



UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
USTHB / ALGER
FACULTE DE GENIE MECANIQUE ET DE GENIE DES PROCÉDES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MAGISTER

EN : CHIMIE INDUSTRIELLE

Par :

M^{me} Abchiche Hacina

Thème

*Contribution à la modélisation de l'écoulement
d'un matériau granulaire dans un séchoir à
canaux noyés*

Soutenu publiquement le 24 / 06 / 2004 devant le jury composé de :

M ^r S. BELAADI	Professeur (USTHB)	Président
M ^r K. DAUD	Maître de conférences (USTHB)	Directeur
M ^r L .NOURI	Maître de conférences (USTHB)	Examineur
M ^r M. BELKACEM	Maître de conférences (USTHB)	Examineur
M ^{me} A. BENSMAILI	Professeur (USTHB)	Examinatrice

REMERCIEMENTS

*Ce travail a été réalisé sous la direction de **M'K. DAOUD**, Maître de conférences à l'USTHB. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour son aide et ses encouragements tout au long de ce travail ainsi que pour le temps qu'il m'a consacré.*

*Je remercie **M^{me} F. Bentahar**, Directrice du Laboratoire des Phénomènes de Transfert d'avoir bien voulu m'accepter au sein de son laboratoire.*

*Je tiens à remercier **M' S. Belaadi**, professeur à l'USTHB, d'avoir bien voulu accepter la présidence du jury.*

*J'exprime ma gratitude à **M^{me} A Bensmaili** professeur à l'USTHB et **M' L. Nouri** Maîtres de conférences à l'université de Boumerdes et **M' M. Belkacem**, Maîtres de conférences à l'USTHB d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail.*

*Je remercie également **M'.M. Debian** chargé de cours à la Faculté de Physique à l'USTHB pour son aide précieuse.*

Enfin je remercie l'ensemble du personnel du département de Génie Chimique, les techniciens du département de Génie Mécanique et ceux de la faculté de Génie Civil pour l'aide qu'ils m'ont apportée.

Sommaire

Nomenclature	
Introduction générale..	01

Chapitre I Revue bibliographique

I.1. Généralités sur le séchoir à canaux noyés.	03
I.1.1. Schéma général d'un séchoir industriel.	03
I.1.2. Le séchoir à canaux noyés.	05
I.1.2.1 Architecture.	05
I.1.2.2 Fonctionnement.	05
I.1.2.3 Avantages et inconvénients du séchoir à canaux noyés.	06
I.2 Modélisation de l'écoulement granulaire.	06
I.2.1 Introduction.	06
I.2.2 Théorie probabiliste.	06
I.2.2.1 Théorie stochastique pour un écoulement gravitaire.	07
I.2.2.2. Modèle cinématique.	10
I.2.3. Théorie de la plasticité..	21
I.2.3.1. Introduction.	21
I.2.3.2. Modèle de Pariseau.	21
I.2.3.3. Modèle de Polderman.	23
I.3. Conclusion.	27

Chapitre II Description de l'installation expérimentale

II. 1. Introduction.	29
II.2. Description de l'installation.	29
II.2.1. La colonne.	29
II.2.2. Les dièdres.	30
II.2.3. Le tiroir d'extraction.	31
II.2.4 La trémie.	32
II.3 Procédure et moyen de mesure.	32
II.3.1 Procédure expérimentale.	32
II.3.2 Moyen de mesure.	33
II.3.3 Matériau granulaire.	35
II.3.3.1 Diamètre.	35
II.3.3.2 Masse volumique.	35
II.3.3.3 Angle de frottement interne.	35
II.3.3.4 Porosité.	36
II. 4 Conclusion.	37

Chapitre III

Modélisation mathématique de l'écoulement granulaire

III.1 Introduction.	38
III.2 Modélisation de l'écoulement à travers les dièdres du séchoir.	38
III.2.1 Introduction.	38
III.2.2 Formulation mathématique.	38
III.2.3 Résolution mathématique.	40
III.2.3.1 Détermination des composantes de vitesse des grains.	42
III.2.3.2 Détermination des constantes d'intégration.	45
III.2.4 Conclusion.	47
III.3 Détermination des coefficients de dispersion.	48
III.3.1 Introduction.	48
III.3.2 Modélisation de l'écoulement dans un silo.	48
III.3.2.1 Formulation mathématique.	48
III.3.3 Conclusion.	55

Chapitre IV

Identification des coefficients de dispersion

IV.1. Introduction.	56
IV.2. Description de l'installation expérimentale.	56
IV.3. Résultats dynamiques de l'écoulement granulaire dans un silo.	57
IV.3.1. Fonctionnement.	57
IV.3.2. Observation visuelle.	57
IV.3.3. Résultats expérimentaux.	59
IV.3.3.1. Essais effectués.	59
IV.3.3. 2. Résultats expérimentaux.	59
IV.3.3. 3. Analyse des résultats.	64
IV.3.4. Détermination des paramètres cinématiques.	67
IV.3.4.1. Détermination du coefficient de dispersion axial D_z .	67
IV.3.4.2. Modélisation de l'écoulement granulaire dans la zone d'écoulement piston.	69
IV.3.4.3. Détermination du coefficient de dispersion radial D_r .	72
IV.4. Conclusion.	76

Chapitre V

Etude de l'écoulement du matériau granulaire dans le séchoir à dièdres

V.1. Introduction.	78
V.2. Etude expérimentale de l'écoulement granulaire dans un séchoir à canaux noyés.	78
V.2.1. Observation visuelle.	78
V.2.2. Résultats expérimentaux.	79
V.2.3. Analyse des résultats.	83
V.3. Comparaison du modèle avec l'expérience.	83
V.3.1. Introduction.	83

V.3.2. Procédure de calcul.	83
V.3.3. Ajustement des coefficients de dispersion dans la colonne à dièdres.	84
V.3.3.1. Identifications des coefficients de dispersion dans la première maille.	85
V.3.4. Réajustement des coefficients de dispersion.	88
V.3.5. Récapitulatif.	93
V.3.6. Validité du modèle.	94
V.4. Conclusion.	95
Conclusion générale.	96
Références bibliographiques.	97

Annexes

Annexe I. Détermination du diamètre du grain	99
Annexe II. Détermination de la masse volumique du grain.	100
Annexe III. Détermination de l'angle de frottement interne.	101
Annexe IV. Détermination de la porosité du lit.	102
Annexe V. Rappel des fonctions de Bessel.. . . .	104
Annexe VI. Valeurs obtenues dans le silo cylindrique.	107

NOMENCLATURE

Lettres latines

A	: constante adimensionnelle dans l'équation III.9	(-)
a	: demi longueur de l'obstacle carré de la figure I.6	(m)
B	: constante adimensionnelle dans l'équation III.9	(-)
B _g	: coefficient cinématique du modèle de Nedderman	(m)
c	: cohésion dans l'équation I.46	(Pa/m ²)
C	: concentration de lacunes dans le lit	(nombre de lacunes/unité de volume)
C _g	: concentration des grains solides dans le lit	(nombre de grains / unité de volume)
C ₀	: concentration de lacunes à l'orifice	(nombre de lacunes / unité de volume)
d	: diamètre du cylindre à fond plat de l'équation I.33	(m)
d _f	: diamètre de la fente du silo	(m)
d _p	: diamètre des particules solides	(m)
D _{int}	: diamètre intérieur du silo	(m)
D _{ext}	: diamètre extérieur du silo	(m)
D _x	: coefficient de dispersion longitudinale	(m ² /s)
D _y	: coefficient de dispersion transversale	(m ² /s)
D _r	: coefficient de dispersion radiale dans le silo	(m ² /s)
D _z	: coefficient de dispersion axiale dans le silo	(m ² /s)
H _f	: hauteur mesurée à partir de la fente du silo	(m)
H _{silo}	: hauteur du silo	(m)
H	: hauteur de la colonne à dièdres	(m)
H _t	: largeur du tiroir d'extraction	(m)
H _e	: hauteur de la trémie	(m)
j _x	: flux de lacunes longitudinal	(nombre de lacunes*m / unité de volume*s)
J _z	: flux de lacunes transversal	(nombre de lacunes*m / unité de volume*s)
J ₀	: fonctions J d'ordre zéro de Bessel	(-)
L	: longueur du séchoir à dièdres	(m)
L'	: Dimension caractéristique apparaissant dans le nombre de Peclet	(m)
L _t	: longueur du tiroir d'extraction	(m)
L _e	: longueur de la trémie	(m)
l _e	: largeur de la trémie	(m)
m _t	: masse totale dans le lit	(kg/s)
m _p	: masse des particules solides	(kg/s)
n _t	: nombre total de lacunes	(nombre de lacunes)
N	: nombre dans l'équation III.24	(nombre total / unité de volume)
N _s	: nombre de sauts aléatoires	(-)
N _{Dr}	: nombre de dispersion radiale	(-)
N _{Dz}	: nombre de dispersion axiale	(-)
P	: profondeur de la colonne à dièdres	(m)
Pe _z	: Nombre de Peclet axial	(-)
p	: fonction de la densité de probabilité	(-)
Q _m	: débit massique des particules	(kg/s)
Q	: débit volumique dans la zone d'écoulement piston de l'équation I.33	(m ³ /s)

Q_c	: débit volumique dans le cas d'un cylindre à fond conique de l'équation I.39	(m ³ /s)
R	: rayon du silo	(m)
Re_p	: nombre de Reynolds particulaire	(-)
r	: abscisse radiale dans le silo	(m)
S	: Section du silo	(m ²)
t	: temps	(s)
u	: composante de vitesse longitudinale dans le séchoir	(m/s)
v	: composante de vitesse transversale dans le séchoir	(m/s)
v'	: vitesse transversale dans le nombre de Peclet	(m/s)
v_0	: vitesse verticale au niveau de l'extracteur	(m/s)
v_r	: vitesse radiale dans le silo	(m/s)
v_p	: volume d'une particule solide	(m ³)
v_z	: vitesse axiale dans le silo	(m/s)
v_{piston}	: vitesse verticale dans la zone d'écoulement piston de l'équation I.34	(m/s)
$v_{centrte}$: vitesse verticale à l'axe central du cylindre de l'équation I.38	(m/s)
V	: vitesse moyenne dans la colonne à dièdres	(m/s)
V_t	: volume total de la colonne.	(m ³)
x	: abscisse longitudinale dans le séchoir à dièdres	(m)
y	: abscisse transversale dans le séchoir à dièdres	(m)
y^+	: abscisse transversale adimensionnelle	(-)
Y_0	: fonctions Y d'ordre zéro de Bessel	(-)
z	: abscisse axiale dans le silo	(m)

Lettres grecques

α	: demi-angle du dièdre	(°)
λ	: constante réelle dans l'équation III.13	(-)
δ	: constante réelle dans l'équation III.58	(-)
ρ_p	: masse volumique du matériau granulaire	(kg/m ³)
β	: constante caractéristique du modèle probabiliste équation I.26	(m)
φ	: l'angle de talus formé par le grain en dessous du dièdre	(°)
ν	: fréquence de sauts aléatoires	(nombre de sauts/s)
ψ_w	: angle entre la contrainte normale et l'angle d'inclinaison à la paroi	(°)
φ_w	: angle de frottement particule-paroi	(°)
φ	: angle de frottement interne	(°)
τ	: taux de contrainte	(Pa/m ²)
ρ_{air}	: masse volumique de l'air	(kg/m ³)
μ_{air}	: viscosité de l'air	(P*s)
ε	: porosité du lit	(m ² du solide/m ² du vide)
θ	: angle d'inclinaison du cylindre à fond conique de l'équation I.50	(°)
$\nabla\sigma$: tenseur de contraintes	(Pa/m ²)

Introduction générale

Introduction générale

Dans les industries chimiques, pharmaceutiques ou agro-alimentaires, l'opération de séchage est une étape intermédiaire majeure dans l'obtention de produits finis ou semi-finis; en effet, celle-ci demeure délicate, car c'est de sa réussite que dépend la qualité des produits.

On définit le séchage comme une opération qui consiste à éliminer partiellement, voir totalement un solvant d'un matériau humide par voie thermique de manière à obtenir un produit dit « sec ». Pour cela, il existe un très grand nombre de procédés et d'appareils de séchage tels que les séchoirs pneumatiques, les séchoir à atomisation et les séchoirs à canaux noyés; ces derniers présentent de considérables avantages sur le plan technico-économique, et conviennent particulièrement pour des applications très délicates comme le séchage des produits biologiques, céréales, fruits et légumes; l'avantage principal et déterminant dans le choix de ce type de séchoir par les industriels réside dans l'homogénéité de la répartition de l'air de séchage, opération rendue possible grâce au dispositif spécial d'introduction d'air que constituent les dièdres (canaux). Toutefois, ces dièdres qui constituent des obstacles à l'écoulement du matériau granulaire peuvent avoir des répercussions néfastes sur le temps de séjour du matériau dans le séchoir; d'ailleurs, certains grains peuvent subir un séchage prolongé, ce qui entraîne leur dégradation tandis que d'autres, le seront insuffisamment.

Afin d'approfondir nos connaissances sur les phénomènes qui génèrent les dégradations biologiques, il apparaît à notre sens nécessaire de comprendre et d'identifier l'écoulement des grains dans le séchoir à canaux noyés.

Cette étude nous permettra d'une part d'élucider le phénomène dispersif dont jouit la particule et d'autre part, en déduire la trajectoire qu'elle empreinte lors de son cheminement dans le séchoir. Bien entendu, l'objectif suprême étant la détermination de la fonction de distribution des temps de séjour laquelle couplée à la cinétique de déshydratation, nous permettra de donner aux concepteurs de ce type de séchoir, tous les outils nécessaires à son dimensionnement.

Dans le cadre de cette étude, nous avons souhaité contribuer modestement à la modélisation de l'écoulement des grains solides dans un séchoir à canaux noyés, sans transfert de masse ni de chaleur afin de déterminer le champ de vitesse du matériau granulaire.

Lors de la rédaction de ce mémoire, nous avons suivi une présentation classique composée de cinq chapitres :

Dans le premier chapitre, nous avons fait une revue des principaux travaux antérieurs consacrés aux modélisations de la vitesse d'écoulement des grains solides dans des géométries de formes différentes; d'ailleurs nous avons scindé ce chapitre en deux parties car nous trouvons dans la littérature deux types de théorie :

* la première, relevant de la mécanique des milieux continus fait intervenir les contraintes développées dans le milieu granulaire. L'assimilation d'un milieu granulaire à un milieu continu n'est pourtant pas évidente car la définition d'un

volume élémentaire représentatif n'est pas toujours possible à cause de leur forte hétérogénéité.

* La seconde est une théorie probabiliste purement cinématique, qui ne fait pas intervenir les contraintes développées dans le milieu granulaire, donc ne tenant pas compte des frottements des grains sur les parois et entre les particules.

Le second chapitre est consacré à une description détaillée de l'installation pilote réalisée au sein du laboratoire et qui a servi de support à cette étude. Les propriétés physiques du matériau granulaire utilisé dans le cadre de cette étude sont présentées et les moyens de mesure mises en œuvre décrite.

Nous enchaînerons ensuite dans le chapitre suivant par la présentation de la formulation mathématique au phénomène de l'écoulement du matériau granulaire. Donc, en se basant sur la théorie probabiliste, nous avons aboutit à un modèle tenant compte de la double dispersion couplée à un mouvement convectif des grains. La résolution de l'équation différentielle avec les conditions aux limites appropriées sera développée. Néanmoins, nous mettrons en relief la difficulté d'aboutir à une solution sans l'identification de certains paramètres.

D'ailleurs, le chapitre suivant sera intégralement consacré à la détermination de ces coefficients; pour ce faire, une seconde installation à géométrie simple a été conçue; nous la décrirons et nous présenterons le modèle mathématique simplifié. Les résultats de cette étude seront établis et discutés.

Enfin, exploitant les informations obtenues précédemment, nous présenterons au cinquième chapitre, les trajectoires pariétales expérimentales empreintées par les grains ainsi que le champ de vitesse à travers les dièdres dans le séchoirs à canaux noyés. Une comparaison entre les résultats du modèle et ceux de l'expérience seront largement commentés.

Bien entendu, nous terminerons cette rédaction par une conclusion générale qui portera des critiques à l'égard de notre travail et des recommandations sur les perspectives de cette étude.

Chapitre I : Revue bibliographique

I.1. Généralités sur le séchoir à canaux noyés:

Lorsque l'on étudie le choix technologique à faire pour un projet, on ne peut envisager sa validité sur les seules caractéristiques de l'équipement technique. On préférera s'appuyer sur la notion de "système technique". Un outil de séchage, qu'il soit rudimentaire ou perfectionné, s'insère avant tout dans un système de production dont les autres éléments sont l'Homme et la matière. Pour que ce système soit productif, il faut que chaque relation interdépendante Homme / outil / matière, soit fonctionnelle. C'est la raison pour laquelle, il est nécessaire de maîtriser chacune des relations. Pour notre part, nous avons souhaité apporter notre contribution dans la compréhension de l'aspect phénoménologique de l'outil de production qui est dans ce cas, le séchoir à canaux noyés.

Ce dernier présente beaucoup d'avantages sur le plan technico-économique, et il convient particulièrement à des applications très délicates comme le séchage des produits "biologiques" tels que les céréales, fruits et légumes.

I.1.1. Schéma général d'un séchoir industriel:

Il existe une variété de séchoirs industriels utilisant tous les modes de transfert thermique. Néanmoins, dans l'industrie agro-alimentaire, la quasi-totalité d'entre eux se présentent sous la forme d'une colonne dont la hauteur varie selon les constructeurs, de 10 à 25 mètres et la section rectangulaire de 4 à 6 m de large et de 2 à 3 m de profondeur, figure I.1.

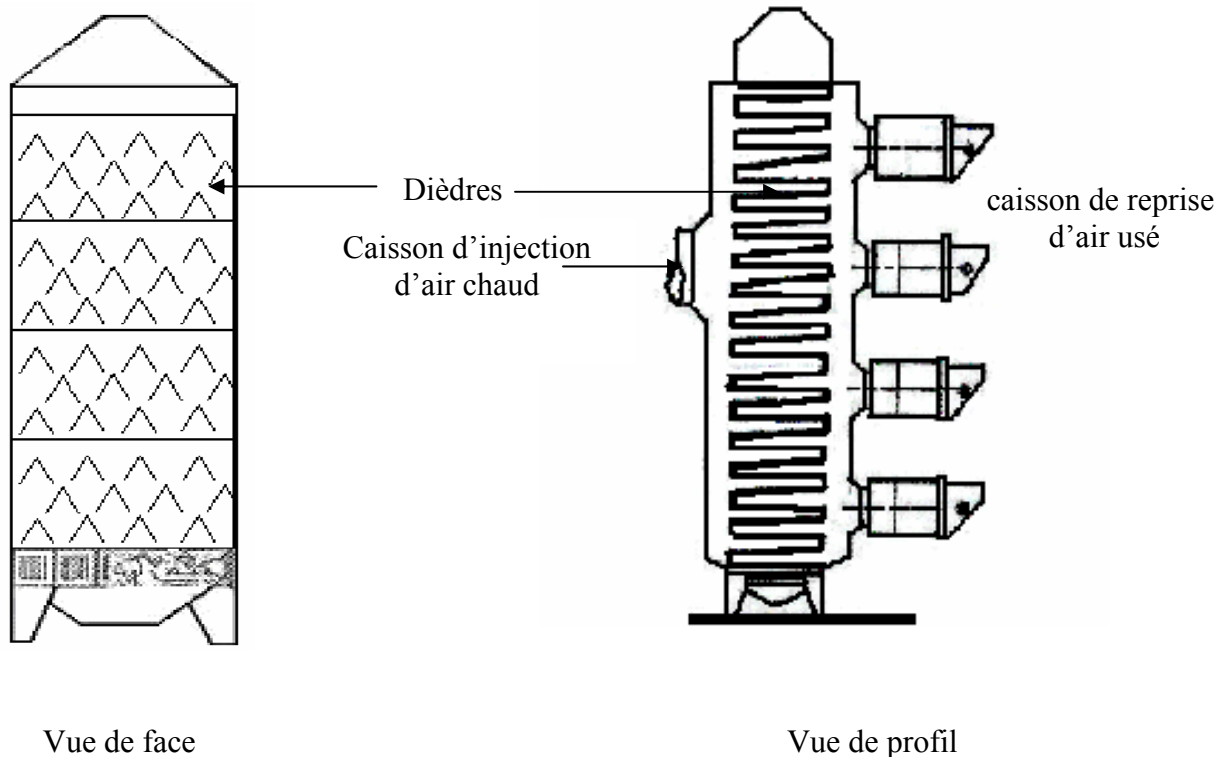


Figure I.1 : Schéma d'un séchoir à canaux noyés

Le transit du grain dans la colonne s'effectue par gravité, sous l'action d'un système d'extraction situé sur la partie basse du séchoir. Suivant le modèle de séchoir, ce dispositif d'extraction peut être soit un système à écluses (cas d'un écoulement continu des grains), figure I.2

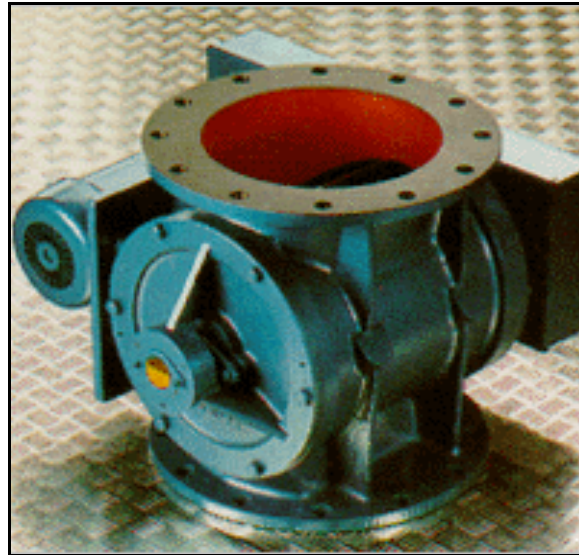


Figure I.2 : Extracteur à écluses

soit un système d'extracteur intermittent (extracteur à tiroir ou extracteur à augets), figure I.3

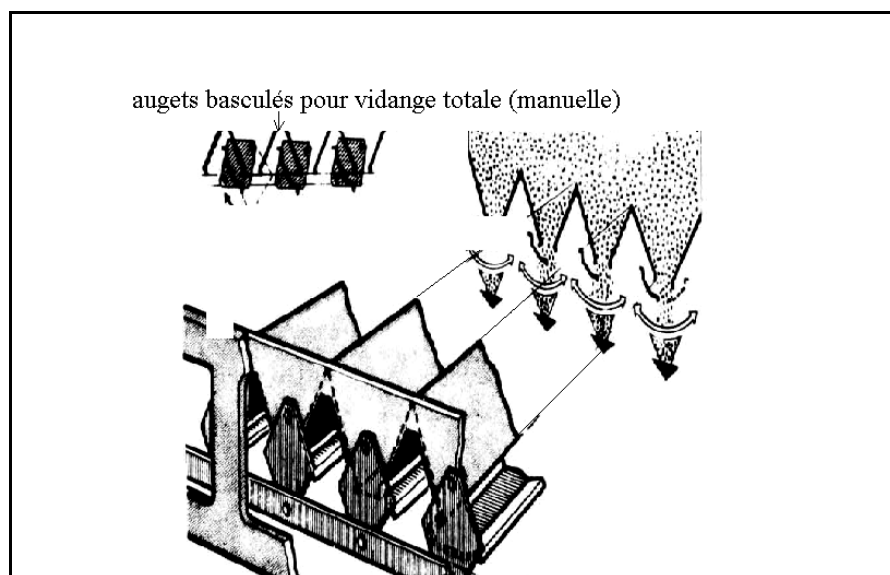


Figure I.3 : Extracteur à augets

L'opérateur peut ainsi agir, selon le système d'extraction, sur la vitesse de rotation des écluses ou bien sur la fréquence et / ou sur la durée d'ouverture de l'extracteur pour faire varier le

débit des grains à travers la colonne. Donc cela permet d'agir sur le temps de séjour du matériau granulaire dans le séchoir.

Par ailleurs, le grain est séché par de l'air chaud et sec qui traverse la colonne depuis un caisson d'amenée d'air situé en amont de la colonne jusqu'au caisson de reprise situé en aval. Ainsi, nous remarquons qu'en l'absence d'un dispositif spécial d'introduction de l'air, il se crée un gradient d'humidité entre la face amont (air chaud et sec) et la face aval (air froid et humide) du séchoir.

Pour remédier à ce problème, certains séchoirs ont été conçus avec un système d'extraction à écluses dont la vitesse de rotation modulable permet d'extraire plus de grains du côté amont que du côté aval. Cela reste malgré tout peu satisfaisant et oblige les utilisateurs à utiliser des températures de séchage plus faibles (inférieur à 90 °C pour le maïs), ce qui pénalise à la fois la capacité évaporatoire et la consommation énergétique du séchoir.

Depuis, une autre génération de séchoirs est apparue dont nous allons décrire les fonctionnalités dans le paragraphe suivant.

I.1.2. Le séchoir à canaux noyés :

I.1.2.1 Architecture:

Depuis plus d'une génération, les constructeurs européens ont développé un dispositif de circulation de l'air au sein de la colonne, en plaçant de façon alternée des dièdres d'amenés et de reprises d'air. Ces dièdres disposés horizontalement à travers la colonne sont ouverts, selon leurs fonctions, sur le caisson d'amené et fermés sur le caisson de reprise ou l'inverse. Ces dièdres permettent d'améliorer l'homogénéité de la densité du flux de séchage à travers la colonne. Toutefois, ils constituent des obstacles à l'écoulement des grains, induisant ainsi des hétérogénéités d'écoulement du produit, qui se répercutent directement sur la dispersion des temps de séjour dans le séchoir.

I.1.2.2 Fonctionnement:

Le séchage s'effectue alors de façon périodique. Chaque cycle consiste en une période de séchage de 2 à 4 minutes où le grain est immobile, et une période d'extraction du grain qui dure quelques dixièmes de secondes.

Quelques secondes avant l'ouverture de l'extracteur, l'injection d'air est arrêtée puis rétablie quelques secondes après la fermeture de l'extracteur pour éviter un important entraînement de poussières lors de la mise en mouvement du grain.

Nous pouvons ainsi distinguer deux phases du séchage dans chaque cycle, une première phase où le grain est immobile et au cours de laquelle deux phénomènes de transport ont lieu:

- ★ L'écoulement de l'air dans la masse de grains.
- ★ Le transfert de chaleur et de matière entre le grain et l'air de séchage.

et une seconde phase où l'injection d'air est arrêtée pendant laquelle a lieu l'écoulement gravitaire du grain autour des dièdres sans transfert de chaleur ni de masse.

I.1.2.3 Avantages et inconvénients du séchoir à canaux noyés :

L'industrie agro-alimentaire en Algérie a accumulé un retard considérable dans le traitement et le conditionnement des produits alimentaires. Il était donc important d'engager une étude approfondie sur un type de séchoir, en l'occurrence le séchoir à canaux noyés. Celui-ci présente de nombreux avantages résumés comme suit :

- ★ Procédé performant techniquement peut donc être économiquement intéressant dans certaines zones en Algérie s'il est couplé à un capteur solaire.
- ★ Utilisation facile pour une vaste gamme de produits végétaux (fruits, légumes, céréales).
- ★ Fournit des produits séchés de bonne qualité hygiénique et organoleptique.
- ★ Fabrication simple du séchoir dépendant uniquement de la disponibilité locale des matériaux.
- ★ Faible coût de fabrication et d'entretien.
- ★ Ne nécessite aucune intervention au cours de séchage.

Malgré ces avantages, il existe tout de même des facteurs défavorables à son utilisation:

- ★ Sa technologie nécessite un réseau électrique fiable pour le fonctionnement des extracteurs, compresseurs, etc...
- ★ Existence d'un passage préférentiel d'air sur les cotés de la cellule de séchage, entraînant une hétérogénéité sur la qualité du produit.

I.2 Modélisation de l'écoulement granulaire:

I.2.1 Introduction:

A la lumière des informations que nous avons présenté au sujet du séchoir à canaux noyés, il apparaît important de maîtriser l'écoulement du matériau granulaire afin de comprendre la destination de l'humidité des grains.

La modélisation de la dynamique des milieux granulaires a suscité de très nombreux travaux théoriques d'inspiration diverse. Nous trouvons dans la littérature deux approches différentes. La première est une théorie probabiliste appliquée généralement à un milieu granulaire non cohésif. La seconde relève de la mécanique des milieux continus.

Nous présenterons les principes de ces deux théories, en précisant les différents modèles et applications afin de montrer les avantages et les limites de chacune d'elles.

I.2.2 Théorie probabiliste :

Cette théorie est appliquée à un milieu granulaire non cohésif, en écoulement gravitaire à travers une fente. Elle considère que l'écoulement du grain du haut vers le bas de

la colonne, est équivalent à un écoulement en sens inverse de lacunes qui apparaissent au niveau de la fente et se propageant au hasard vers le haut du lit, autrement dit c'est l'écoulement réactionnel qui provoque la chute des grains et qui donne naissance à l'apparition des lacunes, donc le mouvement sera décrit par une fonction de distribution probabiliste.

I.2.2.1 Théorie stochastique pour un écoulement gravitaire :

La théorie probabiliste a été appliquée par **Mullins [1]** à un milieu granulaire non cohésif en écoulement gravitaire à travers une fente.

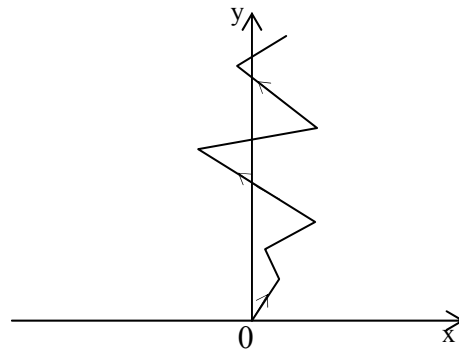


Figure I.4 : Trajectoire aléatoire d'une lacune à travers un lit de particules

Considérons un lit de particules semi-infini suivant l'axe (ox) drainé par une fente d'écoulement située au point 0, figure. I.4. Le mouvement d'une lacune apparaissant en 0 est considéré comme une succession de sauts aléatoires toujours dirigés vers le haut du lit.

Posant $p(u, v)$ la probabilité pour que le saut d'une lacune ait pour composantes (u, v) dans le repère cartésien $(0, x, y)$ nous avons :

$$0 < v < \infty \quad \text{et} \quad -\infty < u < \infty$$

D'autre part, nous avons pour raison de symétrie :

$$p(u, v) = p(-u, v)$$

Par définition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} p(u, v) dv \right] du = 1 \quad \text{I.1}$$

Cette fonction de distribution a pour caractéristique :

la moyenne de u :

$$\langle u \rangle = \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u p(u, v) du \right] dv = 0 \quad \text{I.2}$$

la moyenne de v :

$$\langle v \rangle = 2 \int_0^{+\infty} v \left[\int_0^{+\infty} u p(u, v) du \right] dv \neq 0 \quad \mathbf{I.3}$$

la variance de u :

$$\langle u^2 \rangle = 2 \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} u^2 p(u, v) du \right] dv \neq 0 \quad \mathbf{I.4}$$

la variance de v :

$$\langle v^2 \rangle = 2 \int_0^{+\infty} v^2 \left[\int_0^{+\infty} p(u, v) du \right] dv \neq 0 \quad \mathbf{I.5}$$

et la moyenne du produit :

$$\langle u \cdot v \rangle = \int_0^{+\infty} v \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u p(u, v) du \right] dv \neq 0 \quad \mathbf{I.6}$$

u et v sont donc des variables aléatoires indépendantes. Soit x et y les coordonnées d'une particule au bout de N_s sauts; pour N_s suffisamment grand, d'après la théorie de la limite centrale [2], les variables aléatoires x et y obéissent à une loi normale dont la moyenne et la variance sont :

$$\langle x \rangle = N_s \langle u \rangle = 0 \quad \text{var}(x) = N_s \text{var}(u) = N_s (\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2) \quad \mathbf{I.7}$$

$$\langle y \rangle = N_s \langle v \rangle \neq 0 \quad \text{var}(y) = N_s \text{var}(v) = N_s (\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2) \quad \mathbf{I.8}$$

La fréquence de sauts est définie par:

$$v = \frac{N_s}{t} \quad \mathbf{I.9}$$

La probabilité pour qu'une lacune entrée en 0 à l'instant $t = 0$ se trouve au point de coordonnée (x, y) à l'instant t est :

$$P(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi \text{var}(x))^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2 \text{var}(x)} \right\} \frac{1}{(2\pi \text{var}(y))^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(y - \langle y \rangle)^2}{2 \text{var}(y)} \right\} \quad \mathbf{I.10}$$

ou encore :

$$P(x, y, t) = \frac{1}{2\pi [\text{var}(y) \text{var}(x)]^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \text{var}(x)} - \frac{(y - \langle y \rangle)^2}{2 \text{var}(y)} \right\} \quad \mathbf{I.11}$$

soit V la vitesse moyenne d'évolution d'une lacune dans le lit, définis par :

$$V = v\langle v \rangle$$

Définissons les paramètres suivants :

$$D_x = \frac{v \cdot \text{var}(u)}{2} = \frac{\text{var}(x)}{2t} \quad \text{I.12}$$

$$D_y = \frac{v \cdot \text{var}(v)}{2} = \frac{\text{var}(y)}{2t} \quad \text{I.13}$$

En injectant les équations I.12 et I.13 dans l'équation I.11, nous avons alors :

$$P(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t (D_x D_y)^2} \exp \left\{ \frac{-x^2}{4tD_x} - \frac{(y - Vt)^2}{4tD_y} \right\} \quad \text{I.14}$$

Soit C la concentration de lacunes dans le lit; nous avons :

$$C = P \cdot n_t \quad \text{I.15}$$

où n_t représente le nombre total de lacunes.

En utilisant l'équation I.14, C représente la solution de l'équation différentielle semblable à celle de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - V \frac{\partial C}{\partial y} = -\text{div} \left(\vec{J} \right) \quad \text{I.16}$$

où \vec{J} représente le flux de lacunes ayant pour composantes :

$$J_x = -D_x \frac{\partial C}{\partial x} \quad \text{I.17}$$

$$J_y = VC - D_y \frac{\partial C}{\partial y} \quad \text{I.18}$$

Dans le cas d'un écoulement permanent l'équation I.16 peut être simplifier :

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - V \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad \text{I.19}$$

ou encore :

$$\frac{D_x}{V} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{D_y}{V} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{\partial C}{\partial y} \quad \text{I.20}$$

Mullins, se basant sur des études antérieures montre que généralement lors de l'écoulement gravitaire d'un matériau granulaire, la dispersion est unidirectionnelle, par conséquent le terme $\frac{D_y}{V}$ de l'équation I.20 peut être négliger dans la solution; celle ci se ramène alors à une forme plus simple :

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \beta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad \text{I.21}$$

où $\beta = \frac{D_x}{V}$ est une constante caractéristique de l'écoulement ayant la dimension d'une longueur.

Le flux de lacunes a alors pour composantes :

$$J_x = -D_x \frac{\partial C}{\partial x} \quad \text{I.22}$$

$$J_y = VC \quad \text{I.23}$$

de l'équation I.23, on déduit que :

$$C = \frac{J_y}{V} \quad \text{I.24}$$

Remplaçons C dans l'équation I.22 et faisons l'hypothèse que la vitesse moyenne de l'écoulement est constante, on obtient :

$$J_x = -\frac{D_x}{V} \frac{\partial J_y}{\partial x} \quad \text{I.25}$$

Comme $\beta = \frac{D_x}{V}$, on conclut:

$$J_x = -\beta \frac{\partial J_y}{\partial x} \quad \text{I.26}$$

Malheureusement, l'auteur de la théorie probabiliste n'argumente pas la validité de ce modèle théorique par un protocole expérimental.

I.2.2.2. Modèle cinématique :

Le modèle cinématique proposé par **Nedderman et al. [3]** consiste à étudier le mouvement des particules solides en écoulement sous l'effet de leur propre poids, indépendamment des contraintes provenant de l'interaction entre particules. En effet, l'auteur

considère que le mouvement d'une particule n'est pas dû au gradient des contraintes qui s'exercent sur la particule mais plutôt au déplacement des particules qui sont en dessous; le grain ne fait alors que prendre la place libérée par les grains en dessous de lui.

En considérant donc un système de trois particules, figure I.5 et en supposant que les deux particules (*A* et *B*) de l'étage inférieur se déplacent à des vitesses différentes, la particule (*C*) de l'étage supérieur va avoir tendance à se déplacer latéralement.

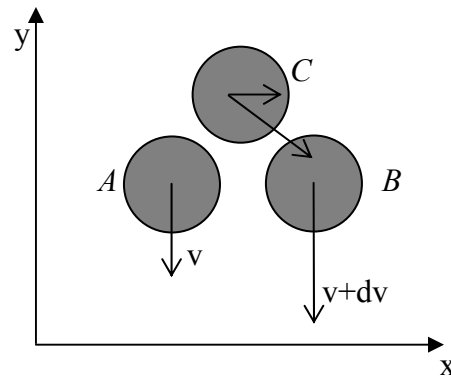


Figure I.5 : Modèle cinématique

Le modèle de **Nedderman** et celui de **Mullins** ont la même essence; en effet lorsqu'on considère que l'écoulement des grains est équivalent à l'écoulement en sens inverse des lacunes provenant du bas de l'équipement, cela sous entend que l'origine du mouvement particulaire prend naissance en bas de la colonne.

C'est la raison pour laquelle **Nedderman et al. [3]** se sont basés sur les relations I.21, I.22 et I.23 du modèle de **Mullins [1]** pour déduire un modèle reliant les deux composantes horizontales et verticales respectivement *u* et *v* de la vitesse en tout point d'un milieu granulaire en écoulement permanent :

$$u = -B_g \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{I.27}$$

où B_g représente une constante dépendante à la fois de la nature de l'écoulement, des caractéristiques des particules (diamètre, masse, etc...) et de la géométrie de l'équipement.

Ce modèle a été exploité par **Nedderman [4]** pour l'étude de l'écoulement à travers une fente d'un matériau granulaire dans un silo bidimensionnel. Les résultats expérimentaux obtenus ont confirmé que le coefficient B_g est indépendant de la géométrie du silo mais dépend d'une longueur caractéristique du milieu correspondant à la dimension des particules. Les auteurs établissent ainsi une relation de proportionnalité entre la constante cinétique et le diamètre des particules.

$$B_g = k d_p$$

Le modèle cinématique a été appliqué par **Nedderman et al. [5]** en 1980 à l'écoulement d'un milieu granulaire en régime permanent dans une enceinte parallélépipédique comportant un obstacle de section carré de cote $2a$, figure I.6.

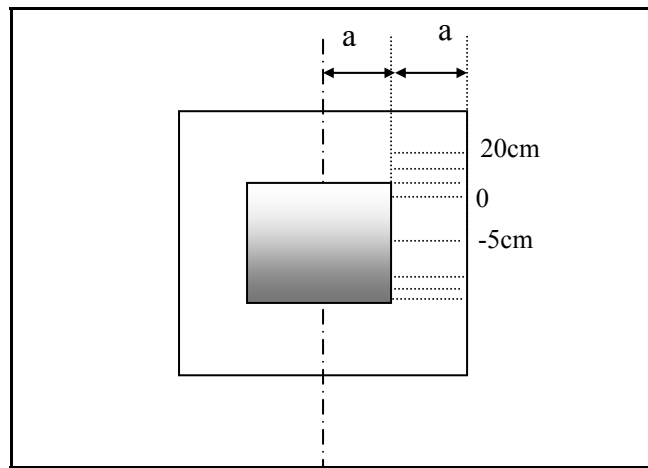


Figure I.6 : Schématisation de l'expérience de Nedderman

L'auteur exploite l'équation de continuité appliquée au matériau granulaire :

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{I.28}$$

dans laquelle, il remplace la composante horizontale de la vitesse par le modèle cinématique I.27 :

$$u = -B_g \frac{\partial v}{\partial x}$$

ce qui permet d'obtenir l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = B_g \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{I.29}$$

En appliquant les conditions aux limites appropriées à l'écoulement et en utilisant une résolution basée sur la transformée de Fourier, l'auteur parvient à la solution analytique suivante :

$$v = v_0 \left[1 + \sum_{\text{nimpair}} \frac{2B_g}{\alpha_n a} \exp\left(\frac{-\alpha_n^2 y}{B_g}\right) \sin\left(\frac{\alpha_n x}{B_g}\right) \right] \quad \text{I.30}$$

Avec :

$$\alpha_n = \frac{n B_g \pi}{2 a}$$

a : la demi-longueur de l'obstacle carré.

L'auteur reproduit sur les figures I.7.a et I.7.b la représentation du profil de vitesse obtenu expérimentalement et celle déduite à partir du modèle (équation I.30). Il en déduit donc la distribution des vitesses suivante :

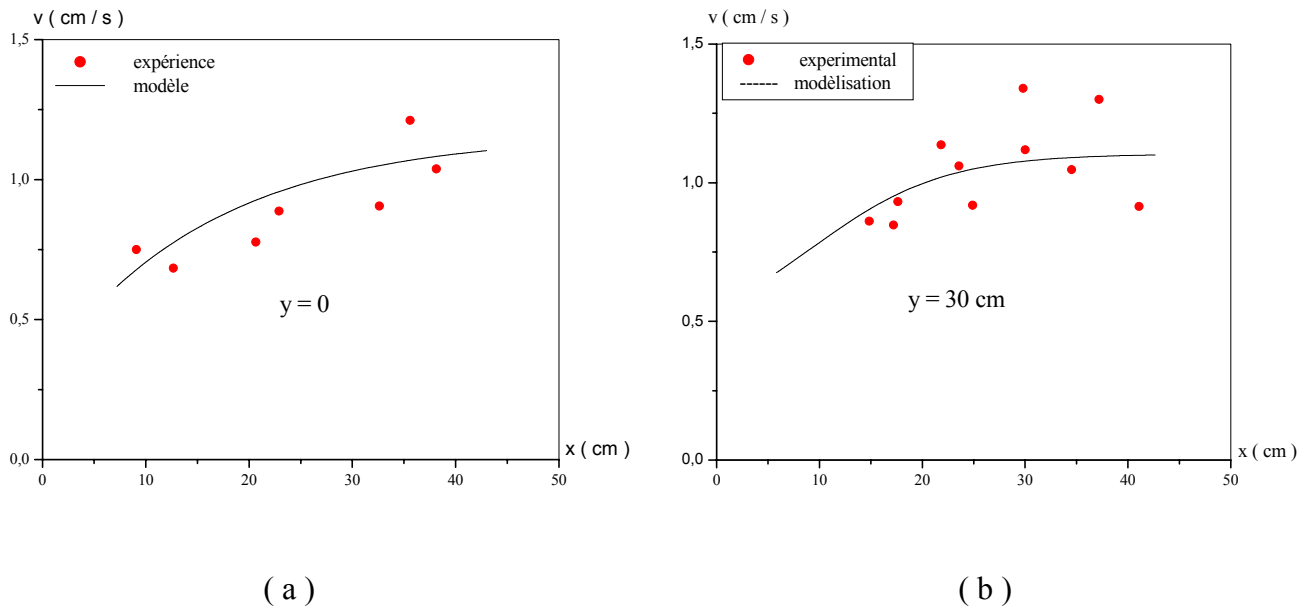


Figure I.7 : Comparaison du profil de vitesse entre les valeurs obtenues expérimentalement et celles déduites du modèle

L'hypothèse principale de ce modèle repose sur le fait que le mouvement des particules sur un étage est conditionné par celui de l'étage inférieur; on en déduit donc que l'insertion d'un obstacle dans l'enceinte aura pour conséquence la perturbation de l'écoulement au-dessus de ce dernier.

Récemment, **J.C.Roth et al. [6]** ont repris les travaux de **Nedderman** en étudiant l'écoulement des matériaux naturels ou industriels tels que le blé, les pois secs et des billes de verres, dans des silos. Les résultats obtenus ont montré que dans ces cas, le modèle cinématique permettait de prédire de manière satisfaisante l'écoulement des grains solides dans des colonnes sans obstacle physique.

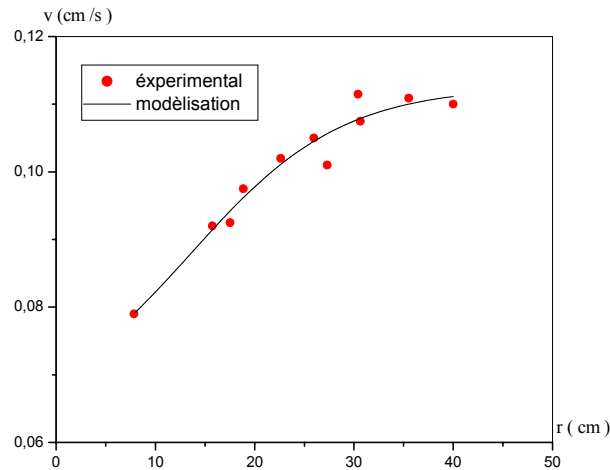


Figure I.8 : Comparaison du profil de vitesse expérimental de J.C.Roth et le profil déduit du modèle cinématique pour des billes de verre dans un silo.

D'autre part, **Nedderman [7]** en 1992, a exploré la validité du modèle cinématique dans un système tridimensionnelle axisymétrique dans deux cas différents :

* Dans le cas d'un cylindre à fond plat, le modèle cinématique traduit en coordonnées cylindriques prend la forme suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{B_g}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad \text{I. 31}$$

La résolution de l'équation différentielle I.31 a permis d'obtenir le profil de vitesse vertical suivant :

$$v = \frac{-Q}{4\pi B_g z} \exp\left(\frac{-r^2}{4 B_g z}\right) \quad \text{I. 32}$$

Avec v la vitesse verticale (m/s), r la position radiale (m), z la distance verticale à partir du bas (m), B_g le coefficient cinématique (m) et Q le débit volumétrique estimé dans la zone d'écoulement piston (m^3/s); celui-ci est donné par la relation :

$$Q = v(\text{écoulement piston}) \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{I. 33}$$

Avec :

$v_{\text{écoulement piston}}$: est la vitesse estimée dans la zone d'écoulement piston (m/s).
 d : le diamètre du cylindre à fond plat (m).

En injectant l'équation I.33 dans l'équation I.32, on aboutit à l'expression de la vitesse verticale :

$$\frac{v}{v_{(\text{écoulement piston})}} = \frac{-r^2}{4 B_g z} \exp\left(\frac{-r^2}{4 B_g z}\right) \quad \text{I. 34}$$

* Dans le cas d'un cylindre à fond conique, l'auteur suppose que l'écoulement se fait le long des lignes radiales et la vitesse verticale est donc une simple fonction de la distance radiale comme le montre la relation suivante :

$$\frac{u}{v} = \frac{r}{z} \quad \text{I. 35}$$

d'où :

$$v = \frac{u z}{r} \quad \text{I. 36}$$

En remplaçant l'équation I.36 dans l'équation du modèle cinématique suivante :

$$u = -B_g \frac{\partial v}{\partial r}$$

on aboutit à l'équation:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{z B_g} (v r) \quad \text{I. 37}$$

La résolution de l'équation différentielle précédente a permis d'obtenir le profil de vitesse vertical :

$$\frac{v}{v_{(\text{centre})}} = \exp\left(\frac{-r^2}{2 z B_g}\right) \quad \text{I. 38}$$

avec :

$v_{(\text{centre})}$: est la vitesse verticale à l'axe central du cylindre (pour une valeur de $r = 0$).

Comme dans le cas d'un cylindre à fond plat, l'auteur a estimé le débit volumique dans le cas d'un cylindre à fond conique Q_c par :

$$dQ_c = 2 \pi v dr \quad \text{I. 39}$$

en intégrant sur toute la section cylindrique, on obtient:

$$Q_c = \int_0^R (2 \pi r v) dr \quad \text{I. 40}$$

En injectant l'expression de la vitesse donnée par l'équation I.38 dans l'équation I.40, on aboutit à :

$$Q_c = 2 B_g z v_{(\text{centre})} \pi \left[1 - \exp\left(\frac{-R^2}{2 B_g z}\right) \right] \quad \text{I. 41}$$

L'auteur n'a pas argumenté ces équations théoriques par un travail expérimental pour juger de la validité du modèle.

Mais récemment, **J.Shepperson et al. [8]**, ont mené une étude paramétrique dans le but de vérifier la validité du modèle de **Nedderman [7]**.

Pour ce faire, l'écoulement de trois matériaux différents (verre de ballotini, sable et granite) a été étudié dans un cylindre à fond plat et à fond conique. Nous résumons dans le tableau suivant les dimensions des installations expérimentales :

Tableau I.1 : Dimensions des installations expérimentales de J.Shepperson

Cylindre (plat /conique)	Diamètre (mm)	Hauteur de la section conique (mm)	Diamètre de l'orifice (mm)	Demi-angle du cône (°)
Cylindre conique	98	224	20	10
Cylindre conique	196	448	40	10
Cylindre plat	98	---	20	---

L'originalité de ce travail réside dans l'utilisation d'une camera P.E.P.T (Positron Emission Partical Tracking) qui permet d'enregistrer la position spatio-temporelle de particules traceurs dans les trois dimensions.

* Cas d'un cylindre à fond conique :

Dans le but de montrer les différentes zones d'écoulement du matériau granulaire et afin d'obtenir la vitesse dans la zone d'écoulement piston citée par **Nedderman** dans l'équation I.34, **J.Shepperson** a traité les résultats donnés par la méthode P.E.P.T pour obtenir l'évolution de la vitesse verticale en fonction du rayon de la colonne.

Sur la figure I.9, nous reproduisons l'évolution de la vitesse verticale du verre de ballotini de 1 mm de diamètre en fonction du rayon dans le cas d'un cylindre à fond conique.

Il remarque que :

* à 120 mm au-dessus de l'orifice ce qui signifie qu'à l'intérieur de la zone conique, la vitesse verticale décroît du centre du cylindre ($v_{\text{centre}} = 0.07\text{m/s}$) vers la paroi pour atteindre 0.05m/s: c'est la zone d'écoulement convergent.

* à 240 mm au-dessus de l'orifice, près de la section conique, le profil de vitesse est quasiment constant ($v_{\text{piston}} = 0.02 \text{ m / s}$): c'est la zone d'écoulement piston.

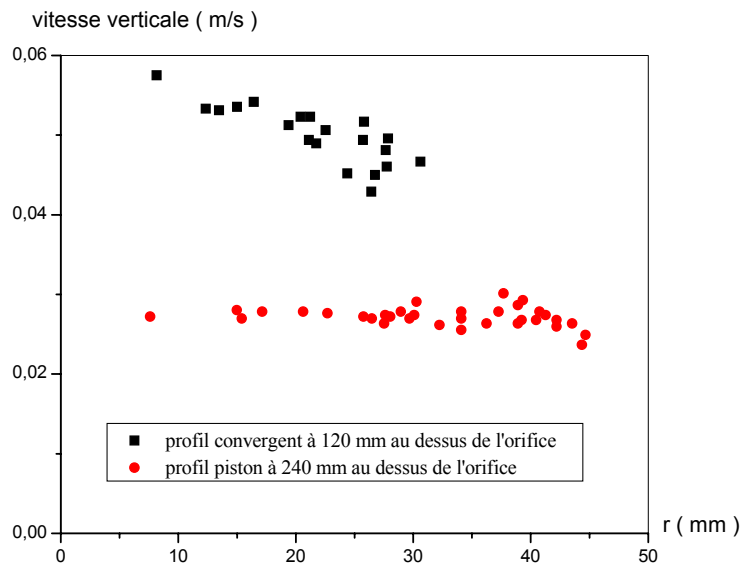


Figure I.9 : Evolution de la vitesse verticale dans le cas d'un cylindre à fond conique pour le verre de ballotini de 1 mm de diamètre.

Les valeurs des vitesses expérimentales ont été comparées à celles déduites à partir du modèle de **Nedderman**, équation I.38. Et comme le montre à titre d'exemple la figure I.10, du moins pour les particules de verre de ballotini, il existe une réelle coïncidence entre la simulation et la réalité.

Par contre, l'auteur réfute la validité du modèle de **Nedderman** pour d'autres matériaux granulaires comme le sable et le granite.

* Cas d'un cylindre à fond plat :

Dans le cas d'un cylindre à fond plat, l'auteur a montré l'existence des mêmes zones trouvées dans le cas d'un cylindre à fond conique à savoir, la zone d'écoulement piston et la zone d'écoulement convergent, figure I.11.

Il remarque que :

* à 200 mm au-dessus de l'orifice, la vitesse verticale est pratiquement constante: c'est la zone d'écoulement piston ($v = 0.01$ m/s).

* à 60 mm au-dessus de l'orifice, la vitesse verticale décroît du centre du cylindre ($v_{\text{centre}} = 0.035$ m/s) vers la paroi où elle atteint la valeur de 0.01 m/s: c'est la zone d'écoulement convergent.

A partir de ces résultats, on remarque que le matériau granulaire s'écoule plus rapidement dans le cas d'un cylindre à fond conique qu'un cylindre à fond plat.

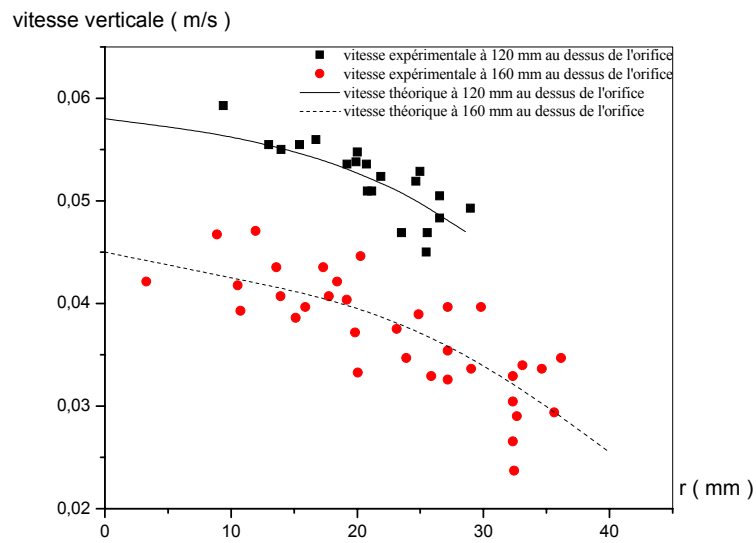


Figure I.10. Comparaison du profil de vitesse entre les résultats du modèle cinématique et ceux obtenus expérimentalement (verre de ballotini de 1 mm de diamètre) dans un cylindre à fond conique

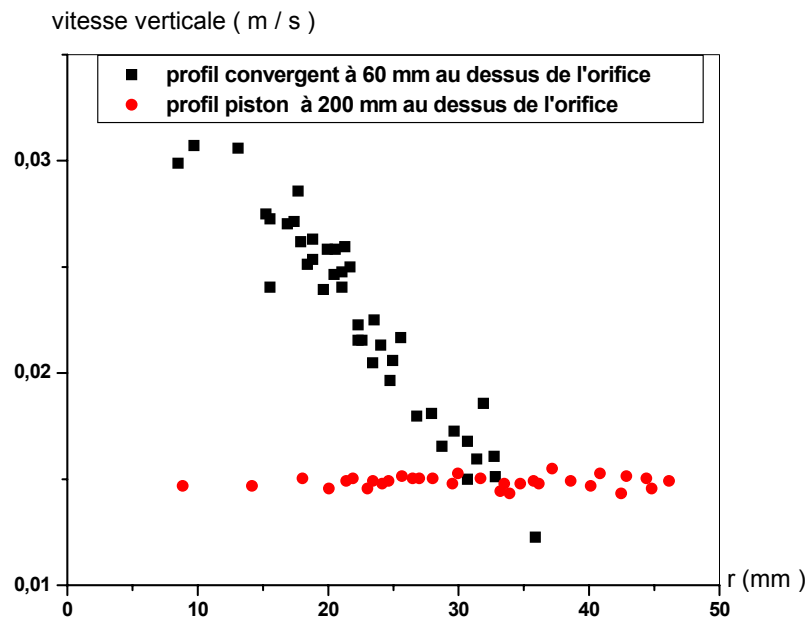


Figure I.11. Evolution de la vitesse verticale dans le cas d'un cylindre à fond plat pour le verre de ballotini de 1 mm de diamètre.

Tel dans le cas d'un cylindre à fond conique, les résultats expérimentaux ont été comparés aux résultats donnés par la théorie de **Nedderman**, équation I.31. Comme le montre la figure.I.12, on en conclut à une bonne similitude entre le modèle et l'expérience.

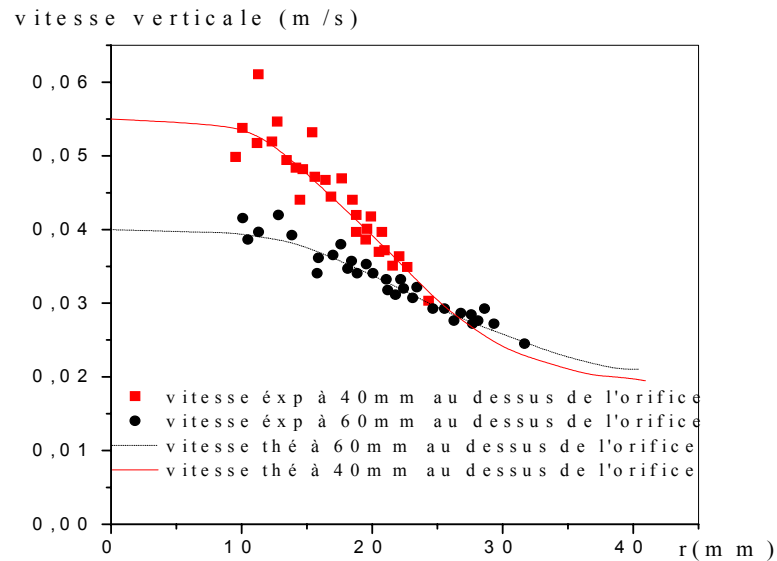


Figure I.12. Comparaison du profil de vitesse entre les résultats du modèle cinématique et ceux obtenus expérimentalement (verre de ballotini de 1mm de diamètre) dans un cylindre à fond plat

Mais, il est important de noter que dans ce dernier cas, la valeur de la constante cinématique B_g est différente de celle trouvée dans le cas d'un cylindre à fond conique; on en déduit alors que la constante cinématique est en effet un paramètre cinétique dépendant non pas uniquement de la dimension du matériau granulaire mais également de la géométrie de l'équipement.

Chaabouni [9] a tenté d'étendre la validité du modèle de **Nedderman** à une géométrie complexe puisqu'elle est composée de dièdres de formes triangulaires, figure.I.13.

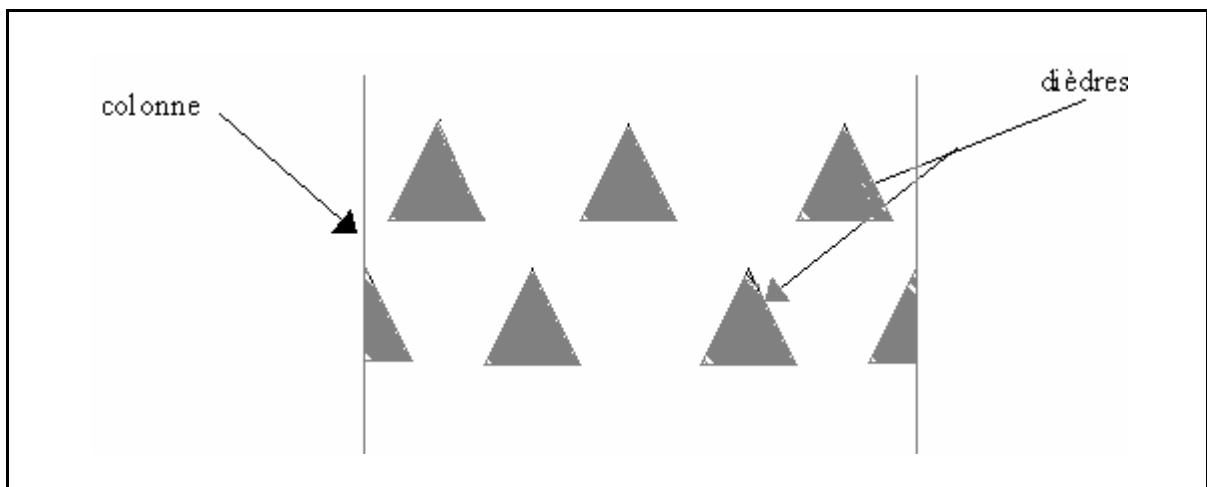


Figure I.13 : Schématisation de la colonne de Chaabouni

Il réalise en fait un modèle réduit d'un séchoir à canaux noyés dont les faces sont en plexiglas, de dimensions suivantes: 1.50 m de haut, 0.90 m de large et 0.4 m de profondeur; cette installation a servie de support à l'étude hydrodynamique de l'écoulement des grains de maïs de diamètre moyen 2 mm. A l'aide d'un caméscope analogique, l'auteur a pu comparer la trajectoire empruntée par les particules avec celle déduite par la résolution numérique par un schéma implicite aux différences finies des équations du modèle de **Nedderman**.

A titre d'exemple, nous avons extrait de la thèse de l'auteur un graphe représentatif d'une comparaison entre la trajectoire simulée et la trajectoire réelle pour une série de dièdre.

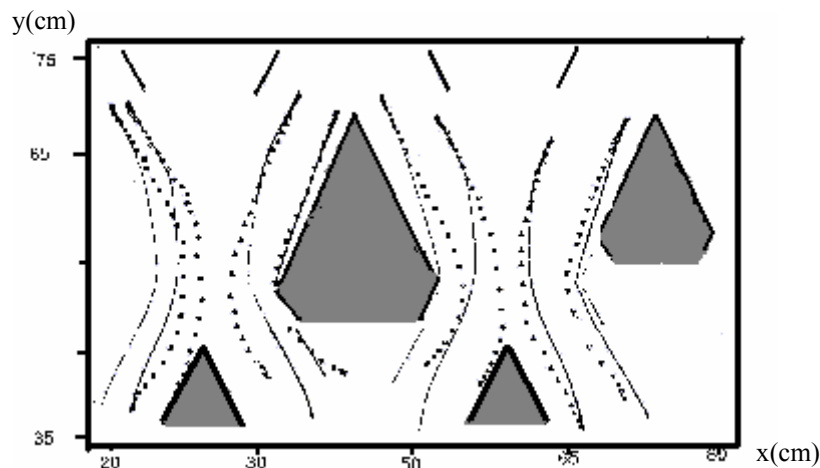


Figure I.14 : Comparaison des trajectoires calculées avec le modèle cinématique et des trajectoires expérimentales

En remarquant que les lignes de courant s'écartent notablement des trajectoires réelles, l'auteur effectue un réajustement de la valeur du paramètre cinématique afin de confondre les résultats du modèle avec les résultats expérimentaux, figure I.15.

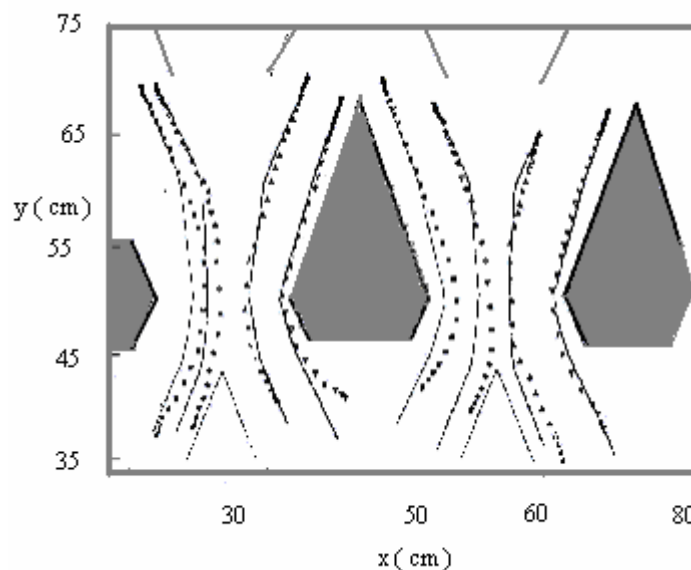


Figure I.15 : Comparaison des trajectoires calculées avec le modèle cinématique et des trajectoires expérimentales

En dépit de cet ajustement, il n'en demeure pas moins que le modèle de **Nedderman** ne permet pas de rendre compte de manière convenable de la trajectoire des grains proches de la paroi des dièdres.

Les enregistrements expérimentaux montrent d'une part, que les grains ont tendance à se déplacer verticalement et d'autre part, à former une surface libre pouvant se détacher au niveau des angles du dièdre, figure I.16.

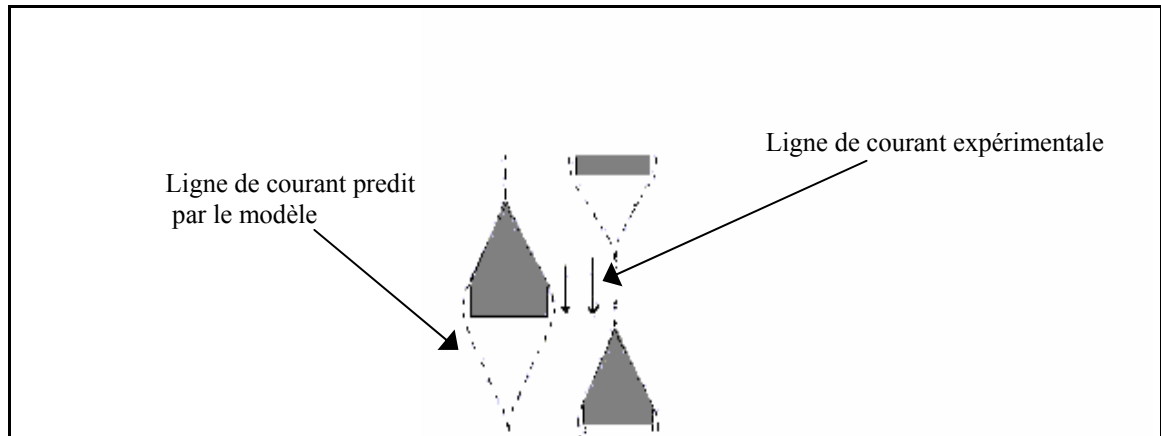


Figure I.16 : Direction préférentielle de l'écoulement au niveau des angles des dièdres

Il conclut que les conditions aux limites imposées au niveau du rabattement du dièdre et de l'angle de talus n'est pas adaptée à l'écoulement réel d'un milieu granulaire; une condition adéquate serait du type écoulement à surface libre autrement dit, une contrainte normale nulle sur cette surface.

I.2.3. Théorie de la plasticité:

I.2.3.1. Introduction :

Contrairement à la théorie précédente, le concept de plasticité fait intervenir les interactions entre les particules et celles entre le milieu granulaire et les parois qui les confinent.

I.2.3.2. Modèle de Pariseau [10]:

Soit un milieu granulaire bidimensionnel dont l'angle de frottement interne φ et la cohésion c sont connus. La connaissance des conditions aux limites, c'est à dire de la contrainte ou déformation au voisinage des surfaces limitant le milieu permet de déterminer l'état de contrainte statique limite en tout point du milieu.

Cet état de contraintes est solution du système constitué par les deux équations d'équilibre :

- la loi de **Cauchy** [11]
- la loi de **Coulomb** [12]

Les équations d'équilibre issues de la conservation de la quantité de mouvement sont exprimées par la relation suivante :

$$\frac{d}{dt}(\rho \bar{v}) = \Sigma \bar{F}_{\text{ext}} \quad \text{I. 42}$$

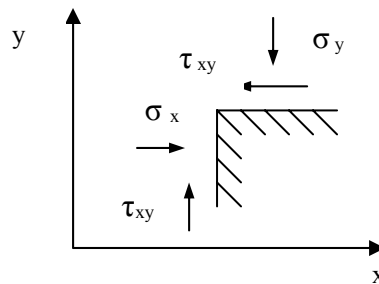
Les forces extérieures étant la contribution des forces de surface et de volume :

- ❖ les forces de surface s'expriment en fonction du tenseur des contraintes $\nabla \sigma$
- ❖ les forces de volume se résument aux forces de pesanteur $\rho \bar{g}$

À l'état statique, nous avons :

$$\nabla \sigma + \rho \bar{g} = 0 \quad \text{I. 43}$$

La projection de l'équation précédente dans le plan de l'écoulement permet d'obtenir les équations suivantes :



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{I. 44}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \rho g \quad \text{I. 45}$$

La condition de **Coulomb** exige qu'il existe une direction de plan sur laquelle à l'équilibre limite, nous avons la loi suivante :

$$\tau = c + \sigma \tan \varphi \quad \text{I. 46}$$

La figure I.17, représente la courbe intrinsèque qui répond à l'équation de Coulomb, c'est un ensemble de deux demi-droites issues du point S de l'axe σ et faisant avec cet axe un angle égal à φ .

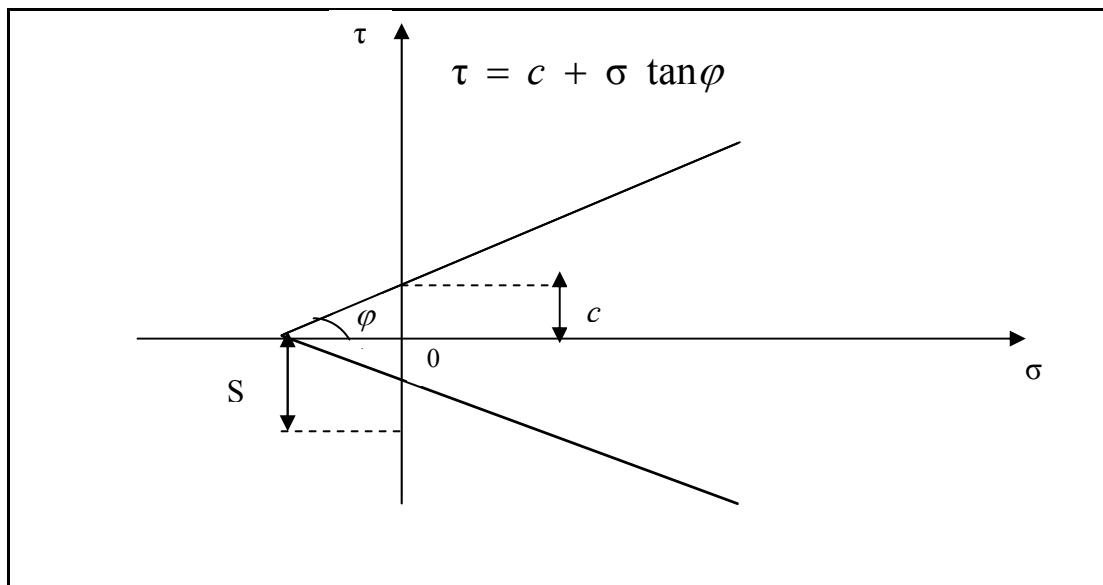


Figure I.17 : Schématisation de l'état des contraintes selon la loi de Coulomb

Sur la figure I.18, nous représentons les directions des plans correspondant aux lignes de glissement du milieu granulaire défini par l'expression suivante :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi \pm \mu) \quad \text{I. 47}$$

φ : L'angle de la contrainte principale majeure avec l'axe (ox), et $2\mu = \frac{\pi}{2} - \varphi$

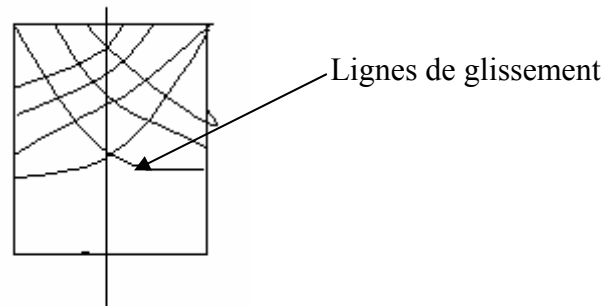


Figure I.18 : ligne de glissement dans un silo

Il suffit alors de connaître les contraintes en un point pour quelles soient connues le long des lignes de glissement passant par ce point. De même, la connaissance du déplacement le long d'une courbe quelconque du milieu, nous permet de déterminer le champ de vitesse dans tout le milieu **Ferry [13]**.

I.2.3.3. Modèle de Polderman :

Le modèle de **Polderman [14]** est basé sur la théorie de plasticité; en effet, en supposant un écoulement axisymétrique dirigé vers le sommet de la section convergente,

figure I.18 et un matériau granulaire incompressible, l'auteur exploite l'équation de continuité dans un écoulement conique :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r} = 0 \quad \text{I. 48}$$

Avec v_r la vitesse radiale (m/s) et r (m) la distance radiale depuis le sommet de la trémie.

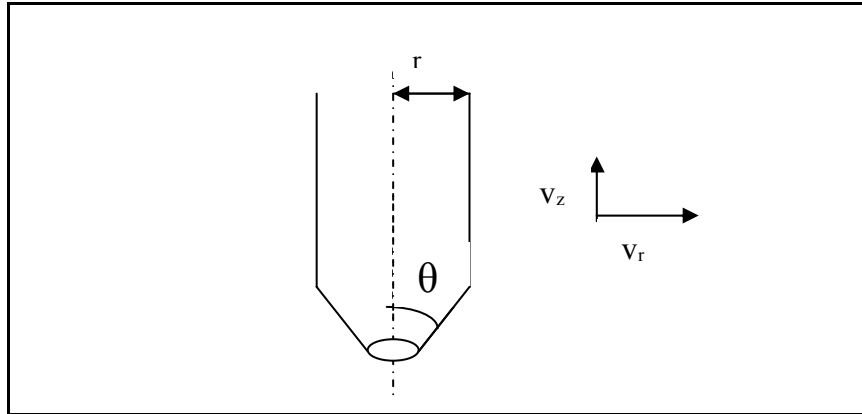


Figure I.19 : Schéma de la colonne expérimentale de Polderman

L'auteur suppose que le champ de vitesse radiale est inversement proportionnel au carré du rayon et dans ce cas, il suppose que les autres composantes de vitesses sont nulles.

$$v_r = \frac{f(\theta)}{r^2} \quad \text{I. 49}$$

$f(\theta)$: est appelée fonction de vitesse, et elle est liée à l'angle θ .

La vitesse radiale peut être reliée à l'angle d'inclinaison et le taux de contrainte par:

$$v_r = \frac{A}{r^2} \exp\left(-3 \int_0^\theta \tan 2\psi \, d\theta\right) \quad \text{I. 50}$$

A : constante d'intégration qui peut être éliminée en divisant l'équation I.50 par la vitesse radiale au centre.

ψ : Angle entre le taux de contrainte et l'angle d'inclinaison θ .

$$v_r(\theta) / v_r(0) = f(\theta) / f(0) = \exp\left(-3 \int_0^\theta \tan 2\psi \, d\theta\right) \quad \text{I. 51}$$

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre l'équation précédente et l'auteur suppose que ψ est proportionnelle à l'angle d'inclinaison θ .

$$\psi = k \theta \quad \text{I. 52}$$

Notons que ψ_w , l'angle entre la contrainte normale et l'angle d'inclinaison à la paroi, est relié à l'angle de frottement interne φ et l'angle de frottement entre particule-paroi φ_w , par la relation suivante :

$$2\psi_w = \varphi_w + \arcsin\left(\frac{\sin\varphi_w}{\sin\varphi}\right) \quad \text{I. 53}$$

La connaissance de l'angle de la trémie (θ), l'angle de frottement interne φ , l'angle de frottement particule-paroi φ_w nous permet de déduire la constante k.

La solution analytique de l'équation I.48 pour un écoulement bidirectionnel est donnée par :

$$v_r = \frac{A}{r} (\cos 2k\theta)^{1/k} \quad \text{I. 54}$$

Le profil de vitesse radiale proposé par **Polderman** sera trouvé en injectant la valeur du coefficient k déduit précédemment dans l'équation I.54.

L'auteur dans son article s'est limité à répertorier les différentes équations mathématiques du modèle et malheureusement, il n'a pas validé son modèle par une étude expérimentale.

Mais récemment, **Shepperson** a fait une étude comparative dans le but de valider le modèle de **Polderman**. Comme nous l'avons déjà montré, l'expression de la vitesse radiale dépend essentiellement de l'angle d'inclinaison et du coefficient k lui même dépendant de l'angle de frottement interne et de l'angle de frottement particule-paroi. Pour vérifier cette dépendance **Shepperson** a fait deux études :

* Dans la première, l'auteur maintient l'angle d'inclinaison constant, $\theta=10^\circ$, l'angle de frottement interne constant $\varphi=30^\circ$ et fait varier l'angle de frottement particule-paroi de 10° à 25° .

Il constate que la vitesse radiale à la paroi diminue de 14% par rapport à la vitesse au centre dans le cas où $\varphi_w=10^\circ$ et la diminution est de 54% dans le cas où $\varphi_w = 25^\circ$.

* Dans la seconde, l'auteur cette fois ci a maintenu l'angle d'inclinaison constant, $\theta=10^\circ$, l'angle de frottement particule-paroi constant $\varphi_w=15^\circ$ et a fait varier l'angle de frottement interne de 20° à 50° .

Dans ce cas, la valeur de la constante k diminue de 3.2 pour $\varphi = 20^\circ$ à 1.8 pour $\varphi = 50^\circ$, ce qui indique l'influence de l'angle de frottement interne sur la vitesse radiale, ce qui est contradictoire avec la théorie cinétique qui néglige les frottements.

Dans le but de comparer les résultats expérimentaux de **Shepperson** avec ceux donnés par le modèle de **Polderman**, l'auteur a expérimenté différents matériaux granulaires:

Tableau I.2 : Caractéristiques physiques des matériaux utilisés par Shepperson.

Matériau	Dimension des particules (mm)	φ (°)	φ_w (°)	Valeur de k
Verre de ballotini	3.00	34	22	3.20
Verre de ballotini	1.00	27	16	2.67
Granite	2.80-4.00	49	27	3.20
Sable A	1.40-2.00	41	19	2.44
Sable B	0.71-1.00	38	17	2.27

Connaissant la valeur de la constante k, il est possible de déduire le profil de vitesse radiale adimensionnée par rapport à la vitesse au centre:

$$\frac{V_r}{V_0} = (\cos 2k\theta)^{1/k} \quad \text{I. 55}$$

Cette vitesse est comparée à celle trouvée par l'expérience de **Shepperson** pour un écoulement dans un cylindre conique pour une hauteur comprise entre 80 mm et 200 mm, figures I.20 et I.21.

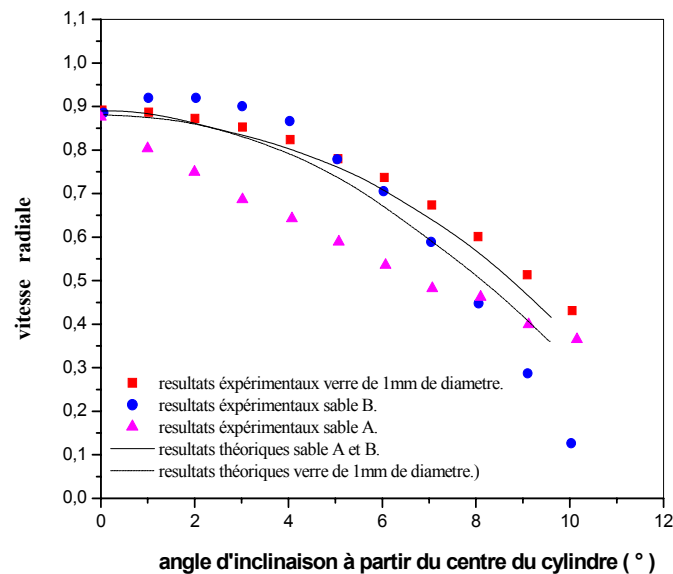


Figure I.20 : Comparaison entre les résultats du modèle et les résultats expérimentaux (sable et le verre de ballotini de 1 mm de diamètre)

Il conclu, qu'à l'exception du sable de classe B (**Geldart [15]**) qui donne une erreur de 20% entre l'expérience et le modèle, les autres matériaux semblent satisfaire la concordance entre l'expérience et le modèle.

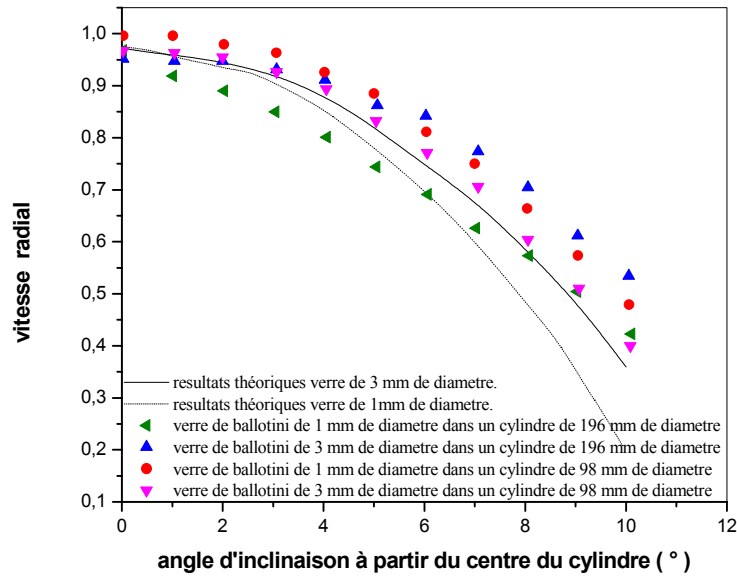


Figure I.21 : Comparaison entre les résultats du modèle et les résultats expérimentaux (le verre de ballotini de 3 mm de diamètre dans un cylindre de 98 et 196 mm de diamètre)

Les résultats trouvés pour le sable de classe B sont en accord avec les travaux de **Cleaver et Nedderman [16]** qui affirment que le modèle de **Polderman** n'est pas valable pour les fines particules. En effet, plus tard **Bransby et Blair-Fish [17]**, prouvent qu'il existe des zones de ruptures dans l'écoulement des grains de sable qui sont dues à de très grandes contraintes de déformation.

I.3. Conclusion:

La modélisation de l'écoulement d'un matériau granulaire dans une géométrie simple demeure difficile de surcroît, lorsqu'un obstacle est introduit dans le champ de l'écoulement comme dans un séchoir à canaux noyés; la formulation mathématique devient dans ce cas délicate.

A la lumière de notre recherche bibliographique, on conclut que lorsque la vitesse d'écoulement est élevée, les forces de frottement deviennent négligeables par rapport aux forces d'inertie et donc c'est le modèle cinématique qui est suggéré. Par contre, la théorie plastique s'avère satisfaisante aux faibles vitesses d'écoulement où ce sont les forces de frottement qui prédominent.

D'après ce qui précède, la perturbation de l'écoulement au-dessus des obstacles aussi bien au niveau des lignes d'écoulement qu'au niveau des champs de vitesse, marque un point en faveur de la théorie probabiliste.

D'autre part, les modèles probabilistes sont purement cinématique, ils ne font pas intervenir les contraintes développées dans le milieu, donc ils ne peuvent pas tenir compte des frottements sur les parois et entre les particules. Ces modèles ne sont donc pas applicables à un milieu cohésif (particules très fines) où les formations de voûtes sont très fréquentes.

L'idée générale qui se dégage, est l'exploitation des différents modèles d'écoulement dans un silo dans leur phase terminale; en effet, d'après la figure I.22, il apparaît que les parois externes des dièdres constituent un cône et l'écoulement devient semblable à celui de la vidange d'une trémie représentée par des pointillées.

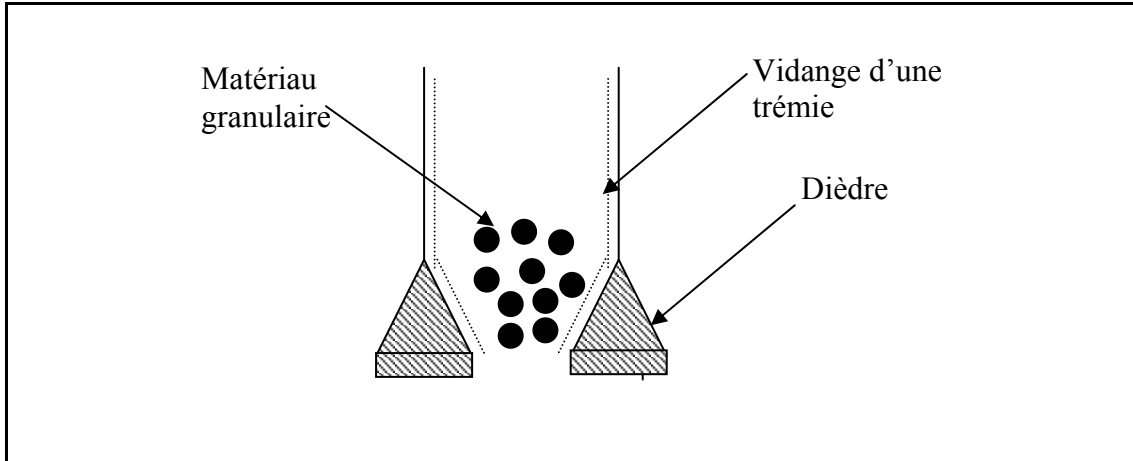


Figure I.22 : Ecoulement des grains dans une maille d'une colonne à dièdres.

Chapitre II : Description de l'installation expérimentale

II. 1. Introduction :

Afin de vérifier la validité du modèle mathématique que nous allons développer dans le chapitre suivant, nous avons réalisé une installation expérimentale qui va servir de support à cette étude. Celle-ci de dimensions réduites est conçue de sorte à nous permettre de suivre l'écoulement pariétal des grains de polystyrènes de haute densité. Notre intérêt lors de cette étude s'est porté sur la compréhension phénoménologique du transport gravitaire du matériau granulaire par conséquent, l'équipement que nous avons mis en œuvre est dépourvu de l'opération de séchage.

II.2. Description de l'installation :

L'installation que nous avons réalisée est une maquette transparente d'un tronçon de séchoir à dièdres. L'installation expérimentale froide, sans circulation d'air est montée sur un support métallique afin de lui assurer une bonne stabilité, figure II.1.

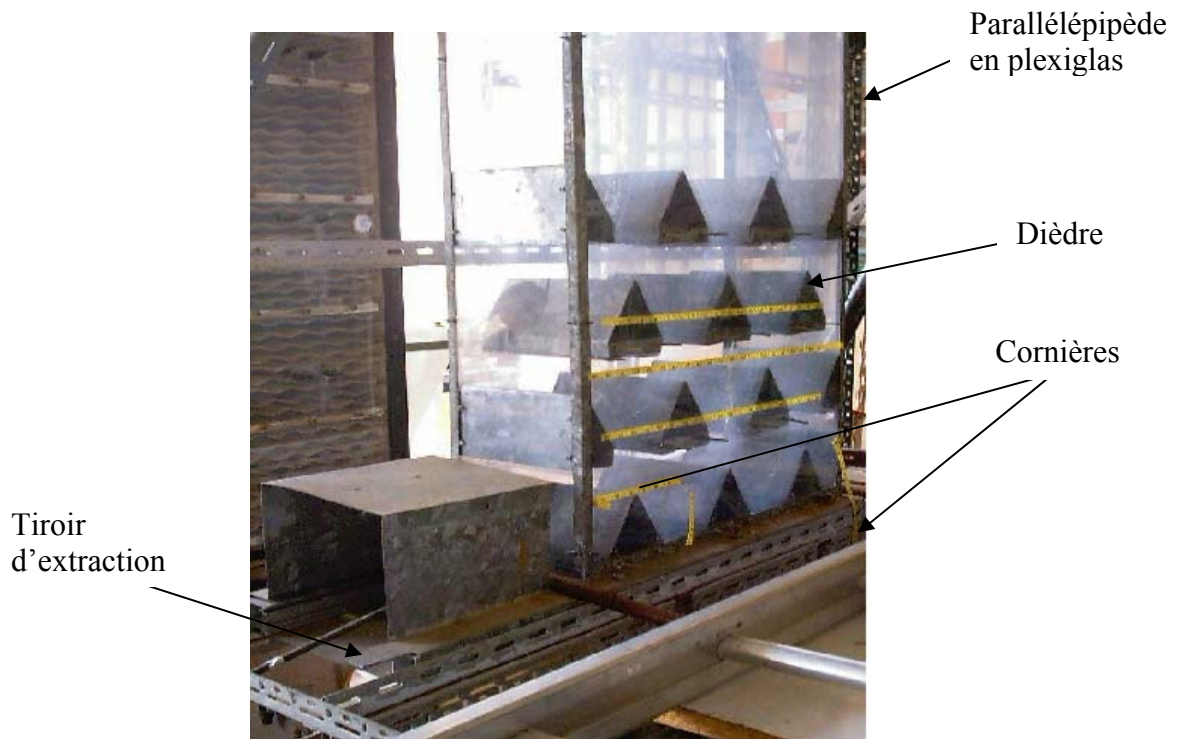


Figure II.1 : Photographie de l'installation expérimentale

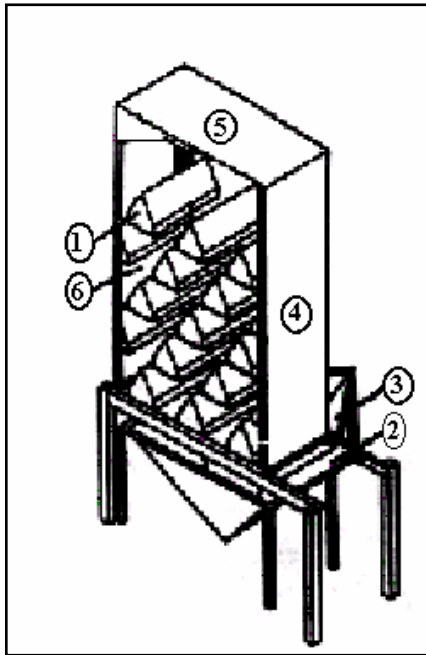
Comme on peut le constater sur la photographie de la figure précédente, l'installation expérimentale est composée de quatre éléments principaux :

II.2.1. La colonne :

Celle-ci, de forme parallélépipédique rectangle a les dimensions suivantes :

- Hauteur H : 1.00 m.
- Largeur L : 0.60 m.
- Profondeur P : 0.20 m.

Afin d'observer l'écoulement du matériau granulaire, toutes les faces du séchoir ont été réalisées en plexiglas translucides; à l'intérieur de cette colonne, sont disposées douze dièdres lesquels dans la réalité font office de canaux d'arrivée et d'extraction d'air de séchage, figure II.2.



- 1 : Dièdre entrée/sortie d'air.
- 2 : Tiroir d'extraction.
- 3 : Trémie de récupération.
- 4, 5, 6 : Faces en plexiglas.

Figure II.2 : Schéma de l'installation expérimentale

Le volume total occupé par les dièdres étant de 0.0164 m^3 , on en déduit alors que le matériau granulaire a la possibilité de se mouvoir dans un volume de 0.1036 m^3 .

II.2.2. Les dièdres :

Nous avons utilisé au cours de nos essais, une série de dièdres conçus à cet effet par nos soins et que nous avons disposé dans la maquette expérimentale selon une répartition en alternance conforme à celle que l'on trouverait dans un séchoir réel, figure II.3.

Sur la figure II.3, nous représentons la forme générale d'une maille élémentaire intégrée dans la colonne; 2α représente l'angle au sommet du dièdre et φ l'angle de talus formé par le grain en dessous du dièdre.

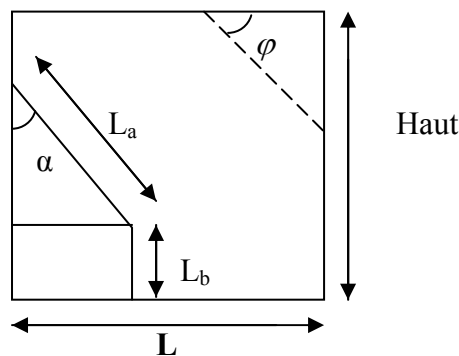


Figure II.3 : Représentation d'une maille élémentaire

Dans le cadre de cette étude, nous n'avons utilisé qu'une sorte de dièdres et dont les dimensions sont regroupées dans le tableau suivant :

Tableau II.1 : Dimension d'un dièdre

L (cm)	Haut (cm)	L_a (cm)	L_b (cm)	2α (°)
10	10	10	2.5	60

II.2.3. Le tiroir d'extraction :

L'installation étant conçue pour fonctionner par intermittence, nous avons alors réalisé un système d'extraction permettant de régler le temps d'ouverture du tiroir d'extraction; celui-ci est constitué de l'assemblage d'une tôle galvanisée de section rectangulaire et de dimensions suivantes :

- Longueur L_t : 700 mm
- Largeur H_t : 260 mm

Cette vanne guillotine présente trois fenêtres identiques d'une largeur de 200 mm et une longueur de 40 mm, permettant aux solides de s'écouler lorsque celle-ci se trouve en position d'ouverture. Lors de sa fermeture, ces fenêtres sont disposées intégralement au-dessus de la première série de dièdres empêchant ainsi le solide de se déverser. Cette vanne est insérée dans un cadre en aluminium qui présente une rainure qui facilite son glissement, figure II.4.

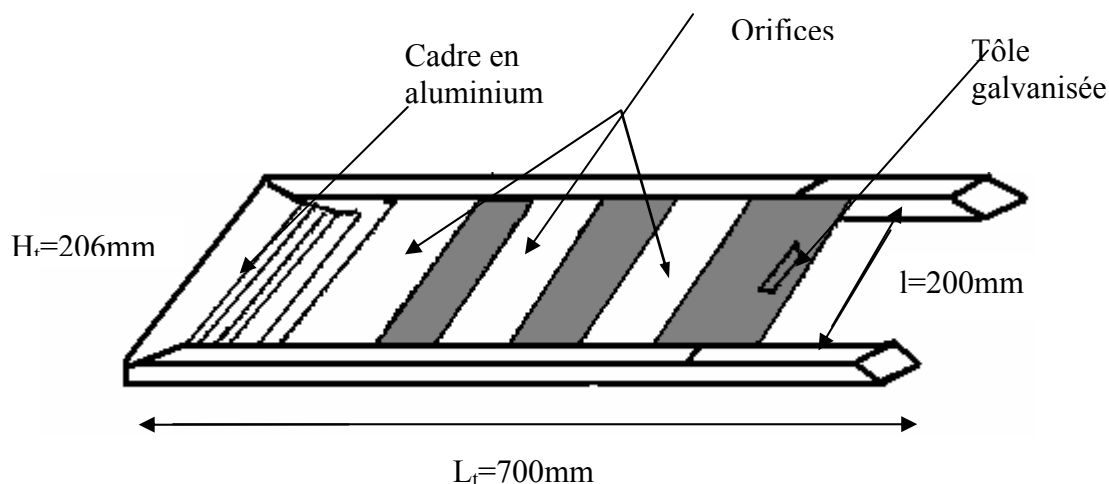


Figure II.4 : Représentation du tiroir d'extraction

Au cours de cette étude, nous avons été confronté au problème de la maîtrise du temps d'ouverture de la vanne guillotine. Le système ainsi réalisé, s'est avéré non performant ce qui nous a conduit alors à opter pour une vidange totale de la colonne.

II.2.4 La trémie:

C'est un entonnoir de récupération des grains lors de la vidange; celui-ci réalisé en tôle galvanisée a la forme d'un parallélépipède trapézoïdale à base rectangulaire isocèle, figure II.5 et dont les dimensions sont les suivantes :

- Longueur L_e : 600 mm
- Largeur l_e : 200 mm
- Hauteur H_e : 300 mm

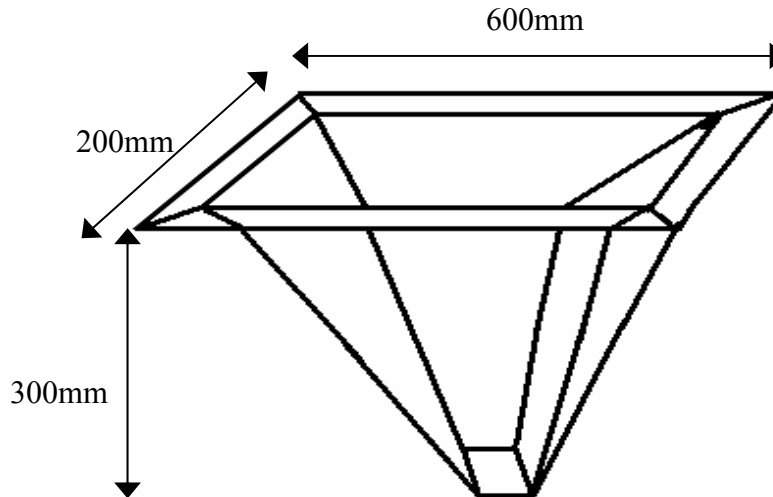


Figure II.5 : La trémie de récupération des grains

II.3 Procédure et moyen de mesure :

II.3.1 Procédure expérimentale :

On remplit la colonne du séchoir avec le matériau granulaire composé de billes de polystyrène de couleur jaune jusqu'à une hauteur de 52 cm; Ensuite, on dispose une mince couche de traceurs composés de billes ayant les propriétés physiques similaires aux précédentes mais de couleur différente afin de visualiser correctement l'écoulement pariétal.

Sur la paroi extérieure de la colonne, on a disposé verticalement et horizontalement des bandes de mètre-ruban qui vont nous permettre de positionner les billes de traceurs au cours de leur mouvement.

Il est à noter que l'extraction du matériau granulaire dans un séchoir industriel à canaux noyés s'effectue de façon périodique, autrement dit, le cycle est composé d'une période de séchage pendant laquelle l'extracteur est en position fermé et d'une période « libre » pendant laquelle l'extracteur est ouvert, permettant ainsi l'évacuation du produit alimentaire ayant atteint une humidité de stockage.

Cette seconde phase peut varier selon la capacité de l'installation et du produit à traiter, du dixième de la seconde jusqu'à quelques secondes.

Dans le cas de l'installation que nous avons conçu, des problèmes liés au dysfonctionnement du système de motorisation de la vanne guillotine nous ont contraint à opter pour une extraction totale du matériau granulaire; Cette vidange dure environ une vingtaine de secondes.

II.3.2 Moyen de mesure:

Afin de suivre le mouvement du matériau granulaire le long de la surface pariétale de la colonne, nous nous sommes dotés d'une caméra numérique (Digital Vidéo Camera Recorder Hi8) permettant un enregistrement de 25 images / seconde.

Un traitement d'images est effectué grâce au logiciel PMI (Pixela Image Mixer), figure II.6.

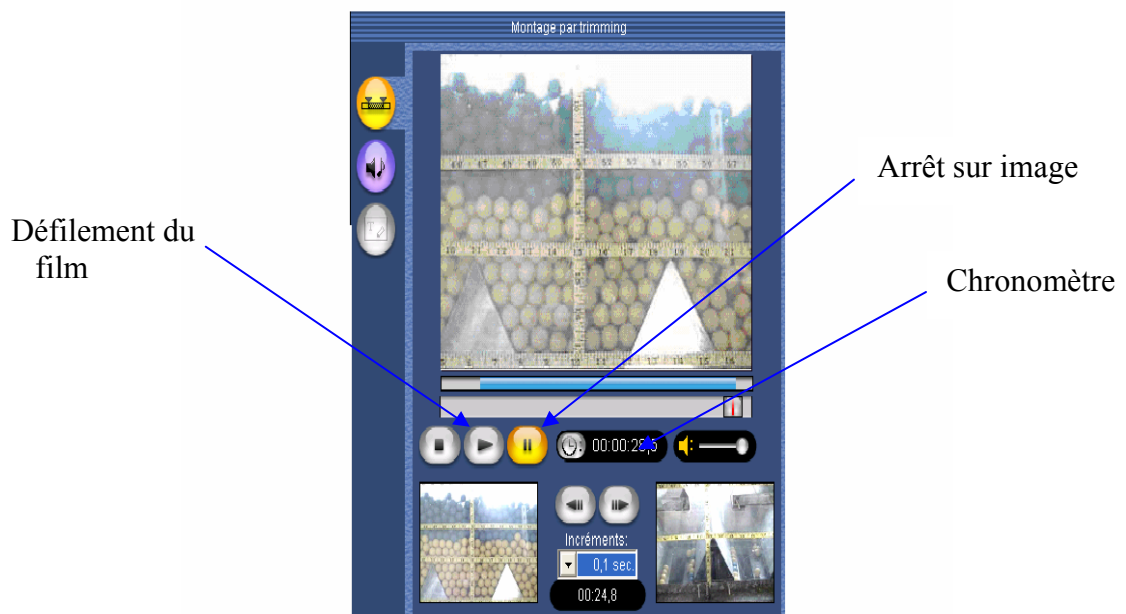


Figure II.6 : Exemple d'une photographie à traiter

Comme on peut le constater sur la figure II.6, ce logiciel nous permet de suivre une bille bleue du haut vers le bas de la colonne. A chaque instant, on relève d'une part, par lecture sur les bandes de mètre-ruban, les coordonnées de la bille et d'autre part, le temps à l'aide d'un chronomètre digital intégré dans le logiciel et de précision 1/100 s.

Nous n'avons retenu de ce traitement d'images que les particules traceurs ayant parcouru la totalité de la paroi de la colonne. Nous avons de ce fait exclu les particules pariétales ayant été entraîné à l'intérieur de l'écoulement.

Ainsi, à partir de ces enregistrements, nous avons pu reproduire l'intégrale des trajectoires empreintées par les grains colorés dans la colonne et le champ de vitesse à différents instants

le long de la paroi. Nous représentons sur la figure II.7, une série de photographies montrant l'évolution du mouvement particulière à travers les dièdres du séchoir au cours du temps.

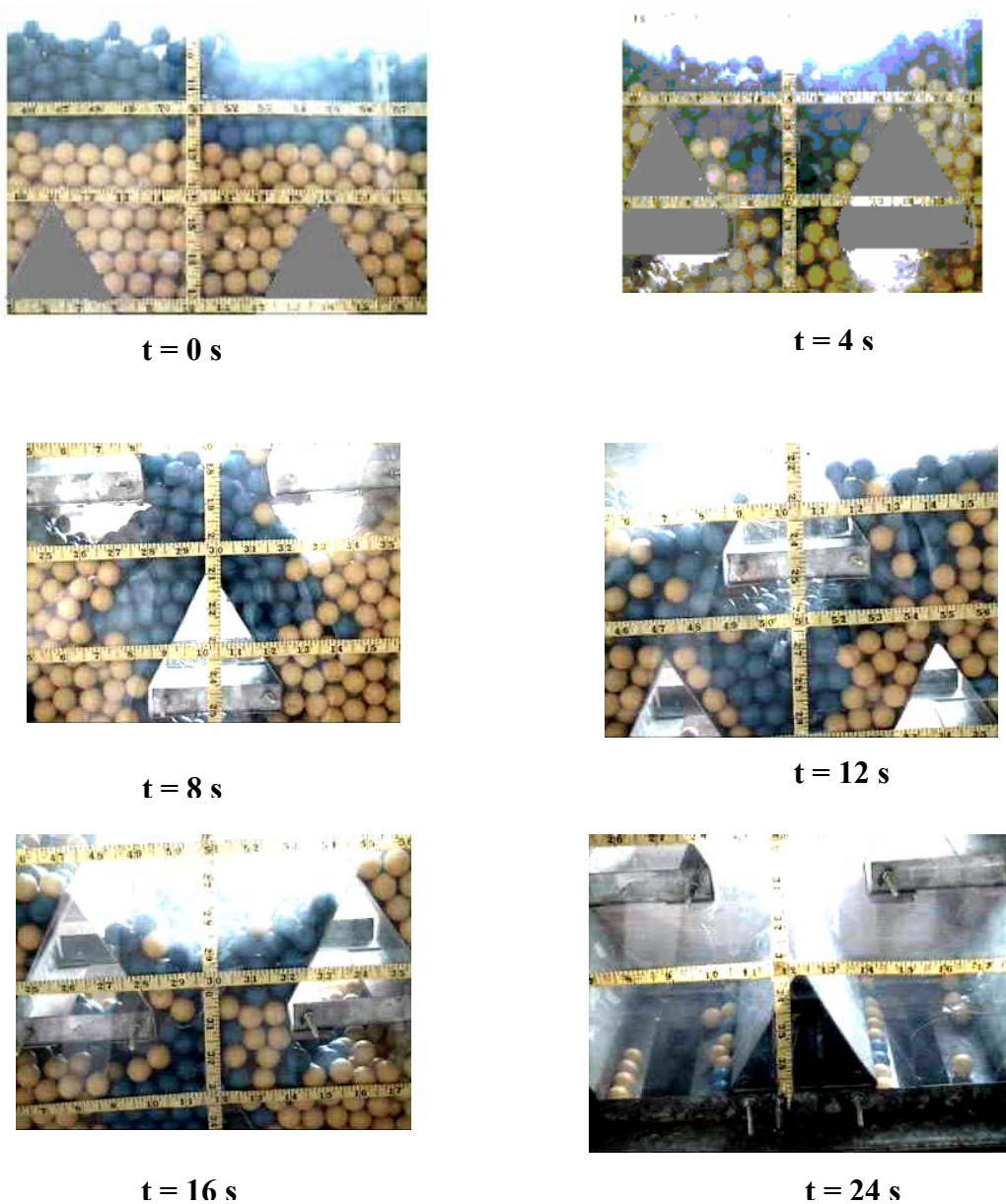


Figure II.7 : Représentation de l'écoulement du matériau granulaire à travers les dièdres du séchoir.

L'inconvénient de cette méthode réside dans la détermination uniquement de la trajectoire pariétale des grains, elle ne permet pas d'obtenir des informations concernant le mouvement des particules à l'intérieur de l'écoulement. Aujourd'hui, d'autres méthodes ont été mises au point afin de lever cet obstacle, tel que la camera P.E.P.T (Positron Emission Partical Tracking) qui n'est autre qu'un scanner qui détecte la position du traceur radioactif à l'intérieur de la colonne.

II.3.3 Matériau granulaire :

Le séchoir à canaux noyés est utilisé essentiellement pour le séchage sous forme de granulés des produits biologiques tel que les céréales, les fruits et légumes; afin de simuler l'hydrodynamique de l'écoulement de ces grains, notre choix s'est porté sur des billes de polystyrène sphériques de haute densité et dont les propriétés physiques sont les suivantes:

II.3.3.1 Diamètre :

Les billes de polystyrène sont parfaitement sphériques et leur diamètre a été déterminé grâce à un pied à coulisse sur un échantillon choisi arbitrairement. Une moyenne arithmétique nous a permis de caractériser la dimension du matériau granulaire; les résultats de cette analyse sont répertoriés dans l'annexe I.

$$d_p = 10.81 \pm 0.05 \text{ mm} \quad \text{II.1}$$

II.3.3.2 Masse volumique :

La masse volumique du matériau granulaire est déterminée par le rapport de la masse du grain au volume de celui-ci:

$$\rho_p = \frac{m_p}{v_p} \quad \text{II.2}$$

La masse de la particule est déterminée à l'aide d'une balance (Mettler AE 100) de précision 0.0001g.

$$m_p = 2.7072 \pm 0.0001 \text{ g} \quad \text{II.3}$$

par contre, le volume de la particule est calculé par l'équation suivante :

$$v_p = \frac{1}{6} \pi d_p^3 \quad \text{II.4}$$

donc:

$$v_p = 6.59 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \quad \text{II.5}$$

Par conséquent, en substituant les résultats des équations II.3 et II.5 dans l'équation II.2, on obtient la valeur de la masse volumique du grain, annexe II.

$$\rho_p = 4108.04 \pm 0.01 \text{ kg/m}^3 \quad \text{II.6}$$

II.3.3.3 Angle de frottement interne :

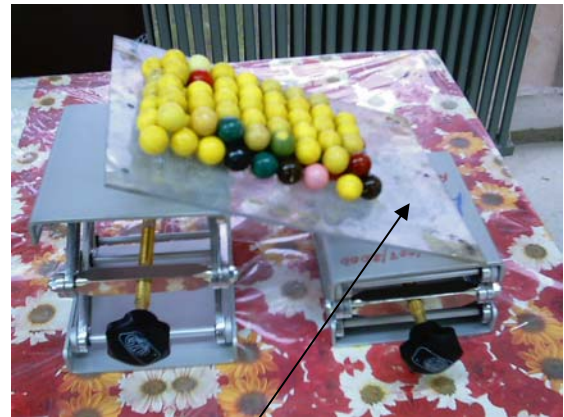
L'angle de frottement interne est donné par la perte de démarcation entre les grains fixes et les grains mobiles au moment où il y a glissement du premier grain mobile; cet angle dépend essentiellement de la nature du matériau granulaire.

Nous avons fait adhérer grâce à une résine sur une plaque en plexiglas, une couche de particules puis, nous avons disposé sur celle-ci une autre couche de grains.

Grâce à un élévateur, figure II.8, on fait incliner la plaque jusqu'à rompre l'équilibre et la première bille glisse; l'angle formé par la plaque avec l'axe horizontal représente l'angle de frottement interne.



Élévateurs



Plaque en plexiglas

$$\text{tg } \varphi = \frac{l_1}{l_2}$$

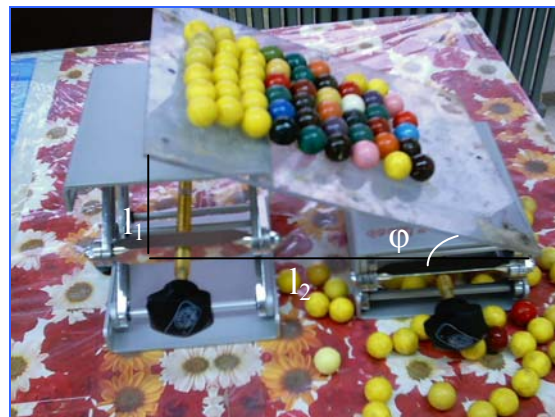


Figure II.8 : Schéma du procédé de calcul de l'angle de frottement interne

Par cette méthode nous avons obtenu :

$$\varphi = 25.79 \pm 0.12 \quad \text{II.7}$$

et les résultats de cette étude sont reportés en annexe III.

II.3.3.4 Porosité :

La détermination de la porosité du matériau granulaire a été réalisée par la méthode de picnométrie en utilisant une huile de densité 965 kg / m^3 .

Nous avons décrit la méthode en annexe IV et regroupé les résultats obtenus.

La valeur de la porosité du matériau granulaire étant de :

$$\varepsilon = 0.32 \pm 0.02$$

II.8

II. 4 Conclusion :

L'installation expérimentale ainsi réalisée, est bien adaptée pour entreprendre des essais concernant l'identification des trajectoires et du champ de vitesse du matériau granulaire. Néanmoins les moyens d'analyse dont nous disposons nous ont limité dans le cadre de ce travail à l'étude des profils de vitesse pariétaux uniquement.

**Chapitre III : Modélisation
mathématique de l'écoulement des
grains dans un séchoir à canaux noyés**

III.1 Introduction :

Actuellement [9], le dimensionnement d'un séchoir à canaux noyés s'articule autour de la maîtrise de la cinétique de la déshydratation du produit à sécher et de la distribution des temps de séjour des particules à l'intérieur de la colonne. Bien entendu, pour parvenir à cette seconde fonction, il est nécessaire d'élucider les mécanismes qui régissent la distribution du champ de vitesse du matériau granulaire dans le séchoir.

Nous rappelons que l'objectif de cette étude est de comprendre l'écoulement des grains autour des dièdres et de proposer une formulation mathématique permettant de prédire le comportement hydrodynamique du matériau granulaire.

A cet effet, nous présenterons dans ce chapitre notre approche mathématique du problème et des difficultés liées à celle-ci. Le modèle que nous proposons ne tient pas compte des modifications physico-chimiques apparaissant lors d'une opération de séchage car les particules solides dans notre cas ne sont soumises ni au transfert de chaleur, encore moins au transfert de masse.

III.2 Modélisation de l'écoulement à travers les dièdres du séchoir :

III.2.1 Introduction :

Après avoir décrit dans la revue bibliographique les différentes théories consacrées aux modélisations de la vitesse d'écoulement du matériau granulaire et les limites de chacune des approches, notre choix s'est porté sur la théorie probabiliste car le matériau granulaire ne présente pas des forces de cohésion conséquentes à cause de sa taille importante.

Nous nous sommes inspirés de la théorie probabiliste décrite par Mullins [1] afin de formuler un modèle d'écoulement granulaire. Celui-ci est basé sur un mouvement réactionnel des lacunes ascendantes suite à un mouvement descendant des particules.

III.2.2 Formulation mathématique :

Compte tenu des plans de symétrie et de l'empilement périodique de couches élémentaires dans la géométrie du séchoir à dièdres, nous effectuons la résolution du modèle probabiliste sur un module du séchoir, représenté sur la figure III.1 et délimité par la frontière (ABCDEFGA).

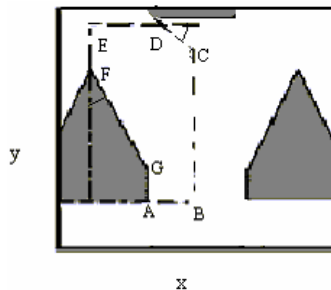


Figure III.1: Représentation d'un module du séchoir à dièdres.

En régime permanent, on supposera que l'écoulement des lacunes est composé d'un écoulement convectif et d'une double dispersion aléatoire obéissant formellement à la loi de Fick [18] :

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - V \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad \text{III.1}$$

Avec :

- D_x : coefficient de dispersion longitudinale des lacunes.
- D_y : coefficient de dispersion transversale des lacunes.
- C : la concentration de lacunes dans le lit.
- V : vitesse moyenne des lacunes dans la colonne.

En divisant l'équation III.1 par la vitesse moyenne des lacunes, nous obtenons :

$$\left(\frac{D_x}{V}\right) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(\frac{D_y}{V}\right) \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{\partial C}{\partial y} \quad \text{III.2}$$

Afin de résoudre cette équation différentielle de second ordre, et de rendre ses solutions indépendantes des valeurs particulières au cas spécifique, nous avons opté pour un adimensionnement des variables; à cet effet, nous avons posé :

$$C^+ = \frac{C}{C_0} \quad \text{III.3}$$

$$x^+ = \frac{x}{L} \quad \text{III.4}$$

$$y^+ = \frac{y}{d_p} \quad \text{III.5}$$

Avec :

- C_0 : concentration de lacunes à l'orifice.
- L : longueur du séchoir.
- d_p : diamètre des particules.

En injectant les équations III.3, III.4 et III.5 dans l'équation III.2, nous obtenons:

$$\left(\frac{D_x d_p}{V L^2}\right) \frac{\partial^2 C^+}{\partial x^{+2}} + \left(\frac{D_y}{V d_p}\right) \frac{\partial^2 C^+}{\partial y^{+2}} = \frac{\partial C^+}{\partial y^+} \quad \text{III.6}$$

Posons :

$$A = \frac{D_x d_p}{V L^2} \quad \text{III.7}$$

$$B = \frac{D_y}{V d_p} \quad \text{III.8}$$

L'équation III.6 devient:

$$A \frac{\partial^2 C^+}{\partial x^{+2}} + B \frac{\partial^2 C^+}{\partial y^{+2}} = \frac{\partial C^+}{\partial y^+} \quad \text{III.9}$$

Pour plus de commodité et de souplesse dans l'écriture des équations, nous allons ôter le signe plus dans les équations à suivre:

$$A \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{\partial C}{\partial y} \quad \text{III.10}$$

L'équation III.10 est une équation différentielle du second ordre; elle dépend des dimensions de l'installation (L), de la nature de l'écoulement (V), du matériau granulaire (d_p) et des coefficients de dispersions longitudinal et transversal respectivement D_x et D_y .

III.2.3 Résolution mathématique :

Nous avons choisi la méthode de séparation de variables [17] pour résoudre l'équation différentielle III.10; cette méthode autorise à poser que la solution s'écrit sous la forme suivante:

$$C(x,y) = f(x) \cdot g(y) \quad \text{III.11}$$

où $f(x)$ et $g(y)$ représente deux fonctions dépendantes d'une seule variable.

En remplaçant l'expression de la concentration donnée par l'équation III.11 dans l'équation III.10, on aboutit à:

$$\frac{A}{f(x)} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{-B}{g(y)} \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial g(y)}{\partial y} \quad \text{III.12}$$

L'équation III.12 est une égalité, dont le membre de droite ne dépend que de y et le membre gauche ne dépend que de x ; pour que cette égalité soit correcte, il faut que chaque membre de cette relation soit égal à une constante ($-\lambda^2$) [17].

On peut écrire alors :

$$\frac{A}{f(x)} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = -\lambda^2 \quad \text{III.13}$$

$$\frac{-B}{g(y)} \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial g(y)}{\partial y} = -\lambda^2 \quad \text{III.14}$$

L'équation III.13 est une équation différentielle de second ordre en $f(x)$ et sa solution est de la forme :

$$f(x) = C_1 \cos\left(\frac{\lambda x}{\sqrt{A}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\lambda x}{\sqrt{A}}\right) \quad \text{III.15}$$

où C_1, C_2 sont des constantes d'intégration.

L'équation III.14 est une équation différentielle de second ordre en $g(y)$ et sa solution est de la forme :

$$g(y) = C_3 \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2 B})y}{B}\right) + C_4 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(-1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2 B})y}{B}\right) \quad \text{III.16}$$

où C_3, C_4 sont des constantes d'intégration.

Finalement le champ de concentration de lacunes est donné par l'équation suivante :

$$C(x,y) = \left(C_1 \cos\left(\frac{\lambda x}{\sqrt{A}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\lambda x}{\sqrt{A}}\right) \right) \cdot \left(C_3 \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2 B})y}{B}\right) + C_4 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(-1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2 B})y}{B}\right) \right) \quad \text{III.17}$$

L'équation donnant la concentration de lacunes dans le séchoir à dièdres est fonction de quatre constantes d'intégration C_1, C_2, C_3 et C_4 ; pour les déterminer, il faut appliquer les conditions aux limites.

Etant donné que y^+ tend vers des valeurs élevés, ce qui engendre des valeurs de vitesse en total désaccord avec la réalité, il apparaît donc une condition évidente, à savoir que $C_3 = 0$ et l'équation III.17 devient :

$$C(x,y) = \left(C_1 \cos\left(\frac{\lambda x}{\sqrt{A}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\lambda x}{\sqrt{A}}\right) \right) \cdot \left(C_4 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(-1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2 B})y}{B}\right) \right) \quad \text{III.18}$$

Posons :

$$C_5 = C_1 * C_4$$

$$C_6 = C_2 * C_4$$

L'équation III.18 s'écrit alors:

$$C(x,y) = \left(C_5 \cos\left(\frac{\lambda x}{\sqrt{A}}\right) + C_6 \sin\left(\frac{\lambda x}{\sqrt{A}}\right) \right) \cdot \left(\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(-1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2 B})y}{B}\right) \right) \quad \text{III.19}$$

III.2.3.1 Détermination des composantes de vitesse des grains :

Les composantes de vitesse des grains sont données par **Mullins [1]** par:

$$u(x, y) = \frac{-J_x(x, y)}{C_g} \quad \text{III.20}$$

$$v(x, y) = \frac{-J_y(x, y)}{C_g} \quad \text{III.21}$$

Avec :

$J_x(x, y)$ et $J_y(x, y)$ les flux de lacunes selon les directions x, y de l'écoulement et égales à :

$$J_x = -D_x \cdot \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} \quad \text{III.22}$$

$$J_y = (C(x, y) \cdot V) - \left(D_y \cdot \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} \right) \quad \text{III.23}$$

où C_g représente la concentration des grains solides (nombre des grains / unité de volume) :

$$C + C_g = N \quad \text{III.24}$$

Avec :

N le nombre total de grains par unité de volume donné par :

$$N = \frac{\text{nombre totale}}{V_t} = \frac{\left(\frac{m_t}{m_p} \right)}{V_t} = \frac{\rho_p(1-\varepsilon)V_t}{\rho_p V_p} = \frac{(1-\varepsilon)}{V_p} = \frac{(1-\varepsilon)}{\frac{4}{3} \pi r_p^3} = \frac{6(1-\varepsilon)}{\pi d_p^3} \quad \text{III.25}$$

Avec :

- m_t : masse totale.
- m_p : masse du solide.
- V_t : volume total de la colonne.

D'où :

$$N = \frac{6(1-\varepsilon)}{\pi d_p^3} \quad \text{III.26}$$

Avec :

d_p : diamètre des grains.
 ε : la porosité du lit.

en injectant les équations III.22, III.23, III.24, III.25 dans les équations III.20 et III.21, nous aboutissant aux relations suivantes :

$$u(x, y) = \frac{D_x \left(\frac{\partial C(x, y)}{\partial x} \right)}{N - C(x, y)} \quad \text{III.27}$$

$$v(x, y) = \frac{D_y \left(\frac{\partial C(x, y)}{\partial y} \right) - V C(x, y)}{N - C(x, y)} \quad \text{III.28}$$

En dérivant l'expression III.19 par rapport respectivement à x et y et en injectant les résultats dans les équations III.27 et III.28, on déduit finalement les profils de la vitesse horizontale et verticale des grains solides dans le séchoir à dièdres.

$$u(x, y) = \frac{D_x \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\left(-1 + \sqrt{1 + 4 \lambda^2 \left(\frac{D_y}{V d_p} \right)} \right) y}{\left(\frac{D_y}{V d_p} \right)} \right] \left[\frac{C5 \cos \left(\frac{\lambda x}{\sqrt{\left(\frac{D_x d_p}{V L^2} \right)}} \right) \lambda - C6 \sin \left(\frac{\lambda x}{\sqrt{\left(\frac{D_x d_p}{V L^2} \right)}} \right) \lambda}{\sqrt{\left(\frac{D_x d_p}{V L^2} \right)}} \right]}{\left(\frac{6(1-\varepsilon)}{\pi d_p^3} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\left(-1 + \sqrt{1 + 4 \lambda^2 \left(\frac{D_y}{V d_p} \right)} \right) y}{\left(\frac{D_y}{V d_p} \right)} \right] \left(C5 \sin \left(\frac{\lambda x}{\sqrt{\left(\frac{D_x d_p}{V L^2} \right)}} \right) + C6 \cos \left(\frac{\lambda x}{\sqrt{\left(\frac{D_x d_p}{V L^2} \right)}} \right) \right)} \quad \text{III.29}$$

$$v(x,y) = \frac{\left[\left(V + \frac{Vd_p}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2 \left(\frac{D_y}{Vd_p} \right)} \right) \right) \exp \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2 \left(\frac{D_y}{Vd_p} \right)}}{2} y \right) \right]}{\left(\frac{6(1-\varepsilon)}{4d_p^3} \right) \left[\exp \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2 \left(\frac{D_y}{Vd_p} \right)}}{2} y \right) \left(C5 \sin \left(\frac{\lambda x}{\sqrt{\left(\frac{D_x d_p}{VL^2} \right)}} \right) + C6 \cos \left(\frac{\lambda x}{\sqrt{\left(\frac{D_x d_p}{VL^2} \right)}} \right) \right) \right]} \quad \text{III30}$$

$$* \frac{\left[\left(C5 \sin \left(\frac{\lambda x}{\sqrt{\left(\frac{D_x d_p}{VL^2} \right)}} \right) + C6 \cos \left(\frac{\lambda x}{\sqrt{\left(\frac{D_x d_p}{VL^2} \right)}} \right) \right)}{\left(\frac{6(1-\varepsilon)}{4d_p^3} \right) \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2 \left(\frac{D_y}{Vd_p} \right)}}{\left(\frac{D_y}{Vd_p} \right)} y \right) \left(C5 \sin \left(\frac{\lambda x}{\sqrt{\left(\frac{D_x d_p}{VL^2} \right)}} \right) + C6 \cos \left(\frac{\lambda x}{\sqrt{\left(\frac{D_x d_p}{VL^2} \right)}} \right) \right) \right]}$$

Pour plus de souplesse dans l'écriture des équations III.28 et III.29, posons :

$$T_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{D_x H}{V L^2}}} \quad \text{III31}$$

$$T_2 = -\frac{1}{2} \frac{\left(-1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2 \left(\frac{D_y}{V d_p} \right)} \right)}{\left(\frac{D_y}{V d_p} \right)} \quad \text{III32}$$

en injectant les expressions III.31 et III.32 dans les équations III.29 et III.30, nous aboutissant aux équations suivantes :

$$u(x,y) = \frac{D_x \exp(T_2 y) \left[\frac{C_5 \cos(T_1 \lambda x)}{\sqrt{A}} - \frac{C_6 \sin(T_1 \lambda x)}{\sqrt{A}} \right]}{N - \left[\exp(T_2 y) \left(\frac{C_5 \sin(T_1 \lambda x)}{\sqrt{A}} + \frac{C_6 \cos(T_1 \lambda x)}{\sqrt{A}} \right) \right]} \quad \text{III33}$$

$$v(x,y) = \frac{- \left(\exp(T_2 y) \left(V + \frac{Vd_p}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2 B} \right) \right) \right) (C_5 \sin(T_1 x) + C_6 \cos(T_1 x))}{N - \left[\exp(T_2 y) (C_5 \sin(T_1 x) + C_6 \cos(T_1 x)) \right]} \quad \text{III34}$$

Ces équations de profils de vitesse sont fonctions des constantes d'intégrations C_5 , C_6 , de la constante λ et des coefficients de dispersion D_x et D_y .

III.2.3.2 Détermination des constantes d'intégration :

Compte tenu des plans de symétrie et de l'empilement périodique de couches élémentaires dans la géométrie du séchoir à dièdres, nous effectuons la résolution du modèle sur un module du séchoir, représenté sur la figure III.2 et délimité par la frontière (ABCDEFGA).

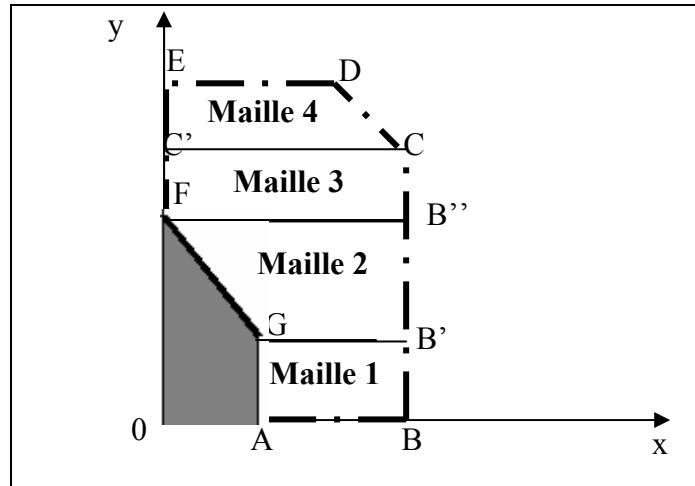


Figure III. 2 : Résolution au niveau d'un module du séchoir à dièdres

La connaissance du profil de vitesse sur (AB) et des conditions aux limites sur (BCD), (DEF) et (FGA), nous permet de déterminer les constantes d'intégration, donc le profil de vitesse en tout point de ce module du séchoir, ce qui nous permettra de réitérer la résolution au module supérieur.

Pour ce faire, nous avons décomposé le module de la figure III.2 en 4 mailles élémentaires; connaissant les conditions aux limites de la maille 1 délimité par les frontières (AB), (BB') et (AG), nous déterminons le profil de vitesse en tout point de cette maille et notamment sur (GB'), ce qui nous permettra de réitérer la résolution à la deuxième maille et en prenant la vitesse moyenne sur (GB') comme étant une vitesse initiale de cette maille. On procédera de la même manière pour les mailles 2 et 3 jusqu'à la maille 4.

Conditions aux limites :

Pour la maille 1:

- ❖ Sur AB: nous supposons connu le profil des vitesses sur un module situé en bas du séchoir, le profil sera supposé constant (à travers la section ouverte de l'extracteur) et la vitesse égale à la vitesse moyenne v_0

$$v(x, y) = v_0 \quad x_A \leq x \leq x_B \quad y = 0 \quad \text{III35}$$

- ❖ Sur BB': d'après la structure symétrique du séchoir, la composante horizontale de la vitesse sur ce segment, est nulle

$$u(x, y) = 0 \quad 0 \leq y \leq y_{B'} \quad x = x_B \quad \text{III36}$$

- ❖ sur AG: le grain reste en contact avec la paroi au cours de son écoulement, la composante horizontale de la vitesse sur ce segment est nulle

$$u(x, y) = 0 \quad 0 \leq y \leq y_G \quad x = x_A \quad \text{III37}$$

Pour la maille 2 :

- ❖ Sur B'B'': d'après la structure symétrique du séchoir, la composante horizontale de la vitesse sur ce segment est nulle

$$u(x, y) = 0 \quad y_{B'} \leq y \leq y_{B''} \quad x = x_B \quad \text{III38}$$

- ❖ Sur FG: le grain reste en contact avec la paroi au cours de son écoulement, le vecteur vitesse est donc tangent à (FG)

$$u = -v \tan(\alpha) \quad 0 \leq x \leq x_G \quad y_G \leq y \leq y_F \quad \text{III39}$$

- ❖ sur GB': la moyenne de la solution obtenue en haut de la première maille sur GB' sera imposée comme vitesse initiale pour la deuxième maille.

$$v(x, y) = \overline{v_1(GB')} \quad x_G \leq x \leq x_{B'} \quad y = y_G \quad \text{III40}$$

Avec :

$$\overline{v_1(GB')} = \frac{1}{L_{GB'}} \int_{x=x_G}^{x=x_{B'}} v(x, y)_{(GB')} dx$$

Pour la maille 3 :

- ❖ Sur B''C: de même que sur BB'

$$u(x, y) = 0 \quad y_{B''} \leq y \leq y_C \quad x = x_{B''} \quad \text{III41}$$

- ❖ sur C'F: de même que sur B''C

$$u(x, y) = 0 \quad y_F \leq y \leq y_{C'} \quad x = 0 \quad \text{III42}$$

- ❖ sur FB'': la moyenne de la solution obtenue en haut de la deuxième maille sur GB' sera imposée comme vitesse initiale pour la troisième maille.

$$u(x, y) = \overline{u_{(FB'')}} \quad 0 \leq x \leq x_{B''} \quad y = y_F \quad \text{III43}$$

Avec :

$$\overline{u_{(FB'')}} = \frac{1}{L_{FB''}} \int_{x=0}^{x=x_{B''}} u(x, y)_{(FB'')} dx$$

Pour la maille 4:

- ❖ sur EC': de même que sur BB'

$$u(x, y) = 0 \quad y_{C'} \leq y \leq y_E \quad x = 0 \quad \text{III44}$$

- ❖ sur CD: le grain s'écoule suivant l'angle de talus formé en dessous du dièdre, le vecteur vitesse est tangent à (CD)

$$v = -u \tan(\varphi) \quad x_D \leq x \leq x_C \quad y_C \leq y \leq y_D \quad \text{III45}$$

- ❖ sur C'C: la moyenne de la solution obtenue en haut de la troisième maille sur GB' sera imposée comme vitesse initiale pour la quatrième maille.

$$u(x, y) = \overline{u_{(CC')}} \quad 0 \leq x \leq x_C \quad y = y_C \quad \text{III46}$$

Avec :

$$\overline{u_{(CC')}} = \frac{1}{L_{CC''}} \int_{x=0}^{x=x_C} u(x, y)_{(CC'')} dx$$

III.2.4 Conclusion :

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons proposé un modèle d'écoulement du matériau granulaire dans une géométrie assez complexe en l'occurrence, une colonne à dièdres; contrairement aux modèles répertoriés lors de notre recherche bibliographique, où on constate que le flux dispersif dans le sens longitudinal de l'écoulement est souvent négligé par rapport aux flux dispersif dans le sens transversal, nous avons quant à nous aboutit à un modèle d'écoulement tenant compte des deux coefficients de dispersion.

En dépit d'une formulation mathématique prenant en compte les différents aspects du phénomène d'écoulement, la solution donnant le champ de vitesse reste tributaire de plusieurs paramètres inconnus.

Afin d'identifier le champ de vitesse, il est nécessaire de quantifier les valeurs des coefficients de dispersion D_x et D_y . A ce sujet, la bibliographie demeure pauvre concernant

la détermination de ces valeurs; nous avons levé cette indétermination par un protocole expérimental permettant d'évaluer correctement ces valeurs.

Pour remédier à ce problème, nous avons tenté de réduire le nombre de paramètres inconnus en déterminant les coefficients de dispersion dans une autre géométrie, c'est l'objet de la deuxième partie de ce chapitre.

III.3 Détermination des coefficients de dispersion:

III.3.1 Introduction :

En examinant l'écoulement du matériau granulaire à l'intérieur de la colonne à dièdres, nous avons observé que les parois externes des dièdres dans un module du séchoir constituent un cône et que l'écoulement dans ce module devient semblable à celui de la vidange d'une trémie, figure III.3.

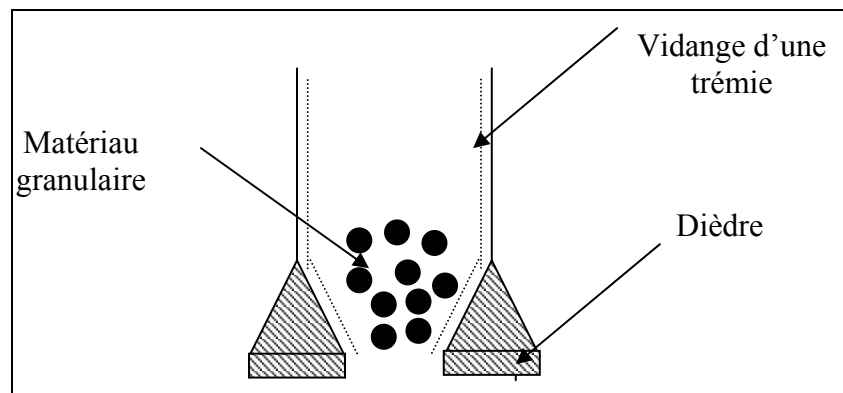


Figure III.3: Ecoulement des grains dans une maille d'une colonne à dièdres

Nous postulons donc que les caractéristiques physiques de l'écoulement restent identiques dans les deux cas de figure à la condition de se maintenir dans un régime d'écoulement semblable. A cet effet, nous avons conçu une seconde installation expérimentale de forme cylindrique réalisée exclusivement en plexiglas afin de visualiser l'écoulement.

Nous développerons dans la seconde partie de ce chapitre, la formulation mathématique d'un écoulement à travers une fente, qui nous permettra de déduire par identification avec l'expérimentation, les valeurs de D_x et D_y .

III.3.2 Modélisation de l'écoulement dans un silo :

III.3.2.1 Formulation mathématique :

Comme dans le cas du séchoir à dièdres, nous avons exploité l'équation de base (équation III.1) du modèle probabiliste.

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = V \frac{\partial C}{\partial y}$$

Considérons un silo cylindrique de diamètre $2R$ et de hauteur H_{silo} , muni d'une fente d'écoulement de diamètre $2b$, figure III.4.

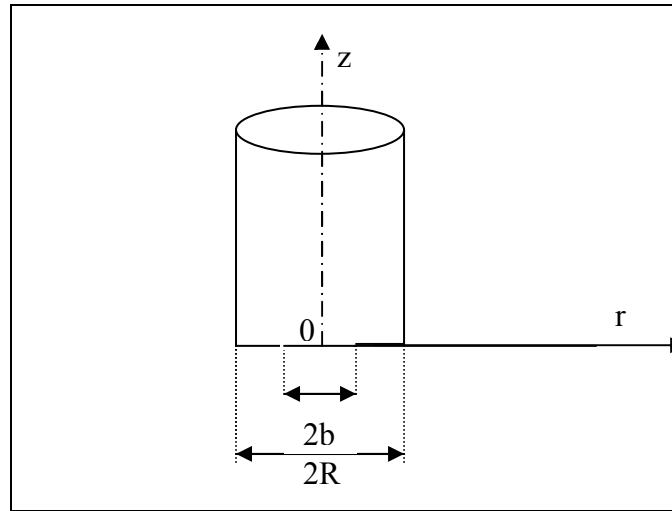


Figure III.4: Silo cylindrique semi-infini

Dans le cas d'un silo (géométrie cylindrique), nous allons réécrire l'équation III.1 en coordonnées cylindrique (r, z) :

$$D_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = V \frac{\partial C}{\partial z} \quad \text{III.47}$$

La similitude consiste à mettre les équations sous forme adimensionnelle pour les rendre indépendantes des valeurs particulières attachées à un cas spécifique; posons alors :

$$r^+ = \frac{r}{R} \quad \text{III.48}$$

$$z^+ = \frac{z}{H_{\text{silo}}} \quad \text{III.49}$$

$$b^+ = \frac{b}{R} \quad \text{III.50}$$

$$C^+ = \frac{C}{C_0} \quad \text{III.51}$$

Avec :

- R : rayon du silo (m) ;
- H_{silo} : hauteur du silo (m) ;
- b : rayon de l'orifice (m) ;
- C_0 : concentration de lacune à l'orifice (nombre de lacune / unité de volume).

En injectant les équations III.48 à III.51 dans l'équation III.47 et en omettant le signe (+) pour plus de souplesse dans l'écriture, nous aboutissons à:

$$\frac{D_r H_{\text{sil}}}{V R^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{D_z}{V H_{\text{sil}}} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = \frac{\partial C}{\partial z} \quad \text{III.52}$$

Définissons les nombres adimensionnels suivants :

N_{Dr} , le nombre de dispersion radial donné par :

$$\frac{D_r H_{\text{sil}}}{V R^2} = \frac{1}{N_{Dr}} \quad \text{III.53}$$

N_{Dz} , le nombre de dispersion axial donné par :

$$\frac{D_z}{V H_{\text{sil}}} = \frac{1}{N_{Dz}} \quad \text{III.54}$$

Donc l'équation III.52 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{1}{N_{Dr}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{1}{N_{Dz}} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = \frac{\partial C}{\partial z} \quad \text{III.55}$$

L'équation III.55 est une équation différentielle du second ordre en C; nous suivrons pour sa résolution la méthode de séparation de variables décrite dans le paragraphe III.2.2; on peut alors écrire que :

$$C(r, z) = k(r) \cdot l(z) \quad \text{III.56}$$

Avec :

$k(r)$ une équation dépendante uniquement de r

$l(z)$ une équation dépendante uniquement de z

nous injectons l'équation III.56 dans l'équation III.55 et nous aboutissons aux équations suivantes:

$$\frac{1}{N_{Dr}} \frac{1}{k(r)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial k(r)}{\partial r} \right) = -\delta^2 \quad \text{III.57}$$

$$\frac{-1}{N_{Dz}} \frac{1}{l(z)} \frac{\partial^2 l(z)}{\partial z^2} + \frac{1}{l(z)} \frac{\partial l(z)}{\partial z} = -\delta^2 \quad \text{III.58}$$

Avec :

$-\delta^2$: une constante réelle.

La résolution des équations III.57 et III.58 donne :

$$k(r) = C_1 J_0 \left(r \sqrt{\delta^2 N_{Dr}} \right) + C_2 Y_0 \left(r \sqrt{\delta^2 N_{Dr}} \right) \quad \text{III.59}$$

$$l(z) = C_3 \exp \left(-\frac{1}{2} \left(-N_{Dz} + \text{sqrt} \left(N_{Dz} (N_{Dz} + 4 \delta^2) \right) \right) z \right) + C_4 \exp \left(\frac{1}{2} \left(N_{Dz} + \text{sqrt} \left(N_{Dz} (N_{Dz} + 4 \delta^2) \right) \right) z \right) \quad \text{III.60}$$

J_0 et Y_0 sont respectivement les fonctions J et Y d'ordre zéro de Bessel (Annexe V) et C_1, C_2, C_3, C_4 sont des constantes d'intégration que nous allons déterminer en appliquant les conditions aux limites appropriées au silo. Il y a deux conditions indiscutables:

*La première;

Pour $r = 0$; $Y_0 \left(0 \sqrt{\delta^2 N_{Dr}} \right) \rightarrow \infty$ ce qui est impossible physiquement donc $C_2 = 0$

* La seconde;

Etant donné que z^+ tend vers des valeurs élevées, ce qui engendre des valeurs de concentration en total désaccord avec la réalité car étant une valeur finie, il apparaît donc une condition évidente, à savoir que $C_4 = 0$.

Considérant ces simplifications, la concentration de lacune dans le silo peut se mettre sous la forme suivante :

$$C(r, z) = \left[C_1 J_0 \left(r \sqrt{\delta^2 N_{Dr}} \right) \right] \left[C_3 \exp \left(-\frac{1}{2} \left(-N_{Dz} + \text{sqrt} \left(N_{Dz} (N_{Dz} + 4 \delta^2) \right) \right) z \right) \right]$$

ou encore:

$$C(r, z) = C_5 J_0 \left(r \sqrt{\delta^2 N_{Dr}} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \left(-N_{Dz} + \text{sqrt} \left(N_{Dz} (N_{Dz} + 4 \delta^2) \right) \right) z \right) \quad \text{III.61}$$

C_5 est une constante donnée par le produit $C_1 * C_3$ que l'on peut déterminer en appliquant les conditions aux limites:

* La première condition aux limites étant la symétrie axiale, l'étude peut être limitée à:

$$\theta = 0 \text{ et } r \geq 0$$

* la seconde condition en $r = 0$ est alors de forme :

$$\frac{\partial C}{\partial r} (r = 0, z) = 0 \quad \text{III.62}$$

En appliquant la condition III.62 dans l'équation III.61, on aboutit à :

$$J_1 \left(\sqrt{\delta^2 N_{Dr}} \right) = 0 \tag{III.63}$$

L'équation III.63 admet une infinité de racines réelles positives et simples $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$

Nous avons alors :

$$C(r, z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[C_{5n} J_0 \left(r \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \left(-N_{Dz} + \sqrt{N_{Dz} (N_{Dz} + 4 \delta_n^2)} \right) z \right) \right] \tag{III.64}$$

Détermination des coefficients C_{5n} :

La solution de l'équation III.64 doit vérifier la condition aux limites suivante :

* à l'orifice, nous supposons un profil de concentration constant:

$$C(r, z=0) = 0 \quad \frac{b}{R} \leq r \leq 1 \tag{III.65}$$

$$C(r, z=0) = 1 \quad 0 \leq r \leq \frac{b}{R} \tag{III.66}$$

* à $z = 0$, nous avons :

$$C(r, z=0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{5n} J_0 \left(r \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) \tag{III.67}$$

L'équation III.67 nous permet de déterminer les coefficients C_{5n} ; pour cela, nous multiplions les deux membres de l'équation par $(r J_0 (r \sqrt{\delta_m^2 N_{Dr}}))$ et nous intégrons entre 0 et 1.

$$\int_0^1 C(r, 0) r J_0 \left(r \sqrt{\delta_m^2 N_{Dr}} \right) dr = \int_0^1 r J_0 \left(r \sqrt{\delta_m^2 N_{Dr}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} C_{5n} J_0 \left(r \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) dr \tag{III.68}$$

Le membre de gauche de l'équation III.68 peut être écrit comme suit :

$$\int_0^1 C(r, 0) r J_0 \left(r \sqrt{\delta_m^2 N_{Dr}} \right) dr = \int_0^{\frac{b}{R}} C(r, 0) r J_0 \left(r \sqrt{\delta_m^2 N_{Dr}} \right) dr + \int_{\frac{b}{R}}^1 C(r, 0) r J_0 \left(r \sqrt{\delta_m^2 N_{Dr}} \right) dr$$

En appliquant la condition aux limites de l'équation III.65, on aura:

$$\int_{\frac{b}{R}}^1 C(r, 0) r J_0 \left(r \sqrt{\delta_m^2 N_{Dr}} \right) dr = 0 \tag{III.69}$$

En appliquant la condition aux limites de l'équation III.67, on aura :

$$\int_0^{\frac{b}{R}} C(r, 0) r J_0 \left(r \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) dr = \frac{b \sqrt{N_{Dr}}}{R \delta_n} J_1 \left(\frac{b}{R} \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) \quad \text{III.70}$$

Le membre de droite de l'équation III.68 peut être écrit comme suit :

$$\int_0^1 r J_0 \left(r \sqrt{\delta_m^2 N_{Dr}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} C_{5n} J_0 \left(r \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) dr = \sum_{n=1}^{\infty} C_{5n} \int_0^1 r J_0 \left(r \sqrt{\delta_m^2 N_{Dr}} \right) J_0 \left(r \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) dr \quad \text{III.71}$$

or,

$$\int_0^1 r J_0 \left(r \sqrt{\delta_m^2 N_{Dr}} \right) J_0 \left(r \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) dr = 0 \quad \text{quand } m \neq n$$

(Annexe V)

$$\int_0^1 r J_0 \left(r \sqrt{\delta_m^2 N_{Dr}} \right) J_0 \left(r \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) dr = \frac{1}{2} \left[J_0 \left(\sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) \right]^2 \quad \text{quand } m = n$$

D'où l'équation III.71 peut se mettre sous la forme suivante:

$$\int_0^1 r J_0 \left(r \sqrt{\delta_m^2 N_{Dr}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} C_{5n} J_0 \left(r \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) dr = \sum_{n=1}^{\infty} C_{5n} \frac{1}{2} \left[J_0 \left(\sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) \right]^2$$

Finalement l'équation III.68 donne:

$$\frac{b \sqrt{N_{Dr}}}{R \delta_n} J_1 \left(\frac{b}{R} \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) = \frac{C_{5n}}{2} \left[J_0 \left(\sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) \right]^2$$

D'où

$$C_{5n} = \frac{2 b \sqrt{N_{Dr}}}{R \delta_n} \frac{J_1 \left(\frac{b}{R} \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right)}{\left[J_0 \left(\sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) \right]^2} \quad \text{III.72}$$

En injectant l'expression des coefficients C_{5n} donné par l'équation III.72 dans l'équation III.64, nous aboutissons finalement à la concentration de lacunes à l'intérieur du silo:

$$C(r, z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[\frac{2 b \sqrt{N_{Dr}}}{R \delta_n} \frac{J_1 \left(\frac{b}{R} \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) J_0 \left(r \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right)}{\left[J_0 \left(\sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) \right]^2} \right] \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \left(-N_{Dz} + \text{sqrt} \left(N_{Dz} \left(N_{Dz} + 4 \delta_n^2 \right) \right) \right) z \right) \quad \text{III.73}$$

Nous venons de trouver l'équation qui donne l'évolution de la concentration des lacunes dans le silo; pour accéder aux expressions des vitesses radiales et axiales, on suit le même protocole décrit dans le paragraphe III.2.2, soit:

$$v_r(r, z) = \frac{\left[D_r \left(\sum_{n=1}^{\infty} -2 \frac{b J_1(\sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} b) J_1(\sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} r) \exp\left(-\frac{1}{2}(-N_{Dz} + \sqrt{N_{Dz}(N_{Dz} + 4\delta_n^2)})z\right)}{R \left[J_0(\sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}}) \right]^2} \right) \right]}{\left[N \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{b J_1(\sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} b) J_0(\sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} r) \exp\left(-\frac{1}{2}(-N_{Dz} + \sqrt{N_{Dz}(N_{Dz} + 4\delta_n^2)})z\right)}{R \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \left[J_0(\delta_n^2 N_{Dr}) \right]^2} \right) \right]} \quad \text{III.74}$$

$$v_z(r, z) = -V \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 b J(1, \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \frac{b}{R}) J(0, \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} r) \exp\left(-\frac{1}{2}(-N_{Dz} + \sqrt{N_{Dz}(N_{Dz} + 4\delta_n^2)})z\right)}{R \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \left[J(0, \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}}) \right]^2} \right) \right] \quad \text{III.75}$$

$$+ \frac{\left[D_z \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{b J_1(\sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \frac{b}{R}) J_0(\sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} r) \exp\left(-\frac{1}{2}(-N_{Dz} + \sqrt{N_{Dz}(N_{Dz} + 4\delta_n^2)})z\right) \left(\frac{1}{2} N_{Dz} - \frac{1}{2} \sqrt{N_{Dz}(N_{Dz} + 4\delta_n^2)}\right) \right)}{R \left[J_0(\sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}}) \right]^2} \right]}{\left[N \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{b J_1(\sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} b) J_0(\sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} r) \exp\left(-\frac{1}{2}(-N_{Dz} + \sqrt{N_{Dz}(N_{Dz} + 4\delta_n^2)})z\right)}{R \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \left[J_0(\delta_n^2 N_{Dr}) \right]^2} \right) \right]}$$

Posons :

$$T_3 = \left(\frac{1}{2} N_{Dz} - \frac{1}{2} \sqrt{N_{Dz}(N_{Dz} + 4\delta_n^2)} \right) \quad \text{III.76}$$

$$S_1 = \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2 b J(1, \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \frac{b}{R}) J(1, \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} r) \exp\left(-\frac{1}{2}(-N_{Dz} + \sqrt{N_{Dz}(N_{Dz} + 4\delta_n^2)})z\right)}{R \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \left[J(0, \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}}) \right]^2} \right) \right] \quad \text{III.77}$$

$$S_2 = \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 b J(1, \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \frac{b}{R}) J(0, \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} r) \exp\left(-\frac{1}{2}(-N_{Dz} + \sqrt{N_{Dz}(N_{Dz} + 4\delta_n^2)})z\right)}{R \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \left[J(0, \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}}) \right]^2} \right) \right] \quad \text{III.78}$$

$$S_3 = \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 b J \left(1, \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \frac{b}{R} \right) J \left(0, \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} r \right) \exp \left(\frac{1}{2} \left(-N_{Dz} + \sqrt{N_{Dz}^2 + 4 \delta_n^2} \right) z \right) T_3 \right)}{R \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \left[J \left(0, \sqrt{\delta_n^2 N_{Dr}} \right) \right]^2} \right] \quad \text{III.79}$$

En injectant les équations III.76, III.77, III.78 et III.79 dans les équations III.74 et III.75, nous aboutissons à :

$$v_r(r, z) = \frac{D_r S_1}{N - S_2}$$

$$v_z(r, z) = \frac{-V S_2 + D_z S_3}{N - S_2}$$

III.3.3 Conclusion :

Les équations III.75 et III.76 donnent le profil de vitesse radial et axial dans un silo cylindrique; nous remarquons que ces profils dépendent essentiellement:

1. de dimensions de l'installation R, b, H_{silo} .
2. du régime d'écoulement V (vitesse moyenne des particules solides dans le lit).
3. des caractéristiques physiques des particules solides dans le lit d_p, ϵ .
4. des coefficients de dispersion radial et axial et les coefficients δ_n^2

Les trois premiers paramètres étant fixés, nous pouvons alors déterminer les coefficients de dispersion ainsi que les coefficients δ_n^2 ; pour ce faire, nous allons procéder à une identification entre la modélisation et les résultats expérimentaux de l'écoulement des grains dans le silo. Ainsi, les valeurs de D_r et de D_z déterminées par cette méthode seront remplacées dans les équations III.75 et III.76 afin d'obtenir les profils de vitesse de l'écoulement des grains dans le séchoir à canaux noyés.

Chapitre IV: Identification des coefficients de dispersion

IV.1. Introduction:

Nous avons exposé dans le troisième chapitre de ce mémoire, un modèle d'écoulement du matériau granulaire dans un séchoir à canaux noyés permettant de donner les équations qui régissent l'évolution du champ de vitesse.

Malheureusement, la forme complexe des équations du modèle et les équations qui traduisent les conditions aux limites, ne nous ont pas permis de résoudre le problème et leurs solutions restent tributaires de plusieurs paramètres inconnus.

Pour apaiser ce problème, nous avons tenté de réduire le nombre des paramètres inconnus en déterminant les coefficients de dispersion dans une géométrie simple, et notre choix s'est porté sur un silo cylindrique dont le développement théorique a été largement commenté dans le paragraphe III.3.1.

Nous exposerons dans ce qui suit l'installation expérimentale conçue particulièrement à cet effet et les différents résultats obtenus lors de cette étude.

IV.2. Description de l'installation expérimentale:

Le dispositif expérimental est un silo cylindrique, figure IV.1 de diamètre intérieur égal à:

$$D_{\text{int}} = 0.30 \text{ m}$$

Le silo est composé de deux colonnes en plexiglas reliées entre elles par une bride de même nature.

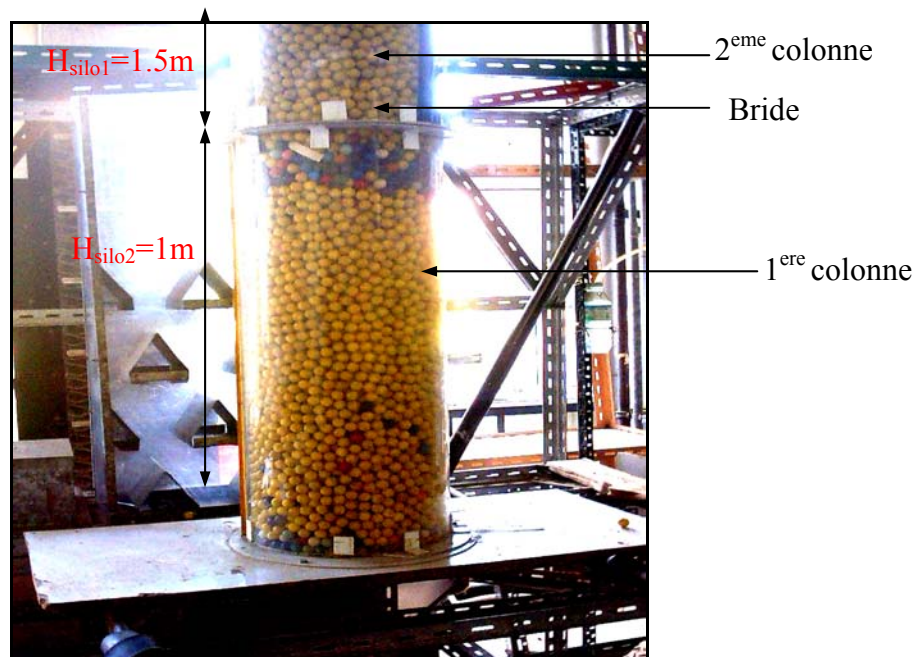


Figure IV.2: Photographie de l'installation expérimentale

La base du silo est conçue de sorte à ce que l'on puisse intégrer des disques ayant des fentes de différents diamètres d_f ; les dimensions de ces disques sont regroupées dans le tableau suivant:

Tableau IV.1: Dimension des fentes d'écoulement

Disque	d_f (mm)
Disque1	60
Disque2	95
Disque3	115

IV.3. Résultats dynamique de l'écoulement granulaire dans un silo:

IV.3.1. Fonctionnement:

Après avoir rempli le silo avec le matériau granulaire, composé des billes de polystyrène de couleur jaune similaires à celles utilisées dans l'étude de l'écoulement granulaire dans un séchoir à canaux noyés, jusqu'à une hauteur de 96 cm, nous disposons une couche de 8 cm de billes de couleur bleu qui vont nous servir de traceurs.

Dès lors que nous ouvrons le clapet qui obstrue la fente d'écoulement, nous enregistrons grâce aux bandes de mètre ruban qu'on a disposé verticalement et horizontalement sur la colonne, la position du traceur au fur et à mesure de son déplacement le long de la paroi.

Ainsi, à partir de ces enregistrements, nous avons pu reproduire intégralement des trajectoires empreintées par les grains colorés ainsi que les profils de vitesse pariétales à différents instants (Annexe VI).

IV.3.2. Observation visuelle :

A titre d'exemple nous représentons sur la figure IV.2 une série de photographies traduisant l'évolution du mouvement particulaire dans le silo cylindrique muni d'une fente d'écoulement circulaire de diamètre égale à 11.50 cm.

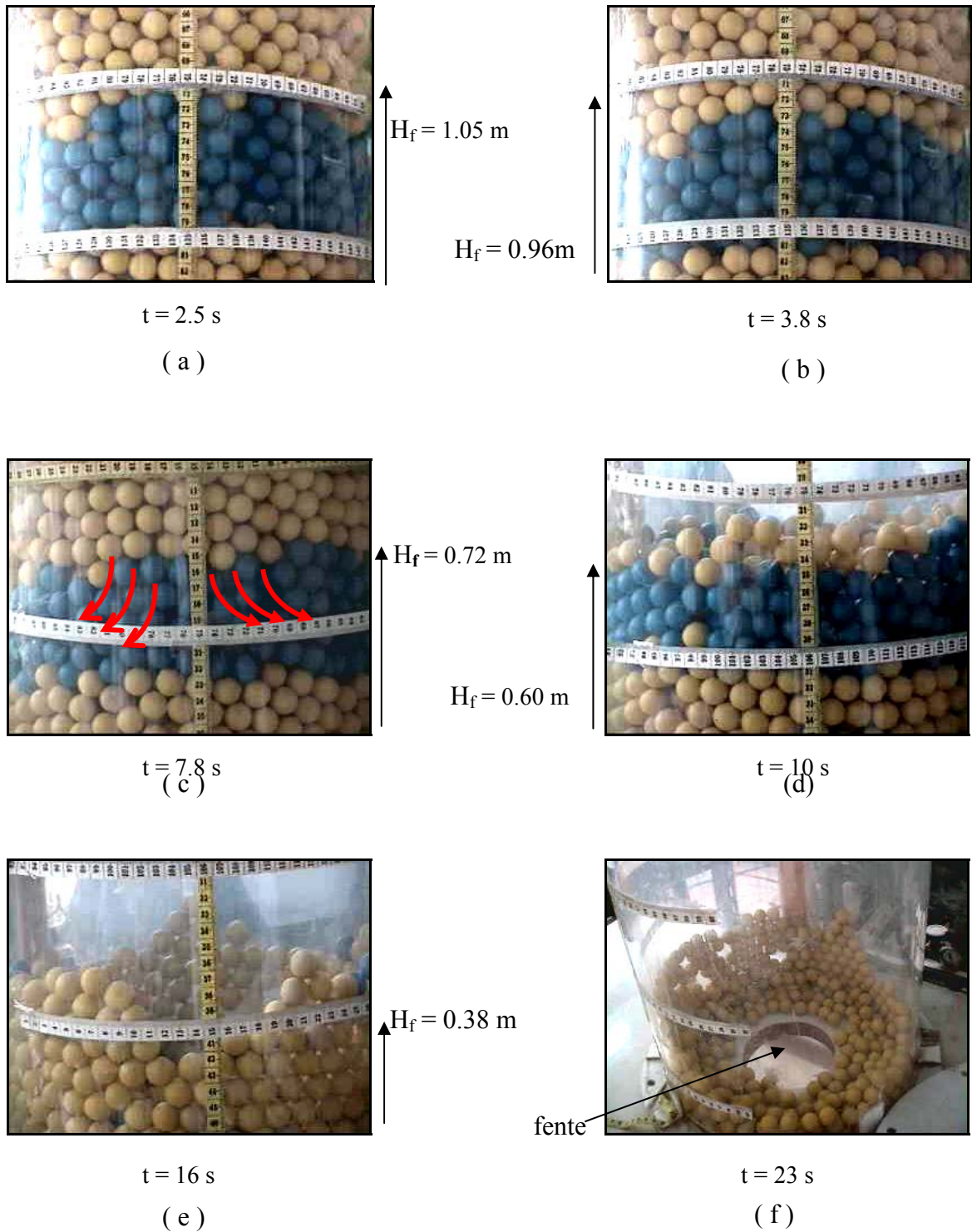


Figure IV.2 : Représentation de l'écoulement du matériau granulaire dans un silo cylindrique.

H_f représente la hauteur mesurée à partir de la fente.

A partir de nos observations visuelles et du traitement d'image, nous avons pu distinguer la coexistence de différents régimes d'écoulements granulaires dans le silo tel que schématisé sur la figure IV.3 :

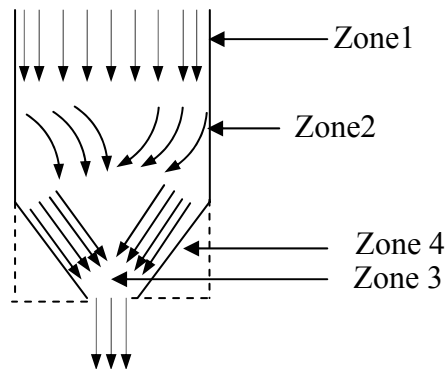


Figure IV.3: Schématisation des différentes zones d'écoulement.

- **Zone 1:** le matériau granulaire s'écoule sous forme de bloc; c'est la zone d'écoulement piston et celle-ci se situe dans un espace compris entre $H = 1.05$ m et $H = 0.76$ m; dans cette zone, les grains empreintent des trajectoires quasi rectilignes, figure.IV.2 (a) et (b).
- **Zone 2:** on observe une dispersion plus au moins aléatoire des grains dans cette zone; c'est la zone d'écoulement dispersif, figure IV.2 (c) et (d). Dans cette zone, les grains subissent des fluctuations de vitesse qui se traduisent par des changements brusques de trajectoires.
- **Zone 3:** cette zone est proche de l'orifice ; elle a la forme d'un convergent et dans la quelle s'engouffrent les particules qui sont conduites jusqu'à la fente d'écoulement; c'est la zone d'écoulement convergent, figure.IV.2 (e).
- **Zone 4:** dans la quatrième zone, les particules solides adhèrent à la paroi et ne s'écoulent pas; c'est la zone morte, figure.IV.2 (f)

IV.3.3. Résultats expérimentaux:

IV.3.3.1. Essais effectués:

Nos essais expérimentaux ont porté sur la cartographie des trajectoires et des vitesses du produit solide à la paroi du silo cylindrique. Nous avons donc effectué des essais de vidange en faisant varier le diamètre de la fente d'écoulement.

IV.3.3. 2.Résultats expérimentaux :

Nous représentons sur les figures IV.4 et IV.5 les trajectoires pariétales axiales et radiales respectivement des grains obtenus pour les trois fentes d'écoulement.

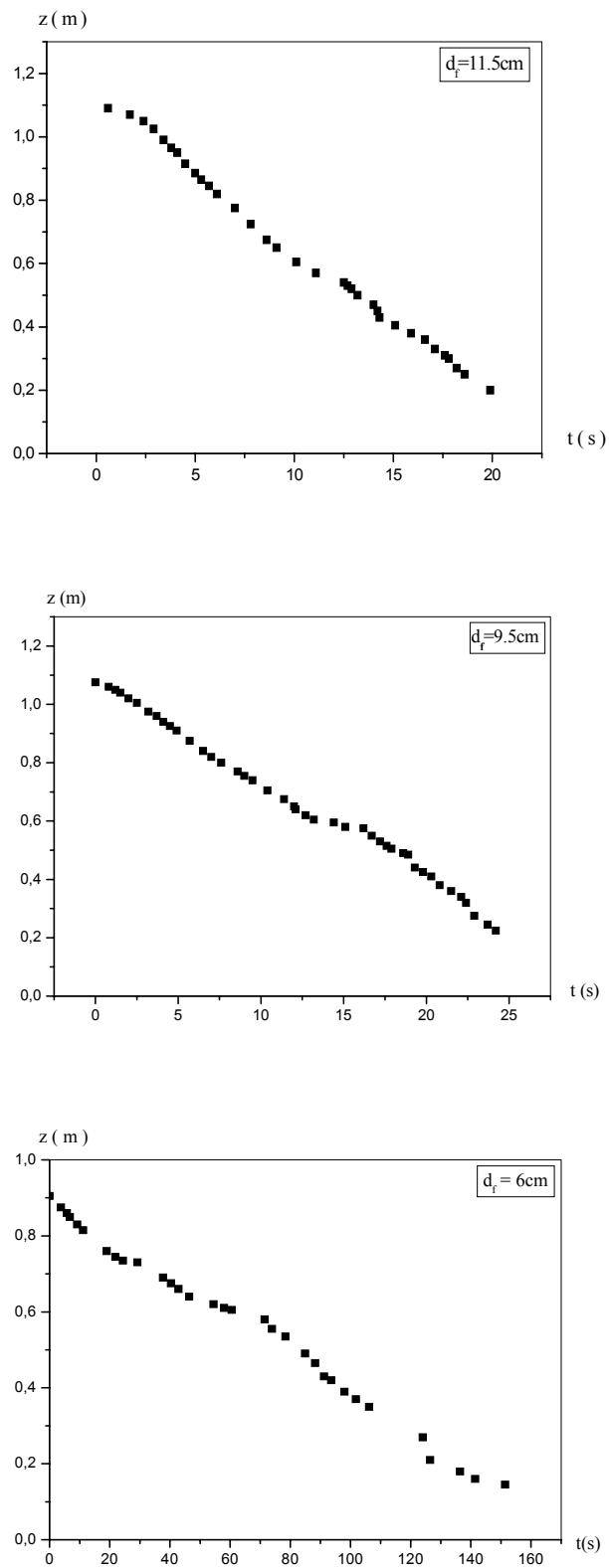


Figure IV.4 : Trajectoires pariétales axiales expérimentales pour différents diamètres de la fente.

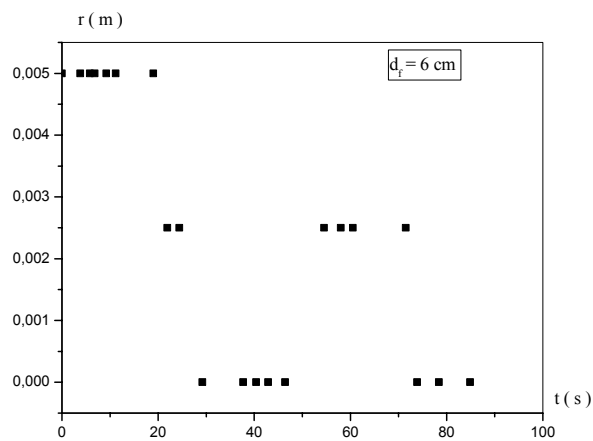
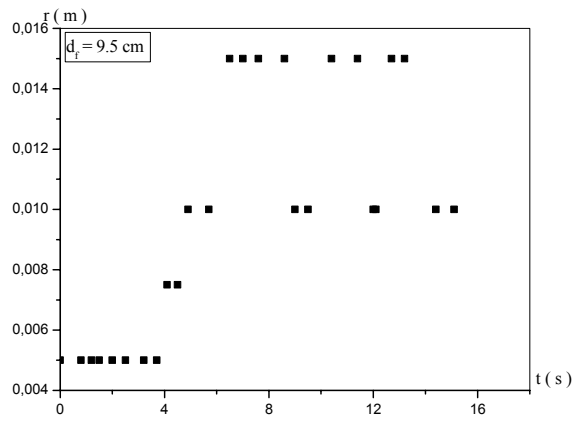
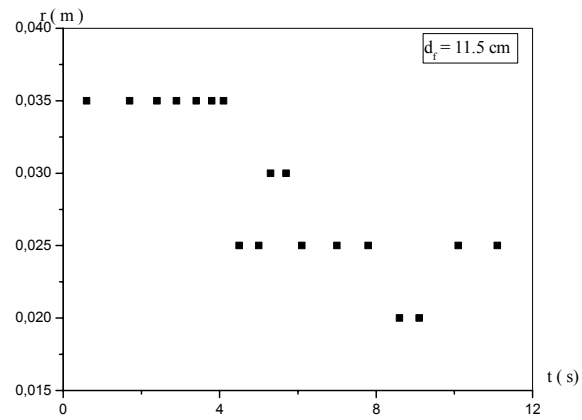


Figure IV.5: Trajectoires pariétales radiales expérimentales pour différents diamètres de la fente.

Sur les figures IV.6 et IV.7, nous reportons les champs de vitesses pariétales axiales et radiales respectivement pour les trois diamètres de fente d'écoulement.

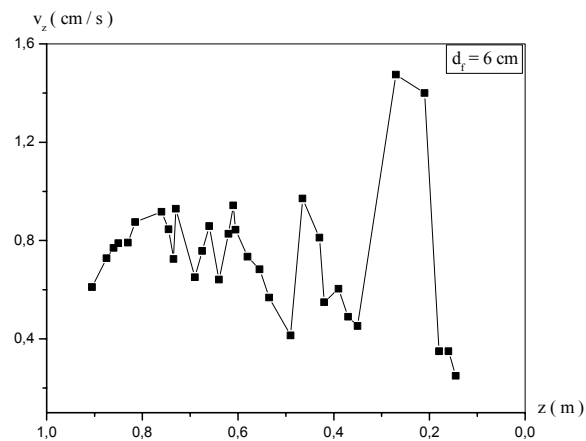
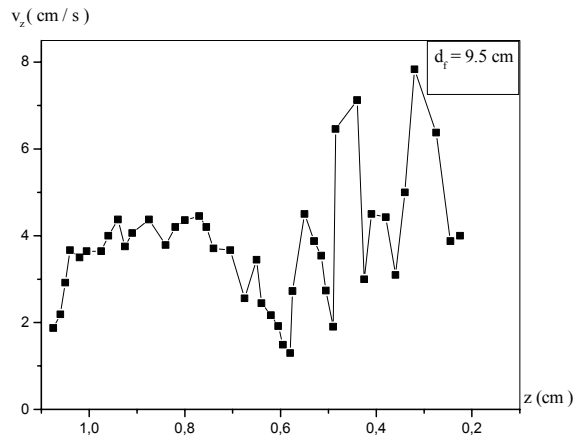
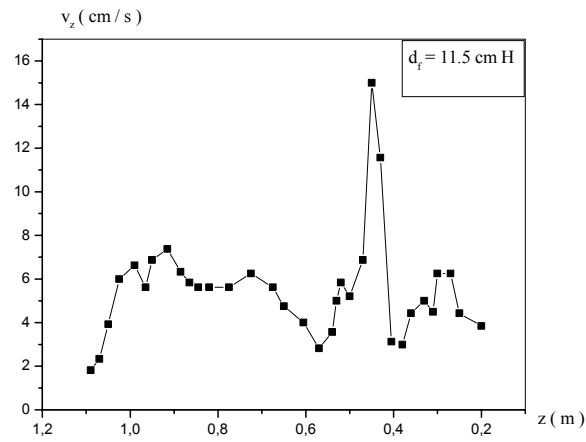


Figure IV.6 : Profils expérimentaux de vitesse axiale pour différents diamètres de la fente.

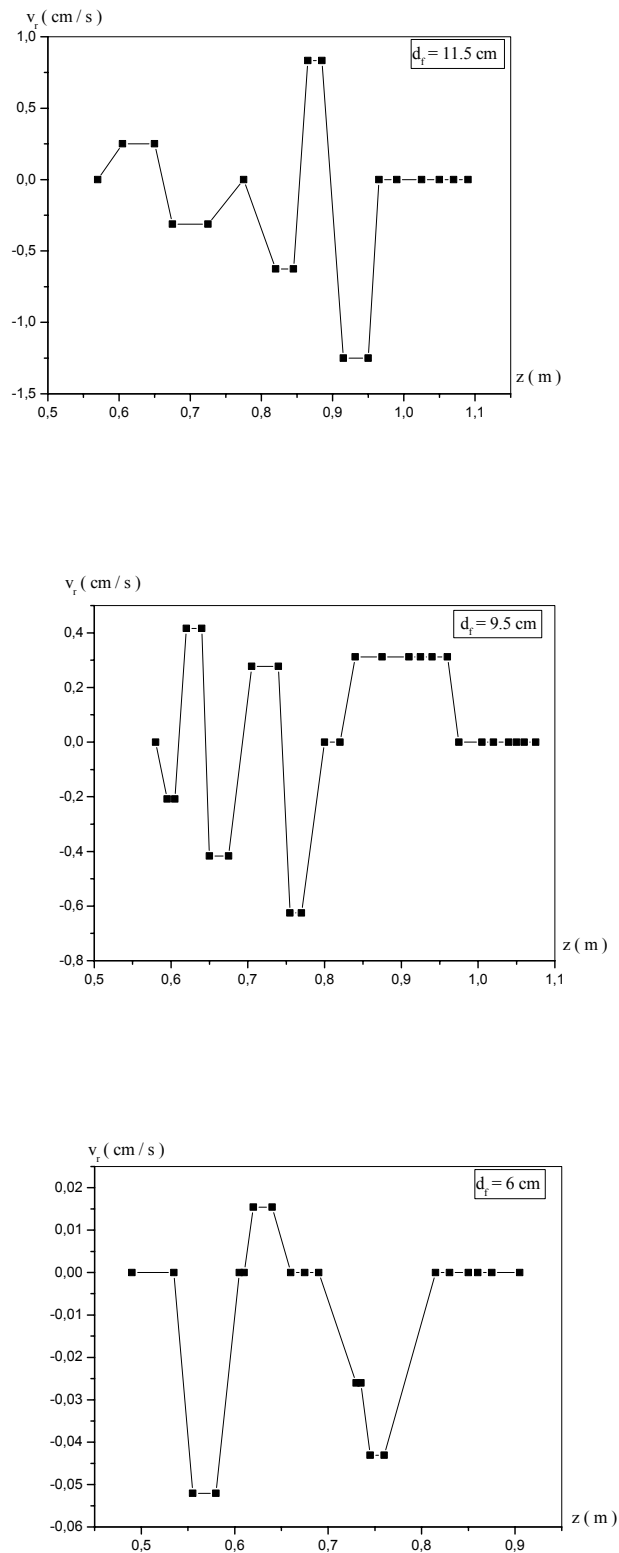


Figure IV.7 : Profils expérimentaux de vitesse radiale pour différents diamètres de la fente.

IV.3.3. 3. Analyse des résultats:

Les conclusions auxquelles nous aboutirons lors de cette analyse concernent l'ensemble des graphes obtenus précédemment, mais pour une meilleure clarté dans la représentation, notre choix s'est porté sur les résultats obtenus avec la fente d'écoulement $d_f = 11.50$ cm.

Nous constatons que dans la zone d'écoulement piston, la vitesse verticale croît progressivement, tandis que la vitesse radiale est pratiquement nulle comme le montre la figure IV.8.

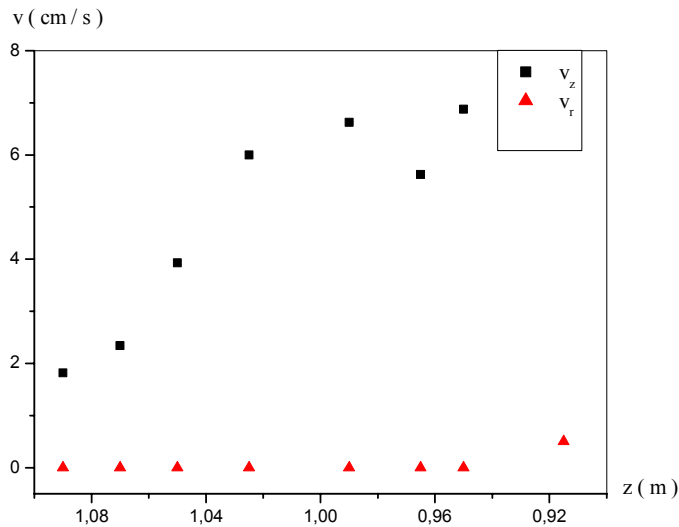


Figure IV.8 : Profils de vitesses dans la zone d'écoulement piston pour $d_f = 11.50$ cm.

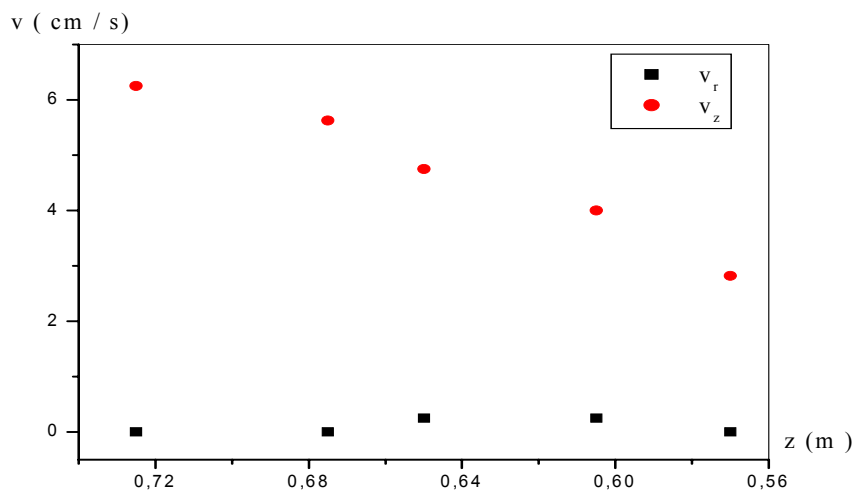


Figure IV.9: Profils de vitesses dans la zone d'écoulement dispersive pour $d_f = 11.50$ cm.

Par contre, nous constatons que dans la zone d'écoulement dispersif, la vitesse axiale décroît; cette décroissance est probablement due à l'existence d'une autre composante de vitesse, qui est la vitesse radiale, comme le montre la figure IV.9

Entre les deux zones, piston et dispersive, apparaît un régime d'écoulement où les valeurs de la vitesse oscillent d'une manière imprécise, nous l'avons désigné par zone de transition.

Une quatrième zone où la hauteur du lit décroît d'une façon linéaire en fonction du temps car les grains rentrent au fur et à mesure dans un convergent pour accéder à la fente d'écoulement, mais la pente de la droite diffère d'un diamètre à un autre et la vitesse d'écoulement axiale varie d'une manière oscillatoire; à titre d'exemple, nous représentons sur la figure IV.10, les différentes zones d'écoulements des grains dans un silo muni d'une fente d'écoulement de diamètre 11.50 cm où on observe effectivement que dans la quatrième zone, la vitesse varie d'une manière oscillatoire.

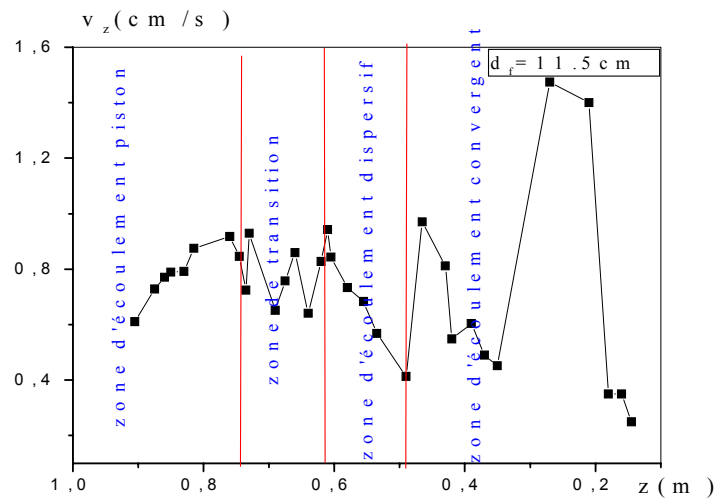


Figure IV.10: Délimitation des zones d'écoulement des grains dans un silo muni d'une fente d'écoulement de diamètre 11.50 cm

Il est à noter que dans cette quatrième zone, nous avons suivi depuis la fin de la zone dispersive la diminution de la hauteur du lit en fonction du temps et non pas les grains colorés, car ces dernières sont rentrées dans un convergent à l'intérieur de la colonne ; par faute d'indisponibilité de dispositif adéquat, nous n'avons pas pu suivre ces grains dans cette zone qu'on a nommée par zone d'écoulement convergent.

Dans la suite de ce travail, nous allons s'intéresser uniquement aux zones d'écoulements du traceur, figure IV.11, autrement dit, nous allons écarter la zone d'écoulement convergent.

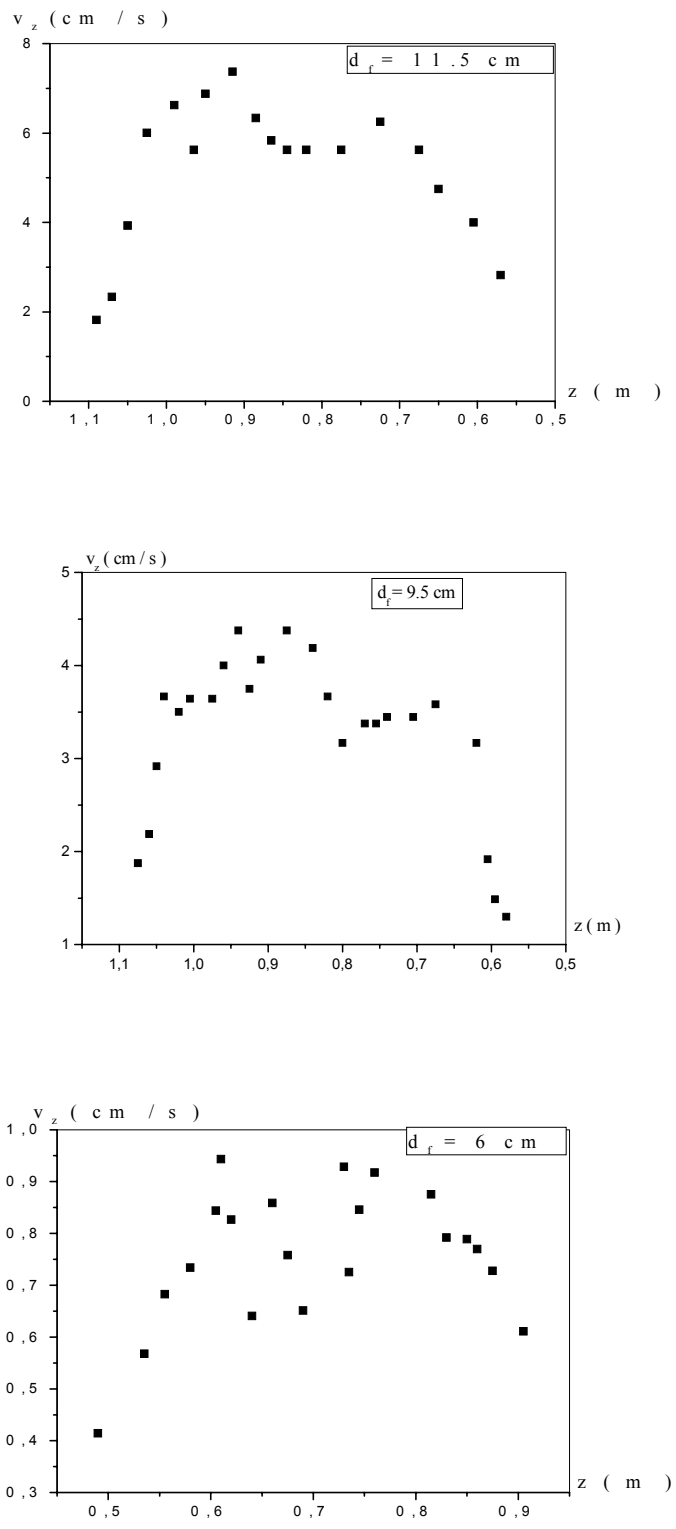


Figure IV.11: Evolution de la vitesse axiale du grain traceur en fonction de la hauteur du lit pour différents diamètres de la fente

IV.3.4. Détermination des paramètres cinématiques :

Le but majeur de cette partie d'étude est la détermination des coefficients de dispersion des particules solides dans le lit, en l'occurrence le coefficient de dispersion radial D_r et le coefficient de dispersion axial D_z , en se basant sur la formulation mathématique donnée dans le paragraphe III.3.2.

Pour ce faire, nous avons opté pour une comparaison entre les résultats prédits par le modèle (équations III.61 et III.62) et ceux obtenus expérimentalement.

Or, comme nous l'avons déjà mentionné au préalable, ces équations dépendent de plusieurs coefficients, rendants difficiles leurs résolutions. Afin de surmonter cette difficulté, nous avons diminué le nombre de paramètres inconnus dans les équations, en identifiant le coefficient de dispersions axial uniquement dans la zone d'écoulement piston.

IV.3.4.1. Détermination du coefficient de dispersion axial D_z :

Etant donné que le traitement d'images nous a conforté dans l'établissement de l'existence d'une zone d'écoulement piston avec dispersion axial, dans laquelle les particules suivent des filets quasi-rectilignes, nous avons exploité cette information afin d'exclure du modèle d'écoulement, la composante radiale du flux de dispersion.

Ceci a considérablement réduit les équations et nous a permis de déterminer le coefficient de dispersion axial. Sur la figure IV.12, nous avons reporté les valeurs de la vitesse axiale pariétale le long du silo uniquement dans la zone d'écoulement piston avec dispersion axial. Nous constatons une augmentation graduelle de la vitesse de la particule le long de son déplacement et que ces valeurs sont modifiées par le diamètre de la fente. Plus on augmente le diamètre de la fente, plus on observe une croissance de la vitesse axiale.

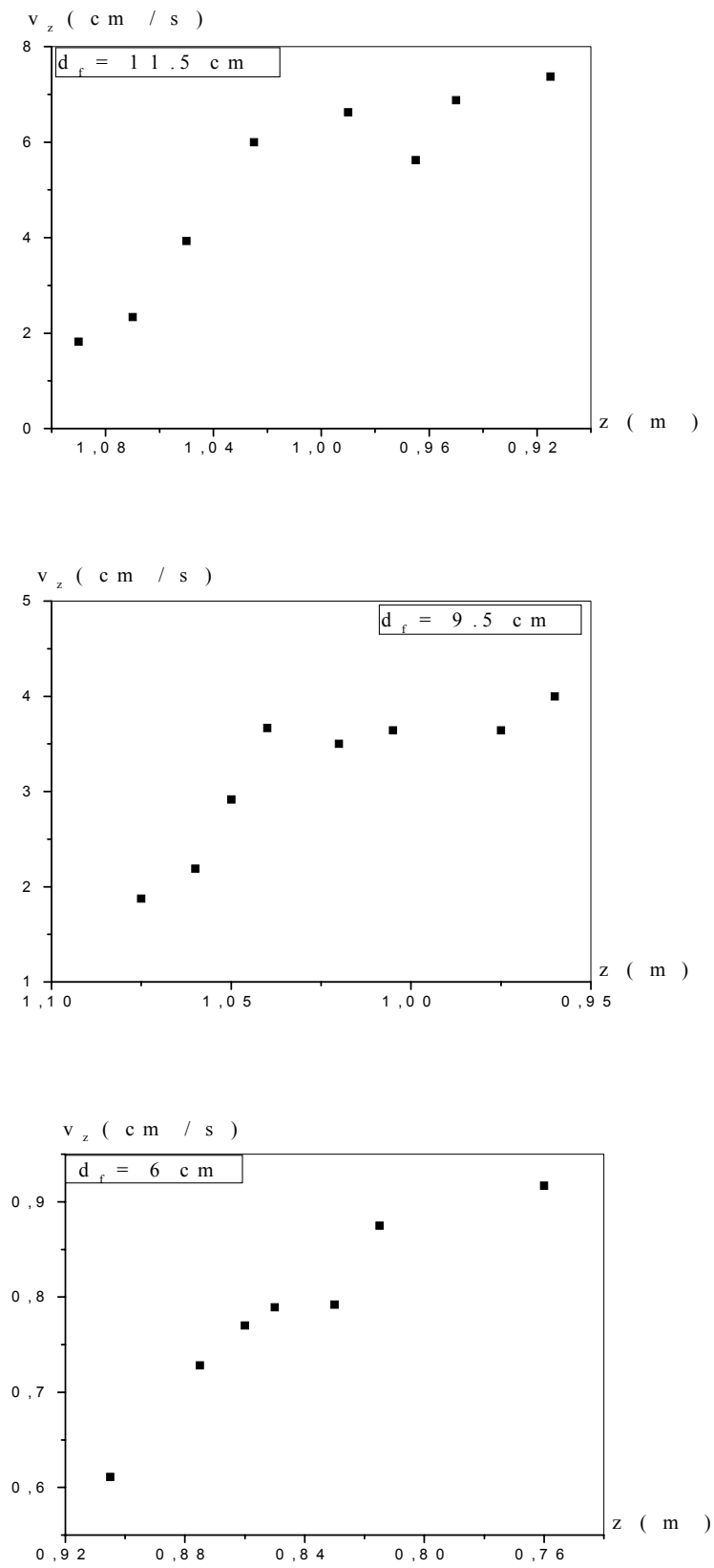


Figure IV.12: Profil expérimental de vitesse axiale dans la zone d'écoulement piston

IV 3.4.2. Modélisation de l'écoulement granulaire dans la zone d'écoulement piston :

Ce modèle d'écoulement piston dérive d'une simplification du modèle d'écoulement granulaire dans un silo, décrit dans le paragraphe III.3.2:

$$\frac{1}{N_{Dr}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{1}{N_{Dz}} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = \frac{\partial C}{\partial z} \tag{IV.1}$$

Dans la zone d'écoulement piston, on suppose que le flux de dispersion radial est négligeable, ce qui nous permet de simplifier l'équation IV.1:

$$\frac{1}{N_{Dz}} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = \frac{\partial C}{\partial z} \tag{IV.2}$$

Pour la résolution de l'équation IV.2, nous suivrons la même démarche détaillée dans le paragraphe III.3.2.1.

Le profil de vitesse axial est donné par l'équation suivante:

$$v(z) = - \frac{V C_1 + V C_2 \exp (N_{Dz} z) - D_z C_2 N_{Dz} \exp (N_{Dz} z)}{N - C_1 - C_2 \exp (N_{Dz} z)} \tag{IV.3}$$

où :

V: représente la vitesse moyenne de l'écoulement (Annexe VI);

$$N_{Dz} = \frac{V H_{silo}}{D_z}$$

est le nombre de dispersion axial

N : nombre total (nombre de lacunes plus nombre de grains) donné par:

$$N = \frac{6 (1-\varepsilon)}{\pi d_p^3}$$

En remplaçant les différents termes dans l'équation IV.3, on obtient:

$$v(z) = - \frac{V C_1 + V C_2 \exp \left(\frac{V H_{silo}}{D_z} z \right) (1 - H_{silo})}{\frac{6 (1-\varepsilon)}{\pi d_p^3} - C_1 - C_2 \exp \left(\frac{V H_{silo}}{D_z} z \right)} \tag{IV.4}$$

L'équation IV.4 est fonction de la vitesse moyenne V, de la hauteur du silo H, du diamètre des particules d_p, de la porosité du lit ε et des constantes d'intégration C₁ et C₂ ainsi que du coefficient de dispersion axial D_z.

Afin de déterminer les constantes d'intégration, nous avons appliqué les conditions aux frontières réelles, c'est-à-dire, les vitesses des grains aux limites de l'existence de l'écoulement piston; ceci se traduit par:

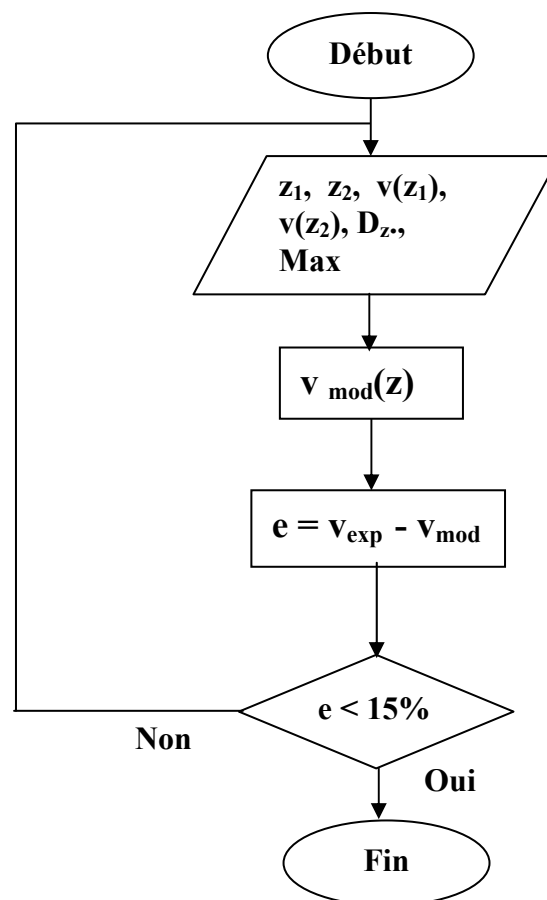
$$z = z_1 \Rightarrow v(z_1) = v_1 \quad \text{IV.5}$$

$$z = z_2 \Rightarrow v(z_2) = v_2 \quad \text{IV.6}$$

z_1 : l'ordonné correspondant à la limite inférieure de la zone piston et v_1 sa vitesse expérimentale.

z_2 : l'ordonné correspondant à la limite supérieure de la zone piston et v_2 sa vitesse expérimentale.

À l'aide du logiciel de calcul « Maple », nous appliquons les conditions aux limites IV.5 et IV.6 au profil de vitesse donné par l'équation IV.4, puis nous administrons différentes valeurs du coefficient de dispersion axial D_z . Le calcul s'arrête l'orsque l'écart entre le profil expérimental et modélisé devient faible; le test d'arrêt est fixé à un écart de 15 % comme l'indique l'organigramme de calcul.



Les résultats de cette étude sont regroupés dans la figure IV.13 et les détails des différents calculs sont regroupés en annexe VI.

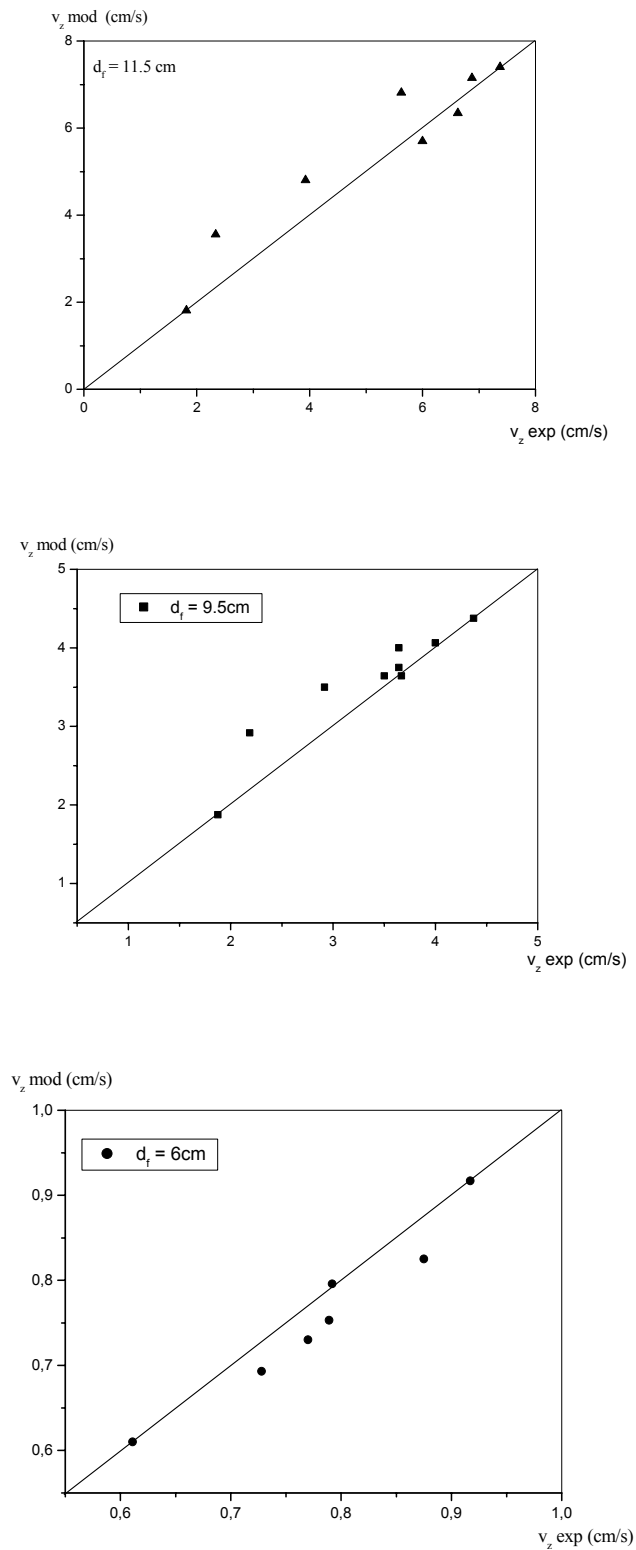


Figure IV.13: Comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats du modèle dans la zone d'écoulement piston.

Comme, on peut le constater sur ces graphiques, nous avons obtenu les différentes valeurs de D_z qui sont solutions de l'équation IV.4, car l'ensemble des points se répartissent autour de la première bissectrice.

IV.3.4.3. Détermination du coefficient de dispersion radial D_r :

Afin de déterminer le coefficient de dispersion radial, nous considérons la zone d'écoulement dispersif. Dans cette zone, nous supposons la superposition du flux dispersif radial au flux dispersif axial. Les différents profils de vitesse dans cette région pour les trois fentes étudiées sont représentés sur la figure IV.14.

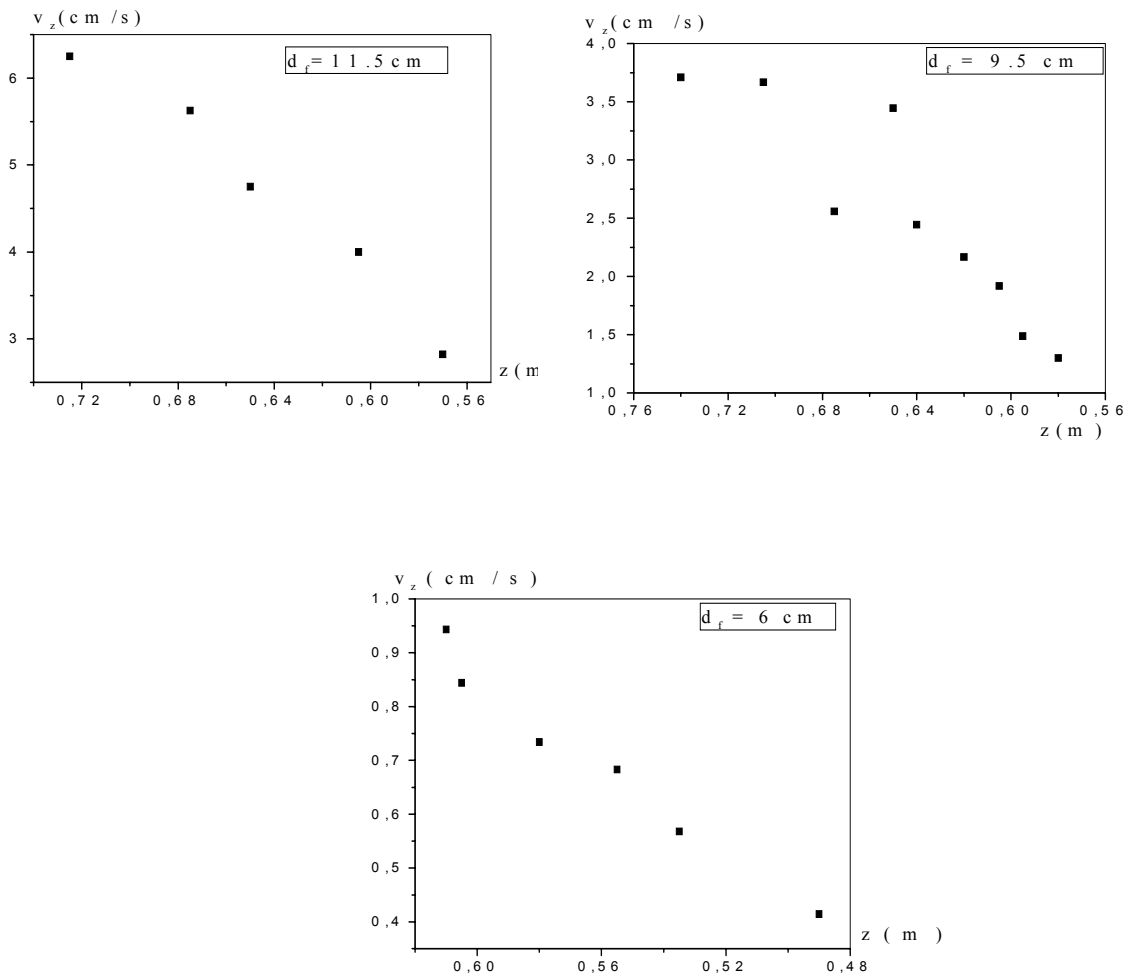
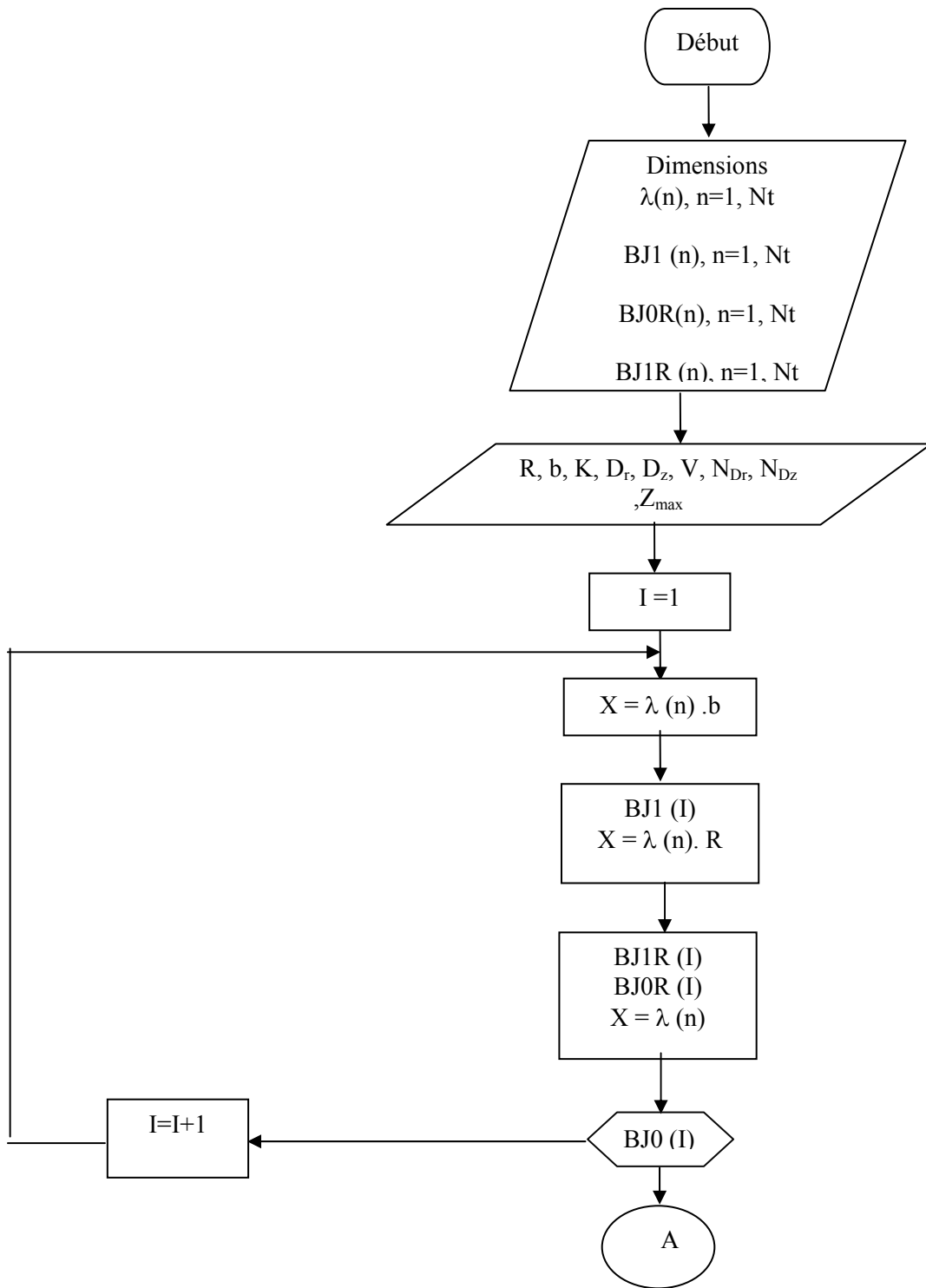
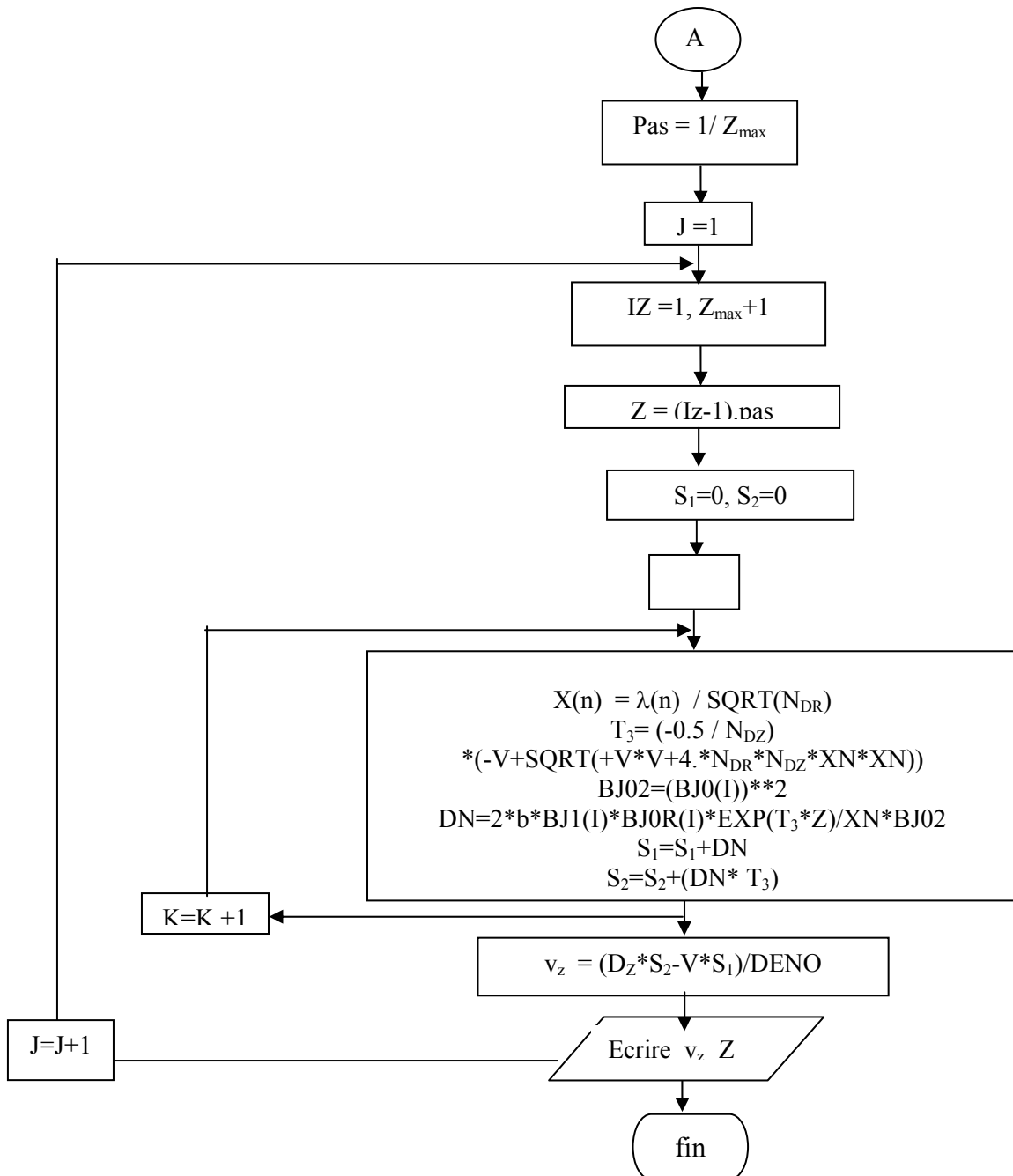


Figure IV.14: Profils axiaux de vitesse expérimentale dans la zone d'écoulement dispersive

Donc, nous allons exploiter les équations III.61 et III.62 (paragraphe III.2) pour déterminer le coefficient de dispersion radial, en supposant que le coefficient de dispersion axial déterminé précédemment reste constant dans la zone dispersive. Désormais, les équations III.61 et III.62 ne seront fonctions que du coefficient D_r , la résolution de ces équations est détaillée dans l'organigramme suivant:





Nous injectons une valeur du coefficient D_r dans le programme de résolution et nous comparons les résultats du modèle avec les résultats expérimentaux; nous arrêtons les itérations lorsque l'écart entre les valeurs du modèle et les valeurs expérimentales sont au-dessous de 15%.

Afin de valider ce concept, nous avons comparé graphiquement les résultats; à la lumière de la figure IV.15, où les points apparaissent proches de la première bissectrice, nous pouvons affirmer que les valeurs de D_r obtenus pour chacune des fentes satisfont de manière convenable le modèle établi.

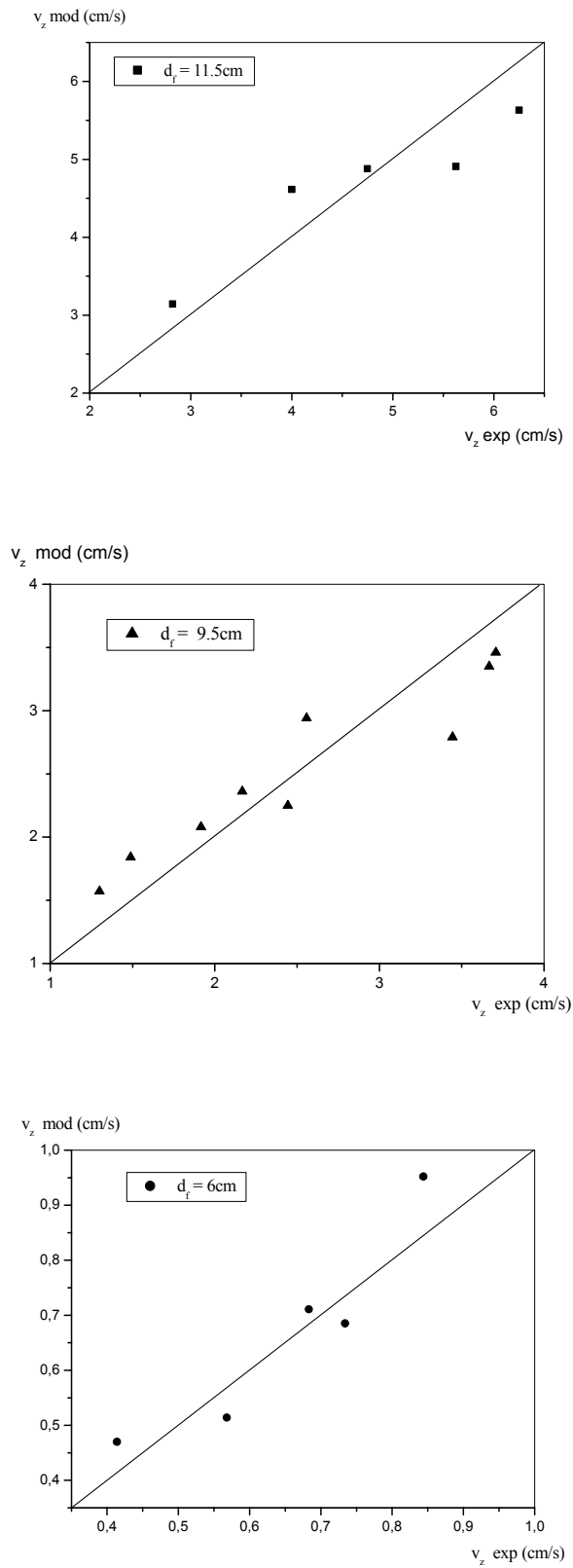


Figure IV.15: Comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats du modèle dans la zone d'écoulement dispersive.

Afin de récapituler nos résultats, nous avons regroupé dans le tableau suivant les valeurs du coefficient de dispersion axial et radial pour chacune des fentes.

Tableau. IV.2 : Valeurs des coefficients de dispersion pour les trois fentes d'écoulements

Disque	$D_r 10^5 (m^2 / s)$	$D_z 10^4 (m^2 / s)$
Disque 1 ($d_f = 6.0$ cm)	8.75	1.75
Disque 2 ($d_f = 9.5$ cm)	5.00	4.80
Disque 3 ($d_f = 11.5$ cm)	2.80	5.00

IV.4. Conclusion :

L'étude que nous avons menée dans ce chapitre nous a permis de déterminer les coefficients de dispersion axial et radial dans un silo cylindrique dans le but de les exploiter dans les équations du modèle d'écoulement granulaire dans un séchoir à canaux noyés.

Nous marquerons une pause à ce niveau de rédaction pour ouvrir une discussion concernant les propriétés de ces coefficients de dispersion. En effet, la littérature est pauvre dans ce domaine et nous avons seulement tenté, de faire une analogie avec les phénomènes de transfert dans le génie des procédés. Par exemple, les phénomènes diffusifs axial et radial apparaissent dans les écoulements monophasiques. On leur associe d'ailleurs un nombre adimensionnel qui est le nombre de Peclet défini par $Pe_z = \frac{v L'}{D_z}$

Des études dans ce domaine ont montré que le coefficient de diffusion dépend de la vitesse de l'écoulement et de la géométrie de l'installation [20]

En générale, cette opération n'est possible que si les caractéristiques physiques reste identique dans les deux cas de figures (silo et séchoir à dièdres) et à condition de maintenir un régime d'écoulement similaire (même nombre de Reynolds).

A cet effet, nous avons jugé nécessaire d'étudier l'évolution des coefficients de dispersion en fonction du nombre de Reynolds, figure IV.16, afin de les adapter de manière précise dans les équations de l'écoulement des grains dans le séchoir à canaux noyés; le nombre de Reynolds étant défini comme suit :

$$Re_p = \frac{\rho_{air} V d_p}{\mu_{air}}$$

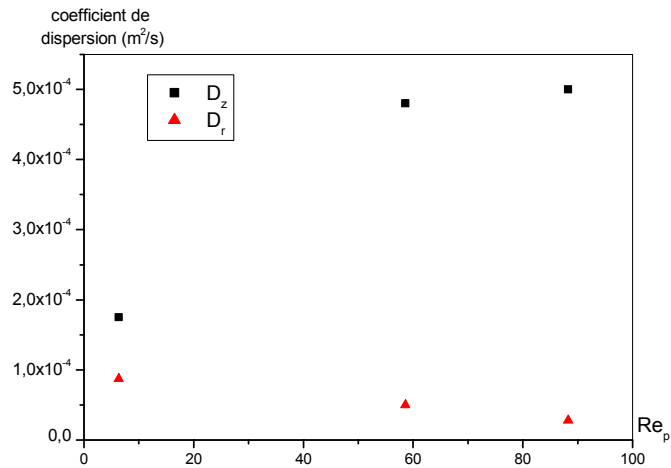


Figure IV.16: Evolution des coefficients de dispersion en fonction du nombre de Reynolds

La figure précédente montre une évolution opposée des deux coefficients de dispersion; en effet, une croissance du nombre de Reynolds se traduit par une diminution du coefficient de dispersion radial. On confirme donc que lorsque la vitesse de l'écoulement des grains croît, la dispersion axiale devient prépondérante par rapport à la dispersion radiale.

D'autre part, nous n'avons pas tenu compte de l'effet de la géométrie de l'installation sur ces coefficients; nous avons estimé que la dispersion est un phénomène intrinsèque dépendant de la taille de la particule; cette hypothèse, comme on le verra par la suite n'est pas fondée.

Chapitre V: Etude de l'écoulement granulaire dans le séchoir à dièdres

V.1. Introduction:

Nous rappelons au lecteur, que l'outil de base pour dimensionner un séchoir à canaux noyés est la maîtrise de la cinétique de la déshydratation du produit à sécher et de la fonction de distribution des temps de séjour des particules à l'intérieur de la colonne. Pour atteindre cette dernière fonction, il est nécessaire de l'approcher par la compréhension phénoménologique de l'écoulement des grains dans le séchoir à canaux noyés.

L'étude que nous allons exposer dans ce chapitre fait suite aux résultats obtenus précédemment; néanmoins avant d'aborder cette partie, nous décrirons l'écoulement du matériau granulaire à travers les dièdres, puis nous étudierons les différentes zones d'écoulements ainsi que les trajectoires pariétales expérimentales empreintées par les grains et le champ de vitesse à travers les dièdres; en effet; nous allons exploiter les coefficients de dispersion obtenus dans une géométrie simple afin de déduire le modèle d'écoulement développé au chapitre III; celui-ci sera bien entendu confronté aux résultats expérimentaux.

V.2. Etude expérimentale de l'écoulement granulaire dans un séchoir à canaux noyés:**V.2.1. Observation visuelle:**

Une fois la colonne à dièdres remplie de produit solide, composé des billes de couleur jaune et des billes de couleur bleu qui vont servir de traceurs, on ouvre le clapet qui obstrue l'extracteur et l'écoulement a lieu ; grâce à l'observation visuelle, nous avons pu enregistrer et distinguer différentes zones d'écoulement des grains, figure V.1:

- **Première zone:** nous remarquons qu'après les premières secondes qui suivent l'ouverture du clapet, il apparaît une zone en amont de la colonne où les particules s'écoulent verticalement, c'est la zone d'écoulement piston, figure V.1.a.
- **Seconde zone:** il apparaît un écoulement aléatoire dans les directions longitudinale et transversale, c'est l'écoulement dispersif, figure V.1.b.
- **Troisième zone:** située en bas de la colonne, les particules se trouvent piégées à l'intérieur de cette dernière, c'est la zone morte, figure V.1.c.

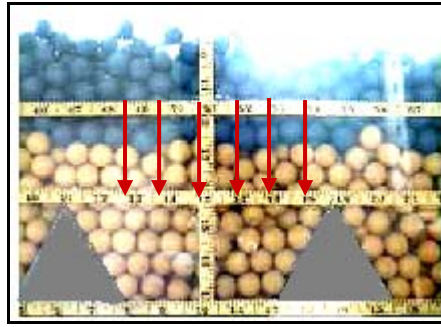


Figure V.1.a. Écoulement piston

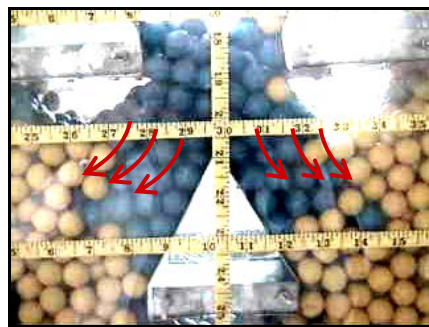


Figure V.1.b. Écoulement dispersif

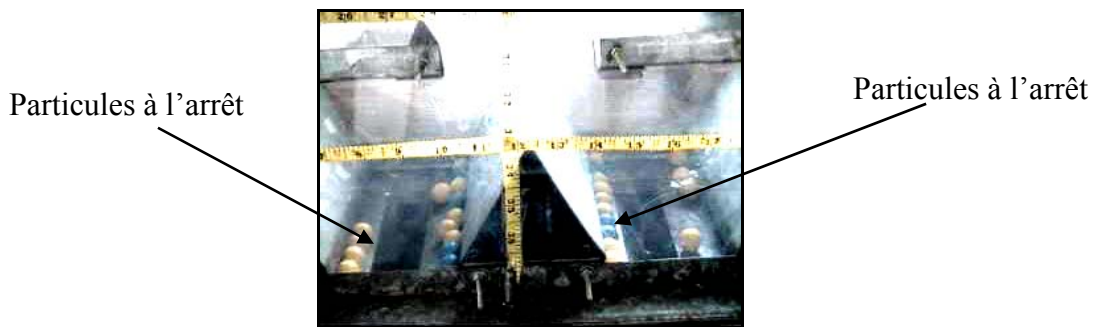


Figure V.1.c. Zone morte

Figure V.1: Différentes zones d'écoulement des grains dans une colonne à dièdres.

V.2.2. Résultats expérimentaux:

Le traitement d'images de l'écoulement des grains le long des parois en plexiglas, nous permet de déterminer la position des grains colorés à différents instants au cours de la vidange de la colonne à dièdres, figure V.2.

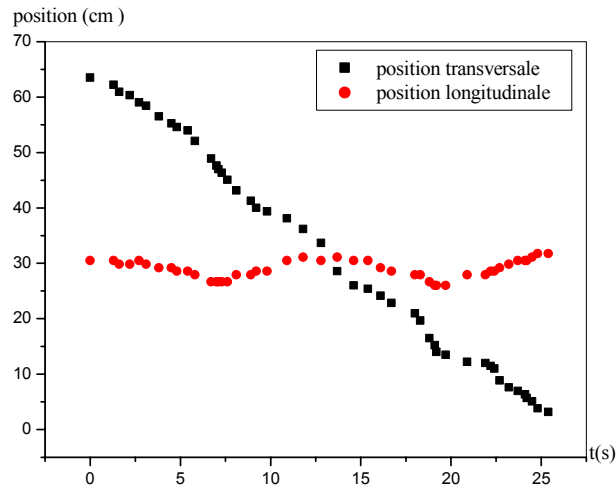


Figure V.2: Position transversale et longitudinale des grains à la paroi en fonction du temps

Pour bien visualiser le chemin empreinté par les grains dans la colonne, nous reportons sur la figure V.3, la trajectoire du traceur dans le référentiel de la colonne.

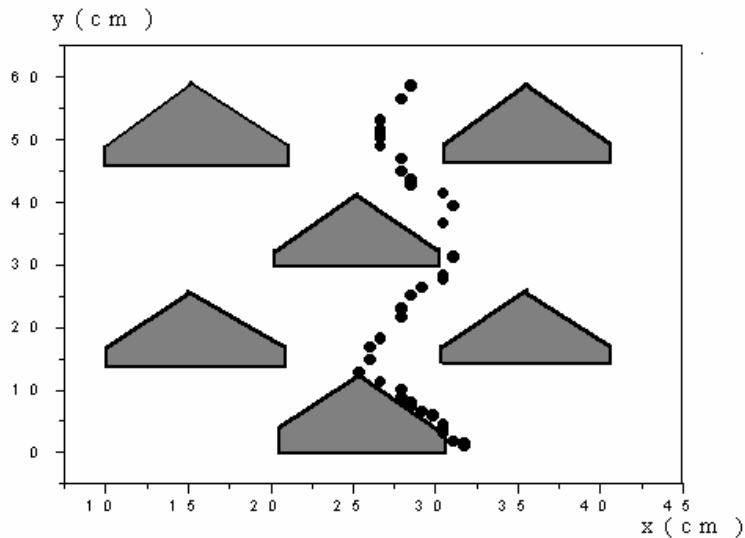


Figure V.3: Trajectoire des grains dans le référentiel de la colonne.

Nous constatons d'après la figure précédente, le caractère aléatoire de l'écoulement des grains traceurs dans la colonne à dièdres. On remarque aussi que les distances parcourues par les grains se trouvant au voisinage des parois des dièdres et des zones de talus, sont beaucoup plus petites que celles parcourues par les grains sur les lignes médianes entre les dièdres. Nous avons reporté sur les figures suivantes (figures V.4 a et b) le champ de vitesse transversal (v) et longitudinal (u) en fonction du temps de la vidange.

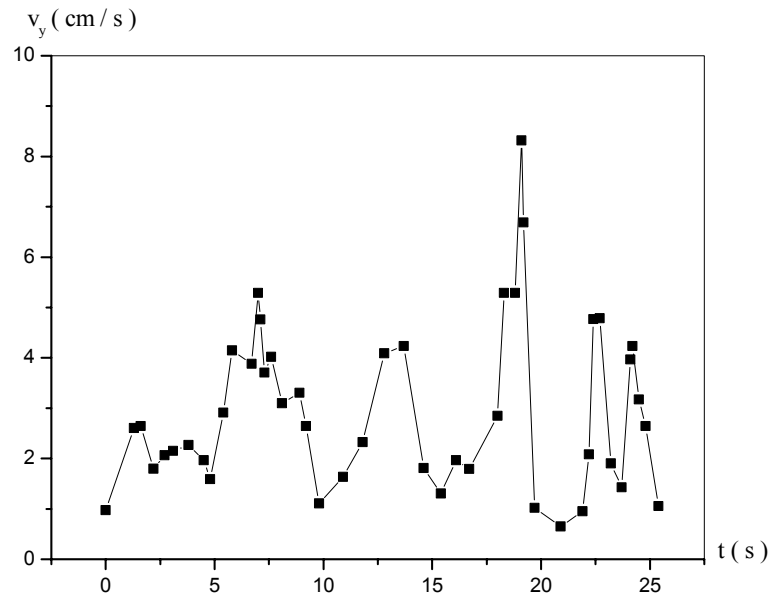


Figure V.4.a: Champ de vitesse transversal (v) à la paroi de la colonne à dièdres.

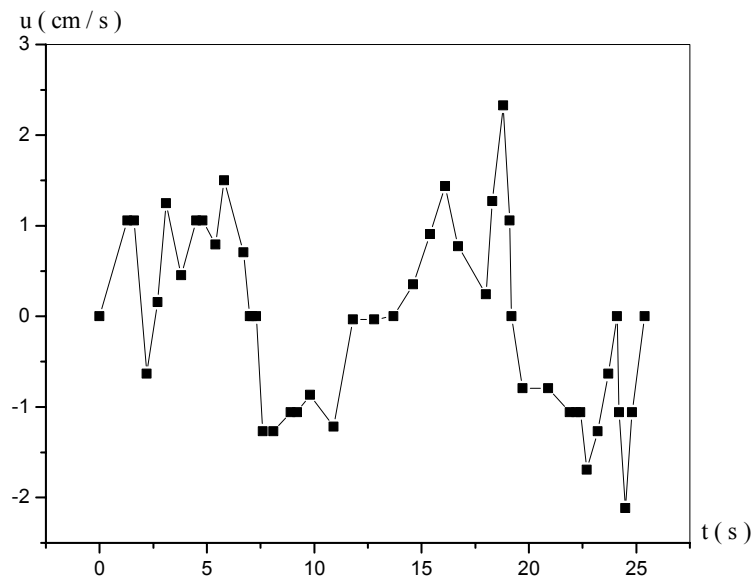


Figure V.4.b: Champ de vitesse longitudinal (u) à la paroi de la colonne à dièdres.

Bien entendu, pour compléter cette analyse, nous avons exprimé les données sur les vitesses transversale et longitudinale en fonction de la hauteur de la colonne.

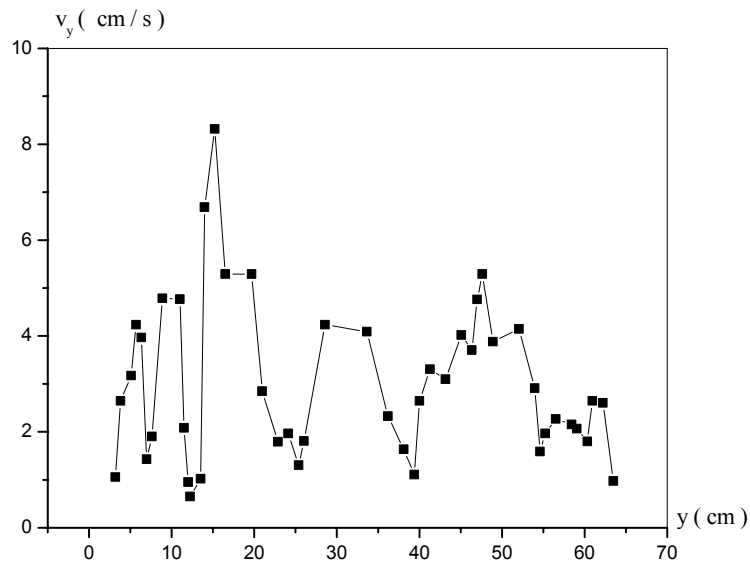


Figure V.5.a: Profil de vitesse transversal (v) à la paroi de la colonne à dièdres en fonction de la position verticale.

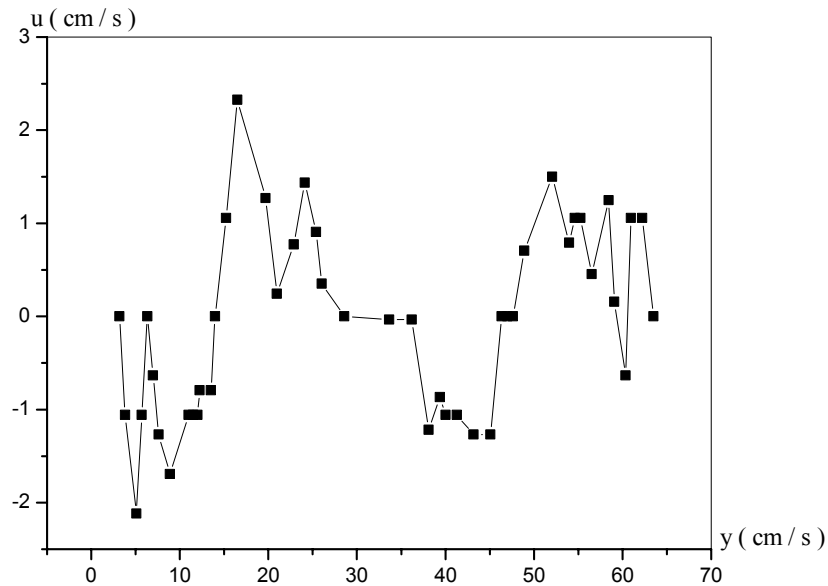


Figure V.5.b: Profil de vitesse longitudinale (u) à la paroi de la colonne à dièdres en fonction de la position verticale.

Enfin, pour illustrer l'importance relative des vitesses dans le référentiel de la colonne, nous avons reporté sur la figure V.6 les vecteurs vitesses.

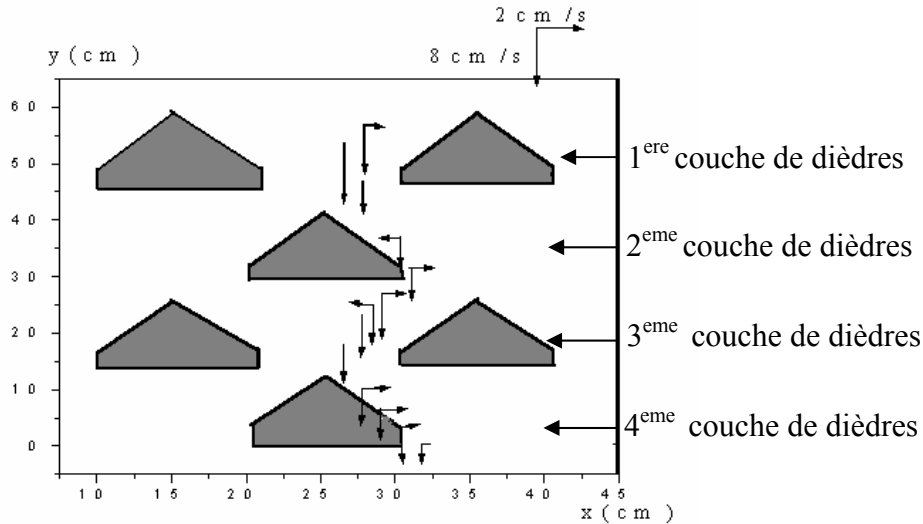


Figure V.6: Champ de vitesse du traceur dans le référentiel de la colonne

V.2.3. Analyse des résultats :

A la lumière des résultats obtenus sur la figure V.6, nous pouvons affirmer que la vitesse transversale est de toute évidence plus importante que la vitesse longitudinale, dans toute la colonne.

Néanmoins, le rapport entre les deux vitesses change d'une zone à une autre de la colonne, suivant l'endroit où se trouvent les grains; par exemple, dans la première couche de dièdres où les grains sont loin des obstacles, on remarque que la vitesse v reste pratiquement constante dans un canal convergent et elle est beaucoup plus élevée que la vitesse longitudinale u .

Entre la première couche des dièdres et la seconde couche, on trouve une petite zone d'écoulement où la vitesse u est nulle, c'est la zone d'écoulement piston.

Dans la deuxième couche de dièdres, nous constatons cette fois que le rapport entre la vitesse v et la vitesse u est faible; cela est dû aux chocs avec les parois des dièdres qui constituent des obstacles à l'écoulement granulaire.

Les mêmes observations peuvent être formulées pour la troisième et la quatrième couche de dièdres.

V.3. Comparaison du modèle avec l'expérience:

V.3.1. Introduction:

Dans ce paragraphe, nous comparons les résultats expérimentaux de l'écoulement granulaire dans une colonne à dièdres aux résultats prédits par le modèle mathématique développé au chapitre III.

V.3.2. Procédure de calcul:

Pour la résolution mathématique des équations du modèle, nous avons adopté la méthode développée dans le paragraphe III.2.3 et qui consiste à effectuer le calcul de proche

en proche en partant d'un module situé en bas du séchoir et de remonter par itération successive aux modules supérieurs.

Le module de bas (près de l'extracteur), a été partagé en quatre mailles, figure V.7; sur chaque maille, on applique les conditions aux limites décrites dans le paragraphe III.2.3 pour accéder au profil de vitesse modélisé; ainsi, la solution obtenue à la frontière supérieure de chaque maille sera imposée comme condition aux limites pour la maille suivante.

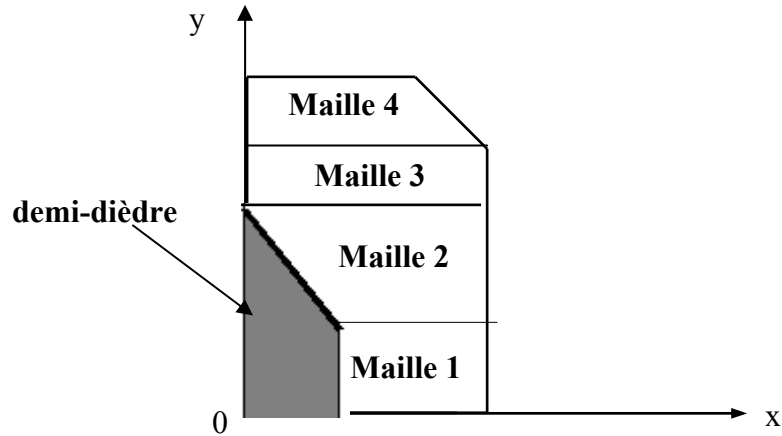


Figure V.7: Représentation du module de bas de la colonne à dièdres.

Il est utile de rappeler qu'en fin du chapitre précédent, nous avons postulé le lien entre les coefficients de dispersion et le régime d'écoulement. A cet effet, nous avons même proposé un graphe représentatif de ces coefficients en fonction du nombre de Reynolds.

Donc, connaissant le profil de vitesse dans la maille 1, nous avons déduit les valeurs moyennes des coefficients D_x et D_y :

$$D_x = 9.11 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$D_y = 1.41 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

En injectant les valeurs des coefficients de dispersion dans l'équation III.30, et en appliquant les conditions aux limites appropriées, nous obtenons un système d'équations qui malheureusement ne présente pas de solution.

Ceci nous a contraint à rejeter ces valeurs des coefficients de dispersion et de conclure par voie de conséquence que les coefficients de dispersions des grains dépendent aussi de la géométrie de l'installation.

Notre hypothèse de départ s'avère donc insuffisante pour expliquer l'aspect phénoménologique de l'écoulement.

Afin de lever cette indétermination, nous avons adopté une méthode de réajustement des coefficients de dispersion en les évaluant cette fois-ci dans le séchoir à canaux noyés.

V.3.3. Ajustement des coefficients de dispersion dans la colonne à dièdres:

Nous avons adopté une méthode qui consiste à déterminer D_y dans la première maille et D_x à partir de la seconde maille.

V.3.3.1. Identifications des coefficients de dispersion dans la première maille :

Pour la résolution du système d'équations composé de l'équation du modèle et des équations traduisant les conditions aux limites de la maille, nous avons été confronté au problème suivant: le nombre d'équations du système est inférieur au nombre d'inconnus (C_5 , C_6 , D_x et D_y); pour alléger ce problème, nous avons posé une hypothèse supplémentaire dans le but de réduire le nombre d'inconnus dans le système d'équations et ceci en supposant que dans la première maille, l'écoulement du matériau granulaire est purement piston, d'où $D_x = 0$.

Dans ce cas, nous injectons une valeur du coefficient de dispersion transversal D_y dans le système d'équations, ce qui nous permet d'obtenir les valeurs des constantes d'intégrations, d'où le profil de vitesse modélisé; celui-ci sera comparé au profil de vitesse expérimental de la maille 1; si l'écart entre les deux profils est important, on recommence l'opération; celle-ci s'achève lorsqu'on obtient une valeur du coefficient D_y qui donne le plus faible écart entre les deux profils; les résultats de cette étude sont présentés sur la figure V.8.

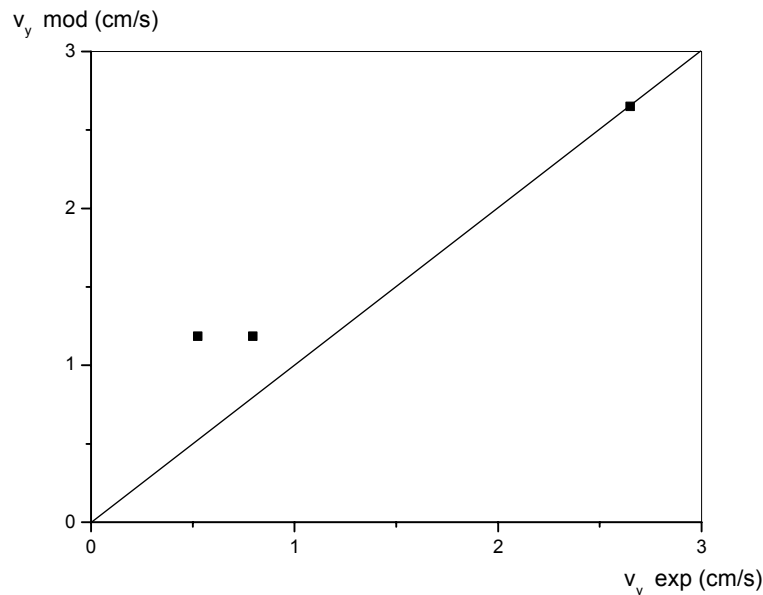


Figure V.8: Comparaison des résultats du modèle avec ceux de l'expérience dans la maille 1

La valeur du coefficient de dispersion transversal trouvée dans la maille 1 est de:

$$D_y = 1.75 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Pour la suite de cette étude, nous supposons que le coefficient de dispersion transversal D_y identifié dans la première maille, demeure constant pour le matériau granulaire quelque soit sa position dans la masse granulaire; en fait, en raison des faibles vitesses des grains lors de l'écoulement, nous avons postulé que le coefficient de dispersion transversal pouvait entretenir une même valeur le long de la colonne.

Considérons à présent la seconde maille; nous pouvons identifier le coefficient de dispersion longitudinal D_x dans la maille en suivant la même démarche décrite dans le paragraphe précédent; les résultats de ce travail sont représentés sur la figure V.9.

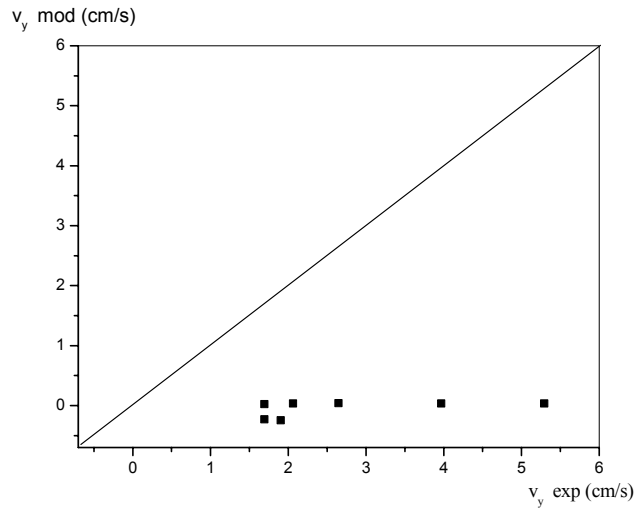


Figure V.9: Comparaison des résultats du modèle avec ceux de l'expérience dans la maille 2

Sur la figure précédente, nous remarquons tout de même un écart entre les valeurs expérimentales et les valeurs modélisées de la vitesse et la solution du modèle donne une valeur du coefficient de dispersion longitudinale de:

$$D_x = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Les deux coefficients de dispersion étant identifiés, et de surcroît en supposant qu'ils demeurent constants dans les mailles 3 et 4, nous comparons le résultat dérivant du modèle avec le profil de vitesse expérimental dans chacune des mailles, figure V.10 et figure V.11

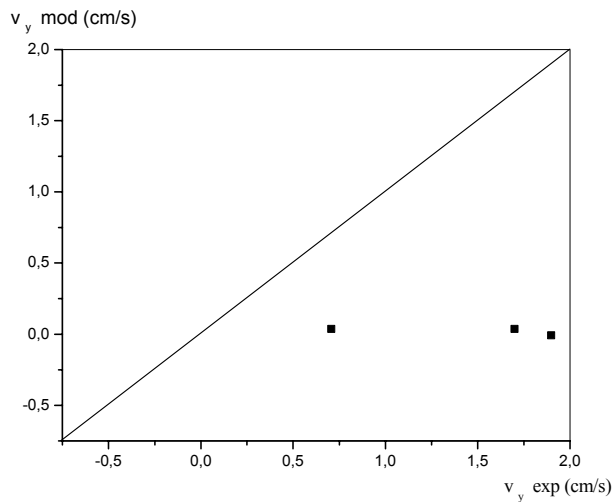


Figure V.10: Comparaison des résultats du modèle avec ceux de l'expérience dans la maille 3

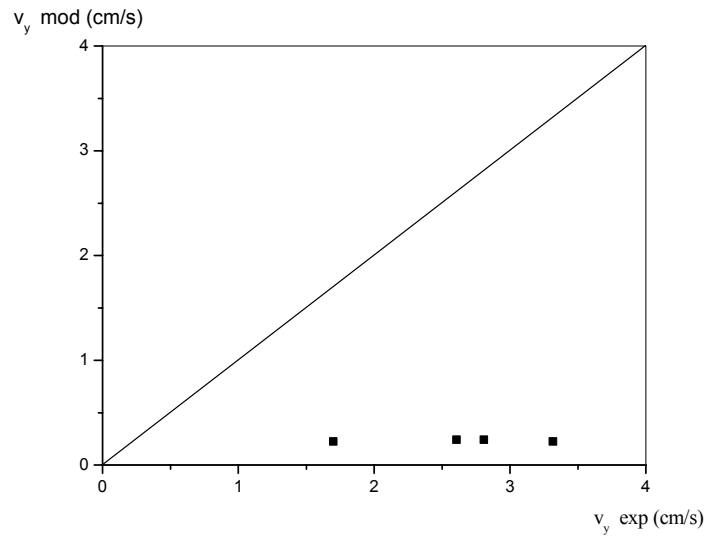


Figure V.11: Comparaison des résultats du modèle avec ceux de l'expérience dans la maille 4

Sur les figures V.10 et V.11, nous remarquons un écart significatif entre le modèle et l'expérience; nous rappelons l'hypothèse de base de ce modèle à savoir l'évolution des coefficients de dispersion selon la géométrie de l'équipement; nous avons pensé en tenir compte à partir de l'instant où nous avons pris la décision de l'identifier à partir des deux mailles du module inférieur du séchoir à canaux noyés et de l'étendre à l'ensemble de l'installation.

Il s'avère malheureusement que cette hypothèse ne satisfait pas notre problème et d'ailleurs une comparaison entre la vitesse expérimentale et la vitesse modélisée dans le premier module figure V.12, où l'on observe un écart considérable, suggère l'abandon de cette démarche.

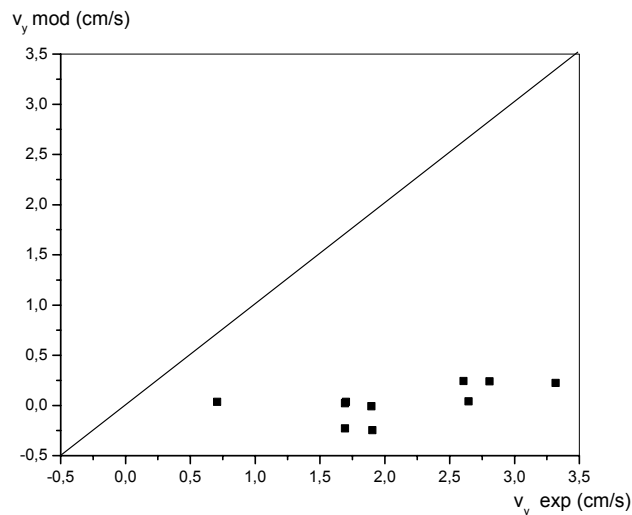


Figure V.12: Comparaison des résultats du modèle avec ceux de l'expérience dans le premier module.

Pour accéder au profil de vitesse modélisé dans toute la colonne à dièdres, nous avons considéré les valeurs obtenues par la résolution du modèle en haut du premier module comme conditions aux frontières du second module avec les valeurs des coefficients de dispersion identifiés dans les mailles 1 et 2 du premier module ($D_x = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $D_y = 1.75 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$); le calcul s'effectuera par itération du module inférieur au module supérieur et la comparaison entre le profil de vitesse modélisé dans toute la colonne et le profil expérimental est représenté sur la figure V.13.

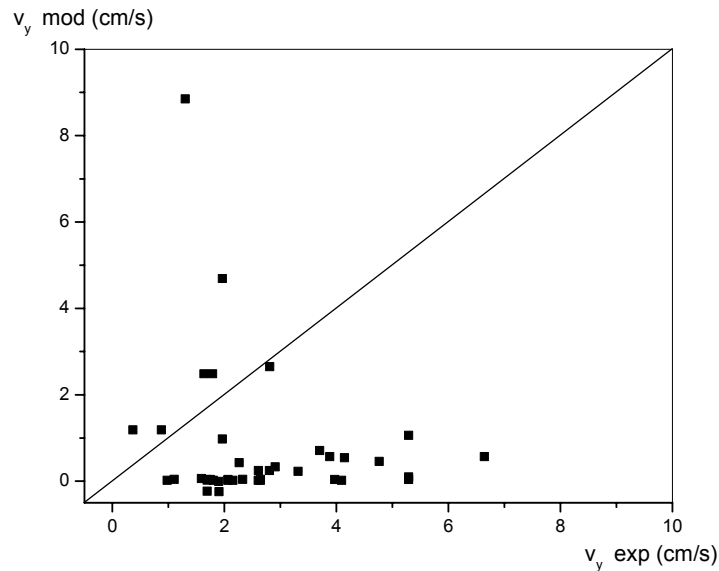


Figure V.13: Comparaison des résultats du modèle avec ceux de l'expérience dans la colonne à dièdres pour $D_y = 1.75 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ et $D_x = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

En conclusion, d'après la figure précédente, nous remarquons qu'avec les coefficients de dispersion identifiés ($D_y = 1.75 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $D_x = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) et les conditions aux limites données par les équations III.35 à III.46, le modèle ainsi composé ne simule pas l'expérience et par voie de conséquence, l'hypothèse d'un coefficient de dispersion longitudinal constant le long de la colonne à dièdres n'est pas totalement exacte.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous allons proposer une seconde approche consistant à réajuster les coefficients de dispersion selon la maille considérée.

V.3.4. Réajustement des coefficients de dispersion :

Nous suivrons le même protocole décrit dans le paragraphe V.3.2 pour identifier les nouveaux coefficients de dispersion, sauf que cette fois ci, nous porterons des modifications dans le modèle mathématique d'écoulement des grains dans un séchoir à canaux noyés et plus précisément sur les conditions aux limites au niveau de chaque maille.

Supposons comme précédemment que l'écoulement dans la première maille est purement piston donc, $D_x = 0$.

Nous appliquons cette hypothèse dans l'équation mère (équation III.1) du modèle d'écoulement des grains dans une colonne à dièdres:

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - V \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad \text{V.1}$$

Pour $D_x = 0$, l'équation V.1 devient :

$$D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - V \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad \text{V.2}$$

La résolution de l'équation V.2 nous permet d'avoir l'expression de la vitesse transversale:

$$v_y = - \frac{V \left(C_1 + C_2 \exp \left(\frac{V d_p y}{D_y} \right) \right) - \frac{D_y - C_2 \exp \left(\frac{V d_p y}{D_y} \right)}{\frac{D_y}{V d_p}}}{N - C_1 - C_2 \exp \left(\frac{V d_p y}{D_y} \right)} \quad \text{V.3}$$

L'équation V.3 dépend de deux constantes d'intégrations et du coefficient de dispersion transversal D_y et pour sa résolution, nous allons appliquer les conditions 'physiques' suivantes:

$$y = 0 \quad v_y = v_0 \quad \text{V.4}$$

$$y = 0.0127 \text{ m} \quad v_y = 0.0265 \text{ m/s} \quad \text{V.5}$$

Avec :

v_0 : la vitesse des particules au niveau de l'extracteur.

Nous injectons la valeur du coefficient de dispersion transversal identifié dans le paragraphe V.3.3.1, dans l'équation V.3 puis nous appliquons les conditions 'physiques' (V.4 et V.5) dans le but d'obtenir le profil de vitesse transversal modélisé dans la première maille; la comparaison entre le résultat de la vitesse transversale obtenue expérimentalement et par le modèle est représentée sur la figure V.14.

La figure V.14 nous montre un ajustement acceptable dans la première maille, et le modèle simule assez convenablement l'expérience pour des valeurs de coefficient de dispersion égales à $D_x = 0 \text{ m}^2/\text{s}$ et $D_y = 1.75 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

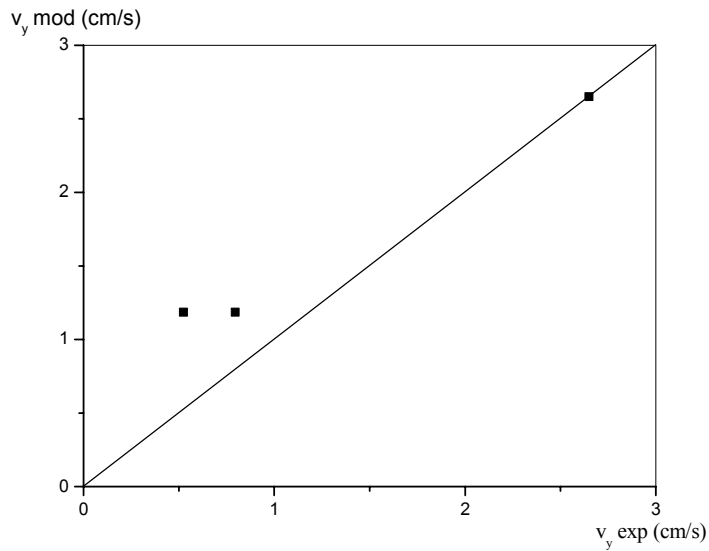


Figure V.14: Comparaison des résultats du modèle avec ceux de l'expérience dans la maille 1

En ce qui concerne la seconde maille, nous initialisons le calcul avec la même hypothèse appliquée dans le paragraphe V.3.2 à savoir que, le coefficient de dispersion transversal est constant le long de la colonne à dièdres.

Pour identifier le coefficient de dispersion longitudinal D_x dans la maille 2, on résout l'équation III.30 avec le coefficient D_y de la maille 1 et en appliquant les conditions 'physiques' appropriées à la deuxième maille (équations V.6, V.7 et V.8); la comparaison entre le profil de vitesse déduit par l'expérimentation et le profil de vitesse modélisé est représenté sur la figure V.15.

Conditions physiques de la maille 2 :

$$y = 0.025\text{m} \quad v_y = 0.052 \text{ m / s} \quad \text{V.6}$$

$$y = 0.07\text{m} \quad v_y = 0.02646 \text{ m / s} \quad \text{V.7}$$

$$y = 0.089\text{m} \quad v_y = 0.01693 \text{ m / s} \quad \text{V.8}$$

A la lumière de cette figure, nous pouvons affirmer que mis à part quelques points qui s'écartent de la première bissectrice mais globalement le modèle simule assez correctement l'expérience pour un coefficient de dispersion longitudinal $D_x = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ et un coefficient de dispersion transversal $D_y = 1.75 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

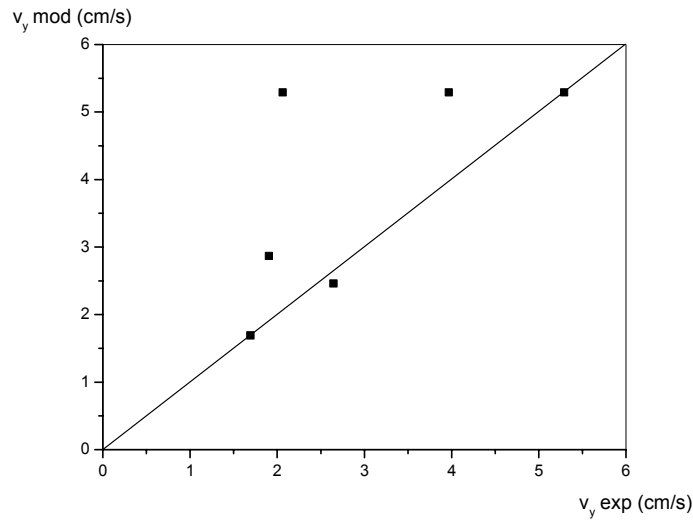


Figure V.15: Comparaison des résultats du modèle avec ceux de l'expérience dans la maille 2

En suivant la même procédure décrite précédemment et en appliquant les conditions 'physiques' spécifiques à la maille 3 :

$$y = 0.120 \text{ m} \quad v_y = 0.0170 \text{ m / s} \quad \mathbf{V.9}$$

$$y = 0.115 \text{ m} \quad v_y = 0.0175 \text{ m / s} \quad \mathbf{V.10}$$

$$y = 0.110 \text{ m} \quad v_y = 0.0190 \text{ m / s} \quad \mathbf{V.11}$$

on obtient sur la figure V.16 le profil de vitesse dérivant du modèle, qui est comparé au profil de vitesse obtenu expérimentalement.

On constate un bon accord entre le modèle et l'expérience pour une valeur du coefficient de dispersion longitudinal de $D_x = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$; en effet, l'ensemble des points semblent s'aligner sur la première bissectrice de la figure comparative.

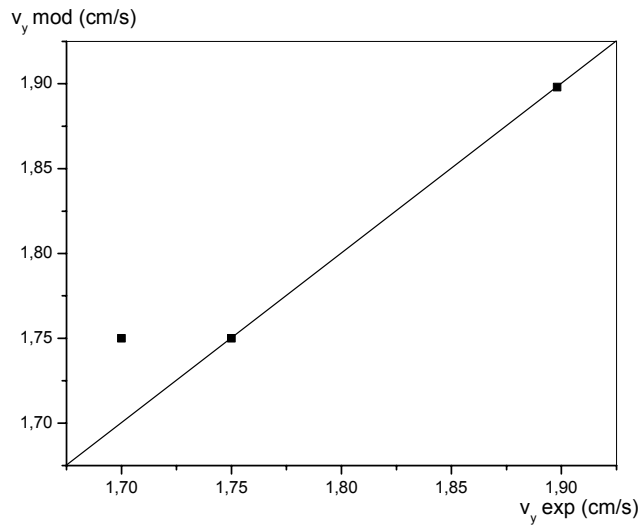


Figure V.16 : Comparaison des résultats du modèle avec ceux de l'expérience dans la maille 3

Identifions à présent le coefficient de dispersion longitudinal de la même façon que pour la maille 3 mais en appliquant les conditions 'physiques' cette fois-ci spécifiques à la maille 4:

$$y = 0.120 \text{ m} \qquad v_y = 0.0170 \text{ m / s} \qquad \text{V.12}$$

$$y = 0.135 \text{ m} \qquad v_y = 0.0261 \text{ m / s} \qquad \text{V.13}$$

$$y = 0.140 \text{ m} \qquad v_y = 0.0281 \text{ m / s} \qquad \text{V.14}$$

Sur la figure V.17, nous comparons le profil de vitesse du modèle à celui obtenu expérimentalement.

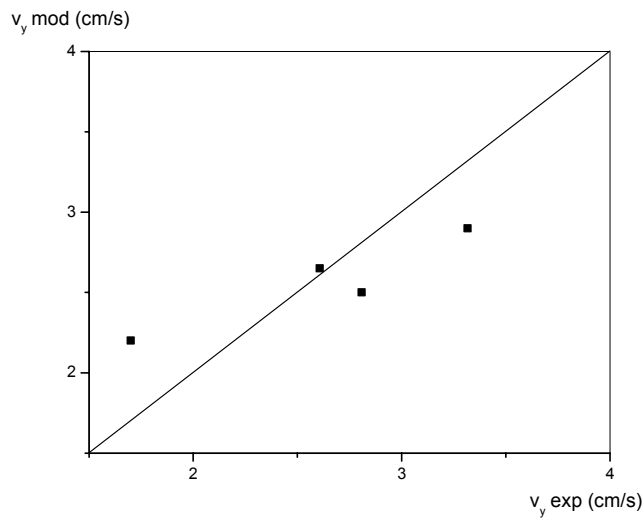


Figure V.17: Comparaison des résultats du modèle avec ceux de l'expérience dans la maille 4

Il s'avère que pour une valeur du coefficient longitudinal égale à $0.125 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, la majorité des points passent par la première bissectrice ce qui démontre la validité du modèle sur cette maille.

V.3.5. Récapitulatif :

Nous rappelons au lecteur que dans cette nouvelle démarche que nous avons adopté, nous avons supposé une évolution du coefficient de dispersion longitudinal en fonction de la position du grain dans le séchoir à canaux noyés.

Les résultats de comparaison entre le profil de vitesse expérimental et modélisé ont prouvé la validité de notre hypothèse.

Il s'avère donc nécessaire d'établir cette loi de variation sur un module de la colonne et de l'étendre à l'ensemble des modules de l'équipement; en effet, on supposera que le flux de dispersion transversal demeure constant le long de la colonne et c'est le flux de dispersion longitudinal qui subit des modifications lors de l'écoulement du matériau granulaire; par voie de conséquence, au niveau de chaque module, le coefficient de dispersion longitudinal décrit une loi qui va être répétitive sur les autres modules.

Sur la figure V.18, nous avons reporté les valeurs du coefficient de dispersion longitudinal et transversal en fonction de la dimension du premier module; on constate que le coefficient D_x ne suit pas une fonction continu et présente des discontinuités selon la maille considérée.

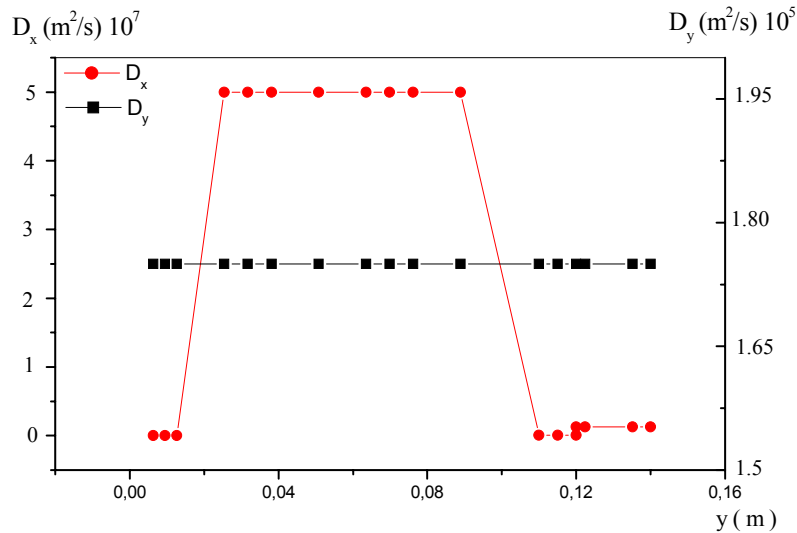


Figure V.18: Evolution des coefficients de dispersion dans le module de bas de la colonne à dièdres.

Vu le caractère discontinue de cette fonction, nous l'avons récapitulé dans le module inférieur sous la forme suivante:

D_x (m ² /s)	y^+
$D_x = 0$	$0.045 < y^+ < 0.091$
$D_x = 5 \cdot 10^{-7}$	$0.181 < y^+ < 0.635$
$D_x = 5 \cdot 10^{-10}$	$0.786 < y^+ < 0.857$
$D_x = 1.25 \cdot 10^{-8}$	$0.874 < y^+ < 1.000$

V.3.6 Validité du modèle :

La représentation graphique de la vitesse des grains obtenue expérimentalement avec les valeurs déduites du modèle, figure V.19 montre une assez bonne disposition des points autour de la première bissectrice; par conséquent, nous pouvons affirmer que les coefficients de dispersion obéissent à des lois intimement liées à la structure de l'écoulement (régime d'écoulement, géométrie, etc...).

De ce fait, il est important d'élucider cette loi de variation, en dépit de l'inexistence de procédure pour la déterminer. Notre approche peut sembler inadéquate puisque ne nous prenons pas en compte l'évolution des coefficients de dispersion dans la résolution du modèle mère; en effet, ce n'est qu'au terme de cette étude que nous montrons que ces coefficients de dispersion sont finalement variables.

Il serait opportun pour la suite de ce travail d'entamer une résolution numérique du modèle mère avec les lois de variation des coefficients de dispersion que nous avons mis au point.

D'autre part, nous avons supposé que le coefficient de dispersion axial demeure constant le long de la colonne par contre, c'est le coefficient de dispersion radial qui s'adapte aux effets de l'écoulement; ceci peut s'avérer correct est acceptable pour une gamme de variation de la vitesse des grains assez restreinte; en effet, il est prouvé dans la littérature [20] que les effets de la dispersion sont accentués avec la vitesse d'écoulement.

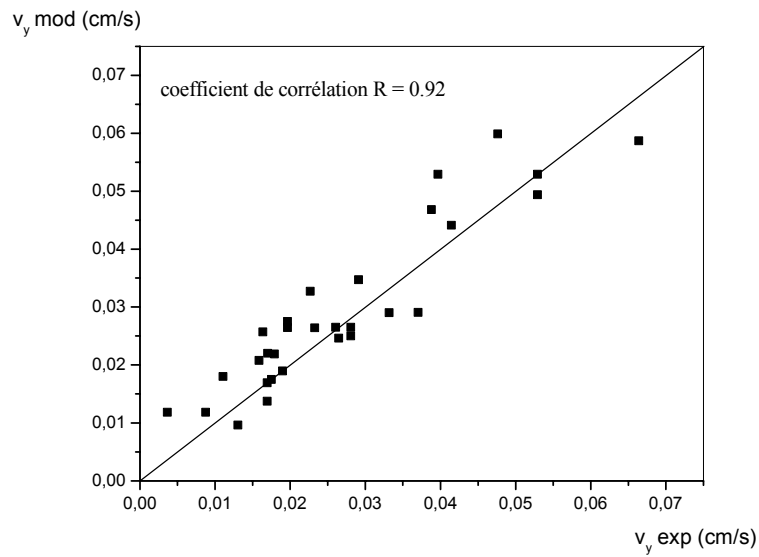


Figure V.19: Comparaison des résultats du modèle avec ceux de l'expérience dans la colonne à dièdres.

V.4. Conclusion :

L'étude que nous avons développée dans ce chapitre, nous a permis de comprendre l'écoulement du matériau granulaire dans une colonne à dièdres, en l'occurrence les différentes zones d'écoulement, ainsi que l'influence des dièdres sur la vitesse d'écoulement.

Les coefficients de dispersion identifiés à partir de l'étude de l'écoulement du matériau granulaire dans le silo ne nous ont pas permis de les étendre au cas de l'écoulement dans une colonne à dièdres.

Nous pouvons alors dire que les coefficients de dispersion dépendent à la fois du produit solide, du régime d'écoulement et de la géométrie de la colonne.

Contrairement aux études antérieures où le coefficient de dispersion longitudinale D_x est souvent négligé dans les modèles d'écoulement, le modèle que nous avons développé prend en compte ce coefficient.

Conclusion générale

Conclusion générale

Notre étude avait pour objectif la compréhension de l'écoulement du matériau granulaire dans un séchoir à canaux noyés, notamment la compréhension du phénomène dispersif dont jouit la particule à l'intérieur du séchoir.

L'étude expérimentale de l'écoulement des grains dans la colonne à dièdres nous a permis d'acquérir une meilleure connaissance de l'écoulement du matériau granulaire dans la colonne, en l'occurrence les différentes zones d'écoulement, les trajectoires pariétales ainsi que la vitesse d'écoulement et l'influence des dièdres sur cette dernière.

Le modèle d'écoulement du matériau granulaire dans la colonne à dièdres que nous avons proposé prend en considération les deux coefficients de dispersion. Contrairement aux modèles répertoriés lors de notre recherche bibliographique, où on constate que le flux dispersif dans le sens longitudinal de l'écoulement est souvent négligé par rapport aux flux dispersif dans le sens transversal.

Les coefficients de dispersion identifiés à partir de l'étude de l'écoulement du matériau granulaire dans le silo ne nous ont pas permis de l'étendre au cas de l'écoulement dans une colonne à dièdres. Nous affirmons alors que les coefficients de dispersion dépendent à la fois du produit solide, du régime d'écoulement et de la géométrie de la colonne.

Les coefficients de dispersion identifiés dans la colonne à dièdres obéissent à des lois intimement liées à la structure de l'écoulement (régime d'écoulement, géométrie, etc..). De ce fait, il est important d'élucider cette loi de variation en dépit de l'inexistence de procédure pour la déterminer.

Notre approche peut sembler inadéquate puisque nous ne nous prenons pas en compte l'évolution des coefficients de dispersion dans la résolution du modèle mère; en effet, ce n'est qu'au terme de cette étude que nous montrons que ces coefficients sont variables.

Malheureusement à cause de l'inexistence des travaux dans le domaine de l'écoulement du matériau granulaire dans une colonne à dièdres, nous n'avons pas pu comparer nos valeurs des coefficients de dispersion avec d'autres travaux antérieurs.

Mentionnons enfin quelques perspectives d'études :

* Au niveau expérimental, il est utile de mettre au point une nouvelle méthode de mesure qui détecte la position du matériau granulaire à l'intérieur de la colonne et ne pas se limiter comme dans notre cas à une étude pariétale.

* Quant à la modélisation il serait opportun pour la suite de ce travail d'entamer une résolution numérique du modèle mère avec les lois de variation des coefficients de dispersion que nous avons obtenues.

Références bibliographiques

- [1] **W.W. Mullins,**
« Stochastic theory for particle flow under gravity »
Carnegie -Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania, pp 665 – 678, 1972.
- [2] **M.Mandry Jean-Paul,**
« Probabilites cours et travaux diriges »,
Office des Publication Universitaires, 1982.
- [3] **R.M.Nedderman et U.Tuzun,**
« A kinematic model for the flow of granular materials»,
Powder Technology. vol.22, pp 234-235, 1978
- [4] **R.M.Nedderman et U.Tuzun,**
« Experimental evidence supporting kinematic modelling of the flow of granular media in absence of air drag »,
Powder Technology. vol. 24 , pp 257-266, 1979.
- [5] **R.M.Nedderman ,S.T.Davies et D.J.Horton,**
« The flow of granular materials round obstacles »,
Powder Technology, vol. 25, pp 215-223, 1980.
- [6] **J. C. Roth et al.,**
« Discharge of fines sands from conical hoppers »,
Chemical Engineering Science, Vol. 50, pp 3143-3153, 1995.
- [7] **R.M.Nedderman,**
« Statics and kinematics of granular materials»,
Cambridge University Press, Cambridge, 1992
- [8] **J.Shepperson, R.W.Greenwood et J.P.K.Seville ,**
« Experimental validation of the kinematic and radial flow models for granular materials »,
Centre for formulation engineering, department of chemical engineering, University of Birmingham, U.K, 2002.
- [9] **M.Chaabouni ,**
« Contribution a l'étude de l'écoulement du grain dans un séchoir à canaux noyés »,
Thèse de doctorat à l'école centrale des arts e manufactures, France, 1992.
- [10] **W.G.Pariseau,**
« Discontinuous velocity fields in gravity flows of granular materials through slots»,
Powder Technology, vol. 3, pp. 218-226, 1970.
- [11] **C.Remy,**
« Contribution à l'étude des contraintes sur une paroi fixe et rigide »,
Mémoire de thèse, Université de Grenoble, 1965.

- [12] **J. Costet, G. Sanglerat,**
« Cours pratique de mécanique des sols »,
2. Calcul des ouvrages, troisième édition, Dunod, Bordas, 1983.
- [13] **M. Ferry,**
« Mise en forme par déformation plastique »,
Cours de l'Ecole Central de Paris, option Science des Matériaux, 1976.
- [14] **H.G. Polderman, J. Boom, DE. Hilster, A. M. Scott,**
« Solids flow velocity profiles in mass flow hoppers »,
Chemical Engineering Science, vol. 42, pp. 737-744, 1987.
- [15] **D. Geldart,**
« Type of gaz fluidisation »,
Powder Technology, vol. 7, pp. 285 -292, 1973.
- [16] **J.A.S. Cleaver, R.M. Nedderman,**
« The measurement of velocity distributions in conical hoppers »,
Chemical Engineering Science, vol. 48, pp. 3703, 1993.
- [17] **P.L. Bransby et P.M. Blair-Fish,**
« Initial deformation during mass flow from a bunker: observation and idealisation »,
Powder Technology, vol. 11, pp. 273-288, 1975.
- [18] **R. Byron Bird, E.N. Lightfoot, W. E. Stewart,**
« Transport Phenomena »,
Wiley International Edition, 1960
- [19] **N. Piskounov,**
« Calcul différentiel et intégral »,
Tome I, édition MIR. Moscou, 8^{ème} édition, traduction française édition MIR, 1980.
- [20] **J. Villiermaux,**
« Génie de la réaction chimique : conception et fonctionnement des réacteurs »,
Technique et documentation, 2^{ème} tirage revue et augmenté d'un index, Lavoisier-Paris, 1985.
- [21] **H.S. Carslaw, J.C. Jeager,**
« Conduction of heat in solids »,
Oxford science publication, Oxford, 1959.

ANNEXE I

Détermination du diamètre du grain

Les billes de polystyrène sont parfaitement sphériques et leur diamètre a été déterminé grâce à un pied à coulisse sur un échantillon choisi arbitrairement. Une moyenne arithmétique nous a permis de caractériser la dimension du matériau granulaire et les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

N°de bille	d _p (mm)
1	10.75
2	10.80
3	10.85
4	10.80
5	10.80
6	10.75
7	10.85
8	10.85
9	10.85
10	10.80

$$d_p = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{10} = 10.81 \text{ mm}$$

avec :

n : nombre total de particules considérées

L'erreur commise dans la détermination du diamètre est une erreur de lecture, elle est de l'ordre de 0.05 mm.

$$d_p = 10.81 \pm 0.05 \text{ mm}$$

ANNEXE II

Masse volumique du grain

La masse volumique du produit solide est donnée par :

$$\rho_p = \frac{m_p}{v_p}$$

Avec la masse du produit donnée par pesée, égale à :

$$m_p = 2.7072 \pm 0.0001 \text{ g}$$

et le volume, par l'équation suivante :

$$v_p = \frac{1}{6} \pi (10.8 * 0.001)^3 = 6.5910^{-7} \text{ m}^3$$

d'où :

$$\rho_p = \frac{2.7072 \cdot 10^{-3}}{6.59 \cdot 10^{-7}} = 4108.04 \text{ kg / m}^3$$

L'erreur commise dans la détermination de la masse volumique est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\Delta \rho_p}{\rho_p} = \frac{\Delta m_p}{m_p} + \frac{\Delta d_p}{d_p}$$

$$\frac{\Delta \rho_p}{\rho_p} = \frac{0.0001}{2.7072} + \frac{0.05}{10.8} = 0.0047$$

donc, la valeur de la masse volumique du grain est :

$$\rho_p = 4108.04 \pm 0.01 \text{ kg / m}^3$$

ANNEXE III

L'angle de frottement interne

L'angle de frottement interne est déterminé d'après la figure II.8 comme suit :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l_1}{l_2}$$

nous avons mesuré au cours de nos essais les longueurs de l_1 et l_2 avec un pied à coulisse pour en déduire l'angle de frottement interne; les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Essai N°	l_1 (cm)	l_2 (cm)	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l_1}{l_2}$	φ (°)
1	6.5	13	0.5	26.56
2	5.5	11.5	0.49	26.10
3	6	13	0.46	24.70

Donc la valeur de l'angle de frottement interne est $\varphi = 25.79^\circ$

L'erreur commise sur le calcul de l'angle de frottement interne :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \varphi}{\varphi} &= \frac{\Delta l_1}{l_1} + \frac{\Delta l_2}{l_2} \\ &= \frac{0.5}{6} + \frac{0.5}{12.5} \\ &= 0.083 + 0.04 = 0.123 \end{aligned}$$

d'où :

$$\varphi = 25.79 \pm 0.12$$

ANNEXE IV

Détermination de la porosité

On utilise la méthode de picnométrie afin de déterminer la porosité du lit fixe ε ; on met une certaine masse m_s des grains de polystyrène dans une éprouvette graduée de volume v_s , puis on rajoute une huile de masse volumique connue $\rho_h = 965 \text{Kg} / \text{m}^3$.

Nous avons ainsi le volume total :

$$V_t = V_s + V_{\text{exs}} + V_v$$

où

V_s : est le volume du solide.

V_{exs} : est le volume surnageant le solide.

V_v : est le volume du vide entre les grains.

or, nous savons que :

$$m_T = m_s + m_{\text{exs}} + m_v$$

m_s : est la masse du solide.

m_{exs} : est la masse du liquide surnageant le solide (masse de l'huile).

m_v : est la masse du liquide vide entre les grains

d'autre part, nous avons :

$$m_{\text{exs}} = \rho_h \cdot V_{\text{exs}}$$

$$m_v = m_t - m_s - m_{\text{exs}}$$

$$V_v = \frac{m_v}{\rho_h}$$

$$V_s = V_t - V_{\text{exs}} - V_v$$

d'où :

$$\varepsilon = \frac{V_v}{V_t - V_{\text{exs}}}$$

Les résultats obtenus lors de nos expériences sont résumés dans le tableau suivant :

Essai N°	m_s (g)	m_t (g)	v_t (ml)	v_{exs} (ml)	ε
1	17.02	34.52	35.0	10	0.321
2	19.02	38.45	37.5	20	0.325
3	23.65	45.25	54.0	30	0.317

L'erreur commise sur le calcul de ε :

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\Delta v_v}{v_v} + \frac{\Delta v_t}{v_t} + \frac{\Delta v_{\text{exs}}}{v_{\text{exs}}}$$

Et comme, nous avons estimé $\Delta v_t = \Delta v_{\text{exs}}$

Donc nous obtenons :

$$\varepsilon = 0.32 \pm 0.02$$

ANNEXE V

Rappels de l'équation et des fonctions de Bessel

Equation générale de Bessel :

L'équation générale de Bessel s'écrit sous la forme :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-2\alpha)x \frac{dy}{dx} + [\beta^2 v^2 x^{2v} + (\alpha^2 - p^2 v^2)] y = 0 \quad \text{A.V.1}$$

où α , β , v et p sont des constantes réelles.

La solution de cette équation A.V.1 s'écrit :

$$y = A x^\alpha J_p(\beta x^v) + B x^\alpha J_{-p}(\beta x^v) \quad \text{pour } p \in \mathbb{Z} \quad \text{A.V.2}$$

où A et B sont des constantes d'intégration, J_p et K_p les fonctions de Bessel du premier et du second type d'ordre p , définis par :

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(p+k+1)} \quad \text{A.V.3}$$

où la fonction Γ Gamma vaut :

$$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-x} dx \quad \text{pour } y \geq 0 \quad \text{A.V.4}$$

Pour p entier : $\Gamma(p+k+1) = (p+k)!$

$$K_p(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) J_p(x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(p-k-1)! \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}}{k!} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} [\Phi(k) + \Phi(k+p)] \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}}{k!(p+k)!} \right\} \quad \text{A.V.5}$$

où γ est la constante d'Euler ($\gamma=0.5772157\dots$) et:

$$\Phi(k) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \quad \text{pour } k \geq 1 \text{ et } \Phi(0) = 0 \quad \text{A.V.6}$$

Quelques propriétés des fonctions de Bessel :

Soit la fonction de Bessel du premier type, d'ordre n , J_n :

$$J_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! (n+k)!} \quad \text{A.V.7}$$

Nous retenons parmi les nombreuses propriétés des fonctions de Bessel CARSLAW [21] les suivantes :

$$x J_n'(x) + n J_n(x) = x J_{n-1}(x) \quad \text{A.V.8}$$

$$x J_n'(x) - n J_n(x) = -x J_{n+1}(x) \quad \text{A.V.9}$$

Pour $n = 0$, A.V.8 donne :

$$x J_0'(x) = -x J_1(x) \quad \Rightarrow J_0'(x) = -J_1(x) \quad \text{A.V.10}$$

Pour $n = 1$, A.V.9 donne :

$$x J_1'(x) + J_1(x) = x J_0(x) \quad \Rightarrow \frac{d}{dx} (x J_1(x)) = x J_0(x) \quad \text{A.V.11}$$

Calcul de l'intégral I_{nm} :

$$I_{nm} = \int_0^a r J_0(\lambda_n r) J_0(\lambda_m r) dr \quad \text{quand } J_0'(\lambda_p a) = 0 \text{ pour } p \in \mathbb{N} \quad \text{A.V.12}$$

Nous avons :

$$u = J_0(\lambda_n r) \text{ est racine de l'équation de Bessel } \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) + \lambda_n^2 u = 0 \quad \text{A.V.13}$$

$$v = J_0(\lambda_m r) \text{ est racine de l'équation de Bessel } \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) + \lambda_m^2 v = 0 \quad \text{A.V.14}$$

en injectant les équations A.V.13 et A.V.14 dans l'équation A.V.12, nous avons alors :

$$\begin{aligned}
(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^a r u v dr &= \int_0^a \left[v \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) - u \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \right] dr \\
&= \int_0^a \left\{ \left[\frac{d}{dr} \left(v r \frac{du}{dr} \right) - r \frac{du}{dr} \frac{dv}{dr} \right] - \left[\frac{d}{dr} \left(u r \frac{dv}{dr} \right) - r \frac{dv}{dr} \frac{du}{dr} \right] \right\} dr \\
&= \int_0^a \frac{d}{dr} \left[r \left(v \frac{du}{dr} - u \frac{dv}{dr} \right) \right] dr = a \left[v \frac{du}{dr} - u \frac{dv}{dr} \right]_{r=a} = 0
\end{aligned}
\tag{A.V.15}$$

Car ;

$$J_0'(\lambda_n a) = J_0'(\lambda_m a) = 0 \tag{A.V.16}$$

Donc pour $m \neq n$:

$$(\lambda_m \neq \lambda_n) \quad I_{nm} = 0 \tag{A.V.17}$$

Pour $m = n$:

$$I_{nn} = \left[\frac{r^2}{2} [J_0(\lambda_n r)]^2 \right]_0^a - \frac{1}{2} \int_0^a r^2 \frac{d}{dr} \{ [J_0(\lambda_n r)]^2 \} dr$$

$$\begin{aligned}
\text{or, } \int_0^a r^2 J_0(\lambda_n r) J_0'(\lambda_n r) dr &= - \int_0^a [r J_1(\lambda_n r)] \frac{d}{dr} [r J_1(\lambda_n r)] dr \\
&= - \frac{1}{2} [r J_1(\lambda_n r)]^2 \Big|_0^a = 0
\end{aligned}
\tag{A.V.18}$$

$$\text{d'ou } I_{nn} = \frac{a^2}{2} [J_0(\lambda_n r)]^2$$

Les 11 premières racines de la fonction de Bessel J_1 :

Les onze premières racines de la fonction J_1 calculées à 10^{-4} près sont :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$J_1(i)$	0	3,831	7,015	10,173	13,323	16,470	19,615	22,760	25,903	29,046	32,188

Au-delà de ces valeurs, les racines deviennent trop rapprochées.

ANNEXE VI

Valeurs obtenues dans le silo cylindrique

A.VI.1. Etude expérimentale de l'écoulement granulaire dans un silo cylindrique :

Dans les tableaux VI.1 et VI.2, nous regroupons les valeurs de la position et de la vitesse axiale et radiale respectivement pour les trois diamètres de fente d'écoulement.

Tableau A.VI.1 : Position et vitesse axiale des grains solides à la paroi du silo.

$d_f = 11.5 \text{ cm}$			$d_f = 9.5 \text{ cm}$			$d_f = 6 \text{ cm}$		
t(s)	z(m)	v_z (m/s)	t(s)	z(m)	v_z (m/s)	t(s)	z(m)	v_z (m/s)
0,6	1,090	0,018	0	1,075	0,019	0	0,905	0,006
1,7	1,070	0,023	0,8	1,060	0,022	3,8	0,875	0,007
2,4	1,050	0,039	1,2	1,050	0,029	5,8	0,860	0,008
2,9	1,025	0,060	1,5	1,040	0,037	6,8	0,850	0,008
3,4	0,990	0,066	2,0	1,020	0,035	9,2	0,830	0,008
3,8	0,965	0,056	2,5	1,005	0,036	11,2	0,815	0,009
4,1	0,950	0,069	3,2	0,975	0,036	19,0	0,760	0,009
4,5	0,915	0,074	3,7	0,960	0,040	21,9	0,745	0,004
5,0	0,885	0,063	4,1	0,940	0,044	24,4	0,735	0,002
5,3	0,865	0,058	4,5	0,925	0,037	29,2	0,730	0,003
5,7	0,845	0,056	4,9	0,910	0,041	37,7	0,690	0,005
6,1	0,820	0,056	5,7	0,875	0,044	40,4	0,675	0,006
7,0	0,775	0,056	6,5	0,840	0,042	42,9	0,660	0,006
7,8	0,725	0,062	7,0	0,820	0,037	46,4	0,640	0,004
8,6	0,675	0,056	7,6	0,800	0,032	54,5	0,620	0,003
9,1	0,650	0,047	8,6	0,770	0,034	58,0	0,610	0,009
10,1	0,605	0,040	9,0	0,755	0,034	60,5	0,605	0,008
11,1	0,570	0,028	9,5	0,740	0,037	71,5	0,580	0,007
12,5	0,540	0,036	10,4	0,705	0,037	73,9	0,555	0,007
12,7	0,530	0,050	11,4	0,675	0,025	78,4	0,535	0,006
12,9	0,520	0,058	12,0	0,650	0,034	84,9	0,490	0,004
13,2	0,500	0,052	12,1	0,640	0,024	88,3	0,465	0,009
14,0	0,470	0,069	12,7	0,620	0,022	91,2	0,430	0,008
14,2	0,450	0,150	13,2	0,605	0,019	93,6	0,420	0,006
14,3	0,430	0,116	14,4	0,595	0,015	98,0	0,390	0,006
15,1	0,405	0,031	15,1	0,580	0,013	101,8	0,370	0,005
15,9	0,380	0,030	16,2	0,575	0,027	106,2	0,350	0,004
16,6	0,360	0,044	16,7	0,550	0,045	124,0	0,270	0,015

Tableau A.VI.2 : Position et vitesse radiale des grains solides à la paroi du silo.

$d_f = 11.5 \text{ cm}$			$d_f = 9.5 \text{ cm}$			$d_f = 6 \text{ cm}$		
t(s)	r(m)	v_r (m/s)	t(s)	r(m)	v_r (m/s)	t(s)	r(m)	v_r (m/s)
0,6	0,035	0	0	0,005	0	0	0,005	0
1,7	0,035	0	0,8	0,005	0	3,8	0,005	0
2,4	0,035	0	1,2	0,005	0	5,8	0,005	0
2,9	0,035	0	1,5	0,005	0	6,8	0,005	0
3,4	0,035	0	2,0	0,005	0	9,2	0,005	0
3,8	0,035	0	2,5	0,005	0	11,2	0,005	0
4,1	0,035	-1,250	3,2	0,005	0	19,0	0,005	-0,043
4,5	0,025	-1,250	3,7	0,005	0,003	21,9	0,002	-0,043
5,0	0,025	0,833	4,1	0,007	0,003	24,4	0,002	-0,026
5,3	0,030	0,833	4,5	0,007	0,003	29,2	0	-0,026
5,7	0,030	-0,625	4,9	0,010	0,003	37,7	0	0
6,1	0,025	-0,625	5,7	0,010	0,003	40,4	0	0
7,0	0,025	0	6,5	0,015	0,003	42,9	0	0
7,8	0,025	-0,312	7,0	0,015	0	46,4	0	0,01543
8,6	0,020	-0,312	7,6	0,015	0	54,5	0,002	0,01543
9,1	0,020	0,250	8,6	0,015	-0,006	58,0	0,002	0
10,1	0,025	0,250	9,0	0,010	-0,006	60,5	0,002	0
11,1	0,025	0	9,5	0,010	0,003	71,5	0,002	-0,052
-	-	-	10,4	0,015	0,003	73,9	0	-0,052
-	-	-	11,4	0,015	-0,004	78,4	0	0
-	-	-	12,0	0,010	-0,004	84,9	0	0
-	-	-	12,1	0,010	0,004	-	-	-
-	-	-	12,7	0,015	0,004	-	-	-
-	-	-	13,2	0,015	-0,002	-	-	-
-	-	-	14,4	0,010	-0,002	-	-	-
-	-	-	15,1	0,010	0	-	-	-

A.VI.1.1. Calcul d'erreur :

a) Erreur commise sur la lecture de la position des billes :

Comme nous l'avons déjà cité au chapitre II, le traitement d'images est réalisé grâce à un P.C via une interface; l'image que nous traitons est entachée d'écart du fait de la courbure de la colonne; nous avons estimé cette écart de lecture à:

$$\Delta z = \Delta r = 0.005 \text{ m.}$$

b) Erreur commise sur le calcul de la vitesse des billes :

La vitesse du produit solide n'est autre que la dérivé de sa trajectoire, l'écart commise sur le calcul de cette vitesse est donnée alors par :

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta z}{z} + \frac{\Delta t}{t} = \frac{0.005}{z} + \frac{0.01}{t}$$

Avec :

$\Delta t = 0.01$ s (précision du chronomètre intégré dans le logiciel de calcul).
 $\Delta z = 0.005$ m.

A.VI.2. Calcul des paramètres du modèle mathématique :

A.VI.2.1. Calcul de la vitesse moyenne V :

La vitesse moyenne d'évolution des particules solides dans la colonne est donnée par :

$$V = \frac{Q_m}{\rho_p S}$$

Avec :

Q_m : est le débit massique (kg/s) ;
 S : est la section de la colonne (m²).

Nous regroupons dans le tableau suivant les résultats du calcul de la vitesse moyenne pour les trois diamètres de fente.

Tableau A.VI.3 : Vitesse moyenne d'écoulement du solide.

d_f (m)	D_{int} (m)	$t_{vidange}$ (s)	m_s (Kg)	ρ_p (Kg / m ³)	V (m/s)
0,060	0,3	166,9	41,6	4108,04	0,00086
0,095	0,3	28,6	41,6	4108,04	0,00501
0,115	0,3	23,0	41,6	4108,04	0,00623

L'erreur commise sur le calcul de la vitesse moyenne :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{\Delta m_s}{m_s} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta \rho_s}{\rho_s} + 2 \frac{\Delta D}{D} \\ &= \frac{0.0001}{m_s} + \frac{0.01}{t} + \frac{0.01}{\rho_s} + \frac{0.002}{D} \end{aligned}$$

A.VI.2.2. Calcul du nombre de Reynolds particulaire :

Le nombre de Reynolds particulaire est donné par : $R_p = \frac{\rho_{air} V d_p}{\mu_{air}}$

dans le tableau VI.4, nous regroupons les valeurs du nombre de Reynolds pour les différents diamètres de fente d'écoulement :

Tableau A.VI.4 : Nombre de Reynolds pour les trois diamètres de fente d'écoulement

d_p (m)	V (m/s)	ρ_{air} (Kg / m ³)	μ_{air}	Re_p
0,06	0,0008588	1,293	1,05E-05	6,35
0,095	0,00501165	1,293	1,05E-05	58.6
0,115	0,00623187	1,293	1,05E-05	88.3

A.VI.2.2. Comparaison entre les valeurs de la vitesse expérimentale et la vitesse modélisée :

A.VI.2.2.1. Cas de l'écoulement piston :

Nous regroupons dans le tableau A.VI.4 , les résultats de la comparaison entre la vitesse expérimentale et la vitesse modélisée ainsi que l'écart entre ces deux vitesses pour les trois diamètres de la fente d'écoulement.

A.VI.2.2.2. Cas de l'écoulement dispersif :

Nous regroupons dans le tableau A.VI.5, les résultats de la comparaison entre la vitesse expérimentale et la vitesse modélisée ainsi que l'écart entre ces deux vitesses pour les trois diamètres de la fente d'écoulement.

Tableau A.VI.4 : Comparaison entre les valeurs de la vitesse expérimentale et la vitesse modélisée dans le cas d'un écoulement piston.

$d_f = 11.5\text{cm}$				$d_f = 9.5\text{cm}$				$d_f = 6\text{ cm}$			
z(m)	V_{exp} (m/s)	v_{mod} (m/s)	l'écart (%)	z(m)	V_{exp} (m/s)	v_{mod} (m/s)	l'écart (%)	z(m)	V_{exp} (m/s)	v_{mod} (m/s)	l'écart (%)
1,090	0,07475	0,07375	0,339	1,075	0,04375	0,04375	1,60E-07	0,905	0,00611	0,0061	0,16367
1,070	0,06875	0,06875	4,032	1,06	0,04272	0,04063	4,89761	0,875	0,00728	0,00693	4,80769
1,050	0,05625	0,05625	21,105	1,05	0,04138	0,0375	9,38673	0,86	0,00770	0,00730	5,19481
1,025	0,06625	0,06625	4,234	1,04	0,03964	0,04000	0,90311	0,85	0,00789	0,00753	4,56274
0,990	0,06000	0,0600	5,016	1,02	0,03737	0,03643	2,51417	0,83	0,00792	0,00796	0,50505
0,965	0,03929	0,03929	22,277	1,005	0,0344	0,03643	5,89363	0,815	0,00875	0,00825	5,71429
0,950	0,02338	0,02338	52,105	0,975	0,03052	0,03500	14,67163	0,76	0,00917	0,00917	0
0,915	0,01818	0,01818	0,990	0,96	0,02544	0,02917	14,68134	0,905	0,00611	0,00610	0,16367

Tableau A.VI.5 : Comparaison entre les valeurs de la vitesse expérimentale et la vitesse modélisée dans le cas d'un écoulement dispersif.

$d_f = 11.5\text{cm}$				$d_f = 9.5\text{cm}$				$d_f = 6\text{ cm}$			
z(m)	V_{exp} (m/s)	v_{mod} (m/s)	l'écart (%)	z(m)	V_{exp} (m/s)	v_{mod} (m/s)	l'écart (%)	z(m)	V_{exp} (m/s)	v_{mod} (m/s)	l'écart (%)
0,725	0,0625	0,0563	9,92	0,74	0,03708	0,0346	6,68824	0,61	0,00943	0,0105	11,3467656
0,675	0,05625	0,04907	12,76444	0,705	0,03667	0,0335	8,64467	0,605	0,00844	0,00952	12,7962085
0,65	0,0475	0,0488	2,73684	0,675	0,02558	0,0279	9,06959	0,58	0,00734	0,00685	6,67574932
0,605	0,04	0,04613	15,325	0,65	0,03444	0,0244	29,15215	0,555	0,00683	0,00711	4,09956076
0,57	0,02821	0,03144	11,44984	0,64	0,02444	0,0225	7,93781	0,535	0,00568	0,00514	9,50704225
-	-	-	-	0,62	0,02167	0,0236	8,90632	0,49	0,00414	0,0047	13,52657
-	-	-	-	0,605	0,01917	0,0208	8,50287	-	-	-	-
-	-	-	-	0,595	0,01488	0,0184	23,65591	-	-	-	-

Résumé

L'outil de base pour dimensionner un séchoir à canaux noyés est la maîtrise de la cinétique de la déshydratation du produit à sécher et de la fonction de distribution des temps de séjour des particules à l'intérieur de la colonne. Pour atteindre cette dernière fonction, il est nécessaire de l'approcher par la compréhension phénoménologique de l'écoulement des grains dans le séchoir à canaux noyés. Dans le cadre de cette étude, nous avons souhaité contribuer modestement à la modélisation de l'écoulement des grains solides dans un séchoir à canaux noyée, sans transfert de masse ni de chaleur. Contrairement aux études antérieures où le coefficient de dispersion longitudinale D_x est souvent négligé dans les modèles d'écoulement, le modèle que nous avons développé prend en compte ce coefficient.

A partir de l'étude que nous avons menée, nous affirmons que les coefficients de dispersion dépendent à la fois du produit solide, du régime d'écoulement et de la géométrie de la colonne; les coefficients de dispersion identifiés à partir de l'étude de l'écoulement du matériau granulaire dans le silo ne nous ont pas permis de les étendre au cas de l'écoulement dans un séchoir à canaux noyés.

Mots clés : matériau granulaire, séchoir à canaux noyés, dispersion longitudinale, dispersion transversale, modélisation, écoulement.

Abstract:

The basis tool for dimension a drier with immersed channels is the mastery of the dehydration of the product to dried and the distribution function residence time of the particles inside the column. To reach this last function, it is necessary to approach it by the phenomenological understanding of the flow of the grains in the drier with immersed channels. In the setting of this study, we have wished to contribute modestly to the modelling of the flow of the strong grains in the drier with immersed channels without mass transfer and heat transfer. Contrary to the previous studies where the longitudinal dispersion coefficient D_x is often disregarded in the flow models, the model that we have takes in account this coefficient. From this study that we have led, we can say that the dispersion coefficients, identified from the study of the flow of the granular material in the tanker, didn't permit us to spread them to the case of the flow in drier with immersed channels.

Key words: granular materials, modelling, drier with immersed channels, longitudinal dispersion, transversal dispersion, flow.