

N° d'ordre : 21/2010-M/PH

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
USTHB-ALGER
FACULTE DE PHYSIQUE



Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : PHYSIQUE

Spécialité : Physique Théorique des Basses et Moyennes Energies

Par :

HADDOUCHE Abdeslam

Sujet :

**Contribution à l'étude des fluctuations du nombre de
particules dans le cas des noyaux chauds par la méthode
de Lipkin-Nogami**

Soutenu le 03/07/2010 devant le jury composé de :

Mlle. N-H. ALLAL	Professeur	U.S.T.H.B.	Présidente
Mlle. N. BENHAMOUDA	Maître de conférences/A	U.S.T.H.B.	Directrice de thèse
Mr. M. DJEBARA	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur
Mme. A. HAMICI	Maître de conférences/A	U.S.T.H.B.	Examinatrice
Mr. B. BOUZID	Maître de conférences/A	U.S.T.H.B.	Examineur

Table des matières

Introduction	1
1 Traitement des corrélations d'appariement par la théorie BCS	3
1.1 Introduction	3
1.2 Théorie BCS à température nulle	5
1.2.1 Hamiltonien du système	5
1.2.2 Représentation Quasi-particules : Transformation de Bogoliubov-Valatin	7
1.2.3 Etat fondamental :	8
1.2.4 Hamiltonien du système en représentation quasi-particules	10
1.2.5 Principe variationnel - Equations du gap	11
1.3 Théorie BCS à température finie	13
1.3.1 Rappel de quelques notions sur la thermodynamique et la statistique quantique	13
1.3.2 Opérateur densité et fonction de partition dans l'ap- proximation des quasi-particules indépendantes	16
1.3.3 Equations du gap à température finie	18
1.3.4 Application	20
2 Méthode de Lipkin-Nogami	22
2.1 Introduction	22
2.2 Méthode de Lipkin-Nogami à température nulle	24
2.2.1 Principe de la méthode	24
2.2.2 Hamiltonien H_{LN} dans la représentation quasi-particules : .	27
2.2.3 Equations du gap à température nulle	28
2.2.4 Energie du système	29
2.3 Méthode de Lipkin-Nogami à température finie	30
2.3.1 Généralisation des équations du gap à température finie .	30
2.3.2 Application	32
3 Résultats numériques et discussion	34
3.1 Cas schématique : Modèle de Richardson	34

TABLE DES MATIÈRES	2
---------------------------	----------

3.2	Cas Réaliste	42
3.2.1	Détails de calcul	42
3.2.2	Résultats numériques	47
	Conclusion	56

Table des figures

3.1	Variation du paramètre du gap en fonction de la température. En traits continus correspondent aux résultats de la méthode BCS, en tirets à ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.	35
3.2	Variation (par la méthode BCS) des fluctuations du nombre de particules en fonction de la température. En traits continus : les fluctuations quantiques, en tirets : les fluctuations statistiques.	37
3.3	Variation de l'énergie en fonction de la température. Les traits continus correspondent aux résultats de la méthode BCS, les tirets à ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.	38
3.4	Variation du paramètre λ_2 en fonction de la température.	40
3.5	Variation de la capacité calorifique en fonction de la température. Les traits continus correspondent aux résultats de la méthode BCS, les tirets à ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.	41
3.6	Variation du paramètre du gap en fonction de la température pour le noyau Samarium 152. En traits continus, les résultats de la méthode BCS, en tirets, ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.	48
3.7	Variation du paramètre du gap en fonction de la température pour le noyau Gadolinium 156. En traits continus, les résultats de la méthode BCS, en tirets, ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.	49
3.8	Variation du paramètre du gap en fonction de la température pour le noyau Samarium 152. En traits continus, les résultats de la méthode BCS, en tirets, ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.	51
3.9	Variation de l'énergie en fonction de la température pour le noyau Gadolinium 156. En traits continus, les résultats de la méthode BCS, en tirets, ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.	52
3.10	Variation de la capacité calorifique en fonction de la température pour le noyau Gadolinium 156. En traits continus, les résultats de la méthode BCS, en tirets, ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.	54
3.11	Variation de la capacité calorifique en fonction de la température pour le noyau Samarium 152. En traits continus, les résultats de la méthode BCS, en tirets, ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.	55

Introduction

Les avancées récentes en physique nucléaire expérimentale, notamment le développement des techniques de production des faisceaux radioactifs, ont permis d'étudier les systèmes nucléaires à la limite de la vallée de stabilité (e.g ref [1]–[7]). Ceci a permis de noter l'importance des corrélations d'appariement et la nécessité de les inclure de manière rigoureuse pour une meilleure description de ce type de systèmes [8]–[10]. L'interaction d'appariement dans les noyaux reste encore mal déterminée, notamment dans le cas des noyaux chauds . Un aspect important de la structure nucléaire est l'effet de la température dans les noyaux. On s'attend à ce que l'appariement soit atténué par les effets de la température. De tels noyaux chauds s'obtiennent expérimentalement lors de collisions nucléaires. Il existe ainsi une température critique en dessous de laquelle la superfluidité s'enclenche au sein du noyau, et au dessus de laquelle elle s'annule. De récents travaux sont focalisés sur l'étude de la transition de phase d'un état superfluide vers un état sans appariement, dit état normal, quand la température du noyau dépasse la température critique (typiquement 1MeV) [11]–[19]. Différentes hypothèses concernant cette transition sont énoncées. Pour certains, cette transition est abrupte [20, 21] alors que pour d'autres elle est lisse et progressive [19]. Le traitement de tels systèmes dans cette région nécessite la prise en compte rigoureuse des corrélations d'appariement.

La théorie BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) [22, 23] reste encore la méthode la plus usitée pour inclure les effets d'appariement dans le noyau. Cependant, il est bien connu que cette approche présente un défaut principal consistant en la non-conservation du nombre de particules par les états BCS [24]. Ceci peut éventuellement induire des erreurs considérables dans l'évaluation de certaines observables physiques telles que le moment d'inertie [25, 26] , les transitions électromagnétiques [27] ou les moments multipolaires électriques [28, 29, 30, 31]. L'élimination des fluctuations du nombre de particules intro-

duites dans les états BCS peut se faire au moyen de techniques de projection dans l'espace nombre d'occupation. Elle permet, à l'aide d'un opérateur de projection, d'extraire de la fonction d'onde BCS l'état propre de l'opérateur nombre de particules. Cette approche est généralement associée au principe variationnel, la variation pouvant être effectuée avant ou après projection. Cependant, la généralisation de ces méthodes aux cas des noyaux chauds engendre des calculs assez complexes aussi bien sur le plan numérique que sur le plan analytique. D'autres méthodes approximatives ont été développées [32, 33, 34, 35], qui permettent de ramener les intégrales du type Fowler-Darwin [24] à des intégrales élémentaires simplifiant ainsi le calcul des différentes grandeurs physiques. Parmi ces méthodes, celle de Lipkin-Nogami (LN) [35, 36, 37, 38] apparaît comme la plus simple à utiliser et est devenue de ce fait la méthode standard pour restaurer le bon nombre de particules [39]-[45].

L'objet du présent travail est d'étudier les propriétés thermodynamiques en éliminant les fluctuations du nombre de particules inhérentes à l'approche BCS et cela au moyen de la méthode de Lipkin-Nogami. Aussi, le chapitre 1 sera consacré au rappel de la théorie BCS, ce qui nous permettra d'explicitier les équations du gap généralisées à température finie ainsi que les expressions respectives de l'énergie et de la capacité calorifique. Dans le chapitre 2, le formalisme de la méthode de Lipkin-Nogami sera présenté. De nouvelles expressions des grandeurs sus-citées seront déduites. Les résultats numériques seront présentés et discutés dans le chapitre 3.

Chapitre 1

Traitement des corrélations d'appariement par la théorie BCS

1.1 Introduction

En étudiant les spectres énergétiques des noyaux pair-pairs, on y trouve une différence importante en énergie entre l'état fondamental et les premiers états excités. Meyer et Jensen [46] ont apporté une explication à ce phénomène dans le cadre du modèle en couches, en suggérant qu'il est dû à l'appariement de l'interaction nucléon-nucléon. Bohr, Mottelson et Pines [47] ont observé une similitude entre le comportement des électrons dans les solides et celui des nucléons dans les noyaux. En effet, dans un solide supraconducteur, il y a appariement des électrons ayant des états de spin opposés au voisinage du niveau de Fermi. Il y a donc une ressemblance entre le spectre énergétique des électrons dans les supraconducteurs et celui des nucléons. Ceci a incité Belayev [23] à établir un formalisme sur la base de la théorie de la supraconductivité dans les solides, élaborée par Bardeen, Cooper et Schreiffer [22] pour l'analyse de l'interaction résiduelle entre nucléons. Il a introduit pour cela la force d'appariement. Cette interaction de courte portée tend à créer des paires de nucléons de moment angulaire total nul, telle que la paire soit formée par deux nucléons occupant le même niveau d'énergie mais ayant des projections de spin opposées.

Dans le présent chapitre, nous nous intéresserons à la méthode BCS. La section 2 sera consacrée au rappel de la théorie BCS, ce qui nous permettra d'expliciter les équations du gap dans le cas des systèmes pair-pairs à $T = 0$ MeV. L'adaptation de cette théorie dans le cas des noyaux chauds sera traitée dans la section 3. Sur la base de ce formalisme, les expressions de grandeurs thermodynamiques comme l'énergie et la capacité calorifique seront établies dans la dernière section du chapitre.

1.2 Théorie BCS à température nulle

1.2.1 Hamiltonien du système

On considère un système constitué de n nucléons se mouvant dans un potentiel moyen et soumis à la force d'appariement. L'hamiltonien de ce système est constitué de deux termes H_0 et H_{int} où H_0 est l'hamiltonien à particules indépendantes dont les valeurs propres sont les énergies individuelles ε_ν , et H_{int} le terme d'interactions résiduelles entre nucléons.

En utilisant le formalisme de la seconde quantification, l'hamiltonien du système aura la forme suivante [24] :

$$H = H_0 + H_{int} \quad (1.1)$$

avec :

$$H_0 = \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} \quad (1.2)$$

$$H_{int} = \frac{1}{4} \sum_{\nu \mu \nu' \mu'} \langle \nu \mu | V_p | \nu' \mu' \rangle a_{\nu}^{\dagger} a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu'} a_{\mu'} \quad (1.3)$$

où $a_{\nu}^{\dagger}$ et a_{ν} sont les opérateurs de création et d'annihilation d'un nucléon dans l'état $|\nu\rangle$ et qui vérifient les règles d'anticommuation des fermions :

$$\{a_{\nu}^{\dagger}, a_{\mu}^{\dagger}\} = \{a_{\nu}, a_{\mu}\} = 0 \quad (1.4)$$

et

$$\{a_{\nu}^{\dagger}, a_{\mu}\} = \delta_{\nu\mu} \quad (1.5)$$

De plus, le terme $\langle \nu \mu | V_p | \nu' \mu' \rangle$ représente l'élément de matrice antisymétrisé de l'interaction résiduelle tel que :

$$\langle \nu \mu | V_p | \nu' \mu' \rangle = -\langle \nu \mu | V_p | \mu' \nu' \rangle = -\langle \mu \nu | V_p | \nu' \mu' \rangle = \langle \mu \nu | V_p | \mu' \nu' \rangle \quad (1.6)$$

On note par $|\tilde{\nu}\rangle$ l'état renversé par rapport au sens du temps de l'état $|\nu\rangle$. En supposant le système invariant par renversement du sens du temps, il s'en suit :

$$\varepsilon_{\nu} = \varepsilon_{\tilde{\nu}} \quad (1.7)$$

et

$$\langle \nu \mu | V_p | \nu' \mu' \rangle = \langle \tilde{\nu}' \tilde{\mu}' | V_p | \tilde{\nu} \tilde{\mu} \rangle \quad (1.8)$$

1. Traitement des corrélations d'appariement par la théorie BCS 6

Par analogie avec le phénomène de la supraconductivité dans le solide, on considère que l'interaction la plus forte n'existe qu'entre les nucléons ayant des états conjugués l'un de l'autre par rapport au sens du temps, ce qui conduit à :

$$\langle \nu \mu | V_p | \nu' \mu' \rangle = -4 G \delta_{\nu \tilde{\mu}} \delta_{\nu' \tilde{\mu}'} \quad (1.9)$$

où G est la constante qui caractérise l'intensité de la force d'appariement .

Ainsi l'expression de l'hamiltonien devient :

$$H = \sum_{\nu \rangle 0} \varepsilon_{\nu} (a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}) - G \sum_{\nu \mu \rangle 0} a_{\nu}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} a_{\tilde{\mu}} a_{\mu} \quad (1.10)$$

L'opérateur nombre de particules N est donné par l'expression :

$$N = \sum_{\nu \rangle 0} (a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}) \quad (1.11)$$

L'obtention des états propres de cet hamiltonien peut se faire dans cette représentation (i.e : représentation particules). Toutefois, les calculs sont assez lourds. L'introduction d'une transformation s'impose alors : la transformation de Bogoliubov-Valatin.

1.2.2 Représentation Quasi-particules : Transformation de Bogoliubov-Valatin

C'est une transformation unitaire permettant le passage de la représentation particules vers la représentation quasi-particules, où on introduit de nouveaux opérateurs α_ν^+ et α_ν , opérateurs de création et d'annihilation de quasi-particules. Ces derniers s'expriment en fonction de a_ν^+ et a_ν :

$$\begin{aligned} a_\nu &= u_\nu \alpha_\nu + v_\nu \alpha_{\bar{\nu}}^+ \\ a_\nu^+ &= u_\nu \alpha_\nu^+ + v_\nu \alpha_{\bar{\nu}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

où v_ν et u_ν représentent les amplitudes de probabilité d'occupation et d'in-occupation de particules, elles sont liées par la condition :

$$u_\nu^2 + v_\nu^2 = 1 \quad (1.13)$$

En formulation matricielle, la relation entre les opérateurs cités ci-dessus est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \alpha_\nu^+ \\ \alpha_{\bar{\nu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\nu & -v_\nu \\ v_\nu & u_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\nu^+ \\ a_{\bar{\nu}} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Ainsi, la matrice de passage est donnée par :

$$T = \begin{pmatrix} u_\nu & -v_\nu \\ v_\nu & u_\nu \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

avec $TT^+ = I$ et $T^+ = {}^t T = T^{-1}$.

En d'autres termes, la matrice T est unitaire.

En effet :

$$\begin{pmatrix} u_\nu & -v_\nu \\ v_\nu & u_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\nu & v_\nu \\ -v_\nu & u_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\nu^2 + v_\nu^2 & 0 \\ 0 & u_\nu^2 + v_\nu^2 \end{pmatrix} = I \quad (1.16)$$

1.2.3 Etat fondamental :

La fonction d'onde qui représente le vide dans la théorie BCS est notée $|BCS\rangle$. Elle est obtenue en éliminant toutes les quasi-particules du vide de particules :

$$|BCS\rangle = \prod_{\nu} \alpha_{\nu} \alpha_{\bar{\nu}} |0\rangle \quad (1.17)$$

ou, en représentation particules :

$$|BCS\rangle = \prod_{v} (u_v + v_v a_v^+ a_{\bar{v}}^+) |0\rangle \quad (1.18)$$

Cet état n'est cependant pas état propre de N , en effet :

$$N |BCS\rangle = \sum_{\mu} (a_{\mu}^+ a_{\mu} + a_{\bar{\mu}}^+ a_{\bar{\mu}}) \prod_{v} (u_v + v_v a_v^+ a_{\bar{v}}^+) |0\rangle \quad (1.19)$$

nous conduit à :

$$N |BCS\rangle = 2 \sum_{\mu \rangle 0} v_{\mu} a_{\mu}^{+} a_{\tilde{\mu}}^{+} \prod_{\substack{v \rangle 0 \\ v \neq \mu}} (u_{\nu} + v_{\nu} a_{\nu}^{+} a_{\tilde{\nu}}^{+}) |0\rangle \quad (1.20)$$

On voit bien que dans (1.20) la fonction d'onde associée est différente de $|BCS\rangle$. Ce qui montre que l'état $|BCS\rangle$ n'est pas état propre de N . Mais, dans l'état $|BCS\rangle$, le nombre de particules est conservé en moyenne et on a :

$$\langle BCS | N | BCS \rangle = n = 2 \sum_{\nu \rangle 0} v_{\nu}^2 \quad (1.21)$$

Pour tenir compte de cette contrainte, on utilise la méthode des multiplieurs de Lagrange. On ajoute alors à l'hamiltonien H le terme $-\lambda N$ où λ représente le potentiel chimique.

On pose alors l'hamiltonien auxilliaire H' :

$$H' = H - \lambda N \quad (1.22)$$

Ainsi, on obtient l'expression de H' suivante :

$$H' = \sum_{\nu \rangle 0} (\varepsilon_{\nu} - \lambda) (a_{\nu}^{+} a_{\nu} + a_{\tilde{\nu}}^{+} a_{\tilde{\nu}}) - G \sum_{\nu \mu \rangle 0} a_{\nu}^{+} a_{\tilde{\nu}}^{+} a_{\tilde{\mu}} a_{\mu} \quad (1.23)$$

1.2.4 Hamiltonien du système en représentation quasi-particules

À partir du système précédent et en appliquant le théorème de Wick [59], l'hamiltonien auxilliaire prend la forme :

$$H' = E_0 + H_{11} + H_{20} + H_{22} + H_{31} + H_{40} \quad (1.24)$$

avec :

$$E_0 = 2 \sum_{\nu \rangle 0} \left(\varepsilon_\nu - \lambda - \frac{G v_\nu^2}{2} \right) v_\nu^2 - G \left(\sum_{\nu \mu \rangle 0} u_\nu v_\nu \right)^2$$

$$H_{11} = \sum_{\nu \rangle 0} \left[\left(\varepsilon_\nu - \lambda - G v_\nu^2 \right) (u_\nu^2 - v_\nu^2) + 2 G u_\nu v_\nu \sum_{\mu \rangle 0} u_\mu v_\mu \right] \{ \alpha_\nu^+ \alpha_\nu + \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\nu}} \}$$

$$H_{20} = \sum_{\nu \rangle 0} \left[2 \left(\varepsilon_\nu - \lambda - G v_\nu^2 \right) u_\nu v_\nu - G \left(u_\nu^2 - v_\nu^2 \right) \sum_{\mu \rangle 0} u_\mu v_\mu \right] \{ \alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ + \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_\nu \}$$

$$H_{22} = -G \sum_{\nu \mu \rangle 0} \left[(u_\nu^2 u_\mu^2 + v_\nu^2 v_\mu^2) \alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_\mu + u_\nu v_\nu u_\mu v_\mu (2 \alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_\nu + \alpha_\nu^+ \alpha_\mu^+ \alpha_\nu \alpha_\mu + \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_{\bar{\mu}}) \right]$$

$$H_{31} = G \sum_{\nu \mu \rangle 0} (u_\nu^2 - v_\nu^2) u_\mu v_\mu \{ \alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ (\alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}} + \alpha_\mu^+ \alpha_\mu) + \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_\nu (\alpha_{\bar{\mu}} \alpha_{\bar{\mu}}^+ + \alpha_\mu \alpha_\mu^+) \}$$

$$H_{40} = G \sum_{\nu, \mu \rangle 0} u_\nu^2 v_\mu^2 \{ \alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_\mu^+ \alpha_{\bar{\mu}}^+ + \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_\nu \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_\mu \}$$

1.2.5 Principe variationnel - Equations du gap

La détermination des paramètres u_ν et v_ν de la transformation de Bogoliubov-Valatin s'effectue en utilisant le principe variationnel, c'est à dire en minimisant la valeur moyenne de l'hamiltonien auxiliaire H' . Cette dernière est calculée sur le vide de quasi-particules $|BCS\rangle$ et est donnée par :

$$\langle BCS | H' | BCS \rangle = E_0 = 2 \sum_{\nu \rangle 0} (\varepsilon_\nu - \lambda - G v_\nu^2) v_\nu^2 - G \left(\sum_{\nu \rangle 0} u_\nu v_\nu \right)^2 \quad (1.25)$$

La minimisation de cette expression par rapport aux paramètres u_ν et v_ν s'écrit :

$$\frac{\partial E_0}{\partial u_\nu} = \frac{\partial E_0}{\partial v_\nu} = 0 \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial E_0}{\partial v_\nu} = 2 (\varepsilon_\nu - \lambda - G v_\nu^2) u_\nu v_\nu - \Delta (u_\nu^2 - v_\nu^2) = 0 \quad (1.27)$$

$$\Delta = G \sum_{\nu \rangle 0} u_\nu v_\nu \quad (1.28)$$

Δ représente la demi largeur du gap.

On aboutit à :

$$\left. \begin{matrix} u_\nu^2 \\ v_\nu^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{\sqrt{\bar{\varepsilon}_\nu^2 + \Delta^2}} \right\} \quad (1.29)$$

où $\bar{\varepsilon}_\nu = \varepsilon_\nu - \lambda - G v_\nu^2$

Ainsi, la condition de conservation du nombre de particules s'écrit :

$$n = \sum_{\nu \rangle 0} \left\{ 1 - \frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{\sqrt{\bar{\varepsilon}_\nu^2 + \Delta^2}} \right\} \quad (1.30)$$

soit :

$$n = 2 \sum_{\nu \rangle 0} v_\nu^2 \quad (1.31)$$

1. Traitement des corrélations d'appariement par la théorie BCS 12

Les équations (1.28) et (1.30) constituent les équations du gap pour un système ayant un nombre pair de particules .

On remarque que les paramètres variationnels u_ν et v_ν dépendent de deux quantités physiques : le potentiel chimique λ et la demi largeur du gap Δ . Ces deux derniers paramètres sont déterminés par résolution numérique des équations du gap.

1.3 Théorie BCS à température finie

1.3.1 Rappel de quelques notions sur la thermodynamique et la statistique quantique

Dans la présente section, on rappellera brièvement quelques notions sur la thermodynamique et la statistique quantique, qui sont des éléments essentiels dans la théorie BCS à température finie (FT-BCS) [50].

Dans une transformation d'un système dont le potentiel chimique λ reste constant, le premier principe de la thermodynamique stipule [51] :

$$\Delta E = \Delta Q - \Delta W + \lambda \Delta N \quad (1.32)$$

où ΔE représente la variation de l'énergie interne E , ΔQ est la quantité de chaleur absorbée par le système, ΔW le travail effectué par le système et ΔN la variation du nombre de particules.

Si la transformation d'un système se fait sous une température constante, le second principe de la thermodynamique s'écrit :

$$T \Delta S \geq \Delta Q \quad (1.33)$$

où S est l'entropie du système.

On définit le grand potentiel par :

$$\Omega = E - TS - \lambda N \quad (1.34)$$

En combinant les deux principes (équations (1.32) et (1.33)), on a :

$$\Delta \Omega \leq \Delta E - \Delta Q - \lambda \Delta N = -\Delta W \quad (1.35)$$

Dans le cas particulier d'un système mécaniquement isolé (i.e : $\Delta W = 0$), on a :

$$\Delta\Omega \leq 0 \quad (1.36)$$

Par conséquent, pour un système isolé, soumis à une température T constante et un potentiel chimique constant, l'état d'équilibre du système est alors obtenu en minimisant le grand potentiel thermodynamique :

$$\delta\Omega = 0 \quad (1.37)$$

La variation de Ω est utilisée pour définir l'opérateur densité D . En effet, pour des valeurs données de T et λ , l'opérateur densité est déterminé par l'équation fonctionnelle [48]–[51] :

$$\frac{\delta\Omega}{\delta D} = 0 \quad (1.38)$$

où la trace de D est égale à l'unité :

$$Tr D = 1 \quad (1.39)$$

L'équation (1.38) admet la solution formelle :

$$D = Z^{-1} \exp(-\beta(H - \lambda N)) \quad (1.40)$$

où $\beta = \frac{1}{kT}$ (k est la constante de Boltzmann) et Z est la grande fonction de partition définie par :

$$Z = Tr [\exp(-\beta(H - \lambda N))] \quad (1.41)$$

La valeur moyenne de tout opérateur O est déterminée par :

$$\langle O \rangle = Tr(D.O) \quad (1.42)$$

On a alors :

$$E = \langle H \rangle = Tr(D.H) \quad (1.43)$$

$$n = \langle N \rangle = Tr(D.N) \quad (1.44)$$

où H et N sont respectivement l'hamiltonien du système et l'opérateur nombre de particules.

L'expression (1.40) montre bien que la détermination de l'opérateur densité dépend de la structure de l'hamiltonien H , ce qui induit des calculs assez complexes pour la détermination des valeurs moyennes. Pour pallier à cette difficulté, il est nécessaire de construire une forme approchée et simple de l'opérateur D . Cette dernière est généralement conçue sur la base de l'approximation de particules indépendantes.

1.3.2 Opérateur densité et fonction de partition dans l'approximation des quasi-particules indépendantes

Sur la base de la transformation de Bogoliubov-Valatin, l'hamiltonien du système a été exprimé dans la représentation quasi-particules. L'approximation des quasi-particules indépendantes consiste à négliger toutes les interactions entre les quasi-particules, H' s'écrit alors :

$$H = E_0 + \sum_{\nu>0} E_{\nu} (\alpha_{\nu}^+ \alpha_{\nu} + \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\nu}}) \quad (1.45)$$

où $E_{\nu} = \sqrt{\epsilon_{\nu}^2 + \Delta^2}$, E_{ν} représente l'énergie d'une quasi-particule. Dans ce cas, l'opérateur densité est donné par :

$$D = Z^{-1} \exp \left(-\beta \sum_{\nu} E_{\nu} \hat{n}_{\nu} \right) \quad (1.46)$$

où $Z = Tr [\exp (-\beta \sum_{\nu} E_{\nu} \hat{n}_{\nu})]$ avec $\hat{n}_{\nu} = \alpha_{\nu}^+ \alpha_{\nu}$.

L'évaluation de la trace s'effectue suivant l'espace de représentation $|n_{\nu}\rangle$, où $|n_{\nu}\rangle$ désignent les états à 0 quasi-particules, 1 quasi-particule, 2 quasi-particules ...etc.

$$Z = \sum_{\{n_{\nu}\}} \left\langle n_{\nu} \left| \exp \left(-\beta \sum_{\nu} E_{\nu} \hat{n}_{\nu} \right) \right| n_{\nu} \right\rangle \quad (1.47)$$

$$Z = \sum_{n_{\nu}=0,1} \left(\prod_{\nu} \exp (-\beta E_{\nu} n_{\nu}) \right) \quad (1.48)$$

où $\{n_{\nu}\}_{\nu=1,2,3,\dots}$ représente l'occupation des quasi-particules et n_{ν} prend soit la valeur 0 ou 1.

En procédant au développement en série de l'exponentielle et sachant que $\hat{n}_{\nu}^m = \hat{n}_{\nu}$, on a :

$$Z = \prod_{\nu} \sum_{n_{\nu}=0,1} \exp(-\beta E_{\nu} n_{\nu}) = \prod_{\nu} (1 + \exp(-\beta E_{\nu})) \quad (1.49)$$

De même, l'expression (1.46) s'écrit alors :

$$D = Z^{-1} \prod_{\nu} [\exp(-\beta E_{\nu}) \hat{n}_{\nu} + (1 - \hat{n}_{\nu})] \quad (1.50)$$

soit alors :

$$D = \prod_{\nu} [\eta_{\nu} \hat{n}_{\nu} + (1 - \hat{n}_{\nu}) (1 - \eta_{\nu})] \quad (1.51)$$

avec

$$\eta_{\nu} = \langle \alpha_{\nu}^+ \alpha_{\nu} \rangle = \frac{1}{1 + e^{\beta E_{\nu}}} \quad (1.52)$$

1.3.3 Equations du gap à température finie

Afin de déterminer les équations du gap à température finie, on considère l'hamiltonien H' obtenu en (1.24) auquel on applique la méthode de L.G.Moretto [48]. Elle consiste à réécrire l'hamiltonien dans la représentation quasi-particules. Seulement, dans ce cas, le vide de quasi-particules ne peut être pris comme référence pour évaluer les produits normaux, aussi on définit le vide thermodynamique tel que les termes contractés sont évalués suivant la définition (1.42). En appliquant le théorème de Wick, où seuls les termes diagonaux sont considérés, l'hamiltonien (1.24) s'écrit sous la forme :

$$H' = E_0 + \sum_{\nu \rangle 0} H_{11}^{\nu} (\alpha_{\nu}^+ \alpha_{\nu} + \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\nu}}) \quad (1.53)$$

où

$$E_0 = 2 \sum_{\nu \rangle 0} \bar{\epsilon}_{\nu} v_{\nu}^2 + G \sum_{\nu \rangle 0} v_{\nu}^4 + 2 \sum_{\nu \rangle 0} \bar{\epsilon}_{\nu} (u_{\nu}^2 - v_{\nu}^2) \eta_{\nu} - G \left[\sum_{\nu \rangle 0} u_{\nu} v_{\nu} (1 - 2\eta_{\nu}) \right]^2 \quad (1.54)$$

et

$$H_{11}^{\nu} = \bar{\epsilon}_{\nu} (u_{\nu}^2 - v_{\nu}^2) + 2u_{\nu} v_{\nu} \Delta + (u_{\nu}^2 - v_{\nu}^2)^2 \eta_{\nu} \quad (1.55)$$

Et, dans ce cas, la valeur moyenne de H' est déduite de la même manière que dans l'approche BCS à température nulle.

On a alors :

$$\langle H' \rangle = H_{00} = 2 \sum_{\nu \rangle 0} \bar{\epsilon}_{\nu} v_{\nu}^2 + G \sum_{\nu \rangle 0} v_{\nu}^4 + 2 \sum_{\nu \rangle 0} \bar{\epsilon}_{\nu} (u_{\nu}^2 - v_{\nu}^2) \eta_{\nu} - G \left[\sum_{\nu \rangle 0} u_{\nu} v_{\nu} (1 - 2\eta_{\nu}) \right]^2 \quad (1.56)$$

Les équations du gap à température finie sont déduites en procédant à la minimisation de cette expression par rapport à v_{ν} , exploitant l'analogie avec la méthode BCS habituelle.

On obtient :

$$(1 - 2\eta_\nu)(2u_\nu v_\nu \bar{\epsilon}_\nu - (u_\nu^2 - v_\nu^2) \Delta) = 0 \quad (1.57)$$

avec

$$\Delta = G \left[\sum_{\nu \rangle 0} u_\nu v_\nu (1 - 2\eta_\nu) \right] \quad (1.58)$$

soit alors :

$$2u_\nu v_\nu \bar{\epsilon}_\nu - (u_\nu^2 - v_\nu^2) \Delta = 0 \quad (1.59)$$

On remarque que l'expression (1.59) est formellement analogue à celle obtenue dans la théorie BCS habituelle ($T = 0MeV$). La minimisation de $\langle H' \rangle$ par rapport aux paramètres variationnels u_ν et v_ν , conduit donc à une solution de la forme :

$$\left. \begin{matrix} u_\nu^2 \\ v_\nu^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{\bar{\epsilon}_\nu}{\sqrt{\bar{\epsilon}_\nu^2 + \Delta^2}} \right\} \quad (1.60)$$

La condition de conservation du nombre de particules est alors donnée par :

$$n = 2 \sum_{\nu \rangle 0} \{ (u_\nu^2 - v_\nu^2) \eta_\nu + v_\nu^2 \} \quad (1.61)$$

qu'on peut réécrire aussi :

$$n = \sum_{\nu \rangle 0} \left[1 - \frac{\bar{\epsilon}_\nu}{E_\nu} \tanh \left(\frac{1}{2} \beta E_\nu \right) \right] \quad (1.62)$$

1.3.4 Application

a) Energie

On détermine l'énergie à partir de l'hamiltonien auxiliaire :

$$\langle H' \rangle = 2 \sum_{\nu \rangle 0} \left(\varepsilon_\nu - \lambda - \frac{G}{2} v_\nu^2 \right) v_\nu^2 + 2 \sum_{\nu \rangle 0} \bar{\varepsilon}_\nu (u_\nu^2 - v_\nu^2) \eta_\nu - G \left[\sum_{\nu \rangle 0} u_\nu v_\nu (1 - 2\eta_\nu) \right]^2 \quad (1.63)$$

soit encore :

$$\langle H' \rangle = 2 \sum_{\nu \rangle 0} \bar{\varepsilon}_\nu v_\nu^2 + G \sum_{\nu \rangle 0} v_\nu^4 + 2 \sum_{\nu \rangle 0} \bar{\varepsilon}_\nu (u_\nu^2 - v_\nu^2) \eta_\nu - \frac{\Delta^2}{G}. \quad (1.64)$$

On a aussi :

$$\langle H' \rangle = \sum_{\nu \rangle 0} \bar{\varepsilon}_\nu \left[1 - \frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{E_\nu} \tanh \left(\frac{1}{2} \beta E_\nu \right) \right] - \frac{\Delta^2}{G} + G \sum_{\nu \rangle 0} v_\nu^4 \quad (1.65)$$

or : $E_{BCS} = \langle H \rangle = \langle H' \rangle + \lambda n$. L'énergie correspondant à l'état fondamental du système est alors donnée par :

$$E = \sum_{\nu \rangle 0} (\varepsilon_\nu - G v_\nu^2) \left[1 - \frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{E_\nu} \tanh \left(\frac{1}{2} \beta E_\nu \right) \right] - \frac{\Delta^2}{G} + G \sum_{\nu \rangle 0} v_\nu^4 \quad (1.66)$$

On note qu'en posant $T = 0 \text{ MeV}$, $\tanh \left(\frac{1}{2} \beta E_\nu \right) = 1$, et donc l'énergie du système se réduit à l'énergie BCS habituelle :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\nu \rangle 0} (\varepsilon_\nu - G v_\nu^2) \left[1 - \frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{E_\nu} \right] - \frac{\Delta^2}{G} + G \sum_{\nu \rangle 0} v_\nu^4 \\ E &= 2 \sum_{\nu \rangle 0} \left(\varepsilon_\nu - \frac{G v_\nu^2}{2} \right) v_\nu^2 - \frac{\Delta^2}{G} \end{aligned} \quad (1.67)$$

b) Capacité calorifique

La capacité calorifique mesure la quantité d'énergie qu'il faut donner à un système afin d'élever sa température d'une unité. Dans la théorie BCS, la capacité calorifique C_{BCS} est définie par :

$$C_{BCS} = \frac{dE}{dT} = \frac{d}{dT} \left(\sum_{\nu \neq 0} \bar{\epsilon}_\nu \left[1 - \frac{\bar{\epsilon}_\nu}{E_\nu} \tanh \left(\frac{1}{2} \beta E_\nu \right) \right] - \frac{\Delta^2}{G} + G \sum_{\nu \neq 0} v_\nu^4 \right) \quad (1.68)$$

Soit alors [14]:

$$\begin{aligned} C_{BCS} = \frac{dE}{dT} = & \frac{1}{2} \sum_{\nu} \sec h^2 \left(\frac{1}{2} \beta E_\nu \right) \cdot \left[\beta^2 \bar{\epsilon}_\nu^2 - \frac{\bar{\epsilon}_\nu^2}{E_\nu^2} \beta \left(\Delta \frac{d\Delta}{dT} - G \bar{\epsilon}_\nu \frac{dv_\nu^2}{dT} \right) \right] \\ & - G \sum_{\nu \neq 0} \frac{dv_\nu^2}{dT} \left[1 - \frac{\bar{\epsilon}_\nu}{E_\nu} \tanh \left(\frac{1}{2} \beta E_\nu \right) \right] - 2 \frac{\Delta}{G} \frac{d\Delta}{dT} + 2G \sum_{\nu \neq 0} v_\nu^2 \frac{dv_\nu^2}{dT} \end{aligned} \quad (1.69)$$

avec :

$$\frac{d\Delta}{dT} = \frac{1}{2} \frac{\beta^2 \sum_{\nu} \sec h^2 \left(\frac{1}{2} \beta E_\nu \right)}{\Delta \left[\frac{1}{2} \beta \sum_{\nu} E_\nu^{-2} \sec h^2 \left(\frac{1}{2} \beta E_\nu \right) - \sum_{\nu} E_\nu^{-3} \tanh h \left(\frac{1}{2} \beta E_\nu \right) \right]} \quad (1.70)$$

et :

$$\frac{dv_\nu^2}{dT} = \frac{\bar{\epsilon}_\nu \Delta \frac{d\Delta}{dT}}{2E_\nu^2 - G E_\nu + G \bar{\epsilon}_\nu^2} \quad (1.71)$$

Chapitre 2

Méthode de Lipkin-Nogami

2.1 Introduction

La méthode BCS a été largement utilisée dans la physique de la structure nucléaire pour inclure les forces d'appariement. L'avantage majeur de cette méthode est sa simplicité ; néanmoins, elle souffre de quelques défauts :

i) La fonction d'onde BCS n'est pas état propre de l'opérateur nombre de particules N . L'énergie obtenue est donc entachée d'une erreur qui provient de la fluctuation du nombre de particules.

ii) Il y a possibilité d'existence d'une valeur critique de la force d'appariement en dessous de laquelle, les équations du gap obtenues par la méthode BCS n'ont aucune solution non triviale.

On a vu dans le chapitre précédent, que la méthode BCS consistait en l'approximation de l'hamiltonien sous une forme linéaire : $H' = H - \lambda N$. Cette approximation est suffisante dans le cas d'un système comprenant un très grand nombre de particules. Or, dans notre cas, celui d'un noyau atomique le nombre de nucléons est limité. La fonction d'onde associée ne décrit pas parfaitement ce système et est alors entachée d'erreur et, par conséquent, elle ne correspond pas au bon nombre de particules. Ce problème connu depuis longtemps a conduit à la mise en œuvre de méthodes de projection sur le bon nombre de particules. Ces méthodes sont principalement basées sur les intégrales de type Fowler-Darwin . Cependant, leur application induit des calculs assez complexes aussi bien sur le plan analytique que numérique[24]. De plus, leur application dans le cas des systèmes chauds devient plus ardue. Afin de restaurer le bon nombre de particules, il est nécessaire d'avoir recours à des méthodes approximatives.

Parmi ces méthodes la méthode de Lipkin-Nogami est la plus utilisée pour restaurer la symétrie brisée par l'approche BCS.

Aussi dans le présent chapitre, nous introduirons le formalisme correspondant à la méthode de Lipkin-Nogami dans la section 2. Nous étendrons l'étude dans le cas des systèmes chauds dans la même section . Les expressions de l'énergie ainsi que la capacité calorifique seront déduites dans la section 3.

2.2 Méthode de Lipkin-Nogami à température nulle

2.2.1 Principe de la méthode

Soit $|\Psi\rangle$ la fonction d'onde BCS, cet état est une superposition d'états ayant un nombre pair de particules :

$$|\Psi\rangle = \sum_{n'} C_{n'} |\phi_{n'}\rangle \quad (2.1)$$

où $|\phi_n\rangle$ représente l'état projeté, vérifiant les relations :

$$N |\phi_n\rangle = n |\phi_n\rangle \quad (2.2)$$

$$H |\phi_n\rangle = E_n |\phi_n\rangle \quad (2.2b)$$

On a donc :

$$\langle N \rangle = \langle \Psi | N | \Psi \rangle = \sum_n |C_n|^2 n \quad (2.3)$$

On suppose que l'énergie projetée E_n peut être exprimée sous une forme polynômiale :

$$E_n = \langle \phi_n | H | \phi_n \rangle = \lambda_0 + \lambda_1 n + \lambda_2 n^2 + \dots + \lambda_M n^M \quad (2.4)$$

dont les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_M$ sont à déterminer.

On déduit que l'opérateur :

$$\mathcal{H} = H - \lambda_1 N - \lambda_2 N^2 - \dots - \lambda_M N^M \quad (2.5)$$

admet la valeur moyenne :

$$\langle \Psi | \mathcal{H} | \Psi \rangle = \sum_n |C_n|^2 \langle \phi_n | \mathcal{H} | \phi_n \rangle = \lambda_0 \quad (2.6)$$

Ainsi, en remplaçant (2.6) dans l'équation (2.4), il en résulte :

$$\begin{aligned}
\langle \phi_n | H | \phi_n \rangle &= \langle \Psi | H | \Psi \rangle - \lambda_1 \langle \Psi | N - n | \Psi \rangle - \lambda_2 \langle \Psi | N^2 - n^2 | \Psi \rangle - \\
&\quad \dots - \lambda_M \langle \Psi | N^M - n^M | \Psi \rangle \\
&= \lambda_0 - \lambda_1 \Delta N - \lambda_2 \Delta N^2 - \dots - \lambda_M \Delta N^M
\end{aligned} \tag{2.7}$$

où $\Delta N^i = \langle \Psi | N^i - n^i | \Psi \rangle$.

Cette expression montre bien que la minimisation de la valeur moyenne de l'hamiltonien par rapport à la fonction d'onde projetée est équivalente à la minimisation du second membre de l'équation. On remarque que les valeurs moyennes intervenant dans le second membre dépendent uniquement de la fonction d'onde BCS. La méthode de Lipkin-Nogami consiste à limiter le développement jusqu'à l'ordre 2, l'hamiltonien est donc défini par [37],[38] :

$$H_{LN} = H - \lambda_1 N - \lambda_2 N^2$$

$$H_{LN} = \sum_{\nu \rangle 0} (\varepsilon_\nu - \lambda_1) (a_\nu^\dagger a_\nu + a_{\tilde{\nu}}^\dagger a_{\tilde{\nu}}) - G \sum_{\nu \mu \rangle 0} a_\nu^\dagger a_{\tilde{\nu}}^\dagger a_{\tilde{\mu}} a_\mu - \lambda_2 \left[\sum_{\nu \rangle 0} (a_\nu^\dagger a_\nu + a_{\tilde{\nu}}^\dagger a_{\tilde{\nu}}) \right]^2 \tag{2.8}$$

Les paramètres λ_0 , λ_1 et λ_2 définis dans les expressions (2.13) à (2.15) sont déterminés au moyen de la méthode des approximations successives [38],[52, 53] :

$$\langle \Psi | \left[H - \sum_{m \rangle 0}^M \lambda_m \Delta N^m \right] \Delta N^k | \Psi \rangle = 0 \quad k = 0, 1 \text{ et } 2 \tag{2.9}$$

Soit alors :

$$\langle H \rangle = \lambda_0 + 0 + \lambda_2 \langle \Delta N^2 \rangle \tag{2.10}$$

$$\langle H \Delta N \rangle = 0 + \lambda_1 \langle \Delta N^2 \rangle + \lambda_2 \langle \Delta N^3 \rangle \tag{2.11}$$

$$\langle H \Delta N^2 \rangle = \lambda_0 \langle \Delta N^2 \rangle + \lambda_1 \langle \Delta N^3 \rangle + \lambda_2 \langle \Delta N^4 \rangle \tag{2.12}$$

La résolution de ce système donne :

$$\lambda_0 = \langle H \rangle - \lambda_2 \langle \Delta N^2 \rangle \quad (2.13)$$

$$\lambda_1 = \frac{\langle H \Delta N \rangle + \lambda_2 \langle \Delta N^3 \rangle}{\langle \Delta N^2 \rangle} \quad (2.14)$$

$$\lambda_2 = \frac{\langle (H - \langle H \rangle) \Delta N^2 \rangle \langle \Delta N^2 \rangle - \langle H \Delta N \rangle \langle \Delta N^3 \rangle}{(\langle \Delta N^2 \rangle^2 - \langle \Delta N^4 \rangle) \langle \Delta N^2 \rangle + \langle \Delta N^3 \rangle^2} \langle \Delta N^2 \rangle \quad (2.15)$$

Il apparait de l'expression (2.13) que l'énergie projetée au second ordre est donnée par :

$$E_{LN} = \lambda_0 = \langle H \rangle - \lambda_2 \langle \Delta N^2 \rangle \quad (2.16)$$

2.2.2 Hamiltonien H_{LN} dans la représentation quasi-particules :

A l'aide du théorème de Wick, H_{LN} prend la forme :

$$H_{LN} = H_{00} + H_{11} + H_{20} + H_{22} + H_{31} + H_{40} \quad (2.17)$$

Avec :

$$\begin{aligned} H_{00} &= 2 \sum_{\nu \rangle 0} \varepsilon_\nu v_\nu^2 - G^{-1} \Delta^2 - G \sum_{\nu \rangle 0} v_\nu^4 - \lambda_1 n - \lambda_2 n^2 - 4\lambda_2 \sum_{\nu \rangle 0} u_\nu^2 v_\nu^2 \\ H_{11} &= \sum_{\nu \rangle 0} \left\{ (u_\nu^2 - v_\nu^2) (\tilde{\varepsilon}_\nu - \lambda_{LN}) + 2\Delta u_\nu v_\nu \right\} (\alpha_\nu^+ \alpha_\nu + \alpha_{\tilde{\nu}}^+ \alpha_{\tilde{\nu}}) \\ H_{20} &= \sum_{\nu \rangle 0} \left\{ 2u_\nu v_\nu (\tilde{\varepsilon}_\nu - \lambda_{LN}) - \Delta (u_\nu^2 - v_\nu^2) \right\} (\alpha_\nu^+ \alpha_{\tilde{\nu}}^+ + \alpha_{\tilde{\nu}} \alpha_\nu) \\ H_{22} &= - \sum_{\nu, \mu \rangle 0} \left\{ G u_\nu v_\nu u_\mu v_\mu - \lambda_2 (u_\nu^2 - v_\nu^2) (u_\mu^2 - v_\mu^2) \right\} (\alpha_\nu^+ \alpha_\nu \alpha_\mu^+ \alpha_\mu + \alpha_{\tilde{\nu}}^+ \alpha_{\tilde{\nu}} \alpha_\mu^+ \alpha_\mu \\ &\quad + \alpha_\nu^+ \alpha_\nu \alpha_{\tilde{\mu}}^+ \alpha_{\tilde{\mu}} + \alpha_{\tilde{\nu}}^+ \alpha_{\tilde{\nu}} \alpha_{\tilde{\mu}}^+ \alpha_{\tilde{\mu}}) - \sum_{\nu, \mu \rangle 0} \left\{ G (u_\nu^2 u_\mu^2 + v_\nu^2 v_\mu^2) - 8\lambda_2 u_\nu v_\nu u_\mu v_\mu \right\} \alpha_\nu^+ \alpha_{\tilde{\nu}}^+ \alpha_{\tilde{\mu}} \alpha_\mu \\ H_{31} &= \sum_{\nu, \mu \rangle 0} \left\{ G u_\nu v_\nu (u_\mu^2 - v_\mu^2) - 4\lambda_2 (u_\nu^2 - v_\nu^2) u_\mu v_\mu \right\} \\ &\quad \left\{ \alpha_\nu^+ \alpha_{\tilde{\nu}}^+ (\alpha_{\tilde{\mu}}^+ \alpha_{\tilde{\mu}} + \alpha_\mu^+ \alpha_\mu) + \alpha_{\tilde{\nu}} \alpha_\nu (\alpha_{\tilde{\mu}} \alpha_{\tilde{\mu}}^+ + \alpha_\mu \alpha_\mu^+) \right\} \\ H_{40} &= \sum_{\nu, \mu \rangle 0} \left\{ \frac{1}{2} G (u_\nu^2 v_\mu^2 + v_\nu^2 u_\mu^2) - 4\lambda_2 u_\nu v_\nu u_\mu v_\mu \right\} \left\{ \alpha_\nu^+ \alpha_{\tilde{\nu}}^+ \alpha_\mu^+ \alpha_{\tilde{\mu}}^+ + \alpha_{\tilde{\nu}} \alpha_\nu \alpha_{\tilde{\mu}} \alpha_\mu \right\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

où l'on a adopté les notations suivantes :

$$\lambda_{LN} = \lambda_1 + 2\lambda_2 (n + 1) \quad (2.19)$$

$$\tilde{\varepsilon}_\nu = \varepsilon_\nu + (4\lambda_2 - G) v_\nu^2 \quad (2.20)$$

2.2.3 Equations du gap à température nulle

La minimisation de la valeur moyenne de l'hamiltonien par rapport à v_ν , conduit au système :

$$2u_\nu v_\nu (\tilde{\varepsilon}_\nu - \lambda_{LN}) = \Delta (u_\nu^2 - v_\nu^2) \quad (2.21)$$

soit :

$$2u_\nu v_\nu \bar{\varepsilon}_\nu = \Delta (u_\nu^2 - v_\nu^2) \quad (2.22)$$

avec : $\bar{\varepsilon}_\nu = \tilde{\varepsilon}_\nu - \lambda_{LN} = \varepsilon_\nu + (4\lambda_2 - G) v_\nu^2 - \lambda_{LN}$.

On notera que ceci est équivalent à l'annulation du terme H_{20} .

Par ailleurs, on remarquera que cette équation est formellement analogue à celle trouvée avec la méthode BCS. On en déduit alors :

$$\left. \begin{matrix} u_\nu^2 \\ v_\nu^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{\sqrt{\bar{\varepsilon}_\nu^2 + \Delta^2}} \right\} \quad (2.23)$$

$$\Delta = G \sum_{\nu \neq 0} u_\nu v_\nu \quad (2.24)$$

On remarque l'apparition d'une renormalisation des probabilités d'occupation par l'inclusion du terme $4\lambda_2 v_\nu^2$.

2.2.4 Energie du système

Une nouvelle écriture a été obtenue en utilisant la méthode de Lipkin et nogami. Cette dernière permet de corriger l'énergie obtenue par la méthode BCS. L'énergie du système E_{LN} est alors définie par :

$$E_{LN} = E_{BCS} - \lambda_2 \langle \Delta N^2 \rangle \quad (2.25)$$

Le terme correctif $\lambda_2 \langle \Delta N^2 \rangle$, contient les fluctuations du nombre de particules.

On a :

$$\langle N \rangle = 2 \sum_{\nu \rangle 0} v_\nu^2 \quad (2.26)$$

et

$$\langle N^2 \rangle = 4 \sum_{\substack{\nu \mu \rangle 0 \\ \nu \neq \mu}} v_\nu^2 v_\mu^2 + 4 \sum_{\nu \rangle 0} v_\nu^2 \quad (2.27)$$

Sachant que $u_\nu^2 + v_\nu^2 = 1$, on obtient :

$$\langle \Delta N^2 \rangle = 4 \sum_{\nu \rangle 0} u_\nu^2 v_\nu^2 \quad (2.28)$$

Ce qui nous permet d'écrire l'énergie L-N :

$$\begin{aligned} E_{LN} &= E_{BCS} - 4\lambda_2 \sum_{\nu \rangle 0} u_\nu^2 v_\nu^2 \\ &= 2 \sum_{\nu \rangle 0} \left(\varepsilon_\nu - \frac{G v_\nu^2}{2} \right) v_\nu^2 - G \left(\sum_{\nu \rangle 0} u_\nu v_\nu \right)^2 - 4\lambda_2 \sum_{\nu \rangle 0} u_\nu^2 v_\nu^2 \quad (2.29) \end{aligned}$$

L'élimination des fluctuations du nombre de particules inhérentes à l'approche BCS résulte en l'ajout d'un terme correctif à l'énergie BCS.

2.3 Méthode de Lipkin-Nogami à température finie

2.3.1 Généralisation des équations du gap à température finie

Afin de déterminer une généralisation des équations du gap Lipkin-Nogami à température finie, on reprendra donc les mêmes étapes que celles adoptées dans le cas de l'approche BCS. On tiendra alors compte uniquement des termes diagonaux de l'hamiltonien. Dans ce cas on a :

$$H' = H_{00} + \sum_{\nu \rangle 0} H_{11}^{\nu} (\alpha_{\nu}^+ \alpha_{\nu} + \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\nu}}) \quad (2.30)$$

où

$$H_{00} = 2 \sum_{\nu \rangle 0} \bar{\epsilon}_{\nu} v_{\nu}^2 + G \sum_{\nu \rangle 0} v_{\nu}^4 + 2 \sum_{\nu \rangle 0} \bar{\epsilon}_{\nu} (u_{\nu}^2 - v_{\nu}^2) \eta_{\nu} - G \left[\sum_{\nu \rangle 0} u_{\nu} v_{\nu} (1 - 2\eta_{\nu}) \right]^2 \quad (2.31)$$

et

$$H_{11}^{\nu} = \bar{\epsilon}_{\nu} (u_{\nu}^2 - v_{\nu}^2) + 2u_{\nu} v_{\nu} \Delta + (u_{\nu}^2 - v_{\nu}^2)^2 \eta_{\nu} \quad (2.32)$$

$$\text{avec : } \Delta = G \sum_{\nu \rangle 0} u_{\nu} v_{\nu} (1 - 2\eta_{\nu})$$

$$\text{et : } \eta_{\nu} = \frac{1}{1 + e^{\beta \check{E}_{\nu}}}$$

$$\text{et : } \check{E}_{\nu} = \sqrt{(\tilde{\epsilon}_{\nu} - \lambda_{LN})^2 + \Delta^2}$$

La minimisation de la valeur moyenne de cet hamiltonien conduit à :

$$2(\tilde{\epsilon}_{\nu} - \lambda_{LN}) v_{\nu} u_{\nu} - (u_{\nu}^2 - v_{\nu}^2) \Delta - 4v_{\nu} u_{\nu} (\tilde{\epsilon}_{\nu} - \lambda_{LN}) \eta_{\nu} + 2\eta_{\nu} (u_{\nu}^2 - v_{\nu}^2) \Delta = 0 \quad (2.33)$$

Soit :

$$(1 - 2\eta_\nu) [2\bar{\epsilon}_\nu v_\nu u_\nu - \Delta (u_\nu^2 - v_\nu^2)] = 0 \quad (2.34)$$

On en déduit :

$$\frac{u_\nu^2}{v_\nu^2} \Bigg\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{\bar{\epsilon}_\nu}{\sqrt{\bar{\epsilon}_\nu^2 + \Delta^2}} \right\} \quad (2.35)$$

avec : $\bar{\epsilon}_\nu = \tilde{\epsilon}_\nu - \lambda_{LN} = \epsilon_\nu + (4\lambda_2 - G) v_\nu^2 - \lambda_{LN}$.

Il apparait là aussi (à température finie) que la méthode de Lipkin-Nogami induit une renormalisation des probabilités d'occupation par l'inclusion d'un terme supplémentaire $4\lambda_2 v_\nu^2$.

2.3.2 Application

Energie :

L'énergie de la méthode de Lipkin-Nogami est donnée par :

$$E_{LN} = E_{BCS} - \lambda_2 \langle \Delta N^2 \rangle \quad (2.36)$$

soit alors :

$$E_{LN} = \sum_{\nu \rangle 0} (\varepsilon_\nu - G v_\nu^2) \left[1 - \frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{E_\nu} \tanh \left(\frac{1}{2} \beta E_\nu \right) \right] - \frac{\Delta^2}{G} + G \sum_{\nu \rangle 0} v_\nu^4 - \lambda_2 \langle \Delta N^2 \rangle \quad (2.37)$$

où l'expression de $\langle \Delta N^2 \rangle$ est [12] :

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \Delta N_{QF}^2 + \Delta N_{SF}^2 \quad (2.38)$$

Avec :

$$\Delta N_{QF}^2 = 4 \sum_{\nu \rangle 0} u_\nu^2 v_\nu^2 (1 - 2\eta_\nu) \quad (2.39)$$

$$\Delta N_{SF}^2 = 2 \sum_{\nu \rangle 0} (u_\nu^2 - v_\nu^2)^2 \eta_\nu (1 - \eta_\nu) + 8 \sum_{\nu \rangle 0} u_\nu^2 v_\nu^2 \eta_\nu^2 \quad (2.40)$$

où ΔN_{QF}^2 représente les fluctuations quantiques, qui dominant à basse température et ΔN_{SF}^2 les fluctuations statistiques qui dominant à haute température.

Capacité calorifique :

La capacité calorifique C_{LN} de la méthode de Lipkin-Nogami est définie par [12] :

$$C_{LN} = \frac{dE_{LN}}{dT} = C_{BCS} - \lambda_2 \frac{d\Delta N^2}{dT} - \Delta N^2 \frac{d\lambda_2}{dT} \quad (2.41)$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta N^2}{dT} = & \Delta \frac{d\Delta}{dT} \sum_{\nu \downarrow 0} \tanh \left(\frac{\beta E_\nu}{2} \right) \\ & \left[\beta E_\nu^{-1} \sec h^2 \left(\frac{\beta E_\nu}{2} \right) \left(E_\nu^{-2} \Delta^2 - \frac{1}{2} \right) + 2E_\nu^{-4} (\varepsilon_\nu - \lambda_{LN})^2 \tanh \left(\frac{\beta E_\nu}{2} \right) \right] \\ & - \beta^2 \sum_{\nu \downarrow 0} E_\nu \left(E_\nu^{-2} \Delta^2 - \frac{1}{2} \right) \tanh \left(\frac{\beta E_\nu}{2} \right) \sec h^2 \left(\frac{\beta E_\nu}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

et en tenant compte de (2.19) :

$$\begin{aligned} \lambda_2 = & \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dN} = \frac{1}{2} \left[\sum_{\nu \downarrow 0} E_\nu^{-3} f(\beta, E_\nu) \right] \times \\ & \left[\Delta^2 \left[\sum_{\nu \downarrow 0} E_\nu^{-3} f(\beta, E_\nu) \right]^2 + \left[\sum_{\nu \downarrow 0} (\varepsilon_\nu - \lambda_{LN}) E_\nu^{-3} f(\beta, E_\nu) \right]^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \beta \left[\sum_{\nu \downarrow 0} \sec h^2 \left(\frac{\beta E_\nu}{2} \right) \right] \left[\sum_{\nu \downarrow 0} E_\nu^{-3} f(\beta, E_\nu) \right]^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.43)$$

avec : $f(\beta, E_\nu) \equiv \tanh \left(\frac{\beta E_\nu}{2} \right) - \frac{1}{2} \beta E_\nu \sec h^2 \left(\frac{\beta E_\nu}{2} \right)$

On notera que la contribution du terme $\Delta N^2 \frac{d\lambda_2}{dT}$ dans l'expression de la capacité calorifique sera discutée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Résultats numériques et discussion

3.1 Cas schématique : Modèle de Richardson

Nous avons dans une première étape appliqué les méthodes BCS et Lipkin-Nogami à température finie dans le cas d'un modèle schématique : le modèle de Richardson [55]. C'est un modèle qui considère que les niveaux d'énergie sont doublement dégénérés et équidistants, tels que $\epsilon_\nu = \nu$. L'écart entre les niveaux est égal à $1MeV$. La dégénérescence totale du nombre de paires de particules Ω , est telle que $\Omega = n$, où n désigne le nombre de particules constituant le système. Nous avons considéré les 4 cas suivants :

n	G
8	0.48
10	0.435
12	0.403
16	0.361

Aussi, nous avons élaboré un code de calcul qui permet de résoudre les équations du gap généralisées dans le cadre des deux approches BCS et Lipkin-Nogami. Sur la figure 3.1, nous avons reporté la variation du paramètre du gap Δ en fonction de la température. Nous avons noté sur l'ensemble des résultats obtenus que les courbes obtenues par l'approche BCS présentent l'existence d'un large plateau puis une décroissance progressive du paramètre Δ jusqu'à son annulation à une température T_c , appelée température critique qui se situe

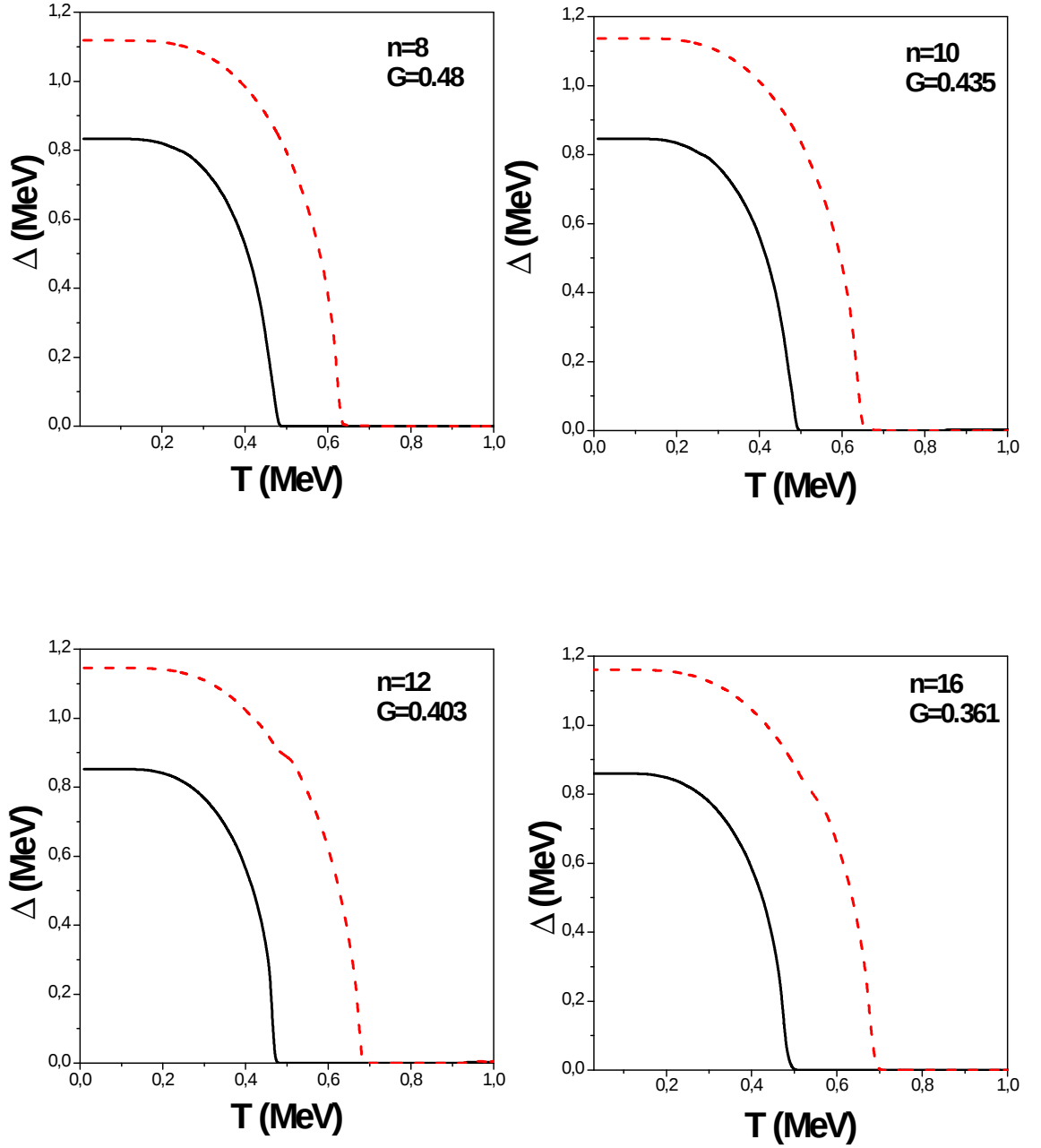


FIG. 3.1 – Variation du paramètre du gap en fonction de la température. En traits continus correspondent aux résultats de la méthode BCS, en tirets à ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.

à environ $0,5MeV$. Concernant les prévisions du modèle de Lipkin-Nogami, nous avons noté que l'allure de la courbe représentative du modèle est analogue à celle de l'approche BCS. Cependant, nous avons noté les observations suivantes :

1. La valeur du paramètre Δ estimée par l'approche de Lipkin-Nogami à température nulle est nettement supérieure à celle de BCS.
2. Un décalage de la température critique. En effet, T_c estimée par l'approche de Lipkin-Nogami est supérieure à celle de BCS. Cet écart varie suivant les cas de $0.13MeV$ à $0.2MeV$.

Ces constatations mettent en évidence l'importance des fluctuations du nombre de particules. Leur contribution est non négligeable. Il semble donc nécessaire de procéder à leur élimination.

Aussi, nous avons évalué les fluctuations de nombre de particules en fonction de la température. Afin de mieux apprécier la contribution de chacun des types de fluctuations définies par (2.39) et (2.40), nous avons reporté sur la figure 3.2 la variation de ces deux types de fluctuations en fonction de la température dans le cas de l'approche BCS. On constate que la contribution des fluctuations quantiques est dominante dans la région $T < T_c$, alors que les fluctuations statistiques ont une contribution dominante dans la région $T > T_c$. Ce sont donc les fluctuations quantiques qui sont principalement responsables de l'écart entre les courbes représentatives de Δ_{BCS} et de Δ_{LN} . Par contre, l'effet des fluctuations statistiques sur le paramètre du gap n'apparaît pas car, dans la région $T > T_c$, ce paramètre est nul.

Dans une seconde partie, nous avons étudié la variation de deux grandeurs physiques : l'énergie du système et la capacité calorifique en fonction de la température. Nous avons reporté sur les figures 3.3 et 3.5 les prévisions obtenues par les deux approches. Concernant l'énergie nous remarquons que :

1. L'écart est constant dans la région $T < T_c(BCS)$, estimé d'environ $0.6MeV$. L'écart relatif, quant à lui, diminue avec n : pour $n = 8$, il est de 3 % ; pour $n = 16$: 0,9 %.
2. Dans la région $T_c(BCS) < T < T_c(LN)$ l'écart est variable, il est estimé au maximum de l'ordre de $0.9MeV$.
3. L'écart est constant dans la région $T > T_c(LN)$, de l'ordre de $1MeV$

On déduit alors que la contribution du terme correctif dans l'énergie de Lipkin-Nogami est non-négligeable et sa contribution diffère suivant les régions.

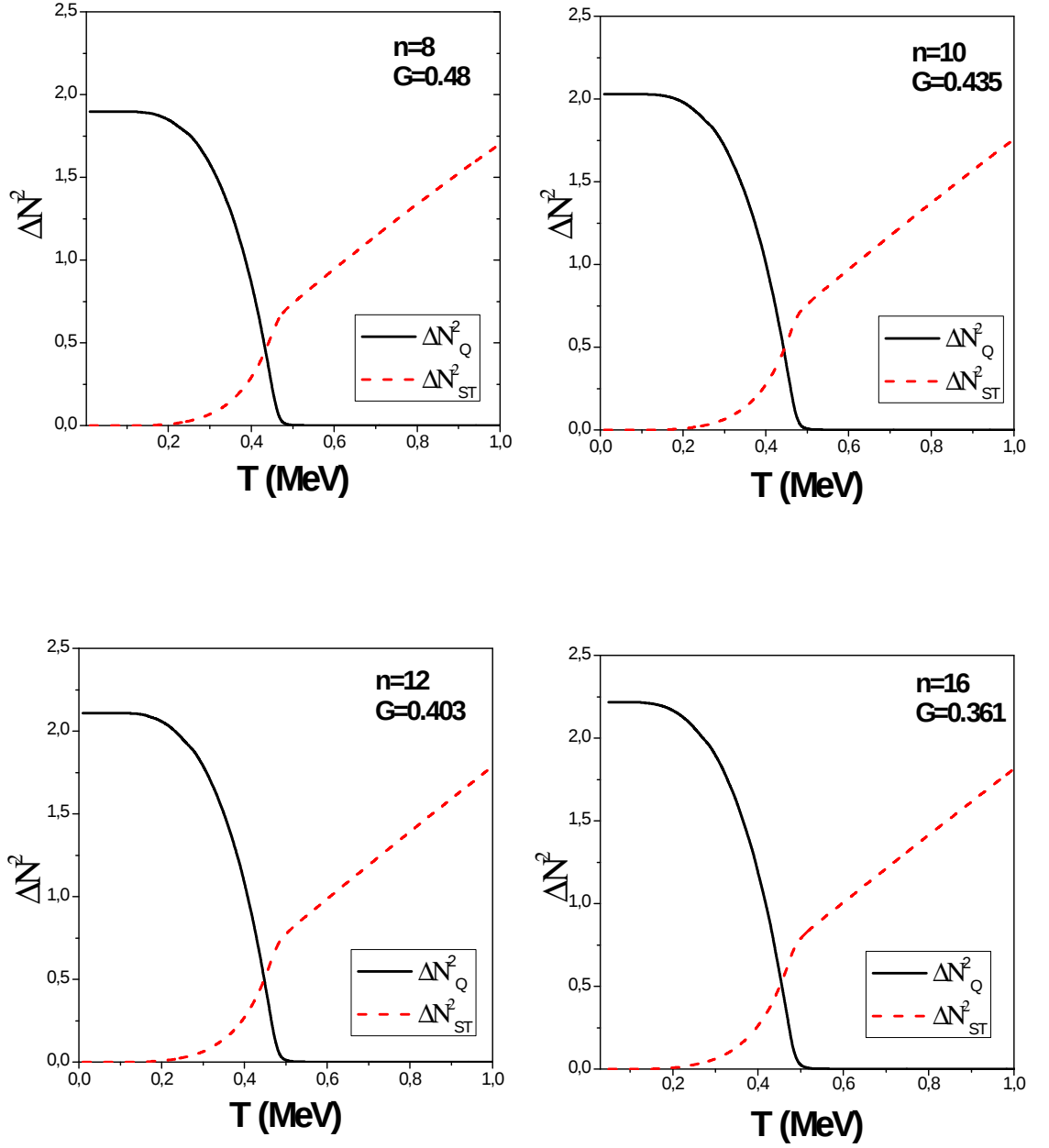


FIG. 3.2 – Variation (par la méthode BCS) des fluctuations du nombre de particules en fonction de la température. En traits continus : les fluctuations quantiques, en tirets : les fluctuations statistiques.

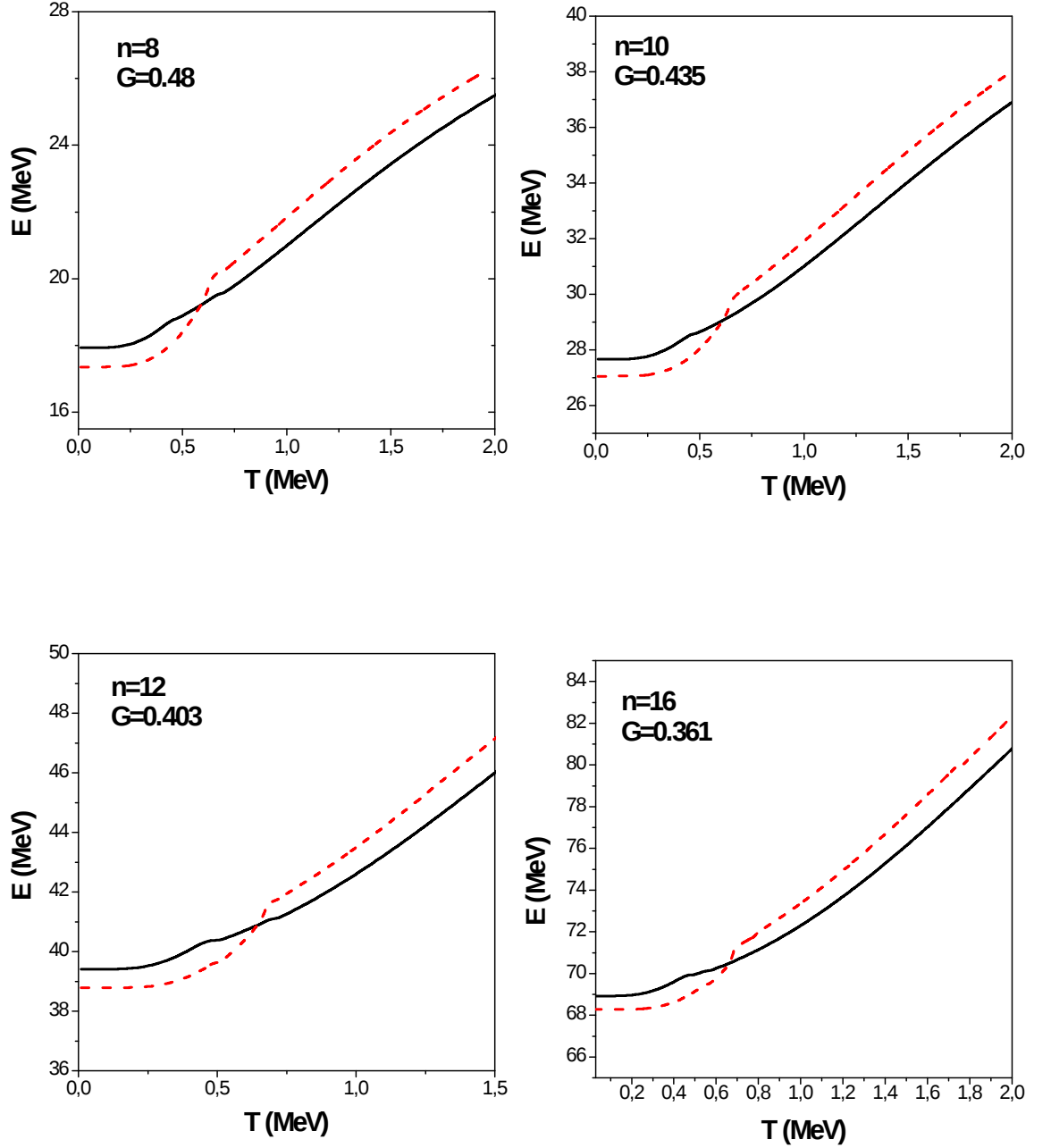
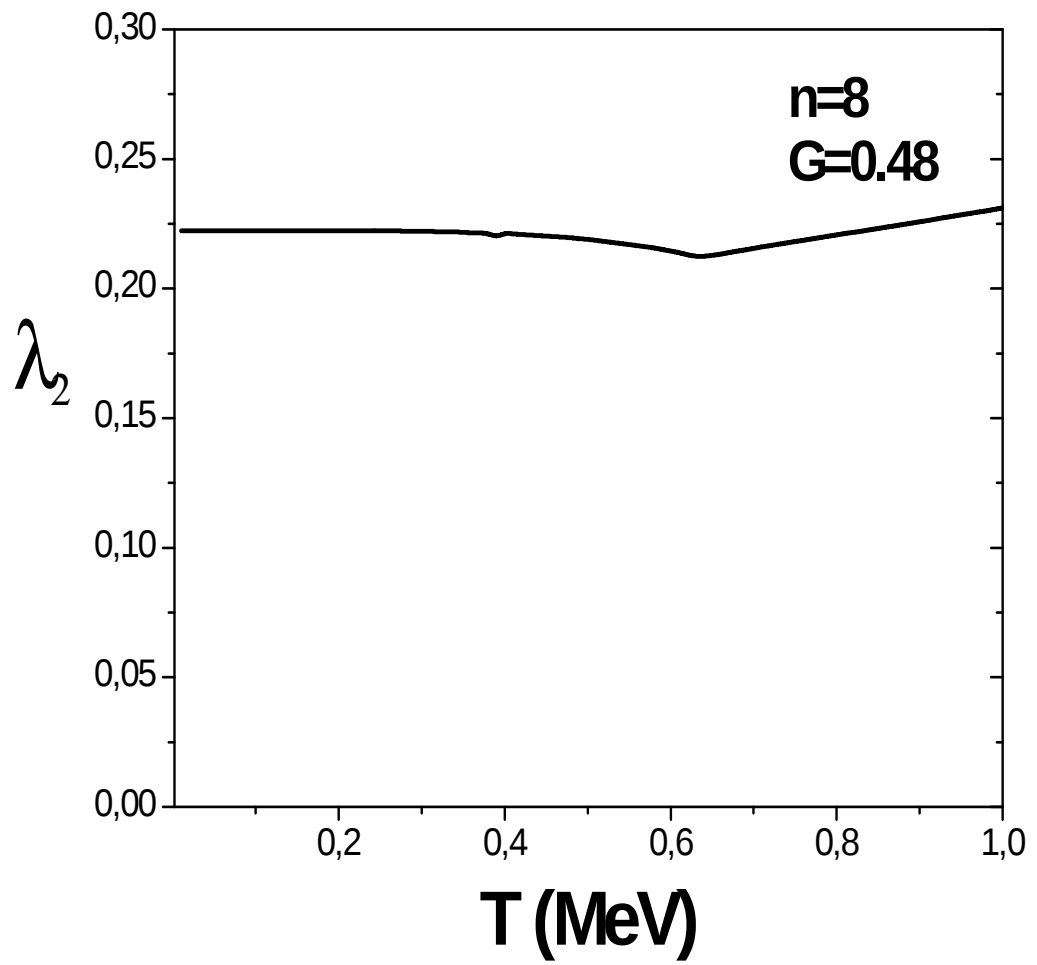


FIG. 3.3 – Variation de l'énergie en fonction de la température. Les traits continus correspondent aux résultats de la méthode BCS, les tirets à ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.

On constate par ailleurs que dans la région où les fluctuations quantiques prédominent, l'énergie obtenue par l'approche de Lipkin-Nogami est inférieure à celle de BCS. Cependant, en dehors de cette région, l'énergie du modèle de Lipkin-Nogami est supérieure à celle de BCS. Ceci est principalement dû au fait que le modèle de Lipkin-Nogami renormalise les probabilités d'occupation en ajoutant le terme $4\lambda_2 v_i^2$.

Pour ce qui concerne la capacité calorifique, nous avons tout d'abord tracé la variation du paramètre λ_2 en fonction de la température. Les résultats obtenus sont reportés sur la figure 3.4. L'ensemble de ces résultats a permis de noter que ce paramètre en moyenne reste constant, sa variation en fonction de la température est donc faible. De ce fait, la contribution du dernier terme correctif $\frac{d\lambda_2}{dT}$ introduit dans l'expression de la capacité C_{LN} (2.41) est donc négligeable et par conséquent, dans tout ce qui suit, ce terme sera négligé.

De la figure 3.5, il ressort que l'effet des fluctuations quantiques est important au voisinage de la température critique. En effet, la transition de phase de l'état superfluide vers l'état normal dans le cadre du modèle de Lipkin-Nogami est plus flagrante comparativement aux prévisions de l'approche BCS. Ces résultats sont en accord avec les résultats obtenus lors de l'étude de l'énergie du système. De plus, nous constatons que pour $T > T_c(LN)$ les deux prévisions sont assez proches. On déduit donc que l'effet des fluctuations statistiques est faible.

FIG. 3.4 – Variation du paramètre λ_2 en fonction de la température.

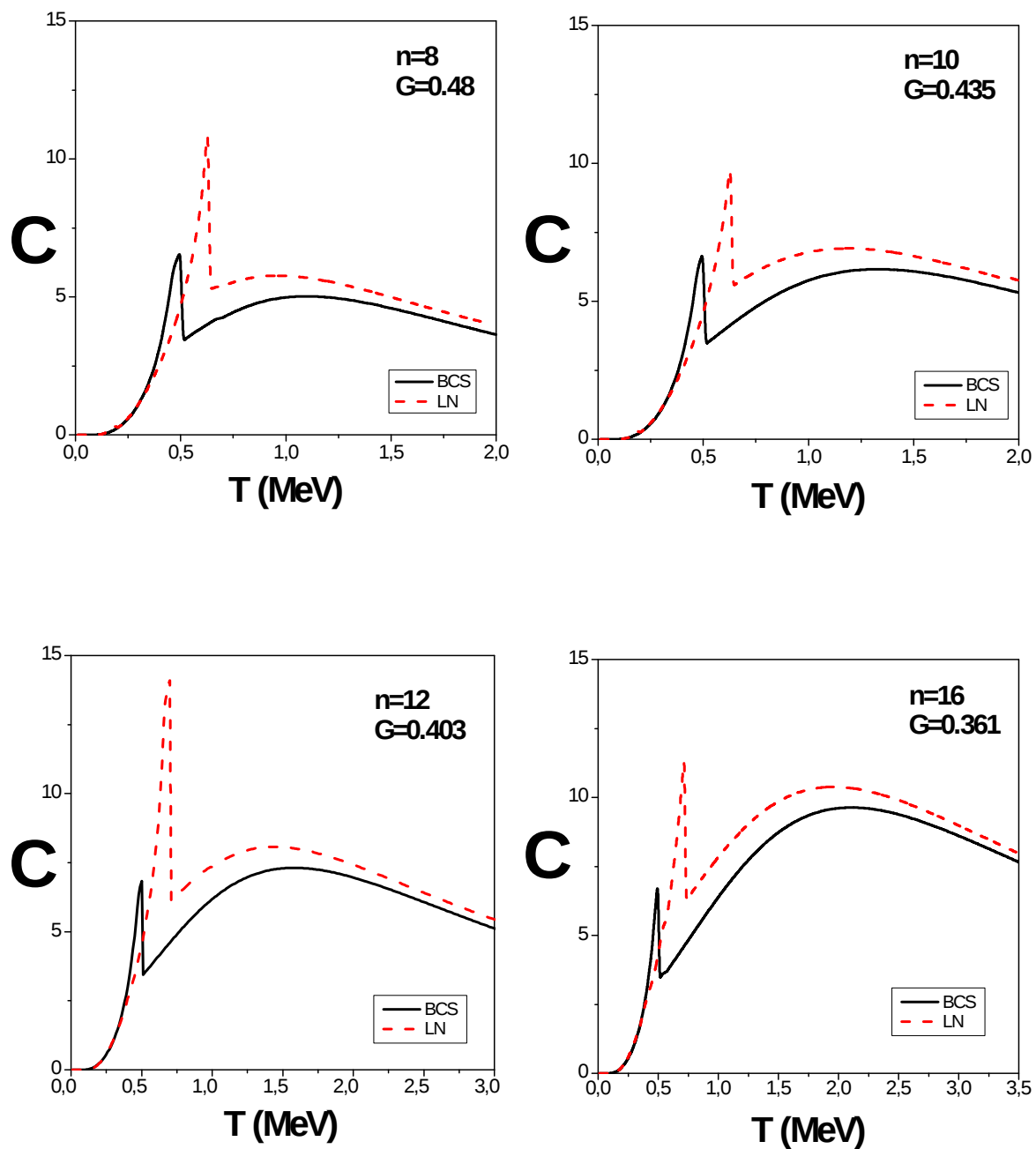


FIG. 3.5 – Variation de la capacité calorifique en fonction de la température. Les traits continus correspondent aux résultats de la méthode BCS, les tirets à ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.

3.2 Cas Réaliste

3.2.1 Détails de calcul

Modèle à particules indépendantes : L'approximation faite par le modèle à particules indépendantes consiste à admettre que l'interaction s'exerçant entre un nucléon et les $(A - 1)$ autres nucléons, peut être simulée par un puits de potentiel V . Ce potentiel moyen n'est qu'une première approximation de l'interaction des nucléons au sein du système nucléaire. Dans le présent travail, nous avons utilisé les énergies et états propres d'un champ moyen déformé de Woods-Saxon [54].

- **Champ moyen de Woods-Saxon**

L'interactions entre deux nucléons est de faible portée. On lui attribue alors une intensité proportionnelle à la densité de nucléons, en lui associant une profondeur V_0 et une allure caractérisée par une surface diffuse.

Dans le cas des noyaux sphériques ou faiblement déformés, la densité des nucléons a la forme d'une fonction de Fermi, soit [56] :

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R_0}{a_0}\right)} \quad (3.1)$$

où

ρ_0 représente la densité centrale,

a_0 est l'épaisseur de la surface,

$(r - R_0)$ représente la distance du nucléon à la surface effective,

R_0 est le rayon de surface.

Le potentiel moyen appelé potentiel de Woods-Saxon [54] suit la même distribution que la densité, soit :

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R_0}{a_0}\right)} \quad (3.2)$$

L'expression (3.2) a été généralisée pour décrire des noyaux très déformés en particulier lors du processus de fission. Cette généralisation consiste à introduire la fonction quasi-rayon $l(r)$, nulle à la surface nucléaire. Le potentiel moyen de Woods-Saxon s'écrit alors :

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{R_V}{a_V} l(r)\right)} \quad (3.3)$$

où R_V représente le rayon de la surface.

Le caractère à courte portée des interactions entre nucléons impose la stabilité de l'épaisseur de peau a_V au cours de la déformation, ceci n'est réalisé que si $V(r)$ varie le long de la surface avec un gradient constant en tout point de celle-ci. Dans le but de vérifier cette condition la fonction quasi-rayon $l(r)$ prend la forme suivante :

$$l(r) = \frac{S(r)}{|\nabla S(r)|} \quad (3.4)$$

où $S(r) = \sqrt{\pi - \pi_{\min}} - \sqrt{-\pi_{\min}}$ où π représente la forme implicite de la surface nucléaire et $\pi_{\min}$ la valeur minimum de cette fonction.

La fonction de surface $S(r)$ doit être choisie de façon à ce que $l(r)$ tende, pour les faibles déformations, vers la fonction $(\frac{r}{R} - 1)$ pour les noyaux sphériques.

• Hamiltonien du modèle à particules indépendantes

Dans le modèle en couches, le mouvement de chaque nucléon est décrit par l'hamiltonien :

$$H = T + V + V_{s.o} + V_c \quad (3.5)$$

où T représente l'opérateur énergie cinétique donné par l'expression :

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \quad (3.6)$$

avec m : la masse du nucléon et Δ : l'opérateur laplacien.

V est le potentiel central moyen de Woods-Saxon défini précédemment par l'expression (3.3).

$V_{s.o}$ est l'opérateur d'interaction spin-orbite donné par :

$$V_{s.o} = -\frac{K}{\hbar^2} \left[\vec{\nabla} V \cdot (\vec{\sigma} \wedge \vec{p}) \right] = -i\frac{K}{\hbar} \vec{\sigma} \cdot \left[\vec{\nabla} V \wedge \vec{\nabla} \right] \quad (3.7)$$

où $\vec{\sigma} = 2\vec{s}$ est le vecteur spin de Pauli, $\vec{p}$ le vecteur impulsion et K une constante de couplage.

Si le nucléon est un proton, l'énergie coulombienne intervient et, pour une distribution volumique de charge $\rho(M)$ au point M , cette énergie est donnée par :

$$E_c = -\frac{1}{2} \iint_{vv'} \frac{\rho(M) \rho(M')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau d\tau' \quad (3.8)$$

$d\tau$ et $d\tau'$ sont les éléments de volume autour des points M et M' .

D'autre part, le potentiel coulombien est défini par :

$$V_c(\vec{r}) = \int_v \frac{\rho(M')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \quad (3.9)$$

En faisant l'approximation d'une distribution de charge uniforme :

$$\rho(M) = \rho(M') = \rho_{ch}$$

et, par conséquent, l'énergie coulombienne devient :

$$E_c = \frac{\rho_{ch}}{2} \int V_c(\vec{r}) d\tau \quad (3.10)$$

Enfin, en exploitant le fait que :

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2'|} = -\vec{\nabla} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2'}{2|\vec{r}_1 - \vec{r}_2'|} \quad (3.11)$$

Compte tenu de 3.11, on obtient l'opérateur potentiel coulombien V_c qui s'écrit :

$$V_c = -\frac{\rho_{ch}}{2} \int_S \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s}' \quad (3.12)$$

cet opérateur n'a lieu que s'il s'agit d'un proton.

• Paramètres du modèle

Les paramètres du champ moyen utilisés dans le présent travail sont ceux adoptés par Pauli [56]. Ces valeurs ont été obtenues en ajustant les valeurs des énergies du modèle à particules indépendantes à celles des niveaux spectroscopiques de quelques noyaux stables. Ainsi, les paramètres du potentiel sont donnés par :

$$V_0\left(\frac{N}{Z}\right) = -53.6 \pm 45.0 \bar{\delta} \quad (3.13)$$

$$R_V\left(\frac{N}{Z}\right) = R_V^0\left(\frac{N}{Z}\right) \left[1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{a_V}{R_V^0\left(\frac{N}{Z}\right)} \right)^2 \right] \quad (3.14)$$

avec

$$R_V^0 \left(\frac{N}{Z} \right) = R_0 - \frac{0.56}{R_0} + 0.82 \mp 0.22 \bar{\delta} \quad (3.15)$$

$$R_0 = r_0 A^{1/3} (1 + \bar{\varepsilon}) \quad (3.16)$$

$$\bar{\delta} = \frac{\frac{N-Z}{A} + 0.0112 Z^2 A^{-5/3}}{1 + 3.15 A^{-1/3}} \quad (3.17)$$

$$\bar{\varepsilon} = -0.147 A^{-1/2} + 0.330 \bar{\delta}^2 + 0.00248 Z^2 A^{-4/3} \quad (3.18)$$

$$a_V = 0.66 \text{ fm} \quad (3.19)$$

$$r_0 = 1.16 \text{ fm} \quad (3.20)$$

Etant donné que le champ spin-orbite suit approximativement la distribution de la densité nucléaire, le rayon de cette distribution est donné par une forme analogue à l'expression (3.14), soit :

$$R_{SO} \left(\frac{N}{Z} \right) = R_0 \left[1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{a_{SO}}{R_0} \right)^2 \right] \quad (3.21)$$

avec $a_{SO} = 0.55 \text{ fm}$

La constante de couplage spin-orbite K est donnée par :

$$K = 12 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^2$$

D'autre part, nous avons introduit une troncature dans la base utilisée où nous nous sommes restreints à un nombre de couches $N_{\max} = 12$ qui suffit à assurer la stabilité des résultats.

• Energies et fonctions d'onde individuelles

Dans le but de résoudre l'équation de Schrödinger :

$$H \psi_\nu = [T + V + V_{s.o} + V_c] \psi_\nu = \varepsilon_\nu \psi_\nu \quad (3.22)$$

où ψ_ν et ε_ν représentent respectivement la fonction d'onde et l'énergie individuelle ; on considère que les formes nucléaires possèdent une symétrie axiale et on choisira les fonctions propres de l'oscillateur harmonique déformé comme base de représentation, données en représentation (r, z, φ) par :

$$\langle r z \varphi \mid n_r n_z \Lambda \Sigma \rangle = \psi_{n_r}^\Lambda(\eta) \psi_{n_z}(\xi) \psi_\Lambda(\varphi) \chi(\Sigma) \quad (3.23)$$

où n_r et n_z sont les nombres de noeuds des fonctions propres dans les directions $\vec{Or}$ et $\vec{Oz}$, et Λ et Σ sont les valeurs propres des projections du moment orbital L_z et du moment de spin S_z sur l'axe de symétrie.

La fonction d'onde de spin est définie par :

$$\chi\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Les fonctions d'onde normalisées de l'oscillateur harmonique sont définies par :

$$\begin{aligned} \psi_\Lambda(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\Lambda\varphi} \\ \psi_{n_z}(\xi) &= N_{n_z} a_z^{1/2} e^{-\xi^2/2} H_{n_z}(\xi) \\ \psi_{n_r}^\Lambda(\eta) &= N_{n_r}^\Lambda \sqrt{2} a_\perp \eta^{\Lambda/2} e^{-\eta/2} L_{n_r}^\Lambda(\eta) \end{aligned} \quad (3.25)$$

où

$$\begin{aligned} \eta^{1/2} &= a_\perp r \quad \text{et} \quad \xi = a_z z \\ a_z &= \sqrt{\frac{m \omega_z}{\hbar}}, \quad a_\perp = \sqrt{\frac{m \omega_\perp}{\hbar}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$N_{n_r}^\Lambda$ et N_{n_z} sont des constantes de normalisation données par :

$$\begin{aligned} N_{n_z} &= [\sqrt{\pi} 2^{n_z} n_z!]^{-\frac{1}{2}} \\ N_{n_r}^\Lambda &= \left[\frac{n_r!}{(n_r + \Lambda)!} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$H_{n_z}(\xi)$ et $L_{n_r}^\Lambda(\eta)$ sont respectivement les polynômes d'Hermite et de Laguerre généralisé.

La diagonalisation de l'équation de Schrödinger permet de déterminer les énergies individuelles ainsi que les états propres correspondants.

Choix de la constante d'appariement G

Le choix de la constante G est fondamental pour la détermination de la demi-largeur du gap. La plupart des études antérieures se basent soit sur l'expression de G dépendant de l'isospin proposée par Nilsson et al. [57] :

$$G = \frac{1}{A} [19.2 \pm 7.4 I] \quad , I = \frac{N - Z}{A} \quad (3.28)$$

ou sa version améliorée :

$$G = \frac{18.95}{A} (1 \pm 0.79I + 3.4I^2) \quad (3.29)$$

soit sur l'expression proposée par Pauli [56] :

$$G = \frac{45}{A \ln \left(\frac{4}{3} \sqrt{A} \right)} \quad (3.30)$$

où l'on a adopté les notations habituelles : A représente le nombre de masse, Z le numéro atomique et N le nombre de neutrons.

En général, les paramètres intervenant dans l'expression de G ne relèvent pas de considérations physiques, mais sont déterminés par fitage. Dans le présent travail, nous avons préféré déterminer cette constante de manière à reproduire la valeur expérimentale de la demi-largeur du gap Δ . Cette dernière est obtenue à partir des différences de masse pair-impair, soit : [58]

$$\Delta_n = -\frac{1}{8} [M(Z, N+2) - 4M(Z, N+1) + 6M(Z, N) - 4M(Z, N-1) + M(Z, N-2)] \quad (3.31)$$

$$\Delta_p = -\frac{1}{8} [M(Z+2, N) - 4M(Z+1, N) + 6M(Z, N) - 4M(Z-1, N) + M(Z-2, N)] \quad (3.32)$$

où $M(Z, N)$ représente la masse du noyau considéré. Les masses utilisées dans les expressions précédentes sont les masses expérimentales de la ref. [58]

3.2.2 Résultats numériques

Dans une seconde étape de notre travail, nous avons considéré des cas réalistes. Nous nous sommes particulièrement intéressé à deux noyaux : le ^{152}Sm et le ^{156}Gd . Nous avons appliqué le même code de calcul que dans le cas du modèle schématique pour résoudre les équations du gap généralisées dans le cas du modèle réaliste. Ceci nous a permis de tracer les courbes de la demi largeur du gap, de l'énergie et de la capacité calorifique.

Sur les figures 3.6 et 3.7, nous avons reporté la variation du paramètre du gap Δ pour les deux éléments pour les deux systèmes : neutron et proton. Aussi, nous avons noté que les résultats de la méthode de Lipkin-Nogami présentent une allure analogue à celle de l'approche BCS, aussi bien dans le cas neutron que proton. Cependant, comme dans le cas schématique, nous avons relevé les constatations suivantes :

1-A température nulle, le paramètre Δ de l'approche de Lipkin-Nogami est supérieur à celle de BCS aussi bien dans le cas proton que neutron.

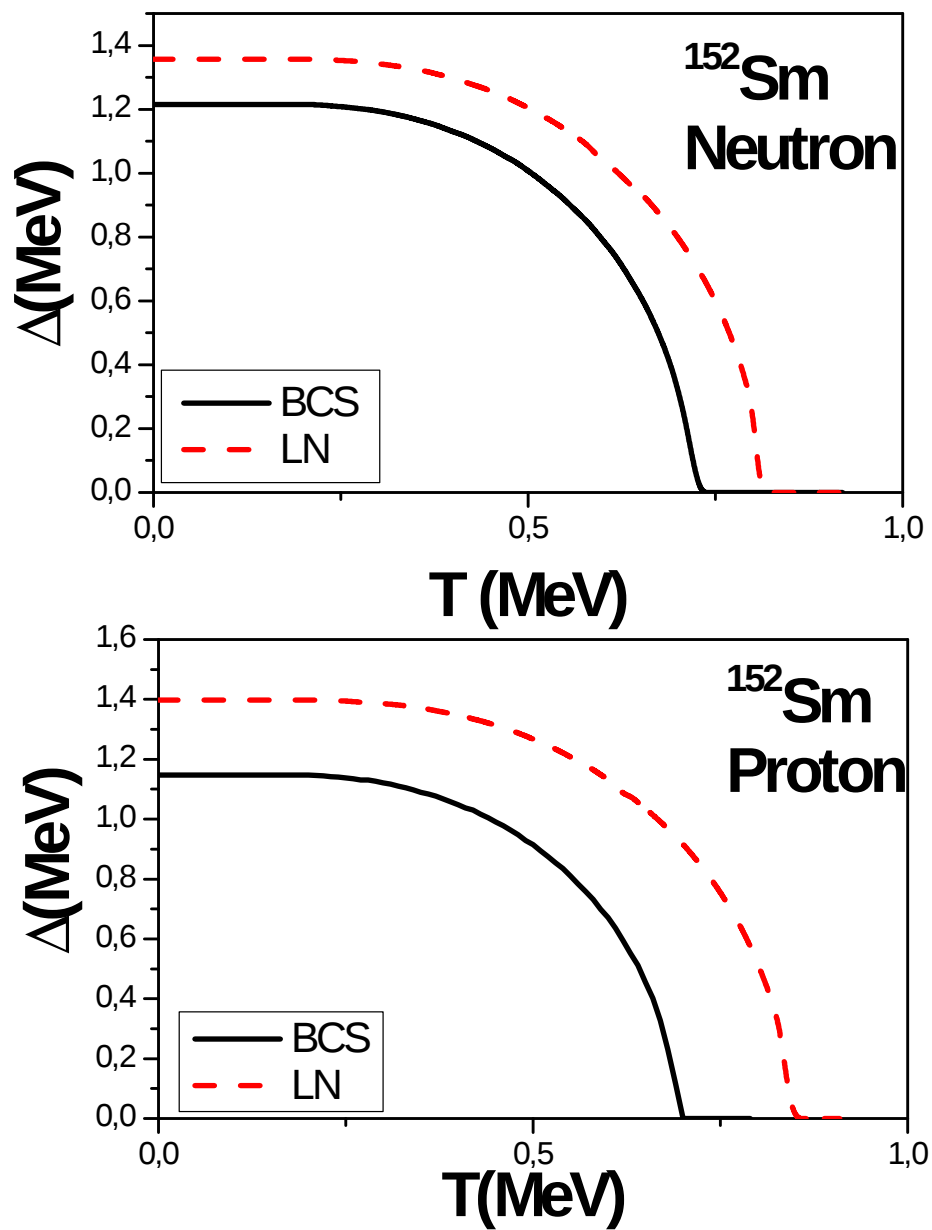


FIG. 3.6 – Variation du paramètre du gap en fonction de la température pour le noyau Samarium 152. En traits continus, les résultats de la méthode BCS, en tirets, ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.

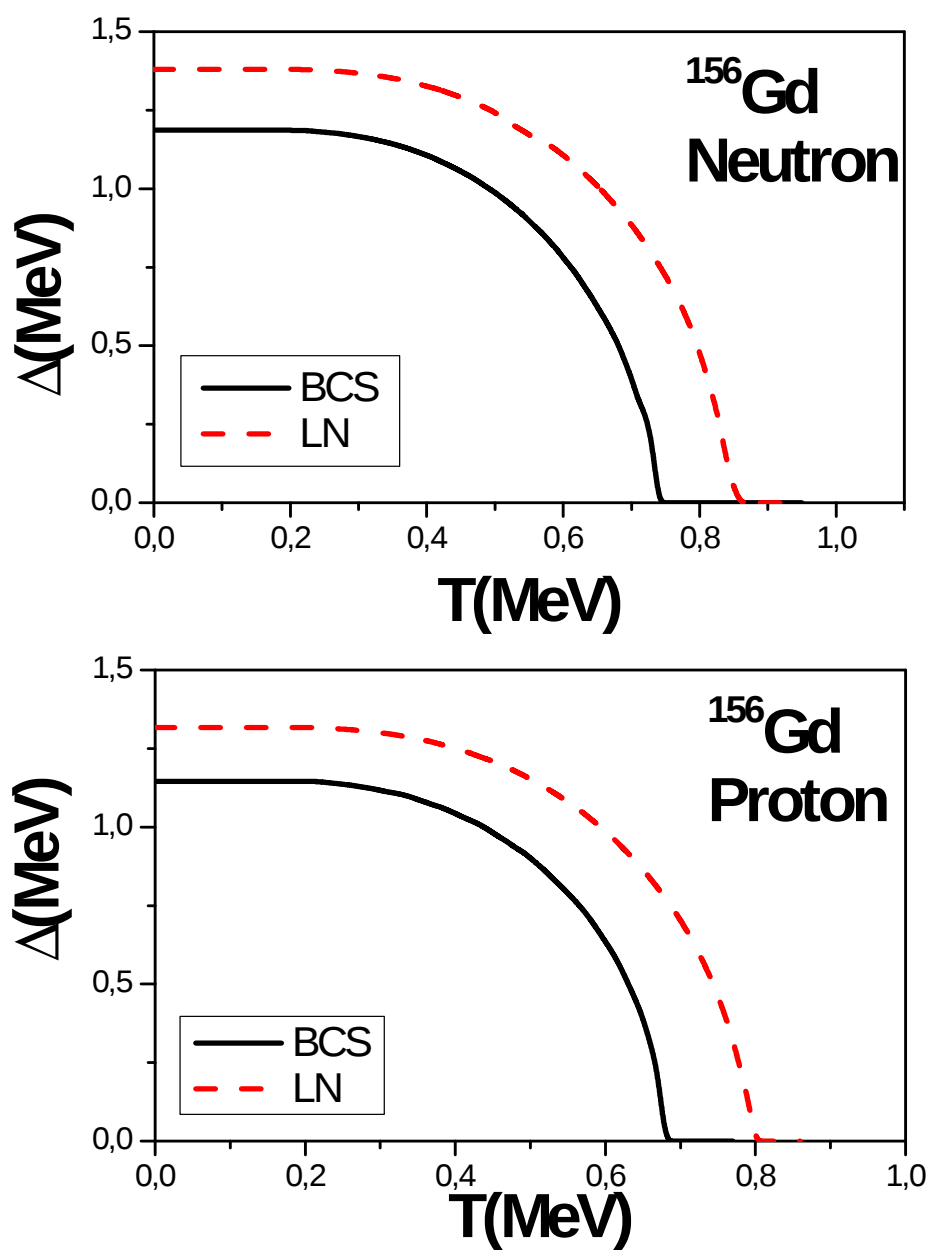


FIG. 3.7 – Variation du paramètre du gap en fonction de la température pour le noyau Gadolinium 156. En traits continus, les résultats de la méthode BCS, en tirets, ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.

2- Un décalage entre les températures critiques estimées par l'approche BCS et celles déduites par la méthode Lipkin-Nogami. Ces écarts sont évalués en MeV et reportés dans le tableau suivant :

^{152}Sm		$^{156}\text{Gd.}$	
Proton	Neutron	Proton	Neutron
0,25	0,12	0,23	0,20

Il apparait clairement que l'effet des fluctuations du nombre de particules est important et qu'il est non négligeable, confirmant ainsi les mêmes constatations faites dans le cas schématique. Il semblerait donc que l'écart des paramètres du gap à température nulle induit le décalage des températures critiques.

Dans une seconde étape, nous avons procédé à l'évaluation de l'énergie du système. Les résultats obtenus sont reportés dans les figures 3.8 et 3.9. De ces dernières, il ressort que :

1. L'écart est constant dans la région $T < T_c(BCS)$, estimé en moyenne de l'ordre de 0.5MeV dans le cas neutron et 1MeV dans le cas proton. Dans ce cas les prévisions de l'approche Lipkin-Nogami sont inférieures à celles de BCS

2. Dans la région $T_c(BCS) < T < T_c(LN)$, les deux courbes se croisent

3. L'écart est constant dans la région $T > T_c(LN)$, estimé en moyenne de l'ordre de 0.5MeV dans le cas neutron et 1MeV . Dans ce cas les prévisions de l'approche Lipkin-Nogami sont supérieures à celles de BCS

On déduit alors que la contribution du terme correctif dans l'énergie de Lipkin-Nogami est ici aussi non négligeable et sa contribution diffère suivant les régions. On constate par ailleurs que dans la région où les fluctuations quantiques prédominent, l'énergie obtenue par l'approche LN est inférieure à celle de BCS. Cependant, en dehors de cette région, l'énergie du modèle de Lipkin-Nogami est supérieure à celle de BCS. Ceci est principalement dû au fait que le modèle de Lipkin-Nogami renormalise les probabilités d'occupation par l'introduction du terme additionnel $4\lambda_2 v_i^2$.

Pour compléter notre étude, nous avons évalué la capacité calorifique en fonction de la température. Les résultats obtenus sont reportés dans les figures 3.10 et 3.11. Il apparait sur l'ensemble de ces résultats que l'effet des fluctuations quantiques est ici aussi important au voisinage de la température critique.

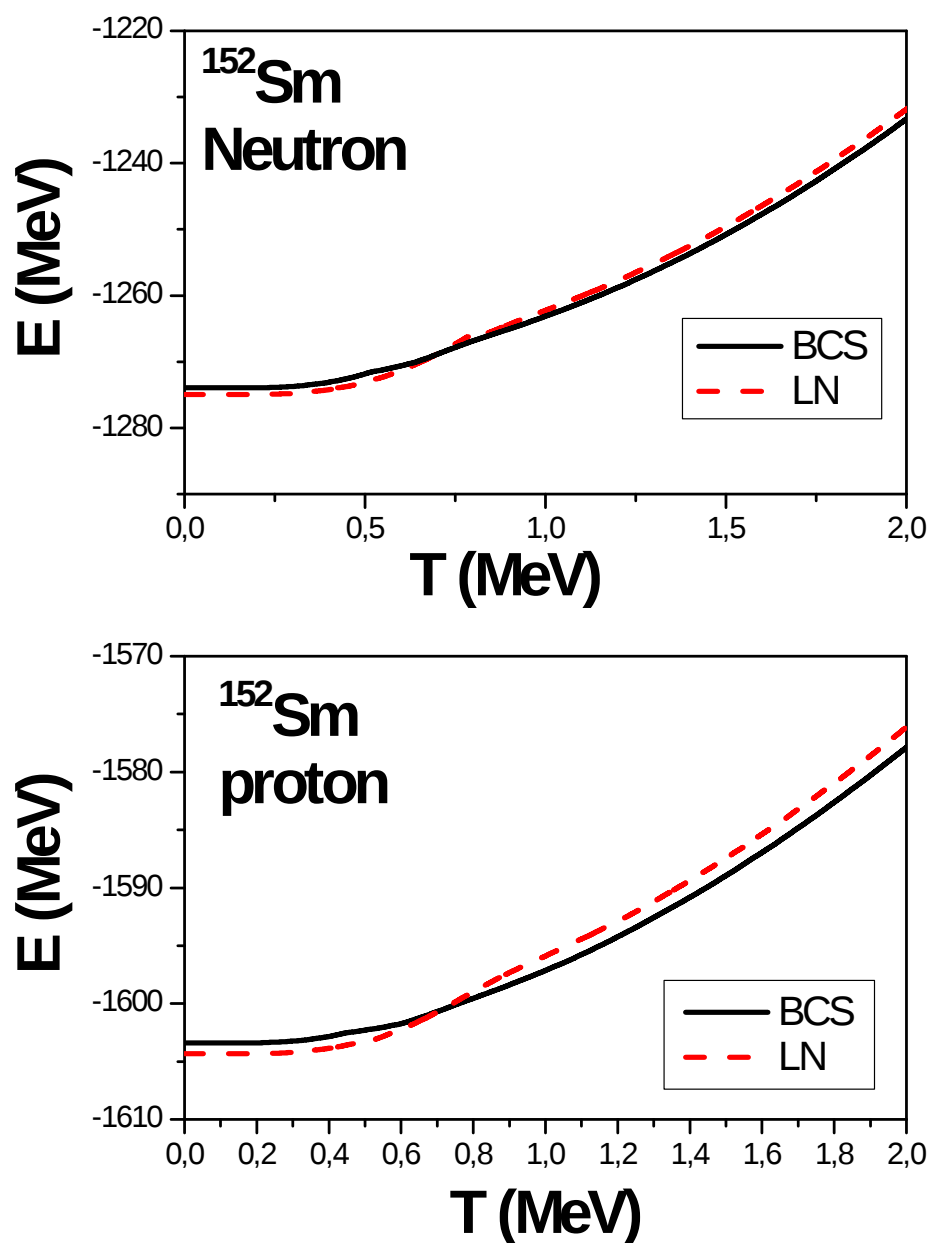


FIG. 3.8 – Variation du paramètre du gap en fonction de la température pour le noyau Samarium 152. En traits continus, les résultats de la méthode BCS, en tirets, ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.

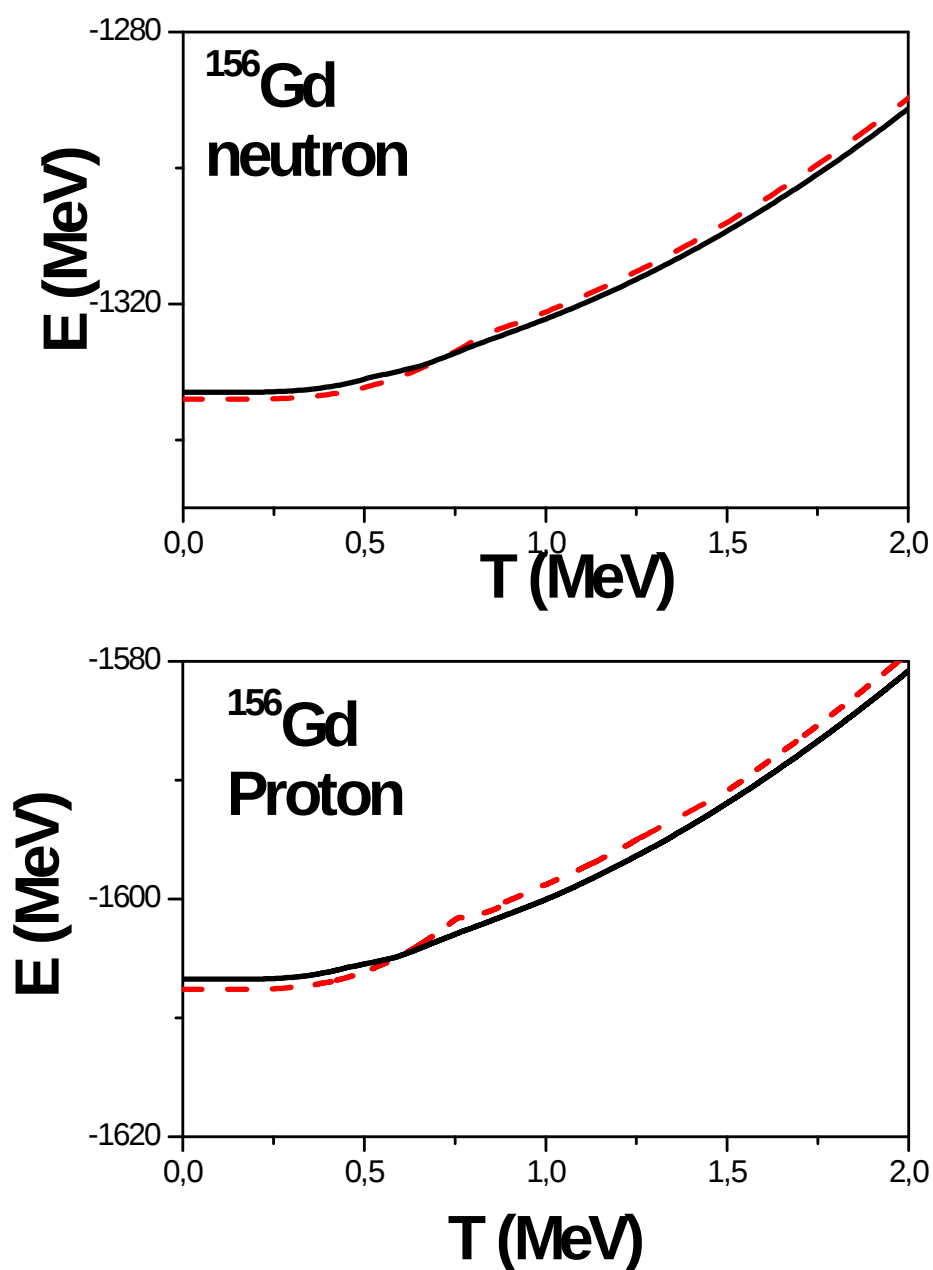
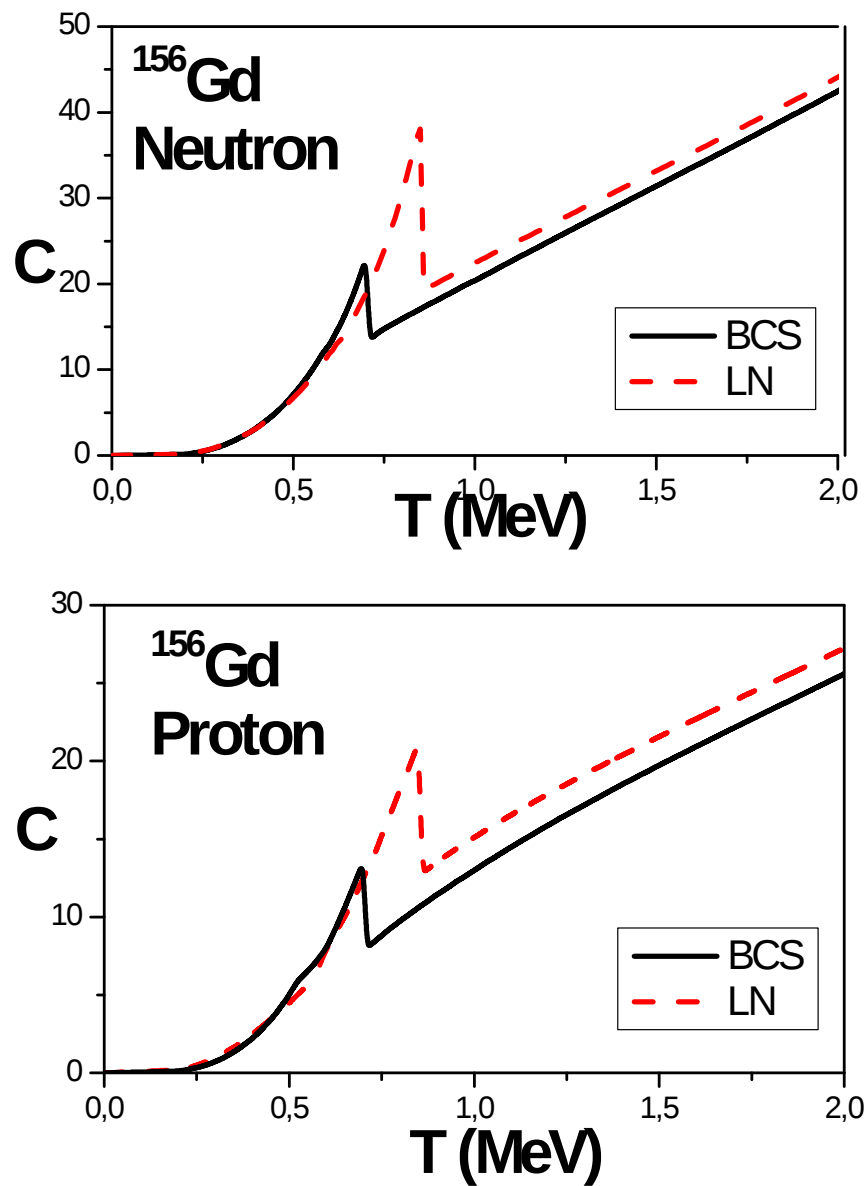


FIG. 3.9 – Variation de l'énergie en fonction de la température pour le noyau Gadolinium 156 . En traits continus, les résultats de la méthode BCS, en tirets, ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.

En effet, la transition de phase de l'état superfluide vers l'état normal dans le cadre du modèle de Lipkin-Nogami est plus flagrante comparée aux prévisions de l'approche BCS. Ces résultats sont en accord avec les résultats obtenus lors de l'étude de l'énergie du système et avec le cas du modèle schématique. De plus, nous constatons que pour $T > T_c(LN)$ l'écart reste constant, confortant les résultats obtenus lors de l'étude de l'énergie.

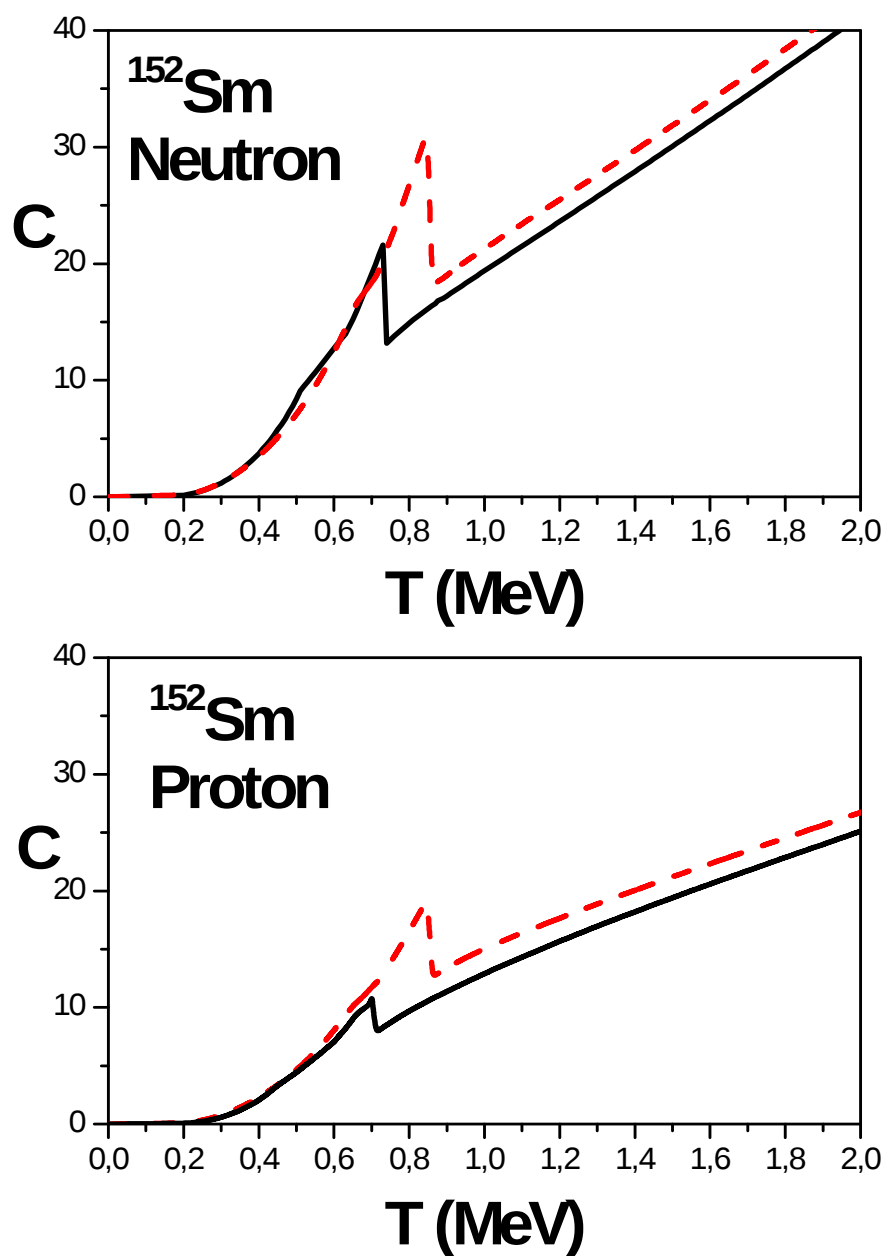
Gd



10.pdf

FIG. 3.10 – Variation de la capacité calorifique en fonction de la température pour le noyau Gadolinium 156. En traits continus, les résultats de la méthode BCS, en tirets, ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.

Sm



11.pdf

FIG. 3.11 – Variation de la capacité calorifique en fonction de la température pour le noyau Samarium 152. En traits continus, les résultats de la méthode BCS, en tirets, ceux de la méthode de Lipkin-Nogami.

Conclusion

Dans le présent travail, nous nous sommes intéressés à l'étude des fluctuations de nombre de particules dans le cas des systèmes chauds. Cette étude a été réalisée dans le cadre d'une approche microscopique incluant les effets d'appariement. Du fait de l'importance de ces derniers, les composantes non physiques dans l'état BCS ont été éliminées au moyen de la méthode de Lipkin-Nogami. Aussi, les équations du gap ont d'abord été rappelées dans le cas des systèmes à température nulle. Ceci nous a permis de noter que l'élimination des fluctuations quantiques s'est traduite par l'inclusion d'un terme additif $4\lambda_2 v_\nu^2$ à l'énergie des particules indépendantes, induisant ainsi une renormalisation des probabilités d'occupation. De plus, l'énergie du système déterminée par cette approche est l'énergie BCS corrigée par un terme dépendant des fluctuations du nombre de particules.

Dans une seconde étape, on a introduit une généralisation de ce formalisme dans le cas des systèmes à température non nulle. Les équations du gap généralisées obtenues sont analogues à celles obtenues à température nulle. La détermination de l'expression analytique de l'énergie nous a permis, là aussi, de noter que la méthode de Lipkin Nogami induit une correction due aux fluctuations du nombre de particules. Ces derniers sont classés en deux types : les fluctuations quantiques dont la contribution est dominante à basses températures et les fluctuations statistiques dont la contribution est dominante pour des hautes températures. L'inculSION de ces deux termes induit une correction de la capacité calorifique de l'approche BCS.

Nous avons ensuite établi notre propre code de calcul que nous avons appliqué dans les deux cas : le cas schématique et le cas réaliste. Dans un premier temps, nous avons évalué deux grandeurs à savoir l'énergie thermodynamique du système et la capacité calorifique dans le cadre du modèle schématique de Richardson par les deux approches : la méthode BCS et la méthode de Lipkin-

Nogami à température finie. L'évaluation du paramètre du gap en fonction de la température nous a permis de noter que :

1. La valeur du paramètre du gap à température nulle obtenue par la méthode de Lipkin-Nogami est nettement supérieure à celle de l'approche BCS.
2. Les allures des courbes obtenues par les deux approches sont similaires. En effet, nous avons noté que les courbes présentent l'existence d'un plateau suivi d'une décroissance jusqu'à l'annulation du paramètre du gap. Notons toutefois que le plateau obtenu par l'approche Lipkin-Nogami est plus large que celui de BCS. Ceci induit le décalage entre les deux température critiques BCS et Lipkin-Nogami.

Ces résultats révèlent donc que l'effet des fluctuations du nombre de particules est non négligeable et qu'il est donc nécessaire de procéder à leur élimination.

Dans une seconde étape, nous avons évalué l'énergie thermodynamique et la capacité calorifique en fonction de la température dans le cadre des deux approches. Concernant l'énergie, les résultats obtenus ont révélé que la contribution du terme correctif est dominante dans la région où $T < T_{cBCS}$. Concernant la capacité calorifique, les résultats ont montré que l'apport des fluctuations du nombre de particules est important au voisinage de la température critique. L'élimination des fluctuations du nombre de particules induit une transition de phase de l'état superfluide à l'état normal abrupte et plus accentuée par rapport aux prévisions de l'approche BCS.

Dans une seconde étape, des cas réalistes ont été considérés. Nous avons utilisé comme énergie et états à particules indépendantes ceux d'un champ moyen déformé de Woods-Saxon. Les calculs numériques ont été effectués dans le cas de deux noyaux : ^{152}Sm et ^{156}Gd . La généralisation de l'étude au cas réaliste a permis de noter les mêmes constatations faites dans le cas schématique et donc de confirmer l'importance des fluctuations du nombre de particules.

D'éventuelles améliorations de nos résultats pourraient être obtenues par la prise en compte des termes d'interactions résiduelles entre quasi-particules dans l'hamiltonien du système. Par ailleurs, le formalisme de la méthode de Lipkin-Nogami pourrait être généralisé dans le cas des systèmes riches en protons dont $N=Z$.

Bibliographie

- [1] J. Dobaczewski, W. Nazarewicz et P.G. Reinhard, *Nucl. Phys.* **A693**, 361 (2001).
- [2] H. Grawe et M. Lewitowicz, *Nucl. Phys.* **A693**, 116 (2001).
- [3] M. Rashdan, *Phys. Rev.* **C63**, 044303 (2001).
- [4] B.K. Agrawal, Tapas Sil, S.K. Samaddar et J.N. De, nucl-th/0111066.
- [5] J. Dobaczewski et W. Nazarewicz, *Prog. Theo. Phys. Suppl.* **146**, 70 (2002).
- [6] B.G. Todd et J. Piekarewicz, *Phys. Rev.* **C67**, 044317 (2003).
- [7] Li-Gang Cao et Zhong-Yu Ma, *Mod.Phys.Lett.* **A19**, 2845 (2004).
- [8] K. Kaneko et M. Hasegawa, *Phys. Rev.* **C72**, 031302(R) (2005).
- [9] N. H. Allal, M. Fellah, M. R. Oudih et N. Benhamouda, *Eur. Phys. J.* **A27**, S01 (2006).
- [10] S. Kerrouchi, D. Mokhtari, N. H. Allal et M. Fellah, *Int. J. Mod. Phys.* **E18**, 141 (2009).
- [11] R. Rossignoli, P. Ring et N. D. Dang, *Phys. Lett.* **B297**, 9 (1992).
- [12] N. D. Dang, P. Ring et R. Rossignoli, *Phys. Rev.* **C47**, 606 (1993).
- [13] V. Zelevinsky, B. A. Brown, N. Frazier et M. Horoi, *Phys.Rep.* **276**, 85 (1996).
- [14] N. D. Dang et V. Zelevinsky, *Phys. Rev.* **C64**, 064319 (2001).
- [15] N. D. Dang et A. Arima, *Phys. Rev.* **C68**, 014318 (2003).
- [16] N. D. Dang, *Nucl. Phys.* **A784**, 147 (2007).
- [17] N. D Dang et N. Quang Hung, *Phys. Rev.* **C77**, 064315(2008).
- [18] N. Q. Hung et N. D. Dang, *Phys. Rev.* **C78**, 064315 (2008).
- [19] N. Quang Hung et N. D. Dang, *Phys. Rev.* **C79**, 054328 (2009).

- [20] K. Langankea, D.J. Deanb et W. Nazarewicz, Nucl. Phys. **A757**, 360 (2005).
- [21] E. Khan, Nguyen Van Giai et N. Sandulescu, Nucl. Phys **A789**, 94 (2007).
- [22] J. Bardeen, L.N. Cooper et J.R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175(1957).
- [23] S.T. Belyaev et K. Dan, Vidensk. Selsk. Mat-Fys. Medd. **11**, 31(1959).
- [24] P. Ring et P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem* (Springer, New York, 1980).
- [25] N.H. Allal et M. Fellah, Phys. Rev. **C43**, 2648 (1991).
- [26] A.V. Afanasjev, J. König, P. Ring, L.M. Robledo et J.L. Egido, Phys. Rev. **C62**,054306 (2000).
- [27] M. Fellah et T.F. Hamman, Phys. Rev **C10**, 284 (1974).
- [28] M. Horoi, Phys. Rev. **C50**,2834 (1994).
- [29] N. Benhamouda, M.R. Oudih, N.H. Allal et M. Fellah, Nucl. Phys. **A690**, 219 (2001).
- [30] N. Benhamouda, M.R. Oudih, N.H. Allal et M. Fellah, Heavy Ion Physics **19**, 191 (2004).
- [31] N. Benhamouda, N.H. Allal, M. Fellah et M.R. Oudih, Int. J. Mod. Phys **E14**, 197 (2005).
- [32] M. Kyotoku, Phys. Rev. **C37**, 2242 (1988).
- [33] M. Kyotoku, K.W. Schmid, F. Grümmer et A. Faessler, Phys. Rev. **C41**, 284 (1990).
- [34] A.G. Adornes et M. Kyotoku, Z. Phys. **A341**, 255 (1992).
- [35] H.J. Lipkin, Ann. Phys. (N.Y.) **12**, 425 (1960).
- [36] Y. Nogami, Phys. Rev. **134**, 313 (1964).
- [37] Y. Nogami et I. J. Zucker, Nucl. Phys. **60**, 203 (1964).
- [38] H.C. Pradhan, Y. Nogami et J. Law, Nucl. Phys. **A201**, 357 (1973).
- [39] M. Samyn, S. Goriely, M. Bender et J.M. Pearson, Phys. Rev. **C70**, 044309 (2004).
- [40] M. Anguiano, J. L. Egido et L.M. Robledo, Phys. Lett. **B545**, 62 (2002).
- [41] P.-H. Heenen, A. Valor, M. Bender, P. Bonche et H. Flocard, Eur. Phys. J. **A 11**, 393 (2001).

-
- [42] T. R. Rodriguez, J. L. Egido et L. M. Robledo, Phys. Rev. **C72**, 064303 (2005).
 - [43] D. J. Dean, Phys. Rev. **C 68**, 054312 (2003).
 - [44] M. V. Stoitsov, J. Dobaczewski, W. Nazarewicz et P. Ring, Comput. Phys. Commun. **167**, 43 (2005).
 - [45] M. V. Stoitsov, J. Dobaczewski, R. Kirchner, W. Nazarewicz et J. Terasaki, Int. J. Mass Spectrom. **251**, 243 (2006).
 - [46] M. Mayer, G. Jensen, Phys. Rev. **75** (1950) 22.
 - [47] A. Bohr, B. R. Mottelson et D. Pines, Phys. Rev. **110**, 936 (1958).
 - [48] L. G. Moretto, Phys. Lett. **B40**, 1 (1972).
 - [49] M. Sano et S. Yamazaki, Prog. Theor. Phys. **29**, 397 (1963).
 - [50] A.L. Goodman, Nucl. Phys. **A352**, 30 (1981).
 - [51] A.L. Goodman, Phys. Rev. **C29**, 1887 (1984).
 - [52] B. Siad, Thèse de Magister ,USTHB 2004
 - [53] M.R. Oudih , Thèse de Doctorat, USTHB 2003
 - [54] R.D Woods et D.S Saxon, Phys. Rev. **95**, 577(1954).
 - [55] R.W. Richardson et N. Sherman, Nucl. Phys. **52**, 221 (1977).
 - [56] H.C. Pauli, Phys.Rep. **C7**, 37 (1973).
 - [57] J.R. Nix, Nucl. Phys. **A130** , 241(1969).
 - [58] G. Audi et A.H. Wapstra, Nucl. Phys. **A595**, 409 (1995).
 - [59] E.Elbaz, "Quantique", (Ellipses, Paris, 1995)