

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENE »
FACULTE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES



T H E S E

Présentée pour l'obtention du diplôme de **DOCTORAT D'ETAT**

En: **MATHEMATIQUES**
Spécialité: ANALYSE

Par: **ROUAKI MOHAMED**

Sujet:

**CLASSIFICATION ET EXISTENCE DE SOLUTIONS D'UNE CLASSE DE
PROBLEMES DE DIRICHLET SUPER-LINEAIRES**

Soutenu publiquement le 16/12/2007, devant le jury composé de:

M. M. MORSLI	Professeur	U. TIZI-OUZOU	Président
M. D. BOULARAS	Professeur	U. LIMÔGES	Directeur de thèse
M. A. KESSI	Professeur	USTHB	Codirecteur
M. D. TENIOU	Professeur	USTHB	Examineur
M. A. MOKRANE	Professeur	ENS	Examineur
M. F. AMMAR KHODJA	MC	U. BESANÇON	Examineur
M. A. BENMEZAI	MC	USTHB	Examineur

Classification et existence de solutions d'une classe de problèmes de Dirichlet super-linéaires

Mohamed Rouaki

DÉPARTEMENT D'ANALYSE, FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES, USTHB, ALGER.

Current address: Département de Mathématiques, Université de Blida, Blida.

E-mail address: rouakimd@yahoo.fr

MOTS CLEFS

Superlinear problem, Dirichlet conditions, Multiple solutions, Topological Degree, Homotopy invariance.

RÉSUMÉ

Ce travail est consacré à l'étude d'une classe de problèmes de Dirichlet elliptiques super-linéaires de la forme $-u'' - p(t)u' = g(u) - \lambda f(t)$, sur $[0, 1]$ et $-\Delta u = g(u) - \lambda$, sur la boule unité.

On introduit une classification des solutions généralisant la classification donnée par *P.H.Rabinowitz* [45]. On donne une estimation *a priori* des solutions Nodales (de signe changeant), puis on prouve l'existence d'une infinité de solutions.

On note qu'aucune limite n'est exigée sur la croissance de $g(u)$.

On utilise la propriété d'homotopie du degré Topologique de Leray-Schauder pour déduire les solutions à partir du problème $-u'' = u^2 - \lambda$ étudié par *F.Ammar-Khodja* [7].

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier M. D. BOULARAS, Professeur de Mathématiques à l'Université de LIMOGES, pour avoir eu la patience de diriger cette thèse durant de longues années.

Je tiens à remercier M. A. KESSI, Professeur de Mathématiques à l'USTHB, pour avoir accepté de codiriger cette thèse, et pour m'avoir fait partager certaines de ses connaissances.

Toute ma reconnaissance va à M. F. AMMAR KHODJA, Maître de Conférence de Mathématiques à l'Université de BESANÇON, pour m'avoir initié à ce domaine de recherche, pour m'avoir fait bénéficier de ses connaissances et pour les enrichissantes discussions que nous avons pu avoir.

Je remercie M. M. MORSLI, Professeur de Mathématiques à l'Université de TIZI-OUZOU, pour avoir accepté de présider ce jury de thèse.

Je remercie M. A. MOKRANE, Professeur de Mathématiques à l'ENS de KOUBA, d'avoir accepté mon invitation à faire partie de ce jury de thèse.

Je tiens à remercier M. TENIOU, Professeur de Mathématiques à l'USTHB, d'avoir accepté mon invitation à faire partie de ce jury de thèse.

Je remercie A. BENMEZAI, Maître de Conférence de Mathématiques à l'USTHB, d'avoir accepté mon invitation à faire partie de ce jury de thèse.

En dernier lieu, que le Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique, la Faculté de Mathématiques de l'USTHB, le Département de Mathématiques de l'Université SAAD DAHLEB de BLIDA, l'Université de BESANÇON et plus particulièrement M. F. AMMAR KHODJA pour m'avoir permis de passer plusieurs séjours de travail dans son laboratoire, sans lesquels, cette thèse n'aurait pu être soutenue.

Éditeur Latex : Kile.org
Graphes : XFig.org
Système : GNU/Linux (kubuntu.org)

Table des matières

Table des figures	9
Chapitre 1. Généralités	11
1.1. Introduction	11
1.2. Aperçu sur les problèmes semi-linéaires elliptiques	13
1.3. Aperçu sur les différentes méthodes de résolution	31
Chapitre 2. Étude d'un problème super-linéaire	37
2.1. Introduction	37
2.2. Une estimation <i>a priori</i>	38
2.3. Une classification des solutions	40
Chapitre 3. Travaux	45
3.1. Degré topologique et problème non linéaire	45
3.2. Solutions nodales d'un problème super-linéaire	62
Chapitre 4. Conclusion	73
Annexe A. Compléments	75
Annexe B. Espaces de Hölder	77
Index	79
Bibliographie	81

Table des figures

1.2.1	Bifurcations aux points $(\lambda_n, 0)$, problème (1.2.9)	19
1.2.2	Classification des solutions suivant les ensembles S_k , problème (1.2.15).	20
1.2.3	Classification des solutions suivant les ensembles S_k , problème (1.2.16).	21
1.2.4	Problème(1.2.20), cas (1)	28
1.2.5	Problème(1.2.20), cas (2)	28
1.2.6	Problème(1.2.20), cas (3)	28
3.1.1	Solutions de Z_2	46
3.1.2	Description intervalle où $u > 0$.	50
3.1.3	Classification des solutions suivant les ensembles Z_k , problème (3.1.25), $\theta = 0$.	57

CHAPITRE 1

Généralités

1.1. Introduction

Le problème de Dirichlet pour les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles elliptiques non-linéaires, a fait l'objet d'un intérêt particulier durant le dernier demi siècle. Ce type de problème apparaît dans divers domaines tels que, la propagation de la chaleur avec source de chaleur non-linéaire [28, 32], la théorie de l'équilibre de gravitation des étoiles [32] ...

Pour la plupart de ces problèmes, seules les solutions positives ont une interprétation physique, ce qui explique le nombre d'études destinées à cette question. Il reste que l'étude des solutions nodales, en plus de son intérêt théorique, peut représenter un modèle physique réel (rotation d'une corde lourde) [35]. D'autre part, une description qualitative générale des solutions, peut faire apparaître certaines caractéristiques englobant les solutions positives.

En plus de cela, rien n'interdit de penser que dans un avenir proche ou lointain, l'intérêt de la physique pour les solutions nodales puisse devenir plus important.

La forme simplifiée de ces problèmes consiste dans la recherche de solutions des équations

$$(1.1.1) \quad \begin{aligned} -u'' + pu' + qu &= g(u, t, \lambda), \text{ dans } [0, 1] \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

$$(1.1.2) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= g(u, x, \lambda), \text{ dans } \Omega \\ u &= 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où $\lambda \in R$, Ω un ouvert borné et convexe de R^n , et $g(u, x, \lambda)$ prenant l'une des formes

$$(1.1.3) \quad g(u, x, \lambda) = g(u, x) - \lambda$$

$$(1.1.4) \quad g(u, x, \lambda) = \lambda g(u, x)$$

$g(u, x)$ étant une fonction non-linéaire par rapport à u dont la nature conduit à différentes méthodes de résolution.

Le traitement de ces problèmes débute naturellement par l'étude de l'équation (1.1.1), puis se généralise à l'équation (1.1.2) qui représente le problème en dimension n .

Cette généralisation passe souvent par l'étude des problèmes

$$(1.1.5) \quad -u''(t) - \frac{n-1}{t}u'(t) = g(u, t, \lambda), \text{ dans }]0, 1]$$

$$(1.1.6) \quad u'(0) = u(1) = 0$$

$$(1.1.7) \quad \begin{aligned} -u''(t) - \frac{n-1}{t}u'(t) &= g(u, t, \lambda), \text{ dans } [a, b], a > 0 \\ u(a) &= u(b) = 0 \end{aligned}$$

l'équation (1.1.5) caractérise les solutions radiales de l'équation (1.1.2), $u(x) = u(\|x\|)$ (la variable $t = \|x\|$). Pour la boule unité, la condition de Dirichlet devient (1.1.6), et pour l'anneau $\{0 < a < \|x\| < b\}$, elle devient (1.1.7).

Notons que les solutions positives de (1.1.2), avec la condition de Dirichlet sur une boule, et sous certaines conditions de différentiabilité de la fonction $g(u, x)$, sont radiales et décroissantes voir [26].

Les généralisations qui suivent, consistent dans le remplacement de l'opérateur du *Laplacien* par un autre type d'opérateur elliptique, et enfin, à la généralisation des résultats à des ouverts Ω bornés ou non bornés.

Il faut noter que les divers résultats d'existence de solutions de problèmes elliptiques restent soumis à l'hypothèse

$$(1.1.8) \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{g(u)}{u^p} = 0, \quad p = \frac{n+2}{n-2}, \quad n > 2$$

ce qui pour n grand, limite la croissance de la fonction $g(u)$. p est l'exposant critique de Pohozaev-Sobolev.

Nous montrerons dans cette thèse que la condition (1.1.8) n'est pas nécessaire pour l'existence de solutions nodales. En effet, on montre dans [48] l'existence de solutions nodales radiales pour un problème du type (1.1.2) avec la non-linéarité (1.1.3), sans condition sur la croissance de $g(u)$.

Nous pouvons citer comme méthodes les plus utilisées pour la résolution de tels problèmes, la méthode variationnelle [4, 42], le degré topologique [37, 45], la méthode des sur- et sous-solutions [2, 43], la méthode de tir (en dimension une) [18, 22], et la méthode de quadrature (le cas autonome, dimension une) [7, 46].

Ces méthodes sont souvent des généralisations de théories déjà connues en dimension finie à des problèmes non-linéaires ou à des espaces de fonctions.

Objet de la thèse. L'objet de cette thèse est l'étude de plusieurs questions concernant une classe de problèmes super-linéaires du type (1.1.1), ainsi que les solutions radiales de (1.1.2). Nous aborderons les questions d'estimation *a priori* des solutions, de classification de l'ensemble des solutions ainsi que l'existence de solutions nodales.

Plus précisément

- une estimation *a priori* pour des solutions nodales de (1.1.1) et (1.1.2), sans la condition (1.1.8). (chapitre (2), section (2.1))
- une classification des solutions de ces problèmes dans le cas de la non-linéarité (1.1.3). (chapitre (2), section (2.2))
- Cette classification ainsi que l'estimation *a priori* nous ont permis d'obtenir des résultats d'existence de solutions nodales pour (3.1.1) et (3.2.1), références [47, 48]. (chapitre (3), section (3.1), section (3.2))

C'est l'utilisation d'une technique d'estimation des longueurs des intervalles où les solutions sont positives ($u > 0$), utilisant le théorème de comparaison de Sturm, qui a permis une description qualitative de ces solutions.

1.2. Aperçu sur les problèmes semi-linéaires elliptiques

1.2.1. Généralités. Le problème *semi-linéaire elliptique* classique abordé par *Leray-Schauder*[37] est le suivant

$$(1.2.1) \quad \begin{aligned} -Lu &= g(u, x, \lambda), \text{ dans } \Omega \\ u &= 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où L est l'opérateur uniformément elliptique

$$(1.2.2) \quad \begin{aligned} L(u) &= \Sigma_{i,j} a_{ij}(x) \partial_{ij} u(x) + \Sigma_i b_i(x) \partial_i u(x) + c(x)u(x) \\ a_{ij}(x) \xi_i \xi_j &\geq \beta \|\xi\|^2, \beta > 0 \end{aligned}$$

$u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ et $a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in]0, 1[$. Ces conditions restent encore les plus utilisées pour les méthodes topologiques. Le plus souvent $g(u, x, \lambda)$ est supposée continue, et Liepschitz par rapport à u .

Exposant critique (Pohozaev-Sobolev)

Dans la majorité des problèmes semi-linéaires elliptiques, on considère l'hypothèse

$$(1.2.3) \quad |g(u)| < A + B |u|^p, \quad p = \frac{n+2}{n-2}, \quad n > 2$$

où $A > 0$ et $B > 0$. L'*exposant critique* $p = \frac{n+2}{n-2}$ apparaît dans un article de *S.I. Pohozaev (1965)* [40] qui montre un résultat de non-existence de solutions, pour une classe de problèmes elliptiques ne vérifiant pas l'hypothèse (1.2.3).

Dans la méthode variationnelle, on cherche à déterminer les points critiques (zéros de la différentielles) de l'opérateur

$$I(u) = \int_{\Omega} (\nabla u)^2 - \int_{\Omega} G(u, x, \lambda) dx, \quad G(u, x, \lambda) = \int_0^u g(s, x, \lambda) ds$$

on montre, sous certaines conditions sur g , et pour $p < \frac{n+2}{n-2}$, l'existence et la convergence faible d'une suite, à partir de laquelle on déduit la convergence forte grâce aux injections compactes entre espaces de *Sobolev*, vers un point critique de I . Or, pour p égal à l'exposant critique de *Pohozaev-Sobolev*, l'injection nécessaire n'est pas compacte, d'où l'une des limites de cette méthode aux problèmes sous critiques.

D'autre part, les méthodes utilisant le degré topologique nécessitent une estimation *a priori* des solutions, dont la meilleure, pour les solutions positives, a été obtenue en (1979) [23] pour $p \leq \frac{n+2}{n-2}$.

La valeur $p = \frac{n+2}{n-2}$ est considérée, par la plus part des auteurs, comme la meilleure possible pour l'existence de solutions de problèmes super-linéaires. Elle est prise comme condition nécessaire dans pratiquement tous les travaux concernant les solutions positives ou nodales.

Dans cette thèse, nous montrons que cet exposant n'est pas *critique* (*n'est pas nécessaire*) au moins pour les solutions négatives et nodales. En effet, sans limites sur la croissance de $g(u)$, nous avons obtenue l'existence de solutions radiales nodales pour une classe de problèmes du type (1.1.2) [48].

Méthodes Topologiques

Les méthodes topologiques, généralement formulées sur des espaces de Hölder, sont basées sur l'exploitation des propriétés de l'opérateur compact défini par *Leray-Schauder* [37]

$$\begin{aligned} T : C^{1,\alpha}(\Omega) &\rightarrow C^{1,\alpha}(\Omega) \\ u &\rightarrow v \end{aligned}$$

où $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ est la solution (unique) de

$$\begin{aligned} -Lv &= g(u, x, \lambda), \text{ sur } \Omega \\ v &= 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

la compacité de cet opérateur, est obtenue grâce à l'estimation de Schauder pour les problèmes elliptiques

$$(1.2.4) \quad \|v\|_{2,\alpha} \leq k(\|g(u, x, \lambda)\|_{\alpha} + \|u\|_0)$$

ajoutée à l'injection compacte $C^{2,\alpha} \rightarrow C^{1,\alpha}$.

Sous l'hypothèse $c(x) \leq 0$, l'unicité de la solution v est obtenue grâce au principe du maximum.

Dans les cas simples où la fonction de Green de $-L$ (associée aux conditions aux limites) est bien définie, l'opérateur T est l'opérateur de Green.

Degré Topologique d'une perturbation compacte de l'unité

L'utilisation du degré topologique s'applique aux problèmes elliptiques reformulés comme la recherche des zéros d'une *perturbation compacte de l'unité*

$$\Phi(u) = (I - T)(u) = 0, u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$$

le degré topologique est défini relativement à Φ et à un ouvert borné $O \subset C^{1,\alpha}(\Omega)$.

Une condition nécessaire pour cette définition, est qu'il n'existe pas de solution sur ∂O .

On note

$$d(\Phi, O, 0)$$

et on lit le *degré topologique de Φ relativement à O et à zéro*.

Le degré topologique est un nombre entier qui reste constant pour les déformations continues de Φ et de O (Invariance par Homotopie).

De plus, $d(\Phi, O, 0) \neq 0$ implique qu'il existe une solution dans O .

Méthode des sur- et sous-solutions

On dit que v est sous-solution du problème

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g(x, u), \text{ dans } \Omega \\ u &= 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

si v vérifie

$$\begin{aligned} -\Delta v &\leq g(x, v), \text{ dans } \Omega \\ v &\leq 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

on a la même définition pour une sur-solution w avec les inégalités dans le sens inverse. Un théorème de *H. Amann* [3] affirme que

THÉORÈME. *Soit g continue sur $\Omega \times \mathbb{R}$. Si il existe une sous-solution v et une sur-solution w telles que $v \leq w$ alors, il existe une solution u telle que $v \leq u \leq w$.*

H. Amann introduit la terminologie de sur- et sous-solutions (1972)[2] dont certaines propriétés étaient connues.

P.H. Rabinowitz donne une démonstration du théorème utilisant le degré topologique (1976)[43, 10, 11]. Cette dernière est utile, car elle donne une valeur différente de zéro du degré topologique relativement à Φ , et à un ouvert borné O (défini grâce à v et w).

Estimations a priori

Une hypothèse importante nécessaire à l'application des méthodes topologiques est l'estimation *a priori* des solutions.

Dans le cas du degré topologique, il est nécessaire que l'ouvert susceptible de contenir des solutions soit borné. Dans le cas de la méthode des sur- et sous-solution, l'estimation *a priori* est donnée par les sur- et sous-solution elles-mêmes (quand elles existent).

On remarque que grâce à l'estimation de Schauder, il est possible d'obtenir une estimation *a priori* des solutions dans $C^{2,\alpha}(\Omega)$ dès que l'on a une estimation dans $C(\Omega)$.

Ces estimations sont obtenues dans les cas les plus simples grâce au principe du maximum [13]. Exemple, pour $L = \Delta$ et $g(u, x)$ bornée

$$\|u\|_0 \leq \max \|g(u, x)\|_0 \leq M$$

Signalons une autre estimation importante obtenue pour une classe de problèmes super-linéaires [23].

Méthode variationnelle

Elle consiste dans la recherche des points critiques de l'opérateur *Action*, dans le cas où L prend la forme

$$-Lu = - \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x)u$$

L'opérateur *Action* est défini pour $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ par

$$\begin{aligned} I(u, \lambda) &= \int_{\Omega} \sum a_{ij}(x) u_i(x) u_j(x) + c(x) u^2 dx - \int_{\Omega} G(u, x, \lambda) dx \\ &= I_1(u) - I_2(u, \lambda) \end{aligned}$$

où $G(u, x, \lambda) = \int_0^u g(s, x, \lambda) ds$.

Dans le cas où les points critiques sont des fonctions régulières, elles vérifient l'équation $dI_u(u, \lambda) = 0$ (différentielle par rapport à u) qui n'est autre que l'équation elliptique de notre problème.

Cette méthode consiste à trouver une suite convergeant faiblement, grâce aux propriétés de G , puis, de déduire, des injections compactes d'espaces de *Sobolev*, la convergence forte vers un point critique de la fonctionnelle I (zéro de la différentielle) [31, 42, 33].

Notons que dans le cas où $g(-u, x) = -g(u, x)$, a été introduite une autre classes de points critiques (solutions) voir *min-max* [4].

De même pour le cas $g(-u, x) = g(u, x)$, a été introduite la *méthode variationnelle duale* [4], qui permet de traiter une classe de problèmes super-linéaires à l'aide de la méthode variationnelle.

Problèmes quasi-linéaires

Le problème *elliptique quasi-linéaire* est un cas plus général dont les coefficients de l'opérateur L se présentent sous la forme

$$a_{ij} = a_{ij}(x, u, \nabla u) \quad b_i = b_i(x, u, \nabla u) \quad c = c(x, u, \nabla u) \quad g = g(x, u, \nabla u)$$

$$a_{ij}(x, u, \nabla u) \xi_i \xi_j \geq \beta \|\xi\|^2, \beta > 0$$

Ce problème admet, pour des cas particuliers, des généralisations de résultats connues pour le problème elliptique [3].

Terminologie

Sous le terme de *problème semi-linéaire*, plusieurs types de non-linéarité sont considérés. On donne ici les désignations les plus répandues dans la littérature voir [38].

Dans ce qui suit λ_1 désigne la première valeur propre de l'opérateur $-L$.

- *Problème super-linéaire*, quand $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{g(u)}{u} > \lambda_1$
- *Problème sous-linéaire*, quand $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{g(u)}{u} \leq \lambda_1$
ce cas comprend les fonctions g bornées ou négatives pour u assez grand.
- *Problème Positone*, quand $g(0) \geq 0$
- *Problème Non-positone*, quand $g(0) < 0$
- *Problème sous-critique*, quand g vérifie la condition (1.2.3).

Dans l'étude des solutions Nodales (de signe changeant) intervient souvent la distinction entre les limites

$$(1.2.5) \quad \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \frac{g(u)}{u} = \pm\infty, \quad \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \frac{g(u)}{u} = +\infty$$

Le premier cas est souvent désigné comme *Jumping Nonlinearity* (Saut de la non-linéarité, c'est le cas où $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{g(u)}{u} \neq \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{g(u)}{u}$).

Le problème positone

Le problème *positone* a été le plus étudié car il apparaît dans un nombre plus important de problèmes physiques, et aussi car il se prête à l'utilisation de la méthode des sur- et sous-solution.

L'un des derniers résultats importants concernant le problème *positone* est l'estimation *a priori* obtenue dans [23].

On peut retrouver un sommaire des résultats d'existence et de multiplicité de solutions positives, obtenus jusqu'en 1982 pour le problème semi-linéaire elliptique *positone*, dans les deux résumés fait par *P.L.Lions (1982)*[38] et *D.G.Figueiredo (1982)*[24].

Le problème non-positone

Le problème *non-positone* a été abordé plus tard durant les vingt dernières années, en effet, pour le cas super-linéaire de nombreux résultats montrent que les solutions positives n'existent pas pour λ grand. Ainsi les théorèmes d'existence concernent surtout le voisinage de $\lambda = 0$. D'autre part, la méthode des sur- et sous-solution n'est pas propice être utilisée dans ce cas.

Un résultat de non existence de solutions

Avant d'aborder différents résultats concernant les solutions positives et nodales, on donne un résultat de non-existence dû à *Pohozaev* (1965) [40].

On considère le problème

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda g(u), \text{ dans } \Omega \\ u &= 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où Ω est un ouvert borné en étoile de R^n ($n > 2$), $\partial\Omega \in C^{1,\beta}$ et $g \in C^{0,\alpha}$.

On note $G(u) = \int_0^u g(s)ds$, on a

THÉORÈME. *Soit λ tel que $\lambda u g(u) \geq 0$, alors si $\lambda \left(\frac{n-2}{2n} u g(u) - G(u) \right) > 0$ pour $u \neq 0$, le problème ne possède pas de solution.*

On suppose que $g(u) \geq 0$ pour $u \geq 0$, alors si $\left(\frac{n-2}{2n} u g(u) - G(u) \right) > 0$ pour $u \geq 0$, le problème ne possède pas de solution positive.

Comme exemple, le problème

$$(1.2.6) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= |u|^p, \text{ dans } \Omega \\ u &= 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où $p = \frac{n+2}{n-2}$, $n > 2$, Ω est un ouvert borné en étoile de R^n , $\partial\Omega \in C^{1,\beta}$ et $g \in C^{0,\alpha}$, n'admet pas de solution positive

La démonstration est basée sur l'identité de *Pohozaev* introduite à cet effet

$$\lambda n \int_{\Omega} G(u) dx + \frac{2-n}{2} \lambda \int_{\Omega} u g(u) dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_{\nu}^2 (r \times \nu) ds$$

où r est le rayon reliant un point fixe de Ω à un point de la frontière, ν le vecteur normal sur $\partial\Omega$ et u_{ν} est la dérivée par rapport ν .

1.2.2. Solutions Nodales. On s'intéresse ici aux solutions *Nodales* (de signe changeant) de problèmes de Dirichlet elliptiques non linéaires.

Dans un résumé de résultats sur les problèmes semi-linéaires elliptiques [38] *P.L.Lions* note que, bien que de nombreux résultats d'existence de solutions nodales aient été obtenus (dans le cas sous-critique), aucune interprétation satisfaisante n'a été donnée quant à la structure de l'ensemble des solutions.

Une classification des solutions, en dimension une, suivant leur nombre de zéros dans $]0, 1[$ a été introduite et utilisée efficacement par *P.H.Rabinowitz* (1971)[45] pour l'étude d'un problème de Sturm-Liouville particulier (le cas linéaire au voisinage de zéro), à cet effet, il a défini les ensembles

$$\begin{aligned} S_k &= \{u \in C^1[0, 1] : u \text{ possède } k - 1 \text{ zéros simples dans }]0, 1[\} \\ S_k^+ &= \{u \in S_k : \dot{u}(0) > 0\} \\ S_k^- &= -S_k^+ \end{aligned}$$

On remarquera que la structure de l'ensemble des solutions diffère suivant la parité de la fonction g , ou plus généralement suivant la valeur des limites (1.2.5), voir fig(1.2.2) et fig(1.2.3).

La méthode variationnelle a été utilisée dans l'étude de plusieurs classes de problèmes *positone* où l'existence d'une infinité de solutions nodales a été prouvée. Le cas $g(u)$ impaire (1971)[31], le cas $g(u)$ paire [42, 43] et un cas super-linéaire avec $g(u)$ paire [4].

Pour le problème *non-positone*, seuls le cas de dimension une [18] et le cas des solutions radiales [22] ont été considérés en utilisant la méthode de tir.

Dans cette thèse on se situe dans le cas *non-positone super-linéaire*, mais l'on ne se restreint pas au cas *sous-critique*. On propose une nouvelle classification de l'ensemble des solutions et l'on utilise la *méthode d'invariance par homotopie du degré topologique*, qui est différente de celles utilisées jusqu'à présent (méthodes de tir et variationnelle)

Problème de Sturm-Liouville non linéaire pour des équations différentielles ordinaires du second ordre (1970)[45].

Considérons le problème de Sturm -Liouville classique

$$(1.2.7) \quad -(pu')' + qu = \lambda a(x)u$$

$$(1.2.8) \quad a_0 u(0) + b_0 u'(0) = 0, a_0 u(\pi) + b_0 u'(\pi) = 0$$

où $p \in C^1[0, \pi]$, $a, q \in C^0[0, \pi]$, et $p > 0, a > 0$ sur $[0, \pi]$.

Ce problème est équivalent à l'équation intégrale de *Fredholm de seconde espèce*

$$T(u) = u/\lambda$$

où T est l'opérateur de Green définie sur $E = \{u \in C^1[0, \pi] : u \text{ vérifie (1.2.8)}\}$.

L'opérateur T est auto-adjoint, compact, et possède une infinité de valeurs et de fonction propre solutions de (1.2.7)(1.2.8), que l'on note (λ_n, φ_n) .

λ_n est une valeur propre de l'équation (1.2.7), c'est-à-dire de l'opérateur $-(pu')' + qu$. D'autre part, elle est valeur caractéristique de l'opérateur T .

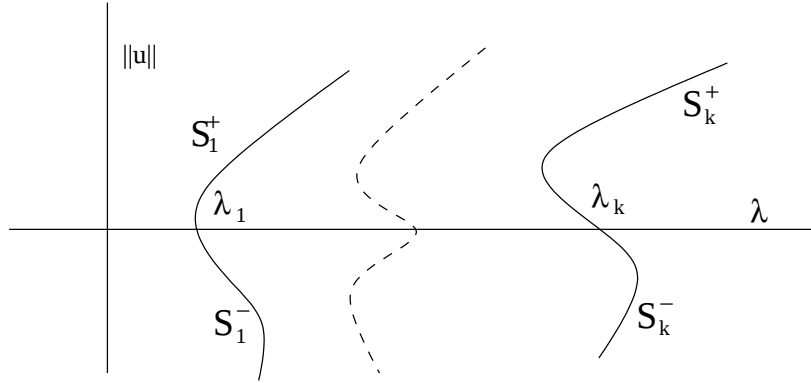
On montre, en utilisant le théorème de *comparaison de Sturm*, que la fonction propre φ_n possède exactement $(n-1)$ zéros simples dans $]0, \pi[$. Cette caractérisation des solutions est utilisée dans un résultat de *P.H.Rabinowitz* [45] pour étudier le problème semi-linéaire

$$(1.2.9) \quad -(pu')' + qu = \lambda F(x, u, u')$$

avec les conditions aux limites (1.2.8), où $F(x, u, u') = a(x)u + h(x, u, u')$, $h(x, u, u') = o(\|u\|)$.

Il montre l'existence de branches non bornées de solutions, bifurquant de la branche des solutions triviales $(\lambda, 0)$ aux points $(\lambda_n, 0)$, où λ_n est la n -me valeur propre associée au problème linéarisé(1.2.7) fig(1.2.1). Les solutions de la branche C_n bifurquant au point $(\lambda_n, 0)$ possèdent $(n-1)$ zéros simples dans $]0, \pi[$.

Il faut noter que ce résultat englobe un ensemble important de non-linéarité, puisque qu'aucune autre condition de linéarité n'est prise pour $\|u\|$ grand.

FIG. 1.2.1. Bifurcations aux points $(\lambda_n, 0)$, problème (1.2.9)

P.H. Rabinowitz exploite l'existence de bifurcations locales aux points $(\lambda_n, 0)$ et montre grâce à la propriété d'invariance par homotopie du degré topologique, que les courbes issues de ces bifurcations sont non bornées.

Non-linéarité rapide [25]

On considère le problème

$$(1.2.10) \quad \begin{aligned} -u''(t) &= g(u(t)) + f(t), t \in [0, \pi] \\ u(0) &= u(\pi) = 0 \end{aligned}$$

où g est Lipschitz et vérifie

$$(1.2.11) \quad \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \frac{g(u)}{u} = +\infty$$

THÉORÈME. *Le problème possède un nombre infini de solutions de classe C^2 pour toute fonction $f \in C[0, \pi]$.*

Pour la démonstration on utilise la méthode de tir dont nous donnons ici les principales étapes.

i) On considère le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} u'(x) &= v(x) \\ v'(x) &= -f(x) - g(u(x)) \end{aligned}$$

avec les conditions initiales $u(0) = 0, v(0) = t$, où $t \in \mathbb{R}$. Ce problème de Cauchy possède une solution unique que l'on note $w(x, t) = (u_t(x), v_t(x))$, définie sur l'intervalle maximale $J_t \subset [0, \pi]$, et $0 \in J_t$.

2i) La limite (1.2.11) implique que $J_t = [0, \pi]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, de plus

$$(1.2.12) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(\inf_{x \in [0, \pi]} |w(x, t)| \right) = \infty$$

où $|w(x, t)| = (u_t^2(x) + v_t^2(x))^{1/2}$

3i) pour $|t|$ suffisamment grand, (1.2.12) implique $w(x, t) \neq 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$. De plus $w(x, t)$ peut s'exprimer sous la forme

$$(1.2.13) \quad w(x, t) = |w(x, t)| (\cos r_t(x) - \sin r_t(x))$$

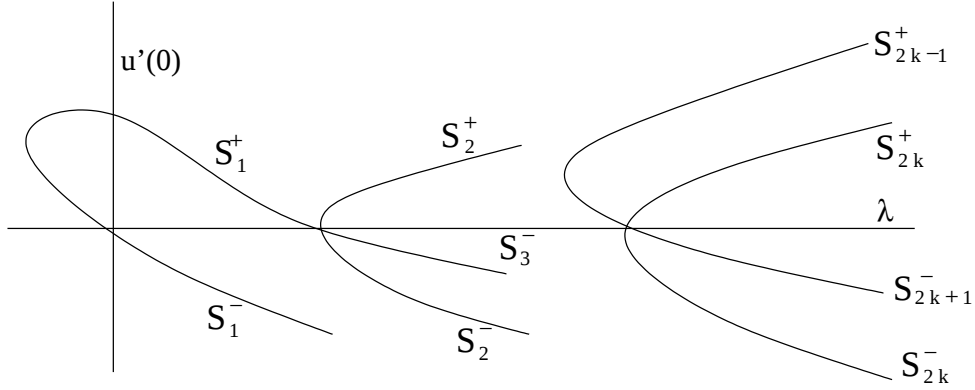


FIG. 1.2.2. Classification des solutions suivant les ensembles S_k , problème (1.2.15).

et la fonction

$$R(t) = r_t(\pi) - r_t(0)$$

est continue pour tout $|t|$ suffisamment grand.

4i) à partir de (1.2.13) on voit que le problème (1.2.10) possède une solution ssi l'équation

$$r_t(\pi) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

possède une solution pour un entier n , et t suffisamment grand. Puisque $r_t(0)$ est un multiple impaire de $\pi/2$ [car $u_t(0) = 0$], il suffit d'établir le nombre de solutions de l'équation

$$R(t) = k\pi$$

k entiers, et t suffisamment grand. Comme $R(t)$ est continue, il suffit alors de montrer qu'il existe des entiers k tels que

$$(1.2.14) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} R(t) = \infty$$

Enfin, on montre en utilisant des estimations *a priori* et des théorèmes de comparaisons que l'équation (1.2.14) possède une infinité de solutions.

Diagramme des solutions dans un cas où g est paire (1983)[7]

On utilise une méthode de quadrature pour donner une description précise de l'ensemble des solutions du problème

$$(1.2.15) \quad \begin{aligned} -u''(t) &= u^2(t) - \lambda \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

On montre que le diagramme des solutions $(\lambda, u'_\lambda(0))$ est constitué d'une infinité de branches non bornées de solutions fig(1.2.2). On note que les ensembles S_k avec un indice k impaire sont constitués de solutions symétriques par rapport à $1/2$.

On remarque que chaque branche connexe de solutions est constituée de différentes parties contenues dans les ensembles S_{k-1} , S_k et S_{k+1} .

Dans la classification introduite dans [47, 48] on remarque que toute branche connexe, avec $\lambda > 0$, se situe entièrement dans un ensemble Z_k unique, fig(3.1.1) et fig(3.1.3). (voir chapitre 2, section 3).

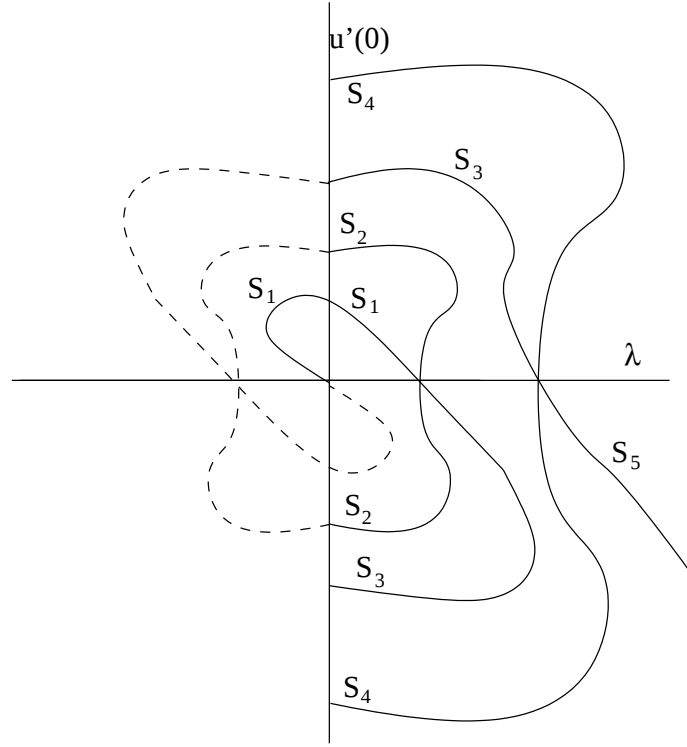


FIG. 1.2.3. Classification des solutions suivant les ensembles S_k , problème (1.2.16).

Diagramme des solutions dans un cas où g est impaire (1983)[46]

On utilise une méthode constructive pour donner une description précise de l'ensemble des solutions du problème

$$(1.2.16) \quad \begin{aligned} -u''(t) &= u^3(t) - \lambda \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

fig(1.2.3)

Cette exemple ainsi que le précédent, donnent un aperçu de la différence de la structure de l'ensemble des solutions, liée à la parité de la fonction g , plus généralement aux limites (1.2.5).

Ici aussi, l'introduction des ensembles Z_k apporte une cohérence plus naturelle au diagramme des solutions.

Multiples solutions pour un problème de Dirichlet non linéaire (1988)[18]

On considère le problème

$$\begin{aligned} -u''(t) &= g(u(t)) - p(t) - c \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

où $p(t)$ est une fonction continue et c une constante. La fonction g est de classe C^1 , positive et strictement croissante sur $[0, \infty[$. De plus, il existe M et $\rho > 0$ tels que

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{g(u)}{u} = M, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{g(u)}{u^{1+\rho}} = +\infty$$

en utilisant la méthode de tir on montre

THÉORÈME. *Il existe une suite croissante de nombres réels (c_n) , $n > \frac{2}{\pi} \sqrt{\max\{0, M\}}$ qui tend vers l'infini telle que*

si $n > 1 + \frac{2}{\pi} \sqrt{\max\{0, M\}}$ et $c > c_n$ alors il existe une solution avec n zéros dans $]0, 1[$ et $u'(0) > 0$.

si $n > \frac{2}{\pi} \sqrt{\max\{0, M\}}$ et $c > c_n$ alors il existe une solution avec n zéros dans $]0, 1[$ et $u'(0) < 0$.

Multiples solutions radiales pour un problème super-linéaire (2004)[22]

On considère le problème

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= q(|x|)g(u(x)) - w(|x|, u(x)), \text{ dans } \Omega \\ u &= 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où Ω est la boule unité g est Lipschitz, $q \in C^1[0, 1]$ et w est continue et bornée. De plus, on suppose que $q(0) > 0$ et $g(u) \sim |u|^{p-1}u$, $|u| \rightarrow \infty$, avec $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$.

On applique alors la méthode de tir adaptée au problème

$$\begin{aligned} -u''(t) - \frac{n-1}{t}u(t) &= q(t)g(u(t)) - w(t, u(t)), \text{ dans }]0, 1[\\ u'(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

on obtient

THÉORÈME. *Il existe $n^* \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > n^*$ il existe deux solutions $v_n(0) < 0 < u_n(0)$ ayant exactement n zéros dans $]0, 1[$.*

On obtient un résultat analogue en remplaçant la condition $q(0) > 0$ par $q(t) \sim \beta t^h$, avec $\beta > 0, h > 0$ et $1 < p < \frac{n+2+2h}{n-2}$.

1.2.3. Solutions Positives. On donne d'abord deux résultats concernant les solutions positives sans distinction de type. Le premier résultat concerne la propriété de symétrie des solutions positives définies sur les boules [26]. Le deuxième résultat est une estimation *a priori* [23] sous l'hypothèse de l'*exposant critique* (en plus de certaines hypothèses techniques).

On considère dans ce qui suit le problème

$$(1.2.17) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= g(u), \text{ sur } \Omega \\ u &= 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Propriété de symétrie

Les solutions positives du problème elliptique en dimension $n > 1$ et relativement à des ensembles ouverts et connexes particuliers tels que, une boule ou un anneau, possèdent certaines propriétés de symétrie étudiées dans un article de *Gidas, Ni et Nirenberg en (1979)*[26].

On donne deux cas abordés (boule et anneau) par les auteurs concernant le problème (1.2.17) où g est une fonction C^1 .

THÉORÈME. *Si Ω est la boule unité alors toute solution positive $u \in C^2(\bar{\Omega})$ est radiale et décroissante (par rapport au rayon).*

REMARQUE. Il n'y a pas de condition sur le signe de la fonction f , ce résultat est donc valable pour les problèmes *positone* et *non-positone*.

Ce théorème n'a pas d'équivalent pour les solutions nodales, qui peuvent être radiales ou non. On peut voir cela en dimension 1 dans [7, 46], les solutions Nodales ne sont pas toutes symétriques par rapport à $1/2$.

L'importance de ce théorème se trouve dans le fait que l'étude des solutions positives sur une boule, se réduit à l'étude des solutions radiales qui se caractérisent par un problème en dimension une.

THÉORÈME. Si Ω est un anneau de R^n défini par $R < \|x\| \leq \bar{R}$ alors toute solution positive $u \in C^2(\bar{\Omega})$ est décroissante par rapport à $\|x\|$ pour $\frac{R+\bar{R}}{2} \leq \|x\| < \bar{R}$.

REMARQUE. Ici les solutions ne sont pas nécessairement radiales.

Ces deux théorèmes restent vrais si $f = f(u, \|x\|)$, en supposant de plus que f_u est continue et que f est décroissante par rapport à $\|x\|$.

Les auteurs ont utilisé le principe du maximum ainsi qu'une technique de projection de la solution sur un plan traversant Ω , voir [30, 51].

Estimation *a priori*

L'importance de ce résultat est dû au fait que l'obtention d'une estimation *a priori* assez générale, a permis l'utilisation des méthodes topologiques pour des problèmes qui jusqu'alors étaient traités grâce à la méthode variationnelle.

L'utilisation des estimations *a priori* a pour avantage (par rapport à la méthode variationnelle) de préciser la nature de l'ensemble des solutions. En effet, elle permet de calculer le degré de Leray-Schauder de perturbations compactes de l'unité ce qui peut être utilisé pour l'obtention de branches de solutions.

Les auteurs considèrent le problème super-linéaire (1.2.17), avec Ω un ouvert convexe borné régulier, g localement Lipschitz de R_+ dans R , $n > 1$ et $u \in C^2(\bar{\Omega})$. De plus

- (1) si $n > 2$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t^p} = 0$, avec $p = \frac{n+2}{n-2}$, et pour $n = 2$, p est fini.
- (2) $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{tg(t) - \theta G(t)}{t^2 g(t)^{2/n}} \leq 0$ avec $0 \leq \theta \leq \frac{2n}{n-2}$
où $G(t) = \int_0^t g(s) ds$.

REMARQUE. $1/$ et $2/$ peuvent être remplacés par $\limsup_{t \rightarrow \infty} g(t)/t^{n/(n-2)} = 0$.

THÉORÈME 1.2.1. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute solution positive du problème on ait

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C$$

1.2.3.1. *Solutions positives de problèmes positone.* Une multitude de travaux ont concerné le problème *positone* dont la grande majorité ont eu lieu durant les années soixante-dix. Ces travaux ont montré des résultats d'existence et de multiplicité de solutions qui dépendent de la nature de la fonction $g(u)$. Les caractéristiques de $g(u)$ intervenant dans ces résultats concernent le comportement asymptotique de la solution au voisinage de zéro et de l'infini ainsi que le nombre de zéros de $g(u)$.

Les auteurs utilisent en générale une des méthodes topologiques, variationnelle ou de bifurcation pour montrer l'existence d'une solution, et une combinaison de deux de ces méthodes pour obtenir des résultats de multiplicité

Pour un résumé plus exhaustif, on peut voir [38] et [24].

Nous donnons dans ce qui suit, une description, de quelques uns de ces travaux.

Paire de solutions positives d'un problème non linéaire (1973)[43]

L'auteur étudie le problème semi-linéaire elliptique (sous-linéaire)

$$(1.2.18) \quad \begin{aligned} -Lu &\equiv - \sum_{i,j=1..n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x)u_j) + c(x)u = \lambda g(x, u), x \in \Omega \\ u(x) &= 0, x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

ici $\lambda > 0$, a_{ij} sont de classe C^1 et $c \in C^{0,\alpha}$. La fonction g satisfait aux conditions

- (1) g est localement Lipschitz et continue sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$ avec $g(x, 0) = 0$.
- (2) Il existe $\bar{z}$ tel que, $g(x, \bar{z}) < 0$ si $z \geq \bar{z}$. (g bornée)
- (3) Si $G(x, z) = \int_0^z g(x, s)ds$, il existe $(a, y) \in \Omega \times [0, \bar{z}[$ tel que $G(a, y) > 0$.
- (4) $g(x, z) = o(z)$ en $z = 0$ uniformément par rapport à x .

THÉORÈME. *Il existe $\bar{\lambda} > 0$ tel que, pour tout $\lambda > \bar{\lambda}$ il existe deux solutions positives.*

La technique utilisée par l'auteur est une combinaison des méthodes variationnelle et topologique. C'est l'une des méthodes qui revient souvent pour la détermination de résultats d'existence et de multiplicité de solutions, avec des variations suivant les conditions vérifiées par g .

Dans une première étape, il montre l'existence d'une solution grâce à la méthode variationnelle, il vérifie que cette solution est positive, puis l'utilise pour construire une sous-solution w_0 positive. D'autre part, $w_1 = \bar{z}$ est une sur-solution et $w_1 > w_0$ ce qui permet de déduire l'existence d'une autre solution positive du problème.

Dans cet article, l'auteur donne une démonstration de l'existence d'une solution à partir des sur- et sous-solution. Sa démonstration utilise le degré topologique. Il détermine que la solution se trouve dans un ouvert borné relativement auquel le degré topologique a la valeur -1 .

Notons que les notions de sur- et sous-solution étaient connues, et que c'est H. Amann qui introduit la terminologie de sur- et sous-solution et l'utilise dans [2]. De plus, il fournit une autre démonstration du théorème d'existence à partir des sur- et sous-solution [3].

Méthode Variationnelle Dual (1973)[4]

Les auteurs considèrent le problème elliptique *super-linéaire* (1.2.18) sous les conditions

- (1) g est localement de Hölder et continue sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ et $g(x, 0) = 0$
- (2) $|g(x, z)| \leq a_1 + a_2 |z|^s$ pour $n > 2$ et $1 < s < \frac{n+2}{n-2}$
- (3) $g(x, z) = o(|z|)$ en $z = 0$ uniformément sur $\bar{\Omega}$
- (4) $\frac{g(x, z)}{z} \rightarrow \infty, z \rightarrow \pm\infty$ uniformément sur $\bar{\Omega}$
- (5) Il existe a_4 tel que, pour $|z| \geq a_4$ on a $G(x, z) \leq \theta g(x, z)z$ où $z \in [0, \frac{1}{2}]$ où $G(x, z) = \int_0^z g(x, s)ds$.

Ils introduisent les définitions d'une méthode variationnelle duale et l'utilisent pour montrer plusieurs résultats d'existence dont

THÉORÈME. *Le problème de Dirichlet super-linéaire elliptique étudié possède une solution positive.*

Notons que la méthode variationnelle avait déjà été utilisée pour montrer l'existence de solutions de problèmes *super-linéaires* [40, 31] sans indication sur le signe (des solutions).

Existence de solutions positives pour une classe de problèmes aux limites semi-linéaires elliptiques (1979) [16]

Les auteurs considèrent le problème semi-linéaire elliptique (sous-linéaire) (1.2.18), sous les conditions

- (1) $g \in C^\alpha(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+)$
- (2) $g(x, 0) > 0$, pour $x \in \bar{\Omega}$
- (3) Il existe $0 < a_1 < \dots < a_n$ et $g(x, a_i) \leq 0$ sur $\bar{\Omega}$ et $i = 1, \dots, n$.
- (4) Si $G(x, u) = \int_0^u g(x, s)ds$, il existe $b_1 < \dots < b_{n-1} \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a_1 < b_1 < a_2 < \dots < b_{n-1} < a_n$ et $G(x, b_i) > G(x, u)$ pour $x \in \bar{\Omega}$ et $0 \leq u < b_i, i = 1, \dots, (n-1)$.

Les hypothèses (3) et (4) signifient que $g(x, \cdot)$ possède n parties positives, n parties négatives, et que l'intégrale sur une partie positive est supérieure à la valeur absolue de l'intégrale sur la partie négative précédente.

THÉORÈME. *Pour λ grand, le problème possède n solutions non négatives et ordonnées.*

Les auteurs définissent les fonctions

$$g_k(x, u) = \begin{cases} g(x, 0) & \text{pour } u < 0 \\ g(x, u) & \text{pour } 0 \leq u \leq a_k \\ g(x, a_k) & \text{pour } u > a_k \end{cases}$$

puis montrent à l'aide de la méthode variationnelle que l'équation $-Lu = \lambda g_k(x, u)$ possède une solution positive u_λ pour λ grand. Ils vérifient ensuite, que cette solution, est aussi solution du problème (1.2.18), et que $a_{k-1} < \sup u_\lambda(x) \leq a_k$.

Estimation *a priori* et existence de solutions positives de problèmes elliptiques semi-linéaires(1980)[23]

Ceci est une application de l'estimation *a priori* donnée par le théorème (1.2.1), et concerne le problème *super-linéaire* (1.2.17). Signalons ici que les auteurs utilisent le degré topologique alors que précédemment c'était la méthode variationnelle qui était utilisée.

THÉORÈME. *Sous les hypothèses du théorème (1.2.1) et si de plus*

$$(1.2.19) \quad \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t} < \lambda_1$$

alors il existe une solution positive du problème (1.2.17).

(λ_1 est la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$)

Principes de la démonstration :

Soit $X = C(\bar{\Omega})$, alors $u \in X$ est solution de (1.2.17) ssi u est point fixe de K défini par ; Kv est solution de l'équation

$$\begin{aligned} -\Delta(Kv) &= \tilde{g}(u), \text{ dans } \Omega \\ u &= 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où $v \in W^{2,p}$, ($p < \infty$) et $\tilde{g}(t) = g(t)$, si $t \geq 0$ et $\tilde{g}(t) = 0$, si $t < 0$.

Soit C une constante assez grande, par une homotopie convenable (par exemple celle ramenant $\tilde{g}(t)$ à $(\mu t^+ + 1)$, où $\mu > \lambda_1$), on peut montrer que le degré de Leray-Schauder vérifie :

$$d(I - K, B_C, 0) = 0$$

où $B_C = \{u \in X, \|u\| < C\}$, C est donné par le théorème (1.2.1). Il suffit pour cela de remarquer que les estimations *a priori* du théorème (1.2.1) valent, quand $g(t)$ est remplacée par $\theta g(t) + (1 - \theta)(\mu t^+ + 1)$, uniformément en $\theta \in [0, 1]$.

D'autre part, on déduit de (1.2.19) que zéro est une solution non singulière, il existe α assez petit tel que zéro est l'unique solution dans B_α , d'où

$$d(I - K, B_\alpha, 0) = 1$$

De la comparaison des degrés topologiques précédents, relativement à B_C et B_α , résulte le théorème.

Une méthode locale pour l'existence de solutions positives de problèmes semi-linéaires elliptiques dans R^n (1980)[9]

On considère le problème semi-linéaire

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g(u), \text{ dans } \mathbb{R}^n \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) &= 0 \end{aligned}$$

où g est Lipschitz et vérifie $g(0) = 0$. On s'intéresse aux solutions radiales du problème

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g(u), \text{ dans } B_R \\ u &= 0, \text{ sur } \partial B_R \end{aligned}$$

puis on montre que des solutions positives se conservent quand $R \rightarrow \infty$.

Pour le cas d'une non-linéarité bornée, on prend en plus les hypothèses suivantes

$$(1) \quad \exists \zeta_0 \text{ tel que } G(\zeta_0) = \int_0^{\zeta_0} g(s) ds > 0$$

- (2) ou bien g est bornée sur $\mathbb{R}^+$, ou bien $\exists s_0 \geq \zeta_0$ tel que $g(s_0) \leq 0$
 (3) $\alpha = \inf\{\zeta > 0 : g(\zeta) \geq 0\} > 0$

Un exemple d'une fonction vérifiant ces conditions se précède sous la forme $g(s) = \lambda s^p - \mu s^q - ms$, $m > 0$ et $1 < p < q$.

THÉORÈME. *Sous les conditions (1,2,3) il existe une solution positive radiale et décroissante.*

Pour le cas d'une non-linéarité non bornée, le théorème précédent reste vrai sous d'autres conditions techniques en plus de la condition nécessaire

$$(4) \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s^\beta} = 0, \text{ où } \beta = \frac{n}{n-2} \text{ si } n > 3 \text{ et } \beta < \infty \text{ si } n = 2$$

1.2.3.2. Solutions positives de problèmes non-positone. Il est apparu dans l'étude du problème *elliptique super-linéaire non-positone* que les solutions positives (non négatives) n'existent que pour $\lambda < M < \infty$.

Dans ce type de problèmes, l'hypothèse $g(0) < 0$ fait que zéro n'est pas une *sous-solution*, ce qui empêche (en général) l'utilisation de la méthode des sur- et sous-solution, utilisée avec succès pour le problème *positone*.

La plupart des travaux qui concernent cette classe de problèmes étudient le cas en dimension 1 et le problème des solutions radiales. En (1992) *Allegretto et Nistri* [1] généralisent des résultats connus au cas des solutions non radiales.

Nous donnons dans ce qui suit, une description de quatre travaux faisant ressortir des résultats importants concernant le problème *non-positone*.

Solutions non négatives pour une classe de problèmes *non-positone* (1988) [20]

On considère le problème

$$(1.2.20) \quad \begin{aligned} -u''(x) &= \lambda g(u(x)), 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

où $\lambda > 0$, $g \in C^2$ croissante et $g(0) < 0$.

Sachant que les solutions sont strictement positives et symétriques par rapport à $\frac{1}{2}$, on note $\rho = u(\frac{1}{2}) = \max u$, et on utilise la méthode de quadrature en étudiant comportement de λ en fonction ρ de

$$\sqrt{\lambda} = \sqrt{2} \int_0^\rho \frac{du}{\sqrt{G(\rho) - G(u)}}$$

où $G(s) = \int_0^s g(t)dt$. On montre que

THÉORÈME. *Soit β et θ vérifiant $f(\beta) = F(\theta) = 0$.*

- (1) *Si $g'' > 0$ et $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = \infty$, il existe $\lambda^* > 0$ tel que le problème (1.2.20) possède une unique solution positive pour $0 < \lambda \leq \lambda^*$, et ne possède pas de solution positive pour $\lambda > \lambda^*$. Fig(1.2.4)*
- (2) *Si $f'' < 0$, $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = M$, $0 < M \leq \infty$, $\lim_{s \rightarrow \infty} s f'(s) = 0$ et $\frac{f(\theta)}{\theta} < f'(\theta)$, alors il existe $0 < \mu_1 < \lambda^*$ tel que, il n'existe pas de solution positive pour $0 < \lambda < \mu_1$, il existe au moins deux solutions positives pour $\mu_1 \leq \lambda \leq \lambda^*$ et il existe une unique solution pour $\lambda > \lambda^*$. Fig(1.2.5)*

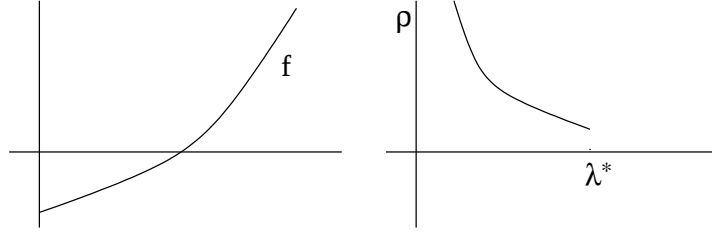


FIG. 1.2.4. Problème(1.2.20), cas (1)

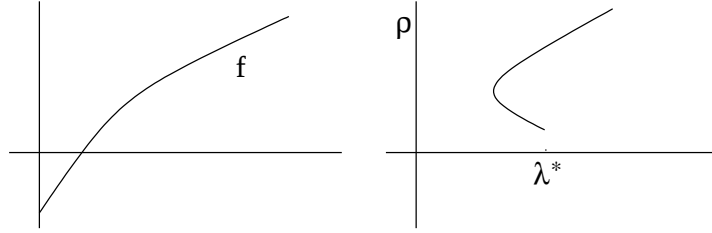


FIG. 1.2.5. Problème(1.2.20), cas (2)

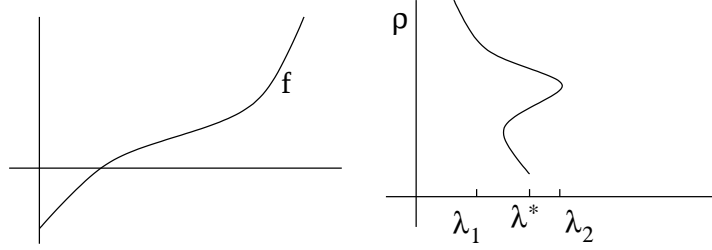


FIG. 1.2.6. Problème(1.2.20), cas (3)

- (3) Si $f'' < 0$ sur $]0, s_0[$ avec $s_0 > \theta$, $f''(s) > 0$ pour $s > s_0$, $\frac{f(\theta)}{\theta} < f'(\theta)$, et il existe $\sigma > \theta$ tel que $(F(\sigma) - f(\sigma)\sigma/2) > 0$, $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) - \lim_{s \rightarrow \infty} sf'(s) < 0$, alors il existe $0 < \lambda_1 < \lambda^* \leq \lambda_2$ tel que, il existe une unique solution pour $0 < \lambda < \lambda_1$ et il n'existe aucune solution pour $\lambda > \lambda_2$. Il existe au moins trois solutions pour $\lambda \in]\lambda_1, \lambda^*[$ et au moins deux solutions pour $\lambda \in [\lambda^*, \lambda_2[$. Fig(1.2.6)

REMARQUE. La condition de concavité garantie l'unicité de la solution et la convexité autorise la multiplicité des solutions. Ceci est en contraste avec le cas du problème *positone* où c'est la situation contraire qui a lieu.

Non-existence de solutions radiales non négatives pour une classe de problèmes non-positone (1989) [15]

On considère le problème

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda f(u), \|x\| < 1 \\ u(x) &= 0, \|x\| = 1 \end{aligned}$$

ici $\lambda > 0$, $f(0) < 0$, $f' \geq 0$ et il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u)/u^\alpha > 0$.

THÉORÈME. *Il existe un $\lambda_0 > 0$ tel que, pour $\lambda > \lambda_0$, le problème considéré n'admet pas de solution radiale non négative.*

Ce résultat de non-existence de solutions non négatives, étend celui de [20] au cas des solutions radiales en dimension $N > 1$.

Pour les solutions radiales, le problème considéré devient

$$\begin{aligned} -u'' - \frac{N-1}{t}u' &= \lambda f(u), t \in]0, 1[\\ u'(0) &= 0, u(1) = 0 \end{aligned}$$

On utilise une description qualitative des solutions ainsi que la *fonction énergie* $E(t) = \lambda F(u(t)) + [u'(t)]^2/2$, ($F(s) = \int_0^s f(t)dt$), pour déterminer des estimations sur les solutions positives du problème de Cauchy avec les conditions $u(0) = d, u'(0) = 0$, et on montre ensuite que ces estimations ne peuvent avoir lieu si $u(1) = 0$, pour λ grand.

Solutions Positives d'un problème elliptique *non-positone* (1992)[1]

Les auteurs généralisent le résultat donné dans [15] aux solutions non radiales.

Ils montrent que pour λ petit, il existe une solution positive non radiale, et que pour λ grand, il n'existe pas de solution non radiale.

On considère le problème

$$\begin{aligned} -\Delta u + 2 \sum b_j D_j u &= \lambda f(x, u), \text{ sur } \Omega \\ u &= 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où Ω est un ouvert convexe de R^n , $b_j \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $f \in C_{loc}^\alpha(R^{n+1})$ est telle que $f(x, 0) < 0$. De plus $f(x, u) \sim p(x)u^\gamma$ pour u grand avec $1 < \gamma < \frac{n+2}{n-2}$.

Un exemple vérifiant les différentes hypothèses est

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda(u^\gamma - \varepsilon), \text{ sur } \Omega \\ u &= 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Sous ces conditions on montre

THÉORÈME. *Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, il existe au moins une solution positive pour tout $0 < \lambda < \lambda_0$.*

Dans une première étape, on étudie l'homotopie par rapport à t du problème

$$\begin{aligned} -\Delta u + 2 \sum b_j D_j u &= p(x)u^\gamma + t\varphi, \text{ sur } \Omega \\ u &= 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où φ est la première fonction propre de l'opérateur $-\Delta u + 2 \sum b_j D_j u$.

On utilise une estimation donnée dans [14] et des arguments du degré topologique donnés dans [14, 52], pour obtenir l'existence d'une solution positive pour le problème avec $f(x, u) = p(x)u^\gamma$.

Dans une seconde étape, on exploite l'équivalence $f(x, u) \sim p(x)u^\gamma$ pour u grand pour étendre le résultat.

THÉORÈME. *Il n'existe pas de solution positive pour λ grand.*

On suppose ici que $f(x, u) > g(x)(u - \alpha)$, où $\alpha > 0$ et que $g(x)$ est une fonction continue strictement positive. En utilisant cette propriété et le principe du maximum, on montre que si il existe une solution pour λ grand alors elle prend nécessairement des valeurs négatives.

Existence et non-existence de solutions radiales non négatives pour un problème semi-positone sur un anneau (1994) [8]

On considère le problème sur l'anneau $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : R < |x| < \bar{R}\}$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda f(u), \text{ sur } \Omega \\ u &= 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où $\lambda > 0$.

Ici les auteurs généralisent les résultats donnés dans [1, 20] pour les solutions radiales sur un l'anneau Ω . Ils étudient précisément le problème

$$\begin{aligned} -u'' - \frac{N-1}{t}u' &= \lambda f(u) \\ u(R) &= u(\bar{R}) = 0 \end{aligned}$$

- (1) $f \in C^1([0, \infty[)$ est tel que, il existe $\beta > 0$ avec $f|_{[0, \beta[} < 0$ et $f|_{] \beta, \infty[} > 0$.
- (2) $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty$
- (3) La fonction $h(u) = NF(u) - \frac{N-2}{2}uf(u)$ est bornée inférieurement sur $[0, \infty[$.
- (4) f est strictement croissante sur $] \beta, \infty[$.

THÉORÈME. *Si les conditions (1) et (2) sont vérifiées alors il existe $\lambda^* > 0$ tel que, il n'existe pas de solution non négative pour $\lambda > \lambda^*$.*

La démonstration est une généralisation de la méthode utilisée dans [20]. Elle est basée sur un raisonnement par l'absurde utilisant une description qualitative des solutions et des estimations *a priori* sur la fonction énergie.

THÉORÈME. *Si de plus les conditions (3) et (4) sont vérifiées, alors il existe $\lambda_* > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in]0, \lambda_*[$ il existe une solution radiale positive.*

Ici les auteurs utilisent la méthode de tir en considérant le problème avec les conditions de Cauchy $u(R) = 0, u'(R) = d$. En utilisant des estimations sur la solution du problème de Cauchy, ils montrent que pour λ petit et pour une certaine valeur de d , la solution vérifie $u(\bar{R}) = 0$.

REMARQUE. Notons que ces résultats ne concernent pas les solutions non radiales.

1.3. Aperçu sur les différentes méthodes de résolution

On donne d'abord deux propriétés qui reviennent souvent dans l'étude des problèmes elliptiques, se sont *l'estimation de Schauder et le principe du maximum*. Ces propriétés servent dans différentes étapes des démonstrations notamment pour la compacité des opérateurs, la régularité des solutions, et les estimations *a priori*.

Estimation de Schauder [49, 50]

Soit $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ une solution de (1.2.2), on a

$$\|v\|_{2,\alpha} \leq k(\|g(u, \lambda)\|_{\alpha} + \|u\|_0)$$

où $\|u\|_0 = \sup_{\Omega} |u|$. Cette estimation est utilisée dans différentes situations notamment pour montrer que l'opérateur

$$\begin{aligned} T : C^{1,\alpha}(\Omega) &\rightarrow C^{1,\alpha}(\Omega) \\ u &\rightarrow v \end{aligned}$$

où v est la solution de

$$\begin{aligned} -Lv &= g(u, x, \lambda) \text{ sur } \Omega \\ v &= 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

est compact.

On voit aussi qu'il est possible d'obtenir une estimation *a priori* des solutions dans $C^{2,\alpha}(\Omega)$ dès que l'on a une estimation dans $C(\Omega)$.

D'autres estimations du même type ont lieu dans le cas où $g(u, x, \lambda) \in L^p(\Omega)$, voir [13, 5].

Le principe du maximum

Soit $u(x)$ une fonction définie sur $[a, b]$. Un maximum local de u vérifie $u''(x) \leq 0$. Le principe du maximum affirme que si u vérifie

$$-Lu(x) = u''(x) + p(x)u'(x) > 0$$

alors u ne possède pas de maximum local dans $]a, b[$. Elle atteint son maximum sur la frontière. Ce principe reste vrai pour l'inégalité large $-Lu(x) \geq 0$.

Plus généralement, l'opérateur L définie en (1.2.2) satisfait au *principe du maximum* dès que $c(x) \leq 0$ sur Ω . [27, 41], on a

PROPOSITION. Soit $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tel que

$$-Lu(x) \leq 0, \text{ respectivement } \geq 0$$

alors $\max_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u$, respectivement $\min_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega}$.

On montre alors

Unicité

le problème

$$Lu = f$$

possède une solution unique qui vérifie

$$\max_{\Omega} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u| + C \max_{\Omega} |f|$$

Comparaison

- Si $Lu \geq Lv$ sur Ω et $u \leq v$ sur $\partial\Omega$ alors $u \leq v$ sur Ω .
- Si $-Lu = \lambda_1 u$, $u = 0$ sur $\partial\Omega$, où λ_1 et u sont respectivement la première valeur propre et fonction propre de L , et $-Lv \geq \lambda v$ avec $v \geq 0$ sur Ω alors $\lambda \leq \lambda_1$

Le principe du maximum est utilisé sous différentes formes [12, 13, 5] dont

- Si $g(u, \lambda) \geq 0$ alors

$$\|u\|_0 \leq k \|g(u, \lambda)\|_\alpha$$

dans ce cas l'estimation de Schauder devient

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq k \|g(u, \lambda)\|_\alpha$$

- On suppose que $c(x) = 0$, $b_i = 0$. Soit λ_1 la première valeur propre de l'opérateur L Soit $\lambda < \lambda_1$ alors, si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ vérifie

$$\begin{aligned} -Lu &\geq \lambda u, \text{ sur } \Omega \\ u &\geq 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

on a $u \geq 0$ sur Ω .

Théorème de comparaison de Sturm (dimension une)

Soit $L = -(pu')' + qu$, où p est une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$ strictement positive et q une fonction continue sur $[0, \pi]$.

THÉORÈME. Soient deux fonctions w_1 et w_2 de classe C^2 sur un segment $[\alpha, \beta]$; w_2 n'étant pas la fonction nulle, telles que $Lw_1 = a_1 w_1$ et $Lw_2 = a_2 w_2$ sur $[\alpha, \beta]$.

Si $a_1 > a_2$ sur $[\alpha, \beta]$ et $w_2(\alpha) = w_2(\beta) = 0$, il existe $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $w_1(\gamma) = 0$.

Dans cette thèse on utilisera souvent la contraposée de l'implication donnée dans ce théorème. C'est-à-dire, si $w_1 > 0$ sur $[\alpha, \beta]$ alors $a_1 \leq a_2$.

1.3.1. Degré Topologique de Leray-Schauder. Le degré topologique de Leray-Schauder [37] est une extension du degré de Brouwer aux opérateurs $\phi(u) = (I - T)(u)$ avec T opérateur compact (*perturbation compacte de l'unité*). Nous rappelons dans ce qui suit, les définitions et les propriétés les plus importantes les concernant, voir [37, 9].

Degré de Brouwer

Soit Ω un ouvert borné de R^n et $\varphi \in C^1(\Omega, R^n)$ (φ possède une différentielle continue sur $\bar{\Omega}$). Notons $J\varphi(x)$ le Jacobien de φ en x et $S = \{x \in \Omega, J\varphi(x) = 0\}$.

Soit $b \in R^n$ tel que $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Si pour tout point $x \in \varphi^{-1}(b)$ nous avons $J\varphi(x) \neq 0$ alors $\varphi^{-1}(b)$ est discret (théorème d'inversion locale) et compact (continuité, il ne contient donc qu'un nombre fini de points).

Le degré Brouwer de l'application φ relativement à Ω et au point b est l'entier

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(b)} \text{sgn}(J\varphi(x))$$

Une extension de la définition du degré de Brouwer a été proposée par E. Heinz [29] pour $\varphi \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ et $b \notin \varphi(\partial\Omega)$

$$d(\varphi, \Omega, b) = \int_{\Omega} \eta(|\varphi(x) - b|) J\varphi(x) dx$$

avec $\eta \in C_C([0, \varepsilon[, R])$, $\int_{R^n} \eta(|x|) dx = 1$ et $\varepsilon < \text{dist}(b, \varphi(\partial\Omega))$.

Degré Topologique de *Leray-Schauder*

Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert borné de E , et $T : \bar{\Omega} \rightarrow E$, un opérateur compact. On note $\phi(u) = u - T(u)$

$$(1.3.1) \quad T(u) = u \iff \phi(u) = (I - T)(u) = 0$$

si $0 \notin \phi(\partial\Omega)$, c'est-à-dire $\inf \|u - T(u)\| > 0$ sur $\partial\Omega$, il existe E_ε un sous espace de E de dimension finie et un opérateur T_ε de rang fini tels que $T_\varepsilon : \bar{\Omega} \rightarrow E_\varepsilon$ et $\|T - T_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ (approximation par un opérateur de rang fini). Le degré Topologique au point zéro est alors défini par

$$d(\phi, \Omega) = d(\phi_\varepsilon, \Omega_\varepsilon)$$

où $\phi_\varepsilon = I_\varepsilon - T_\varepsilon$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap E_\varepsilon$ et $d(\phi_\varepsilon, \Omega_\varepsilon)$ est le degré de Brouwer. Cette définition est indépendante de T_ε et de E_ε dès que ε est assez petit.

Propriétés du degré topologique

Nous donnons dans ce qui suit les principales propriétés du degré topologique

- $d(\phi, \Omega) \neq 0$ alors $\phi(u) = 0$ possède au moins une solution dans Ω .
- $\phi(u) = 0$ ne possède pas de solution alors $d(\phi, \Omega) = 0$ (contraposée de la propriété précédente)
- Additivité
 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ alors $d(\phi, \Omega) = d(\phi, \Omega_1) + d(\phi, \Omega_2)$
- Homotopie
 $\phi(u, \theta) = u - T(u, \theta)$, $\theta \in [0, 1]$, $\Omega(\theta)$ un ouvert dépendant de manière continue de θ .
 Si $0 \notin \phi(\partial\Omega(\theta))$ alors $d(\phi(\cdot, \theta), \Omega(\theta))$ est constant pour $\theta \in [0, 1]$, on a $d(\phi(\cdot, 1), \Omega(1)) = d(\phi(\cdot, 0), \Omega(0))$.

Index (indice) d'une solution

L'utilisation de la propriété d'invariance par homotopie du degré topologique suppose la possibilité de déterminer le degré topologique pour une valeur du paramètre θ . Ceci a lieu dans le cas où l'on sait déterminer l'index de toutes les solutions dans l'ouvert borné Ω .

Soit u une solution isolée de (1.3.1) et $B(u, \varepsilon)$ une boule ouverte de E où u est l'unique solution. On appelle index de u le nombre $i(\phi, u) = d(\phi, B)$. (indépendant de ε).

Si ϕ est inversible au voisinage de u alors $i(\phi, u) = \pm 1$

Si T est un opérateur compact linéaire alors $i(\phi, u) = (-1)^m$ où m désigne la somme des multiplicités des valeurs caractéristiques de T dans $]0, 1[$.

Si T n'est pas linéaire mais admet une différentielle au sens de Fréchet au point u , alors $i(\phi, u) = (-1)^m$ où m désigne la somme des multiplicités des valeurs caractéristiques de $DT(u)$ dans $]0, 1[$.

On déduit de cette définition la propriété importante : Si $u_1, \dots, u_k$ représentent k solutions dans l'ouvert borné Ω alors $d(\phi, \Omega) = \sum i(\phi, u_i)$.

1.3.2. Autres méthodes.

Méthode de quadrature

Cette méthode s'applique aux équations autonomes du premier ordre. On peut voir une description de cette méthode dans le résumé du problème (1.2.20) (p. 27)

Bifurcation

Les problèmes abordés par la méthode de bifurcation sont les problèmes dont le second membre de l'équation a la forme

$$\begin{aligned} -Lu = g(x, u, \lambda) &= \lambda a(x)u + h(x, u, \lambda) \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où L est uniformément elliptique

$$Lu = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \quad a_{ij} = a_{ji} \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

avec $h(x, u, \lambda) = o(\|u\|)$. Ceci est aussi le cas quand $g(x, u, \lambda) = \lambda g(x, u)$ et possède une différentielle au sens de *Fréchet* continue par rapport à u .

La formulation utilisant les opérateurs donne

$$u - \lambda Tu - H(u, \lambda) = 0$$

avec $H(u, \lambda) = o(\|u\|)$, où L et H sont des opérateurs compacts définis sur $E = \{u \in C^{1,\alpha}(\Omega) : u = 0, \text{ sur } \partial\Omega\}$.

Dans le cas où $a(x) > 0$, voir [5], les valeurs caractéristiques de T (ou valeurs propres de L) constituent une suite croissante qui dépend de Ω , de $a(x)$ et qui tend vers l'infini $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$

La valeur propre λ_1 est de multiplicité 1.

La courbe $(\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ constitue l'ensemble des solutions triviales du problème.

Un résultat général de *Krasnoselski* [36] affirme que pour chaque *valeur propre de multiplicité impaire* λ_i , il existe une courbe de solutions non triviales bifurquant de $(\lambda_i, 0)$.

Cette propriété peut être exploitée pour la valeur propre λ_1 qui est de multiplicité 1. Il reste alors à étudier le comportement de la courbe bifurquant en $(\lambda_1, 0)$.

Le problème de *Sturm-Liouville* autoadjoint est un exemple particulier où toutes les valeurs propres sont réelles et de multiplicité 1. Il représente un cas idéal pour cette approche, voir l'exemple (1.2.9), (p. 18)

Méthode de tir

Cette méthode est généralement appliquée aux problèmes de dimension 1, ou au problème des solutions radiales en dimension n , reformulés en dimension 1. On peut voir une description de cette technique dans l'exemple (1.2.10), (p. 19)

Théorème d'inversion Globale

Cette approche s'applique pour les cas où la fonction g est asymptotiquement linéaire à l'infini. Elle utilise un théorème d'inversion globale sur des espaces de métriques M et N .

THÉORÈME. Soit $F \in C(M, N)$ un opérateur propre et localement inversible sur M . Si M est connexe par arcs et N connexe, alors, F est un homéomorphisme de M vers N .

où F propre signifie que $F^{-1}(K)$ est compact pour tout compact K .

Comme application de ce théorème, on considère le problème [5]

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= p(u(x)) + h(x), \text{ dans } \Omega \\ u &= 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où $p \in C^1(\mathbb{R})$. On note λ_1 la première valeur propre de $-\Delta$ sur Ω . De plus, on suppose que

- (1) $p(s) \geq 0$ pour tout s
- (2) Il existe $\gamma < \lambda_1$ et $b \geq 0$ tel que $p(s) \leq \gamma s + b$ pour tout $s \geq 0$
- (3) $p'(s) < \lambda_1$

THÉORÈME. Il existe une unique solution $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ pour toute fonction $h \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Principe de la preuve :

On note

$$\begin{aligned} X &= \{u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\ Y &= C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \\ F &: X \rightarrow Y, F(u) = \Delta u + p(u) \end{aligned}$$

On montre que F est localement inversible et, est propre, d'où le théorème [5].

Une généralisation importante de cette méthode a été donnée par Ambosetti et Prodi en (1973)[6, 5].

CHAPITRE 2

Étude d'un problème super-linéaire

2.1. Introduction

Nous donnons dans cette partie un aperçu détaillé des résultats et des preuves pour un problème générale représentant le sujet de cette thèse. Dans la section (2), on retrouvera une estimation *a priori* concernant le problème (2.1.1), et dans la section (3), on retrouve la classification des solutions proposée dans cette thèse.

Comme conséquence de cela, nous obtenons des résultats d'existence de solutions pour deux problèmes du type (2.1.1) que nous détaillons dans le chapitre 3.

On considère le problème de Dirichlet *super-linéaire*

$$(2.1.1) \quad \begin{aligned} -u''(t) - p(t)u'(t) &= g(u(t)) - \lambda - f(t), t \in [0, 1] \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

où $\lambda > 0$, $f \in C^1[0, 1]$, $g \in C(R, R)$ et il existe $A \geq 0$ tel que $g|_{[A, \infty[}$ est positive, croissante, dérivable et convexe, $g|_{]-\infty, A]}$ est positive, décroissante et convexe. De plus

$$(2.1.2) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \pm\infty, x \rightarrow \pm\infty$$

Sans perdre de généralité on supposera que f est positive, on note $M = \max f(t)$ et $M' = \max |f'(t)|$ pour $t \in [0, 1]$.

On supposera que la fonction $p(t)$ est positive, si elle est négative, on revient au cas positif grâce au changement de variable $t = 1 - s$.

Pour l'obtention d'estimations *a priori*, on n'exige pas que $p(t)$ soit continue ou bornée. Le cas $p(t) = \frac{1}{t}$ est traité dans [48].

L'estimation *a priori* reste vraie pour la non-linéarité $g(t, u, \lambda) = g(u) - \lambda f$, voir [47].

Avec l'hypothèse $f' > 0$ (respectivement $f' < 0$) une classification analogue à celle donnée ici reste vraie pour la non-linéarité $g(t, u, \lambda) = g(u) - \lambda f$, même si $\lambda f'$ n'est pas bornée pour $\lambda > 0$, voir [47].

2.2. Une estimation *a priori*

Le calcul d'estimations *a priori* constitue une question majeure des équations elliptiques. En effet, l'application des méthodes topologiques nécessite une estimation de l'ensemble des solutions.

Dans [40] l'auteur donne un résultat de non-existence de solutions pour une classe de problèmes elliptiques ne vérifiant pas l'hypothèse (1.2.3), (p. 13, 17).

D'autre part dans [23] les auteurs donnent une estimation des solutions positives pour une classe de problèmes *sous-critiques*. Cette estimation a été ensuite utilisée pour montrer l'existence de solutions positives et nodales par différents auteurs.

On remarque que l'estimation donnée ici pour le problème (2.1.1) concerne une classe de problèmes *non sous-critiques* (ne vérifiant pas (1.2.3)). En effet, on montre dans [48] que cette estimation reste vraie pour une classe de solutions radiales nodales ayant un minimum local en zéro.

Estimation *a priori*

PROPOSITION 2.2.1. *Il existe $C > 0$ et $K(\lambda)$ une fonction continue définie sur $[C, \infty[$ tels que, pour toute solution (u, λ) de (2.1.1) vérifiant $\lambda > C$ et $u'(0) \leq 0$, on a $\|u\|_0 < K(\lambda)$.*

DÉMONSTRATION. On multiplie (2.1.1) par u' et on intègre pour obtenir

$$(2.2.1) \quad \left[-\frac{(u')^2}{2} \right] = \int g(u)u'dt - \int u'dt - \int fu'dt + \int p(u')^2 dt$$

on remarque que

$$\int p(u')^2 dt \geq 0$$

Estimation des minimums locaux

Soit α un minimum local, pour λ grand

$$(2.2.2) \quad |u(\alpha)| \leq R(\lambda + M)$$

Comme $u''(\alpha) \geq 0$, (2.1.1) donne

$$(2.2.3) \quad g(u(\alpha)) \leq \lambda + f(\alpha) \leq \lambda + M$$

Cas où $u(\alpha)$ est négatif : si $u(\alpha) \leq -A$ et comme $|g_-^{-1}|$ est croissante sur $[g(-A), \infty[$, (2.2.3) donne $|g_-^{-1}(\lambda + M)| \geq |u(\alpha)|$. Si $-A \leq u(\alpha) \leq 0$ alors pour λ assez grand $|g_-^{-1}(\lambda + M)| > A \geq |u(\alpha)|$.

Cas où $u(\alpha)$ positif : si $A \leq u(\alpha)$, comme g_+^{-1} est croissante sur $[g(A), \infty[$, (2.2.3) donne $g_+^{-1}(\lambda + M) \geq u(\alpha)$. Si $0 \leq u(\alpha) \leq A$, alors pour λ grand $g_+^{-1}(\lambda + M) > A \geq u(\alpha)$.

Estimation des maximums locaux : Soit β un maximum local.

Cas où $u(\beta)$ est négatif : il est clair qu'il existe un minimum local négatif $u(\alpha)$ tel que $\alpha \in]\beta, 1[$ et $|u(\beta)| \leq |u(\alpha)|$, alors (2.2.2) donne

$$|u(\beta)| \leq R(\lambda + M)$$

Cas où $u(\beta)$ est positif : comme $u''(\beta) \leq 0$, (2.1.1) donne pour λ grand

$$(2.2.4) \quad \begin{aligned} g(u(\beta)) &\geq \lambda + f(\beta) \geq \lambda \\ u(\beta) &\geq g_+^{-1}(\lambda) \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $u'(0) \leq 0$, il existe α le proche minimum local de β vérifiant $\alpha < \beta$ et $u'(t) \geq 0$ sur $]\alpha, \beta[$. (2.2.1) donne

$$(2.2.5) \quad \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)/2} g(u) du + \int_{u(\beta)/2}^{u(\beta)} g(u) du - \int_{\alpha}^{\beta} (\lambda + \theta f) u dt \leq 0$$

réécrivons

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)/2} g(u) du = \int_{u(\alpha)}^{-A} g(u) du + \int_{-A}^A g(u) du + \int_A^{u(\beta)/2} g(u) du$$

il est clair que $\int_{u(\alpha)}^{-A} g(u) du \geq 0$ et que $\int_{-A}^A g(u) du$ est borné, de plus (2.2.4) implique que $\int_A^{u(\beta)/2} g(u) du \rightarrow +\infty$, $\lambda \rightarrow \infty$, d'où $\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)/2} g(u) du > 0$ pour λ grand.

D'autre part,

$$- \int_{\alpha}^{\beta} (\lambda + \theta f) u dt \geq -(\lambda + M)(u(\beta) - u(\alpha))$$

(2.2.3) et (2.2.5) donnent pour λ grand

$$\int_{u(\alpha)/2}^{u(\beta)} g(u) du - (\lambda + M)(u(\beta) + R(\lambda + M)) < 0$$

comme g_+ est croissante on a

$$\begin{aligned} \int_{u(\alpha)/2}^{u(\beta)} g(u) du &> g(u(\beta)/2) \frac{u(\beta)}{2} \\ g(u(\beta)/2) \frac{u(\beta)}{2} &< (\lambda + M)(u(\beta) + R(\lambda + M)) \end{aligned}$$

enfin, on remarque que si $u(\beta) > R(\lambda + M)$ alors

$$(2.2.6) \quad u(\beta) < 2R(4(\lambda + M))$$

□

2.3. Une classification des solutions

Considérons le problème de Sturm-Liouville

$$(2.3.1) \quad -(pu')' + qu = \lambda a(x)u$$

avec les conditions aux limites $CL(a_0u(0) + b_0u'(0) = 0$ et $a_0u(1) + b_0u'(1) = 0)$, où p et q sont continues et $p(x) \neq 0$.

On sait que ce problème possède une suite de valeurs propres $(\lambda_{n \geq 1})$, ordonnées et convergente vers ∞ , et une suite de fonctions propres $(\varphi_{n \geq 1})$ dans l'ensemble $E = \{u \in C^1([0, 1], R) : u \text{ vérifie } CL\}$.

Le théorème de comparaison de Sturm permet alors de montrer que toute fonction φ_n possède exactement $(n - 1)$ zéros simples dans $]0, 1[$.

Cette caractérisation des solutions se retrouve dans un résultat de *P.H.Rabinowitz* [45] où on considère le problème

$$(2.3.2) \quad -(pu')' + qu = \lambda(a(x)u + h(x, u, u')), \text{ avec } CL$$

ici $h(x, u, u') = o(\|u\| + \|u'\|)$. On montre que, à partir de la branche de solutions triviales $(\lambda, 0)$, aux points $(\lambda_n, 0)$, bifurque une branche de solutions non bornées C_n telle que, pour toute solution $(\lambda, u_\lambda) \in C_n$ la fonction u_λ possède exactement $(n - 1)$ zéros simples dans $]0, 1[$, fig(1.2.1).

Il propose donc une classifications des solutions suivants les ensembles

$$S_n = \{u \in E : u \text{ possède } (n - 1) \text{ zéros simples dans }]0, 1[\}$$

cette classification montre une caractéristique commune du problème étudié avec le problème de Sturm-Liouville classique.

Cette classification ne convient pas pour les problèmes semi-linéaires comme on peut le constater dans les cas étudiés par *Ammar-Khodja et Ramaswami* [7, 46], où sur une même branche C_n de solutions on retrouve des solutions de S_{n-1} , S_n et S_{n+1} , fig(1.2.2) et fig(1.2.3).

La classification que nous proposons ici concernant le problème (2.1.1) ne prend pas en considération les zéros de u , mais les zéros de $u - g^{-1}(\lambda + f)$. Soit $E = \{u \in C^1([0, 1], R) : u(0) = u(1) = 0\}$, on note

$$Z_k(\lambda) = \{u \in E : u - g_+^{-1}(\lambda + f) \text{ possède } k \text{ zéros simples dans } [0, 1]\}$$

Cette classification permet alors une caractérisation plus naturelle des branches de solutions données dans [7, 46].

Il est clair que les ensembles $Z_k(\lambda)$ sont des ouverts disjoints de E .

Le résultat principal de cette partie est donné par le lemme suivant

LEMME 2.3.1. *Il existe une suite $(B_k)(k \geq 0)$ telle que , pour tout $\lambda > B_k$ il n'existe pas de solution $u \in \partial Z_{2k}(\lambda)$ vérifiant $u'(0) \leq 0$.*

La démonstration est donnée plus bas.

On donne d'abord deux formules dont on aura besoin plus bas

Le théorème de la moyenne donne

$$\left| \int_{g_+^{-1}(\lambda+m_1)}^{g_+^{-1}(\lambda+m_2)} (g(u) - \lambda) du \right| \leq m_2 |g_+^{-1}(\lambda+m_2) - g_+^{-1}(\lambda+m_1)|$$

il existe $\mu \in]m_1, m_2[$ tel que $g_+^{-1}(\lambda+m_2) - g_+^{-1}(\lambda+m_1) = \frac{m_2 - m_1}{g'(g_+^{-1}(\lambda+\mu))}$, d'où

$$(2.3.3) \quad \left| \int_{g_+^{-1}(\lambda+m_1)}^{g_+^{-1}(\lambda+m_2)} (g(u) - \lambda) du \right| \leq m_2 \left| \frac{m_2 - m_1}{g'(g_+^{-1}(\lambda+\mu))} \right|$$

Soit $a, b \in [0, 1]$, on a

$$(2.3.4) \quad \begin{aligned} \int_a^b f u' dt &= (f(b)u(b) - f(a)u(a)) + \int_a^b f' u dt \\ \left| \int_a^b f u' dt \right| &\leq (2M + M') \max_{[a,b]} |u(t)| \end{aligned}$$

REMARQUE 2.3.2. Pour λ grand

$$\begin{aligned} u > g_+^{-1}(\lambda + f) &\Rightarrow g(u) - (\lambda + f) > 0 \\ u = g_+^{-1}(\lambda + f) &\Rightarrow g(u) - (\lambda + f) = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$u < g_+^{-1}(\lambda + f) \Rightarrow g(u) - (\lambda + f) < 0$$

donc pour β un maximum local on a $g_+^{-1}(\lambda + f(\beta)) < u(\beta)$, et pour α un minimum local on a $g_+^{-1}(\lambda + f(\alpha)) > u(\alpha)$.

Estimation de la dérivée aux zéros de $u(t) - g_+^{-1}(\lambda + f(t))$.

LEMME 2.3.3. Il existe une suite positive (A_k) ($k \geq 1$) telle que, pour toute solution (u, λ) de (2.1.1) vérifiant $u'(0) \leq 0$, $\lambda > A_k$ et $u - g_+^{-1}(\lambda + f)$ ayant au moins k zéros, il existe $B > 0$ vérifiant pour les k zéros les plus grands

$$(2.3.5) \quad |u'(\tau)| > B \sqrt{\lambda g_+^{-1}(\lambda/2)}$$

DÉMONSTRATION. Les k plus grand zéros de $u - g_+^{-1}(\lambda + f)$ sont notés $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < 1$. τ_k représente le zéro le plus grand.

Estimation de $u'(\tau_k)$

Soit $\eta \in]\tau_k, 1[$ le plus petit zéro de $u(t)$. Comme $g_+^{-1}(\lambda + f) > u$, on déduit de la **remarque(2.3.2)** que $u(t)$ n'a pas de maximum local dans $]\tau_k, \eta[$, donc u est décroissante sur $[\tau_k, \eta]$ et (2.1.1) implique qu'elle est convexe.

Soit a l'unique élément de $]\tau_k, \eta[$ tel que $u(a) = g_+^{-1}(\lambda/2)$. Notons $h(t)$ le segment reliant $u(a)$ à $u(\eta) = 0$, et posons $v(t) = h(t) - u(t)$ sur $]a, \eta[$, on a $-v'' = \lambda + f - g(u) - pu'$. Comme u vérifie $u < g_+^{-1}(\lambda/2)$ et est décroissante, on a $-v'' > \lambda/2$, enfin comme $v < g_+^{-1}(\lambda/2)$

$$\begin{aligned} -v'' &> \frac{\lambda}{2g_+^{-1}(\lambda/2)} v, \text{ sur }]a, \eta[\\ v(\eta) &= v(a) = 0 \end{aligned}$$

on pose $t = s(\eta - a) + a, s \in [0, 1]$ et $w(s) = v(s(\eta - a) + a)$

$$\begin{aligned} -w'' &> (\eta - a) \frac{\lambda}{2g_+^{-1}(\lambda/2)} w, \text{ sur }]0, 1[\\ w(0) &= w(1) = 0 \end{aligned}$$

le théorème de comparaison de Sturm donne $(\eta - a) < \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{g_+^{-1}(\lambda/2)}{\lambda}}$.

Comme u est convexe sur $]\eta, \tau_k[$, $|u'(\tau_k)| > |u'(a)| > \frac{u(a)}{(\eta - a)}$, donc

$$|u'(\tau_k)| > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\lambda g_+^{-1}(\lambda/2)}$$

On utilisera un raisonnement par récurrence.

L'hypothèse est vraie pour τ_k . Soit $B > 0, \delta > 0, \tau_i$ et τ_{i+1} deux zéros consécutifs satisfaisant $|u'(\tau_{i+1})| > B\sqrt{\lambda g_+^{-1}(\lambda/2)}$, alors pour λ grand on a $|u'(\tau_i)| > (B - \delta)\sqrt{\lambda g_+^{-1}(\lambda/2)}$.

(2.2.1) donne

$$\frac{(u'(\tau_i))^2}{2} \geq \frac{(u'(\tau_{i+1}))^2}{2} + \int_{u(\tau_i)}^{u(\tau_{i+1})} (g(u) - \lambda) du - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f u' dt$$

alors (2.26), (2.3.3) et (2.3.4) donnent

$$\frac{(u'(\tau_i))^2}{2} \geq \frac{B^2}{2} \lambda g_+^{-1}(\lambda/2) - M \left| \frac{f(\tau_{i+1}) - f(\tau_i)}{g'(g_+^{-1}(\lambda))} \right| - (2M + M') 2R(4(\lambda + M))$$

(2.1.2) donne $\frac{R(4(\lambda + M))}{\lambda g_+^{-1}(\lambda/2)} \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$, d'où on déduit (2.3.5). $\square$

La remarque suivante décrit la concavité de u pour λ grand.

REMARQUE 2.3.4. Soit τ_i et τ_{i+1} deux zéros consécutifs de $u - g_+^{-1}(\lambda + f)$ vérifiant $u - g_+^{-1}(\lambda + f) < 0$ sur $]\tau_i, \tau_{i+1}[$, le *principe du maximum* affirme qu'il n'y a pas de *minimum local* dans $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ donc $u'(\tau_i) > 0$ et $u'(\tau_{i+1}) < 0$.

De la même manière on déduit que pour τ_i et τ_{i+1} deux zéros consécutifs de $u - g_+^{-1}(\lambda + f)$, tels que $u - g_+^{-1}(\lambda + f) > 0$ sur $]\tau_i, \tau_{i+1}[$, on a $u'(\tau_i) < 0$ et $u'(\tau_{i+1}) > 0$.

Preuve du lemme principal (2.3.1)

DÉMONSTRATION. *Par l'absurde, soit $u \in \partial Z_{2k}(\lambda)$ une solution de (2.1.1).*

Cas $k = 0$: soit (v_n) une suite de solutions de (2.1.1) dans $Z_0(\lambda)$ telle que $v_n \rightarrow u$. On déduit des remarques (2.1.1) que $v_n < 0$ sur $]0, 1[$ donc $u \leq 0$, d'où $u - g_+^{-1}(\lambda + f)$ n'a pas de zéro, on déduit que $u \in Z_0(\lambda)$ ainsi $u \notin \partial Z_0(\lambda)$, contradiction.

Cas $k \geq 1$: On montre d'abord que $u - g_+^{-1}(\lambda + f)$ possède au plus $2k$ zéros simples.

En effet, soit τ un zéro simple, il existe $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ et $\delta > 0$ tels que τ est l'unique zéro sur $]\tau - \varepsilon_0, \tau + \varepsilon_0[$, supposons que $u - g_+^{-1}(\lambda + f)$ est croissante (si elle est décroissante les inégalités son inversées)

$$\begin{aligned} u(\tau - \varepsilon_0) - g_+^{-1}(\lambda + f(\tau - \varepsilon_0)) &< -\varepsilon_1 \\ u(\tau + \varepsilon_0) - g_+^{-1}(\lambda + f(\tau + \varepsilon_0)) &> \varepsilon_1 \\ u' - [g_+^{-1}(\lambda + f)]' &> \delta \end{aligned}$$

Soit (v_n) une suite de $Z_{2k}(\lambda)$ telle que $v_n \rightarrow u$ dans E , il existe $n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \delta) \in \mathbb{N}$ tel que pour $n > n(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \delta)$

$$\begin{aligned} |u(\tau - \varepsilon_0) - v_n(\tau - \varepsilon_0)| &< \varepsilon_1/2 \\ |u(\tau + \varepsilon_0) - v_n(\tau + \varepsilon_0)| &< \varepsilon_1/2 \\ \|u' - v'\|_0 &< \delta/2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} v_n(\tau - \varepsilon_0) - g_+^{-1}(\lambda + f(\tau - \varepsilon_0)) &< \varepsilon_1/2 \\ v_n(\tau + \varepsilon_0) - g_+^{-1}(\lambda + f(\tau + \varepsilon_0)) &> \varepsilon_1/2 \\ v'_n - [g_+^{-1}(\lambda + f)]' &> \delta/2 \end{aligned}$$

ce qui implique que $v_n - g_+^{-1}(\lambda + f)$ a un unique zéro simple dans $]\tau - \varepsilon_0, \tau + \varepsilon_0[$. Comme $v_n \in Z_{2k}(\lambda)$, $v_n - g_+^{-1}(\lambda + f)$ a exactement $2k$ zéros simples, donc $u - g_+^{-1}(\lambda + f)$ a *au plus* $2k$ zéros simples.

Il n'y a pas exactement $m < 2k$ zéros simples.

En effet, supposons que c'est le cas, alors $u \in Z_m(\lambda)$. Comme $Z_{2k}(\lambda)$ et $Z_m(\lambda)$ sont des ouverts de E et de plus $Z_m(\lambda) \cap Z_{2k}(\lambda) \neq \emptyset$, alors $Z_m(\lambda) \cap \partial Z_{2k}(\lambda) = \emptyset$, ce qui contredit $u \in \partial Z_{2k}(\lambda)$.

Enfin, comme il existe au plus $2k$ zéros simples de $u - g_+^{-1}(\lambda + f)$, il existe τ_j un zéro double tel que $j \leq 2k + 1$. Le **lemme(2.3.3)** implique qu'il existe $A_{2k+1} > 0$ tel que pour $\lambda > A_{2k+1}$ $|u'(\tau_j)| > B\sqrt{\lambda g_+^{-1}(\lambda/2)}$

D'autre part $|[g_+^{-1}(\lambda + f)]'| \leq \frac{M'}{g'_+(g_+^{-1}(\lambda))}$, à partir de (2.3.5) il est clair que $|u'(\tau_j)| > |[g_+^{-1}(\lambda + f(\tau_i))]'|$ pour λ grand, ainsi τ_j est un zéro simple de $u - g_+^{-1}(\lambda + f)$, contradiction. $\square$

CHAPITRE 3

Travaux

3.1. Degré topologique et problème non linéaire

Résumé [47]

On généralise l'application de l'invariance par homotopie du degré topologique au problème non linéaire $-\ddot{u}(t) = g(u(t)) - \lambda f(t)$, $u(0) = u(1) = 0$.

Pour cela on définit des ensembles de fonctions Z_k qui généralisent les ensembles S_k introduits par P.H.Rabinowitz. On définit un opérateur compact qui dépend des paramètres $\lambda > 0$ et $\theta \in [0, 1]$ liés à l'équation $-\ddot{u} = g(u)\theta + (1 - \theta)u^2 - \lambda(f(t)\theta + 1 - \theta)$. Puis on utilise l'homotopie par rapport à θ sur des ouverts bornés de Z_k et pour λ assez grand, pour déduire une infinité de solutions à partir du problème $-\ddot{u}(t) = u^2(t) - \lambda$ étudié par F. Ammar-Khodja.

Introduction

On considère le problème

$$(3.1.1) \quad \begin{aligned} -\ddot{u}(t) &= g(u(t)) - \lambda f(t), \text{ sur } [0, 1] \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

où $\lambda > 0$, $f \in C^1([0, 1], R_+)$ est croissante et $f(0) > 0$. $g \in C(R, R)$ et il existe $A > 0$ tel que $g_+ = g|_{[A, \infty[}$ est positive, croissante, dérivable et convexe, $g_- = g|_{]-\infty, -A]}$ est positive et strictement décroissante. De plus

$$(3.1.2) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \pm\infty, x \rightarrow \pm\infty$$

$$(3.1.3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(4Mx)}{g_-^{-1}(m'x)} \sqrt{\frac{g_+^{-1}(mx)}{x}} = 0, x \rightarrow +\infty$$

où pour $x \geq \max\{g_-(-A), g_+(A)\}$, $R(x) = \max\{|g_-^{-1}(x)|, g_+^{-1}(x)\}$, $M = \max f(t)$, $m = \min f(t)$ sur $[0, 1]$, et $m' \in]0, m]$.

On remarque que dans (3.1.3) apparaît une relation entre $g_-^{-1}(x)$ et $g_+^{-1}(x)$, et que

$$(3.1.2) \text{ implique } \frac{g_+^{-1}(mx)}{x} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty.$$

Pour $k \in N$ et $\lambda > A/f(0)$ on définit

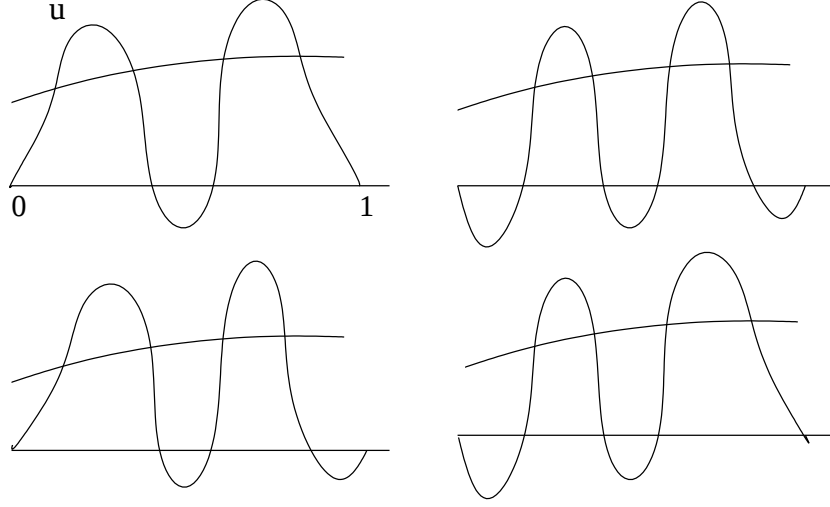
$$E = \{u \in C^1([0, 1], R) : u(0) = u(1) = 0\}$$

muni de la norme usuelle du maximum.

On définit les ensembles de fonctions $Z_k \subset E \times R_+$ par

$$Z_k = \{(u, \lambda) \in E \times R_+ : u(t) - g_+^{-1}(\lambda f(t)) \text{ a } k \text{ zéros dans } [0, 1] \text{ tels que } \dot{u} < 0\}$$

THÉORÈME 3.1.1. *Il existe une suite de réels positifs (β_k) telle que*

FIG. 3.1.1. Solutions de Z_2

- Pour tout $\lambda > \beta_0$ il existe au moins une solution $(u, \lambda) \in Z_0$
- Pour tout $\lambda > \beta_1$ il existe au moins trois solutions $(u, \lambda) \in Z_1$
- Pour tout $\lambda > \beta_k (k > 1)$ il existe au moins quatre solutions $(u, \lambda) \in Z_k$.

Pour appliquer l'invariance par homotopie du degré topologique *P.H.Rabinowitz* [45] considère les ensembles $S_k = \{\varphi \in E : \varphi \text{ a } (k-1) \text{ zéros simples dans }]0, 1[\}$ et distingue les sous ensembles S_k^+ et S_k^- par rapport au signe de $\dot{\varphi}(0)$. Puis utilisant les propriétés des points de bifurcation, il détermine la valeur du degré topologique au voisinage de ces points et l'exploite pour obtenir un résultat d'existence de solutions.

Pour établir notre résultat, On définit un opérateur compact dépendant de $\lambda > 0$ et $\theta \in [0, 1]$, lié à l'équation $-\ddot{u} = g(u)\theta + (1-\theta)u^2 - \lambda(f(t)\theta + 1 - \theta)$, pour $\theta = 0$ on a l'équation $-\ddot{u} = u^2 - \lambda$, étudié par *F. Ammar-Khodja* [7] et pour $\theta = 1$ on a (3.1.1).

On définit des ensembles Z_k et on distingue les sous ensembles $Z_k^{++}, Z_k^{+-}, Z_k^{-+}$ et Z_k^{--} suivant les signes de $\dot{u}(0)$ et $\dot{u}(1)$. On exploite ensuite les propriétés des points de bifurcation de (3.1.25) pour déduire la valeur du degré topologique au voisinage de ces points. L'invariance par homotopie par rapport à λ donne la valeur du degré topologique pour les autres solutions de (3.1.25).

Pour λ assez grand, l'invariance par homotopie par rapport à θ donne les solutions de (3.1.1). fig(3.1.1)

Définitions et estimations a priori

On considère le problème

$$(3.1.4) \quad \begin{aligned} -\ddot{u}(t) &= g(u(t), \theta) - \lambda f(t, \theta), t \in [0, 1] \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

où $\lambda > 0$ et $\theta \in [0, 1]$. $f(t, \theta) \in C([0, 1]^2, R_+)$ est de classe C^1 , croissante par rapport à t , et $f(0, \theta) > 0$. $g(x, \theta) \in C(R \times [0, 1], R)$ et il existe $A > 0$ tel que $g_+(x, \theta) = g(x, \theta)|_{[A, \infty[}$ est positive, croissante, dérivable et convexe par rapport à

x , $g_-(x, \theta) = g(x, \theta)|_{]-\infty, -A]}$ est positive et strictement décroissante par rapport à x . De plus, on a uniformément par rapport à θ

$$(3.1.5) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x, \theta)}{x} = \pm\infty, x \rightarrow \pm\infty$$

$$(3.1.6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(4Mx, \theta)}{g_-^{-1}(m'x, \theta)} \sqrt{\frac{g_+^{-1}(mx, \theta)}{x}} = 0, x \rightarrow +\infty$$

où pour $x \geq \max\{g_-(-A, \theta), g_+(A, \theta)\}$, $R(x, \theta) = \max\{|g_-^{-1}(x, \theta)|, g_+^{-1}(x, \theta)\}$, $M = \max f(t, \theta)$, $m = \min f(t, \theta)$, pour $(t, \theta) \in [0, 1]^2$, et $m' \in]0, m]$.

On note f , f' et u , respectivement, la fonction $f(t, \theta)$, la dérivée de $f(t, \theta)$ par rapport à t , et $u(t)$.

PROPOSITION 3.1.2. *Il existe $A_3 > 0$ et $K(\lambda)$ une fonction positive, continue et définie sur $[A_3, \infty[$ tels que, pour toute solution (u, θ, λ) de (3.1.4) satisfaisant $\lambda > A_3$ et u ayant au moins un minimum local dans $]0, 1[$, on a $\|u\| < K(\lambda)$.*

DÉMONSTRATION. par intégration (3.1.4) donne

$$(3.1.7) \quad \left[-\frac{\dot{u}^2}{2} \right] = \int g(u, \theta) \dot{u} - \lambda \int f \dot{u}$$

$$(3.1.8) \quad \left[-\frac{\dot{u}^2}{2} \right] = \int g(u, \theta) u - \lambda [fu] + \lambda \int f' u$$

Estimation des minimums locaux

Soit α un minimum local, il existe $A_1 > 0$ tel que, pour tout $\lambda > A_1$, on a

$$(3.1.9) \quad |u(\alpha)| \leq R(\lambda M, \theta)$$

On a $-\ddot{u}(\alpha) = g(u(\alpha), \theta) - \lambda f(\alpha, \theta) \leq 0$ donc $g(u(\alpha), \theta) \leq \lambda f(\alpha, \theta) \leq \lambda M$.

Si $u(\alpha)$ est négatif alors pour λ grand on a $|u(\alpha)| \leq |g_-^{-1}(\lambda M, \theta)|$. En effet, d'une part si $u(\alpha) \leq -A$, comme $g_-^{-1}(\cdot, \theta)$ est bien définie et décroissante sur $[g(-A, \theta), \infty[$, elle est inversible donc $g(u(\alpha), \theta) \leq \lambda M \Rightarrow |g_-^{-1}(\lambda M, \theta)| \geq |u(\alpha)|$. D'autre part, si $u(\alpha) \geq -A$ alors pour λ grand on a $|g_-^{-1}(\lambda M, \theta)| \geq A \geq |u(\alpha)|$.

Si $u(\alpha)$ est positif alors pour λ grand on a $u(\alpha) \leq g_+^{-1}(\lambda M, \theta)$. En effet, d'une part si $u(\alpha) \geq A$ alors comme $g_+^{-1}(\cdot, \theta)$ est bien définie et croissante sur $[g(A, \theta), \infty[$, on obtient $g(u(\alpha), \theta) \leq \lambda M \Rightarrow g_+^{-1}(\lambda M, \theta) \geq u(\alpha)$. D'autre part si $u(\alpha) \leq A$ alors pour λ grand on a $g_+^{-1}(\lambda M, \theta) \geq A \geq u(\alpha)$.

Estimation des maximums locaux. Soit β un maximum local

Si $u(\beta)$ est négatif alors il existe un minimum local $u(\alpha), \alpha \in]\beta, 1[$ tel que $|u(\beta)| \leq |u(\alpha)|$, (3.1.9) donne $|u(\beta)| \leq R(\lambda M, \theta)$.

On suppose maintenant que $u(\beta)$ est positif. Il existe $A_2 > 0$ tel que, pour tout $\lambda > A_2$, on a

$$(3.1.10) \quad u(\beta) \geq g_+^{-1}(\lambda m, \theta)$$

comme $-\ddot{u}(\beta) = g(u(\beta), \theta) - \lambda f(\beta, \theta) \geq 0$, on a $g(u(\beta), \theta) \geq \lambda f(\beta, \theta) \geq \lambda m$. Pour λ grand $g_+^{-1}(\cdot, \theta)$ existe sur $[\lambda m, \infty[$, d'où (3.1.10).

Par hypothèse u possède au moins un minimum local, on note α le plus proche de β tel que $\alpha < \beta$ (si $\alpha > \beta$ on revient au cas précédent en posant $s = 1 - t$) alors $\dot{u}(t) \geq 0$ sur $[\alpha, \beta]$. (3.1.7) donne

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)/2} g(u, \theta) du + \int_{u(\beta)/2}^{u(\beta)} g(u, \theta) du - \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(t, \theta) \dot{u}(t) dt = 0$$

On remarque que

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)/2} g(u, \theta) du = \int_{u(\alpha)}^A g(u, \theta) du + \int_A^{u(\beta)/2} g(u, \theta) du$$

est positive pour λ grand. En effet, (3.1.10) implique que $u(\beta) \rightarrow +\infty, \lambda \rightarrow +\infty$, sachant que $g(\cdot, \theta) = g_+(\cdot, \theta)$ est positive et croissante sur $[A, \infty[$ on déduit que $\int_A^{u(\beta)/2} g(u, \theta) du \rightarrow +\infty, \lambda \rightarrow +\infty$.

Si $u(\alpha)$ est positif la continuité implique que $g(\cdot, \theta)$ est bornée sur $[u(\alpha), A]$, d'où $\int_{u(\alpha)}^A g(u, \theta) du$ est bornée.

Si $u(\alpha)$ est négatif on réécrit

$$\int_{u(\alpha)}^A g(u, \theta) du = \int_{u(\alpha)}^{-A} g(u, \theta) du + \int_{-A}^A g(u, \theta) du$$

Comme $g(\cdot, \theta) = g_-(\cdot, \theta)$ est positive sur $[u(\alpha), -A]$ (qui peut être vide), on a $\int_{u(\alpha)}^A g(u, \theta) du \geq 0$. La continuité implique que $g(\cdot, \theta)$ est bornée sur $[-A, A]$, d'où $\int_{-A}^A g(u, \theta) du$ est bornée.

D'autre part

$$\int_{u(\beta)/2}^{u(\beta)} g(u, \theta) du - \lambda M(u(\beta) + R(\lambda M, \theta)) < 0$$

où $R(\lambda M, \theta) = \max \{ |g_-^{-1}(\lambda M, \theta)|, g_+^{-1}(\lambda M, \theta) \}$.

Sachant que pour λ grand (3.1.10) implique que $g(\cdot, \theta) = g_+(\cdot, \theta)$ est décroissante sur $[u(\beta)/2, u(\beta)]$, on a

$$\int_{u(\beta)/2}^{u(\beta)} g(u, \theta) du \geq g_+(u(\beta)/2, \theta) u(\beta)/2$$

d'où

$$g_+(u(\beta)/2, \theta) u(\beta)/2 < \lambda M(u(\beta) + R(\lambda M, \theta))$$

on déduit que si $u(\beta) > R(\lambda M, \theta)$ alors $u(\beta) < 2R(4\lambda M, \theta)$.

On note $\rho = \max |u(t)|$, il existe $A_3 > 0, N_1 > 0$ tels que, pour tout $\lambda > A_3$ on a

$$(3.1.11) \quad \rho < 2N_1 R(4\lambda M, \theta)$$

□

REMARQUE 3.1.3. Pour $g(u, \theta) = u^2, g_+^{-1}(\lambda f, \theta) = \sqrt{\lambda f}$ et $g_-^{-1}(\lambda f, \theta) = -\sqrt{\lambda f}$ existe pour tout $\lambda > 0$, alors il est évident que (3.1.11) est vrai pour $\lambda > 0$. D'où, dans la **proposition(3.1.2)** $K(\lambda)$ existe pour $\lambda > 0$.

REMARQUE 3.1.4. Dans preuve de la **proposition(3.1.2)** l'hypothèse $f(t, \theta)$ croissante n'a pas été utilisée. Cette hypothèse implique que les minimums locaux sont négatifs ou nuls, voir preuve **Lemme(3.1.8)**.

On note $(u, \theta, \lambda) \in E \times [0, 1] \times R_+$ une solution du problème (3.1.4) qui est équivalent au problème de perturbation de l'unité

$$\phi(u, \theta, \lambda) = u - T(u, \theta, \lambda) = 0$$

où $T(\cdot, \theta, \lambda) : E \rightarrow E$ est un opérateur compact défini par

$$T(u, \theta, \lambda) = \int_0^1 G(x, t) (g(u(t), \theta) - \lambda f(t, \theta)) dt$$

où G est la fonction de Green de l'opérateur $L(u) = -\ddot{u}$ associé aux conditions de Dirichlet, voir [21].

Soit $k \in N$ et $\lambda > A/m$, on définit

$$\begin{aligned} Z_k(\theta, \lambda) &= \{u \in E : u(t) - g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta) \text{ possède } k \text{ zéros dans } [0, 1] \text{ tels que } \dot{u} < 0\} \\ \Omega_k^*(\theta, \lambda) &= \{u \in E : u \in Z_k(\theta, \lambda), \|u\| < K(\lambda) \text{ et } \dot{u}(0) \neq 0, \dot{u}(1) \neq 0\} \end{aligned}$$

La définition du degré topologique de $\phi(\cdot, \theta, \lambda)$ par rapport à l'ouvert $\Omega_k^*(\theta, \lambda)$ est assuré par

PROPOSITION 3.1.5. *Il existe une suite de réels positifs (λ_k) telle que, pour tout $k \in N, \lambda > \lambda_k$ et $\theta \in [0, 1]$, $\phi(\cdot, \theta, \lambda)$ n'a pas de zéro sur $\partial\Omega_k^*(\theta, \lambda)$.*

La preuve est basée sur trois lemmes.

LEMME 3.1.6. *Il existe $N_4 > 0$ et $A_4 > 0$ tels que, pour toute solution (u, θ, λ) de (3.1.4) et pour tout intervalle $]\xi, \eta[\subset]0, 1[$ tels que*

$$\begin{cases} \lambda > A_4 \\ u > 0 \text{ sur }]\xi, \eta[\\ u(\xi) = u(\eta) = 0 \end{cases}$$

On a

$$(3.1.12) \quad (\eta - \xi) < N_4 \left(\frac{g_+^{-1}(\lambda m, \theta)}{\lambda} \right)^{1/2}$$

DÉMONSTRATION. *D'abord, on donne une description de $u(t)$ sur $]\xi, \eta[$, (Fig. 2).*

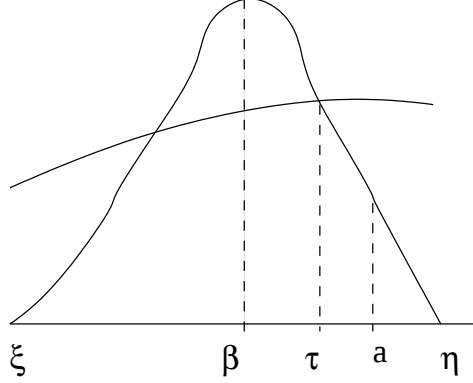
Comme $g(\cdot, \theta) = g_+(\cdot, \theta)$ est convexe et croissante sur $[A, \infty[$ alors $g_+(\cdot, \theta)$ et $g_+^{-1}(\cdot, \theta)$ sont strictement croissantes.

Pour λ grand, on a $\ddot{u}(t) < 0 \Leftrightarrow u(t) > g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta)$; en effet, il est clair que $\ddot{u}(t) < 0 \Leftrightarrow g(u(t), \theta) > \lambda f(t, \theta)$. Soit λ tel que $\lambda m > g_+(A, \theta)$ et $g_+^{-1}(\lambda m, \theta) > A$, alors comme $g_+^{-1}(\cdot, \theta)$ et $g_+(\cdot, \theta)$ sont strictement croissantes, on a $g(u(t), \theta) > \lambda f(t, \theta) \Leftrightarrow u(t) > g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta)$.

Par les mêmes arguments on obtient pour λ grand $\ddot{u}(t) = 0 \Leftrightarrow u(t) = g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta)$.

On déduit que, pour λ grand $\ddot{u}(t) > 0 \Leftrightarrow u(t) < g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta)$.

Notons que $u(t)$ ne possède pas de minimum local dans $]\xi, \eta[$, et ne possède pas de point d'inflexion tel que $u(t)$ soit croissante à droite.

FIG. 3.1.2. Description intervalle où $u > 0$.

Par l'absurde, soit $\alpha \in]\xi, \eta[$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\dot{u}(\alpha) = 0$ et $\dot{u} > 0$ sur $]\alpha, \alpha + \varepsilon[$, comme $u(t)$ est strictement positive sur $]\xi, \eta[$ et $u(\eta) = 0$, il existe $\gamma \in]\alpha, \eta[$ tel que $u(\gamma) = u(\alpha)$, $\dot{u}(\gamma) < 0$ et $u(t) > u(\alpha)$ sur $]\alpha, \gamma[$, on déduit de (3.1.8)

$$\frac{-\dot{u}^2(\gamma)}{2} = -\lambda u(\alpha) (f(\gamma, \theta) - f(\alpha, \theta)) + \lambda \int_{\alpha}^{\gamma} f'(t, \theta) u(t) dt$$

que l'on réécrit

$$\frac{-\dot{u}^2(\gamma)}{2} = \lambda \int_{\alpha}^{\gamma} f'(t, \theta) (u(t) - u(\alpha)) dt$$

le membre gauche est strictement négatif et le membre droit est positif, contradiction.

$u(t)$ possède un unique maximum local dans $]\xi, \eta[$ que l'on note $u(\beta)$.

En effet, si il existait deux maximums locaux alors u aurait un minimum local strictement positif ce qui est impossible.

On déduit des arguments précédents que $u(t)$ est strictement croissante sur $]\xi, \beta[$.

De plus, u est strictement décroissante sur $]\beta, \eta[$.

En effet, soit $\alpha \in]\beta, \eta[$ tel que $\dot{u}(\alpha) = 0$ et $\dot{u} < 0$ sur $]\beta, \alpha[$, il existe un intervalle $]\alpha - \varepsilon, \alpha[$ sur lequel $u(t)$ est convexe, d'où $u(t) < g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta)$ sur $]\alpha - \varepsilon, \alpha[$. Comme $u(t)$ est décroissante et que $g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta)$ est croissante, la continuité implique que $u(\alpha) < g_+^{-1}(\lambda f(\alpha, \theta), \theta) \Leftrightarrow \ddot{u}(\alpha) > 0$, alors α est un minimum local ce qui est impossible. $\square$

fig(3.1.2)

Soit $B \in]0, u(\beta)[$ et (t_1, t_2) l'unique élément de $]\xi, \beta[\times]\beta, \eta[$ tel que $u(t_1) = u(t_2) = B$, on déduit de (3.1.8)

$$\frac{\dot{u}^2(t_1) - \dot{u}^2(t_2)}{2} = -\lambda B (f(t_2, \theta) - f(t_1, \theta)) + \lambda \int_{t_1}^{t_2} f'(t, \theta) u(t) dt$$

que l'on réécrit

$$\frac{\dot{u}^2(t_1) - \dot{u}^2(t_2)}{2} = \lambda \int_{t_1}^{t_2} f'(t, \theta) (u(t) - B) dt$$

le membre droit est positif donc $\dot{u}(t_1) \geq |\dot{u}(t_2)|$. Comme cette inégalité est vérifiée pour tout $B \in]0, u(\beta)[$, on déduit que

$$(3.1.13) \quad (\beta - \xi) \leq (\eta - \beta)$$

Soit $\lambda > A/m$, comme $u(t)$ est décroissante et que $g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta)$ est croissante sur $] \beta, \eta[$, il existe un unique $\tau \in] \beta, \eta[$ tel que $u(\tau) = g_+^{-1}(\lambda f(\tau, \theta), \theta)$.

Intervalle $[\beta, \tau]$.

Notons par $h(t)$ le segment reliant les points $u(\beta)$ et $u(\tau)$, et posons $v(t) = u(t) - h(t)$ sur $[\beta, \tau]$. On a

$$-\ddot{v} = (g_+(v + h, \theta) - g_+(h, \theta)) + (g_+(h, \theta) - \lambda f)$$

Comme $u(t)$ est concave sur $] \beta, \tau[$, $u(t) > h(t)$, donc $v(t) > 0$.

Comme $h(t)$ est décroissante et $g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta)$ est croissante $h(t) > g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta)$, alors $g_+(h, \theta) - \lambda f > 0$.

Comme $g_+(\cdot, \theta) = g(\cdot, \theta)|_{[A, \infty[}$ est convexe, g'_+ est croissante, donc $g'_+(h, \theta) \geq g'_+(g_+^{-1}(\lambda m, \theta), \theta)$. On obtient $g_+(v + h, \theta) - g_+(h, \theta) \geq v g'_+(g_+^{-1}(\lambda m, \theta), \theta)$.

La fonction $v(t)$ vérifie

$$\left| \begin{array}{l} -\ddot{v}(t) > v(t) g'_+(g_+^{-1}(\lambda m, \theta), \theta), t \in] \beta, \tau[\\ v(\beta) = v(\tau) = 0 \end{array} \right.$$

Notons par $t = s(\tau - \beta) + \beta$, $s \in [0, 1]$ et $w(s) = v(s(\tau - \beta) + \beta)$, on a

$$\left| \begin{array}{l} -\ddot{w}(s) > w(s) (\tau - \beta)^2 g'_+(g_+^{-1}(\lambda m, \theta), \theta), s \in]0, 1[\\ w(0) = w(1) = 0 \end{array} \right.$$

le théorème de comparaison de Sturm donne

$$(3.1.14) \quad (\tau - \beta) < \frac{\pi}{\sqrt{g'_+(g_+^{-1}(\lambda m, \theta), \theta)}}$$

Intervalle $[\tau, \eta]$.

Soit $\lambda > 2A/m$. Notons par $a \in [\tau, \eta]$ l'élément tel que $u(a) = g_+^{-1}(\frac{1}{2}\lambda m, \theta)$. On a $[\tau, \eta] = [\tau, a] \cup [a, \eta]$.

Intervalle $[a, \eta]$.

Pour λ grand on a $g(u(t), \theta) < \frac{1}{2}\lambda m$ sur $]a, \eta]$.

En effet, comme $u(t)$ est décroissante $u(t) < g_+^{-1}(\frac{1}{2}\lambda m, \theta) = u(a)$ sur $]a, \eta]$, si $A \leq u(t) < g_+^{-1}(\frac{1}{2}\lambda m, \theta)$, la croissance de $g_+(\cdot, \theta)$ donne $g(u(t), \theta) < \frac{1}{2}\lambda m$, si $0 < u(t) < A$ alors pour λ grand $\frac{1}{2}\lambda m > \max |g(x, \theta)|$, pour $x \in [0, A]$ et $\theta \in [0, 1]$, on obtient $\frac{1}{2}\lambda m > |g(u(t), \theta)|$.

On note par $h(t)$ le segment joignant les points $u(a)$ et $u(\eta) = 0$, et posant $v(t) = h(t) - u(t)$, $t \in [a, \eta]$. On a $-\ddot{v}(t) = \lambda f(t, \theta) - g(u(t), \theta)$ alors $-\ddot{v}(t) > \frac{1}{2}\lambda m$.

Comme $u(t)$ est convexe $u(t) < h(t)$ sur $]a, \eta[$, alors $v(t) > 0$.

Comme $v(t) < h(t) < u(a)$ sur $]a, \eta[$, alors $0 < \frac{v(t)}{u(a)} < 1$ sur $]a, \eta[$, d'où

$$\begin{aligned} -\ddot{v}(t) &> \frac{1}{2} \lambda \frac{m}{u(a)} v(t), t \in]a, \eta[\\ v(a) &= v(\eta) = 0 \end{aligned}$$

Notons par $t = s(\eta - a) + a, s \in [0, 1]$ et $w(s) = v(s(\eta - a) + a)$, on a

$$\begin{aligned} -\ddot{w}(s) &> \frac{1}{2} \lambda \frac{m}{u(a)} (\eta - a)^2 w(s), s \in]0, 1[\\ w(0) &= w(1) = 0 \end{aligned}$$

le théorème de comparaison de Sturm donne

$$(3.1.15) \quad (\eta - a) < \frac{\pi}{\sqrt{m/2}} \left(\frac{g_+^{-1}(\frac{1}{2} \lambda m, \theta)}{\lambda} \right)^{1/2}$$

Intervalle $[\tau, a]$.

Soit $b \in [a, \eta]$ tel que $u(b) = A$. Comme $u(t)$ est convexe et décroissante sur $] \tau, \eta[$, on a $u(\tau) > u(a) > u(b) = A$, et comme $g(\cdot, \theta)$ est convexe et croissante sur $[A, \infty[$, alors $g_+(u(t), \theta)$ est convexe et décroissante sur $] \tau, b[$, d'où

$$\frac{g_+(u(a), \theta) - g_+(u(b), \theta)}{b - a} \leq \frac{g_+(u(\tau), \theta) - g_+(u(a), \theta)}{a - \tau}$$

que l'on réécrit

$$\frac{\lambda m/2 - g_+(A, \theta)}{b - a} \leq \frac{\lambda f(\tau, \theta) - \lambda m/2}{a - \tau}$$

on déduit qu'il existe $N > 0$ tel que, pour λ grand, on a $(a - \tau) < N(b - a)$, d'où

$$(3.1.16) \quad (a - \tau) < N(\eta - a)$$

Comme $g(x, \theta)$ est convexe pour $x > A$, on a

$$g'_+(x, \theta) \geq \frac{g_+(x, \theta) - g_+(A, \theta)}{x - A}$$

on déduit de (3.1.5) qu'il existe $k > 0$ tel que, pour x grand on a

$$\frac{x}{g_+(x, \theta)} \geq k \frac{1}{g'_+(x, \theta)}$$

Posons $x = g_+^{-1}(\lambda m, \theta)$, on obtient

$$\frac{g_+^{-1}(\lambda m, \theta)}{\lambda m} \geq k \frac{1}{g'_+(g_+^{-1}(\lambda m, \theta), \theta)}$$

En fin, à partir de (3.1.13), (3.1.14), (3.1.15) et (3.1.16), on déduit (3.1.12).

LEMME 3.1.7. *Soit $\varepsilon > 0$ et $m' \in]0, m[$, il existe $A(\varepsilon) > 0$ et $N(\varepsilon) > 0$ tels que, pour tout (u, θ, λ) solution (3.1.4) et pour tout intervalle $[\xi, \eta]$ vérifiant*

$$\left| \begin{array}{l} \lambda > A(\varepsilon) \\ u(t) < 0, t \in]\xi, \eta[\\ u(\xi) = u(\eta) = 0 \\ (\eta - \xi) \geq \varepsilon \end{array} \right.$$

on a

$$(3.1.17) \quad \dot{u}(\eta) > N(\varepsilon) \sqrt{\lambda |g_+^{-1}(\lambda m', \theta)|}$$

DÉMONSTRATION. On rappelle que $g_-(, \theta) = g(, \theta)|_{]-\infty, -A]}$ est positive et strictement décroissante.

Pour λ grand, il existe $\gamma \in]\xi, \eta[$ tel que $u(\gamma) = g_-^{-1}(\lambda m', \theta)$.

En effet, par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite de solutions (u_n, θ, λ_n) de (3.1.4) et une suite d'intervalles $[\xi_n, \eta_n]$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n \rightarrow +\infty \\ g_-^{-1}(\lambda_n m', \theta) < u_n(t) < 0, t \in]\xi_n, \eta_n[\\ u_n(\xi_n) = u_n(\eta_n) = 0 \\ (\eta_n - \xi_n) \geq \varepsilon \end{array} \right.$$

Pour λ_n grand on a $\lambda_n m' > g(u_n, \theta)$.

En effet, si $g_-^{-1}(\lambda_n m', \theta) < u_n \leq -A$, comme $g_-(, \theta) = g(, \theta)|_{]-\infty, -A]}$ est strictement décroissante on a $\lambda_n m' > g(u_n, \theta) \geq 0$.

Si $-A < u_n \leq 0$, alors pour λ_n grand et vérifiant $\lambda_n m' > \max |g(x, \theta)|$, $x \in [-A, 0]$, $\theta \in [0, 1]$, on a $\lambda_n m' > |g(u_n, \theta)|$.

Posons $v_n(t) = -u_n(t)$, $t \in [\xi_n, \eta_n]$. De l'égalité $-\ddot{v}_n = \lambda_n f(t, \theta) - g(u_n, \theta)$ on obtient $-\ddot{v}_n \geq \lambda_n(m - m')$. De plus $\frac{v_n}{|g_-^{-1}(\lambda_n m', \theta)|} < 1$, $t \in]\xi_n, \eta_n[$, on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{l} -\ddot{v}_n(t) > \frac{\lambda_n(m - m')}{|g_-^{-1}(\lambda_n m', \theta)|} v_n(t), t \in]\xi_n, \eta_n[\\ v_n(\xi_n) \geq 0, v_n(\eta_n) \geq 0 \end{array} \right.$$

notons $t = s(\eta_n - \xi_n) + \xi_n$, $s \in [0, 1]$ et $w_n(s) = v_n(s(\eta_n - \xi_n) + \xi_n)$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} -\ddot{w}_n(s) > \frac{\lambda_n(m - m')}{|g_-^{-1}(\lambda_n m', \theta)|} (\eta_n - \xi_n)^2 w_n(s), s \in]0, 1[\\ w_n(0) \geq 0, w_n(1) \geq 0 \end{array} \right.$$

le théorème de comparaison de Sturm donne

$$(3.1.18) \quad (\eta_n - \xi_n) < \frac{\pi}{\sqrt{m - m'}} \sqrt{\frac{|g_-^{-1}(\lambda_n m', \theta)|}{\lambda_n}}$$

(3.1.5) et (3.1.18) impliquent $(\eta_n - \xi_n) \rightarrow 0$, d'autre part $(\eta_n - \xi_n) \geq \varepsilon$, contradiction.

Soit γ l'élément le plus proche de η vérifiant $u(\gamma) = g_-^{-1}(\lambda m', \theta)$.

Pour λ grand on a $\lambda m' > g(u, \theta)$, alors $\lambda f > g(u, \theta)$ sur $]\gamma, \eta[$, voir arguments précédents, alors $u(t)$ est convexe $]\gamma, \eta[$ d'où

$$(3.1.19) \quad \dot{u}(\eta) \geq \frac{u(\eta) - u(\gamma)}{\eta - \gamma}$$

Posons $v(t) = -u(t)$, $t \in [\gamma, \eta]$, en utilisant les arguments précédents on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{l} -\ddot{v}(t) > \frac{\lambda(m - m')}{|g_-^{-1}(\lambda m', \theta)|} v(t), t \in]\gamma, \eta[\\ v(\gamma) \geq 0, v(\eta) \geq 0 \end{array} \right.$$

alors (3.1.18) peut être réécrit comme

$$(\eta - \gamma) < \frac{\pi}{\sqrt{m - m'}} \sqrt{\frac{|g_-^{-1}(\lambda m', \theta)|}{\lambda}}$$

alors (3.1.19) donne

$$\dot{u}(\eta) \geq \frac{\sqrt{m - m'}}{\pi} \sqrt{\lambda |g_-^{-1}(\lambda m', \theta)|}$$

□

LEMME 3.1.8. Soit $\delta > 0$ et $N > 0$, il existe $A(\delta) > 0$ tels que, pour toute solution (u, θ, λ) de (3.1.4), et ξ, η deux zéros consécutifs de u vérifiant pour $m' \in]0, m[$

$$\begin{cases} \lambda > A(\delta) \\ |\dot{u}(\xi)| > N \sqrt{\lambda |g_-^{-1}(\lambda m', \theta)|} \end{cases}$$

on a

$$(3.1.20) \quad |\dot{u}(\eta)| > (N - \delta) \sqrt{\lambda |g_-^{-1}(\lambda m', \theta)|}$$

DÉMONSTRATION. Si $u(t) < 0$ sur $]\xi, \eta[$ on déduit de (3.1.8)

$$\frac{\dot{u}^2(\xi) - \dot{u}^2(\eta)}{2} = \lambda \int_{\xi}^{\eta} f'(t, \theta) u(t) dt$$

comme le membre de droite est négatif on a $\dot{u}(\eta) \geq |\dot{u}(\xi)|$.

si $u(t) > 0$ sur $]\xi, \eta[$, alors de

$$\frac{\dot{u}^2(\xi) - \dot{u}^2(\eta)}{2} = \lambda \int_{\xi}^{\eta} f'(t, \theta) u(t) dt$$

on déduit

$$\dot{u}^2(\eta) > -2M' \lambda \rho(\eta - \xi) + \dot{u}^2(\xi),$$

où $\rho = \max |u(t)|$ et $M' = \max f'(t, \theta)$. (3.1.12) et (3.1.11) donnent

$$\dot{u}^2(\eta) > N^2 \lambda |g_-^{-1}(\lambda m', \theta)| - 4M' N_1 N_4 \lambda R(4\lambda M, \theta) \left(\frac{g_+^{-1}(\lambda m, \theta)}{\lambda} \right)^{1/2}$$

que l'on réécrit

$$\dot{u}^2(\eta) > N^2 \lambda |g_-^{-1}(\lambda m', \theta)| (1 - Q(\lambda, \theta))$$

où

$$\frac{Q(\lambda, \theta)}{4M' N_1 N_4} = \frac{R(4\lambda M, \theta)}{|g_-^{-1}(\lambda m', \theta)|} \left(\frac{g_+^{-1}(\lambda m, \theta)}{\lambda} \right)^{1/2}$$

qui tend vers zéro, grâce à (3.1.6). □

Preuve de la Proposition(3.1.5) :

DÉMONSTRATION. Soit $k \in N$, $\lambda > \max(A/m, A_3)$, on a

$$\Omega_k^*(\theta, \lambda) = Z_k(\theta, \lambda) \cap B(K(\lambda)) \cap D$$

où $B(K(\lambda)) \subset E$ est la boule unité de centre zéro et de rayon $K(\lambda)$, et $D = \{u \in E : \dot{u}(0) \neq 0 \text{ et } \dot{u}(1) \neq 0\}$.

On remarque que

$$\partial \Omega_k^*(\theta, \lambda) \subset \partial Z_k(\theta, \lambda) \cup \partial B(K(\lambda)) \cup \partial D$$

Notons $S(\theta, \lambda)$ l'ensemble des solutions de (3.1.4) pour θ et λ fixées. $S(\theta, \lambda)$ est un ensemble fermé de E .

Le **lemme(3.1.6)** implique qu'il n'existe pas de solution positive pour λ grand, alors toute solution a au moins un minimum local. La **proposition(3.1.2)** implique alors que pour λ grand, on a

$$(3.1.21) \quad S(\theta, \lambda) \cap \partial B(K(\lambda)) = \emptyset$$

Pour λ grand on a

$$(3.1.22) \quad S(\theta, \lambda) \cap \partial Z_k(\theta, \lambda) = \emptyset$$

En effet, soit $\tau \in]0, 1[$ vérifiant $\dot{u}(\tau) = 0$ et $u(\tau) > 0$. Soit $]\xi, \eta[$ l'intervalle tel que $\tau \in]\xi, \eta[$, $u(t) > 0$ et $u(\xi) = u(\eta) = 0$. Alors τ est l'unique maximum local $]\xi, \eta[$ (voir preuve du **lemme(3.1.8)**). D'où, il existe $]\tau, \tau + \varepsilon[$ tel que $\ddot{u}(t) < 0$, qui implique $u(t) > g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta)$, et $\dot{u}(t) < 0$. Comme $g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta)$ est croissante et $u(t)$ est décroissante, la continuité implique que $u(\tau) > g_+^{-1}(\lambda f(\tau, \theta), \theta)$, donc τ n'est pas un zéro de $u(t) - g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta)$.

D'autre part, $S(\theta, \lambda) \cap \partial \Omega_k^*(\theta, \lambda) \subset \overline{Z_k(\theta, \lambda)}$, (3.1.22) donne

$$(3.1.23) \quad S(\theta, \lambda) \cap \partial \Omega_k^*(\theta, \lambda) \subset Z_k(\theta, \lambda)$$

Pour λ grand on a

$$(3.1.24) \quad S(\theta, \lambda) \cap \partial \Omega_k^*(\theta, \lambda) \cap \partial D = \emptyset$$

Soit (u, θ, λ) une solution de (3.1.4) telle que $u \in S(\theta, \lambda) \cap \partial \Omega_k^*(\theta, \lambda)$, alors (3.1.23) implique que, pour λ grand on a $u \in Z_k(\theta, \lambda)$.

Montrons que $\dot{u}(1) \neq 0$ pour λ grand.

Soit $k \geq 1$, montrons que $u(t)$ est strictement positive sur k intervalles ouverts de $[0, 1]$, et négative sur au moins $(k - 1)$ et au plus $(k + 1)$ intervalles de $[0, 1]$.

On note $\tau_n (n = 1, \dots, k)$ les k zéros de $u(t) - g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta)$ tels que $\dot{u} < 0$, et soit $[\xi_n, \eta_n]$ le plus grand intervalle vérifiant

$$\left| \begin{array}{l} \tau_n \in]\xi_n, \eta_n[\\ u(t) > 0, t \in]\xi_n, \eta_n[\\ u(\xi_n) = u(\eta_n) = 0 \end{array} \right.$$

Les intervalles $]\xi_n, \eta_n[$ sont disjoints. Par l'absurde, on suppose que $]\xi_n, \eta_n[=]\xi_{n+1}, \eta_{n+1}[$, comme $g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta)$ est croissante u a un minimum local stricte entre τ_n et τ_{n+1} , contradiction (voir preuve du **lemme(3.1.8)**).

Soit $]\xi, \eta[$ l'intervalle vérifiant

$$\left| \begin{array}{l} u(t) > 0, t \in]\xi, \eta[\\ u(\xi) = u(\eta) = 0 \end{array} \right.$$

alors il existe un maximum local unique $\beta \in]\xi, \eta[$ et $u(t)$ est strictement décroissante sur $]\beta, \eta[$, (voir preuve du **lemme(3.1.8)**). Comme $g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta)$ est croissante, il existe un unique $\tau_n \in]\xi, \eta[$.

Il est clair que $u(t) \leq 0$ sur les $(k - 1)$ intervalles $[\eta_n, \xi_{n+1}]$ (il se peut que $\eta_n = \xi_{n+1}$). De plus, si $\dot{u}(0) < 0$ et $\dot{u}(1) > 0$ alors $u(t)$ est négative dans un voisinage de 0 et 1.

Soit $k \geq 1$, on note L la somme des longueurs des intervalles $[\xi_n, \eta_n]$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2k^2}$, le **lemme(3.1.8)** donne pour λ grand $(\eta_n - \xi_n) < \frac{1}{2k^2}$, donc $L < \frac{1}{2k}$.

La somme des longueurs des intervalles où $u(t)$ est négative, est supérieure à $1 - L = \frac{2k-1}{2k}$, donc il existe un intervalle $[\xi, \eta]$ (si $k = 0$, $[\xi, \eta] = [0, 1]$, $\varepsilon = 1$) tel que

$$\left| \begin{array}{l} u(t) < 0, t \in]\xi, \eta[\\ u(\xi) = u(\eta) = 0 \\ (\eta - \xi) \geq \varepsilon = \frac{2k-1}{2k(k+1)} \end{array} \right|$$

Le **lemme(3.1.7)** implique qu'il existe $N(k)$ tel que, pour λ grand

$$|\dot{u}(\eta)| > N(k) \sqrt{\lambda |g_-^{-1}(\lambda m', \theta)|}$$

On applique le **lemme(3.1.8)** au plus $2k$ fois pour déduire que, pour $\delta = \frac{N(k)}{4k}$ et λ grand, on a

$$|\dot{u}(1)| > \frac{N(k)}{2} \sqrt{\lambda |g_-^{-1}(\lambda m', \theta)|}$$

Montrons que $\dot{u}(0) \neq 0$.

Cas où (3.1.4) est un problème autonome.

(3.1.7) donne $\dot{u}^2(0) - \dot{u}^2(1) = 0$, donc $|\dot{u}(0)| = |\dot{u}(1)| \neq 0$.

Cas où (3.1.4) n'est pas autonome.

Par l'absurde, on suppose que $\dot{u}(0) = 0$, soit a le premier zéro de u dans $]0, 1]$ alors $u(t) > 0$ sur $]0, a[$, (3.1.8) donne

$$-\frac{\dot{u}^2(a)}{2} = \lambda \int_0^a f'(t, \theta) u(t) dt$$

le premier membre est négatif, alors que le second est strictement positif, contradiction.

à partir de (3.1.21), (3.1.22) et (3.1.24), on déduit qu'il existe $\lambda_k > 0$ tel que, pour tout $\lambda > \lambda_k$, on a $S(\theta, \lambda) \cap \Omega_k^*(\theta, \lambda) = \emptyset$. $\square$

REMARQUE 3.1.9. Pour $g(u, \theta) = u^2$, la fonction $g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta) = \sqrt{\lambda f(t, \theta)}$ existe pour tout $\lambda > 0$, alors il est simple de vérifier que les arguments de (3.1.22) restent vrais pour $\lambda > 0$.

REMARQUE 3.1.10. Pour le cas non autonome $\dot{u}(0) \neq 0$, pour tout $\lambda > 0$.

Application de l'homotopie et preuve du théorème(3.1.1)

Pour montrer le **théorème(3.1.1)**, on utilisera le problème

$$(3.1.25) \quad \begin{aligned} -\ddot{u}(t) &= u^2(t) - \lambda(1 + \theta t)^2, t \in [0, 1] \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier les hypothèses du problème (3.1.4).

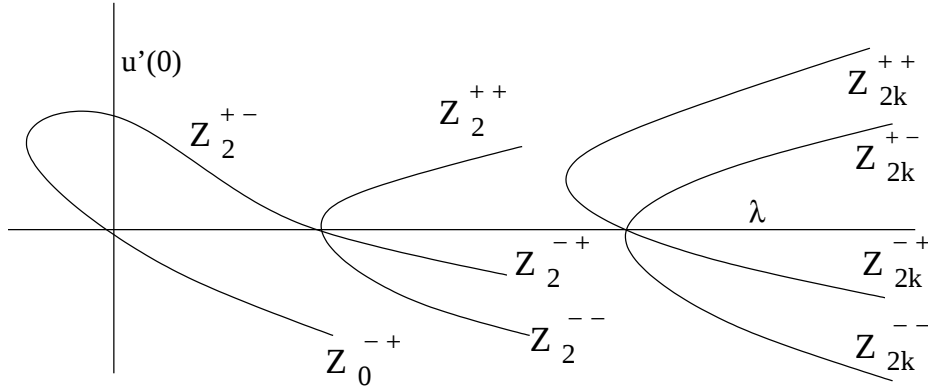


FIG. 3.1.3. Classification des solutions suivant les ensembles Z_k , problème (3.1.25), $\theta = 0$.

Le cas $\theta = 0$ a été étudié par F.Ammar-Khodja [7], pour lequel on donnera une description de l'ensemble des solutions, et l'on calculera leurs index.

On définit pour $k \in N$ et $\lambda > 0$

$$Z_k(\theta, \lambda) = \{u \in E : u(t) - \sqrt{\lambda}(1 + \theta t) \text{ possède } k \text{ zéros dans } [0, 1] \text{ tels que } \dot{u} < 0\}$$

Soit $\theta = 0$, pour tout $k \in N$ il existe une courbe connexe de solutions $(u, 0, \lambda)$ de (3.1.25), que l'on note $C_k = \{(u, 0, \lambda) \in E \times \{0\} \times R_+ : u \in Z_k(0, \lambda)\}$ (Fig.3), et par $C_k^{+-} = \{(u, 0, \lambda) \in C_k : \dot{u}(0) > 0, \dot{u}(1) < 0\}$, C_k^{-+}, C_k^{--} et C_k^{++} les parties de C_k définies respectivement par les signes de $\dot{u}(0)$ et $\dot{u}(1)$.

Pour $k \geq 1$, il existe une suite de points de bifurcation $(u_k, 0, \gamma_k)$ telle que $(u_k, 0, \gamma_k) \in C_k$, $u_k(t)$ est positive, symétrique par rapport à $1/2$ et vérifie $\dot{u}_k(0) = \dot{u}_k(1) = 0$.

Pour $k \geq 2$ il existe une suite $(v_k, 0, \delta_k)$ de points limites de C_k^{+-} .

Pour $k = 0$, $C_0 = C_0^{-+} \cup \{(0, 0, 0)\}$ est une courbe connexe non bornée dans $E \times \{0\} \times]0, \infty[$. Pour $\lambda > \gamma_0 = 0$, C_0^{-+} contient une unique solution de $Z_0(0, \lambda)$.

Pour $k = 1$, $C_1 = C_1^{-+} \cup C_1^{+-} \cup C_1^{++} \cup C_1^{--} \cup \{(u_1, 0, \gamma_1)\}$, où C_1^{-+}, C_1^{++} et C_1^{--} sont des courbes connexes non bornées de $E \times \{0\} \times]\gamma_1, \infty[$ et contiennent exactement trois solutions dans $Z_1(0, \lambda)$. La courbe C_1^{+-} est bornée dans $E \times \{0\} \times]0, \gamma_1[$, et contient l'unique solution de $Z_1(0, \lambda)$.

Pour $k \geq 2$, $C_k = C_k^{-+} \cup C_k^{+-} \cup C_k^{++} \cup C_k^{--} \cup \{(u_k, 0, \gamma_k)\}$, où $C_k^{-+}, C_k^{+-}, C_k^{++}$ et C_k^{--} sont des courbes connexes non bornées de $E \times \{0\} \times]\gamma_k, \infty[$, et contiennent, pour $\lambda > \gamma_k$ exactement quatre solutions de $Z_k(0, \lambda)$. Pour $\lambda \in]\delta_k, \gamma_k[$, la courbe C_k^{+-} contient exactement deux solutions de $Z_k(0, \lambda)$.

On rappelle qu'une solution $(u, 0, \lambda)$ de (3.1.25) vérifie $\phi(u, 0, \lambda) = u - T(u, 0, \lambda) = 0$. On note $DT(u, 0, \lambda)$ la différentielle de Fréchet de $T(u, 0, \lambda)$ par rapport à u en $(u, 0, \lambda)$.

L'index de $(u, 0, \lambda)$ est défini par $i(u, 0, \lambda) = (-1)^m$, où m est la somme des multiplicités des valeurs caractéristiques de $DT(u, 0, \lambda)$ telles que $\mu \in]0, 1[$, voir [21]. L'opérateur $DT(u, 0, \lambda)$ est autoadjoint compact et vérifie l'équation

$$\varphi - \mu DT(u, 0, \lambda)\varphi = 0$$

équivalente au problème linéarisé de (3.1.25)

$$\begin{cases} -\ddot{\varphi} = 2\mu u \varphi \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

qui possède un nombre dénombrable de valeurs propres de multiplicité 1.

Soit $\theta = 0$, pour $(u, 0, \lambda)$ solution de (3.1.25), on note $\mu_n(\lambda)$ et φ_n , $n \geq 1$, les valeurs propres et les fonctions propres du problème linéarisé $\varphi_n \in S_n^+ = \{\varphi \in E : \varphi \text{ a } (n-1) \text{ zéros simples dans }]0, 1[\text{ et } \dot{\varphi}(0) > 0\}$.

La suite $(\mu_n(\lambda))$ est croissante et tend vers $+\infty$ [21]. Pour les points de bifurcation $(u_k, 0, \gamma_k)$, $u_k(t)$ est positive [7], alors $\mu_1(\gamma_k) > 0$. En effet, si $\mu_1(\gamma_k) \leq 0$, et comme φ_1 est positive donc elle convexe ou linéaire, ce qui contredit les conditions aux limites. On déduit qu'il existe un voisinage de $(u_k, 0, \gamma_k)$ sur lequel $i(u, 0, \lambda) = (-1)^m$ et m représente l'indice de la plus grande valeur propre inférieure à 1.

LEMME 3.1.11. *Pour tout $k \in N^*$ il existe un voisinage V de $(u_k, 0, \gamma_k)$ tel que, pour toute solution $(u, 0, \lambda) \in V$, on a*

si $\lambda > \gamma_k$ et $(u, 0, \lambda) \in C_k^{-+} \cap V$ alors $\mu_{2k}(\lambda) < 1$ et $\mu_{2k+1}(\lambda) > 1$

si $\lambda < \gamma_k$ et $(u, 0, \lambda) \in C_k^{+-} \cap V$ alors $\mu_{2k}(\lambda) > 1$ et $\mu_{2k-1}(\lambda) < 1$.

DÉMONSTRATION. Soit $(u, 0, \lambda) \in C_k^{-+} \cup C_k^{+-} \cup \{(u_k, 0, \gamma_k)\}$, alors u est symétrique par rapport à $1/2$, voir [7].

On considère le système

$$\begin{cases} -\ddot{u} = 2u\dot{u} \\ -\ddot{\varphi}_{2k} = 2\mu_{2k}u\varphi_{2k} \end{cases}$$

qui donne

$$\ddot{u}\varphi_{2k} - \dot{\varphi}_{2k}\dot{u} = 2\mu_{2k}(\lambda)u\dot{u}\varphi_{2k} - 2u\dot{u}\varphi_{2k}$$

l'intégration par partie donne

$$[\ddot{u}\varphi_{2k} - \dot{\varphi}_{2k}\dot{u}]_0^{1/2} = 2(\mu_{2k}(\lambda) - 1) \int_0^{1/2} \varphi_{2k}u\dot{u}$$

Comme u est symétrique par rapport à $1/2$, $\psi(t) = -\varphi_{2k}(1-t)$ est une solution du problème linéarisé associé à $\mu_{2k}(\lambda)$ et vérifiant $\dot{\psi}(0) > 0$, alors $\psi(t) = \varphi_{2k}(t)$ et $\varphi_{2k}(1/2) = 0$, d'où

$$(3.1.26) \quad \dot{\varphi}_{2k}(0)\dot{u}(0) = 2(\mu_{2k}(\lambda) - 1)I(\lambda)$$

où $I(\lambda) = \int_0^{1/2} \varphi_{2k}u\dot{u}$.

Au point $(u_k, 0, \lambda_k)$ on a $\varphi_{2k} = \dot{u}_k$ et $u \geq 0$ sur $[0, 1]$, voir [7], donc $I(\gamma_k) > 0$. La continuité des courbes C_k implique que $I(\lambda) > 0$ dans un voisinage de V de $(u_k, 0, \lambda_k)$, on déduit de cela que

si $\lambda > \gamma_k$ et $(u, 0, \lambda) \in C_k^{-+}$ alors $\dot{u}(0) < 0$, (3.1.26) implique que $\mu_{2k}(\lambda) < 1$,

si $\lambda < \gamma_k$ et $(u, 0, \lambda) \in C_k^{+-}$ alors $\dot{u}(0) > 0$, (3.1.26) implique que $\mu_{2k}(\lambda) > 1$.

La continuité par rapport à λ et la croissance de la suite $(\mu_n(\lambda))$ permettent de déduire qu'il existe un voisinage de $(u_k, 0, \lambda_k)$ sur lequel, si $\lambda > \gamma_k$ et $(u, 0, \lambda) \in C_k^{-+}$ alors $\mu_{2k+1}(\lambda) > 1$, et si $\lambda < \gamma_k$ et $(u, 0, \lambda) \in C_k^{+-}$ alors $\mu_{2k-1}(\lambda) < 1$. $\square$

Soit $k \in N, \lambda \in R$ on note

$$\Omega_k(0, \lambda) = \{u \in E : u \in Z_k(0, \lambda) \text{ et } \|u\| < K(\lambda)\}$$

PROPOSITION 3.1.12. *Il existe une suite (γ_k) telle que*

$$\text{Pour tout } k \geq 0 \text{ et } \lambda > \gamma_k \quad d(\phi(, 0, \lambda), \Omega_k^{-+}(0, \lambda)) = 1$$

$$\text{Pour tout } k > 1 \text{ et } \lambda > \gamma_k \quad d(\phi(, 0, \lambda), \Omega_k^{+-}(0, \lambda)) = 1$$

$$\text{Pour tout } k \geq 1 \text{ et } \lambda > \gamma_k \quad d(\phi(, 0, \lambda), \Omega_k^{--}(0, \lambda) \cup \Omega_k^{++}(0, \lambda)) = -2.$$

DÉMONSTRATION. Un résumé des propriétés du degré topologique est donné dans [37] et l'annexe de [45].

On note $\Omega(0, \lambda) = \{u \in E : \|u\| < K(\lambda)\}$, comme $\phi(, 0, \lambda)$ n'a pas de zéro pour λ petit, l'homotopie du degré topologique implique que pour tout λ on a $d(\phi(, 0, \lambda), \Omega(0, \lambda)) = 0$.

L'ensemble $\Omega_0^{-+}(0, \lambda)$

Le **lemme(3.1.11)** implique que pour $(u, 0, \lambda) \in C_1^{+-}$ et dans un voisinage de $(u_1, 0, \gamma_1)$, on a $i(u, 0, \lambda) = (-1)^{2k-1} = -1$, où $k = 1$. Comme pour $\lambda \in]0, \gamma_1[$, $\phi(, 0, \lambda)$ possède deux zéros respectivement dans C_1^{+-} et C_0^{-+} , la propriété d'additivité du degré topologique implique que $i(u, 0, \lambda) = 1$ pour $(u, 0, \lambda) \in C_0^{-+}$ et $\lambda \in]0, \gamma_1[$. On déduit de l'invariance par homotopie par rapport à λ que, pour tout $\lambda > 0$, on a $d(\phi(, 0, \lambda), \Omega_0^{-+}(0, \lambda)) = 1$.

Ensembles $\Omega_k^{-+}(0, \lambda), k \geq 1$

Le **lemme(3.1.11)** implique que, pour $(u, 0, \lambda) \in C_k^{-+}$ et dans un petit voisinage de $(u_k, 0, \gamma_k)$, on a $i(u, 0, \lambda) = (-1)^{2k} = 1$. L'homotopie par rapport à λ implique que pour tout $\lambda > \gamma_k$, on a $d(\phi(, 0, \lambda), \Omega_k^{-+}(0, \lambda)) = 1$.

Ensembles $\Omega_k^{+-}(0, \lambda), k > 1$

Pour $\lambda \in]\delta_k, \gamma_k[$, C_k^{+-} contient deux zéros que l'on note $(u, 0, \lambda)$ et $(w, 0, \lambda)$. On suppose que $\dot{w}(0) > \dot{u}(0)$, le **lemme(3.1.11)** implique que, pour $(u, 0, \lambda)$ se trouvant dans un petit voisinage de $(u_k, 0, \gamma_k)$, on a $i(u, 0, \lambda) = (-1)^{2k-1} = -1$, la propriété d'additivité donne $i(w, 0, \lambda) = 1$, l'homotopie par rapport à λ implique que, pour tout $\lambda > \gamma_k$, on a $d(\phi(, 0, \lambda), \Omega_k^{+-}(0, \lambda)) = 1$.

L'ensemble $\Omega_1^{++}(0, \lambda) \cup \Omega_1^{--}(0, \lambda)$

Comme pour tout $\lambda \in]0, \gamma_1[$, on a $d(\phi(, 0, \lambda), \Omega_1^{+-}(0, \lambda)) = -1$, on déduit que $d(\phi(, 0, \lambda), \Omega_1(u, 0, \lambda)) = -1$, pour tout $\lambda > \gamma_1$. D'autre part $d(\phi(, 0, \lambda), \Omega_1^{-+}(0, \lambda)) = 1$, la propriété d'additivité donne $d(\phi(, 0, \lambda), \Omega_1^{++}(0, \lambda) \cup \Omega_1^{--}(0, \lambda)) = -2$.

Ensembles $\Omega_k^{++}(0, \lambda) \cup \Omega_k^{--}(0, \lambda), k > 1$

Sachant que pour $\lambda > \gamma_k$, $d(\phi(, 0, \lambda), \Omega_k^{+-}(0, \lambda)) = 1$ et $d(\phi(, 0, \lambda), \Omega_k^{-+}(0, \lambda)) = 1$, l'additivité implique $d(\phi(, 0, \lambda), \Omega_k^{++}(0, \lambda) \cup \Omega_k^{--}(0, \lambda)) = -2$. $\square$

PROPOSITION 3.1.13. *Il existe une suite (α_k) telle que, pour tout $k \geq 1$ et $\lambda > \alpha_k$*

$$d(\phi(, 0, \lambda), \Omega_k^{++}(0, \lambda)) = d(\phi(, 0, \lambda), \Omega_k^{--}(0, \lambda)) = -1$$

DÉMONSTRATION. Dans la suite $k \geq 1$.

On note

$$\Omega_k^-(\theta, \lambda) = \{u \in E : u \in Z_k(\theta, \lambda), \|u\| < K(\lambda) \text{ et } \dot{u}(0) < 0\}$$

Comme $g(u, \theta) = u^2$, $g_+^{-1}(\lambda f(t, \theta), \theta) = \sqrt{\lambda f(t, \theta)}$ pour $\lambda > 0$, alors $Z_k(\theta, \lambda)$ est bien définie. De plus $K(\lambda)$ est définie pour tout $\lambda > 0$, **remarque(3.1.3)**, alors $\Omega_k^-(\theta, \lambda)$ est bien définie pour tout $\lambda > 0$.

On déduit des remarques (3.1.3), (3.1.9) et (3.1.10) que pour $\theta \in]0, 1]$ et $\lambda > 0$

$$(3.1.27) \quad S(\theta, \lambda) \cap \partial\Omega_k^-(\theta, \lambda) = \emptyset$$

D'autre part, voir [7], pour $\theta = 0$ et λ petit

$$S(0, \lambda) \cap \partial\Omega_k^-(0, \lambda) = \emptyset$$

Comme il n'existe pas de solution de (3.1.25) dans $\Omega_k^-(0, \lambda)$ pour $k \geq 1$ et λ petit, l'homotopie par rapport à θ donne

$$d(\phi(\cdot, 0, \lambda), \Omega_k^-(0, \lambda)) = d(\phi(\cdot, 1, \lambda), \Omega_k^-(1, \lambda)) = 0$$

Sachant (3.1.27), l'homotopie par rapport à λ donne pour $\theta = 1$ et $\lambda > 0$

$$(3.1.28) \quad d(\phi(\cdot, 1, \lambda), \Omega_k^-(1, \lambda)) = 0$$

Soit $\alpha_k = \max\{\gamma_k, \lambda_k\}$, où λ_k est donné par la **proposition(3.1.5)**. L'invariance par homotopie par rapport à θ , la **proposition(3.1.5)** et la **proposition(3.1.12)**, impliquent que, pour $\lambda > \alpha_k$

$$(3.1.29) \quad d(\phi(\cdot, 1, \lambda), \Omega_k^{-+}(1, \lambda)) = 1$$

On remarque à partir de (3.1.27) que,

$$\text{pour } \lambda > 0, \Omega_k^-(1, \lambda) = \Omega_k^{-+}(1, \lambda) \cup \Omega_k^{--}(1, \lambda)$$

la **proposition(3.1.5)**, (3.1.28), (3.1.29) et la propriété d'additivité donnent ,

$$\text{pour } \lambda > \alpha_k, d(\phi(\cdot, 1, \lambda), \Omega_k^{--}(1, \lambda)) = -1.$$

Enfin l'invariance par homotopie par rapport à θ donne,

$$\text{pour } \lambda > \alpha_k, d(\phi(\cdot, 0, \lambda), \Omega_k^{--}(0, \lambda)) = -1$$

la **proposition(3.1.12)** et l'additivité donnent,

$$\text{pour } \lambda > \alpha_k, d(\phi(\cdot, 0, \lambda), \Omega_k^{++}(0, \lambda)) = -1. \quad \square$$

Preuve du théorème(3.1.1)

DÉMONSTRATION. Pour conclure, on choisit pour homotopie (3.1.4)

$$\begin{aligned} -\ddot{u} &= g(u)\theta + (1-\theta)u^2 - \lambda(f(t)\theta + 1-\theta), t \in [0, 1] \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Il facile de vérifier les hypothèses du problème (3.1.4).

Soit $\beta_k = \max\{\lambda_k, \alpha_k, \gamma_k\}$, où λ_k est donné par la **proposition(3.1.5)** et α_k est donné par la **proposition(3.1.13)**. L'homotopie par rapport à θ , la **proposition(3.1.5)**, la **proposition(3.1.12)** et la **proposition(3.1.13)**, impliquent que

$$\forall k \geq 0, \forall \lambda > \beta_k \quad d(\phi(\cdot, 1, \lambda), \Omega_k^{-+}(1, \lambda)) = 1$$

$$\forall k > 1, \forall \lambda > \beta_k \quad d(\phi(, 1, \lambda), \Omega_k^{+-}(1, \lambda)) = 1$$

$$\forall k \geq 1, \forall \lambda > \beta_k \quad d(\phi(, 1, \lambda), \Omega_k^{++}(1, \lambda)) = -1$$

$$\forall k \geq 1, \forall \lambda > \beta_k \quad d(\phi(, 1, \lambda), \Omega_k^{--}(1, \lambda)) = -1$$

d'où suit le **théorème (3.1.1)**.

□

3.2. Solutions nodales d'un problème super-linéaire

Résumé [48]

On considère le problème de Dirichlet super-linéaire $-\Delta u = g(u) - \lambda$. On montre l'existence de solutions nodales pour λ assez grand sans la condition classique de l'exposant critique imposé à $g(x)$ et dépendant de la dimension de l'espace [23, 22]. La preuve est basée sur une description qualitative des solutions est une nouvelle classification introduite dans [47].

Introduction

On s'intéresse aux solutions radiales du problème

$$(3.2.1) \quad -\Delta u = g(u) - \lambda \text{ dans } \Omega \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Ω représente la boule unité R^n , $\lambda > 0$, $g \in C(R, R)$ et il existe $A > 0$ tel que $g_+ = g|_{[A, \infty[}$ est positive, croissante, dérivable et convexe, $g_- = g|_{]-\infty, -A]}$ est positive, convexe et décroissante. De plus

$$(3.2.2) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \pm\infty$$

$$(3.2.3) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{R(x)}{x}} \frac{g_+^{-1}(x)}{g_-^{-1}(x)} = 0$$

$R(x) = \max\{g_+^{-1}(x), |g_-^{-1}(x)|\}$. On remarque que (3.2.2) implique $\frac{R(x)}{x} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$.

Il est bien connu que les solutions radiales de (3.2.1) vérifient

$$(3.2.4) \quad -\ddot{u} - \frac{n-1}{t}\dot{u} = g(u) - \lambda \text{ et } \dot{u}(0) = u(1) = 0$$

Soit $k \in N$, $Z_k(\lambda)$ un sous ensemble de $E = \{u \in C^1[0, 1] : \dot{u} = u(1) = 0\}$ défini par

$$Z_k(\lambda) = \{u \in E : u(t) - g_+^{-1}(\lambda) \text{ a } k \text{ zéros simples dans } [0, 1]\}$$

THÉORÈME 3.2.1. *Il existe une suite réelle (α_k) telle que*

- pour $\lambda > \alpha_0$ le problème (3.2.4) a au moins une solution $u \in Z_0(\lambda)$
- pour $\lambda > \alpha_k$ ($k \geq 1$) le problème (3.2.4) a au moins deux solutions $u \in Z_{2k}(\lambda)$.

Le problème super-linéaire de Dirichlet a été considéré dans de nombreux travaux où a été prouvée l'existence de solutions positives et Nodales [23, 22], sous la condition nécessaire $\frac{g(x)}{x^p} \rightarrow 0, x \rightarrow \infty, p = \frac{n+2}{n-2}$ (exposant critique).

Dans ce travail on montre l'existence et on donne une classification des solutions nodales et radiales d'un problème de Dirichlet super-linéaire, sans borne supérieure sur la croissance de $g(x)$. Les estimations *a priori* sont données grâce à l'hypothèse de l'existence d'un minimum local de la solution.

Ceci est une généralisation d'un résultat donné dans [47] et utilise le même schéma de preuve. De plus la définition des ensembles Z_k a été adapté pour (3.2.4) et semble plus naturelle.

On définit un opérateur compact dépendant des paramètres $\lambda > 0$ et $\theta \in [0, 1]$ et liés à l'équation $-\ddot{u}(t) - \theta \frac{n-1}{t}\dot{u}(t) = g(u) - \lambda$. Pour $\theta = 1$ on a (3.2.4), et pour $\theta = 0$ le problème a été étudié dans [47], d'où l'on déduit l'existence de solutions

en utilisant l'invariance par homotopie du degré topologique par rapport θ , pour λ assez grand.

Estimations *a priori*

On considère le problème

$$(3.2.5) \quad \begin{aligned} -\ddot{u} - \theta \frac{n-1}{t} \dot{u} &= g(u) - \lambda, \theta \in [0, 1] \\ u(-1) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

On remarque que les solutions paires et dérivables de (3.2.5) vérifient $\dot{u}(0) = 0$, et donnent des solutions de (3.2.4) pour $\theta = 1$. Donc, dans ce qui suit on s'intéresse aux solutions paires de (3.2.5).

PROPOSITION 3.2.2. *Il existe $C > 0$ et $K(\lambda)$ une fonction continue sur $[C, \infty[$ tels que, pour toute solution (u, θ, λ) de (3.2.5) vérifiant $\lambda > C$, qui est paire et qui possède un minimum local en zéro, on a $\|u\| < K(\lambda)$.*

DÉMONSTRATION. Comme u est paire sur $[-1, 1]$, il suffit de donner une estimation sur $[0, 1]$. Multiplions (3.2.5) par $\dot{u}$ et intégrons pour avoir

$$(3.2.6) \quad \left[-\frac{\dot{u}^2}{2} \right] = \int g(u) \dot{u} dt - \int \lambda \dot{u} dt + \theta(n-1) \int \frac{\dot{u}^2}{t} dt$$

Estimation des minimums locaux.

Soit α un minimum local. Pour λ assez grand

$$(3.2.7) \quad |u(\alpha)| \leq |g^{-1}(\lambda)|$$

On remarque $u(\alpha)$ est négative, en effet, par l'absurde on suppose que $u(\alpha) > 0$, soit $a \in]\alpha, 1]$ le plus petit élément vérifiant $u(a) = u(\alpha)$ et $\dot{u}(a) < 0$. (3.2.6) donne

$$-\frac{\dot{u}^2(a)}{2} = \theta(n-1) \int_{\alpha}^a \frac{\dot{u}^2}{t} dt$$

le premier membre est strictement négatif alors que le deuxième membre est positif, contradiction.

Comme $\ddot{u}(\alpha) \geq 0$, (3.2.5) donne $g(u(\alpha)) \leq \lambda$. Si $u(\alpha) \leq -A$, comme $|g^{-1}|$ est croissante sur $[g(-A), +\infty[$, on obtient $|g^{-1}(\lambda)| \geq |u(\alpha)|$. Si $-A \leq u(\alpha) \leq 0$, alors pour λ assez grand $|g^{-1}(\lambda)| > A \geq |u(\alpha)|$.

Estimation des maximums locaux. Soit β un maximum local alors $u(\beta)$ est positive, en effet par l'absurde supposons que $u(\beta) < 0$, soit $a \in]\beta, 1]$ le plus petit élément qui vérifie $u(a) = u(\beta)$ et $\dot{u}(a) > 0$. (3.2.6) donne

$$-\frac{\dot{u}^2(a)}{2} = \theta(n-1) \int_{\beta}^a \frac{\dot{u}^2}{t} dt$$

le premier membre est strictement négatif le second membre est positive, contradiction.

Comme u a un minimum local en zéro, on note α le plus proche minimum local de β , vérifiant $\alpha < \beta$ et $\dot{u} \geq 0$ sur $]\alpha, \beta[$. (3.2.6) donne

$$(3.2.8) \quad \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)/2} g(u) du + \int_{u(\beta)/2}^{u(\beta)} g(u) du - \lambda(u(\beta) - u(\alpha)) \leq 0$$

réécrivons

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)/2} g(u) du = \int_{u(\alpha)}^{-A} g(u) du + \int_{-A}^A g(u) du + \int_A^{u(\beta)/2} g(u) du$$

il est clair que $\int_{u(\alpha)}^{-A} g(u) du \geq 0$ et que $\int_{-A}^A g(u) du$ est borné de plus (3.2.5) donne $u(\beta) \geq g_+^{-1}(\lambda)$ qui implique $\int_A^{u(\beta)/2} g(u) du \rightarrow +\infty, \lambda \rightarrow \infty$, donc $\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)/2} g(u) du > 0$ pour λ assez grand. Donc, pour λ assez grand

$$\int_{u(\beta)/2}^{u(\beta)} g(u) du - \lambda(u(\beta) + |u(\alpha)|) < 0$$

la croissance de g_+ et (3.2.6) donnent

$$\begin{aligned} \int_{u(\beta)/2}^{u(\beta)} g(u) du &> g(u(\beta)/2) \frac{u(\beta)}{2} \\ g(u(\beta)/2) \frac{u(\beta)}{2} &< \lambda(u(\beta) + |g_-^{-1}(\lambda)|) \end{aligned}$$

enfin, on remarque que si $u(\beta) > |g_-^{-1}(\lambda)|$ alors $u(\beta) < 2g_+^{-1}(4\lambda)$, d'où

$$(3.2.9) \quad \max |u| < 2R(4\lambda)$$

□

Soit $ES = \{u \in C^1([-1, 1], R) : u \text{ est paire et } u(1) = 0\}$. Il est clair que toute fonction $u \in ES$ vérifie $u(-1) = 0$ et $\dot{u}(0) = 0$. Soit $(u, \theta, \lambda) \in ES \times [0, 1] \times R_+$ une solution de (3.2.5). Le problème (3.2.5) est équivalent à $\phi(u, \theta, \lambda) = u - T(u, \theta, \lambda) = 0$, ici $T(u, \theta, \lambda)$ est l'opérateur compact de *Green* défini sur ES , voir annexe.

Soit $k \in N, \lambda > A$ et

$$\begin{aligned} Z_k(\theta, \lambda) &= \{u \in ES : u - g_+^{-1}(\lambda) \text{ a } k \text{ zéros simples } [-1, 1]\} \\ \Omega_k^*(\theta, \lambda) &= \{u \in ES : u \in Z_k(\theta, \lambda), \|u\| < K(\lambda) \text{ et } \dot{u}(1) \neq 0\} \end{aligned}$$

Le résultat principal est la définition du degré topologique de $\phi(\cdot, \theta, \lambda)$ par rapport à l'ouvert $\Omega_{4k}^*(\theta, \lambda)$ donné par

PROPOSITION 3.2.3. *Il existe une suite (λ_k) telle que, pour tout $\lambda > \lambda_k$ et $\theta \in [0, 1]$, l'opérateur $\phi(\cdot, \theta, \lambda)$ ne possède pas de zéro dans $\partial\Omega_{4k}^*(\theta, \lambda)$.*

La preuve est donnée plus bas.

PROPOSITION 3.2.4. *Pour $\lambda > 0$, l'opérateur $\phi(\cdot, \theta, \lambda)$ ne possède pas de zéro dans $\partial Z_{4k}(\theta, \lambda)$.*

DÉMONSTRATION. D'après le nombre de zéros des fonctions $u \in Z_{4k}$, on déduit que zéro est un minimum local. On a vu dans la preuve de la proposition (3.2.2) que les minimums locaux sont négatifs. Ainsi, $u(0) < 0$ pour toute solution de Z_{4k} .

Par l'absurde, supposons qu'il existe une solution $u \in \partial Z_{4k}(\theta, \lambda)$, alors il existe τ tel que $u(\tau) = g_+^{-1}(\lambda)$ et $\dot{u}(\tau) = 0$. Remarquons que $\tau \neq 0$, en effet, u est limite d'une suite de Z_{4k} , donc $u(0) \leq 0 < g_+^{-1}(\lambda)$.

Pour $\tau > 0$, on sait que $g_+^{-1}(\lambda)$ est une solution de (3.2.5), l'unicité de la solution du problème de Cauchy implique $u(t) = g_+^{-1}(\lambda), t \in [0, 1]$, ce qui contredit les conditions aux limites. □

Estimation de la dérivée aux zéros de $u(t) - g_+^{-1}(\lambda)$.

LEMME 3.2.5. *Il existe une suite (A_k) ($k \geq 1$) telle que, pour toute solution (u, θ, λ) de (3.2.5) vérifiant $u \in ES$, $\lambda > A_k$ et $u - g_+^{-1}(\lambda)$ ayant au moins k zéros dans $[0, 1]$, il existe $B > 0$ tel que pour les k plus grands zéros on a*

$$|\dot{u}(\tau)| > B\sqrt{\lambda g_+^{-1}(\lambda/2)}$$

DÉMONSTRATION. Les k plus grands zéros de $u - g_+^{-1}(\lambda)$ dans $[0, 1]$ sont notés $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_k < 1$.

Estimation de $\dot{u}(\tau_k)$.

Soit $\eta \in]\tau_k, 1]$ le plus petit zéro de $u(t)$. Comme $g_+^{-1}(\lambda) > u$, alors u ne possède pas maximum local dans $]\tau_k, \eta[$, donc u est décroissante sur $[\tau_k, \eta]$, on déduit de (3.2.5) que u est convexe.

Soit α l'unique élément de $]\tau_k, \eta[$ tel que $u(\alpha) = g_+^{-1}(\lambda/2)$. Notons $h(t)$ le segment joignant $u(\alpha)$ et $u(\eta) = 0$, notons $v(t) = h(t) - u(t)$ sur $]\alpha, \eta[$, alors $-\ddot{v} = \lambda - g(u) - \theta \frac{n-1}{t} \dot{u}$. Comme $\dot{u} < 0$ et $u < g_+^{-1}(\lambda/2)$ on a $-\ddot{v} > \lambda/2$, sachant que $v < g_+^{-1}(\lambda/2)$

$$-\ddot{v} > \frac{\lambda}{2g_+^{-1}(\lambda/2)} v \text{ dans }]\alpha, \eta[\text{ et } v(\eta) = v(\alpha) = 0$$

posons $t = s(\eta - \alpha) + \alpha$, $s \in [0, 1]$ et $w(s) = v(s(\eta - \alpha) + \alpha)$

$$-\ddot{w} > (\eta - \alpha)^2 \frac{\lambda}{2g_+^{-1}(\lambda/2)} w \text{ dans }]0, 1[\text{ et } w(\eta) = w(\alpha) = 0$$

le théorème de comparaison de Sturm donne $(\eta - \alpha) < \sqrt{2\pi} \sqrt{g_+^{-1}(\lambda/2)/\lambda}$.

Comme u est convexe dans $]\eta, \tau_k[$,

$$|\dot{u}(\tau_k)| > |\dot{u}(a)| > \frac{u(a)}{(\eta - a)}$$

d'où

$$|\dot{u}(\tau_k)| > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\lambda g_+^{-1}(\lambda/2)}$$

Enfin on remarque que

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}^2(\tau_i)}{2} &= \frac{\dot{u}^2(\tau_{i+1})}{2} + \int_{u(\tau_i)}^{u(\tau_{i+1})} (g(u) - \lambda) du + \theta(n-1) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \frac{\dot{u}^2}{t} dt \\ \frac{\dot{u}^2(\tau_i)}{2} &\geq \frac{\dot{u}^2(\tau_{i+1})}{2} \end{aligned}$$

□

On remarque que, pour une solution (u, θ, λ) de (3.2.5) et u ayant un minimum local en zéro, la fonction $u - g_+^{-1}(\lambda)$ possède un nombre paire de zéros dans $[0, 1]$ que l'on note τ_i . C'est le cas quand $u \in Z_{4k}(\theta, \lambda)$.

Estimation de la longueur des intervalles tels que $u > g_+^{-1}(\lambda)$.

LEMME 3.2.6. *Soit $k \in N^*$, pour toute solution (u, θ, λ) de (3.2.4) vérifiant $u \in Z_{4k}(\theta, \lambda)$ et $u > g_+^{-1}(\lambda)$ dans $]\tau_i, \tau_{i+1}[\subset]0, 1[$, il existe $\rho > 0$ tel que pour λ assez grand*

$$(\tau_{i+1} - \tau_i) < \sqrt{\mu_1 \frac{2R(4\lambda)}{\rho\lambda}}$$

DÉMONSTRATION. Soit $(t_1, t_2) \in [\tau_i, \beta[\times]\beta, \tau_{i+1}]$ vérifiant $u(t_1) = u(t_2)$, on a $\frac{\dot{u}^2(t_1)}{2} \geq \frac{\dot{u}^2(t_2)}{2}$, donc $(\beta - \tau_i) < (\tau_{i+1} - \beta)$.

Il existe $\rho > 0$ tel que

$$u(\beta) > g^{-1}((1 + \rho)\lambda)$$

en effet, par l'absurde

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}^2(\beta)}{2} &= \frac{\dot{u}^2(\tau_{i+1})}{2} + \int_{u(\beta)}^{u(\tau_{i+1})} (g(u) - \lambda) du + \theta(n-1) \int_{\beta}^{\tau_{i+1}} \frac{\dot{u}^2}{t} dt \\ &> \frac{\dot{u}^2(\beta)}{2} > \frac{B^2}{2} \lambda g^{-1}(\lambda/2) - \rho \lambda g^{-1}((1 + \rho)\lambda) \end{aligned}$$

pour ρ assez petit, on a la contradiction $\dot{u}(\beta) \neq 0$.

Soit ξ_i et ξ_{i+1} les zéros de $u - g^{-1}((1 + \rho)\lambda)$.

Estimation de $(\tau_{i+1} - \xi_{i+1})$

Plus haut, on remplace β par $\xi \in [\xi_{i+1}, \tau_{i+1}]$, on obtient $|\dot{u}(\xi)| > C\sqrt{\lambda g^1(\lambda/2)}$. le théorème de la moyenne sur $[\xi_{i+1}, \tau_{i+1}]$ donne

$$\begin{aligned} C\sqrt{\lambda g^1(\lambda/2)} &\leq \min |\dot{u}(\xi)| \leq \frac{g^{-1}((1 + \rho)\lambda) - g^{-1}(\lambda)}{\tau_{i+1} - \xi_{i+1}} \\ (\tau_{i+1} - \xi_{i+1}) &\leq \frac{1}{C} \frac{1}{\sqrt{\lambda g^1(\lambda/2)}} \frac{\rho\lambda}{g'(g^{-1}(\lambda/2))} \end{aligned}$$

on pose $\lambda = 2g(x)$, on a $\frac{\rho\sqrt{\lambda}}{\sqrt{g^1(\lambda/2)}} \frac{1}{g'(g^{-1}(\lambda/2))} = \rho\sqrt{\frac{2g(x)}{x}} \frac{1}{g'(x)}$. D'autre part, la concavité de $g(x)$ implique qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $g'(x) > \gamma \frac{g(x)}{x}$. On obtient, $\sqrt{\frac{g(x)}{x}} \frac{1}{g'(x)} \leq \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{x}{g(x)}}$. Enfin, on obtient,

$$(\tau_{i+1} - \xi_{i+1}) \leq \frac{1}{C\gamma} \sqrt{\frac{g^{-1}(\lambda/2)}{\lambda/2}}$$

Estimation de $(\xi_{i+1} - \beta)$.

On pose $v = u - g_+^{-1}(\lambda)$ on $[\beta, \xi_{i+1}]$, on a

$$\begin{aligned} -\ddot{v} - \frac{n-1}{t} \dot{v} &= \frac{g(u) - \lambda}{u - g_+^{-1}(\lambda)} v \\ -\ddot{v} - \frac{n-1}{t} \dot{v} &> \frac{\rho\lambda}{2R(4\lambda)} v \end{aligned}$$

on pose $t = s(\xi_{i+1} - \beta) + \beta$, $s \in [0, 1]$ et $w(s) = v(t)$

$$-\ddot{w} - \frac{(n-1)(\xi_{i+1} - \beta)}{s(\xi_{i+1} - \beta) + \beta} \dot{w} > \frac{\rho\lambda}{2R(4\lambda)} (\xi_{i+1} - \beta)^2 w$$

comme $(\xi_{i+1} - \beta) < 1$ et $\dot{w} \leq 0$, alors

$$\begin{aligned} -\ddot{w} - \frac{(n-1)(\xi_{i+1} - \beta)}{s(\xi_{i+1} - \beta) + \beta} \dot{w} &> \frac{\rho\lambda}{2R(4\lambda)} (\xi_{i+1} - \beta)^2 w \\ \dot{w}(0) &= 0, w(s) > g_+^{-1}((1 + \rho)\lambda) - g_+^{-1}(\lambda) > 0 \end{aligned}$$

On utilise le théorème de comparaison de Sturm avec

$$(3.2.10) \quad \begin{aligned} -\ddot{x} - \frac{n-1}{s}\dot{x} &= \mu x \\ \dot{x}(0) &= 0, x(1) = 0 \end{aligned}$$

comme $\frac{1}{s} \geq \frac{(\xi_{i+1}-\beta)}{s(\xi_{i+1}-\beta)+\beta}$, on a

$$(3.2.11) \quad -\ddot{w} - \frac{(n-1)}{s}\dot{w} > \frac{\rho\lambda}{2R(4\lambda)}(\xi_{i+1}-\beta)^2 w$$

Soit φ_1 la première fonction propre et μ_1 la valeur propre associée a (3.2.10). On multiplie (3.2.10) et (3.2.11) par $p(s) = s^{n-1}$ pour avoir

$$\begin{aligned} [p(s)\dot{\varphi}_1 w - p(s)\dot{w}\varphi_1]_0^1 &> \left(\frac{\rho\lambda}{2R(4\lambda)}(\xi_{i+1}-\beta)^2 - \mu_1 \right) \int_0^1 p(s)w\varphi_1 \\ \dot{\varphi}_1(1)w(1) &> \left(\frac{\rho\lambda}{2R(4\lambda)}(\xi_{i+1}-\beta)^2 - \mu_1 \right) \int_0^1 p(s)w\varphi_1 \end{aligned}$$

comme φ_1 et w sont positives, décroissantes, on obtient

$$(\xi_{i+1}-\beta) \leq \sqrt{\mu_1 \frac{2R(4\lambda)}{\rho\lambda}}$$

□

LEMME 3.2.7. *Soit $k \in N^*$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute solution (u, θ, λ) de (3.2.5) vérifiant $u \in Z_{4k}(\theta, \lambda)$, il existe un intervalle $]c, d[$ et $\rho < 1$ tel que $(d-c) > \varepsilon$ et $u(t) < g_+^{-1}((1-\rho)\lambda)$, $t \in]c, d[$.*

DÉMONSTRATION. Le lemme(3.2.6) implique qu'il existe $]a, b[$ qui représente l'un des intervalles $]0, \tau_{2k+1}[$, $]\tau_i, \tau_{i+1}[$ ou $]\tau_{4k}, 1[$, tel que $(b-a) > \varepsilon$ et $u(t) < g_+^{-1}(\lambda)$, $t \in]a, b[$.

Cas 1 : $]a, b[=]\tau_i, \tau_{i+1}[$ l'unique minimum local de u vérifie $u(\alpha) \leq 0 < g_+^{-1}((1-\rho)\lambda)$ pour λ assez grand, voir preuve **proposition(3.2.2)**.

Soit c le plus petit, respectivement d le plus grand, éléments dans $]\tau_i, \tau_{i+1}[$ vérifiant $u(c) = u(d) = g_+^{-1}((1-\rho)\lambda)$. On remarque que, comme il n'existe pas de maximum local inférieure à $g_+^{-1}(\lambda)$ on a $u(t) < g_+^{-1}((1-\rho)\lambda)$ dans $]c, d[$.

Estimation de $(c - \tau_i)$ et $(\tau_{i+1} - d)$: soit $\xi \in]\tau_i, c[$, (3.2.6) donne

$$\frac{\dot{u}^2(\xi)}{2} \geq \frac{\dot{u}^2(\tau_{i+1})}{2} + \int_{u(\xi)}^{u(\tau_{i+1})} (g(u) - \lambda) du$$

comme $u < g_+^{-1}(\lambda)$

$$\frac{\dot{u}^2(\xi)}{2} \geq \frac{B^2}{2} \lambda g_+^{-1}(\lambda/2) - \rho \lambda g_+^{-1}(\lambda)$$

comme g_+^{-1} est concave alors pour ρ assez petit (3.2.2) donne $C > 0$ tel que, pour λ assez grand $|\dot{u}(\xi)| \geq C \sqrt{\lambda g_+^{-1}(\lambda/2)}$, le théorème de la moyenne donne

$$C \sqrt{\lambda g_+^{-1}(\lambda/2)} \leq \min_{[\tau_i, c]} (|\dot{u}(\xi)|) \leq \frac{g_+^{-1}(\lambda) - g_+^{-1}((1-\rho)\lambda)}{c - \tau_i}$$

d'où l'on déduit qu'il existe $k > 0$ tel que $(c - \tau_i) \leq k \sqrt{g_+^{-1}(\lambda)/\lambda}$.

Les mêmes arguments restent vrais pour $(\tau_{i+1} - d)$.

Cas 2 : $]a, b[=]0, \tau_{2k+1}[$, on pose $c = 0$ et d tel que $u(d) = g_+^{-1}((1 - \rho)\lambda)$ les arguments donnés plus haut restent vrais pour $[d, \tau_{2k+1}]$.

Cas 3 : $]a, b[=]\tau_{4k}, 1[$, on pose $d = 1$ et c tel que $u(c) = g_+^{-1}((1 - \rho)\lambda)$ et on considère l'intervalle $[\tau_{4k}, c]$. Pour $\rho < 1/2$ la convexité de u donne $|\dot{u}(t)| \geq u(\alpha) > B\sqrt{\lambda g_+^{-1}(\lambda/2)}$, $t \in [\tau_{4k}, c]$ (α donné dans la preuve **lemme(3.2.5)**), en utilisant le théorème de la moyenne on conclut comme pour le cas (1). $\square$

Dans la suite, on suppose que $\rho < 1$ (donné dans le **lemme(3.2.7)**).

LEMME 3.2.8. *Soit $k \in N^*$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute solution (u, θ, λ) de (3.2.5) vérifiant $u \in Z_{4k}(\theta, \lambda)$, on a pour λ assez grand un intervalle $]c_1, d_1[$ tel que, $(d_1 - c_1) > \varepsilon$ et $u < g_+^{-1}((1 - \rho)\lambda)$ dans $]c_1, d_1[$.*

DÉMONSTRATION. Soit $]c, d[$ l'intervalle donné dans le **lemme(3.2.7)**. Par l'absurde, on suppose que $]c_1, d_1[= \emptyset$, respectivement $(d_1 - c_1) \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$.

Cas 1 : $]c, d[\subset]\tau_i, \tau_{i+1}[$. Soit α le minimum local.

Intervalle $]c, \alpha[$: on pose $v(t) = g_+^{-1}(\lambda(1 - \rho)) - u(t)$, alors $-\ddot{v} = \lambda - g(u) - \theta \frac{n-1}{t} \dot{u}$, comme u est décroissante et $|u| < R(\lambda)$, on a $-\ddot{v}(t) > \lambda\rho, t \in]c, \alpha[$. Comme $v < R(\lambda)$, on a $-\ddot{v} > \frac{\rho\lambda}{R(\lambda)}v$ et $v > 0$ dans $]c, \alpha[$ le théorème de comparaison de Sturm donne

$$(\alpha - c) < \pi\sqrt{R(\lambda)/(\rho\lambda)}$$

Estimation de la dérivée. Soit $t \in]0, 1[$, (3.2.6) donne

$$\frac{\dot{u}^2(t)}{2} \leq -\int_{u(0)}^{u(t)} g(u)du + \int_{u(0)}^{u(t)} \lambda du$$

comme g est continue sur R et positive sur $R \setminus [-A, A]$ il existe $C > 0$ tel que $C > -\int_{u(0)}^{u(t)} g(u)du$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}^2(t)}{2} &\leq C + \lambda(u(t) - u(0)) \\ \frac{\dot{u}^2(t)}{2} &\leq C + 2\lambda R(4\lambda) \end{aligned}$$

donc pour λ assez grand, il existe $k_1 > 0$ tel que

$$(3.2.12) \quad |\dot{u}(t)| \leq k_1\sqrt{\lambda R(4\lambda)}$$

Intervalle $] \alpha, d[$: Comme $(\alpha - c) \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$, et $(d - c) > \varepsilon$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $(d - \alpha) > \varepsilon_1$, respectivement $(d - d_1) > \varepsilon_1$, alors pour $\eta = (d + \alpha)/2$, respectivement $\eta = (d + d_1)/2$, on a $(d - \eta) > \varepsilon_1/2$ et $\eta > \varepsilon_1/2$

D'autre part, on pose $v(t) = g_+^{-1}(\lambda(1 - \rho)) - u(t), t \in]\eta, d[$ alors $-\ddot{v} = \lambda - g(u) - \theta \frac{n-1}{t} \dot{u}$ d'où $-\ddot{v} > \lambda - g(u) - \theta \frac{2(n-1)}{\varepsilon_1} \dot{u}$, on déduit de (3.2.12) et de $|u| \leq R(\lambda(1 - \rho))$ qu'il existe $\rho_1 > 0$ tel que $-\ddot{v}(t) > \lambda\rho_1, t \in]\eta, d[$, comme $v < 2R(\lambda(1 - \rho))$

$$-\ddot{v} > \frac{\rho_1\lambda}{2R(\lambda(1 - \rho))}v \text{ et } v > 0 \text{ sur }]\eta, d[$$

le théorème comparaison de Sturm donne $(d - \eta) < \pi\sqrt{2R(\lambda(1 - \rho))/(\rho_1\lambda)}$ ce qui contredit $(d - \eta) > \varepsilon_1/2$ pour λ assez grand.

Cas 2 : $]c, d[=]0, d[\subset]0, \tau_{2k+1}[$. Avec les mêmes arguments utilisés pour l'intervalle $] \alpha, d[$, on obtient une contradiction.

Cas 3 : $]c, d[=]c, 1[\subset]\tau_{4k}, 1[$. Si il n'existe pas minimum local ou si 1 est l'unique minimum local alors à partir des mêmes arguments utilisés pour $]c, \alpha[$ on obtient la contradiction $(1 - c) \rightarrow 0$. Si il existe un minimum local alors part les mêmes arguments utilisés pour $] \alpha, d[$ on obtient une contradiction pour l'intervalle $] \alpha, 1[$. $\square$

COROLLAIRE 3.2.9. *Soit d donné par le **lemme(3.2.7)**, ε et d_1 donnés par **lemme(3.2.8)**. Comme $d_1 > \varepsilon$, on a pour λ assez grand $(d - d_1) < \pi \sqrt{R(\lambda(1 - \rho)) / (\rho_1 \lambda)}$.*

DÉMONSTRATION. Dans la preuve du **lemme(3.2.8)**, le cas(1), l'intervalle $] \alpha, d[$ on remplace ε_1 par ε et η par d_1 alors les arguments restent vrais. $\square$

COROLLAIRE 3.2.10. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ donné par le **lemme(3.2.8)**, il existe $k > 0$ tel que, pour toute solution (u, θ, λ) de (3.2.5) vérifiant $u \in Z_{4k}(\theta, \lambda)$, $g_-^{-1}((1 - \rho)\lambda) < u(t) < g_+^{-1}(\lambda)$, $t \in]a, b[$ et $a \geq \varepsilon$, on a pour λ assez grand $(b - a) < k \sqrt{R(\lambda) / \lambda}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $[c, d] \subset [a, b]$ donné par le **lemme(3.2.7)** alors les estimations de $(c - a)$ et $(b - d)$ sont donnés dans la preuve du **lemme(3.2.7)**.

Comme $g_-^{-1}((1 - \rho)\lambda) < u(t)$, la preuve du **lemme(3.2.8)** se réduit au cas $[c_1, d_1] = \emptyset$.

Intervalle $[c, \alpha]$, la preuve du **lemme(3.2.8)** reste vraie.

Intervalle $[\alpha, d]$, on remarque que $\alpha > \varepsilon$ alors on remplace η par α pour obtenir l'estimation. $\square$

Le lemme suivant donne une estimation de la dérivée en 1.

LEMME 3.2.11. *Il existe une suite réelle $(C_k)(k \geq 0)$ telle que, pour toute solution (u, θ, λ) de (3.2.5) vérifiant $u \in Z_{4k}(\theta, \lambda)$ et $\lambda > C_k$, on a $\dot{u}(1) \neq 0$.*

DÉMONSTRATION. *Cas $k \geq 1$:* Le **lemme(3.2.8)** implique qu'il existe γ et $\varepsilon > 0$ tel que $u(\gamma) = g_-^{-1}(\lambda(1 - \rho))$, et $\gamma > \varepsilon$, on suppose que γ est le plus grand dans $]0, 1[$, soit b le plus petit de u dans $] \gamma, 1[$.

Estimation de $\dot{u}(b)$.

u est convexe sur $] \gamma, b[$, par l'absurde, on suppose qu'il existe $t \in] \gamma, b]$ tel que $-\ddot{u}(t) \geq 0$ alors (3.2.5) donne pour λ assez grand

$$\begin{aligned} -\dot{u}(t) \frac{n-1}{\varepsilon} &\leq -\rho\lambda \\ -\dot{u}(t) &\leq -\frac{\varepsilon\rho}{n-1}\lambda \end{aligned}$$

ce qui contredit (3.2.12).

Posons $v(t) = -u(t)$, alors $-\ddot{v} = \lambda + \theta f - g(u) - \theta p\dot{u}$, comme $|u| < |g^{-1}((1-\rho)\lambda)|$ alors $-\ddot{v}(t) > \lambda\rho - \theta p\dot{u}$, (3.2.12) donne $\rho_1 > 0$ tel que $-\ddot{v}(t) > \lambda\rho_1$. Comme $|v| < |g^{-1}((1-\rho)\lambda)|$

$$\left| \begin{array}{l} -\ddot{v} > \frac{\lambda\rho_1}{|g^{-1}((1-\rho)\lambda)|} v \\ v(t) > 0, t \in]\gamma, b[\end{array} \right.$$

le théorème de comparaison de Sturm donne

$$(b - \gamma) < \pi \sqrt{\frac{|g^{-1}((1-\rho)\lambda)|}{\rho_1 \lambda}}$$

la convexité de u sur $] \gamma, b[$ donne

$$\dot{u}(b) > \frac{u(b) - u(\gamma)}{b - \gamma}$$

, soit $k_2 = \sqrt{\rho_1}/\pi$ on obtient

$$(3.2.13) \quad \dot{u}(b) > k_2 \sqrt{\lambda |g^{-1}((1-\rho)\lambda)|}$$

Les Corollaires (9,10) donnent $k_3 > 0$ tel que

$$(3.2.14) \quad (1 - b) < k_3 \sqrt{R(\lambda)/\lambda}$$

Enfin, (3.2.6) donne

$$\frac{\dot{u}^2(b) - \dot{u}^2(1)}{2} = \theta \int_b^1 p \dot{u}^2 dt$$

on déduit de (3.2.2), (3.2.12), (3.2.13) et (3.2.14)

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}^2(1)}{2} &> \frac{\dot{u}^2(b)}{2} - \theta(1-b) \frac{n-1}{\varepsilon} \max u^2 \\ \frac{\dot{u}^2(1)}{2} &> k_2^2 \lambda |g^{-1}((1-\rho)\lambda)| - \theta k_3 \sqrt{\frac{R(\lambda)}{\lambda}} k_1^2 \lambda R(4\lambda) \\ \frac{\dot{u}^2(1)}{2} &> \lambda |g^{-1}((1-\rho)\lambda)| \left(k_2^2 - k_1^2 \theta k_3 \frac{n-1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{R(\lambda)}{\lambda}} \frac{R(4\lambda)}{|g^{-1}((1-\rho)\lambda)|} \right) \end{aligned}$$

la concavité de g_+^{-1} et g_-^{-1} , et (3.2.3) donnent $\dot{u}(1) \neq 0$ pour λ assez grand.

Cas $k = 0$: la fonction u est convexe et n'a pas de maximum local, alors $u(t) < 0, t \in]0, 1[$, donc $\dot{u}(1) > 0$. $\square$

Preuve de la proposition(3.2.3)

DÉMONSTRATION. Pour θ et λ fixés, $S(\theta, \lambda)$ représente l'ensemble des solutions $u(t)$ de (3.2.5) ayant un minimum local en zéro. Soit $k \in N, \lambda > \max\{A, C\}$ (C donné dans la **proposition(3.2.2)**)

$$\Omega_{4k}^*(\theta, \lambda) = Z_{4k}(\theta, \lambda) \cap B(K(\lambda)) \cap D$$

ici $B(K(\lambda)) \subset ES$ est la boule ouverte de centre 0, et de rayon $K(\lambda)$, $D = \{u \in ES : \dot{u}(1) \neq 0\}$.

On remarque que

$$\partial\Omega_{4k}^*(\theta, \lambda) \subset \partial B(K(\lambda)) \cup \partial Z_{4k}(\theta, \lambda) \cup \partial D$$

pour λ assez grand, la **proposition(3.2.2)** donne $S(\theta, \lambda) \cap \partial B(K(\lambda)) = \emptyset$

pour λ assez grand, la **proposition(3.2.4)** donne $S(\theta, \lambda) \cap \partial Z_{4k}(\theta, \lambda) = \emptyset$
on déduit

$$S(\theta, \lambda) \cap \partial \Omega_{4k}^*(\theta, \lambda) \cap \partial D \subset S(\theta, \lambda) \cap \partial D \cap Z_{4k}(\theta, \lambda)$$

alors le **lemme(3.2.11)** donne $S(\theta, \lambda) \cap \partial \Omega_{4k}^*(\theta, \lambda) \cap \partial D = \emptyset$
d'où pour λ assez grand

$$S(\theta, \lambda) \cap \partial \Omega_{4k}^*(\theta, \lambda) = \emptyset$$

□

Preuve du théorème(3.2.1)

DÉMONSTRATION. On considère le problème

$$-\ddot{u} = (1 - \theta)u^2 + \theta g(u) - \lambda \text{ et } u(-1) = u(1) = 0$$

pour $\theta = 0$ F.Ammar-Khodja[7] donne le diagramme exacte de la l'ensemble des solutions.

On note $C_{2k} = \{(u, 0, \lambda) \in ES \times \{0\} \times R_+ : u \in Z_{2k}(0, \lambda)\}$ les branches de solutions symétriques et, C_{2k}^{+-} et C_{2k}^{-+} les parties de C_{2k} définies respectivement par les signes de $u(-1)$ et $u(1)$, voir Fig(3.1.25)[47].

Pour λ grand les solutions sont uniques (donc isolées) dans $\Omega_{4k}^{+-}(0, \lambda)$ (respectivement $\Omega_{4k}^{-+}(0, \lambda)$), du fait qu'elles soient isolées, leur index est égal au degré topologique $d(\phi, (0, \lambda), \Omega_{4k}^{+-}(0, \lambda))$ (respectivement $d(\phi, (0, \lambda), \Omega_{4k}^{-+}(0, \lambda))$) calculées dans proposition (3.1.12). On déduit que

Il existe une suite réelle (γ_k) telle que

pour tout $k \geq 0$ et $\lambda > \gamma_k$ $d(\phi, (0, \lambda), \Omega_{4k}^{+-}(0, \lambda)) \neq 0$

pour tout $k \geq 1$ et $\lambda > \gamma_k$ $d(\phi, (0, \lambda), \Omega_{4k}^{-+}(0, \lambda)) \neq 0$.

Enfin, l'invariance par homotopie liée à (3.2.5) par rapport à θ donne pour $\alpha_k = \max\{\lambda_k, \gamma_k\}$

pour tout $k \geq 0$ et $\lambda > \alpha_k$ $d(\phi, (1, \lambda), \Omega_{4k}^{+-}(1, \lambda)) \neq 0$

pour tout $k \geq 1$ et $\lambda > \alpha_k$ $d(\phi, (1, \lambda), \Omega_{4k}^{-+}(1, \lambda)) \neq 0$

d'où l'on déduit le **Théorème(3.2.1)**.

□

CHAPITRE 4

Conclusion

Ce commentaire concerne la possibilité d'extension des deux principaux résultats obtenus. L'estimation *a priori* et la classification des solutions. Notamment leurs extensions à des solutions non radiales ou à des systèmes d'équations.

- (1) L'estimation *a priori* (2.2.6) est obtenue grâce à l'existence d'un minimum local précédant les maximums locaux. Ainsi, cette estimation ne concerne pas les solutions commençant par un maximum local.
Existe-t-il une estimation du même ordre que (2.2.6) pour les solutions commençant par un maximum local ?
Dans le cas d'une réponse positive, l'existence d'autres solutions du problème (3.2.1) pourrait être obtenue.
- (2) Peut-on généraliser la classification des solutions, suivant les ensembles Z_k , aux solutions non radiales ?
- (3) Les conditions aux limites (3.2.4) ne sont pas des conditions de Dirichlet, ce qui autorise à penser que certains résultats se conservent pour des conditions aux limites plus générales que les conditions de Dirichlet.

ANNEXE A

Compléments

Opérateur de Green pour le problème (3.2.5).

Considérons le problème

$$u'' + \frac{\beta}{t}u' = 0, \text{ avec } u'(0) = u(1) = 0$$

la solution générale est, pour $\beta \neq 1$, $c_1 + c_2 x^{1-\beta}/(1-\beta)$, et pour $\beta = 1$, $c_1 + c_2 \ln x$.
 $u \equiv 0$ est l'unique solution vérifiant les conditions aux limites.

La fonction de *Green* de l'opérateur, pour $\beta \neq 1$, est donnée par

$$G(x, \xi, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-1}\xi^\beta - \frac{1}{\beta-1}\xi & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{1}{\beta-1}\xi^\beta + \frac{1}{1-\beta}\xi^\beta x^{1-\beta} & \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

et pour $\beta = 1$

$$G(x, \xi, 1) = \begin{cases} \xi \ln \xi & 0 \leq x \leq \xi \\ \xi \ln x & \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

On vérifie la continuité par rapport à β en calculant

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} G(x, \xi, \beta) = G(x, \xi, 1)$$

Ensembles $Z_k(\theta, \lambda)$.

On vérifie que les ensembles $Z_k(\theta, \lambda)$ sont des ouverts de $C^1[0, 1]$, en montrant que, pour tout $u \in Z_k(\theta, \lambda)$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(u, \epsilon) \subset Z_k(\theta, \lambda)$.

Soit $v \in C^1[0, 1]$ tel que $\|u - v\|_1 = \|u - v\| + \|u' - v'\| < \epsilon$, où $\|x\| = \sup_{[0,1]} |x(t)|$.

On note $h(t) = g_+^{-1}(t, \theta, \lambda)$ et $m = \inf_{[0,1]} \|u' - h'\| > 0$.

On a

$$\begin{aligned} |v'(t) - h'(t)| &\geq |u'(t) - h'(t)| - |u'(t) - v'(t)| \\ |v'(t) - h'(t)| &\geq m - \epsilon \end{aligned}$$

pour ϵ assez petit

$$\inf_{[0,1]} |v'(t) - h'(t)| > 0$$

donc les zéros de $v - h$ sont simples.

Pour ϵ assez petit, $v - h$ possède au moins k zéros.

Soit τ un zéro de $u - h$, il existe δ tel que $u - h$ change de signe une seule fois (est monotone) sur $[\tau - \delta, \tau + \delta]$. Sachant que $\|u - v\| < \epsilon$, on déduit que, pour ϵ assez petit, $v - h$ change de signe dans $]\tau - \delta, \tau + \delta[$.

Pour ϵ assez petit, $v - h$ ne peut avoir plus de k zéros.

En effet, par l'absurde, soit (v_n) une suite de fonctions qui converge vers u , telle que $v_n - h$ possède au moins $k + 1$ zéros simples. Comme u possède k zéros simples, il existe (τ_n^1) et (τ_n^2) deux suites de zéros de $(v_n - h)$ qui convergent vers τ un zéro de $u - h$.

Sans perdre de généralité, on suppose que τ_n^1 et τ_n^2 sont des zéros consécutifs de $v_n - h$, donc $v'_n(\tau_n^1)$ et $v'_n(\tau_n^2)$ sont de signes opposés (remarque (2.3.4)) et convergent vers $u'(\tau) \neq 0$, contradiction.

Enfin, on déduit que, pour ϵ assez petit, $v \in Z_k(\theta, \lambda)$.

Estimation *a priori* des solutions dans $C^1[0, 1]$.

L'estimation *a priori* des solutions dans $C^1[0, 1]$ à partir de l'estimation dans $C^0[0, 1]$ (3.2.9), est une conséquence de l'inégalité de *Schauder* (1.2.4).

On peut obtenir l'estimation de la dérivée, directement à partir de l'équation (3.2.5) comme suit. On note $\beta = \theta(n - 1)$, on réécrit (3.2.5)

$$-(t^\beta u')' = t^\beta (g(u) - \lambda)$$

on note $m = \inf g(x)$ sur R (qui est fini), on a

$$t^\beta (m - \lambda) \leq -(t^\beta u')' \leq t^\beta g(u)$$

pour λ assez grand, l'estimation (3.2.9) donne

$$t^\beta (m - \lambda) \leq -(t^\beta u')' \leq t^\beta g(2R(4\lambda))$$

on intègre sur $[0, x] \subset [0, 1]$

$$\frac{x}{\beta + 1} (m - \lambda) \leq -u'(x) \leq \frac{x}{\beta + 1} g(2R(4\lambda))$$

enfin

$$\|u'\| \leq \frac{1}{\beta + 1} \max\{g(2R(4\lambda)), |m - \lambda|\}$$

ANNEXE B

Espaces de Hölder

Soit Ω un domaine (c'est-à-dire un ouvert connexe) borné de R^n .

$C^k(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_k = \sum_{|\sigma| \leq k} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\sigma u(x)|$$

avec

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad |\sigma| = \sigma_1 + \dots + \sigma_n, \quad D^\sigma = \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial^{\sigma_1} \dots \partial^{\sigma_n}}$$

Pour $u \in C^k(\bar{\Omega})$ et $\alpha \in]0, 1[$, on pose

$$H_{k,\alpha} = \sup_{|\sigma| = k, x \neq y \text{ dans } \bar{\Omega}} \frac{|D^\sigma u(x) - D^\sigma u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

On appelle espace de Hölder, l'espace de Banach

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) : H_{k,\alpha}(u) < \infty\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{k,\alpha} = \|u\|_k + H_{k,\alpha}(u)$$

Notation $C^{0,\alpha}(\Omega) = C^\alpha(\Omega)$ et $\|u\|_{0,\alpha} = \|u\|_\alpha$.

Index

Estimation de Schauder, 31
Exposant critique, 12, 13
Fonction énergie, 29
Identité de Pohozaev, 17
Non-positone problem, 16
Opérateur action, 15
Positone problem, 16
Principe du maximum, 31
Semi-linéaire, 16
Sous-critique, 16
Sous-linéaire, 16
Super-linéaire, 16
Théorème de comparaison de Sturm, 32

Bibliographie

- [1] W. Allegretto, P. Nistri, p. zecca : *Positive solutions of elliptic non-positone problems*, Differential and Integral Equations, vol 5, n 1 (1992), pp. 95-101.
- [2] H. Amann : *On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J. 21 (1971), 125-146
- [3] H. Amann : *Existence and multiplicity theorems for semi-linear elliptic boundary value problems*, Math. Z. 150 (1976), 281-295.
- [4] A. Ambrosetti P. H. Rabinowitz : *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functionnal Analysis 14 (1973), 349-381.
- [5] A. Ambrosetti G. Prodi : *A Primer of Nonlinear Analysis*, Edit. Cambridge University Press.
- [6] A. Ambrosetti, G. Prodi : *On the inversion of somme differential mappings with singularities between banach spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. vol 93(1973), 231-247
- [7] F. Ammar-Khodja : *Thèse 3me cycle*, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, (1983).
- [8] D. Arcoya, a. zertiti : *Existence and non-existence of radially symetric non-negative solutions for a class of semi-positone problems in an annulus*, Rendiconti di Mathematica, serie VII, vol 14, Roma (1994), 625-646.
- [9] H. Berestycki, thèse.
- [10] H. Berestycki, P. L. Lions : *Une méthode locale pour l'existence de solutions positives de problèmes semi-linéaires elliptiques dans R^n* , Journal d'Analyse Mathématique, vol 38 (1980), pp. 144-187.
- [11] H. Berestycki, P. L. Lions : *Some applications of the method sub- and supersolutions, in bifurcation and nonlinear eigenvalue problems* (Bardos, Lasry and Schatman, eds.), Lectures notes in Math. No. 782, Springer Verlag, New York, 1979.
- [12] Bers-John-Schechter : *partial differential equations*, Lectures in Applied Math. Vol. III, (interscience).
- [13] H. Brezis : *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Edit. Masson.
- [14] H. Brezis, R.E.L. Turner : *On a class of superlinear elliptic problems*, Commun. in P.D.E., 2 (1977), 601-614.
- [15] K. J. Brown, A. Castro, A. Shivaji : *Non-existence of radially symmetric non-negative solutions for a class of semi-positone problems*, Differential and Integral Equations, volume 2, Number 4 (1989) pp. 541-545.
- [16] K. J. Brown, H. Budin : *On the existence of positive solutions for a class of semilinear elliptic boundary value problems*, SIAM J. Math. Anal. vol 10, n 5 (1979), 875-883.
- [17] M. Brouwer : *Mathematische Annalen*, t. 71, 1911, p. 97-115.
- [18] A. Castro and R. Shivaji, *Multiple Solutions for a Dirichlet Problem with Jumping Nonlinearities*. II J. M. A. and Appl 133, 505-528 (1988).
- [19] A. Castro, S. Gadam : *Branches of Radial Solutions for Semipositone Problem*. J. DIFF. EQUAT. 120(1995). 30-45.
- [20] A. Castro, R. Shivadji : *Non-negative solutions for a class of non-positone problems*, Royal society of Edinburgh, 108(1988), 291-302
- [21] M. Coddington et N. Levinson : *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [22] W. Dambrosio : *On the multiplicity of radial solutions to superlinear Dirichlet problems in bounded domains*, J. Diff. Equat. 196 (2004) 91-118.
- [23] D.G. de Figueiredo, P.L. Lions, R.D. Nussbaum : *A priori estimats and existence results of positive solutions of semilinear elliptic equations*, J. Math. Pures. Appl,

- [24] D.G.Figueiredo : *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Proc. of the first latin american school of differential equations, Lectures notes n. 957(1982), 34-87.
- [25] Fucik-Kufner : *Nonlinear differential equations*, Elsevier.
- [26] B.Gidas, Y.M. Ni et L. Nirenberg, *Symetry and Related Properties via the Maximum Principal*, Comm. Math. Phys., 68, (1979), 209-243.
- [27] G. Gilbarg, N.S. Trudinger : *Elliptic Differential Equations of Second Order*, Springer-verlag 1977.
- [28] L.M.Guelfand : *Some problems in the theory of quasilinear equations*. Amer. Math. Soc. Transl. (Ser. 2), 29 (1963), p. 295-391.
- [29] E.Heinz : *An elementary Analytic Theory of Degree in n-Dimensional Space*. Journal of Math. Mech. 8 (1959) 231-247.
- [30] H.Hopf, *Lectures on differential geometry in the large*, Stanford University, 1956.
- [31] J.A. Hempel : *Multiple solutions for a class of nonlinear boundary value problems*, Indiana. Univ. Math. J. 20 (1971), 983-996.
- [32] D.D.Joseph, T.S.Lungren : *Quasilinear Dirichlet problems driven by positivity sources*. Arch.Rat. Mech. Anal., 49 (1973), p. 241-260.
- [33] Jeanjean L. : *Méthodes Variationnelles et Applications à Quelques Problèmes d'Analyse Non Linéaire*, Mémoire d'habilitation. Université de Besançon, France.
- [34] H. B. Keller : *Nonlinear Bifurcation*, Journal of Differential Equations 7 (1970) pp. 417-434
- [35] I.I.Kolodner : *Heavy rotating string, a nonlinear problem*, Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955), 395-408.
- [36] Krasnoselski : *Topological Methods in the Theory of nonlinear Integral Equations*, Pergamon-Press.
- [37] J.Leray et J.Schauder : *Topologie et équations fonctionnelles*. Ann Sci. Ecole Norm Sup Vol. 3, 51, 1934, p 45-414.
- [38] P. L. Lions : *On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations*, SIAM review, Vol. 24, (1982)
- [39] Mawhin, J., *Boundary Value Problem with jumping nonlinearities having infinite jumps*. Comment Math, Unit, Carolin 25 (1984), p401-414.
- [40] S. I. Pohozaev, *Eigenfunctions of equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$* . Sov. Math.Dokla 5, (1965)
- [41] M.H. Protter, H.F. Weinberger : *Maximum principles in Differential Equations*, Printice-hall 1967, Springer-verlag 1984.
- [42] P. H. Rabinowitz : *Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems*, Indiana Univ. Math. J. 23 (1974), 729-754.
- [43] P. H. Rabinowitz : *Pairs of positive solutions of nonlinear elliptic partial diffential*, Indiana Univ. Math. J. vol 23, n 2 (1973), 173-186.
- [44] P. H. Rabinowitz : *A global Theorem for Nonlinear Eigenvalue Problems and Applications*. Edited by EH. Zarantonello. Winconsin Madison (1971), P11-37.
- [45] P. H. RABINOWITZ : *Nonlinear Sturm-Liouville Problems for Second order ordinary differential equations*, Communications on pure and applied mathematics, vol XXIII (1970), 939-961.
- [46] Ramaswami : *Thèse 3me cycle*, Paris VI, (1983).
- [47] M. Rouaki : *Topological Degree and a nonlinear Dirichlet problem*. Nonlinear Analysis MTA 54 (2003) 801-817.
- [48] M. Rouaki : *Nodal radial solutions for a super-linear problem*. Nonlinear Analysis RWA
- [49] M.Schauder. Mathematische Zeitschrift, t 38, 1934, p 257.
- [50] M.Schauder. Note Comptes redus de l'Académie des Sciences, t. 196, 1933, p. 89.
- [51] J.Serrin, *Asymetry problem in potential theory*, Arch. Ration. Mech. 43 (1971) 304-318.
- [52] E.Zeidler, *Nonlinear Functionnal Analysis and its Application*, Volume 1, Springer (1985).