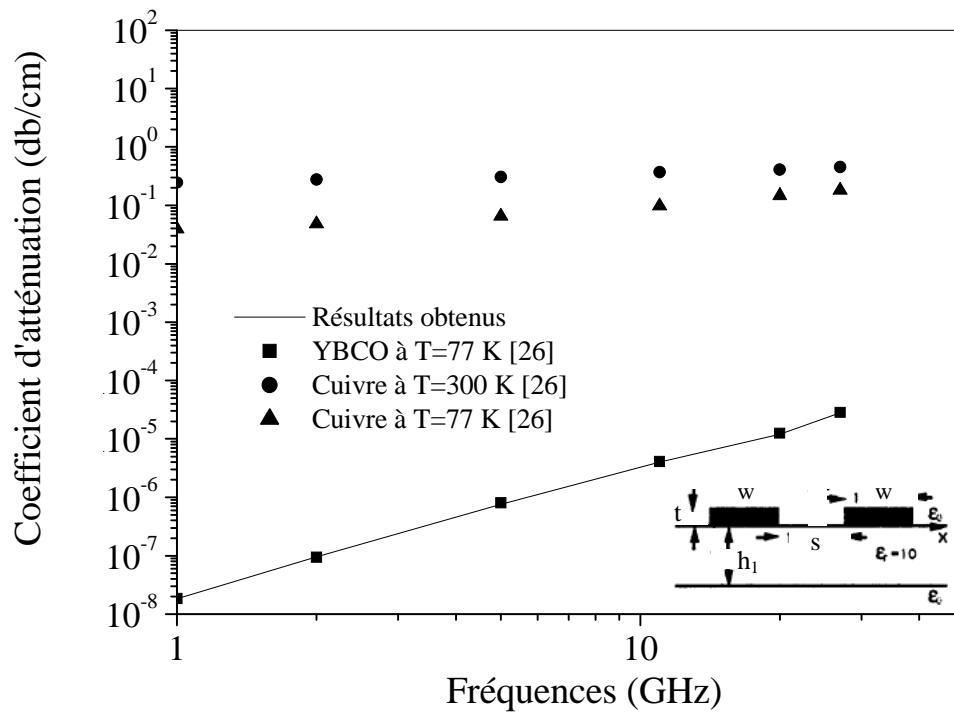


Figure 5.5 Variation du coefficient d'atténuation d'une ligne à rubans couplés (CPS) à supraconducteurs de type YBCO
 ($T_c=90$ K, $T=77$ K, $\sigma_n = 0.1$ S/ μ m, $\lambda_{L0}= 0.167$ μ m, $\lambda_c=5$ $\lambda_{a,b}$, $w=s=100$ μ m, $h_1=1$ mm)

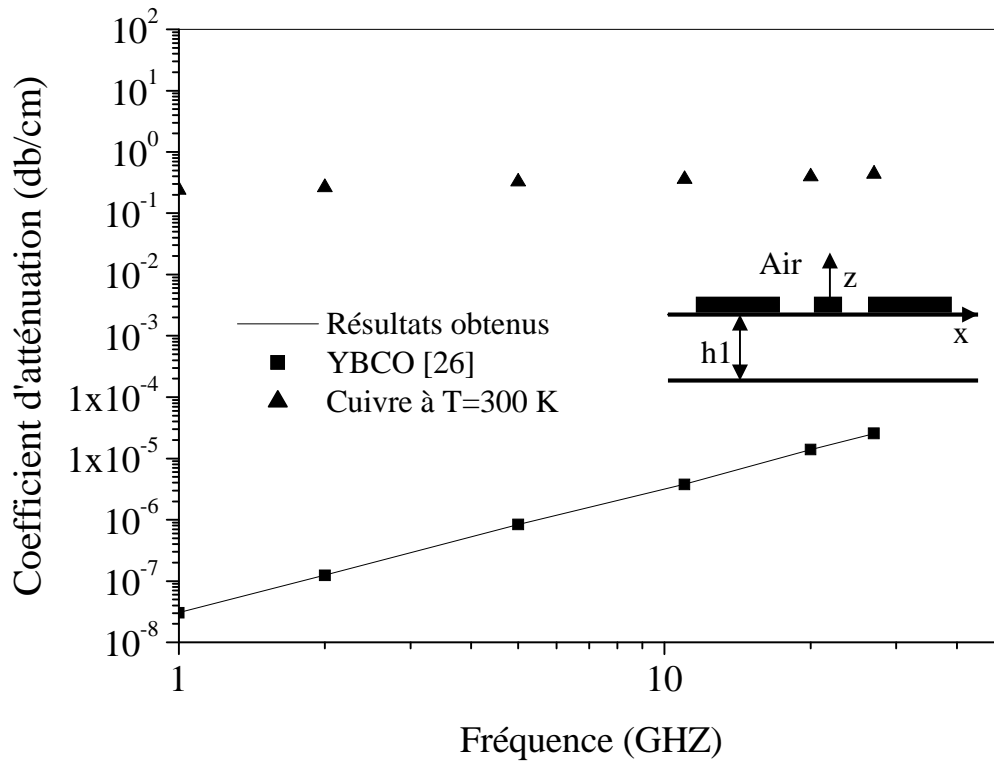


Figure 5.6 Variation du coefficient d'atténuation d'une ligne coplanaire (CPW) à supraconducteurs anisotropes de type YBCO

5.6. Etude de la convergence

Cette étude vise à vérifier le bon choix du nombre de fonctions de base nécessaires pour assurer la convergence avec le minimum de temps de calcul. La structure analysée est la même que celle étudiée en fig. 5.4. La figure 5.7 montre la variation de l'indice de propagation n_m en fonction du nombre de fonctions de base pour plusieurs largeurs de lignes $w = 60\mu\text{m}$, $80\mu\text{m}$ et $100\mu\text{m}$.

Nous constatons que la convergence est atteinte à partir de 6 fonctions de base. De plus, il semble que la largeur w n'influe pas sur le niveau de convergence.

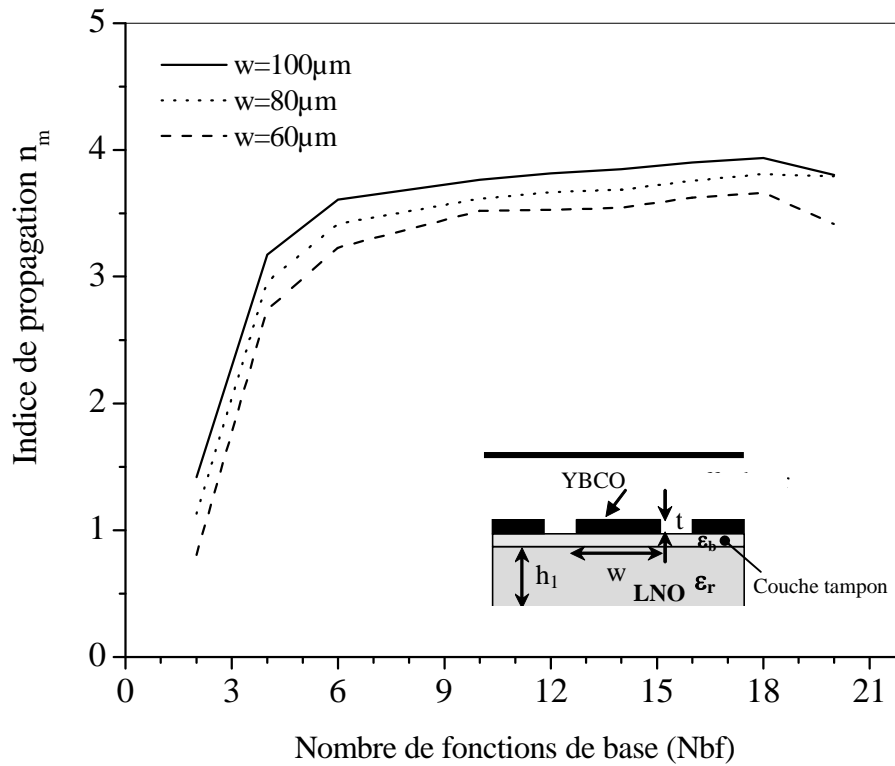


Figure 5.7 Dépendance de l'indice de propagation n_m en fonction du nombre de fonctions de base ($w=100\mu\text{m}$ $a=40w$, $s=50\mu\text{m}$, $t=0.2\mu\text{m}$, $h_1=1\text{mm}$, $h_3=20\text{mm}$, $\epsilon_b=29$, $\lambda_{L0}=0.2\mu\text{m}$, $\sigma_n=1\text{S}/\mu\text{m}$, $T_c=92\text{ K}$, $T=77\text{K}$, $f=10\text{ GHz}$)

La figure 5.8 montre l'influence du nombre de termes de Fourier sur la convergence. Il paraît clairement que la convergence est atteinte à partir de 50 termes de Fourier.

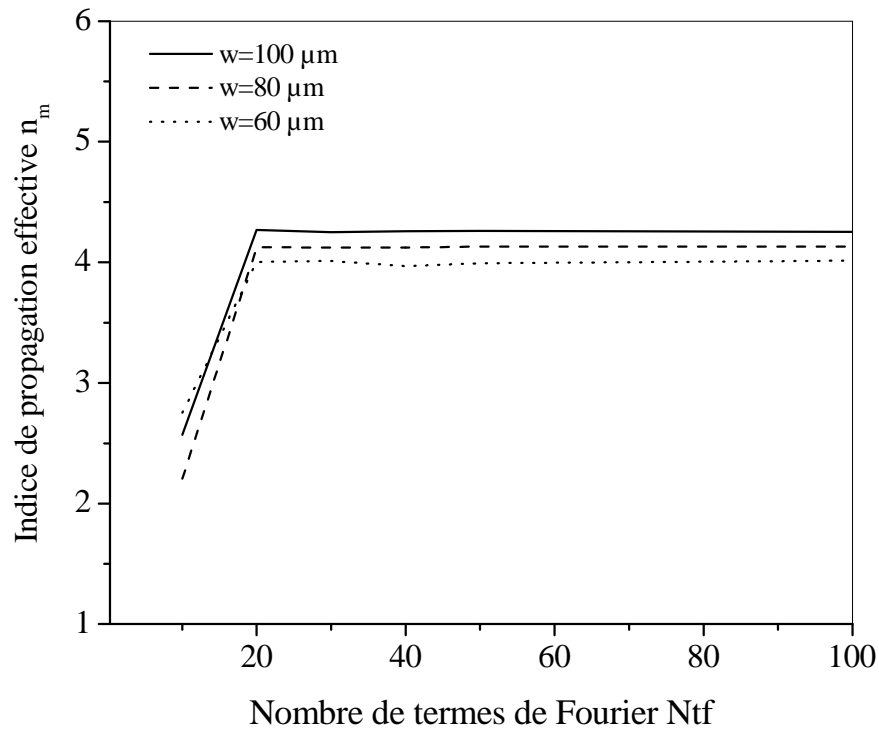


Figure 5.8 Dépendance de l'indice de propagation n_m en fonction du nombre de terme de Fourier ($w=100\mu\text{m}$ $a=40w$, $s=50\mu\text{m}$, $t=0.2\mu\text{m}$, $h_1=1\text{mm}$, $h_3=20\text{mm}$, $\epsilon_b=29$, $\lambda_{L0}=0.2\mu\text{m}$, $\sigma_n=1\text{S}/\mu\text{m}$, $T_c=92\text{ K}$, $T=77\text{K}$, $f=10\text{ GHz}$)

5.7. Temps de calcul

Le temps de calcul est un facteur important qui rend compte de l'efficacité d'un programme de calcul, sa rentabilité et sa fiabilité. Nous proposons de ce qui suit d'étudier les principaux paramètres pouvant influencer sur le temps de calcul pour tester l'efficacité de ce programme. Pour cela, on reprend ici l'exemple de ligne coplanaire à 3 couches.

Les figures 5.9 et 5.10 donnent respectivement l'évolution du temps de calcul vis-à-vis des fonctions de base (Nbf) et des termes spectraux (Ntf). On remarque ainsi que les termes de calcul augmentent exponentiellement en fonction du nombre de fonctions de bases et linéairement en fonction du nombre de termes de Fourier.

Ainsi la taille de la matrice influe considérablement sur le temps de calcul. Le choix d'une matrice de grande taille et d'un nombre de termes spectraux (Ntf) élevé influencerait négativement sur le temps de calcul d'où la nécessité de faire un compromis entre la capacité mémoire, la précision et les temps d'exécution. Les temps de calcul obtenus ont été jugés très acceptables.

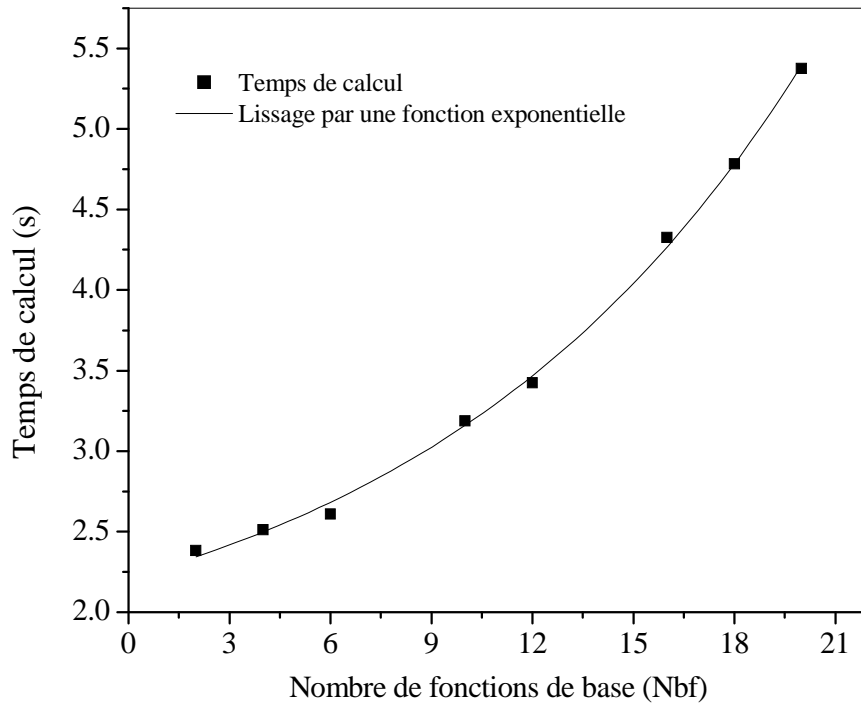


Figure 5.9 Variation du temps de calcul en fonction du nombre de fonctions de base ($w=100\mu\text{m}$ $a=40w$, $s=50\mu\text{m}$, $t=0.2\mu\text{m}$, $h_1=1\text{mm}$, $h_3=20\text{mm}$, $\epsilon_b=29$, $\lambda_{L0}=0.2\mu\text{m}$, $\sigma_n=1\text{S}/\mu\text{m}$, $T_c=92\text{ K}$, $T=77\text{K}$, $f=10\text{ GHz}$)

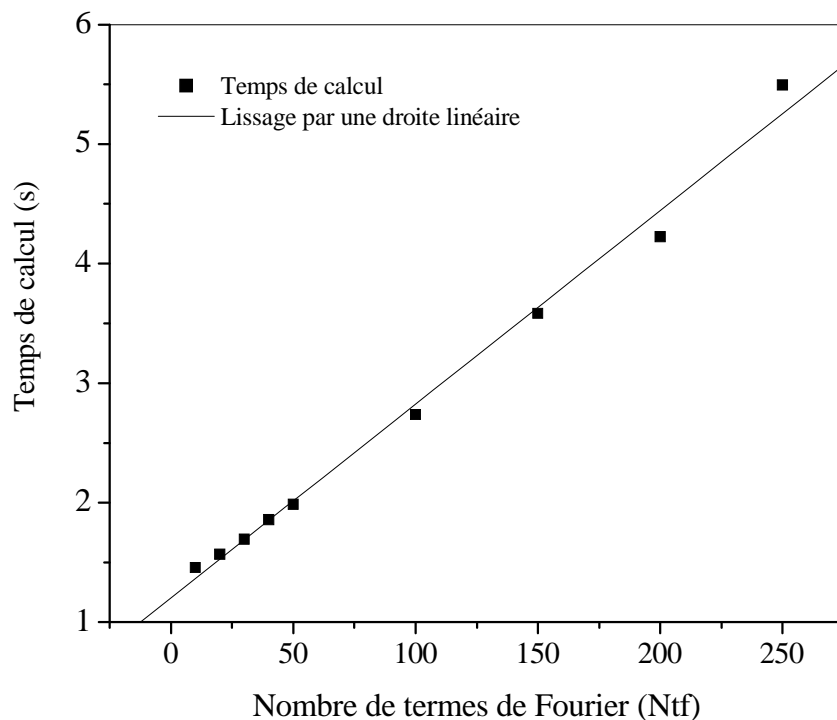


Figure 5.10 Variation du temps de calcul en fonction du nombre de termes de Fourier ($w=100\mu\text{m}$ $a=40w$, $s=50\mu\text{m}$, $t=0.2\mu\text{m}$, $h_1=1\text{mm}$, $h_3=20\text{mm}$, $\epsilon_b=29$, $\lambda_{L0}=0.2\mu\text{m}$, $\sigma_n=1\text{S}/\mu\text{m}$, $T_c=92\text{ K}$, $T=77\text{K}$, $f=10\text{ GHz}$)

5.8. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, les résultats numériques obtenus par le programme de calcul. Ces résultats sont en accord avec ceux publiés dans la littérature. On peut donc dire que l'utilisation de la méthode d'approche dans le domaine spectral s'est avéré être un choix judicieux. Nous avons vu aussi l'influence majeure introduite par la supraconductivité sur les circuits planaires multicouche anisotrope et les avantages énormes qu'ils induisent.

Dans ce mémoire, nous avons analysé les circuits planaires anisotropes à supraconducteurs HTC en configuration multicouche à l'aide de la méthode d'approche dans le domaine spectral présente de nombreux avantages par rapport aux autres méthodes qui travaillent dans le domaine spatial conventionnel:

- Un calcul plus aisé des fonctions de Green dans le domaine spectral contrairement au domaine spatial où leur forme est parfois impossible à identifier ;
- La nature physique du champ électromagnétique est directement incorporée dans le processus de résolution via le choix des fonctions de base ;
- La précision peut être systématiquement améliorée en augmentant la taille de la matrice associée au système d'équations linéaires.

L'anisotropie et la multitude de couches du substrat ont joué un rôle très important dans le processus de modélisation. La prise en compte du caractère supraconducteur a nécessité l'apport de nombreuses modifications à cette méthode. Leurs avantages ont permis d'améliorer les paramètres caractéristiques des circuits étudiés en diminuant l'atténuation, la distorsion et la dispersion.

Les résultats numériques obtenus ont bien montré cette contribution à l'analyse des différents circuits micro-ondes à supraconducteurs SHTC. Ces résultats sont en accord avec les résultats publiés.

De nombreuses perspectives peuvent être dégagées par ce mémoire :

- Etude des discontinuités dans les circuits à supraconducteurs.
- Prise en compte de l'asymétrie des rubans conducteurs
- Etendre l'étude pour inclure des couches à métamatériaux
- Application de la supraconductivité aux antennes à travers l'analyse du gain, de la directivité et de l'impédance d'entrée.

Bibliographie

- [1] Onnes, HK, "The resistance of pure mercury at helium temperatures", *Commun. Phy. Lab. Univ.Leiden*, No.120B, (28Apr. 1911).
- [2] J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* 108, 1175 (1957).
- [3] J.G. Bednorz, and K.A. Muller, *Zeitschrift fur Physik B* 64, 189 (1986).
- [4] V.I. Ginzburg L.D. Landau, "To the theory of superconductivity", *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 20 1064 (1950).
- [5] F. London, H. London, *Proc. Roy. Soc. A* 149, 71 (1935).
- [6] Abrikosov, A.A., *Sov. Phys. JETP* 5, 1174 (1957).
- [7] H. Meissner, and R. Ochsenfeld,, *Naturwiss* 21, 787 (1933).
- [8] Philippe Monod, *Matériaux supraconducteurs*. Ecole Normale Supérieure.
- [9] *Science* 29, June 2001 : Vol. 292. , pp 2462-2465
- [10] *Science* 12, January 2001 : Vol. 291., No. 5502, pp 280-282.
- [11] www.lucant.com/press/0301/010308.bla.html.
- [12] C.J. Gorter, and H.B.G. Casimir, *Phys. Z.* 35, 963 (1934).
- [13] P.Hartmann, *Handbook of Applied Superconductivity*, Iop 1998, pp 43-54.
- [14] W.Weingarten, *Handbook of Applied Superconductivity*, Iop 1998, pp 1371-1407.
- [15] Zweiacker, *Application des supraconducteurs*, Ed. EPFL, Lausanne. 1993
- [16] R. Hansen, "Comments on Superconducting superdirectional antenna arrays," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 26, Issue 6, Nov. 1978, pp. 891-891.
- [17] M. L. Tounsi, R. Touhami, A. Khodja, and M. C. E. Yagoub, "Analysis of the mixed coupling in bilateral microwave circuits including anisotropy for MICs and MMICs applications," *Progress In Electromagnetics Research*, Vol. 62, 281-315, 2006.
- [18] W. G. Lyons *et al.*, "High-T, superconductive microwave filters," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 27, 1991, pp. 2537-2539.
- [19] D. M. Sheen *et al.*, "Current distribution, resistance, and inductance for superconducting strip transmission lines," *IEEE Trans. Applied Superconduct.*, Vol. 1, No 6, 1991 pp. 108-115.
- [20] J. M. Pond, J. H. Claassen, and W. L. Carter, "Kinetic inductance microstrip delay lines," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 23, pp. No 3, 1987, 903-906..
- [21] J. M. Pond, J. H. Claassen, and W. L. Carter, "Measurements and modeling of kinetic inductance microstrip delay lines," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 35, No 12, 1987 pp. 1256-1262.
- [22] L. H. Lee, S. M. Ali, and W. G. Lyons, "Full wave characterization of high-T superconducting transmission lines," *IEEE Trans. Applied Superconduct.*, vol. 2, N° 6, pp. 49-57, 1992.

[23] L. H. Lee *et al*, "Analysis of superconducting transmission-line structures for passive microwave device applications," *IEEE Trans. Applied Superconduct.*, Vol. 3, N° 3, 1993 pp. 2782-2787.

[24] G.P.Srivastava, V. Mathew and A.G. Vedeshwar, "Attenuation and dispersion in hts microstrip line with anisotropic overlay", *Microwave Conference, Asia Pacific*, Nov 1999, Singapore, vol. 2, pp. 474 - 476.

[25] E. Rozan *et al*. "Design and fabrication of coplanar ybco structures on lithium niobate substrates", *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, Vol. 9, No. 2, June 1999

[26] L. H. Lee, G. Arjavahngamt, S. M. AX, and T. R. Dingerf, "Hybrid-mode Analysis of Coplanar Strips and Coplanar Waveguides", *Conference on Electrical Performance of Electronic Packaging*, Arizona, USA, 22-24 Apr. 1992, pp. 22 – 24

[27] H. Takagi, B. Batlogg, H. L. Kao, J. Kwo, R. J. Cava, J. J. Krajewski and W. F. Peck Jr.,

Phys. Rev. Lett. 69, 2975 (1992) ; B. Bucher, P. Steiner, J. Karpinski, E. Kaldis and P.

Wachter, *Phys. Rev. Lett.* 70, 2012 (1993) ; T. Ito, K. Takenaka et S. Uchida, *Phys. Rev. Lett.*

70, 3995 (1993) ; A. Carrington, D. J. C. Walker, A. P. Mackenzie and J. R. Cooper, *Phys.*

Rev. B 48 13051 (1993) ; H. Y. Hwang, B. Batlogg, H. Takagi, H. L. Kao, J. Kwo, R. J.

Cava, J. J. Krajewski and W. F. Peck Jr., *Phys. Rev. Lett.* 72, 2636 (1994).

[28] G. Matthaei, L. Young and E. Jones, "Microwave filters, Impedance Matching Networks and Coupling structures", Norwood, MA: Artech House.

Communications internationales publiées dans le cadre de ce mémoire

1. M.L. Tounsi, A. Belguidoum, M.C.E. Yagoub, " Hybrid-mode analysis of anisotropic high-Tc superconducting passive microwave circuits on lossy anisotropic dielectric layers", *Saudi International Electronics, Communications and Photonics Conference, Riyadh*, Saudi Arabia, 23-26 April 2011, *ISBN 978-1-4577-0068-2*.

2. M.L. Tounsi, A. Belguidoum, M.C.E. Yagoub, "Analyse de la dispersion dans les circuits passifs hyperfréquences à supraconducteurs HTc anisotropes en configuration multicouche", *17èmes Journées Nationales Micro-ondes*, Brest, France, 18-20 Mai 2011.

ANNEXE A**LES SUPRACONDUCTEURS ATYPIQUES****A.1. Les Fullerènes**

Comme si les céramiques supraconductrices n'étaient pas assez étranges, d'autres supraconducteurs encore plus mystérieux ont été découverts. L'un d'eux est basé sur des composés centrés autour des "Fullerènes". Le nom "Fullerène" vient de l'inventeur du dôme géodésique Fuller Buckminster (structure à la forme de ballon de football). Les Fullerènes (aussi appelés "buckyball") existent à un niveau moléculaire où 60 atomes de carbone se joignent pour constituer une sphère.

Lorsque une fullerène est dopée avec un ou plusieurs métaux alcalins, elle devient une "fulleride" et supraconductrice. Les fullerides supraconductrices ont une température critique comprise entre 8° K pour $\text{Na}_2\text{Rb}_{0.5}\text{Cs}_{0.5}\text{C}_{60}$ jusqu'à 40K pour Cs_3C_{60} . D'autres températures critiques encore supérieures ont été obtenues pour des C_{60} en utilisant des transistors à effet de champs pour perfectionner la densité des porteurs de charges. Une température critique de 117° K a été trouvée par des chercheurs des laboratoires Bell lorsque chaque molécule est dynamiquement ajustée autour de 3 à 3.5 trous par C_{60} après dopage au CHBr_3 (un trou est un espace manquant chargé positivement en surface.).

De plus grandes structures de Fullerènes non sphériques ont été découvertes. Ainsi en avril 2001, des chercheurs chinois de l'université de Hong-Kong ont trouvé de la supraconductivité unidimensionnelle dans des nanotubes de carbone aux alentours de 15° K. Par ailleurs, en février 2006, des physiciens japonais ont mis en évidence que des nanotubes de carbone non-alignés, étaient supraconducteurs à des températures supérieures à 12° K.

Composé	$\text{K}_3 \text{C}_{60}$	$\text{Rb}_3 \text{C}_{60}$	$\text{Cs}_2 \text{Rb C}_{60}$	$\text{Cs}_3 \text{C}_{60}$
T_c	19k	29k	33k	40k (15kBar)

Tab A.1 Températures critiques de quelques fullerènes C60 avec des métaux alcalins

A.2. Les Supraconducteurs organiques

Les supraconducteurs "organiques" font partie de la famille des conducteurs organiques qui incluent : les sels moléculaires, les polymères et les systèmes de carbone pure (incluant les nanotubes de carbone et les composés C_{60}). Les sels moléculaires sont des molécules organiques de grande taille possédant des propriétés de supraconductivité à des

températures très basses. Pour cette raison ils sont souvent appelés supraconducteurs “moléculaires”. Leur existence a été mise en évidence en théorie en 1964 par Bill Little de l’université de Stanford.

Mais le premier supraconducteur organique appelé $(TMTSF)_2PF_6$ n’a pas été synthétisé avant l’année 1980 par le chercheur Danois Klaus Bechgaard de l’université de Copenhague avec une équipe de chercheurs français. Ainsi près de 50 supraconducteurs organiques ont été découverts avec des températures critiques s’étendant de $0.4^\circ K$ à environ $12^\circ K$, à pression ambiante. Comme la température critique de ce composé se trouve dans l’intervalle des supraconducteurs I, les ingénieurs doivent encore leur trouver une application pratique.

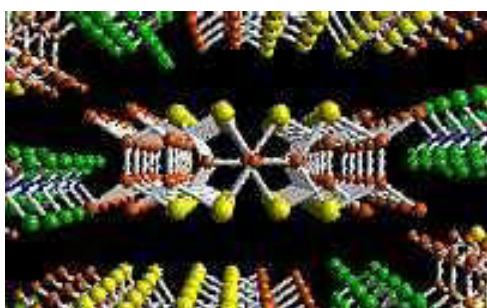


Fig A.1. $(TMTSF)_2PF_6$ premier supraconducteur organique découvert

Néanmoins, leurs propriétés inhabituelles les ont mis au centre d’intenses recherches. Ces propriétés incluent une magnétorésistance élevée, une oscillation rapide, un effet Hall et plus encore. Au début de l’année 1997, une équipe a trouvé que le $(TMTSF)_2PF_6$ peut résister à un champ magnétique d’une intensité de 6 Teslas. Habituellement, un champ de cette intensité détruirait la supraconductivité dans un matériau.

Les supraconducteurs organiques sont composés d’un donneur d’électron (la molécule organique plane) et d’un accepteur d’électron (un anion non organique).

A.3. Les borocarbures

Découverts en 1993 par Bob Cava et les Labs Bell, les “Borocarbides” sont parmi les moins compris des supraconducteurs. On a longtemps supposé que des supraconducteurs ne pouvaient pas être formés de métaux ferromagnétiques comme le fer, le cobalt ou le nickel. C’est l’équivalent que de vouloir mélanger de l’eau et de l’huile. Mais dans certains borocarbures, tout se passe comme s’il existait “un savon” qui vise à réduire les deux adversaires (carbone et bore).

Les sites cristallographiques des ions magnétiques sont censés être isolés du chemin de conduction, ceci permet aux paires de Cooper de faire un détour autour de ces ions. De plus,

s'ils sont combinés à des éléments aux propriétés magnétiques inhabituelles (comme le holmium) un phénomène "re-entrant" peut être mis en évidence. Sous la température critique, il y a une température discordante, où le matériau reprend un état "non-supraconducteur".

A.4. Les Fermions lourds

Les "Fermions lourds" sont des composés qui contiennent des éléments rares comme le Cérium (Ce) ou l'Ytterbium (Yb) ou des actinides comme Uranium (U). Leurs électrons de conduction sont plusieurs fois plus grands que celle d'un électron "normal" ce qui en fait des candidats difficiles au rôle de supraconducteurs. Mais à température cryogénique, certains de ces matériaux s'ordonnent magnétiquement, d'autres offrent un aspect paramagnétique, et certains montrent de la supraconductivité. La recherche suggère que les paires de cuivre s'organisent dans les fermions lourds grâce à l'interaction magnétique due à la rotation des électrons plutôt qu'à leur vibration.

La première observation de la supraconductivité dans un système de fermions lourds a été faite par E. Bucher en 1973 dans le composé UBe_{13} qu'on avait attribuée au filament d'Uranium. La supraconductivité n'a été reconnue dans un fermion lourd qu'en 1979 lorsque le Dr Frank Steglich de l'institut Max Planck avait aussi constaté cette propriété dans le $CeCu_2Si_2$. Leurs températures de transition étant dans l'intervalle de celui des supraconducteurs de Type I, leur intérêt est resté limité.

Composés	T_c	m^*/m
$U Be_{13}$	8.8	192
$U Pt_3$	5	187
$Ce Cu_2 Si$	0.7	220

Tab A.2. Températures critiques et masse effectives m^* de quelques alliages fermions lourds

A.5. Les Ruthenates

Au milieu des années 1990, il a été découvert que les plans de cuivre-oxygène n'étaient pas les seuls supports à la supraconductivité dans les perovskites (supraconducteurs Type II). En 1994, des physiciens d'IBM Zurich et de l'université d'Hiroshima ont collaboré pour étudier les plans atomiques ruthenium-oxygène à cause de leurs similitudes avec ceux du cuivre-oxygène. C'est ainsi que Y. Maeno et ses collègues ont trouvé que le composé Sr_2RuO_4 montre de la supraconductivité à 1.5K. Bien qu'étant à une température très basse pour un supraconducteur perovskite, cela a montré un nouveau potentiel dans la recherche dans ce qui est connu sous le nom de "Ruthenates".

Annexe B**ANISOTROPIE DES SUPRACONDUCTEURS TYPE 2**

La dérivation des équations à deux fluides en appliquant la loi de mouvement du Newton aux Paire de Cooper supraconductrice et un électron normal (simple) :

$$m \frac{d\vec{V}_s}{dt} = -e\vec{E} \quad (\text{B.1})$$

$$m \frac{d\vec{V}_n}{dt} = -e\vec{E} - m \frac{\vec{V}_n}{\tau} \quad (\text{B.2})$$

\vec{V}_s et \vec{V}_n sont les vitesses de la paire, supraconducteur et l'électron normal respectivement. La différence entre les deux équations est le terme $(-m \frac{\vec{V}_n}{\tau})$, dû aux pertes visqueux due à la dispersion de l'électron normal.

Les densités de courant correspondent aux deux fluides sont :

$$\vec{J}_s = -n_s e \vec{V}_s \quad (\text{B.3})$$

$$\vec{J}_n = -n_n e \vec{V}_n \quad (\text{B.4})$$

Avec n_s et n_n les densités du pair et l'électron normal respectivement. La densité du courant total \vec{J} peut être associée avec le champ électrique \vec{E} et la supraconductivité effective en appliquant la loi d'Ohm suivante :

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{J}_n = \sigma_{sc} \vec{E} \quad (\text{B.5})$$

Pour trouver la conductivité effective σ en régime sinusoïdal, on remplace \vec{V}_s et \vec{V}_n de (B.3) et (B.4) dans (B.1) et (B.2), on assume que la variation du temps est sinusoïdal $e^{j\omega t}$. On aura :

$$m \left(-\frac{1}{n_s e}\right) (j\omega \vec{J}_s) = -e\vec{E} \quad (\text{B.6})$$

$$m \left(-\frac{1}{n_n e}\right) (j\omega \vec{J}_n) = -e\vec{E} - m \left(-\frac{1}{n_n e} \frac{\vec{J}_n}{\tau}\right) \quad (\text{B.7})$$

$$\vec{J}_s = -j \left(\frac{n_s e^2}{m\omega} \right) \vec{E} \quad (\text{B.8})$$

$$\vec{J}_n = - \left(\frac{n_n e^2 \tau (1 - j\omega\tau)}{m\omega(1 + \omega^2 \tau^2)} \right) \vec{E} \quad (\text{B.9})$$

On remplace les équations(B.8) et (B.9) dans (B.5) on aura :

$$\vec{J} = \sigma_{sc} \vec{E} = \left[- \left(\frac{n_n e^2 \tau (1 - j\omega\tau)}{m\omega(1 + \omega^2 \tau^2)} \right) - j \left(\frac{n_s e^2}{m\omega} \right) \right] \vec{E}$$

$$\sigma_{sc} = \sigma_n - j\sigma_s \quad (\text{B.10})$$

Par identification :

$$\sigma_n = \frac{n_n e^2 \tau}{m(1 + \omega^2 \tau^2)} \quad (\text{B.11})$$

$$\sigma_s = \frac{n_s e^2}{\omega m} + \frac{n_n e^2}{\omega m} \cdot \frac{\omega^2 \tau^2}{(1 + \omega^2 \tau^2)} \quad (\text{B.12})$$

Dans le cas des supraconducteurs anisotrope, σ_n et σ_s seront des tenseurs :

avec

$$\sigma_n = \begin{bmatrix} \sigma_{n,a} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{n,b} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{n,a} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

et

$$\sigma_s = \begin{bmatrix} \sigma_{s,a} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{s,b} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{s,a} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

La longueur de pénétration de London λ sera un tenseur.

$$\lambda_L = \begin{bmatrix} \lambda_{L,a} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{L,b} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{L,a} \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Le fluide du conducteur normal obéi à la loi d'Ohm suivante :

$$J_n = \sigma_n E \quad (\text{B.16})$$

Et le fluide supraconducteur est obtenu par l'équation de London suivante : (voir la démonstration dans le chapitre 2 , paragraphe (2.2.1)).

$$\frac{\partial J_s}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} E \quad (\text{B.17})$$

De (B.17) on tire J_s :

$$J_s = -\frac{j}{\omega \mu_0 \lambda_L^2} E \quad (\text{B.18})$$

$$J = J_n + J_s = \sigma_{sc} E = \left(\sigma_n - \frac{j}{\omega \mu_0 \lambda_L^2} \right) E \quad (\text{B.19})$$

Donc

$$\sigma_{sc} = \left(\sigma_n - \frac{j}{\omega \mu_0 \lambda_L^2} \right)$$

C'est-à-dire

$$\sigma_{sc} = \begin{bmatrix} \sigma_{n,a} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{n,b} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{n,a} \end{bmatrix} - j \left(\frac{1}{\omega \mu_0} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_a^2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

ANNEXE C

**CALCUL DES COMPOSANTES TANGENTIELLES DU CHAMP EM EN
FONCTION DES COMPOSANTES NORMALES (\tilde{E}_y, \tilde{H}_y)**

C.1. Dans un milieu diélectrique

Après le passage au domaine spectral, en utilisant la TF, les systèmes (4.6), et (4.7) deviennent :

$$\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} + j\beta \tilde{E}_y = -j\omega\mu_x \tilde{H}_x \quad (\text{C.1.a})$$

$$j\alpha_n \tilde{E}_z - j\beta \tilde{E}_x = -j\omega\mu_y \tilde{H}_y \quad (\text{C.1.b})$$

$$j\alpha_n \tilde{E}_y + \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} = j\omega\mu_x \tilde{H}_z \quad (\text{C.1.c})$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} + j\beta \tilde{H}_y = j\omega\epsilon_x^* \tilde{E}_x \quad (\text{C.2.a})$$

$$j\alpha_n \tilde{H}_z - j\beta \tilde{H}_x = j\omega\epsilon_y^* \tilde{E}_y \quad (\text{C.2.b})$$

$$j\alpha_n \tilde{H}_y + \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} = -j\omega\epsilon_x^* \tilde{E}_z \quad (\text{C.2.c})$$

En utilisant les équations :

$$\text{div } \vec{D} = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{C.4})$$

Les équations (C.3) et (C.4) donnent respectivement :

$$\epsilon_x^* \frac{\partial E_x}{\partial x} + \epsilon_y^* \frac{\partial E_y}{\partial y} + \epsilon_x^* \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{C.5.a})$$

$$\mu_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial H_y}{\partial y} + \mu_x \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{C.5.b})$$

Le passage vers le domaine spectral permet d'écrire:

$$-j\alpha_n \epsilon_x^* \tilde{E}_x + \epsilon_y^* \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} - j\beta \epsilon_x^* \tilde{E}_z = 0 \quad (\text{C.6.a})$$

$$-j\alpha_n \mu_x \tilde{H}_x + \mu_y \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - j\beta \mu_x \tilde{H}_z = 0 \quad (\text{C.6.b})$$

Puis en combinant les équations (C.2.b) et (C.6.b), il vient:

$$\tilde{H}_x = -j \frac{\mu_y}{\mu_x} \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2 + \beta^2} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - \frac{\beta \varepsilon_y^* \omega}{\alpha_n^2 + \beta^2} \tilde{E}_y \quad (C.7)$$

De plus :

$$\tilde{H}_z = -j \frac{\mu_y}{\mu_x} \frac{\beta}{\alpha_n^2 + \beta^2} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + \frac{\alpha_n \varepsilon_y^* \omega}{\alpha_n^2 + \beta^2} \tilde{E}_y \quad (C.8)$$

De même, en combinant (C.1.b) et (C.6.a), nous obtenons :

$$\tilde{E}_x = -j \frac{\varepsilon_y^*}{\varepsilon_x^*} \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2 + \beta^2} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + \frac{\beta \mu_y \omega}{\alpha_n^2 + \beta^2} \tilde{H}_y \quad (C.9)$$

De la même manière, on obtient :

$$\tilde{E}_z = -j \frac{\varepsilon_y^*}{\varepsilon_x^*} \frac{\beta}{\alpha_n^2 + \beta^2} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} - \frac{\alpha_n \mu_y \omega}{\alpha_n^2 + \beta^2} \tilde{H}_y \quad (C.10)$$

C.2. Détermination des équations de propagation des champs normaux E_y et H_y

C.2.1. Cas des modes LSM

En appliquant les équations de Maxwell dans le domaine spectral, nous pouvons établir les équations de propagation des champs normaux \tilde{E}_y et \tilde{H}_y d'après l'équation (C.6.a). En substituant \tilde{E}_z dans (C.1.a), il vient :

$$j\beta \tilde{E}_y - \frac{\alpha_n}{\beta} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} - j \frac{\varepsilon_y^*}{\varepsilon_x^*} \frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial y^2} = -j\omega \mu_x \tilde{H}_x \quad (C.11)$$

En remplaçant ensuite $\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y}$ d'après (C.1.c), il vient:

$$(\alpha_n^2 + \beta^2) \tilde{E}_y - \frac{\varepsilon_y^*}{\varepsilon_x^*} \frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial y^2} - \omega \mu_x \alpha_n \tilde{H}_z = -\omega \beta \mu_x \tilde{H}_x \quad (C.12)$$

De la même façon, si on substitue \tilde{H}_z , par sa valeur d'après (C.2.b) dans (C.12) et après simplification, on obtient l'équation d'onde de \tilde{E}_y :

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial y^2} - (\gamma_i^{LSM})^2 \tilde{E}_y = 0 \quad (C.13)$$

avec
$$(\gamma_i^{LSM})^2 = \frac{\epsilon_{x(i)}^*}{\epsilon_{y(i)}^*} \left[\alpha_n^2 + \beta^2 - \omega^2 \epsilon_{y(i)}^* \mu_{x(i)} \right]$$

C.2.2. Cas des modes LSM

En substituant \tilde{H}_z d'après (C.6.b) dans (C.2.a), nous obtenons :

$$j\beta \tilde{H}_y - \frac{\alpha_n}{\beta} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} - j \frac{\mu_y}{\beta \mu_x} \frac{\partial^2 \tilde{H}_y}{\partial y^2} = j\omega \epsilon_x^* \tilde{E}_x \quad (C.14)$$

En remplaçant ensuite $\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y}$ d'après (C.2.c), il vient alors :

$$(\alpha_n^2 + \beta^2) \tilde{H}_y - \frac{\mu_y}{\mu_x} \frac{\partial^2 \tilde{H}_y}{\partial y^2} + \omega \epsilon_x^* \alpha_n \tilde{E}_z = \omega \beta \epsilon_x^* \tilde{E}_x \quad (C.15)$$

De la même façon, si on substitue \tilde{E}_z , par sa valeur d'après (C.1.b) dans (C.15) et après simplifications, on obtient l'équation d'onde de \tilde{H}_y :

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}_y}{\partial y^2} - (\gamma_i^{LSE})^2 \tilde{H}_y = 0 \quad (C.16)$$

avec :
$$(\gamma_i^{LSM})^2 = \frac{\mu_{x(i)}}{\mu_{y(i)}} \left[\alpha_n^2 + \beta^2 - \omega^2 \epsilon_{x(i)}^* \mu_{y(i)} \right]$$

C.3. Dans un milieu diélectrique-supraconducteur

Dans le milieu diélectrique-supraconducteur, les équations de Maxwell restent les mêmes sauf pour le rotationnel de \vec{H} . Après le passage au domaine spectral le système d'équations (B.2) devient :

$$\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} + j\beta \tilde{H}_y = (j\omega \varepsilon_x^* + \sigma_x) \tilde{E}_x \quad (\text{C.17.a})$$

$$j\alpha_n \tilde{H}_z - j\beta \tilde{H}_x = (j\omega \varepsilon_y^* + \sigma_y) \tilde{E}_y \quad (\text{C.17.b})$$

$$j\alpha_n \tilde{H}_y + \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} = -(j\omega \varepsilon_x^* + \sigma_x) \tilde{E}_z \quad (\text{C.17.c})$$

En combinant les équations (C.17.b) et (C.6.b), on aura :

$$\tilde{H}_x = -j \frac{\mu_y}{\mu_x} \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2 + \beta^2} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + \frac{\beta}{\alpha_n^2 + \beta^2} (j\sigma_x - \varepsilon_y^* \omega) \tilde{E}_y \quad (\text{C.18})$$

De plus :

$$\tilde{H}_z = -j \frac{\mu_y}{\mu_x} \frac{\beta}{\alpha_n^2 + \beta^2} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2 + \beta^2} (j\sigma_y - \varepsilon_y^* \omega) \tilde{E}_y \quad (\text{C.19})$$

Les équations (C.9) et (C.10) de \tilde{E}_x et \tilde{E}_z reste les même dans le milieu diélectrique-supraconducteur.

C.3.1. Détermination des équations de propagation des champs normaux E_y et H_y

C.3.1.1 Cas des modes LSM

En appliquant les équations de Maxwell dans le domaine spectral, on peut établir les équations de propagations des champs normaux \tilde{E}_y et \tilde{H}_y d'après l'équation (C.6.a). En substituant \tilde{E}_z dans (C.1.a), on obtient :

$$j\beta \tilde{E}_y - \frac{\alpha_n}{\beta} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} - j \frac{\varepsilon_y^*}{\varepsilon_x^*} \frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial y^2} = -j\omega \mu_x \tilde{H}_x \quad (\text{C.20})$$

En remplaçant ensuite $\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y}$ d'après l'équation (C.1.c), il vient alors :

$$(\alpha_n^2 + \beta^2) \tilde{E}_y - \frac{\varepsilon_y^*}{\varepsilon_x^*} \frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial y^2} - \omega \mu_x \alpha_n \tilde{H}_z = -\omega \beta \mu_x \tilde{H}_x \quad (\text{C.21})$$

De la même façon, si on substitue \tilde{H}_z , par sa valeur d'après (C.17.b) dans (C.12) et après simplifications, on obtient l'équation d'onde de \tilde{E}_y :

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial y^2} - (\gamma_i^{LSM})^2 \tilde{E}_y = 0 \quad (C.22)$$

avec
$$(\gamma_i^{LSM})^2 = \frac{\varepsilon_{x(i)}^*}{\varepsilon_{y(i)}^*} \left[\alpha_n^2 + \beta^2 - \omega^2 \varepsilon_{y(i)}^* \mu_{x(i)} + j\omega \mu_{x(i)} \sigma_{yi} \right]$$

C.3.1.2. Cas des modes LSM

En substituant \tilde{H}_z d'après (C.6.b) dans (C.2.a), on obtient :

$$j\beta \tilde{H}_y - \frac{\alpha_n}{\beta} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} - j \frac{\mu_y}{\beta \mu_x} \frac{\partial^2 \tilde{H}_y}{\partial y^2} = j\omega \varepsilon_x^* \tilde{E}_x \quad (C.23)$$

En remplaçant ensuite $\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y}$ d'après l'équation (C.17.c), il vient alors :

$$(\alpha_n^2 + \beta^2) \tilde{H}_y - \frac{\mu_y}{\mu_x} \frac{\partial^2 \tilde{H}_y}{\partial y^2} + \omega \varepsilon_x^* \alpha_n \tilde{E}_z = \beta(\omega \varepsilon_x^* - j\sigma_x) \tilde{E}_x \quad (C.24)$$

De la même façon, si on substitue \tilde{E}_z , par sa valeur d'après (C.1.b) dans (C.15) et après simplifications, il vient:

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}_y}{\partial y^2} - (\gamma_i^{LSE})^2 \tilde{H}_y = 0 \quad (C.25)$$

avec :
$$(\gamma_i^{LSE})^2 = \frac{\mu_{x(i)}}{\mu_{y(i)}} \left[\alpha_n^2 + \beta^2 - \omega^2 \varepsilon_{x(i)}^* \mu_{y(i)} + j\omega \mu_{y(i)} \sigma_{xi} \right]$$

ANNEXE D**CALCUL DES ADMITTANCES RAMENEES AUX INTERFACES****D.1. Cas des couches situées au-dessous du plan de métallisation****D.1.1. Mode LSE**

Dans la couche d'indice i les composantes du champ EM s'écrivent :

$$\tilde{H}_{yi}(\alpha_n, y) = A_i^h \sinh(\gamma_i^{LSE} (y - H_{i-1})) + B_i^h \cosh(\gamma_i^{LSE} (y - H_{i-1})) \quad (D.1)$$

$$\tilde{E}_{ui} = -\frac{\omega\mu}{\rho} y_i \left[A_i^h \sinh(\gamma_i^{LSE} (y - H_{i-1})) + B_i^h \cosh(\gamma_i^{LSE} (y - H_{i-1})) \right] \quad (D.2)$$

$$\tilde{H}_{vi}(\alpha_n, y) = -\frac{j}{\rho} \frac{\mu_{yi}}{\mu_{xi}} \gamma_i^{LSE} \left[A_i^h \cosh(\gamma_i^{LSE} (y - H_{i-1})) + B_i^h \sinh(\gamma_i^{LSE} (y - H_{i-1})) \right] \quad (D.3)$$

On définit l'admittance équivalente vue au plan $y=H_i$ par :

$$Y_i^h = -\frac{\tilde{H}_{vi}}{\tilde{E}_{ui}} = Y_i^{LSE} \frac{A_i^h \cosh(\gamma_i^{LSE} .h_i) + B_i^h \sinh(\gamma_i^{LSE} .h_i)}{A_i^h \sinh(\gamma_i^{LSE} .h_i) + B_i^h \cosh(\gamma_i^{LSE} .h_i)} \quad (D.4)$$

Dans la couche $(i+1)$ les composantes du champ EM s'écrivent :

$$\tilde{H}_{yi+1}(\alpha_n, y) = A_{i+1}^h \sinh(\gamma_{i+1}^{LSE} (y - H_i)) + B_{i+1}^h \cosh(\gamma_{i+1}^{LSE} (y - H_i)) \quad (D.5)$$

$$\tilde{E}_{ui+1} = -\frac{\omega\mu}{\rho} y_{i+1} \left[A_{i+1}^h \sinh(\gamma_{i+1}^{LSE} (y - H_i)) + B_{i+1}^h \cosh(\gamma_{i+1}^{LSE} (y - H_i)) \right] \quad (D.6)$$

$$\tilde{H}_{vi+1}(\alpha_n, y) = -\frac{j}{\rho} \frac{\mu_{yi+1}}{\mu_{xi+1}} \gamma_{i+1}^{LSE} \left[A_{i+1}^h \cosh(\gamma_{i+1}^{LSE} (y - H_i)) + B_{i+1}^h \sinh(\gamma_{i+1}^{LSE} (y - H_i)) \right] \quad (D.7)$$

Les lois de continuité du champ EM imposent qu'on ait l'interface $y=H_i$:

$$\tilde{E}_{ui+1}(\alpha_n, H_i) = \tilde{E}_{ui}(\alpha_n, H_i)$$

$$\tilde{H}_{vi+1}(\alpha_n, H_i) = \tilde{H}_{vi}(\alpha_n, H_i)$$

Ceci implique que :

$$A_{i+1}^h = \frac{\mu_{yi}}{\mu_{xi}} \frac{\mu_{xi+1}}{\mu_{yi+1}} \frac{\gamma_i^{LSE}}{\gamma_{i+1}^{LSE}} \cdot [A_i^h \cosh(\gamma_i^{LSE} \cdot h_i) + B_i^h \sinh(\gamma_i^{LSE} \cdot h_i)]$$

$$B_{i+1}^h = \frac{\mu_{yi}}{\mu_{yi+1}} \cdot [A_i^h \cosh(\gamma_i^{LSE} \cdot h_i) + B_i^h \sinh(\gamma_i^{LSE} \cdot h_i)]$$

L'admittance équivalente vue au plan $y=H_{i+1}$:

$$Y_{i+1}^h = - \frac{\tilde{H}_{v(i+1)}}{\tilde{E}_{u(i+1)}} \quad (D.8)$$

$$Y_{i+1}^h = C_{i+1}^h \left[\frac{K_1 \cdot C_1 [\cosh(\gamma_{i+1}^{LSE} \cdot h_{i+1})] + \frac{\mu_{yi}}{\mu_{yi+1}} \cdot C_2 [\sinh(\gamma_{i+1}^{LSE} \cdot h_{i+1})]}{K_1 \cdot C_1 [\sinh(\gamma_{i+1}^{LSE} \cdot h_{i+1})] + \frac{\mu_{yi}}{\mu_{yi+1}} \cdot C_2 [\cosh(\gamma_{i+1}^{LSE} \cdot h_{i+1})]} \right] \quad (D.9)$$

avec :

$$C_1 = [A_i^h \cosh(\gamma_i^{LSE} \cdot h_i) + B_i^h \sinh(\gamma_i^{LSE} \cdot h_i)]$$

$$C_2 = [A_i^h \sinh(\gamma_i^{LSE} \cdot h_i) + B_i^h \cosh(\gamma_i^{LSE} \cdot h_i)]$$

$$C_{i+1}^h = \frac{\gamma_{i+1}^{LSE}}{j\omega\mu_{i+1}}$$

$$K_1 = \frac{\mu_{yi}}{\mu_{xi}} \frac{\mu_{xi+1}}{\mu_{yi+1}} \frac{\gamma_i^{LSE}}{\gamma_{i+1}^{LSE}}$$

D'où, l'on tire :

$$Y_{i+1}^h = - \frac{\tilde{H}_{v(i+1)}}{\tilde{E}_{u(i+1)}} = Y_{i+1}^{LSE} \frac{Y_{i+1}^{LSE} + Y_i^h \coth(\gamma_{i+1}^{LSE} h_{i+1})}{Y_i^h + Y_{i+1}^{LSE} \coth(\gamma_{i+1}^{LSE} h_{i+1})} \quad (D.10)$$

D.1.2.Mode LSM

Dans la couche (i) les composantes du champ EM s'écrivent :

$$\tilde{E}_{yi}(\alpha_n, y) = A_i^e \sinh(\gamma_i^{LSM} (y - H_{i-1})) + B_i^e \cosh(\gamma_i^{LSM} (y - H_{i-1})) \quad (D.11)$$

$$\tilde{H}_{u_i} = \frac{1}{\rho} (\omega \varepsilon_{yi}^*) \left[A_i^e \cosh(\gamma_i^{LSM} (y - H_{i-1})) + B_i^e \sinh(\gamma_i^{LSM} (y - H_{i-1})) \right] \quad (D.12)$$

$$\tilde{E}_{v_i}(\alpha_n, y) = -\frac{j \varepsilon_{yi}^*}{\rho \varepsilon_{xi}^*} \gamma_i^{LSM} \left[A_i^e \sinh(\gamma_i^{LSE} (y - H_{i-1})) + B_i^e \cosh(\gamma_i^{LSM} (y - H_{i-1})) \right] \quad (D.13)$$

On définit l'admittance équivalente vue au plan $y=H_i$ par :

$$Y_i^e = \frac{\tilde{H}_{U_i}}{\tilde{E}_{V_i}} = Y_i^{LSM} \frac{A_i^e \cosh(\gamma_i^{LSM} .h_i) + B_i^e \sinh(\gamma_i^{LSM} .h_i)}{A_i^e \sinh(\gamma_i^{LSM} .h_i) + B_i^e \cosh(\gamma_i^{LSM} .h_i)} \quad (D.14)$$

Dans la couche (i+1) les composantes du champ EM s'écrivent :

$$\tilde{E}_{y_{i+1}}(\alpha_n, y) = A_{i+1}^e \sinh(\gamma_{i+1}^{LSM} (y - H_i)) + B_{i+1}^e \cosh(\gamma_{i+1}^{LSM} (y - H_i)) \quad (D.15)$$

$$\tilde{H}_{u_{i+1}} = \frac{1}{\rho} (\omega \varepsilon_{y_{i+1}}^*) \left[A_{i+1}^e \cosh(\gamma_{i+1}^{LSM} (y - H_i)) + B_{i+1}^e \sinh(\gamma_{i+1}^{LSM} (y - H_i)) \right] \quad (D.16)$$

$$\tilde{E}_{v_{i+1}}(\alpha_n, y) = -\frac{j \varepsilon_{y_{i+1}}^*}{\rho \varepsilon_{x_{i+1}}^*} \gamma_{i+1}^{LSM} \left[A_{i+1}^e \sinh(\gamma_{i+1}^{LSM} (y - H_i)) + B_{i+1}^e \cosh(\gamma_{i+1}^{LSM} (y - H_i)) \right] \quad (D.17)$$

Les lois de continuité du champ EM imposent qu'on ait l'interface $y=H_i$:

$$\tilde{E}_{v_{i+1}}(\alpha_n, H_i) = \tilde{E}_{v_i}(\alpha_n, H_i)$$

$$\tilde{H}_{u_{i+1}}(\alpha_n, H_i) = \tilde{H}_{u_i}(\alpha_n, H_i)$$

Ceci implique que :

$$A_{i+1}^e = \frac{\varepsilon_{yi}^*}{\varepsilon_{xi}^*} \frac{\varepsilon_{x_{i+1}}^*}{\varepsilon_{y_{i+1}}^*} \frac{\gamma_i^{LSM}}{\gamma_{i+1}^{LSM}} \left[A_i^e \cosh(\gamma_i^{LSM} .h_i) + B_i^e \sinh(\gamma_i^{LSM} .h_i) \right]$$

$$B_{i+1}^e = \frac{\varepsilon_{yi}^*}{\varepsilon_{y_{i+1}}^*} \left[A_i^e \cosh(\gamma_i^{LSM} .h_i) + B_i^e \sinh(\gamma_i^{LSM} .h_i) \right]$$

L'admittance équivalente vue au plan $y=H_{i+1}$:

$$Y_{i+1}^e = \frac{\tilde{H}_{U_{i+1}}}{\tilde{E}_{V_{i+1}}} \quad (D.18)$$

$$Y_{i+1}^e = C_{i+1}^e \left[\frac{K_2 \cdot C_3 \left[\cosh(\gamma_{i+1}^{LSM} \cdot h_{i+1}) \right] + \frac{\varepsilon_{yi}^*}{\varepsilon_{yi+1}^*} \cdot C_4 \left[\sinh(\gamma_{i+1}^{LSM} \cdot h_{i+1}) \right]}{K_2 \cdot C_3 \left[\sinh(\gamma_{i+1}^{LSM} \cdot h_{i+1}) \right] + \frac{\varepsilon_{yi}^*}{\varepsilon_{yi+1}^*} \cdot C_4 \left[\cosh(\gamma_{i+1}^{LSM} \cdot h_{i+1}) \right]} \right] \quad (D.19)$$

avec :

$$C_3 = \left[A_i^e \sinh(\gamma_i^{LSM} \cdot h_i) + B_i^e \cosh(\gamma_i^{LSM} \cdot h_i) \right]$$

$$C_4 = \left[A_i^e \cosh(\gamma_i^{LSM} \cdot h_i) + B_i^e \sinh(\gamma_i^{LSM} \cdot h_i) \right]$$

$$C_{i+1}^e = \frac{j\omega\varepsilon_{i+1}}{\gamma_{i+1}^{LSM}}$$

$$K_2 = \frac{\varepsilon_{yi}^* \varepsilon_{xi+1}^* \gamma_i^{LSM}}{\varepsilon_{xi}^* \varepsilon_{yi+1}^* \gamma_{i+1}^{LSM}}$$

D'où, l'on tire :

$$Y_{i+1}^e = -\frac{\tilde{H}_{u(i+1)}}{\tilde{E}_{v(i+1)}} = Y_{i+1}^{LSM} \frac{Y_{i+1}^{LSM} + Y_i^e \coth(\gamma_{i+1}^{LSM} h_{i+1})}{Y_i^e + Y_{i+1}^{LSM} \coth(\gamma_{i+1}^{LSM} h_{i+1})} \quad (D.20)$$

D.2. Cas des couches situées au-dessous du plan de métallisation

D.2.1. Mode LSE

Dans la couche (i) les composantes du champ EM s'écrivent :

$$\tilde{H}_{yi}(\alpha_n, y) = A_i^h \sinh(\gamma_i^{LSE} (H_i - y)) + B_i^h \cosh(\gamma_i^{LSE} (H_i - y)) \quad (D.21)$$

$$\tilde{E}_{ui} = -\frac{\omega\mu_{yi}}{\rho} \left[A_i^h \sinh(\gamma_i^{LSE} (H_i - y)) + B_i^h \cosh(\gamma_i^{LSE} (H_i - y)) \right] \quad (D.22)$$

$$\tilde{H}_{vi}(\alpha_n, y) = -\frac{j}{\rho} \frac{\mu_{yi}}{\mu_{xi}} \gamma_i^{LSE} \left[A_i^h \cosh(\gamma_i^{LSE} (H_i - y)) + B_i^h \sinh(\gamma_i^{LSE} (H_i - y)) \right] \quad (D.23)$$

On définit l'admittance équivalente vue au plan $y=H_i$ par :

$$Y_i^h = \frac{\tilde{H}_{yi}}{\tilde{E}_{ui}} = Y_i^{LSE} \frac{A_i^h \cosh(\gamma_i^{LSE} \cdot h_i) + B_i^h \sinh(\gamma_i^{LSE} \cdot h_i)}{A_i^h \sinh(\gamma_i^{LSE} \cdot h_i) + B_i^h \cosh(\gamma_i^{LSE} \cdot h_i)} \quad (D.24)$$

Dans la couche (i-1) les composantes du champ EM s'écrivent :

$$\tilde{H}_{yi-1}(\alpha_n, y) = A_{i-1}^h \sinh(\gamma_{i-1}^{LSE} (H_{i-1} - y)) + B_{i-1}^h \cosh(\gamma_{i-1}^{LSE} (H_{i-1} - y)) \quad (D.25)$$

$$\tilde{E}_{ui-1} = -\frac{\omega \mu_{yi-1}}{\rho} \left[A_{i-1}^h \sinh(\gamma_{i-1}^{LSE} (H_{i-1} - y)) + B_{i-1}^h \cosh(\gamma_{i-1}^{LSE} (H_{i-1} - y)) \right] \quad (D.26)$$

$$\tilde{H}_{vi-1}(\alpha_n, y) = -\frac{j \mu_{xi-1}}{\rho \mu_{xi-1}} \gamma_{i-1}^{LSE} \cdot \left[A_{i-1}^h \cosh(\gamma_{i-1}^{LSE} (H_{i-1} - y)) + B_{i-1}^h \sinh(\gamma_{i-1}^{LSE} (H_{i-1} - y)) \right] \quad (D.27)$$

Les lois de continuité du champ EM imposent qu'on ait l'interface $y=H_i$:

$$\tilde{E}_{ui-1}(\alpha_n, H_i) = \tilde{E}_{ui}(\alpha_n, H_i)$$

$$\tilde{H}_{vi-1}(\alpha_n, H_i) = \tilde{H}_{vi}(\alpha_n, H_i)$$

Ceci implique que :

$$A_{i-1}^h = \frac{\mu_{yi}}{\mu_{xi}} \frac{\mu_{xi-1}}{\mu_{yi-1}} \frac{\gamma_i^{LSE}}{\gamma_{i-1}^{LSE}} \cdot \left[A_i^h \cosh(\gamma_i^{LSE} \cdot h_i) + B_i^h \sinh(\gamma_i^{LSE} \cdot h_i) \right]$$

$$B_{i-1}^h = \frac{\mu_{yi}}{\mu_{yi-1}} \cdot \left[A_i^h \cosh(\gamma_i^{LSE} \cdot h_i) + B_i^h \sinh(\gamma_i^{LSE} \cdot h_i) \right]$$

L'admittance équivalente vue au plan $y=H_{i-1}$:

$$Y_{i-1}^h = \frac{\tilde{H}_{vi-1}}{\tilde{E}_{ui-1}} \quad (D.28)$$

$$Y_{i-1}^h = C_{i-1}^h \left[\frac{K_3 \cdot C_1 \left[\cosh(\gamma_{i-1}^{LSE} \cdot h_{i-1}) \right] + \frac{\mu_{yi}}{\mu_{yi-1}} \cdot C_2 \left[\sinh(\gamma_{i-1}^{LSE} \cdot h_{i-1}) \right]}{K_3 \cdot C_1 \left[\sinh(\gamma_{i-1}^{LSE} \cdot h_{i-1}) \right] + \frac{\mu_{yi}}{\mu_{yi-1}} \cdot C_2 \left[\cosh(\gamma_{i-1}^{LSE} \cdot h_{i-1}) \right]} \right] \quad (D.29)$$

avec :

$$C_{i-1}^h = \frac{\gamma_{i-1}^{LSE}}{j\omega\mu_{i-1}}$$

$$K_3 = \frac{\mu_{yi} \mu_{xi-1} \gamma_i^{LSE}}{\mu_{xi} \mu_{yi-1} \gamma_{i-1}^{LSE}}$$

D'où, l'on tire :

$$Y_{i-1}^h = \frac{\tilde{H}_{v(i+1)}}{\tilde{E}_{u(i+1)}} = Y_{i-1}^{LSE} \frac{Y_{i-1}^{LSE} + Y_i^h \coth(\gamma_{i-1}^{LSE} h_{i-1})}{Y_i^h + Y_{i-1}^{LSE} \coth(\gamma_{i-1}^{LSE} h_{i-1})} \quad (D.30)$$

D.2.2.Mode LSM

Dans la couche (i) les composantes du champ EM s'écrivent :

$$\tilde{E}_{yi}(\alpha_n, y) = A_i^e \sinh(\gamma_i^{LSM} (H_i - y)) + B_i^e \cosh(\gamma_i^{LSM} (H_i - y)) \quad (D.31)$$

$$\tilde{H}_{ui} = \frac{1}{\rho} (\omega\epsilon_{yi}^*) [A_i^e \cosh(\gamma_i^{LSM} (H_i - y)) + B_i^e \sinh(\gamma_i^{LSM} (H_i - y))] \quad (D.32)$$

$$\tilde{E}_{vi}(\alpha_n, y) = -\frac{j \epsilon_{yi}^*}{\rho \epsilon_{xi}^*} \gamma_i^{LSM} [A_i^e \sinh(\gamma_i^{LSM} (H_i - y)) + B_i^e \cosh(\gamma_i^{LSM} (H_i - y))] \quad (D.33)$$

On définit l'admittance équivalente vue au plan $y=H_i$ par :

$$Y_i^e = -\frac{\tilde{H}_{ui}}{\tilde{E}_{vi}} = Y_i^{LSM} \frac{A_i^e \cosh(\gamma_i^{LSM} .h_i) + B_i^e \sinh(\gamma_i^{LSM} .h_i)}{A_i^e \sinh(\gamma_i^{LSM} .h_i) + B_i^e \cosh(\gamma_i^{LSM} .h_i)} \quad (D.34)$$

Dans la couche (i-1) les composantes du champ EM s'écrivent :

$$\tilde{E}_{yi-1}(\alpha_n, y) = A_{i-1}^e \sinh(\gamma_{i-1}^{LSM} (H_i - y)) + B_{i-1}^e \cosh(\gamma_{i-1}^{LSM} (H_i - y)) \quad (D.35)$$

$$\tilde{H}_{ui-1} = \frac{1}{\rho} (\omega\epsilon_{yi-1}^*) [A_{i-1}^e \cosh(\gamma_{i-1}^{LSM} (H_i - y)) + B_{i-1}^e \sinh(\gamma_{i-1}^{LSM} (H_i - y))] \quad (D.36)$$

$$\tilde{E}_{vi-1}(\alpha_n, y) = -\frac{j \epsilon_{yi-1}^*}{\rho \epsilon_{xi-1}^*} \gamma_{i-1}^{LSM} [A_{i-1}^e \sinh(\gamma_{i-1}^{LSM} (H_i - y)) + B_{i-1}^e \cosh(\gamma_{i-1}^{LSM} (H_i - y))] \quad (D.37)$$

Les lois de continuité du champ EM imposent qu'on ait l'interface $y=H_i$:

$$\tilde{E}_{v_{i-1}}(\alpha_n, H_i) = \tilde{E}_{v_i}(\alpha_n, H_i)$$

$$\tilde{H}_{U_{i-1}}(\alpha_n, H_i) = \tilde{H}_{U_i}(\alpha_n, H_i)$$

Ceci implique que :

$$A_{i-1}^e = \frac{\varepsilon_{yi}^* \varepsilon_{xi-1}^* \gamma_i^{LSM}}{\varepsilon_{xi}^* \varepsilon_{yi-1}^* \gamma_{i-1}^{LSM}} \cdot [A_i^e \cosh(\gamma_i^{LSM} \cdot h_i) + B_i^e \sinh(\gamma_i^{LSM} \cdot h_i)]$$

$$B_{i-1}^e = \frac{\varepsilon_{yi}^*}{\varepsilon_{yi-1}^*} \cdot [A_i^e \cosh(\gamma_i^{LSM} \cdot h_i) + B_i^e \sinh(\gamma_i^{LSM} \cdot h_i)]$$

L'admittance équivalente vue au plan $y=H_{i-1}$:

$$Y_{i-1}^e = -\frac{\tilde{H}_{U_{i-1}}}{\tilde{E}_{V_{i+1}}} \quad (D.38)$$

$$Y_{i-1}^e = C_{i-1}^e \left[\frac{K_4 \cdot C_3 [\cosh(\gamma_{i-1}^{LSM} \cdot h_{i-1})] + \frac{\varepsilon_{yi}^*}{\varepsilon_{yi-1}^*} \cdot C_4 [\sinh(\gamma_{i-1}^{LSM} \cdot h_{i-1})]}{K_4 \cdot C_3 [\sinh(\gamma_{i-1}^{LSM} \cdot h_{i-1})] + \frac{\varepsilon_{yi}^*}{\varepsilon_{yi-1}^*} \cdot C_4 [\cosh(\gamma_{i-1}^{LSM} \cdot h_{i-1})]} \right] \quad (D.39)$$

avec :

$$C_{i-1}^e = \frac{j\omega\varepsilon_{i+1}}{\gamma_{i-1}^{LSM}}$$

$$K_4 = \frac{\varepsilon_{yi}^* \varepsilon_{xi-1}^* \gamma_i^{LSM}}{\varepsilon_{xi}^* \varepsilon_{yi-1}^* \gamma_{i-1}^{LSM}}$$

D'où, l'on tire :

$$Y_{i-1}^e = -\frac{\tilde{H}_{u(i-1)}}{\tilde{E}_{v(i-1)}} = Y_{i-1}^{LSM} \frac{Y_{i-1}^{LSM} + Y_i^e \coth(\gamma_{i-1}^{LSM} h_{i-1})}{Y_i^e + Y_{i-1}^{LSM} \coth(\gamma_{i-1}^{LSM} h_{i-1})} \quad (D.40)$$

ANNEXE E**Influence de l'épaisseur des rubans**

Pour tenir compte de l'épaisseur des rubans supraconducteurs, nous décomposerons ces derniers en rubans élémentaires d'épaisseurs infiniment petites comme illustré dans la figure E.1. Le champ électrique sur l'interface métallique provient de la contribution des tous les rubans élémentaires.

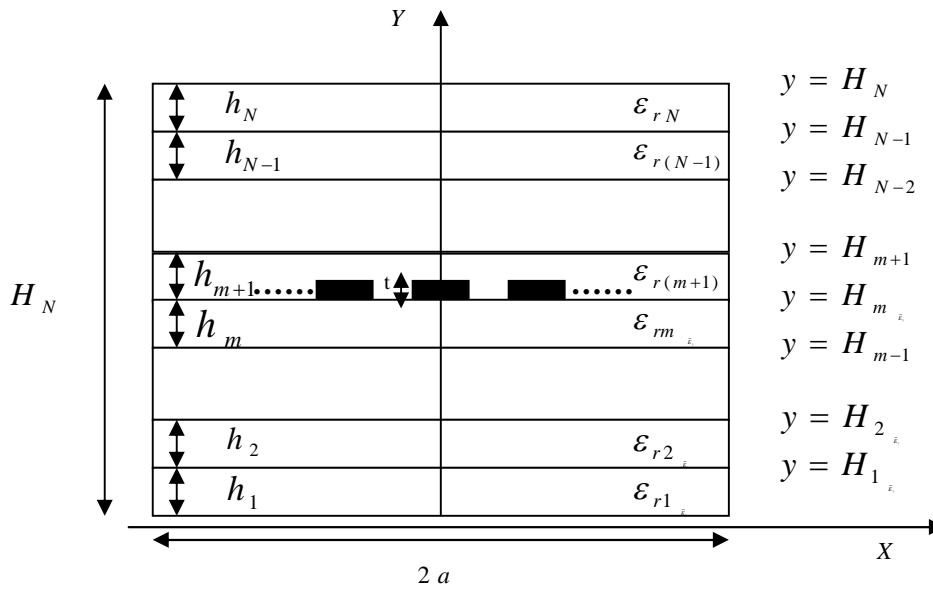


Figure E.1. Décomposition du ruban supraconducteur en rubans élémentaires

Considérant des rubans élémentaires d'épaisseur négligeable dy situés à une distance y_t au dessus de l'interface métallisée.

Pour déterminer le champ créé par tous les rubans élémentaires, il faut connaître la distribution de la densité de courant selon y . Les champs électriques E_x et E_z créés par un ruban d'épaisseur t s'obtiennent par la contribution de tous les rubans élémentaire dy produisant un courant infinitésimal dI .

Dans le domaine de Fourier, dI s'exprime comme suit :

$$dI(\alpha_n, y) = j(\alpha_n, y) dy = J(\alpha_n) \cdot f(y) \cdot dy \quad (\text{E.1})$$

$f(y)$ désigne la distribution de la densité de courant suivant y , définie entre $(y=0)$ et $(y=t)$.
 t : étant l'épaisseur du ruban. Cette fonction de distribution est normalisée telle que :

$$\int_0^t f(y) dy = 1 \quad (\text{E.2})$$

A partir des relations (E.1) et (E.2), on détermine une composante élémentaire du courant créée par le ruban conducteur d'épaisseur 't' selon :

$$J(\alpha_n) = \int_0^t Y_{ij}(\alpha_n, \beta) \cdot \exp(\gamma_{m+1} y) f(y) E(\alpha_n) dy = Y_{ij}(\alpha_n, \beta) E(\alpha_n) \int_0^t \exp(\gamma_{m+1} y) f(y) dy \quad (\text{E.3})$$

ou encore :

$$J(\alpha_n) = Y_{Sij}(\alpha_n, \beta) E(\alpha_n) \quad \text{telle que : } Y_{Sij} = Y_{ij} S(\alpha_n, t) \quad (\text{E.4})$$

$$\text{avec : } S(\alpha_n, t) = \int_0^t f(y) \cdot \exp(\gamma_{m+1} \cdot y) dy \quad (\text{E.5})$$

Y_{Sij} représente l'élément (i j) de la nouvelle forme de la matrice admittance de Green (égale à l'inverse de matrice de Green G) qui tient compte de l'épaisseur des rubans.

Cela revient simplement à multiplier les éléments de la matrice Y_s (pour une épaisseur nulle du ruban) par le facteur correctif $S(\alpha_n, t)$ qui dépend de l'épaisseur 't' des rubans. En généralisant à l'ensemble des composantes du courant ($J_x(\alpha_n), J_z(\alpha_n)$), on obtient la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} J_x(\alpha_n) \\ J_z(\alpha_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{S11}^{-1}(\alpha_n, \beta) & G_{S12}^{-1}(\alpha_n, \beta) \\ G_{S21}^{-1}(\alpha_n, \beta) & G_{S22}^{-1}(\alpha_n, \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(\alpha_n) \\ E_z(\alpha_n) \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

avec:

$$G_{Sij}^{-1}(\alpha_n, \beta) = Y_{Sj}(\alpha_n, \beta) = G_{ij}^{-1}(\alpha_n, \beta) \cdot S(\alpha_n) \quad (\text{E.7})$$

Ceci permet d'aboutir à un système reliant le champ électrique sur l'interface métallisée à la densité de courant en surface en prenant en compte l'épaisseur du ruban.